METHODS OF
MODERN MATHEMATICAL PHYSICS

III: SCATTERING THEORY

MICHAEL REED

Department of Mathematics
Duke University

BARRY SIMON

Departments of Mathematics
and Physics
Princeton University

ACADEMIC PRESS NEW YORK SAN FRANCISCO LONDON

A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers

1979

М. Рид, Б. Саймон

МЕТОДЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

3

Теория рассеяния

Перевод с английского
А. К. ПОГРЕБКОВА и В. Н. СУШКО

под редакцией
М. К. ПОЛИВАНОВА и В. Н. СУШКО

Издательство ,Мир'
Москва 1982

ОГЛАВЛЕНИЕ

ББК 22.31
Р 49
УДК 517.43:519.55

Рид М., Саймон Б.

Р 49 Методы современной математической физики: Т.3. Теория рассеяния. Пер. с англ. — М.: Мир, 1982. 443 с., ил.

Третий том известной монографии американских специалистов (т. 1 — М.: Мир, 1977, т. 2 — 1978, т. 4 — 1982) посвящен теории рассеяния и ее приложениям в теоретической физике. В нем представлены новые результаты, полученные в последнее время, изложение богато иллюстрировано физическими примерами.

Для всех, кто занимается функциональным анализом и его приложениями в физике

Р $\frac{20203-010}{041(01)-82}$ 10—82, ч.1. 1702050000

ББК 22.31
517.2 530.1

Редакция литературы по математическим наукам

Марте и Джеки

ПРЕДИСЛОВИЕ

При подготовке этого тома мы пользовались советами и помощью К. Бернинга, П. Дейфта, Т. Икэбе, М. Клауса, С. Куроды, Дж. Моргана III, С. Пино, Дж. Рауха, С. Рюйсенарса, Л. Смита, Г. Хагедорна, Дж. Холдера и В. Энсса. Мы очень благодарны им, а также всем другим, чьи замечания позволили улучшить эту книгу.

Мы хотим еще поблагодарить:

Г. Андерсон, Ф. Армстронг и Б. Фаррел за великолепную перепечатку рукописи;

Национальный научный фонд, Исследовательский совет Университета Дьюка и фонд Альфреда П. Слоуна за финансовую поддержку;

издательство «Академик пресс», без чьей заботы и помощи эти тома просто не появились бы;

Марту и Джеки за ободрение и понимание.

ВВЕДЕНИЕ

Теория рассеяния — это изучение системы со взаимодействием в таких масштабах времени и (или) расстояний, которые велики по сравнению с масштабом собственно взаимодействия По этой причине теория рассеяния — наиболее эффективное, а часто единственное средство изучения микромира. Чтобы осознать важность теории рассеяния, рассмотрим несколько примеров, которые естественно к ней приводятся Во-первых, многие явления природы (например, голубизна неба) возникают в результате рассеяния. Чтобы понять такое явление и увидеть в нем результат рассеяния, надо понять лежащую в его основе динамику и порождаемую ею теорию рассеяния Во-вторых, часто возникает желание воспользоватся рассеянием волн или частиц, динамика которых известна, для того чтобы определить структуру и положение очень малых или недостижимых предметов. Например, в рентгеновской кристаллографии (которая привела к открытию ДНК), в томографии или в обнаружении подводных предметов с помощью звуковых локаторов динамика хорошо изучена, и нас интересуют соответствия, которые посредством этой динамики связывают положение, очертание и внутреннюю структуру предметов с данными рассеяния. В идеальном случае такое соответствие должно выражаться явной формулой, позволяющей реконструировать, хотя бы приблизительно, предмет по данным рассеяния. Третья роль теории рассеяния состоит в том, что она служит пробным камнем для самой динамики. В физике элементарных частиц динамика не очень понятна, а все экспериментальные данные, в сущности, сводятся к данным рассеяния. Главное испытание любой предложенной динамики — можно ли с ее помощью построить теорию рассеяния, которая предскажет наблюдаемые экспериментальные данные Теория рассеяния не всегда занимала в физике такое центральное место. Хотя кулоновы сечения рассеяния мог бы сосчитать еще Ньютон, задайся он таким вопросом, их вычислил Резерфорд более двухсот лет спустя. Разумеется, вычисления Резерфорда были связаны с первыми опытами в ядерной физике.

Теория рассеяния столь важна для атомной физики, теории твердого тела и физики высоких энергий, что на эту тему существует необъятная физическая литература. К сожалению, развитие соответствующих математических методов происходило гораздо медленнее. Отчасти это связано с трудностью математических задач, но в значительной мере и с тем, что отсутствие общения между физиками и математиками не позволяет математикам в должной степени оценить многие трудные и привлекательные задачи в теории рассеяния. С другой стороны, физическая литература не вполне удовлетворительна из-за обилия эвристических формул и методов, создаваемых ad hoc. В основе большей части физической литературы лежит «стационарный» подход к теории рассеяния, так как этот подход предлагает мощные вычислительные методы. Но нам кажется, что, пользуясь формулами стационарного подхода, надо выводить их из динамики процесса. Поэтому в этой книге мы подчеркиваем, что рассеяние — это явление, зависящее от времени, и, в частности, делаем упор на сравнение свободной динамики с динамикой, учитывающей взаимодействие. Такой подход вносит в наше изложение некоторую асимметрию, потому что нам приходится подчеркивать роль больших времен, а не больших расстояний. Однако, как читатель сам увидит, за этим скрываются существенные геометрические соображения.

Даже в столь разных областях физики, как классическая механика, механика сплошных сред и квантовая механика, теория рассеяния всегда связана с двумя основными вопросами: существования и полноты волновых операторов. Поэтому эти два вопроса для нас — главный предмет изучения в отдельных конкретных системах и объединяющая тема, проходящая через всю книгу. Поскольку мы рассматриваем много разных систем, мы, в сущности, не продвигаемся дальше построения и доказательства полноты волновых операторов. Исключение сделано лишь для двухчастичного квантового рассеяния, развитого подробнее. Но и здесь мы не сумели включить таких важных предметов, как теория Редже, обратная задача рассеяния и двойные дисперсионные соотношения.

Поскольку квантовая механика — это линейная теория, не удивительно, что сердцевину математической техники составляет спектральный анализ гамильтонианов. Связанные состояния (отвечающие точечному спектру) гамильтониана со взаимодействием не рассеиваются, в то время как состояния из абсолютно непрерывного спектра рассеиваются. Математическое свойство, которое различает эти два случая (и связывает физическую интуицию и математическую формулировку), — это убывание фурье-образа соответствующей спектральной меры. Между ними лежит случай сингулярного спектра, и главный (а часто и самый трудный) шаг большинства доказательств асимптотической полноты состоит в доказательстве того, что гамильтониан со взаимодействием не имеет сингулярного спектра. Обратно, один из наиболее эффективных способов доказать, что самосопряженный оператор не имеет сингулярного спектра, состоит в доказательстве того, что он служит гамильтонианом некоторой квантовой системы со взаимодействием, обладающей полными волновыми операторами. Эта глубокая связь между теорией рассеяния и спектральным анализом показывает всю искусственность нашего разделения материала между томами 3 и 4.

Когда мы уже читали корректуру этого тома, В. Энсс создал новые красивые методы изучения квантовомеханического рассеяния. Статья Энсса интересна не только тем, что в ней доказано, но и тем, какое новое направление развития теории она предлагает. В частности, можно ожидать, что эти методы приведут к новым сильным результатам в теории многочастичного рассеяния. Чтобы описать метод Энсса в случае двух частиц, мы добавили новый раздел (§ XI.7). Мы хотим поблагодарить профессора Энсса за его доброе отношение, помогшее нам включить этот материал.

Общие высказывания о Замечаниях и задачах, которые мы делали в предыдущих томах, остаются в силе и здесь с одним дополнением: большая часть изложенного в этом томе материала взята из текущей научной литературы, так что многие задачи весьма серьезны Некоторые из задач со звездочкой резюмируют содержание научных статей!

СОДЕРЖАНИЕ ДРУГИХ ТОМОВ

Дальнейшие тома: Выпуклые множества и функции, Коммутативные банаховы алгебры, Введение в теорию представлений групп, Операторные алгебры, Применение операторных алгебр к квантовой теории поля и статистической механике, Вероятностные методы.

XI. ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ

Получить надежные результаты в квантовомеханической теории рассеяния чрезвычайно трудно. Из-за сложных явлений интерференции волн любое простое неконтролируемое приближение для этих задач стоит не больше, чем прогноз погоды. Однако для задачи двух тел с центрально-симметричными силами сдвиги фаз можно считать даже на ЭВМ.

В. ТИРРИНГ

XI.1. Общий взгляд на явления рассеяния

В этой главе мы рассмотрим рассеяние в самых разных физических ситуациях. Главная задача состоит здесь в том, чтобы усмотреть глубокое сходство в поведении при больших временах разнородных динамических систем. Мы изучим во всех подробностях нерелятивистское квантовое рассеяние. Другие системы будут рассмотрены менее подробно, и упор будет делаться на простые примеры.

Обычно описание рассеяния включает в себя сравнение поведения одной и той же системы в двух случаях: поведения при заданном взаимодействии и при «свободной» динамике. Трудно дать точное определение «свободной динамики», которое охватывало бы все интересующие физиков ситуации, но в каждом отдельном случае мы дадим ясные и четкие определения. Общая черта свободных динамических систем состоит в том, что они проще соответствующих систем при учете взаимодействий, и в них, как правило, сохраняется импульс «индивидуальных подсистем», составляющих исходную физическую систему. Важно постоянно иметь в виду, что рассеяние — это нечто большее, чем просто динамика с учетом взаимодействия, ибо в противном случае некоторые особенности получающихся результатов будут выглядеть странными. Так как изучаются две динамики, теорию рассеяния можно рассматривать как разновидность теории возмущений. В квантовомеханическом случае мы увидим, что это теория возмущений абсолютно непрерывного спектра, а не теория, развитая в гл. XII для описания возмущений дискретного спектра.

Когда рассеяние трактуется как явление, описываемое теорией возмущений, требуется прежде всего анализ временны́х асимптотик, и это мы полагаем в основу подхода, которому далее следуем. Но во всех *конкретных* случаях, которые мы рассмотрим, существует также и некоторая геометрическая структура, и потому на фоне этих примеров отчетливо просматривается другой подход, описывающий теорию рассеяния как корреляции между пространственными и временными асимптотиками. Такой подход мы не будем развивать явно отчасти потому, что он вообще обсуждался гораздо меньше. Подчеркнем, что все «свободные» динамики, которые мы рассматриваем, характеризуются «прямолинейным движением» в том смысле, что решения свободных уравнений, которые сосредоточиваются при $t \to -\infty$ в некоторой окрестности направления $\mathbf{n}$, при $t \to +\infty$ концентрируются в окрестности направления $-\mathbf{n}$. Эти геометрические идеи полезны для понимания выбора свободной динамики в § 14 и 16, где часть взаимодействующей динамики порождает свободную динамику. Кроме того, геометрические идеи определенно выходят на первый план в теории Лакса—Филлипса (§ 11) и в методе Энсса (§ 17).

Теория рассеяния включает в себя изучение специальных состояний взаимодействующих систем, а именно таких, которые становятся «асимптотически свободными» в отдаленном прошлом и (или) в отдаленном будущем. Для определенности предположим, что мы можем рассматривать динамики как преобразования, действующие на состояниях. Пусть T_t и $T_t^{(0)}$ — преобразования на «множестве состояний» Σ, отвечающие взаимодействующей и свободной динамикам. Элементами Σ могут быть точки в фазовом пространстве (классическая механика), векторы в гильбертовом пространстве (квантовая механика) или данные Коши для некоторого дифференциального уравнения в частных производных (акустика, оптика). Нас интересуют такие пары $\langle\rho_-, \rho\rangle \in \Sigma$, что

$$\lim_{t \to -\infty} (T_t\rho - T_t^{(0)}\rho_-) = 0,$$

где предел понимается в некотором специальном смысле, и аналогично такие пары, которые приближаются друг к другу при $t \to +\infty$. Одно из условий, которое должно быть наложено на понятие предела, состоит в том, что для всякого ρ должно существовать не более чем одно ρ_-.

Основные вопросы теории рассеяния следующие.

(1) *Существование состояний рассеяния*. Физически система со взаимодействием приготавливается таким образом, что некоторые ее части вначале находятся настолько далеко друг от друга, что взаимодействием между ними можно пренебречь. После этого на длительное время «запускают» механизм взаимодействия, а затем смотрят, что произошло. Исходное состояние обычно описывается переменными, естественными для описания свободных состояний, т. е. чаще всего — импульсами. Ожидается, что любое свободное состояние «может быть приготовлено», т. е.

что любому $\rho_- \in \Sigma$ отвечает некоторое $\rho \in \Sigma$, такое, что $\lim\limits_{t \to -\infty} T_t\rho - T_t^{(0)}\rho_- = 0$. Доказательство этого — основной вопрос существования в теории рассеяния.

(2) *Единственность состояний рассеяния.* Чтобы описать приготовленное состояние в терминах свободных состояний, надо знать, что каждое свободное состояние ассоциировано с единственным взаимодействующим состоянием, т. е. что для заданного ρ_- существует не более чем одно ρ, такое, что $T_t^{(0)}\rho_- - T_t\rho \to 0$, когда $t \to -\infty$. Подчеркнем, что это новое требование отличается от сформулированного выше требования к пределу, которое состояло в том, что существует не более чем одно ρ_-, отвечающее каждому ρ

(3) *Слабая асимптотическая полнота.* Допустим, что имеется взаимодействующее состояние ρ, которое в отдаленном прошлом выглядело как свободное в том смысле, что $\lim\limits_{t \to -\infty} T_t^{(0)}\rho_- - T_t\rho = 0$ для некоторого состояния ρ_-. Мы рассчитываем, что для больших положительных времен взаимодействующее состояние будет опять выглядеть как свободное в том смысле, что существует состояние ρ_+, такое, что $\lim\limits_{t \to +\infty} T_t^{(0)}\rho_+ - T_t\rho = 0$ Для того чтобы в этом убедиться, требуется показать, что два подмножества из Σ

$$\Sigma_{\text{in}} = \{\rho \in \Sigma \mid \exists \rho_- \in \Sigma, \text{ такое, что } \lim_{t \to -\infty} T_t^{(0)}\rho_- - T_t\rho = 0\}$$

и

$$\Sigma_{\text{out}} = \{\rho \in \Sigma \mid \exists \rho_+ \in \Sigma, \text{ такое, что } \lim_{t \to +\infty} T_t^{(0)}\rho_+ - T_t\rho = 0\}$$

совпадают. Если действительно $\Sigma_{\text{in}} = \Sigma_{\text{out}}$, то говорят, что система обладает **слабой асимптотической полнотой.**

(4) *Определение S-преобразования.* Если есть пара динамических систем $\langle T_t^{(0)}, T_t \rangle$, для которых можно доказать существование и единственность состояний рассеяний (как при $t \to -\infty$, так и при $t \to +\infty$) и для которых имеет место асимптотическая полнота, то можно определить естественную биекцию Σ на себя. При данном $\rho \in \Sigma$ существование и единственность состояний рассеяния обеспечивает существование состояния $\Omega^+\rho \in \Sigma_{\text{in}}$, такого, что $\lim\limits_{t \to -\infty} (T_t(\Omega^+\rho) - T_t^{(0)}\rho) = 0$ Точно так же Ω^- определяется условием $\lim\limits_{t \to +\infty} (T_t(\Omega^-\rho) - T_t^{(0)}\rho) = 0$. Отображение Ω^+ (соответственно Ω^-) есть биекция из Σ на Σ_{in} (соответственно Σ_{out}). Слабая асимптотическая полнота обеспечивает то, что $\Sigma_{\text{in}} = \Sigma_{\text{out}}$, и можно определить *биекцию*

$$S = (\Omega^-)^{-1}\,\Omega^+\colon\ \Sigma \to \Sigma.$$

S называется **преобразованием рассеяния**. Таким образом, $T_t^{(0)}(S\rho)$ и $T_t^{(0)}\rho$ связаны между собой тем условием, что существует такое состояние ψ ($\psi = \Omega^+\rho = \Omega^-(S\rho)$), что $T_t\psi$ «интерполирует» между ними. Это означает, что $T_t\psi$ выглядит как $T_t^{(0)}\rho$ в прошлом и как $T_t^{(0)}(S\rho)$ в будущем. Таким образом, S устанавливает корреляцию между асимптотиками истории взаимодействия в прошлом и в будущем. Следует предупредить читателя, что в литературе иногда фигурируют также отображение $S' = \Omega^+(\Omega^-)^{-1}$: $\Sigma_{\mathrm{in}} \to \Sigma_{\mathrm{out}}$ и отображения $(\Omega^+)^{-1}\Omega^-$, $\Omega^-(\Omega^+)^{-1}$. Когда выполнено условие слабой асимптотической полноты, $S' = \Omega^- S(\Omega^-)^{-1}$, так что S и S' «подобны». Поэтому выбор между S и S' в известной мере дело вкуса. Мы на протяжении всей этой книги пользуемся преобразованием S, так называемой S-матрицей ЭБМФ (Эпштейна, Березина, Минлоса и Фаддеева). Причины выбранного правила расстановки знаков $\pm$ обсуждаются в § 3 и 6.

В классической механике частиц S есть биекция на фазовом пространстве. В квантовой теории с условием слабой асимптотической полноты S — *линейное* унитарное преобразование, называемое S-оператором, или иногда S-матрицей.

(5) *Редукция S за счет симметрии.* Во многих задачах *обе* динамики — и свободная, и взаимодействующая — характеризуются некоторой симметрией. Это позволяет заключить a priori, без детального динамического анализа, что S имеет некоторую специальную форму. Подробно этот вопрос обсуждается в § 2 и 8.

(6) *S-преобразование и аналитичность.* Обычное усовершенствование теории рассеяния для волновых процессов (квантовая теория, акустика, оптика) состоит в представлении S или ядра ассоциированного с ним интегрального оператора как граничного значения некоей аналитической функции. Эвристически эта аналитичность связана с теоремой IX.16. Действительно, схематически S описывает отклик R некоторой системы на сигнал I:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t-t')\, I(t')\, dt'.$$

Эта формула учитывает два важных факта: (i) трансляционную инвариантность по времени, в силу чего f есть функция только $t-t'$; (ii) причинность: $R(t)$ зависит от $I(t')$ лишь при $t' \leqslant t$. Следовательно, f есть функция на $[0, \infty)$. Ее фурье-образ, таким образом, представляет собой граничное значение аналитической функции. Именно такими основанными на причинности соображениями интуитивно руководствуются физики, когда они обсуждают аналитические свойства. К сожалению, доказательства этих свойств не так просты и прозрачны. Мы ограничимся подробным рассмотрением аналитичности для двухчастичного квантовомеханического случая (§ 7) и теории Лакса — Филлипса (§ 11).

(7) *Асимптотическая полнота.* Рассмотрим систему, в которой силы взаимодействия между ее частями убывают по мере удаления этих частей друг от друга. Физически мы ожидаем, что состояние такой системы либо «распадается» на свободно движущиеся группы (кластеры), либо остается «связанным». Во многих ситуациях существует естественное множество связанных состояний $\Sigma_{\text{bound}} \subset \Sigma$. Обычно можно доказать, что $\Sigma_{\text{bound}} \cap \Sigma_{\text{in}} = \varnothing$. «Физическое ожидание» состоит в том, что

$$\Sigma_{\text{bound}} « + » \Sigma_{\text{in}} = \Sigma = \Sigma_{\text{bound}} « + » \Sigma_{\text{out}}. \qquad (1)$$

Знак «+» имеет разный смысл для классических и квантовомеханических систем. В классической механике частиц «+» обозначает теоретико-множественное объединение; в квантовой теории он обозначает прямую сумму гильбертовых пространств. Доказательство (1) — это задача доказательства **асимптотической полноты.** Заметим, что из асимптотической полноты следует слабая асимптотическая полнота. Отметим также, что, выдвигая идею о том, что каждому свободному состоянию отвечает некоторое взаимодействующее состояние, мы неявно предполагаем, что в свободной динамике нет «связанных» состояний.

Разумеется, это только схематическое описание. Во всякой физической теории есть свои сложности, и приходится изобретать различные усовершенствования. Среди них отметим такие. (i) В классической динамике в Σ определены множества меры нуль, и естественная интерпретация утверждений типа $\Sigma_{\text{in}} = \Sigma_{\text{out}}$ состоит в том, что это равенство имеет место с точностью до множеств меры нуль. (ii) В некоторых системах, включая и многочастичные, пространства состояний свободной и взаимодействующих динамик различны (см. § 5, 15 и 16). (iii) В квантовомеханических системах можно определить S-оператор даже без слабой асимптотической полноты (см. § 4). Слабая асимптотическая полнота становится тогда эквивалентной условию унитарности S. (iv) В некоторых очень специальных случаях свободная динамика может иметь связанные состояния (см. § 10). (v) В теории Лакса — Филлипса (§ 11) свободная динамика заменяется геометрическими понятиями «приходящего» и «уходящего» подпространств.

Обычно взаимодействующая динамика первоначально получается возмущением некоторой простой динамики, которая тогда и играет роль «свободной». Однако в некоторых специальных физических теориях нет такой естественной невозмущенной динамики, которую можно было бы сравнить со взаимодействующей динамикой. В таких случаях можно сначала выделить некоторые особенно простые решения взаимодействующей системы. Затем можно попытаться описать асимптотическое поведение полной взаимодействующей системы в терминах взаимодействия этих простых решений. Примерами таких систем служат рассеяние магнонов (§ 14) и теория Хаага — Рюэля (§ 16), а также теория рассеяния для уравнения Кортевега — де Фриза, которую мы не рассматриваем.

XI.2. Рассеяние классических частиц

Простейшая система, на которой можно продемонстрировать идеи теории рассеяния,— это классическая механика частицы, движущейся в поле внешних сил $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Эта теория эквивалентна рассеянию двух частиц, взаимодействующих между собой посредством сил $\mathbf{F}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$, так как движение центра масс такой системы отделяется от относительного движения, описываемого изменением $\mathbf{r}_{12}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$. Без потери общности будем считать массу частицы единичной.

Состояния такой системы суть точки в **фазовом пространстве**, т. е. пары $\langle\mathbf{r}, \mathbf{v}\rangle\in\mathbb{R}^6$, представляющие положение и скорость частицы. Свободная динамика задается посредством преобразования $T_t^{(0)}\langle\mathbf{r}, \mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{r}+\mathbf{v}t, \mathbf{v}\rangle$. Таким образом, свободная динамика сохраняет скорость. Динамика взаимодействующей системы задается преобразованием $T_t\langle\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0\rangle=\langle\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)\rangle$, где $\mathbf{v}(t)=\dot{\mathbf{r}}(t)$, а $\mathbf{r}(t)$ — решение уравнения

$$\ddot{\mathbf{r}}(t)=\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \tag{2a}$$

с начальными условиями

$$\mathbf{r}(0)=\mathbf{r}_0, \qquad \dot{\mathbf{r}}(0)=\mathbf{v}_0. \tag{2b}$$

Чтобы гарантировать единственность решения уравнения (2) при всех временах, будем предполагать, что

$$|\mathbf{F}(\mathbf{r})|\leqslant C \qquad \text{при всех } \mathbf{r}, \tag{3a}$$

$$|\mathbf{F}(\mathbf{r})-\mathbf{F}(\mathbf{r}')|\leqslant D_R|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \qquad \text{при } |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\leqslant 1 \text{ и } |\mathbf{r}|<R, \tag{3b}$$

где D_R — константа, зависящая от R. Техника, развитая в § V.6, позволяет доказать существование единственного решения (2) при малых временах, если выполнено (3b), а затем нетрудно доказать, что это решение существует при всех временах (см. предложение 1 в дополнении к § X.1 и задачу 1). Единственное место, где используется условие (3) в теории, которую мы развиваем,— это доказательство глобального существования и единственности. Если этот факт можно установить каким-либо другим способом, то от условия (3) можно отказаться, а приводимое ниже условие (4) требуется только для больших расстояний.

В частности, локальные особенности, имеющие характер отталкивания, не ведут к дополнительным сложностям.

Чтобы установить существование и единственность состояний рассеяния, нам потребуются дальнейшие ограничения на силы. Эти ограничения, в которых требуется, чтобы взаимодействие между сталкивающимися частями спадало при $r \to \infty$, где $r = |\mathbf{r}|$, типично для теорий рассеяния. Конкретно мы будем предполагать, что

$$|\mathbf{F}(\mathbf{r})| \leqslant Cr^{-\alpha} \quad \text{при всех } \mathbf{r} \text{ и некотором } \alpha > 2, \tag{4a}$$

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})| \leqslant Dr^{-\beta}|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \quad \text{при всех } \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ с } x, y \geqslant r \text{ и некотором } \beta > 2 \tag{4b}$$

При этих условиях мы докажем существование и единственность состояний рассеяния. Существование можно установить, пользуясь лишь неравенством (4a) (задача 2), но для единственности требуется условие Липшица (4b) (задача 3). Это напоминает положение, с которым мы столкнулись в § V.6, где рассматривались решения дифференциальных уравнений с начальными условиями. Там тоже для единственности требовалось условие Липшица. Это и ие удивительно, так так, согласно интуитивной картине § 1, состояния рассеяния можно рассматривать как решения, удовлетворяющие «начальным условиям при $t = -\infty$».

Условия (4) исключают важный случай кулонова рассеяния, где теорию приходится видоизменять Этот случай рассмотрен в § 9.

Впредь мы не будем больше следить за обозначением векторов жирным шрифтом, за исключением формулировок теорем и тех случаев, когда можио спутать, идет ли речь о векторе или о его длине.

Теорема XI.1 (существование и единственность решений рассеяния; классические частицы). Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ — функция из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющая условиям (3) и (4). Пусть задана $\langle \mathbf{r}_{-\infty}, \mathbf{v}_{-\infty} \rangle \in \mathbb{R}^6$, причем $\mathbf{v}_{-\infty} \neq 0$. Тогда существует единственное решение уравнения (2a), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{t \to -\infty} |\dot{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{v}_{-\infty}| = 0, \tag{5a}$$

$$\lim_{t \to -\infty} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_{-\infty} - \mathbf{v}_{-\infty} t| = 0. \tag{5b}$$

Доказательство. Так как мы ввели предположения (3), то, согласно предыдущему замечанию, достаточно доказать единственность в $(-\infty, T)$ с некоторым T. Придерживаясь той идеи, что решения рассеяния удовлетворяют начальному условию в $t = -\infty$, естественно воспользоваться методом § V.6.A и переписать дифференциальное уравнение в виде интегрального. Действительно, можно показать (задача 4), что $r(t)$ удовлетворяет уравнению (2a) и условиям (5) на $(-\infty, T)$ в том и только том случае, если $r(t) = r_{-\infty} + v_{-\infty}t + u(t)$, где u непрерывна и удовлетворяет уравнению

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{s} F(r_{-\infty} + v_{-\infty}\tau + u(\tau))\, d\tau\, ds \qquad (6)$$

с абсолютно сходящимся интегралом.

Выберем $T < 0$ так, чтобы было:

(i) $|r_{-\infty} + v_{-\infty}t| \geqslant {}^1/_2 |t| |v_{-\infty}|$, если $t < T$;

(ii) $C(\alpha-1)^{-1}(\alpha-2)^{-1} |{}^1/_4 v_{-\infty}|^{-\alpha} |T|^{2-\alpha} < 1$;

(iii) $\gamma \equiv D(\beta-1)^{-1}(\beta-2)^{-1} |{}^1/_4 v_{-\infty}|^{-\beta} |T|^{2-\beta} < 1$;

(iv) ${}^1/_4 |T| |v_{-\infty}| > 1$.

Здесь C, α, D, β — константы из условий (4). Предположим теперь, что $u(t)$ есть непрерывная функция на $(-\infty, T)$ со значениями в $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющая условию $\|u\|_\infty \leqslant 1$. Пусть $r(t) = r_{-\infty} + v_{-\infty}t + u(t)$. Условия (i) и (iv) обеспечивают то, что $|r(t)| \geqslant {}^1/_4 |t| |v_{-\infty}|$. Вследствие (4a) интеграл $\int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{s} |F(r_{-\infty} + v_{-\infty}\tau + u(\tau))|\, d\tau\, ds$ сходится абсолютно.

Положим

$$\mathcal{M}_T = \{u \in C(-\infty, T) \text{ со значениями в } \mathbb{R}^3 \mid \|u\|_\infty \leqslant 1\}$$

и определим $\mathcal{F}\colon \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}_T$ посредством

$$(\mathcal{F}u)(t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{s} F(r_{-\infty} + v_{-\infty}\tau + u(\tau))\, d\tau\, ds.$$

Благодаря (4a) и (ii) $\|\mathcal{F}u\|_\infty \leqslant 1$, если $\|u\|_\infty \leqslant 1$, так что $\mathcal{F}$ отображает полное метрическое пространство $\mathcal{M}_T$ в себя. Из (4b) и (iii) следует, что

$$\|\mathcal{F}u - \mathcal{F}v\|_\infty \leqslant \gamma \|u - v\|_\infty,$$

поэтому $\mathcal{F}$ есть сжатие на $\mathcal{M}_T$, ибо T было выбрано таким образом, чтобы сделать $\gamma < 1$. Следовательно, по принципу сжимающих отображений (теорема V.8) $\mathcal{F}$ имеет единственную неподвижную точку в $\mathcal{M}_T$. Теперь легко доказать, что уравнение (6) имеет единственное решение. В самом деле, если функции u_1 и u_2 обе являются решениями уравнения (6), то обе они лежат в $\mathcal{M}_{T'}$ при некотором $T' < T$. Однако, в силу вышеизложенного, уравнение (6) имеет единственное решение в $\mathcal{M}_{T'}$ при любом $T' < T$, так что $u_1 = u_2$ на $(-\infty, T')$. В силу единственности решений с начальными условиями в $-T'-1$, $u_1 = u_2$ на $(-\infty, T)$. ∎

Определим теперь два важных отображения.

Определение. Пусть $\Sigma = \mathbb{R}^6$, и пусть $r_{a,b}^{(-\infty)}(t)$ — такое решение уравнения (2а), которое асимптотически приближается к $a + bt$ в $-\infty$. Положим $\Sigma_0 \equiv \Sigma \setminus \{\langle a, b\rangle \mid b = 0\}$. Тогда **волновой оператор** Ω^+: $\Sigma_0 \to \Sigma$ определяется равенством

$$\Omega^+ \langle a, b\rangle = \langle r_{a,b}^{(-\infty)}(0),\ \dot{r}_{a,b}^{(-\infty)}(0)\rangle.$$

Подобным же образом определяется Ω^-:

$$\Omega^- \langle a, b\rangle = \langle r_{a,b}^{(+\infty)}(0),\ \dot{r}_{a,b}^{(+\infty)}(0)\rangle.$$

Итак, $\Omega^+ w$ есть та точка фазового пространства, которая задает начальные данные в момент $t = 0$ для решения уравнения со взаимодействием, которое асимптотически приближается при $t \to -\infty$ к решению свободного уравнения движения с начальными данными w в момент $t = 0$.

Волновые операторы обладают рядом важных свойств.

Теорема XI.2. Предположим, что для поля сил $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ выполнены условия (3) и (4), и пусть $\Omega^\pm$ — соответствующие волновые операторы. Тогда имеют место следующие утверждения.

(a) Пусть T_t и $T_t^{(0)}$ соответственно — преобразования, отвечающие динамике со взаимодействием и свободной динамике. Тогда для всех $w \in \Sigma_0$

$$\Omega^\pm w = \lim_{t \to \mp\infty} T_{-t} T_t^{(0)} w,$$

где сходимость равномерна на компактных подмножествах из Σ_0.

(b) $\Omega^\pm T_s^{(0)} = T_s \Omega^\pm$ на Σ_0 для всех s.

(c) (Изометричность $\Omega^\pm$.) Если $\mathbf{F}$ консервативна, т. е. если $\mathbf{F} = -\nabla V$ для некоторой функции V, то преобразования $\Omega^\pm$ сохраняют меру.

(d) Если $\mathbf{F}$ консервативна и $V(\mathbf{r}) \to 0$ при $r \to \infty$, то $E(\Omega^\pm w) = E_0(w)$, где $E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = v^2/2 + V(\mathbf{r})$ и $E_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = v^2/2$.

(e) Если $\mathbf{F}$ класса C^∞ и

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|} F(\mathbf{r})}{\partial r_1^{\alpha_1} \ldots \partial r_3^{\alpha_3}} \right| \leqslant D_\alpha r^{-|\alpha|-2-\varepsilon}$$

для всех $\mathbf{r}$, α и некоторого $\varepsilon > 0$, то $\Omega^\pm$ суть C^∞-отображения.

Доказательство. (а) Это типичное свойство операторов $\Omega^\pm$, которым мы будем пользоваться при определении их аналогов в квантовомеханическом случае. Так как $\Omega^+ x = y$ означает, что $\lim\limits_{t \to -\infty} |T_t y - T_t^{(0)} x| = 0$ и $(T_t)^{-1} = T_{-t}$, то интуитивно естественно ожидать выполнения (а). Мы докажем формулу для Ω^+; доказательство для Ω^-, по существу, такое же. Для фиксированного

$T \in \mathbb{R}$ определим $\mathcal{M}_T$, как прежде. Для $\langle a, b\rangle \in \Sigma_0$, $t \leqslant T$ и $u \in \mathcal{M}_T$ определим функцию $\mathcal{F}^{(t)}_{a,b,T}u$ на $(-\infty, T)$ равенством

$$(\mathcal{F}^{(t)}_{a,b,T}u)(s) = \int_t^s \int_t^\sigma F(a + b\tau + u(\tau))\,d\tau\,d\sigma$$

Пусть $\mathcal{F}^{(-\infty)}_{a,b,T}u$ имеет тот же вид, но с $t = -\infty$. Далее нам нужны следующие три факта (задачи 5, 6).

(i) Для любого компактного $K \subset \Sigma_0$ можно найти такое $T < 0$, что при $\langle a, b\rangle \in K$ и $t \in (-\infty, T)$ отображение $\mathcal{F}^{(t)}_{a,b,T}$ переводит $\mathcal{M}_T$ в себя и является сжатием. Постоянная γ в неравенстве $\|\mathcal{F}^{(t)}_{a,b,T}u - \mathcal{F}^{(t)}_{a,b,T}v\|_\infty \leqslant \gamma\|u - v\|_\infty$ может быть выбрана меньше единицы независимо от $\langle a, b\rangle \in K$ и $t \in (-\infty, T)$.

(ii) Если K и T те же, что и в (i), то $\lim\limits_{t\to-\infty} \mathcal{F}^{(t)}_{a,b,T}u = \mathcal{F}^{(-\infty)}_{a,b,T}u$ для любого $u \in \mathcal{M}_T$. Сходимость равномерна на $\mathcal{M}_T$ и K.

(iii) Один общий результат о сжатиях. Предположим, что F_n образуют семейство отображений полного метрического пространства в себя. Если $\rho(F_n p, F_n q) \leqslant c\rho(p, q)$ для всех p, q, n и некоторого $c < 1$, если $\lim\limits_{n\to\infty} F_n p = F_\infty p$ для всех p и если p_n (соответственно p_∞) — единственные неподвижные точки F_n (соответственно F_∞), то $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p_\infty$. Более того, скорость, с которой p_n сходится к p_∞, зависит только от скорости, с которой $F_n p_\infty$ сходится к $F_\infty p_\infty = p_\infty$, и от c.

Пусть $u^{(t)}_{a,b,T}$ — неподвижная точка преобразования $\mathcal{F}^{(t)}_{a,b,T}$. Мы заключаем, что $\lim\limits_{t\to-\infty} u^{(t)}_{a,b,T} = u^{(-\infty)}_{a,b,T}$. Далее, пользуясь тем, что T_{-T+1} непрерывно как преобразование из Σ в Σ, мы можем закончить доказательство пункта (a):

$$\begin{aligned}
\Omega^+\langle a, b\rangle &= T_{-T+1}\langle a + b(T-1) + u^{(-\infty)}_{a,b,T}(T-1),\ b + \dot u^{(-\infty)}_{a,b,T}(T-1)\rangle = \\
&= \lim_{t\to-\infty} T_{-T+1}\langle a + b(T-1) + u^{(t)}_{a,b,T}(T-1),\ b + \dot u^{(t)}_{a,b,T}(T-1)\rangle = \\
&= \lim_{t\to-\infty} T_{-T+1}T_{-t+T-1}T^{(0)}_t\langle a, b\rangle = \\
&= \lim_{t\to-\infty} T_{-t}T^{(0)}_t\langle a, b\rangle.
\end{aligned}$$

(b) Это общее следствие (a), так как

$$\Omega^\pm T^{(0)}_s w = \lim_{t\to\mp\infty} T_{-t}T^{(0)}_{s+t}w = \lim_{\tau\to\mp\infty} T_{-\tau+s}T^{(0)}_\tau w = T_s\Omega^\pm w.$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью T_s и тем, что, когда $t \to \pm\infty$, $\tau = s + t \to \pm\infty$ при фиксированном s.

(c) Это другая общая черта теории рассеяния, с которой мы встретимся в квантовой теории в немного другом виде. Для консервативных систем известно, что T_t сохраняет меру (теорема X.78). Аналогичным образом сохраняет меру $T_t^{(0)}$, так что $T_{-t}T_t^{(0)}$ сохраняет меру при всех t. Пусть f — непрерывная функция с компактным носителем в Σ_0. Тогда, в силу (a),

$$\int f(\Omega^+ w)\, d^6 w = \lim_{t\to-\infty} \int f(T_{-t}T_t^{(0)} w)\, d^6 w = \int f(w)\, d^6 w.$$

Следовательно, Ω^+, равно как и Ω^-,— сохраняющие меру отображения.

(d) следует из (a), сохранения энергии ($E\circ T_t = E$) и предположения о том, что $V\to 0$ при $r\to\infty$.

(e) Согласно предположению, $\mathcal{F}_{a,b,T}^{(-\infty)}u$ есть C^∞-отображение $\Sigma_0\times\mathcal{M}_T$ в $\mathcal{M}_T$ (задача 7). По общей теореме о гладкости элементов, отвечающих неподвижным точкам сжатий (задача 5b), функции, отвечающие неподвижным точкам $\mathcal{F}_{a,b,T}^{(-\infty)}$, а следовательно, и их значения при $t=T-1$ принадлежат классу C^∞. Так как T_t есть C^∞-отображение при каждом t, продолжающее решение из $t=T-1$ в $t=0$, мы заключаем, что $\Omega^\pm$ суть C^∞-отображения. ∎

Областью определения операторов $\Omega^\pm$ является все Σ, за исключением множества меры нуль. Область значений $\Omega^\pm$, вообще говоря, не совпадает с Σ даже после вычитания из Σ множества меры нуль.

Пример. Пусть F удовлетворяет предположениям пункта (d) теоремы XI.2. Тогда $\operatorname{Ran}\Omega^+ \subseteq \{\langle a', b'\rangle \mid {}^1/_2|b'|^2 + V(a') > 0\}$. Множество

$$\{\langle a', b'\rangle \mid {}^1/_2|b'|^2 + V(a') \leqslant 0\}$$

имеет ненулевую меру, если V непрерывно и отрицательно в любой точке.

Определение. Пусть $\Sigma_{\text{in}} = \operatorname{Ran}\Omega^+$, $\Sigma_{\text{out}} = \operatorname{Ran}\Omega^-$, и пусть Σ_{bound} есть множество таких $\langle \mathbf{r}, \mathbf{v}\rangle$, что решение $\mathbf{r}(t)$ уравнения (2) удовлетворяет условию

$$\sup_t |\mathbf{r}(t)| + \sup_t |\dot{\mathbf{r}}(t)| < \infty$$

Значит, связанные состояния — это такие решения, траектории которых лежат в ограниченных областях фазового пространства. Слабая асимптотическая полнота означает, что $\Sigma_{\text{in}} = \Sigma_{\text{out}}$, а асимптотическая полнота — что $\Sigma_{\text{in}} = \Sigma_{\text{out}} = \Sigma \setminus \Sigma_{\text{bound}}$. Так как мы уже выбросили множества меры нуль (а именно $\{\langle a, b\rangle \mid b=0\}$) при определении $\Omega^\pm$, мы должны быть готовы к тому, что эти равенства выполнены с точностью до множеств меры нуль. Вообще говоря, существуют решения, которые асимптотически свободны при $t \to -\infty$, но не при $t \to +\infty$ (захват; см. задачу 9).

Если силы консервативны, т. е. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$, то, по предположениям о $\mathbf{F}$, V — гладкая и ограниченная функция. В этом случае благодаря сохранению энергии величина скорости $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$ автоматически ограничена, так что $\langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle \in \Sigma_{\text{bound}}$ тогда и только тогда, когда $\sup_t |\mathbf{r}(t)| < \infty$.

Теорема XI.3 (асимптотическая полнота; двухчастичное рассеяние классических частиц). Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$, причем $V \to 0$ при $r \to \infty$. Предположим также, что $\mathbf{F}$ удовлетворяет (3) и (4). Тогда Σ_{in}, Σ_{out} и $\Sigma \setminus \Sigma_{\text{bound}}$ совпадают с точностью до множеств меры нуль.

Доказательство. Пусть $r_{q,v}(t)$ — решение уравнения $\ddot{r}(t) = F(r(t))$ с начальными условиями $r(0) = q$, $\dot{r}(0) = v$. Определим

$$N_\pm = \left\{ \langle q, v \rangle \mid \varlimsup_{t \to \pm\infty} |r_{q,v}(t)| < \infty \right\}.$$

Сначала надо показать, что N_+ и N_- совпадают с точностью до множеств меры нуль, т. е. что $\mu(N_+ \setminus N_-) + \mu(N_- \setminus N_+) = 0$, где μ — мера Лебега. Вопрос об измеримости множеств типа N_+, N_-, Σ_{bound} мы вынесем в задачу 10. Пусть $\{K_n\}$ — компактные подмножества $\mathbb{R}^6$, такие, что $\bigcup K_n = \mathbb{R}^6$, $K_n \subset K_{n+1}^{\text{int}}$. Пусть $N_+^{(n)} = \{\langle q, v \rangle \mid T_t \langle q, v \rangle \in K_n$ при всех $t \in [0, \infty)\}$, и подобным же образом определим $N_-^{(n)}$. Заметим сначала, что $N_\pm = \bigcup_n N_\pm^{(n)}$, так как, пользуясь сохранением энергии, можно увидеть, что $T_t \langle q, v \rangle$ лежит в компактном подмножестве $\mathbb{R}^6$, когда t меняется от 0 до ∞, если $\varlimsup_{t \to \infty} |r_{q,v}(t)| < \infty$. Таким образом, если $p \in N_+ \setminus N_-$, то $p \in N_+^{(n)} \setminus N_-^{(n)}$ при некотором n. Следовательно, достаточно показать, что $\mu(N_+^{(n)} \triangle N_-^{(n)}) = 0$ для каждого n. Пусть T_t — взаимодействующая динамика. Заметим сначала, что $\bigcap_{k=1}^{\infty} T_k N_+^{(n)} \subset N_-^{(n)}$ и $N_+^{(n)} \supset T_1 N_+^{(n)} \supset T_2 N_+^{(n)} \supset \ldots$. Поэтому

$$\mu(N_+^{(n)} \setminus N_-^{(n)}) \leqslant \mu\left(N_+^{(n)} \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} T_k N_+^{(n)}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(N_+^{(n)} \setminus T_k N_+^{(n)}).$$

Но по теореме Лиувилля $\mu(T_k N_+^{(n)}) = \mu(N_+^{(n)}) < \infty$. Поскольку $T_k N_+^{(n)} \subset N_+^{(n)}$, заключаем, что $\mu(N_+^{(n)} \setminus T_k N_+^{(n)}) = 0$, так что $\mu(N_+^{(n)} \setminus N_-^{(n)}) = 0$. При помощи сходного доказательства убеждаемся, что $\mu(N_- \setminus N_+) = 0$, и, значит, $\mu(N_+ \triangle N_-) = 0$.

Допустим далее, что $r(t)$ есть решение уравнения Ньютона и $\varlimsup_{t \to \infty} |r(t)| = \infty$. Покажем, что если энергия $E(r(0), \dot{r}(0)) > 0$, то $|r(t)| \geqslant C|t|$ при больших t, и воспользуемся этим для доказательства стремления $r(t)$ к свободному решению. Пусть $I(t)=|r(t)|^2/2$ есть момент инерции. Тогда $\dot{I}(t)=\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}=\dot{r}(t)\,r(t)$, где $r(t)=|\mathbf{r}(t)|$, а $\dot{r}(t)=dr/dt$ (что, вообще говоря, не равно $|d\mathbf{r}/dt|$). Далее,

$$\ddot{I}(t)=\dot{\mathbf{r}}(t)^2+\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}(t)=2E+\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r})-2V(\mathbf{r}).$$

Так как $E>0$, а $r\cdot F$ и V стремятся к нулю при $r\to\infty$, можно найти такое R_0, что из $|r|>R_0$ будет следовать $|r\cdot F(r)-2V(r)|<E$. Поскольку $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}|r(t)|=\infty$, можно найти такое t_0, что $r(t_0)>R_0$, $\dot{r}(t_0)>0$. Теперь мы утверждаем, что $r(t)>R_0$ для всех $t>t_0$; в самом деле, если это не так, то пусть t_1 — наименьшее $t>t_0$, для которого $r(t)=R_0$. Тогда $\ddot{I}(t)\geqslant E$ при $t\in[t_0,\ t_1]$, так что $\dot{I}(t_1)=r(t_1)\dot{r}(t_1)>\dot{I}(t_0)>0$ Поскольку $r(t)>R_0$ для $t=t_1-\varepsilon$ и $r(t_1)=R_0$, мы видим, что $\dot{r}(t_1)\leqslant 0$, и таким образом приходим к противоречию. Следовательно, $r(t)>R_0$ при всех $t>t_0$, а значит, $I(t)\geqslant a+bt+Et^2/2$ с соответствующими постоянными a и b при всех $t>t_0$. Таким образом, $r(t)\geqslant {}^1/_2 t\sqrt{E}$ при достаточно больших t. Воспользовавшись (4), мы увидим, что $\int\limits_{t_0}^{\infty}F(r(t))\,dt$ существует, так что можно определить

$$b=\dot{r}(t_0)+\int\limits_{t_0}^{\infty}F(r(t))\,dt=\lim_{t\to\infty}\dot{r}(t)$$

и

$$a=r(t_0)-bt_0-\int\limits_{t_0}^{\infty}\int\limits_{s}^{\infty}F(r(t))\,dt\,ds=\lim_{t\to\infty}(r(t)-bt).$$

Второй интеграл также существует. Более того,

$$\lim_{t\to\infty}|r(t)-a-bt|+|\dot{r}(t)-b|=0.$$

Итак, если $E>0$ и $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}|r(t)|=\infty$, то $r(t)$ есть решение рассеяния, т. е. $\langle r(0),\ \dot{r}(0)\rangle$ лежит в Σ_{out}.

Пусть теперь Σ' есть Σ с двумя выброшенными множествами меры нуль, а именно $N^+\triangle N^-$, которое имеет меру нуль по первой части доказательства, и $\{\langle r,\ v\rangle \mid E(r,\ v)=0\}$, которое имеет меру нуль, так как $\{v \mid E(r_0,\ v)=0\}$ есть сфера, имеющая меру нуль при всяком фиксированном r_0. Пусть $w\in\Sigma'\setminus\Sigma_{\text{bound}}$, и пусть $r(t)$ — такое решение (2), что $\langle r(0),\ \dot{r}(0)\rangle=w$. Так как $w\notin\Sigma_{\text{bound}}$, то либо $\overline{\lim\limits_{t\to-\infty}}|r(t)|=\infty$, либо $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}|r(t)|=\infty$, так что $w\in$ $\in(\Sigma\setminus N^+)\cup(\Sigma\setminus N^-)$. Так как $w\notin N^+\triangle N^-=(\Sigma\setminus N^+)\triangle(\Sigma\setminus N^-)$, то непременно $w\in(\Sigma\setminus N^+)\cap(\Sigma\setminus N^-)$. Но в силу второй части нашего рассуждения, поскольку $E(w)\neq 0$, имеем $w\in\Sigma_{\text{in}}$ и $w\in\Sigma_{\text{out}}$. Тем самым доказано, что $\Sigma'\setminus\Sigma_{\text{bound}}=\Sigma'\cap\Sigma_{\text{out}}=$ $=\Sigma'\cap\Sigma_{\text{in}}$ ∎

Теперь, когда мы доказали асимптотическую полноту, определим S-преобразование.

Определение. Пусть $\Sigma^{(\pm)}=(\Omega^\pm)^{-1}[\Sigma'\setminus\Sigma_{\text{bound}}]$. Назовем ***$S$*-преобразованием** ($S$-оператором, S-матрицей) отображение S: $\Sigma^{(+)}\to$ $\to\Sigma^{(-)}$, определенное равенством

$$Sw=(\Omega^-)^{-1}(\Omega^+w).$$

Соответствующая картина схематически изображена на рис. XI.1.

Итак, S-преобразование определено как отображение из $\mathbb{R}^6$ в $\mathbb{R}^6$, или, точнее, из $\mathbb{R}^6$ за вычетом множества меры нуль в $\mathbb{R}^6$.

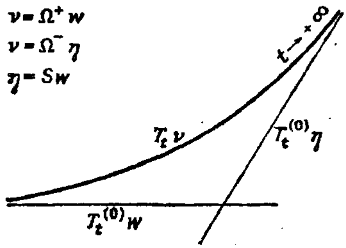


Рис. XI.1. Схематическая картина рассеяния.

В качестве последней темы классической теории рассеяния мы опишем способ «редукции S» к двум вещественным функциям двух вещественных переменных в том случае, когда $\mathbf{F}$ — центрально-симметричная сила, т. е. $V(\mathbf{r})$ зависит лишь от $|\mathbf{r}|=r$. Сначала отметим некоторые симметрии S-оператора. Так как $\Omega^\pm T_t^{(0)}=T_t\Omega^\pm$, то $ST_t^{(0)}=T_t^{(0)}S$. Так как $E(\Omega^\pm w)=E_0(w)$, то $E_0(Sw)=E_0(w)$. Наконец, из инвариантности F относительно вращений вытекают два следствия. Пусть R — элемент группы $SO(3)$ вращений трехмерного пространства. Определим R на Σ посредством $R\langle r, v\rangle=\langle Rr, Rv\rangle$. Тогда $\Omega^\pm(Rw)=R(\Omega^\pm w)$, так что $RS=SR$. Более того, сохраняется момент $\mathbf{L}\langle\mathbf{r}, \mathbf{v}\rangle=\mathbf{v}\times\mathbf{r}$, так что $\mathbf{L}(Sw)=\mathbf{L}(w)$. Подведем итоги.

Предложение. (a) $ST_t^{(0)} = T_t^{(0)}S$.
(b) $SR = RS$.
(c) $E_0(S\cdot) = E_0(\cdot)$.
(d) $\mathbf{L}(S\cdot) = \mathbf{L}(\cdot)$.

Условия (a) и (b) позволяют свести S к векторнозначной функции только двух переменных. Дело в том, что семейство множеств $\{RT_t^{(0)}w \mid t \in \mathbb{R},\ R \in SO(3)\}$ расслаивает Σ на двупараметрическое семейство четырехмерных многообразий (с некоторыми исключительными многообразиями меньшей размерности), многообразия с постоянными E_0 и $|\mathbf{L}|$. В силу (a) и (b), если мы знаем Sw для одного w из каждого такого многообразия, то мы знаем S для всех w. Вследствие (c) и (d) Sw может лежать только в двумерном многообразии, где E_0 и $\mathbf{L}$ равны их значениям в точке w. Таким образом, мы ожидаем, что S параметризуется двумя вещественнозначными функциями двух вещественных переменных.

Уточним эти рассуждения. Вследствие инвариантности S относительно вращений достаточно знать $S(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, когда $\mathbf{v} = p\hat{\mathbf{z}}$ и $\mathbf{r}$ лежит в плоскости y, z; здесь $\hat{\mathbf{z}}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{z}$. Если $S\langle\mathbf{r}, \mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{r}', \mathbf{v}'\rangle$, то, по свойству (a), $S(\mathbf{r}+\mathbf{v}t, \mathbf{v}) = \langle\mathbf{r}' + \mathbf{v}'t, \mathbf{v}'\rangle$, поэтому можно считать, что $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = 0$ или $\mathbf{r} = b\hat{\mathbf{y}}$. В итоге S полностью известно, если известны $S\langle b\hat{\mathbf{y}}, p\hat{\mathbf{z}}\rangle$ для всех вещественных b и p. Положим $S\langle b\hat{\mathbf{y}}, p\hat{\mathbf{z}}\rangle = \langle\mathbf{r}', \mathbf{v}'\rangle$. В силу сохранения энергии, $|\mathbf{v}'| = p$, так что $\mathbf{v}' = p\hat{\mathbf{e}}\langle b, p\rangle$, где $\hat{\mathbf{e}}$ — некоторый единичный вектор. В силу сохранения момента, $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{v}'$

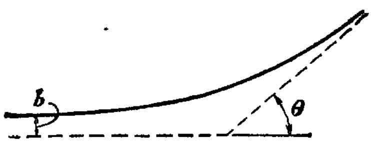


Рис. XI.2. Центральное рассеяние.

лежат в плоскости y, z и определена компонента $\mathbf{r}'$, перпендикулярная $\mathbf{v}'$. Таким образом, есть две функции, описывающие S: **угол рассеяния** $\theta = \arccos(\hat{e}\cdot\hat{z})$ и **время задержки** $T' = \mathbf{r}'\cdot\hat{e}/p$. Они записываются как функции импульса p и **прицельного параметра** b, или, эквивалентным образом, как функции энергии $E = p^2/2$ и момента $l = bp$. Соответствующая картина показана на рис. XI.2. Фактически центрально-симметричную задачу двух тел можно разрешить в квадратурах и доказать (см. задачу 11 или ссылки в Замечаниях), что

$$\theta=\pi-2l\int\limits_{r_0(l,E)}^{\infty}[2E-2V-r^{-2}l^2]^{-1/2}\frac{dr}{r^2}, \tag{7a}$$

$$T=2\int\limits_{R_0}^{\infty}\{[2E-r^{-2}l^2]^{-1/2}-[2E-2V-r^{-2}l^2]^{-1/2}\}\,dr-$$

$$-2\int\limits_{r_0(l,E)}^{R_0}[2E-2V-r^{-2}l^2]^{-1/2}\,dr+2\int\limits_{l/\sqrt{2E}}^{R_0}[2E-r^{-2}l^2]^{-1/2}\,dr, \tag{7b}$$

где $r_0(l, E)=\sup\{r|V(r)+l^2/2r^2>E\}$ и R_0 — любое число, бо́льшее $l/\sqrt{2E}$ и r_0.

Заметим, что если подставить $V=r^{-1}$ в (7a) и (7b), то интеграл для T расходится, но интеграл для θ сходится. Это замечание сыграет важную роль, когда в § 9 мы будем рассматривать кулоново рассеяние.

Наконец, для того чтобы связать теорию с физическим экспериментом, следует определить сечение рассеяния и его связь с углом рассеяния θ. Вернемся к общему S-преобразованию и рассмотрим редукцию, несколько отличную от той, которую мы обсуждали выше. Запишем $S\langle\mathbf{r}, \mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{v})\rangle$. Мы будем рассматривать только $\mathbf{g}(\mathbf{r}, v\hat{\mathbf{z}})$, т. е. отбросим всю информацию, содержащуюся в f, что на языке предыдущего анализа эквивалентно игнорированию времени задержки. Пусть $v\neq 0$. Из соотношения $ST_t^{(0)}=T_t^{(0)}S$ следует, что $\mathbf{g}(\mathbf{r}, v\hat{\mathbf{z}})=\mathbf{g}(\mathbf{r}+\alpha\hat{\mathbf{z}}, v\hat{\mathbf{z}})$ для любого $\alpha\in\mathbb{R}$; поэтому рассмотрим лишь $\mathbf{g}(\mathbf{r}, v\hat{\mathbf{z}})$, когда $\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{z}}=0$. Вследствие сохранения энергии $|\mathbf{g}|=v$, так что $\hat{\mathbf{g}}=\mathbf{g}/v$. Выделим функцию $\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{r}, v\hat{\mathbf{z}})$. Фиксируем v. Тогда $\hat{\mathbf{g}}$ есть отображение из плоскости $\mathbb{R}^2$, ортогональной $\hat{\mathbf{z}}$, на единичную сферу S^2. Мера Лебега на $\mathbb{R}^2$ индуцирует меру σ на S^2:

$$\sigma(E)=\mu(\hat{\mathbf{g}}^{-1}(E)),$$

где μ — мера Лебега на $\mathbb{R}^2$ и E — борелево подмножество в S^2. Мера σ на S^2 называется **полным сечением.** В большинстве случаев σ абсолютно непрерывна относительно обычной меры Ω на S^2, если выколото направление вперед $\theta=0$. Таким образом,

$$d\sigma=\frac{d\sigma}{d\Omega}\,d\Omega$$

с некоторой функцией $d\sigma/d\Omega$ на S^2, называемой **дифференциальным сечением.**

Физический эксперимент рассеяния хорошо описывается следующей моделью. Пучок частиц с постоянной энергией направляется на мишень. Пучок достаточно широкий и имеет приблизительно постоянную плотность ρ частиц на единичную площадь в плоскости $\mathbb{R}^2$, перпендикулярной направлению пучка. Достаточно далеко от мишени под некоторым углом рассеяния $\langle\theta, \varphi\rangle$ помещается детектор, который улавливает и подсчитывает все частицы, летящие от мишени внутри некоторого телесного угла размером $\Delta\Omega$ вокруг направления $\langle\theta, \varphi\rangle$. Измеряемая величина есть

$$\frac{\text{число частиц, попадающих на детектор}}{(\Delta\Omega)\,\rho}.$$

Читатель должен самостоятельно убедиться в том, что если угол $\Delta\Omega$ очень мал, а детектор и источник частиц весьма далеки от мишени, то эта величина очень близка к $d\sigma/d\Omega$. Заметим еще, что в том случае когда $F = -\nabla V$ и $V(r)$ есть функция лишь $|\mathbf{r}|$, существует формула, выражающая $(d\sigma/d\Omega)(\theta_0, \varphi_0)$ через угол рассеяния θ, являющийся функцией энергии E, и прицельный параметр b. Точнее (см. задачу 12),

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\theta=\theta_0} = \sum_{\{b\,:\,\theta(b)=\theta_0\}} b \operatorname{cosec}\theta_0 \left(\frac{d\theta}{db}\right)^{-1} \tag{8}$$

при условии, что сумма сходится.

XI.3. Основные принципы теории рассеяния в гильбертовом пространстве

Квантовая динамика описывается унитарной группой на гильбертовом пространстве. Динамика классических волновых уравнений, как мы видели в § X.13, тоже допускает естественную формулировку на языке унитарных групп. По этой причине набор основных задач и принципов, которые мы предложим в этом разделе, играет центральную роль в самых разных теориях рассеяния, которые мы рассмотрим далее в этой главе. Мы начнем с определения обобщенных волновых операторов и опишем элементарную «кинематику», связанную с этим понятием. Существование волновых операторов доказывается в большинстве случаев с помощью общего метода, известного под именем Кука, который мы ниже изложим. При соответствующих условиях, которые обычно более ограничительны, можно доказать существование и полноту с помощью комплекса идей, связанных с именами Като и Бирмана. Метод Кука и теория Като — Бирмана — это два столпа, на которых покоится абстрактная нестационарная теория. В конкретных случаях проверка предположений этих методов требует некоторых технических средств. Некоторые из этих средств рассмотрены в дополнениях 1 и 2 к этому разделу. Мы закончим этот раздел кратким описанием некоторых идей теории рассеяния для пары гильбертовых пространств и доказательством соответствующей теоремы типа Като — Бирмана.

Рассмотрим две унитарные группы e^{-iAt} и e^{-iBt}, которые представляют взаимодействующую динамику и сравниваемую с ней «свободную» динамику. Что это значит, что $e^{-iAt}\varphi$ выглядит «асимптотически свободным» при $t \to -\infty$? Очевидно, это означает существование такого вектора φ_+, что

$$\lim_{t \to -\infty} \| e^{-iBt}\varphi_+ - e^{-iAt}\varphi \| = 0. \tag{9}$$

Заметим, что (9) эквивалентно равенству $\lim\limits_{t \to -\infty} \| e^{iAt}e^{-iBt}\varphi_+ - \varphi \| = 0$, и, таким образом, основная проблема существования сводится к доказательству существования сильных пределов. В большинстве приложений B имеет только абсолютно непрерывный спектр. Однако если это не так, то надо выбирать φ_+ из абсолютно непрерывного подпространства оператора B. Например, если φ_+ есть собственный вектор B, то указанный выше сильный предел существует только в том случае, когда φ_+ также собственный вектор оператора A с тем же собственным значением (задача 15) Поэтому определение волновых операторов мы дадим после проектирования всех величин на абсолютно непрерывное подпространство оператора B. Когда мы будем рассматривать вопрос о полноте, станет ясно, что это очень разумный выбор!

Определение. Пусть A и B — самосопряженные операторы на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и пусть $P_{ac}(B)$ — проектор на абсолютно непрерывное подпространство оператора B. Будем говорить, что **обобщенные волновые операторы** $\Omega^\pm(A, B)$ **существуют**, если существуют сильные пределы

$$\Omega^\pm(A, B) = \operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{iAt}e^{-iBt}P_{ac}(B). \tag{10}$$

Если $\Omega^\pm(A, B)$ существуют, определим

$$\mathcal{H}_{\text{in}} = \operatorname{Ran}\Omega^+, \qquad \mathcal{H}_{\text{out}} = \operatorname{Ran}\Omega^-.$$

Для удобства обозначений иногда будем писать $\mathcal{H}_+$ вместо $\mathcal{H}_{\text{in}}$ и $\mathcal{H}_-$ вместо $\mathcal{H}_{\text{out}}$

Оказывается, сильные пределы в (10) — это как раз то, что следует рассматривать. В случае $P_{ac}(B) = 1$ пределы *по норме* существуют в (10), лишь если $A = B$ (задача 15). С другой стороны, как мы увидим, если A имеет чисто дискретный спектр, то слабый предел в (10) существует (и равен нулю), несмотря на то что A и B могут быть совершенно непохожи.

Несколько странное соглашение о том, что $t \to \mp\infty$ отвечают $\Omega^\pm$, взято из физической литературы и связано с формализмом «стационарной» теории рассеяния: как будет видно в § 6, Ω^+ связан с $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}(x+i\varepsilon-A)^{-1}$, а Ω^- — с $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}(x-i\varepsilon-A)^{-1}$.

Следующее предложение показывает, что, независимо от ее физического значения, теория рассеяния есть полезный инструмент спектрального анализа. По этой причине некоторые части этой главы тесно связаны с гл. XIII.

Предложение 1. Предположим, что $\Omega^\pm(A, B)$ существуют. Тогда:

(a) $\Omega^\pm$ суть частичные изометрии с начальным подпространством $P_{\rm ac}(B)\mathcal{H}$ и конечными подпространствами $\mathcal{H}_\pm$;

(b) $\mathcal{H}_\pm$ суть инвариантные подпространства оператора A и

$$\Omega^\pm[D(B)]\subset D(A), \quad A\Omega^\pm(A, B)=\Omega^\pm(A, B)B; \tag{11}$$

(c) $\mathcal{H}_\pm\subset \operatorname{Ran} P_{\rm ac}(A)$.

Доказательство. (a) Если $u\in[P_{\rm ac}(B)\mathcal{H}]^\perp$, то, очевидно, $\Omega^\pm u=0$. Если $u\in P_{\rm ac}(B)\mathcal{H}$, то $\|e^{iAt}e^{-iBt}P_{\rm ac}(B)u\|=\|u\|$ при всех t, так что $\|\Omega^\pm(A, B)u\|=\|u\|$.

(b) Так как при любом фиксированном s

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty} e^{iAt}e^{-iBt}P_{\rm ac}(B)=\operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty} e^{iA(t+s)}e^{-iB(t+s)}P_{\rm ac}(B),$$

то $\Omega^\pm(A, B)=e^{iAs}\Omega^\pm(A, B)e^{-iBs}$, или, эквивалентно,

$$e^{-iAs}\Omega^\pm(A, B)=\Omega^\pm(A, B)e^{-iBs}. \tag{12}$$

Тогда (11) следует из теоремы Стоуна и из (12). Из (12) также ясно, что $\mathcal{H}_\pm$ суть инвариантные подпространства оператора e^{-iAs}.

(c) Из (a) и (b) следует, что $A\restriction\mathcal{H}_\pm$ унитарно эквивалентен $B\restriction P_{\rm ac}(B)\mathcal{H}$, причем унитарная эквивалентность осуществляется посредством отображения $\Omega^\pm$: $P_{\rm ac}(B)\mathcal{H}\to\mathcal{H}_\pm$. Следовательно, спектр $A\restriction\mathcal{H}_\pm$ абсолютно непрерывен. ∎

В квантовой теории, где A и B — операторы энергии, условие (12) выражает закон сохранения энергии; см. § 4.

Часто бывает полезно следующее

Предложение 2 (цепное правило). Если $\Omega^\pm(A, B)$ и $\Omega^\pm(B, C)$ существуют, то существуют также $\Omega^\pm(A, C)$, причем

$$\Omega^\pm(A, C)=\Omega^\pm(A, B)\Omega^\pm(B, C).$$

Доказательство. Согласно предложению 1(c), $\operatorname{Ran}\Omega^\pm(B, C)\subset \subset\operatorname{Ran} P_{\rm ac}(B)$, поэтому

$$\lim_{t\to\mp\infty}\|(1-P_{\rm ac}(B))e^{itB}e^{-itC}P_{\rm ac}(C)\varphi\|=0$$

при любом φ. Следовательно,

$$e^{itA}e^{-itC}P_{ac}(C)\varphi = e^{itA}e^{-itB}P_{ac}(B)e^{itB}e^{-itC}P_{ac}(C)\varphi + \\ + e^{itA}e^{-itB}(1-P_{ac}(B))e^{itB}e^{-itC}P_{ac}(C)\varphi$$

сходится к $\Omega^{\pm}(A, B)\Omega^{\pm}(B, C)\varphi$ при $t \to \mp\infty$, так как произведение сильно сходящихся семейств равномерно ограниченных операторов сильно сходится. ∎

Как отмечалось в § 1, слабая асимптотическая полнота сводится к равенству $\mathscr{H}_{\text{in}} = \mathscr{H}_{\text{out}}$, в то время как асимптотическая полнота — к равенству $\mathscr{H}_{\text{in}} = \mathscr{H}_{\text{out}} = [P_{\text{pp}}(A)\mathscr{H}]^{\perp}$, где P_{pp} есть проектор на пространство $\mathscr{H}_{\text{pp}}$, порождаемое собственными векторами оператора A. Для абстрактной теории полезно следующее промежуточное понятие.

Определение. Допустим, что $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют. Говорят, что они **полны**, в том и только в том случае, если

$$\operatorname{Ran}\Omega^{+} = \operatorname{Ran}\Omega^{-} = \operatorname{Ran}P_{ac}(A).$$

Таким образом, асимптотическая полнота эквивалентна двум утверждениям: $\Omega^{\pm}$ полны и $\sigma_{\text{sing}}(A) = \varnothing$. Так как последнее утверждение — чисто спектральное, его изучение естественно не связывать непосредственно с теорией рассеяния. Оно рассмотрено в гл. XIII.

Следующий замечательный факт сводит полноту к вопросу существования.

Предложение 3. Допустим, что $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют. Они полны тогда и только тогда, когда существуют $\Omega^{\pm}(B, A)$.

Доказательство. Предположим, что как $\Omega^{\pm}(A, B)$, так и $\Omega^{\pm}(B, A)$ существуют. Тогда, согласно цепному правилу, $P_{ac}(A) = \Omega^{\pm}(A, A) = \Omega^{\pm}(A, B)\Omega^{\pm}(B, A)$, так что

$$P_{ac}(A)\mathscr{H} \subset \operatorname{Ran}\Omega^{\pm}(A, B).$$

Так как мы уже знаем, что $\operatorname{Ran}\Omega^{\pm}(A, B) \subset P_{ac}(A)\mathscr{H}$, то полнота имеет место.

Обратно, предположим, что $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны. Пусть $\varphi \in P_{ac}(A)\mathscr{H}$. Тогда существует такое ψ, что $\varphi = \Omega^{\pm}(A, B)\psi$. Согласно соображениям, изложенным в начале этого раздела, отсюда следует, что $\|e^{-iAt}\varphi - e^{-iBt}P_{ac}(B)\psi\| \to 0$ при $t \to -\infty$. Так как e^{-iBt} унитарен, $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{iBt}e^{-iAt}\varphi$ существует и равен $P_{ac}(B)\psi$. ∎

На первый взгляд предложение 3, казалось бы, говорит о том, что установить полноту ничуть не трудней, чем существование. На самом деле вопрос о полноте обычно гораздо труднее. Причина состоит в том, что в приложениях оператор B, описывающий свободную динамику, «простой»: в типичном случае это дифференциальный (или псевдодифференциальный) оператор в частных производных с постоянными коэффициентами. Получив явные формулы для e^{-iBt}, легко показать с помощью метода Кука, что $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют Но в отсутствие явных формул для e^{-iAt} нелегко показать, что существуют $\Omega^{\pm}(B, A)$. Предложение 3 наводит на мысль поискать такое условие на A и B, из которого следовало бы, что $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют, и которое было бы *симметрично* по A и B, потому что тогда из этого условия вытекало бы, что и $\Omega^{\pm}(A, B)$, и $\Omega^{\pm}(B, A)$ существуют, а тем самым $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны. Это тот механизм, с помощью которого мы получаем полноту в теории Като — Бирмана.

* * *

Метод Кука основан на том наблюдении, что если f — функция из C^1 на $\mathbb{R}$, причем $f' \in L^1(\mathbb{R})$, то $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ существует, так как

$$|f(t) - f(s)| = \left| \int_s^t f'(u)\,du \right| \leqslant \int_s^t |f'(u)|\,du \to 0,$$

когда $s < t$ и обе переменные стремятся к ∞.

Теорема XI.4 (метод Кука). Пусть A и B — самосопряженные операторы. Предположим, что существует множество $\mathscr{D} \subset D(B) \cap P_{ac}(B)\mathscr{H}$, которое плотно в $P_{ac}(B)\mathscr{H}$, так что для любого $\varphi \in \mathscr{D}$ найдется T_0, удовлетворяющее условиям

(a) $e^{-iBt}\varphi \in D(A)$ при $|t| > T_0$;

(b) $$\int_{T_0}^{\infty} [\|(B-A)e^{-iBt}\varphi\| + \|(B-A)e^{+iBt}\varphi\|]\,dt < \infty. \qquad (13)$$

Тогда $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathscr{D}$, и пусть $\eta(t) = e^{+iAt}e^{-iBt}\varphi$. Так как $e^{-iBt}\varphi \in D(A) \cap D(B)$ при $t > T_0$, то $\eta(t)$ сильно дифференцируема на (T_0, ∞) и

$$\eta'(t) = -ie^{iAt}(B-A)e^{-iBt}\varphi.$$

Таким образом, при $t > s > T_0$

$$\|\eta(t) - \eta(s)\| \leqslant \int_s^t \|\eta'(u)\|\,du \leqslant \int_s^t \|(B-A)e^{-iBu}\varphi\|\,du,$$

в силу (13), стремится к нулю, когда $s \to \infty$. Итак, $\eta(t)$ образуют направленность Коши при $t \to \infty$, поэтому $\lim_{t\to\infty} e^{iAt} e^{-iBt} P_{ac}(B)\psi$ существует при всех $\psi \in \mathcal{D}$. Этот предел также тривиально существует для всех $\psi \in [P_{ac}(B)\mathcal{H}]^{\perp}$ и, следовательно, по предположению для ψ, лежащих в плотном множестве. Так как $e^{iAt} e^{-iBt} P_{ac}(B)$ есть семейство равномерно ограниченных операторов, то из существования предела для плотного множества ψ следует существование предела для всех ψ в силу $\varepsilon/3$-приема. Тем самым доказано, что Ω^- существует. Доказательство для Ω^+ аналогично. ∎

В приложениях часто приходится оценивать $\|(B-A)e^{-iBt}\varphi\|$. Когда B — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, это можно сделать с помощью метода стационарной фазы (см. дополнение 1).

В ряде случаев бывают нужны различные расширения теоремы XI.4. Следующее расширение оказывается полезным, когда $B-A$ содержит некоторые «локальные особенности» (см. § 4).

Теорема XI.5 (теорема Купша — Сандаса). Пусть A и B — самосопряженные операторы. Предположим, что существуют ограниченный оператор χ и подпространство $\mathcal{D} \subset D(B) \cap P_{ac}(B)\mathcal{H}$, плотное в $P_{ac}(B)\mathcal{H}$, такие, что для любого $\varphi \in \mathcal{D}$ найдется T_0, удовлетворяющее условиям

(a) $(1-\chi)e^{-iBt}\varphi \in D(A)$ при $|t| > T_0$;

(b) $\int_{T_0}^{\infty} [\|Ce^{-iBt}\varphi\| + \|Ce^{+iBt}\varphi\|]\,dt < \infty$, где $C = A(1-\chi) - (1-\chi)B$.

Предположим далее, что $\chi(B+i)^{-n}$ компактен при некотором n и что $\mathcal{D} \subset D(B^n)$. Тогда $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют.

Этот результат получается после простого видоизменения доказательства теоремы о методе Кука из общего результата, который будет сформулирован ниже как лемма 2. В задаче 19 от читателя требуется провести это доказательство.

В методе Кука, к сожалению, требуется, чтобы $B-A$ была задана как оператор, а не как квадратичная форма. Следующий результат позволяет разобраться и с формами.

Теорема XI.6. Пусть B — положительный самосопряженный оператор, и пусть $C_0, \ldots, C_n, D_0, \ldots, D_n$ — замкнутые операторы, удовлетворяющие условиям

(i) $D(C_i) \cap D(B_i) \supset Q(B)$ при $i = 1, \ldots, n$ и $\|C_i\varphi\|^2 \leqslant \alpha_i(\varphi, B\varphi) + \beta_i\|\varphi\|^2$, $\|D_i\varphi\|^2 \leqslant \alpha_i(\varphi, B\varphi) + \beta_i\|\varphi\|^2$ для всех $\varphi \in Q(B)$;

(ii) $C_0=1$, $Q(D_0)\supset Q(B)$ и $|(\varphi, D_0\varphi)|\leqslant\alpha_0(\varphi, B\varphi)+\beta_0(\varphi, \varphi)$ для всех $\varphi\in Q(B)$;

(iii) квадратичная форма $\sum_{i=0}^{n} C_i^* D_i^*$, определенная на $Q(B)$, симметрична и $\sum_{i=0}^{n}\alpha_i<1$;

(iv) существует множество $\mathcal{D}$, содержащееся в $\operatorname{Ran} P_{ac}(B)\cap \cap D(B)$, плотное в $P_{ac}(B)\mathcal{H}$ и такое, что для $\varphi\in\mathcal{D}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\|D_i e^{-iBt}\varphi\|\,dt<\infty.$$

Тогда сумма в смысле форм $A=B+\sum_{i=0}^{n} C_i^* D_i$ есть самосопряженный оператор и $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют.

Доказательство. В силу (i), (ii) и (iii), $\sum_{i=0}^{n} C_i^* D_i$ есть относительно ограниченное в смысле форм возмущение B с относительной гранью $\alpha\equiv\sum_{i=0}^{n}\alpha_i<1$. Отсюда следует, что A самосопряжен и что $Q(A)=Q(B)$. В частности, нормы

$$\|\varphi\|_B=\|(B+1)^{1/2}\varphi\|, \qquad \|\varphi\|_A=\|(A+E)^{1/2}\varphi\|$$

на $Q(B)$ эквивалентны, т. е. $c_1\|\varphi\|_B\leqslant\|\varphi\|_A\leqslant c_2\|\varphi\|_B$. Здесь E — некоторое фиксированное число, такое, что $A+E\geqslant 1$. Отображение e^{-iBt} есть, очевидно, изометрия относительно $\|\cdot\|_B$. А так как e^{-iAt} есть изометрия отосительно $\|\cdot\|_A$, то, в силу отмеченной выше эквивалентности, имеем

$$\|e^{-iAt}\varphi\|_B\leqslant c\|\varphi\|_B, \tag{14}$$

где $c=c_1^{-1}c_2$ и не зависит от t. Пусть $W(t)=e^{iAt}e^{-iBt}$. Тогда для $\varphi\in\mathcal{D}$ и $t\geqslant s$

$$\|(W(t)-W(s))\varphi\|^2=(W(t)\varphi, (W(t)-W(s))\varphi)-$$
$$-(W(s)\varphi, (W(t)-W(s))\varphi).$$

Мы докажем, что при $t, s\to\infty$ каждый из этих членов стремится к нулю, поэтому, как и в теореме Кука, $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют. Рассмотрим первый член (второй аналогичен). Мы утверждаем, что

$$(W(t)\varphi, (W(t)-W(s))\varphi)=i\int_{s}^{t}\sum_{j=0}^{n}(C_j e^{-iAu}W(t)\varphi, D_j e^{-iBu}\varphi)\,du. \tag{15}$$

Это равенство следует (см. задачу 20) из сделанных предположений и из того, что, согласно (14), e^{-iAu} и e^{-iBu} переводят $Q(B)$ в себя. В силу (14) и предположений (i) и (ii), для всех t, u

$$\sup_j \| C_j e^{-iAu} W(t)\varphi \| \leqslant \gamma \|\varphi\|_B$$

с некоторым γ (*не зависящим ни от* t, *ни от* u). Отсюда, в силу (15), следует, что

$$|(W(t)\varphi,\ (W(t)-W(s))\varphi)| \leqslant \gamma \|\varphi\|_B \int_s^t \sum_{j=0}^n \|D_j e^{-iBu}\varphi\|\, du.$$

Как в теореме Кука, в силу условия (iv), правая часть неравенства стремится к нулю при s и $t \to \infty$. ∎

* * *

Обратимся теперь к комплексу результатов, который мы назвали теорией Като — Бирмана. В этой теории употребляется понятие класса операторов со следом, введенное в § VI.6. Чтобы понять идею, лежащую в основе этой теории, допустим, что $B-A$ есть оператор ранга 1, т. е. что $(B-A)\varphi = (\psi, \varphi)\psi$. Если бы мы воспользовались методом Кука, чтобы показать, что $\Omega^\pm(A, B)$ существуют, мы искали бы такое φ, что $(\psi, e^{-itB}\varphi) \in L^1(\mathbb{R})$. Так как $\varphi \in P_{ac}(B)\mathscr{H}$, мы знаем, что спектральная мера $d(\varphi, E_\lambda\varphi)$ равна $|f(\lambda)|^2 d\lambda$ с некоторой f. Ниже мы увидим, что тогда $d(\psi, E_\lambda\varphi) = g(\lambda)|f(\lambda)|^2 d\lambda$ с некоторой $g \in L^2(\mathbb{R}, f^2 d\lambda)$ и, таким образом,

$$(\psi,\ e^{-itB}\varphi) = \int e^{-it\lambda} g(\lambda) |f(\lambda)|^2 d\lambda.$$

Следовательно, $(\psi, e^{-itB}\varphi)$ есть фурье-образ $(2\pi)^{1/2} g|f|^2$. Вообще говоря, нелегко усмотреть, когда фурье-образ принадлежит L^1, но сделать так, чтобы он был из L^2, просто. Поэтому мы начнем с отыскания множества таких φ, что $(\psi, e^{-itB}\varphi) \in L^2(\mathbb{R})$.

Определение. Пусть B — самосопряженный оператор и $\{E_\Omega\}$ — его спектральное семейство. Через $\mathscr{M}(B)$ обозначим множество всех $\varphi \in \mathscr{H}$, таких, что $d(\varphi, E_\lambda\varphi) = |f(\lambda)|^2 d\lambda$, где $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Пусть $|||\varphi|||$ есть L^∞-норма функции f.

Нетрудно доказать (см. задачу 17), что $|||\cdot|||$ есть норма и что $\mathscr{M}(B)$ плотно (по $\mathscr{H}$-норме) в $\operatorname{Ran} P_{ac}(B)$.

Лемма 1. Для любого $\varphi \in \mathscr{M}(B)$ и любого $\psi \in \mathscr{H}$

$$\int |(\psi,\ e^{-itB}\varphi)|^2 dt \leqslant 2\pi \|\psi\|^2 |||\varphi|||^2. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть Q — проектор на циклическое подпространство, порождаемое B и φ. Пусть $d(\varphi, E_\lambda\varphi) = |f(\lambda)|^2 d\lambda$. Согласно общей спектральной теории (см. гл. VII и § VIII.3), $Q\mathscr{H}$ унитарно эквивалентно $L^2(\mathbb{R}, |f(\lambda)|^2 d\lambda)$, причем φ отвечает вектору $\varphi(\lambda) \equiv 1$ и e^{-itB} есть умножение на $e^{-it\lambda}$. Пусть $\eta(\lambda)$ отвечает вектору $Q\psi$. Тогда

$$(\psi, e^{-itB}\varphi) = (Q\psi, e^{-itB}\varphi) = \int \eta(\lambda) |f(\lambda)|^2 e^{-it\lambda} d\lambda, \tag{17}$$

так что, по теореме Планшереля,

$$\int |(\psi, e^{-itB}\varphi)|^2 dt = 2\pi \int |\eta(\lambda)|^2 |f(\lambda)|^4 d\lambda \leqslant$$
$$\leqslant 2\pi \|f\|_\infty^2 \int |\eta(\lambda)|^2 |f(\lambda)|^2 d\lambda.$$

По определению, $\|f\|_\infty = |||\varphi|||$ и, значит,

$$\int |\eta(\lambda)|^2 |f(\lambda)|^2 d\lambda = \|Q\psi\|^2 \leqslant \|\psi\|^2. \blacksquare$$

Нам потребуется еще одно простое следствие представления унитарной группы через фурье-образ.

Лемма 2. Для любого $\varphi \in P_{ac}(B)$, когда $t \to \pm\infty$, $e^{-itB}\varphi \to 0$ в слабом смысле. Если C компактен, то $\|Ce^{-itB}\varphi\| \to 0$ при $t \to \pm\infty$.

Доказательство. Вследствие (17) и того что f и ηf принадлежат L^2, $(\psi, e^{-itB}\varphi)$ есть фурье-образ некоторой функции из L^1. Таким образом, в силу леммы Римана — Лебега (теорема IX.7), $(\psi, e^{-itB}\varphi) \to 0$. Следовательно, $\|Fe^{-itB}\varphi\| \to 0$ для любого оператора F конечного ранга. Для компактных операторов результат получается с помощью $\varepsilon/3$-приема (§I.1). $\blacksquare$

Результаты теории Като — Бирмана мы выведем из следующей теоремы

Теорема XI.7 (теорема Пирсона). Пусть A и B — самосопряженные операторы, и пусть J — ограниченный оператор. Предположим, что существует оператор C из класса операторов со следом, такой, что $C = AJ - JB$ в том смысле, что для всех $\varphi \in D(A)$ и $\psi \in D(B)$

$$(\varphi, C\psi) = (A\varphi, J\psi) - (\varphi, JB\psi).$$

Тогда существуют

$$\Omega^\pm(A, B; J) \equiv \operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{iAt} J e^{-iBt} P_{ac}(B).$$

Доказательство. Пусть $W(t) = e^{iAt} J e^{-iBt}$; рассмотрим случай $t \to +\infty$. Тогда, в силу рассуждений о плотности, применяемых в методе Кука, достаточно показать, что

$$\lim_{t<s;\ t\to\infty} \|(W(t)-W(s))\varphi\|^2=0 \tag{18}$$

для всех $\varphi\in\mathscr{M}(B)$. Мы докажем это, разбив левую часть (18) на две части, из которых одна подпадает под лемму 1, а другая — под лемму 2. Пусть

$$F_{ab}(X)=\int_a^b e^{iBt}Xe^{-iBt}\,dt$$

с ограниченным оператором X и с $a<b$. Заметим сначала, что

$$W(t)^*W(s)-e^{iaB}W(t)^*W(s)e^{-iaB}=F_{0a}(Y(t,s)), \tag{19}$$

где

$$Y(t,s)=-i[e^{itB}J^*e^{-i(t-s)A}Ce^{-isB}-e^{itB}C^*e^{-i(t-s)A}Je^{-isB}].$$

Мы докажем (19), не занимаясь вопросами области определения, и предоставим читателю вычислить матричные элементы и восполнить детали, относящиеся к областям определения. Идея состоит в том, чтобы записать разность в левой части как интеграл от ее производной. Пусть

$$Q(b)=e^{ibB}W(t)^*W(s)e^{-ibB}.$$

Тогда

$$\frac{dQ(b)}{db}=ie^{ibB}[Be^{itB}J^*e^{-i(t-s)A}Je^{-isB}-e^{itB}J^*e^{-i(t-s)A}Je^{-isB}B]e^{-ibB}=$$
$$=ie^{ibB}[e^{itB}J^*e^{-i(t-s)A}Ce^{-isB}-e^{itB}C^*e^{-i(t-s)A}Je^{-isB}]e^{-ibB}=$$
$$=-e^{ibB}Y(t,s)e^{-ibB}.$$

Интегрируя эту производную, получаем (19).

При фиксированных t и s разность

$$W(t)-W(s)=i\int_s^t e^{iuA}Ce^{-iuB}\,du$$

компактна, так что по лемме 2

$$\lim_{a\to\infty} e^{iaB}W(t)^*(W(t)-W(s))e^{-iaB}\varphi=0,$$

если $\varphi\in\mathscr{M}(B)$. Из (19) следует, что для $\varphi\in\mathscr{M}(B)$

$$(\varphi,\ W(t)^*(W(t)-W(s))\varphi)=\lim_{a\to\infty}(\varphi,\ F_{0a}(Y(t,t)-Y(t,s))\varphi). \tag{20}$$

Поскольку C имеет след, для него справедливо разложение (см. (VI.6))

$$C=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(\varphi_n,\ \cdot)\psi_n,$$

где $\sum \lambda_n = \|C\|_1$ — норме C как элемента $\mathfrak{I}_1$, $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ ортонормированы и $\lambda_n > 0$. Мы утверждаем, что для любого ограниченного оператора X и $a > 0$

$$|(\varphi, F_{ac}(e^{iaB}XCe^{-iaB})\varphi)| \leqslant$$
$$\leqslant (2\pi\|C\|_1)^{1/2}\|X\| |||\varphi||| \left[\sum_n \lambda_n \int_u^\infty |(\varphi_n, e^{-ixB}\varphi)|^2\,dx\right]^{1/2}. \quad (21)$$

В самом деле, в силу вышеприведенного канонического разложения,

$$\text{левая часть (21)} \leqslant \left|\sum_n \lambda_n \int_u^{a+u} (e^{-ixB}\varphi, X\psi_n)(\varphi_n, e^{-ixB}\varphi)\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left[\sum_n \lambda_n \int_{-\infty}^\infty |(X\psi_n, e^{-ixB}\varphi)|^2\,dx\right]^{1/2} \left[\sum_n \lambda_n \int_u^\infty |(\varphi_n, e^{-ixB}\varphi)|^2\,dx\right]^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \text{правая часть (21)}.$$

Во второй строчке мы дважды воспользовались неравенством Шварца, а на последнем шаге применили лемму 1. В силу (20) и (21),

$$\|(W(t) - W(s))\varphi\|^2 \leqslant 8(2\pi\|C\|_1)^{1/2} |||\varphi||| \|J\| \times$$
$$\times \left[\sum_n \lambda_n \int_{\min\{t,\, s\}}^\infty |(\varphi_n, e^{-ixB}\varphi)|^2\,dx\right]^{1/2}. \quad (22)$$

Во-первых, из этого уравнения и леммы 1 следует, что

$$\|(W(t) - W(s))\varphi\|^2 \leqslant 16\pi\|C\|_1 |||\varphi|||^2 \|J\|, \quad (23)$$

а во-вторых, поскольку $\sum_n \lambda_n |(\varphi_n, e^{-ixB}\varphi)|^2$ принадлежит L^1, отсюда следует (18). ∎

Из этой теоремы и неравенства (23) получаем

Следствие. В предположениях теоремы XI.7

$$\|[\Omega^\pm(A, B; J) - J]\varphi\|^2 \leqslant 16\pi\|C\|_1 |||\varphi|||^2 \|J\|. \quad (24)$$

Доказательство. В неравенстве (23) положим $s = 0$ и устремим $t \to \pm\infty$ ∎

Если $AJ - JB$ принадлежит классу операторов со следом, то это же относится и к $BJ^* - J^*A$, так что оба предела $\text{s-lim}\, e^{iAt} Je^{-iBt} P_{ac}(B)$ и $\text{s-lim}\, e^{iBt}J^*e^{-iAt} P_{ac}(A)$ существуют. В общем случае для произвольного J отсюда не следует полнота ни одного из сильных пределов (рассмотрим, например, $J = 0$); однако если $J = 1$, то применимо предложение 3, и мы немедленно приходим к такому следствию.

Теорема XI.8 (теорема Като — Розенблюма). Если A и B — самосопряженные операторы и $A - B \in \mathfrak{I}_1$ — классу операторов со следом, то $\Omega^\pm(A, B)$ существуют и полны.

В этой теореме A и B могут быть не ограничены, $A-B$ принадлежит $\mathfrak{I}_1$ в смысле теоремы XI. 7, т. е. $(A\varphi, \psi) = (\varphi, B\psi) + (\varphi, C\psi)$ с некоторым $C \in \mathfrak{I}_1$ и $\varphi \in D(A)$, $\psi \in D(B)$. Тогда отсюда следует, что $D(A) = D(B)$ и $A\varphi = B\varphi + C\varphi$ для $\varphi \in D(A)$.

Следствие. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^\infty$, A, B — самосопряженные операторы. Предположим, что $\Omega^\pm(A, B)$ существуют и что каждый $A_n - A$ принадлежит $\mathfrak{I}_1$, причем $\|A_n - A\|_1 \to 0$, когда $n \to \infty$. Тогда для каждого n существуют $\Omega^\pm(B\ A_n,)$ и при $n \to \infty$

$$\Omega^\pm(A, B) = \text{s-lim}\, \Omega^\pm(A_n, B).$$

Если $\Omega^\pm(B, A)$ существуют, то и $\Omega^\pm(B, A_n)$ существуют для каждого n и для всех $\varphi \in \operatorname{Ran} P_{ac}(A)$

$$\Omega^\pm(B, A)\varphi = \lim_{n \to \infty} \Omega^\pm(B, A_n)\varphi.$$

Доказательство. В силу цепного правила достаточно доказать, что

$$\text{s-lim}_{n \to \infty}\, \Omega^\pm(A_n, A) = P_{ac}(A) \tag{25}$$

и

$$\lim_{n \to \infty} \Omega^\pm(A, A_n)\varphi = \varphi \quad \text{при} \quad \varphi \in \operatorname{Ran} P_{ac}(A). \tag{26}$$

Из следствия теоремы XI.7 мы немедленно заключаем, что (25) выполняется. Пусть φ лежит в $\operatorname{Ran} P_{ac}(A)$, и пусть $\varphi_n = \Omega^+(A_n, A)\varphi$. Вследствие (25) $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$, когда $n \to \infty$. Значит,

$$\|\Omega^+(A, A_n)(\varphi_n - \varphi)\| \to 0.$$

Но в силу полноты $\Omega^+(A_n, A)$, имеем $\Omega^+(A, A_n)\varphi_n = \varphi$, так что последнее предельное соотношение и означает справедливость (26). ∎

Может случиться, что $\Omega^\pm(B, A_n)\varphi$ не стремится к нулю при $n \to \infty$ для $\varphi \in [\operatorname{Ran} P_{ac}(A)]^\perp$ (задача 22).

Условие принадлежности классу операторов со следом в теореме XI.8 нельзя заменить ни условием принадлежности $A - B$ классу операторов Гильберта — Шмидта, ни даже требованием принадлежности $A - B$ любому $\mathfrak{I}_p$ с $p > 1$; см. обсуждение в Замечаниях. Одна з трудностей с теоремой XI.8 состоит в том, что в квантовой механике $B - A$ даже не ограничен.

Теорема XI.9 (теорема Куроды — Бирмана). Пусть A и B — такие самосопряженные операторы, что $(A+i)^{-1}-(B+i)^{-1}\in \mathcal{J}_1$. Тогда $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны.

Доказательство. Пусть $J=(A+i)^{-1}(B+i)^{-1}$. Тогда в смысле средних значений

$$AJ-JB=(B+i)^{-1}-(A+i)^{-1}$$

и левая часть принадлежит классу операторов со следом, поэтому, согласно теореме Пирсона, существует

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{iAt}(A+i)^{-1}(B+i)^{-1}e^{-iBt}P_{ac}(B).$$

Применяя это к вектору вида $(B+i)\varphi$, $\varphi\in D(B)$, заключаем, что существуют

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{iAt}(A+i)^{-1}e^{-iBt}P_{ac}(B).$$

Далее, по предположению, разность $(A+i)^{-1}-(B+i)^{-1}$ компактна, так что, по лемме 2,

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty}[(A+i)^{-1}-(B+i)^{-1}]e^{-iBt}P_{ac}(B)=0.$$

Отсюда следует, что существуют

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{iAt}(B+i)^{-1}e^{-iBt}P_{ac}(B).$$

Применяя это к вектору вида $(B+i)\varphi$, заключаем, что $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют. По симметрии существуют $\Omega^{\pm}(B, A)$ и, таким образом, имеет место полнота. ∎

Чтобы сформулировать следующий результат, потребуется одно техническое определение.

Определение. Пусть A и B — самосопряженные операторы. Будем говорить, что A **подчинен** B, если найдутся такие непрерывные функции f и g на $\mathbb{R}$, что $f(x)\geqslant 1$, $g(x)\geqslant 1$, $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=\infty$ и $D(g(B))\subset D(f(A))$, а $f(A)g(B)^{-1}$ ограничен. Если A подчинен B, а B подчинен A, то будем говорить, что они **взаимно подчинены**.

Требование подчиненности — очень слабое условие. Например, вследствие теоремы о замкнутом графике, если $D(A)=D(B)$ или если A и B полуограничены и $Q(A)=Q(B)$, то A и B взаимно подчинены.

Теорема XI.10 (теорема Бирмана). Пусть A и B — самосопряженные операторы со спектральными проекторами $E_\Omega(A)$, $E_\Omega(B)$ соответственно. Предположим, что

(a) $E_I(A)(A-B)E_I(B) \in \mathcal{J}_1$ для каждого ограниченного интервала I;
(b) A и B взаимно подчинены.

Тогда $\Omega^\pm(A, B)$ существуют и полны.

Доказательство. По симметрии и в силу предложения 3, достаточно показать, что существуют $\Omega^\pm(A, B)$. Пусть $E_a(C) \equiv E_{(-a,a)}C$ и $E'_a(C) \equiv E_{(-\infty,-a]\cup[a,\infty)}(C)$, где C есть либо A, либо B. Если $J = E_a(A)E_a(B)$, то $AJ - JB \in \mathcal{J}_1$ по предположению (a), так что $\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{iAt}E_a(A)E_a(B)e^{-iBt}$ существуют по теореме Пирсона. Пусть $\varphi \in \operatorname{Ran} E_{a_0}(B)$ для некоторого a_0; тогда для $a > a_0$ существуют

$$\lim_{t\to\pm\infty} e^{iAt}E_a(A)e^{-iBt}\varphi,$$

и чтобы показать, что существуют $\Omega^\pm(A, B)\varphi$, достаточно убедиться в том, что

$$\lim_{a\to\infty}\left[\sup_t \|E'_a(A)e^{-iBt}\varphi\|\right] = 0. \tag{27}$$

Пусть теперь f и g — функции, участвующие в определении подчиненности A оператору B. Пусть $F(a) = \inf_{|x|\geqslant a} f(x)$. Тогда $F(a)\to\infty$ при $a\to\infty$, так как $f\to\infty$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\|E'_a(A)e^{-iBt}\varphi\| &\leqslant F(a)^{-1}\|f(A)E'_a(A)e^{-iBt}\varphi\| \leqslant \\ &\leqslant F(a)^{-1}\|f(A)g(B)^{-1}\|\|g(B)e^{-iBt}\varphi\| \leqslant \\ &\leqslant F(a)^{-1}\|f(A)g(B)^{-1}\|\left[\sup_{|x|\leqslant a_0}|g(x)|\right]\|\varphi\|,\end{aligned}$$

и, значит, (27) выполнено. ∎

Теоремы Куроды—Бирмана и Бирмана имеют следствия, касающиеся сильной сходимости, подобные предыдущим следствиям. Мы отнесли их к задачам (задачи 23, 24).

Есть множество условий, возникающих в приложениях, которые не покрываются предыдущими рассуждениями. Например, допустим, что $A\geqslant 0$, $B\geqslant 0$ и $A^2-B^2\in\mathcal{J}_1$. Существуют ли $\Omega^\pm(A, B)$? Или рассмотрим $A = -\Delta+V$, $B = -\Delta$ на $\mathbb{R}^n$ Если $n\geqslant 4$, то $(A+i)^{-1}-(B+i)^{-1}$ не принадлежит $\mathcal{J}_1$ ни при каких нетривиальных V; однако, как мы увидим, $(A+E)^{-k}-(B+E)^{-k}$ принадлежит $\mathcal{J}_1$, если k достаточно велико. Следует ли отсюда, что $\Omega^\pm(A, B)$ существуют? Ответ на оба вопроса положительный вследствие общего принципа, который мы сейчас опишем.

Определение. Функция φ на открытом подмножестве $T\subset\mathbb{R}$ называется **допустимой**, если $T = \bigcup_1^N I_n$, где $I_n = (\alpha_n, \beta_n)$ не перекрываются, N конечно или бесконечно и

(a) вторая производная в смысле обобщенных функций φ'' принадлежит L^1 на каждом компактном подынтервале из T;

(b) φ' на каждом интервале (α_n, β_n) либо *строго* положительна, либо *строго* отрицательна.

Пример 1. Если $T=(0, \infty)=I_1$, то $\varphi(x)=x^{1/2}$ допустима. Отметим, что если $A^2=A_1$, $B^2=B_1$, то до тех пор, пока $A, B \geqslant 0$, имеем $A=\varphi(A_1)$, $B=\varphi(B_1)$ и $A_1-B_1 \in \mathcal{I}_1$, если $A^2-B^2 \in \mathcal{I}_1$.

Пример 2. Если $T=(0, \infty)=I_1$, то $\varphi(x)=x^{-1/n}-a$ допустима. Заметим, что если $A>-a$, $B>-a$ и $A_1=(A+a)^{-n}$, $B_1=(B+a)^{-n}$, то $A=\varphi(A_1)$, $B=\varphi(B_1)$ и $A_1-B_1 \in \mathcal{I}_1$, если $(A+a)^{-n}-(B+a)^{-n} \in \mathcal{I}_1$.

Теорема XI.11 (принцип инвариантности — случай операторов со следом). Пусть φ — допустимая функция на открытом множестве T. Предположим, что A и B — самосопряженные операторы, причем $\sigma(A)$, $\sigma(B) \subset \overline{T}$, и что в каждой граничной точке T либо φ имеет конечный предел, либо ни A, ни B не имеют в ней точечного спектра. Допустим, что $A-B$ принадлежит классу операторов со следом. Тогда $\Omega^{\pm}(\varphi(A), \varphi(B))$ существуют, полны и

$$\Omega^{\pm}(\varphi(A), \varphi(B))=\Omega^{\pm}(A, B)\, E_{T_1}(B)+\Omega^{\pm}(A, B)\, E_{T_2}(B),$$

где T_1 (соответственно T_2) — объединение тех интервалов, где $\varphi'>0$ (соответственно $\varphi'<0$).

Вообще, те же выводы имеют место в том случае, если условие $A-B \in \mathcal{I}_1$ заменить предположениями либо теоремы Бирмана, либо теоремы Куроды — Бирмана.

Условие в граничных точках наложено лишь для того, чтобы можно было аккуратно определить $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$.

Прежде чем доказывать теорему, заметим, что существует ее вариант для того случая, когда применим метод Кука; см. дополнение 3. В связи с примерами 1 и 2 и в качестве их продолжения отметим, что справедливы такие утверждения:

Следствие 1. Если A и B — положительные операторы и $A^2-B^2 \in \mathcal{I}_1$, то $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны.

Следствие 2. Если A и B — положительные операторы и $(A^2+1)^{-1}-(B^2+1)^{-1} \in \mathcal{I}_1$, то $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны.

Следствие 3. Если A и B — такие операторы, что $A, B \geqslant -a+I$ и $(A+a)^{-k}-(B+a)^{-k} \in \mathcal{I}_1$ для некоторого k, то $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны.

Следствие 4. Если A и B — самосопряженные операторы и $e^{-A}-e^{-B} \in \mathcal{I}_1$, то $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны.

Мы еще вернемся к условиям, которые обеспечивают выполнение требований следствия 3. Слабая форма следствия 3, достаточная для всех приложений, может быть доказана с помощью метода, которым доказывалась теорема XI.9 (задача 25) В качестве подготовки к доказательству теоремы XI.11 докажем следующую лемму.

Лемма 3. Пусть φ — допустимая функция. Тогда

(a) если $Y \subset \mathbb{R}$ имеет нулевую меру Лебега, то $\varphi[Y \cap T]$ и $\varphi^{-1}(Y)$ имеют нулевую меру;

(b) для любой $w \in L^2(\alpha_n, \beta_n)$ в случае $\varphi' > 0$ на (α_n, β_n) имеем

$$\lim_{s \to \infty} \int_0^\infty \left| \int_{-\infty}^\infty e^{-i(t\lambda + s\varphi(\lambda))} w(\lambda)\, d\lambda \right|^2 dt = 0. \tag{28}$$

Если $\varphi' < 0$ на (α_n, β_n), то $s \to \infty$ в (28) надо заменить на $s \to -\infty$.

Доказательство. (a) См. задачу 26.

(b) Так как $(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^\infty e^{i(t\lambda + s\varphi(\lambda))} w(\lambda)\, d\lambda$ есть обратный фурье-образ $e^{is\varphi(\lambda)} w(\lambda)$, то из теоремы Планшереля следует, что

$$2\pi \|w\|^2 \geqslant \int_0^\infty \left| \int_{-\infty}^\infty e^{i(t\lambda + s\varphi(\lambda))} w(\lambda)\, d\lambda \right|^2 dt.$$

Поэтому необходимо доказать (28) только для таких w, линейные комбинации которых плотны в $L^2(\alpha_n, \beta_n)$, например для w, являющихся характеристическими функциями отрезков $[a, b] \subset (\alpha_n, \beta_n)$. Так как φ'' из L^1 на (α_n, β_n), то φ есть C^1-функция и, следовательно, $\inf\limits_{\lambda \in [a, b]} \varphi'(t) = \gamma > 0$. Пользуясь тем, что

$$e^{-i(t\lambda + s\varphi(\lambda))} = i(t + s\varphi'(\lambda))^{-1} \frac{d}{d\lambda}(e^{-i(t\lambda + s\varphi(\lambda))})$$

при $t > 0$, $s > 0$, мы видим, что

$$\left| \int_a^b e^{-i(t\lambda + s\varphi(\lambda))} d\lambda \right| = \left| \int_a^b (t + s\varphi'(\lambda))^{-1} \frac{d}{d\lambda} e^{-i(t\lambda + s\varphi(\lambda))} d\lambda \right| \leqslant$$

$$\leqslant (t + s\varphi'(b))^{-1} + (t + s\varphi'(a))^{-1} + (t + s\gamma)^{-2} s \int_a^b |\varphi''(\lambda)|\, d\lambda,$$

где последнее неравенство получено интегрированием по частям. Устремляя s к ∞ и замечая, что каждый член стремится к нулю в $L^2(0, \infty)$ как функция t, мы приходим к (28). ∎

Доказательство теоремы XI.11. Пусть $C \equiv A - B = \sum \lambda_n (\psi_n, \cdot) \psi_n$, и пусть $\eta \in \operatorname{Ran} E_{(\alpha_n, \beta_n)}(B) \cap \mathcal{M}(B)$. Тогда, согласно (22),

$$\|(\Omega^{\pm}(A, B) - 1) e^{-i\varphi(B)s} \eta\|^2 \leqslant c \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \int_0^{\infty} |(\psi_n, e^{-iBt - i\varphi(B)s}\eta)|^2 \, dt \right)^{1/2}. \tag{29}$$

В силу леммы 3(b), все отдельные интегралы в правой части (29) стремятся к нулю при $s \to \infty$ (соответственно $s \to -\infty$), если $\varphi' > 0$ ($\varphi' < 0$). Так как каждый интеграл ограничен вследствие леммы 1 величиной $2\pi \|\psi_n\|^2 ||| \eta |||^2$ и $\sum |\lambda_n| \|\psi_n\|^2 = \operatorname{Tr}(|C|) < \infty$, то сумма в правой части (29) стремится к нулю. Согласно предложению 1, $\Omega^{\pm}(A, B) e^{-i\varphi(B)s} = e^{-i\varphi(A)s} \Omega^{\pm}(A, B)$, так что

$$\lim_{s \to \pm\infty} e^{i\varphi(A)s} e^{-i\varphi(B)s} \eta = \begin{cases} \Omega^{\mp}(A, B)\eta & (\varphi' > 0), \\ \Omega^{\pm}(A, B)\eta & (\varphi' < 0). \end{cases}$$

По лемме 3(a) $P_{ac}(\varphi(B)) = P_{ac}(B)$, так что в том случае, когда след $A - B$ конечен, теорема доказана.

Чтобы доказать ее в более общих предположениях, рассуждаем следующим образом. Если $AJ - JB$ принадлежит $\mathcal{I}_1$, то $\operatorname{s-lim}_{t \to \pm\infty} e^{i\varphi(A)t} J e^{-i\varphi(B)t}$ существуют и удовлетворяют аналогичному уравнению принципа инвариантности. Доказательство совпадает с проведенным выше. Пользуясь этим более общим результатом и вводя операторы J, подобно тому как это делалось при доказательстве теорем Куроды—Бирмана и Бирмана, легко распространить принцип инвариантности также и на эти случаи. При этом J зависят от A и B, а не от $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$. Вопросы непрерывности мы снова оставляем читателю (задача 28). ∎

Теорема XI.12. Пусть B — положительный самосопряженный оператор. Предположим, что C — симметрическое ограниченное в смысле форм возмущение B с относительной гранью $\alpha < 1$ и что

$$(B+1)^{-1/2} C (B+1)^{-k-1/2} \in \mathcal{I}_1. \tag{30}$$

Тогда $A = B + C$ есть форма самосопряженного оператора, удовлетворяющая условию

$$(A+E)^{-k} - (B+E)^{-k} \in \mathcal{I}_1 \tag{31}$$

при всех достаточно больших E. В частности, $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны.

Доказательство. Последнее утверждение вытекает из (31) и третьего следствия теоремы XI.11. С помощью повторного применения тождества

$$(A+E)^{-1} = (B+E)^{-1} - (A+E)^{-1} C (B+E)^{-1}$$

находим, что

$$(A+E)^{-k}=(B+E)^{-k}-\sum_{j=1}^{k}(A+E)^{-j}C(B+E)^{-k+j-1},$$

так что (31) вытекает из

$$(A+E)^{-j}C(B+E)^{-k-1+j}\in\mathscr{I}_1,\quad j=1,\ \ldots,\ k. \tag{32}$$

С помощью рассуждения, основанного на комплексной интерполяции (задача 29a), это получается из

$$(A+E)^{-1/2}C(B+E)^{-k-1/2}\in\mathscr{I}_1,\qquad (A+E)^{-k-1/2}C(B+E)^{-1/2}\in\mathscr{I}_1. \tag{33}$$

Первое включение в (33) вытекает из условий теоремы (30) и из ограниченности $(A+E)^{-1/2}(B+1)^{1/2}$. Остается доказать только второе включение для больших по модулю отрицательных E. Выберем E настолько отрицательным, что

$$\|(B+E)^{-1/2}C(B+E)^{-1/2}\|=\gamma<1. \tag{34}$$

Тогда

$$(A+E)^{-1}=(B+E)^{-1/2}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}[-(B+E)^{-1/2}C(B+E)^{-1/2}]^j\right\}(B+E)^{-1/2},$$

так что

$$(B+E)^{-1/2}(A+E)^{-k}C(B+E)^{-1/2}=$$
$$=\sum(-1)^{m-1}\left[\prod_{i=1}^{m}(B+E)^{-1/2-l_i}C(B+E)^{-1/2}\right], \tag{35}$$

где сумма берется по соответствующему семейству членов, для которого $l_1+\ldots+l_m=k$. При помощи комплексной интерполяции между (30) и (34) (задача 29b) получаем, что

$$(B+E)^{-1/2-l_i}C(B+E)^{-1/2}\in\mathscr{I}_{k/l_i},\quad l_i=1,\ \ldots,\ k, \tag{36}$$

где $\mathscr{I}_p$ — двусторонние идеалы в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, описанные в дополнении к § IX.4. Пользуясь неравенством Гёльдера для этих идеалов в каждом члене (35), применяя (34) к сомножителям с $l_i=0$ и (36) к сомножителям с $l_i>0$, видим, что каждый член в правой части (35) принадлежит $\mathscr{I}_1$ и что его норма ограничена величиной $\mathrm{const}\,\gamma^m$. Вследствие множителя γ^m сумма в (35) сходится, так что $(B+E)^{-1/2}(A+E)^{-k}C(B+E)^{-1/2}$ принадлежит $\mathscr{I}_1$. Поскольку $(A+E)^{-1/2}(B+E)^{+1/2}$ ограничен, второе утверждение в (33) выполнено. ∎

Суть доказанной теоремы в том, что во многих приложениях, когда B — дифференциальный оператор, а C — оператор низшего порядка, можно проверить, выполнено или нет условие (30). Главный абстрактный результат описан в дополнении 2.

* * *

В заключение этого раздела скажем несколько слов о теории рассеяния в паре гильбертовых пространств. В § 10 будут рассмотрены физические системы, для которых метод пары гильбертовых пространств представляется естественным. В этом разделе мы дадим способ сведения задачи для двух гильбертовых пространств к задаче в одном пространстве. В типичных приложениях можно пользоваться или этой теорией сведения, или теоремой XI.13.

Определение. Пусть B и A — два самосопряженных оператора в гильбертовых пространствах $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ соответственно, и пусть J — ограниченный оператор из $\mathscr{H}_1$ в $\mathscr{H}_2$. Будем говорить, что $\Omega^{\pm}(A, B; J)$ существуют, в том и только том случае, если существуют сильные пределы

$$\Omega^{\pm}(A, B; J) = \operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{iAt} J e^{-iBt} P_{ac}(B).$$

Операторы $\Omega^{\pm}(A, B; J)$ могут не быть изометрическими, и тем не менее справедливо

Предложение 4. $(\operatorname{Ker}\Omega^+)^{\perp} \equiv \mathscr{H}'_{\text{in}}$ есть инвариантное пространство оператора B, и $\mathscr{H}_{\text{in}} \equiv \overline{\operatorname{Ran}\Omega^+}$ есть инвариантное пространство оператора A. Далее, $B \restriction \mathscr{H}'_{\text{in}}$ *унитарно* эквивалентен $A \restriction \mathscr{H}_{\text{in}}$. В частности, спектр $A \restriction \mathscr{H}_{\text{in}}$ абсолютно непрерывен.

Доказательство. Как в обычной теории,

$$e^{-iAt}\Omega^+ = \Omega^+ e^{-iBt}, \tag{37}$$

откуда следует, что e^{-iBt} (соответственно e^{-iAt}) оставляет $\mathscr{H}'_{\text{in}}$ (соответственно $\mathscr{H}_{\text{in}}$) инвариантным. Легко видеть, что полярное разложение оператора из $\mathscr{H}_1$ в себя расширяется до операторов из $\mathscr{H}_1$ в $\mathscr{H}_2$. В результате Ω^+ имеет разложение $\Omega^+ = V|\Omega^+|$, где $|\Omega^+| = [(\Omega^+)^*\Omega^+]^{1/2}$ в $\mathscr{L}(\mathscr{H}_1)$, а V — частичная изометрия с начальным пространством $\mathscr{H}'_{\text{in}} \subset \mathscr{H}_1$ и конечным подпространством $\mathscr{H}_{\text{in}} \subset \mathscr{H}_2$. Утверждается, что

$$e^{-iAt}V = Ve^{-iBt}, \tag{38}$$

откуда будет следовать утверждение об унитарной эквивалентности. Вследствие (37) $(\Omega^+)^* e^{-iAt} = e^{-iBt}(\Omega^+)^*$, поэтому

$$(\Omega^+)^*\Omega^+ e^{-iBt} = (\Omega^+)^* e^{-iAt}\Omega^+ = e^{-iBt}(\Omega^+)^*\Omega^+.$$

В силу единственности положительного квадратного корня (теорема VI.9), $|\Omega^+|e^{-iBt}=e^{-iBt}|\Omega^+|$, так что из (37) следует, что

$$e^{-iAt}V|\Omega^+|=Ve^{-iBt}|\Omega^+|.$$

В результате (38) выполняется в применении к векторам из $\overline{\operatorname{Ran}|\Omega^+|}$. Для завершения доказательства (38) заметим, что на векторах φ из $(\operatorname{Ran}|\Omega^+|)^\perp=\operatorname{Ker}|\Omega^+|=\operatorname{Ker}V$, очевидно, $e^{-iAt}V\varphi=0$. Более того, $Ve^{-iBt}\varphi=0$, так как мы видели, что e^{-iBt} оставляет $\operatorname{Ker}|\Omega^+|=(\mathscr{H}'_{\text{in}})^\perp$ инвариантным. ∎

Легко видеть, что теперь, по цепному правилу, если $\Omega^\pm(A, B; J_1)$ и $\Omega^\pm(B, C; J_2)$ существуют, то существуют также $\Omega^\pm(A, C; J_1J_2)$ и они равны $\Omega^\pm(A, B; J_1)\,\Omega^\pm(B, C; J_2)$.

Может случиться, что $\mathscr{H}'_{\text{in}}$ не совпадает с $\operatorname{Ran}P_{\text{ac}}(B)$; пусть, например, $J=0$.

Определение. Если $(\operatorname{Ker}\Omega^\pm)^\perp=\operatorname{Ran}P_{\text{ac}}(B)$, мы называем $\Omega^\pm$ **полуполными**. Если, кроме того, $\operatorname{Ran}\Omega^\pm=\operatorname{Ran}P_{\text{ac}}(A)$, мы называем $\Omega^\pm$ **полными**.

В физических ситуациях часто есть некоторый произвол в выборе J. Поэтому важно иметь критерии, обеспечивающие равенство $\Omega^\pm(A, B; J_1)=\Omega^\pm(A, B; J_2)$.

Определение. Будем говорить, что операторы $J_1, J_2\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ **асимптотически B-эквивалентны**, если

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty}\{(J_1-J_2)e^{-iBt}P_{\text{ac}}(B)\}=0.$$

В большинстве приложений в этом убеждаются посредством доказательства компактности J_1-J_2 или компактности $(J_1-J_2)\times\times(B+i)^{-k}$ при некотором k (задача 18).

Определение. Пусть $J\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ и $J'\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_1)$. Будем говорить, что J' есть **B-асимптотический левый обратный** к J (для краткости B-левый обратный), в том и только том случае, когда $J'J$ асимптотически B-эквивалентен единичному оператору I.

Доказательство следующего аналога предложения 3 мы оставляем читателю (задача 30).

Предложение 5. Пусть B и A — самосопряженные операторы на гильбертовых пространствах $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ соответственно. Пусть $J\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$, и предположим, что $\Omega^\pm(A, B; J)$ существуют.

(a) Пусть $J_1\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$. В этом случае J_1 асимптотически B-эквивалентен J тогда и только тогда, когда $\Omega^\pm(A, B; J_1)$ существуют и равны $\Omega^\pm(A, B; J)$.

(b) Если J имеет B-левый обратный, то $\Omega^\pm$ полуполны.

(c) Пусть J' — любой B-левый обратный. Тогда $\Omega^{\pm}(A, B; J)$ полны в том и только том случае, если $\Omega^{\pm}(B, A; J')$ существуют и J является A-асимптотическим левым обратным к J'.
(d) Если J^* есть B-левый обратный к J, то $\Omega^{\pm}(A, B; J)$ суть частичные изометрии с начальным пространством $\operatorname{Ran} P_{ac}(B)$.

Отметим, что теорема Пирсона сохраняется без всяких изменений в формулировке и в доказательстве, если определить $\mathfrak{I}_1(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ как множество таких операторов $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, для которых $(A^*A)^{1/2} \in \mathfrak{I}_1(\mathcal{H}_1)$.

Теорема XI.13 (теорема Белопольского — Бирмана). Пусть B и A — два самосопряженных оператора на гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ соответственно, имеющие спектральные разложения $E_\Omega(A)$ и $E_\Omega(B)$ Допустим, что $J \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ удовлетворяет условиям

(a) J имеет двусторонний ограниченный обратный;
(b) для любого ограниченного интервала I

$$E_I(A)(AJ - JB)E_I(B) \in \mathfrak{I}_1;$$

(c) для любого ограниченного интервала I оператор $(J^*J - 1) \times \times E_I(B)$ компактен;

а также *либо*

(d₁) $JD(B) = D(A)$,

либо

(d₂) $JQ(B) = Q(A)$.

Тогда $\Omega^{\pm}(A, B; J)$ существуют, полны и являются частично изометрическими операторами с начальным пространством $\operatorname{Ran} P_{ac}(B)$ и конечным пространством $\operatorname{Ran} P_{ac}(A)$.

Доказательство. Пусть $J_I = E_I(A) J E_I(B)$ и $J_I' = E_I(B) J^{-1} E_I(A)$. В силу обобщенной теоремы Пирсона и условия (b), операторы $\Omega^{\pm}(A, B; J_I)$ и $\Omega^{\pm}(B, A; J_I^*)$ существуют. Более того, мы утверждаем, что J_I' асимптотически A-эквивалентен J_I^*. Действительно, в силу (c), $E_I(B)(J^*J - 1)$ компактен, значит, $E_I(B)(J^* - J^{-1})$ компактен и, следовательно, $J_I^* - J_I'$ компактен. Тогда из леммы 2 вытекает асимптотическая эквивалентность. Следовательно, $\Omega^{\pm}(B, A; J_I')$ существуют по пункту (a) предложения 5.

В силу условия (d), мы можем с помощью метода теоремы XI.10 показать, что

$$\lim_{a \to \infty} \left\{ \sup_t \left(\| E_{(-\infty, -a) \cup (a, \infty)}(A) J e^{-iBt} \varphi \| \right) \right\} = 0,$$

если $\varphi \in \operatorname{Ran} E_I(B)$, так что $\Omega^{\pm}(A, B; J)$ существуют. Подобным образом существуют и $\Omega^{\pm}(B, A; J^{-1})$. Тогда из пункта (c) предложения 5 следует, что $\Omega^\pm(A, B; J)$ полны. Воспользовавшись *еще раз* условием (c), заключаем из пункта (d) предложения 5 и леммы 2, что $\Omega^\pm(A, B; J)$ суть частичные изометрии из $\operatorname{Ran} P_{ac}(B)$ в $\operatorname{Ran} P_{ac}(A)$. ∎

Дополнение 1 к § XI.3. Метод стационарной фазы

В этом дополнении мы изложим метод оценки $[e^{-itB}]\varphi(x)$ в случае, когда B — дифференциальный или псевдодифференциальный оператор. Затем мы покажем, как применяются эти оценки, доказав, что $\Omega^\pm(A, B)$ существуют, если $A-B$ есть оператор умножения на соответствующую функцию. Наконец, мы обсудим, как, основываясь на этих оценках, обращаться с волновыми уравнениями второго порядка § 10 и 16.

Ключевая идея метода — это идея стационарной фазы. Перепишем $e^{-itB}\varphi(x)$ в виде $\int u(k)\, e^{i\omega f(k)}\, dk$, где $\omega \to \infty$, когда $t \to \infty$. Если $\omega \to \infty$, то быстрые осцилляции в $e^{i\omega f(k)}$ гасят друг друга. Такая компенсация меньше в тех точках, где f меняется медленнее всего, т. е. в тех точках, где $(\nabla f)(k) = 0$. Эти точки называются **точками стационарной фазы**. Мы сначала оценим интеграл в тех точках, где $\nabla f \neq 0$, а потом исследуем точки стационарной фазы.

Для заданного открытого множества $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^n$ пусть $C^l(\mathscr{O})$ обозначает пространство l раз дифференцируемых функций на $\mathscr{O}$, на котором введена топология как на пространстве Фреше с помощью полунорм

$$\|f\|_K = \sup_{k \in K} \sum_{|\alpha| \leqslant l} |D^\alpha f(k)|,$$

где K пробегает все компактные подмножества в $\mathscr{O}$. Сначала мы выделим точки стационарной фазы в асимптотиках интегралов вида $\int e^{i\omega f(k)} u(k)\, dk$.

Теорема XI.14. Пусть K — компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что f — вещественнозначная функция, определенная в окрестности $\mathscr{O}$ подмножества K, такая, что $f \in C^{l+1}(\mathscr{O})$ и $\operatorname{grad} f$ не обращается в нуль на всем K. Тогда для всех $u \in C_0^l(K^{\text{int}})$

$$\left| \int e^{i\omega f(k)} u(k)\, dk \right| \leqslant c(1+|\omega|)^{-l} \|u\|_{l,\infty}, \tag{39}$$

$$\text{где } \|u\|_{l,\infty} = \sum_{|\alpha| \leqslant l} \|D^\alpha u\|_\infty .$$

Кроме того, если $M \subset C^{l+1}(\mathscr{O})$ есть компактное подмножество в C^{l+1}, на котором $(\operatorname{grad} f)(k)$ не обращается в нуль ни при каких $k \in K$ и $f \in M$, то постоянная c в (39) может быть выбрана равномерно для всех $f \in M$.

Доказательство. Сначала фиксируем f. Для всякого $k\in K$ можно найти окрестность U_k этого k, $a_k>0$ и $j\in\{1, \ldots, n\}$, такие, что $|\partial f/\partial k_j|\geqslant a_k$ во всех точках из U_k. Вследствие компактности K его можно покрыть конечным числом таких множеств $U_1, \ldots, U_n$. Найдем далее $\varphi_1, \ldots, \varphi_n\in C_0^\infty(\mathcal{O})$, такие, что $\operatorname{supp}\varphi_l\subset U_l$ и $\sum\varphi_l(y)=1$ для $y\in K$. Записывая подынтегральное выражение в виде

$$e^{i\omega f(k)}u(k)=\sum_j e^{i\omega f(k)}(u\varphi_j)(k)$$

и пользуясь тем, что $\|\varphi_j u\|_{l,\infty}\leqslant C\|u\|_{l,\infty}$, мы видим, что рассмотрение свелось к случаю, когда $\partial f/\partial k_1\geqslant a>0$ на всем K.

Так как $\partial f/\partial k_1\neq 0$ на K, то при помощи теоремы о неявной функции можно найти окрестность V_k любого $k\in K$ и C^{l+1}-функцию g, такие, что $g(f(k), k_2, \ldots, k_n)=\langle k_1, \ldots, k_n\rangle$ при всех $k\in V_k$. Пользуясь, как и выше, разбиением единицы $\{\varphi_l\}$, можно считать, что одна функция g годится для всего K. Пусть $\langle y_1, \ldots, y_n\rangle=\langle f(k), k_2, \ldots, k_n\rangle$. Тогда

$$\int u(k)e^{i\omega f(k)}dk=\int u(g(y))e^{i\omega y_1}\left[\frac{\partial f}{\partial k_1}(g(y))\right]^{-1}dy=$$

$$=\int\left[\left(\frac{1}{i\omega}\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^l e^{i\omega y_1}\right](u\circ g)\left(\frac{\partial f}{\partial k_1}\right)^{-1}dy=$$

$$=\omega^{-l}\int e^{i\omega y_1}\left(i\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^l\left[(u\circ g)\left(\frac{\partial f}{\partial k_1}\right)^{-1}\right]dy.$$

Следовательно,

$$(1+|\omega|)^l\left|\int u(k)e^{i\omega f(k)}dk\right|\leqslant D\|(u\circ g)(\partial f/\partial k_1)^{-1}\|_{l,\infty},$$

что доказывает (39).

Из приведенного доказательства видно, что в некоторой окрестности N функции f в $C^{l+1}(\mathcal{O})$ можно пользоваться одним и тем же U_k и т. д. и получить таким образом (39) с фиксированной константой c' для всех $f\in N$. Покрывая M такими окрестностями, получим последнее утверждение теоремы. ▮

Следствие. Пусть P: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ принадлежит C^∞, и пусть $u\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ — такая функция, что $\hat{u}$ имеет компактный носитель. Пусть $\mathscr{G}$ — открытое множество, содержащее компактное множество $\{\operatorname{grad}P(k)\mid k\in\operatorname{supp}\hat{u}\}$. Пусть

$$u_t(\mathbf{x})=(2\pi)^{-n/2}\int\exp\left[i(\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}-tP(\mathbf{k}))\right]\hat{u}(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}. \qquad (40a)$$

Тогда для любого m существуют c, зависящая от m, u, и $\mathscr{G}$, такие, что

$$|u_t(\mathbf{x})|\leqslant c(1+|\mathbf{x}|+|t|)^{-m} \qquad (40b)$$

для всех $\mathbf{x}$, t, для которых $\mathbf{x}/t$ не лежит в $\mathscr{G}$.

Доказательство. Положим $f(k) = (|x|+|t|)^{-1}[x \cdot k - tP(k)]$ и $\omega = |x|+|t|$, так что (40b) принимает вид (39). Так как $\nabla_k f = (|x|+|t|)^{-1}[x - t\nabla_k P]$, если $x/t \notin \mathscr{G}$, то $\nabla_k f$ не обращается в нуль. Далее, можно устремить x/t к ∞ в заданном направлении и получить предельные функции, градиент которых тоже не исчезает. Значит, функции f лежат в соответствующем компактном подмножестве в C^{m+1}, откуда и вытекает (40b). ∎

Оценка (40) имеет красивую и простую интерпретацию. Представим себе классическую систему с импульсом k и гамильтоновой функцией $P(k)$, не зависящей от x. Такая система имеет постоянную скорость $v = \nabla P(k)$. Значит, классический «пакет» $\hat{u}(k)$ имеет скорости из $\mathscr{G}$. Неравенство (40) говорит о том, что вне классически разрешенной области «квантовый» волновой пакет $u_t(x)$ очень быстро спадает. Далее мы рассмотрим вклад изолированных точек, в которых $\operatorname{grad} f$ исчезает.

Теорема XI.15. Пусть f — вещественнозначная C^∞-функция, определенная в окрестности нуля в $\mathbb{R}^n$. Допустим, что $(\operatorname{grad} f)(0) = 0$ и что матрица $A_{ij} = (\partial^2 f/\partial k_i \partial k_j)(0)$ обратима. Тогда существует такая окрестность нуля $\mathcal{O}$, что при любом $s > n/2$ найдется c, для которой при всех $u \in C_0^\infty(\mathcal{O})$ и $\omega \geqslant 1$

$$\left| \int u(k) e^{i\omega f(k)} dk \right| \leqslant c\omega^{-n/2} \|u\|_{s,\infty}. \tag{41}$$

Кроме того, если задана одна такая f_0, то существуют окрестности нуля $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$, такие, что $\overline{\mathcal{O}}_1 \subset \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}$, и окрестность $\mathscr{N}$ функции f_0 в $C^l(\mathcal{O}_2)$-топологии (с некоторым l), такая, что (41) выполнено для всех $u \in C_0^\infty(\mathcal{O}_1)$ и всех $f \in \mathscr{N}$.

Доказательство. Сначала выберем некоторую f, удовлетворяющую условиям теоремы. Утверждается, что существуют $\mathcal{O}$ и обратимое C^∞-отображение $X\colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}'$, такое, что $X(k) = k + O(k^2)$ и

$$f(k) = f(0) + {}^1/_2 (X(k), AX(k)). \tag{42}$$

Так как $(\operatorname{grad} f)(0) = 0$, то, по теореме Тейлора с учетом остаточного члена, $f(k) = f(0) + {}^1/_2 (B(k)k, k)$, где

$$(B(k))_{ij} = 2 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial k_i \partial k_j}(sk)(1-s)\, ds.$$

Будем искать теперь C^∞-функцию $R(k)$ со значениями в множестве $n \times n$-матриц, такую, что $R^*(k) AR(k) = B(k)$; в самом деле, если мы выберем $X(k) = R(k)k$, то (42) будет выполнено. Пусть M — векторное пространство $n \times n$-матриц и M_s — векторное пространство симметричных $n \times n$-матриц. Рассмотрим функцию F из $M \times M_s$ в M_s, заданную равенством $F(R, B) = R^*AR - B$. Тогда

$(D_R F)|_{R=I,\, B=A}$ — градиент по переменным R — есть отображение T из M в M_s, заданное как $T(C)=C^*A+AC$. Если задано $D\in M_s$, то $T(^1/_2 A^{-1}D)=D$; значит, T сюръективно, так как A невырожденна. Поскольку $F(I, A)=0$, то, по теореме о неявной функции, для некоторой окрестности $\mathcal{A}$ точки A существует C^∞-функция R: $\mathcal{A}\to M$, такая, что

$$R^*(B)\,AR(B)=A, \quad R(A)=1.$$

Выберем $\mathfrak{G}$ так, чтобы $B(k)\in\mathcal{A}$, если $k\in\mathfrak{G}$. Положим $X(k)=R(B(k))\,k$. Тогда X принадлежит C^∞, удовлетворяет условию (42), и так как $B(k)=A+O(k)$, то $R(B(k))=1+O(k)$, откуда $X(k)=k+O(k^2)$.

Положим теперь $y=X(k)$. Тогда

$$\left|\int u(k)\,e^{i\omega f(k)}\,dk\right|= \\ =\left|\int u(X^{-1}(y))\,e^{i\omega(y,\,Ay)/2}\left[\det\left(\frac{\partial X}{\partial k}\circ X^{-1}(y)\right)\right]^{-1}dy\right|= \\ =\left|\int v(y)\,e^{i\omega(y,\,Ay)/2}\,dy\right|,$$

где $v(y)=u(X^{-1}(y))\left[\det(\partial X/\partial k\circ X^{-1}(y))\right]^{-1}$. По теореме Планшереля,

$$\int v(y)\,e^{i\omega(y,\,Ay)/2}\,dy=c_1\omega^{-n/2}\int \check{v}(k)\,e^{i(k,\,A^{-1}k)/2\omega}\,dk \tag{43}$$

с подходящей константой c_1, зависящей от A. Таким образом,

$$\left|\int u(k)\,e^{i\omega f(k)}\,dk\right|\leqslant|c_1|\,\omega^{-n/2}\,\|\check{v}\|_1\leqslant c_2\omega^{-n/2}\|(1-\Delta)^{n/2}v\|_2\leqslant \\ \leqslant c\omega^{-n/2}\|u\|_{s,\,\infty}.$$

Остается доказать утверждение о равномерности в конце теоремы. Прежде всего заметим, что для всех f вблизи f_0 в топологии $C^2(\mathfrak{G})$ существует единственная точка $k(f)$ вблизи нуля, в которой $(\operatorname{grad} f)(k(f))=0$. В самом деле, пусть $\mathcal{G}$: $\mathfrak{G}\times C^2(\mathfrak{G})\to\mathbb{R}^n$ — отображение, заданное равенством $\mathcal{G}(k, f)=(\operatorname{grad} f)(k)$. Тогда $\mathcal{G}(0, f_0)=0$, а $D_k\mathcal{G}|_{k=0,\, f=f_0}$ можно считать обратимым отображением A. Последнее утверждение следует из теоремы о неявной функции. Теперь утверждение о равномерности можно получить, замечая, что размер $\mathfrak{G}$ и константа c в приведенном доказательстве зависят лишь от конечного числа производных. ∎

Следствие. Пусть P есть C^∞-функция на $\mathbb{R}^n$, и пусть $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — такая функция, что $\hat{u}$ имеет компактный носитель и пересечение

$$\operatorname{supp}\hat{u}\cap\{k\mid \det[\partial^2 P/\partial k_i\partial k_j]=0\}$$

пусто. Пусть $u_t(x)$ задано посредством (40а). Тогда

$$|u_t(x)| \leqslant c|t|^{-n/2} \tag{44}$$

для $|t|>1$ и для всех x.

Доказательство. Пусть $\mathscr{Y}$ — ограниченная окрестность $\operatorname{supp}\hat{u}$, такая, что $\det[\partial^2 P/\partial k_i \partial k_j] \neq 0$, если $k \in \bar{\mathscr{Y}}$. В силу следствия теоремы XI.14, нужно доказать (44) лишь для x/t из $\mathscr{G} = \{\operatorname{grad} P(k) \mid k \in \mathscr{Y}\}$. Для каждого $p = x/t$ из $\mathscr{G}$ градиент

$$\nabla_k [(|x|+|t|)^{-1}(x \cdot k - tP(k))]$$

исчезает лишь в конечном числе точек в $\mathscr{Y}$, так что, привлекая разбиение единицы и теорему XI.15, убеждаемся в том, что (44) выполнено для $p = x/t$. Вследствие равномерности — одного из утверждений той же теоремы — эта оценка выполнена на самом деле в некоторой окрестности p. В силу компактности $\bar{\mathscr{G}}$, оценка (44) выполнена для всех x и t ∎

Чтобы понять, как можно использовать эти оценки в теории рассеяния, докажем следующую теорему.

Теорема XI.16. Пусть P — такая вещественнозначная C^∞-функция на $\mathbb{R}^n$, что множество

$$M \equiv \{k \mid \operatorname{grad} P(k) = 0 \text{ или } \det(\partial^2 P/\partial k_i \partial k_j) = 0\}$$

имеет меру нуль. Пусть V — такая вещественнозначная функция на $\mathbb{R}^n$, что при некотором m

$$(1+|x|)^{-m} V \in L^2 \tag{45a}$$

и при всех $a, b > 0$

$$\int_1^\infty \left(\int_{a<|x|<b} |V(xt)|^2 dx \right)^{1/2} dt < \infty. \tag{45b}$$

Пусть $H_0 = P(-i\nabla)$, и пусть H — самосопряженное расширение $H_0 + V$, определенное на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда существует

$$\operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t}.$$

Доказательство. По методу Кука достаточно доказать, что

$$\int_1^\infty \| V e^{\pm itH_0} u \| \, dt < \infty$$

для всех u из $\mathscr{D}$ — некоторого подмножества в $\mathscr{F}^{-1}[C_0^\infty]$, плотного в L^2. Пусть $\mathscr{D} = \{u \mid \hat{u} \in C_0^\infty, \operatorname{supp}\hat{u} \cap M = \varnothing\}$. Для таких u

положим

$$2a = \inf_{k \in \operatorname{supp} \hat{u}} |\operatorname{grad} P(k)|, \quad b/2 = \sup_{k \in \operatorname{supp} \hat{u}} |\operatorname{grad} P(k)|.$$

Тогда, в силу следствия теоремы XI.14 и предположения $(1+|x|)^{-m}V \in L^2$, получаем

$$\int\limits_{|x| \geq b|t| \text{ или } |x| \leq a|t|} |V(x)|^2 |u_t(x)|^2 dx \leq c(1+|t|)^{-n},$$

так что остается доказать неравенство

$$\int\limits_1^\infty \left(\int\limits_{at < |x| < bt} |V(x)|^2 |u_{\pm t}(x)|^2 dx \right)^{1/2} dt < \infty.$$

Так как $|u_{\pm t}(x)|^2 \leq ct^{-n}$ согласно следствию теоремы XI.15, то эта оценка вытекает из (45b), если сделать замену переменных $x \mapsto tx$. ∎

Пока мы показали, как с помощью метода стационарной фазы оценить поведение при больших временах решений уравнения типа Шредингера $iu_t = P(-i\nabla)u$. Те же идеи позволяют сделать оценки поведения при больших временах решений уравнений свободных классических релятивистских полей

$$\varphi_{tt} = (\Delta - m^2)\varphi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{46}$$

Будем называть решение уравнения (46) **регулярным волновым пакетом**, если фурье-образы начальных данных $f = \widehat{\varphi(\cdot, 0)}$ и $g = \widehat{\varphi_t(\cdot, 0)}$ принадлежат C^∞ и имеют компактный носитель; кроме того, если $m = 0$, *то потребуем еще, чтобы* $k = 0$ *не входило в носитель*. В аксиоматической квантовой теории поля некоторые авторы называют регулярные волновые пакеты «гладкими решениями».

Очевидно, $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$, где

$$\varphi_\pm(x, t) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{\pm it\mu(k)} e^{ik\cdot x} u_\pm(k)\, d^n k;$$

$$\mu(k) = \begin{cases} \sqrt{k^2+m^2}, & m > 0; \\ |k|, & m = 0; \end{cases} \qquad u_\pm(k) = {}^1/_2 (\hat{f} \mp i\mu^{-1}\hat{g}).$$

Заметим, что если φ — регулярный волновой пакет, то $u_\pm \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, и если $m = 0$, то $0 \notin \operatorname{supp} u_\pm$.

Так как $\partial\mu/\partial k_i = k_i/\sqrt{k^2+m^2}$ и

$$M_{ij} \equiv \frac{\partial^2 \mu}{\partial k_i\, \partial k_j} = (k^2+m^2)^{-1/2} [\delta_{ij} - k_i k_j (k^2+m^2)^{-1}],$$

то

$$\rho_\pm \equiv \sup\{|\operatorname{grad}\mu(k)|\,|\,k \in \operatorname{supp} u_\pm\}$$

меньше единицы, если $m > 0$, и равно единице, если $m = 0$. Более того, если $m > 0$, то $\{M_{ij}\}$ строго положительно определена и потому обратима. Эта матрица имеет $n-1$ собственных значений, равных $(k^2+m^2)^{-1/2}$, и одно, равное $m^2(k^2+m^2)^{-3/2}$. Если $m = 0$ и $k \neq 0$, то $\{M_{ij}\}$ строго положительно определена в направлениях, ортогональных к k, однако k — собственный вектор с нулевым собственным значением.

Для случая $m > 0$ методы стационарной фазы непосредственно применимы и приводят к следующей теореме.

Теорема XI.17. Пусть φ — регулярный волновой пакет для уравнения Клейна — Гордона (46) с $m \neq 0$. Тогда

(a) при некотором $\rho < 1$ и любом N найдется такая c_N, что

$$|\varphi(x, t)| \leqslant c_N(|x|+|t|+1)^{-N}, \quad \text{если } |x| \geqslant \rho t;$$

(b) найдется такая постоянная d, что

$$|\varphi(x, t)| \leqslant d(1+|t|)^{-n/2} \quad \text{при всех } x, t,$$

где n — размерность пространства.

Можно выбрать $\rho = {}^1/_2(1+\max\rho_\pm)$. По существу (a) есть некоторого рода условие конечности скорости распространения для уравнения Клейна — Гордона. Так как начальные данные не имеют компактного носителя по x, то мы не можем ожидать исчезновения решения, когда $|x|$ велико по сравнению с $|t|$, однако оно быстро убывает. Отметим, что при такой «конечной скорости распространения» скорость в действительности меньше единицы.

Для нужд § 16 отметим такое следствие теоремы XI.17

Следствие. Если φ — регулярный волновой пакет уравнения Клейна — Гордона (46) с $m \neq 0$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(t, x)|\, dx \leqslant C(1+|t|)^{n/2}.$$

Доказательство. Разобьем область интегрирования по x на две части: $|x| \leqslant t$ и $|x| \geqslant t$. По условию (b) первый интеграл может быть оценен следующим образом:

$$d(1+|t|)^{-n/2} \int_{|x| \leqslant t} d^n x \leqslant c_1 |t|^{n/2}.$$

Второй интеграл, по условию (a), стремится к нулю скорее, чем любая степень $|t|$, и, в частности, ограничен константой c_2. Выберем теперь $C = \max\{c_1, c_2\}$. ∎

Теперь рассмотрим случай $m=0$. Теорема XI.14 непосредственно применима и приводит к оценке

$$|\varphi(x,\ t)|\leqslant c_{M,\ \varepsilon}(|x|+|t|+1)^{-M},\ \text{ если } |x|\geqslant(1+\varepsilon)|t| \text{ или } |x|\leqslant(1-\varepsilon)|t|$$

Подчеркнем роль условия $0\notin \operatorname{supp} u_{\pm}$ при $m=0$, ибо, например, последняя оценка в одномерном случае ($n=1$) не справедлива, если $g=\widehat{\varphi_t(\cdot,\ 0)}$ таковы, что $g(0)\neq 0$. Фактически в одномерном случае решения уравнения $\varphi_{tt}=\varphi_{xx}$ с начальными данными в $\mathcal{S}$ удовлетворяют условию

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(x,\ t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_t(y,\ 0)\,dy \tag{47}$$

для любого *фиксированного* x, так что $\varphi(x,\ t)$ не стремится к нулю при $|x|\leqslant(1-\varepsilon)|t|$. Условие (47) следует из явной формы решения в одном измерении:

$$\varphi(x,\ t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\varphi_t(y,\ 0)\,dy+\frac{1}{2}[\varphi(x+t,\ 0)+\varphi(x-t,\ 0)].$$

Эта формула также показывает, что $\|\varphi\|_\infty$ в случае $n=1$ не убывает как $|t|^{-n/2}$; на самом деле доказательство быстрого убывания, справедливое при $m>0$, не проходит при $m=0$, так как $\{M_{ij}\}$ уже необратима. Однако $\{M_{ij}\}$ невырожденна в $n-1$ направлениях; поэтому мы ожидаем и докажем, что φ удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(x,\ t)|\leqslant d\,|t|^{-(n-1)/2}. \tag{48}$$

Если d не зависит от x, то (48) достаточно доказать для любого фиксированного направления x, так что мы возьмем $x=\langle x_1,\ 0,\ \ldots,\ 0\rangle$, $x_1>0$. Значит, надо проследить за

$$\varphi_{\pm}(x,\ t)=(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}e^{\pm it|k|+ik_1x_1}u_{\pm}(k)\,d^nk.$$

Мы исследуем φ_- для положительных t; остальные доказательства аналогичны. Выберем $\varepsilon>0$ таким образом, чтобы u_- исчезала в шаре радиуса 2ε вокруг нуля. Выберем χ_1 и $\chi_2\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ так, чтобы было $\chi_1+\chi_2=1$ и $\chi_1(k)=0$ при $k_1<\varepsilon$, $\chi_2(k)=0$ при $k_1>{}^3/_2\,\varepsilon$. Запишем

$$\varphi_-(x,\ t)=(2\pi)^{-n/2}\int_{k_1>\varepsilon}e^{-it|k|+ik_1x_1}\chi_1(k)\,u_-(k)\,dk+$$
$$+(2\pi)^{-n/2}\int_{\substack{k_1<3\varepsilon/2\\ |k|\geqslant 2\varepsilon}}e^{-it|k|+ik_1x_1}\chi_2(k)\,u_-(k)\,dk.$$

Так как $\nabla_k(-t|k|+k_1x_1)$ исчезает только при $k_1>0$, $k_2=\ldots$ $\ldots=k_n=0$, то вторая область интегрирования не содержит точек стационарной фазы и, значит, второй интеграл стремится к нулю быстрее любой степени t. В итоге осталось исследовать только первый интеграл. Для этого сделаем замену переменных, выделяющую направление, вдоль которого фаза стационарна. Определим

$$K_1(k)=k_1,$$
$$K_j(k)=\frac{k_j}{\sqrt{k_2^2+\ldots+k_n^2}}(|k|-k_1)^{1/2}, \qquad j=2, \ldots, n.$$

Очевидно, $k\mapsto K$ есть диффеоморфизм на $\mathcal{N}=\{k \mid k_1>\varepsilon\}$. Поскольку $|k|=K_1+\sum\limits_{j=2}^{N} K_j(k)^2$, то при подходящих g и h имеем

$$\left|(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathcal{N}} e^{-it|k|+ik_1x_1}\chi_1(k)\,u_-(k)\,d^nk\right|=$$
$$=\left|(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{K[\mathcal{N}]}\exp\left[iK_1(x_1-t)-it\sum_{j=2}^{n}K_j^2\right]g(K)\,d^nK\right|\leqslant$$
$$\leqslant t^{-(n-1)/2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\left|\exp\left(-(4ti)^{-1}\sum_{j=2}^{n}y_j^2\right)\right|\times$$
$$\times|h(x_1-t, y_2, \ldots, y_n)|\,d^{n-1}y,$$

откуда следует оценка (48). Итак, имеет место

Теорема XI.18. Пусть φ — регулярный волновой пакет волнового уравнения (46) с $m=0$. Тогда

(a) при любом $\varepsilon>0$ и любом N найдется такая $c_{N,\varepsilon}$, что $|\varphi(x, t)|\leqslant c_{N,\varepsilon}(1+|x|+|t|)^{-N}$, если $|x|<(1-\varepsilon)|t|$ или $|x|>(1+\varepsilon)|t|$;

(b) для некоторого d при всех x и t
$$|\varphi(x, t)|\leqslant d\,|t|^{-(n-1)/2}.$$

Наше определение регулярного волнового пакета при $m=0$ включает требование, что фурье-образы начальных данных обращаются в нуль вблизи начала координат. В сущности, для пункта (b) это условие не нужно. На самом деле, опираясь на явные формулы для решения или на более подробный анализ методом стационарной фазы (задача 33), можно доказать, что имеет место следующая

Теорема XI.19. Пусть $\varphi(x, t)$ — решение (46) при $m=0$ с начальными данными в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда:

(a) при любом N и $\varepsilon>0$ найдется такое $c_{N,\,\varepsilon}$, что

$$|\varphi(x,\ t)|\leqslant c_{N,\,\varepsilon}(1+|x|+|t|)^{-N},\qquad |x|\geqslant(1+\varepsilon)|t|;$$

(b) при любом $\varepsilon>0$ найдется такое c_ε, что

$$|\varphi(x,\ t)|\leqslant c_\varepsilon(1+|t|)^{-(n-1)},\qquad |x|\leqslant(1-\varepsilon)|t|;$$

(c) найдется такое d, что

$$|\varphi(x,\ t)|\leqslant d(1+|t|)^{-(n-1)/2}\quad \text{при всех } x \text{ и } t.$$

Когда n четно, результат (b) наилучший возможный. В самом деле, если $h=\varphi(\cdot,\ 0)=0$ и $l=\varphi_t(\cdot,\ 0)\in C_0^\infty$, то при фиксированном x имеем $\varphi(x,\ t)\sim c_n t^{-(n-1)}\int l(y)\,dy$, причем $c_n\neq 0$, если n четно. Но если n нечетно и больше единицы, то, в силу принципа Гюйгенса, оценка пункта (a) имеет место в области $|x|\leqslant(1-\varepsilon)|t|$ из пункта (b).

Дополнение 2 к § XI.3. Свойства $f(x)\,g(-i\nabla)$ как элементов $\mathcal{I}_p$

Для применения теорем теории Като — Бирмана часто бывает необходимо доказать, что некоторые операторы вида $f(x)\,g(-i\nabla)$ принадлежат классу операторов со следом. Такие операторы возникают также в ряде других ситуаций, и иногда достаточно располагать более скудной информацией о сингулярных значениях $\{\mu_m\}$, чем сходимость ряда $\sum|\mu_m|$. Напомним, что $\mathcal{I}_p$ — это множество таких $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$, что $\|A\|_p=(\operatorname{tr}(|A|^p))^{1/p}<\infty$. Свойства $\mathcal{I}_p$ и нормы $\|\cdot\|_p$ можно найти в § VI.6 и в дополнении к § IX.4. Имеют место следующие результаты.

Теорема XI.20. Пусть $2\leqslant q<\infty$ и $f,\ g\in L^q(\mathbb{R}^n)$. Тогда $f(x)\,g(-i\nabla)\in\mathcal{I}_q$ и

$$\|f(x)\,g(-i\nabla)\|_q\leqslant(2\pi)^{-n/q}\,\|f\|_q\,\|g\|_q.$$

Напомним, что $L_\delta^2(\mathbb{R}^n)$ есть множество таких f, что $\|f\|_\delta=\|(1+x^2)^{\delta/2}f(x)\|_{L^2}<\infty$.

Теорема XI.21. Допустим, что f и g принадлежат $L_\delta^2(\mathbb{R}^n)$ с некоторым $\delta>n/2$. Тогда $f(x)\,g(-i\nabla)$ принадлежит классу операторов со следом и

$$\|f(x)\,g(-i\nabla)\|_1\leqslant c_{\delta,\,n}\,\|f\|_\delta\,\|g\|_\delta.$$

Существует необходимое и достаточное условие принадлежности $f(x)\,g(-i\nabla)$ классу $\mathcal{I}_1$ (см. Замечания). Но для приложений обычно достаточно теоремы XI.21.

Теорема XI.22. Пусть $2<q<\infty$ и $g\in L_w^q(\mathbb{R}^n)$, $f\in L^q(\mathbb{R}^n)$. Тогда $f(x)\,g(-i\nabla)$ — ограниченный оператор с сингулярными значениями

μ_m, удовлетворяющими неравенствам

$$|\mu_m| \leqslant d_{q,n} \|f\|_q \|g\|_{q,w} m^{-1/q}.$$

Когда мы говорим, что $f(x)g(-i\nabla)$ принадлежит $\mathcal{I}_q$, мы имеем в виду, что в $\mathcal{I}_q$ есть оператор A, для которого $(\varphi, A\psi) = (\bar{f}\varphi, g(-i\nabla)\psi)$ при всех φ и ψ из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательства теорем XI.20 и XI.21 мы приведем; ссылки в связи с теоремой XI.22 можно найти в Замечаниях Отметим, что теорему XI.20 нельзя распространить ни на какое $q < 2$ (см. задачу 36). Теорема XI.21 тесно связана с тем, что $q \geqslant 2$, так как из $f \in L^2_\delta(\mathbb{R}^n)$ для $\delta > n/2$ следует, что $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, и вообще первое допущение ненамного сильнее второго Теорема XI.22 также связана с теоремой XI.20 в том смысле, что $|\mu_m| \leqslant cm^{-1/q}$ влечет за собой сходимость или только слабую расходимость $\sum |\mu_m|^q$, так что $f(x)g(-i\nabla)$ почти принадлежит $\mathcal{I}_q$. Теорему XI.22 нельзя расширить на f и g из L^q_w. Например, оператор $|x|^{-\alpha}|i\nabla|^{-\alpha}$ даже не компактен, поскольку он коммутирует с унитарной группой масштабных преобразований.

Доказательство теоремы XI.20. Если $q = \infty$, то f и g принадлежат L^∞, так что $\|f(x)g(-i\nabla)\|_{op} \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$. Если $q = 2$, то $f(x)g(-i\nabla)$ — интегральный оператор с ядром $f(x)(2\pi)^{-n/2}\check{g}(x-y)$ (см теорему IX.29), так что $f(x)g(-i\nabla)$ есть оператор Гильберта — Шмидта и $\|f(x)g(-i\nabla)\|_2 \leqslant (2\pi)^{-n/2}\|f\|_2\|g\|_2$. Общий случай теперь можно рассмотреть с помощью интерполяционных методов дополнения к § IX 4 (задача 35).

Доказательство теоремы XI.21. Запишем $f(x)g(-i\nabla) = AB$, где

$$A = f(x)(1-\Delta)^{-\delta/2}(1+x^2)^{\delta/2}, \qquad B = (1+x^2)^{-\delta/2}(1-\Delta)^{\delta/2}g(-i\nabla).$$

Тогда B — оператор Гильберта — Шмидта в силу теоремы XI.20. Пусть h есть фурье-образ $(1+k^2)^{-\delta/2}$, умноженный на $(2\pi)^{-n/2}$. Тогда A — интегральный оператор с ядром $f(x)h(x-y)(1+y^2)^{\delta/2}$. Так как $f \in L^2_\delta$, то, чтобы показать, что A — оператор Гильберта — Шмидта, надо лишь убедиться, что

$$\int (1+y^2)^\delta |h(x-y)|^2 dy \leqslant c(1+x^2)^\delta. \tag{49}$$

Далее, $(1+k^2)^{-\delta/2}$ имеет аналитическое продолжение H на $\{z \mid |\operatorname{Im} z| < 1\}$, которое удовлетворяет условию $\int |H(k+i\varkappa)|^2 dk < \infty$, так что, по принципу Пэли — Винера (см. теорему IX.13), $\int e^{2a|x|}|h(x)|^2 dx < \infty$ для всех достаточно малых a. В частности,

$$\int (1+x^2)^\delta |h(x)|^2 dx < \infty. \tag{50}$$

Так как $(1+y^2)^\delta \leqslant 2^\delta (1+|x-y|^2)^\delta (1+x^2)^\delta$, то (49) вытекает из (50) Следовательно, поскольку A и B оба суть операторы Гильберта—Шмидта, их произведение принадлежит $\mathcal{J}_1$. ∎

Дополнение 3 к § XI.3. Общий принцип инвариантности для волновых операторов

Развивая теорию Като—Бирмана, мы обнаружили замечательный принцип инвариантности (теорема XI.11) для волновых операторов. Можно задаться вопросом, не выполняется ли этот принцип инвариантности в более общих предположениях, чем принадлежность разности $A-B$ классу операторов со следом. Наша задача в этом дополнении состоит в том, чтобы доказать подобный результат при предположениях того типа, которые делаются в методе Кука.

Теорема XI.23. Пусть A и B—самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и φ—такая функция на конечном интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$, что

(i) производная в смысле обобщенных функций φ'' принадлежит L^1 и $\varphi'(x) \geqslant \alpha > 0$ при всех $x \in (a, b)$.

(ii) Пусть I—компактный подынтервал в (a, b), а $\mathcal{D}$—плотное подмножество в $E_I(B) P_{ac}(B) \mathcal{H}$, содержащееся в $\mathcal{M}(B)$ и такое, что для любого $u \in \mathcal{D}$ функция $w(t) = e^{iAt}e^{-iBt}u$ сильно дифференцируема и $\|w'(t)\| \subset L^1(\pm 1, \pm\infty) \cap L^2(\pm 1, \pm\infty)$, $|t|^\alpha \|w'(t)\| \in L^1(\pm 1, \pm\infty)$ при некотором $\alpha > 0$.

Тогда для любого $u \in \mathcal{D}$

$$\lim_{t \to \mp\infty} e^{i\varphi(A)t} e^{-i\varphi(B)t} u$$

существуют и равны $\Omega^\pm(A, B)u$.

В частности, предположим, что φ—допустимая функция на открытом множестве T, таком, что $\sigma(A)$, $\sigma(B) \subset \overline{T}$, причем в каждой граничной точке T либо φ имеет конечный предел, либо ни A, ни B не имеют точечного спектра в этой точке. Тогда $\Omega^\pm(\varphi(A), \varphi(B))$ существуют и

$$\Omega^\pm(\varphi(A), \varphi(B)) = \Omega^\pm(A, B) E_{T_1}(B) + \Omega^\mp(A, B) E_{T_2}(B),$$

где T_1 (соответственно T_2) есть объединение тех интервалов, где $\varphi' > 0$ (соответственно $\varphi' < 0$).

Чтобы доказать эту теорему, надо построить теорию преобразования Фурье (слабо) измеримых $\mathcal{H}$-значных функций из $L^p(\mathbb{R}; \mathcal{H})$ $(p < \infty)$. Простейшим образом это делается так. Обозначим через $\mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathcal{H})$ пространство C^∞-функций из $\mathbb{R}$ в $\mathcal{H}$, таких, что $\sup_\lambda \|(1+|\lambda|)^n D^\alpha f(\lambda)\| < \infty$ при всех α и n. Определим преобразование Фурье как слабый интеграл (напомним, что все векторнозначные интегралы в этих томах — это слабые интегралы):

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-1/2} \int e^{-ik\lambda} f(\lambda)\, d\lambda \tag{51}$$

С помощью сопряжения операция $\hat{}$ распространяется на $\mathscr{S}'(\mathbb{R}; \mathscr{H})$, а тем самым на $L^p(\mathbb{R}; \mathscr{H}) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}; \mathscr{H})$. В частности, выполняется теорема Планшереля. Действительно, реализуя $L^2(\mathbb{R}; \mathscr{H})$ как $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{H}$ (см § II.4), мы видим, что обобщенный фурье-образ есть не что иное, как $\mathscr{F} \otimes 1$. Более того, для $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathscr{H})$ равенство (51) выполняется поточечно.

Пусть $F \in L^1(\mathbb{R})$. Утверждается, что при любом $v \in \mathscr{H}$

$$\check{F}(A)\, v = (2\pi)^{-1/2} \int F(\lambda)\, e^{-i\lambda A} v\, d\lambda \tag{52}$$

для любого самосопряженного оператора A. Действительно, (52) выполнено, если $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, и, следовательно, с помощью предельных переходов оно переносится и на $F \in L^1(\mathbb{R})$.

Фиксируем функцию $g \in C_0^\infty(a, b)$, такую, что $g = 1$ на I и $0 \leqslant g \leqslant 1$. Определим

$$G(t, s) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\eta - it\varphi(\eta)} g(\eta)\, d\eta.$$

Лемма 1. Пусть φ удовлетворяет условию (i) теоремы XI.23. Тогда:

(a) $G(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R})$ при каждом фиксированном t;

(b) $G(t, s) \to 0$, когда $t \to \pm\infty$, при каждом фиксированном s;

(c) $c(t)^2 \equiv \int_{-\infty}^{0} |G(t, s)|^2\, ds \to 0$ при $t \to \infty$;

(d) при $v \in \mathscr{H}$ и самосопряженном A

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)\, e^{-isA} v\, ds = e^{-it\varphi(A)} g(A)\, v.$$

Доказательство. (a) Для каждого фиксированного t функция $G(t, \cdot)$ есть фурье-образ некоторой функции с компактным носителем и вторыми производными из L^1. Следовательно, $(1+t^2) \times G(t, \cdot) \in L^\infty$, так что $G(t, \cdot)$ заведомо принадлежит L^1.

(b) Очевидно, $|G(t, s)| \leqslant (2\pi)^{-1/2} \|g\|_1$, так что достаточно доказать (b) для g, являющейся суммой функций вида $e^{-is\eta}\chi_\Omega(\eta)\, \varphi'(\eta)$, которые плотны в $L^1(I)$. Для таких g результат доказывается легко.

(c) есть просто переформулировка леммы 3(b) § 3, а (d) следует из (52). ▮

Лемма 2. Пусть $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}; \mathcal{H})$ такова, что ее фурье-образ лежит в $L^1(\mathbb{R}; \mathcal{H})$, и пусть C самосопряжен. Пусть $G(t, s)$ такая же, как в лемме 1. Тогда интеграл

$$J_h(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)\, e^{-isC} h(s)\, ds$$

существует и

$$\lim_{t \to \pm\infty} \| J_h(t) \| = 0. \tag{53}$$

Доказательство. Так как $\hat{h} \in L^1$, то h принадлежит L^∞, так что нужный интеграл существует в силу леммы 1 (a). Пусть $v \in \mathcal{H}$. Тогда

$$(v, J_h(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} (\overline{G(t, s)}\, e^{+isC} v, h(s))\, ds =$$

$$= \int (e^{it\varphi(C-k)} g(C-k)\, v, \hat{h}(k))\, dk$$

в силу теоремы Планшереля и леммы 1 (d). Поэтому

$$\| J_h(t) \| \leqslant \| \hat{h} \|_{L^1}. \tag{54}$$

Вследствие (54) достаточно показать, что (53) выполняется для тотального подмножества $\hat{h}$ в L^1, так что рассмотрим случай $\hat{h}(k) = f(k)\, u$; $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{H}$. В этом случае $J_h(t) = F_t(C)\, u$, где

$$F_t(s) = \int f(k)\, e^{-it\varphi(s-k)} g(s-k)\, dk.$$

Далее, $\|F_t\|_\infty \leqslant \|f\|_1$ при всех t и $F_t(s) \to 0$ при каждом фиксированном s, когда $t \to \pm\infty$, в силу леммы 1 (b). Следовательно, по теореме VII.2 (d), $\operatorname*{s-lim}_{t \to \pm\infty} F_t(C) = 0$, и лемма доказана. ∎

Лемма 3. Пусть $h(t)$ — сильно дифференцируемая функция из $\mathbb{R}$ в $\mathcal{H}$; предположим, что

(i) $\|h(t)\| \to 0$, когда $t \to \infty$;
(ii) $\|h'(t)\| \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$;
(iii) $|t|^\alpha \|h'(t)\| \in L^1(\mathbb{R})$ при некотором $\alpha > 0$.

Тогда $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R}; \mathcal{H})$.

Доказательство. Пусть G — фурье-образ h'. Тогда, по (ii) и (iii), $G \in L^\infty \cap L^2$ и $\|G(k) - G(l)\| \leqslant c_\theta |k - l|^\theta$ при $\theta = \min\{\alpha, 1\}$. По (i),

$$\int (v, h'(t))\, dt = \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} (v, h'(t))\, dt = \lim_{a \to \infty} [(v, h(a)) - (v, h(-a))] = 0,$$

так что $G(0)=0$. Следовательно, $\|G(k)\| \leqslant c|k|^{\theta}$. Пусть $K(k) = (ik)^{-1} G(k)$. Тогда $\int\limits_{|k| \geqslant 1} |K(k)|\, dk < \infty$, так как k^{-1} и G обе принадлежат $L^2(\pm 1, \pm\infty)$. Более того, $\int\limits_{-1}^{+1} |K(k)|\, dk < \infty$, ибо $|K(k)| \leqslant C|k|^{\theta-1}$.

Доказательство было бы закончено, если бы мы показал , что $\check{K}=h$. Но $\check{K}$ и h имеют одинаковые производные, так что $\check{K} = h+v$, где v — некоторый постоянный вектор Так как $K \in L^1$, то $\check{K}(t) \to 0$ при $t \to \infty$ вследствие леммы Римана — Лебега, поэтому из условия (i) следует, что $v=0$. ∎

Доказательство теоремы XI.23. Фиксируем $u \in \mathscr{D}$ и положим

$$I(t) = e^{-it\varphi(A)}\Omega^{-}u - e^{-it\varphi(B)}u.$$

Нужно показать, что $I(t) \to 0$, когда $t \to \infty$. Пусть $w(t) = e^{iAt}e^{-iBt}u$ и $w_{-} = \Omega^{-}u$. Тогда, по лемме 1(d) и благодаря тому, что $g(B)u = u$, $g(A)\Omega^{-}u = \Omega^{-}g(B)u = \Omega^{-}u$, имеем

$$I(t) = (2\pi)^{-1/2}\int G(t, s)\, e^{-isA}[w_{-} - w(s)]\, ds.$$

Выберем положительные C^{∞}-функции K_0 и $K_{\pm}$ так, чтобы было $K_0 \in C_0^{\infty}$, $\operatorname{supp} K_{\pm} \subset [\pm 1, \pm\infty)$ и $K_{+} + K_{-} + K_0 = (2\pi)^{-1/2}$. Тогда $I(t) = \sum\limits_{j=1}^{4} I_j(t)$, где

$$I_j(t) = \int K_{\alpha(j)}(s)\, G(t, s)\, e^{-isA}[w_{-} - w(s)]\, ds$$

для $j = 1, 2$, причем $\alpha(1) = 0$, $\alpha(2) = +$,

$$I_3(t) = \int K_{-}(s)\, G(t, s)\, e^{-isA}[w_{+} - w(s)]\, ds,$$

$$I_4(t) = \int K_{-}(s)\, G(t, s)\, e^{-isA}[w_{-} - w_{+}]\, ds,$$

причем $w_{+} = \Omega^{+}u$. По предположениям теоремы, а также по леммам 2 и 3, $I_2(t)$ и $I_3(t)$ стремятся к нулю при $t \to \infty$. Так как

$$|I_1(t)| \leqslant 2\|u\|(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{\operatorname{supp} K_0} |G(t, s)|\, ds,$$

то $I_1(t) \to 0$, когда $t \to \infty$, вследствие неравенства $|G(t, s)| \leqslant (2\pi)^{-1/2}\|g\|_1$, леммы 1(b) и теоремы о мажорированной сходимости.

Остается только показать, что $I_4(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Но, в силу леммы 1 § 3, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |(v, e^{-isB}u)|^2 \leqslant 2\pi |||u|||^2 \|v\|^2$. Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |(v, e^{-isA}w_{\pm})|^2\, ds \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |((\Omega^{\pm})^{*}v, e^{-isB}u)|^2\, ds \leqslant 2\pi\|v\|^2\, |||u|||^2.$$

Отсюда следует, что

$$\int |K_-(s)|^2 |(v, e^{-isA}(w_- - w_+))|^2 ds \leqslant \text{const} \|v\|^2,$$

поэтому $|I_4(t)| \leqslant \text{const}\, c(t)$, где $c(t)$ определена в лемме 1 (с). В силу этой леммы, $I_4(t) \to 0$. ∎

В большинстве случаев, когда реально нужна инвариантность волновых операторов (см. пример 1 (заново) в § 10 или пример 4 в § 11), предположения теории Като — Бирмана выполнены, а из них в качестве следствия уже вытекает инвариантность волновых операторов. Тем не менее теорема XI.23 интересна, так как она показывает, что принцип инвариантности может иметь место даже тогда, когда нет никаких сведений об асимптотической полноте.

Пример 1. Допустим, что выполнены условия теоремы XI.16, причем (45) заменено более сильным допущением

$$\int_{+1}^{\infty} t^{\alpha} \left(\int_{a<|x|<b} |V(xt)|^2 dx \right)^{1/2} dt < \infty.$$

Это условие, в частности, справедливо, если $|V(x)| \leqslant c|x|^{-1-\varepsilon}$ вблизи ∞ Тогда $\Omega^{\pm}(H^2, H_0^2)$ существуют.

Пример 2. Мы хотим применить принцип инвариантности для того, чтобы показать отсутствие релятивистских поправок для рассеяния электронов во внешнем магнитном поле (не обязательно постоянном), по крайней мере в том приближении, когда магнитный момент электрона полагается равным $e\hbar/mc$ (физическое значение этой величины отличается от этого примерно на 1% вследствие поправок, относимых за счет квантовой электродинамики). В единицах, в которых $\hbar = c = 1$, нерелятивистский гамильтониан уравнения Шредингера есть оператор

$$H_S(A) = \frac{(p - eA)^2}{2m} + \frac{e}{2m}(\sigma \cdot B),$$

действующий в $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)$, где, как обычно, $p = -i\,\text{grad}$. Вектор σ состоит из спиновых матриц Паули

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

A есть магнитный векторный потенциал и $B = \text{rot}\, A$. Релятивистская теория описывается гамильтонианом Дирака

$$H_D(A) = \alpha \cdot (p - eA) + m\beta,$$

действующим в $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$. Если $\mathbb{C}^4$ реализовано в виде $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, то принятый выбор α, β таков

$$\alpha_i = \sigma_1 \otimes \sigma_i, \quad \beta = \sigma_3 \otimes 1.$$

Прямая элементарная формальная выкладка показывает, что

$$1 \otimes H_S(A) = (2m)^{-1}[H_D^2(A) - m^2].$$

Если A из C^1, причем A и ∇A ограничены, то эта формальная выкладка приводит к равенству на уровне самосопряженных операторов. Если, кроме того, $|A(r)| \leqslant C(1+r)^{-1-\varepsilon}$, то $\Omega^\pm(H_D(A), H_D(0))$ существуют, как можно установить методом стационарной фазы. Далее, если применим принцип инвариантности (теорема XI.23), то

$$\Omega^\pm(H_D(A), H_D(0)) = 1 \otimes \Omega^\pm(H_S(A), H_S(0)).$$

Тем самым продемонстрировано отсутствие релятивистских поправок к рассеянию, по крайней мере если рассеяние описывается в переменных координат и импульсов. Разумеется, если в описании участвуют асимптотические скорости или энергии, то не следует забывать о релятивистской кинематике.

XI.4. Квантовое рассеяние I: двухчастичный случай

Мы рассмотрим особенно подробно рассеяние в двухчастичной квантовой системе, или, что эквивалентно, рассеяние одной частицы во внешнем потенциале. Это наиболее тщательно изученный раздел теории рассеяния, и здесь существует множество разнообразных интересных результатов.

Гильбертово пространство системы двух частиц представимо в виде

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(\mathbb{R}^3) = L^2(\mathbb{R}^6),$$

а свободный гамильтониан равен

$$\tilde{H}_0 = -\frac{1}{2\mu_1}\Delta_1 - \frac{1}{2\mu_2}\Delta_2,$$

где Δ_i — трехмерный лапласиан по координате $\mathbf{r}_i$, причем $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3$, а пара $\mathbf{r} = \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle$ — точка в $\mathbb{R}^6$. Гамильтониан со взаимодействием равен

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0 + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

где V — функция из $L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Поэтому, согласно теореме Като (теорема X.16), $\tilde{H}$ самосопряжен в $C_0^\infty(\mathbb{R}^6)$. Позже мы наложим на V более жесткие ограничения.

Прежде всего произведем замену координат, чтобы отделить движение центра масс. Новыми координатами будут

$$\mathbf{R} = (\mu_1 + \mu_2)^{-1}(\mu_1\mathbf{r}_1 + \mu_2\mathbf{r}_2), \qquad \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

Пусть U — унитарный оператор в $L^2(\mathbb{R}^6)$, заданный отображением

$$(Uf)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f((\mu_1 + \mu_2)^{-1}(\mu_1\mathbf{x} + \mu_2\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

и пусть $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ обозначают операторы умножения на координату. Обозначим $U\mathbf{r}_1U^{-1}$ через $\mathbf{R}$, а $U\mathbf{r}_2U^{-1}$ через $\mathbf{r}_{12}$. Тогда

$$U\tilde{H}U^{-1} = -\frac{1}{2(\mu_1+\mu_2)}\Delta_{\mathbf{R}} - \frac{1}{2m}\Delta_{\mathbf{r}_{12}} + V(\mathbf{r}_{12}),$$
$$U\tilde{H}_0U^{-1} = -\frac{1}{2(\mu_1+\mu_2)}\Delta_{\mathbf{R}} - \frac{1}{2m}\Delta_{\mathbf{r}_{12}},$$

где $m^{-1}=\mu_1^{-1}+\mu_2^{-1}$ (задача 40). Запишем далее $L^2(\mathbb{R}^6)$ в виде $L^2(\mathbb{R}^3)\otimes L^2(\mathbb{R}^3)$, причем теперь переменные суть $\mathbf{R}$ и $\mathbf{r}_{12}$. Тогда $U\tilde{H}_0U^{-1}$ и $U\tilde{H}U^{-1}$ как операторы в $\tilde{D}\equiv C_0^\infty(\mathbb{R}^3)\otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)\subset C_0^\infty(\mathbb{R}^6)$ можно разложить следующим образом:

$$U\tilde{H}_0U^{-1}=h_0\otimes I + I\otimes H_0, \qquad U\tilde{H}U^{-1}=h_0\otimes I + I\otimes H,$$

где

$$h_0=-[2\mu_1+2\mu_2]^{-1}\Delta, \qquad H_0=-(2m)^{-1}\Delta, \qquad H=-(2m)^{-1}\Delta+V(r).$$

Таким образом, $e^{-itU\tilde{H}_0U^{-1}}=e^{-ith_0}\otimes e^{-itH_0}$ и $e^{-itU\tilde{H}U^{-1}}=e^{-ith_0}\otimes\otimes e^{-itH}$. Так как эти операторы отличаются только вторыми сомножителями, то определим волновые операторы $\Omega^\pm$ и оператор рассеяния S для системы $\{e^{-itH}, e^{-itH_0}\}$ на $L^2(\mathbb{R}^3)$. Тогда волновые операторы и оператор рассеяния для исходной системы будут задаваться посредством $U^{-1}(I\otimes\Omega^\pm)U$ и $U^{-1}(I\otimes S)U$.

Приведенное описание замены координат с помощью унитарного оператора — это так называемая «активная» форма координатного преобразования. Есть и вторая — так называемая «пассивная» форма. В этой последней интерпретации $-\Delta_1-\Delta_2$ и $-{}^1/_2\Delta_{\mathbf{R}}-2\Delta_{\mathbf{r}_{12}}$ рассматриваются как *один и тот же* оператор (а не как унитарно эквивалентные операторы), записанный в разных системах координат. Когда мы сталкиваемся с несколькими заменами координат, как это будет, например, в § 6, то эта вторая, «пассивная», интерпретация с точки зрения обозначений проще, чем первая, «активная». Поэтому в дальнейшем мы будем придерживаться «пассивной» интерпретации.

Из обсуждения в предыдущих разделах очевидно, что существование состояний рассеяния эквивалентно существованию операторов $\Omega^\pm(H, H_0)$. Заметим, что единственность состояний рассеяния тривиальна, так как если и $\|e^{-iHt}\psi_1-e^{-iH_0t}\varphi\|$, и $\|e^{-iHt}\psi_2-e^{-iH_0t}\varphi\|$ стремятся к нулю при $t\to-\infty$, то $\psi_1-\psi_2=0$ вследствие линейности и равномерной ограниченности e^{-iHt}.

Основная теорема существования следующая.

Теорема XI.24 (теорема Хака — Кука). Пусть $V\in L^2(\mathbb{R}^3)+L^r(\mathbb{R}^3)$ при $2\leqslant r<3$. Пусть $H_0=-\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$ и $H=H_0+V$. Тогда $\Omega^\pm(H, H_0)$ существуют.

Мы приведем три разных доказательства. Все они основаны на методе Кука и иллюстрируют различные способы оценки $\|Ve^{-itH_0}\varphi\|$.

Первое доказательство теоремы XI.24. Это самое «элементарное» доказательство: оно основано на прямых выкладках и не требует ни интерполяции, ни применения метода стационарной фазы. Выберем некоторое $\gamma > 0$ и положим

$$\varphi_\gamma(x) = \gamma^{3/4}\exp(-{}^1/_2\gamma x^2).$$

Тогда

$$(e^{-itH_0}\varphi_\gamma)(x) = \alpha(t)^{3/4}\exp(-{}^1/_2[\alpha(t) + i\beta(t)]x^2), \tag{55}$$

где $\beta(t)$ — подходящая вещественнозначная функция и $\alpha(t) = \gamma(1+4t^2\gamma^2)^{-1}$. Чтобы доказать (55), достаточно заметить, что с точностью до константы $\hat{\varphi}_\gamma$ есть $\exp(-{}^1/_2p^2\gamma^{-1})$, так что $(e^{-itH_0}\varphi_\gamma)^\wedge$ есть $\exp(-{}^1/_2p^2\gamma(t)^{-1})$, где $\gamma(t)^{-1} = \gamma^{-1} - 2it$. Отсюда (55) следует непосредственно, а константу легко подсчитать, используя равенство $\|e^{-itH_0}\varphi_\gamma\|_2 = \|\varphi_\gamma\|_2$. Из (55) легко увидеть (задача 42), что для $k > 0$

$$\|(1+|x|)^k e^{-itH_0}\varphi_\gamma\|_\infty \leqslant c(1+|t|)^{-3/2+k}. \tag{56}$$

Следовательно,

$$\|Ve^{-itH_0}\varphi_\gamma\|_2 \leqslant c\|(1+|x|)^{-k}V\|_2(1+|t|)^{-3/2+k} \leqslant$$
$$\leqslant c'(\|V_2\|_2 + \|V_r\|_r)(1+|t|)^{-3/2+k},$$

если $V = V_2 + V_r \in L^2 + L^r$ и $r^{-1} = {}^1/_2 - k/(3+\varepsilon)$ с некоторым $\varepsilon > 0$. Это следует из неравенства Гёльдера и из того, что $(1+|x|)^{-k} \in L^m$ при всех $m > 3k^{-1}$. Поскольку $r < 3$, можно взять $k < 1/2$, так что $\int\|Ve^{-itH_0}\varphi_\gamma\|_2\,dt < \infty$ для любого γ. Так как линейные комбинации трансляций функции φ_γ плотны в L^2 (задача 43), из этой оценки методом Кука (теорема XI.4) выводится существование $\Omega^\pm(H, H_0)$. ∎

Второе доказательство теоремы XI.24. В методе Кука требуется только показать, что для любой $\varphi \in \mathscr{S}$ функция $f(t) = \|Ve^{-itH_0}\varphi\|_2$ принадлежит $L^1(1, \infty)$. Вспомним теорему XI.30, которая говорит, что

$$\|e^{-iH_0t}\varphi\|_p \leqslant t^{-3/2+3/p}\|\varphi\|_q,$$

если $\varphi \in \mathscr{S}$ и $q^{-1} = 1 - p^{-1}$, $2 \leqslant p \leqslant \infty$. Запишем $V = V_2 + V_r$, где $V_2 \in L^2$, $V_r \in L^r$, и положим $p^{-1} = {}^1/_2 - r^{-1}$, так что $p > 6$. Тогда, по неравенству Гёльдера,

$$\|Ve^{-iH_0t}\varphi\|_2 \leqslant \|V_2\|_2\|e^{-iH_0t}\varphi\|_\infty + \|V_r\|_r\|e^{-iH_0t}\varphi\|_p \leqslant$$
$$\leqslant \|V_2\|_2\|\varphi\|_1 t^{-3/2} + \|V_r\|_r\|\varphi\|_q t^{-3/2+3/p},$$

Так как $p>6$, $^3/_2-3p^{-1}>1$, поэтому $f(t)\in L^1(1,\infty)$, что и доказывает теорему. ∎

Заметим, что условие $r<3$ решающее, так как из него следует, что $p>6$ и что $t^{-\alpha}$ убывает при $\alpha>1$, а это необходимо для того, чтобы $f(t)$ принадлежало $L^1(1,\infty)$. Какие потенциалы вида $(1+|r|)^{-\beta}$ принадлежат L^2+L^r? В точности те, для которых $\beta>1$. Опять, как и в классическом случае, простая теория рассеяния не проходит для кулоновых сил. Мы рассмотрим в § 9, как следует изменить квантовую теорию рассеяния, для того чтобы включить этот случай.

Третье доказательство теоремы XI.24. По теореме XI.16, достаточно доказать, что выполнено условие (45), так как после этого можно пользоваться оценками метода стационарной фазы Запишем V в виде $V=V_2+V_r$, где $V_2\in L^2$, $V_r\in L^r$. В силу неравенства Гёльдера,

$$\left(\int\limits_{at<|x|<bt}|V_r(x)|^2dx\right)^{1/2}\leqslant\|V_r\|_r\left(\int\limits_{at<|x|<bt}dx\right)^{1/2-1/r}=$$
$$=C\|V_r\|_r\,t^{3/2-3/r}.$$

Тогда

$$\int\limits_1^\infty\left(\int\limits_{a<|x|<b}|V_r(xt)|^2dx\right)^{1/2}dt\leqslant\int\limits_1^\infty Ct^{-3/r}\|V_r\|_r\,dt<\infty,$$

поскольку $r<3$. Так как $|V(x)|^2\leqslant 2|V_2(x)|^2+2|V_r(x)|^2$, то условие (45) выполнено. ∎

Основная теорема допускает обобщения в разных направлениях. Если вместо $\mathbb{R}^3$ рассмотреть $\mathbb{R}^n$ с $n>3$, то теорема выполняется с заменой условия $r<3$ условием $r<n$; все приведенные доказательства проходят и в этом случае. Разумеется, для потенциала общего вида $V\in L^2+L^r$ может случиться, что H_0+V не будет самосопряжен в существенном на C_0^∞; все рассуждения проходят для *любого* самосопряженного расширения $(H_0+V)\upharpoonright C_0^\infty$. Если $V\in L^{n/2}+L^r$ $(n\geqslant5)$ или $L^{2+\varepsilon}+L^r$ $(n=4)$, то из общих принципов известно, что H_0+V самосопряжен на $D(H_0)$. Для $n=1$ или 2 проходит только третье доказательство; см. в связи с этим задачу 44. Второе направление обобщений связано с рассмотрением локальных особенностей.

Теорема XI.25. Пусть V — измеримая функция на $\mathbb{R}^3$, такая, что

$$V(\mathrm{r})\leqslant Cr^{-1-\varepsilon},\quad\text{если}\quad r<R,$$

с некоторыми R, $\varepsilon > 0$ и C. Пусть H — самосопряженный оператор с областью определения $D(H)$, содержащей $D_R \equiv C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{r} \mid r < R\})$, и

$$H\varphi = -\Delta\varphi + V\varphi$$

при $\varphi \in D_R$. Пусть $H_0 = -\Delta$. Тогда $\Omega^\pm(H, H_0)$ существуют.

Доказательство. Пусть χ — оператор умножения на функцию из C_0^∞, равную единице на шаре радиуса R. Тогда, как при доказательстве теоремы Хака — Кука,

$$\|[H(1-\chi)-(1-\chi)H_0]e^{-itH_0}\varphi\| \in L^1,$$

так как $H(1-\chi)-(1-\chi)H_0 = V(1-\chi) - \Delta\chi - \nabla\chi \cdot \mathrm{grad}$ и

$$\mathrm{grad}\,(e^{-itH_0}\varphi) = e^{itH_0}(\mathrm{grad}\,\varphi).$$

Но $\chi(H_0+1)^{-1}$ есть оператор Гильберта — Шмидта и потому компактен. Согласно задаче 18, отсюда следует, что $\lim\limits_{t\to\infty}\|\chi e^{-itH_0}\varphi\| = 0$. Результат теперь следует из теоремы Купша — Сандаса (теорема XI.5). ∎

Так как у нас есть явная формула для $e^{-itH_0}\varphi$, то можно непосредственно доказать, что $\lim\limits_{t\to\infty}\|\chi e^{-iH_0t}\varphi\| = 0$, не обращаясь к абстрактному результату задачи 18.

Наконец, есть еще результаты, относящиеся к квадратичным формам.

Теорема XI.26. Пусть $V = V_1 + V_2$ — такая функция на $\mathbb{R}^3$, что $W_1 \equiv (1+|x|^2)^{1/2+\varepsilon}V_1$ принадлежит $L^{3/2}+L^\infty$, а V_2 принадлежит $L^{3/2} \cap L^{3/2-\delta}$ при некоторых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$. Пусть $H_0 = -\Delta$ и $H = H_0 + V$ в смысле квадратичных форм. Тогда $\Omega^\pm(H, H_0)$ существуют.

Доказательство. Пусть $V = C_1D_1 + C_2D_2$, причем $C_1^* = W_1/|W_1|^{1/2}$, $D_1 = |W_1|^{1/2}(1+|x|^2)^{-1/2-\varepsilon}$, $C_2^* = V_2/|V_2|^{1/2}$, $D_2 = |V_2|^{1/2}$. Тогда, согласно допущениям теоремы, $C_1^*C_1$, $D_1^*D_1$, $C_2^*C_2$ и $D_2^*D_2$ все H_0-ограничены как формы с нулевой относительной гранью, так что, по теореме XI.6, достаточно доказать, что $\|D_1e^{-itH_0}\varphi\| \in L^1$ и $\|D_2e^{-itH_0}\varphi\| \in L^1$ для $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Так как $D_2 \in L^{3-2\delta}$, то второе выражение принадлежит L^1 согласно доказательству теоремы XI.24 Пусть $f = (1+|x|^2)^{-1/2-\varepsilon}$. Тогда, поскольку $D_1(H_0+1)^{-1}$ ограничен, достаточно показать, что $G(t) \equiv \|(H_0+1)fe^{-itH_0}\varphi\|$ принадлежит L^1. Заметим, что

$$(H_0+1)fe^{-itH_0}\varphi = fe^{-itH_0}[(H_0+1)\varphi] - 2(\nabla f)e^{-itH_0}(\mathrm{grad}\,\varphi) - (\Delta f)e^{-itH_0}\varphi.$$

Так как φ, $(H_0+1)\varphi$, $\mathrm{grad}\,\varphi$ принадлежат $\mathcal{S}$, а f, ∇f, $-\Delta f$ принадлежат $L^2+L^{3-\varepsilon}$, мы заключаем, что $G \in L^1$. ∎

В § XIII.4 будет доказано, что если $V \in L^{3/2} + (L^\infty)_\varepsilon$, то $\sigma_{ess}(-\Delta + V) = [0, \infty)$. Так как $\sigma_{ac} \subset \sigma_{ess}$, получаем такое

Следствие. Абсолютно непрерывный спектр $\sigma_{ac}(H)$ оператора H из теоремы XI.26 совпадает с полуосью $[0, \infty)$.

Развитые здесь методы применимы и в других случаях, когда H отличается от $-\Delta + V$, а H_0 — от $-\Delta$. Рассмотрим случай $B_0 = -\Delta + x_1$, $B = -\Delta + V + x_1$, где x_1 — первая компонента вектора $\mathbf{x}$. Эта пара описывает рассеяние в постоянном внешнем электрическом поле. Для начала нам потребуется

Лемма. Пусть $B_0 = -\Delta + x_1$. Тогда

$$e^{-itB_0} = e^{-itx_1} e^{-it^3/3} e^{+it^2 p_1} e^{-itH_0},$$

где $H_0 = -\Delta$.

Доказательство. Рассмотрим сначала одномерный случай. Пусть $f(\alpha) = e^{ip^3\alpha} x e^{-ip^3\alpha}$. Тогда для f как оператора из $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ имеем $f(0) = x$ и $f'(\alpha) = 3p^2$. Значит, $f(\alpha) = x + 3p^2\alpha$. Следовательно, для любого α оператор $f(\alpha)$ в существенном самосопряжен на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, и для всякой ограниченной борелевой функции F

$$F(x + 3p^2\alpha) = e^{ip^3\alpha} F(x) e^{-ip^3\alpha}.$$

Поэтому

$$e^{-it(p^2+x)} = e^{ip^3/3} e^{-itx} e^{-ip^3/3} = e^{-itx} e^{i(p-t)^3/3} e^{-ip^3/3} = $$
$$= e^{-itx} e^{-it^3/3} e^{it^2 p} e^{-itp^2},$$

где на втором шаге мы воспользовались тем, что $e^{itx} g(p) e^{-itx} = g(p-t)$. В n-мерном случае положим $\mathbf{p} = \langle p_1, \mathbf{p}_\perp \rangle$. Тогда

$$e^{-itB_0} = e^{-it(p_1^2 + x_1)} e^{-itp_\perp^2},$$

и нужный результат выводится из доказанного в одномерном случае. ∎

Теорема XI.27 (теорема Аврона — Хербста). Пусть $\mathbf{x} = \langle x_1, \mathbf{x}_\perp \rangle$. Пусть V — функция на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условиям

(i) $\displaystyle\int_{|y-x|<1} |V(y)|^2 dy \leqslant C(1 + |x|^2)^N$

при некоторых N и C и *всех* x;

(ii) при некоторых k и l, удовлетворяющих $2l - k > 1$, и некотором x_0

$$\left(\int_{|y-x|<1} |V(y)|^2 dy \right)^{1/2} \leqslant C(1 + |x_\perp|)^k/(1 + |x_1|)^l$$

при всех x с $x_1 < -x_0$.

Пусть $B_0 = -\Delta + x_1$ и B — некоторое самосопряженное расширение оператора $(B_0 + V) \upharpoonright \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\Omega^\pm(B, B_0)$ существуют.

Доказательство. Согласно лемме, для $\varphi \in \mathscr{S}$

$$\| Ve^{-itB_0}\varphi \|_2^2 = \int | V(x_1 - t^2, x_\perp)|^2 |(e^{-itH_0}\varphi)(x)|^2 \, dx.$$

Итак, по методу стационарной фазы, требуется только, чтобы для любых положительных a и b нашлось такое T_0, что

$$\int_{T_0}^{\infty} \left(\int_{at < |x| < bt} |V(x_1 - t^2, x_\perp)|^2 d^n x \right)^{1/2} t^{-n/2} \, dt < \infty, \tag{57}$$

причем интеграл по остальным x оценивается с помощью требования (i). Условие (57) легко получить из требования (ii). ▮

Подчеркнем, что в требовании (ii) участвуют только очень большие по модулю отрицательные x_1. Физическая причина этого состоит в том, что B_0 выталкивает частицы к отрицательным x_1. Так, например, если $B = -\Delta - |x_1|$, то обе пары $\Omega^\pm(B, -\Delta - x_1)$ и $\Omega^\pm(B, -\Delta + x_1)$ существуют. Очевидно, что ни один из этих операторов не полон сам по себе.

* * *

Понятие волновых операторов и метод Кука доказательства их существования применимы также к разнообразным нестационарным квантовомеханическим задачам. Так, рассмотрим решения нестационарного уравнения Шредингера

$$i \frac{d}{dt} \psi(t) = H(t) \psi(t),$$

где имеется в виду, что $H(t) = -\Delta + V(t)$ и любой $V(t)$ есть умножение на вещественную функцию. В § X.12 мы рассмотрели решения этого уравнения и обнаружили, что при соответствующих предположениях существует сильно непрерывное двупараметрическое семейство унитарных операторов $U(t, s)$, удовлетворяющих условиям (см теорему X.71)

$$U(t, s) U(s, v) = U(t, v), \quad U(s, s) = 1;$$
$$\frac{d}{dt}[U(t, s)\psi] = -iH(t) U(t, s)\psi, \quad \psi \in D(H_0).$$

Простой случай, когда можно с уверенностью ожидать существования решений $U(t, 0)\psi$, которые асимптотически выглядят как $e^{-itH_0}\psi$,— это случай $V(t) = V_1 + \varphi(t) V_2$, где φ имеет компактный носитель и, скажем, $V_1, V_2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$; пользуясь существованием предела $e^{i(H_0+V_1)t}e^{-iH_0t}$ при $t\to\pm\infty$, в этом случае легко доказать существование соответствующих «зависящих от времени» волновых операторов. На самом деле такие волновые операторы существуют при очень общих допущениях, например если

$$V(t)=(\cos\omega_1 t)V_1+(\cos\omega_2 t)V_2.$$

На первый взгляд это может показаться удивительным. В самом деле, почему $U(t, 0)\psi$ должно иметь простой предел, когда $H(t)$ продолжает осциллировать? Причина очень простая: состояния рассеяния размазываются по большой области, когда $t\to\pm\infty$, так что не существенно, как ведет себя потенциал локально, если он стремится к нулю на бесконечности.

Определение. Пусть $U(t, s)$ — унитарный пропагатор, связанный с $H(t)=H_0+V(t)$ в соответствии с теоремами X.70 и X.71. Будем говорить, что соответствующие волновые операторы существуют, тогда и только тогда, когда существуют

$$\Omega^\pm=\operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty} U(t, 0)^* e^{-iH_0t}. \tag{58}$$

Теорема XI.28. Пусть $V(t)=V_1(t)+V_2(t)$, где $V_1(t)$ — сильно дифференцируемая функция, принимающая значения в $L^2(\mathbb{R}^3)$, а $V_2(t)$ — сильно дифференцируемая функция, принимающая значения в $L^p(\mathbb{R}^3)$, $2\leqslant p\leqslant\infty$. Предположим, что для некоторого $\varepsilon>0$ и соответствующей постоянной c

$$\|V_1(t)\|_2\leqslant c|t|^{1/2-\varepsilon},\qquad |t|\geqslant 1;$$
$$\|V_2(t)\|_p\leqslant c|t|^{1/2-3p^{-1}-\varepsilon},\qquad |t|\geqslant 1.$$

Тогда пределы (58) существуют.

Доказательство. Пусть $\varphi, \psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$. Тогда, по теореме X.71,

$$\frac{d}{dt}(\varphi, U(t, 0)^* e^{-iH_0t}\psi)=\frac{d}{dt}(U(t, 0)\varphi, e^{-iH_0t}\psi)=$$
$$=i(\varphi, U(t, 0)^* V(t)e^{-iH_0t}\psi).$$

Следовательно, для $t>s$

$$\|U(t, 0)^* e^{-iH_0t}\psi-U(s, 0)^* e^{-iH_0s}\psi\|\leqslant\int_s^t\|V(u)e^{-iH_0u}\psi\|\,du.$$

Согласно допущениям теоремы и оценкам второго доказательства теоремы XI.24, последний интеграл сходится. Следуя методу Кука, приходим к существованию предела (58). ∎

Отметим замечательную особенность теоремы XI.28: $V(t)$ может расти на бесконечности! Пользуясь методом стационарной фазы (задача 45), можно показать, что если $V\in L^2$ и *имеет компактный носитель*, то $V(t)=\varphi(t)V$ приводит к волновым операторам, когда φ дифференцируема и растет на бесконечности не быстрее полинома.

Переплетающие соотношения $e^{-iH s}\Omega^\pm = \Omega^\pm e^{-iH_0 s}$, вообще говоря, не имеют аналога в нестационарном случае, так как $U(t+s, t)$, как правило, не стремится к «хорошему» пределу при $t \to \infty$. Однако есть один специальный случай, имеющий особый интерес для физики, когда некоторые переплетающие соотношения существуют.

Теорема XI.29. Пусть $V(t)$ удовлетворяет требованиям теоремы XI.28. Предположим далее, что $V(t+T) = V(t)$ при некотором фиксированном T и *всех* $t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$U(T, 0)\,\Omega^\pm = \Omega^\pm e^{-iH_0 T} \qquad (59)$$

и, в частности, $e^{-iH_0 t}$ коммутирует с оператором рассеяния $(\Omega^-)^*\,\Omega^+$.

Доказательство. По условию, $U(t+T, s+T) = U(t, s)$, так что $U(nT, 0) = U(T, 0)^n$. Поэтому

$$U(nT, 0)^* e^{-iH_0(n+1)T} = U(T, 0)\, U((n+1)T, 0)^* e^{-iH_0(n+1)T}.$$

Устремляя $n \to \infty$, получим (59). ∎

Восстанавливая $\hbar$ и полагая $\omega = 2\pi/T$, увидим, что теорема XI.29 утверждает следующее: хотя H_0, возможно, не сохраняется при рассеянии, энергия может изменяться лишь на $n\hbar\omega$, где $n = 0, \pm 1, \ldots$. Это нерелятивистское подтверждение первоначального правила квантования Планка!

Бóльшая часть теории рассеяния, которую мы будем дальше излагать в этом томе, допускает распространение на нестационарный случай; мы редко будем останавливаться на этом в тексте, но в Замечаниях дадим все нужные ссылки.

* * *

Вернемся теперь к основной квантовомеханической задаче о $\Omega^\pm(H, H_0)$ с $H_0 = -\Delta$. Полнота этих операторов легко устанавливается при помощи теории Като — Бирмана, если функция V достаточно быстро убывает и достаточно регулярна локально. Позже мы приведем примеры, когда полнота разрушается серьезными локальными особенностями.

Теорема XI.30. Пусть V — измеримая функция на $\mathbb{R}^n$, так что $|V|$ как форма $-\Delta$-ограничена с относительной гранью $\alpha < 1$. Определим $H = -\Delta + V$ как сумму форм, и пусть $H_0 = -\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Если $V \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то $\Omega^\pm(H, H_0)$ существуют и полны.

Доказательство. Применим теорему Бирмана (теорема XI.10). Так как $Q(H)=Q(H_0)$, эти операторы взаимно подчинены. Поэтому достаточно показать, что $|V|^{1/2}E_I(H_0)$ и $E_I(H)|V|^{1/2}$ — операторы Гильберта — Шмидта. Это будет сделано, если показать, что $|V|^{1/2}(H_0+E)^{-m}$ и $|V|^{1/2}(H+E)^{-m}$ — операторы Гильберта — Шмидта для некоторых E и m. Согласно допущению, $|V|^{1/2}\in L^2$, так что первый из операторов есть оператор Гильберта — Шмидта по теореме XI.20, до тех пор, пока $m>n/4$. Следуя доказательству теоремы XI.12, убедимся, что $|V|^{1/2}(H+E)^{-m}$ также оператор Гильберта — Шмидта. Конкретно, путем интерполяции между $(H_0+E)^{-1/2}V(H_0+E)^{-m-1/2}\in\mathfrak{I}_2$ и

$$\gamma\equiv\|(H_0+E)^{-1/2}V(H_0+E)^{-1/2}\|<\infty$$

получаем, что $|V|^{1/2}(H_0+E)^{-k-1/2}$ и $(H_0+E)^{-1/2}V(H_0+E)^{-k-1/2}$ лежат в $\mathfrak{I}_{2m/k}$ при $k=1, 2, \ldots, m$. Таким образом, выбирая E так, чтобы было $\gamma<1$, и разлагая $|V|^{1/2}(H+E)^{-m}$, получим сумму по q и l членов вида

$$V|^{1/2}(H_0+E)^{-l_0-1/2}\left[\prod_{l=1}^{q}(H_0+E)^{-1/2}V(H_0+E)^{-l_i-1/2}\right](H_0+E)^{-1/2}, \tag{60}$$

причем $\sum_{l=0}^{q}l_l=m$. Пользуясь неравенством Гёльдера для идеалов $\mathfrak{I}_p$, убеждаемся в том, что каждый член есть оператор Гильберта — Шмидта с нормой, ограниченной $c\gamma^q$, так что сумма норм Гильберта — Шмидта сходится. ∎

Последний результат несколько обескураживает, потому что для него требуется, чтобы $V\in L^1$, т. е. V должен убывать более или менее как $|x|^{-n-\varepsilon}$. С другой стороны, для существования достаточно, чтобы V убывал только как $|x|^{-1-\varepsilon}$. Позже мы и для этого случая докажем полноту, но пользуясь уже более изощренными методами; см. § XIII.8, теорему XIII.33, или § 17 этой главы. Оказывается, если V сферически-симметричен, то теория Като — Бирмана применима даже в том случае, когда потенциал убывает только как $|x|^{-1-\varepsilon}$.

Теорема XI.31. Пусть $H_0=-\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$, и пусть $V(x)=V(|x|)$ — функция только от $r=|x|$. Допустим, что

$$\int_1^\infty|V(r)|\,dr+\int_0^1 r|V(r)|\,dr<\infty. \tag{61}$$

Тогда V как форма H_0-ограничен с нулевой относительной гранью и $\Omega^\pm(H, H_0)$ существуют и полны.

Доказательство. Рассмотрим разложение $L^2(\mathbb{R}^3)=\bigoplus_{l=0}^{\infty}\bigoplus_{m=-l}^{l}\mathscr{H}_{lm}$, где $\mathscr{H}_{lm}=\{rf(r)Y_{lm}(\theta)\}$. Каждое $\mathscr{H}_{lm}$ изоморфно $L^2(0, \infty; dr)\equiv\mathscr{H}$ при соответствии $rf(r)Y_{lm}\leftrightarrow f(r)$ (см. пример 4 в дополнении к § X.1). Пусть $h_{0,l}=-(d^2/dr^2)+l(l+1)r^{-2}$ на $\mathscr{H}$ с граничным условием $f(0)=0$, когда $l=0$. Пусть $h_0=h_{0,0}$. Тогда H_0 изоморфен $\bigoplus_{l,m}h_{0,l}$. Пусть v — умножение на V в пространстве $\mathscr{H}$. Мы докажем, что

$$\operatorname{Tr}(|v|^{1/2}(h_0+1)^{-1}|v|^{1/2})<\infty. \tag{62}$$

Отсюда будет следовать, что $\lim_{E\to\infty}\||v|^{1/2}(h_0+E)^{-1}|v|^{1/2}\|=0$, и потому $|v|$ h_0-ограничен как форма с относительной гранью нуль. Так как $h_0\leqslant h_{0,l}$, то V H_0-ограничен как форма с относительной гранью нуль. Пусть $h_l=h_{0,l}+v$. Введем разложение

$$(h_l+E)^{-1}-(h_{0,l}+E)^{-1}=ABCD,$$

где $A=(h_l+E)^{-1}(h_0+1)^{1/2}$ и $D=(h_0+1)^{1/2}(h_{0,l}+E)^{-1}$ — ограниченные операторы, а $B=(h_0+1)^{-1/2}|v|^{1/2}$ и $C=(v/|v|^{1/2})\times\times(h_0+1)^{-1/2}$ — операторы Гильберта—Шмидта по (еще не доказанному) условию (62). Тогда из теоремы Куроды—Бирмана следует, что $\Omega^\pm(h_l, h_{0,l})$ существуют и полны, а следовательно, и $\Omega^\pm(H, H_0)$ существуют и полны.

Итак, остается только доказать (62). Мы утверждаем, что

$$\operatorname{Tr}(|v|^{1/2}(h_0+1)^{-1}|v|^{1/2})=\int_0^\infty|V(r)|[e^{-r}(\operatorname{sh}r)]\,dr. \tag{63}$$

Отсюда (62) вытекает вследствие (61) и простых оценок

$$\operatorname{sh}r\leqslant e^r,\qquad \operatorname{sh}r\leqslant r\operatorname{ch}r\leqslant re^r$$

при $r\geqslant 0$. Легко убедиться, что $(h_0+1)^{-1}$ — интегральный оператор с ядром (задача 47)

$$(h_0+1)^{-1}(r, r')=e^{-u}\operatorname{sh}w,\quad u=\max\{r, r'\},\quad w=\min\{r, r'\}.$$

Тогда $|v|^{1/2}(h_0+1)^{-1}|v|^{1/2}$ имеет интегральное ядро

$$K(r, r')=|v(r)|^{1/2}(h_0+1)^{-1}(r, r')|v(r')|^{1/2},$$

так что (63) соответствует формуле

$$\operatorname{Tr}A=\int_0^\infty K(r, r)\,dr. \tag{64}$$

Хотя на первый взгляд кажется, что (64) — просто непрерывный аналог формулы $\operatorname{Tr}(a_{ij})=\sum a_{ii}$ для конечных матриц, это *не есть* общее свойство интегральных операторов, ибо $K(r, r')$ определено только почти всюду и $\{(r, r') \mid r = r'\}$ имеет меру нуль! Тем не менее, когда ядро $K(r, r')$ непрерывно, а соответствующий оператор положительно определен, (64) выполняется — ниже это будет доказано в виде отдельной леммы. Из этой леммы (63) вытекает для непрерывных V, а далее простые рассуждения, основанные на аппроксимации (задача 48), завершают доказательство (63) для V общего вида. ∎

Лемма. Пусть μ — бэрова мера на локально компактном хаусдорфовом пространстве X. Пусть $\mathcal{H} = L^2(X, d\mu)$ и K — непрерывная функция на $X \times X$. Допустим, что

(i) для любой $\varphi \in \varkappa(X)$, т. е. непрерывной функции с компактным носителем, имеет место неравенство $\iint \overline{\varphi(x)}\varphi(y) K(x, y) \times d\mu(x)\, d\mu(y) \geqslant 0$ (отсюда следует, что $K(x, x) \geqslant 0$);

(ii) $\int K(x, x)\, d\mu(x) < \infty$.

Тогда найдется оператор A с конечным следом и интегральным ядром K. Более того,

$$\operatorname{Tr} A = \int K(x, x)\, d\mu(x). \tag{65}$$

Обратно, если A — положительный оператор с конечным следом и непрерывным ядром K, то (ii) имеет место и (65) выполняется.

Доказательство. Допустим, что (i) и (ii) выполнены. Пусть $f \in \varkappa(X)$, и пусть $K_f(x, y) = f(x) K(x, y) f(y)$. Тогда $K_f \in L^2(X \times X, d\mu \otimes d\mu)$, так что существует оператор Гильберта — Шмидта A_f с ядром K_f. Пусть $\{U_1, \ldots, U_n\} = \mathcal{U}$ — конечное семейство непересекающихся бэровых множеств с конечной мерой μ, и пусть $P_{\mathcal{U}}$ — проектор в $\mathcal{H}$ на подпространство, порожденное характеристическими функциями множеств U_i. Тогда

$$\operatorname{Tr}(P_{\mathcal{U}} A_f P_{\mathcal{U}}) = \sum_i \int_{U_i \times U_i} \mu(U_i)^{-1} f(x) K(x, y) f(y)\, d\mu(x)\, d\mu(y). \tag{66}$$

Упорядочим семейства $\mathcal{U}$, полагая $\mathcal{U} < \mathcal{U}'$, если $\cup U_i \subset \cup U_i'$ и всякое U_i' либо не пересекается ни с одним U_i, либо содержится в каком-либо U_i, т. е. в том и только том случае, если $\operatorname{Ran} P_{\mathcal{U}} \subset \operatorname{Ran} P_{\mathcal{U}'}$. С таким упорядочением множество семейств $\mathcal{U}$ представляет собой направленность и: (a) $P_{\mathcal{U}}$ монотонно возрастают с $\mathcal{U}$; (b) $\operatorname{s-lim} P_{\mathcal{U}} = 1$; (c) когда $\mathcal{U}$ стремится к «бесконечности», правая часть (66) сходится к $\int f(x)^2 K(x, x)\, d\mu(x)$. Согласно (i), (a) и (b),

$$\operatorname{Tr}(A_f) = \lim_{\mathcal{U}} \operatorname{Tr}(P_{\mathcal{U}} A_f P_{\mathcal{U}})$$

(обе части равенства могут a priori быть бесконечными), откуда, согласно (c) и (ii), след A_f конечен и

$$\operatorname{Tr}(A_f) = \int f(x)^2 K(x, x)\, d\mu(x).$$

Введем частичное упорядочение на множестве всех f, таких, что $0 \leqslant f \leqslant 1$ и $f \in \varkappa(X)$, посредством поточечного неравенства. Тогда при всех $\varphi \in \mathscr{H}$

$$(\varphi, A_f\varphi) \leqslant \|\varphi\|^2 \operatorname{Tr}(A_f) \leqslant \|\varphi\|^2 \int K(x, x)\, d\mu(x).$$

Более того, для $\varphi \in \varkappa(X)$ тривиально существует $\lim\limits_{f\nearrow 1}(\varphi, A_f\varphi)$. Пользуясь плотностью множества $\varkappa(X)$ и поляризационным тождеством, убеждаемся, что существует $\operatorname{w-lim}\limits_{f\nearrow 1} A_f = A$. Далее, для любого оператора B конечного ранга

$$\operatorname{Tr}(AB)| = \lim_{f\nearrow 1} |\operatorname{Tr}(A_f B)| \leqslant \|B\| \lim_{f\nearrow 1} \operatorname{Tr}(A_f) \leqslant \|B\| \int K(x, x)\, d\mu(x).$$

Следовательно, A принадлежит классу операторов со следом. Выбирая $\varphi \in \varkappa(X)$, найдем, что $K(x, y)$ есть интегральное ядро оператора A. Наконец, (65) следует из повторного применения аргументации, связанной с $P_{\mathscr{U}}$.

Обратное утверждение также следует из аргументации, связанной с $P_{\mathscr{U}}$. ∎

Пример 1 (рассеяние в магнитном поле). Пусть $H_0 = -\Delta$ в L^2 и

$$H = \sum (i\partial_j - a_j(x))^2 + V(x),$$

где V, a_j и a_j^2 принадлежат $L_\delta^2(\mathbb{R}^n)$ с $\delta > n/2$. Предположим, кроме того, что $Q(H) = Q(H_0)$, и потому $(H+E)^{-1/2}\partial_j$ ограничены. Тогда для любого ограниченного интервала I четыре оператора

$$E_I(H)\,\partial_j a_j\, E_I(H_0), \qquad E_I(H)\, a_j\partial_j\, E_I(H_0),$$
$$E_I(H)\, a_j^2 E_I(H_0) \quad \text{и} \quad E_I(H)\, V E_I(H_0)$$

принадлежат классу операторов со следом. Три последних оператора по теореме XI.21 принадлежат $\mathscr{I}_1$ даже без множителя $E_I(H_0)$. Первый принадлежит $\mathscr{I}_1$, так как $E_I(H)\,\partial_j$ ограничен, а $a_j E_I(H_0)$ имеет конечный след. Значит, $E_I(H)\,(H - H_0)\,E_I(H_0)$ принадлежит $\mathscr{I}_1$, а поскольку $Q(H) = Q(H_0)$, то применима теорема Бирмана. Отсюда заключаем, что $\Omega^\pm(H, H_0)$ существуют и полны.

Пример 2. Этот пример не физический, но он показывает мощь теоремы Бирмана. Пусть $H_0 = -\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Пусть $a \in L_\delta^2(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{grad} a \in L_\delta^2(\mathbb{R}^n)$ с $\delta > n/2$; допустим еще, что $a \geqslant 0$.

Определим

$$H = H_0 + \Delta a \Delta$$

как сумму квадратичных форм. Поскольку $\Delta a \Delta$ — оператор четвертого порядка, то это весьма сингулярное возмущение H_0. Очевидно, $Q(H) = Q(H_0) \cap D(a^{1/2}\Delta) \subset Q(H_0)$. Более того, $D(H_0) \subset Q(H)$. Следовательно, H и H_0 взаимно подчинены. Записывая $H - H_0$ в виде $\sum_j (\partial_j) a (\partial_j \Delta) + \partial_j (\partial_j a) \Delta$ и пользуясь тем, что $E_I(H) \partial_j$, как и в примере 1, ограничен, убеждаемся, что

$$E_I(H)(H - H_0) E_I(H_0) \in \mathfrak{J}_1,$$

и потому $\Omega^\pm(H, H_0)$ существуют и полны по теореме Бирмана.

Теорема XI.25 утверждает, что локальные особенности V не препятствуют существованию $\Omega^\pm(-\Delta + V, -\Delta)$. Можно задаться вопросом, влияют ли они на полноту; как мы сейчас увидим, ответ на этот вопрос в основном отрицателен.

Определение. Самосопряженный оператор H называется **сильно полуограниченным локальным возмущением оператора $H_0 = -\Delta$** в том и только том случае, если

(i) $Q(H) \subset Q(H_0)$ и $H_0 \leqslant c_1 (H + c_2)$ при соответствующих постоянных c_1 и c_2;

(ii) для C^∞-функции $f \in \mathcal{D}_{L^\infty}$ с $D^\alpha f \in L^\infty$ при всех α и для $\varphi \in D(H)$ имеем $f\varphi \in D(H)$ и

$$H(f\varphi) = f(H\varphi) - 2\nabla f \cdot \nabla\varphi - \varphi\Delta f. \tag{67}$$

Отметим, что, вследствие (i), если $\varphi \in D(H)$, то $\nabla\varphi \in L^2$. Условие (ii) утверждает, что в каком-то смысле $H - H_0$ есть оператор умножения.

Предложение. (a) Пусть $V = V_1 + V_2$, где $V_1 \geqslant 0$ принадлежит L^1_{loc}, а V_2 как форма $-\Delta$-ограничен с относительной гранью $\alpha < 1$. Тогда $H = -\Delta + V$ как сумма форм на $Q(H_0) \cap Q(V_1)$ есть сильно полуограниченное локальное возмущение оператора H_0.

(b) Допустим, что W также удовлетворяет условиям в (a). Пусть $\tilde{H} = -\Delta + W$. Если $f \in \mathcal{D}_{L^\infty}$ имеет носитель в $\{x \mid V(x) = W(x)\}$, то для всех $\varphi \in D(H)$ имеем $f\varphi \in D(\tilde{H})$ и $\tilde{H}(f\varphi) = H(f\varphi)$.

Доказательство. (a) Условие (i) совсем просто, поэтому проверить надо только условие (ii). Пусть $\varphi \in C_0^\infty$ и $f \in \mathcal{D}_{L^\infty}$. Тогда, очевидно, $f\varphi \in Q(-\Delta)$ и

$$\nabla(f\varphi) = f\nabla\varphi + \varphi\nabla f.$$

С помощью простого предельного перехода отсюда следует, что если $\varphi \in Q(-\Delta)$, то $f\varphi \in Q(-\Delta)$. Пусть $\varphi \in Q(-\Delta)$ и $\psi \in C_0^\infty$. Тогда

$$(\varphi, (-\Delta) f\psi) = (f\varphi, (-\Delta)\psi) - 2((\nabla f)\varphi, \nabla\psi) - ((\Delta f)\varphi, \psi).$$

Снова при помощи предельных переходов этот результат распространяется на все $\psi \in Q(H_0)$. Очевидно, если $\int V_1 |\varphi|^2 dx < \infty$, то $\int V_1 |f|^2 |\varphi|^2 dx < \infty$; таким образом, если $\psi, \varphi \in Q(H)$, то $f\varphi \in Q(H)$ и

$$(\psi, H(f\varphi)) = (f\psi, H\varphi) - 2((\nabla f)\psi, \nabla\varphi) - ((\nabla f)\psi, \varphi). \tag{68}$$

Напомним, что, по построению форм (§ VIII.6), область определения H состоит из тех $\varphi \in Q(H)$, для каждой из которых существует такое $\eta \in \mathscr{H}$, что $(\psi, \eta) = (\psi, H\varphi)$ при всех $\psi \in Q(H)$. В таком случае $\eta = H\varphi$. Исходя из этого и из условия (68), заключаем, что если $\varphi \in D(H)$, то $f\varphi \in D(H)$ и выполнено (67).

(b) Так как $\varphi \in D(H) \subset Q(H)$, то $\varphi \in Q(H_0)$ и $\int |\varphi|^2 V_1 dx < \infty$. Поскольку $V = W$ на $\operatorname{supp} f$, то $\int |f|^2 |\varphi|^2 W_1 dx < \infty$ и, следовательно, $\varphi \in Q(\tilde{H})$. В силу (ii), $(\psi, H(f\varphi)) = (\psi, \tilde{H}(f\varphi))$ для всех $\psi \in Q(H_0)$, так что $f\psi$, $(\nabla f)\psi$, $(-\Delta f)\psi \in Q(V_1)$. Так как всякая $\psi \in Q(W_1)$ обладает этим свойством, то $H = \tilde{H}$. ∎

Теорема XI.32. Пусть H — сильно полуограниченное локальное возмущение $H_0 = -\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Пусть W — функция, удовлетворяющая условиям

(i) W H_0-ограничена как форма с относительной гранью $\alpha < 1$; $\tilde{H} = -\Delta + W$ определен как сумма форм;

(ii) H равен $-\Delta + W$ вне сферы радиуса R в том смысле, что если $f \in \mathscr{D}_{L^\infty}$ имеет носитель в $\{x \mid |x| > R\}$ и $\varphi \in D(H)$ или $\varphi \in D(\tilde{H})$, то $f\varphi \in D(H) \cap D(\tilde{H})$ и $H(f\varphi) = \tilde{H}(f\varphi)$;

(iii) $\Omega^\pm(\tilde{H}, H_0)$ существуют и полны.

Тогда $\Omega^\pm(H, H_0)$ существуют и полны.

Доказательство. В силу цепного правила и предложения 3 § 3, достаточно доказать, что $\Omega^\pm(H, \tilde{H})$ и $\Omega^\pm(\tilde{H}, H)$ существуют. Пусть J — умножение на функцию из $\mathscr{D}_{L^\infty}$, равную 0 при $|x| < R$ и равную 1 при $|x| > 2R$. Поскольку $Q(H) \subset Q(H_0)$ и $Q(\tilde{H}) \subset Q(H_0)$, то $(H + c)^{-1/2}(H_0 + 1)^{1/2}$ и $(\tilde{H} + c)^{-1/2}(H_0 + 1)^{1/2}$ ограничены при достаточно большом c. По теореме XI.20, $(1 - J)(H + c)^{-1/2}$ и $(1 - J)(\tilde{H} + c)^{-1/2}$ принадлежат $\mathscr{I}_p$, если $p > \max\{n, 2\}$, и, в частности, компактны. Значит, $\Omega^\pm(H, \tilde{H}; 1 - J)$ и $\Omega^\pm(\tilde{H}, H; 1 - J)$

существуют (и фактически обращаются в нуль) в силу леммы 2 § 3 и утверждения задачи 18. Остается только показать, что $\Omega^{\pm}(H, \tilde{H}; J)$ и $\Omega^{\pm}(\tilde{H}, H; J)$ существуют.

Мы утверждаем, что, следуя доказательству теоремы Бирмана, достаточно показать, что для любого ограниченного интервала I

$$E_I(H)(HJ - J\tilde{H})\, E_I(\tilde{H}) \in \mathfrak{I}_1. \tag{69}$$

Действительно, по условию (ii), $JD(H) \subset D(\tilde{H})$, $JD(\tilde{H}) \subset D(H)$, так что необходимое условие подчинения выполнено: $(\tilde{H}+c)^{-1} \times \times J(H+c)$ и $(H+c)^{-1} J(\tilde{H}+c)$ ограничены. В силу равенства (67) и условия (ii), $(HJ - J\tilde{H})\varphi = -2\nabla\cdot(\nabla J)\varphi - (\Delta J)\varphi$ при $\varphi \in D(\tilde{H})$. Поскольку $Q(H_0) \supset Q(H) \supset \operatorname{Ran} E_I(H)$, получаем, что $(E_I(H))\nabla$ ограничен. Следовательно, так как ∇J, $\Delta J \in C_0^\infty$ и $(\tilde{H}+c)^l E_I(\tilde{H})$ ограничен, надо доказать только, что при некотором целом l и любом $g \in C_0^\infty$

$$g(\tilde{H}+c)^{-l} \in \mathfrak{I}_1. \tag{70}$$

По условию (i), $(H_0+c)^{1/2}(\tilde{H}+c)^{-1/2}$ ограничен. По теореме XI.22,

$$g(H_0+c)^{-1/2} \in \mathfrak{I}_q, \tag{71}$$

если только $q > n$. Следовательно,

$$g(\tilde{H}+c)^{-1/2} \in \mathfrak{I}_q, \tag{72}$$

если $q > n$. Пусть $A = (\tilde{H}+c)$ и $D = \partial_i$. Тогда можно утверждать, что

$$gA^{-1} \quad \text{и} \quad DgA^{-1} \quad \text{принадлежат} \quad \mathfrak{I}_q. \tag{73}$$

Первое очевидно вследствие (72), а второе вытекает из ограниченности $DA^{-1/2}$, (72) и простой выкладки:

$$DgA^{-1} = DA^{-1}g + D[A^{-1}, g] = DA^{-1}g + DA^{-1}DhA^{-1} + DA^{-1}fA^{-1},$$

где $h = 2\nabla\cdot g$ и $f = -\Delta g \in C_0^\infty$. Подобная же выкладка показывает, что

$$\begin{aligned} gA^{-j-1} &= A^{-1}gA^{-j} + [g, A^{-1}]A^{-j} = \\ &= A^{-1}gA^{-j} - A^{-1}DhA^{-j-1} - A^{-1}fA^{-j-1}. \end{aligned} \tag{74}$$

Из (73) и (74) следует, что если $gA^{-j} \in \mathfrak{I}_r$ при всех $g \in C_0^\infty$, то $gA^{-j-1} \in \mathfrak{I}_s$ при всех $g \in C_0^\infty$, где $s^{-1} = \min\{1, r^{-1}+q^{-1}\}$. Таким образом, начиная с (73), мы убеждаемся по индукции, что $gA^{-j} \in \mathfrak{I}_{q_j}$, где $q_j = \min\{1, jq^{-1}\}$, при всех $g \in C_0^\infty$. Выбирая $l > q$, добиваемся выполнения (70). ∎

Следствие. Если $V=V_1+V_2$ имеет компактный носитель, где $V_1 \geqslant 0$, $V_1 \in L^1$ и V_2 $-\Delta$-ограничен как форма с относительной гранью $\alpha < 1$, то $\Omega^\pm(-\Delta+V,\ -\Delta)$ существуют и полны.

Условие $H_0 \leqslant c_1(H+c_2)$ играет решающую роль во всех приведенных результатах, о чем говорит яркий пример, приводимый чуть ниже.

До сих пор в этом разделе мы изложили способ доказательства того, что $\operatorname{Ran}\Omega^+ = \operatorname{Ran}\Omega^-$, который, в частности, пригоден для $-\Delta+V$, когда $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Ниже мы рассмотрим и другие методы доказательства асимптотической полноты. Но чтобы читатель не подумал, что асимптотическая полнота всегда имеет место, укажем некоторые патологические примеры.

Контрпример. Существует потенциал V, ограниченный на компактных подмножествах $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ и такой, что

(i) V имеет компактный носитель в $\mathbb{R}^3$;
(ii) $H=-\Delta+V$ самосопряжен в существенном на $D(-\Delta)\cap D(V)$;
(iii) $-\Delta+V$ — положительный оператор;
(iv) волновые операторы $\Omega^\pm = \operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty} e^{itH}e^{-itH_0}$ существуют,

однако

(v) $\operatorname{Ran}\Omega^+ \neq \operatorname{Ran}\Omega^-$.

Опишем потенциал V, построенный Д. Пирсоном. Он состоит из основных блоков размера $8(a+a^4)$, из восьми прямоугольных ям и барьеров каждый, как показано на рис. XI.3. Определим a_n

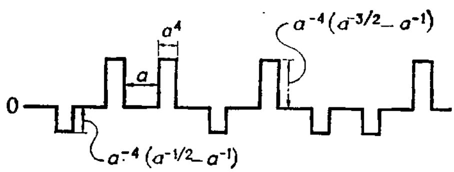


Рис. XI.3. Блоки Пирсона.

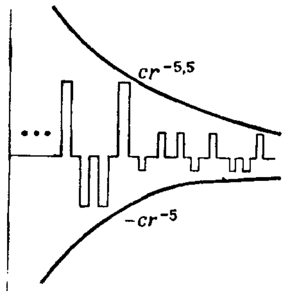


Рис. XI.4. Схематическое изображение потенциала Пирсона.

равенством $8(a_n+a_n^4)=2^{-n}$. Потенциал V будет некоторой функцией W от $|\mathbf{r}|$, равной 0 на $(1, \infty)$ и равной основному блоку с $a=a_{n+1}$ на $(2^{-n-1},\ 2^{-n})$. Такой V показан на рис. XI.4: он нигде не выходит за кривую $cr^{-5,5}$ сверху и за кривую $-cr^{-5}$ снизу, а его максимальные осцилляции почти достигают этих кривых. Заметим также, что при $r \to 0$ он «по большей части» равен нулю.

Физическая причина нарушения асимптотической полноты состоит в том, что есть падающие волны, которые в отдаленном будущем состоят из двух частей, одна из которых рассеивается наружу, а другая остается сосредоточенной вблизи начала координат. Положительные горбы не позволяют частице достичь начала координат за конечное время, и именно по этой причине H в существенном самосопряжен. Отрицательные горбы не позволяют частице просто отразиться. Мы не станем доказывать указанных свойств потенциала V, но отошлем читателя к литературе, приведенной в Замечаниях.

Теперь, чтобы проиллюстрировать широту области применимости описанных методов, рассмотрим два последних примера: один представляет модель рассеяния от тонкой пластинки вещества, а второй — рассеяния на веществе, заполняющем бесконечное полупространство.

Пример 3. Пусть W — функция на $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющая неравенству $|W(x)| \leqslant C_1(1+|x|)^{-\alpha}$. Фиксируем некоторое k и положим

$$V(x) = \sum_{\substack{n_1=0, \ldots, k \\ n_2, n_3 \in \mathbb{Z}}} W(x_1-n_1,\ x_2-n_2,\ x_3-n_3).$$

Пока $\alpha > 2$, метод оценки сумм с помощью интегралов легко позволяет заключить, что сумма сходится и

$$|V(x)| \leqslant C(1+|x_1|)^{-(\alpha-2)}.$$

Волновые операторы $\Omega^{\pm}(-\Delta+V,\ -\Delta)$ описывают рассеяние одной частицы на решетке частиц, расположенных в пластинке с $k+1$ плоскостями рассеивающих центров. Если $\hat{u}$ есть C^∞-функция с компактным носителем, удаленным от точек, где $k_1=0$, то по методу стационарной фазы легко убедиться, что

$$\|Ve^{it\Delta}u\|_2 \leqslant (1+|t|)^{-(\alpha-2)}.$$

Отсюда следует, что если $\alpha > 3$, то $\Omega^{\pm}(-\Delta+V,\ -\Delta)$ существуют. Далее можно следующим образом доказать, что $\operatorname{Ran}\Omega^+ = \operatorname{Ran}\Omega^-$. Функция V периодична в направлениях 2 и 3; по этой причине $H = -\Delta+V$ — разложимый (в прямой интеграл) оператор в смысле § XIII.16. Положение здесь несколько отлично от того, которое обсуждается в § XIII.16, где рассматриваются потенциалы, периодические во всех трех направлениях. В этом случае операторы слоя имеют чисто дискретный спектр. В рассматриваемом здесь случае операторы слоев $H_0(k)$ для $-\Delta$ имеют только абсолютно непрерывный спектр, а операторы слоев $H(k)$ имеют отчасти абсолютно непрерывный спектр, но, возможно, также и некоторые собственные значения. Можно показать, что $(H(k)+i)^{-1}-(H_0(k)+i)^{-1}$ принадлежит классу операторов со следом при всех k, откуда следует, что $\operatorname{Ran}\Omega^+(H, H_0)=\operatorname{Ran}\Omega^-(H, H_0)=\int^{\oplus} P_{ac}(H(k))\,dk$. Детали этой конструкции читатель может найти в литературе, указанной в Замечаниях. Иногда $H(k)$ может вносить примесь точечного спектра в абсолютно непрерывную часть спектра H (как в § XIII.16), и в этом случае $\operatorname{Ran}\Omega^+=\operatorname{Ran}\Omega^-\neq\operatorname{Ran}P_{ac}(H)$.

Пример 4. Пусть W — ограниченная периодическая функция на $\mathbb{R}$, и пусть $H_0=-d^2/dx^2$, $H_1=H_0+W$. Как будет разъяснено в § XIII.16, H_1 моделирует движение электрона в твердом теле. Пусть

$$V(x)=\begin{cases} W(x), & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

так что $H=H_0+V$ описывает рассеяние электрона на большом (в нашей идеализированной модели — полубесконечном) куске твердого тела. Мы ожидаем, что при $t\to\infty$ любое решение $e^{-iHt}\varphi$, где $\varphi\in\operatorname{Ran}P_{ac}(H)$, приближается к сумме свободной плоской волны, движущейся влево, и волны $e^{-iH_1t}\psi$, движущейся вправо внутри твердого тела. Докажем это.

Пусть J — умножение на C^∞-функцию φ на $\mathbb{R}$, которая равна нулю на $(-\infty, -1)$ и единице на $(1, \infty)$. Тогда, как при доказательстве теоремы XI.32, $E_I(A)(AJ-JB)E_I(B)\in\mathfrak{I}_1$ во всех пяти случаях, которые получатся, если в качестве пары $\langle A, B\rangle$ взять $\langle H_0, H_0\rangle$, $\langle H_1, H_1\rangle$, $\langle H, H\rangle$, $\langle H, H_1\rangle$ и $\langle H_1, H\rangle$, и то же самое остается справедливым, если заменить J на $1-J$ и поменять местами H_0 и H_1. Более того, так как $D(H_1)=D(H)=D(H_0)$ и $JD(H_0)\subset D(H_0)$, то все пары операторов взаимно подчинены.

Определим теперь для $B=H, H_1, H_0$ операторы

$$P_r^{\pm}(B)=\Omega^{\pm}(B, B; J), \qquad P_l^{\pm}(B)=\Omega^{\pm}(B, B; 1-J),$$

где все пределы существуют в силу предыдущего результата и теоремы Бирмана. Так как $J^*=J$ и $(J^2-J)(B+1)^{-1}$ компактен, то все $P_{l,r}^{\pm}(B)$ суть ортогональные проекторы, причем

$$P_l^{\pm}(B)+P_r^{\pm}(B)=P_{ac}(B) \quad \text{и} \quad P_l^{\pm}(B)P_r^{\pm}(B)=0$$

в силу переплетающих соотношений для $\Omega^{\pm}(A, B; J)$. Более того, $\operatorname{Ran}P_l^{\pm}(B)$ составлено в точности из $\varphi\in\operatorname{Ran}P_{ac}(B)$, так что $e^{-itB}\varphi$ сдвигается к $-\infty$ при $t\to\mp\infty$ в том смысле, что для любого a

$$\lim_{t\to\mp\infty}\int_a^\infty |(e^{-iBt}\varphi)(x)|^2\,dx=0.$$

Положим

$$W_0^\pm=\Omega^\pm(H,\ H_0;\ 1-J),\qquad W_1^\pm=\Omega^\pm(H,\ H_1;\ J).$$

Пользуясь полученными результатами, нетрудно показать, что эти операторы существуют и что $W_0^\pm$ суть частичные изометрии с начальными пространствами $P_l^\pm(H_0)$ и конечными пространствами $P_l^\pm(H)$. То же справедливо и для W_1, если заменить H_0 на H_1, а l на r. Но тогда из $P_{ac}(H)=P_l^\pm(H)+P_r^\pm(H)$ следует, что $P_{ac}(H)=\operatorname{Ran}W_0^\pm\oplus\operatorname{Ran}W_1^\pm$, а это и составляет требуемое утверждение о полноте.

Все изложенное имеет любопытное следствие: если вектор ψ таков, что носитель $\hat\psi$ лежит в $(a,\ b)$, где $a>0$, и $(a^2,\ b^2)$ попадает в щель спектра оператора H_1 (мы покажем в § XIII.16, что H_1 имеет спектр $\bigcup\limits_i[\alpha_i,\ \beta_i]$, причем $\alpha_1<\beta_1\leqslant\alpha_2<\beta_2\leqslant\ldots$, где типичная «щель» $(\beta_i,\ \alpha_{i+1})$ отлична от пустого множества), то $W_0^-\psi\in\operatorname{Ran}W_0^+$; это означает, что частица, посланная с энергией, попадающей в щель спектра, полностью отражается. Объединяя идеи этого примера с идеями примера 3, можно рассмотреть рассеяние на полубесконечном кристалле более высокой размерности или рассеяние на различного рода дефектах кристалла. Эти вопросы, а также детали рассмотренной конструкции содержатся в литературе, приведенной в Замечаниях.

В заключение этого раздела мы дадим формальное определение оператора рассеяния в квантовой механике двух частиц и обсудим его свойства. При интерпретации опытных данных по рассеянию возникает следующий естественный вопрос. Мы приготовили такое состояние, которое в прошлом имело вид состояния $e^{-iH_0t}\varphi$, и хотим знать, как оно будет выглядеть в будущем, т. е. нас интересует $e^{-iHt}\Omega^+\varphi$. Какова вероятность того, что это состояние будет асимптотически в будущем свободным состоянием $e^{-iH_0t}\psi$? По правилам квантовой механики эта вероятность задается соотношением

$$P_{\varphi\to\psi}=|(\Omega^-\psi,\ \Omega^+\varphi)|^2=|(\psi,\ (\Omega^-)^*\Omega^+\varphi)|^2.$$

Определение. Если $\Omega^\pm$ существуют, то **S-матрицу**, **S-оператор**, или **оператор рассеяния**, мы определяем равенством

$$S=(\Omega^-)^*\Omega^+.$$

Заметим, что это определение имеет смысл даже тогда, когда $\operatorname{Ran}\Omega^+$ не совпадает с $\operatorname{Ran}\Omega^-$. Хотя полнота и не требуется для определения S, но она эквивалентна условию унитарности S.

Подробно S-оператор мы рассмотрим в § 6 и 8. Пока только отметим некоторые его простые свойства (задача 49).

Предложение. (a) $Se^{-iH_0t}=e^{-iH_0t}S$ при всех t; S составляет $D(H_0)$ инвариантной; если $\psi\in D(H_0)$, то $H_0(S\psi)=S(H_0\psi)$.

(b) Если U — любой унитарный оператор, коммутирующий как с H, так и с H_0, то $US=SU$. В частности, если V инвариантен относительно вращений, то и S инвариантен относительно вращений.

(c) $\overline{(S\psi)(x)}=(S^*\bar{\psi})(x)$.

(d) S унитарен тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ran}\Omega^+=\operatorname{Ran}\Omega^-$.

По причинам, которые обсуждаются в Замечаниях, условие (c) называется инвариантностью по отношению к отражению времени.

Вследствие свойств непрерывности, доказанных для соответствия $A, B\longmapsto\Omega^\pm(A, B)$ в теории Като—Бирмана, S тоже обладает свойствами непрерывности. Следующее свойство характерно.

Предложение. Пусть V_n и V_∞ принадлежат $L^{3/2}(\mathbb{R}^3)\cap L^1(\mathbb{R}^3)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\|V_n-V_\infty\|_1=0$, $\sup\limits_n\|V_n\|_{3/2}<\infty$. Пусть $S(V)$ есть S-матрица для оператора $-\Delta+V$. Тогда

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} S(V_n)=S(V_\infty).$$

Доказательство. Копируя доказательство теоремы XI.30, видим (задача 50), что $(H_n+i)^{-1}\to(H_\infty+i)^{-1}$ по Tr-норме. Следовательно (задача 28),

$$\Omega^\pm(H_n, H_0)\to\Omega^\pm_\infty$$

в сильном смысле, так что $S_n\to S$ слабо. Но ввиду полноты все S_n и S унитарны, поэтому $S_n\to S$ сильно. ▌

Есть, наконец, еще одно свойство $\Omega^\pm$ и S, которое мы хотим рассмотреть. Полную физическую интерпретацию этого результата мы отложим до того времени, когда получим аналогичный результат для N-частичных систем. Пока же только заметим, что если мы имеем рассеяние на фиксированном центре, то, взяв некоторое определенное состояние и перенеся его с помощью сдвига на бесконечность, мы получим состояние, описывающее пролет частицы мимо центра рассеяния (см. рис. XI.5).

Теорема XI.33. В предположениях теоремы XI.24

$$\operatorname*{s-lim}_{a\to\infty} U_a^{-1}\Omega^{\pm}U_a = I, \quad \operatorname*{s-lim}_{a\to\infty} U_a^{-1} S U_a = I,$$

где U_a — операторы, заданные соотношением $(U_a f)(r) = f(r-a)$.

Доказательство. Мы докажем, что $\operatorname*{s-lim}_{a\to\infty} U_a^{-1}\Omega^{\pm} U_a = I$, откуда следует, что $\operatorname*{w-lim}_{a\to\infty} U_a^{-1} S U_a = I$. Поскольку $\|U_a S U_a^{-1}\| \leqslant 1$, из сла-

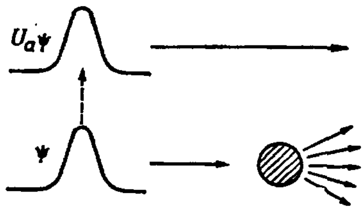


Рис. XI.5. Кластерное свойство.

бой сходимости вытекает сильная сходимость $\operatorname*{s-lim}_{a\to\infty} U_a^{-1} S U_a = I$.

Воспользовавшись $\varepsilon/3$-приемом, убедимся, что нужно только доказать равенство

$$\lim_{a\to\infty} (U_a^{-1}(\Omega^{\pm}-1)\,U_a)\,\varphi = 0$$

для всех $\varphi \in \mathscr{S}$. Для таких φ

$$U_a^{-1}(\Omega^{\pm}-1)\,U_a\varphi = \mp i\int_0^{\mp\infty} (U_a^{-1}e^{iHt}\,Ve^{-iH_0t}\,U_a)\,\varphi\,dt.$$

Пусть $F_a(t)$ обозначает $\|U_a^{-1}e^{iHt}Ve^{-iH_0t}\,U_a\varphi\|$. Легко проверить, что $F_a(t) = \|V_a e^{-iH_0t}\varphi\|$, где $V_a(r) = V(r+a)$. Рассматривая второе доказательство теоремы XI.24, видим, что $F_a(t)$ ограничена L^1-функцией от t равномерно по a, потому что L^p-норма V_a не зависит от a. По теореме о мажорированной сходимости достаточно, таким образом, показать, что $F_a(t) \to 0$ при любом фиксированном t. Так как e^{-iH_0t} оставляет $\mathscr{S}$ инвариантным, то нужно только показать, что $\lim_{a\to\infty}\|V_a\varphi\| = 0$ при всех $\varphi \in \mathscr{S}$, а это уже совсем просто. ∎

XI.5. Квантовое рассеяние II: случай N частиц

Теория рассеяния для квантовой системы N частиц сложна по двум причинам — кинематической и динамической. Кинематическая причина проявляется уже при $N=3$. До исключения центра масс в $\mathbb{R}^{3N} = \mathbb{R}^9$ существует естественная система координат $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$. Но если мы решили выбрать в качестве переменной $\mathbf{R} = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)^{-1} (\mu_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 \mathbf{r}_2 + \mu_3 \mathbf{r}_3)$, то для остальных шести координат никакого естественного выбора нет. Например, можно выбрать одну из пар $\langle \mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13} \rangle$, $\langle \mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{23} \rangle$ или $\langle \mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_{23} \rangle$, где $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Можно также сначала изменить координаты в системе 1, 2, перейдя к $\mathbf{R}_{12} = (\mu_1 + \mu_2)^{-1} (\mu_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 \mathbf{r}_2)$ и $\mathbf{r}_{12}$, а затем рассмотреть систему трех частиц, вводя координаты $\mathbf{R}$, $\mathbf{r}_{12}$ и $\zeta_2 = \mathbf{R}_{12} - \mathbf{r}_3$ (см. рис. XI.6). Суть в том, что на разных этапах

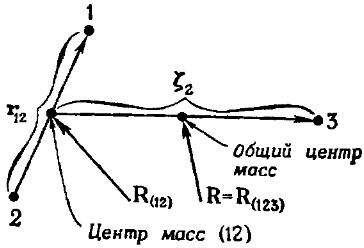


Рис. XI.6. Координаты Якоби $N = 3$.

развития теории удобно пользоваться разными координатами, и обычно в процессе доказательства переходят от одних координат к другим. Конечно, это кинематическое усложнение доставляет много неудобств.

Динамические усложнения — это результат обилия разнообразных явлений рассеяния, возникающих уже в системе из трех тел. Допустим, что частицы 1 и 2 могут образовать связанное

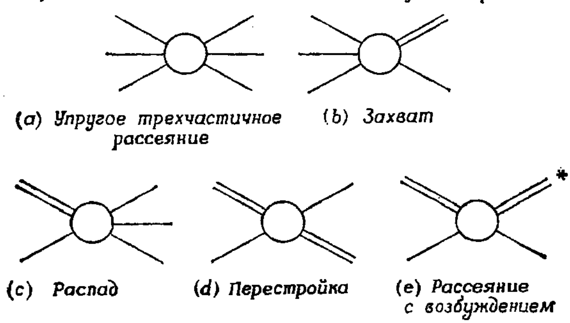


Рис. XI.7. Трехчастичные процессы рассеяния.

состояние. Тогда мы должны ожидать не только рассеяния «свободных» частиц 1, 2, 3 в свободные же частицы (упругое трехчастичное рассеяние), но и процессов захвата, когда сталкиваются «свободные» частицы 1, 2, 3, а выходят связанная пара частиц 1 и 2 и «свободная» частица 3. Эти процессы схематически показаны на рис. XI.7, (a) и (b). Подобным же образом следует рассмотреть **процессы распада** $(12)+3 \to 1+2+3$ и **рассеяние с перестройкой** $(12)+3 \to 1+(23)$, где (ij) представляет связанный кластер из частиц i и j. Если существует более чем одно связанное состояние частиц 1 и 2, например (12) и $(12)^*$, то надо еще включить **рассеяние с возбуждением** $(12)+3 \to (12)^*+3$.

В трехчастичном случае мы должны сначала перечислить все связанные состояния (12), (23) и (13) и для каждого из этих связанных состояний b рассмотреть «канал рассеяния». Вместо состояний, которые асимптотически являются состояниями трех свободных частиц, мы рассмотрим состояния, асимптотически состоящие из частиц 1 и 2, связанных в состояние b, и частицы 3, движущейся свободно относительно (12). В случае N частиц мы должны рассмотреть разбиение на непересекающиеся подмножества $C_1, \ldots, C_k$ и канал рассеяния для каждой совокупности из k связанных состояний, отвечающих разбиению $C_1, \ldots, C_k$. Мы ожидаем переходов между этими каналами. Это усложнение весьма тонко и красиво.

Начнем с описания различных координатных систем. Рассмотрим гамильтонианы

$$\tilde{H} = -\sum_{i=1}^{N} (2\mu_i)^{-1}\Delta_i + \sum_{i<j} V_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad \tilde{H}_0 = -\sum_{i=1}^{N} (2\mu_i)^{-1}\Delta_i$$

на пространстве $L^2(\mathbb{R}^{3N})$; пусть $\mathbf{r} = \langle \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N \rangle \in \mathbb{R}^{3N}$ и $-\Delta_i$ — лапласиан по переменным $\mathbf{r}_i$. Перейдем теперь к новым координатам: $\mathbf{R} = \left(\sum_{i=1}^{N} \mu_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \mu_i \mathbf{r}_i$ и еще $N-1$ 3-векторным координатам $\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}$. Потребуем, чтобы эти координаты удовлетворяли двум дополнительным условиям. Во-первых, для каждой пары $i \neq j$ разность $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ должна быть линейной комбинацией переменных ξ_i. Во-вторых, дифференциальный оператор $\tilde{H}_0$, записанный в новых координатах, не должен содержать членов вида $\nabla_{\mathbf{R}} \cdot \nabla_{\xi_i}$. Фактически, как мы увидим, второе условие вытекает из первого. Такая система координат определяет разложение $L^2(\mathbb{R}^{3N}) = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(\mathbb{R}^{3N-3})$ и тензорное разложение $\tilde{H}$ и $\tilde{H}_0$ в сумму

$$\tilde{H} = h_0 \otimes 1 + 1 \otimes H, \qquad \tilde{H}_0 = h_0 \otimes 1 + 1 \otimes H_0,$$

где $h_0 = -\left(2\sum_{i=1}^{N} \mu_i\right)^{-1} \Delta_{\mathbf{R}}$. Точный вид H зависит от системы координат, выбранной для $\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}$. Как и в двухчастичном случае, мы можем представлять себе замену координат или как иное описание того же самого оператора, или как унитарное преобразование. Мы примем первую точку зрения. Для некоторых замен координат якобиан будет ненулевой константой, отличной от 1, и потому его надо будет включать во внутреннее произведение.

Мы рассмотрим три специальных выбора координат.

Атомные координаты. Пусть $\eta_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_N$. Тогда

$$H_0 = -\sum_{i=1}^{N-1} (2m_{iN})^{-1} \Delta_i + \sum_{i<j} (\mu_N)^{-1} \nabla_i \cdot \nabla_j,$$

где $(m_{iN})^{-1} = \mu_i^{-1} + \mu_N^{-1}$, $\Delta_i = \Delta_{\eta_i}$ и $\nabla_i = \nabla_{\eta_i}$. Далее,

$$H = H_0 + \sum_{i=1}^{N-1} V_{iN}(\eta_i) + \sum_{i<j<N} V_{ij}(\eta_i - \eta_j).$$

В задаче 52(a) от читателя требуется провести необходимые выкладки. Как подсказывает само название, эта система координат особенно удобна в тех случаях, когда среди частиц имеется одна выделенная, как, например, в атомных ядрах, где ядро — такая выделенная частица. С дополнительными членами $\sum_{i<j} \mu_N^{-1} \nabla_i \cdot \nabla_j$ обычно бывает много мороки. Они называются членами **Юза — Эккарта.** Отметим, что $\tilde{H}_0$ не содержит перекрестных членов между $\mathbf{R}$ и η_i. Отсюда следует, что для любого выбора ξ_i, удовлетворяющего первому из указанных выше требований, второе выполнено автоматически.

Координаты Якоби. Пусть

$$\zeta_i = \mathbf{r}_{i+1} - \Bigl(\sum_{j\leqslant i} \mu_j\Bigr)^{-1} \Bigl(\sum_{j\leqslant i} \mu_j \mathbf{r}_j\Bigr), \quad i = 1, \ldots, N-1.$$

Тогда (задача 52b)

$$H_0 = -\sum_{i=1}^{N-1} (2\nu_i)^{-1} \Delta_{\zeta_i},$$

где $\nu_i^{-1} = \mu_{i+1}^{-1} + \Bigl(\sum_{j\leqslant i} \mu_j\Bigr)^{-1}$ и $H = H_0 + \sum_{i<j} V_{ij}(\mathbf{r}_{ij})$, а $\mathbf{r}_{ij}$ есть краткое обозначение разности $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, выраженной через ζ_j; так, например,

$$\mathbf{r}_{41} = \zeta_3 + \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} \zeta_2 + \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \zeta_1.$$

Координаты Якоби получаются переходом сначала от $\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle$ к $\zeta_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ и $\mathbf{R}_{(12)} = (\mu_1 + \mu_2)^{-1} (\mu_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 \mathbf{r}_2)$, затем от $\langle \mathbf{R}_{(12)}, \mathbf{r}_3 \rangle$ к $\zeta_2 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{R}_{(12)}$ и $\mathbf{R}_{(123)} = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)^{-1} [(\mu_1 + \mu_2) \mathbf{R}_{(12)} + \mu_3 \mathbf{r}_3]$ и т. д. (см рис. XI.6). На каждом шаге очередная пара переменных заменяется на координату двухчастичного центра масс и относительную координату. Так как в двухчастичной системе при переходе к переменной центра масс не возникает перекрестных членов, то в выписанном выше N-частичном H_0 нет членов Юза—Эккарта В этом преимущество координат Якоби. Их недостаток состоит в сложности выражений для $\mathbf{r}_{ij}$, хотя $\mathbf{r}_{12}=-\zeta_1$ просто. Вообще для всякой заданной перестановки $\langle i_1, \ldots, i_N\rangle$ исходного набора $\langle 1, \ldots, N\rangle$ существует ассоциированная с ней система координат Якоби, в которой $\mathbf{r}_{i_1 i_2}$ выражается просто.

Кластерные координаты Якоби. Последняя система координат, которую мы рассмотрим, особенно важна в теории рассеяния. Чтобы описать распад системы N частиц на связанные группы, введем формальные определения и обозначения, которые будут играть важную роль в этом разделе и в § XIII.5.

Определение. Разбиение D множества $\{1, \ldots, N\}$ на k неперекрывающихся подмножеств $C_1, \ldots, C_k$, объединение которых составляет $\{1, \ldots, N\}$, называется **кластерным разложением.** Если $D=\{C_1, \ldots, C_k\}$ — такое разбиение и i, j — два числа из $\{1, \ldots, N\}$, то будем писать iDj тогда и только тогда, когда i и j принадлежат одному кластеру C_l, и $\sim iDj$, когда они принадлежат разным кластерам. Символы $\sum\limits_{iDj}$ и $\sum\limits_{\sim iDj}$ обозначают суммы по тем парам $\langle i, j\rangle$ с $i<j$, которые удовлетворяют соответственно условию iDj или $\sim iDj$.

Определение. Пусть $D=\{C_l\}_{l=1}^k$ — кластерное разложение. Положим

$$\tilde{H}(C_l)=-\sum_{i\in C_l}(2\mu_i)^{-1}\Delta_i+\sum_{i<j,\ i,\ j\in C_l}V_{ij}(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j).$$

Определим **гамильтониан** $H(C_l)$ **кластера** C_l как $\tilde{H}(C_l)$ за вычетом энергии движения его центра масс.

$H(C_l)$ есть оператор в $L^2(\mathbb{R}^{3N-3})$; он не зависит от координат в других кластерах, так что $H(C_l)=h_{C_l}\otimes 1$, если $L^2(\mathbb{R}^{3N-3})$ представлено в виде $L^2(\mathbb{R}^{3n_l-3})\otimes L^2(\mathbb{R}^{3N-3n_l})$, где n_l есть число элементов в C_l. Мы будем впредь пользоваться одним и тем же символом $H(C_l)$ как для оператора в $L^2(\mathbb{R}^{3N-3})$, так и для оператора в $L^2(\mathbb{R}^{3n_l-3})$, который мы выше обозначили h_{C_l}. Если мы захотим подчеркнуть, какой из операторов имеется в виду, то будем говорить о «$H(C_l)$ как операторе на $\mathcal{H}$» или о «$H(C_l)$ как операторе на $\mathcal{H}_{C_l}$», где $\mathcal{H}_{C_l}$ — пространство $L^2(\mathbb{R}^{3n_l-3})$ функций от внутренних координат кластера C_l.

Определение. Пусть $D=\{C_l\}_{l=1}^k$ — кластерное разложение. Определим **межкластерный потенциал** I_D посредством

$$I_D=\sum_{\sim iDj}V_{ij}.$$

Таким образом, I_D есть сумма взаимодействий между частицами в разных кластерах.

Определение. Пусть $D=\{C_l\}_{l=1}^{k}$ — кластерное разложение и $\tilde{H}_D=\tilde{H}-I_D=\sum_{k=1}^{l}\tilde{H}(C_l)$. Определим **кластерный гамильтониан** H_D как $\tilde{H}_D$ за вычетом энергии движения центра масс. Тогда

$$H_D=H-I_D.$$

Поскольку I_D зависит только от разностей координат r_i-r_j, на нем не сказывается отделение центра масс.

Заметим, что $H_D\neq\sum_{l=1}^{k}H(C_l)$; на самом деле $H_D=T_D+\sum_{l=1}^{k}H(C_l)$, где T_D — кинетическая энергия движения центров масс отдельных кластеров за вычетом энергии движения общего центра масс. Таким образом, в соответствии с разбиением $3N-3$ координат на k множеств внутренних координат кластеров $C_1,\ldots,C_k$ плюс множество $3(k-1)$ координат, описывающих относительное положение центров масс кластеров $\{C_l\}_{l=1}^{k}$, гильбертово пространство $\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R}^{3N-3})$ записывается в виде

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}_D\otimes\mathscr{H}_{C_1}\otimes\mathscr{H}_{C_2}\otimes\cdots\otimes\mathscr{H}_{C_l},$$

причем

$$\begin{gathered}T_D=t_D\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1,\\ H(C_1)=1\otimes h_{C_1}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ H(C_l)=1\otimes 1\otimes\cdots\otimes h_{C_l}.\end{gathered}$$

Кластерные координаты Якоби выбраны как раз так, чтобы упростить T_D. Чтобы получить эти координаты, перейдем сначала от $\langle \mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N\rangle$ к

$$\left\langle \mathbf{R}_1,\ldots,\mathbf{R}_k,\ \xi_1^{(C_1)},\ldots,\xi_{n_1-1}^{(C_1)},\ldots,\xi_{n_k-1}^{(C_k)}\right\rangle,$$

где $\mathbf{R}_l=\left(\sum_{i\in C_l}\mu_i\right)^{-1}\sum_{i\in C_l}\mu_i\mathbf{r}_i$, а $\xi_1^{(C_l)},\ldots,\xi_{n_l-1}^{(C_l)}$ — координаты, которые вместе с $\mathbf{R}_l$ образуют множество координат кластера C_l. Например, можно фиксировать некоторое $j\in C_l$ и положить $\{\xi_m^{(C_l)}\}_{m=1}^{n_l-1}=\{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j\}_{i\in C_l,\ i\neq j}$. Тогда $H(C_l)$ — дифференциальный оператор по переменным $\xi_m^{(C_l)}$. Следовательно,

$$\tilde{H}=\sum_{l=1}^{k}(-2m_{C_l})^{-1}\Delta_{R_l}+\sum_{l=1}^{k}H(C_l)+I_D,$$

где $m_{C_l} = \sum_{i \in C_l} \mu_i$. Будем далее рассматривать $\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_k$ как множество переменных системы k частиц и выберем в качестве первых $k-1$ координат новой системы координаты Якоби $\{\zeta_l\}_{l=1}^{k-1}$ для $\langle \mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_k \rangle$, в качестве следующих $N-k$ координат $\{\xi_m^{(C_l)}\}$, где $1 \leqslant m \leqslant n_l - 1$ и $1 \leqslant l \leqslant k$, и, наконец, в качестве последней координаты центр масс. Тогда

$$H_D = \sum_{l=1}^{k-1} (-2M_l)^{-1} \Delta_{\zeta_l} + \sum_{l=1}^{k} H(C_l),$$

где $M_l^{-1} = m_{C_{l+1}}^{-1} + \left(\sum_{h \leqslant l} m_{C_h}\right)^{-1}$. Так мы получаем систему координат, в которой H_D имеет очень простой вид. Отдельные члены в двух суммах выражаются через независимые координаты и, следовательно, коммутируют друг с другом. Заметим также, что если $i \in C_1$, $j \in C_2$, то $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = -\zeta_1 + \hat{\xi}_i^{(C_1)} - \hat{\xi}_j^{(C_2)}$, где $\hat{\xi}_i^{(C_l)}$ есть некоторая комбинация внутренних координат в C_l, которая дает расстояние от $\mathbf{r}_i$ до центра масс кластера C_l.

Чтобы проследить, как применяются эти определения, рассмотрим простейший нетривиальный пример.

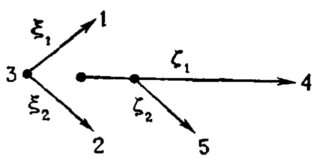


Рис. XI.8. Кластерные координаты Якоби, $N=5$.

Пример (кластерные координаты Якоби). Пусть $N=5$. Рассмотрим разбиение $D = \{C_1, C_2, C_3\}$, $C_1 = \{1, 2, 3\}$, $C_2 = \{4\}$, $C_3 = \{5\}$. Тогда

$$\mathbf{R}_1 = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)^{-1} (\mu_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 \mathbf{r}_2 + \mu_3 \mathbf{r}_3),$$
$$\xi_1^{(C_1)} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3, \qquad \xi_2^{(C_1)} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3,$$
$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_4, \qquad \mathbf{R}_3 = \mathbf{r}_5, \qquad \zeta_1 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1,$$
$$\zeta_2 = \mathbf{R}_3 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4)^{-1} [(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) \mathbf{R}_1 + \mu_4 \mathbf{R}_2].$$

Кластерными координатами Якоби будут $\langle \zeta_1, \zeta_2, \xi_1^{(C_1)}, \xi_2^{(C_1)} \rangle$, см. рис. XI.8. Для того чтобы увидеть, откуда появляется $\mathbf{r}_{ij}$ ($i \in C_1$, $j \in C_2$), заметим, что

$$\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3 = \zeta_1 + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)^{-1} [\mu_1 \xi_1^{(C_1)} + \mu_2 \xi_2^{(C_1)}].$$

Закончив на этом обсуждение кинематики систем N частиц, обратимся к вопросам существования в теории рассеяния. Воспользуемся теми же техническими приемами, что и в случае двух частиц, но с учетом уже известных нам усложнений. Во-первых, за счет кинематики усложняются обозначения, и это потребует от читателя постоянного внимания; во-вторых, обилие различных явлений рассеяния заставит нас рассматривать не только $\operatorname{s-lim}_{t\to\mp\infty} e^{iHt}e^{-iH_0t}$, но и много других объектов. В самом деле, допустим, что $\psi=\lim_{t\to+\infty} e^{iHt}e^{-iH_0t}\varphi$. Тогда $e^{-iHt}\psi$ стремится к $e^{-iH_0t}\varphi$ при $t\to+\infty$ и выглядит как состояние с N свободно движущимися частицами. Если мы хотим описать состояния, которые асимптотически выглядят как свободно движущиеся связанные кластеры $C_1, \ldots, C_k$, то нам нужно, чтобы $e^{-iHt}\psi$ имел вид $e^{-iAt}\psi$, где A описывает свободно движущиеся связанные кластеры. Значит, оператор A должен включать в себя силы, объединяющие частицы в кластеры, но не должен содержать сил, действующих между кластерами. Поэтому мы возьмем $A=H_D$, $D=\{C_1, \ldots, C_k\}$ и будем рассматривать некоторый определенный предел.

Определение. Пусть H — гамильтониан системы N частиц с отделенным движением центра масс. Пусть $D=\{C_1, \ldots, C_k\}$ — кластерное разложение множества $\{1, \ldots, N\}$. Если существуют $\Omega_D^\pm=\operatorname{s-lim}_{t\to\mp\infty} e^{iHt}e^{-iH_Dt}$, то будем говорить, что существуют **кластерные волновые операторы канала.**

Теорема XI.34 (теорема Хака). Пусть

$$H=\sum_{i=1}^{N-1}(-2\mu_i)^{-1}\Delta_i+\sum_{i<j}V_{ij}(\mathbf{r}_{ij}),$$

причем $V_{ij}\in L^2(\mathbb{R}^3)+L^p(\mathbb{R}^3)$ с $2<p<3$ для всех i, j. Тогда кластерные волновые операторы канала $\Omega_D^\pm$ существуют для каждого кластерного разложения D.

Доказательство. Основная схема доказательства в точности повторяет второе доказательство теоремы XI.24. Выберем систему кластерных координат Якоби $\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}$; $\xi_1^{(C_1)}, \ldots, \xi_{n_1-1}^{(C_1)}, \ldots$ $\ldots, \xi_{n_k-1}^{(C_k)}$, где $\{\xi^{(C_l)}\}$ — семейство внутренних координат кластера C_l и $\{\zeta\}$ — координаты Якоби движения центров масс кластеров. Рассмотрим множество

$$\mathcal{D}_D=\{\varphi(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1})\,\eta_1(\xi^{(C_1)})\ldots\eta_k(\xi^{(C_k)})\mid\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3k-3})\text{ и }\eta_l\in D(H(C_l)),\ \|\eta_l\|=1\}.$$

Конечные линейные комбинации векторов из $\mathcal{D}_D$ плотны, так что достаточно доказать, что $\lim\limits_{t\to\mp\infty} e^{+iHt}e^{-iH_Dt}\psi$ существует для всех $\psi\in\mathcal{D}_D$.

Согласно методу Кука, нужно доказать, что

$$\left\|\frac{d}{dt}(e^{+iHt}e^{-iH_Dt}\psi)\right\|=\|I_De^{-iH_Dt}\psi\|$$

принадлежит $L^1(\pm1, \pm\infty)$ при всех $\psi\in\mathcal{D}_D$. Так как I_D — конечная сумма, достаточно показать, что $\|V_{ij}e^{-iH_Dt}\psi\|\in L^1(\pm1, \pm\infty)$ при всех i и j, таких, что $\sim iDj$. Поскольку каждый V_{ij} есть сумма двух членов, одного из L^2 и другого из L^r, можно считать, что V_{ij} лежит либо в L^2, либо в L^r $(2<r<3)$, и воспользоваться неравенством треугольника для оценки всей суммы. При данных i, j мы выберем такие координаты Якоби, чтобы было $\zeta_1=R_a-R_b$, где $i\in C_a$, $j\in C_b$ Так как изменение координат Якоби, отвечающих набору $\langle R_1, \ldots, R_k\rangle$, за счет изменения порядка оставляет $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3k-3})$ инвариантным, то не возникает трудностей в связи с тем, что нам приходится изменять смысл ζ_l, когда мы меняем i и j.

Заметим далее, что отдельные члены в

$$H_D=\sum_{l=1}^{k-1}(-2M_l)^{-1}\Delta_l+\sum_{l=1}^{k}H(C_l)$$

коммутируют, так что

$$e^{-itH_D}=\left(\prod_{l=1}^{k-1}e^{+it(2M_l)^{-1}\Delta_l}\right)\prod_{l=1}^{k}e^{-itH(C_l)}.$$

Далее, V_{ij} зависит лишь от ζ_1 и внутренних координат C_1, C_2, так что V_{ij} коммутирует с $e^{is\Delta_l}$, $l\neq1$, и с $e^{-itH(C_l)}$, $l\neq1, 2$. Таким образом,

$$\|V_{ij}e^{-itH_D}\psi\|=\left\|V_{ij}(e^{is\Delta_1}\varphi)(\eta_{1,t})(\eta_{2,t})\prod_{l=3}^{k}\eta^{(C_l)}\right\|,$$

где $s=t(2M_1)^{-1}$, и $\eta_{l,t}=e^{-iH(C_l)t}\eta_l$. Потенциал V_{ij} зависит только от ζ_1 и внутренних координат из C_1 и C_2, так что

$$\|V_{ij}e^{-itH_D}\psi\|=\|V_{ij}(e^{is\Delta_1}\varphi)(\eta_{1,t})(\eta_{2,t})\|_{C_1,C_2;\zeta},$$

где символ $\|\cdot\|_{C_1,C_2;\zeta}$ обозначает L^2-норму с интегрированием по переменным $\xi^{(C_1)}$, $\xi^{(C_2)}$ и ζ. Следовательно,

$$\|V_{ij}e^{-itH_D}\psi\|^2=\int F(\zeta_2, \ldots, \zeta_{k-1}; t)\,d\zeta_2\ldots d\zeta_{k-1},$$

где

$$F(\zeta_2, \ldots, \zeta_{k-1}; t) = \int |V_{ij}^{(t)}(\zeta_1)|^2 \, |e^{is\Delta_1}\varphi(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1})|^2 \, d\zeta_1,$$

$$|V_{ij}^{(t)}(\zeta_1)|^2 = \int |\eta_{1,t}(\xi_1^{(C_1)})|^2 \, |\eta_{2,t}(\xi_1^{(C_2)})|^2 \, |V_{ij}(\zeta_1 - \xi_i^{(C_1)} - \xi_j^{(C_2)})|^2 \times \times d\xi^{(C_1)} d\xi^{(C_2)}.$$

Если мы проделаем в последнем интеграле все интегрирования по $\xi^{(C_1)}$, $\xi^{(C_2)}$, кроме интегрирования по $\xi_i^{(C_1)} + \xi_j^{(C_2)}$, то увидим, что $|V_{ij}^{(t)}|^2$ есть свертка $|V_{ij}|^2 \in L^{r/2}$ с функцией из L^1 с L^1-нормой $(\|\eta_{1,t}\|_2 \|\eta_{2,t}\|_2)^2 = 1$. Следовательно, по неравенству Юнга, $\|V_{ij}^{(t)}\|_r \leqslant \leqslant \|V_{ij}\|_r$. В результате этой оценки и расплывания волнового пакета, обусловленного действием оператора $e^{is\Delta_1}$, заключаем, что

$$0 \leqslant F(\zeta_2, \ldots, \zeta_{k-1}) \leqslant \|V_{ij}^{(t)}\|_r^2 (s^{-3/2+3/p})^2 \int |\varphi(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1})|^2 \, d\zeta_1,$$

где p задается в теореме XI.24 и, в частности, $p > 6$. Наконец, заключаем, что

$$\|V_{ij} e^{-iHt}\psi\|^2 \leqslant [\|V_{ij}\|_r \, s^{-3/2+3/p} \|\varphi\|_2]^2,$$

и, следовательно, $\|V_{ij} e^{-itH}\psi\| \in L^1(\pm 1, \pm\infty)$. Этим завершается доказательство ∎

Главная особенность приведенного доказательства состоит в том, что в нем вопрос о существовании для случая N частиц сводится к тем же оценкам, которые употреблялись в двухчастичном случае. Пользуясь свойствами форм, рассмотренными при доказательстве теоремы XI.26, и вариантом метода Кука на языке форм (теорема XI.6), легко получаем следующий результат.

Теорема XI.35. Пусть

$$H = \sum_{i=1}^{N-1} (-2\mu_i)^{-1} \Delta_i + \sum_{i<j} V_{ij}(r_{ij})$$

в $L^2(\mathbb{R}^{(N-1)n})$. Допустим, что каждый V_{ij} удовлетворяет условию

$$(1 + |r|^2)^{1/2+\varepsilon} V_{ij}(r) \in L^p(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

где $p = n/2$ при $n \geqslant 3$, $p = 1$ при $n = 1$ и $p > 1$ при $n = 2$. Тогда кластерные волновые операторы каналов $\Omega_D^\pm$ существуют для каждого кластерного разложения D.

Теперь мы знаем, что $\Omega_D^\pm$ существуют, и хотим построить состояния рассеяния. Не всякая функция $\psi = \Omega_D^- \varkappa$ описывает состояние, которое по мере стремления t к ∞ приближается к системе $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ связанных кластеров, свободно движущихся друг относительно друга. Все, что нам известно,— это стремление состояний $e^{-iHt}\psi$ к $e^{-iH_D t}\varkappa$. Но $\text{s-}\lim\limits_{t\to\infty} e^{+iH_D t}e^{-iH_0 t}$ существует, поэтому если $\varkappa = \lim\limits_{t\to\infty} e^{iH_D t}e^{-iH_0 t}\eta$, то $e^{-iHt}\psi$ и $e^{-iH_0 t}\eta$ при $t\to\infty$ тоже выглядят одинаково. Суть дела в том, что, для того чтобы ψ при $t\to\infty$ имела вид связанных кластеров, условия $e^{-itH}\psi - e^{-itH_D}\varkappa \to 0$ при произвольной $\varkappa$ еще недостаточно. Надо, чтобы $\varkappa$ имела вид $\varkappa(\zeta, \xi^{(C_1)}, \ldots, \xi^{(C_k)}) = \varphi(\zeta)\,\eta_1(\xi^{(C_1)}) \ldots \eta_k(\xi^{(C_k)})$, где каждое η_l есть связанное состояние гамильтониана $H(C_l)$. Мы приходим таким путем к следующему определению.

Определение. Канал есть кластерное разложение $D = \{C_1, \ldots, C_k\}$ вместе с такими функциями $\eta_l \in \mathscr{H}_l$, что каждая из них есть собственная функция $H(C_l)$ с собственным значением E_l. Для обозначения каналов мы будем пользоваться символами $\alpha, \beta, \ldots$ и будем иногда писать

$$\alpha = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \ldots & C_k \\ \eta_1 & \eta_2 & \ldots & \eta_k \end{pmatrix}.$$

Собственные значения $E_1, \ldots, E_k$ будем обозначать $\{E_l^{(\alpha)}\}_{l=1}^k$ и называть собственными энергиями канала. Кластерное разложение D, соответствующее каналу α, будет обозначаться $D(\alpha)$.

Два канала, в которых η_l различаются только на комплексные множители, не считаются разными. Таким образом, точнее следовало бы определить канал как кластерное разложение с «лучами собственных функций». Если C_l содержит только одну частицу, то мы пишем $\mathscr{H}_{C_l} = \mathbb{C}$ (нет внутренних координат), $H(C_l) \equiv 0$, η_l есть $1 \in \mathbb{C}$ и $E_l^{(\alpha)} = 0$.

Важное предписание. Перечисляя все каналы $\alpha = \begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_k \\ \eta_1 & \ldots & \eta_k \end{pmatrix}$ в случае, если какой-либо $H(C_l)$ имеет вырожденные собственные значения, мы сначала должны сделать некоторый предварительный выбор. Конкретно, если E_0 есть собственное значение $H(C_l)$ с кратностью n, следует сначала выбрать n ортонормированных функций из $\{\eta \mid H(C_l)\eta = E_0\eta\}$, а затем потребовать, чтобы для любого α, для которого $E_l^{(\alpha)} = E_0$, η_l была одной из этих n функций. Таким образом, если α и β — разные каналы, то либо $D(\alpha) \neq D(\beta)$, либо $D(\alpha) = D(\beta)$ и найдется такое l, что $\eta_l^{(\alpha)}$ ортогональна к $\eta_l^{(\beta)}$.

Определение. Пусть α — некоторый канал. Выберем кластерные координаты Якоби для разложения $D(\alpha)$, скажем $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1},$

$\xi_1^{(C_1)}, \ldots, \xi_{n_k-1}^{(C_k)}\rangle$. Назовем $\mathscr{H}_\alpha = L^2(\mathbb{R}^{3k-3})$ **гильбертовым пространством канала** и определим **вложение канала** $\mathscr{T}_\alpha$: $\mathscr{H}_\alpha \to \mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^{3N-3})$ равенством

$$(\mathscr{T}_\alpha \varphi)(\zeta, \xi^{(C_l)}) = \varphi(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}) \prod_{l=1}^{k} \eta_l(\xi^{(C_l)}).$$

Волновые операторы канала $\Omega_\alpha^\pm$: $\mathscr{H}_\alpha \to \mathscr{H}$ определим как

$$\Omega_\alpha^\pm = \Omega_{D(\alpha)}^\pm \mathscr{T}_\alpha.$$

Гамильтониан канала H_α на $\mathscr{H}_\alpha$ определим как

$$H_\alpha = H_\alpha^{(0)} + \sum_{l=1}^{k} E_l^{(\alpha)},$$

где $H_\alpha^{(0)} = \sum_{l=1}^{k-1} (-2M_l)^{-1} \Delta_l$ в координатах Якоби.

Волновые операторы $\Omega_\alpha^\pm$ имеют простую непосредственную физическую интерпретацию. Действительно, если $\psi = \Omega_\alpha^\pm \varphi$, то $e^{-iHt}\psi$ приближается к $(e^{-iH_\alpha^{(0)}t}\varphi)\left(\prod_{l=1}^{k} e^{-itE_l^{(\alpha)}}\eta_l\right)$, когда $t \to \mp\infty$. Но это есть в точности волновая функция связанных кластеров η_l, свободно движущихся друг относительно друга. При такой физической интерпретации мы ожидаем, что $\operatorname{Ran}\Omega_\alpha^\pm$ ортогональны к $\operatorname{Ran}\Omega_\beta^\pm$. Таким образом мы избегаем многократного учета асимптотических состояний, входящих в $\{\operatorname{Ran}\Omega_D^\pm\}$. Прежде чем доказывать, что $\operatorname{Ran}\Omega_\alpha^\pm$ и $\operatorname{Ran}\Omega_\beta^\pm$ ортогональны при $\alpha \neq \beta$, мы скомбинируем эти каналы удобным образом.

Определение. Пусть $\mathscr{C}$ — совокупность всех каналов с учетом сделанного выше предписания, если некоторый $H(C_l)$ имеет вырожденное собственное значение. Определим: **асимптотическое гильбертово пространство** $\mathscr{H}_{\text{asym}} = \bigoplus_{\alpha \in \mathscr{C}} \mathscr{H}_\alpha$, **«свободный» гамильтониан** $H_{\text{asym}} = \bigoplus_{\alpha \in \mathscr{C}} H_\alpha$ на $\mathscr{H}_{\text{asym}}$, **преобразование вложения** $\mathscr{T}$: $\mathscr{H}_{\text{asym}} \to \mathscr{H}$, $\mathscr{T} = \bigoplus_{\alpha \in \mathscr{C}} \mathscr{T}_\alpha$, и **волновые операторы** $\Omega^\pm$: $\mathscr{H}_{\text{asym}} \to \mathscr{H}$, $\Omega^\pm = \bigoplus_{\alpha \in \mathscr{C}} \Omega_\alpha^\pm$. Пусть $\mathscr{H}_\pm = \operatorname{Ran}\Omega^\pm$.

Теорема XI.36. Допустим, что волновые операторы каналов существуют. Тогда:

(а) $$\Omega^\pm = \operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{iHt} \mathscr{T} e^{-iH_{\text{asym}}t};$$

(b) (ортогональность каналов) если $\alpha \neq \beta$, то $\operatorname{Ran}\Omega_\alpha^\pm$ ортогональны к $\operatorname{Ran}\Omega_\beta^\pm$;

(c) $\Omega^\pm$ суть изометрические отображения из $\mathscr{H}_{\mathrm{asym}}$ в $\mathscr{H}$;

(d) $e^{iHt}\Omega^\pm = \Omega^\pm e^{iH_{\mathrm{asym}}t}$;

(e) $\mathscr{H}_\pm \subset \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(H)$.

Доказательство (a) является прямым следствием того, что $e^{-iH_{D(\alpha)}t}\mathscr{T}_\alpha = \mathscr{T}_\alpha e^{-iH_\alpha t}$.

(b) Пусть $\varphi_\alpha \in \mathscr{H}_\alpha$, $\varphi_\beta \in \mathscr{H}_\beta$. Тогда $\Omega_\alpha^\pm\varphi_\alpha = \underset{t \to \mp\infty}{\text{s-lim}}\, e^{iHt}\mathscr{T}_\alpha e^{-iH_\alpha t}\varphi_\alpha$ и так же для φ_β. Следовательно, поскольку e^{+iHt} унитарен, достаточно доказать, что $\lim\limits_{t \to \mp\infty} (\mathscr{T}_\alpha e^{-iH_\alpha t}\varphi_\alpha,\ \mathscr{T}_\beta e^{-iH_\beta t}\varphi_\beta) = 0$, для того чтобы заключить, что $(\Omega_\alpha^\pm\varphi_\alpha,\ \Omega_\beta^\pm\varphi_\beta) = 0$. Рассмотрим по отдельности случаи $D(\alpha) = D(\beta)$ и $D(\alpha) \neq D(\beta)$. Допустим сначала, что $D(\alpha) = D(\beta)$. Тогда

$$(\mathscr{T}_\alpha e^{-iH_\alpha t}\varphi_\alpha,\ \mathscr{T}_\beta e^{-iH_\beta t}\varphi_\beta) = (e^{-iH_{D(\alpha)}t}\mathscr{T}_\alpha\varphi_\alpha,\ e^{-iH_{D(\beta)}t}\mathscr{T}_\beta\varphi_\beta) =$$
$$= (\mathscr{T}_\alpha\varphi_\alpha,\ \mathscr{T}_\beta\varphi_\beta) = \left(\varphi_\alpha \prod_{l=1}^{k} \eta_l^{(\alpha)},\ \varphi_\beta \prod_{l=1}^{k} \eta_l^{(\beta)}\right) =$$
$$= (\varphi_\alpha,\ \varphi_\beta)\left[\prod_{l=1}^{k} (\eta_l^{(\alpha)},\ \eta_l^{(\beta)})\right] = 0,$$

поскольку $(\eta_l^{(\alpha)},\ \eta_l^{(\beta)}) = 0$ при некотором l в соответствии с нашим предписанием.

Будем теперь считать, что $D(\alpha) \neq D(\beta)$. Пусть $E = \sum\limits_{l=1}^{k_\beta} E_l^{(\beta)} - \sum\limits_{l=1}^{k_\alpha} E_l^{(\alpha)}$. Тогда

$$(\mathscr{T}_\alpha e^{-itH_\alpha}\varphi_\alpha,\ \mathscr{T}_\beta e^{-itH_\beta}\varphi_\beta) = e^{-itE}(\mathscr{T}_\alpha e^{-itH_\alpha(0)}\varphi_\alpha,\ \mathscr{T}_\beta e^{-itH_\beta(0)}\varphi_\beta) =$$
$$= e^{-itE}(\mathscr{T}_\alpha\varphi_\alpha,\ e^{-it[H_\beta(0)-H_\alpha(0)]}\mathscr{T}_\beta\varphi_\beta).$$

$H_\beta(0) - H_\alpha(0) \neq 0$, так как $D(\alpha) \neq D(\beta)$. Если перейти к фурье-образам, то $H_\beta(0) - H_\alpha(0)$ будет умножением на некоторую функцию $f_{\alpha\beta}(p)$, являющуюся квадратичной формой по p и потому в некоторой системе координат имеющую вид $f_{\alpha\beta}(p) = \sum\limits_{i=1}^{3N-3} a_i p_i^2$ с какими-то $a_i \neq 0$. Перенумеруем p_i так, чтобы было $a_1, \ldots, a_m \neq 0$; $a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots = 0$. Пусть ψ_1 и ψ_2 принадлежат $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{3N-3})$. Тогда вследствие (IX.31)

$$(\psi_1,\ e^{-it(H_\beta(0)-H_\alpha(0))}\psi_2) =$$
$$= \int \overline{\psi_1(x_1, \ldots, x_m, z_{m+1}, \ldots, z_{3N-3})}\, K(x, y) \times$$
$$\times \psi_2(y_1, \ldots, y_m, z_{m+1}, \ldots, z_{3N-3})\, d^m x\, d^m y\, d^{3N-3-m} z,$$

где

$$K(x, y) = (-1)^\sigma t^{-m/2} (2\pi i)^{-m/2} \prod_{i=1}^{m} |a_i|^{-1/2} \exp(i\,|x_i - y_i|^2/4a_i t)$$

и σ зависит от числа отрицательных a_i.

Из-за множителя $t^{-m/2}$ величина $(\psi_1, e^{-it(H_\beta(0)-H_\alpha(0))}\psi_2) \to 0$ при $t \to \infty$. С помощью $\varepsilon/3$-приема убеждаемся, что $(\psi_1, e^{-it(H_\beta(0)-H_\alpha(0))}\psi_2) \to 0$ при всех ψ_1, ψ_2 и, в частности, $(\mathcal{J}_\alpha\varphi_\alpha, e^{-it(H_\beta(0)-H_\alpha(0))}\mathcal{J}_\beta\varphi_\beta) \to 0$. Это доказывает ортогональность каналов.

(c) Пусть $\psi \in \mathcal{H}_{\text{asym}}$. Тогда $\Omega^\pm\psi = \sum_\alpha \Omega_\alpha^\pm\psi_\alpha$. Так как $\Omega_\alpha^\pm\psi_\alpha$ ортогональны друг другу, то

$$\|\Omega^\pm\psi\|^2 = \sum_\alpha \|\Omega_\alpha^\pm\psi_\alpha\|^2 = \sum_\alpha \|\Omega_{D(\alpha)}^\pm \mathcal{J}_\alpha \psi_\alpha\|^2 = \sum_\alpha \|\psi_\alpha\|^2 = \|\psi\|^2,$$

где мы воспользовались тем, что все $\mathcal{J}_\alpha$ и все $\Omega_\alpha^\pm$ изометричны.

(d) и (e) доказываются как в двухчастичном случае. ∎

Заметим, что преобразование $\mathcal{J}$ неизометрично, так как $\operatorname{Ran}\mathcal{J}_\alpha$ неортогональны друг другу. Например, $\operatorname{Ran}\mathcal{J}_\alpha = \mathcal{H}$, если α — единственный канал с $D(\alpha) = \{\{1\}, \ldots, \{N\}\}$. Доказательство изометричности $\Omega^\pm$ существенно опиралось на то, что $\operatorname{Ran}\Omega_\alpha^\pm$ ортогональны к $\operatorname{Ran}\Omega_\beta^\pm$ при $\alpha \neq \beta$. Это в свою очередь следует главным образом из того, что $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \|\mathcal{J}e^{-iH_{\text{asym}}t}\psi\| = \|\psi\|$ для всех ψ, что было доказано выше в пункте (b).

Определим теперь S-оператор.

Определение. Пусть S: $\mathcal{H}_{\text{asym}} \to \mathcal{H}_{\text{asym}}$ есть оператор $S = (\Omega^-)^*\Omega^+$. Он называется **S-оператором, S-матрицей,** или **оператором рассеяния.** Мы определим также $S_{\alpha\beta}$: $\mathcal{H}_\beta \to \mathcal{H}_\alpha$, полагая $S_{\alpha\beta} = (\Omega_\alpha^-)^*\Omega_\beta^+$, так что $S = \sum_{\alpha,\beta} S_{\alpha\beta}$.

Например, положим $N=3$ и допустим, что β — единственный канал с $D(\beta) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, а α — канал $D(\alpha) = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$. Тогда $S_{\alpha\beta}$ описывает процесс захвата, а $S_{\beta\alpha}$ — распада.

Введем обычное

Определение. Если $\operatorname{Ran}\Omega^+ = \operatorname{Ran}\Omega^- = \mathcal{H}_{\text{ac}}(H)$, будем говорить, что рассеяние для системы N тел **полно.**

С помощью довольно сложных методов может быть доказана следующая

Теорема XI.37. Пусть $N=3$, $\tilde{H}=\sum_{i=1}^{3}(-2m_i)^{-1}\Delta_i+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} V_{ij}$. Допустим, что

(i) каждый V_{ij} удовлетворяет условию $V_{ij}\in L^{3/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3)\cap L^{3/2-\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$ и $(1+|x|)^{2+\varepsilon}V_{ij}\in L^2+L^\infty$ (грубо говоря, мы требуем, чтобы $V_{ij}(x)$ убывала как $|x|^{-2-\varepsilon}$);

(ii) никакая двухчастичная подсистема не имеет «резонанса или связанного состояния с нулевой энергией» в следующем точном смысле. Пусть $\mu_{ij}=(m_i^{-1}+m_j^{-1})^{-1}$. Пусть $k_{ij}(\lambda)=-(2\mu_{ij})^{-1}\Delta+\lambda V_{ij}(x)$ на $L^2(\mathbb{R}^3)$. Тогда размерность спектрального проектора на $(-\infty, 0)$ для $k_{ij}(\lambda)$ не зависит от λ для $|\lambda-1|<\delta$ с некоторым $\delta>0$. Более того, ни один $k_{ij}(1)$ не имеет положительных собственных значений.

Тогда $\operatorname{Ran}\Omega^+=\operatorname{Ran}\Omega^-=\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(H)$.

Для некоторых систем N частиц с единственным каналом (т. е. для систем, не имеющих связанных состояний с гамильтонианом $H(C)$) полнота доказана; см. теорему XIII.27 для слабой связи и теорему XIII.32 для потенциалов отталкивания.

Кажется весьма правдоподобным, что методы § 17 будут обобщены и позволят доказать достаточно сильные результаты об асимптотической полноте для многочастичных гамильтонианов.

Есть, наконец, еще одна тема в рассеянии N частиц, которую мы хотим здесь рассмотреть. Это так называемые кластерные свойства оператора $\Omega^\pm$ и определение «связной части» S-матрицы. Кластерные свойства играют главную роль в дальнейшем развитии теории рассеяния N частиц, особенно в физической литературе. Но мы хотим предупредить читателя, что технические детали здесь крайне сложны и, в сущности, их можно опустить, так как мы не собираемся к этому возвращаться в дальнейшем. Кластерные свойства проще выразить, если не выделять движение центра масс. Поэтому введем следующие определения:

$$\tilde{\mathscr{H}}=L^2(\mathbb{R}^3)\otimes\mathscr{H},\quad \tilde{\mathscr{H}}_{\mathrm{asym}}=L^2(\mathbb{R}^3)\otimes\mathscr{H}_{\mathrm{asym}},$$
$$\tilde{\Omega}_D^\pm=1\otimes\Omega_D^\pm,\quad \tilde{\Omega}_\alpha^\pm=1\otimes\Omega_\alpha^\pm,\quad \tilde{S}=1\otimes S,\quad \tilde{\mathscr{T}}_\alpha=1\otimes\mathscr{T}_\alpha,$$
$$\tilde{H}=h_0^{\mathrm{CM}}\otimes 1+1\otimes H,\quad \tilde{H}_{\mathrm{asym}}=h_0^{\mathrm{CM}}\otimes 1+1\otimes H_{\mathrm{asym}}.$$

Пусть $i\in\{1, \ldots, N\}$, $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3$. Определим $U^i(\mathbf{a})$ на $\tilde{\mathscr{H}}$ равенством
$$(U^i(\mathbf{a})f)(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)=f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i-\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{x}_n).$$

Для данного разбиения $D=\{C_1, \ldots, C_k\}$ и данных $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\in\mathbb{R}^3$ определим $U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ на $\tilde{\mathscr{H}}$, полагая
$$U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)=\Big(\prod_{i\in C_1}U^i(\mathbf{a}_1)\Big)\Big(\prod_{i\in C_2}U^i(\mathbf{a}_2)\Big)\cdots\Big(\prod_{i\in C_k}U^i(\mathbf{a}_k)\Big).$$

Таким образом, $U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ сдвигает кластеры друг относительно друга. Чтобы сформулировать основной технический результат, а затем дать его интерпретацию, нам потребуются еще некоторые понятия.

Определение. Пусть $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ — два кластерных разложения. Будем говорить, что $D^{(2)}$ есть **измельчение** $D^{(1)}$, и писать $D^{(1)} \lhd D^{(2)}$, если каждый элемент $C_l^{(2)} \in D^{(2)}$ является подмножеством некоторого $C_j^{(1)} \in D^{(1)}$.

Таким образом, D_2 есть измельчение D_1, если каждый кластер в D_1 может быть получен объединением одного или нескольких кластеров в D_2. Мы пишем $D_1 \lhd D_2$, чтобы указать, что некоторые из множеств в D_2 объединяются и образуют множества в D_1.

Если D — некоторое кластерное разложение, то ему соответствует естественное разложение $\tilde{\mathscr{H}}$ в тензорное произведение $\bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{\mathscr{H}}_{C_l}$, где $\tilde{\mathscr{H}}_{C_l}$ — пространство функций от координат $\{\mathbf{r}_i \mid i \in C_l\}$. Допустим, что $D \lhd D'$. Тогда D' индуцирует в каждом $C_l \in D$ кластерное разложение D'_l — семейство элементов из D', содержащихся в C_l. В этом случае мы будем в качестве кластерного волнового оператора канала вводить оператор $\tilde{\Omega}^{\pm}_{D'_l}$ на пространстве $\tilde{\mathscr{H}}_{C_l}$, отвечающий разбиению D'_l кластера C_l. Таким образом,

$$\tilde{\Omega}^{\pm}_{D'_l} = \operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} \exp(it\tilde{H}(C_l)) \exp\left(-it \sum_{C'_j \subset C_l} \tilde{H}(C'_j)\right).$$

Теорема XI.38. Пусть $V_{ij} \in L^2(\mathbb{R}^3) + L^r(\mathbb{R}^3)$, $2 < r < 3$.

(a) Если $D \lhd D'$, то

$$\operatorname*{s-lim}_{\substack{\min |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| \to \infty \\ i \neq j}} U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)^{-1} \tilde{\Omega}^{\pm}_{D'} U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) = \bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{\Omega}^{\pm}_{D'_l}.$$

(b) Если $D \lhd D'$, то

$$\operatorname*{s-lim}_{\substack{\min |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| \to \infty \\ i \neq j}} U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)^{-1} (\tilde{\Omega}^{\pm}_{D'})^* U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) = \bigotimes_{l=1}^{k} (\tilde{\Omega}^{\pm}_{D'_l})^*.$$

(c) Если $D \not\lhd D'$ и β — любой канал с $D(\beta) = D'$, то

$$\operatorname*{s-lim}_{\substack{\min |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| \to \infty \\ i \neq j}} (\tilde{\Omega}^{\pm}_{\beta})^* U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) = 0.$$

Доказательство. Доказательство (a) в основном совпадает с доказательством теоремы XI.33, так что мы наметим только главные идеи, оставляя детали читателю (задача 54). Сначала заметим, что

$$U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) \bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{\Omega}^{\pm}_{D'_l} = \bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{\Omega}^{\pm}_{D'_l} U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k),$$

так как $\prod_{i \in \mathscr{C}_l} U_i(\mathbf{a}_l)$ коммутирует с $\tilde{\Omega}^{\pm}_{D'_l}$, и что

$$\bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{\Omega}^{\pm}_{D'_l} = \operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{i\tilde{H}_D t} e^{-i\tilde{H}_{D'} t}.$$

Следовательно,

$$\tilde{\Omega}^{\pm}_{D'} = \left(\operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{i\tilde{H}t} e^{-i\tilde{H}_D t}\right) \left[\bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{\Omega}^{\pm}_{D'_l}\right] = \tilde{\Omega}^{\pm}_{D} \left[\bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{\Omega}^{\pm}_{D'_l}\right],$$

и для доказательства сильного стремления к нулю $U_D^{-1} \Big(\tilde{\Omega}^{\pm}_{D'} - \bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{\Omega}^{\pm}_{D'_l}\Big) U_D$ надо доказать только, что

$$\operatorname*{s-lim}_{\substack{\min |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| \to \infty \\ i \neq j}} U_D^{-1}(\mathbf{a}) [\tilde{\Omega}^{\pm}_D - 1] U_D(\mathbf{a}) = 0. \tag{75}$$

Но если $\varphi \in D(H_0)$, то

$$(\tilde{\Omega}^{\pm}_D - 1)\varphi = i \int_0^{\mp\infty} (e^{+i\tilde{H}t} I_D e^{-i\tilde{H}_D t} \varphi)\, dt.$$

Дальше доказательство проходит, как в теореме XI.33, с оценками из теоремы XI.34 вместо оценок из теоремы XI.24. Доказательство (b) мы отложим до того, как будет доказано (c).

(c) Эвристическое соображение, которое скрыто за этим утверждением, состоит в том, что $(\Omega^{\pm}_{\beta})^*$ обращается в нуль на тех состояниях, которые асимптотически не образуют связанных кластеров в D'. Поскольку $D \not\sqsupset D'$, существует некоторая пара $\langle i, j \rangle$, такая, что $iD'j$, но $\sim iD_j$. Значит, $U_D(\mathbf{a})$ выводит какой-то кластер из D', когда $\min|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| \to \infty$, и препятствует $U_D\psi$ быть состоянием связанного кластера в D'. Эта эвристическая аргументация состоит фактически из двух утверждений. Во-первых, U_D «выводит какие-то кластеры из D'», и надо показать, что

$$\operatorname*{s-lim}_{\min |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| \to \infty} \mathscr{F}^*_{\beta} U_D(\mathbf{a}) = 0. \tag{76}$$

Во-вторых, $e^{-iHt} U_D(\mathbf{a})$ приближается к $e^{-iH_D t} \cdot U_D(\mathbf{a})$ в сильном смысле, когда $\min|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| \to \infty$, т. е. когда кластеры в D раздвигаются, вклад той части динамики, которая вызвана силами между кластерами, становится пренебрежимо малым.

Как обычно, чтобы доказать (76), достаточно показать, что $\tilde{\mathcal{F}}^*_\beta U_D(\mathbf{a})\psi \to 0$ для множества функций ψ, линейные комбинации которых плотны в $\tilde{\mathcal{H}}$. Пусть $D' = \{C'_1, \ldots, C'_{k'}\}$; выберем $\psi = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \ldots \varphi_{k'}$, где φ_i — функция координат в C'_i. Пусть $i(j)$ для каждого j — такое число, что $j \in C'_i$, одной из групп в D. Предположим, что

$$\beta = \begin{pmatrix} C'_1 \ldots C'_{k'} \\ \eta'_1 \ldots \eta'_{k'} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\|\tilde{\mathcal{F}}^*_\beta U_D(\mathbf{a})\psi\|_{\tilde{H}_\beta} = \prod_{l=1}^{k'} \left\| \int \eta_l \; (\xi^{(C'_l)}) \; \varphi(\{r_l + a_{i(j)}\}_{j \in C'_l}) \, d\xi^{(C'_l)} \right\|_{\tilde{H}(C'_l)}.$$

Главное здесь то, что в некотором C'_l есть такие j_1, j_2, что $i(j_1) \neq i(j_2)$. Поэтому, когда координаты $\mathbf{r}_j + \mathbf{a}_{i(j)}$ в φ_l заменяются на $\mathbf{R}_l$ и $\xi^{(C'_l)}$, некоторые из ξ сдвигаются, так же как и $\mathbf{R}_l$. Поскольку мы рассматриваем внутреннее произведение по ξ с фиксированной η, норма $\|\ldots\|_{\tilde{H}(C'_l)}$ стремится к нулю, так что формула (76) доказана.

Докажем далее, что

$$\operatorname*{s-lim}_{\min|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| \to \infty} \left(e^{-i\tilde{H}t} - e^{-i\tilde{H}_D t}\right) U_D(\mathbf{a}) = 0 \tag{77a}$$

и

$$\operatorname*{s-lim}_{\min|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| \to \infty} \left(e^{+i\tilde{H}_{D'} t} - e^{+i\tilde{H}_{D' * D} t}\right) U_D(\mathbf{a})\, e^{-i\tilde{H}_D t} = 0 \tag{77b}$$

равномерно по t, где $D' * D$ — кластерное разложение, элементы которого имеют вид $\{C'_l \cap C_m\}$, где $1 \leqslant l \leqslant k'$, $1 \leqslant m \leqslant k$. Это точное выражение того, что в результате применения $U_D(\mathbf{a})$ к вектору ψ и, следовательно, выведения кластеров из D взаимодействия между кластерами вносят пренебрежимо малый вклад в динамику. Если $\psi \in D(\tilde{H}_0)$, то

$$\left(e^{-i\tilde{H}t} - e^{-i\tilde{H}_D t}\right) U_D \psi = -ie^{-i\tilde{H}t} \int_0^t e^{+i\tilde{H}s} I_D e^{-i\tilde{H}_D s} U_D \psi \, ds.$$

Значит, для доказательства (77a) достаточно показать, что

$$\lim_{\min|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| \to \infty} \int_0^t \| I_D e^{-i\tilde{H}_D s} U_D(\mathbf{a})\psi \| \, ds = 0$$

равномерно по t. Это в точности та оценка, которой мы пользовались, доказывая (75). Чтобы доказать (77b), надо убедиться, что

$$\lim_{\min|\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_j|\to\infty} \int_0^t \|(I_{D'}-I_{D*D'})\, e^{i\tilde{H}_{D*D'}s}\, U_D(\mathbf{a})\, e^{-iH_0 s}\psi\|\, ds = 0$$

равномерно по t, а это доказывается аналогично (задача 55).

Теперь мы можем воспользоваться равенствами (76) и (77) вместе и получить требуемый результат. Из (77) и соотношений

$$U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)\, e^{-i\tilde{H}_0 t} = e^{-i\tilde{H}_0 t} U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k),$$
$$U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)\, e^{-i\tilde{H}_{D*D'}t} = e^{-i\tilde{H}_{D*D'}t}\, U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$$

получаем, что для любого $\psi \in \mathcal{H}$

$$\sup_{t\in\mathbf{R}} \|(e^{i\tilde{H}_{D'}t} e^{-i\tilde{H}t} - e^{i\tilde{H}_{D*D'}t}\, e^{-i\tilde{H}_{D'}t})\, U_D\psi\| \to 0, \tag{78}$$

когда $\min\limits_{i\neq j}|\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_j| \to \infty$. Пусть $\tilde{\Omega}^{\pm}_{D;\, D*D'} = \operatorname*{s-lim}\limits_{t\to\mp\infty} e^{i\tilde{H}_D t} e^{-i\tilde{H}_{D*D'}t}$, который существует по теореме XI.34. Тогда

$$(\tilde{\Omega}^{\pm}_{D'} - \tilde{\Omega}^{\pm}_{D;\, D*D'})^* \, U_D(\mathbf{a})\, \psi = \operatorname*{w-lim}_{t\to\mp\infty} (e^{i\tilde{H}_{D'}t} e^{-i\tilde{H}t} - e^{i\tilde{H}_{D'*D}t}\, e^{-i\tilde{H}_{D}t})\, U_D(\mathbf{a})\psi$$

для любых фиксированных ψ и $\mathbf{a}$. Из неравенства $\|\operatorname*{w-lim}\limits_{t\to\pm\infty} \psi_t\| \leqslant \lim\limits_{t\to\pm\infty} \|\psi_t\|$ и (78) следует, что

$$\lim_{\min|\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_j|\to\infty} \|(\tilde{\Omega}^{\pm}_{D'} - \tilde{\Omega}^{\pm}_{D,\, D*D'})^*\, U_D(a)\, \psi\| = 0.$$

Наконец, поскольку $(\tilde{\Omega}^{\pm}_{D,\, D*D'})^*\, U_D(\mathbf{a}) = U_D(\mathbf{a})\, (\tilde{\Omega}^{\pm}_{D,\, D*D'})^*$, заключаем, что

$$\operatorname*{s-lim}_{\min|\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_j|\to\infty} \mathcal{T}^*_\beta (\tilde{\Omega}^{\pm}_{D'})^*\, U_D(\mathbf{a}) = \operatorname*{s-lim}_{\min|\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_j|\to\infty} \mathcal{T}^*_\beta U_D(\mathbf{a})\, (\tilde{\Omega}^{\pm}_{D;\, D*D'})^* = 0.$$

Это доказывает (c).

Так как (77) выполняется независимо от того, справедливо или нет соотношение $D \lhd D'$, его следствие $\operatorname{s-lim} \|(\tilde{\Omega}^{\pm}_{D'} - \tilde{\Omega}^{\pm}_{D,\, D*D'})^*\, U_D(\mathbf{a})\,\psi\| = 0$ тоже выполняется. Если $D \lhd D'$, то $D*D' = D'$ и $\tilde{\Omega}^{\pm}_{D,\, D*D'} = \bigotimes\limits_{l=1}^{k} \Omega^{\pm}_{D_l}$. Отсюда с учетом равенства $U_D^{-1}\left(\bigotimes\limits_{l=1}^{k} \tilde{\Omega}^{\pm}_{D_l}\right)^* U_D = \left(\bigotimes\limits_{l=1}^{k} \tilde{\Omega}^{\pm}_{D_l}\right)^*$ следует утверждение (b). ∎

Теперь мы воспользуемся кластерными свойствами для получения сведений относительно S-оператора. Пусть α — некоторый канал и D — кластерное разложение, такое, что $D \lhd D(\alpha)$. В D некоторые из связанных фрагментов канала α соединяются вместе. Такое соединение индуцирует разбиение α в *подканалы*. В самом деле, для каждого $C_l \in D$ пусть α_l есть набор кластеров $F_m \in D(\alpha)$, таких, что $F_m \subset C_l$ вместе со связанными состояниями η_m канала α. Тогда если $D = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6\}\}$ и

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{1\} & \{2\} & \{3, 4\} & \{5\} & \{6\} \\ 1 & 1 & \varphi(\mathbf{r}_{34}) & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\varphi(\mathbf{r}_{34})$ — некоторое связанное состояние гамильтониана $H(\{3, 4\})$, то

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \{1\} & \{2\} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} \{3, 4\} & \{5\} \\ \varphi(\mathbf{r}_{34}) & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} \{6\} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Набор $\{\alpha_l\}_{l=1}^k$ называется **разбиением** α, **индуцированным** D. Пусть $D = \{C_1, \ldots, C_k\}$, и пусть α, β — такие каналы, что $D \lhd D(\beta)$ и $D \lhd D(\alpha)$. Пусть $\{\alpha_l\}_{l=1}^k$ и $\{\beta_l\}_{l=1}^k$ — разбиения α и β, индуцированные D. Тогда мы будем писать $S_{\alpha_l \beta_l}^{(C_l)}$ для S-оператора n_l тел, описывающего рассеяние из канала α_l в канал β_l.

Пусть теперь $D \lhd D(\alpha)$. Тогда $U_D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ оставляет инвариантной $\operatorname{Ran} \tilde{\mathcal{F}}_\alpha$ и, значит, индуцирует отображение $U_D^{(\alpha)}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ на $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha$ посредством $U_D \tilde{\mathcal{F}}_\alpha = \tilde{\mathcal{F}}_\alpha U_D^{(\alpha)}$. Если, в частности, $\varphi \in \tilde{\mathcal{H}}_\alpha$ есть функция от $\langle \mathbf{r}_{F_1}, \ldots, \mathbf{r}_{F_m} \rangle$, где $D(\alpha) = \{F_1, \ldots, F_m\}$, то $U_D^{(\alpha)}$ действует на $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha$, сдвигая те F_m, которые принадлежат C_l, на $\mathbf{a}_l$. Фиксируем $\psi \in \tilde{\mathcal{H}}_\alpha$ и рассмотрим состояния $U_D^{(\alpha)}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)\psi$, когда $\min\limits_{i \neq j} |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| \to \infty$. Как ведет себя $\tilde{S} U_D^{(\alpha)} \psi$? Пусть β — канал, в котором $D \ntriangleleft D(\beta)$. Тогда для рассеяния из α в β частицы из разных кластеров $C_l \in D$ должны соединиться. Так как кластеры в D в состоянии $U_D^{(\alpha)}\psi$ разведены далеко, естественно ожидать, что не будет рассеяния в канал β. С другой стороны, если $D \lhd D(\beta)$, рассеяние в β возможно посредством частичного рассеяния в каждый кластер из $C_l \in D$. Таким образом, мы ожидаем, что $\tilde{S} U_D^{(\alpha)} \psi$ факторизуется в произведение вкладов от рассеяния для каждого кластера C_l. Так оно и есть.

Теорема XI.39 (пространственные кластерные свойства S). Пусть α — канал N-частичной квантовой системы, удовлетворяющей условиям теоремы XI.34. Пусть D — кластерное разложение, причем $D \lhd D(\alpha)$.

(а) Если $D \lhd D(\beta)$, то

$$\operatorname*{s-lim}_{\min\limits_{i \neq j} |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| \to \infty} \left(\tilde{S}_{\beta\alpha} - \bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{S}_{\beta_l \alpha_l}^{(C_l)} \right) U_i^{(\alpha)}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) = 0.$$

(b) Если $D \not\triangleleft D(\beta)$, то

$$\underset{\min\limits_{i\neq j}|\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_j|\to\infty}{\text{s-lim}} \tilde{S}_{\beta\alpha} U_D^{(\alpha)}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) = 0.$$

Доказательство. (a) Воспользуемся утверждениями (a) и (b) теоремы XI.38 и убедимся сначала, что

$$\text{s-lim}\left(\tilde{S}_{\beta\alpha} U_D^{(\alpha)} - \tilde{\mathscr{T}}_\beta^* U_D \bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{\Omega}_{D(\beta_l)}^{-} \tilde{\Omega}_{\alpha_l}^{+}\right) = 0,$$

ибо

$$\tilde{S}_{\beta\alpha} U_D^{(\alpha)} - (\tilde{\Omega}_\beta^-)^* \left[U_D \bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{\Omega}_{\alpha_l}^{+}\right] = (\tilde{\Omega}_\beta^-)^* \left[\tilde{\Omega}_\alpha^+ U_D^{(\alpha)} - U_D \bigotimes_{l=1}^{k} \Omega_{\alpha_l}^{+}\right]$$

стремится к нулю в сильном смысле по теореме XI.38(a). Аналогично,

$$(\tilde{\Omega}_\beta^-)^* \left[U_D \bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{\Omega}_{\alpha_l}^{+}\right] - \tilde{\mathscr{T}}_\beta^* U_D \bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{\Omega}_{D(\beta_l)}^{-} \tilde{\Omega}_{\alpha_l}^{+} =$$

$$= \tilde{\mathscr{T}}_\beta^* \left[(\tilde{\Omega}_{D(\beta)}^-)^* U_D - U_D \bigotimes_{l=1}^{k} (\tilde{\Omega}_{D(\beta)}^-)^*\right] \bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{\Omega}_{\alpha_l}^{+}$$

стремится к нулю в сильном смысле по теореме XI.38(b). Заметим, наконец, что

$$\left(\bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{\mathscr{T}}_{\beta_l}^* \tilde{\Omega}_{D(\beta_l)}^{-} \tilde{\Omega}_{\alpha_l}^{+}\right) U_D^{(\alpha)} = \bigotimes_{l=1}^{k} \tilde{S}_{\beta_l\alpha_l}^{(C_l)} U_D^{(\alpha)}.$$

(b) Здесь вместо пункта (b) теоремы XI.38 мы опираемся на пункт (c) той же теоремы. ∎

Следствие. Если S-матрица N-частичной квантовой системы унитарна, то унитарны и S-матрицы любых ее подсистем.

Эти пространственные кластерные свойства интересны благодаря своей прямой физической интерпретации, но важнее то, что они наводят на мысль о «гладкости в p-пространстве». Чтобы понять это явление, рассмотрим сначала рассеяние двух частиц. Такой $\tilde{S}$-оператор задается ядром. Это можно увидеть, например, следующим образом. Если $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^6)$, то $\langle\bar{\varphi}, \psi\rangle \mapsto (\varphi, \tilde{S}\psi)$ билинейно и непрерывно на $\mathscr{S}$, поэтому существует обобщенная функция $Q(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$ из $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{12})$, такая, что

$$(\varphi, \tilde{S}\psi) = \int \overline{\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}\, Q(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)\, \psi(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)\, d^3x_1 \ldots d^3x_4.$$

Полезно записать $\tilde{S}$ в p-пространстве, т. е. найти ядро $\mathscr{F}\tilde{S}\mathscr{F}^{-1}$, где $\mathscr{F}$ — преобразование Фурье:

$$(\varphi, \tilde{S}\psi) = \int \overline{\hat{\varphi}(p_1, p_2)}\, s(p_1, p_2; p_3, p_4)\, \hat{\psi}(p_3, p_4)\, d^3p_1 \ldots d^3p_4.$$

Вследствие сохранения энергии и импульса, т. е. вследствие того, что S коммутирует с пространственными сдвигами и группой *свободной* динамики, обобщенная функция s имеет носитель на многообразии, где

$$\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2=\mathbf{p}_3+\mathbf{p}_4,$$
$$E_{\text{out}}\equiv\frac{\mathbf{p}_1^2}{2\mu_1}+\frac{\mathbf{p}_2^2}{2\mu_2}=\frac{\mathbf{p}_3^2}{2\mu_3}+\frac{\mathbf{p}_4^2}{2\mu_4}\equiv E_{\text{in}}.$$

Это подсказывает нам, что s можно записать в виде

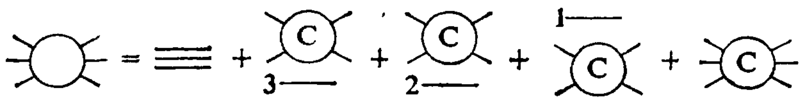
$$s(\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2;\ \mathbf{p}_3,\ \mathbf{p}_4)=\delta(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4)\,\delta(E_{\text{in}}-E_{\text{out}})\,s^{\text{red}}(\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2;\ \mathbf{p}_3,\ \mathbf{p}_4).$$

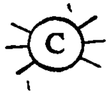
A priori s может иметь гораздо более сложные особенности, как, например, $-\Delta\delta(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4)$. То, что такого рода особенности типа δ-функции тоже факторизуются, мы увидим, когда будем рассматривать редукцию S-матрицы за счет симметрии в § 8. Можно было бы думать, что s^{red} будет гладкой функцией переменных $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_4$, пока они меняются на многообразии, где энергия и импульс сохраняются. Однако это плохая гипотеза! Действительно, пусть $U(\mathbf{a})$ — трансляция первой частицы на $\mathbf{a}$. Тогда $U(\mathbf{a})\tilde{S}U(\mathbf{a})^{-1}$ имеет ядро $se^{i\mathbf{a}\cdot(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3)}$. Если бы s^{red} была гладкой, то из леммы Римана — Лебега следовало бы, что $\lim\limits_{\mathbf{a}\to\infty}(\varphi,\ U(\mathbf{a})\tilde{S}U(\mathbf{a})^{-1}\psi)=0$; однако же нам известно, что $\lim\limits_{\mathbf{a}\to\infty}(\varphi,\ U(\mathbf{a})(S-I)\ U(\mathbf{a})^{-1}\psi)=0$, т. е. гладкое ядро должен иметь оператор $\tilde{S}-I$. Таким образом, можно надеяться, что

$$\begin{aligned}s(\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2;\ \mathbf{p}_3,\ \mathbf{p}_4)&=\delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3)\,\delta(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_4)-\\&-(2\pi i)\,\delta(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4)\,\delta(E_{\text{in}}-E_{\text{out}})\,t(\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2;\ \mathbf{p}_3,\ \mathbf{p}_4),\end{aligned}$$

где t — гладкая функция $\mathbf{p}_i$, если $\langle\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2,\ \mathbf{p}_3,\ \mathbf{p}_4\rangle$ меняется, оставаясь на многообразии, где сохраняются энергия и импульс. Член $\delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\,\delta(\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4)$ есть в точности ядро оператора I. Множитель $2\pi i$ вставлен из соображений нормировки. В случае двух частиц мы действительно докажем, что s имеет такой вид для широкого класса потенциалов; см. § 6 и 7. Чего следует ожидать в случае N тел? Запишем схематически результат для двух частиц в виде

где  означает часть S-матрицы с гладким ядром; эта часть называется «связной» частью. Легко догадаться, что для случая трех частиц



так что можно определить  рекуррентно через 

и связные части с меньшим числом частиц.

Определение. Пусть α, β — каналы системы N частиц. Определим $R_{\alpha\beta}$ рекуррентно (по N) посредством соотношений

$$R_{\alpha\beta}=\tilde{S}_{\alpha\beta}-\sum_{D\in\mathscr{C}_{\alpha\beta}} R_{\alpha_1\beta_1}\ \ldots\ R_{\alpha_k\beta_k},$$

где $\mathscr{C}_{\alpha\beta}$ — множество кластерных разложений с $D\lhd D(\alpha)$, $D\lhd D(\beta)$, *причем D содержит не менее двух кластеров*. При $N=2$ имеем $R=S-I$.

Тогда из пространственных кластерных свойств (теорема XI.39) вытекает (задача 56)

Теорема XI.40 (пространственные кластерные свойства редуцированных S-операторов).

(a) $\displaystyle \tilde{S}_{\alpha\beta}=\sum_{\substack{D\lhd D(\alpha),\ D\lhd D(\beta)\\ D=\{C_1,\ \ldots,\ C_k\}}} R_{\alpha_1\beta_1}R_{\alpha_2\beta_2}\ldots R_{\alpha_k\beta_k}$;

(b) $\displaystyle \operatorname*{s-lim}_{\substack{\min|a_i-a_j|\to\infty\\ i\neq j}} R_{\alpha\beta}U_D(\mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathbf{a}_k)=0$ для всех D, для которых $D\lhd D(\beta)$.

Это построение *подсказывает*, что $R_{\alpha\beta}$ имеет ядро вида

$$r_{\alpha\beta}(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')=(2\pi i)\,\delta\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{p}_i-\sum_{i=1}^{N}\mathbf{p}_i'\right)\delta(E-E')\,t_{\alpha\beta}(\mathbf{p},\ \mathbf{p}'),$$

где $t_{\alpha\beta}$ есть гладкая функция $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$. «Гипотеза об аналитичности S-матрицы» требует даже, чтобы $t_{\alpha\beta}(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')$ было граничным значением функции, аналитической в некоторой области. К сожалению, эта весьма привлекательная гипотеза не доказана для многоканальных и многочастичных систем. В Замечаниях мы обсудим результаты, составляющие частичное доказательство «гипотезы об аналитичности S-матрицы» для квантовых систем с $N\geqslant 3$.

XI.6. Квантовое рассеяние III: разложение по собственным функциям

Любые формальные выкладки предполагаются правильными, если только они не очевидно неверны.

М. Л. ГОЛДБЕРГЕР И К. ВАТСОН, «ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ»

Мы установили существование и единственность состояний рассеяния квантовых двухчастичных систем с потенциалами, убывающими как $|x|^{-1-\varepsilon}$ при $|x| \to \infty$. Полноту мы докажем в § 17 и XIII. 8. Но мы пока еще не знаем никаких способов явно «сосчитать» S-матрицу или сравнить экспериментальные данные с теорией. В этом разделе мы хотим вывести некоторые формулы, составляющие так называемую «формальную теорию рассеяния», или «стационарную теорию рассеяния». Эти формулы представляют S-оператор в явном виде как «интегральный оператор» с ядром $\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')-2\pi i\delta(k^2-k'^2)T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$; см. теорему XI.42. В следующем разделе мы покажем, что функция $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ имеет аналитическое продолжение в некоторые определенные области.

Главный инструмент «формальной теории рассеяния» — это разложение по собственным функциям гамильтониана H, которое представляет и самостоятельный интерес. Оператор A в $L^2(\mathbb{R}^3, dx)$ с чисто дискретным спектром имеет разложение по собственным функциям в самом прямом смысле: существуют L^2-функции $\varphi_n(x)$ и связанное с ними отображение $\sim$: $L^2(\mathbb{R}^3, dx) \to l_2$, определенное формулой

$$(\tilde{f})_n = \int \overline{\varphi_n(x)} f(x)\, dx. \tag{79a}$$

То, что φ_n — собственные функции, т. е. $A\varphi_n = a_n\varphi_n$, выражается равенством

$$(\widetilde{Af})_n = a_n\tilde{f}_n, \quad \text{если } f \in D(A). \tag{79b}$$

Из ортонормированности $\{\varphi_n\}$ вытекает, что

$$\operatorname{Ran} \sim = l_2. \tag{79c}$$

Полнота системы φ_n выражается формулой

$$f(x) = L^2\text{-}\lim \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}_n \varphi_n(x). \tag{79d}$$

Наконец, вследствие ортонормированности и полноты

$$\|f\|^2 = \sum_n |\tilde{f}_n|^2. \tag{79e}$$

Но спектры двухчастичных гамильтонианов с исключенным центром масс имеют не дискретные части — в действительности с рассеянием связан абсолютно непрерывный спектр $[0, \infty)$. И все же можно надеяться, что имеет место некоторое «непрерывное» разложение по собственным функциям. В качестве модели того, что мы хотим отыскать, рассмотрим разложение по собственным функциям для $H_0 = -\Delta$, имеющего только непрерывный спектр, которое дает преобразование Фурье. Запишем $\varphi_0(x, k) = e^{ik\cdot x}$ и будем представлять себе $\varphi_0(\cdot, k)$ как семейство функций x, параметризованное непрерывным индексом k. Тогда, как известно, $\wedge$ удовлетворяет условию

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-n/2}\ \mathrm{l.i.m.} \int \overline{\varphi_0(x, k)}\, f(x)\, dx, \tag{80a}$$

где $\mathrm{l.i.m.} \int = L^2\text{-}\lim \int\limits_{|x|<M}$ при $M \to \infty$. Функции $\varphi_0(\cdot, k)$ будут собственными функциями с собственным значением k^2 в том смысле, что

$$(\widehat{H_0 f})(k) = k^2 \hat{f}(k), \quad \text{если } f \in D(H_0). \tag{80b}$$

Из ортогональности и «нормировки» функций $\varphi_0(\cdot, k)$ следует, что

$$\mathrm{Ran}\, \wedge = L^2(\mathbb{R}^3, dx). \tag{80c}$$

Полнота множества $\{\varphi_0(\cdot, k)\}_{k \in \mathbb{R}^n}$ выражается соотношениями

$$f(x) = \mathrm{l.i.m.}\ (2\pi)^{-3/2} \int \varphi_0(x, k)\, \hat{f}(k)\, dk \tag{80d}$$

и

$$\|f\|^2 = \int |\hat{f}(k)|^2\, dk. \tag{80e}$$

Как найти подходящие φ, которые могли бы быть «непрерывными собственными функциями» для разложения $H = H_0 + V$ по собственным функциям? Мы определили $\Omega^+ f$ только для $f \in L^2$, но допустим, что можно придать смысл $\Omega^+\varphi_0(\cdot, k)$. Тогда, поскольку $\Omega^+ H_0 = H\Omega^+$, функция $\varphi(\cdot, k) \equiv \Omega^+\varphi_0(\cdot, k)$ должна удовлетворять уравнению $H\varphi = k^2\varphi$ в смысле (80b). Если в каком-то смысле $\varphi = \Omega^+\varphi_0$, то $\varphi_0 = (\Omega^+)^*\varphi$ должна быть пределом при $t \to -\infty$ следующего выражения:

$$e^{+iH_0 t} e^{-iHt}\varphi = \varphi - i \int\limits_0^t e^{iH_0 s} V e^{-iHs}\varphi\, ds \to$$

$$\to \varphi - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} i \int\limits_0^{-\infty} e^{iH_0 s} V e^{-ik^2 s} e^{+\varepsilon s}\varphi\, ds = \varphi + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (H_0 - k^2 - i\varepsilon)^{-1} V\varphi.$$

Следовательно, φ должна удовлетворять уравнению

$$\varphi(\cdot, k) = \varphi_0(\cdot, k) - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} ([H_0 - (k^2 + i\varepsilon)]^{-1} V\varphi)(\cdot, k), \tag{81a}$$

или, если воспользоваться (IX.30), уравнению

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} V(\mathbf{y})\,\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{k})\,d\mathbf{y}. \tag{81b}$$

Физики обозначают волновой оператор при $t \to -\infty$ через Ω^+ вследствие знака $+i\varepsilon$ в формуле (81a). Уравнение (81), которое мы получили с помощью эвристических рассуждений, называется **уравнением Липпмана—Швингера.** Чтобы найти «непрерывные» собственные функции φ для разложения оператора $H = H_0 + V$, надо решить это уравнение. Найдя φ, мы построим преобразование с этой собственной функцией $f^{\#}(k) = \text{l.i.m.}\,(2\pi)^{-3/2}\int \overline{\varphi(x, k)}\, f(x)\,dx$. Мы ожидаем, что будут выполнены аналоги уравнения (80) с одним исключением: $\varphi(\cdot, k)$, вообще говоря, не будут полны, т. е. мы не ожидаем более, что

$$f(x) = \text{l.i.m.}\,(2\pi)^{-3/2}\int f^{\#}(k)\,\varphi(x, k)\,dk,$$

так как φ — это собственные функции, отвечающие лишь абсолютно непрерывному спектру H. В действительности мы увидим, что $(P_{ac}(H)f)(x) = \text{l.i.m.}\,(2\pi)^{-3/2}\int f^{\#}(k)\,\varphi(x, k)\,dk$. Наконец, мы ожидаем, что это преобразование с собственными функциями и преобразование Фурье тесно связаны: ведь формально $\Omega^+\varphi_0 = \varphi$, и потому должно быть $\Omega^+\left(\int b(k)\,\varphi_0(x, k)\,dk\right) = \int b(k)\,\varphi(x, k)\,dk$, или $(\Omega^+ f)^{\#} = \hat{f}$, где мы положили $\hat{f} = (2\pi)^{3/2} b$.

Главный результат этого раздела (теорема XI.41) состоит в том, что справедливы все приведенные выше утверждения. Напомним, что класс Рольника R есть множество измеримых функций $V(x)$, удовлетворяющих условию

$$\|V\|_R^2 = \int_{\mathbb{R}^6} \frac{|V(x)|\,|V(y)|}{|x-y|^2}\,dx\,dy < \infty.$$

Теорема XI.41. Пусть $V \in R \cap L^1(\mathbb{R}^3)$. Пусть $H_0 = -\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$, и пусть $H = H_0 + V$ в смысле квадратичных форм (теорема X.19). Тогда существует множество $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}_+$ (где $\mathbb{R}_+$ — множество положительных чисел), которое замкнуто, имеет меру Лебега нуль и удовлетворяет таким условиям:

(a) если $k^2 \notin \mathscr{E}$, то существует единственное решение $\varphi(\cdot, \mathbf{k})$ уравнения Липпмана—Швингера (81), удовлетворяющее условию $|V|^{1/2}\varphi(\cdot, \mathbf{k}) \in L^2$;

(b) если $f \in L^2$, то существует

$$f^{\#}(\mathbf{k}) = \text{l.i.m.}\,(2\pi)^{-3/2}\int \overline{\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k})}\, f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}; \tag{82a}$$

(c) если $f \in D(H)$, то

$$(H f)^{\#}(\mathbf{k}) = k^2 f^{\#}(\mathbf{k}); \tag{82b}$$

(d) $\operatorname{Ran} {}^{\#} = L^2(\mathbb{R}^3)$ и (82c)

$$\int |f^{\#}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} = \|P_{\mathrm{ac}}(H) f\|^2. \tag{82e}$$

Более общо, если $[\alpha, \beta] \cap \mathscr{E}$ пусто и $\alpha > 0$, то

$$\int\limits_{\alpha < k^2 < \beta} |f^{\#}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} = \|P_{[\alpha, \beta]}(H) f\|^2, \tag{82e$'$}$$

где $\{P_\Omega(H)\}$ — семейство спектральных проекторов для H.

(e) Пусть L.I.M. обозначает L^2-предел при $M \to \infty$ и $\delta \to 0$ интеграла по $\{\mathbf{k} \mid k \leqslant M,\ \operatorname{dist}(k^2, \mathscr{E}) > \delta\}$. Тогда

$$(P_{\mathrm{ac}}(H) f)(x) = \text{L.I.M. } (2\pi)^{-3/2} \int f^{\#}(\mathbf{k})\, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k})\, d\mathbf{k}. \tag{82d}$$

(f) Для любой $f \in L^2$

$$(\Omega^+ f)^{\#}(\mathbf{k}) = \hat{f}(\mathbf{k}). \tag{83}$$

Мы лишь наметим основные идеи доказательства теоремы XI.41. Детали можно найти в литературе, приведенной в Замечаниях. Но для начала рассмотрим некоторые следствия этой теоремы и ее доказательства. Прежде всего отметим, что, как следует из (82e$'$), для любого интервала $[\alpha, \beta]$, не пересекающегося с $\mathscr{E}$, где $\alpha > 0$, $\operatorname{Ran} P_{[\alpha, \beta]} \subset \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}$. Таким образом, если существует сингулярный спектр, то он должен лежать в $\mathscr{E}$, ибо $\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = [0, \infty)$ по теореме XIII.15. Это позволит в ряде случаев заключить, что $\sigma_{\mathrm{sing}}(H) = \varnothing$ (см. теорему XIII.21). Во-вторых, при доказательстве теоремы XI.41 мы пользуемся существованием Ω^+, а не полнотой этого оператора. Условие (83) утверждает, что $\#[\operatorname{Ran} \Omega^+] = L^2$, а (82d) — что $\#^{-1}[L^2] = \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}$, так что из теоремы XI.41 вытекает равенство $\operatorname{Ran} \Omega^+ = \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}$. Таким образом, в случае $V \in L^1 \cap R$ мы получаем доказательство полноты Ω^+, не опирающееся на теорию Като — Бирмана. В Замечаниях мы объясним, как разложение по собственным функциям помогает «понять» сходимость волновых операторов, когда $V_n \to V$ в R и L^1. Мы также обсудим в Замечаниях, каким образом можно воспользоваться тем же методом, которым доказывается теорема XI.41, для доказательства похожего результата в случае $V \in L^p \cap L^{3/2}$ при некотором $1 \leqslant p < 3/2$ (см. также задачу 57). В более общей постановке разложение по собственным функциям рассматривается в дополнении к этому разделу и в Замечаниях. Отметим еще, что если $\sigma_{\mathrm{sing}}(H) = \varnothing$ (см. § XIII.6,7,8), то можно найти семейство $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ квадратично интегрируемых собственных функций H, $H\varphi_n = E_n\varphi_n$, таких, что если $f_n^{\#} = (\varphi_n, f)$, то

$$f(\mathbf{x}) = \mathrm{L.I.M.}\left(\sum_{n=1}^{N} f_n^{\#}\varphi_n(\mathbf{x}) + \int (2\pi)^{-3/2}\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k}) f^{\#}(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}\right),$$

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |f_n^{\#}|^2 + \int |f^{\#}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k},$$

$$(Hf)^{\#}(\mathbf{k}) = k^2 f^{\#}(\mathbf{k}); \quad (Hf)_n^{\#} = E_n f_n^{\#}.$$

Обратимся теперь к основным идеям доказательства теоремы XI.41.

(I) *Модифицированное уравнение Липпмана — Швингера.* Сначала введем модифицированное уравнение Липпмана — Швингера. Если $\psi(x, k) = |V(x)|^{1/2}\varphi(x, k)$ и φ удовлетворяет уравнению (81), то ψ удовлетворяет уравнению

$$\psi(x, k) = |V(x)|^{1/2} e^{ik\cdot x} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{|V(x)|^{1/2} e^{i|k||x-y|} V^{1/2}(y)}{|x-y|}\psi(y, k)dy, \tag{84}$$

где $V^{1/2} = |V|^{1/2}(\mathrm{sgn}\,V)$.

Покажем, что уравнение (84) имеет решения. Поскольку $V \in L^1 \cap R$, $e^{ik\cdot x}|V|^{1/2}$ принадлежит $L^2(\mathbb{R}^3)$ и

$$\frac{|V(x)|^{1/2} e^{i|k||x-y|} V^{1/2}(y)}{|x-y|} \in L^2(\mathbb{R}^6)$$

при любом k из $\mathbb{R}^3$. Следовательно, модифицированное уравнение Липпмана — Швингера имеет вид $\psi = \eta + L_{|k|}\psi$, где η из L^2, а $L_{|k|}$ — оператор Гильберта — Шмидта. Пусть $\mathscr{E}$ — такое множество чисел $|k|^2 \in \mathbb{R}_+$, для которого однородное уравнение $\psi = L_{|k|}\psi$ имеет ненулевое решение из L^2. По альтернативе Фредгольма (следствие теоремы IV.14) уравнение (84) имеет единственное решение ψ из L^2, если $|k|^2 \notin \mathscr{E}$. Отсюда следует, что исходное уравнение Липпмана — Швингера имеет единственное решение φ, удовлетворяющее условию $|V|^{1/2}\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ и определяемое формулой

$$\varphi(x, k) = e^{ik\cdot x} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{i|k||x-y|}}{|x-y|} V^{1/2}(y)\psi(y, k)\,dy$$

Разумеется, надо еще повозиться, чтобы доказать сходимость этого интеграла при почти всех x, но здесь мы не будем входить в такие тонкости.

(II) *Изучение множества* $\mathscr{E}$. Пусть K_λ — оператор $|V|^{1/2}(H_0 - \lambda^2)^{-1}V^{1/2}$. Это интегральный оператор (84) при $\lambda = |k|$ для некоторых $k \in \mathbb{R}^3$, в частности при положительных вещественных λ. Легко показать, что K_λ аналитичен, если $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$, и непрерывен, если $\mathrm{Im}\,\lambda \geqslant 0$.

Далее, с помощью теоремы о мажорированной сходимости можно показать, что норма Гильберта—Шмидта оператора K_λ стремится к нулю при $\operatorname{Im}\lambda \to \infty$. Следовательно, $(I+K_\lambda)^{-1}$ существует при больших $\operatorname{Im}\lambda$. Здесь потребуется небольшое усиление аналитической теоремы Фредгольма (теорема VI.14), а именно

Предложение. Пусть $A(\lambda)$ — компактная операторнозначная функция в $D=\{\lambda \mid \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0\}$, непрерывная в D и аналитическая во внутренности D. Тогда либо $(1-A(\lambda))^{-1}$ не существует ни для какого λ из D, либо множество $\{\lambda \mid \operatorname{Im}\lambda=0$ и $(1-A(\lambda))^{-1}$ не существует$\}$ представляет собой замкнутое подмножество в $\mathbb{R}$ меры нуль.

Это предложение доказывается тем же методом, что и теорема VI.14, с учетом следующего факта из теории аналитических функций: вещественные нули функции, аналитической в открытой верхней полуплоскости и непрерывной в замкнутой полуплоскости, образуют замкнутое подмножество в $\mathbb{R}$ меры нуль (см. задачи 58 и 59 и Замечания). Таким образом, определенное выше подмножество $\mathscr{E}\subset\mathbb{R}$ замкнуто и имеет меру нуль.

Сделаем еще несколько замечаний относительно $\mathscr{E}$. Во-первых, $\mathscr{E}$ всегда ограничено. Это следует из того, что операторная норма K_λ вследствие осцилляций ядра стремится к нулю, когда $\lambda \to \infty$, причем λ вещественно. Эти осцилляции описываются леммой Римана—Лебега (задача 60). Во-вторых, отметим, что в двух случаях мы точно знаем $\mathscr{E}$. Если $\|V\|_R < 4\pi$, то $\|K_\lambda\| < 1$ при всех λ, так что $\mathscr{E}=\varnothing$. А если V экспоненциально убывает в том смысле, что $e^{\alpha|x|}V(x)\in R$ при некотором $\alpha>0$, то $\mathscr{E}$ — конечное множество. Действительно, в этом случае K_λ можно продолжить в область $\{\lambda \mid \operatorname{Im}\lambda > -\alpha/2\}$, так что из обычной аналитической теоремы Фредгольма следует, что $\mathscr{E}$ дискретно.

(III) *Изучение функции Грина.* Главная идея доказательства состоит в том, чтобы связать функции $\varphi(x, k)$ с интегральным оператором $(H-E)^{-1}$, а затем с помощью формулы Стоуна (теорема VII.13) связать $(H-E)^{-1}$ со спектральными проекторами:

$$\underset{\varepsilon\downarrow 0}{\text{s-lim}}\,(2\pi i)^{-1}\int_\alpha^\beta [(H-\mu-i\varepsilon)^{-1}-(H-\mu+i\varepsilon)^{-1}]\,d\mu = \\ = {}^1\!/_2 P_{(\alpha,\beta)} + {}^1\!/_2 P_{[\alpha,\beta]}.$$

Предварительно надо рассмотреть интегральное ядро оператора $(H-E)^{-1}$.

Лемма 1. Допустим, что $E\notin\sigma(H)$. Тогда существует измеримая функция $G(x, y; E)$ на $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$, такая, что

$$[(H-E)^{-1}\psi](x)=\int G(x, y; E)\,\psi(y)\,dy.$$

Далее:

(a) для почти каждого фиксированного x имеем $G(x, \cdot; E) \in L^1 \cap L^2$;
(b) $G(x, y; E) = G(y, x; E)$ и $\overline{G(x, y; E)} = G(x, y; \bar{E})$;
(c) G удовлетворяет интегральному уравнению

$$G(x, y; E) = G_0(x, y; E) - \int G_0(x, z; E) V(z) G(z, y; E) dz,$$

где $G_0(x, y; E) = e^{i\sqrt{E}|x-y|}/4\pi|x-y|$ — свободная функция Грина, причем выбрано значение $\sqrt{E}$ с положительной мнимой частью.

Доказательство. Мы представим формальное доказательство, не заботясь о сходимости интегралов и о вопросах, связанных с областями определения. Простое рассуждение (задача 61) позволяет получить, что

$$(H-E)^{-1} = (H_0-E)^{-1} - [(H_0-E)^{-1} V^{1/2}] \times \\ \times [1 + |V|^{1/2} (H_0-E)^{-1} V^{1/2}]^{-1} [|V|^{1/2} (H_0-E)^{-1}].$$

Поскольку $V \in L^1$, ядро $|V(x)|^{1/2} e^{i\sqrt{E}|x-y|}/4\pi|x-y|$ оператора $|V|^{1/2}(H_0-E)^{-1}$ принадлежит классу Гильберта—Шмидта. Следовательно, $(H-E)^{-1} - (H_0-E)^{-1}$ также оператор Гильберта—Шмидта и потому является интегральным оператором с квадратично-интегрируемым ядром $A(x, y)$. В частности, $A(x, \cdot) \in L^2$ при почти всех x. Так как $(H_0-E)^{-1}$ имеет интегральное ядро $G_0(x, \cdot) \in L^2$ при почти всех x, $(H-E)^{-1}$ имеет интегральное ядро $G(x, \cdot; E) \in L^2$ при почти всех x. Интегральное уравнение пункта (c) есть просто запись того, что $(H-E)^{-1} = (H_0-E)^{-1} - (H_0-E)^{-1} V (H-E)^{-1}$. В частности, если $\operatorname{Re} E$ достаточно отрицательна, то интегральное уравнение можно решить с помощью итераций. Для таких E пункт (b) следует из аналогичных свойств G_0 и того, что V вещественна. Следовательно, (b) выполняется при всех $E \notin \sigma(H)$ благодаря аналитическому продолжению. Остается показать, что $G(x, \cdot; E) \in L^1$ при почти всех x. Это можно сделать при помощи интегрального уравнения (см. задачу 61b). ∎

G называется **функцией Грина** оператора H.

(IV) *Положительные собственные значения.* Нам потребуется еще такая

Лемма 2. Если $E > 0$ и $E \notin \mathscr{E}$, то E не является собственным значением H.

Доказательство мы предоставим читателю (см. задачу 62 или соответствующие литературные ссылки в Замечаниях). Из этой леммы следует, что если $[\alpha, \beta] \cap \mathscr{E} = \varnothing$, то $P_{[\alpha,\beta]} = P_{(\alpha,\beta)}$, так что $^1/_2[P_{[\alpha,\beta]} + P_{(\alpha,\beta)}]$ в формуле Стоуна есть $P_{(\alpha,\beta)} = P_{[\alpha,\beta]}$.

(V) *Связь между # и резольвентой*. Допустим, что $\operatorname{Im}\varkappa > 0$ и $\operatorname{Re}\varkappa \neq 0$. Так как $G(x, \cdot; \varkappa^2) \in L^1$, то она имеет обратный фурье-образ $g(x, k; \varkappa) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int G(x, y; \varkappa^2) e^{ik\cdot y} d^3y$, который непрерывен. Определим $h(x, k; \varkappa) \equiv (2\pi)^{3/2} (|k|^2 - \varkappa^2) g(x, k; \varkappa)$. Тогда интегральное уравнение для G можно переписать как интегральное уравнение для h (после отдельного рассуждения, позволяющего изменить порядок интегрирований перехода к фурье-образу и интегрального уравнения):

$$h(x, k; \varkappa) = e^{ik\cdot x} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} V^{1/2}(y)\, p(y, k; \varkappa)\, dy, \tag{85a}$$

$$p(y,k;\varkappa) = |V(y)|^{1/2} e^{ik\cdot y} - \frac{1}{4\pi} \int |V(y)|^{1/2} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} V^{1/2}(x)\, p(x, k; \varkappa) dx. \tag{85b}$$

Ключевой момент здесь — это отношение между уравнением (85b) и модифицированным уравнением Липпмана — Швингера (84). Если $k \in \mathbb{R}^3$ фиксировано и $\varkappa = |k|$, то уравнение для $p(\cdot, k; \varkappa)$ совпадает с уравнением для $\psi(\cdot, k)$. Опираясь на это, докажем, что справедлива

Лемма 3. Пусть $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Тогда интегралы

$$\Phi(k; \varkappa) = (2\pi)^{-3/2} \int \overline{h(x, k; \varkappa)} f(x)\, d^3x,$$

$$f^\#(k) = (2\pi)^{-3/2} \int \overline{\varphi(x, k)} f(x)\, d^3x$$

абсолютно сходятся, если $\operatorname{Im}\varkappa > 0$ в интеграле для Φ и $|k|^2 \notin \mathscr{E}$ в интеграле для $f^\#$. Предположим, что $[\alpha, \beta] \cap \mathscr{E} = \varnothing$ и $\alpha > 0$. Тогда $\Phi(k; \varkappa)$ имеет равномерно непрерывное по k и $\varkappa$ продолжение в область $\alpha^{1/2} \leqslant \operatorname{Re}\varkappa \leqslant \beta^{1/2}$, $\operatorname{Im}\varkappa > 0$, и при $k^2 \in [\alpha, \beta]$

$$f^\#(k) = \Phi(k; |k|).$$

Итак, мы связали $f^\#$ с граничным значением резольвенты.

(VI) *Доказательство* (82e'), *когда* $f \in C_0^\infty$.

Лемма 4. Пусть $f \in C_0^\infty$, и пусть $[\alpha, \beta] \cap \mathscr{E} = \varnothing$, причем $\alpha > 0$. Тогда

$$\|P_{[\alpha,\beta]} f\|^2 = \int_{\alpha^{1/2} < |k| < \beta^{1/2}} |f^\#(k)|^2 d^3k.$$

Доказательство. Будем опять опускать технические детали. Пусть $\varkappa^2 = \mu + i\varepsilon$ с $\varepsilon > 0$ и $\operatorname{Im}\varkappa > 0$. С точностью до множителя $(2\pi)^{3/2}(|k|^2 - \mu - i\varepsilon)$ функция $h(x, \cdot; \varkappa)$ есть фурье-образ функции

Грина $G(x, \cdot; \varkappa^2)$, так что из теоремы Планшереля следует, что

$$(\varkappa^2 - \bar{\varkappa}^2)\int \overline{G(z, x; \bar{\varkappa}^2)}\, G(z, y; \bar{\varkappa}^2)\, dz =$$
$$= \int \frac{2i\varepsilon}{(k^2-\mu)^2+\varepsilon^2} h(x, k; \varkappa)\, \overline{h(y, k; \varkappa)}\, \frac{dk}{(2\pi)^3}. \qquad (86)$$

Если умножить левую часть (86) на $\overline{f(x)}\, f(y)$ и результат проинтегрировать, то получим

$$(\varkappa^2 - \bar{\varkappa}^2)(R_{\bar{\varkappa}^2} f, R_{\bar{\varkappa}^2} f) = (\varkappa^2 - \bar{\varkappa}^2)(f, R_{\varkappa^2} R_{\bar{\varkappa}^2} f) = (f, R_{\varkappa^2} - R_{\bar{\varkappa}^2} f),$$

где $R_E \equiv (H - E)^{-1}$. С другой стороны, правая часть (86) будет при этом равна

$$\int \frac{2i\varepsilon}{(|k|^2-\mu)^2+\varepsilon^2} |\Phi(k; \sqrt{\mu+i\varepsilon})|^2\, dk.$$

Поэтому

$$\int_\alpha^\beta (f, [R_{\mu+i\varepsilon} - R_{\mu-i\varepsilon}] f)\frac{d\mu}{2\pi i} = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta \int \frac{\varepsilon}{(|k|^2-\mu)^2+\varepsilon^2} |\Phi(k, \sqrt{\mu+i\varepsilon})|^2 d\mu\, dk. \qquad (87)$$

Когда $\varepsilon \to 0$, из формулы Стоуна и леммы 2 следует, что левая часть (87) приближается к $(f, P_{[\alpha, \beta]} f) = \|P_{[\alpha, \beta]} f\|^2$. Формально $\varepsilon\pi^{-1}[(|k|^2 - \mu)^2 + \varepsilon^2]^{-1}$ приближается к $\delta(k^2 - |\mu|)$ при $\varepsilon \to 0$ (см. (V.4)), так что, пользуясь леммой 3, можно показать, что правая часть (87) стремится к $\int\limits_{\alpha < |k^2| < \beta} |f^\#(k)|^2\, dk$. ∎

(VII) *Распространение на произвольные* f. Пользуясь леммой 4, поляризационным тождеством и различными предельными переходами, легко доказать все остальные утверждения теоремы XI.41, кроме следующих трех:

(i) $\operatorname{Ran} {}^\# = L^2$, (ii) $(\Omega^+ f)^\# = \hat{f}$, (iii) формула (82b), которая пока доказана только в слабой форме. Если мы докажем (i), то и (82b) будет доказана в полном объеме. Детали можно найти в литературе, указанной в Замечаниях.

(VIII) *Сведение к (88)*. Допустим, что равенство

$$((\Omega^+)^* f)^\wedge = f^\# \qquad (88)$$

доказано. Тогда (83) можно получить из соотношения $(\Omega^+ f)^\# = ((\Omega^+)^* \Omega^+ f)^\wedge = \hat{f}$, а равенство (i) следует из того, что $^\wedge$ и $(\Omega^+)^*$ сюръективны. Таким образом, доказав (88), мы завершим доказательство теоремы XI.41.

(IX) *Отступление об абелевых пределах*. Чтобы доказать (88), нам потребуется следующая

Лемма 5. Пусть $f(x)$ — ограниченная измеримая функция; допустим, что $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^t f(x)\,dx = a$. Тогда $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon s}f(s)\,ds = a$.

Доказательство. Пусть $g(t) = \int\limits^t f(s)\,ds$ и $q(\varepsilon) = \int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon s}f(s)\,ds$. Тогда $g'(t) = f(t)$ почти всюду, поэтому с помощью интегрирования по частям доказывается, что

$$q(\varepsilon) = \int\limits_0^\infty \varepsilon e^{-\varepsilon s}g(s)\,ds.$$

Пользуясь тем, что g ограничена, $g(t)\to a$ при $t\to\infty$ и $\int\limits_0^\infty \varepsilon e^{-\varepsilon s}\,ds = 1$, легко доказать, что $q(\varepsilon)\to a$ (задача 63). ∎

(X) *Заключение*. Теперь мы готовы завершить наш набросок доказательства теоремы XI.41.

Доказательство формулы (88). Нужное равенство надо доказать лишь для $f\in\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}$, где $\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}$ — абсолютно непрерывное пространство оператора H. Действительно, если $f\in\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}^{\perp}$, то $(\Omega^+)^* f = 0$ и, согласно формуле (82e), доказанной в (VII), $f^\# = 0$. Итак, достаточно доказать, что

$$(f,\ \Omega^+ g) = \int \overline{f^\#(k)}\,\hat{g}(k)\,dk \tag{89}$$

для множества функций g, плотного в $\mathscr{H}$, и множества функций f, плотного в $\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}$. Будем предполагать, что $f^\#$ имеет носитель в некотором интервале $[\alpha,\beta]$, не пересекающемся с $\mathscr{E}$, и что $g\in C_0^\infty$. В приводимых ниже выкладках мы не будем явно пользоваться этими техническими допущениями о f и g, однако мы будем переставлять пределы и менять порядок интегрирования; эти замены обосновываются с помощью указанных технических допущений о f и g

Так как $f,\ g\in Q(H) = Q(H_0)$, то, как это следует из задачи 20,

$$(f,\ \Omega^+ g) - (f,\ g) = i\lim_{t\to-\infty}\int\limits_0^t (f,\ e^{iHs}Ve^{-iH_0 s}g)\,ds.$$

Значит, по лемме 5

$$(f,\ \Omega^+ g) = (f,\ g) + i\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int\limits_0^{-\infty} (f,\ e^{iHt}Ve^{-iH_0 t}g)\,e^{\varepsilon t}\,dt. \tag{90}$$

Исходя из (82e′), легко показать, что $(f, e^{iHt}g)=\int \overline{f^{\#}(k)}\, e^{ik^2t} g^{\#}(k)\,dk$, если f или g лежит в $\mathscr{H}_{ac}$. В результате

$$(f, e^{iHt}Ve^{-iH_0t}g)=\int \overline{f^{\#}(k)}\, e^{ik^2t}\,(Ve^{-iH_0t}g)^{\#}(k)\,dk=$$
$$=(2\pi)^{-3/2}\iint \overline{f^{\#}(k)}\, e^{ik^2t}\overline{\varphi(x, k)}\,V(x)\,(e^{-iH_0t}g)(x)\,dx\,dk.$$

Следовательно,

$$\int_0^{-\infty}(f, e^{iHt}Ve^{-iH_0t}g)\,e^{\varepsilon t}\,dt=$$
$$=(2\pi)^{-3/2}\int_0^{-\infty}\iint \overline{f^{\#}(k)\,\varphi(x, k)}\,V(k)\,(e^{-it(H_0-k^2+i\varepsilon)}g)(x)\,dx\,dk\,dt=$$
$$=-i(2\pi)^{-3/2}\iint \overline{f^{\#}(k)\,\varphi(x, k)}\,V(x)\left[(H_0-k^2+i\varepsilon)^{-1}g\right](x)\,dx\,dk=$$
$$=-\frac{i}{4\pi}(2\pi)^{-3/2}\iiint \overline{f^{\#}(k)\,\varphi(x, k)}\,V(x)\,\frac{e^{-i|x-y|\sqrt{k^2-i\varepsilon}}}{|x-y|}\,g(y)\,dx\,dy\,dk.$$

Переходя к пределу $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}$ под интегралом в (90), видим, что

$$(f, \Omega^+g)=(f, g)+(2\pi)^{-3/2}\iint \overline{f^{\#}(k)}\,g(y)\times$$
$$\times\left[\frac{1}{4\pi}\int\frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|}\,V(x)\,\overline{\varphi(x, k)}\,dx\right]dk\,dy=$$
$$=(f, g)+(2\pi)^{-3/2}\int \overline{f^{\#}(k)}\,g(y)\left[e^{-ik\cdot y}-\overline{\varphi(y, k)}\right]dk\,dy=$$
$$=(f, g)+\int \overline{f^{\#}(k)}\,\hat{g}(k)\,dk-\int \overline{f^{\#}(k)}\,g^{\#}(k)\,dk=\int \overline{f^{\#}(k)}\,\hat{g}(k)\,dk.$$

При переходе ко второму равенству мы воспользовались уравнением Липпмана — Швингера, а на последнем шаге — условием (82e). Это завершает доказательство формулы (89), а следовательно, и (88). Наш набросок доказательства теоремы XI.41 тем самым закончен. ▌

Собственные функции Липпмана — Швингера $\varphi(x, k)$ особенно полезны потому, что через них выражается S-матрица. Сначала введем вспомогательное понятие.

Определение. Пусть $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^3$, $\mathbf{k}'\in\mathbb{R}^3$, $k'^2\notin\mathscr{E}$. Определим

$$T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')=(2\pi)^{-3}\int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}V(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k}')\,d\mathbf{x};$$

$T(\cdot, \cdot)$ называется T-матрицей.

Теорема XI.42. $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ равномерно непрерывна в любой области вида $\mathbb{R}^3\times\{\mathbf{k}'\mid k'^2\in[\alpha, \beta]\}$, где $\alpha>0$ и $[\alpha, \beta]\cap\mathscr{E}=\varnothing$. Далее, если $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, причем $\hat{f}$ и $\hat{g}$—функции с носителями на сферических поверхностях, не пересекающихся с $\{\mathbf{k}' \mid k'^2 \in \mathscr{E}\}$, то

$$(f, (S-I)g) = (-2\pi i) \int \overline{\hat{f}(\mathbf{k})}\,\hat{g}(\mathbf{k}')\,T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\,\delta(k^2-k'^2)\,d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}'. \tag{91}$$

Прежде чем доказывать теорему XI.42, сделаем ряд замечаний. Во-первых, $\delta(k^2-k'^2)$ в (91) есть краткий способ записи следующего выражения:

$$\int \overline{\hat{f}(\mathbf{k})} \left[\int\limits_{k'^2=k^2} T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\,\hat{g}(\mathbf{k}')\,(^1/_2 k')\,d\Omega(\mathbf{k}') \right] d\mathbf{k},$$

где $d\Omega(\mathbf{k}')$—угловая мера на сфере, а $^1/_2 k'$—якобиан перехода от координат $\mathbf{k}'$ к $\langle k'^2, \Omega(\mathbf{k}')\rangle$. Формулу (91) часто записывают в виде

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \delta(k-k') - 2\pi i T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\,\delta(k^2-k'^2).$$

Это реализация той схемы, которая рассматривалась в конце § 5.

Отметим еще, что множество функций f и g, разрешенных в уравнении (91), плотно в L^2, так что φ полностью определяет S. Кроме того, S полностью определяется значениями $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ при $k=k'$. Это множество значений называется T-матрицей «на энергетической поверхности». Типичным для физических теорий, и в частности теории возмущений в квантовой теории поля, служит тот факт, что рассеяние описывается величиной «на поверхности», тогда как в теории эта величина определена также и «вне поверхности». Одна из привлекательных черт теории трех тел Фаддеева состоит в том, что T-матрица для системы двух тел *вне поверхности* энергии входит в описание рассеяния трех частиц. Мы не имеем возможности обсудить это подробнее.

Доказательство теоремы XI.42. Так как $S=(\Omega^-)^*\Omega^+$, а $I=(\Omega^+)^*\Omega^+$, то

$$\begin{aligned}
(f, (S-I)g) &= (f, (\Omega^- - \Omega^+)^*\Omega^+ g) = ((\Omega^- - \Omega^+)f, \Omega^+ g) = \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} (e^{iHt}(iV)e^{-iH_0 t}f, \Omega^+ g)\,dt = \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(-i) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|t|}(e^{iHt}Ve^{-iH_0 t}f, \Omega^+ g)\,dt = \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(-i) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|t|}\left(\int \overline{[e^{iHt}Ve^{-iH_0 t}f]^\#(k')}[\Omega^+ g]^\#(k')\,dk'\right)dt.
\end{aligned} \tag{92}$$

На предпоследнем шаге мы воспользовались леммой 5, а на последнем—формулой (82e) и тем, что $\Omega^+ g \in \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}$. В силу (83),

$(\Omega^+g)^\#(k') = \hat{g}(k')$, а в силу (82),

$$[e^{iHt}Ve^{-iH_0t}f]^\#(k') = e^{i|k'|^2t}[Ve^{-iH_0t}f]^\#(k') =$$
$$= (2\pi)^{-3/2}\int e^{i|k'|^2t}V(x)[e^{-iH_0t}f](x)\overline{\varphi(x, k')}\,dx =$$
$$= (2\pi)^{-3}\int e^{i[|k'|^2-|k|^2]t}V(x)e^{ik\cdot x}\overline{\varphi(x, k')}\hat{f}(k)\,dx\,dk.$$

Поэтому выражение в формуле (92) равно

$$(-i)(2\pi)^{-3}\int_{-\infty}^{\infty}dt\Big[\int e^{i(|k|^2-|k'|^2)t-\varepsilon|t|}V(x)\varphi(x, k')\times$$
$$\times e^{-ik\cdot x}\overline{\hat{f}(k)}\hat{g}(k')\,dk'\,dx\,dk\Big].$$

Выполняя интегрирование по t, получаем

$$(f, (S-I)g) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int(-i)T(k, k')\frac{2\varepsilon}{(|k|^2-|k'|^2)^2+\varepsilon^2}\overline{\hat{f}(k)}\hat{g}(k')\,dk\,dk'. \tag{93}$$

По определению, $T(k, k')$ есть скалярное произведение $f_k(x) = (2\pi)^{-3}e^{-ik\cdot x}V^{1/2}(x)$ и $\psi(x, k')$. Так как $\psi(\cdot, k')$ равномерно L^2-непрерывна в рассматриваемых областях, а $f_k(\cdot)$ равномерно L^2-непрерывна, потому что $V\in L^1$, то $T(k, k')$ имеет нужные свойства непрерывности. В результате предельное соотношение $2\varepsilon[(|k|^2-|k'|^2)+\varepsilon^2]^{-1}\to 2\pi\delta(|k|^2-|k'|^2)$, справедливое в смысле мер. на $\varkappa(\mathbb{R}^6)$, можно применить в (93). Этим заканчивается доказательство формулы (91). ∎

При некоторых условиях существует другое доказательство этой теоремы; см. дополнение 3 к § 8 или задачу 67.

Теперь, установив связь между собственными функциями и S-матрицей, мы можем развивать теорию в разных направлениях. Так как φ удовлетворяет уравнению Липпмана—Швингера (81), можно с помощью итераций этого уравнения построить формальные ряды для φ и тем самым для T:

$$T(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_{n=0}^{\infty}T_n(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), \tag{94a}$$

$$T_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = (2\pi)^{-3}\int e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}}V(\mathbf{x})\,dx, \tag{94b}$$

$$T_n(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = (2\pi)^{-3}(-1)^n(4\pi)^{-n}\int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0}V(\mathbf{x}_0)\times$$
$$\times\frac{e^{ik'|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1|}}{|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1|}V(\mathbf{x}_1)\frac{e^{ik'|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}V(\mathbf{x}_2)\ldots$$
$$\ldots V(\mathbf{x}_{n-1})\frac{e^{ik'|\mathbf{x}_{n-1}-\mathbf{x}_n|}}{|\mathbf{x}_{n-1}-\mathbf{x}_n|}V(\mathbf{x}_n)e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}_n}\,dx_0\ldots dx_n.$$

Ряд (94а) называется **рядом Борна** для T, а главный член этого ряда называется **амплитудой Борна.** Наше изучение $\mathscr{E}$ ((II) в нашей схеме доказательства теоремы XI.41; см. также задачу 60) позволяет легко доказать, что в некоторых случаях ряд Борна сходится.

Теорема XI.43. Пусть $V \in L^1 \cap R$.

(a) Существует такое число K, что ряд Борна для $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ сходится, если $k'^2 > K^2$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Если $\|V\|_R^2 < 4\pi$, то ряд Борна для $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ сходится при всех $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}' \in \mathbb{R}^3$.

Доказательство. $T(k, k')$ есть внутреннее произведение фиксированного L^2-вектора и решения $\psi(x, k') = |V(x)|^{1/2} \varphi(x, k')$ модифицированного уравнения Липпмана—Швингера. Функция ψ удовлетворяет L^2-интегральному уравнению, итерации которого приводят к ряду Борна. Если ряд для ψ сходится в L^2 при некотором k', то ряд Борна сходится для этого значения k' и всех k. Чтобы доказать сходимость ряда для ψ, достаточно доказать, что ядро интегрального уравнения, которому удовлетворяет ψ, есть ядро интегрального оператора $K_{k'}$ с нормой, меньшей единицы. Мы знаем, что $\lim\limits_{k' \to \infty} \|K_{k'}\| = 0$ для $V \in R$ (задача 60), так что (а) выполнено. Если $\|V\|_R^2 < 4\pi$, то норма Гильберта—Шмидта $\|K_{k'}\|_{\text{H.S.}} = (4\pi)^{-1/2} \|V\|_R < 1$ при всех k'. ∎

Пользуясь методами § 7, можно показать, что если $V \in R$, $S(\lambda)$ есть S-оператор для $-\Delta + \lambda V$, λ вещественно, то $S(\lambda)$ имеет операторнозначное аналитическое продолжение в область $\{\lambda \mid |\lambda| \|V\|_R < 4\pi\}$. Теорема XI.43 — только один из многих примеров восстановления S-матрицы по ряду Борна или по другим формальным рядам. Решая L^2-уравнения с ядрами Гильберта — Шмидта методом Фредгольма, можно найти сходящиеся ряды для $N(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ и для $D(k')$, причем $D(\alpha) \neq 0$, если $\alpha^2 \notin \mathscr{E}$, так что $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = N(\mathbf{k}, \mathbf{k}')/D(k')$. Такая реализация T служит отправной точкой для анализа сходимости аппроксимантов Паде, построенных из ряда Борна. Можно показать, что этот метод суммирования сходится в некоторых случаях, когда ряд Борна расходится (см. Замечания). Кроме того, имеется множество результатов, относящихся к сходимости рядов для «парциальных волновых амплитуд», которые мы рассмотрим в § 8.

Второе следствие связи между T и S — это *условие унитарности* (95) для T.

Теорема XI.44. Пусть $V \in L^1 \cap R$; предположим, что $\alpha^2 \notin \mathscr{E}$. Тогда для всех $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}' \in \mathbb{R}^3$ с $k = k' = \alpha$

$$\operatorname{Im} T(k, k') = \pi \int \overline{T(k'', k)}\, T(k'', k')\, \delta(k''^2 - \alpha^2)\, d^3k''. \tag{95}$$

Доказательство. Так как $\mathscr{E}$ — замкнутое множество, можно найти такие β и γ, что $\alpha \in (\beta, \gamma)$ и $[\beta^2, \gamma^2] \cap \mathscr{E} = \varnothing$. По теореме XI.42, если $f \in \mathscr{S}$ и $\hat{f}$ имеет носитель в $F = \{\mathbf{k} \mid \beta < k < \gamma\}$, то $(\widehat{Sf})(k) = \hat{f}(k) - 2\pi i \int T(k, k')\hat{f}(k')\,\delta(k^2 - k'^2)\,dk'$. С помощью простого предельного перехода можно показать, что эта формула справедлива и тогда, когда $\hat{f}$ только непрерывна (с носителем в F), и что отображение M: $\hat{f} \mapsto \widehat{Sf}$ переводит непрерывные функции с носителем в F в себя. Сопряженное к M отображение, очевидно, задается формулой

$$(M^*g)(k) = g(k) + (2\pi i)\int \overline{T(k', k)}\,g(k')\,\delta(k^2 - k'^2)\,dk'.$$

Соотношение $M^*M = 1$, вытекающее из $S^*S = I$, влечет за собой, что почти для всех пар $\langle k, k'\rangle$ с $|k| = |k'|$, $k, k' \in F$, выполнено (95). Так как обе части этого равенства непрерывны по $\langle k, k'\rangle$ в области $\{\langle k, k'\rangle \in F \times F \mid |k| = |k'|\}$, то (95) выполнено во всей области. ∎

Чтобы оценить важность соотношения унитарности для T, следует понять, какая именно величина измеряется в экспериментах по рассеянию. Для простоты предположим, что V сферически-симметричен, так что $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ зависит лишь от k, k' и $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}'$. При данном k и $\cos\theta \in [-1, 1]$ найдем такие $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$, что $k' = k$ и $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' = k^2\cos\theta$. Тогда **амплитуда рассеяния** $f(k, \theta)$ определяется формулой

$$f(k, \theta) \equiv -2\pi^2 T(\mathbf{k}, \mathbf{k}'). \tag{96}$$

Рассуждение, опирающееся отчасти на эвристическое соображение, которое мы приводим в Замечаниях, показывает, что для пучка частиц с энергией $E = k^2$ дифференциальное сечение (см. § 2) задается формулой

$$d\sigma/d\Omega = |f(k, \theta)|^2. \tag{97a}$$

Тогда полное сечение задается формулой

$$\sigma \equiv \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\,d\Omega = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |f(k, \theta)|^2 \sin\theta\,d\theta. \tag{97b}$$

Если теперь записать соотношение унитарности при $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$, то оно даст

$$\operatorname{Im} T(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = \frac{\pi|\mathbf{k}|}{2}\int |T(\mathbf{k}'', \mathbf{k})|^2\,d\Omega(\mathbf{k}''),$$

или

$$\sigma = \frac{4\pi}{k}\operatorname{Im} f(k, 0). \tag{97c}$$

Соотношение (97c) часто называют **оптической теоремой.** Эта теорема выражает тот физический факт, что ослабление пучка в результате рассеяния (левая часть соотношения (97c)) должно компенсироваться интерференцией между исходным пучком и волной, рассеянной вперед (правая часть соотношения (97c)).

Итак, из (97a) видно, что непосредственно измеряемой величиной является только модуль f. Унитарность позволяет отчасти узнать f. Например, с помощью (97c) можно определить $\arg f(k, 0)$ с точностью до неоднозначности, связанной с отражением относительно мнимой оси, если известно $(d\sigma/d\Omega)(k, \theta)$ при всех θ. И в самом деле, как мы видели в § V.6, если $d\sigma/d\Omega$ достаточно «мала», то унитарность и дифференциальное сечение однозначно определяют f при всех θ.

Дополнение к § XI.6. Введение в метод вспомогательного пространства для разложения по собственным функциям

Мы рассмотрели разложение по собственным функциям путем решения модифицированного уравнения Липпмана—Швингера в L^2. Часто бывает удобно действовать несколько иначе, пользуясь банаховым пространством X, которое непрерывно вложено в $\mathcal{H}$ как плотное подпространство, $X \subset \mathcal{H}$. При этом, используя изоморфизм между $\mathcal{H}$ и его сопряженным, можно, естественно, вложить $\mathcal{H}$ в X^*, а следовательно, X в X^*; это означает, что для $\varphi \in \mathcal{H}$ мы определим $l_\varphi \in X^*$ посредством $l_\varphi(x) = (\varphi, x)$. Тройка $X \subset \mathcal{H} \subset X^*$ напоминает конструкцию $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{-1}$ в теории квадратичных форм (теорема VIII.15).

Если задана тройка пространств $X \subset \mathcal{H} \subset X^*$, то можно попробовать получить разложение по собственным функциям при помощи такого двухступенчатого процесса. (i) Показать, что $(H-z)^{-1}$: $X \to X^*$ непрерывно продолжается с $\operatorname{Im} z > 0$ на вещественную ось или на вещественную ось за вычетом исключительного множества (см. теорему XI.21). (ii) Воспользоваться операторами $(H-k^2-i0)^{-1}$, чтобы получить обобщенные собственные функции $\varphi \in X^*$. Из (i) следует, что $(f, (H-z)^{-1} f)$ может быть продолжено на вещественную ось для $f \in X$, а отсюда, как мы увидим в § XIII.6, вытекает, что H не имеет сингулярного спектра. По этой причине уже первый шаг (i) представляет значительный интерес; именно это мы проделаем в § XIII.8 для очень широкого класса операторов $-\Delta+V$, опираясь на довольно тонкие рассуждения. Здесь же мы проиллюстрируем идеи первого шага на очень специальном примере, когда V экспоненциально убывает. Затем мы опишем второй шаг (ii), ограничившись вдобавок одномерным случаем. В Замечаниях будет указана обширная литература, относящаяся к более общим ситуациям.

Пусть X_a — гильбертово пространство функций, причем $e^{a|x|}f \in L^2 \equiv \mathscr{H}$ с естественной нормой. Тогда $X_a \subset \mathscr{H} \subset X_{-a} = X_a^*$ при $a > 0$, как и должно быть для вышеописанной конструкции. Прежде всего будет доказана

Лемма 1. Функция $(-\Delta - k^2)^{-1}$: $X_a \to X_{-a}$, определенная при $\operatorname{Im} k > 0$, продолжается в область $\operatorname{Im} k > -a$, $\arg k \neq -\pi/2$ как аналитическая функция со значениями во множестве компактных операторов из X_a в X_{-a}. То же самое верно и в отношении функций $\partial_l(-\Delta - k^2)^{-1}$.

Доказательство. Пусть $G_0(x, y; E)$ — интегральное ядро оператора $(-\Delta - E)^{-1}$ при $E \notin [0, \infty)$, однозначно определенное при всех x, y, когда $x \neq y$, требованием непрерывности. Мы утверждаем прежде всего, что $G_0(x, y; E)$ аналитически продолжается на все значения $\sqrt{E}$ с $\arg(\sqrt{E}) \neq -\pi/2$ и удовлетворяет оценке

$$|G_0(x, y; E)| \leqslant C_{\varepsilon, \delta}(|x-y|^{-(n-2)} + E^{(n-2)/2})\, e^{|x-y|(|\operatorname{Im}\sqrt{E}| + \varepsilon|E|^{1/2})} \tag{98}$$

при $n \geqslant 3$ и $(\operatorname{Re}\sqrt{E})/|\sqrt{E}| \geqslant \delta$. Если $n = 1$, то выполнена аналогичная оценка без члена $|x-y|^{-(n-2)}$, а если $n = 2$, то множитель перед экспонентой заменяется на $|\ln(|x-y|^{-1}E^{1/2})| + 1$. При $n=3$ и $n=1$ оценка (98) очевидна из явного выражения для G_0. Для произвольного n доказательство оценки (98), которая *не будет* наилучшей, мы оставляем читателю (задача 65).

Пусть $H(x, y; k)$ — функция $e^{-a|x|}G_0(x, y; k^2)e^{-a|y|}$. В силу оценки (98), для любого k с $\operatorname{Im} k > -a$, $\arg k \neq -\pi/2$

$$|H(x, y; k)| \leqslant h_k(x-y),$$

где $h_k \in L^1$. Если $n \geqslant 3$, то $h_k(x) = \text{const}\, |x-y|^{-(n-2)} e^{-\nu|x|}$; если $n = 2$, то $h_k(x) = \text{const}\,(|\ln|x|| + 1)e^{-\nu|x|}$; если $n = 1$, то $h_k(x) = \text{const}\, e^{-\nu|x|}$. Из неравенства Юнга следует, что $H(x, y; k)$ — ядро ограниченного интегрального оператора. Этот оператор, очевидно, аналитичен по k и, по теореме XI.20, компактен при $\operatorname{Im} k > 0$, а следовательно, и при всех k в силу аналитичности продолжения и потому, что множество компактных операторов замкнуто по норме. Итак, $e^{-a|x|}(-\Delta - k^2)^{-1}e^{-a|y|}$ — аналитическая функция при $\operatorname{Im} k > -a$, $\arg k \neq -\pi/2$, принимающая значения во множестве компактных операторов в L^2. Так как $e^{\pm a|x|}$ — унитарное отображение из L^2 в $X_{\pm a}$, то лемма доказана. Вопрос о $\partial_l(-\Delta - k^2)^{-1}$ мы оставляем читателю (задача 65). ∎

Допустим теперь, что $|V(x)| \leqslant ce^{-2a|x|}$. Тогда, очевидно, отображение V: $X_{-a} \to X_a$ ограничено, так что $V(-\Delta - k^2)^{-1}$ при каждом k есть компактный оператор из X_a в себя. Далее, $\eta = -V(-\Delta - k^2)^{-1}\eta$ не имеет решений в X_a при $\operatorname{Im} k > 0$, $\arg k \neq$

$\neq \pi/2$, так как оно не имеет решений в L^2, ибо если $\varphi \in L^2$ удовлетворяет этому уравнению, то $\psi = (-\Delta - k^2)^{-1}\varphi$ принадлежит $D(H)$ и удовлетворяет уравнению $(-\Delta + V)\psi = k^2\psi$. Из аналитической теоремы Фредгольма следует, что оператор $(1 + V(-\Delta - k^2)^{-1})^{-1}$ имеет аналитическое продолжение из области $\operatorname{Im} k > 0$ в некоторую окрестность N множества $\mathbb{R}$ с исключенным дискретным множеством $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}$. Так как $(H - k^2)^{-1} = (-\Delta - k^2)^{-1} \times (1 + V(-\Delta - k^2)^{-1})^{-1}$, то мы рассмотрели случай (a) следующей ниже теоремы. Случаем (b) мы воспользуемся в § 11.

Теорема XI.45. Пусть H — один из следующих операторов в $L^2(\mathbb{R}^n)$:

(a) $H = -\Delta + V$, причем $|V(x)| \leqslant Ce^{-2a|x|}$;

(b) $H\eta = -\alpha\nabla \cdot \beta\nabla(\alpha\eta)$, причем α и β — строго положительные функции, такие, что $\alpha - \alpha_0$, $\beta - \beta_0 \in C_0^\infty$ при подходящих постоянных α_0, $\beta_0 > 0$.

Тогда H самосопряжен на $D(-\Delta)$ и существуют дискретное множество $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}$ и окрестность N множества $\mathbb{R}$, такие, что $(H - k^2)^{-1}$ имеет продолжение как аналитическая функция со значениями в $\mathscr{L}(X_a, X_{-a})$ из области $\{k \mid \operatorname{Im} k > 0,\ -k^2$ не является собственным значением $H\}$ в $N \setminus \mathscr{E}$. В случае (b) параметр a произволен.

Доказательство. Нам осталось доказать только случай (b). По правилу Лейбница запишем

$$H = -f\Delta + g \cdot \nabla + h,$$

где g, h, $f_1 \equiv f - f_0 \in C_0^\infty$ и $f_0 = \alpha_0^2\beta_0$. Далее, $f = \alpha^2\beta$ строго положительна. Самосопряженность H на $D(-\Delta)$ просто следует из теоремы X.13, и это мы оставили читателю (задача 66). Пусть $V = H - H_0$, $H_0 = -f_0\Delta$. Как и прежде, теорема будет доказана, если показать, что $(1 + V(H_0 - k^2)^{-1})^{-1}$ — аналитическая функция со значениями в $\mathscr{L}(X_a, X_a)$. Оператор $V(H_0 - k^2)^{-1}$ некомпактен, однако если $W = g \cdot \nabla + h$, то

$$\begin{aligned}
1 + V(H_0 - k^2)^{-1} &= (H_0 + V - k^2)(H_0 - k^2)^{-1} = \\
&= [ff_0^{-1}(H_0 - k^2) + W + k^2 f_1 f_0^{-1}](H_0 - k^2)^{-1} = \\
&= ff_0^{-1} + [(W + k^2 f_1 f_0^{-1})(H_0 - k^2)^{-1}] = \\
&= (ff_0^{-1})[1 + (f^{-1}f_0 W + f^{-1}f_1 k^2)(H - k^2)^{-1}].
\end{aligned}$$

В квадратных скобках стоит I плюс аналитическая функция, принимающая значения во множестве компактных операторов из $\mathscr{L}(X_a)$, так что $I + V(H_0 - k^2)^{-1}$ обратим (по теореме VI.14) всюду, кроме некоторого дискретного множества. ∎

Перейдем теперь к получению разложения по собственным функциям оператора $-d^2/dx^2 + V(x)$, где $|V(x)| \leqslant Ce^{-2a|x|}$. Следующая эвристическая формула лежит в основе всех подобных разложений:

$$\operatorname{Im}(H-k^2-i0)^{-1}=W(k)^*[\operatorname{Im}(H_0-k^2-i0)^{-1}]W(k), \tag{99}$$

где $W(k)=(1+V(H_0-k^2-i0)^{-1})^{-1}$ и

$$\operatorname{Im}(A-k^2-i0)^{-1}=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(2i)^{-1}[(A-k^2-i\varepsilon)^{-1}-(A-k^2+i\varepsilon)^{-1}].$$

Равенство (99) формально справедливо, так как если $\operatorname{Im} z>0$, A самосопряжен и $B=A+C$ самосопряжен на $D(A)$, то

$$\begin{aligned}(B-z)^{-1}-(B-\bar z)^{-1}&=2(\operatorname{Im} z)(B-\bar z)^{-1}(B-z)^{-1}=\\&=2(\operatorname{Im} z)[(1+C(A-z)^{-1})^{-1}]^*(A-\bar z)^{-1}(A-z)^{-1}(1+C(A-z)^{-1})^{-1}=\\&=[(1+C(A-z)^{-1})^{-1}]^*[(A-z)^{-1}-(A-\bar z)^{-1}](1+C(A-z)^{-1})^{-1},\end{aligned} \tag{100}$$

так что формула (99) получится, если можно положить $\operatorname{Im} z=0$. В рассматриваемом случае формула (99) справедлива для $k^2\notin\mathscr{E}$, если интерпретировать $(H-k^2-i0)^{-1}$ и $(H_0-k^2-i0)^{-1}$ как отображения из X_a в X_{-a}, $W(k)$ — как отображение из X_a в X_a и $W(k)^*$ — как отображение из X_{-a} в X_{-a}. Такие отождествления можно сделать, если k^2-i0 заменить на z с $\operatorname{Im} z>0$; при этом все отображения аналитичны вплоть до k^2+i0 (кроме точек из $\mathscr{E}$), так что из формулы (100) следует формула (99).

В дополнение к формуле (99) нам потребуется тот факт, что $H_0=-d^2/dx^2$ имеет разложение по собственным функциям $\varphi_0(x, k)=e^{ikx}$. Отметим, что эти собственные функции лежат в X_{-a} и что, поскольку ядро оператора $(H_0-k^2-i0)^{-1}$ есть $^1/_2\exp(ik|x-y|)$, для $f\in X_a$

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(f,(H_0-k^2-i0)^{-1}f)&={}^1/_2\iint\overline{f(x)}\sin(k(x-y))f(y)\,dx\,dy=\\&={}^1/_2[(f,\varphi_0(k))(\varphi_0(k),f)+(f,\varphi_0(-k))(\varphi_0(-k),f)].\end{aligned}$$

Определив $\varphi(k)=W(|k|)\varphi_0(k)$, мы видим, что вследствие (99)

$$\operatorname{Im}(f,(H-k^2-i0)^{-1}f)={}^1/_2\sum_{\delta=\pm 1}|(\varphi(\delta k), f)|^2.$$

При помощи формулы Стоуна получим, что для $f\in X_a$ и $[a,b]\subset[0,\infty)\diagdown\mathscr{E}$

$$(f, P_{[a,b]}f)=\int\limits_{a<k^2<b}|f^\#(k)|^2\,dk,$$

где $f^\#(k)=(2\pi)^{-1/2}(\varphi(k), f)$. Начиная с этого места, простой переход к соотношению Планшереля, формула обращения для $^\#$ и связь с теорией рассеяния получаются точно так же, как в § 6.

XI.7 Квантовое рассеяние IV: дисперсионные соотношения

Строгие доказательства дисперсионных соотношений подобны соскам у мужчины — в них нет ни пользы, ни красоты.

М. Л. ГОЛДБЕРГЕР

В согласии со схемой, изложенной в конце § 5, мы убедились в том, что оператор рассеяния двух частиц имеет «ядро» $\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')-2\pi i\delta(k^2-k'^2)\,T(\mathbf{k},\mathbf{k}')$, где ядро $T(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ непрерывно на $F\equiv\{\langle\mathbf{k},\mathbf{k}'\rangle \mid k^2=k'^2,\ k^2\notin\mathscr{E}\}$. В этом разделе мы продолжим изучение T. Наша главная цель состоит в том, чтобы показать, что T — аналитическая функция в некоторой окрестности F, если V принадлежит некоторому узкому классу потенциалов. Чтобы проиллюстрировать метод и одновременно показать, что аналитичность $T(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ есть общее явление, прежде всего будет доказана

Теорема XI.46. Пусть $V\in L^1\cap R$ и $\mathbf{e}$ — фиксированный единичный вектор в $\mathbb{R}^3$. Тогда существует функция $\tau_F(k)$, мероморфная в $\{k \mid \operatorname{Im} k>0\}$ и такая, что

(a) если k_0 вещественно и $k_0^2\notin\mathscr{E}$, то
$$\lim_{k\to k_0,\ \operatorname{Im}k>0}\tau_F(k)=T(k_0\mathbf{e},\ k_0\mathbf{e}),$$
причем сходимость равномерна на компактных подмножествах в $\mathbb{R}\setminus\mathscr{E}^{1/2}$;

(b) полюсы τ_F в верхней полуплоскости лежат только на мнимой оси в тех точках k, в которых k^2 есть собственное значение оператора $-\Delta+V$, причем все эти полюсы простые;

(c) $\tau_F(-\bar{k})=\overline{\tau_F(k)}$;

(d) $\lim\limits_{k\to\infty}\tau_F(k)=\tau_{\text{Born}}\equiv(2\pi)^{-3}\int V(x)\,dx$, причем сходимость равномерна в замкнутой полуплоскости, если τ_F продолжена на $\mathbb{R}\setminus\mathscr{E}^{1/2}$.

Доказательство. При вещественных k определим $\tau_F(k)=T(k\mathbf{e},\ k\mathbf{e})$. Найдем теперь какое-нибудь продолжение $\tau_F(k)$ в верхнюю полуплоскость. Мы знаем, что для вещественных k
$$\tau_F(k)=(2\pi)^{-3}\int e^{-ik\mathbf{e}\cdot x}V^{1/2}(x)\,\psi(x,\ k\mathbf{e})\,dx, \tag{101}$$
где ψ — решение модифицированного уравнения Липпмана — Швингера (84). Ядро уравнения (84) можно продолжить в верхнюю полуплоскость k, но однородный член $|V(x)|^{1/2}e^{ik\mathbf{e}\cdot x}$ может не принадлежать L^2, если $\operatorname{Im}k\neq 0$. Поэтому мы еще раз изменим уравнение Липпмана — Швингера. Замечая, что в уравнение (101)

входит величина $e^{-ike\cdot x}\psi(x, ke)$, положим по определению

$$\chi(x, k) = e^{-ike\cdot x}\psi(x, ke).$$

Тогда

$$\tau_F(k) = (2\pi)^{-3}\int V^{1/2}(x)\chi(x, k)\,dx \tag{102a}$$

и χ есть решение уравнения

$$\chi(x, k) = |V(x)|^{1/2} + \int M(x, y; k)\chi(y, k)\,dy, \tag{102b}$$

где

$$M(x, y; k) = -(4\pi|x-y|)^{-1}|V(x)|^{1/2}V^{1/2}(y)\exp\{ik[|x-y| - -e\cdot(x-y)]\}. \tag{102c}$$

Так как $|(x-y)\cdot e| \leqslant |x-y|$ при всех x и y, то $M(x, y; k)$ определяет оператор Гильберта—Шмидта M_k при всех k с $\operatorname{Im} k \geqslant 0$. С помощью отдельного рассуждения (задача 68) доказывается, что уравнение $M_k\psi = \psi$ имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение уравнение $K_k\varphi = \varphi$, где $K_k = -|V|^{1/2}(H_0 - k^2)^{-1}V^{1/2}$. Можно показать также, что если $K_k\varphi = \varphi$ и $\operatorname{Im} k > 0$, то $\eta = (H_0 - k^2)^{-1}V^{1/2}\varphi \in Q(-\Delta + V)$ и $(H_0 + V)\eta = k^2\eta$ (задача 69). Следовательно, по аналитической теореме Фредгольма (теорема VI.14), $(I - M_k)^{-1}$ существует всюду, за исключением точек k^2, являющихся собственными значениями оператора $-\Delta + V$, и мероморфна в верхней полуплоскости. Из того что $(-\Delta + V - k^2)^{-1}$ имеет только простые полюсы, следует, что и $(I - M_k)^{-1}$ имеет только простые полюсы (задача 71). Определим теперь для k в верхней полуплоскости

$$\tau_F(k) = (2\pi)^{-3}(V^{1/2}, (1 - M_k)^{-1}|V|^{1/2}).$$

Утверждения (a) и (b) очевидны.

Если $k \to \infty$ в замкнутой полуплоскости, то $\|M_k\| \to 0$ (см. задачу 60), так что (d) выполнено. Наконец, при чисто мнимом k каждый член ряда, получаемого итерацией (102b), принимает вещественные значения, и ряд сходится, если $|k|$ велико. Следовательно, $\overline{\tau_F(-\bar{k})} = \tau_F(k)$, если $|k|$ велико и $\operatorname{Re} k = 0$. Полное утверждение (c) получается аналитическим продолжением ∎

Если V сферически-симметричен, то τ_F не зависит от $\mathbf{e}$ и $f(\mathbf{k}) = -2\pi^2\tau_F(\mathbf{k})$ называется **амплитудой рассеяния вперед**. В предыдущем разделе мы показали, что $\operatorname{Im}\tau_F(\mathbf{k})$ определяется унитарностью и полным сечением рассеяния. Замечательно, что $\operatorname{Re}\tau_F(k)$ определяется $\operatorname{Im}\tau_F(k)$ и конечным числом параметров — по одному на каждое связанное состояние. Для простоты мы рассмотрим случай, когда $\mathscr{E} = \varnothing$. Тогда имеет место

Следствие. Если $V \in R \cap L^1(\mathbb{R}^3)$, $\mathscr{E} = \varnothing$ и если мы для вещественных положительных E положим $f(E) = -(2\pi)^2 \tau_F(\sqrt{E})$, то

$$\operatorname{Re} f(E) = \mathscr{P} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} f(E')}{E'-E} \frac{dE'}{\pi} + f_{\text{Born}} + \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j}{E_j - E}, \tag{103}$$

где $\mathscr{P} \int_0^\infty$ — главное значение интеграла в смысле Коши, $f_{\text{Born}} = -(4\pi)^{-1} \int V(x)\,dx$, а $E_1, \ldots, E_n$ — энергия связанных состояний оператора $-\Delta + V$.

Набросок доказательства. Это простое применение аналитических свойств, установленных в теореме XI.46; все детали мы оставляем читателю (задача 72). Функция $f(E)$ аналитична на плоскости, за исключением положительной вещественной полуоси и точек $E_1, \ldots, E_n$. Пусть E имеет положительные мнимую и вещественную части. В силу интегральной теоремы Коши,

$$f(E) - f_{\text{Born}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(E') - f_{\text{Born}}}{E' - E}\, dE',$$

где C — контур, изображенный на рис. XI.9. Так как $f(E') - f_{\text{Born}} \to 0$ при $E' \to \infty$, то часть контура, обозначенная C_0, не вносит

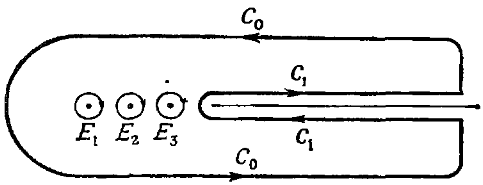


Рис. XI.9. Контур интегрирования.

вклада, если удалить ее на бесконечность. Поэтому

$$f(E) = f_{\text{Born}} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(E') - f_{\text{Born}}}{E' - E}\, dE' + \sum_{j=1}^{n} \frac{2r_j}{E_j - E}.$$

Теперь фиксируем E_0 на вещественной оси, и пусть $E = E_0 + i\varepsilon$, $\varepsilon \downarrow 0$. Пользуясь формулой (см. (V.4)) $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} (x - E_0 - i\varepsilon)^{-1} = \mathscr{P}(x - E_0)^{-1} + i\pi\delta(x - E_0)$, получаем (103). ∎

Формула (103) называется **дисперсионным соотношением для рассеяния вперед.** Любопытный аспект таких дисперсионных соотношений и аналитичности τ_F состоит в том, что они устанавливают взаимосвязь между рассеянием и связанными состояниями.

В частности, если мы измерим амплитуду $f(E)$ рассеяния вперед, мы сможем определить энергии связанных состояний (по крайней мере для тех амплитуд, у которых $r_j \neq 0$) с помощью дисперсионного соотношения (103). Эта связь между рассеянием и связанными состояниями демонстрируется также теоремой Левинсона (теорема XI.59).

Для рассмотрения более общих аналитических свойств мы потребуем, чтобы потенциал V экспоненциально убывал в том смысле, что $Ve^{\alpha|x|} \in L^1 \cap R$ с неким $\alpha > 0$. Для простоты предположим, что V сферически-симметричен. В этом случае функция $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ зависит лишь от двух переменных $E = k^2$ и $\cos\theta = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}'/E$ в области $F \cap \{\langle \mathbf{k}, \mathbf{k}'\rangle \mid k = k'\}$. Вместо последней переменной часто пользуются переменной Δ, определенной посредством $\Delta^2 \equiv {}^1/_2(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 = {}^1/_2E(1-\cos\theta)$. «Физические» области в переменных $\langle E, \cos\theta\rangle$ или $\langle E, \Delta\rangle$ суть соответствующие образы множества $\{\langle \mathbf{k}, \mathbf{k}'\rangle \in \mathbb{R}^6 \mid k = k'\}$, т. е. $\{\langle E, \cos\theta\rangle \mid 0 \leqslant E < \infty, -1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1\}$ и $\{\langle E, \Delta\rangle \mid 0 \leqslant E < \infty, 0 \leqslant \Delta \leqslant \sqrt{E}\}$. Полезно также выделить борновский член:

$$f_B(\Delta) = -(4\pi)^{-1}\int e^{-2i\Delta \mathbf{e}\cdot\mathbf{x}} V(x)\,d\mathbf{x}.$$

Он не зависит от единичного вектора $\mathbf{e}$ ни при каком фиксированном $\mathbf{e}$. Если $Ve^{\alpha|x|} \in L^1$, то $f_B(\Delta)$ аналитичен в области $|\operatorname{Im}\Delta| < \alpha/2$. Общий результат здесь таков.

Теорема XI.47. Предположим, что $Ve^{\alpha|x|} \in R$ с неким $\alpha > 0$. Пусть $f(k, \Delta)$ — амплитуда рассеяния, определенная в области $G \equiv \{\langle k, \Delta\rangle \mid k \geqslant 0, k^2 \notin \mathscr{E}, 0 \leqslant \Delta \leqslant k\}$. Пусть $0 < \beta \leqslant \alpha$ и

$$D_\beta = \{\langle k, \Delta\rangle \in \mathbb{C}^2 \mid |\operatorname{Im}\Delta| < \beta,\ 4\operatorname{Im}k > \alpha - \beta,\ |\operatorname{Im}\sqrt{k^2-\Delta^2}| - |\operatorname{Im}k| < \sqrt{\alpha^2 - (\operatorname{Im}\Delta)^2}\},$$

и, наконец, положим $D = \bigcup_{0<\beta\leqslant\alpha} D_\beta$. Тогда существует функция $g(k, \Delta)$, мероморфная в D и такая, что если $\langle k, \Delta\rangle \in G$, то $g(k, \Delta) = f(k, \Delta) - f_{\mathrm{Born}}(\Delta)$. Далее, g не имеет полюсов в $D \cap \{\langle k, \Delta\rangle \mid k \in \mathbb{R}\}$, а полюсы в $D \cap \{\langle k, \Delta\rangle \mid \operatorname{Im}k > 0\}$ могут быть только в тех точках k, для которых k^2 является собственным значением оператора $H_0 + V$. В частности:

(a) $f(k, \Delta)$ имеет аналитическое продолжение в окрестность физической области, и исключительные точки $\mathscr{E}$ суть ее устранимые особенности;

(b) обозначим через $h(k, z)$ функцию g в новых переменных, где $z = 1 - 2k^{-2}\Delta^2$, так что $z = \cos\theta$ в физической области. Тогда при фиксированном k функция $h(k, z)$ аналитична в эллипсе с центром в $z = 0$ и фокусами в $z = \pm 1$ и с большой полуосью $1 + 2k^{-2}\alpha^2$. Эта область называется **эллипсом Лемана.**

Доказательство этой теоремы можно найти в литературе, приведенной в Замечаниях. Главная идея — та же, что и в доказательстве теоремы XI.46, а именно — введение должным образом видоизмененного уравнения Липпмана—Швингера. Для доказательства устранимости особенностей, входящих в исключительное множество $\mathcal{E}$, можно воспользоваться унитарностью и разложением по парциальным волнам, которое рассмотрено в следующем разделе. Так как мы будем пользоваться эллипсом Лемана в следующем разделе, то покажем, что он лежит в D. Фиксируем вещественное k. При этом $\langle k, \Delta\rangle \in D$ тогда и только тогда, когда $(\operatorname{Im}\Delta)^2+(\operatorname{Im}\sqrt{k^2-\Delta^2})^2<\alpha^2$. Но $\Delta=k\sqrt{{}^1/_2(1-z)}$ и $\sqrt{k^2-\Delta^2}=$ $=k\sqrt{{}^1/_2(1+z)}$. Следовательно, $\langle k, \Delta\rangle \in D$ тогда и только тогда, когда

$$(\operatorname{Im}\sqrt{1-z})^2+(\operatorname{Im}\sqrt{1+z})^2<2\alpha^2/k^2.$$

Так как $|w|^2=\operatorname{Re}(w^2)+2(\operatorname{Im}w)^2$, то мы видим, что это условие эквивалентно следующему:

$$|1-z|+|1+z|<4\alpha^2k^{-2}+\operatorname{Re}(1-z)+\operatorname{Re}(1+z)=2(1+2\alpha^2k^{-2}).$$

Но это — в точности интересующий нас эллипс.

Наконец, опишем один сильный результат об аналитических свойствах потенциалов специального вида.

Определение. **Обобщенный потенциал Юкавы** есть сферически-симметричная функция на $\mathbb{R}^3$ вида

$$V(r)=\sum_{j=0}^{N} r^{j-1}\int_{\mu_0}^{\infty} e^{-\mu r}\,d\rho_j(\mu),$$

где $\mu_0>0$, N — целое число и $\rho_0, \ldots, \rho_N$ — вещественные (но не обязательно положительные) меры с конечной полной вариацией.

Эти потенциалы являются «суперпозициями» основных **потенциалов Юкавы** $r^{-1}e^{-\mu r}$; действительно, легко видеть, что $V(r)=$ $=y^{-1}\int_{\mu_0}^{\infty} e^{-\mu r}T(\mu)\,d\mu$, где T — обобщенная функция $T=\sum_{j=0}^{N} D^j\rho_j$. Обобщенные потенциалы Юкавы обладают рядом важных свойств.

(i) Так как величина $r|V(r)|\leqslant e^{-\mu r}\sum_{j=0}^{N}\|\rho_j\|r^j$ ограничена величиной $Ce^{-\mu_0 r/2}$, то V принадлежит $L^2(\mathbb{R}^3)$. Следовательно, оператор $-\Delta+V$ самосопряжен на $D(-\Delta)$. (ii) V экспоненциально убывает, поэтому применима теорема XI.47. (iii) Потенциал $V(r)$ аналитически продолжается в область $\{r \mid |\arg r|<\pi/2\}$ и при любых вещественных θ, таких, что $|\theta|<\pi/2$, $V_\theta(r)\equiv V(e^{i\theta}r)$ принадлежит L^2. Это последнее свойство будет играть важную роль в § XI.8 и XIII.10. Оно нужно также для доказательства следующего результата.

Теорема XI.48. Пусть $f(k, \Delta)$ — амплитуда рассеяния на обобщенном потенциале Юкавы. Фиксируем вещественное k. Тогда $f(k, \Delta)$ может быть аналитически продолжена в область z-плоскости $(z = \cos\theta)$ $\{z \mid z \notin [\zeta(k), \infty)\}$, где $\zeta(k) = 1 + 2k^{-2}\mu_0^2$.

Это аналитическое свойство наряду с другими свойствами f обсуждается в Замечаниях.

XI.8. Квантовое рассеяние V: центральные потенциалы

В этом разделе мы рассматриваем некоторые аспекты двухчастичного рассеяния в случае сферически-симметричных потенциалов, т. е. потенциалов, зависящих лишь от $|x|$. В таком случае говорят о центральных потенциалах. Излагаемый нами материал включает в себя прежде всего дополнительные свойства, обусловленные сферической симметрией. Отметим, однако, что многие результаты уже развитой нами теории рассеяния, а также спектральной теории из гл. XIII легче доказываются и обобщаются в центральном случае (см., например, теорему XI.31 и дополнение 3 к этому разделу). В замечаниях к этому разделу даны литературные указания, относящиеся к этим особенностям центральных потенциалов.

Поскольку здесь рассматриваются весьма различные вопросы, этот раздел разбит на шесть частей. (A) Обсуждается редукция S-оператора с учетом симметрий. (B) Это приводит к формальному разложению по парциальным волнам для амплитуды рассеяния $f(E, \theta)$. Применяя аналитичность в эллипсе Лемана, мы докажем, что это разложение сходится *равномерно*, когда $Ve^{\alpha|x|} \in R$ с некоторым $\alpha > 0$. (C) Амплитуды парциальных волн мы связываем с величиной, определяемой из стационарного радиального уравнения Шредингера и называемой фазовым сдвигом. (D) Изучается нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка, которому удовлетворяет фазовый сдвиг s-волны. (E) Излагается метод функций Йоста для исследования амплитуды парциальной s-волны, в частности доказывается теорема Левинсона, устанавливающая соответствие между числом связанных состояний и данными рассеяния. (F) Для случая, когда V — обобщенный потенциал Юкавы, изучаются аналитические свойства амплитуды s-волны.

Нигде, кроме краткого обсуждения в Замечаниях, мы не касаемся техники продолжения по угловому моменту, а также теории Редже. Центральной с разных точек зрения теоремой раздела является теорема XI.54. Нужные нам свойства некоторых специальных функций собраны в дополнении 1. В дополнении 2 изучаются функции Йоста некоторых осцилляторных потенциалов.

А. Редукция S-матрицы за счет симметрий

Мы начнем с N-частичного случая, а потом рассмотрим случай двух частиц. Мы уже знаем, что S-оператор коммутирует со свободным гамильтонианом H_0 (предложение, предшествующее теореме XI.33). Если V — центральный потенциал, то как H, так и H_0 коммутируют с вращениями. Таким образом, с вращениями коммутируют волновые операторы $\Omega^{\pm}$, а потому и S-матрица. Чтобы подвести итог, введем техническое определение, задающее «естественное» действие вращений на гильбертовом пространстве асимптотических состояний $\mathscr{H}_{\text{asym}}$ из § 5.

Определение. Пусть $\mathscr{C}$ — набор всех каналов N-частичной квантовой системы с предписанием по поводу вырожденных собственных значений. Фиксируем кластерное разложение D и энергию E. Пусть семейство каналов $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}$ таково, что $D(\alpha) = D$ и $E(\alpha) = E$. Таким образом, канал $\alpha \in \mathscr{C}_1$ имеет вид

$$\alpha = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_k \\ \eta_1^{(i_1)} & \dots & \eta_k^{(i_k)} \end{pmatrix},$$

где $\{\eta_l^{(i_l)}\}_{i_l}$ при фиксированном l — ортонормированное семейство. Для заданных $\alpha, \beta \in \mathscr{C}_1$ пусть $J_{\beta\alpha}\colon \mathscr{H}_\alpha \to \mathscr{H}_\beta$ — естественное отождествление. Для заданного преобразования R из группы $SO(3)$ трехмерных вращений и заданной функции η пусть $\eta \circ R^{-1}$ обозначает функцию $(\eta \circ R^{-1})(x) = \eta(R^{-1}x)$. Поскольку кластерные гамильтонианы каналов коммутируют с вращениями, композиция каждого $\eta_l^{(i_l)}$ с R^{-1} есть линейная комбинация

$$\eta_l^{(i_l)} \circ R^{-1} = \sum_j D_l^{(i_l,\, j_l)}(R)\, \eta_l^{(j_l)}$$

других $\eta_l^{(j_l)}$. Обозначим через $V_\alpha(R)$ естественное действие вращений на пространстве $\mathscr{H}_\alpha \equiv L^2(\mathbb{R}^{3k-3})$. Определим оператор $U_R^{(\alpha)}\colon \mathscr{H}_\alpha \to \bigoplus\limits_{\beta \in \mathscr{C}_1} \mathscr{H}_\beta$ как

$$U_R^{(\alpha)} = \sum_{j_1, \dots, j_k} \left(\prod_{l=1}^{k} D^{(i_l,\, j_l)}(R) \right) J_{\beta\alpha} V_\alpha(R),$$

где β — канал

$$\beta = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_k \\ \eta_1^{(j_1)} & \dots & \eta_k^{(j_k)} \end{pmatrix}.$$

Наконец, определим U_R как оператор из $\bigoplus_{\alpha\in\mathscr{C}} \mathscr{H}_\alpha$ в $\bigoplus_{\alpha\in\mathscr{C}} \mathscr{H}_\alpha$, полагая $U_R \restriction \mathscr{H}_\alpha \equiv U_R^{(\alpha)}$.

Предложение 1. Пусть S — оператор рассеяния N-частичной квантовой системы, гамильтониан которой после отделения движения центра масс удовлетворяет условиям теоремы XI.34. Тогда S коммутирует с $\exp(itH_{\text{asym}})$ для всех t. Если все V_{ij} центральны, то S коммутирует со всеми вращениями, т. е. $SU_R = U_R S$ для всех $R \in SO(3)$.

В классическом случае мы видели, что симметрии заметно упрощают S-оператор. A priori классическая S-матрица есть отображение из $\mathbb{R}^6$ в $\mathbb{R}^6$. Учитывая симметрию, мы смогли описать S как функцию из $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ в $\mathbb{R} \times [0, \pi]$. Найдем теперь ограничения, которые налагают симметрии на квантовомеханический S-оператор. Сначала изучим роль закона сохранения энергии, приведя общее утверждение относительно операторов, коммутирующих с однопараметрической группой.

Определение. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с σ-конечной мерой, $\mathscr{H}_0$ — сепарабельное гильбертово пространство, и пусть $\mathscr{H} = L^2(M, d\mu; \mathscr{H}_0)$. Мы говорим, что функция a из M в пространство $\mathscr{L}(\mathscr{H}_0)$ ограниченных операторов на $\mathscr{H}_0$ *измерима*, если измерима функция $(\psi, a(\cdot)\varphi)$ для любых $\psi, \varphi \in \mathscr{H}_0$. Мы говорим, что $a \in L^\infty(M, d\mu; \mathscr{L}(\mathscr{H}_0))$, если функция a измерима и если $\operatorname{ess\,sup} \|a(\cdot)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H}_0)} < \infty$ Для заданной функции $a \in L^\infty(M, d\mu; \mathscr{L}(\mathscr{H}_0))$ по лемме Рисса существует такой оператор $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, что для любых $\psi, \varphi \in \mathscr{H}$

$$(\psi, A\varphi)_{\mathscr{H}} = \int_M (\psi(\lambda), a(\lambda)\varphi(\lambda))_{\mathscr{H}_0} d\mu(\lambda).$$

Мы называем такое отображение **разложимым оператором**, а $a(\lambda)$ — **слоем оператора A в точке λ**. Слои A определены почти всюду.

Подобные расслоенные операторы далее исследуются в § XIII.16, где доказательство леммы Рисса получается как часть теоремы XIII.83.

Предложение 2. Пусть $\mathscr{H}_0$ — сепарабельное гильбертово пространство и μ — мера Бореля на $\mathbb{R}$. Пусть B — умножение на x в $L^2(\mathbb{R}, d\mu; \mathscr{H}_0) \equiv \mathscr{H}$. Предположим, что оператор $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ коммутирует с $\exp(itB)$ при любом $t \in \mathbb{R}$. Тогда A — разложимый оператор. Более того, если A унитарен (соответственно самосопряжен), то его слои суть (почти всюду) унитарные (соответственно самосопряженные) операторы в $\mathscr{H}_0$.

Первая часть предложения — частный случай теоремы XIII.84. Вторая часть достаточно проста, поскольку оператор A и его слои ограничены.

Пример 1. Пусть S — матрица, описывающая рассеяние в редуцированной двухчастичной системе с приведенной массой, равной $1/2$ на $L^2(\mathbb{R}^m)=\mathcal{H}$. Предположим, что S унитарна. Пусть $\mathcal{H}_0$ — гильбертово пространство $L^2(S^{m-1}; d\Omega)$, где S^{m-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^m$, а $d\Omega$ — стандартная мера на ее поверхности. Определим унитарное отображение U: $L^2(\mathbb{R}^m)\to L^2(\mathbb{R}_+, dE; \mathcal{H}_0)$ посредством

$$[(Uf)(E)](\omega)=(\sqrt{2})^{-1}E^{(m-2)/4}\hat{f}(E^{1/2}\omega), \tag{104}$$

где $\omega\in S^{m-1}$ рассматривается как единичный вектор в $\mathbb{R}^m$. Если нам задан оператор A в $L^2(\mathbb{R}^m)$, мы будем называть UAU^{-1} «оператором A в энергетическом представлении». В энергетическом представлении H_0 есть умножение на E, так что предыдущее предложение 2 применимо к S в силу предложения 1. Итак, в энергетическом представлении S — разложимый оператор, слои которого $S(E)$ — унитарные отображения $L^2(S^{m-1}, d\Omega)$ на себя. Определим оператор $T(E)$ посредством

$$T(E)=(2\pi i)^{-1}(I-S(E)).$$

В случае $m=3$ и $V\in L^1\cap R$ теорема XI.42 дает нам явное представление для $T(E)$, а именно

$$(T(E)f)(\omega)=\frac{E^{1/2}}{2}\int\limits_{S^{m-1}}T(E^{1/2}\omega, E^{1/2}\omega')f(\omega')\,d\Omega(\omega'), \tag{105}$$

где $T(\cdot,\cdot)$ есть «T-матрица». Ниже мы будем придерживаться этой реализации $T(E)$ как интегрального оператора.

Пример 2. Пусть $\mathcal{H}_{\text{asym}}$ — асимптотическое гильбертово пространство для N-частичной квантовой системы в $L^2(\mathbb{R}^{3N-3})$. Напомним, что для каждого α из множества $\mathscr{C}$ каналов мы определили энергию канала E_α как сумму внутренних энергий кластеров в α. Иногда E_α называют **порогом канала** α. Для каждого $E\in\mathbb{R}$ множество

$$\mathscr{C}_E=\{\alpha\in\mathscr{C}\mid E_\alpha<E\}$$

называется **множеством каналов, открытых** при энергии E. Пусть α есть l-кластерный канал, так что гильбертово пространство канала $\mathcal{H}_\alpha=L^2(\mathbb{R}^{3l-3})$. Подобно двухчастичному случаю (пример 1), H_α можно реализовать как умножение на $(E+E_\alpha)$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, dE; L^2(S^{3l-4}, d\mu_\alpha))$, хотя, поскольку возможны различные массы в различных кластерах, мера μ_α и явная формула для энергетического представления имеют более сложный вид, чем

(104). Предположим далее, что $[E, \infty)$ можно представить в виде $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, где (1) $E = \inf \sigma(H)$; (2) интервалы I_n не пересекаются; (3) при каждом фиксированном n множество $\mathscr{C}_E$ одно и то же при любом $E \in I_n$. Такое разложение существует, коль скоро H имеет «разумные» спектральные свойства, например если для каждой подсистемы $\sigma_{\mathrm{pp}}(H(C)) = \sigma_{\mathrm{disc}}(H(C))$ или если каждое $H(C)$ обладает собственными значениями, которые накапливаются лишь у порогов (задача 74); в § XIII.10 мы увидим, что такие спектральные свойства иногда удается доказать. Пусть $\{P_\Omega\}$ — спектральные проекторы H_{asym}. Напишем $\mathscr{H}_{\mathrm{asym}} = \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{H}^{(n)}$, где $\mathscr{H}^{(n)} = \mathrm{Ran}\, P_{I_n}$. Поскольку оператор S коммутирует с каждым P_Ω, он оставляет инвариантным каждое $\mathscr{H}^{(n)}$. Теперь можно применить предложение 2 и получить расслоение каждого $S \restriction \mathscr{H}^{(n)}$. Сам S можно мыслить как обобщенный разложимый оператор, однако слои $S(E)$ будут отображениями гильбертовых пространств, зависящими некоторым образом от E, а именно $S(E)$ — отображение, определенное на $\mathscr{H}_E \equiv \bigoplus\limits_{\alpha \in \mathscr{C}_E} \mathscr{H}_\alpha^{(0)}$, где $\mathscr{H}_\alpha^{(0)} = L^2(S^{3l-4}, d\mu_\alpha)$. При возрастании E гильбертово пространство $\mathscr{H}_E$, на котором действуют слои, увеличивается каждый раз, как проходится новый порог рассеяния. Отметим, что описанное выше энергетическое представление, где пространство $\mathscr{H}_E$ зависит от E, наиболее естественно рассматривать на языке прямых интегралов гильбертовых пространств.

Прежде чем обратиться к следствиям инвариантности относительно вращений, мы хотим более подробно изучить оператор $T(E)$ из примера 1.

Теорема XI.49. Пусть $H = -\Delta + V$, где $V \in R$. Тогда:

(a) для каждого $E \in R_+ \setminus \mathscr{E}$ оператор $T(E)$ в $L^2(S^2, d\Omega)$ есть оператор Гильберта — Шмидта;

(b) $E \longmapsto T(E)$ есть непрерывное отображение из $\mathbb{R}_+ \setminus \mathscr{E}$ во множество операторов Гильберта — Шмидта с естественной топологией на нем;

(c) в равномерной топологии $T(E) \to 0$ при $E \to \infty$.

Если, кроме того, $V \in L^1$, то «операторы Гильберта — Шмидта» в (a) и (b) можно заменить на «операторы со следом».

Доказательство. Для каждого $E > 0$ пусть $K_V(E)$ — оператор Гильберта — Шмидта в $L^2(\mathbb{R}^3)$ с ядром

$$\frac{|V(x)|^{1/2} e^{i\sqrt{E}\,|x-y|}\, V(y)^{1/2}}{4\pi\,|x-y|},$$

и пусть $F_V(E)$ — отображение из $L^2(\mathbb{R}^3)$ в $L^2(S^2, d\Omega)$, заданное посредством

$$(F_V(E)f)(\omega) = {}^1/_4 E^{1/4}\pi^{-3/2}\int \exp(-iE^{1/2}\omega\cdot x)V^{1/2}(x)f(x)\,dx. \quad (106)$$

В этом доказательстве мы будем прежде всего пользоваться тем, что $F_V(E)$ — ограниченный оператор класса $\mathcal{I}_4$ (определенного в дополнении к § IX.4), и равенством

$$T(E) = F_V(E)[I + K_V(E)]^{-1} F_{|V|}(E)^*, \quad (107)$$

справедливым для всех $E \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathscr{E}$. Равенство (107) тесно связано с (99). Нам потребуется формула

$$(F_V(E)^* g)(x) = {}^1/_4 E^{1/4}\pi^{-3/2}\int \exp(-iE^{1/2}\omega\cdot x)V^{1/2}(x)g(\omega)\,d\Omega. \quad (108)$$

Предположим сначала, что $V \in L^1 \cap R$. Тогда $T(E)$ задан как интегральный оператор (105), причем

$$T(k, k') = (2\pi)^{-3}\int V(x)^{1/2} e^{-ik\cdot x}\psi(x, k')\,dx,$$

где $\psi(\cdot, k) = [I + K_V(k^2)]^{-1}\psi_0(\cdot, k)$ и $\psi_0(x, k) = |V(x)|^{1/2}\exp(ik\cdot x)$. Тем самым (107) в этом случае доказано.

Далее нам нужны следующие свойства оператора $F_V(E)$, доказательство которых мы оставляем читателю (задача 75).

(1) Если $V \in R$, то $F_V(E) \in \mathcal{I}_4$, т. е. $F_V(E)^* F_V(E)$ — оператор Гильберта — Шмидта.
(2) Отображение $E \mapsto F_V(E)$ непрерывно в топологии $\mathcal{I}_4$.
(3) Для фиксированного $E \neq 0$ отображение $V \mapsto F_V(E)$ из класса потенциалов Рольника с их естественной нормой в пространство $\mathcal{I}_4$ непрерывно.

(1′) — (3′) Если R заменить на $L^1 \cap R$, а $\mathcal{I}_4$ на $\mathcal{I}_2$, то свойства (1) — (3) по-прежнему справедливы.

Например, явная формула (106) показывает, что $F_V(E)$ имеет L^2-ядро, когда $V \in L^1$ (что доказывает (1′)), а (1) следует из явной формулы

$$(F_V(E)^* F_V(E)g)(x) = \int \frac{V(x)^{1/2}V(y)^{1/2}}{|x-y|\,4\pi^2}\sin(E^{1/2}|x-y|)\,g(y)\,dy.$$

В дополнение к этому нам нужен следующий факт, который доказывается при помощи теории гладких возмущений в сочетании с теорией Като — Бирмана (см. задачу 57 к гл. XIII).

(4) Если $V_n \to V$ по норме Рольника, то соответствующие S-матрицы сходятся сильно.

Фиксируем $V \in R$ и выберем $V_n \in L^1 \cap R$ так, что $V_n \to V$ по норме Рольника. Предположим, что $E_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathscr{E}$. Поскольку можно найти интервал A около E_0, такой, что $\bar{A}\cap\mathcal{E}=\varnothing$, и поскольку отображение $\langle V, E\rangle\mapsto K_V(E)$ произведения $R\times\mathbb{R}_+$ в $\mathcal{I}_2$ непрерывно по совокупности переменных (задача 76), то для всех больших n интервал A не пересекается с исключительными множествами $\mathcal{E}_n$ операторов $-\Delta+V_n$. Поскольку S-матрицы S_n сходятся к S (по (4)), $F_{V_n}(E)\to F_V(E)$ (по (3)), а (107) выполняется для каждого V_n, то оно выполняется и для V, коль скоро $E\in A$. Теперь (a) и (b) следуют из свойства (2) и формулы (107). Доказательство (c) оставлено читателю (задача 77). ∎

С помощью метода оценок в L^2 с весом (§ XIII.8) равенство (107) и некоторые свойства непрерывности оператора $T(E)$ можно распространить на потенциалы, ведущие себя на бесконечности как $r^{-1-\varepsilon}$ (см. ссылки в замечаниях к § XIII.8).

Поскольку $T(E)$ — оператор Гильберта — Шмидта, его можно задать интегральным ядром $t(E;\omega,\omega')$. Из-за различий в нормировках ядро t следует отличать от T-матрицы T из § 6; действительно, как видно из формулы (105),

$$t(E;\omega,\omega')={}^1/_2E^{1/2}T(E^{1/2}\omega, E^{1/2}\omega'),$$

когда $V\in L^1\cap R$. К сожалению, это различие между t и T типично для теории рассеяния, где неприятные множители $\sqrt{E}$, 2π, -1 и i постоянно возникают в самых неожиданных местах.

Предположим теперь, что V — центральный потенциал. Поскольку S коммутирует с вращениями, то же должно быть справедливо и для $T(E)$ при почти всех E. Поскольку отображение $E\mapsto T(E)$ непрерывно на $\mathbb{R}_+\setminus\mathcal{E}$, мы заключаем, что $T(E)$ коммутирует с вращениями. Итак, для любого вращения R, действующего на S^2, и $E\in\mathbb{R}_+\setminus\mathcal{E}$

$$t(E;R\omega,R\omega')=t(E;\omega,\omega').$$

Отсюда следует, что $t(E;\omega,\omega')$ зависит лишь от $\omega\cdot\omega'\equiv\cos\theta$. Мы сформулируем наш окончательный результат в терминах величины f из формул (96) и (97), связанной с дифференциальным сечением равенством $d\sigma/d\Omega=|f|^2$.

Определение. $f(E,\cos\theta)=-(2\pi)^2E^{-1/2}t(E;\omega,\omega')$, где $\omega\cdot\omega'=\cos\theta$; f называется **амплитудой рассеяния.**

Подведем итог редукции за счет симметрий.

Теорема XI.50. Пусть $V\in R$ — центральный потенциал, и пусть S — оператор рассеяния для $-\Delta+V$. Тогда существует функция $f(E,\cos\theta)$ из $(\mathbb{R}_+\setminus\mathcal{E})\times[-1,1]$ в $\mathbb{C}$, такая, что слои $S(E)$ оператора S имеют интегральные ядра:

$$(S(E)-I)(\omega,\omega')=\frac{i}{2\pi}E^{1/2}f(E,\omega\cdot\omega').$$

Итак, классическая редуцированная S-функция из $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ в $\mathbb{R} \times [0, \pi]$ заменяется одной *комплекснозначной* функцией на $\mathbb{R}_+ \times [0, \pi]$. Если выделить модуль и аргумент f, мы получим две вещественнозначные функции. Поскольку сечение рассеяния зависит лишь от модуля f, этот модуль является аналогом угла классического рассеяния в том смысле, что содержит похожую физическую информацию о рассеянии. Аргумент же f в смысле, который может быть сделан точным, содержит информацию о временно́й задержке (см. ссылки в Замечаниях).

В. Разложение по парциальным волнам и его сходимость

Мы только что видели, что $T(E)$ — оператор Гильберта — Шмидта. Он также и нормален, поскольку унитарен $S(E)$. Таким образом, $T(E)$ имеет полный ортонормированный набор собственных векторов. В результате этим же свойством обладает и $S(E)$. Если потенциалы центральны, то, применяя инвариантность относительно вращений, можно провести классификацию соответствующих собственных векторов! Группа вращений $SO(3)$, действующая на $L^2(S^2, d\Omega)$, порождает разложение этого пространства в прямую сумму $\bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathscr{H}_l$, где $\mathscr{H}_l$ есть $(2l+1)$-мерное подпространство, натянутое на сферические гармоники порядка l. Каждое подпространство остается инвариантным под действием $SO(3)$, и сужение $SO(3)$ на $\mathscr{H}_l$ — неприводимое представление (см. § XVI.2, где будут приведены основные определения и лемма Шура). Эти представления неэквивалентны для разных l. По лемме Шура отсюда следует, что $S(E)$ оставляет каждое $\mathscr{H}_l$ инвариантным и что существуют числа $s_l(E)$, такие, что для каждого $\psi \in \mathscr{H}_l$

$$S(E)\psi = s_l(E)\psi.$$

Определение. Величины $s_l(E)$ называются **парциальными матричными элементами S-оператора.** Величины $f_l(E)$, определенные как

$$f_l(E) = (2iE^{1/2})^{-1}[s_l(E) - 1], \tag{109}$$

называются **парциальными амплитудами рассеяния.**

Теорема XI.51 (разложение по парциальным волнам — теорема о сходимости в L^2). Пусть $V \in R$ — центральный потенциал. Фиксируем $E \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathscr{E}$. Тогда парциальные амплитуды $f_l(E)$ и амплитуда рассеяния $f(E, \cos\theta)$ связаны соотношениями

$$f(E, \cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(E) P_l(\cos\theta), \tag{110a}$$

$$f_l(E) = {}^1/_2 \int_{-1}^{1} f(E, z) P_l(z)\, dz. \tag{110b}$$

Сумма в (110a) сходится к $f(E, \cos\theta)$ по норме пространства $L^2(S^2, d\Omega)$ для каждого фиксированного E. Равенство (110a) называется **разложением по парциальным волнам.** Функции $P_l(z)$ — полиномы Лежандра. Обзор их свойств приведен в дополнении к этому разделу.

Доказательство. Пусть ω_0 — фиксированное направление. Тогда $P_l(\omega\cdot\omega_0)$ — элемент подпространства $\mathscr{H}_l$, так что

$$\int t(E;\omega,\omega')\,P_l(\omega'\cdot\omega_0)\,d\Omega(\omega') = (-2\pi i)^{-1}(s_l(E)-1)\,P_l(\omega\cdot\omega_0).$$

Выбирая $\omega=\omega_0$ и применяя формулу, определяющую $f(E;\omega\cdot\omega')$, видим, что

$$\int f(E;\omega'\cdot\omega_0)\,P_l(\omega'\cdot\omega_0)\,d\Omega(\omega') = 4\pi f_l(E)\,P_l(1).$$

Поскольку $P_l(1)=1$ и $\int f(\omega')\,d\Omega(\omega') = 2\pi\int f(\omega')\,d(\omega'\cdot\omega_0)$ для функций f от $\omega'\cdot\omega_0$, (110b) получено. С другой стороны, поскольку $t(E;\omega,\omega')$ — ядро оператора Гильберта—Шмидта, то $\int_{-1}^{1}|f(E;z)|^2\,dz<\infty$. Так как $P_l(z)$ образуют полное ортогональное семейство, причем $\int_{-1}^{1}|P_l(z)|^2\,dz = 2(2l+1)^{-1}$, то (110a) следует из (110b). ∎

Соотношения ортогональности для функций P_l приводят к важному следствию. Действительно, полное сечение определяется как $\sigma = \int (d\sigma/d\Omega)\,d\Omega = 2\pi\int_{-1}^{1}|f(E;z)|^2\,dz$, так что мы получаем основную формулу парциального анализа теории рассеяния:

$$\sigma(E) = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,|f_l(E)|^2. \tag{111}$$

Иногда удается сделать значительно более сильное утверждение относительно сходимости разложения по парциальным волнам, чем полученное в теореме XI.51.

Теорема XI.52 (разложение по парциальным волнам — теорема о равномерной сходимости). Пусть V — центральный потенциал, причем $e^{\alpha|x|}V\in R$ для некоторого $\alpha>0$. Фиксируем $E\in\mathbb{R}_+\setminus\mathscr{E}$. Тогда разложение по парциальным волнам (110a) сходится равномерно по θ в интервале $[0, 2\pi]$.

Доказательство По теореме XI.47 функция $f(E, z)$ аналитична по z в эллипсе с фокусами в точках ± 1 и большой полуосью

$1+2\alpha^2E^{-1}$. Равномерная сходимость разложения по парциальным волнам на компактных подмножествах этого эллипса следует из общей теоремы о сходимости рядов Лежандра (теорема XI.63 из дополнения 1). ∎

C. Фазовые сдвиги и их связь с уравнением Шредингера

В пункте B мы лишь отчасти воспользовались унитарностью S-матрицы. Дальнейший учет унитарности немедленно влечет за собой, что числа $s_l(E)$, собственные значения $S(E)$, имеют единичные модули.

Определение. **Фазовые сдвиги** $\delta_l(E)$ определяются равенством

$$s_l(E)=e^{2i\delta_l(E)}.$$

A priori ясно, что фазовые сдвиги — вещественные числа, определенные для почти всех E, но лишь по модулю π. Пусть $E_0=\max\{E\mid E\in\mathscr{E}\}$, где $\mathscr{E}$ — исключительное множество. Поскольку $\lim\limits_{E\to\infty} S(E)=I$ и $S(E)$ непрерывна на (E_0, ∞), можно избавиться от неопределенностей «почти всюду» и «по модулю π» для $E\in(E_0, \infty)$, потребовав, чтобы $\delta_l(E)$ были непрерывны на этом интервале и чтобы $\lim\limits_{E\to\infty}\delta_l(E)=0$. В частях D и E ниже мы увидим, что при довольно слабых ограничениях $s_0(E)$, а потому и $\delta_0(E)$ могут быть выбраны непрерывными по E на $[0, \infty)$. Кроме того, можно доказать, что $\delta_l(E)$ могут быть выбраны непрерывными при $l>0$. Фазовый сдвиг, определенный так, чтобы он был непрерывен по E и удовлетворял условию $\lim\limits_{E\to\infty}\delta_l(E)=0$ для каждого фиксированного l, удовлетворяет также условию $\lim\limits_{l\to\infty}\delta_l(E)=0$ для каждого фиксированного E. Действительно, поскольку $S(E)-I$ — оператор Гильберта — Шмидта, когда $V\in R$, то в этом случае $\sum\limits_{l=0}^{\infty}(2l+1)|\delta_l(E)|^2<\infty$.

Парциальную амплитуду теперь можно записать тремя различными способами, каждый из которых по-своему полезен:

$$f_l(E)=(2ik)^{-1}(e^{2i\delta_l(E)}-1), \tag{112a}$$

$$f_l(E)=k^{-1}e^{i\delta_l(E)}\sin\delta_l(E), \tag{112b}$$

$$f_l(E)=k^{-1}(\operatorname{ctg}\delta_l(E)-i)^{-1}, \tag{112c}$$

где $k=\sqrt{E}$. В оставшейся части этого раздела k всегда будет обозначать $\sqrt{E}$. Заметим, что из (112b) следует равенство

$$\operatorname{Im} f_l(E)=k|f_l(E)|^2. \tag{113}$$

Это равенство часто называют **унитарностью парциальных волн**, поскольку оно есть прямой перевод на этот язык свойства унитарности оператора S. Соотношения (110), (111) и (113) дают новое доказательство соотношения унитарности (97c).

Наиболее важный инструмент теории рассеяния для центральных потенциалов—это связь между фазовыми сдвигами и стационарным радиальным уравнением Шредингера, которую дает следующая

Теорема XI.53. Пусть потенциал V централен и кусочно непрерывен как функция r на $[0, \infty)$. Предположим, что интегралы $\int\limits_0^1 r|V(r)|\,dr$ и $\int\limits_1^\infty |V(r)|\,dr$ конечны. Фиксируем $E>0$ и целое неотрицательное l. Тогда существует единственная функция $\varphi_{l,E}(r)$ на $(0, \infty)$, которая принадлежит C^1, кусочно дважды дифференцируема и удовлетворяет уравнению

$$-\varphi''(r)+V_l(r)\varphi(r)=E\varphi(r), \tag{114}$$

где $V_l(r)=V(r)+l(l+1)r^{-2}$ с граничными условиями

$$\lim_{r\to 0}\varphi_{l,E}(r)=0, \qquad \lim_{r\to 0} r^{-l-1}\varphi_{l,E}(r)=1.$$

Далее, существует такая константа c, что

$$\lim_{r\to\infty}[c\varphi_{l,E}(r)-\sin(kr-\pi l/2+\delta_l(E))]=0, \tag{115}$$

где $\delta_l(E)$—фазовый сдвиг рассеяния.

Доказательство. Одна часть доказательства включает приложение теории обыкновенных дифференциальных уравнений к исследованию (114) Мы приведем некоторые результаты такого исследования без доказательства. Позже, в части E, мы докажем эти результаты в случае $l=0$. Доказательства для произвольных l можно найти в литературных ссылках, приведенных в Замечаниях Хотя второе граничное условие влечет за собой первое, мы выписываем оба, чтобы подчеркнуть аналогию с уравнением второго порядка с граничными условиями $\varphi(x_0)=a$ и $\varphi'(x_0)=b$.

Предположим сначала, что $V\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ и что V централен. Фиксируем направление $\mathbf{e}$, и пусть $\varphi(\mathbf{x}, k\mathbf{e})$—волновая функция Липпмана—Швингера, построенная при доказательстве теоремы XI.41. Тогда

$$\varphi(x, ke)=e^{ike\cdot x}-\frac{1}{4\pi}\int\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}V(y)\varphi(y, ke)\,dy. \tag{116}$$

Пусть $g\in C_0^\infty$, и пусть $h=(-\Delta-E)g$. Тогда

$$\int h(x)\varphi(x, ke)\,dx=-\frac{1}{4\pi}\iint h(x)\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}V(y)\varphi(y, ke)\,dy\,dx, \tag{117}$$

где мы воспользовались тем, что $(-\Delta-E)e^{ik e\cdot x}=0$ в смысле обобщенных функций, чтобы исключить первый член из (116). Поскольку $|V|^{1/2}\varphi\in L^2$, а V и h лежат в C_0^∞, можно изменить порядок интегрирования в правой части (117) и воспользоваться равенством

$$\int[(-\Delta-E)g](x)\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}d^3x=g(y)$$

для вывода равенства $(-\Delta-E)\varphi(x, ke)=-V(x)\varphi(x, ke)$ в смысле обобщенных функций. По теореме об эллиптической регулярности (теорема IX.26) заключаем, что $\varphi(x, ke)$ как функция x лежит в C^∞ и удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных $(-\Delta+V)\varphi=E\varphi$ в классическом смысле. Выберем сферические координаты $\langle r, \theta, \eta\rangle$, где θ — угол между r и e. Тогда φ не зависит от азимутального угла η. Пусть

$$\tilde{\varphi}_{l,E}(r)=\frac{r}{2}\int_0^\pi\varphi(r, \theta; ke)P_l(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta.$$

Тогда $\tilde{\varphi}_{l,E}$ удовлетворяет (114) и первому граничному условию. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений говорит нам, что каждое решение уравнения (114), удовлетворяющее первому граничному условию, отличается лишь множителем от того единственного решения, которое удовлетворяет обоим граничным условиям. Если $l\neq 0$, так что V_l сингулярен при $r=0$, это не столь просто, как в случае $l=0$, когда можно обратиться к § V.6.A.

Доказательство теоремы в случае $V\in C_0^\infty$ сведено, таким образом, к доказательству (115) с $\tilde{\varphi}$ вместо φ. В (116) фиксируем комбинацию $x\cdot e/|x|$, и пусть $|x|\to\infty$. Пользуясь определением $T(\mathrm{k}, \mathrm{k}')$ и тем, что $V\varphi$ имеет компактный носитель, легко показать, что (задача 78)

$$\lim_{\substack{|x|\to\infty\\ x\cdot e=|x|\cos\theta_0}}\left(\int\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}V(y)\varphi(y, ke)\,dy\right)e^{-ik|x|}|x|=(2\pi)^3T(ke', ke), \tag{118}$$

где e' выбрано так, что $e\cdot e'=\cos\theta_0$. Более того, сходимость равномерна по θ_0. Из равенств (105), (110b) и определения f следует, что

$$^1/_2\int_0^\pi P_l(\cos\theta)\left[T(ke', ke)\big|_{e\cdot e'=\cos\theta}\right]\sin\theta\,d\theta=-\frac{1}{2\pi^2}f_l(E).$$

В силу (116) и равномерности предела в (118),

$$\lim_{r\to\infty}\left[\tilde{\varphi}(r)-e^{i\pi l/2}rj_l(kr)-f_l(E)e^{ikr}\right]=0. \tag{119}$$

Здесь $j_l(kr)$ — сферическая функция Бесселя, определенная в первом дополнении к этому разделу. По теореме XI.64, $yj_l(y)$ — $-\sin(y-\pi l/2) \to 0$ при $y \to \infty$ и, более того, $f_l(E) = (e^{2i\delta_l}-1)/2ik$. Таким образом,

$$\lim_{r\to\infty}[2ik\tilde{\varphi}(r) - (e^{ikr} - e^{-ikr}e^{i\pi l}) - (e^{2i\delta_l}-1)e^{ikr}] = 0,$$

или

$$\lim_{r\to\infty}[ke^{-i\pi l/2}e^{-i\delta_l}\tilde{\varphi}(r) - \sin(kr - {}^1/_2\pi l + \delta_l)] = 0.$$

Это доказывает теорему, когда $V \in C_0^\infty$. Потенциал общего вида V аппроксимируется с помощью $V_n \in C_0^\infty$. По теореме XI.31 и задаче 28, при $V_n \to V$ соответствующие S-матрицы сходятся, а тогда сходятся и соответствующие значения δ_l. С другой стороны, метод части E показывает, что сходятся сдвиги фаз решения уравнения (114). ∎

Итак, δ_l представляет собой сдвиг фазы решения радиального уравнения Шредингера, регулярного в точке $r=0$, по отношению к $j_l(kr)$ — решению при $V=0$. В предыдущей теореме можно опустить условие гладкости V, если заменить дифференциальное уравнение (114) интегральным уравнением (125). Можно доказать (115), развивая теорию рассеяния непосредственно для операторов Шредингера на подпространствах фиксированного углового момента. Этот подход рассматривается в дополнении 3.

D. Уравнение с переменной фазой

В части C мы доказали, что фазовый сдвиг связан с радиальным уравнением Шредингера. Эта связь подсказывает большое число дополнительных результатов. Например, фиксируем потенциал V, удовлетворяющий условиям теоремы XI.53. Предположим, что мы несколько изменили V, сделав его в некоторых местах более отрицательным. Тогда для каждого фиксированного k решения уравнения $-\varphi'' + V_l\varphi = k^2\varphi$ в области, где мы изменили V, осциллируют быстрее. Таким образом, мы ожидаем, что фазовый сдвиг будет больше. Итак, похоже, что $\delta \geqslant \tilde{\delta}$, если $V \leqslant \tilde{V}$ Оказывается, доказать это непосредственно трудно ввиду определения δ с точностью до величины, кратной π. По этой причине полезно развить дополнительные средства исследования фазового сдвига. Мы построим два различных метода в этой и следующей частях. Оба они в конечном счете опираются на теорему XI.53.

Теорема XI.54. Пусть V удовлетворяет условиям теоремы XI.53. Тогда для любого $k>0$ существует единственное решение уравнения

$$d'(r) = -\frac{1}{k}V(r)\sin^2(kr + d(r)), \quad r \in (0, \infty), \tag{120}$$

удовлетворяющее граничному условию $\overline{\lim_{r\to 0}} r^{-1}|d(r)|<\infty$. Более того, это решение удовлетворяет условию

$$\lim_{r\to\infty} d(r)=\delta_{l=0}(k^2), \tag{121}$$

где $\delta_{l=0}(k^2)$ есть s-волновой фазовый сдвиг для V, т. е. $\delta_0(k^2)$. Уравнение (120) называется **уравнением с переменной фазой.** Подчеркнем, что $d(r)$ зависит от k.

Доказательство. Существование решений с правильными граничными условиями следует из принципа сжимающих отображений в соответствии со схемой, изложенной в § V.6.A. Доказательство этого мы отнесем к задаче 79.

Фиксируем $\rho\in(0, \infty)$ и определим V^ρ, полагая

$$V^\rho(r)=\begin{cases} V(r), & r\leqslant\rho,\\ 0 & r>\rho.\end{cases}$$

Пусть δ^ρ — фазовый сдвиг для V^ρ при фиксированной энергии k^2. Поскольку $V^\rho\to V$ по норме, определенной левой частью (61), то $\delta^\rho\to\delta$ (по модулю π), когда $\rho\to\infty$. Мы покажем, что функция $\rho\longmapsto\delta^\rho$ удовлетворяет дифференциальному уравнению и граничному условию в нуле. Это позволит нам заключить, что (121) выполняется по модулю π. Вопрос об этой неоднозначности вынесен в задачу 80.

Пусть φ удовлетворяет (114) при $l=0$ и условию $\lim_{r\to 0} r^{-1}\varphi(r)=1$. Пусть φ^ρ — аналогичная функция для V^ρ. Очевидно,

$$\varphi^\rho(r)=\begin{cases}\varphi(r), & r\leqslant\rho,\\ \alpha\sin(kr+\beta), & r\geqslant\rho,\end{cases}$$

для подходящих α и β. По теореме XI.53, $\beta=\delta^\rho$. Требование, чтобы φ^ρ принадлежало C^1, влечет за собой равенство

$$k\operatorname{ctg}(k\rho+\delta^\rho)=\varphi'(\rho)/\varphi(\rho). \tag{122}$$

Применяя (122) и дифференциальное уравнение (114), легко доказать (задача 81), что

$$\frac{d\delta^\rho}{d\rho}=-\frac{1}{k}V(\rho)\sin^2(k\rho+\delta^\rho). \tag{123}$$

Более того, в силу (122), $\lim_{\rho\to 0}\operatorname{ctg}(k\rho+\delta^\rho)=\infty$. От неопределенности, связанной с π, в определении δ^ρ по (122) мы избавимся, потребовав, чтобы $\lim_{\rho\to 0}\delta^\rho=0$ и чтобы δ^ρ принадлежало C^1. Наконец, в силу (122), $\lim_{\rho\to 0} k\rho\operatorname{ctg}(k\rho+\delta^\rho)=1$, или

$$\underline{\lim_{\rho\to 0}}(k\rho)^{-1}(k\rho+\delta^\rho)=1,$$

так что $\lim_{\rho\to 0} \rho^{-1}\delta^\rho = 0$. Итак, в силу единственности решения уравнения (120), $\delta^\rho = d(\rho)$. ■

Следствие 1. Можно выбрать $\delta_0(E)$ непрерывным по E при всех E.

Это следствие той части доказательства, которая содержится в задаче 80.

Следствие 2. Если $\delta_0(E)$ выбрано непрерывным и удовлетворяющим условию $\lim_{E\to\infty} \delta_0(E) = 0$, то фазовые сдвиги для оператора $-\Delta + \lambda V$ непрерывны по λ и обращаются в нуль при $\lambda \to 0$.

Доказательство вынесено в задачу 82.

Следствие 3. Число δ_0 положительно для потенциалов, которые всюду неположительны ($V(r) \leqslant 0$ при всех r), и отрицательно для потенциалов, которые всюду неотрицательны.

Доказательство. В силу (120) и (121), $\delta_0(k^2) = -k^{-1}\int_0^\infty V(r)\sin^2(kr + d(r))\,dr$, что, очевидно, положительно (соответственно отрицательно), если $V \leqslant 0$ (соответственно $V \geqslant 0$). ■

Следствие 4. Если $V \leqslant \tilde{V}$, то s-волновые фазовые сдвиги для V не меньше таких же фазовых сдвигов для $\tilde{V}$.

Доказательство. Фиксируем $k > 0$. Предположим сначала, что $V = \tilde{V}$ на интервале $(0, \rho_0)$ и что $V < \tilde{V}$ на (ρ_0, ∞). Пусть $d(\rho)$, $\tilde{d}(\rho)$ — соответствующие решения уравнения с переменной фазой (120). Тогда $d(\rho_0) = \tilde{d}(\rho_0)$ и $d'(\rho_0) = \tilde{d}'(\rho_0)$ в силу (120), так что $d(\rho) > \tilde{d}(\rho)$ для $\rho > \rho_0$ вблизи ρ_0. Если бы $\tilde{d}$ где-нибудь было больше d, то существовало бы такое $\rho_1 > \rho_0$, что $d(\rho_1) = \tilde{d}(\rho_1)$ и $\tilde{d}'(\rho_1) \geqslant d'(\rho_1)$. Но это несовместимо с уравнением (120) и условием $V < \tilde{V}$ на (ρ_0, ∞). Итак, $d \geqslant \tilde{d}$ для всех ρ и, в силу (121), $\delta \geqslant \tilde{\delta}$. Для доказательства общего случая применяется простой предельный переход. ■

Особый интерес представляет низкоэнергетическое поведение $\delta_0(E)$. Его можно исследовать методом, родственным методу переменной фазы.

Теорема XI.55. Пусть $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ — центральный потенциал, и пусть u — решение уравнения $-u''(r) + V(r)u(r) = 0$ с граничными условиями $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$. Тогда:

(a) если $\lim\limits_{r\to\infty} u'(r) \neq 0$ и $u(r)$ имеет m нулей, отличных от $r=0$, то

$$\lim_{k\to 0} \delta_0(k^2) = m\pi \quad \text{и} \quad \lim_{k\to 0} \frac{\delta_0(k^2) - m\pi}{k} = \lim_{r\to\infty} \frac{u(r) - ru'(r)}{u'(r)},$$

(b) если $\lim\limits_{r\to\infty} u'(r) = 0$ и $u(r)$ имеет m нулей, отличных от $r=0$, то

$$\lim_{k\to 0} \delta_0(k^2) = (m + 1/2)\pi.$$

Доказательство. Воспользуемся уравнениями (122) и (123). Выберем R так, чтобы все нули u лежали в $(0, R)$ и чтобы $V(r) = 0$ при $r > R$. В частности, $u(r) = a(r - R) + b$ для $r > R$. Поскольку у $u(r)$ нет нулей на (R, ∞), имеем $a/b = u'(R)/u(R) \geqslant 0$. Пусть $\varphi_E(r)$ — решение уравнения (114), удовлетворяющее условиям $\varphi_E(0) = 0$ и $\varphi'_E(0) = 1$. Записывая дифференциальное уравнение как интегральное, видим, что $\varphi_E(r) \to \varphi_0(r)$ при $E \to 0$ равномерно в интервале $[0, R+1]$. В частности, для некоторого E_0 функция $\varphi_E(r)$ имеет m нулей на $[0, R)$, если $E < E_0$ и $\varphi_E(R)^{-1}\varphi'_E(R) \to a/b$. По доказательству теоремы XI.54, $\delta_0(E)$ определяется уравнением (122)

$$k \operatorname{ctg}(k\rho + d(\rho, k)) = \varphi'_E(\rho)/\varphi_E(\rho),$$

где функция $d(\cdot, k)$ непрерывна, $d(0, k) = 0$, $d(R, k) = \delta_0(k^2)$. Очевидно, что в каждой точке ρ, в которой $\varphi_E(\rho)$ исчезает, величина $k\rho + d(\rho, k)$ должна принимать одно из следующих значений: $0, \pm\pi, \ldots$. Более того, в силу (123), в каждой такой точке $(\partial/\partial\rho)\, d(\rho, k) = 0$, так что $(\partial/\partial\rho)(k\rho + d(\rho, k)) > 0$ Итак,

$$m\pi \leqslant kR + d(R, k) < (m+1)\pi, \tag{124}$$

если $k < E_0$. Величина $d(R, k) = \delta_0(k^2)$, таким образом, однозначно определяется по (122) и (124). Если $u'(R) = \lim\limits_{r\to\infty} u(r) \neq 0$, то для всех малых E имеем $\varphi'_E(R)/\varphi_E(R) = {}^1/_2 u'(R)/u(R) > 0$, так что, в силу (122), $\operatorname{ctg}(kR + d(R, k)) \to \infty$ при $k \to 0$. Это совместимо с неравенством (124) только тогда, когда $kR + d(k, R) \to m\pi$. С другой стороны, в силу интегрального уравнения, $\varphi'_E(R)$ есть C^∞-функция по k^2 в точке $k=0$, так что если $u'(R) = 0$, то $\varphi'_E(R)$ обращается в нуль как k^2 при $k = 0$. Итак, в этом случае $\operatorname{ctg}(kR + d(R, k)) \to 0$ по (122), поэтому $kR + d(R, k) \to (m + {}^1/_2)\pi$. Недоказанное утверждение из части (a) оставим читателю (задача 83). ∎

Можно значительно ослабить условия на V из предыдущей теоремы.

Определение. Величина

$$\lim_{r\to\infty}\frac{u(r)-ru'(r)}{u'(r)}=\lim_{k\to 0}\frac{\delta_0(k^2)-\delta_0(0)}{k}$$

называется **длиной рассеяния**. Если $\lim\limits_{r\to\infty} u'(r)=0$, мы говорим, что длина рассеяния бесконечна.

Длина рассеяния a — естественный параметр рассеяния, поскольку, в силу (112), $\lim\limits_{E\to 0} f_{l=0}(E)=a$. Более того, во многих случаях можно показать, что $\sum\limits_{l\geqslant 1} k^{-2}\sin^2\delta_l(k^2)\to 0$ при $k\to 0$, так что $\lim\limits_{E\to 0}\sigma_{tot}(E)=4\pi a^2$ в силу (111).

E. Функции Йоста и теорема Левинсона

Теорема XI.53 связывает фазовый сдвиг с решениями радиального уравнения Шредингера для регулярного V. Чтобы рассмотреть V общего вида, а также систематически исследовать решения уравнения (114), полезно переписать уравнение Шредингера с граничными условиями как интегральное уравнение. Подход, основанный на интегральном уравнении, позволит нам, кроме того, установить связь между числом сферически-симметричных собственных функций и фазовым сдвигом s-волны. Мы рассматриваем лишь случай $l=0$. Литературные ссылки относительно общего случая можно найти в Замечаниях.

Определение. **Интегральным уравнением Шредингера с регулярными граничными условиями в нуле**, или, короче, **регулярным уравнением**, мы называем уравнение

$$f(x)=x+\int_0^x (x-y)\,[V(y)-k^2]\,f(y)\,dy. \tag{125}$$

Определение. Пусть $k\neq 0$. **Интегральным уравнением Шредингера с граничными условиями Йоста на бесконечности**, или, короче, **уравнением Йоста**, мы называем уравнение

$$f(x)=e^{-ikx}-\int_x^\infty \frac{\sin k(x-y)}{k}\,V(y)\,f(y)\,dy. \tag{126}$$

Когда потенциал V достаточно регулярен, например когда он непрерывен, (125) и (126) эквивалентны дифференциальному уравнению Шредингера (114) с соответствующими граничными условиями. Для переписывания дифференциальных уравнений второго порядка с граничными условиями в виде интегральных уравнений существует последовательная процедура, называемая методом вариации параметров (см. дополнение 2).

Теорема XI.56. Предположим, что V — измеримая функция, удовлетворяющая условию $N(x) \equiv \int_0^x y\,|V(y)|\,dy < \infty$ для каждого $x > 0$. Тогда при каждом $k \in \mathbb{C}$ регулярное уравнение (125) имеет единственное решение $\varphi(x, k)$, которое при этом локально ограничено на $(0, \infty)$ и удовлетворяет условию $\overline{\lim\limits_{x\to 0}}\,|x^{-1}\varphi(x)| < \infty$. Более того, $\varphi(x, k)$ непрерывно дифференцируемо по x на $[0, \infty)$, причем $\varphi(0, k) = 0$, $\varphi'(0, k) = 1$, и при каждом фиксированном x функции $\varphi(x, k)$ и $\varphi'(x, k)$ — целые функции от k, удовлетворяющие оценкам

$$|\varphi(x, k)| \leqslant x \exp[N(x) + {}^1/_2\,|k|^2 x^2],$$
$$|\varphi'(x, k)| \leqslant \exp[N(x) + {}^1/_2\,|k|^2 x^2].$$

Кроме того, $\overline{\varphi(x, k)} = \varphi(x, \bar{k})$. Такое φ называется **регулярным решением**.

Доказательство. Пусть $\psi(x) = f(x)/x$; тогда, чтобы решить (125), мы ищем ψ, удовлетворяющее уравнению

$$\psi(x) = 1 + \int_0^x K(x, y)\,\psi(y)\,dy, \tag{127}$$

где $K(x, y) = y(1 - y/x)(V(y) - k^2)$. Итерируя (127), получаем формальный ряд

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x), \tag{128}$$

где

$$\psi_0(x) = 1, \quad \psi_n(x) = \int_0^x K(x, y)\,\psi_{n-1}(y)\,dy.$$

Докажем по индукции, что

$$|\psi_n(x)| \leqslant (n!)^{-1} P(x)^n, \tag{129}$$

где $P(x) = N(x) + {}^1/_2\,|k|^2 x^2$. Неравенство (129) с очевидностью справедливо при $n = 0$. Если $0 \leqslant y \leqslant x$, то $|K(x, y)| \leqslant y(|V(y)| +$

$+|k^2|)$, поэтому если ψ_n удовлетворяет (129), то

$$|\psi_{n+1}(x)| \leqslant \int_0^x y(|V(y)|+|k|^2)(n!)^{-1}P(y)^n\,dy =$$

$$= (n!)^{-1}\int_0^x (P(y))^n \frac{dP}{dy}\,dy = [(n+1)!]^{-1}(P(x))^{n+1},$$

и (129) доказано.

Мы заключаем, что ряд (128) сходится равномерно на компактах по x и k. Поскольку каждое $\psi_n(x)$ аналитично по k (это полином!), то аналитична по k и предельная функция. ψ удовлетворяет уравнению (127), так что φ удовлетворяет уравнению (125). Оценка на φ следует из (129). Аналитичность φ' по k и оценка на φ' следуют из формулы

$$\varphi'(x, k) = 1 - \int_0^x y(V(y)-k^2)\,\psi(y, k)\,dy$$

и оценки (129). Доказательство единственности мы оставляем читателю (задача 84). ∎

Теорема XI.57. Предположим, что V — измеримая функция, удовлетворяющая условию $\int_x^\infty |V(y)|\,dy < \infty$ для каждого $x > 0$. Определим $Q_k(x)$ равенством

$$Q_k(x) = \int_x^\infty (1+|k|y)^{-1}\,4y\,|V(y)|\exp[(\operatorname{Im}k + |\operatorname{Im}k|)\,y]\,dy.$$

Тогда:

(a) Для каждого $k \in \mathbb{C}$, такого, что $\operatorname{Im}k \leqslant 0$ и $k \neq 0$, уравнение Йоста (126) имеет единственное решение $\eta(x, k)$, удовлетворяющее при этом условию $\lim\limits_{x\to\infty}|e^{ikx}\eta(x, k)| < \infty$. Более того, $\eta(x, k)$ непрерывно дифференцируемо по x на полуоси $[0, \infty)$, причем $\lim\limits_{x\to\infty} e^{ikx}\eta(x, k) = 1$ и $\lim\limits_{x\to\infty} e^{ikx}\eta'(x, k) = -ik$. Для каждого фиксированного x функции $\eta(x, k)$ и $\eta'(x, k)$ аналитичны в области $\{k \mid \operatorname{Im}k < 0\}$, непрерывны в области $\{k \mid \operatorname{Im}k \leqslant 0, k \neq 0\}$ и удовлетворяют оценкам

$$|\eta(x, k) - e^{-ikx}| \leqslant e^{(\operatorname{Im}k)x}\,|e^{Q_k(x)} - 1|, \tag{130a}$$

$$|\eta'(x, k) + ike^{-ikx}| \leqslant e^{(\operatorname{Im}k)x}\,e^{Q_k(x)}\int_x^\infty |V(y)|\,dy. \tag{130b}$$

(b) Если помимо этого $\int_0^\infty x|V(x)|dx < \infty$, то $\eta(x, k)$ может быть продолжена до точки $k=0$ таким образом, что она станет непрерывной в области $\{k \mid \operatorname{Im} k \leqslant 0\}$. Более того, при этом сохранятся оценки (130).

(c) Если помимо этого $\int_x^\infty e^{my}|V(y)|dy < \infty$, то $\eta(x, k)$ может быть при каждом x продолжена до функции, аналитической в области $\{k \mid \operatorname{Im} k < m/2\}$. Более того, при этом сохранятся оценки (130).

В каждом из этих случаев $\overline{\eta(x, k)} = \eta(x, -\bar{k})$. Такое η называется **решением Йоста.**

Доказательство. Идея доказательства совершенно аналогична доказательству теоремы XI.56, так что мы дадим лишь набросок, оставляя детали читателю (задача 85). Уравнение (126) формально решается рядом

$$\eta(x, k) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(x, k),$$

где $\eta_0(x, k) = e^{-ikx}$ и

$$\eta_n(x, k) = \int_x^\infty k^{-1}[\sin k(y-x)]V(y)\eta_{n-1}(y, k)\,dy.$$

Из оценки

$$\frac{|\sin k(x-y)|}{|k|} \leqslant \frac{4y}{1+|k|y}\exp[|\operatorname{Im} k|y + (\operatorname{Im} k)x], \quad y \geqslant x \geqslant 0,$$

по индукции получаем неравенство

$$|\eta_n(x, k)| \leqslant (n!)^{-1} Q_k(x)^n.$$

Если $k^{-1}\sin k(x-y)$ при $k=0$ понимать как $(x-y)$, то эти оценки продолжают выполняться, когда $k=0$. Каждая итерация, как легко видеть, аналитична во внутренности области, где $Q_k(1) < \infty$, и непрерывна на ее границе. Утверждения теоремы доказываются суммированием рядов. ▌

Определим теперь функцию Йоста, которая, как мы увидим, тесно связана с амплитудой рассеяния.

Теорема XI.58. Пусть V удовлетворяет неравенству.

$$\int_0^x |y||V(y)|dy + \int_x^\infty |V(y)|dy < \infty$$

для каждого x. Тогда:

(a) $\eta(k)\equiv\eta(x, k)\varphi'(x, k)-\eta'(x, k)\varphi(x, k)$ не зависит от x; $\eta(k)$ называется **функцией Йоста**;

(b) $\eta(k)$ аналитична в области $\{k \mid \operatorname{Im} k<0\}$ и непрерывна в $\{k \mid \operatorname{Im} k\leqslant 0, \quad k\neq 0\}$; если V удовлетворяет оценке $\int_1^\infty e^{my}|V(y)|\,dy<\infty$ для некоторого $m>0$, то $\eta(k)$ аналитична в области $\{k \mid \operatorname{Im} k<{}^1/_2 m\}$;

(c) если k вещественно и отлично от нуля, то $\eta(k)\neq 0$, $\eta(-k)=\overline{\eta(k)}$ и $\eta(k)/\eta(-k)=e^{2i\delta_0(k^2)}$, где $\delta_0(k^2)$ — фазовый сдвиг s-волны;

(d) все нули $\eta(k)$ в области $\{k \mid \operatorname{Im} k<0\}$ простые; они лежат на мнимой оси, и k есть нуль тогда и только тогда, когда k^2 — энергия связанного состояния при $l=0$;

(e) $\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ \operatorname{Im} k\leqslant 0}}\eta(k)=1$.

Доказательство. (a) Предположим сначала, что $V\in C_0^\infty(0, \infty)$. Тогда как η, так и φ удовлетворяют дифференциальному уравнению $-u''+Vu=k^2u$, так что величина $\eta\varphi'-\eta'\varphi$ постоянна, поскольку она равна вронскиану двух решений (явное вычисление показывает, что $(\eta\varphi'-\eta'\varphi)'=0$). Если V — произвольный потенциал, удовлетворяющий условию теоремы, то можно найти такие $V_n\in C_0^\infty$, что $\int_0^1 y|V_n-V|\,dy+\int_1^\infty |V_n-V|\,dy\to 0$ при $n\to\infty$. По построению φ и η, заключаем, что поточечно $\varphi_n\to\varphi$, $\varphi_n'\to\varphi'$, $\eta_n\to\eta$, $\eta_n'\to\eta'$, так что (a) выполняется и в общем случае. Доказательство нашего утверждения о том, что η называется функцией Йоста, см. в Замечаниях.

(b) Это следует из свойств аналитичности функций φ, φ', η, η', полученных в теоремах XI.56 и XI.57.

(c) Поскольку $\overline{\varphi(x, k)}=\varphi(x, k)=\varphi(x, -k)$ и $\overline{\eta(x, k)}=\eta(x, -k)$, когда k вещественно, заключаем, что $\eta(-k)=\overline{\eta(k)}$. Далее утверждается, что

$$\varphi(x, k)=(2ik)^{-1}\{\eta(k)\eta(x, -k)-\eta(-k)\eta(x, k)\}. \tag{131}$$

Докажем (131) и основное соотношение $\eta(k)/\eta(-k)=e^{2i\delta_0}$ для $V\in C_0^\infty(0, \infty)$. Общий случай получается предельным переходом, как в доказательстве части (a). Предположим, что $\operatorname{supp} V\subset[a, b]$, $0<a<b<\infty$. Тогда $\varphi(\cdot, k)$, $\eta(\cdot, k)$ и $\eta(\cdot, -k)$ все будут решениями уравнения $-u''+Vu=k^2u$. Более того, при $x>b$ имеем $\eta_\pm(x)\equiv\eta(x, \pm k)=e^{\pm ikx}$, так что $\eta_\pm$ линейно независимы и их вронскиан $W(\eta_+, \eta_-)=\eta_+\eta_-'-\eta_-\eta_+'$ равен $2ik$. Следовательно,

$$\varphi = W(\eta_+, \eta_-)^{-1}[W(\eta_+, \varphi)\eta_- - W(\eta_-, \varphi)\eta_+],$$

а это и есть (131).

Из (131), свойства $\eta(k) = \overline{\eta(-k)}$ и того, что φ не есть тождественный нуль, вытекает, что $\eta(k) \neq 0$. Более того, поскольку $\eta_\pm(x) = e^{\pm ikx}$ для $x > b$, мы видим, что

$$\varphi(x) = k^{-1}|\eta(k)|\sin(kx + d(k))$$

при $x > b$, если $\eta(k) = |\eta(k)|e^{id(k)}$. В силу теоремы XI.53, тогда $d(k) = \delta_0(k^2) \pmod{2\pi}$.

(d) Сначала мы утверждаем, что $(-\Delta + V - k^2)(x^{-1}\varphi(x, k)) = 0$, где $-\Delta$ следует понимать в смысле дифференцирования обобщенных функций. Действительно, это равенство выполняется, если $V \in C_0^\infty(0, \infty)$, а тогда, в силу предельного перехода, и для V общего вида. Если $\eta(k) = 0$, то φ отличается от $\eta(x, k)$ постоянным множителем, а потому лежит в L^2 на бесконечности. Итак, k чисто мнимое, а k^2 — собственное значение.

Обратно, предположим, что $V \in C_0^\infty$ и что k^2 — собственное значение оператора $-\Delta + V$ при $l = 0$. Так как V убывает экспоненциально, то η — целая функция, поэтому (131) выполняется для всех k. Тогда после аналитического продолжения равенства (131) заключаем, что $\eta(k) = 0$ С помощью предельного перехода это распространяется на все V.

Наконец, нам следует показать, что нули η простые. Заметим сначала, что если $u = x^{-1}\varphi$ и $v = x^{-1}\partial\varphi/\partial k$, то

$$(-\Delta + V - k^2)u = 0, \qquad (132a)$$

$$(-\Delta + V - k^2)v = 2ku \qquad (132b)$$

в смысле обобщенных функций. Более того, можно показать, что если $\eta(k_0) = \overline{(\partial\eta/\partial k)}(k_0) = 0$, то

$$\frac{\partial\varphi}{\partial k} = c_1\eta + c_2\frac{\partial\eta}{\partial k},$$

так что $v \in L^2$. Но если $u, v \in L^2$, то равенства (132) несовместимы с $u \neq 0$, поскольку

$$2k\|u\|^2 = (u, (-\Delta + V - k^2)v) = 0.$$

Итак, если $\eta(k_0) = 0$, то $\partial\eta/\partial k \neq 0$ в точке k_0, так что нули η простые.

(e) В силу (130a) и равенства $\eta(k) = \eta(0, k)$,

$$|\eta(k) - 1| \leqslant |\exp Q_k(0) - 1|,$$

если $\operatorname{Im} k \leqslant 0$. Поэтому достаточно доказать, что

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_0^\infty \frac{y\,|V(y)|}{1+|k|\,y}=0,$$

а это следует из теоремы о монотонной сходимости. ▌

Один из наиболее эффектных результатов применения техники функции Йоста представляет собой следующая

Теорема XI.59 (теорема Левинсона). Пусть V удовлетворяет условию $\int\limits_0^\infty x\,|V(x)|\,dx<\infty$, и пусть η — функция Йоста, а δ_0 — фазовый сдвиг s-волны, нормированный условием $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_0(k^2)=0$. Тогда

$$\delta_0(0)=\begin{cases} n_0\pi, & \text{если } \eta(0)\neq 0,\\ (n_0+1/2)\,\pi, & \text{если } \eta(0)=0,\end{cases}$$

где n_0 — число собственных значений оператора $-\Delta+V$, которым отвечают сферически-симметричные собственные функции.

Доказательство. Мы рассмотрим случай $\eta(0)\neq 0$. Случай $\eta(0)=0$ отнесен к задачам. В силу (131), $k^2<0$ для всех собственных

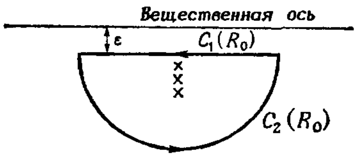


Рис. XI.10. Контур интегрирования в теореме Левинсона.

функций, отвечающих $l=0$, так что, по теореме XI.58 (d), n_0 — число нулей $\eta(k)$ в нижней полуплоскости. Пусть $0<\theta<\pi/2$. Выберем R_0 так, чтобы $|\eta(k)-1|<2\sin(\theta/2)$ при $|k|\geqslant R_0$, $\operatorname{Im} k\leqslant 0$. По теореме XI.58(e) такое R_0 существует. Рассмотрим интеграл от η'/η по замкнутому контуру $C=C_1\cup C_2$, представленному на рис. XI.10. Полюсы η'/η — это нули η, а поскольку эти нули простые, соответствующие вычеты равны 1. Итак,

$$n_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_C \frac{\eta'}{\eta}\,dz.$$

Далее, $i^{-1}\eta'/\eta=d(\arg\eta)/dz$, так что в пределе при $\varepsilon\to 0$ вклад от C_1 равен $\pi^{-1}(\delta_0(0)-\delta_0(R_0^2))$. Поскольку $|\arg\eta|<\theta$ на всем $C_2(R_0)$ в силу выбора R_0, мы заключаем, что

$$|\pi^{-1}[\delta_0(0)-\delta_0(R_0^2)]-n_0|\leqslant 2\theta.$$

Переходя к $R_0\to\infty$, $\theta\to 0$, видим, что $\delta_0(0)=n_0\pi$. ▌

В § 7 мы убедились в том, что полюсы в верхней полуплоскости амплитуды рассеяния вперед могут располагаться только в тех точках k, для которых k^2 — собственное значение оператора $-\Delta+V$. Формула

$$f_{l=0}(k^2)=2ik^{-1}(\eta(k)-\eta(-k))/\eta(-k),$$

которая следует из теоремы XI.58(c), вместе с тем фактом, что нулями $\eta(-k)$ могут быть только те точки, в которых k^2 — собственное значение, наводит на мысль, что полюсы $f_{l=0}(k^2)$ в верхней полуплоскости также отвечают только связанным состояниям. Это неверно. Прежде всего для потенциалов общего вида области аналитичности $\eta(k)$ и $\eta(-k)$ не пересекаются, и для $f_{l=0}$ может не существовать аналитического продолжения. Кроме того, может случиться, что $\eta(k)$ обладает мероморфным продолжением в верхнюю полуплоскость с полюсами в некоторых точках. Эти полюсы породят полюсы для $f_{l=0}$, которые не соответствуют связанным состояниям. Это явление будет рассмотрено в следующей части.

F. Аналитичность парциальных амплитуд для обобщенного потенциала Юкавы

В § 7 мы видели, что полная амплитуда рассеяния $f(E, \cos\theta)$ обладает свойствами аналитичности по E при $\cos\theta=1$ в достаточно общих предположениях. Аналитичность же при $\theta\neq 0$ требовала экспоненциального убывания. Не удивительно тогда, что свойства аналитичности для $f_0(k)$ — амплитуды s-волны — также требуют экспоненциального убывания. На основе результатов части E формул $s_0(k^2)=\eta(k)/\eta(-k)$ и $f_0(k^2)=(2ik)^{-1}[s_0(k^2)-1]$ видим, что справедлива

Теорема XI.60. Если $\int_1^\infty e^{my}|V(y)|\,dy+\int_0^1 y|V(y)|\,dy<\infty$, то парциальная амплитуда s-волны вещественно аналитична на $(0, \infty)$ и имеет мероморфное продолжение с верхнего берега вещественной положительной полуоси в параболическую область $\{E \mid |E|-\operatorname{Re}E\leqslant m^2/2,\ E$ не есть положительное вещественное число$\}$ (см. рис. XI.11), причем положения полюсов этого продолжения отвечают в точности энергиям связанных состояний в области $E>-m^2/4$.

Доказательство. Пусть $G(k)=\eta(k)/\eta(-k)$. Тогда G аналитична в области $|\operatorname{Im}k|\leqslant m/2$. В области $\operatorname{Im}k>0$ функция $G(k)$ может иметь полюсы лишь тогда, когда $\eta(-k)=0$. Если $\eta(-k)=0$, то, в силу аналитического продолжения равенства (131), $\eta(k)\neq 0$. Итак, G имеет полюсы в точности в нулях $\eta(-k)$. Теорема следует теперь из формулы $f_0(E)=(2i\sqrt{E})^{-1}[G(\sqrt{E})-1]$. ∎

Для обобщенных потенциалов Юкавы, определенных в § 7, можно утверждать гораздо больше (μ_0 — константа из определения обобщенных потенциалов Юкавы).

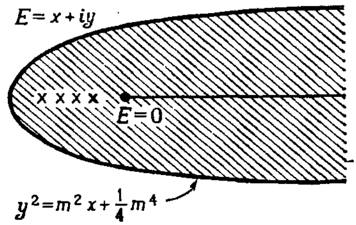


Рис. XI.11. Область аналитичности $f_0(E)$ в общем случае.

Теорема XI.61. Пусть $f_0(E)$ — амплитуда рассеяния s-волны для обобщенного потенциала Юкавы. Тогда существует функция $F(E)$, мероморфная в $D=\mathbb{C}\setminus([0, \infty)\cup(-\infty, -(\mu_0/2)^2])$ и такая, что для $E\in(0, \infty)$

$$f_0(E)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0} F(E+i\varepsilon).$$

Полюсы F, *лежащие в* D, встречаются лишь на отрицательной полуоси и только в точках, отвечающих энергиям связанных состояний, причем каждой такой энергии в интервале $(-(\mu_0/2)^2, 0)$ отвечает некоторый полюс Кроме того, $f_0(E)$ вещественно аналитична на $(0, \infty)$.

Прежде чем обратиться к доказательству теоремы XI.61, сделаем ряд замечаний, одно из которых объясняет, почему в теореме речь идет только о полюсах *в* D. Во-первых, можно доказать, что f аналитична в $\mathbb{C}\setminus([0, \infty)\cup(-\infty, -\mu_0^2])$. Во-вторых, на самом деле мы докажем больше, чем утверждается в теореме. Будет показано, что функция $G(k)$, определенная равенством $G(k)=F(k^2)$ при $\operatorname{Im} k>0$, обладает мероморфным продолжением в область $\mathbb{C}\setminus([{}^1/_2 i\mu_0, i\infty)\cup(-i\infty, -{}^1/_2 i\mu_0])$ (см. рис. XI.12). В результате видно, что разрез от 0 до ∞ у $F(E)$ обусловлен только выбором переменной $E=k^2$, и возможен переход на второй лист за этот разрез. Полюсы $F_0(E)$ на втором листе с $\operatorname{Im} E\neq 0$ (эквивалентно, полюсы $G(k)$ в точках с $\operatorname{Re} k\neq 0$, $\operatorname{Im} k<0$) называются **резонансными полюсами**; можно показать, что они в точности отвечают резонансам, которые будут рассмотрены в § XII.6, поскольку обобщенные потенциалы Юкавы аналитичны относительно масштабных преобразований, Полюсы, отвечающие точкам $k\in(-{}^1/_2 i\mu_0, 0)$, называются **антисвязанными состояниями**.

Поскольку разрез по $[0, \infty)$ обусловлен только использованием переменной E вместо k, его часто называют **кинематическим разрезом**. Иногда его называют также **унитарным разрезом**, поскольку скачок на нем определяется соотношением унитарности

$$F(E+i0)-F(E-i0)=2\,\mathrm{Im}\,f_0(E)=E^{1/2}\,|f_0(E)|^2$$

Разрез по $(-\infty, -(^1/_2\mu_0)^2)$ непосредственно связан с потенциалом в том смысле, что скачки на нем могут быть вычислены по некоторой итерационной схеме исходя непосредственно из потенциала (см. Замечания). Этот разрез называют **динамическим разрезом.**

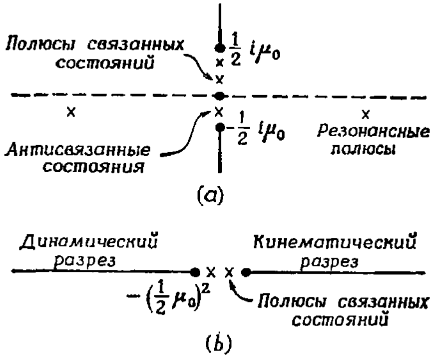


Рис. XI.12. (a) Область аналитичности $G(-k)$. (b) Область аналитичности $F(E)$.

Иногда вместо слов «динамический и кинематический разрезы» употребляются термины **левый разрез** и **правый разрез.**

И наконец, отметим одно тонкое место. Может случиться, что левый разрез частично «вырождается в полюсы», иными словами, что $F(E)$ имеет мероморфное продолжение в область, включающую интервал $(-a, -(^1/_2\mu_0)^2)$, $a>(^1/_2\mu_0)^2$, с полюсами в этой области. Эти полюсы могут не отвечать связанным состояниям; по этой причине их часто называют **ложными полюсами.** На самом деле существуют различные обобщенные потенциалы Юкавы V_1 и V_2, для которых соответствующие s-волновые парциальные амплитуды равны, но которые различаются тем, что все полюсы функции $F(E)$ соответствуют связанным состояниям оператора $-\Delta+V_1$, в то время как самый левый из них не соответствует связанному состоянию оператора $-\Delta+V_2$, а обусловлен его динамическим разрезом! Этот пример особенно удивителен из-за теоремы Левинсона, которая говорит нам, что функция $F(E+i0)$ определяет число связанных состояний, а потому, как можно было бы ожидать, и число полюсов связанных состояний. Тонкость состоит в том, что если энергия связанного состояния не лежит в интервале $(-a, (^1/_2\mu_0)^2)$, то ожидаемый там полюс может иметь нулевой вычет. Итак, хотя операторы $-\Delta+V_1$ и $-\Delta+V_2$ имеют одно и то же число связанных состояний при нулевом угловом моменте, они имеют разные числа «полюсов связанных состояний».

На протяжении всего доказательства теоремы XI.61 мы будем предполагать, что V имеет вид $V(x)=x^{-1}e^{-\mu_0 x}$. Распространение доказательства на обобщенные потенциалы Юкавы является простым упражнением. Основная идея состоит в использовании аналитичности $V(x)$ в области $\{x \mid \operatorname{Re} x>0\}$ для продолжения функции Йоста $\eta(k)$ по k. Таким образом, имеется тесная связь между этими идеями и идеями аналитического продолжения по масштабным преобразованиям из § XII.6 и XIII.10. Продолжение $\eta(k)$ мы осуществим в два приема.

Лемма 1. Функция $\eta(x, k)$, первоначально определенная на $\{\langle x, k\rangle \mid x\in(0, \infty), \operatorname{Im} k\leqslant 0\}$, может быть продолжена в область $\Omega=\{\langle x, k\rangle \mid \operatorname{Re} x>0, \operatorname{Im} k\leqslant 0\}$ таким образом, что она станет аналитической по совокупности переменных x и k в Ω^{int} и непрерывной в Ω. Более того, в Ω она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\frac{d^2}{dx^2}\eta(x, k)+V(x)\eta(x, k)=k^2\eta(x, k),$$

а в области $\Omega'=\{\langle x, k\rangle\in\Omega \mid |x|>1\}$ — оценке

$$|\eta(x, k)-e^{-ikx}|\leqslant e^{\operatorname{Im}(kx)}\{\exp[\mu_0^{-1}|k|^{-1}e^{-\mu_0 \operatorname{Re} x}]-1\} \qquad (133)$$

Доказательство. Мы покажем, что η может быть продолжена на Ω' с сохранением оценки (133). Тем же методом можно продолжить η на область $\{\langle x, k\rangle\in\Omega \mid |x|>\varepsilon\}$, а тогда и на всю Ω. Поскольку дифференциальное уравнение имеет место для вещественных x, оно выполняется и для всех x по аналитическому продолжению. Фиксируем k с $\operatorname{Im} k\leqslant 0$. Определим $\eta_n(x, k)$ на Ω' индуктивно, полагая

$$\eta_0(x, k)=e^{-ikx},$$

$$\eta_n(x, k)=\int_0^\infty k^{-1}(\sin ky)V(y+x)\eta_{n-1}(y+x, k)\,dy.$$

Замена переменной интегрирования показывает, что $\eta_n(x, k)$ при вещественных x совпадают с функциями, введенными при доказательстве теоремы XI.57. Далее, на Ω' выполняются следующие оценки:

$$|\eta_n(x, k)|\leqslant(n!)^{-1}e^{\operatorname{Im}(kx)}(\mu_0|k|)^{-n}e^{-n\mu_0 \operatorname{Re} x}. \qquad (134)$$

Неравенство (134), конечно, выполнено для $n=0$, а если оно выполняется для некоторого n, то

$$|\eta_{n+1}(x, k)|\leqslant(n!)^{-1}(\mu_0|k|)^{-n}\int_0^\infty |k|^{-s}e^{y|\operatorname{Im} k|}e^{-\mu_0(\operatorname{Re} x+y)(n+1)}\times$$
$$\times e^{\operatorname{Im}(kx)+(\operatorname{Im} k)y}\,dy=[(n+1)!]^{-1}(\mu_0|k|)^{-n-1}e^{-(n+1)\mu_0 \operatorname{Re} x},$$

поскольку $|\operatorname{Im} k|+\operatorname{Im} k=0$, когда $\operatorname{Im} k\leqslant 0$, а $(x+y)^{-1}\leqslant 1$, когда $|x|>1$, $\operatorname{Re} x>0$, $y\in(0, \infty)$. Это доказывает (134) по индукции.

В силу (134), интеграл, определяющий η_n, сходится абсолютно, так что функции η_n аналитичны в $(\Omega')^{\text{int}}$. Поскольку ряд $\sum\limits_n \eta_n$ абсолютно сходится по (134), его предел обладает требуемыми свойствами аналитичности и удовлетворяет оценке (133). ∎

Лемма 2. Функция Йоста $\eta(k)$ допускает аналитическое продолжение на $\mathbb{C}\setminus[{}^1/_2 i\mu_0, i\infty)$.

Доказательство. Поскольку мы уже знаем из теоремы XI.58, что $\eta(k)$ аналитична в области $\{k \mid \operatorname{Im} k\leqslant {}^1/_2\mu_0\}$, нам нужно только доказать, что $\eta(k)$ обладает аналитическим продолжением на каждую полуплоскость вида $\{k \mid \operatorname{Im}(e^{-i\alpha}k)\leqslant 0\}$ для каждого $\alpha\in(-\pi/2, \pi/2)$. Фиксируем такое α и определим функцию $\tilde\eta$ на $\{\langle y, k\rangle \mid y\in\mathbb{R}, \operatorname{Im} k\leqslant 0\}$, полагая

$$\tilde\eta(y, k)=\eta(e^{-i\alpha}y, k),$$

где $\eta(x, k)$ продолжена на комплексные x с помощью леммы 1. Тогда $\tilde\eta$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(-\frac{d^2}{dy^2}+\tilde V(y)\right)\tilde\eta(y, k)=\tilde k^2\tilde\eta(y, k), \tag{135}$$

где $\tilde V(y)=e^{-2i\alpha}V(e^{-i\alpha}y)$ и $\tilde k=e^{-i\alpha}k$. Более того, согласно оценке (133),

$$|\tilde\eta(y, k)-e^{-i\tilde k y}|\to 0 \tag{136}$$

при $y\to\infty$, коль скоро $\operatorname{Im}\tilde k\leqslant 0$, $\operatorname{Im} k\leqslant 0$. При доказательстве теоремы XI.57 вещественность V нигде не была использована, поэтому мы знаем, что уравнение (135) имеет единственное решение $\eta_1(y, \tilde k)$ в области $\{\langle y, k\rangle \mid y\in[0, \infty), \operatorname{Im}\tilde k\leqslant 0\}$, удовлетворяющее (136). Итак, $\tilde\eta(y, k)$ и $\eta_1(y, e^{-i\alpha}k)$ совпадают в области $\{k \mid \operatorname{Im} k\leqslant 0, \operatorname{Im}(e^{-i\alpha}k)\leqslant 0\}$, значит, η_1 — аналитическое продолжение $\tilde\eta$ на область $\{k \mid \operatorname{Im}(e^{-i\alpha}k)\leqslant 0\}$. В частности, функция $\eta(k)=\tilde\eta(0, k)$ допускает продолжение на эту область. ∎

Доказательство теоремы XI.61. Поскольку $f_0(k^2)=(2ik)^{-1}\times[e^{2i\delta_0(k)}-1]$, достаточно доказать утверждения об аналитичности для функции $s_0(k)=e^{2i\delta_0(k)}$. Но $s_0(k)=\eta(k)/\eta(-k)$, поэтому $s_0(k)$ мероморфна в $D=\{k \mid k\notin[{}^1/_2 i\mu_0, \infty)\cup(-\infty, -{}^1/_2 i\mu_0]\}$ и полюсы в $D\cap\{k \mid \operatorname{Im} k>0\}$ возникают лишь в точках k_0, для которых $\eta(-k_0)=0$. Более того, как и при доказательстве теоремы XI.60, полюсы отвечают всем таким k_0. ∎

G. Вариационный принцип Кона

При обсуждении метода переменной фазы мы ввели важный параметр: длину рассеяния, через которую при определенных предположениях выражается сечение: $\lim\limits_{E\to 0}\sigma_{\text{tot}}(E)=4\pi a^2$. Напомним, что длина рассеяния для потенциалов V с компактным носителем была определена путем построения должным образом нормированного решения уравнения $-\varphi''+V\varphi=0$, $\varphi(0)=0$, при условии $\varphi(r)=r+a$ для больших r. Рассмотрим вещественнозначные функции ψ на $[0, \infty)$ вида

$$\psi=\alpha r+\beta+g, \quad \psi(0)=0, \tag{136a}$$

с гладкой функцией g, убывающей вместе со своими производными g', g'' быстрее любого полинома. Пусть Q — множество таких функций, и пусть $\alpha(\psi)$, $\beta(\psi)$ — константы в (136a).

Для ψ, $\eta\in Q$ можно определить естественный объект:

$$(\psi,\ h\eta)=\int\limits_0^\infty \psi(r)(-\eta''(r)+V(r)\eta(r))\,dr,$$

поскольку $\psi(-\eta'')$ лежит в L^1. Однако $(\psi,\ h\eta)$ и $(\eta,\ h\psi)$ не совпадают; на самом деле

$$(\psi,\ h\eta)-(\eta,\ h\psi)=\int\limits_0^\infty(\psi''\eta-\psi\eta'')\,dr=\alpha(\psi)\beta(\eta)-\beta(\psi)\alpha(\eta), \tag{136b}$$

поскольку граничные члены не исчезают на бесконечности. Возьмем η равным φ — решению уравнения $h\varphi=0$, и предположим, что ψ таково, что $\alpha(\psi)=1$. Тогда $(\psi,\ h\eta)=0$ и

$$\begin{aligned}a&=\beta(\psi)-(h\psi,\ \varphi)=\beta(\psi)-(h\psi,\ \psi)+(h\psi,\ (\psi-\varphi))=\\&=\beta(\psi)-(h\psi,\ \psi)+(h(\psi-\varphi),\ (\psi-\varphi)).\end{aligned}$$

Уравнение

$$a=\beta(\psi)-(h\psi,\ \psi)+(h(\psi-\varphi),\ (\psi-\varphi)) \tag{136c}$$

называется **вариационным принципом Кона**. В некоторых случаях его можно применять для получения строгой оценки длины рассеяния.

Теорема XI.61½ (оценка Розенберга — Шпруха). Предположим, что потенциал $V\in C_0^\infty$ централен и что оператор $-\Delta+V$ не имеет отрицательных собственных значений. Пусть ψ — произвольная функция из Q с $\alpha(\psi)=1$. Тогда длина рассеяния a удовлетворяет неравенству

$$a\geqslant\beta(\psi)-(h\psi,\ \psi). \tag{136d}$$

Доказательство. По вариационному принципу Кона (136c), достаточно показать, что $(h\eta, \eta) \geqslant 0$ для $\eta \in Q$ с $\alpha(\eta) = 0$. Пусть $g \in C^\infty[0, \infty)$, причем $g = 1$ (соответственно $g = 0$) при $r < 1$ (соответственно $r > 2$), и пусть $g_R(x) = g(x/R)$. Тогда $\eta g_R \in L^2$, так что $0 \leqslant (g_R\eta, h(g_R\eta))$ по предположению об отсутствии отрицательных собственных значений. Но $(g_R\eta, h(g_R\eta)) = X + Y + Z$, где

$$\begin{aligned} X &= (g_R^2\eta, h\eta) \to (\eta, h\eta) && \text{при} \quad R \to \infty, \\ Y &= -(g_R\eta, \eta g_R'') \to 0 && \text{при} \quad R \to \infty, \\ Z &= -2(g_R\eta, (\nabla\eta)\nabla g_R) \to 0 && \text{при} \quad R \to \infty, \end{aligned}$$

где все утверждения о сходимостях следуют из оценок $h\eta \leqslant d_1(1+r)^{-2}$, $\eta \leqslant d_2$, $\nabla\eta \leqslant d_3(1+r)^{-2}$, $\|g_R''\|_\infty \leqslant d_4 R^{-2}$ и $\|g_R'\|_\infty \leqslant d_5 R^{-1}$. Следовательно, $(\eta, h\eta) \geqslant 0$. ∎

Верхнюю или нижнюю оценку на a^2 дает (136d), зависит от того, положительно или отрицательно a. Например, согласно следствию 3 теоремы XI.54 и теореме XI.55, если V всюду неотрицателен, то (136 d) дает верхнюю оценку на a^2.

Дополнение 1 к § XI.8. Полиномы Лежандра и сферические функции Бесселя

Теория рассеяния требует сведений о некоторых классах специальных функций. Основные свойства полиномов Лежандра проще всего вывести, определив эти полиномы с помощью производящей функции.

Определение. Для каждого $z \in \mathbb{C}$ функция

$$F(x, z) = (1 - 2zx + x^2)^{-1/2}$$

аналитична вблизи $x = 0$. **Полиномы Лежандра** $P_l(z)$ определяются как

$$P_l(z) = (l!)^{-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^l F(x, z)\big|_{x=0},$$

или, что эквивалентно, как

$$(1 - 2xz + x^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(z)\, x^l.$$

Теорема XI.62. (a) $P_l(z)$ — полином степени l с вещественными коэффициентами.

(b) $P_l(1) = 1$, $P_l(-z) = (-1)^l P_l(z)$.

(c) Если f задана на $\mathbb{R}^3$ как $f(\mathbf{x}) = r^l P_l(\cos\theta)$, где $r = |\mathbf{x}|$ и $\cos\theta = x_3/r$, то $-\Delta f = 0$.

(d) (Уравнение Лежандра.)

$$(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}P_l(z)-2z\frac{d}{dz}P_l(z)+l(l+1)P_l(z)=0.$$

(e) $\int\limits_{-1}^{1} P_l(z)P_m(z)dz=\frac{2}{2l+1}\delta_{lm}$.

(f) Набор $\{(l+1/2)^{1/2}P_l(z)\}_{l=0}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в $L^2((-1,\ 1),dz)$.

Доказательство. (а) По биномиальной теореме

$$(1-2xz+x^2)^{-1/2}=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-1/2}{m}(-2xz+x^2)^m$$

для малых x, где $\binom{k}{m}=k(k-1)\ \dots\ (k-m+1)/m!$. Для фиксированного l в $(d/dx)^l F(x,\ z)|_{x=0}$ могут давать вклад только члены с $m\leqslant l$. Применяя биномиальную теорему к $(-2xz+x^2)^m$, видим, что $\sum\limits_{m=0}^{l}\binom{-1/2}{m}(-2xz+x^2)^m$ — полином от двух переменных степени l по z. Более того, $P_l(z)=(-2z)^l\binom{-1/2}{l}+O(z^{l-2})$, так что P_l имеет степень в точности l.

(b) Поскольку $(1-2x+x^2)^{-1/2}=(1-x)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$, мы видим, что $P_l(1)=1$. Из $F(-x,\ -z)=F(x,\ z)$ следует, что $P_l(-z)=(-1)^l P_l(z)$.

(c) Фиксируем $R>0$. В области $\{\langle\mathbf{r},\ \mathbf{r}'\rangle\in\mathbb{R}^6\,|\,r<R<r'\}$ введем функцию $g(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}$. Тогда $-\Delta g=0$ в области $\{\mathbf{r}\,|\,r<R\}$ для фиксированного r'. Пусть $\mathbf{r}'=\langle 0,\ 0,\ \alpha\rangle$ и $x=r/\alpha$. Тогда

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}=(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta)^{-1/2}=(r')^{-1}(1+x^2-2x\cos\theta)^{-1/2}=$$
$$=(r')^{-1}\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)x^l=\sum_{l=0}^{\infty}(r')^{-l-1}r^lP_l(\cos\theta),$$

где мы воспользовались тем, что при $z\in(-1,\ 1)$ ряд для $F(x,\ z)$ имеет единичный радиус сходимости по x. Итак, $r^lP_l(\cos\theta)$ индуктивно задается равенством

$$r^lP_l(\cos\theta)=\lim_{r'\to\infty}(r')^{l+1}\left[g(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')-(r')^{-1}\sum_{k=0}^{l-1}P_k(\cos\theta)\left(\frac{r}{r'}\right)^k\right],$$

где сходимость равномерна в $\{\mathbf{r}\,|\,r<R\}$. Пользуясь индукцией по l и тем, что равномерный предел гармонических функций — гармоническая функция (задача 89), заключаем, что функция $r^lP_l(\cos\theta)$ гармоническая.

(d) Поскольку

$$\Delta = r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + (r^2\sin\theta)^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} + (r^2\sin^2\theta)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

то (d) следует из (c).

(e) Уравнение Лежандра может быть записано в виде

$$\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz}P_l(z) = -l(l+1)P_l(z).$$

Итак. если $l \neq m$, то $\int\limits_{-1}^{1} P_l(z)P_m(z)\,dz = 0$, поскольку оператор $(d/dz)(1-z^2)(d/dz)$ симметричен. Далее, для малых x, с одной стороны, имеем

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(\sum_{l=0}^{\infty} P_l(z)x^l\right)^2 dz = \int\limits_{-1}^{1}(1-2xz+x^2)^{-1}\,dz =$$

$$= x^{-1}[\ln(1+x) - \ln(1-x)] = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{2}{2l+1}x^{2l},$$

а с другой стороны, применяя тот факт, что для малых x и $z \in (-1, 1)$ сходимость $F(x, z)$ равномерна по z, и учитывая соотношения ортогональности, получаем

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(\sum_{l=0}^{\infty} x^lP_l(z)\right)^2 dz = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\int\limits_{-1}^{1}P_l(z)^2\,dz\right)x^{2l}.$$

(f) По теореме Стоуна—Вейерштрасса, множество $\{z^l\}_{l=0}^{\infty}$ тотально в $C(-1, 1)$, а потому и в $L^2(-1, 1)$. Таким образом, набор, который получится применением процедуры Грама—Шмидта к $\{z^l\}_{l=0}^{\infty}$, представляет собой ортонормированный базис. Но этот базис есть $(-1)^l(l+{}^1/_2)^{-1/2}P_l(z)$. ∎

Основное свойство степенных рядов состоит в том, что внутренность области их сходимости всегда есть круг. Это следует из того, что ряд $(z'-z)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n/z'^{n+1}$ сходится в области $|z| < |z'|$, иными словами, когда z и z' могут быть отделены друг от друга окружностью с центром в начале координат. Мы хотим найти естественные области сходимости рядов Лежандра, т. е. рядов вида $\sum\limits_{l=0}^{\infty}(2l+1)a_lP_l(z)$. Важную роль играют функции, возникающие при разложении в ряд Лежандра функции $(z'-z)^{-1}$. Поэтому введем следующее

Определение. **Присоединенные функции Лежандра определяются** в $\mathbb{C}\setminus[-1, 1]$ формулой

$$Q_l(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_l(z')}{z-z'}\,dz'.$$

Областями сходимости рядов Лежандра будут внутренности областей, ограниченных определенными кривыми.

Определение. Пусть $z \in \mathbb{C}\setminus[-1, 1]$. Под **каноническим эллипсом**, проходящим через z, мы понимаем единственный эллипс с фокусами ± 1, который проходит через z.

Теорема XI.63. (a) Пусть z и z' заданы так, что канонический эллипс, проходящий через z, лежит внутри канонического эллипса, проходящего через z'. Тогда

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\,P_l(z)\,Q_l(z') = (z'-z)^{-1}. \qquad (137)$$

Сходимость ряда в (137) равномерна, когда z и z' пробегают соответственно компактные множества C и D, коль скоро существует канонический эллипс E, такой, что C лежит внутри E, а D — вне E.

(b) Если f — функция, аналитическая во внутренности канонического эллипса E, то ряд

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\,a_l P_l(z),$$

где

$$a_l = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(z)\,P_l(z)\,dz, \qquad (138)$$

сходится равномерно на компактных подмножествах в E.

(c) Если a_l — произвольная последовательность и ряд $\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\times$ $\times a_l P_l(z)$ сходится (соответственно расходится) для некоторого $z_0 \in \mathbb{C}\setminus[-1, 1]$, то он абсолютно сходится для всех z внутри канонического эллипса, проходящего через z_0 (соответственно абсолютно расходится для всех z вне этого эллипса).

Доказательство. (a) Докажем сначала, что ряд (137) сходится равномерно, а потом уже установим, что предел действительно равен $(z'-z)^{-1}$. Рассмотрим отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, при котором много точек переходят в одну, а именно $\theta \mapsto z = \cos\theta$. Линии $\operatorname{Im}\theta = c$ переходят при этом в канонические эллипсы (задача 90 a), и при заданном фиксированном z величина $|\operatorname{Im}\theta|$

не зависит от того, какое выбрано $\theta = \arccos z$. Поскольку функция $F(x, z)$ при фиксированном z имеет особенности в точках

$$x = z \pm \sqrt{z^2 - 1} = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta},$$

мы видим, что для фиксированных z ряд $F(x,z)$ имеет радиус сходимости $e^{-|\operatorname{Im}\theta|}$. По оценке Коши, для любого фиксированного $H > 1$ и любого компактного множества C внутри канонического эллипса $|\operatorname{Im}\theta| = \ln H$ величина $P_l(z)H^{-l}$ равномерно ограничена, когда z пробегает C, а l — последовательность 0, 1, ... Аналогичная оценка для $Q_l(z)$ (задачи 90b, c, d) показывает, что для любого $H > 1$ и любого компакта D вне канонического эллипса $|\operatorname{Im}\theta| = \ln H$ величина $Q_l(z)H^l$ равномерно ограничена, когда z пробегает D. По C, D и E, заданным как в условиях теоремы, найдется эллипс E' (соответственно E''), определяемый уравнением $|\operatorname{Im}\theta| = \ln H'$ (соответственно $|\operatorname{Im}\theta| = \ln H''$), такой, что он лежит внутри (соответственно вне) E, а C (соответственно D) лежит внутри E' (соответственно вне E''). Пользуясь тем, что $H'' > H'$, видим, что для $z \in C$, $z \in D$

$$|P_l(z)\,Q_l(z')| \leqslant C\,[H'/H'']^l,$$

так что ряд (137) сходится.

Если фиксировать E и z' вне E, то предельная функция $G(z, z')$ аналитична по z для z из E. Более того,

$$\int_{-1}^{1} P_l(z)\,[G(z, z') - (z' - z)^{-1}]\,dz = 0,$$

поскольку $P_l(z)(l + 1/2)^{-1/2}$ — ортонормированный базис пространства $L^2[-1, 1]$. Итак, $G(z, z') = (z' - z)^{-1}$ для $z \in (-1, 1)$, а тогда, в силу аналитического продолжения, и для всех z из E.

(b) По заданному компактному множеству C внутри E найдем другой канонический эллипс E', такой, что C лежит внутри E', а E' внутри E. Тогда для $z \in C$ по теореме Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{E'} \frac{f(z')}{z' - z}\,dz' = \sum_{l=1}^{\infty} P_l(z)\,a_l\,(2l + 1),$$

где

$$a_l = \frac{1}{2\pi i}\oint_{E'} f(z')\,Q_l(z')\,dz'$$

и мы воспользовались равномерной сходимостью, доказанной в (a). Поскольку $\{P_l(z)\}$ — ортогональный базис в $L^2(-1, 1)$, равенство (138) доказано.

(c) оставим читателю (задача 91). ∎

Определение. **Сферические функции Бесселя** $j_l(x)$, $x \in \mathbb{C}$, определяются равенством

$$j_l(x) = \frac{e^{-i\pi l/2}}{2} \int_{-1}^{1} P_l(y)\, e^{ixy} dy.$$

Теорема XI.64. (a) $j_l(x)$ вещественны при вещественных x и $j_l(-x) = (-1)^l j_l(x)$.

(b) Каждая функция $j_l(x)$ есть конечная линейная комбинация членов вида $x^{-m}\cos x$ и $x^{-m}\sin x$ с $m \leqslant l+1$.

(c) $j_l(x)$ — целая функция от x, причем $j_l(x) = O(x^l)$ при $x \to 0$.

(d) (Уравнение Бесселя.)

$$-\frac{d^2}{dx^2}[xj_l(x)] + \frac{l(l+1)}{x^2}[xj_l(x)] = [xj_l(x)].$$

(e) $[xj_l(x) - \sin(x - {}^1/_2\pi l)] = O(x^{-1})$ при $x \to \infty$.

(f) Если $\mathbf{e}$ — единичный вектор $\langle 0, 0, 1\rangle$ и $\mathbf{r}\cdot\mathbf{e} = r\cos\theta$, то

$$e^{ik\mathbf{e}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} e^{i\pi l/2}(2l+1)\, j_l(kr)\, P_l(\cos\theta),$$

где ряд сходится равномерно, когда k и $\mathbf{r}$ пробегают компактные множества в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^3$ соответственно.

Доказательство. (a) $\overline{j_l(x)} = {}^1/_2 e^{i\pi l}\, e^{-i\pi l/2} \int_{-1}^{1} P_l(y)\, e^{-ixy}\, dy$. Заменяя y на $-y$ и применяя равенство $P_l(-y)\, e^{i\pi l} = P_l(y)$, заключаем, что j_l вещественна. Поскольку P_l вещественно, то

$$j_l(-x)\, e^{+i\pi l/2} = \overline{j_l(x)\, e^{i\pi l/2}} = j_l(x)\, e^{-i\pi l/2},$$

или $j_l(-x) = (-1)^l j_l(x)$.

(b) Применяя равенство $y^n e^{ixy} = (i^{-1}d/dx)^n e^{ixy}$, видим, что

$$j_l(x) = e^{-i\pi l/2}\, P_l\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\left[\frac{\sin x}{x}\right].$$

По индукции можно доказать, что $(d/dx)^m x^{-1}\sin x$ — конечная линейная комбинация членов вида $x^{-k}\sin x$ и $x^{-k}\cos x$, причем $k \leqslant m+1$, так что (b) доказано.

(c) j_l есть фурье-образ обобщенной функции с компактным носителем, а потому целая функция x. Более того, величина

$$\left.\frac{d^k j_l}{dx^k}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}\, e^{-i\pi l/2} i^k \int_{-1}^{1} y^k P_l(y)\, dy$$

равна нулю при $k < l$, в силу соотношений ортогональности для полиномов Лежандра. Итак, $j_l(x) = O(x^l)$ при $x \to 0$.

(d) Пусть χ — характеристическая функция интервала $(-1, 1)$, и пусть F — обобщенная функция χP_l. Тогда

$$\frac{dF}{dy} = \chi \frac{dP_l}{dy} + P_l(1)\,\delta(y-1) - P_l(-1)\,\delta(y+1),$$

так что $(1-y^2)\dfrac{dF}{dy} = \chi(1-y^2)\dfrac{dP_l}{dy}$, а потому

$$\frac{d}{dy}(1-y^2)\frac{dF}{dy} = \chi\frac{d}{dy}(1-y^2)\frac{dP_l}{dy} = -l(l+1)F$$

в силу части (d) теоремы XI.62. Выполняя преобразование Фурье, получаем

$$x\left(1+\frac{d^2}{dx^2}\right)xj_l(x) = l(l+1)\,j_l(x),$$

что дает уравнение Бесселя.

(e) Поскольку $e^{ixy} = (ix)^{-1}(d/dy)\,e^{ixy}$, то интегрирование по частям приводит к равенству

$$j_l(x) = \frac{e^{-i\pi l/2}}{2}\frac{1}{ix}\left[e^{ix}P_l(1) - e^{-ix}P_l(-1)\right] - \frac{e^{-i\pi l/2}}{2ix}\int_{-1}^{1} e^{ixy}\frac{d}{dy}P_l(y)\,dy.$$

Повторное интегрирование по частям показывает, что второй член имеет на бесконечности порядок $O(x^{-2})$. А первый член можно, в силу равенств $P_l(1)=1$, $P_l(-1)=(-1)^l$, переписать в виде $x^{-1}\sin(x - {}^1/_2\pi l)$.

(f) При фиксированных k и r функция

$$f(r, k, \eta) = e^{ikr\eta}$$

есть целая функция η, имеющая равномерные оценки, когда k, r и η пробегают компактные подмножества в $\mathbb{R}$ (соответственно в $\mathbb{C}$). Следовательно, ряд Лежандра

$$f(r, k, \eta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,a_l(k, r)\,P_l(\eta)$$

сходится на таких компактных множествах равномерно. Поскольку

$$a_l(k, r) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P_l(\eta)\,f(r, k, \eta)\,d\eta,$$

то $a_l(r) = e^{i\pi l/2}\,j_l(kr)$ по определению $j_l(x)$. ∎

Дополнение 2 к § XI.8. Решения Йоста для осцилляторных потенциалов

В этом и следующем дополнениях мы рассмотрим некоторые классы потенциалов с сильными осцилляциями на бесконечности. В какой-то мере эти примеры — математические курьезы, однако по некоторым причинам они представляют теоретический интерес Во-первых, эти примеры поясняют модификации волновых операторов, которые будут рассмотрены в § 9, а во-вторых, они связаны с проблемой существования положительных собственных значений (см. § XIII.13).

Общая цель этих двух дополнений — показать, что, коль скоро среднее потенциала убывает, совершенно не важно, что не убывает сам потенциал. Интуитивно это можно понять как расплывание гладких свободных волновых пакетов. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть

$$V(r)=(1+r^2)^{-1}e^r\sin(e^r). \tag{139}$$

Очевидно, что этот потенциал сильно сингулярен на бесконечности. Однако его среднее не сингулярно: интегрирование по частям показывает, что

$$\int\limits_r^R V(x)\,dx=$$

$$=(1+r^2)^{-1}\cos(e^r)-(1+R^2)^{-1}\cos(e^R)+2\int\limits_r^R x(1+x^2)^{-2}\cos(e^x)\,dx,$$

поэтому предел среднего

$$W(r)=-\lim_{R\to\infty}\int\limits_r^R V(x)\,dx \tag{140}$$

существует и является «короткодействующей» в том смысле, что $|W(r)|\leqslant C(1+r^2)^{-1}$. В силу такого убывания среднего V, оказывается, что $-\Delta+V$ можно определить как сумму форм и эта форма ограничена снизу, несмотря на неограниченность V. Действительно, $V(r)=\partial W/\partial r$, а потому на $\mathbb{R}^n$

$$V(x)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}G_i(x)+K(x),$$

где $G_i(x)=x^{-1}x_iW(x)$ и $K(x)=-(n-1)x^{-1}W(x)$. На основе этого мы утверждаем, что для любого ε существует константа C_ε, удовлетворяющая условию

$$(\varphi,\ V\varphi)\leqslant\varepsilon(\varphi,(-\Delta)\varphi)+C_\varepsilon(\varphi,\ \varphi) \tag{141}$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Оператор умножения на K является $-\Delta$-ограниченным в смысле форм с нулевой относительной гранью. Более того, интегрирование по частям с последующим применением неравенства Шварца дает

$$|(\varphi, (\partial G_l/\partial x_l)\varphi)| = \left|\int \frac{\partial G_l}{\partial x_l} |\varphi|^2 dx\right| = 2\,|\operatorname{Re}(\varphi, G_l\, \partial\varphi/\partial x_l)| \leqslant$$
$$\leqslant (\varphi, G_l^2\varphi)^{1/2} (\partial\varphi/\partial x_l, \partial\varphi/x_l)^{1/2},$$

откуда следует (141), поскольку оператор G_l^2 $-\Delta$-ограничен в смысле форм с нулевой относительной гранью. Согласно (141), $(\varphi, V\varphi)$ можно продолжить на $Q(-\Delta)$, и $-\Delta+V$ — полуограниченная замкнутая квадратичная форма на $Q(-\Delta)$. Предостережем читателя, что для произвольного $\varphi \in Q(-\Delta)$ неравенство $\int |V(x)|\,|\varphi(x)|^2 dx < \infty$ *не обязательно* выполняется, а величина $(\varphi, V\varphi)$ определяется лишь с помощью предельной процедуры. Теперь уже можно развить теорию рассеяния для $-\Delta+V$, следуя основным идеям теоремы XI.31 (см. задачу 92) или методами § XIII.8 (см. ссылки в Замечаниях). Здесь мы хотим рассмотреть функции Йоста для таких потенциалов.

Пример 2. Пусть

$$V(r) = \sum_{l=1}^{m} \gamma_l r^{-1} \sin(\alpha_l r) + Q(r), \tag{142a}$$

причем для некоторых $\varepsilon > 0$ и C

$$|Q(r)| \leqslant C(1+r^2)^{-1/2-\varepsilon}. \tag{142b}$$

В этом случае V ограничен, так что нетрудно определить сумму $-\Delta+V$. С ней связаны два опасных момента. Во-первых, существует потенциал вида (142), при котором уравнение $(-\Delta+V)\varphi=\varphi$ обладает квадратично интегрируемым решением даже при том, что $V \to 0$ на бесконечности (см. пример 1 из § XIII.13 и его обсуждение там). Во-вторых, $V(r)$ не входит в число потенциалов, для которых мы развили теорию рассеяния, поскольку $\int_1^\infty |V(r)|\,dr = \infty$. В § 9 мы построим модифицированную теорию рассеяния для потенциалов типа кулонова. К сожалению, необходимые в этом случае оценки неприменимы к потенциалам вида (142). Однако рассеяние в кулоновом случае как раз такого типа, которого естественно ожидать и для потенциалов данного вида. В § 9 при определении волновых операторов мы рассмотрим модификацию свободной динамики. В кулоновом случае соответствующий оператор свободной эволюции при $t \to \infty$ расходится, в силу чего волновые операторы и существуют. В случае когда

V удовлетворяет (142) и предел в (140) существует, модифицированный оператор свободной эволюции такого типа, как в § 9, конечен, поэтому в этом случае модифицированные волновые операторы существуют наряду с исходными. Исследуя решения Йоста для этих потенциалов, мы найдем условия, при которых существуют положительные собственные значения, а также построим теорию рассеяния. Эта теория будет изложена в следующем дополнении.

Поскольку здесь мы интересуемся проблемами, связанными с осцилляциями на бесконечности, мы на протяжении этого дополнения будем предполагать, что функция $V(r)$ непрерывна и локально ограничена. Наши методы легко обобщить, так чтобы допускались локальные особенности V. Для понимания примеров 1 и 2 необходим следующий результат; он сам и его следствия легко обобщаются на случай, когда X — банахово пространство. В наших приложениях $\dim X = 2$.

Предложение. Пусть X — конечномерное нормированное векторное пространство. Пусть $C(x)$ — непрерывная функция на $[R_0, \infty)$ со значениями в $\mathscr{L}(X)$. Пусть $D(x, y)$ — измеримая функция на $Q \equiv \{\langle x, y\rangle \mid R_0 \leqslant x \leqslant y < \infty\}$ со значениями в $\mathscr{L}(X)$.

(a) Предположим, что

$$\gamma \equiv \sup_{x \geqslant R_0} \|C(x)\| + \sup_{x \geqslant R_0} \int_x^\infty \|D(x, y)\|\, dy < 1.$$

Тогда для любого $u_0 \in X$ уравнение

$$u(x) = u_0 + C(x)\, u(x) + \int_x^\infty D(x, y)\, u(y)\, dy \qquad (143)$$

имеет единственное решение в $L^\infty(R_0, \infty)$. Более того, это решение непрерывно.

(b) Далее, если

$$\gamma(r) \equiv \sup_{x \geqslant r} \|C(x)\| + \sup_{x \geqslant r} \int_x^\infty \|D(x, y)\|\, dy$$

стремится к нулю при $r \to \infty$, то $\lim_{x\to\infty} u(x) = u_0$ и для $x > R_0$ справедливо неравенство

$$\|u(x) - u_0\| \leqslant \gamma(x)\,[1 - \gamma(x)]^{-1}\, \|u_0\|.$$

(c) Предположим, что функция C непрерывно дифференцируема, функция D непрерывна на Q и что для каждого фиксированного x величина

$$f_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-1}\,[D(x+\varepsilon, y) - D(x, y)]$$

сходится в $L^1(\mathbb{R}, \infty)$ к функции, обозначаемой $\partial D/\partial x$, которая непрерывна по x в смысле L^1. Тогда решение u уравнения (143) непрерывно дифференцируемо и

$$u'(x) = C'(x)\,u(x) + C(x)\,u'(x) - D(x,x)\,u(x) + \int\limits_x^\infty \frac{\partial D}{\partial x}(x,y)\,u(y)\,dy. \tag{144}$$

(a) и (b) остаются справедливыми, если постоянный вектор u_0 заменить непрерывной векторнозначной функцией $u_0(x)$, такой, что $\sup\limits_{x \geqslant R_0} \|u_0(x)\| = Q_0 < \infty$, коль скоро во всех оценках норма $\|u_0\|$ заменена на Q_0. (c) продолжает выполняться в этом случае, коль скоро $u_0(x)$ из C^1, а в правую часть равенства (144) добавлено слагаемое $u_0'(x)$.

Доказательство. (a) Определим $u_n(x)$ индуктивно, полагая $u_0(x) = u_0$ и

$$u_n(x) = C(x)\,u_{n-1}(x) + \int\limits_x^\infty D(x,\ y)\,u_{n-1}(y)\,dy.$$

По индукции легко доказать, что функция $u_n(x)$ непрерывна и

$$\sup_{|x| \geqslant r} \|u_n(x)\| \leqslant \gamma(r)^n \|u_0\|. \tag{145}$$

Поскольку $\gamma(R_0) = \gamma < 1$, ряд $\sum\limits_{n=0}^\infty u_n(x)$ сходится равномерно к непрерывной функции $u(x)$, удовлетворяющей уравнению (143). Если v — произвольное решение (143) в $L^\infty(R_0, \infty)$ то, итерируя это равенство, находим, что

$$\left\| v - \sum_{n=0}^N u_n(x) \right\| \leqslant \gamma^{N+1} \|v\|_\infty,$$

откуда, переходя к $N \to \infty$, получаем $v = u$.

(b) В силу оценки (145),

$$\|u - u_0\| \leqslant \sum_{n=1}^\infty \gamma(r)^n \|u_0\| = \gamma(r)\,(1 - \gamma(r))^{-1} \|u_0\|.$$

(c) В сделанных предположениях функции u_n, как можно доказать по индукции, непрерывно дифференцируемы, причем

$$u_n'(x) = C'(x)\,u_{n-1}(x) + C(x)\,u_{n-1}'(x) - D(x,\ x)\,u_{n-1}(x) + \\ + \int\limits_x^\infty \frac{\partial D}{\partial x}(x,\ y)\,u_{n-1}(y)\,dy.$$

Применяя (145), можно доказать по индукции (задача 93) следующие оценки:

$$|u_n'(x)| \leqslant n\gamma^n \|u_0\| A(x), \qquad x \geqslant R_0,$$

где

$$A(x) = \gamma^{-1}\left(\|C'(x)\| + \|D(x, x)\| + \int_x^\infty \left\|\frac{\partial D}{\partial x}(x, y)\right\| dy\right).$$

Отсюда следует, что ряд $\sum_{n=0}^\infty u_n'(x)$ сходится равномерно на каждом компактном подмножестве в $[R_0, \infty)$, так что функция $u(x)$ дифференцируема и ее производная равна $\sum_{n=0}^\infty u_n'(x)$. Итак, (144) выполняется. Случай, когда u_0 зависит от x, оставим читателю (задача 93). ∎

Теорема XI.65. Пусть $A(x)$ — непрерывная функция из $[R_0, \infty)$ в $\mathscr{L}(X)$ — множество ограниченных операторов в конечномерном линейном пространстве. Допустим, что $\|A(x)\| \in L^1(R, \infty)$. Предположим, что $u_0 \in X$. Тогда существует единственная непрерывно дифференцируемая функция $u(x, u_0)$, такая, что

$$\frac{du}{dx} = A(x)\, u(x)$$

и $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = u_0$. Каждое ненулевое решение имеет ненулевой предел при $x \to \infty$. Более того, $\|u(x) - u_0\| \leqslant 2\|u_0\| \int_x^\infty \|A(y)\| dy$ для всех x, таких, что $\int_x^\infty \|A(y)\| dy < 1/2$.

Доказательство. Выберем R_1 так, чтобы выполнялось неравенство $\int_{R_1}^\infty \|A(x)\| dx < 1$. Тогда, по предложению, уравнение

$$u(x) = u_0 - \int_x^\infty A(y)\, u(y)\, dy$$

имеет единственное решение на $[R_1, \infty)$, которое непрерывно дифференцируемо, причем $u'(x) = A(x)\, u(x)$ Используя локальное существование и единственность, его можно продолжить на $[R, \infty)$. Выбирая базис в X, можно найти n линейно независимых решений с различными линейно независимыми пределами на бесконечности. В силу локальной единственности, они порождают множество всех решений, откуда следует единственность и факт существования предела для каждого решения. Последняя оценка следует из части (b) предложения. ∎

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$-\varphi''(x)+V(x)\varphi(x)=k^2\varphi(x)$$

на $[1, \infty)$, где $\int_1^\infty |V(x)|\,dx<\infty$. Пусть $\Psi(x)=\begin{pmatrix}\varphi(x)\\ \varphi'(x)\end{pmatrix}$. Тогда $\Psi'(x)=C(x)\Psi(x)$, где

$$C(x)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ V(x)-k^2 & 0\end{pmatrix}.$$

Пусть $\varphi_\pm$ — векторнозначные функции

$$\varphi_\pm(x)=\begin{pmatrix}e^{\pm ikx}\\ \pm ike^{\pm ikx}\end{pmatrix}.$$

Напишем $\Psi(x)=\alpha(x)\varphi_+(x)+\beta(x)\varphi_-(x)$, где α и β — комплекснозначные функции. Тогда $q=\binom{\alpha}{\beta}$ удовлетворяет условию $q(x)=$ $=M(x)\Psi(x)$, причем

$$M(x)=(2ik)^{-1}\begin{pmatrix}ike^{-ikx} & e^{-ikx}\\ ike^{ikx} & -e^{ikx}\end{pmatrix}.$$

Значит,

$$q'(x)=D(x)\,q(x), \tag{146a}$$

где $D(x)=M'(x)M(x)^{-1}+M(x)C(x)M(x)^{-1}$, так что

$$D(x)=(2ik)^{-1}V(x)\begin{pmatrix}1 & e^{-2ikx}\\ -e^{2ikx} & -1\end{pmatrix}. \tag{146b}$$

Применяя теорему XI.65 к уравнению (146), видим, что если $\int_1^\infty |V(x)|\,dx<\infty$, то оно имеет решения, асимптотически сходящиеся к любому q_0 при $x\to\infty$. Выбирая $q=\binom{1}{0}$, находим решение φ уравнения Шредингера, удовлетворяющее условию $|\varphi(x)-e^{ikx}|+|\varphi'(x)-ike^{ikx}|\to 0$ при $x\to\infty$. Итак, мы получили доказательство существования решений Йоста, отчасти независимое от доказательства, данного в основном тексте этого раздела.

Пример 4. Рассмотрим решения уравнения $-f''(r)+l(l+1)\times$ $\times r^{-2}f(r)=k^2f(r)$. Действуя, как в предыдущем примере, можно показать, что любое вещественнозначное решение удовлетворяет условию $|f(r)-C\sin(kr+D)|=O(r^{-1})$ и, в частности,

$$|krj_l(kr)-\sin(kr-{}^1/_2\pi l)|=O(r^{-1}).$$

Чтобы продолжить рассмотрение примера 2, нам потребуется следующее интересное обобщение теоремы XI.65.

Теорема XI.66 (теорема Долларда — Фридмана). Пусть $A(x)$ — непрерывная функция из $[R, \infty)$ в $\mathscr{L}(X)$ — множество ограниченных операторов на конечномерном нормированном линейном пространстве. Предположим, что $A = A_1 + A_2$, где

(i) $\|A_1(\cdot)\| \in L^1(R, \infty)$;

(ii) существует $B(x) = -\lim\limits_{r\to\infty} \int\limits_x^r A_2(y)\,dy$;

(iii) $\|B(\cdot)A(\cdot)\| \in L^1(R, \infty)$.

Тогда существует единственная непрерывно дифференцируемая X-значная функция $u(x; u_0)$, такая, что

$$du/dx = A(x)\,u(x)$$

и $\lim\limits_{x\to\infty} u(x; u_0) = u_0$. Каждое ненулевое решение этого дифференциального уравнения имеет ненулевой предел при $x \to \infty$ и

$$|u(x; u_0) - u_0| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\sup_{y \geqslant x} \|B(y)\| + \int\limits_x^\infty \|A_1(y)\|\,dy + \int\limits_x^\infty \|B(y)A(y)\|\,dy\right)\|u_0\| \quad (147)$$

для всех x, при которых выражение в скобках меньше 1/2.

Доказательство. Начнем с некоторых преобразований формального уравнения

$$u(x) = u_0 - \int\limits_x^\infty A(y)\,u(y)\,dy.$$

Запишем $A_2(y)$ в виде $dB(y)/dy$ и проинтегрируем по частям. Граничный член на бесконечности должен исчезать, поскольку

$$\lim_{y\to\infty} \|B(y)\| = 0 \quad (148)$$

вследствие сходимости интеграла, определяющего $B(y)$. Пользуясь равенством $u'(y) = A(y)\,u(y)$, находим, что

$$u(x) = u_0 + B(x)\,u(x) - \int\limits_x^\infty [A_1(y) - B(y)A(y)]\,u(y)\,dy. \quad (149)$$

Мы пришли к (149) формально. Теперь решим это уравнение, а потом покажем, что решение обладает требуемыми свойствами. Пусть

$$\gamma(x) = \sup_{y \geqslant x} \|B(y)\| + \int\limits_x^\infty (\|A_1(y)\| + \|B(y)A(y)\|)\,dy.$$

Согласно (148) и по условиям теоремы, $\gamma(x) \to 0$ при $x \to \infty$; значит, по предложению, уравнение (149) имеет решения в $[R_1, \infty)$ для достаточно большого R_1, и эти решения удовлетворяют неравенству (147). В силу части (c) предложения, решение принадлежит C^1 и

$$u'(x) = B(x)\,u'(x) + A_2(x)\,u(x) + [A_1(x) - B(x)\,A(x)]\,u(x),$$

так что

$$(1 - B(x))\,u'(x) = (1 - B(x))\,A(x)\,u(x).$$

В силу (148), матрица $1 - B(x)$ обратима при больших x; итак, мы получили искомое решение дифференциального уравнения при больших x. Остальная часть доказательства следует из локальной разрешимости, как в теореме XI.65. ∎

Пример 2 (заново). Мы ищем решения уравнения $-\varphi''(x) + V(x)\,\varphi(x) = k^2\varphi(x)$, где $V(x)$ имеет вид (142). Как в примере 3, сначала перепишем уравнение в виде (146). Пусть $D = D_1 + D_2$, где D_1 происходит из члена $Q(x)$, а D_2 — из членов $r^{-1}\sin(\alpha_j r)$. Очевидно, что D_1 лежит в L^1. Более того, поскольку

$$\int_r^x y^{-1} e^{i\beta y}\,dy = (i\beta y)^{-1} e^{i\beta y}\Big|_r^x + \frac{1}{i\beta}\int_r^x y^{-2} e^{i\beta y}\,dy,$$

мы видим, что для $\beta \neq 0$ существует $\lim\limits_{x\to\infty} \int_r^x y^{-1} e^{i\beta y}\,dy$ и предельная функция ограничена функцией r^{-1}. Отсюда следует, что, коль скоро $\alpha_j \neq \pm 2k$ для всех j, интеграл $B(r) = \int_r^\infty D_2(x)\,dx$ существует как несобственный и $BD \in L^1$, причем $\int_r^\infty \|B(y)\,D(y)\|\,dy = O(r^{-1})$. В результате можно применить теорему XI.66 и немедленно получить доказательства частей (a) и (b) следующей теоремы.

Теорема XI.67. Пусть V имеет вид (142).

(a) Пусть k — вещественное число, причем $k \neq 0$, $\pm\alpha_1/2, \ldots, \pm\alpha_m/2$. Тогда любое ненулевое решение уравнения $-\varphi'' + V\varphi = k^2\varphi$ удовлетворяет условию

$$\lim_{x\to\infty} [\varphi(x) - ae^{ikx} - be^{-ikx}] = 0$$

для подходящих a и b. В частности, это уравнение не имеет ненулевых квадратично интегрируемых решений.

(b) В предположениях части (a) существует единственное решение $\varphi(x;\ k)$ на $[1, \infty)$, удовлетворяющее неравенству

$$|\varphi(x;\ k)-e^{-ikx}|\leqslant c_k|x|^{-\alpha}, \qquad x\geqslant 1,$$

причем $\alpha=\min\{1,\ 2\varepsilon\}$, где ε определено в (142b). Более того, коэффициенты c_k могут быть выбраны независимо от k, когда k пробегает компактное подмножество в $\{k\in\mathbb{R}\,|\,k\neq 0,\ \pm\alpha_1/2,\ \ldots,\ \pm\alpha_m/2\}$.

(c) Предположим, что $k=\alpha_j/2$ для некоторого j. Тогда существует решение u уравнения $-\varphi''+V\varphi=k^2\varphi$, которое удовлетворяет условиям

$$u=\begin{cases} r^{-\gamma_j/2\alpha_j}(\cos(\alpha_j r/2)+o(1)), & \gamma_j/\alpha_j>0,\\ r^{+\gamma_j/2\alpha_j}(\sin(\alpha_j r/2)+o(1)), & \gamma_j/\alpha_j<0.\end{cases}$$

По поводу доказательства части (c) см. ссылки в Замечаниях и задачи 97, 98. Суть части (c) состоит в том, что, когда γ_j больше α_j, существует решение уравнения Шредингера, квадратично интегрируемое на бесконечности. В общем случае если имеется однопараметрическое семейство таких потенциалов, то одно из этих решений будет удовлетворять требуемому условию в начале координат. Поэтому существуют операторы Шредингера с положительными собственными значениями, погруженными в непрерывный спектр. Дальнейшее обсуждение см. в § XIII.13.

В следующем дополнении мы увидим, что, коль скоро $\varepsilon>1/4$, частью (b) этой теоремы можно воспользоваться для доказательства того, что волновые операторы $\Omega^{\pm}(-\Delta+V,\ -\Delta)$ существуют и имеют одинаковые области значений.

Доказательство теоремы Долларда—Фридмана и решение задачи, поставленной в примере 2, включали в себя интегрирование по частям в интегральном уравнении, имеющем очевидное происхождение. Тот же метод работает и в примере 1, однако «подходящее уравнение» задается не непосредственной формулой (146), а скорее интегральным уравнением Йоста (126). Отметим, что уравнение Йоста легко «вывести» из (146).

Пример 1 (заново). Начнем с уравнений Йоста и будем действовать формально в предположении, что $V(r)=\partial W/\partial r$, причем $\int_x^\infty |W(r)|\,dr<\infty$. Интегрируя по частям в уравнении

$$\varphi(x)=e^{-ikx}-\int_x^\infty \frac{\sin k(x-y)}{k}V(y)\,\varphi(y)\,dy$$

и опуская граничный член на бесконечности, получаем

$$\varphi(x)=e^{-ikx}-\int_x^\infty W(y)\left[\cos(kx-ky)\varphi(y)-k^{-1}\sin(kx-ky)\varphi'(y)\right]dy, \tag{150a}$$

и аналогично, интегрируя по частям в уравнении

$$\varphi'(x)=-ike^{-ikx}-\int_x^\infty \cos(kx-ky)V(y)\varphi(y)\,dy,$$

получаем

$$\varphi'(x)=-ike^{-ikx}+W(y)\varphi(y)+$$
$$+\int_x^\infty W(y)\left[k\sin(kx-ky)\varphi(y)+\cos(kx-ky)\varphi'(y)\right]dy. \tag{150b}$$

Переписывая (150) как систему уравнений для $\langle\varphi, \varphi'\rangle$, видим, что вследствие предложения она имеет C^1-решение. Применяя часть (с) предложения, легко найти, что полученное в результате решение удовлетворяет уравнению $\varphi''(x)=V(x)\varphi(x)-k^2\varphi(x)$. Наши результаты суммирует

Теорема XI.68. Пусть $V(r)$ — непрерывная функция, причем $V(r)=\partial W/\partial r$, где $W\in L^1[1, \infty)$. Тогда:

(a) уравнение $-\varphi''+V\varphi=k^2\varphi$ не имеет ненулевых квадратично интегрируемых решений при $k\neq 0$;

(b) предположим, что $|W(x)|\leqslant C|x|^{-1-\varepsilon}$. Тогда для любого $k\neq 0$ существует решение $\varphi(x; k)$ того же уравнения на $[1, \infty)$, причем

$$|\varphi(x; k)-e^{-ikx}|\leqslant c(k)|x|^{-\varepsilon}, \quad x\geqslant 1,$$

и $c(k)$ могут быть выбраны независимо от k для $|k|\geqslant k_0>0$ $_\circ$

Дополнение 3 к § XI.8. Решения Йоста и основные задачи теории рассеяния

В этом дополнении мы рассмотрим те случаи, когда имеются регулярные решения $u_l(x; k)$ уравнения Шредингера и надежный контроль за скоростью стремления к нулю величины $|u_l(x; k)-\sin(kx-{}^1/_2 l\pi+\delta_l)|$, когда $|x|\to\infty$. На основе этой информации мы докажем, что существуют волновые операторы $\Omega^\pm$, что $\operatorname{Ran}\Omega^+=\operatorname{Ran}\Omega^-$ и что S-оператор есть умножение на $e^{2i\delta_l(k)}$ в представлении, где диагональны энергия и угловой момент. Это позволит нам раскрыть некоторые результаты § 8 и, что более важно, построить теорию рассеяния для некоторых потенциалов из дополнения 2. Более того, это прольет свет на принцип инвариантности волновых операторов. Здесь мы все время будем пользоваться символом $\hat{x}$ для обозначения $x/|x|$. Основной результат составляет следующая

Теорема XI.69. Пусть $V(\mathbf{x})$ — центральный потенциал на $\mathbb{R}^3$, такой, что оператор $-\Delta+V$ в существенном самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Предположим, что для каждого $l=0, 1, \ldots$ существует замкнутое множество $\mathscr{E}_l$ нулевой меры в $(0, \infty)$, такое, что для каждого $k\in(0, \infty)\diagdown\mathscr{E}_l$ существует вещественнозначное решение в смысле обобщенных функций

$$\varphi_l(\mathbf{x};\ k)=(k|\mathbf{x}|)^{-1}u_l(|\mathbf{x}|;\ k)Y_{lm}(\hat{x})$$

уравнения $(-\Delta+V)\varphi_l=k^2\varphi_l$, удовлетворяющее оценке

$$|u_l(k,\ r)-\sin(kr-{}^1/_2 l\pi+\delta_l(k))|\leqslant c_l(k)(1+|r|)^{-1/2-\gamma} \tag{151}$$

для фиксированного $\gamma>0$. Предположим, что функции $\varphi_l(\mathbf{x};\ \cdot)$ и $\delta_l(\cdot)$ измеримы и $\sup\limits_{k\in K}c_l(k)<\infty$ для любого компактного подмножества $K\subset(0,\ \infty)\diagdown\mathscr{E}_l$. Тогда волновые операторы $\Omega^\pm(-\Delta+V,\ -\Delta)$ существуют, $\operatorname{Ran}\Omega^+=\operatorname{Ran}\Omega^-$ и $S=(\Omega^-)^*\Omega^+$ задается посредством

$$S\left[\sum_{l,\ m}Y_{lm}(\hat{x})\int\limits_0^\infty j_l(k|x|)f_{lm}(k)\,dk\right]=$$

$$=\sum_{l,\ m}Y_{lm}(\hat{x})\int\limits_0^\infty j_l(k|x|)\,e^{2i\delta_l(k)}f_{lm}(k)\,dk. \tag{152}$$

Доказательство. Фиксируем l, m и $f\in C_0^\infty((0,\ \infty)\diagdown\mathscr{E}_l)$. Положим

$$\psi(\mathbf{x})=Y_{lm}(\hat{x})\int\limits_0^\infty(kx)^{-1}u_l(x;\ k)f(k)\,dk,$$

$$\psi_\pm^{(0)}(\mathbf{x})=Y_{lm}(\hat{x})\int\limits_0^\infty j_l(kx)\,e^{\mp i\delta_l(k)}f(k)\,dk.$$

Применяя (151) и то, что $f\in C_0^\infty$, легко видеть, что ψ и $\psi_\pm^{(0)}$ лежат в $L^2(\mathbb{R}^3)$ (задача 94). Покажем, что

$$\lim_{t\to\mp\infty}\|e^{-itH}\psi-e^{-itH_0}\psi_\pm^{(0)}\|=0. \tag{153}$$

Если равенство (153) доказано, мы заключаем, что $\Omega^\pm$ существуют на плотном множестве, и получаем для них явные формулы, которые устанавливают, что $\operatorname{Ran}\Omega^+=\operatorname{Ran}\Omega^-$ и выполняется равенство (152). Пусть C — оператор комплексного сопряжения. Тогда $e^{-itH_0}C = Ce^{itH_0}$ и $e^{-itH}C = Ce^{itH}$, так что (153) нужно доказать лишь для случая $t \to -\infty$.

Поскольку оператор $-\Delta + V = H$ удовлетворяет уравнению $H\varphi_l(\cdot;\, k) = k^2\varphi_l(\cdot;\, k)$ в смысле обобщенных функций, мы видим, что для $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$(H\eta,\ \psi) = (\eta,\ \bar{\psi}),$$

где $\bar{\psi}$ задается формулой для ψ в которой $f(k)$ заменено на $k^2 f(k)$. Поскольку H в существенном самосопряжен на C_0^∞, то $\psi \in D(H)$ и $H\psi = \bar{\psi}$. Повторяя эту процедуру и пользуясь тем, что $f \in C_0^\infty$, получаем

$$\psi(\mathbf{x},\ t) \equiv (e^{-itH}\psi)(\mathbf{x}) = Y_{lm}(\hat{x}) \int_0^\infty (kx)^{-1} u_l(x;\ k)\, e^{-itk^2} f(k)\, dk.$$

Аналогично,

$$\psi_+^{(0)}(\mathbf{x},\ t) \equiv (e^{-itH_0}\psi)(\mathbf{x}) = Y_{lm}(\hat{x}) \int_0^\infty j_l(kx)\, e^{-itk^2} e^{-i\delta_l(k)}\, f(k)\, dk.$$

Теперь *определим* функцию $\eta(\mathbf{x},\ t)$ равенством

$$\eta(\mathbf{x},\ t) = Y_{lm}(\hat{x}) \int_0^\infty (kx)^{-1} \sin(kx - {}^1/_2 l\pi + \delta_l(k))\, e^{-itk^2} f(k)\, dk.$$

Тогда

$$\alpha_t(\mathbf{x}) \equiv |\psi(\mathbf{x}, t) - \eta(\mathbf{x}, t)| = |Y_{lm}(\hat{x})| \left| \int_0^\infty (kx)^{-1} q(x, k)\, e^{-itk^2} f(k)\, dk \right|,$$

где $q(x,\ k) = u(x;\ k) - \sin(kx - {}^1/_2 l\pi + \delta_l(k))$. Далее, в силу (151), для каждого фиксированного x функция $(kx)^{-1} q(x,\ k) f(k)$ от k лежит в $L^1(0,\ \infty)$, так что $\alpha_t(x) \to 0$ при $t \to \pm\infty$ по лемме Римана — Лебега. Более того, в силу (151),

$$|\alpha_t(\mathbf{x})| \leqslant C\, |Y_{lm}(\hat{x})|\, x^{-1}(1 + x)^{-1/2-\gamma}$$

для всех t. Значит, по теореме о мажорированной сходимости, $\int |\alpha_t(x)|^2 d^3x \to 0$ при $t \to \pm\infty$. Это сводит доказательство (153) к демонстрации того, что

$$\int |\psi_+^{(0)}(x,\ t) - \eta(x,\ t)|^2 d^3x \to 0 \quad \text{при} \quad t \to -\infty.$$

Положим

$$\zeta_\pm(\mathbf{x},\ t) = Y_{lm}(\hat{x}) \int (kx)^{-1} e^{\pm ikx} e^{\pm i\delta_l(k)} e^{\mp il\pi/2} e^{-ik^2 t} f(k)\, dk.$$

По лемме 3 из § 3, $\lim\limits_{t\to-\infty}\int|\zeta_+(x, t)|^2 d^3x=0$, так что

$$\lim_{t\to-\infty}\int|\eta(x, t)-{}^1/_2 i\zeta_-(x, t)|^2 d^3x=0.$$

Та же последовательность построений приводит к равенству

$$\lim_{t\to-\infty}\int|\psi_+^{(0)}(x, t)-{}^1/_2 i\zeta_-(x, t)|^2 d^3x=0,$$

если мы вместо (151) применим оценку $|krj_l(kr)-\sin(kr-{}^1/_2 l\pi)|\leqslant \leqslant C(k)(1+|r|)^{-1}$. Мы заключаем, что (153) выполняется ∎

Выше φ было обобщенной собственной функцией с собственным значением $E(k)=k^2$. Явная функциональная зависимость $E(k)$ не играла никакой роли в доказательстве, которое проходит до тех пор, пока $E(k)$ строго монотонна. Это не только показывает, что в контексте предыдущей теоремы выполняется принцип инвариантности, но и делает прозрачной причину, по которой инвариантность вообще имеет место.

Следствие 1. Если $V(x)$ — центральный потенциал, удовлетворяющий оценке

$$|V(x)|\leqslant C(1+|x|)^{-3/2-\varepsilon}$$

($\varepsilon>0$), то волновые операторы $\Omega^\pm(-\Delta+V, -\Delta)$ существуют, $\operatorname{Ran}\Omega^+=\operatorname{Ran}\Omega^-$, а S-оператор дается равенством (152).

Конечно, этот результат не нов для нас — в § 8 были получены более сильные результаты, — однако доказательство здесь совершенно прямое. Следующий результат основан на теореме XI.67.

Следствие 2. Пусть

$$V(x)=\sum_{j=1}^{m}\gamma_j r^{-1}\sin(\alpha_j r)+Q(r),$$

причем $|Q(r)|\leqslant C(1+r)^{-3/2-\varepsilon}$. Тогда существуют $\Omega^\pm(-\Delta+V, -\Delta)$, $\operatorname{Ran}\Omega^+=\operatorname{Ran}\Omega^-$ и S-оператор задается равенством (152).

Слегка модифицируя построение, можно включить в эту схему сильно осциллирующие потенциалы теоремы XI.68 (задача 95). Более того, обращаясь к результатам теории обыкновенных дифференциальных уравнений, можно доказать, что $\operatorname{Ran}\Omega^\pm= =\operatorname{Ran}P_{ac}(-\Delta+V)$ и что оператор $-\Delta+V$ не имеет сингулярного спектра в ситуациях, описанных в следствиях 1 и 2. Наконец, отметим вариант теоремы XI.69 для нецентральных потенциалов.

Теорема XI.70. Пусть $V(\mathbf{x})$ — измеримая функция на $\mathbb{R}^3$, такая, что оператор $-\Delta+V$ в существенном самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Предположим, что существует замкнутое множество $\mathscr{E}$ меры нуль в $\mathbb{R}^3$, такое, что для каждого $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{E}$ существует решение $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{k})$ в смысле обобщенных функций уравнения $(-\Delta+V)\varphi=k^2\varphi$, удовлетворяющее оценке

$$|\varphi(\mathbf{x},\mathbf{k})-e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}-\gamma(\mathbf{k},\hat{x})x^{-1}e^{ikx}|\leqslant C(\mathbf{k})(1+x)^{-3/2-\varepsilon} \tag{154}$$

для $|x|\geqslant 1$. Предположим, что φ и γ — измеримые функции, $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{k})=\varphi(\mathbf{x},-\mathbf{k})$ и $\sup\limits_{\mathbf{k}\in K}|C(\mathbf{k})|<\infty$ для каждого компактного подмножества $K\subset\mathbb{R}^3\setminus(\mathscr{E}\cup\{0\})$. Тогда существуют волновые операторы $\Omega^\pm$, $\operatorname{Ran}\Omega^+=\operatorname{Ran}\Omega^-$ и оператор $S=(\Omega^-)^*\Omega^+$ задается равенством

$$(Sf)(x)=f(x)+\int\limits_{\omega\in S^2}\int\beta(k,\Omega)f(|\mathbf{k}|\omega)e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d^3k\,d\Omega(\omega),$$

где

$$\beta(k,\Omega)=i\pi^{-1}\gamma(k,\Omega).$$

Детали доказательства, которое очень похоже на доказательство теоремы XI.69, мы оставляем читателю (задача 96). Однако, поскольку это доказательство дает столь наглядную картину рассеяния, которая к тому же так похожа на приводимую в некоторых физических учебниках, мы коротко опишем некоторые промежуточные шаги. Пусть $g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3\setminus(\mathscr{E}\cup\{0\}))$ и

$$\psi(\mathbf{x})=\int g(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{x},\mathbf{k})d^3k.$$

Тогда, как и в центральном случае,

$$(e^{-iHt}\psi)(\mathbf{x})=\int g(\mathbf{k})e^{-ik^2t}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{k})d^3k.$$

В силу (154) и теоремы о мажорированной сходимости, $\|e^{-itH}\psi-\eta_t\|\to 0$ при $t\to\pm\infty$, где

$$\eta_t(\mathbf{x})=\int g(\mathbf{k})e^{-ik^2t}\left[e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}-\gamma(\mathbf{k},\hat{x})x^{-1}e^{ikx}\right]d^3k.$$

Главное здесь в том, что при $t\to-\infty$ второй член стремится к нулю согласно обобщению леммы 3 из § 3, поэтому $\|e^{-itH}\psi-e^{-itH_0}[(2\pi)^{3/2}\hat{g}]\|\to 0$ при $t\to-\infty$. При $t\to+\infty$ дают вклад оба члена, и мы имеем как падающую волну, так и «рассеянную».

XI.9. Дальнодействующие потенциалы

И классическая, и квантовомеханическая теории рассеяния, которыми мы занимались до сих пор, основаны на оценках, доказательства которых не проходят для потенциалов, убывающих как r^{-1}. Из того что мы сделали до сих пор, вообще не ясно, можно ли путем улучшения оценок перенести полученные результаты на случай дальнодействующих потенциалов, и один из выводов настоящего раздела как раз и состоит в том, что без существенной модификации теорий расширить их область применения нельзя; например, с помощью доказанной ниже теоремы XI.71 можно показать (задача 99), что

$$\underset{t \to \pm\infty}{\text{w-lim}}\, e^{it(-\Delta - r^{-1})} e^{it\Delta} = 0 \tag{155}$$

и потому сильного предела не существует.

В этом разделе мы сначала кратко обсудим классическую и квантовую кулоновы задачи, а затем систематически изучим случай общих дальнодействующих потенциалов.

На первый взгляд кажется, что теория рассеяния для классических кулоновых сил находится в превосходном состоянии. Решения уравнения

$$\ddot{\mathbf{r}} = -r^{-2}(\mathbf{r}/r)$$

хорошо известны в замкнутой форме. Величины $l = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}$ и $E = {}^1/_2 |\dot{\mathbf{r}}|^2 - r^{-1}$ сохраняются, так что, выбрав полярные координаты в плоскости, перпендикулярной l, можно описать орбиты уравнением

$$r(\theta)^{-1} = l^{-2}[1 + \sqrt{1 + El^2}\cos(\theta - \theta_0)].$$

Это уравнение описывает эллипс (или окружность), если $E < 0$, параболу, если $E = 0$, и одну ветвь гиперболы, если $E > 0$. Именно гиперболические орбиты естественно попытаться связать с теорией рассеяния. Гиперболы имеют в качестве асимптот прямые линии, т. е. орбиты движения в x-пространстве асимптотически совпадают со свободными орбитами. Более того, скорость движения имеет при $t \to \pm\infty$ предельные направления, а ввиду того что $r \to \infty$ и $v = \sqrt{2E + 2r^{-1}}$, она имеет также и предельную величину. Таким образом, и в фазовом пространстве асимптотика орбиты отвечает свободной орбите. Проблема возникает при временной параметризации этих орбит. Для свободной орбиты $\mathbf{r}_{\text{free}}(t) = \mathbf{c}t + \mathbf{b} + o(1)$. С другой стороны, поскольку $\dot{\mathbf{r}}$ имеет предел, то и в случае взаимодействия $r(t) = \mathbf{c}t + o(t)$ при $t \to \infty$. Можно провести дальнейший анализ члена $o(t)$ в этом выражении. Используя соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{E + r^{-1}} = \sqrt{E}(1 + (2E)^{-1}(ct)^{-1} + o(t^{-1})),$$

легко получить, что

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{c}t + \mathbf{d}\ln t + O(1)$$

при $t\to\infty$. Отсюда ясно, что кулонова орбита $r(t)$ не приближается к $\mathrm{a}+\mathrm{b}t$, но тем не менее наличие асимптот заставляет предполагать, что какая-то модифицированная теория рассеяния должна существовать. Мы видим, что между физически правильной временнóй параметризацией кулоновой орбиты и свободной асимптоты существует логарифмическое расхождение. Заметим, что $d\geqslant 0$, т. е. частица движется по орбите, отвечающей взаимодействию, *быстрее*, чем соответствующая свободная частица по асимптоте. На первый взгляд это кажется удивительным, поскольку речь идет о потенциале притяжения; но дело в том, что именно ввиду притяжения закон сохранения энергии ведет к более быстрому движению взаимодействующей частицы, чем это показывает ее асимптотическая скорость.

Все это подсказывает, что можно ожидать в квантовой теории: похоже, что при вычислении $\lim e^{itH}e^{-itH_0}$ придется заменить e^{-itH_0} на $e^{-is(t)H_0}$, где $s(t)=t+d\ln t$. Более того, проанализировав все изложенное выше, мы видим, что постоянная d должна быть функцией энергии E, т. е. e^{-itH_0} нужно заменить на $\exp[-itH_0-if(H_0)\ln t]$ с подходящей f. Для того чтобы понять, какой оператор эволюции

$$U_D(t)=\exp[-itH_0-if(H_0)\ln t]$$

следует выбрать для модифицированной квантовой динамики, отметим, что при применении метода Кука к $\exp[it(H_0+V)]\,U_D(t)$ мы должны оценить

$$\|[V-t^{-1}f(H_0)]\,U_D(t)\,\varphi\|.$$

Но $U_D(t)$ почти равно e^{-itH_0}, поэтому, в силу теоремы IX.31 и идей метода стационарной фазы, следует ожидать, что для больших t координата «x» будет равна $2pt$, поскольку при $H_0=-\Delta$ масса $m={}^1/_2$. Таким образом, $x^{-1}U_D(t)\,\varphi$ будет выглядеть как ${}^1/_2(pt)^{-1}\,U_D(t)\,\varphi$. В итоге для компенсации надо взять $f(H_0)=-p^{-1}/2$, что подкрепляется также соображениями, основанными на анализе классических решений. Для того чтобы избежать особенностей при $t=0$ и иметь возможность изучать $H=-\Delta-\lambda r^{-1}$, мы несколько изменим наш выбор и положим

$$H_D(t)=H_0-{}^1/_2\lambda\,(p\,|t|)^{-1}\,\theta(|4tH_0|-1),$$

где $H_0=-\Delta$, а $\theta(a)$ — характеристическая функция интервала $(0,\infty)$. Пусть

$$U_D(t)=\exp\left(-i\int_0^t H_D(s)\,ds\right). \tag{156}$$

Отметим, что интеграл в (156) можно рассматривать как интеграл от функций, зависящих от p, и потому определить

$U_D(t)$ с помощью функционального исчисления как оператор умножения в импульсном пространстве.

Теорема XI.71. Пусть $H_0=-\Delta$, $H=-\Delta+V(r)$,

$$V(\mathbf{r})=-\lambda r^{-1}+V_s(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r}\in\mathbb{R}^3,$$

где $V_s(\mathbf{r})$ удовлетворяет условиям (45). Тогда

$$\Omega_D^{\pm}=\operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty} e^{itH}U_D(t)$$

существуют и задают изометрии, такие, что

$$e^{-isH}\Omega_D^{\pm}=\Omega_D^{\pm}e^{-isH_0}. \tag{157}$$

Доказательство. Мы докажем, что

$$\|(H-H_D(t))U_D(t)\varphi\|\in L^1(\pm 1, \pm\infty) \tag{158}$$

для φ из плотного в L^2 множества $\mathcal{D}$. Из этой оценки следует существование $\Omega_D^{\pm}$. Изометричность $\Omega_D^{\pm}$ следует из унитарности $U_D(t)$. Равенство (157) доказывается точно так же, как и в случае короткодействующих потенциалов, если заметить, что (задача 100)

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} U_D(t)^* U_D(t+s)=e^{-isH_0}.$$

Для $t>0$ определим

$$\tilde{H}_D(t)\equiv H_D(t)-H_0,$$

а для $t>1/4p^2$ введем

$$A_D(t)\equiv\int_0^t \tilde{H}_D(s)\,ds=-\frac{1}{2}\lambda p^{-1}[\ln t+\ln(4p^2)].$$

В случае $L^2(1, \infty)$ оценка (158) вытекает из соотношений

$$\|V_s(r)\exp(-itH_0-iA_D(t))\varphi\|\in L^1(1, \infty) \tag{159a}$$

и

$$\|[-\lambda r^{-1}-\tilde{H}_D(t)]\exp(-itH_0-iA_D(t))\varphi\|\in L^1(1, \infty). \tag{159b}$$

(159a) легко получить, модифицируя (задача 101) метод стационарной фазы теоремы XI.16 применительно к тем φ, для которых $\hat{\varphi}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$. Пусть

$$\eta(x, t)=\exp(ix^2/4t)\exp(i\lambda t(2x)^{-1}\ln(x^2/t)),$$

и для $\hat{\varphi}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$ положим

$$R_\varphi(x, t)=U_D(t)\varphi(x)-(2it)^{-3/2}\eta(x, t)\hat{\varphi}(x/2t).$$

Покажем, что R_φ допускает оценку

$$|R_\varphi(x, t)| \leqslant C(\ln|t|)^\mu t^{-5/2}[1+(x/t)^2]^{-m} \tag{160}$$

при всех $|t|>2$, любом целом m и подходящих постоянных C и μ, зависящих только от m и φ, а также что из (160) вытекает (159b).

Сначала заметим, что из (160) вытекает соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\|U_D(t)\varphi-(2it)^{-3/2}\eta(x, t)\hat{\varphi}(x/2t)\|_2=0 \tag{161}$$

для $\hat{\varphi}\in C_0^\infty$ и потому для всех φ. Это соотношение аналогично (IX.33) и будет играть важную роль при физической интерпретации $\Omega_D^\pm$, которую мы дадим ниже.

Пусть $\varphi_1=(p^{-1}\hat{\varphi})^\vee$. Тогда для достаточно больших t

$$[(\lambda r^{-1}+\tilde{H}_D(t))U_D(t)\varphi](x)=(\lambda x^{-1}U_D(t)\varphi)(x)-$$
$$-\lambda(2t)^{-1}(U_D(t)\varphi_1)(x)=\lambda x^{-1}R_\varphi(x, t)-\lambda(2t)^{-1}R_{\varphi_1}(x, t),$$

поскольку член $\lambda x^{-1}\eta(x, t)\hat{\varphi}(x/2t)$ полностью компенсируется членом $\lambda(2t)^{-1}\eta(x, t)\hat{\varphi}_1(x/2t)$. Далее, в силу (160),

$$\|\lambda x^{-1}R_\varphi(x, t)\|^2\leqslant t^{-4}(\ln|t|)^{2\mu}$$

и аналогично для члена с φ_1. Таким образом, (159) будет доказано, если доказать (160).

Для доказательства (160) введем $\varphi_C(x, t)$ равенством

$$\varphi_C(x, t)=[e^{-iA_D(t)}\varphi](x),$$

так чтобы для достаточно больших t

$$\hat{\varphi}_C(k, t)=\exp[{}^1/{}_2 i\lambda k^{-1}\ln(4k^2t)]\hat{\varphi}(k).$$

Поскольку $\hat{\varphi}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$, постольку $\hat{\varphi}_C(\cdot, t)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, и для любой нормы $\|\cdot\|_\alpha$ на $\mathscr{S}$ и всех t с $|t|>2$

$$\|\hat{\varphi}_C(\cdot, t)\|_\alpha\leqslant C_\alpha\ln(|t|)^{\nu(\alpha)},$$

откуда

$$\|\varphi_C(\cdot, t)\|_\alpha\leqslant D_\alpha\ln(|t|)^{\mu(\alpha)}; \tag{162}$$

ибо $\wedge$ есть гомеоморфизм $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$. Теперь мы будем следовать доказательству теоремы IX.31 Воспользуемся равенствами

$$(U_D(t)\varphi)(x)=(4\pi it)^{-3/2}\int e^{i(x-y)^2/4t}\varphi_C(y, t)\,dy$$

и

$$e^{i(x-y)^2/4t}=e^{ix^2/4t}e^{-ix\cdot y/2t}e^{iy^2/4t}$$

и убедимся, что

$$R_\varphi(x, t) = (4\pi i t)^{-3/2} e^{ix^2/4t} \int e^{-ix\cdot y/2t} (e^{iy^2/4t} - 1)\, \varphi_C(y, t)\, dy. \tag{163}$$

Далее, применяя неравенства $|e^{iy^2/4t} - 1| \leqslant |y^2/4t|$ и (162), получим

$$|R_\varphi(x, t)| \leqslant C\,|t|^{-5/2} \ln(|t|)^\mu.$$

Аналогично из (163) интегрированием по частям найдем

$$\left|\left(\frac{x}{t}\right)^{2m} R_\varphi(x, t)\right| \leqslant |t|^{-3/2} \left|\int (-\Delta_y)^m [e^{-ix\cdot y/2t}](e^{iy^2/4t} - 1)\varphi_C(y, t)\, dy\right| \leqslant$$
$$\leqslant |t|^{-3/2} \int |(-\Delta_y)^m [(e^{iy^2/4t} - 1)\,\varphi_C(y, t)]|\, dy \leqslant$$
$$\leqslant C_m\, |t|^{-5/2} (\ln|t|)^{\mu(m)},$$

так что

$$(1 + (x/t)^2)^{2m}\, |R_\varphi(x, t)| \leqslant C_m\, |t|^{-5/2} (\ln|t|)^\mu,$$

откуда следует (160). ∎

Прежде чем обратиться к физической интерпретации $\Omega_D^\pm$, отметим два следствия их существования.

Следствие 1. Предположим, что $V_s(r) \to 0$ на ∞ и обладает свойствами (45). Тогда $\sigma_{ac}(H) = [0, \infty)$, где $H = -\Delta - \lambda|\mathbf{r}|^{-1} + V_s(r)$.

Следствие 2. Если $\lambda \neq 0$ и H таков же, как и выше, то обычных $\Omega^\pm(H, H_0)$ не существует.

Следствие 1 стандартным образом выводится из равенства (157). Доказательство следствия 2 мы оставляем читателю (задача 99).

Обратимся теперь к физической интерпретации $\Omega_D^\pm$. Пусть $\psi = \Omega_D^+\varphi$. Положим $\psi_t = e^{-itH}\psi$, $\varphi_t^{(0)} = e^{-itH_0}\varphi$, $\varphi_t^{(D)} = U_D(t)\varphi$. Считать, что, подобно случаю короткодействующих потенциалов, $\|\varphi_t^{(0)} - \psi_t\| \to 0$ при $t \to -\infty$, нельзя. Скорее

$$\|\varphi_t^{(D)} - \psi_t\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to -\infty.$$

Однако, в силу (161) и (IX.33),

$$\|\eta_t\varphi_t^{(0)} - \varphi_t^{(D)}\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty,$$
$$\|\gamma_t\hat{\varphi}_t^{(0)} - \hat{\varphi}_t^{(D)}\| = 0 \quad \text{при всех } t$$

с подходящими фиксированными функциями $\eta_t(x)$ и $\gamma_t(k)$ единичной амплитуды. В итоге при $t \to -\infty$

$$\int \left| |\varphi_t^{(0)}(x)|^2 - |\psi_t(x)|^2 \right| dx \to 0, \qquad \int \left| |\hat{\varphi}_t^{(0)}(p)|^2 - |\hat{\psi}_t(p)|^2 \right| dp \to 0.$$

Следовательно, хотя ψ_t не является асимптотически свободной волновой функцией, порождаемые ею *вероятностные распределения* как координаты, так и импульса стремятся при $t \to -\infty$ к соответствующим распределениям, порождаемым свободной волновой функцией $\varphi_t^{(0)}$. Аналогичное утверждение справедливо и при $t \to \infty$. Именно в этом смысле движение «асимптотически свободно».

Полноту $\Omega_D^{\pm}$ можно доказать, налагая более жесткие ограничения на V_s.

Теорема XI.72. Предположим, что

(i) V_s —Δ-ограничен с относительной гранью $\alpha < 1$;
(ii) $V_s(H_0+1)^{-m-1}$ имеет след при некотором m.

Тогда $\Omega_D^{\pm}$ полны в том смысле, что

$$\operatorname{Ran}\Omega_D^+ = \operatorname{Ran}\Omega_D^- = \mathscr{H}_{ac}(H).$$

Доказательство можно провести, обратившись к работе, приведенной в Замечаниях, и к задаче 102. Отметим также, что модифицированные волновые операторы существуют и при многоканальном рассеянии; см. Замечания. Применяя методы, описанные в § 17, Энсс доказал усиленные варианты приведенной теоремы. Похоже, что можно доказать соответствующие аналоги и в многоканальном случае.

В оставшейся части этого раздела мы намерены обсудить теорию рассеяния в случае дальнодействующих потенциалов более общих, чем кулоновы потенциалы. Такая общая теория прояснит выбор $U_D(t)$.

Рассмотрим сначала классический случай. Предположим, что $\mathbf{F} = -\nabla V$, причем

$$\lim_{x\to\infty} V(\mathbf{x}) = 0, \tag{164a}$$

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x})| \leqslant k(1+x)^{-1-\alpha}, \tag{164b}$$

$$|\partial F_i(\mathbf{x})/\partial x_j| \leqslant k(1+x)^{-2-\alpha}, \tag{164c}$$

где $\alpha > 0$. Конечно, если $\alpha > 1$, то мы имеем случай короткодействующего потенциала, рассмотренный в § 2, поэтому предположим, что $\alpha < 1$ Для удобства предположим также, что α^{-1} не равно целому числу. Иногда мы еще будем предполагать, что F — «почти центрально-симметричная» сила, т. е. для некоторого $\varepsilon > 0$

$$|\mathbf{F}_\perp(\mathbf{x})| \leqslant k(1+x)^{-2-\varepsilon}, \tag{165}$$

где $\mathbf{F}_\perp(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}_\parallel(\mathbf{x})$ и $\mathbf{F}_\parallel(\mathbf{x}) = x^{-2}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{x}))\,\mathbf{x}$.

Так же как в случае короткодействующих потенциалов, рассмотрим задачу

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{p}(t), \quad \dot{\mathbf{p}}(t)=-\nabla V, \quad \mathbf{p}(0)=\mathbf{p}_0, \quad \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0 \tag{166}$$

и введем множества

$$\Sigma_{\pm}=\{\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0\rangle \in \mathbb{R}^6 \mid V(\mathbf{x}_0)+\frac{1}{2}p_0^2>0, \text{ решение } \mathbf{x}(t)$$

$$\text{задачи (166) удовлетворяет условию } \overline{\lim_{t\to\mp\infty}}\, |\mathbf{x}(t)|=\infty\}.$$

Как и в § 2, можно показать (задача 103), что $\Sigma_+=\Sigma_-$ почти всюду и для $\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0\rangle \in \Sigma_{\pm}$ и некоторой $c>0$ при всех t

$$|\mathbf{x}(t)|\geqslant c|t|-d. \tag{167}$$

Теорема XI.73. Пусть $\mathbf{F}$ и V удовлетворяют условиям (164).

(a) Пусть $\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)\rangle$ — решение (166) с начальными данными в Σ_+. Тогда существует

$$\lim_{t\to-\infty} \mathbf{p}(t)\equiv \mathbf{p}_{\text{in}}.$$

Более того, $\mathbf{p}(t)-\mathbf{p}_{\text{in}}=O(|t|^{-\alpha})$ при $t\to-\infty$, и реализуется каждое значение $\mathbf{p}_{\text{in}}\neq 0$.

(b) Если $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$ — два решения, для которых $\lim_{t\to-\infty}(\mathbf{p}_1(t)-\mathbf{p}_2(t))=0$, то существует

$$\mathbf{a}\equiv\lim_{t\to-\infty}(\mathbf{x}_1(t)-\mathbf{x}_2(t)).$$

Более того, $|\mathbf{x}_1(t)-\mathbf{x}_2(t)-\mathbf{a}|=O(|t|^{-\alpha})$ при $t\to-\infty$, и для заданного $\mathbf{p}_{\text{in}}\neq 0$ и соответствующего $\mathbf{x}_1$ реализуется каждое значение $\mathbf{a}$. Если $\mathbf{a}=0$, то $\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_1$ для всех t; если $\mathbf{a}=\mathbf{p}_{\text{in}}t_0$, то $\mathbf{x}_2(t)=\mathbf{x}_1(t-t_0)$.

(c) Предположим, что выполняется еще и (165). Тогда для любого вектора $\mathbf{w}$, такого, что $\mathbf{w}\cdot\mathbf{p}_{\text{in}}=0$,

$$\lim_{t\to-\infty} \mathbf{x}(t)\cdot\mathbf{w}\equiv\alpha(\mathbf{w})$$

существует и $\mathbf{x}(t)\cdot\mathbf{w}-\alpha(\mathbf{w})=O(|t|^{-\delta})$, где $\delta=\min\{\varepsilon,\alpha\}$; при этом путем перебора всех $\mathbf{x}$ с заданным $\mathbf{p}_{\text{in}}\neq 0$ можно реализовать все линейные функционалы α на $\{\mathbf{w}\mid \mathbf{w}\cdot\mathbf{p}_{\text{in}}=0\}$.

Доказательство. Пусть $\langle x(t), p(t)\rangle$ — решение с начальными данными в Σ_+. В силу (164b) и (167),

$$|F(x(t))|\leqslant k(1+|x(t)|)^{-1-\alpha}\leqslant C_1(1+|t|)^{-1-\alpha},$$

так что существует

$$\lim_{t\to-\infty} p(t)=p_0+\lim_{t\to-\infty}\int_0^t F(x(s))\,ds$$

и $p(t)-p_{\text{in}}=O(|t|^{-\alpha})$. Отложим пока доказательство того, что реализуется каждое значение $p_{\text{in}}\neq 0$.

Пусть x_1, x_2 — два решения с одинаковым значением p_{in}. Пусть $\Delta(t)=x_1(t)-x_2(t)$. Тогда

$$|\dot{\Delta}(t)|=|p_1(t)-p_2(t)|\leqslant\int_{-\infty}^{t}|F(x_1(s))-F(x_2(s))|\,ds,$$

поскольку $p_i(t)=p_{\text{in}}+\int_{-\infty}^{t}F(x_i(s))\,ds$. Теперь, в силу (164c) и (167),

$$|F(x_1(t))-F(x_2(t))|\leqslant C_2|\Delta(t)|(1+|t|)^{-2-\alpha},$$

так что

$$|\dot{\Delta}(t)|\leqslant\int_{-\infty}^{t}|\Delta(s)|(1+|s|)^{-2-\alpha}\,ds. \tag{168}$$

Предположим, что $|\Delta(t)|\leqslant C_\gamma|t|^\gamma$, $\alpha<\gamma\leqslant 1$ при $t\leqslant -1$. Тогда, в силу (168), $|\dot{\Delta}(t)|\leqslant C(1+\alpha-\gamma)^{-1}|t|^{-1-\alpha+\gamma}$, так что

$$|\Delta(t)|=\left|\Delta(-1)+\int_{-1}^{t}\dot{\Delta}(s)\,ds\right|\leqslant C'_\gamma|t|^{\gamma-\alpha}.$$

Но $|\Delta(t)|\leqslant C|t|$. Поэтому, повторяя проделанную оценку N раз, где N таково, что $\alpha N<1$, $\alpha(N+1)>1$, получаем, что $|\Delta(t)|\leqslant$ $\leqslant C'|t|^{1-N\alpha}$. Тогда, в силу (168),

$$|\dot{\Delta}(t)|\leqslant C((N+1)\alpha)^{-1}|t|^{-(N+1)\alpha}$$

для $t<0$, так что существует $\lim\limits_{t\to-\infty}\Delta(t)=\Delta(0)+\lim\limits_{t\to-\infty}\int_{0}^{t}\dot{\Delta}(s)\,ds$.

Это означает, что $\Delta(t)$ ограничена, и, в силу (168), $\Delta(t)-a=$ $=O(|t|^{-\alpha})$. Доказательство реализуемости каждого a мы опять-таки отложим.

Если $a=0$, то $\Delta(t)\to 0$ при $t\to-\infty$. Следовательно, в силу (168), при $t<0$ имеем

$$|\Delta(t)|\leqslant(2+\alpha)^{-1}(1+\alpha)^{-1}(1+|t|)^{-\alpha}\sup_{-\infty\leqslant s<t}|\Delta(s)|.$$

Выберем t таким, что $(2+\alpha)^{-1}(1+\alpha)^{-1}(1+|t|)^{-\alpha}<1$. Тогда можно заключить, что $\Delta(s)=0$ при $s\leqslant t$, так что $\Delta(t)=0$ для всех t в силу локальной единственности решения.

При заданных t_0 и $x_1(t)$ легко убедиться, что $x_3(t)\equiv x_1(t-t_0)$ обладает свойством: $\dot{x}_3(t)\to p_{\text{in}}$ и $x_1(t)-x_3(t)=\int_{t-t_0}^{t}\dot{x}_1(s)\,ds\to p_{\text{in}}t_0$.

В силу только что доказанной единственности, любое x_2, такое, что $x_2 \to p_{\text{in}}$ и $x_1 - x_2 \to p_{\text{in}} t_0$, совпадает с x_3.

Предположим теперь, что выполняется (165) и $w \cdot p_{\text{in}} = 0$. Допустим, что $|w \cdot F(x(t))| \leqslant C|t|^{-\gamma}$, где $1 < \gamma < 2$. Тогда, ввиду того что

$$w \cdot p(t) = \int_{-\infty}^{t} w \cdot F(x(s))\, ds,$$
$$w \cdot x(t) = w \cdot x(0) + \int_{0}^{t} (p(s) \cdot w)\, ds, \qquad (169)$$

имеем оценку

$$|w \cdot x(t)| \leqslant C_2 (1 + |t|)^{2-\gamma}.$$

Таким образом, в силу (167),

$$|w \cdot x(t)|\; |x(t)|^{-1} \leqslant C_4 (1 + |t|)^{1-\gamma}.$$

В результате, применяя неравенство

$$|a \cdot F(x(s))| \leqslant |F_\perp (x(s))|\, |a| + \frac{|a \cdot x(s)|}{|x(s)|} |F(x(s))|,$$

имеем с учетом (164) и (165)

$$|w \cdot F(x(t))| \leqslant \text{const}\, [(1 + |t|)^{-2-\varepsilon} + (1 + |t|)^{-\gamma-\alpha}].$$

Начав с $\gamma = 1 + \alpha$ и повторив эту процедуру нужное число раз, получим оценку

$$|w \cdot F(x(t))| \leqslant \text{const}\, (1 + |t|)^{-2-\delta},$$

где $\delta = \min(\varepsilon, \alpha)$. Таким образом, в силу (169), получим, что $w \cdot p(t) = O(|t|^{-1-\delta})$, так что у $w \cdot x(t)$ есть предел $\alpha(w)$ и $w \cdot x(t) - \alpha(w) = O(|t|^{-\delta})$.

Наконец, вернемся к вопросу существования, т. е. утверждению о реализуемости всех $\mathbf{p}_{\text{in}} \neq 0$ и $\mathbf{a}$; это в свою очередь автоматически будет означать реализуемость каждого линейного отображения α: $w \mapsto \alpha(w)$. Очевидно, достаточно построить вспомогательную функцию $\mathbf{z}(\mathbf{p}, t)$, такую, что $\lim\limits_{t \to -\infty} \dot{\mathbf{z}}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p}$, а затем для любого $\mathbf{a}$ найти решение $\mathbf{x}(t)$, такое, что $\lim\limits_{t \to -\infty} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(\mathbf{p}, t)) = \mathbf{a}$ и $\lim\limits_{t \to -\infty} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{p}$. Функция $\mathbf{z}$ заменяет простейшую функцию $\mathbf{p}t$, используемую в случае короткодействия. Если у нас будет «правильная» функция $\mathbf{z}(\mathbf{p}, t)$, мы сможем так же, как в случае короткодействия, построить решение x с помощью теоремы о сжимающих отображениях.

Как сделать хороший выбор $\mathbf{z}(\mathbf{p}, t)$? Для того чтобы получить приближенную функцию, отправляясь от функции $\dot{\mathbf{z}}$, стремящейся к $\mathbf{p}$ при $t \to -\infty$, мы попытаемся интегрировать от $-\infty$. Однако получить $\mathbf{z}$ интегрированием $\dot{\mathbf{z}}$ прямо от $-\infty$ мы не в состоянии, поскольку $\dot{\mathbf{z}}$ стремится к $\mathbf{p}$ только как $|t|^{-\alpha}$ с $\alpha < 1$. Поэтому проинтегрируем $\dot{\mathbf{z}}$ от $t = 0$ и определим $\mathbf{z}_n(\mathbf{p}, t)$ индуктивно:

$$\mathbf{z}_0(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p}t,$$

$$\dot{\mathbf{z}}_n(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} + \int_{-\infty}^{t} \mathbf{F}(\mathbf{z}_{n-1}(\mathbf{p}, s))\, ds,$$

$$\mathbf{z}_n(\mathbf{p}, t) = \int_0^t \dot{\mathbf{z}}_n(\mathbf{p}, s)\, ds.$$

Возьмем $z(p, t)$ равным $z_N(p, t)$ с $N = [1/\alpha]$ (целая часть $1/\alpha$). Ясно, что для любого фиксированного $p \neq 0$ и $t \leqslant 0$

$$|z_n(p, t)| \geqslant c|t| - d \tag{170}$$

при $n = 0, \ldots, N$ и некоторой $c > 0$. Более того, просто доказательство по индукции типа уже проведенных выше дает неравенство

$$|z_n(p, t) - z_{n-1}(p, t)| \leqslant Kt^{1-n\alpha} \tag{171}$$

при $n = 1, \ldots, N$. Если x удовлетворяет соотношениям

$$\ddot{x}(t) = F(x(t)), \qquad x(t) - z_N(p, t) - a \to 0, \qquad \dot{x}(t) - z_N(p, t) \to 0,$$

то $y(t) = x(t) - z_N(p, t) - a$ удовлетворяет уравнению

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{w} [F(z_N(p, s) + a + y(s)) - F(z_{N-1}(p, s))]\, ds\, dw: \tag{172}$$

Обратно, решения (172) дают решения уравнения Ньютона с требуемым асимптотическим поведением. Имея (164c), (170) и (171), можно воспользоваться методом сжимающих отображений § 2 (задача 104) и найти решения (172), а также доказать существование, завершив доказательство теоремы. ∎

Какова же физическая интерпретация этой теоремы? Рассмотрим случай, когда одновременно выполнены условия (164) и (165). Тогда при заданном $\mathbf{p}_{\text{in}} \neq 0$ и перпендикулярном ему $\mathbf{b}_{\text{in}}$ существует однопараметрическое семейство решений x_s, таких, что

$$\dot{\mathbf{x}}_s(t) \to \mathbf{p}_{\text{in}}, \qquad \mathbf{x}_s(t) - \mathbf{p}_{\text{in}}(\mathbf{p}_{\text{in}} \cdot \mathbf{x}(s))\, p_{\text{in}}^{-2} \to \mathbf{b}_{\text{in}}$$

при $t \to -\infty$. Они различаются лишь временно́й параметризацией, т. е. $x_s(t) = x_0(t - s)$. Таким образом, если $\langle \mathbf{x}_s(0), \dot{\mathbf{x}}_s(0) \rangle \in \Sigma_-$

(а это имеет место при почти всех $\mathbf{p}_{\text{in}}$ и $\mathbf{b}_{\text{in}}$; см. задачу 105), то $\lim\limits_{t \to \infty} \dot{\mathbf{x}}_s(t) = \mathbf{p}_{\text{out}}$ и

$$\lim_{t \to \infty} [\mathbf{x}_s(t) - \mathbf{p}_{\text{out}}(\mathbf{p}_{\text{out}} \cdot \mathbf{x}(s))\, p_{\text{out}}^{-2}] = \mathbf{b}_{\text{out}},$$

независимо от s. В результате мы приходим к естественно определенному отображению

$$\tilde{S}\colon \langle \mathbf{p}_{\text{in}}, \mathbf{b}_{\text{in}} \rangle \to \langle \mathbf{p}_{\text{out}}, \mathbf{b}_{\text{out}} \rangle.$$

Как и в случае короткодействующих потенциалов, если сила центральна, то благодаря закону сохранения момента количества движения b_{out} полностью определяется вектором $\mathbf{p}_{\text{out}}$, так что S описывается заданием одного лишь угла рассеяния как функции $\mathbf{p}_{\text{in}}$ и $\mathbf{b}_{\text{in}}$. Однако в отличие от короткодействующих потенциалов в случае дальнодействия время задержки перестает быть конечным. Действительно, можно показать (задача 106), что если $V_\varepsilon(x)$ — некоторая короткодействующая модификация V, например $V_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon x^2} V(x)$, то при $\varepsilon \to 0$ часть оператора рассеяния, заданная величиной $\tilde{S}_\varepsilon$, сходится к определенному выше $\tilde{S}$. При этом в типичных случаях время задержки расходится при $\varepsilon \to 0$, если V — по-настоящему дальнодействующий потенциал.

Проведенное рассуждение наводит на мысль о том, что проблема дальнодействия при квантовом рассеянии связана с бесконечными зависящими от энергии фазами, ибо аналогом классического времени задержки служит фаза квантового оператора рассеяния, а переход от обычной к модифицированной динамике можно рассматривать как бесконечную зависящую от энергии корректировку фазы. К сожалению, приведенная выше формулировка не имеет квантового обобщения, поскольку отображение $\langle p, a \rangle \mapsto z_N(p, t) + a$ при фиксированном t в общем случае *не является* каноническим преобразованием, так что в квантовой механике ему не будет отвечать унитарный оператор. Однако иногда в классическом случае можно построить приближенные решения $\tilde{z}(p, a, t)$, такие, что $\langle p, a \rangle \mapsto \tilde{z}(p, a, t)$ является каноническим преобразованием при каждом t, а уравнения (166) обладают решением $x(p, a, t)$ со свойствами $|x - \tilde{z}| + |\dot{x} - \dot{\tilde{z}}| \to 0$ при $t \to -\infty$ и $\dot{\tilde{z}}(p, a, t) \to p$, $\tilde{z}(p, a, t) - \tilde{z}(p, b, t) \to a - b$ при $t \to -\infty$. При исследовании квантового случая ниже мы будем придерживаться аналогии именно с таким классическим построением. При этом, перенося рассуждения, проводимые ниже применительно к квантовому случаю, на классический, можно передоказать теорему XI.73 и получить доказательство, основанное на приближенной динамике, *задаваемой* каноническим преобразованием; см. ссылки в Замечаниях и задачу 107.

Теорема XI.74. Пусть $V=V_L+V_s$ — измеримая функция на $\mathbb{R}^n$, где V_s удовлетворяет условиям (45), а V_L — неравенству

$$|(D^\alpha V_L)(x)|\leqslant C(1+x)^{-|\alpha|-\varepsilon}, \qquad |\alpha|\leqslant M;$$

здесь $\varepsilon>1/2$, если $M=1$, $\varepsilon>1/5$, если $M=2$, и $\varepsilon>0$, если $M=3$. Тогда существует C^∞-функция $W(\mathbf{k}, t)$, определенная для всех $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ и $t\in\mathbb{R}$ и такая, что

(a) $$W(k, s+t)-W(k, t)\to sk^2/2 \qquad (173)$$

при $t\to\pm\infty$ и любых фиксированных k, s;

(b) для любого самосопряженного расширения H оператора $-{}^1/_2\Delta+V$ на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ существуют

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty} e^{itH}U_D(t)\equiv\Omega_D^\pm,$$

где $U_D(t)=\exp(-iW(-i\nabla, t))$.

Полное доказательство этой теоремы включает в себя большое количество тонких оценок. Мы не будем приводить его здесь, а ограничимся описанием некоторых важных моментов, включая метод построения W.

Суть условия (173) в том, что оно влечет за собой (задача 100) равенство

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty}[U_D(t+s)\,U_D(t)^{-1}]=e^{-isH_0},$$

и потому выполняется обычное соотношение

$$e^{-isH}\Omega_D^\pm=\Omega_D^\pm e^{-isH_0}.$$

Конечно, на это можно возразить, что W не всегда однозначно определено, и это действительно так. Однако если W и W' — две функции, удовлетворяющие (a) и (b), $\operatorname{Ran}\Omega_D^+=\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H)$, то (задача 108) существует измеримая конечная почти всюду функция $F(k)$, такая, что

$$(\Omega_D^+)'=\Omega_D^+e^{iF(-i\nabla)}.$$

В частности, $\operatorname{Ran}\Omega_D^+$ не зависит от W, и потому асимптотическая полнота имеет место для какого-то одного W тогда и только тогда, когда она имеет место для любого другого W.

Кроме того, можно показать, что при любом выборе W асимптотическое *распределение вероятностей*, отвечающее $U_D(t)f$ как в x-, так и в p-пространстве, совпадает с распределением, отвечающим $e^{-itH_0}f$. Конечно, если $(\Omega_D^\pm)'=\Omega_D^\pm e^{iF_\pm(k)}$, то ядра S-операторов на поверхности энергии связаны равенством

$$S'(k, k')=S(k, k')\,e^{i(F_+(k)-F_-(k'))},$$

так что дифференциальные сечения рассеяния тоже не зависят от выбора W. Однако «фаза» $S(k, k')$, к сожалению, остается не определенной до тех пор, пока не сделан выбор W. Вопрос о том, что есть «правильная фаза», весьма интересен, и мы обсуждаем его в Замечаниях.

Обратимся теперь к трем аспектам доказательства теоремы XI.74: (i) сглаживанию V_L, (ii) выбору W, (iii) замечаниям, касающимся оценок.

Ясно, что заданный потенциал V, подчиненный требованиям теоремы XI.74, можно многими способами разбить на сумму V_L и V_s с V_s, удовлетворяющим (45). Первый шаг — сделать разбиение таким, чтобы V_L был C^∞-функцией, а его производные все быстрее и быстрее убывали на бесконечности. В действительности можно сделать разбиение, при котором

$$|(D^\alpha V_L)(x)| \leqslant C_\alpha (1+x)^{-m(|\alpha|)} \tag{174a}$$

для всех α, где

$$m(1)+m(3) > 4, \tag{174b}$$

$$m(l) \geqslant \delta l - \varepsilon, \qquad \delta > 1/2. \tag{174c}$$

Например (задача 109), в случае $\varepsilon > 0$, $M=3$ можно взять $m(1)=1+\varepsilon$, $m(2)=2+\varepsilon$, $m(3)=3+\varepsilon$, $m(l)=3+\varepsilon+{}^2/_3(l-3)$ для $l>3$. Как реально построить V_L? Начнем с разложения $V=\tilde{V}_s+\tilde{V}_L$. Первый приходящий на ум кандидат на роль V_L — функция $f=h*\tilde{V}_L$, где $h\in C_0^\infty$. Функция f, конечно, будет класса C^∞, но ее высшие производные могут не убывать автоматически поскольку $\tilde{V}_L$ может быть только класса C^1, а $D^\alpha h$ не будет иметь нужного «убывания». Иногда даже при фиксированной h нужно, чтобы она все более и более расплывалась при $x\to\infty$! Для того чтобы все это учесть, следует взять $\tilde{V}_L=\sum \tilde{V}_L^{(n)}$, где $\tilde{V}_L^{(n)}$ таковы, что их носители лежат внутри все более обширных сферических оболочек, уходящих на бесконечность. Тогда V_L можно взять равным $\sum h_n * \tilde{V}_L^{(n)}$, где h_n становится все более и более расплывающимся. Для того чтобы получить короткодействующую разность $V_L-\tilde{V}_L$, нужно применять дополнительный трюк. Набросок построения в случае $\varepsilon>0$, $M=3$ дан в задаче 109.

Как будет объяснено дальше, решающую роль играет неравенство (174b). В случае $M=3$, $\varepsilon>0$ оно выполняется очевидным образом, и это служит причиной того, что при $\varepsilon>0$, $M=3$ описанное построение всегда возможно и для него не нужны никакие априорные сведения о $D^\alpha V_L$ с $|\alpha|\geqslant 4$. По этой же причине ε должно быть больше $1/2$ (соответственно $\varepsilon>1/5$), если $M=1$ (соответственно $M=2$). Когда новое V_L строится описанным выше способом, указанные значения ε требуются для того, чтобы гарантировать выполнение (174b) (см. задачу 110).

Обратимся теперь к построению W. При применении метода Кука для изучения пределов $\Omega_D^{\pm}$ приходится проводить оценку

$$\iint \left(\frac{1}{2}k^2+V(x)-\frac{\partial W}{\partial t}\right) e^{ik\cdot x-iW(k,\,t)}\hat{\varphi}(k)\,dx\,dk.$$

Короткодействующую часть V можно оценить так же, как раньше. Вклад дальнодействующей части частично должен компенсироваться $\partial W/\partial t$, так же как это было в кулоновом случае. Если используется метод стационарной фазы, то можно ожидать, что интеграл, о котором шла речь выше, будет сосредоточен около точек, где $x=\partial W/\partial k$. Таким образом, для того чтобы эффект компенсации был как можно больше, можно попытаться решить уравнение

$$V_L\left(\frac{\partial W}{\partial k}\right)+\frac{k^2}{2}=\frac{\partial W}{\partial t}. \tag{175}$$

Прежде чем обсуждать точные решения этого нелинейного дифференциального уравнения в частных производных, мы хотим переписать его в несколько ином виде и обсудить приближенные решения. Естественно представлять себе, что $U_D(t)$ получится в результате интегрирования нестационарного уравнения с гамильтонианом

$$H(t)=H_0+f(-i\nabla,\ t).$$

Ясно, что следует взять f в виде

$$f(k,\ t)\equiv\frac{\partial W}{\partial t}-\frac{k^2}{2}. \tag{176}$$

Если ввести $x(k,\ t)\equiv\partial W/\partial k$, то (175) примет следующий вид:

$$f(k,\ t)=V_L(x(k,\ t)). \tag{177}$$

Теперь, применяя $\partial/\partial k$ к (175), легко убедиться, что $x(k,\ t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(k,\ t)=k+\nabla_k V_L(x(k,\ s)). \tag{178}$$

Если попытаться взять $W\equiv 0$ при $t=t_0$, то (177) и (178) приведут к интегральному уравнению

$$f(k,\ t)=V_L\left(kt-kt_0+\int_{t_0}^{t}\nabla_k f(k,\ s)\,ds\right). \tag{179}$$

Простейшее приближенное решение (179) получится, если взять $t_0=0$ и $f(k,\ t)\approx V_l(kt)$. Полагая

$$W(k,\ t)=\frac{1}{2}k^2t+\int_{t_0}^{t} f(k,\ s)\,ds+\text{const},$$

мы видим, что это приближение приводит к W, которое использовалось в кулоновом случае. Такой выбор можно делать для определения модифицированных волновых операторов при $V_L(x)=|x|^{-\alpha}$ до тех пор, пока $\alpha>1/2$. При $\alpha<1/2$ необходимо либо попытаться решить (175) точно, либо перейти к следующим приближениям в решениях (179), взяв, например,

$$f(k,\ t)\approx V_L\left(kt+\int_0^t s\,(\nabla V_L)\,(ks)\,ds\right).$$

Такой метод более высоких приближений действительно применялся, но оказалось, что, когда $\alpha\to 0$, его применение требует сведений о поведении все более и более высоких производных V_L.

Ключ к доказательству теоремы XI.74 — в построении *точных* решений (175), которое становится возможным после осознания того, что это есть стандартное уравнение классической механики, а именно **уравнение Гамильтона — Якоби**, записанное в импульсном пространстве. Теперь мы можем провести формальное решение (175). Пусть $g(\eta)$ — произвольная гладкая функция на $\mathbb{R}^n$ (или подмножестве $\mathbb{R}^n$). Фиксируем вещественное t_0. Пусть $X(\eta,\ t)$ — решение уравнения Ньютона

$$\ddot{X}(\eta,\ t)=-(\nabla V_L)(X(\eta,\ t))$$

с начальными условиями

$$X(\eta,\ t_0)=g(\eta), \tag{180a}$$

$$\dot{X}(\eta,\ t_0)=\eta. \tag{180b}$$

Предположим, что для каждого фиксированного t отображение $\eta\mapsto k\equiv\dot{X}(\eta,\ t)$ обратимо и $\eta=N(k,\ t)$ — обратная функция, т. е.

$$\dot{X}(N(k,\ t),\ t)=k. \tag{181}$$

Введем

$$x(k,\ t)=X(N(k,\ t),\ t), \tag{182}$$

т. е. x есть значение в момент времени t того решения уравнения Ньютона, удовлетворяющего условиям (180), которое в момент t имеет скорость k. Мы утверждаем, что x удовлетворяет (178), и тем самым решения (179) можно получить при помощи (176) и (177). Для проверки этого продифференцируем сначала (181) по k и t:

$$\frac{\partial\dot{X}}{\partial\eta}\frac{\partial N}{\partial k}=1, \tag{183}$$

$$\frac{\partial\dot{X}}{\partial\eta}\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial\dot{X}}{\partial t}=0;$$

отсюда, используя равенство $\ddot{X}(\eta, t) = -(\nabla V_L)(X)$, получаем

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial \eta}\frac{\partial N}{\partial t} = (\nabla V_L)(x). \tag{184}$$

Из (182) вытекает, что

$$\frac{\partial x}{\partial k} = \frac{\partial X}{\partial \eta}\frac{\partial N}{\partial k}, \tag{185}$$

а из (183)—(185) мы видим, что

$$\frac{\partial N}{\partial t}\frac{\partial X}{\partial \eta} = (\nabla V_L)(x)\frac{\partial x}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k}V_L(x(k, t)).$$

Следовательно,

$$\dot{x}(k, t) = \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial \eta}\frac{\partial N}{\partial t} = k + \frac{\partial}{\partial k}V_L(x(k, t)),$$

а это и есть (178).

Единственный «формальный» момент в этом доказательстве — использование обратимости отображения $\eta \mapsto \dot{X}(\eta, t)$. На основе сведений об асимптотике V_L можно построить такую функцию $W(k, t)$ на $\{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\} \times \mathbb{R}$, что для любого компактного $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ существует T_K, при котором W удовлетворяет (175) на $K \times \{t \mid |t| > T_K\}$. Эту функцию W можно использовать при построении обобщенных волновых операторов.

Наконец, обратимся к некоторым вопросам, связанным с оценками. Важность (174b) вытекает из того факта, что в случае, когда это равенство справедливо, можно показать, что W удовлетворяет оценке

$$|D_k^\alpha (t^{-1}\partial W/\partial k - k)| \leqslant Ct^{-\beta}, \quad |\alpha| \leqslant 1,$$

для некоторых $\beta > 0$. Это означает, что для больших t критические точки функции $x \cdot k - W(k, t)$, являющиеся решениями уравнения

$$x/t = k + t^{-1}(\partial W/\partial k - tk),$$

однозначно определены и лежат около критической точки $x/t = k$, отвечающей короткодействующим потенциалам. Другой аспект, который следует отметить в связи с оценками, — это необходимость развития метода стационарной фазы дальше, чем это сделано в теореме XI.15. Переписав интеграл

$$\int u(k)\, e^{i\omega f(k)}\, dk = \int v(y)\, e^{i\omega (y,\, Ay)/2}\, dy$$

так, как это было сделано там, и применив (43), нужно рассмотреть разложение $\exp\{i(k, A^{-1}k)/2\omega\}$ по степеням ω^{-1}, а не пользоваться простой оценкой, как в теореме XI.15.

XI.10. Оптическое и акустическое рассеяние I: методы оператора Шредингера

В настоящем разделе излагается техника описания рассеяния классических волн в неоднородной среде. Развиваемые методы привязаны к линейным волновым уравнениям и применимы к акустическому и оптическому рассеянию. Типичная физическая ситуация такова. Предположим, что неоднородная среда становится все более и более однородной при $x \to \infty$. Ввиду неоднородности среды распространение в ней акустических или оптических волн будет описываться линейным волновым уравнением с переменными коэффициентами. Если начальное возмущение обладает конечной энергией, то с ростом t волны будут расходиться на бесконечность. По мере своего распространения они будут все более и более похожи на решения соответствующих уравнений с постоянными коэффициентами. Таким образом, можно построить теорию рассеяния, которая свяжет решения уравнений с переменными коэффициентами и решения соответствующих уравнений с постоянными коэффициентами.

Основная идея этого раздела — сформулировать как однородное, так и неоднородное уравнения на языке гильбертовых пространств, с тем чтобы получить возможность пользоваться методами, развитыми в этой главе раньше. Это неизбежно приведет нас к задаче сравнения унитарных групп, действующих в двух *разных* гильбертовых пространствах. В следующем разделе мы опишем другой подход к этим же задачам, развитый Лаксом и Филлипсом. Для того чтобы объяснить, каким образом, возникают два гильбертовых пространства, начнем с примера.

Пример 1 (акустическое рассеяние в неоднородной среде). Распространение звуковых волн в однородной среде можно описать, задавая в каждый момент времени t функцию $u(x, t)$, равную разности между давлением в точке x в этот момент и равновесным давлением. Если линеаризовать нелинейные уравнения гидродинамики около равновесного давления, что служит хорошим приближением для малых u, то получится следующее волновое уравнение:

$$\begin{gathered} u_{tt}(x, t) = c_0^2 \Delta u(x, t), \\ u(x, 0) = f(x), \qquad u_t(x, 0) = g(x), \end{gathered} \tag{186}$$

где f и g задаются начальным возмущением, а c_0 является скоростью распространения волн давления.

Далее, если среда, где распространяются волны, имеет изменяющуюся от точки к точке плотность $\rho(x)$, то давление будет подчиняться более сложному уравнению

$$u_{tt}(x,\ t)=c(x)^2\rho(x)\nabla\cdot\frac{1}{\rho(x)}\nabla u,$$
$$u(x,\ 0)=f(x),\qquad u_t(x,\ 0)=g(x), \tag{187}$$

в котором скорость $c(x)$ будет также изменяться от точки к точке, поскольку таково поведение плотности. Предположим, что

$$c(x)\to c_0,\qquad \rho(x)\to\rho_0 \tag{188}$$

при $|x|\to\infty$. Если эта сходимость достаточно быстрая, то нам, должно быть, удастся развить теорию рассеяния для уравнений (186), (187), поскольку естественно ожидать, что решения (187) распространяются на бесконечность, и когда они уходят достаточно далеко, то становятся очень похожими на решения (186).

Мы сформулируем оба уравнения как задачи в гильбертовом пространстве, используя идеи § X.13. Начнем со (186). Пусть $H_0=-c_0^2\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$ и $B_0=\sqrt{H_0}$. Обозначим через $[D(B_0)]$ замыкание $D(B_0)$ по норме $\|B_0u\|_2$. Отметим, что $[D(B_0)]$ содержит предельные элементы, которые не принадлежат $L^2(\mathbb{R}^3)$, поскольку $\sigma(B_0)$ содержит нуль. Пусть $\mathscr{H}_0$ — гильбертово пространство

$$\mathscr{H}_0=[D(B_0)]\oplus L^2(\mathbb{R}^3)$$

с нормой

$$\|\langle u,\ v\rangle\|^2=\|B_0u\|_2^2+\|v\|_2^2.$$

Введем

$$A_0=i\begin{pmatrix}0 & I\\ -B_0^2 & 0\end{pmatrix},\qquad D(A_0)=D(B_0^2)\oplus D(B_0),$$

где

$$D(B_0^2)=\{u\in[D(B_0)]\mid B_0u\in D(B_0)\},$$

причем и B_0, и его расширение на $[D(B_0)]$ обозначены через B_0. Ясно, что A_0 — самосопряженный оператор на $D(A_0)$, а (186) можно переписать следующим образом:

$$\varphi'(t)=-iA_0\varphi(t),\qquad \varphi(0)=\varphi_0\equiv\langle f,g\rangle, \tag{189}$$

введя $\mathscr{H}_0$-значную функцию $\varphi(t)=\langle u(t),u_t(t)\rangle$. Решение (189) будет иметь вид $\varphi(t)=W_0(t)\varphi_0$, где

$$W_0(t)=e^{-itA_0}=\begin{pmatrix}\cos B_0t & B_0^{-1}\sin B_0t\\ -B_0\sin B_0t & \cos B_0t\end{pmatrix},$$

причем матричные элементы определены в согласии с функциональным исчислением. Если $\varphi_0\in D(A_0)$, то $\varphi(t)$ сильно дифференцируема и удовлетворяет (189), откуда вытекает, что первая компонента $u(t)$ удовлетворяет (186). В дальнейшем будет удобно изменить внутреннее произведение в $L^2(\mathbb{R}^3)$ с помощью фиксированной константы.

Для того чтобы справиться с (187), предположим в дополнение к (188), что

$$0<\rho_1\leqslant\rho(x)\leqslant\rho_2<\infty \quad \text{для всех} \quad x, \tag{190a}$$

$$0<c_1\leqslant c(x)\leqslant c_2<\infty \quad \text{для всех} \quad x. \tag{190b}$$

Если ρ, кроме того, класса C^1, то

$$H_1=-c(x)^2\rho(x)\nabla\cdot\rho(x)^{-1}\nabla$$

— корректно определенный оператор на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Однако ясно, что из-за множителя $c(x)^2\rho(x)$ он даже формально не симметричен относительно обычного L^2-произведения. Если же ввести $L^2_{\rho c}(\mathbb{R}^3)$ как $L^2(\mathbb{R}^3)$ с внутренним произведением

$$(f, g)_{\rho c}=(f, (c^2\rho)^{-1}g)_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

то относительно этого нового внутреннего произведения H_1 станет симметрическим на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Отметим, что, в силу (190a), $L^2_{\rho c}$ и L^2 совпадают как множества, а нормы, о которых мы говорим, эквивалентны. С H_1 на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)\subset L^2_{\rho c}$ связана квадратичная форма

$$q_1(f, g)=(f, H_1g)_{\rho c}=(f, -\nabla\cdot\rho^{-1}\nabla g)_{L^2}=(\nabla f, \rho^{-1}\nabla g)_{L^2}.$$

Форма q_1 положительна и замыкаема в силу предположений (190a). Действительно, поскольку

$$\rho_2^{-1}(\nabla f, \nabla f)_2\leqslant(\nabla f, \rho^{-1}\nabla f)_2\leqslant\rho_1^{-1}(\nabla f, \nabla f), \tag{191}$$

замыкание q_1 имеет в качестве области определения $Q(-\Delta)$ Пусть H_1 — самосопряженный оператор в $L^2_{\rho c}$, отвечающий замыканию q_1 в силу теоремы VIII.15. Будем теперь действовать как прежде, определив B_1 как $\sqrt{H_1}$, $[D(B_1)]$ как замыкание $D(B_1)$ по норме $\|B_1u\|_{\rho c}$, и положив

$$\mathscr{H}_1=[D(B_1)]\oplus L^2_{\rho c}(\mathbb{R}^3),$$

$$A_1=i\begin{pmatrix}0 & I\\ -B_1^2 & 0\end{pmatrix}.$$

В таком случае A_1 самосопряжен на $D(B_1^2)\oplus D(B_1)$ и порождает

$$W_1(t)=\begin{pmatrix}\cos B_1t & B_1^{-1}\sin B_1t\\ -B_1\sin B_1t & \cos B_1t\end{pmatrix}.$$

Как и прежде, если $\varphi_0\in D(A_1)$, то $u(t)$ — первая компонента пары $\varphi(t)=W_1(t)\varphi_0$ — удовлетворяет (187). Отметим, что проведенное построение H_1 не требует никакой регулярности ни от $c(x)$, ни от $\rho(x)$. Однако если обе эти функции гладкие, то и H_0, и H_1 самосопряжены в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ (см. задачу 66).

Для того чтобы развить теорию рассеяния применительно к (187), нам нужно сравнить $W_1(t)$ на $\mathcal{H}_1$ с $W_0(t)$ на $\mathcal{H}_0$. Области определения B_0 и B_1 равны $Q(-\Delta)$, а в силу (191)

$$\rho_2^{-1}\|B_0u\|_2^2 \leqslant \|B_1u\|_{\rho c}^2 \leqslant \rho_1^{-1}\|B_0u\|_2^2, \tag{192}$$

так что $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$ совпадают как множества, но снабжены разными (хотя и эквивалентными) внутренними произведениями. Если ограничиться рассмотрением только одного из них, то одна из двух групп не будет унитарной. Таким образом, мы оказываемся в ситуации, где естественно воспользоваться формализмом двух гильбертовых пространств, описанным в § 3.

Для изучения проблем такого типа дадим абстрактную формулировку. Пусть H_0 и H_1 — неотрицательные самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$. Для простоты предположим, что ни H_0, ни H_1 не имеют точечного спектра в нуле; общий случай изучается в работах, указанных в Замечаниях. Мы хотим развить теорию рассеяния для двух уравнений

$$u_0''(t) = -H_0u_0(t),$$
$$u_1''(t) = -H_1u_1(t)$$

в случае, когда задан «естественный» унитарный оператор отождествления V: $\mathcal{K}_0 \to \mathcal{K}_1$ Пусть $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$ — гильбертовы пространства, построенные как в примере, т.е.

$$\mathcal{H}_0 = [D(B_0)] \oplus \mathcal{K}_0, \qquad \mathcal{H}_1 = [D(B_1)] \oplus \mathcal{K}_1,$$

где $B_k = \sqrt{H_k}$, и снабженные нормами

$$\|\langle u, v\rangle\|_0^2 = \|B_0u\|_{\mathcal{K}_0}^2 + \|v\|_{\mathcal{K}_0}^2, \qquad \|\langle u, v\rangle\|_1^2 = \|B_1u\|_{\mathcal{K}_1}^2 + \|v\|_{\mathcal{K}_1}^2.$$

Решения приведенных выше уравнений представимы в виде

$$\begin{pmatrix} u_k(t) \\ u_k'(t) \end{pmatrix} = W_k(t)\begin{pmatrix} u_k(0) \\ u_k'(0) \end{pmatrix},$$

где

$$W_k(t) = \begin{pmatrix} \cos B_kt & B_k^{-1}\sin B_kt \\ -B_k\sin B_kt & \cos B_kt \end{pmatrix}.$$

Как и в примере, будем обозначать генератор группы $W_k(t)$ через A_k.

Наш план состоит в том, чтобы свести вопрос о существовании и полноте волновых операторов для $W_0(t)$, $W_1(t)$ к тому же вопросу, но для $V^{-1}H_1V$ и H_0 на $\mathcal{K}_0$. Таким способом задача, сформулированная для двух гильбертовых пространств, сведется к задаче в одном гильбертовом пространстве, причем для операторов, похожих на операторы Шредингера, которые мы уже изучили. Дальше мы покажем, как можно действовать, оставаясь в рамках теории с двумя гильбертовыми пространствами и применяя теорему XI.13 (см. пример 1 (заново)). Мы пользуемся без дополнительных разъяснений обозначениями и терминологией теории рассеяния в двух гильбертовых пространствах, введенными в § 3.

Начнем с выбора оператора отождествления J пространства $\mathscr{H}_0$ с $\mathscr{H}_1$, математически удобного, но физически неестественного. Позднее мы покажем, что при определенных обстоятельствах, обычно реализующихся в приложениях, существуют более естественные операторы отождествления, которые (асимптотически A_0-) эквивалентны J. Определим $J\colon \mathscr{H}_0 \to \mathscr{H}_1$ соотношением

$$J\colon \langle u, v\rangle \mapsto \langle B_1^{-1}VB_0u, Vv\rangle.$$

Теорема XI.75. Пусть $\mathscr{K}_k$, $\mathscr{H}_k$, H_k, B_k, A_k, $k=0, 1$, и V и J таковы, как описано выше. Предположим, что существуют (соответственно существуют и полны) волновые операторы $\Omega^\pm(V^{-1}B_1V, B_0)$ на $\mathscr{K}_0$. Тогда существуют (соответственно существуют и полны) обобщенные волновые операторы $\Omega^\pm(A_1, A_0; J)$, которые суть частичные изометрии из $\mathscr{H}_0$ в $\mathscr{H}_1$ с начальным пространством $P_{\text{ac}}(A_0)\mathscr{H}_0$.

Доказательство. Поскольку

$$\|J\langle u, v\rangle\|^2_{\mathscr{H}_1} = \|B_1(B_1^{-1}VB_0)u\|^2_{\mathscr{K}_1} + \|Vv\|^2_{\mathscr{K}_1} =$$
$$= \|B_0u\|^2_{\mathscr{K}_0} + \|v\|^2_{\mathscr{K}_0} = \|\langle u, v\rangle\|^2_{\mathscr{H}_0},$$

J унитарен и, таким образом, $\Omega^\pm(A_1, A_0; J)$, когда они существуют, суть частичные изометрии. Доказательство основного утверждения теоремы опирается на факторизацию

$$\frac{d^2}{dt^2} + B^2 = \left(\frac{d}{dt} - iB\right)\left(\frac{d}{dt} + iB\right),$$

так что если u удовлетворяет уравнению $u'' = -B^2u$, то $f_\pm = u' \pm iBu$ удовлетворяют уравнениям $df_\pm/dt = \pm iBf_\pm$. Для уточнения разложения определим

$$T_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} B_k & i \\ B_k & -i \end{pmatrix}.$$

В таком случае, в силу тождества параллелограмма, T_k есть унитарное отображение $\mathscr{H}_k$ на $\mathscr{K}_k \oplus \mathscr{K}_k$ и

$$T_kA_kT_k^{-1} = \begin{pmatrix} B_k & 0 \\ 0 & -B_k \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$T_kW_k(t)T_k^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-itB_k} & 0 \\ 0 & e^{iB_kt} \end{pmatrix} \equiv \tilde{W}_k(t).$$

Далее, перемножая матрицы, легко найти, что

$$T_1 J T_0^{-1} = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \equiv \tilde{V}$$

в смысле отображений из $\mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_0$ в $\mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_1$. Более того, в силу задачи 112,

$$T_0 P_{ac}(A_0) = \begin{pmatrix} P_{ac}(B_0) & 0 \\ 0 & P_{ac}(B_0) \end{pmatrix} \equiv \tilde{P}_{ac}(B_0).$$

Далее, для $\varphi \in \mathcal{H}_0$

$$\begin{aligned} W_1(-t) J W_0(t) P_{ac}(A_0)\varphi &= T_1^{-1} \tilde{W}_1(-t) T_1 J T_0^{-1} \tilde{W}_0(t) T_0 P_{ac}(A_0)\varphi = \\ &= T_1^{-1} \tilde{W}_1(-t) \tilde{V} \tilde{W}_0(t) \tilde{P}_{ac}(B_0)\varphi = \\ &= (T_1^{-} \tilde{V})(\tilde{V}^{-1} \tilde{W}_1(-t) \tilde{V}) \tilde{W}_0(t) \tilde{P}_{ac}(B_0)\varphi. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\tilde{V}^{-1} \tilde{W}_1(-t) \tilde{V} = \begin{pmatrix} e^{itV^{-1}B_1V} & 0 \\ 0 & e^{-itV^{-1}B_1V} \end{pmatrix},$$

имеем

$$(\tilde{V}^{-1} \tilde{W}_1(-t) \tilde{V}) \tilde{W}_0(t) = \begin{pmatrix} e^{itV^{-1}B_1V} e^{-itB_0} & 0 \\ 0 & e^{-itV^{-1}B_1V} e^{itB_0} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{t \to \pm\infty} W_1(-t) J W_0(t) P_{ac}(A_0)\varphi$ существует для всех $\varphi \in \mathcal{H}_0$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{t \to \pm\infty} e^{itV^{-1}B_1V} e^{-itB_0} P_{ac}(B_0)\psi$ существует для всех $\psi \in \mathcal{K}_0$.

Поскольку оператор J унитарен, он обратим; J^{-1} автоматически является левым A_0-обратным оператора J, а J является левым A_1-обратным J^{-1}. Таким образом, согласно предложению 5 (с) § 3, для доказательства полноты $\Omega^\pm(A_1, A_0; J)$ достаточно доказать существование $\Omega^\pm(A_0, A_1; J^{-1})$. С помощью рассуждений, похожих на только что проведенные, это сводится к существованию пределов $\operatorname*{s-lim}\limits_{t \to \pm\infty} e^{itB_0} e^{-itV^{-1}B_1V} P_{ac}(V^{-1}B_1V)$, что в свою очередь, в силу предложения 3 § 3, эквивалентно полноте $\Omega^\pm(V^{-1}B_1V, B_0)$. ∎

Вышеприведенные рассуждения объясняют, почему J удобен в качестве оператора отождествления. Однако с физической точки зрения выбор J достаточно искусствен. Предположим, например, что $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ совпадают как множества и снабжены эквивалентными внутренними произведениями, что совпадают области определения квадратичных форм H_0 и H_1 и что

$$d_0 (u, H_0 u)_{\mathcal{K}_0} \leqslant (u, H_1 u)_{\mathcal{K}_1} \leqslant d_1 (u, H_0 u)_{\mathcal{K}_0}. \tag{193}$$

Эквивалентно,

$$d_0 \| B_0 u \|^2_{\mathcal{K}_0} \leqslant \| B_1 u \|^2_{\mathcal{K}_1} \leqslant d_1 \| B_0 u \|^2_{\mathcal{K}_0},$$

так что $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$ совпадают как множества и снабжены эквивалентными внутренними произведениями. В такой ситуации (реализующейся, например, при акустическом рассеянии) естественно использовать в качестве оператора отождествления тождественный оператор I_{01}: $\mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_1$ и интересоваться вопросами существования и полноты операторов $\Omega^\pm(A_1, A_0; I_{01})$. Мы ввели символ I_{01} потому, что дальше будем рассматривать оператор I_{01}^*, не равный I_{10}. Предположим, что задан унитарный оператор V: $\mathcal{K}_0 \to \mathcal{K}_1$ и что $\Omega^\pm(A_1, A_0; J)$ существуют, хотя бы в силу теоремы XI.75. Если J и I_{01} асимптотически A_0-эквивалентны, т. е. если

$$\lim_{t\to\pm\infty} (J - I_{01}) W_0(t) P_{ac}(A_0)\varphi = 0 \tag{194}$$

для всех $\varphi \in \mathcal{H}_0$, то, согласно предложению 5(а) § 3, $\Omega^\pm(A_1, A_0; I_{01})$ существуют и равны $\Omega^\pm(A_1, A_0; J)$. Поскольку $J\langle u, v\rangle = \langle B_1^{-1} V B_0 u, Vv\rangle$, мы ожидаем, что (194) справедливо только тогда, когда V ведет себя B_0-асимптотически как тождественный оператор, а B_0 и B_1 асимптотически равны. Технически второе условие мы сформулируем в виде

$$\|(H_0 - V^{-1} H_1 V) e^{-itB_0} w\|_{\mathcal{K}_0} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty \tag{195}$$

для всех w из плотного множества $\mathcal{D} \subset D(H_0) \cap D(V^{-1}H_1V) \cap \cap P_{ac}(H_0)$, инвариантного относительно e^{itB_0}, B_0 и B_0^{-1}. Первое условие будет удовлетворено при выполнении требования

$$(I + V^{-1} H_1 V)(V^{-1} - I) e^{-itB_0} w\|_{\mathcal{K}_0} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty \tag{196}$$

для всех $w \in \mathcal{D}$.

Теорема XI.76. Пусть $\mathcal{K}_k$, $\mathcal{H}_k$, H_k, B_k, A_k, $k = 0, 1$, V, J и I_{01} таковы, как описано выше. Предположим, что

(i) $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ совпадают как множества и снабжены эквивалентными внутренними произведениями;
(ii) $Q(H_0)$ и $Q(H_1)$ совпадают как множества и выполняется (193);
(iii) справедливы соотношения (195) и (196);
(iv) на $\mathcal{K}_0$ существуют волновые операторы $\Omega^\pm(V^{-1}B_1V, B_0)$.

Тогда выполняется (194) и, в частности, $\Omega^\pm(A_1, A_0; I_{01})$ существуют и равны $\Omega^\pm(A_1, A_0; J)$.

Доказательство. Пусть w_0 и w_1 лежат в $\mathcal{D}$. Положим $\varphi = \langle w_0, w_1\rangle$. Поскольку $\mathcal{D}$ плотно в $P_{ac}(H_0)$ и $(I_{01} - J) W_0(t)$ равномерно ограничены, (194) достаточно доказать для таких φ. Пусть $u_0(t)$

и $v_0(t)$ — компоненты $W_0(t)\varphi$. Тогда, поскольку $\varphi \in P_{ac}(A_0)$, имеем

$$\|(J-I_{01})W_0(t)P_{ac}(A_0)\varphi\|^2_{\mathscr{H}_1} = \|B_1(B_1^{-1}VB_0 - I)u_0(t)\|^2_{\mathscr{K}_1} + \\ + \|(V-I)v_0(t)\|^2_{\mathscr{K}_1} = \|(B_0 - V^{-1}B_1)u_0(t)\|^2_{\mathscr{K}_0} + \|(I-V^{-1})v_0(t)\|^2_{\mathscr{K}_0}.$$

Поскольку $v_0(t) = -B_0(\sin B_0 t)w_0 + (\cos B_0 t)w_1$ и $w_k \in \mathscr{D}$, условие (196) и положительность H_1 ведут к убыванию второго члена при $t \to \pm\infty$. Первый член можно оценить следующим образом:

$$\|(B_0 - V^{-1}B_1)u_0(t)\|_{\mathscr{K}_0} \leqslant \|(B_0 - V^{-1}B_1V)u_0(t)\|_{\mathscr{K}_0} + \\ + \|(V^{-1}B_1V)(I - V^{-1})u_0(t)\|_{\mathscr{K}_0}.$$

Как и раньше, второй член стремится к нулю в силу (196). Для упрощения обозначений положим $B_1' = V^{-1}B_1V$, а $\Omega^\pm(B_1', B_0)$ обозначим просто через $\Omega^\pm$. Мы должны показать, что

$$\|(B_0 - B_1')e^{-itB_0}w\|_{\mathscr{K}_0} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty,$$

или, эквивалентно,

$$\left\|e^{itB_1'}(B_0 - B_1')e^{-itB_0}w\right\|_{\mathscr{K}_0} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty$$

для $w \in \mathscr{D}$. В силу (iv),

$$e^{itB_1'}B_0e^{-itB_0}w \to \Omega^+B_0w \quad \text{при} \quad t \to -\infty.$$

Таким образом, учитывая соотношение $B_1'\Omega^+w = \Omega^+B_0w$, можно получить требуемый результат при $t \to -\infty$, если доказать, что

$$e^{itB_1'}B_1'e^{-itB_0}w = B_1'e^{itB_1'}e^{-itB_0}w \to B_1'\Omega^+w.$$

Возьмем $w \in \mathscr{D}$, воспользуемся равенством

$$\left\|B_1'e^{itB_1'}e^{-itB_0}w - B_1'\Omega^+w\right\|^2_{\mathscr{K}_0} = \|B_1'\Omega^+w\|^2_{\mathscr{K}_0} + \left\|B_1'e^{itB_1'}e^{-itB_0}w\right\|^2_{\mathscr{K}_0} - \\ - \left(B_1'e^{itB_1'}e^{-itB_0}w,\ B_1'\Omega^+w\right)_{\mathscr{K}_0} - \left(B_1'\Omega^+w,\ B_1'e^{itB_1'}e^{-itB_0}w\right)_{\mathscr{K}_0}$$

и перенесем B_1' в другую часть; тогда, как легко видеть, два последних члена сходятся к $-\|B_1'\Omega^+w\|^2_{\mathscr{K}_0}$. Таким образом, стремление к нулю всего выражения в целом можно доказать, убедившись, что, например,

$$\varlimsup_{t\to-\infty}\left\|B_1'e^{itB_1'}e^{-itB_0}w\right\|^2_{\mathscr{K}_0} \leqslant \|B_1'\Omega^+w\|^2_{\mathscr{K}_0}.$$

Прямое вычисление дает

$$\overline{\lim_{t\to-\infty}}\|B_1'e^{itB_1'}e^{-itB_0}w\|^2_{\mathcal{K}_0}=\overline{\lim_{t\to-\infty}}(e^{-itB_0}w,\ H_1'e^{-itB_0}w)_{\mathcal{K}_0}=$$
$$=\overline{\lim_{t\to-\infty}}(e^{-itB_0}w,\ H_0e^{-itB_0}w)_{\mathcal{K}_0}=\|B_0w\|^2_{\mathcal{K}_0}=$$
$$=\|\Omega^+B_0w\|^2_{\mathcal{K}_0}=\|B_1'\Omega^+w\|^2_{\mathcal{K}_0}. \qquad (197)$$

На втором шаге мы использовали (195). Это доказывает (194) в случае $t\to-\infty$. Доказательство другого случая аналогично. ▌

Заметим, что во всех предположениях теорем XI.75, XI.76 фигурируют операторы H_0 и $H_1'=V^{-1}H_1V$ на $\mathcal{K}_0$. Таким образом, задача рассеяния, сформулированная в двух гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$, сводится к изучению рассеяния для двух самосопряженных операторов в одном гильбертовом пространстве $\mathcal{K}_0$. На самом деле, если несколько изменить точку зрения, можно переформулировать теоремы XI.75, XI.76, полностью избежав необходимости обращаться к теории рассеяния в двух гильбертовых пространствах. Действительно, если выполнены предположения (i) и (ii) теоремы XI.76, то $W_1(t)$ есть сильно непрерывная группа ограниченных операторов на $\mathcal{H}_0$ (в общем случае не унитарная). Предположения (iii) и (iv) дают условия на H_0 и $V^{-1}H_1V$ в $\mathcal{K}_0$, благодаря которым «волновые операторы»

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty} W_1(-t)\,W_0(t)\,P_{\mathrm{ac}}(A_0)$$

существуют на $\mathcal{H}_0$. А по теореме XI.75, если $\Omega^\pm(V^{-1}H_1V,\ H_0)$ полны, то эти волновые операторы полны как отображения из $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_0$.

Пример 1 (продолжение). Применим доказанные теоремы к акустическому рассеянию. В дополнение к условиям (188) и (190) предположим, что $c(x)$ и $\rho(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции с ограниченными производными. В принципе эти условия гладкости могут быть отброшены; см. обсуждение в конце раздела. Введем $\mathcal{K}_0=L^2(\mathbb{R}^3)=\mathcal{K}_1$ с внутренними произведениями

$$(u,\ v)_{\mathcal{K}_0}=(c_0^2\rho_0)^{-1}(u,\ v)_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$
$$(u,\ v)_{\mathcal{K}_1}=(u,\ (c(x)^2\rho(x))^{-1}v)_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Операторы H_k, B_k, A_k остаются такими же, как в примере 1. В частности, $D(B_0)=D(B_1)$ и справедливо (193). В итоге оказываются выполненными условия (i) и (ii) теоремы XI.76, так что гильбертовы пространства $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$, построенные из $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ описанным выше способом, совпадают как множества, а заданные на них внутренние произведения эквивалентны. В качестве унитарного отображения $V\colon \mathcal{K}_0 \to \mathcal{K}_1$ естественно взять

$$V\colon\ u(x) \mapsto [c(x)^2 \rho(x)/c_0^2\rho_0]^{1/2}\, u(x),$$

так что

$$V^{-1}H_1V = -[c(x)^2\rho(x)]^{1/2}\,(\nabla\cdot\rho(x)^{-1}\nabla)\,[c(x)^2\rho(x)]^{1/2}.$$

Для проверки (195) и (196) выберем в качестве $\mathcal{D}$ множество функций $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, фурье-образы которых имеют носители, отделенные от нуля. Заметим, что и $(H_0-V^{-1}H_1V)e^{-itB_0}w$, и $(I+V^{-1}H_1V)\times\times(V^{-1}-I)e^{-itB_0}w$ можно записать в виде суммы членов вида $f(x)e^{\pm itB_0}P(D)w$, где $P(D)$ — дифференциальный оператор в частных производных с постоянными коэффициентами, а $f(x)$ — произведение членов вида $\rho(x)-\rho_0$, $c(x)-c_0$, $\rho(x)$, ρ_0, $c(x)$, c_0, или их обратных, или квадратных корней из этих членов, или их производных до второго порядка. Более того, среди сомножителей всегда встречается хотя бы один член вида $\rho(x)-\rho_0$, $c(x)-c_0$, $D^\alpha\rho(x)$ или $D^\alpha c(x)$, где $0\neq|\alpha|\leqslant 2$. Если $w\in\mathcal{D}$, то $e^{\pm itB_0}P(D)w$ представляет собой регулярный волновой пакет свободного волнового уравнения ($m=0$) в трехмерном пространстве, так что по теореме XI.18

$$\|e^{\pm itB_0}P(D)w\|_\infty \leqslant c/|t|.$$

Таким образом, если потребовать, чтобы $\rho(x)-\rho_0$, $c(x)-c_0$, $D^\alpha\rho(x)$, $D^\alpha c(x)$ при $0\neq|\alpha|\leqslant 2$ лежали в $L^2(\mathbb{R}^3)$, то

$$\|f(x)e^{\pm itB_0}P(D)w\|_{\mathcal{K}_0} \to 0 \quad \text{при} \quad t\to\pm\infty$$

для каждого из рассматриваемых членов, так что (195) и (196) выполняются. Другой не требующий обращения к методу стационарный фазы способ доказательства таков. Поскольку носитель $\hat{w}$ компактен, $E_{[-M,\,M]}(-\Delta)w=w$ при некотором M. Значит, если $\rho(x)-\rho_0$ и т. п. лежат в $L^2_\delta(\mathbb{R}^3)$ с некоторым $\delta>3/2$, то $f(x)E_{[-M,\,M]}(-\Delta)$ есть оператор Гильберта—Шмидта и потому компактен. В таком случае сходимость к нулю доказывается с помощью леммы 2 § 3.

Остается исследовать, когда $\Omega^\pm(V^{-1}B_1V,\ B_0)$ существуют и полны. Сначала применим теорему XI.10 (теорему Бирмана) к $V^{-1}H_1V$ и H_0. Мы уже знаем, что $D(B_1)\to D(B_0)$, и в силу условий, наложенных на $\rho(x)$ и $c(x)$, $Q(H_0)=Q(V^{-1}H_0V)$. Таким образом, $D(V^{-1}B_1V)=D(B_0)$, и поэтому $V^{-1}H_1V$ и H_0 взаимно подчинены. Более того,

$$H_0-V^{-1}H_1V=(c(x)^2-c_0^2)\,\Delta+h(x)\cdot\nabla+e(x),$$

где $h(x)$ и $e(x)$ — суммы функций вида $f(x)$, описанных выше. В итоге для каждого ограниченного интервала I

$$(H_0-V^{-1}H_1V)\,E_I(H_0)$$

есть сумма операторов вида $f(x)g(-i\nabla)$, где g — произведение полинома и характеристической функции конечного интервала. Согласно теореме XI.21, оператор $f(x)g(-i\nabla)$ имеет конечный след, если $f\in L^2_\delta(\mathbb{R}^3)$ с некоторым $\delta>3/2$. Наконец, если след $(H_0-V^{-1}H_1V)E_I(H_0)$ конечен, то след $E_I(V^{-1}H_1V)(H_0-V^{-1}H_1V)\times\times E_I(H_0)$ автоматически конечен, поскольку $E_I(V^{-1}H_1V)$ ограничен, так что выполняются все условия теоремы Бирмана.

Мы доказали, что в случае, когда $c(x)^2-c_0^2$, $\rho(x)-\rho_0$, $D^\alpha\rho(x)$, $D^\alpha c(x)$ при $0\neq|\alpha|\leqslant 2$ лежат в $L^2_\delta(\mathbb{R}^3)$ с некоторым $\delta>3/2$, $\Omega^\pm(V^{-1}H_1V,\ H_0)$ существуют и полны. Поскольку $\sqrt{x}$ — допустимая функция, принцип инвариантности (теорема XI.11) позволяет утверждать существование и полноту $\Omega^\pm(V^{-1}B_1V,\ B_0)$. В итоге, применяя теоремы XI.75 и XI.76, получаем, что справедлива

Теорема XI.77. Предположим, что $c(x)$ и $\rho(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции с ограниченными производными, удовлетворяющие (188) и (190). Предположим, что $c(x)^2-c_0^2$, $\rho(x)-\rho_0$, $D^\alpha\rho(x)$, $D^\alpha c(x)$, $0\neq|\alpha|\leqslant 2$, лежат в $L^2_\delta(\mathbb{R}^3)$ с некоторым $\delta>3/2$. Тогда волновые операторы $\Omega^\pm(A_1,\ A_0;\ I_{01})$ системы (186), (187) существуют и полны.

Мы доказали полноту в смысле обобщенных волновых операторов. Можно доказать, что $\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(A_1)=\mathscr{H}_1$, так что *каждое* решение (187) имеет в качестве асимптотики решение свободного уравнения. В дополнении к § 6 мы, по существу, доказали отсутствие у A_1 сингулярного спектра. В § XIII.13 мы докажем, что в спектре A_1 нет собственных значений.

Условия убывания, наложенные на $c(x)^2-c_0^2$, $\rho(x)-\rho_0$, $D^\alpha\rho(x)$, $D^\alpha c(x)$, не слишком жестки и выполняются в любой разумной физической системе. С другой стороны, условия гладкости значительно сужают область применимости теоремы, поскольку во многих задачах с неоднородными средами бывают скачки $\rho(x)$ или $c(x)$ при переходе от одной среды к другой К счастью, условия гладкости можно исключить.

Пример 1 (заново). Существование и полноту волновых операторов при акустическом рассеянии в неоднородной среде можно доказать прямо с помощью теоремы Белопольского — Бирмана (теорема XI.13). Возьмем $\mathscr{K}_k$, $\mathscr{H}_k$, A_k, B_k, H_k такими же, как и выше, и выберем I_{01} в качестве оператора отождествления из $\mathscr{H}_0$ в $\mathscr{H}_1$. Нам нужно проверить условия (a) — (d) теоремы XI.13. (a) очевидно. Поскольку $D(A_k)=D(B_k^2)\oplus D(B_k)$ и мы уже знаем, что $D(B_0)=D(B_1)$, для проверки (d_1) остается доказать, что $D(H_0)=D(H_1)$. Но V переводит $D(H_0)$ в себя, поэтому нужно убедиться лишь в том, что области определения $V^{-1}H_1V$ и H_0 в $\mathscr{K}_0$ одинаковы. Доказательство этого факта, в котором можно использовать симметричную форму теоремы Като — Реллиха (см. задачу 66), мы оставляем читателю.

Для проверки (b) мы хотим показать, что $(A_1-A_0)E_l(A_0)$ имеет конечный след как оператор из $\mathscr{H}_0$ в $\mathscr{H}_1$. Поскольку отождествление есть ограниченный оператор из $\mathscr{H}_0$ в $\mathscr{H}_1$, достаточно показать, что $(A_1-A_0)E_l(A_0)$ имеет конечный след как оператор на $\mathscr{H}_0$. Положим $C=B_0^2-B_1^2$, и пусть T_0 — унитарное отображение $\mathscr{H}_0\to\mathscr{K}_0\oplus\mathscr{K}_0$, введенное при доказательстве теоремы XI.75. Тогда

$$T_0(A_1-A_0)E_l(A_0)T_0^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-CB_0^{-1} & -CB_0^{-1}\\ CB_0^{-1} & CB_0^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_l(B_0) & 0\\ 0 & E_l(B_0)\end{pmatrix}$$

на $\mathscr{K}_0\oplus\mathscr{K}_0=L^2(\mathbb{R}^3)\oplus L^2(\mathbb{R}^3)$. В силу того что ∇B_0^{-1} — ограниченный оператор, коммутирующий с $E_l(B_0)$, такое же доказательство, как в примере 1 (продолжение), показывает, что след оператора $\pm CB_0^{-1}E_l(B_0)$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$ конечен, если выполняются условия, наложенные на $c(x)$ и $\rho(x)$ в теореме XI.77. Таким образом, при этих же условиях справедливо и (b).

Наконец, проверим (c). Простая выкладка показывает, что $I_{01}^*\colon\mathscr{H}_1\to\mathscr{H}_0$ задается формулой

$$I_{01}^*\langle u,\ v\rangle=\langle-(c_0^2\rho_0)B_0^2\nabla\cdot\rho(x)^{-1}\nabla u,\ (c_0^2\rho_0/c(x)^2\rho(x))v\rangle.$$

Таким образом, можно написать

$$(I_{01}^*I_{01}-I_{00})\langle u,\ v\rangle=\langle Q_1u,\ Q_2v\rangle,$$

где

$$Q_1=-(c_0^2\rho_0)B_0^{-2}\nabla\cdot(1/\rho(x))\nabla-I,\qquad Q_2=(c_0^2\rho_0/c(x)^2\rho(x))-I.$$

Используя, как и выше, диагонализующее преобразование T_0, найдем, что

$$T_0(I_{01}^*I_{01}-I_{00})E_l(A_0)T_0^{-1}=$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}B_0Q_1B_0^{-1}+Q_2 & B_0Q_1B_0^{-1}-Q_2\\ B_0Q_1B_0^{-1}-Q_2 & B_0Q_1B_0^{-1}+Q_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_l(B_0) & 0\\ 0 & E_l(B_0)\end{pmatrix}.$$

В результате дело свелось к доказательству компактности $B_0Q_1B_0^{-1}E_l(B_0)$ и $Q_2E_l(B_0)$ как операторов в $L^2(\mathbb{R}^3)$. Для второго оператора это немедленно следует из условий теоремы XI.77 для $c(x)$ и $\rho(x)$. Что касается первого оператора, то заметим, что

$$B_0Q_1B_0^{-1}E_l(B_0)=-(c_0^2\rho_0)(B_0^{-1}\nabla)\cdot\left(\frac{1}{\rho(x)}-\frac{1}{\rho_0}\right)(\nabla B_0^{-1})E_l(B_0).$$

Поскольку $B_0^{-1}\nabla$ ограничен, а $(\rho(x)^{-1}-\rho_0^{-1})(\nabla B_0^{-1})E_l(B_0)$ в силу теоремы XI.21 имеет конечный след, след $B_0Q_1B_0^{-1}E_l(B_0)$ конечен и потому сам оператор компактен. В итоге мы заключаем, что $(I_{01}^*I_{01}-I_{00})E_l(A_0)$ компактен, если $\rho(x)$ удовлетворяет условиям теоремы XI.77.

Итак, условия (a) — (d_1) теоремы Белопольского — Бирмана проверены, и потому можно утверждать, что $\Omega^{\pm}(A_1, A_0; I)$ существуют и полны. Заметьте, что использование теоремы Белопольского — Бирмана не позволяет полностью обойтись без редукции к одному гильбертову пространству, поскольку к такой редукции мы вынуждены были прибегнуть при проверке условий теоремы. Избежать явного доказательства (195) и (196) нам позволили соображения компактности, которыми, впрочем, можно было бы воспользоваться и для проверки (195) и (196).

Пример 2 (оптическое рассеяние). Рассеяние электромагнитных волн в неоднородной среде происходит в соответствии с уравнениями Максвелла:

$$\begin{aligned} \nabla\times E &= -\mu(x)\frac{\partial H}{\partial t}, & \nabla\times H &= \varepsilon(x)\frac{\partial E}{\partial t}, \\ \nabla\cdot(\varepsilon(x)E) &= 0, & \nabla\cdot(\mu(x)H) &= 0, \end{aligned} \tag{198}$$

где E и H — функции из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, представляющие электрическое и магнитное поля, $\varepsilon(x)$ и $\mu(x)$ суть 3×3-матричнозначные функции на $\mathbb{R}^3$, представляющие диэлектрическую и магнитную проницаемости. Мы будем предполагать, что $\varepsilon(x)$ и $\mu(x)$ класса C^2 с ограниченными производными; поскольку мы хотим, чтобы энергия

$$(E,\ H) = \int_{\mathbb{R}^3} [\overline{E(x)}\cdot\varepsilon(x)E(x) + \overline{H(x)}\cdot\mu(x)H(x)]\,dx$$

была положительна, будем считать, что

$$c_1 I \leqslant \varepsilon(x) \leqslant c_2 I, \qquad c_3 I \leqslant \mu(x) \leqslant c_4 I \tag{199}$$

для всех x и некоторых положительных постоянных c_i. Предположим, что существуют положительно определенные постоянные матрицы ε_0 и μ_0, такие, что

$$\varepsilon(x)\to\varepsilon_0, \qquad \mu(x)\to\mu_0 \quad \text{при} \quad |x|\to\infty.$$

В таком случае задача состоит в построении теории рассеяния для уравнений (198) в терминах свободных уравнений

$$\begin{aligned} \nabla\times E &= -\mu_0\frac{\partial H}{\partial t}, & \nabla\times H &= \varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}, \\ \nabla\cdot(\varepsilon_0 E) &= 0, & \nabla\cdot(\mu_0 H) &= 0. \end{aligned} \tag{200}$$

Для того чтобы сделать это, перепишем (198) в виде уравнения второго порядка для E:

$$\ddot{E} = -\varepsilon^{-1}\nabla\times(\mu^{-1}(\nabla\times E)) \tag{201}$$

и аналогично поступим с (200). Далее, возьмем в качестве $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ пространство $L^2(\mathbb{R}^3)^3$ с внутренними произведениями

$$(E, F)_{\mathcal{K}_0} = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{E(x)} \cdot \varepsilon_0 F(x)\, dx, \quad (E, F)_{\mathcal{K}_1} = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{E(x)} \cdot \varepsilon(x) F(x)\, dx.$$

Положим $Q = \{E \in L^2(\mathbb{R}^3)^3 \mid \nabla \times E \in L^2(\mathbb{R}^3)^3\}$. Определим квадратичные формы q_0 и q_1 на Q, полагая

$$q_0(E, F) = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \times E) \cdot \mu_0^{-1} (\nabla \times F)\, dx,$$

$$q_1(E, F) = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \times E) \cdot \mu(x)^{-1} (\nabla \times F)\, dx.$$

Им соответствуют положительные самосопряженные операторы в $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$

$$H_0 E = -\varepsilon_0^{-1} \nabla \times \mu_0^{-1} (\nabla \times E),$$
$$H_1 E = -\varepsilon(x)^{-1} \nabla \times \mu(x)^{-1} (\nabla \times E),$$

а квадратные корни из этих операторов благодаря (199) удовлетворяют (193). Наконец, определим $V\colon \mathcal{K}_0 \to \mathcal{K}_1$ соотношением

$$(VE)(x) = \varepsilon(x)^{-1/2} \varepsilon_0^{1/2} E.$$

В результате возникает ситуация, охватываемая почти во всем теоремами XI.75 и XI.76, кроме того, что теперь нуль принадлежит точечному спектру как H_0, так и H_1. Это не вызывает никаких трудностей с применением этих теорем, поскольку их легко обобщить на этот случай; см. ссылки в Замечаниях. Таким образом, как и в примере 1, задачу рассеяния можно свести к изучению H_0 и $V^{-1}H_1V$ в $\mathcal{K}_0$. Как и в примере 1, справедливы (195) и (196), поскольку $P_{ac}(H_0)$ проектирует на подпространство, не содержащее нулевых мод, и каждая компонента $e^{\pm itB_0} P_{ac}(B_0) w$ удовлетворяет свободному уравнению, а потому и условию

$$\| e^{\pm itB_0} P_{ac}(B_0) w \|_\infty < c/t.$$

С помощью этой оценки, метода стационарной фазы и метода Кука легко доказать существование волновых операторов $\Omega^\pm(V^{-1}H_1V, H_0)$. В таком случае существование $\Omega^\pm(A_1, A_0; I_{01})$ доказывается так же, как в примере 1.

Однако наличие нулевых мод вызывает трудности в доказательстве полноты, поскольку теперь больше нельзя ожидать, что след оператора $(V^{-1}H_1V - H_0) E_I(H_0)$ конечен, когда интервал I содержит нуль. Один из возможных способов преодоления этой трудности — доказать существование пределов

$$e^{itH_0} e^{-itV^{-1}H_1V} P_{ac}(V^{-1}H_1V) w$$

путем прямого применения метода Кука. Однако это весьма сложно, поскольку $e^{-itV^{-1}H_1V}P_{ac}(V^{-1}H_1V)w$ удовлетворяет волновому уравнению с переменными коэффициентами, и потому при получении различных оценок нельзя пользоваться преобразованием Фурье. Проблему нулевых мод можно обойти, действуя иначе. Определим операторы $\tilde{H}_k$ на $\mathcal{K}_k$ с помощью квадратичных форм

$$\tilde{q}_k(E, F) = q_k(E, F) + \int (\nabla\cdot\gamma_k E)\cdot(\nabla\cdot\gamma_k F)\,dx,$$

где $\gamma_0 = \varepsilon_0$ и $\gamma_1 = \varepsilon(x)$. Теперь конечность следа $(V^{-1}\tilde{H}_1V+1)^{-2} - (\tilde{H}_0+1)^{-2}$ можно доказать благодаря дополнительному члену, убирающему нулевые моды и превращающему $V^{-1}\tilde{H}_1V$ и $\tilde{H}_0$ в строго эллиптические операторы. Существование и полнота $\Omega^\pm(V^{-1}\tilde{H}_1V, \tilde{H}_0)$ в таком случае вытекают из следствия 2 теоремы XI.11. Наконец, элементарным образом можно показать, что существование $\Omega^\pm(V^{-1}\tilde{H}_1V, \tilde{H}_0)$ гарантирует существование $\Omega^\pm(V^{-1}H_1V, H_0)$. Причина этого в том, что динамические моды и нулевые моды в уравнениях Максвелла полностью независимы, и потому задание искусственной динамики для нулевой моды никак не отражается на динамических модах. Детали можно найти в работах, указанных в Замечаниях.

Пример 3 (рассеяние акустических волн препятствием). Пусть $\mathcal{O}$ — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^3$ с границей Γ, имеющей нулевую меру, и связным дополнением. Тогда уравнение для акустических волн вне препятствия $\mathcal{O}$ имеет вид

$$\begin{aligned} &u_{tt} - \Delta u = 0, && x\in\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{O},\\ &\frac{\partial u}{\partial\hat{n}} = 0, && x\in\Gamma,\\ &u(x, 0) = f(x), && x\in\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{O},\\ &u_t(x, 0) = g(x), && x\in\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{O}, \end{aligned} \qquad (202)$$

где u — разность между давлением в точке x в момент времени t и равновесным давлением. Граничные условия Неймана можно объяснить следующим образом. Градиент давления вызывает пропорциональный поток жидкости. Условие $\nabla u\cdot\hat{n} = 0$ на Γ как раз и утверждает отсутствие потока через Γ. При начальном возмущении $\langle f(x), g(x)\rangle$, заданном вне препятствия, решение уравнения (202) будет зависеть от геометрии препятствия, но для больших положительных и отрицательных времен волны должны уходить от препятствия на бесконечность. По мере того как все большая и большая часть энергии уходит от препятствия, решение (202) должно все более и более походить на решение уравнения $u_{tt} - \Delta u = 0$ во всем $\mathbb{R}^3$. Таким образом, можно надеяться построить теорию рассеяния для уравнения (202) в терминах решений свободного волнового уравнения.

Мы можем выбрать одно и то же гильбертово пространство для H_0 и H_1 путем простой уловки: разрешив существование акустических возмущений внутри препятствия. Поскольку внутренность препятствия и внешнее пространство разделены, это не скажется на теории рассеяния. Пусть H_0 обозначает $-\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$, и пусть H_1 — лапласиан Неймана H_N на $L^2(\mathbb{R}^3)$ с граничными условиями Неймана на Γ, определяемый в § XIII.15. В таком случае $\mathcal{K}_0 = L^2(\mathbb{R}^3) = \mathcal{K}_1$ и, в силу граничных условий, $Q(H_N) \supset Q(H_0)$. Далее, для $w \in Q(H_0)$

$$\|B_0 w\|_2^2 = \|B_N w\|_2^2. \tag{203}$$

Единственная трудность в применении абстрактной теории, развитой в теореме XI.75, состоит в том, что если Γ разделяет $\mathbb{R}^3$ на более чем одну связную компоненту, то B_1 имеет нулевое собственное значение: $H_N\varphi = 0$ и $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)$, если φ постоянно на одной из ограниченных связных компонент. С физической точки зрения эти собственные функции для задачи рассеяния не важны, поскольку они относятся к *внутренности* препятствия. Математически эту трудность можно обойти, обобщив теорему XI.75 так, чтобы допустить точечный спектр в нуле (см. ссылки в Замечаниях), или с помощью следующего простого приема. Переопределим H_N на каждой такой постоянной внутри области собственной функции так, чтобы $H_N\varphi = \varphi$. В предположении, что число связных внутренних компонент конечно, такое переопределение не изменит условий принадлежности классу операторов со следом, указанных ниже или доказываемых в дополнении. Переопределив таким способом H_N, можно применить теорию, развитую в этом разделе. В частности, в силу теоремы XI.75, $\Omega^\pm(A_N, A_0; J)$ существуют и полны как операторы из $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_1$, если $\Omega^\pm(H_N, H_0)$ существуют и полны на $\mathcal{K}_0 = L^2(\mathbb{R}^3)$. Здесь J: $\langle u, v\rangle \longmapsto \langle B_N^{-1}B_0 u, v\rangle$. В дополнении показано, как убедиться в конечности следа оператора $(H_N+1)^{-2} - (H_0+1)^{-2}$, а значит, в силу следствия 3 теоремы XI.11, в существовании и полноте $\Omega^\pm(H_N, H_0)$.

Поскольку теперь (193) не справедливо, равенство $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1$ больше не выполняется. Однако благодаря включению $Q(H_0) \subset Q(H_N)$ и равенству (203) пространство $\mathcal{H}_0$ допускает естественное вложение в $\mathcal{H}_1$ в качестве подпространства. Поэтому в качестве оператора отождествления естественно взять это вложение. Заметим, что (193) нигде не использовалось при доказательстве теоремы XI.76, хотя оно нужно для равенства $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1$. Поскольку $V = I$, условие (196) выполняется автоматически; и ввиду (203) в условии (195) нет необходимости. Действительно, доказательство теоремы XI.76 проходит как и прежде, но основное равенство (197) теперь выполняется в силу (203), без ссылок на (193) и (195). Таким образом, $\Omega^{\pm}(A_N, A_0; I)$ существуют и полны.

Случай рассеяния на препятствии с граничными условиями Дирихле физически менее интересен, но из-за того, что соответствующий результат о локальной компактности проще (см. дополнение), он является хорошим объектом для проверки различных подходов в теории рассеяния. Пусть $H_1 = H_D$, где H_D — лапласиан Дирихле с границей Г, определяемый в § XIII.15. Тогда $Q(H_D) \subset Q(H_0)$ и

$$\| B_0 w \|_2^2 = \| B_D w \|_2^2 \tag{204}$$

для $w \in Q(H_D)$. Таким образом, ситуация похожа на то, что было, только теперь $Q(H_D) \subset Q(H_0)$, тогда как при условиях Неймана $Q(H_N) \supset Q(H_0)$. Таким образом, мы имеем дело с операторами, сопряженными к обычным волновым операторам. Теорема XI.75 показывает, что $\Omega^{\pm}(A_0, A_D, J')$ существуют и полны как отображения из $\mathscr{H}_1$ в $\mathscr{H}_0$, если $\Omega^{\pm}(H_0, H_D)$ существуют и полны на $\mathscr{K}_1 = L^2(\mathbb{R}^3)$. Здесь J': $\langle u, v \rangle \longmapsto \langle B_0^{-1} B_D u, v \rangle$. В дополнении показано, что след $(H_0+1)^{-2} - (H_D+1)^{-2}$ конечен, так что, как и выше, существование и полнота $\Omega^{\pm}(H_0, H_D)$ вытекают из следствия 3 теоремы XI.11. Следуя той же идее, что и выше, заключение теоремы XI.76 можно автоматически вывести из (204), поэтому J' можно заменить вложением I_{10}, переводящим $\mathscr{H}_1$ в $\mathscr{H}_0$. Тогда $\Omega^{\pm}(A_0, A_D; I_{10})$ существуют и полны. Поскольку I_{10} — изометрия, I_{10}^* есть левый A_D-обратный к I_{10}. Таким образом, в силу предложения 5 (с) из § 3, $\Omega^{\pm}(A_D, A_0; I_{10}^*)$ существуют и полны.

В итоге доказана следующая

Теорема XI.78. Пусть $\mathfrak{G}$ — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^3$ с границей Г.

(a) Если мера Г равна нулю, $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ обладает конечным числом связных компонент и Г удовлетворяет условиям регулярности теоремы XI.81, то волновые операторы для уравнения (202) с граничными условиями Неймана существуют и полны.

(b) Если мера Г равна нулю, то волновые операторы для уравнения (202) с граничными условиями Дирихле существуют и полны.

В примерах 1 и 2 коэффициенты, описывающие неоднородность, считались дважды непрерывно дифференцируемыми функциями пространственных переменных. Это очень жесткое ограничение, поскольку в большинстве физических задач происходит резкое изменение скорости распространения волн или плотности при переходе из одной среды в другую. К счастью, случай с не-гладкими коэффициентами можно описать без больших трудностей. Заметим, что в примере 1 при определении H_1 в $\mathcal{K}_1$ мы не пользовались гладкостью $\rho(x)$, точно так же никакие условия гладкости не использовались и при доказательстве абстрактных теорем. Единственное место, где условия гладкости были существенны,— это проверка конечности следа оператора $(V^{-1}H_1V - H_0)E_I(H_0)$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$; нужно было выразить $V^{-1}H_1V - H_0$ как сумму членов вида $f(x)P(D)$, чтобы иметь возможность применить теорему XI.21. П. Дейфт показал, как преодолеть эту трудность с помощью коммутационной формулы

$$\frac{\lambda}{BA+\lambda} + B\frac{1}{AB+\lambda}A = 1. \tag{205}$$

Если A и B — ограниченные операторы на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то $\sigma(AB)\setminus\{0\} = \sigma(BA)\setminus\{0\}$ и для $-\lambda \notin \sigma(AB)\cup\{0\}$ (205) выполняется. В задаче 115 читателю предлагается провести полное доказательство этого факта. Более общо: если A — замкнутый оператор и $B = A^*$, то (205) выполняется для $-\lambda \in \mathbb{C}\setminus[0, \infty)$. Для того чтобы понять, как (205) можно использовать, рассмотрим одномерный случай, когда обозначения наиболее просты. Тогда $H_1' = V^{-1}H_1V = -aDb^2Da$ и $H_0 = D^2$, где $D = id/dx$ и a, b — функции от x, такие, что

$$0 < a_0 \leqslant a(x) \leqslant a_1, \qquad 0 \leqslant b_0 \leqslant b(x) \leqslant b_1$$

и $a(x) \to 1$, $b(x) \to 1$ достаточно быстро при $|x| \to \infty$. Как и в примере 1, определим H_1' следующим образом. Пусть Db^2D — самосопряженный оператор в $L^2(\mathbb{R})$, отвечающий замыканию симметричной квадратичной формы $q(\varphi, \varphi) = (D\varphi, b^2D\varphi)_{L^2}$ на $C_0^\infty(\mathbb{R})\times C_0^\infty(\mathbb{R})$. Поскольку оператор умножения на a имеет ограниченный обратный, $H_1' = aDb^2Da$ — корректно определенный самосопряженный оператор. Нам надо доказать, что след $\frac{1}{aDb^2Da+1} - \frac{1}{D^2+1}$ конечен. Используя формулу

$$\frac{1}{aDb^2Da+1} = a^{-1}\left(\frac{1}{Db^2D+a^{-2}}\right)a^{-1}$$

и свойства a, эту задачу легко свести к доказательству конечности следа $\frac{1}{Db^2D+1} - \frac{1}{D^2+1}$. Пусть A — оператор bD. В таком случае, ввиду того что Db^2D определялся с помощью квадратичных форм, $Db^2D = (bD)^*(bD)$ (см. § X.3), где bD обозначает операторное замыкание $bD\restriction C_0^\infty(\mathbb{R})$. Полагая $B = (bD)^*$ и применяя коммутационную формулу, получаем

$$\frac{1}{(bD)^*(bD)+1} = 1 - (bD)^*\left(\frac{1}{(bD)(bD)^*+1}\right)(bD) = 1 - D^*\left(\frac{1}{D^*D+b^{-2}}\right)D$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{Db^2D+1}-\frac{1}{D^2+1}=D^*\left(\frac{1}{D^*D+1}-\frac{1}{D^*D+b^{-2}}\right)D.$$

Таким образом, все сведено к изучению

$$\frac{1}{D^*D+1}-\frac{1}{D^*D+1+(b^{-2}-1)},$$

что может быть проделано с помощью обычных методов исследования возмущения $-d^2/dx^2$ некоторым потенциалом. По существу, коммутационная формула позволила «распутать» Db^2D и «вытащить» b наружу.

При изучении трехмерного случая (подробности см. в работах, указанных в Замечаниях) используются те же идеи, за двумя исключениями. Во-первых, $D=i\nabla$, и потому bD есть оператор из $L^2(\mathbb{R}^3)$ в $L^2(\mathbb{R}^3)^3$, а $(bD)^*$ — оператор из $L^2(\mathbb{R}^3)^3$ и $L^2(\mathbb{R}^3)$. Поэтому необходимо обобщить коммутационную формулу на замкнутые операторы A из одного гильбертова пространства в другое и $B=A^*$. Кроме того, необходимо уметь обращаться с квадратами резольвент.

Если разрывы a и b лежат в компактном множестве, то при решении задачи можно применить прием, описанный в дополнении к § XI.11.

Дополнение к § XI.10. Свойства следов функций Грина

Пусть Γ — замкнутое ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$ меры нуль. Пусть $H_0=-\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, а $H_{\Gamma;\,D}$ и $H_{\Gamma;\,N}$ суть $-\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$ с граничными условиями Дирихле и Неймана на Γ, определяемыми в § XIII.15. Пусть $R_0=(H_0+1)^{-1}$, $R_{\Gamma;\,D}=(H_{\Gamma;\,D}+1)^{-1}$, $R_{\Gamma;\,N}=(H_{\Gamma;\,N}+1)^{-1}$. В этом дополнении будет доказано, что при некоторых условиях на Γ при $n=3$ следы $R_0^2-R_{\Gamma;\,D}^2$ и $R_0^2-R_{\Gamma;\,N}^2$ конечны. Похожий метод применим при $n\neq 3$, если R^2 заменить на R^m с $m>n/2$ (задача 116). Применения этих методов к рассеянию акустических волн препятствием описаны в примере 3 этого раздела.

Основные результаты таковы.

Теорема XI.79. Пусть Γ — произвольное замкнутое ограниченное подмножество нулевой меры в $\mathbb{R}^3$. Тогда след $R_0^2-R_{\Gamma;\,D}^2$ конечен.

Теорема XI.80. Пусть Γ — замкнутое ограниченное подмножество нулевой меры в $\mathbb{R}^3$. Пусть B — открытый шар, содержащий Γ, и пусть $\tilde{H}_{\partial B\cup\Gamma;\,N}$ есть $-\Delta$ в $L^2(B)$ с граничными условиями Неймана на $\partial B \cup \Gamma$. Положим

$$\tilde{R}_{\partial B\cup\Gamma;\, \mathrm{N}} = (H_{\partial B\cup\Gamma;\, \mathrm{N}} + 1)^{-1}$$

и предположим, что след $\tilde{R}^2_{\partial B\cup\Gamma;\, \mathrm{N}}$ конечен. Тогда след $R_0^2 - R^2_{\Gamma;\, \mathrm{N}}$ конечен.

Заметим, что $R_0^2 - R^2_{\Gamma;\, \mathrm{D}} \in \mathscr{I}_1$ при любых Γ, но в случае условий Неймана нужны ограничения на Γ. Следующий пример подтверждает необходимость таких ограничений.

Пример. Пусть Λ — объединение бесконечного множества попарно не пересекающихся шаров, имеющих все меньшие и меньшие радиусы и лежащих внутри единичного шара, и пусть $\Gamma = \partial\Lambda$. Тогда нуль является для $H_{\Gamma;\, \mathrm{N}}$ собственным значением бесконечной кратности, а носители соответствующих собственных функций лежат в шаре. Если χ — оператор умножения на характеристическую функцию шара, то $\chi R^m_{\Gamma;\, \mathrm{N}}$ не компактен ни при каком m. С другой стороны, оператор χR_0^m, в силу теоремы XI.21, компактен при любом $m \geqslant 2$, так что $R_0^m - R^m_{\Gamma;\, \mathrm{N}}$ не компактен ни при каком m.

Конечно, теорема XI.80 не слишком полезна, если нет условий, гарантирующих конечность следа $\tilde{R}^2_{\partial B\cup\Gamma;\, \mathrm{N}}$. Но, к счастью, существуют весьма общие достаточные условия.

Определение. **Усеченный конус в** $x \in \mathbb{R}^n$ есть множество вида

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |y - x| < \varepsilon,\ (y - x)\cdot n > (1 - \delta)\,|y - x|\}$$

при некоторых ε, $\delta > 0$ и некотором единичном векторе n. Говорят, что открытое множество $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ с ограниченной границей обладает **ограниченным конусным свойством**, тогда и только тогда, когда существуют конечное открытое покрытие $U_1, \ldots, U_k$ границы $\partial\Lambda$ и усеченные конусы $C_1, \ldots, C_k$ в нуле, такие, что $C_i + x \subset \Lambda$, если $x \in U_i \cap \Lambda$.

Нетрудно видеть, что многогранники и множества с гладкой границей обладают ограниченным конусным свойством.

Теорема XI.81. Пусть Γ — замкнутое ограниченное множество нулевой меры в $\mathbb{R}^3$. Представим $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ в виде $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$, где Λ_1 — неограниченная компонента, а Λ_2 — объединение ограниченных компонент. Предположим, что Λ_1 и Λ_2 обладают ограниченным конусным свойством. Тогда для любого открытого шара, содержащего Γ, след $\tilde{R}^2_{\partial B\cup\Gamma;\, \mathrm{N}}$ конечен.

В этом дополнении мы доказываем теоремы XI.79 и 80 и даем набросок доказательства теоремы XI.81 для частного случая, когда Γ — объединение границ конечного числа звездных областей с гладкой границей. В общем случае теорема XI.81 доказывается совершенно другими методами (см. ссылки в Замечаниях).

При доказательстве теорем XI.79 и 80 нам понадобятся различные свойства R_0, $R_{\Gamma;\,\mathrm{D}}$, $R_{\Gamma;\,\mathrm{N}}$, устанавливаемые в гл. XIII или изложенными там методами. Приведем необходимые нам результаты.

Лемма 1. Пусть Γ фиксирована, и пусть B — фиксированный шар, содержащий Γ. Тогда:

(a) выполняются следующие операторные неравенства в $L^2(\mathbb{R}^3)$:

$$R_{\Gamma;\,\mathrm{D}} \leqslant R_0 \leqslant R_{\Gamma;\,\mathrm{N}} \leqslant R_{\partial B \cup \Gamma;\,\mathrm{N}};$$

(b) при разложении $L^2(\mathbb{R}^3)$ в прямую сумму $L^2(B) \oplus L^2(\mathbb{R}^3 \setminus B)$ справедливо представление $R_{\partial B \cup \Gamma;\,\mathrm{N}} = \tilde{R}_{\partial B \cup \Gamma;\,\mathrm{N}} \oplus R'$ с подходящей R';

(c) R_0, $R_{\Gamma;\,\mathrm{D}}$, $R_{\Gamma;\,\mathrm{N}}$ — сжатия $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ в себя.

Доказательство. (a) При подходящем значении символа $\leqslant$ применительно к неограниченным операторам справедливы неравенства $H_{\Gamma \cup \partial B;\,\mathrm{N}} \leqslant H_{\Gamma;\,\mathrm{N}} \leqslant H_0 \leqslant H_{\Gamma;\,\mathrm{D}}$ (см. предложение 4 в § XIII.15), с помощью которых (a) доказывается на основе общих соображений (задача 117).

(b) Это утверждение представляет собой в точности предложение 3 из § XIII.15.

(c) В силу второго критерия Бёрлинга — Дени (теорема XIII.51), $e^{-tH_{\Gamma;\,\mathrm{D}}}$ есть сжатие на L^∞ (см пример 3 (заново) в дополнении 1 к § XIII.12), и потому это же справедливо для оператора $R_{\Gamma;\,\mathrm{D}}$, представимого в виде

$$R_{\Gamma;\,\mathrm{D}} = \int\limits_0^\infty e^{-t} e^{-tH_{\Gamma;\,\mathrm{D}}}\, dt.$$

Аналогичное доказательство проходит для R_0 и для $R_{\Gamma;\,\mathrm{N}}$. ∎

Лемма 2. Если $(1+x^2)(R_0 - R_{\Gamma;\,\mathrm{D}})(1+x^2)$ есть оператор Гильберта — Шмидта, то след $R_0^2 - R_{\Gamma;\,\mathrm{D}}^2$ конечен. Аналогично, если $(1+x^2)(R_0 - R_{\Gamma;\,\mathrm{N}})(1+x^2)$ — оператор Гильберта — Шмидта, то след $R_0^2 - R_{\Gamma;\,\mathrm{N}}^2$ конечен.

Доказательство. Запишем $R_0^2 - R_{\Gamma;\,\mathrm{D}}^2$ в виде

$$R_0^2 - R_{\Gamma;\,\mathrm{D}}^2 = R_0(R_0 - R_{\Gamma;\,\mathrm{D}}) + (R_0 - R_{\Gamma;\,\mathrm{D}})R_0 - (R_0 - R_{\Gamma;\,\mathrm{D}})^2.$$

По теореме XI.21 или просто явным вычислением с помощью интегрального ядра $4\pi|x-y|^{-1}e^{-|x-y|}$ оператора R_0 получаем, что $R_0(1+x^2)^{-1}$ есть оператор Гильберта — Шмидта. Следовательно, для конечности следа $R_0^2 - R_{\Gamma;\,\mathrm{D}}^2$ достаточно, чтобы $(1+x^2)\times$

$\times(R_0 - R_{\Gamma;\,\mathrm{D}})$ и $(R_0 - R_{\Gamma;\,\mathrm{D}})$ были операторами Гильберта — Шмидта, а это вытекает из условий леммы. Случай граничных условий Неймана разбирается аналогично. ∎

Лемма 3. Пусть $K \geqslant 0$, а C и D — ограниченные операторы, такие, что $C + D = I$. Тогда K — оператор Гильберта — Шмидта в том и только том случае, когда C^*KC и D^*KD — операторы Гильберта — Шмидта. В частности, если χ — характеристическая функция ограниченного множества Ω и одновременно $\chi(R_0 - R_{\Gamma;\,\mathrm{D}})\chi$ $(1+x^2)(1-\chi)(R_0 - R_{\Gamma;\,\mathrm{D}})(1-\chi)(1+x^2)$, соответственно $\chi(R_{\Gamma;\,\mathrm{N}} - R_0)\chi$ и $(1+x^2)(1-\chi)(R_{\Gamma;\,\mathrm{N}} - R_0)(1-\chi)(1+x^2)$, суть операторы Гильберта — Шмидта, то след $R_0^2 - R_{\Gamma;\,\mathrm{D}}^2$ (соответственно $R_0^2 - R_{\Gamma;\,\mathrm{N}}^2$) конечен.

Доказательство. Для того чтобы K лежал в $\mathcal{I}_2$, необходимо и достаточно, чтобы $K^{1/2}$ лежал в $\mathcal{I}_4$. А это происходит тогда и только тогда, когда и $K^{1/2}C$, и $K^{1/2}D$ лежат в $\mathcal{I}_4$. Это доказывает первую часть леммы.

Вторая часть следует из первой части, леммы 2 и леммы 1 (а), из которой вытекает, что $R_{\Gamma;\,\mathrm{N}} - R_0$ и $R_0 - R_{\Gamma;\,\mathrm{D}}$ — неотрицательные операторы. ∎

$R_{\Gamma;\,\mathrm{D}}$ задает билинейную форму на $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ по следующему правилу: $\langle\varphi, \psi\rangle \mapsto (\bar\varphi, R_{\Gamma;\,\mathrm{D}}\psi)$, и потому, в силу теоремы о ядре (теорема V.12), существует обобщенная функция $G_{\Gamma;\,\mathrm{D}}(x, y)$, называемая **функцией Грина задачи Дирихле**, такая, что

$$(\varphi, R_{\Gamma;\,\mathrm{D}}\psi) = \int \bar\varphi(x)\, G_{\Gamma;\,\mathrm{D}}(x, y)\, \psi(y)\, dx\, dy$$

для $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$. **Функция Грина задачи Неймана** $G_{\Gamma;\,\mathrm{N}}(x, y)$ и **свободная функция Грина** $G_0(x, y)$ определяются аналогично. Конечно,

$$G_0(x, y) = (4\pi)^{-1}|x-y|^{-1}e^{-|x-y|}.$$

Лемма 4. Пусть B — открытый шар, содержащий Γ. Тогда $G_{\Gamma;\,\mathrm{D}} - G_0$ и $G_{\Gamma;\,\mathrm{N}} - G_0$ бесконечно дифференцируемы на $(\mathbb{R}^3\setminus\bar B)\times(\mathbb{R}^3\setminus\bar B)$ и удовлетворяют неравенствам

$$|(G_{\Gamma;\,\mathrm{N}} - G_0)(x, y)| \leqslant Ce^{-1/2|x| - 1/2|y|}, \tag{206a}$$

$$|(G_{\Gamma;\,\mathrm{D}} - G_0)(x, y)| \leqslant Ce^{-1/2|x| - 1/2|y|}. \tag{206b}$$

В частности, если χ — характеристическая функция B, то

$$(1+x^2)(1-\chi)(R_0 - R_{\Gamma;\,\mathrm{D}})(1-\chi)(1+x^2),$$
$$(1+x^2)(1-\chi)(R_{\Gamma;\,\mathrm{N}} - R_0)(1-\chi)(1+x^2)$$

суть операторы Гильберта — Шмидта.

Доказательство. Мы рассмотрим задачу Неймана. Задача Дирихле рассматривается аналогично. Пусть $h, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$. Тогда $(H_{\Gamma;\,N}+1)h = (-\Delta+1)h$, так что

$$\iint \overline{[(-\Delta+1)h](x)}\, G_{\Gamma;\,N}(x, y)\, g(y)\, dx\, dy = \int \overline{h(x)}\, g(x)\, dx.$$

Следовательно, на $C_0^\infty((\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma) \times (\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma))$

$$(-\Delta_x+1)\, G_{\Gamma;\,N}(x, y) = \delta(x-y)$$

в смысле обобщенных функций. Таким образом,

$$(-\Delta_x - \Delta_y + 2)(G_{\Gamma;\,N}(x, y) - G_0(x, y)) = 0.$$

Из свойства эллиптической регулярности (теорема IX.25) вытекает, что $Q(x, y) \equiv G_{\Gamma;\,N}(x, y) - G_0(x, y)$ бесконечно дифференцируема на $(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma) \times (\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$ и, в частности, на $(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}) \times (\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B})$. Мы утверждаем, что для $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}$

$$Q(x, y) = \int\limits_{z \in \partial B} \left[\frac{\partial Q(z, y)}{\partial n_z} G_0(z, x) - Q(z, y) \frac{\partial G_0}{\partial n_z}(z, x)\right] d\Omega_z, \tag{207}$$

где $d\Omega$ — поверхностная мера на ∂B, а n_z — внешняя нормаль к B в точке z.

Пусть $\tilde{B}$ — шар достаточно большого радиуса, охватывающий ∂B, x, y. Тогда (207) с $\int\limits_{z \in \partial B}$ замененным на $\int\limits_{z \in \partial B} - \int\limits_{z \in \partial \tilde{B}}$, выводится из уравнений $(-\Delta_x+1)\, Q(x, y) = 0$, $(-\Delta_x+1)\, G_0(x, y) = \delta(x-y)$ с помощью стандартных рассуждений, использующих формулу Грина

$$\int\limits_{\Omega} (h\, \Delta g - g\, \Delta h)\, dx = \int\limits_{d\Omega} (h\, \partial g/\partial n - g\, \partial h/\partial n)\, d\sigma.$$

Таким образом, формула (207) будет доказана, если убедиться, что интеграл по $\partial \tilde{B}$ стремится к нулю, когда $\partial \tilde{B}$ стремится к ∞. Требуется доказать даже более слабое утверждение, а именно: допустим, мы смогли доказать, что интеграл по $\partial \tilde{B}$ стремится к нулю при $r_0 \to \infty$ после интегрирования по y с некоторой $h \in C_0^\infty$ и интегрирования по радиусу $\partial \tilde{B}$ от r_0 до r_0+1; тогда, взяв интеграл по радиусу $\partial \tilde{B}$ с помощью формулы Грина и устремив r_0 к ∞, мы получим (207) с усредненным y. Выбрав затем h равной δ-функции, мы получим (207).

В интеграле по радиусу $\partial \tilde{B}$ можно проинтегрировать $\partial Q/\partial n_z$ по частям и получить остаточный член, куда будут входить только G_0, $\partial G_0/\partial n_z$ и Q (но не $\partial Q/\partial n_z$). Поскольку G_0 и $\partial G_0/\partial n_z$ экспоненциально убывают при $|x-z| \to \infty$, достаточно доказать ограниченность $\int Q(z, y)\,h(y)\,dy$ при $z \to \infty$. Но это следует из леммы 1 (c)! В результате (207) выполняется для границы ∂B любого шара, содержащего Γ.

Выберем шары B_1 и B_2 так, чтобы $\Gamma \subset B_1$, $\bar{B}_1 \subset B_2$, $\bar{B}_2 \subset B$. Теперь, поскольку Q бесконечно дифференцируема на $(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma) \times (\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$, можно утверждать, что Q, $\nabla_x Q$, $\nabla_y Q$ и $\nabla_x \nabla_y Q$ равномерно ограничены на $\bar{B}_2 \setminus B_1$ и потому, в силу (207) с B_1 вместо B, Q и $\nabla_y Q$ равномерно ограничены для $x \in \mathbb{R}^3 \setminus B$ и $y \in B_2$. В силу симметрии Q, мы получаем равномерную ограниченность Q и $\nabla_x Q$ для $x \in B_2$ и $y \in \mathbb{R}^3 \setminus B$. Используя (207) с B_2 вместо B, полученную равномерную ограниченность, экспоненциальное убывание G_0 и симметрию Q, получаем (206). ∎

Доказательство теоремы XI.79. Поскольку, в силу леммы 1 (a), $0 \leqslant R_0 - R_{\Gamma;\,D} \leqslant R_0$, достаточно доказать, что $\chi R_0 \chi$ — оператор Гильберта — Шмидта; это позволит заключить, что $\chi(R_0 - R_{\Gamma;\,D})\chi \in \mathcal{I}_2$, и завершить доказательство ссылками на леммы 3 и 4. Но принадлежность $\chi R_0 \chi$ идеалу $\mathcal{I}_2$ доказывается путем прямых вычислений на основе формулы для G_0 или с помощью теоремы XI.21.

Доказательство теоремы XI.80. В силу леммы 1 (a),

$$0 \leqslant R_{\Gamma;\,N} - R_0 \leqslant R_{\Gamma;\,N} \leqslant R_{\partial B \cup \Gamma;\,N},$$

а по лемме 1 (b), $\chi R_{\partial B \cup \Gamma;\,N} \chi = \tilde{R}_{\partial B \cup \Gamma;\,N} \oplus 0$, где правая часть есть оператор Гильберта — Шмидта в силу предположений. В таком случае утверждение теоремы вытекает из лемм 3 и 4. ∎

Приведем теперь набросок доказательства теоремы XI.81 в частном случае, оставив подробности читателю.

Лемма 5. Пусть $\Omega \subset B \subset \mathbb{R}^3$ — открытый шар с центром в нуле. Пусть $\Gamma = \partial\Omega$, $S = \partial B$. Тогда $\tilde{R}_{\Gamma \cup S;\,N}$ с граничными условиями Неймана на Γ и S есть оператор Гильберта — Шмидта в $L^2(B)$.

Доказательство. По лемме 1 (b), $\tilde{R}_{\Gamma \cup S;\,N} = R_1 \oplus R_2$ в соответствии с разложением $L^2(B) = L^2(\Omega) \oplus L^2(B \setminus \Omega)$. Рассмотрим подробнее R_1; анализ R_2 аналогичен. $\tilde{H}_{\Gamma;\,N}$ есть прямая сумма $\bigoplus\limits_{l,\,m} \tilde{h}_{l,\,m}$ операторов, отвечающая разложению $L^2(B) = \bigoplus \tilde{\mathcal{H}}_{l,\,m}$, где $\tilde{\mathcal{H}}_{l,\,m} = \{\psi(r)\,Y_{l,\,m}(\theta, \varphi)\}$. Изоморфизм $\psi(r)\,Y_{l,\,m} \leftrightarrow r\varphi \equiv f$ переводит $\tilde{\mathcal{H}}_{l,\,m}$ в $L^2(0, a)$, где $a = \mathrm{rad}(\Omega)$, а $\tilde{h}_{l,\,m}$ — в

$$h_{l,\,m} = -d^2/dr^2 + l(l+1)\,r^{-2},$$

с граничными условиями

$$f(0) = 0, \qquad a^2 (r^{-1} f)'(a) = af'(a) - f(a) = 0.$$

Благодаря этому собственные функции $h_{0,0}$ можно найти явно, выразив их через тригонометрические функции, и убедиться, что n-е собственное значение удовлетворяет неравенству $E_{n,\,l=0} \geqslant C_1 n^2$. Поскольку $h_{l,\,m} \geqslant h_{0,\,0} + l(l+1)a^{-2}$, так что $E_{n,\,l} \geqslant C(n^2+l^2)$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} (E_{n,\,l}+1)^{-2} \leqslant d_1 \int_0^{\infty} (x^2+l^2+1)^{-2}\,dx = d\,(l^2+1)^{-3/2},$$

и, значит,

$$\operatorname{Tr}(R_1^2) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sum_{n=0}^{\infty} (E_{n,\,l}+1)^{-2} < \infty. \ \blacksquare$$

Лемма 6. Пусть Γ_1 и Γ_2 — два замкнутых множества нулевой меры, лежащих внутри открытых в $\mathbb{R}^3$ множеств Ω_1 и Ω_2 соответственно. Пусть $S_i = \partial\Omega_i$. Предположим, что существует C^∞-диффеоморфизм F окрестности $\overline{\Omega}_1$ в окрестность $\overline{\Omega}_2$, такой, что $F[\Omega_1] = \Omega_2$ и $F[\Gamma_1] = \Gamma_2$. Тогда $\tilde{R}_{\Gamma_1 \cup S_1;\, \mathrm{N}}$ есть оператор Гильберта — Шмидта в том и только том случае, когда $\tilde{R}_{\Gamma_2 \cup S_2;\, \mathrm{N}}$ — оператор Гильберта — Шмидта.

Доказательство. Рассмотрим унитарное отображение U: $L^2(\Omega_2, d^3x) \to L^2(\Omega_1, d^3x)$, заданное формулой

$$(Uf)(x) = (G^{1/2} f)(Fx),$$

где $G = \det\{J_{ij}\}$ и $\{J_{ij}\} = \{\partial F_i(x)/\partial x_j\}$. Тогда

$$U \tilde{H}_{\Gamma_2 \cup S_2;\, \mathrm{N}} U^{-1} = H',$$

где H' как форма имеет ту же область определения, что и $\tilde{H}_{\Gamma_1 \cup S_1;\, \mathrm{N}}$, и

$$\begin{aligned}(f, H'f) &= \int_{\Omega_1} \sum_i \Big| \sum_j (J^{-1})_{ij} \frac{\partial (G^{1/2} f)}{\partial x_j} \Big|^2 d^3x \leqslant \\ &\leqslant C_1 \int_{\Omega_1} \Big(\sum_i \Big| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|^2 + |f|^2 \Big) d^3x = \\ &= C_1 (f, (H_{\Gamma_1 \cup S_1;\, \mathrm{N}} + 1) f).\end{aligned}$$

Отсюда следует (задача 117) неравенство

$$\tilde{R}_{\Gamma_1 \cup S_1;\, \mathrm{N}} \leqslant C_2 (H'+1)^{-1},$$

так что $\tilde{R}_{\Gamma_1 \cup S_1;\, \mathrm{N}}$ есть оператор Гильберта — Шмидта, если таков $(H'+1)^{-1}$. Поскольку H' унитарно эквивалентен $\tilde{H}_{\Gamma_2 \cup S_2;\, \mathrm{N}}$, мы видим, что $\tilde{R}_{\Gamma_1 \cup S_1;\, \mathrm{N}} \in \mathcal{I}_2$, если $\tilde{R}_{\Gamma_2 \cup S_2;\, \mathrm{N}} \in \mathcal{I}_2$. Обратное утверждение справедливо в силу симметрии предположений и утверждения леммы. $\blacksquare$

Определение. Открытое множество Ω в $\mathbb{R}^3$ называется **звездным относительно точки** $x_0 \in \Omega$, если для любого единичного вектора n и некоторого $a_n > 0$ справедливо равенство $\Omega \cap \{x_0 + tn \mid t \in [0, \infty)\} = \{x_0 + tn \mid t \in [0, a_n)\}$. Если a_n — бесконечно дифференцируемая функция n, то говорят, что Ω имеет **гладкую границу.**

Лемма 7. Пусть Γ_1 — граница открытого множества D_1, звездного относительно точки x_0 и имеющего гладкую границу. Пусть

$$\Omega_1 = \{y \mid x_0 + (1+\varepsilon)^{-1}(y - x_0) \in D_1\}$$

для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$. Тогда существует C^∞-диффеоморфизм F окрестности множества $\overline{\Omega} \supset D_1$ на окрестность некоторого шара $\overline{\Omega}_2$, такой, что $F[\Omega_1] = \Omega_2$, а $\Gamma_2 \equiv F[\Gamma_1]$ — граница некоторой сферы в Ω_2, концентрической с Ω_2. В частности, $\tilde{R}_{\Gamma_1 \cup S_1;\,\mathrm{N}}$ — оператор Гильберта — Шмидта.

Доказательство. Полагаем $F(x) = (x - x_0)\, a_{n(x)}^{-1}$, где $n(x) = (x - x_0)/|x - x_0|$. ∎

Наконец мы готовы к доказательству некоторого частного случая теоремы XI.81.

Теорема XI.81'. Пусть Γ — объединение конечного числа попарно не пересекающихся множеств $\{\Gamma_j\}_{j=1}^{k}$, каждое из которых есть гладкая граница открытого ограниченного звездного множества Ω_j. Пусть B — любой открытый шар, содержащий Γ, и $S = \partial B$. Тогда $\tilde{R}_{\Gamma \cup S;\,\mathrm{N}}$ — оператор Гильберта — Шмидта.

Доказательство. Пусть x_j — точка, относительно которой звездно множество Ω_j. Пусть S_j — множество, полученное небольшим растяжением Γ_j относительно x_j. Это можно сделать так, чтобы все S_j попарно не пересекались и лежали внутри B. Пусть S' сфера, концентрическая с S, меньшая S и охватывающая все S_i (рис. XI.13). Пусть $\chi_1, \ldots, \chi_k$ — характеристические функции областей, окруженных поверхностями S_j, $j = 1, \ldots, k$. Пусть χ_{k+1} — характеристическая функция слоя между S и S', а χ_0 — характеристическая функция остальной части шара B, так что $\sum_{j=0}^{k+1} \chi_j \equiv 1$ на B. Тогда, по обобщению леммы 3, достаточно доказать, что $\chi_j \tilde{R}_{\Gamma \cup S;\,\mathrm{N}}\, \chi_j$ — оператор Гильберта — Шмидта для каждого $j = 0, 1, \ldots, k+1$. Случай $j = 0$ тривиален, ибо, по лемме 4, разность

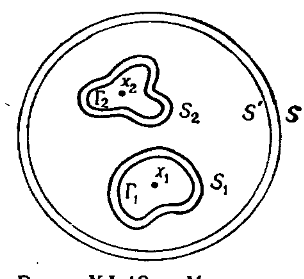


Рис. XI.13. Множества S_i и S.

$G_{\Gamma \cup S;\,N}(x, y) - G_0(x, y)$ бесконечно дифференцируема на $\overline{\operatorname{supp}\chi_0} \times \overline{\operatorname{supp}\chi_0}$ и $\chi_0(x)G_0(x, y)\chi_0(y)$ — ядро оператора Гильберта — Шмидта. Для $j = 1, \ldots, k$

$$\chi_j \tilde{R}_{\Gamma \cup S;\,N}\chi_j \leqslant \chi_j \tilde{R}_{\Gamma \cup S_j \cup S;\,N}\chi_j = \tilde{R}_{\Gamma_j \cup S_j;\,N} \oplus 0$$

в силу пунктов (a), (b) леммы 1. По лемме 7, $\tilde{R}_{\Gamma_j \cup S_j;\,N} \in \mathcal{I}_2$, так что и $\chi_j \tilde{R}_{\Gamma \cup S;\,N}\chi_j \in \mathcal{I}_2$. Случай $j = k+1$ аналогичен. ∎

XI.11. Оптическое и акустическое рассеяние II: метод Лакса — Филлипса

В этом разделе мы описываем другой подход в теории рассеяния, развитый Лаксом и Филлипсом. Его особенность в том, что основным объектом изучения становятся определенные семейства подпространств гильбертова пространства, описывающего динамику взаимодействия. Как мы увидим, этот подход наиболее естествен в применениях к классическим волновым уравнениям, удовлетворяющим принципу Гюйгенса, а не в квантовой механике, где волновые уравнения обладают дисперсией и имеют бесконечную скорость распространения возмущений. Однако с помощью принципа инвариантности волновых операторов его можно применять и в некоторых квантовомеханических задачах (см. пример 5).

Наиболее красивая и важная черта подхода Лакса — Филлипса состоит в том, что в нем естественным образом проявляются определенные аналитические свойства оператора рассеяния. Когда группа операторов, описывающая взаимодействие, удовлетворяет основным предположениям теории, гильбертово пространство теории $\mathcal{H}$ оказывается унитарно эквивалентным $L^2(\mathbb{R}; N)$, где N — некоторое вспомогательное гильбертово пространство. При такой реализации $\mathcal{H}$ оператор рассеяния действует как оператор умножения на $\mathcal{L}(N)$-значную функцию $s(\sigma)$, которая почти всюду унитарна и является граничным значением аналитической $\mathcal{L}(N)$-значной функции $s(z)$ в верхней полуплоскости. В типичных случаях $s(z)$ можно продолжить в нижнюю полуплоскость как мероморфную функцию, полюсы которой тесно связаны с геометрией рассеяния и физической интерпретацией теории. Мы уже встречались с примерами таких продолжений в § 7, 8 и в дополнении к § 6.

Полное изложение теории Лакса — Филлипса выходит за рамки этого раздела. Мы хотим лишь доказать несколько основных теорем, с тем чтобы прояснить структуру теории и источник упомянутых свойств аналитичности. Затем мы приведем ряд примеров, с тем чтобы показать, как на практике проверяют условия этих теорем. Подробности и многочисленные применения можно найти в ссылках, обсуждаемых в Замечаниях.

Основная идея, формулируемая и развиваемая в теории Лакса — Филлипса, — это идея приходящих и уходящих подпространств.

Определение. Пусть $U(t)$ — сильно непрерывная унитарная группа на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Замкнутое подпространство $D_+ \subset \mathscr{H}$ называется **уходящим,** если

(i) $U(t)[D_+] \subset D_+$ при $t \geqslant 0$;

(ii) $\bigcap_t U(t)[D_+] = \{0\}$;

(iii) $\overline{\bigcup_t U(t)[D_+]} = \mathscr{H}$.

Аналогично, если D_- удовлетворяет (ii), (iii) и

(i′) $U(t)[D_-] \subset D_-$ при $t \leqslant 0$,

то D_- называют **приходящим** подпространством.

Такая терминология естественно возникает в применениях общей теории Например, в гильбертовом пространстве свободного волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$ (см. пример 1) D_+ есть в точности множество начальных данных, таких, что решение $u(x, t)$ обращается в нуль при $|x| \leqslant t$, т е., говоря физически, таких, что волны в далеком будущем уходят на бесконечность Аналогично, D_- есть множество начальных данных, таких, что $u(x, t)$ обращается в нуль при $|x| \leqslant -t$. Такие решения отвечают волнам, сходящимся из далекого прошлого.

Пример уходящего подпространства можно построить следующим образом. Пусть N — гильбертово пространство, и пусть $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}; N)$. Определим $U(t)$ как сдвиг вправо на t единиц, т. е. $(U(t)f)(s) = f(s-t)$ Тогда

$$D_+ = L^2(0, \infty; N) \equiv \{f \in L^2(\mathbb{R}, N) \mid f(s) = 0 \text{ при } s < 0\}$$

— уходящее подпространство. Основная структурная теорема этого раздела утверждает, что на самом деле все уходящие подпространства, по существу, имеют такой вид.

Теорема XI.82. Пусть $U(t)$ — сильно непрерывная унитарная группа на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и D_+ — уходящее подпространство для $U(t)$. Тогда существуют вспомогательное гильбертово пространство N и унитарное отображение $\mathscr{R}_+$ пространства $\mathscr{H}$ на $L^2(\mathbb{R}; N)$, такие, что $\mathscr{R}_+[D_+] = L^2(0, \infty; N)$, а $U_+(t) \equiv \mathscr{R}_+ U(t) \mathscr{R}_+^{-1}$ есть сдвиг вправо на t единиц. Аналогично, если D_- — приходящее подпространство, то существует унитарное отображение $\mathscr{R}_-$ на $L^2(\mathbb{R}; N')$, такое, что $\mathscr{R}_-[D_-] = L^2(-\infty, 0; N')$ и $U_-(t) \equiv \mathscr{R}_- U(t) \mathscr{R}_-^{-1}$ есть сдвиг вправо на t единиц. Если $U(t)$ имеет одновременно и уходящее, и приходящее подпространства, то N и N' можно выбрать одинаковыми, хотя $\mathcal{R}_+$ может отличаться от $\mathcal{R}_-$. Описанные представления единственны с точностью до изоморфизмов N

$U_+(t)$, $L^2(0, \infty; N)$ и $L^2(\mathbb{R}; N)$ называются **уходящим трансляционным представлением** группы $U(t)$, подпространства D_+ и пространства $\mathcal{H}$. Аналогично, $U_-(t)$, $L^2(-\infty, 0; N)$ и $L^2(\mathbb{R}; N)$ называются **приходящим трансляционным представлением** $U(t)$, D_- и $\mathcal{H}$.

Перед тем как приступить к доказательству теоремы, сделаем несколько замечаний. Прежде всего, если $U(t)$ обладает приходящим и уходящим подпространствами, оператор рассеяния можно построить следующим образом Пусть $\varphi_- = \mathcal{R}_-\varphi$, $\varphi_+ = \mathcal{R}_+\varphi$, где $\varphi \in \mathcal{H}$. Определим $\tilde{S}$ как отображение $\tilde{S}$: $\varphi_- \mapsto \varphi_+$, т. е. $\tilde{S} = \mathcal{R}_+\mathcal{R}_-^{-1}$ есть унитарное отображение $L^2(\mathbb{R}; N)$ в себя. Отображение S определяется переводом этого оператора обратно в $\mathcal{H}$:

$$S \equiv \mathcal{R}_-^{-1}(\mathcal{R}_+\mathcal{R}_-^{-1})\mathcal{R}_- = \mathcal{R}_-^{-1}\mathcal{R}_+$$

Наконец, пусть $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье, унитарное отображение $L^2(\mathbb{R}; N)$ в себя. Введем

$$\hat{S} \equiv \mathcal{F}\tilde{S}\mathcal{F}^{-1}.$$

Операторы S, $\hat{S}$ и $\tilde{S}$ попарно унитарно эквивалентны, и потому каждый из них мы будем называть **оператором рассеяния**, различая используемые представления значками ^ и ~. Поскольку $\mathcal{R}_\pm U(t) = U_\pm(t)\mathcal{R}_\pm$ и $U_+(t) = U_-(t)$, оператор S коммутирует с $U(t)$. Оператор $\tilde{S}$ коммутирует со сдвигами и потому, грубо говоря, должен задаваться операцией свертки с некоторой $\mathcal{L}(N)$-значной функцией τ на $\mathbb{R}$, так что $\hat{S}$ должен задаваться операцией умножения на операторнозначную функцию $s = (2\pi)^{1/2}\hat{\tau}$. Если дополнительно предположить, что $D_- \subset D_+^{\perp}$, то $\tilde{S}$ будет переводить $L^2(-\infty, 0; N)$ в себя, так что носитель τ должен лежать в $(-\infty, 0]$. Тогда, по теореме Пэли — Винера, s имеет аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость. Это и приведет к аналитическим свойствам, о которых говорилось в начале этого раздела (подробности приведены в теореме XI.89 и ее следствиях).

Подчеркнем, что данное сейчас определение оператора рассеяния не требовало никаких ссылок на свободную динамику. Но практически уходящие и приходящие подпространства строятся с помощью свободной динамики, так что $\mathcal{R}_+$ и $\mathcal{R}_-$ оказываются унитарно эквивалентными обычным волновым операторам. Подробнее это обсуждается ниже. Однако описанное построение оператора рассеяния открывает возможность определения S и в тех случаях, когда нет «естественного» кандидата на роль свободной системы, или в случаях, когда сходимость полного решения к свободному решению при $t \to \pm\infty$ столь медленна, что обычное построение волновых операторов не проходит. Подчеркнем, однако, что описанное построение все-таки зависит не только от группы $U(t)$, задающей динамику взаимодействия. Например, если уходящее трансляционное представление $\mathscr{H}$ задано в виде $L^2(-\infty, \infty; N)$, то в качестве $\tilde{D}_-$ можно взять $\mathscr{R}_+^{-1}[L^2(-\infty, 0; N)]$. Для пары D_+, $\tilde{D}_-$ S-матрица будет единичной. Обычно дополнительные соображения, диктующие правильный выбор D_+ и D_-, связаны с геометрией задачи.

Одно из ограничений, внутренне присущих теории в том виде, как она описана, очевидно из самой теоремы XI.82. Существование уходящего или приходящего трансляционного представления для группы $U(t)$ предполагает, что ее генератор H имеет абсолютно непрерывный спектр, заполняющий всю вещественную ось с однородной кратностью. Это, однако, не запрещает применения теории в задачах квантовой механики (см. пример 5).

В качестве подготовки к доказательству теоремы XI.82 мы сначала докажем ее дискретный аналог.

Теорема XI.83. Пусть V — унитарный оператор на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Пусть D_+ — замкнутое подпространство $\mathscr{H}$, такое, что

(i) $V[D_+] \subset D_+$;

(ii) $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{Z}} V^k[D_+] = \{0\}$;

(iii) $\overline{\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} V^k[D_+]} = \mathscr{H}$.

Тогда существуют гильбертово пространство N и унитарное отображение r_+ пространства $\mathscr{H}$ на $l_2(-\infty, \infty; N)$, такие, что

$$r_+[D_+] = \{f \mid f(n) = 0,\ n < 0\} \equiv l_2[0, \infty; N)$$

и $\tilde{V} = r_+ V r_+^{-1}$ есть сдвиг вправо. Такое представление единственно с точностью до изоморфизмов N.

Доказательство. Мы докажем существование r_+, оставив доказательство единственности читателю (задача 121). Пусть $N = D_+ \cap (V[D_+])^\perp$; N — замкнутое подпространство $\mathscr{H}$. Поскольку V унитарен,

$$VN = VD_+ \cap V^2 D_+^\perp \subset VD_+ \subset N^\perp,$$

так что можно образовать прямую сумму $N \oplus VN$. Поскольку $N \oplus VD_+ = D_+$, имеем $VN \oplus V^2 D_+ = VD_+$, откуда $N \oplus VN \oplus V^2 D_+ =$

$=D_+$, или, эквивалентно,

$$N \oplus VN = D_+ \cap V^2 D_+^\perp.$$

Таким же образом по индукции получаем

$$\begin{gathered} V^j N \subset V^j D_+ \subset (N \oplus \ldots \oplus V^{j-1} N)_+^\perp, \\ N \oplus \ldots \oplus V^j N = D_+ \cap V^{j+1} D_+^\perp. \end{gathered} \tag{208}$$

В силу (i), $D_+ \supseteq VD_+ \supseteq \ldots \supseteq V^j D_+$, так что, в силу (ii) и (208),

$$\bigoplus_{k \geqslant 0} V^k N = D_+. \tag{209}$$

Применяя V^{-1} к $N \oplus VD_+ = D_+$, находим, что $V^{-1}N \oplus D_+ = V^{-1}D_+$, откуда, по индукции,

$$\bigoplus_{k \geqslant l} V^k N = V^l D_+$$

для любого целого l, положительного или отрицательного. Взяв $l \to -\infty$, с помощью (iii) получим, что

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V^k N = \mathcal{H}.$$

Таким образом, любой $\varphi \in \mathcal{H}$ можно однозначно представить в виде

$$\varphi = \sum_k V^k \varphi_k, \qquad \varphi_k \in N,$$

с $\|\varphi\|^2 = \sum_k \|\varphi_k\|^2$. В итоге отображение $r_+ \colon \varphi \mapsto \{\varphi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ задает унитарное преобразование $\mathcal{H}$ на $l_2(-\infty, \infty; N)$. В силу (209), $r_+ D_+ = l_2[0, \infty; N)$. Наконец, легко проверить, что $\tilde{V}$ есть сдвиг вправо. ∎

Существуют по крайней мере три различных доказательства теоремы XI.82 Одно основано на обращении приводимого ниже доказательства теоремы XI.84 и использует теорему единственности фон Неймана. Второе использует технику анализа Фурье, теорему XI.83 и преобразование Кэли. Доказательство, которое мы приведем здесь, опирается на теорию спектральной кратности (см. § VII.2) и уходит корнями в общие методы теории групп, особенно в теорему импримитивности Макки. Напомним, что две меры называются **эквивалентными** тогда и только тогда, когда они взаимно абсолютно непрерывны. Основной технический результат, нужный для доказательства теоремы XI.82, тесно связан с тем, что мера Лебега — это единственная инвариантная относительно сдвигов мера на $\mathbb{R}$ (задача 122).

Лемма. Предположим, что $d\mu$ — нетривиальная мера Бореля на $\mathbb{R}$, обладающая тем свойством, что $d\mu(\cdot+a)$ эквивалентна $d\mu$ для всех $a\in\mathbb{R}$. Тогда $d\mu$ эквивалентна мере Лебега.

Доказательство. По условию,

$$d\mu(x+y)=g_y(x)\,d\mu(x). \tag{210}$$

Отсюда вытекает, что $g_y(x)$ — измеримая функция x при каждом фиксированном y, а $\int h(x)g_y(x)\,d\mu(x)=\int h(x-y)\,d\mu(x)$ — измеримая функция y при каждой измеримой функции h, а потому $g_y(x)$ измерима по совокупности переменных.

Зададим такую $h\geqslant 0$, что $\int h(y)\,dy=1$, и пусть f — простая функция. Тогда, свободно пользуясь теоремой Фубини, с учетом (210) получим

$$\begin{aligned}\alpha\equiv\int f(x)\,d\mu(x)&=\iint f(x)\,h(y)\,d\mu(x)\,dy=\\&=\iint f(x+y)\,g_y(x)\,h(y)\,d\mu(x)\,dy\end{aligned} \tag{211}$$

Сделаем замену переменных $z=x+y$ при фиксированном x. Тогда

$$\int f(x+y)\,g_y(x)\,h(y)\,dy=\int f(z)\,g_{z-x}(x)\,h(z-x)\,dz$$

в силу трансляционной инвариантности меры Лебега. В итоге

$$\alpha=\int f(z)\,G(z)\,dz,$$

где

$$G(z)=\int g_{z-x}(x)\,h(z-x)\,d\mu(x).$$

Поскольку f произвольна, $d\mu(x)=G(x)\,dx$.

Теперь зададим такую $h\geqslant 0$, что $\int h(y)\,d\mu(y)=1$, и, как и выше, проделаем необходимые вычисления:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx&=\iint f(x)\,h(y)\,d\mu(y)\,dx=\iint f(x+y)\,h(y)\,dx\,d\mu(y)=\\&=\iint f(z)\,h(z-x)\,g_{-x}(z)\,d\mu(z)\,dx=\int f(z)\,H(z)\,d\mu(z),\end{aligned}$$

где $H(z)=\int h(z-x)\,g_{-x}(z)\,dx$. Отсюда

$$dx=H(x)\,d\mu(x). \blacksquare$$

Доказательство теоремы XI.82. На основе доказательства теоремы XI.83 введем

$$D_+(t)\equiv U(t)[D_+],\qquad t\in\mathbb{R},$$
$$D_+(\infty)\equiv\{0\},\qquad D_+(-\infty)\equiv\mathscr{H}$$

и для $a<b$

$$N(a, b]=D_+(a)\cap D_+(b)^{\perp}.$$

Пусть $P_{(a, b]}$ — ортогональный проектор на $N(a, b]$. Используя свойства (i)—(iii) и непрерывность $U(t)$, легко проверить, что $\{P_{(a, b]}\}$ порождает проекторнозначную меру $\{P_\Omega\}$, удовлетворяющую условию $U(t)P_\Omega U(t)^{-1}=P_{\Omega+t}$. Вводя оператор

$$X=\int_{\mathbb{R}}\lambda\, dP_\lambda,$$

получим соотношение $U(t)XU(t)^{-1}=X+t$. Из единственности классов спектральных мер заданной кратности (теорема VII.6) следует, что классы спектральных мер оператора X инвариантны относительно сдвигов. Таким образом, по доказанной только что лемме, каждый класс должен содержать меру Лебега. Но, поскольку классы спектральных мер не пересекаются, существует всего один такой класс, т. е. X есть самосопряженный оператор однородной кратности m с некоторым m и с соответствующей спектральной мерой dx. Отсюда следует существование гильбертова пространства N размерности m и унитарного отображения $Q_+\colon \mathscr{H}\to L^2(\mathbb{R}, dx; N)$, таких, что $Q_+P_\Omega Q_+^{-1}$ есть оператор умножения на χ_Ω — характеристическую функцию Ω.

Пусть $W(t)=Q_+U(t)Q_+^{-1}$ и $T_0(t)$ — сдвиг вправо на t единиц, действующий на $L^2(\mathbb{R}, dx; N)$. Тогда $W(t)T_0(t)^{-1}$ при каждом t коммутирует с каждым $Q_+P_\Omega Q_+^{-1}$, так что по теореме XIII.84 существует $\mathscr{L}(N)$-значная измеримая функция $K_t(s)$, удовлетворяющая равенству

$$(W(t)T_0(-t)f)(s)=K_t(s)f(s).$$

Функция $K_t(s)$ задана только почти всюду по s, но для определенности мы зададим ее при каждом s. Тогда

$$(W(t)f)(s)=K_t(s)f(t+s).$$

Групповое свойство $W(t)W(u)=W(t+u)$ ведет к соотношению

$$K_t(s)K_u(t+s)=K_{t+u}(s), \tag{212}$$

которое выполняется в следующем смысле: для каждых t и u оно имеет место при почти всех s. Таким образом, оно справедливо для почти всех троек $\langle s, t, u\rangle$, поэтому можно выбрать фиксированное значение s так, что (212) будет справедливо для почти всех $\langle t, u\rangle$. Для выбранного значения s определим B соотношением

$$(Bf)(t)=K_{t-s}(s)f(t).$$

Тогда

$$(BW(a)B^{-1}f)(t)=K_{t-s}(s)K_a(t)[K_{t+a-s}(s)]^{-1}f(t+a)=f(t+a)$$

для почти всех t и a, где мы воспользовались (212), сделав замену переменных $t' = t + s$, $u' = a$. Теперь ясно, что $BW(a)B^{-1} = T_0(a)$ для почти всех a, а потому, в силу непрерывности, для всех a. Полагая $\mathcal{R}_+ = BQ_+$, получим утверждение теоремы ∎

Теоремой XI.82 можно воспользоваться для доказательства теоремы фон Неймана (теорема VIII.14) о единственности представлений канонических коммутационных соотношений.

Теорема XI.84 (теорема фон Неймана). Пусть $U(t)$ и $V(s)$ — две сильно непрерывные унитарные однопараметрические группы на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, такие, что

$$U(t)V(s) = e^{its}V(s)U(t) \qquad \text{для всех } t \text{ и } s.$$

Тогда существуют гильбертово пространство N и унитарное отображение $\mathcal{R}$ из $\mathcal{H}$ на $L^2(\mathbb{R}; N)$, такие, что $\mathcal{R}U(t)\mathcal{R}^{-1}$ есть сдвиг вправо на t единиц, а $\mathcal{R}V(s)\mathcal{R}^{-1}$ есть умножение на $e^{-i\lambda s}$.

Доказательство Пусть P и Q — самосопряженные операторы, такие, что $U(t) = e^{-itP}$ и $V(s) = e^{-isQ}$. Пусть $\mathcal{D}$ — множество векторов из $\mathcal{H}$ вида

$$\varphi_f = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, s)\, U(t)V(s)\varphi\, dt\, ds,$$

где $\varphi \in \mathcal{H}$ и $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Точно так же, как в доказательстве теоремы VIII.8, можно показать, что $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{H}$, $\mathcal{D} \subset D(Q)$, $\mathcal{D} \subset D(P)$ и что $\mathcal{D}$ инвариантно относительно действия $U(t)$ и $V(s)$. По теореме VIII.10, P и Q самосопряжены в существенном на $\mathcal{D}$. Пусть $\psi \in \mathcal{D}$; тогда, поскольку $U(t)\psi \in \mathcal{D}$, можно продифференцировать обе части равенства

$$U(t)V(s)\psi = e^{its}V(s)U(t)\psi$$

по s. Полагая $s = 0$, получим

$$U(t)QU(-t)\psi = (Q - tI)\psi. \tag{213}$$

Поскольку это равенство справедливо на $\mathcal{D}$, которое есть существенная область определения для Q и $Q - tI$, мы заключаем, что Q и $Q - tI$ унитарно эквивалентны и (213) справедливо для всех $\psi \in D(Q)$. Пусть теперь $\{E_\Omega\}$ — спектральное семейство оператора Q. Тогда $\{U(t)E_\Omega U(t)^{-1}\}$ — спектральное семейство оператора $U(t)QU(t)^{-1}$. Так как $E_\Omega = \chi_\Omega(Q)$, то из (213) вытекает соотношение

$$U(t)E_{(-\infty,\lambda)}U(t)^{-1} = E_{(-\infty,\lambda+t)} \tag{214}$$

для всех λ и t из $\mathbb{R}$.

Положим $D_- = \operatorname{Ran} E_{(-\infty,\,0]}$. Покажем, что D_- — приходящее подпространство для $U(t)$ на $\mathscr{H}$. Прежде всего из (214) следует, что $U(t)D_- = \operatorname{Ran} E_{(-\infty,\,\lambda+t]}$ для всех t. Тогда:

(i) $U(t)D_- \subset D_-$, $t \leqslant 0$;

(ii) $\bigcap\limits_t U(t)D_- = \{0\}$;

(iii) $\overline{\bigcup\limits_t U(t)D_-} = \mathscr{H}$

в силу обычных свойств спектральных операторов. Значит, в силу теоремы XI.82, существуют вспомогательное гильбертово пространство N и унитарное отображение $\mathscr{R}_-$ пространства $\mathscr{H}$ на $L^2(\mathbb{R};\,N)$, такие, что $\mathscr{R}_- D_- = L^2(-\infty,\,0;\,N)$, а $\mathscr{R}_- U(t)\mathscr{R}_-^{-1}$ есть сдвиг вправо на t единиц. Наконец, поскольку $\mathscr{R}_- E_{(-\infty,\,0)}\mathscr{R}_-^{-1} = \chi_{(-\infty,\,0)}$, равенство (214) приводит к соотношению $\mathscr{R}_- E_{(-\infty,\,\lambda)}\mathscr{R}_-^{-1} = \chi_{(-\infty,\,\lambda)}$ для всех λ. В итоге $\mathscr{R}_- Q\mathscr{R}_-^{-1}$ есть операция умножения на λ, а $\mathscr{R}_- e^{-isQ}\mathscr{R}_-^{-1}$ — операция умножения на $e^{-i\lambda s}$. ∎

Теорему XI.82 можно переформулировать с помощью преобразования Фурье. Определяемое обычным образом, преобразование Фурье $\mathscr{F}$ есть унитарное отображение $L^2(\mathbb{R};\,N)$ на себя. Оно отображает $L^2(0,\,\infty;\,N)$ на класс $\mathscr{H}^2_-(\mathbb{R};\,N)$ Харди — Лебега, а $L^2(-\infty,\,0;\,N)$ на $\mathscr{H}^2_+$ (см. замечания к § IX.3).

Теорема XI.85. Пусть D_+ — уходящее подпространство для унитарной группы $U(t)$ на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда существуют вспомогательное гильбертово пространство N и унитарное отображение $\mathscr{F}\circ\mathscr{R}_+$ пространства $\mathscr{H}$ на $L^2(\mathbb{R};\,N)$, такие, что $\mathscr{F}\circ\mathscr{R}_+[D_+] = \mathscr{H}^2_-(\mathbb{R};\,N)$, а $(\mathscr{F}\circ\mathscr{R}_+)\,U(t)\,(\mathscr{F}\circ\mathscr{R}_+)^{-1}$ есть оператор умножения на $e^{-it\sigma}$.

Описанное только что представление называется **уходящим спектральным представлением** для $U(t)$, D_+ и $\mathscr{H}$. Для приходящего подпространства справедлива похожая теорема с той только разницей, что в ней $\mathscr{F}\circ\mathscr{R}_+$ заменяется на $\mathscr{F}\circ\mathscr{R}_-$, а $\mathscr{H}^2_-(\mathbb{R};\,N)$ на $\mathscr{H}^2_+(\mathbb{R};\,N)$.

Обсуждение, проведенное после формулировки теоремы XI.82, показывает, что существование приходящего и уходящего подпространств позволяет строить теорию рассеяния. Но теорема XI.82 ничего не говорит о том, как в действительности построить приходящие и уходящие подпространства для $U(t)$. Поскольку $U(t)$ описывает динамику системы со взаимодействием, это нетривиальный вопрос. В приложениях нужное построение существенно опирается на то, что $U(t)$ тесно связана со свободной динамикой, задаваемой группой $U_0(t)$, которая обладает многими специальными свойствами. Пусть, например, $W_0(t)$ и $W(t)$ — унитарные группы, описывающие распространение акустических волн в свободном пространстве и в неоднородной среде, построенные в предыдущем разделе. Предположим, что область неоднородности содержится в некотором конечном шаре $\mathcal{B}_{r_0}$. Гильбертовы пространства, в которых действуют $W_0(t)$ и $W(t)$, эквивалентны, и нормы любой пары функций с носителями вне $\mathcal{B}_{r_0}$ равны между собой. Более того, любые начальные данные с компактным носителем преобразуются операторами $W_0(t)$ так, что их носители в конце концов оказываются вне $\mathcal{B}_{r_0}$, и до тех пор, пока эти начальные данные остаются вдали от $\mathcal{B}_{r_0}$, $W_0(t)$ и $W(t)$ *согласуются* между собой. Эти и другие специфические черты $W_0(t)$ и $W(t)$ используются в примерах 1 и 2 ниже. А сейчас вернемся на время к общей теории и точно сформулируем, что мы имеем в виду, говоря о «тесной связи» между $U(t)$ и $U_0(t)$.

Предположим, что $U(t)$ и $U_0(t)$ — сильно непрерывные унитарные группы на гильбертовых пространствах $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_0$, и пусть J — оператор отождествления из $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}$. Предположим, что

(0) существуют подпространства $D_\pm^{r_0} \subset \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{H}$, такие, что $\mathcal{H}_0$-норма и $\mathcal{H}$-норма одинаковы на $D_\pm^{r_0}$, а J — единичный оператор на $D_\pm^{r_0}$;

(1) $D_+^{r_0}$ и $D_-^{r_0}$ — приходящее и уходящее подпространства *как для* $U(t)$, *так и для* $U_0(t)$;

(2) при $t \geqslant 0$ группы $U(t)$ и $U_0(t)$ одинаково действуют на $D_+^{r_0}$, а при $t \leqslant 0$ на $D_-^{r_0}$;

(3) существуют гильбертово пространство N и унитарное отображение $\mathcal{R}_0$: $\varphi \longmapsto \tilde{\varphi}$ из $\mathcal{H}$ на $L^2(\mathbb{R}; N)$, такие, что $D_+^{r_0}$ и $D_-^{r_0}$ переходят соответственно в $L^2(r_0, \infty; N)$ и $L^2(-\infty, -r_0; N)$, где r_0 — некоторое положительное число, а $U_0(t)$ переходит в операцию сдвига по t. Иначе говоря, с точностью до сдвига на r_0 единиц это представление служит *одновременно* и приходящим и уходящим для $U_0(t)$.

Пусть через $T_0(t)$ обозначен сдвиг вправо, действующий в $L^2(\mathbb{R}; N)$. Для построения уходящего трансляционного представления для $U(t)$ мы переводим $U(t)\varphi$ для каждого φ из $D_+^{r_0}$ в $T_0(t)\tilde{\varphi}$. В силу (2), отображение корректно определено и сохраняет норму, а в силу (iii), оно плотно задано. Более того, его область значений тоже плотна, ибо $\mathcal{R}_0$ отображает $D_+^{r_0}$ на $L^2(r_0, \infty; N)$. Следовательно, это отображение продолжается до унитарного преобразования $\mathcal{H}$ на $L^2(\mathbb{R}; N)$, при котором $U(t)$ переходит в $T_0(t)$, а $D_+^{r_0}$ в $L^2(r_0, \infty; N)$. Сдвиг влево с помощью $T_0(-r_0)$ позволяет завершить построение уходящего трансляционного представления для $U(t)$ Похожее построение дает приходящее трансляционное представление. Как и прежде, обозначим отображения на эти представления через $\mathcal{R}_+$ и $\mathcal{R}_-$. Отметим, что, в силу (3), $D_+^{r_0}$ и $D_-^{r_0}$ ортогональны. Это будет иметь важные последствия, о которых речь впереди.

В такой ситуации, когда у нас есть группа $U_0(t)$ свободной динамики, естествен вопрос: как оператор рассеяния Лакса — Филлипса связан с обычными волновыми операторами и оператором рассеяния? Пусть D — плотное в $\mathcal{H}_0$ множество векторов φ, таких, что $\mathcal{R}_0\varphi$ имеет компактный носитель. Если $\varphi \in D$, то $U_0(s)\varphi \in D_+^{r_0}$ для некоторого s, так что, в силу (2), $U(-t)JU_0(t)\varphi$ не зависит от t при $t \geqslant s$. Таким образом,

$$\Omega^-\varphi = \lim_{t\to\infty} U(-t)JU_0(t)\varphi$$

существует. Поскольку D плотно в $\mathcal{H}_0$, этот предел существует на всем $\mathcal{H}_0$; аналогично доказывается существование Ω^+

Заметим теперь, что если $\psi \in D_+^{r_0}$, то $\Omega^-\psi = \psi$; таким образом, если $\varphi \in D$ и $U_0(s_1)\varphi \in D_+^{r_0}$, то

$$\Omega^- U_0(s_1)\varphi = U_0(s_1)\varphi.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_+\Omega^-\varphi &= T_0(-s_1)\mathcal{R}_+\Omega^-U_0(s_1)\varphi = T_0(-s_1)\mathcal{R}_+U_0(s_1)\varphi = \\ &= T_0(-r_0-s_1)\mathcal{R}_0U_0(s_1)\varphi = T_0(-r_0)\mathcal{R}_0\varphi,\end{aligned}$$

поскольку $\mathcal{R}_+ = T_0(-r_0)\mathcal{R}_0$ на $D_+^{r_0}$. В связи с тем что множество взятых φ плотно, получаем $\mathcal{R}_+\Omega^- = T_0(-r_0)\mathcal{R}_0$ и аналогично $\mathcal{R}_-\Omega^+ = T_0(r_0)\mathcal{R}_0$. Поскольку $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_\pm$ и $T_0(t)$ унитарны, это означает, что $\operatorname{Ran}\Omega^+ = \mathcal{H} = \operatorname{Ran}\Omega^-$, так что волновые операторы полны. Наконец,

$$\begin{aligned}(\Omega^-)^{-1}\Omega^+ &= \mathcal{R}_0^{-1}T_0(r_0)\mathcal{R}_+\mathcal{R}_-^{-1}T_0(r_0)\mathcal{R}_0 = \\ &= \mathcal{R}_0^{-1}T_0(r_0)\tilde{S}T_0(r_0)\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0^{-1}(T_0(2r_0)\tilde{S})\mathcal{R}_0.\end{aligned}$$

Таким образом, с точностью до несущественного множителя $T_0(2r_0)$ произведение $(\Omega^-)^{-1}\Omega^+$ есть оператор рассеяния Лакса — Филлипса, преобразованный в $\mathcal{H}_0$. Итак, справедлива

Теорема XI.86. Пусть $U_0(t)$, $U(t)$, J удовлетворяют условиям (0) — (3), а $\mathcal{R}_0$, T_0 и r_0 определены так, как описано выше. Тогда волновые операторы $\Omega^\pm$ существуют, полны и

$$(\Omega^-)^{-1}\Omega^+ = \mathcal{R}_0^{-1}(T_0(2r_0)\tilde{S})\mathcal{R}_0. \qquad (215)$$

Пример 1 (свободное волновое уравнение в трехмерном пространстве). В § X.13 и XI.10 мы уже сформулировали проблему решения свободного волнового уравнения как задачу в гильбертовом пространстве. Будем далее использовать обозначения, введенные в § XI.10, полагая $c_0 = 1$. Если функция φ, задающая начальные данные, лежит в $\mathscr{H}_0$ и достаточно гладкая, то первая компонента $u(x, t)=(W_0(t)\varphi)_1$ удовлетворяет свободному волновому уравнению (186). Первый нужный нам факт есть принцип Гюйгенса.

Теорема XI.87 (принцип Гюйгенса). Пусть $W_0(t)$ — унитарная группа для свободного волнового уравнения на $\mathbb{R}^3$. Положим $u(x, t)=(W\ (t)\varphi)_1$. Предположим, что $\varphi=\langle f, g\rangle\in\mathscr{H}_0$ имеет компактный носитель. Тогда

$$\operatorname{supp} u(x, t)\subset\{x\in\mathbb{R}^3 \mid |x-y|=t \text{ для некоторого } y\in\operatorname{supp}\langle f, g\rangle\}.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $f=0$, а $g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Выведем явную формулу для решения уравнения (186) в случае $c_0=\rho_0=1$. Чтобы решить (186), нужно найти такое u, что $\hat{u}_{tt}(k, t)=-k^2\hat{u}(k, t)$, $\hat{u}(k, 0)=0$, $\hat{u}_t(k, 0)=\hat{g}(k)$. Это легко сделать, полагая

$$\hat{u}(k, t)=\frac{\sin|k|t}{|k|}\hat{g}(k).$$

Пусть H — обобщенная функция умеренного роста с фурье-образом $|k|^{-1}\sin|k|t$. Тогда

$$u(x, t)=\mathscr{F}^{-1}(|k|^{-1}(\sin|k|t)\hat{g}(k))=(2\pi)^{-3/2}H*g,$$

так что прежде, чем выписать решение, следует найти H. Пусть dS_R — поверхностная мера на сфере радиуса R; это есть обобщенная функция умеренного роста, такая, что с помощью угла θ между x и k ее фурье-образ можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\widehat{dS_R}(k)&=(2\pi)^{-3/2}\int e^{-ik\cdot x}\,dS_R(x)=\\&=(2\pi)^{-3/2}\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} e^{-i|k|R\cos\theta}R^2\sin\theta\,d\psi=\\&=(2\pi)^{-1/2}R^2\int_0^\pi e^{-i|k|R\cos\theta}\sin\theta\,d\theta=\frac{2R\sin|k|R}{\sqrt{2\pi}\,|k|}.\end{aligned}$$

Таким образом, $H=(2t)^{-1}\sqrt{2\pi}\,dS_t$ при $t>0$, и

$$u(x, t)=\frac{1}{4\pi t}\int_{\mathbb{R}^3} g(x+y)\,dS_t(y).$$

Аналогичное представление справедливо при $t<0$. Отметим, что $v=u_t$ тоже удовлетворяет (186) с начальными условиями $v(x, 0)=g(x)$, $v_t(x, 0)=0$. Таким образом, решение (186) с начальными данными f, $g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ можно представить в виде

$$u(x, t)=\frac{1}{4\pi t}\int_{\mathbb{R}^3} g(x+y)\,dS_t(y)+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{\mathbb{R}^3} f(x+y)\,dS_t(y)\right). \quad (216a)$$

откуда немедленно вытекает принцип Гюйгенса для начальных данных класса C_0^∞.

Теперь предположим, что $\varphi = \langle f, g \rangle \in \mathscr{H}_0$ с носителем в компактном множестве K, и пусть Σ_t — множество, где в соответствии с принципом Гюйгенса сосредоточено $u(x, t)$. Пусть $K^{(\varepsilon)}$ и $\Sigma_t^{(\varepsilon)}$ суть множества K и Σ_t с присоединенными к ним точками, находящимися от них на расстоянии меньшем ε. Тогда существует последовательность $\varphi_n = \langle f_n, g_n \rangle$ пар C_0^∞-функций с носителем в $K^{(\varepsilon)}$, такая, что $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathscr{H}_0$. Поскольку $W_0(t)$ — унитарная группа, $W_0(t)\varphi_n \to W_0(t)\varphi$ и, в частности,

$$\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla(u_n - u)(x)|^2 \, dx \to 0.$$

Согласно лемме о принципе неопределенности (§ X.2),

$$\int_{|x|<r} |u(x, t) - u_n(x, t)|^2 dx \leqslant 4r^2 \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{4|x|^2} |u(x, t) - u_n(x, t)|^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant 4r^2 \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla(u(x, t) - u_n(x, t))|^2 dx, \tag{216b}$$

так что в каждом шаре радиуса r некоторая подпоследовательность последовательности $\{u_n\}$ поточечно почти всюду сходится к u. В итоге u равно нулю вне $\Sigma_t^{(\varepsilon)}$, поскольку там равно нулю каждое u_n, но тогда из произвольности ε следует, что u сосредоточено в Σ_t. ∎.

Следствие. Предположим, что $\operatorname{supp}\langle f, g \rangle$ содержится в шаре радиуса r Тогда

$$u(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad |x| > r + t, \tag{217a}$$
$$u(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad |x| < |t| - r. \tag{217b}$$

Равенство (217a) выражает конечность скорости распространения возмущения и справедливо в пространстве любой размерности. Равенство (217b) есть переформулировка принципа Гюйгенса, справедливая только при нечетных размерностях начиная с 3.

Введем теперь два подпространства:

$$D_+ = \{\varphi \in \mathscr{H}_0 \mid u(x, t) = (W_0(t)\varphi)_1 = 0 \text{ при } |x| \leqslant t,\ t > 0\},$$
$$D_- = \{\varphi \in \mathscr{H}_0 \mid u(x, t) = (W_0(t)\varphi)_1 = 0 \text{ при } |x| \leqslant -t,\ t < 0\}.$$

Проверку того, что D_+ есть уходящее пространство, проведем следующим образом. В силу унитарности $W_0(t)$ и неравенства (216b), подпространство D_+ замкнуто. Для проверки (i) заметим, что если $\varphi \in D_+$, то

$$(W_0(t)W_0(s)\varphi)_1 = (W_0(t+s)\varphi)_1 = u(x, t+s),$$

так что $(W_0(t)W_0(s)\varphi)_1=0$, когда $t>0$ и $|x|\leqslant t+s$. В итоге если $s\geqslant 0$, то $W_0(s)\varphi\in D_+$. Далее, предположим, что $\psi\in\in\bigcap\limits_s W_0(s)[D_+]$. Поскольку для $\varphi\in D_+$ справедливо включение

$$\operatorname{supp}(W_0(s)\varphi)_1\subset\mathbb{R}^3\diagdown\{x\in\mathbb{R}^3\mid |x|\leqslant s\},$$

принадлежность ψ подпространству $W_0(s)[D_+]$ при всех $s>0$ означает, что $(\psi)_1\equiv 0$. Но для $\varphi\in D_+$, кроме того, $(d/dt)(W_0(t)\varphi)_1=$ $=(W_0(t)\varphi)_2$, так что и $(\psi)_2\equiv 0$. Таким образом, $\psi\equiv 0$, что дает (ii). Наконец, заметим, что при условии $\operatorname{supp}\varphi\subset\{x\mid |x|\leqslant R\}$, в силу (217b), $W_0(R)\varphi\in D_+$, так что $\bigcup\limits_t W_0(t)D_+$ содержит все начальные данные класса C^∞ с компактным носителем, и потому выполнено (iii). Доказательство того, что D_- — приходящее подпространство, аналогично. В итоге, в силу теоремы XI.82, для $W_0(t)$ существуют приходящее и уходящее трансляционные представления.

На практике желательно иметь трансляционное представление для $W_0(t)$, которое *одновременно* и уходящее и приходящее, а также как можно больше конкретной информации о свойствах этого представления. По этой причине нужное представление строят непосредственно, не обращаясь к теореме XI.82. Прямое построение можно провести, если заметить, что для каждого $\sigma\in\mathbb{R}$ и $\omega\in\mathbb{R}^3$ с $|\omega|=1$ обобщенная собственная функция оператора

$$A_0=i\begin{pmatrix}0 & I\\ \Delta & 0\end{pmatrix},$$

отвечающая собственному значению $+\sigma$, имеет вид

$$\varphi_{\sigma,\omega}=e^{-i\sigma\omega\cdot x}\begin{pmatrix}1\\ -i\sigma\end{pmatrix}.$$

Подобно тому, как это сделано в § 6, введем

$$f^\#(\sigma,\omega)=(2\pi)^{-3/2}(f,\varphi_{\sigma,\omega})_{\mathscr{H}_0},$$

где $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)\times C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Отображение $f^\#$ можно рассматривать как функцию на $\mathbb{R}$ со значениями в $N=L^2(S^2)$, и легко показать, что соответствие $f\longmapsto f^\#$ задает изометрию $\mathscr{H}_0$ в $L^2(\mathbb{R};L^2(S^2))$. Более того, эта изометрия унитарна, а поскольку

$$(A_0f)^\#(\sigma,\omega)=(A_0f,\varphi_{\sigma,\omega})=(f,A_0\varphi_{\sigma,\omega})=\sigma(f,\varphi_{\sigma,\omega})=\sigma f^\#(\sigma,\omega),$$

она переводит оператор A_0 в оператор умножения на σ. Сделав обратное преобразование Фурье по переменной σ, можно представить $\mathscr{H}_0$ как $L^2(\mathbb{R};L^2(S^2))$, а $W_0(t)$ как правый сдвиг. Правда, при таком преобразовании на первый взгляд не видно, во что переходят D_+ и D_-. Но путем более внимательного анализа можно показать, что D_+ переходит в $L^2(0, \infty; L^2(S^2))$, а D_- — в $L^2(-\infty, 0; L^2(S^2))$. Это означает, что трансляционное представление является *одновременно* и приходящим, и уходящим, а $\mathscr{H}_0 = D_+ \oplus D_-$, что совершенно не очевидно в исходном представлении. Полученное ортогональное разложение служит средством доказательства ряда аналитических свойств оператора рассеяния, обсуждаемых дальше.

Наконец, отметим, что проведенное прямое построение трансляционного представления можно использовать для независимого доказательства принципа Гюйгенса.

Пример *2* (акустические волны в неоднородной среде). Рассмотрим первый пример, т. е. уравнения (187) предыдущего раздела, используя подход Лакса — Филлипса. Допустим, что выполнены все предположения о свойствах $c(x)$, $\rho(x)$, сделанные в § 10, и воспользуемся построенными там пространствами и операторами. Примем дополнительное предположение о свойствах $c(x)$ и $\rho(x)$: пусть для некоторого r

$$\rho(x) \equiv 1, \qquad c(x) \equiv 1, \qquad |x| \geqslant r.$$

Пусть далее $r_0 > r$, а D_+ и D_- — такие же, как в примере 1. Положим

$$D_+^{r_0} \equiv W_0(r_0) D_+, \qquad D_-^{r_0} \equiv W_0(-r_0) D_-.$$

Заметим, что $D_+^{r_0}$, $D_-^{r_0}$ — замкнутые подпространства в $\mathscr{H}_0$. Они суть замкнутые подпространства и в $\mathscr{H}_1$, поскольку функция $\varphi \in \mathscr{H}_0$ обращается в нуль внутри шара $B(r_0)$ радиуса r_0, если она принадлежит $D_+^{r_0}$. Отсюда

$$\|\varphi\|_{\mathscr{H}_1} = \|\varphi\|_{\mathscr{H}_0}, \qquad \varphi \in D_\pm^{r_0},$$

ибо нормы функций с носителями вне $B(r)$ одинаковы. В качестве J возьмем тождественное отображение.

Предположим, что $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ и $\varphi \in D_+^{r_0}$. Поскольку $W_0(t)$: $D_+^{r_0} \to D_+^{r_0}$ для $t \geqslant 0$, получаем, что

$$(W_0(t)\varphi)' = -iA_0 W_0(t)\varphi = -iA_1 W_0(t)\varphi,$$

ибо A_0 и A_1 совпадают на гладких функциях с носителями вне $B(r)$ Отсюда, в силу единственности связи между полугруппами и порождающими их генераторами, $W_0(t)\varphi = W_1(t)\varphi$ при $t \geqslant 0$, а поскольку множество рассматриваемых φ плотно в $D_+^{r_0}$, получаем, что

$$W_1(t)\varphi = W_0(t)\varphi, \qquad \varphi \in D_+^{r_0}, \qquad t \geqslant 0, \tag{218}$$

и аналогично

$$W_1(t)\varphi = W_0(t)\varphi, \qquad \varphi \in D_-^{r_0}, \qquad t \leqslant 0.$$

Это показывает, что $W_0(t)$ и $W_1(t)$ удовлетворяют требованиям (0) и (2) теоремы XI.86. Тот факт, что выполняется требование (3), следует из уже проведенного обсуждения примера 1. Далее, мы знаем, что $D_-^{r_0}$ и $D_+^{r_0}$ суть приходящее и уходящее подпространства для $W_0(t)$. Осталось показать, что они являются приходящим и уходящим подпространствами и для $W_1(t)$. Тогда, в силу теоремы XI.82, будет существовать оператор рассеяния $\tilde{S}$ Лакса — Филлипса. А поскольку условия (0) — (3) теоремы XI.86 проверены, у нас будет новое доказательство существования и полноты волновых операторов, а отображение $(\Omega^-)^{-1}\Omega^+$ будет связано с $\tilde{S}$ равенством (215).

Для доказательства того, что $D_+^{r_0}$ есть уходящее подпространство для $W_1(t)$, необходимо проверить свойства (i) — (iii). Свойства (i) и (ii) немедленно вытекают из (218) и соответствующих утверждений для группы свободной динамики, доказанных в примере 1. Проверка свойства (iii) значительно сложнее и требует привлечения целого ряда различных технических приемов. Кроме принципа Гюйгенса нам потребуется теорема вложения типа теорем, обсуждаемых в § XIII.14, и детальный спектральный анализ оператора A_1. Наш план таков: продемонстрировать эквивалентнссть свойства (iii) некоторой определенной форме убывания энергии в области, где среда неоднородна, а затем, используя свойства A_1, доказать, что такое убывание происходит на самом деле. Поскольку из свойства (iii) вытекает асимптотическая полнота, совсем не удивительно, что оно связано с условием убывания энергии: следует ожидать, что асимптотическая полнота будет иметь место, только если любое решение уравнения с членами, описывающими взаимодействие, в далеком прошлом и будущем будет походить на решение свободного уравнения, т. е. будет описывать волны, уходящие из области, где среда неоднородна.

Начнем с леммы, показывающей, что в случае свободного уравнения энергия распространяется с единичной скоростью. Для любого $R>0$ и $\varphi=\langle u, v\rangle$ определим локальные энергетические нормы, полагая

$$\|\varphi\|_0^{(R)}=\int_{|x|\leqslant R}[|\nabla u|^2+|v|^2]\,dx,$$

$$\|\varphi\|_1^{(R)}=\int_{|x|\leqslant R}[\rho(x)^{-1}|\nabla u|^2+(c(x)^2\rho(x))^{-1}|v|^2]\,dx.$$

Лемма 1. (а) Для любого $R>0$

$$\|W_0(T)\varphi\|_0^{(R)}\leqslant\|\varphi\|_0^{(R+T)} \text{ при всех } \varphi\in\mathscr{H}_0.$$

(b) Для любого $R\geqslant r_0$

$$\|W_1(T)\varphi\|_1^{(R)}\leqslant\|\varphi\|_1^{(R+T)} \text{ при всех } \varphi\in\mathscr{H}_1.$$

Доказательство. Идея состоит в интегрировании «потока энергии» через поверхность области $\Omega(R, T)$, заданной неравенством $|x| \leqslant R+T-t$, $0 \leqslant t \leqslant T$ (рис. XI.14). В силу закона сохранения энергии, дополнительный поток энергии не может порождаться внутри $\Omega(R, T)$, а в силу конечности скорости распространения, энергия может перетекать только через границы области,

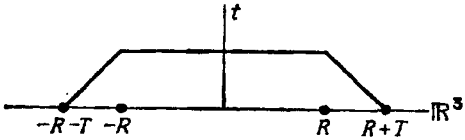


Рис. XI.14. Область $\Omega(R, T)$.

поэтому приток $\|\cdot\|_t^{(R+T)}$ на дне должен быть больше, чем отток $\|W_i(T)\cdot\|_t^{(R)}$ на вершине.

Точнее, введем

$$j_0(x, t) = \frac{1}{2}\left[(c^2(x)\rho(x))^{-1}|u_t(x, t)|^2 + \rho(x)^{-1}|\nabla u(x, t)|^2\right],$$

$$j_i(x, t) = -\rho(x)^{-1}\operatorname{Re}\{\overline{u_t(x, t)}\,\partial_i u(x, t)\}$$

и положим $j = \langle j_0, \mathrm{j}\rangle$. Как будет показано в дополнении к § 13, это четыре компоненты тензора энергии-импульса. Предположим сначала, что $\varphi = \langle f, g\rangle$ и $f, g \in C_0^\infty$. Пусть $u(x, t) = (W_1(t)\varphi)_1$. Обычные рассуждения типа тех, что использовались в § X. 13, показывают, что u — бесконечно дифференцируемая функция по x и t, а прямое вычисление с использованием уравнения $u_{tt} = c^2\rho\nabla\cdot\rho^{-1}\nabla u$ дает равенство

$$\nabla_{\mathbb{R}^4}\cdot j = \frac{\partial j_0}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0.$$

Отсюда, в силу теоремы Гаусса,

$$\int_{\partial\Omega(R,\, T)} j\cdot\sigma\, dS = 0,$$

где $\sigma = \langle\sigma_0, \boldsymbol{\sigma}\rangle$ — внешняя нормаль, а dS — обычная поверхностная мера. В силу неравенства $2ab \leqslant a^2 + b^2$, имеем соотношение $|\mathrm{j}(x, t)| \leqslant j_0(x, t)$ в тех точках, где $c = 1$, например на гранях Ω. Более того, $|\boldsymbol{\sigma}(x, t)| = \sigma_0(x, t)$ на гранях Ω, и потому на них $j\cdot\sigma \geqslant 0$, так что

$$\int_{|x| \leqslant R} j_0(x, T)\, dx \leqslant \int_{|x| \leqslant R+T} j_0(x, 0)\, dx,$$

откуда следует (b) для гладких φ. С помощью предельного перехода утверждение (b) переносится на все $\varphi \in \mathcal{H}_1$. Аналогично доказывается (a). ∎

С помощью этой леммы можно показать, что (iii) эквивалентно слабой форме утверждения о локальном убывании энергии.

Лемма 2. В условиях примера 2 свойство (iii) выполняется тогда и только тогда, когда для всех $\varphi \in \mathscr{H}_1$ и всех $R < \infty$

$$\lim_{t \to \infty} \| W_1(t)\varphi \|_1^{(R)} = 0. \tag{219}$$

Доказательство. Сначала предположим, что (iii) выполнено. Тогда для любого $\varphi \in \mathscr{H}_1$ и $\varepsilon > 0$ существуют t_0 и $\psi \in D_+^{r_0}$, такие, что $\| W_1(t_0)\psi - \varphi \|_1 \leqslant \varepsilon$. Поскольку $\psi \in D_+^{r_0}$, $W_1(t+t_0)\psi$ обращается в нуль внутри $B(R)$, если $t > R - t_0$. Таким образом, для всех t

$$\| W_1(t)\varphi \|_1^{(R)} \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad t \geqslant R - t_0,$$

поскольку

$$\| W_1(t)\varphi - W_1(t+t_0)\psi \|_1 = \| \varphi - W_1(t_0)\psi \|_1 \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim_{t \to \infty} \| W_1(t)\varphi \|_1^{(R)} = 0$, что a priori сильнее (219).

Для доказательства обратного утверждения предположим, что (219) выполнено и ψ ортогонально $\overline{\bigcup W_1(t)\, D_+^{r_0}}$; последнее эквивалентно тому, что $W_1(t)\psi \perp D_+^{r_0}$ для всех t. Свободное трансляционное представление $D_+^{r_0}$ совпадает со всем $L^2(r_0, \infty; N)$, поэтому $W_0(-2r_0)\, W_1(t)\psi \in D_-^{r_0}$ для всех t. Поскольку $W_1(-s)$ и $W_0(-s)$ совпадают на $D_-^{r_0}$ для всех $s \geqslant 0$, получаем, что

$$W_0(-(s+2r_0))\, W_1(t)\psi = W_1(-s)\, W_0(-2r_0)\, W_1(t)\psi, \tag{220}$$

а также что $W_0(-s)\, W_1(t)\psi$ равно нулю при $|x| < s - r_0$.

Пусть теперь задано $\varepsilon > 0$. В силу (219), можно найти такое $t > (k+1)\, r_0$, что $\| W_1(t)\psi \|_1^{(5r_0)} < \varepsilon$, и потому, в силу леммы 1,

$$\| W_0(-2r_0)\, W_1(t)\psi \|_1^{(3r_0)} \leqslant d \| W_0(-2r_0)\, W_1(t)\psi \|_0^{(3r_0)} \leqslant d_0\varepsilon,$$
$$\| W_1(t-2r_0)\psi \|_1^{(3r_0)} \leqslant \varepsilon,$$

где d_0 — универсальная постоянная, связывающая две эквивалентные нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_0$. Заметим, что $W_0(-s)\, W_1(t)\psi = W_1(-s)\, W_1(t)\psi$ при $s = 0$, и, следовательно, эти два решения совпадают при $|x| > |s| + r_0$, поскольку решения в таких точках не зависят от неоднородностей внутри $B(r_0)$. В частности,

$$(W_0(-2r_0)\, W_1(t)\psi)(x) = (W_1(-2r_0)\, W_1(t)\psi)(x)$$

для $|x| > 3r_0$. Этот факт и приведенные выше оценки дают неравенство

$$\| W_0(-2r_0)\, W_1(t)\psi - W_1(t-2r_0)\psi \|_1 \leqslant (1+d_0)\,\varepsilon.$$

Пусть теперь $s=t-2r_0$ Поскольку оператор $W_1(2r_0-t)$ унитарен, получаем (с помощью (220))

$$\|W_0(-t)W_1(t)\psi-\psi\|_1\leqslant(1+d_0)\varepsilon.$$

Вспомним, что $W_0(-t)W_1(t)\psi$ обращается в нуль при $|x|<t-r_0$, и выберем $t>(k+1)r_0$; тогда

$$\|\psi\|_1^{(kr_0)}\leqslant(1+d_0)\varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности ε и k, заключаем, что $\psi=0$. Итак, (iii) выполняется. ▮

Для доказательства (219) нам нужен один результат о локальной компактности.

Лемма 3. Пусть фиксирована постоянная c_1. Множество $\mathcal{K}$ всех $\varphi\in D(A_1)$, таких, что $\|A_1\varphi\|_1+\|\varphi\|_1\leqslant c_1$, компактно в $\|\cdot\|_1^{(R)}$-норме при любом R, т. е. для любой заданной последовательности в $\mathcal{K}$ существует подпоследовательность, сходящаяся по $\|\cdot\|_1^{(R)}$-норме.

Доказательство. Пусть $\varphi=\langle u, v\rangle$. Условие леммы говорит о том, что

$$\|B_1^2u\|_{\rho c}^2+\|B_1u\|_{\rho c}^2+\|B_1v\|_{\rho c}^2+\|v\|_{\rho c}^2\leqslant c_1$$

с некоторой c_1. Отсюда с помощью условий (190) легко получить, что

$$\|\Delta u\|_2^2+\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla v\|_2^2+\|v\|_2^2\leqslant c_2$$

для всех φ из исходного множества $\mathcal{K}$. В силу следствия 1 теоремы XIII.74, множество всех $v\in L^2$, удовлетворяющих условию $\|\nabla v\|_2^2+\|v\|_2^2\leqslant c_2$, компактно в локальной норме $\|v\|_2^{(R)}$; аналогично, множество всех u, удовлетворяющих неравенству $\|\Delta u\|_2^2+\|\nabla u\|_2^2\leqslant c_2$, компактно в локальной норме $\|\nabla u\|_2^{(R)}$. Таким образом, $\mathcal{K}$ компактно в локальной норме $\|\cdot\|_0^{(R)}$, а следовательно, и в $\|\cdot\|_1^{(R)}$, поскольку эти нормы эквивалентны. ▮

Наконец, нам нужны сведения о спектре A_1.

Лемма 4. Спектр A_1 абсолютно непрерывен.

Доказательство. Это утверждение будет правильным, если спектр $B_1^2=-c(x)^2\rho(x)\nabla\cdot\rho(x)^{-1}\nabla$ в $L^2_{\rho c}(\mathbb{R}^3)$ абсолютно непрерывен. B_1^2 унитарно эквивалентен оператору

$$\tilde{B}_1^2=-(c(x)^2\rho(x))^{1/2}\circ\nabla\cdot\rho(x)^{-1}\nabla\circ(c(x)^2\rho(x))^{1/2}$$

в $L^2(\mathbb{R}^3)$. В теореме XIII.62 будет доказано отсутствие собственных значений у такого оператора. В теореме XI.45 уже была доказана ограниченность матричных элементов резольвенты на плотном множестве векторов при приближении к вещественной оси. Этот факт означает отсутствие сингулярного спектра (теорема XIII.19). ∎

Теперь мы готовы завершить доказательство выводом свойства (iii). Пусть $\varphi \in D(A_1)$. Рассмотрим множество $\mathcal{K}_\varphi = \{U_1(t)\varphi \mid t \in \mathbb{R}\}$. Поскольку

$$\|A_1 U_1(t)\varphi\|_1 + \|U_1(t)\varphi\|_1 = \|A_1\varphi\|_1 + \|\varphi\|_1,$$

$\mathcal{K}_\varphi$ компактно в $\|\cdot\|_1^{(R)}$-норме (лемма 3). Более того, спектр A_1 абсолютно непрерывен, и потому $(U_1(t)\varphi, \psi)_1 \to 0$ при $t \to +\infty$ для всех φ, ψ в силу леммы Римана—Лебега. Отсюда следует, что любая предельная точка в $\|\cdot\|_1^{(R)}$-топологии должна совпадать с нулем, так что, в силу компактности,

$$\lim_{t\to+\infty} \|U_1(t)\varphi\|_1^{(R)} = 0.$$

Поскольку область $D(A_1)$ плотна в $\mathcal{H}_1$, а операторы $U_1(t)$ унитарны, это же равенство справедливо для всех $\varphi \in \mathcal{H}_1$ и всех $R > 0$, что в силу леммы 2 доказывает (iii). Подведем итоги.

Теорема XI.88. Пусть $c(x)$ и $\rho(x)$ — гладкие функции, выходящие на константу вне некоторого компактного множества и удовлетворяющие (190). Тогда $D_+^{r_0}$ и $D_-^{r_0}$ суть уходящее и приходящее подпространства для $W_1(t) = e^{-itA_1}$ на $\mathcal{H}_1$, так что, в силу теоремы XI.82, существует оператор рассеяния Лакса—Филлипса. Далее, для любого оператора отождествления $J: \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_1$, равного тождественному преобразованию на $D_\pm^{r_0}$, волновые операторы $\Omega^\pm(A_0, A_1; J)$ существуют, полны и связаны с оператором рассеяния Лакса—Филлипса формулой (215).

Здесь следует отметить важные различия между подходом Лакса—Филлипса и теорией § 10. Для того чтобы построить оператор рассеяния Лакса—Филлипса, нужна абсолютная непрерывность всего спектра оператора A_1; после проведения дополнительной работы (теорема XI.115) можно ограничиться требованием непрерывности спектра. Для большинства дифференциальных операторов (кроме случая постоянных коэффициентов, когда можно применять преобразование Фурье) исключение точечного спектра представляет собой трудную задачу (см. теорему XIII.62). Таким образом, подход Лакса—Филлипса требует весьма детального знания свойств генератора группы, описывающей динамику со взаимодействием. В теории Като—Бирмана из § 10 такого детального знания не нужно. Конечно, при этом мы получаем и более слабый результат: $\operatorname{Ran}\Omega^+ = \mathcal{H}_{ac}(A_1) = \operatorname{Ran}\Omega^-$, а не равенство $\mathcal{H}_{ac}(A_1) = \mathcal{H}_1$. Но для построения оператора рассеяния достаточно только равенства $\operatorname{Ran}\Omega^+ = \operatorname{Ran}\Omega^-$.

Вернемся теперь к абстрактной теории и изучим свойства операторов рассеяния $\tilde{S}$ и $\hat{S} = \mathcal{F}\tilde{S}\mathcal{F}^{-1}$ в $L^2(\mathbb{R}; N)$.

Предложение. Пусть D_+ и D_- — уходящее и приходящее подпространства для унитарной группы $U(t)$ на $\mathcal{H}$ Тогда:

(a) оператор рассеяния $\tilde{S}$ в $L^2(\mathbb{R}; N)$ коммутирует со сдвигами;
(b) если D_+ и D_- взаимно ортогональны, то

$$\tilde{S}\colon L^2(-\infty, 0; N) \to L^2(-\infty, 0; N).$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{R}_\pm$ — отображения $\mathcal{H}$, $U(t)$, $D_\pm$ на их уходящее и приходящее трансляционные представления. Тогда

$$\tilde{S}T_0(s) = \mathcal{R}_+\mathcal{R}_-^{-1}T_0(s) = \mathcal{R}_+U(s)\mathcal{R}_-^{-1} = T_0(s)\mathcal{R}_+\mathcal{R}_-^{-1} = T_0(s)\tilde{S},$$

где $T_0(s)$ — сдвиг на s единиц. Это доказывает (a). Доказательство (b) тоже просто. Действительно, если $f \in L^2(-\infty, 0; N)$, то $\mathcal{R}_-^{-1}f \in D_-$, и, поскольку D_- ортогонально D_+, получаем, что $\tilde{S}f = \mathcal{R}_+\mathcal{R}_-^{-1}f$ ортогонально $\mathcal{R}_+D_+$. Но $\mathcal{R}_+D_+ \equiv L^2(0, \infty; N)$, так что $\tilde{S}f \in L^2(-\infty, 0; N)$. ∎

Как мы уже отмечали, если выполняются условия (0)—(3), то $D_+^{r_0}$ и $D_-^{r_0}$ — *ортогональные* уходящее и приходящее подпространства для $U(t)$. Некоторые свойства аналитичности $\hat{S}$ вытекают из следующей общей теоремы.

Теорема XI.89. Пусть N — сепарабельное гильбертово пространство и T — ограниченный оператор в $L^2(\mathbb{R}; N)$, коммутирующий со сдвигами и переводящий $L^2(-\infty, 0; N)$ в себя. Тогда $\hat{T} \equiv \mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}$ действует в $L^2(\mathbb{R}; N)$ как оператор умножения на $\mathcal{L}(N)$-значную функцию $t(\sigma)$:

$$(\hat{T}f)(\sigma) = t(\sigma)f(\sigma). \qquad (221)$$

Далее, существует $\mathcal{L}(N)$-значная функция $t(\sigma+iy)$, аналитическая по норме в открытой верхней полуплоскости и такая, что

(a) $\|t(\sigma+iy)\|_{\mathcal{L}(N)} \leqslant \|T\|$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $y > 0$;
(b) $t(\sigma+iy)$ слабо сходится к $t(\sigma)$ для почти всех $\sigma \in \mathbb{R}$ при $y \downarrow 0$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $N = \mathbb{C}$. Предположим, что T — оператор в $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, коммутирующий со сдвигами. Прежде всего мы утверждаем, что выполняется (221) Если это так, то $t \in L^\infty$ и $\|t\|_\infty = \|\hat{T}\| = \|T\|$.

Существуют два различных способа доказательства (221). Во-первых, заметим, что T — линейное отображение $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ в $L^2(\mathbb{R})$. Поскольку T коммутирует со сдвигами, легко проверить, что T

на самом деле есть непрерывное отображение $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ в $C^\infty(\mathbb{R})$. Таким образом, в силу задачи 9 к гл. IX, существует обобщенная функция $\tau\in\mathscr{S}'$, такая, что

$$T(f)=\tau*f$$

для всех $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Следовательно, существует обобщенная функция $t\in\mathscr{S}'$, такая, что (221) выполняется для всех $f\in\mathscr{S}$. Поскольку

$$\left|\int\overline{g(\sigma)}\,t(\sigma)\,f(\sigma)\,d\sigma\right|=|(g,\ \hat{T}f)|\leqslant\|\hat{T}\|\|g\|_2\|f\|_2,$$

мы заключаем, что t — ограниченная функция и (221) справедливо для всех $f\in L^2(\mathbb{R})$. При втором способе доказательства выводится перестановочность $\hat{T}$ с операцией умножения на $e^{i\sigma a}$ при всех a исходя из перестановочности T с операцией сдвига. С помощью предельного перехода это утверждение переносится на операцию умножения на любую ограниченную измеримую функцию Равенство (221) в таком случае сразу же следует из теоремы XIII.84.

Первый шаг в доказательстве аналитичности — показать, что носитель τ лежит в $(-\infty, 0]$. Пусть j — положительная функция из $C_0^\infty(-\infty, 0)$, такая, что $\int j(x)\,dx=1$. Определим $j_\delta(x)=\delta^{-1}j(x/\delta)$, $\tau_\delta=\tau*j_\delta$. Тогда

$$f\longmapsto\tau_\delta*f=T(j_\delta*f)$$

переводит $L^2(-\infty, 0)$ в себя. Если показать, что носитель каждой функции τ_δ лежит в $(-\infty, 0]$, то же будет справедливо и для носителя τ, ибо $\tau_\delta\to\tau$. Таким образом, достаточно доказать нужное свойство носителя для бесконечно дифференцируемой функции τ. Предположим, что $\tau(a)\neq 0$ для некоторого $a>0$ Тогда можно найти такие δ и θ, что $\operatorname{Re}(e^{i\theta}\tau(x))>0$ для всех $x\in(a-\delta,\ a+\delta)$. Пусть χ - характеристическая функция интервала $(-\delta, 0)$; тогда $\operatorname{Re}\{e^{i\theta}(\tau*\chi)(x)\}>0$ для $x\in(a,\ a+\delta)$, что противоречит предположению об инвариантности $L^2(-\infty, 0)$ относительно T. Таким образом, носитель τ лежит в $(-\infty, 0]$.

Поскольку носитель τ лежит на полупрямой, из теоремы IX.16 следует, что t есть граничное значение (в смысле обобщенных функций) аналитической функции $t(\sigma+iy)$ в верхней полуплоскости, удовлетворяющей неравенству

$$|t(\sigma+iy)|\leqslant C(1+\sigma^2+y^2)^{N_1}(1+y^{-N_2})$$

с некоторыми C, N_1 и N_2. Мы хотим показать, что t ограничена в верхней полуплоскости, причем $\|t\|_\infty\leqslant\|T\|$. Пусть $\tau_\varepsilon(x)=$

$= \sqrt{2\pi}\, e^{-\varepsilon x^2}\tau(x)$. Введем

$$t_\varepsilon(\sigma+iy) \equiv (2\pi)^{-1/2}\int \tau_\varepsilon(x)\, e^{-i(\sigma+iy)x}\,dx = \\ = \int t(\sigma+iy-\mu)\frac{e^{-\mu^2/4\varepsilon}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\,d\mu.$$

Тогда $t_\varepsilon(\cdot+iy)\to t(\cdot+iy)$ поточечно при фиксированном $y>0$, так что достаточно получить неравенство $\|t_\varepsilon(\cdot+iy)\|_\infty \leqslant \|T\|$ для любых ε и y. Но поскольку τ есть обобщенная функция умеренного роста, она равна N-й производной некоторой полиномиально ограниченной непрерывной функции h. Следовательно, t_ε — целая функция и

$$|t_\varepsilon(\sigma+iy)| = \int |[D^N h](e^{-\varepsilon x^2}e^{-i(\sigma+iy)x})|\,dx \leqslant C(1+|\sigma+iy|)^N.$$

Пусть $\delta>0$ — малое заданное число. Определим

$$t_{\varepsilon,\delta}(\sigma+iy) = (1-i\delta(\sigma+iy))^{-N}\, t_\varepsilon(\sigma+iy).$$

Если $Y \geqslant 2\delta^{-1}+1$, то при всех δ

$$\frac{1+|\sigma+iY|}{|1-i\delta(\sigma+iY)|} \leqslant \frac{2}{\delta}$$

для всех σ, так что

$$\|t_{\varepsilon,\delta}(\cdot+iY)\|_\infty \leqslant C(2/\delta)^N,$$
$$\|t_{\varepsilon,\delta}(\cdot+i0)\|_\infty \leqslant \|t_\varepsilon(\cdot+i0)\|_\infty \leqslant \|T\|.$$

Поскольку $t_{\varepsilon,\delta}$ ограничена, по теореме Адамара о трех прямых получаем неравенство

$$\|t_{\varepsilon,\delta}(\cdot+iy)\|_\infty \leqslant \|T\|^{1-y/Y}\,[C(2/\delta)^N]^{y/Y}$$

для каждого y, для которого $0<y<Y$. Фиксируя y и устремляя Y к бесконечности, получаем

$$\|t_{\varepsilon,\delta}(\cdot+iy)\|_\infty \leqslant \|T\|.$$

Наконец, полагая $\delta\to 0$, а затем $\varepsilon\to 0$, получаем, что $\|t(\cdot+iy)\|_\infty \leqslant \leqslant \|T\|$ для любого $y>0$.

Непрерывность на вещественной оси вытекает из общего результата комплексного анализа, который мы сформулируем после окончания доказательства теоремы.

Пусть теперь N — произвольное гильбертово пространство. При $\varphi,\ \eta\in N$

$$T_{\varphi,\eta}\colon f\mapsto(\varphi,\ T(f\eta))_N$$

отображает $L^2(\mathbb{R})$ и $L^2(-\infty, 0)$ в себя. Поэтому, в силу результатов, относящихся к рассмотренному только что скалярному случаю,

$$(T_{\varphi,\eta}(\check{f}))\hat{} = t_{\varphi,\eta}(\sigma) f(\sigma),$$

где $t_{\varphi,\eta}(\sigma+iy)$ аналитична в верхней полуплоскости, имеет $t_{\varphi,\eta}(\sigma)$ в качестве граничного значения и удовлетворяет неравенству

$$|t_{\varphi,\eta}(\sigma+iy)| \leqslant \|T_{\varphi,\eta}\| \leqslant \|T\| \|\varphi\|_N \|\eta\|_N$$

в замкнутой верхней полуплоскости. Поскольку отображение $\langle\varphi, \eta\rangle \mapsto T_{\varphi,\eta}$ полуторалинейно, таково же отображение $\langle\varphi, \eta\rangle \mapsto t_{\varphi,\eta}(\sigma+iy)$ для каждого σ и $y \geqslant 0$. Таким образом, в силу леммы Рисса, для каждой точки $\sigma+iy$ существует ограниченный оператор $t(\sigma+iy)$ на N, такой, что

$$t_{\varphi,\eta}(\sigma+iy) = (\varphi, t(\sigma+iy)\eta)_N.$$

При этом операторная функция $t(\sigma+iy)$ слабо аналитична и $\mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}$ есть оператор умножения на $t(\sigma)$ в $L^2(\mathbb{R}; N)$. Аналитичность по норме выводится из равномерной ограниченности $\|t(\sigma+iy)\|$ с помощью методов, основанных на теореме VI.4 (задача 123). Поскольку поточечным пределом $t_{\varphi,\eta}(\sigma+iy)$ при $y\downarrow 0$ для почти всех σ служит $t_{\varphi,\eta}(\sigma)$, пределом $t(\sigma+iy)$ в слабой операторной топологии на N для почти всех σ служит $t(\sigma)$. ∎

Непрерывность $t(\sigma+iy)$ вплоть до вещественной оси, упомянутая в приведенном выше доказательстве, вытекает из следующего утверждения (см. ссылки в Замечаниях).

Лемма (теорема Фату). Если $F(z)$ — аналитическая в верхней полуплоскости функция и

$$\sup_{y>0} \int |F(x+iy)|^p\,dx < \infty$$

для некоторого $p>1$ (допускается $p=\infty$), то для почти всех $x\in\mathbb{R}$ существует

$$\lim_{y\downarrow 0} F(x+iy) \equiv f(x),$$

причем $f\in L^p$ и $F(\cdot+iy)\to f(\cdot)$ в смысле обобщенных функций.

Применяя теорему XI.89 к интересующему нас случаю, получаем

Следствие. Предположим, что существуют ортогональные уходящее и приходящее подпространства для унитарной группы $U(t)$ на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда существует $\mathcal{L}(N)$-значная функция $s(\sigma+iy)$ на замкнутой верхней полуплоскости, такая, что

(1) значения $s(\sigma+i0)$ почти всюду унитарны;
(2) $s(\sigma+iy)$ аналитична по норме в открытой верхней полуплоскости, и

$$\|s(\sigma+iy)\|_{\mathscr{L}(N)} \leqslant 1;$$

(3) $s(\sigma+iy)$ сильно сходится к $s(\sigma)$ почти всюду при $y \downarrow 0$, и для всех $f \in L^2(\mathbb{R};\ N)$

$$(\hat{S}f)(\sigma) = s(\sigma) f(\sigma),$$

причем $\hat{S}$ переводит $\mathscr{H}^2_+(\mathbb{R};\ N)$ в себя.

Доказательство. Все перечисленные утверждения, кроме *сильной* непрерывности вплоть до вещественной оси, немедленно вытекают из теоремы XI.89 и предыдущего предложения. Сильная непрерывность обусловлена слабой непрерывностью, поскольку

$$\|s(\sigma+iy)\varphi - s(\sigma)\varphi\|_N^2 = \\ = \|s(\sigma+iy)\varphi\|_N^2 - (s(\sigma+iy)\varphi,\ s(\sigma)\varphi)_N - \\ -(s(\sigma)\varphi,\ s(\sigma+iy)\varphi)_N + \|s(\sigma)\varphi\|_N^2 \to 0,$$

ибо $\|s(\sigma+iy)\| \leqslant 1 = \|s(\sigma)\|$. ∎

Так же как и в квантовомеханическом случае, обсуждавшемся в § 7, для приложений весьма важны свойства аналитического продолжения оператора рассеяния. Поэтому нужны общие методы изучения $s(z)$. Поскольку на вещественной оси значения $s(z)$ суть унитарные операторы, естественно попытаться продолжить функцию $s(z)$ в нижнюю полуплоскость с помощью формулы

$$s(z) = [s(\bar{z})^*]^{-1}, \qquad \operatorname{Im} z < 0.$$

Но для того чтобы эта формула приводила к цели, нужно чтобы нуль лежал в резольвентном множестве $s(\bar{z})$, т. е. чтобы $s(\bar{z})$ была *регулярной*. Для проверки этого свойства Лакс и Филлипс ввели специальную полугруппу.

Пусть $\mathscr{K} = (D_+ \oplus D_-)^\perp$ и $P_{\mathscr{K}}$ — ортогональный проектор на $\mathscr{K}$. Введем

$$Z(t) = P_{\mathscr{K}} U(t) P_{\mathscr{K}}, \qquad t \geqslant 0. \tag{222}$$

Ясно, что $Z(t)$ есть сужение динамической группы на состояния, которые не являются ни приходящими в прошлом, ни уходящими в будущем, поэтому не удивительно, что $Z(t)$ содержит сведения о резонансах. Также ясно, что $Z(t)$ есть сильно непрерывное семейство сжимающих операторов. Более того, если $\varphi, \psi \in \mathscr{K}$ и $t, s \geqslant 0$, то $U(t)\varphi \in D_+^\perp$ и $U(-s)\psi \in D_-^\perp$ (поскольку $U(t)$ оставляет $D_\pm$ инвариантными при $\pm t \geqslant 0$). Итак,

$$(U(-s)\varphi,\ P_{\mathscr{K}} U(t)\psi) = (U(-s)\varphi,\ U(t)\psi), \qquad t, s \geqslant 0,$$

поскольку $P_{\mathcal{K}} = P_- P_+$, где P_+ (соответственно P_-) — проектор на ортогональное *дополнение* к D_+ (соответственно к D_-). Эквивалентно, $P_{\mathcal{K}} U(s) P_{\mathcal{K}} U(t) P_{\mathcal{K}} = P_{\mathcal{K}} U(s+t) P_{\mathcal{K}}$, или $Z(t) Z(s) = Z(t+s)$. Таким образом, $Z(t)$ — сильно непрерывная полугруппа сжатий на $\mathcal{K}$, и потому в $\mathcal{K}$ существует m-аккретивный оператор B со спектром $\sigma(B) \subset \{z \subset \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$, такой, что $Z(t) = e^{-Bt}$. Поскольку спектр $U(t)$ абсолютно непрерывен,

$$(Z(t)\varphi, \psi) \to 0 \qquad \text{при} \qquad t \to \infty. \tag{223}$$

Более того,

$$Z(t) = P_+ U(t) P_-, \qquad t \geqslant 0. \tag{224}$$

В самом деле, из инвариантности D_+ относительно $U(t)$ вытекает равенство $P_+ U(t) P_+ = P_+ U(t)$, а поскольку $U(-t)$ оставляет инвариантным D_-, то $P_- U(t) P_- = U(t) P_-$, и потому

$$P_{\mathcal{K}} U(t) P_{\mathcal{K}} = P_- P_+ U(t) P_+ P_- = P_+ P_- U(t) P_- = P_+ U(t) P_-.$$

Полугруппа $Z(t)$ важна из-за того, что резольвентное множество оператора B просто связано со свойством обратимости $s(z)$.

Теорема XI.90. Пусть D_+ и D_- — ортогональные уходящее и приходящее подпространства для унитарной группы $U(t)$ на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть полугруппа $Z(t) = e^{-tB}$ определена с помощью (222). Тогда если $\operatorname{Re} z > 0$, то $z \in \rho(B)$ в том и только том случае, когда $s(i\bar{z})$ — регулярный оператор.

Дадим набросок доказательства того, что $s(i\bar{z}_0)^*$ обладает нулевым собственным значением тогда и только тогда, когда z_0 есть собственное значение B. По определению,

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \{\chi \mid \mathcal{R}_+\chi \in L^2(-\infty, 0; N);\ \mathcal{R}_-\chi \in L^2(0, \infty; N)\} = \\ &= \{\chi \mid \mathcal{R}_+\chi \in L^2(-\infty, 0; N);\ \tilde{S}(\mathcal{R}_-\chi) = \mathcal{R}_+\chi \in \tilde{S}L^2(0, \infty; N)\}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathcal{R}_+[\mathcal{K}] \equiv \mathcal{K}_+ = \{f \mid f \in L^2(-\infty, 0; N),\ \tilde{S}^* f \in L^2(0, \infty; N)\}.$$

Пусть далее $Z_+(t) = \mathcal{R}_+ Z(t) \mathcal{R}_+^{-1}$. Заметим, что для $f \in \mathcal{K}_+$

$$Z_+(t) f = (\mathcal{R}_+ P_+ \mathcal{R}_+^{-1})(T_0(t) f) = \chi_{(-\infty, 0)} T_0(t) f,$$

т. е. если $f \in \mathcal{K}_+$, то

$$(Z_+(t) f)(s) = \begin{cases} f(s-t) & \text{при} \quad s \leqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad s > 0. \end{cases}$$

Далее, $Bx = z_0 x$ тогда и только тогда, когда $Z(t)x = e^{-z_0 t}x$. Более того, $f(s-t) = e^{-z_0 t} f(s)$ $(s \leqslant 0)$ тогда и только тогда, когда $f(s) = e^{z_0 s}\chi_{(-\infty, 0)}(s)\, n$ при некотором $n \in N$. Итак, z_0 есть собственное значение B тогда и только тогда, когда $e^{z_0 s}\chi_{(-\infty,0)}(s)\,n \equiv f_0$ лежат в $\mathcal{K}_+$ при некотором $n \in N$. Поскольку f_0 очевидным образом лежит в $L^2(-\infty, 0; N)$, то $f_0 \in \mathcal{K}_+$ тогда и только тогда, когда $\tilde{S}^* f_0 \in L^2(0, \infty; N)$. А это справедливо тогда и только тогда, когда $s(\bar{z})^* \hat{f}_0(z)$ аналитична в нижней полуплоскости. Но $\hat{f}_0(z) = (2\pi)^{-1/2}(z_0 - iz)^{-1} n$ имеет полюс в точке $z = -iz_0$, так что $s(\bar{z})^* \hat{f}_0(z)$ аналитична в нижней полуплоскости тогда и только тогда, когда $s(i\bar{z}_0)^* n = 0$. Этим завершается доказательство одной части теоремы XI.90 и выясняются причины того, почему она верна в целом.

Пример 3. Для иллюстрации теоремы XI.90 рассмотрим простейший пример. Пусть $U(t)$ — сдвиг на $L^2(-\infty, \infty)$. Фиксируем $r_0 > 0$, и пусть $D_+ = L^2(r_0, \infty)$, $D_- = L^2(-\infty, -r_0)$. Тогда D_+ — уходящее, а D_- — приходящее подпространства. Простая выкладка показывает, что $\tilde{S} = U(-2r_0)$ и $s(k) = e^{2ikr_0}$. Функция s — целая, D_+ и D_- ортогональны, и $\mathcal{K} = L^2(-r_0, r_0)$. Ясно, что $Z(t) = 0$, если $t > 2r_0$. В частности,

$$(B+\lambda)^{-1} = \int_0^\infty Z(t)\, e^{-\lambda t}\, dt$$

продолжается с $\operatorname{Re}\lambda > 0$ до целой функции. Таким образом, $\sigma(B) = \varnothing$, как и требуется теоремой XI.90.

Теорема XI.90 сводит вопрос об аналитичности к изучению B.

Теорема XI.91. Предположим, что для некоторых положительных T и k оператор $Z(T)(k+B)^{-1}$ компактен. Тогда спектр B чисто точечный, а функция $s(z)$ голоморфна на вещественной оси и имеет мероморфное продолжение в нижнюю полуплоскость с полюсами в каждой точке z, для которой $iz \in \sigma(B)$.

Идея доказательства этой теоремы основана на применении теоремы об отображении спектра (теорема VII.1), из которой выводится, что спектр B чисто точечный. В силу теоремы XI.90, оператор $s(z)$ обратим в любой точке верхней полуплоскости, исключая те z, для которых $i\bar{z}$ есть собственное значение B. Таким образом, функция

$$s(z) = [s(\bar{z})^*]^{-1}$$

аналитична в нижней полуплоскости, за исключением точек z, для которых iz есть собственное значение B. В силу приведенного выше выражения, $s(z)$ может иметь только полюсы, поскольку $s(\bar{z})^*$ может иметь только нули конечного порядка. Наконец, в силу (223), у B не может быть собственных значений с $\operatorname{Re}\mu=0$. Отсюда следует, что $(s(\bar{z})^*)^{-1}$ аналитична в открытом множестве под вещественной осью. Поскольку $s(z)$ и $(s(\bar{z})^*)^{-1}$ имеют одинаковые ограниченные граничные значения при подходе к вещественной оси сверху и снизу, они служат, согласно принципу симметрии Шварца, аналитическим продолжением друг друга. Таким образом, $s(z)$ аналитична в окрестности вещественной оси и мероморфна в нижней полуплоскости.

Полные доказательства теорем XI.90 и XI.91 можно найти в ссылках, указанных в Замечаниях.

Пример 4. Цель этого примера — показать, каким образом можно на практике проверять предположения теоремы XI.91. Мы рассмотрим рассеяние на препятствии Ω с гладкой границей и условиями Дирихле на ней, обсуждавшимися в примере 3 § 10, и будем пользоваться введенными там обозначениями. Роль оператора A_1 в этом случае играет лапласиан $H_{\Gamma,\,D}$ из § XIII.15. Отсутствие у него сингулярного спектра будет доказано в дополнении к этому разделу. Зная этот результат, анализ примера 2 можно распространить на интересующий нас сейчас случай. Лакс и Филлипс при решении этой задачи не требовали заранее отсутствия сингулярного спектра. Вместо этого они более сложным методом проверяют (3), а затем выводят отсутствие этой части спектра из теоремы XI.82. Описываемый здесь подход можно использовать также при проверке предположений теоремы XI.91 в случае рассеяния в неоднородной среде (пример 2), но все доказательства при этом становятся более сложными ввиду того, что естественный оператор отождествления не изометричен (задача 124).

Как и в примере 1, D_- и D_+ суть приходящее и уходящее подпространства для группы $W_0(t)$ свободного движения. Возьмем r_0 таким, чтобы шар $B(r_0)$ содержал внутри себя Ω, и определим

$$D_+^{r_0}=W_0(r_0)\,D_+,\qquad D_-^{r_0}=W_0(-r_0)\,D_-.$$

Поскольку функции из $D_+^{r_0}$ и $D_-^{r_0}$ обращаются в нуль в $B(r_0)$, $D_+^{r_0}$ и $D_-^{r_0}$ суть подпространства $\mathscr{H}_0$, изометрически вложенные в $\mathscr{H}_1$. Можно показать, что $D_+^{r_0}$ и $D_-^{r_0}$ суть уходящее и приходящее подпространства для $W_1(t)$ на $\mathscr{H}_1$ и что выполнены условия теоремы XI.86. В частности, $D_\pm^{r_0}$ ортогональны. Пусть $P_\pm^{r_0}$ — проекторы на $(D_\pm^{r_0})^\perp$ в $\mathscr{H}_1$. Введем $Z(t)=P_+^{r_0}W_1(t)P_-^{r_0}$. Предположим, что $\varphi \in \mathcal{H}_1$ и $\mu > 0$. Тогда, в силу (X.98),

$$Z(2r_0)(\mu+B)^{-1}\varphi = \int_0^\infty e^{-\mu t} Z(t+2r_0)\,\varphi\,dt =$$

$$= P_+^{r_0} W_1(2r_0) \int_0^\infty e^{-\mu t} W_1(t) P_-^{r_0}\varphi\,dt = iP_+^{r_0} W_1(2r_0)(i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0}\varphi =$$

$$= iP_+^{r_0} W_1(2r_0) P_-^{r_0} (i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0}\varphi = \tag{225}$$

$$= iP_+^{r_0}[W_1(2r_0) - W_0(2r_0)] P_-^{r_0}(i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0}\varphi = \tag{226}$$

$$= iP_+^{r_0}[W_1(2r_0) - W_0(2r_0)](i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0}\varphi. \tag{227}$$

Равенства (225) и (227) справедливы благодаря тому, что $P_-^{r_0} W_1(t) P_-^{r_0} = W_1(t) P_-^{r_0}$ при $t \geqslant 0$, откуда вытекает равенство

$$P_-^{r_0}(i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0} = (i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0},$$

а (226) выполняется в силу того, что $P_+^{r_0} W_0(2r_0) P_-^{r_0} = 0$. Чтобы в этом у'едиться, заметим, что вектор $P_-^{r_0} f \in \mathcal{H}_0$ ортогонален $D_-^{r_0}$ в $\mathcal{H}_0$ для любого $f \in \mathcal{H}_1$ в силу изометричности вложения $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_0$. Таким образом, носитель $P_-^{r_0} f$ в трансляционном представлении лежит в $(-r_0, \infty)$. Следовательно, носитель представителя $W_0(2r_0) P_-^{r_0} f$ лежит в (r_0, ∞), откуда вытекает, что $W_0(2r_0) P_-^{r_0} f \in D_+^{r_0}$.

Теперь для любого $g \in \mathcal{H}_1$

$$W_0(2r_0) g - W_1(2r_0) g = 0 \qquad \text{для} \qquad |x| \geqslant 3r_0,$$

поскольку скорость распространения возмущений равна единице. В итоге, используя равенство $\|\psi\|_0 = \|\psi\|_1$, можно провести следующую оценку:

$$\|Z(2r_0)(\mu+B)^{-1}\varphi\|_1 \leqslant \|[W_1(2r_0) - W_0(2r_0)](i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0}\varphi\|_0 =$$

$$= \|[W_1(2r_0) - W_0(2r_0)](i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0}\varphi\|_0^{(3r_0)} \leqslant$$

$$\leqslant \|W_1(2r_0)(i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0}\varphi\|_1^{(3r_0)} + \|W_0(2r_0)(i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0}\varphi\|_0^{(3r_0)} \leqslant$$

$$\leqslant \|(i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0}\varphi\|_0^{(5r_0)} + \|(i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0}\varphi\|_0^{(5r_0)} =$$

$$= 2\|(i\mu - A_1)^{-1} P_-^{r_0}\varphi\|_1^{(5r_0)},$$

где через $\|\cdot\|^{(R)}$ обозначена часть нормы внутри шара радиуса R и использованы часть (а) леммы 1 в примере 2 и аналогичный результат для $W_1(t)$ (его доказательство аналогично проведенному выше). Для $\psi = (i\mu - A_1)^{-1}\varphi$, где $\|\varphi\| \leqslant 1$, справедлива оценка

$$\|A_1\psi\|_1 + \|\psi\|_1 \leqslant \|A_1(i\mu - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} + \|(i\mu - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}.$$

Таким образом, используя следствие 2 теоремы XIII.74, мы видим, что множество таких ψ компактно в $\|\cdot\|_1^{(5r_0)}$-норме. Значит, $Z(2r_0)(\mu+B)^{-1}$ — компактный оператор, и потому условия теоремы XI.91 выполнены.

Этот пример детально изучен, и относительно него известна масса подробностей. Например, $\mu\in\sigma(B)$ тогда и только тогда, когда приведенное волновое уравнение

$$\Delta v-\mu^2 v=0, \qquad v=0 \text{ на } \partial D, \tag{228}$$

имеет решение v, такое, что пара $\langle v, -\mu v\rangle$ является в конечном счете уходящей, т. е. $W_0(\rho)\langle v, -\mu v\rangle\in D_+$ для достаточно больших ρ. Детальному изучению соотношений между такими собственными значениями и геометрией препятствия посвящено большое число работ. Наконец, оператор рассеяния $\hat{S}$ имеет следующий вид (напомним, что $N=L^2(S^2)$):

$$(\hat{S}f)(\sigma, \omega)=s(\sigma)f(\sigma, \omega)=f(\sigma, \omega)-\frac{i\sigma}{2\pi}\int\limits_{|\theta|=1}\overline{k(\theta, \omega; \sigma)}\,f(\sigma, \theta)\,d\theta,$$

где $k(\theta, \omega; \sigma)$ — аналитическая функция своих переменных, связанная с асимптотическим поведением решений (228). Эта связь аналогична связи между квантовомеханической T-матрицей и асимптотикой решений уравнения Липпмана — Швингера.

Примеры 1, 2 и 4 ясно показывают, что метод Лакса — Филлипса наиболее естественно применим в случае классических волновых уравнений, для которых справедлив принцип Гюйгенса, т. е. в пространствах нечетной размерности, большей единицы. Однако эту же теорию можно с успехом применять и в ряде других случаев (см. ссылки в Замечаниях).

Пример 5 (приложение к уравнению Шредингера). В качестве последнего примера мы обсудим, каким образом теорию Лакса — Филлипса можно применить к изучению рассеяния, описываемого уравнением Шредингера

$$i\frac{\partial u}{\partial t}=(-\Delta+V)u.$$

Основная идея состоит в применении принципа инвариантности для волновых операторов к волновым операторам классической системы, описываемой уравнением

$$\begin{gathered} u_{tt}-\Delta u+V(x)u=0, \\ u(x, 0)=f(x), \quad u_t(x, 0)=g(x). \end{gathered} \tag{229}$$

Мы не получим здесь ни одного результата, касающегося квантовомеханического оператора рассеяния, который не был бы уже найден с большей общностью в § 4, 6 и 7, но весьма интересно прийти к этим результатам новым способом. При этом подчеркнем, что для применения теории Лакса—Филлипса нам потребуется подробная информация о спектре оператора $-\Delta+V$.

Пусть $V(x)$ — потенциал с компактным носителем в $\mathbb{R}^3$ и $V\in L^2(\mathbb{R}^3)$, $V(x)\geqslant 0$. Прежде всего нам нужно решить (229). Это можно сделать по аналогии со случаем неоднородной среды. Поскольку $V\in L^2$, этот потенциал $-\Delta$-ограничен (см. теорему X.15), так что $-\Delta+V(x)$ самосопряжен в существенном. Далее,

$$((-\Delta+V)h,\ h)\geqslant(-\Delta h,\ h)\geqslant 0,$$

так что если $B_1=\sqrt{-\Delta+V}$, то $\|B_1h\|_2\geqslant\|B_0h\|_2$. Более того, $\mathcal{H}_1=[D(B_1)]\oplus L^2(\mathbb{R}^3)=\mathcal{H}_0$, поскольку области определения $-\Delta$ и $-\Delta+V$ как форм совпадают. Как и раньше, если определить $W_1(t)=e^{-itA_1}$, где

$$A_1=i\begin{pmatrix}0 & I\\ -B_1^2 & 0\end{pmatrix},$$

то первая компонента $W_1(t)\langle f,\ g\rangle$ будет слабым решением (229) и классическим решением, если f, g и V достаточно гладки.

Проверка условий (i)—(iii) проводится так же, как и в примерах 2 и 4. Выберем r_0 таким, чтобы шар $B(r_0)$ содержал внутри себя носитель $V(x)$. Введем J: $\mathcal{H}_0\to\mathcal{H}_1$ как тождественное преобразование на тех $\varphi\in\mathcal{H}_0$, носители которых лежат вне $B(r_0)$, и как произвольную ограниченную инъекцию на ортогональном дополнении к множеству таких φ. Наконец, пусть $D_+^{r_0}=W_0(r_0)D_+$ и $D_-^{r_0}=W_0(-r_0)D_-$. Как и в предшествующих примерах, свойства (i) и (ii) группы $U_1(t)$ и ортогональность $D_+^{r_0}$, $D_-^{r_0}$ вытекают из соответствующих свойств $W_0(t)$. Таким образом, если доказать (iii), то будут проверены все условия теоремы XI.86. Для доказательства (iii) заметим, что решения (229) описывают распространение волн с единичной скоростью, так что по-прежнему справедливы леммы 1 и 2 примера 2, так же как и утверждение о локальной компактности из леммы 3. Таким образом, остается только показать, что спектр $-\Delta+V$ абсолютно непрерывен, а это делается при помощи тех же теорем, что и в примере 2. В итоге, в силу теоремы XI.82, у нас есть операторы рассеяния Лакса — Филлипса S, $\tilde{S}$, $\hat{S}$, а, в силу XI.86, $\Omega^{\pm}$ существуют, полны и выполнено соотношение (215).

Рассуждения, подобные тем, что использовались в примере 4, доказывают компактность $Z(2r_0)(\mu+B)^{-1}$ при $\operatorname{Re}\mu>0$, где $Z(t)=P_+W_1(t)P_-$, а B — генератор этой полугруппы. Таким образом, $(\hat{S}f)(\sigma)=s(\sigma)f(\sigma)$ для всех $f\in L^2(\mathbb{R};\ S^2)$, где $s(\sigma)$ мероморфна во всей комплексной плоскости (с полюсами в качестве особенностей) и аналитична на вещественной оси и в верхней полуплоскости.

Заметим, что для всех начальных данных $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ и достаточно больших $|t|$

$$W_1(-t)\, J W_0(t)\, \varphi = W_1(-t)\, W_0(t)\, \varphi,$$

причем зависимость от t отсутствует. Так же как в примерах 2 и 4, это вытекает из выполнения принципа Гюйгенса для $W_0(t)$. С помощью теоремы XI.23 можно установить, что существуют сильные пределы

$$\Omega^\pm = \operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{itA_1^2} e^{-itA_0^2},$$

равные уже введенным волновым операторам при действии на функции $\varphi \in E_{[0,\infty)}(A_0)$. Но

$$A_0^2 = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_1^2 = \begin{pmatrix} -\Delta + V & 0 \\ 0 & -\Delta + V \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\Omega^\pm = \begin{pmatrix} \Omega_S^\pm(-\Delta + V, -\Delta) & 0 \\ 0 & \Omega_S^\pm(-\Delta + V, -\Delta) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, волновые операторы Шредингера существуют и полны.

Дальнейший анализ показывает, что слои S-оператора Шредингера имеют вид

$$e^{-i2r_0E} s(\sqrt{E}),$$

где $s(\cdot)$ суть $\mathscr{L}(L^2(S^2))$-слои оператора $\tilde{S}$ Лакса—Филлипса. Из обсуждавшихся выше свойств $s(\cdot)$ вытекает, что $e^{i2r_0E} s(\sqrt{E})$ — мероморфная функция на двулистной римановой поверхности, аналитическая на «физическом» листе с полюсами на «нефизическом» листе.

Прежде чем закончить обсуждение этого примера, полезно сделать несколько замечаний. Во-первых, для того чтобы применить метод Лакса — Филлипса, нам потребовалось довольно много непростых сведений о системе со взаимодействием, а именно сведения о спектре оператора $-\Delta + V$. Во-вторых, мы изучили только случай потенциалов $V \in L^2$, неотрицательных и имеющих компактный носитель. Ограничение $V \in L^2$ не слишком серьезно. Второе ограничение можно снять, обобщая изложенное выше. Условие $V \geqslant 0$ понадобилось для того, чтобы был определен квадратный корень из оператора $-\Delta + V$ Но если $V \in L^2$ имеет компактный носитель, то $-\Delta + V$ имеет не более конечного числа отрицательных собственных значений (теорема XIII 6), и на дополнении к подпространству, натянутому на соответствующие собственные функции, $-\Delta+V$ неотрицателен. Применяя уже описанную технику, можно убедиться, что, как и следовало ожидать, функция $e^{-i2r_0E}s(\sqrt{E})$ имеет дополнительные полюсы на физическом листе точно в отрицательных собственных значениях. Третье ограничение — компактность носителя V — самое серьезное, поскольку считается, что в природе такие потенциалы не встречаются. И наконец, для всего, что мы делали в этом разделе, было важно, чтобы системы со взаимодействием и без *совпадали* вне ограниченных областей.

Дополнение к § XI.11. Прием скручивания

В этом дополнении мы хотим показать, что сингулярный спектр лапласиана Дирихле $H_{\Gamma;\,D}$ в области, внешней к ограниченной, пуст Мы воспользуемся методом (прием скручивания), применимым и во многих других случаях; см. ссылки в Замечаниях.

Теорема XI.91 $^1/_2$. Пусть Γ — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, такое, что $\mathbb{R}^n\setminus\Gamma$ связно. Пусть $H_{\Gamma;\,D}$ — лапласиан Дирихле, определяемый в § XIII.15. Фиксируем $a>0$. Пусть $X_a^{(\Gamma)}$ — гильбертово пространство функций $f\in L^2(\mathbb{R}^n\setminus\Gamma)$, для которых $e^{a|x|}f\in L^2$. Тогда существуют дискретное в $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ множество $\mathscr{E}$ и окрестность N вещественной оси $\mathbb{R}$, такие, что $(H_{\Gamma;\,D}-k^2)^{-1}$ можно продолжить как аналитическую $\mathscr{L}(X_a^{(\Gamma)},\ X_{-a}^{(\Gamma)})$-значную функцию из области $\{k\,|\,\operatorname{Im}k>0\}$ в $N\setminus\mathscr{E}$. В частности, спектр $H_{\Gamma;\,D}$ абсолютно непрерывен

Доказательство. Поскольку $\mathbb{R}^n\setminus\Gamma$ связно, $H_{\Gamma;\,D}$ в силу теоремы XIII.56 не имеет положительных собственных значений (см. обсуждение, предшествующее теореме XIII.57). В силу теоремы XIII.20, утверждение о $\mathscr{L}(X_a^{(\Gamma)},\ X_{-a}^{(\Gamma)})$-аналитичности в $N\setminus\mathscr{E}$ доказывает пустоту $\sigma_{\text{sing}}(H_{\Gamma;\,D})$, ибо в качестве X_a можно взять плотное множество D, а в качестве $[a,\ b]$ — любой замкнутый интервал, не пересекающийся с $\mathscr{E}$ Поскольку $H_{\Gamma;\,D}\geqslant 0$, а его ядро содержит лишь нуль, у $H_{\Gamma;\,D}$ нет неположительных собственных значений. Таким образом, если доказать утверждение о $\mathscr{L}(X_a^{(\Gamma)},\ X_{-a}^{(\Gamma)})$-аналитичности, из него будет вытекать абсолютная непрерывность спектра.

Определим в $\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R}^n)\oplus L^2(\mathbb{R}^n\setminus\Gamma)$ оператор H_α, полагая

$$H_\alpha\langle\varphi,\ \psi\rangle=\langle(-\Delta+\alpha x^2)\varphi,\ H_{\Gamma;\,D}\psi\rangle.$$

Предположим, что $(H_\alpha-k^2)^{-1}$ имеет $\mathscr{L}(X_a\oplus X_a^{(\Gamma)},\ X_{-a}\oplus X_{-a}^{(\Gamma)})$-продолжение на $N_\alpha\setminus\mathscr{E}_\alpha$, где каждое множество $\mathscr{E}_\alpha$ может иметь конечные точки накопления, но при этом для любых $\varepsilon>0$ и $a>0$ найдется такое α, что множество $[\mathscr{E}_\alpha\cap(-a,\ a)]\setminus(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ конечно. Тогда нужный результат получить очень просто.

Введем оператор скручивания U на $\mathscr{H}$ так: возьмем такое R, чтобы $\Gamma\subset\{x \mid |x|<R\}$, и такую C^∞-функцию u на $\mathbb{R}^n$ со значениями во множестве унитарных 2×2-матриц, что

$$u(x)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \quad \text{если} \quad |x|>2R,$$

$$u(x)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \quad \text{если} \quad |x|<R.$$

Определим U соотношением $(U\psi)(x)=u(x)\psi(x)$. Тогда U — унитарный оператор на $\mathscr{H}$ и на $X_{\pm a}\oplus X^{(\Gamma)}_{\pm a}$, так что нужное свойство продолжимости достаточно проверить для $UH_\alpha U^{-1}$. Но $\tilde{H}\equiv \equiv UH_\alpha U^{-1}=T_\alpha+V_\alpha$, где

$$T_\alpha\langle\varphi,\ \psi\rangle=\langle-\Delta\varphi,\ (H_{\Gamma;\,\mathrm{D}}+\alpha x^2)\psi\rangle,$$

$$V_\alpha=f_\alpha\cdot p+g_\alpha;$$

здесь $p=-i\nabla$, а f_α и g_α суть 2×2-матрицы C_0^∞-функций. Пусть $S_\alpha=\sigma(H_{\Gamma;\,\mathrm{D}}+\alpha x^2)$. Это множество дискретно (см. § XIII.14). Согласно анализу, проведенному в дополнении к § XI.6 (см., в частности, теорему XI.45), $(\tilde{H}_\alpha-k^2)^{-1}$ имеет $\mathscr{L}(X_a,\ X_{-a})$-продолжение в $N_\alpha\setminus\mathscr{E}_\alpha$, причем возможные предельные точки N_α обязательно лежат в $S_\alpha\cup\{0\}$, поскольку $(T_\alpha-k^2)^{-1}$ имеет такое продолжение на $\{k \mid \operatorname{Im} k>-a,\ \arg k\neq-\pi/2\}\setminus S_\alpha$. Но $\inf S_\alpha\geqslant \geqslant \inf(-\Delta+\alpha x^2)$ стремится к бесконечности при $\alpha\to\infty$, поэтому α можно выбрать таким, чтобы $[\mathscr{E}_\alpha\cap(-a,\ a)]\setminus(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ было конечным. ∎

XI.12. Линейное уравнение Больцмана

В этом разделе описывается математическая модель рассеяния нейтронного пучка малой плотности куском такого вещества, как уран, в пустом пространстве. Эта модель имеет ограниченный физический интерес, поскольку она не охватывает случаи, выходящие за рамки простого рассеяния, например, когда число нейтронов экспоненциально растет с течением времени (взрыв урановой бомбы) или когда нейтронный пучок с помощью экранов вынуждают оставаться в ограниченной области пространства, заполненной ураном и графитовыми стержнями (ядерный реактор). Однако описываемая модель весьма интересна с математической точки зрения, поскольку в ней реализуется ситуация, когда теория рассеяния в гильбертовом пространстве должна быть обобщена в двух направлениях: во-первых, естественным пространством состояний становится не гильбертово пространство, а конус в (негильбертовом) векторном пространстве, во-вторых, описываемые уравнения задают необратимую динамику, поскольку квантовые аспекты проблемы на классическом уровне моделируются путем привлечения идей статистической физики. Кроме того, развиваемая теория иллюстрирует естественность применения полугрупп, действующих в банаховом пространстве.

Основной динамической величиной в модели служит положительная функция $n(x, v)$ на $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$, представляющая плотность нейтронов в точке $\langle x, v\rangle$ фазового пространства. При подходящем целом N_0 величина

$$N_0 \int\limits_{A\times B} n(x, v)\, d^3x\, d^3v$$

представляет число нейтронов в области A со скоростями, лежащими во множестве B. Конечно, если $n(x, v)$ — обычная функция, то для любых A и B это число может и не быть целым; иначе говоря, $n(x, v)$ в действительности должна равняться $N_0^{-1}\sum\limits_{i=1}^{N_0}\delta(x-x_i)\,\delta(v-v_i)$. Но если N_0 велико (при реальных экспериментах эта величина обычно не меньше 10^{20}), $n(x, v)$ с разумной точностью можно считать функцией из L^1. Поэтому в качестве множества состояний системы естественно взять L^1_+ — конус *положительных* функций на $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$.

Постулируемое динамическое уравнение для $n(x, v)$ имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}n(x, v, t) = -v\cdot\nabla_x n(x, v, t) + \int k(x, v', v)\, n(x, v', t)\, dv' - \\ -\sigma_a(x, v)\, n(x, v, t) \qquad (230)\end{aligned}$$

и называется **линейным уравнением Больцмана.** Чтобы понять его смысл, решим это уравнение при нулевых k и σ_a. Пусть

$$[W_0(t)\, n](x, v) = n(x-vt, v). \qquad (231)$$

Теорема XI.92. При каждом $p\in[1, \infty]$ и, в частности, при $p=1$, отображения $W_0(t)$ задают сильно непрерывную группу изометрий на $L^p(\mathbb{R}^6)$, переводящих положительные функции в положительные. Более того, в каждом L^p, $p<\infty$, множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^6)$ образует существенную область определения инфинитезимального генератора группы $W_0(t)$ и $W_0(t)=e^{-tT_0}$, где T_0 таков, что при $f\in C_0^\infty$

$$T_0 f = v\cdot\nabla_x f. \qquad (232)$$

Доказательство. Все сделанные утверждения, кроме утверждения о существенной области определения и равенства (232), немедленно вытекают из (231). Остальные два можно вывести из теоремы X.49, если заметить, что, в силу (231), класс C_0^∞ левоинвариантен относительно действия $W_0(t)$, что $W_0(t) f\in C_0^\infty$ по t для $f\in C_0^\infty$

и что

$$-\frac{d}{dt} W_0(t) f \Big|_{t=0} = v \cdot \nabla_x f. \blacksquare$$

Таким образом, первый член в правой части линейного уравнения Больцмана (230) описывает свободное классическое движение группы нейтронов без рассеяния, без поглощения и без рождения новых нейтронов. Интерпретация второго члена очень проста. Нейтрон, находящийся в точке $\langle x, v' \rangle$ фазового пространства, может благодаря рассеянию или какому-то процессу рождения, например, делению, превратиться в нейтрон с другой скоростью v или породить такой нейтрон. Полная скорость рождения или рассеяния, вызываемых нейтроном в точке $\langle x, v' \rangle$, равна

$$\sigma_p(x, v') = \int k(x, v', v)\, dv. \tag{233}$$

Аналогично, последний член в правой части (230) представляет выбывание нейтронов из точки $\langle x, v \rangle$ фазового пространства в другие точки $\langle x, v' \rangle$ за счет процессов рассеяния или процессов поглощения (например, графитовыми стержнями).

Далее мы будем налагать на k, σ_a и σ_p следующие ограничения.

Определение. Будем говорить, что пара $\langle k, \sigma_a \rangle$ **регулярна**, тогда и только тогда, когда

(i) k — неотрицательная измеримая функция на $\mathbb{R}^9$, а σ_a — неотрицательная измеримая функция на $\mathbb{R}^6$;

(ii) для любой точки $\langle x, v' \rangle$ функция $k(x, v', \cdot)$ лежит в L^1, а σ_a и σ_p — равномерно ограниченные функции на $\mathbb{R}^6$;

(iii) существует компактное множество $D \subset \mathbb{R}^3$, такое, что $k(x, v, v')$ и $\sigma_a(x, v)$ равны нулю при $x \notin D$.

Прежде чем приступить к изучению решений и теории рассеяния для уравнения (230), мы хотели бы сделать несколько замечаний о форме этого уравнения и о наших условиях «регулярности». Уравнение (230) имеет «вероятностный», или «статистический», характер, поскольку мы интерпретируем последние два члена этого уравнения с помощью таких понятий, как «доля частиц, рожденных, рассеянных или поглощенных» в точке $\langle x, v \rangle$. Появление такого статистического элемента обусловлено следующими причинами: во-первых, даже с точки зрения классической физики, положения атомов урана хаотически изменяются в результате теплового движения; во-вторых, в связи с тем что в своей основе рассеяние носит квантовомеханический характер, ему внутренне присущи вероятностные закономерности. Несмотря на то что вероятностный характер уравнения (230) легко понять, он вызывает ряд неожиданных следствий. Например, хотя мы считаем, что это уравнение описывает движение собрания частиц, каждая из которых подчиняется обратимым во времени динамическим законам (уравнениям Ньютона), уравнение (230) *как уравнение в* L^1_+ разрешимо только при положительном времени.

Причина добавления слова «линейный» в название уравнения в том, что первоначальное уравнение, предложенное Больцманом (для описания не нейтронов, а газов), содержало квадратичный по n член, обусловленный рассеянием описываемых частиц друг на друге. В пределе при малых n этот член не важен. Физически «малость» n означает, что плотность нейтронов мала по сравнению с плотностью рассеивателей и настолько мала, что позволяет пренебречь взаимодействием двух сблизившихся нейтронов. Эти предположения не бессодержательны.

Предположение об ограниченности носителей σ_a и σ_p по переменной x не обязательно для развития математической теории, хотя весьма естественно с физической точки зрения. В Замечаниях можно найти ссылки на литературу, где описывается теория рассеяния при σ_a и σ_p, лишь достаточно быстро убывающих по x. Отметим, что сейчас σ обозначает не сечение, а скорость.

Существуют три различных режима с ясной физической интерпретацией. Первый отвечает равенству $\sigma_a(x, v)=\sigma_p(x, v)$ при всех $\langle x, v\rangle\in\mathbb{R}^6$. Здесь число нейтронов, покидающих $\langle x, v\rangle$, в точности равно числу нейтронов, попадающих в другие области фазового пространства благодаря присутствию нейтронов в $\langle x, v\rangle$. По естественным соображениям этот режим называют **чистым рассеянием**. Случай $\sigma_a\leqslant\sigma_p$ называют **режимом генерации**, а случай $\sigma_a\geqslant\sigma_p$ — **режимом поглощения**.

Наконец, отметим видимое нарушение закона сохранения энергии в (230). Действительно, мы не требуем, чтобы функция k была сосредоточена в области, где $|v|=|v'|$; в противном случае функция k, не будучи ни обобщенной функцией, ни мерой, равнялась бы нулю почти всюду. Всю теорию можно развить, заменив

$$\int k(x, v', v)\, n(x, v', t)\, dv' \text{ на}$$

$$\int k(x, |v|\Omega', v)\, n(x, |v|\Omega', t)\, d\Omega',$$

и это приемлемо в некоторых случаях при режимах чистого рассеяния. Однако существует физическая причина, все-таки заставляющая проводить усреднение по конечным скоростям. Действительно, ядра урана подвижны, так что конечная скорость нейтрона зависит от начальной скорости ядер урана даже при упругом рассеянии. Поскольку мы «усредняем» в упомянутом выше статистическом смысле по положениям ядер урана, довольно естественно «усреднять» еще и по скоростям.

Решение уравнения (230) представляет собой упражнение в теории полугрупп на банаховых пространствах.

Теорема XI.93. Пусть $\langle k, \sigma_a \rangle$ — регулярная пара. Тогда существует однопараметрическая сильно непрерывная полугруппа $W(t)$, $t \geq 0$, в $L^1(\mathbb{R}^6)$, переводящая $L^1_+(\mathbb{R}^6)$ в себя и такая, что $W(t) = e^{-tT}$, причем $C_0^\infty(\mathbb{R}^6)$ есть существенная область определения T и

$$(Tf)(x, v) = (T_0 f)(x, v) - \int k(x, v', v) f(x, v')\, dv' + \sigma_a(x, v) f(x, v).$$

Более того,

(a) $D(T) = D(T_0)$;

(b) $\| W(t) \| \leq e^{Ct}$, $C = \| \sigma_p \|_\infty$;

(c) при режиме чистого рассеяния (соответственно поглощения) $\| W(t) n \|_1 = \| n \|_1$ (соответственно $\| W(t) n \|_1 \leq \| n \|_1$), $n \in L^1_+$;

(d) для любого $n \in L^1_+$, всех $\langle x, v \rangle$ и $t > 0$

$$[W(t) n](x, v) \geq n(x - tv, v) \exp\left\{ -\int_0^t \sigma_a(x - sv, v)\, ds \right\}. \tag{234}$$

Доказательство. Введем операторы A_1, A_2 на $L^1(\mathbb{R}^6)$ соотношениями

$$(A_1 n)(x, v) = -\int k(x, v', v) n(x, v')\, dv',$$
$$(A_2 n)(x, v) = \sigma_a(x, v) n(x, v).$$

Они ограничены, и их нормы равны $\| \sigma_p \|_\infty$ и $\| \sigma_a \|_\infty$ соответственно. Более того, если $\tilde{T} = T_0 + A_2$, то $\tilde{W}(t) = e^{-t\tilde{T}}$ задается явной формулой

$$(\tilde{W}(t) n)(x, v) = n(x - tv, v) \exp\left\{ -\int_0^t \sigma_a(x - sv, v)\, ds \right\}. \tag{235}$$

Поскольку $T = T_0 + A_1 + A_2$, из теоремы X.50 следует, что T порождает экспоненциально ограниченную полугруппу, что любая существенная область определения T_0 служит существенной областью определения для T и что $D(T) = D(T_0)$. Далее, из неравенств $\| e^{-tA_1} \| \leq e^{t \| A_1 \|}$ и $\| \tilde{W}(t) \| \leq 1$ с помощью формулы Троттера (теорема X.51) выводится оценка

$$\| W(t) \| \leq \| e^{-tA_1} \| \leq e^{t \| \sigma_p \|_\infty},$$

доказывающая (b).

Действуя, как в § X.9 (шаг 4 в доказательстве теоремы X.58), можно проверить формулы Дюамеля:

$$W(t) = W_0(t) - \int_0^t W_0(t-s)(A_1 + A_2) W(s)\, ds, \tag{236}$$

$$W(t) = \tilde{W}(t) - \int_0^t W(t-s) A_1 \tilde{W}(s)\, ds. \tag{237}$$

Далее, e^{-tA_1} сохраняет положительность, так как подобным свойством обладает $-A_1$, а экспоненту можно разложить в ряд. В итоге с помощью формулы Троттера и очевидного свойства $\tilde{W}$ сохранять положительность заключаем, что $W(t)$ переводит L^1_+ в себя. Более того, в силу (237), $W(t)n \geqslant \tilde{W}(t)n$ поточечно, что доказывает (234).

Осталось только доказать (c). Заметим, что

$$\int (W_0(t)n)(x, v)\, dx\, dv = \int n(x, v)\, dx\, dv,$$

$$\int (A_1 n)(x, v)\, dx\, dv = -\int \sigma_p(x, v') n(x, v')\, dx\, dv',$$

и потому, в силу (236) и свойств $W_0(t)$,

$$\int (W(t)n)(x, v)\, dx\, dv = \int n(x, v)\, dx\, dv +$$

$$+ \int_0^t ds \int [\sigma_p(x, v) - \sigma_a(x, v)](W(s)n)(x, v)\, dx\, dv, \tag{238}$$

откуда немедленно вытекает (c). ∎

Теперь мы готовы объяснить, в каком смысле динамика, описываемая операторами $W(t)$, необратима. Как отображение из L^1 в L^1 оператор $W(t)$ обратим, поскольку $-T_v - A_1 - A_2$ порождает полугруппу, но его обратный оператор в общем случае не переводит основное множество состояний L^1_+ в себя; соответствующий пример можно найти в литературе, цитируемой в Замечаниях. При заданных необратимой (односторонней) динамике $W(t)$ и обратимой (двусторонней) динамике системы без взаимодействия $W_0(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ естественными объектами теории рассеяния становятся отображения

$$\Omega^+ = \operatorname*{s-lim}_{t \to -\infty} W(-t) W_0(t), \tag{239}$$

$$\tilde{\Omega}^- = \operatorname*{s-lim}_{t \to \infty} W_0(-t) W(t). \tag{240}$$

При этом $\Omega^+ n_0$ есть значение при $t = 0$ решения задачи со взаимодействием, которое в далеком прошлом выглядит как $W_0(t) n_0$.

Величина $\tilde{\Omega}^{-}n_1$ есть значение при $t=0$ решения свободного уравнения, которое все более и более походит на $W(t)n_1$ при $t\to+\infty$. Итак, если Ω^{+}, $\tilde{\Omega}^{-}$ существуют, оператор рассеяния можно задать соотношением

$$S=\tilde{\Omega}^{-}\Omega^{+}.$$

Подчеркнем, что $W(t)$ входит в (239) и (240) только при положительных t. На основе обсуждавшихся выше примеров можно ожидать, что легче доказать существование предела (239), чем (240).

Далее, возможны случаи, когда нельзя ожидать существования ни одного из этих пределов. В самом деле, если происходит слишком большая генерация нейтронов, их число может бесконечно нарастать с течением времени, что физически приводит к взрыву куска урана, а математически мы оказываемся в ситуации, не описываемой теорией рассеяния По этой причине мы выделим специальный класс взаимодействий.

Определение. Будем называть регулярную пару $\langle k, \sigma_a\rangle$ **подкритической** тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{t\geqslant 0}\|W(t)\|<\infty$.

В силу (238), пара $\langle k, \sigma_a\rangle$ подкритична в режиме чистого рассеяния или поглощения. Ниже будет видно (теорема XI.95), что она остается подкритической и в режиме генерации, но только если кусок вещества достаточно мал.

Следующая простая геометрическая лемма очень важна и при изучении предела (239), и при доказательстве подкритичности в режиме генерации в малых областях. Говоря нестрого, эта лемма утверждает, что число нейтронов в ограниченной области пространства быстро убывает, если вначале число нейтронов с очень малыми скоростями не слишком велико.

Лемма. Пусть $\|n\|_D=\int\limits_{x\in D}\int\limits_{\mathbb{R}^3} n(x, v)\,dx\,dv$ для любого борелева множества $D\subset\mathbb{R}^3$. Тогда для $n\in L^1_+(\mathbb{R}^6)$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\|W_0(t)\,n\|_D\,dt\leqslant(\operatorname{diam} D)\,\|v^{-1}n\|_{L^1(\mathbb{R}^6)},$$

где $\operatorname{diam} D=\sup\limits_{x,\,y\in D}|x-y|$.

Доказательство. Достаточно доказать, что для каждой фиксированной скорости $v\neq 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{x\in D}|W_0(t)\,n(x, v)|\,dx\,dt\leqslant[\operatorname{diam} D]\int|v|^{-1}|n(x, v)|\,dx. \qquad (241)$$

Пусть χ — характеристическая функция D. Тогда левая часть (241) равна $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int \chi(x)\,|n(x-vt,\ v)|\,dx\right)dt$. Пусть y — компонента x, параллельная v, а $x_\perp$ — две ортогональные к v координаты. Тогда последний интеграл можно переписать и оценить следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int dx_\perp \int dy\,\chi(y,\ x_\perp)\,|n(y-|v|t,\ x_\perp,\ v)| =$$
$$= |v|^{-1}\int dz \int dx_\perp \int dy\,\chi(y,\ x_\perp)\,|n(z,\ x_\perp,\ v)| \leqslant$$
$$\leqslant |v|^{-1}(\operatorname{diam} D)\iint dx_\perp\,dz\,|n(z,\ x_\perp,\ v)|,$$

что доказывает (241). Выше мы сначала сделали замену переменных, перейдя от t к $z=y-|v|t$, а затем использовали очевидное геометрическое неравенство $\left|\int \chi(y,\ x_\perp)\,dy\right| \leqslant \operatorname{diam} D$. ∎

Теорема XI.94. Если $\langle k,\ \sigma_a\rangle$ — регулярная подкритическая пара, то Ω^+ существует и сохраняет положительность. В режиме поглощения (соответственно чистого рассеяния) оператор Ω^+ является сжатием (соответственно изометрией).

Доказательство. Поскольку пара $\langle k,\ \sigma_a\rangle$ подкритична, семейство $W(-t)\,W_0(t)$ равномерно ограничено. Таким образом, достаточно доказать, что предел (239) существует на плотном в L^1 множестве $\mathscr{D}$. Остальные свойства Ω^+ вытекают из свойств $W(-t)$ и $W_0(t)$. Возьмем

$$\mathscr{D} = \{n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^6)\ \big|\ |v|^{-1} n \in L^1\}.$$

Пусть $A=A_1+A_2$, как в теореме XI.93, и пусть D — ограниченное множество, содержащее $\operatorname{supp}\sigma_a$ и $\operatorname{supp}\sigma_p$. Тогда для $n \in \mathscr{D}$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \|AW_0(t)\,n\|\,dt \leqslant \|A\| \int\limits_{-\infty}^{0} \|W_0(t)\,n\|_D\,dt \leqslant \|A\|(\operatorname{diam} D)\,\|v^{-1}n\|_1 < \infty$$

в силу леммы. В таком случае существование предела (239) доказывается методом Кука. ∎

Нам нужны некоторые дополнительные ограничения на $\langle k,\ \sigma_a\rangle$, для того чтобы сделать взаимодействие подкритичным в случае, когда объем вещества мал. Будем говорить, что паре $\langle k,\ \sigma_a\rangle$ отвечает **конечная средняя длина свободного пробега**, если

$$M(\sigma_p) \equiv \|v^{-1}\sigma_p\|_\infty < \infty.$$

Причина такого названия в том, что величина $(v^{-1}\sigma_p)^{-1}$ представляет собой расстояние между последовательными столкновениями или рождениями частиц.

Теорема XI.95. Регулярная пара $\langle k, \sigma_a\rangle$ с конечной средней длиной свободного пробега, удовлетворяющей неравенству $M(\sigma_p)\times\times(\operatorname{diam} D)<1$, является подкритической, так что, в частности, существует Ω^+.

Доказательство. Используя (237) и тот факт, что $\tilde{W}(t)$ — сжимающие отображения, легко получаем оценку

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|W(t)\|\leqslant 1+\alpha\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|W(t)\|,$$

где $\alpha=\int\limits_0^\infty\|A_1\tilde{W}(s)\|ds$. Таким образом, если $\alpha<1$, то $\sup\limits_{0\leqslant t<\infty}\|W(t)\|\leqslant(1-\alpha)^{-1}$ и система подкритична. Следовательно, нужно доказать только, что

$$\alpha\leqslant(\operatorname{diam} D)\,M(\sigma_p). \qquad (242)$$

Но поскольку $\|A_1v^{-1}\|_{\mathrm{op}}=M(\sigma_p)$, неравенство (242) будет справедливо, если доказать, что

$$\int\limits_0^\infty\|v\tilde{W}(s)\,n\|_D\,ds\leqslant(\operatorname{diam} D)\,\|n\|_1.$$

Но v коммутирует с $\tilde{W}(s)$ и $\|\tilde{W}(s)\,n\|_D\leqslant\|W_0(s)\,n\|_D$, так что в силу леммы

$$\int\limits_0^\infty\|v\tilde{W}(s)\,n\|_D\,ds\leqslant(\operatorname{diam} D)\,\|vv^{-1}n\|_1.$$

Это доказывает (242), а потому и теорему. ∎

По существу, из условия $\alpha<1$ в этом доказательстве следует, что ряд итераций уравнения (237) равномерно сходится по t. Физическая причина этого в том, что, как утверждает неравенство $(\operatorname{diam} D)\,M(\sigma_p)<1$, с точностью до второго порядка частица, проходя область D, подвергается в среднем менее чем одному столкновению, и потому геометрический ряд, получаемый с помощью итераций, сходится при условии $\alpha<1$. Отметим, что теорема XI.95 обеспечивает нас большим количеством примеров ограниченных по времени полугрупп, не являющихся сжимающими полугруппами. Наложив еще одно условие на $\langle k, \sigma_a\rangle$, можно доказать существование предела (240).

Теорема XI.96. Предположим, что регулярная подкритическая пара $\langle k, \sigma_a \rangle$ с конечной средней длиной свободного пробега такова, что

$$M(\sigma_a) \equiv \| v^{-1}\sigma_a \|_\infty < \infty.$$

Тогда $\tilde{\Omega}^-$ существует, а оператор рассеяния $S = \tilde{\Omega}^- \Omega^+$ — ограниченное взаимно однозначное отображение $L^1_+(\mathbb{R}^6)$ в себя.

Доказательство. Пусть $\sigma_1 = \sigma_p$ и $\sigma_2 = \sigma_a$. Прежде всего мы утверждаем, что для всех $\langle x, v \rangle \in \mathbb{R}^6$

$$\int_0^\infty \sigma_i(x - sv, v)\, ds \leqslant (\operatorname{diam} D)\, M(\sigma_i). \tag{243}$$

Неравенство (243) доказывается точно так же, как лемма. В силу пункта (d) теоремы XI.93 и (243),

$$(W(t)n)(x, v) \geqslant \exp\{-(\operatorname{diam} D)\, M(\sigma_2)\}\, n(x - vt, v)$$

для положительных n. Полагая $C = \exp\{(\operatorname{diam} D)\, M(\sigma_2)\}$, получим

$$n(x, v) \leqslant C\,(W(t)n)(x + vt, v). \tag{244}$$

В итоге, заменяя n на $W(s)n$ и t на $t - s$, получаем

$$(W(s)n)(x, v) \leqslant C\,(W(t)n)(x + v(t - s), v).$$

Следовательно, для положительных n

$$\begin{aligned}
\int_0^t \| A_i W(s) n \|_1\, ds &= \int_0^t ds \int \sigma_i(x, v)\,(W(s)n)(x, v)\, dx\, dv \leqslant \\
&\leqslant C \int_0^t ds \int \sigma_i(x, v)\,(W(t)n)(x + v(t - s), v)\, dx\, dv = \\
&= C\left(\int_0^t \sigma_i(y - vr, v)\, dr\right) \int (W(t)n)(y, v)\, dy\, dv \leqslant \\
&\leqslant C\,(\operatorname{diam} D)\, M(\sigma_i)\, \| W(t) n \|_1.
\end{aligned}$$

На предпоследнем шаге сделана замена переменных в двух местах, а на последнем использовано (243). Далее,

$$\int_0^\infty \| A_i W(s) n \|_1\, ds \leqslant C\,(\operatorname{diam} D)\, M(\sigma_i) \sup_{t \geqslant 0} \| W(t) n \|_1,$$

и, в силу подкритичности,

$$\int_0^\infty \| A_i W(s) n \|_1\, ds < \infty,$$

что позволяет с помощью метода Кука доказать существование предела (240). Отображение Ω^+ существует в силу теоремы XI.94, а поскольку семейство $\{W(t)\}$ равномерно ограничено и каждое отображение $W(t)$ сохраняет положительность, Ω^+, $\tilde{\Omega}^-$ суть ограниченные сохраняющие положительность операторы на $L^1_+(\mathbb{R}^6)$. Следовательно, то же самое справедливо и в отношении $S=\tilde{\Omega}^-\Omega^+$. В силу (244),

$$\|W(t)n\|_1 \geqslant C^{-1}\|n\|_1$$

для положительных n. Отсюда и из изометричности $W_0(t)$ легко выводится взаимная однозначность отображения S. ∎

XI.13. Нелинейные волновые уравнения

... с неразрешимыми уравнениями следует обращаться, угрожая наказанием.

ВУДИ АЛЛЕН

Этот раздел служит введением в теорию рассеяния для нелинейных классических волновых уравнений. В этой области знаний еще много нерешенных проблем, и теории рассеяния, которые построены к настоящему времени, как правило, справедливы лишь для нелинейных уравнений специального вида. Общее построение теории следует идеям, изложенным в § 1, хотя техника доказательства необходимых оценок значительно сложнее, чем в линейном случае. Начнем с уравнения

$$u_{tt}-\Delta u+m^2u=F(u). \tag{245}$$

В § X.13 были разобраны вопросы существования решений (245) при $F(u)=\pm\lambda|u|^{p-1}u$, где $p=3$. Те же методы применимы и при $p<5$. Чтобы построить теорию рассеяния для уравнения (245), можно было бы попытаться показать, что его решения при больших положительных и отрицательных временах все более и более походят на решения соответствующего свободного уравнения

$$u_{tt}-\Delta u+m^2u=0. \tag{246}$$

Равномерная норма решений такого свободного уравнения, отвечающих гладким начальным данным в n-мерном пространстве, убывает как $t^{-n/2}$ (см. теорему XI.17). Если такое же убывание имеет место и в случае уравнения (245), теория рассеяния может быть построена, поскольку член типа $-\lambda|u|^{p-1}u$ убывает быстрее,. чем линейные члены, если $p>1$. Однако даже в случае линейного уравнения Шредингера нельзя ожидать убывания от всех его решений, поскольку среди них могут быть решения, описывающие связанные состояния. Точно так же связанные состояния могут быть и у уравнения (245), во всяком случае при подходящих F.

Предположим, что F имеет вид $F(y) = yH(|y|)$, где $H(|y|) \to 0$ при $|y| \to 0$. Тогда (245) имеет решение вида

$$u_0(x, t) = e^{i\omega t} \varphi(x) \tag{247}$$

в том и только том случае, когда

$$-\Delta\varphi(x) + V(x)\varphi(x) = -(m^2 - \omega^2)\varphi(x), \tag{248a}$$

где

$$V(x) = -H(|\varphi(x)|). \tag{248b}$$

Уравнение Шредингера не имеет положительных собственных значений, если исключены слишком патологические потенциалы (см. § XIII.13). Поэтому мы ограничимся случаем $|\omega| < m$. Если V положителен, например если $F(u) = -\lambda u|u|^2$, то (248a), разумеется, не имеет обсуждаемых решений, поскольку $-\Delta + V \geqslant 0$. Если $V(x)$ не всегда положителен, то не удивительно, что такие решения существуют. И действительно, в работе, указанной в Замечаниях, построены обширные классы функций F, для которых (248) имеет решения. Явным примером таких F может служить

$$F(u) = -u(|u|^2 - \lambda|u|)$$

при достаточно больших λ.

Если решения вида (247) существуют, то должны существовать решения уравнения (245), которые асимптотически (при $t \to -\infty$) выглядят как $u_0(x, t)$ плюс решение уравнения (246). Поскольку нелинейность «смешивает» часть, отвечающую связанному состоянию, и асимптотически свободную часть, нет причин ожидать, что связанное состояние останется при $t \to +\infty$. Таким образом, если связанные состояния имеются, теория рассеяния для (245) есть по существу многоканальная задача. На самом деле число каналов бесконечно, ибо, в силу лоренц-инвариантности (245), существование одного u_0 влечет за собой существование решений (245) вида

$$\exp\{i(t - v^{-1}x)\omega(v)\}\psi(x - vt).$$

Таким образом, можно строить решения (245), состоящие из n сгустков, движущихся друг относительно друга. Кроме того, существуют примеры с бесконечным числом связанных состояний при фиксированной ω. Наконец, связанные состояния ожидаются при каждой достаточно малой ω.

Итак, задача не только нелинейна, но и включает в себя все трудности, присущие многоканальному рассеянию. Два общих случая, когда может быть доказана асимптотическая полнота, являются точными аналогами двух случаев, для которых уже много лет известна асимптотическая полнота многоканальной задачи рассеяния для уравнения Шредингера. Случай малых начальных данных, с которого мы начнем, аналогичен случаю слабой связи (теорема XIII.27). Результат, обсуждаемый в конце этого раздела, аналогичен случаю потенциала отталкивания (теорема XIII.32). В средней части раздела описано общее построение волновых операторов каналов, когда u асимптотически свободно.

Стоит еще с самого начала отметить две технические трудности, возникающие здесь и отсутствующие в линейном квантовомеханическом рассеянии. Во-первых, поскольку волновые операторы и оператор рассеяния нелинейны, при доказательстве факта существования недостаточно установить их существование на плотном множестве, а затем воспользоваться теоремой I.7 (об ограниченном линейном отображении). Во-вторых, в качестве состояний рассеяния естественно взять элементы множества начальных данных Σ_{scat}, для которых решения (246) убывают подходящим образом при $t \to \pm\infty$. К сожалению, известны только достаточные условия такого убывания, так что в норму на Σ_{scat} в типичных ситуациях явным образом входит временна́я асимптотика при больших t решения соответствующего линейного уравнения.

В § X.13 было показано, что (245) можно представить в виде

$$\varphi'(t) = -iA\varphi(t) + J(\varphi(t)), \tag{249a}$$

где $J(\langle u, v\rangle) = \langle 0, F(u)\rangle$,

$$A = i\begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta - m^2 & 0 \end{pmatrix}$$

и $\varphi(t) = \langle u(\cdot, t), v(\cdot, t)\rangle$ считается функцией из $\mathbb{R}$ в $D((-\Delta + m^2)^{1/2}) \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$. Это привело нас к изучению проблемы существования решений уравнения (249a) как абстрактной задачи, где $\varphi(t)$ принимает значения в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, оператор A самосопряжен в $\mathscr{H}$, а J — нелинейное отображение $\mathscr{H}$ в себя. При условии, что J удовлетворяет условию Липшица равномерно на шарах в $\mathscr{H}$, мы доказали, что соответствующее интегральное уравнение

$$\varphi(t) = e^{-itA}\varphi_0 + \int_0^t e^{-i(t-s)A} J(\varphi(s))\,ds \tag{249b}$$

имеет единственное непрерывное $\mathscr{H}$-значное решение φ при малых t. В случае если J удовлетворяет дополнительным неравенствам, а начальные данные φ_0 лежат в $D(A)$, мы показали, что φ сильно дифференцируемо и удовлетворяет (249a). В этом разделе мы всегда будем иметь дело с (249b); читателю следует просмотреть § X.13, для того чтобы вспомнить достаточные условия, при которых φ удовлетворяет (249a).

Начнем с изложения абстрактной теории рассеяния для малых начальных данных. Пусть A — самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$. Пусть $\|\cdot\|_a$ и $\|\cdot\|_b$ — две вспомогательные «нормы» на $\mathscr{H}$: $\|\cdot\|_a$ обладает всеми свойствами нормы, кроме одного: равенство $\|\varphi\|_a=0$ не обязательно влечет за собой равенство $\varphi=0$; $\|\cdot\|_b$ обладает всеми свойствами нормы, кроме того, что она может принимать значение $+\infty$. Будем предполагать, что A, J, $\|\cdot\|_a$ и $\|\cdot\|_b$ удовлетворяют следующим условиям:

(i) существует постоянная $c>0$, такая, что

$$\|\varphi\|_a\leqslant c\|\varphi\| \quad \text{для всех } \varphi\in\mathscr{H}; \tag{250}$$

(ii) существуют постоянные $c_1>0$, $d>0$, такие, что для $\varphi\in\mathscr{H}$

$$\|e^{-itA}\varphi\|_a\leqslant c_1t^{-d}\|\varphi\|_b, \quad \text{если } |t|\geqslant 1; \tag{251}$$

(iii) существуют $\beta>0$, $\delta>0$ и $q\geqslant 1$ с $dq>1$, такие, что

$$\|J(\varphi_1)-J(\varphi_2)\|\leqslant\beta(\|\varphi_1\|_a+\|\varphi_2\|_a)^q\|\varphi_1-\varphi_2\|, \tag{252}$$

$$\|J(\varphi_1)-J(\varphi_2)\|_b\leqslant\beta\{(\|\varphi_1\|_a+\|\varphi_2\|_a)^{q-1}\|\varphi_1-\varphi_2\|_a+ \\ +(\|\varphi_1\|_a+\|\varphi_2\|_a)^q\|\varphi_1-\varphi_2\|\} \tag{253}$$

для всех $\varphi_1,\varphi_2\in\mathscr{H}$, удовлетворяющих неравенству $\|\varphi_i\|\leqslant\delta$. В случае $q=1$ мы предполагаем, что β можно выбрать произвольно малым, если δ выбрано малым. Более того, мы предполагаем, что $J(0)=0$.

Теперь мы определим состояния рассеяния и норму рассеяния. Сначала для $\mathscr{H}$-значной функции $\psi(t)$ на $\mathbb{R}$ введем

$$|||\psi(\cdot)|||_{[N_1,N_2]}=\sup_{N_1\leqslant t\leqslant N_2}\|\psi(t)\|+\sup_{N_1\leqslant t\leqslant N_2}(1+|t|)^d\|\psi(t)\|_a.$$

В случае когда $N_1=-\infty$, $N_2=+\infty$, будем обозначать норму просто через $|||\cdot|||$. Теперь определим

$$\Sigma_{\text{scat}}=\{\varphi\in\mathscr{H}\mid |||e^{-itA}\varphi|||<\infty\}$$

и

$$\|\varphi\|_{\text{scat}}=|||e^{-itA}\varphi|||.$$

Таким образом, состояния рассеяния суть те векторы в $\mathscr{H}$, которые хорошо убывают по норме $\|\cdot\|_a$ при свободном распространении. Заметим, что если $\|\varphi\|_b<\infty$, то

$$\|e^{-itA}\varphi\|_a\leqslant c_2(1+|t|)^{-d}(\|\varphi\|+\|\varphi\|_b) \quad \text{для всех } t, \tag{254}$$

так что $\varphi\in\Sigma_{\text{scat}}$ и $\|\varphi\|_{\text{scat}}\leqslant(1+c_2)\|\varphi\|+c_2\|\varphi\|_b$.

Теорема XI.97 (глобальное существование для малых начальных данных). Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и J — нелинейное отображение $\mathscr{H}$ в себя. Предположим, что существуют такие $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$, что выполняются условия (i)—(iii). Тогда существует такое $\eta_0 > 0$, что для всех $\varphi_- \in \Sigma_{\text{scat}}$ с $\|\varphi_-\|_{\text{scat}} \leqslant \eta_0$ уравнение

$$\varphi(t) = e^{-itA}\varphi_- + \int_{-\infty}^{t} e^{-i(t-s)A} J(\varphi(s))\, ds \tag{255}$$

имеет единственное глобальное непрерывное $\mathscr{H}$-значное решение φ с $|||\varphi(\cdot)||| \leqslant 2\eta_0$. Более того,

(a) $\varphi(t) \in \Sigma_{\text{scat}}$ для каждого t;
(b) $\|\varphi(t) - e^{-itA}\varphi_-\| \to 0$ при $t \to -\infty$.

Доказательство. Основная идея доказательства состоит в использовании метода сжимающих отображений, примененного в § X 13, но с начальными условиями при $t = -\infty$. Таким образом, эта теорема похожа на результаты § 2. Пусть X_{η,φ_-} — множество непрерывных $\mathscr{H}$-значных функций $\psi(t)$, таких, что $|||\psi(t) - e^{-itA}\varphi_-||| \leqslant \eta$. Предположим, что $\|\varphi_-\|_{\text{scat}} \leqslant \eta \leqslant \delta/2$, где δ выбрано так, чтобы выполнялось условие (iii). Для $\psi(\cdot) \in X_{\eta,\varphi_-}$ введем

$$(\mathscr{T}\psi)(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-i(t-s)A} J(\psi(s))\, ds.$$

Как и при доказательстве теоремы X.72, легко проверить, что $e^{-i(t-s)A} J(\psi(s))$ — непрерывная функция s при каждом t. Далее, поскольку $\|\psi(s)\| \leqslant |||\psi(\cdot)||| \leqslant |||e^{-itA}\varphi_-||| + \eta \leqslant 2\eta$, в силу (252) имеем неравенства

$$\begin{aligned}\|J(\psi(s))\| &\leqslant \beta\|\psi(s)\|_a^q\|\psi(s)\| \leqslant \beta|||\psi(\cdot)|||^{q+1}(1+|s|)^{-dq} \leqslant \\ &\leqslant \beta(2\eta)^{q+1}(1+|s|)^{-dq},\end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned}\|(\mathscr{T}\psi)(t)\| &\leqslant \int_{-\infty}^{t} \|e^{-i(t-s)A} J(\psi(s))\|\, ds \leqslant \\ &\leqslant \beta(2\eta)^{q+1}\int_{-\infty}^{t}(1+|s|)^{-dq}\, ds < \infty,\end{aligned} \tag{256}$$

поскольку $dq > 1$. Таким же образом,

$$\|(\mathscr{Y}\psi)(t)\|_a \leqslant \int_{-\infty}^{t} \|e^{-i(t-s)A} J(\psi(s))\|_a\, ds \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \int_{-\infty}^{t} (1+|t-s|)^{-d} (\|J(\psi(s))\|_b + \|J(\psi(s))\|)\, ds \leqslant$$

(по (254))

$$\leqslant c_2\beta \int_{-\infty}^{t} (1+|t-s|)^{-d} \{\|\psi(s)\|_a^q (1+2\|\psi(s)\|)\}\, ds \leqslant$$

(по (252) и (253))

$$\leqslant c_2\beta(2\eta)^q (1+4\eta) \int_{-\infty}^{t} (1+|t-s|)^{-d} (1+|s|)^{-dq}\, ds \leqslant \tag{257}$$

$$\leqslant c_2\beta(2\eta)^q (1+4\eta)\, c_3 (1+|t|)^{-d}.$$

Последний шаг справедлив благодаря лемме, которую мы докажем после окончания этого доказательства. В итоге $|||(\mathscr{Y}\psi)(t)||| < \infty$. Теперь введем

$$(\mathscr{M}\psi)(t) = e^{-itA}\varphi_- + (\mathscr{Y}\psi)(t)$$

и выберем η_0 (и δ в случае $q=1$) достаточно малым, так чтобы

$$\beta(2\eta_0)^{q+1} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|s|)^{-dq}\, ds \leqslant \frac{1}{2}\eta_0,$$

$$c_2\beta(2\eta_0)^q (1+4\eta_0)\, c_3 \leqslant \frac{1}{2}\eta_0. \tag{258}$$

Легко проверить, что функция $(\mathscr{M}\psi)(t)$ непрерывна. Таким образом, $\mathscr{M}$ при $\eta \leqslant \eta_0$ отображает X_{η,φ_-} в себя. Далее, легко проверить, используя (253), что путем выбора еще меньшего η_0 (и δ в случае $q=1$) всегда можно добиться того, чтобы $\mathscr{M}$ было сжатием. Тогда $\mathscr{M}$ имеет единственную неподвижную точку $\varphi(\cdot)$ в X_{η,φ_-}, поскольку X_{η,φ_-} — полное метрическое пространство. По определению $\mathscr{M}$, такое $\varphi(\cdot)$ есть глобальное решение (255). Отметим еще, что $|||\varphi(\cdot)||| \leqslant 2\eta_0$.

Для доказательства единственности предположим, что φ_1 — другое решение (255) с $|||\varphi_1(\cdot)||| < \infty$. Тогда

$$\|\varphi(t) - \varphi_1(t)\| \leqslant \int_{-\infty}^{t} \|J(\varphi(s)) - J(\varphi_1(s))\|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{t} \beta(\|\varphi(s)\|_a + \|\varphi_1(s)\|_a)^q \|\varphi(s) - \varphi_1(s)\|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \beta(|||\varphi(\cdot)||| + |||\varphi_1(\cdot)|||)^q \Big(\sup_{-\infty<s\leqslant t} \|\varphi(s) - \varphi_1(s)\|\Big) \int_{-\infty}^{t} (1+|s|)^{-dq} ds,$$

так что

$$\sup_{-\infty<s\leqslant t}\|\varphi(s)-\varphi_1(s)\|\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\beta(|||\varphi(\cdot)|||+|||\varphi_1(\cdot)|||)^q\int_{-\infty}^{t}(1+|s|)^{-dq}\,ds\right\}\sup_{-\infty<s\leqslant t}\|\varphi(s)-\varphi_1(s)\|.$$

Но это ведет к противоречию при t, достаточно близких к $-\infty$, если только не выполняется равенство $\varphi(s)=\varphi_1(s)$ для всех $s\leqslant t$. В силу локальной единственности (доказываемой, как и выше, с помощью метода сжимающих отображений, но при начальных данных, заданных при некотором конечном t), $\varphi(s)=\varphi_1(s)$ для всех s.

Для того чтобы показать, что $\varphi(t)\in\Sigma_{\rm scat}$ при каждом t, фиксируем t и проведем следующее вычисление:

$$\sup_r\|e^{-irA}\varphi(t)\|\leqslant\sup_r\|e^{-irA}e^{-itA}\varphi_-\|+\int_{-\infty}^{t}\|e^{-i(t+r-s)A}J(\varphi(s))\|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\sup_r\|e^{-irA}\varphi_-\|+\beta\int_{-\infty}^{t}\|\varphi(s)\|_a^q\|\varphi(s)\|\,ds\leqslant\|\varphi_-\|_{\rm scat}+\eta_0/2;$$

$$\sup_r\{(1+|r|)^d\|e^{-irA}\varphi(t)\|_a\}\leqslant\sup_r\{(1+|r|)^d\|e^{-i(t+r)A}\varphi_-\|_a\}+$$

$$+\sup_r\{(1+|r|)^d\int_{-\infty}^{t}\|e^{-i(t+r-s)A}J(\varphi(s))\|_a\,ds\}\leqslant$$

$$\leqslant\sup_r\{(1+|r|)^d(1+|t+r|)^{-d}\|\varphi_-\|_{\rm scat}\}+$$

$$+\sup_r\left\{(1+|r|)^d\int_{-\infty}^{t}(1+|t+r-s|)^{-d}(1+|s|)^{-dq}ds\right\}\beta c_2(1+4\eta_0)(2\eta_0)^q\leqslant$$

$$\leqslant\sup_r\{(1+|r|)^d(1+|t+r|)^{-d}\}(\|\varphi_-\|_{\rm scat}+\eta_0/2).$$

Таким образом, $\varphi(t)\in\Sigma_{\rm scat}$.

Для доказательства (b) проведем такую оценку:

$$\varphi(t)-e^{-itA}\varphi_-\|=\|e^{itA}\varphi(t)-\varphi_-\|\leqslant\int_{-\infty}^{t}\|e^{isA}J(\varphi(s))\|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\beta\int_{-\infty}^{t}\|\varphi(s)\|_a^q\|\varphi(s)\|\,ds\leqslant\beta(2\eta_0)^{q+1}\int_{-\infty}^{t}(1+|s|)^{-dq}\,ds\longrightarrow 0$$

при $t\longrightarrow-\infty$. ∎

Решение (255), построенное выше, удовлетворяет (249b) с

$$\varphi_0=\varphi_-+\int_{-\infty}^{0}e^{isA}J(\varphi(s))\,ds.$$

Часть (a) следующей леммы была нужна при доказательстве теоремы XI.97, а часть (b) будет использована в доказательстве теоремы XI.100.

Лемма 1. (a) Предположим, что $q \geqslant 1$, $d > 0$ и $dq > 1$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|t-s|)^{-d}(1+|s|)^{-dq}\,ds \leqslant c_3(1+|t|)^{-d}.$$

(b) Предположим, что $q > 1$, $d > 0$ и $dq > 1$. Тогда

$$\sup_r \left\{(1+|r|)^d \int_{t_1}^{t_2} (1+|r-s|)^{-d}(1+|s|)^{-dq}\,ds\right\} \to 0$$

при $t_1,\ t_2 \to +\infty$ или $t_1,\ t_2 \to -\infty$.

Доказательство. (a) Достаточно рассмотреть случай положительного t. Разобьем интеграл на две части и оценим их:

$$\int_{|s-t| \geqslant t/2} (1+|t-s|)^{-d}(1+|s|)^{-dq}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \left(1+\frac{t}{2}\right)^{-d} \int_{|s-t| \geqslant t/2} (1+|s|)^{-dq}\,ds \leqslant c(1+t)^{-d} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|s|)^{-dq}\,ds$$

и при $d \neq 1$

$$\int_{t/2}^{3t/2} (1+|t-s|)^{-d}(1+|s|)^{-dq}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \left(1+\frac{t}{2}\right)^{-dq}\left\{\int_{t/2}^{t} (1+(t-s))^{-d}\,ds + \int_{t}^{3t/2} (1+s-t)^{-d}\,ds\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-dq}\left\{|1-d|^{-1}\left(\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-d+1}+1\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant c(1+t)^{-dq-d+1} + c(1+t)^{-dq} \leqslant c(1+t)^{-d},$$

поскольку $dq > 1$ и $q \geqslant 1$.

Если $d = 1$, второй интеграл можно оценить следующим образом:

$$2(1+t/2)^{-q}\ln(1+t/2) \leqslant c(1+t)^{-1},$$

поскольку $q > 1$, если $d = 1$.

(b) Рассмотрим случай $t_2 > t_1 \to \infty$. Выберем $q_0 \geqslant 1$ так, чтобы $dq_0 > 1$ и $q > q_0$ Тогда

$$(1+|r|^d)\int_{t_1}^{t_2}(1+|r-s|)^{-d}(1+|s|)^{-dq}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant [(1+|t_1|)^{-d(q-q_0)}](1+|r|)^d\int_{-\infty}^{\infty}(1+|r-s|)^{-d}(1+|s|)^{-dq_0}\,ds,$$

так что (b) следует из (a). ∎

Теорема XI.98 (оператор рассеяния для малых начальных данных). Допустим, что выполнены все предположения теоремы XI.97. Пусть $\varphi(t)$ — решение (255), отвечающее $\varphi_- \in \Sigma_{\text{scat}}$ с $\|\varphi_-\|_{\text{scat}} \leqslant \eta_0$. Тогда для достаточно малого η_0

(a) существует $\varphi_+ \in \Sigma_{\text{scat}}$ с $\|\varphi_+\|_{\text{scat}} \leqslant 2\eta_0$, такое, что
$$\|\varphi(t) - e^{-itA}\varphi_+\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty;$$

(b) отображение S: $\varphi_- \mapsto \varphi_+$, определенное на $\{\varphi_- \mid \|\varphi_-\|_{\text{scat}} < \eta_0\}$, взаимно однозначно и непрерывно в $\|\cdot\|_{\text{scat}}$-норме.

Доказательство. Из теоремы XI.97 мы знаем, что $|||\varphi(\cdot)||| \leqslant 2\eta_0$. Поэтому, в силу (252),

$$\|e^{it_1A}\varphi(t_1) - e^{it_2A}\varphi(t_2)\| \leqslant \left\|\int_{t_1}^{t_2} e^{isA}J(\varphi(s))\,ds\right\| \leqslant \int_{t_1}^{t_2}\beta\|\varphi(s)\|_d^q\|\varphi(s)\|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \beta(2\eta_0)^{q+1}\int_{t_1}^{t_2}(1+|s|)^{-dq}\,ds.$$

Таким образом, $\{e^{itA}\varphi(t)\}$ есть направленность Коши в $\mathscr{H}$ при $t \to +\infty$, поскольку $dq > 1$. Полагая

$$\varphi_+ = \lim_{t\to+\infty} e^{itA}\varphi(t),$$

получим, в силу унитарности e^{-itA},

$$\|\varphi(t) - e^{-itA}\varphi_+\| \to 0 \qquad \text{при} \qquad t \to +\infty.$$

Чтобы убедиться в том, что $\varphi_+ \in \Sigma_{\text{scat}}$, заметим, что

$$e^{itA}\varphi(t) = \varphi_- + \int_{-\infty}^{t} e^{isA}J(\varphi(s))\,ds.$$

Устремляя t к $+\infty$, заключаем, что

$$\varphi_+ = \varphi_- + \int_{-\infty}^{\infty} e^{isA}J(\varphi(s))\,ds.$$

Теперь, в силу (254) и (252),

$$\|e^{-i(t-s)A} J(\varphi(s))\|_a \leqslant c_2 (1+|t-s|)^{-d} \{\|J(\varphi(s))\| + \|J(\varphi(s))\|_b\} \leqslant$$
$$\leqslant c_2\beta (1+|t-s|)^{-d} \{\|\varphi(s)\|_a^q (1+2\|\varphi(s)\|)\} \leqslant$$
$$\leqslant c_2\beta (2\eta_0)^q (1+4\eta_0)(1+|t-s|)^{-d}(1+|s|)^{-dq}$$

для каждого s и t. Поскольку

$$e^{-itA}\varphi_+ = e^{-itA}\varphi_- + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t-s)A} J(\varphi(s))\, ds,$$

заключаем, что $\|e^{-itA}\varphi_+\|_a < \infty$ и

$$\sup_t \{(1+|t|)^d \|e^{-itA}\varphi_+\|_a\} \leqslant \sup_t \{(1+|t|)^d \|e^{-itA}\varphi_-\|_a\} +$$
$$+ c_2\beta(2\eta_0)^q (1+4\eta_0) \sup_t \left\{(1+|t|)^d \int_{-\infty}^{\infty} (1+|t-s|)^{-d}(1+|s|)^{-dq}\, ds\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_t (1+|t|)^d \|e^{-itA}\varphi_-\|_a + \eta_0/2$$

в силу леммы (часть (а)) и выбора η_0 в теореме XI.97. В итоге

$$\|\varphi_+\|_{\text{scat}} \leqslant \|\varphi_-\|_{\text{scat}} + \eta_0/2 + \eta_0/2 \leqslant 2\eta_0.$$

Это доказывает (а).

Для доказательства непрерывности S предположим, что φ_- и ψ_- лежат в Σ_{scat} и $\|\varphi_-\|_{\text{scat}} \leqslant \eta_0$ и $\|\psi_-\|_{\text{scat}} \leqslant \eta_0$. Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — соответствующие решения, даваемые теоремой XI.97. Покажем сначала, что $|||\varphi(\cdot)-\psi(\cdot)|||$ можно оценить с помощью $\|\varphi_- - \psi_-\|_{\text{scat}}$, а затем покажем, что $\|\varphi_+ - \psi_+\|_{\text{scat}}$ можно оценить с помощью $|||\varphi(\cdot)-\psi(\cdot)|||$. Поскольку

$$\varphi(t) - \psi(t) = e^{-itA}(\varphi_- - \psi_-) + \int_{-\infty}^{t} e^{-i(t-s)A}(J(\varphi(s)) - J(\psi(s)))\, ds,$$

получаем

$$\|\varphi(t)-\psi(t)\| \leqslant \|\varphi_- - \psi_-\| + \int_{-\infty}^{t} \|J(\varphi(s)) - J(\psi(s))\|\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \|\varphi_- - \psi_-\| + \beta(2\eta_0)^q \int_{-\infty}^{t} (1+|s|)^{-dq} \|\varphi(s)-\psi(s)\|\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \|\varphi_- - \psi_-\| + \beta(2\eta_0)^q \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1+|s|)^{-dq}\, ds\right) |||\varphi(\cdot)-\psi(\cdot)|||.$$

Аналогично,

$$\|\varphi(t)-\psi(t)\|_a \leqslant \|e^{-itA}(\varphi_- - \psi_-)\|_a + \int_{-\infty}^{t} \|e^{-i(t-s)A}(J(\varphi(s)) -$$

$$-J(\psi(s)))\|_a\,ds \leqslant \|e^{-itA}(\varphi_- - \psi_-)\|_a + c_2\int_{-\infty}^{t}(1+|t-s|)^{-d}\{\|J(\varphi(s)) - J(\psi(s))\|_b + \|J(\varphi(s)) - J(\psi(s))\|\}\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \|e^{-itA}(\varphi_- - \psi_-)\|_a + 3c_2\beta(2\eta_0)^q\left(\int_{-\infty}^{\infty}(1+|t-s|)^{-d}(1+|s|)^{-dq}\,ds\right)|||\varphi(\cdot)-\psi(\cdot)|||.$$

Объединяя две приведенные оценки, получаем

$$|||\varphi(\cdot)-\psi(\cdot)||| \leqslant \|\varphi_- - \psi_-\|_{\mathrm{scat}} + c(\beta, \eta_0)\,|||\varphi(\cdot)-\psi(\cdot)|||,$$

где

$$c(\beta, \eta_0) = \beta(2\eta_0)^q\int_{-\infty}^{\infty}(1+|s|)^{-dq}\,ds + 3c_2\beta(2\eta_0)^q\sup_t\left\{(1+|t|)^d\int_{-\infty}^{\infty}(1+|t-s|)^{-d}(1+|s|)^{-dq}\,ds\right\}.$$

Выбирая η_0 достаточно малым, можно добиться того, чтобы оценка

$$|||\varphi(\cdot)-\psi(\cdot)||| \leqslant 2\|\varphi_- - \psi_-\|_{\mathrm{scat}} \tag{259}$$

вытекала из неравенства $c(\beta, \eta_0) \leqslant 1/2$. Далее,

$$\|\varphi_+ - \psi_+\|_{\mathrm{scat}} \leqslant \|\varphi_- - \psi_-\|_{\mathrm{scat}} + \left\|\int_{-\infty}^{\infty} e^{isA}(J(\varphi(s)) - J(\psi(s)))\,ds\right\|_{\mathrm{scat}},$$

и с помощью обычных оценок находим, что

$$\sup_t\left\|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t-s)A}(J(\varphi(s)) - J(\psi(s)))\,ds\right\| \leqslant c(\beta, \eta_0)\,|||\varphi(\cdot)-\psi(\cdot)|||$$

и

$$\sup_t\left\{(1+|t|)^d\left\|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t-s)A}(J(\varphi(s)) - J(\psi(s)))\,ds\right\|_a\right\} \leqslant c(\beta, \eta_0)\,|||\varphi(\cdot)-\psi(\cdot)|||,$$

так что, в силу (259),

$$\|\varphi_+ - \psi_+\|_{\mathrm{scat}} \leqslant \|\varphi_- - \psi_-\|_{\mathrm{scat}} + c(\beta, \eta_0)\,|||\varphi(\cdot)-\psi(\cdot)||| \leqslant 2\|\varphi_- - \psi_-\|_{\mathrm{scat}}.$$

Это доказывает равномерную $\|\cdot\|_{\mathrm{scat}}$-непрерывность S при достаточно малых η_0. Доказательство взаимной однозначности отображения S оставим читателю (задача 126). ∎

Прежде чем переходить к примерам, отметим несколько важных аспектов этих теорем. Во-первых, условия теорем не требуют априорных оценок решения нелинейного уравнения, а в доказательствах не использовались энергетические неравенства. Единственное требование заключалось в достаточно быстром убывании решений *линейного* уравнения и в достаточно высокой степени нелинейности в нуле. В частности, выполнение условий (i)—(iii) не зависит от знака нелинейного члена. Во-вторых, предположим, что нелинейное уравнение имеет вид

$$\varphi'(t) = -iA\varphi(t) + \lambda J(\varphi(t)) \tag{260}$$

и выполняются условия (i)—(iii). Тогда для любого $\varphi_- \in \Sigma_{\mathrm{scat}}$ утверждения теорем XI.97 и XI.98 справедливы при достаточно малых λ (выбор λ зависит от $\|\varphi_-\|_{\mathrm{scat}}$). Наконец, путем небольшого изменения доказательства предыдущих теорем можно вывести глобальное существование для начальных данных при $t=0$, если они достаточно малы.

Теорема XI.99. Пусть A, $\mathscr{H}$ и J удовлетворяют условиям теоремы XI.97. Тогда для достаточно малых η_0 и любого $\varphi_0 \in \Sigma_{\mathrm{scat}}$ с $\|\varphi_0\|_{\mathrm{scat}} \leqslant \eta_0$ уравнение (249b) имеет сильно непрерывное глобальное Σ_{scat}-значное решение $\varphi(t)$, такое, что $\varphi(0)=\varphi_0$. Далее, существуют такие φ_+, $\varphi_- \in \Sigma_{\mathrm{scat}}$, что

$$\begin{aligned} &\|\varphi(t) - e^{-itA}\varphi_+\| \to 0, \qquad && t \to +\infty, \\ &\|\varphi(t) - e^{-itA}\varphi_-\| \to 0, \qquad && t \to -\infty. \end{aligned}$$

При любой $\varphi_0 \in \Sigma_{\mathrm{scat}}$ аналогичное утверждение справедливо для интегрального уравнения, соответствующего (260), если λ достаточно мало (в зависимости от $\|\varphi_0\|_{\mathrm{scat}}$).

Пример 1 (нелинейное уравнение Шредингера). Начнем с простого примера нелинейного уравнения Шредингера в одномерном пространстве:

$$iu_t = -u_{xx} + \lambda|u|^{p-1}u, \qquad u(x, 0) = f(x), \tag{261}$$

поскольку оно прекрасно иллюстрирует метод выбора описанных выше норм. Соответствующее свободное уравнение имеет вид

$$u_t - iu_{xx} = 0, \qquad u(x, 0) = f(x),$$

и $A = -d^2/dx^2$. Решение этого уравнения можно представить в явном виде

$$u(x, t) = (4\pi i t)^{-1/2} \int e^{i(x-y)^2/4t} f(y)\, dy,$$

и потому

$$\|u(x, t)\|_\infty \leqslant |t|^{-1/2} \|f\|_1.$$

Следовательно, можно сделать такой выбор:

$$\|u\|_a=\|u\|_\infty, \qquad \|u\|_b=\|u\|_1$$

Таким образом, выполнено условие (ii) с $d=1/2$. Отметим, что в качестве нужного гильбертова пространства $\mathscr{H}$ нельзя выбрать $L^2(\mathbb{R})$, поскольку неравенство $\|u\|_\infty\leqslant c\|u\|_2$ не выполняется. Однако, как видно из доказательства леммы Соболева (теорема IX.24),

$$\|u\|_\infty\leqslant c\|Bu\|_2, \tag{262}$$

где, как обычно, $B=\sqrt{-\Delta+m^2}$ Таким образом, мы возьмем

$$\|u\|=\|Bu\|_2,$$

так что будет выполнено условие (i). Остается проверить, для каких p выполняется (iii). Ниже мы заменим $|u|^{p-1}u$ на u^p, будем считать p целым и применять B так, как будто он равен d/dx. Техника лемм 3—5 § X.13 позволяет легко разобрать этот случай. Считая P подходящим полиномом, получаем

$$\begin{aligned}\|J(u_1)-J(u_2)\|&=|\lambda|\,\|B(u_1^p-u_2^p)\|_2=|\lambda|\,p\,\|(Bu_1)u_1^{p-1}-(Bu_2)u_2^{p-1}\|_2\leqslant\\ &\leqslant|\lambda|\,p\,\|(Bu_1)(u_1-u_2)P(u_1,u_2)\|_2+|\lambda|\,p\,\|(Bu_1-Bu_2)u_2^{p-1}\|_2\leqslant\\ &\leqslant C\|Bu_1\|_2\|u_1-u_2\|_\infty\|P(u_1,u_2)\|_\infty+C\|B(u_1-u_2)\|_2\|u_2^{p-1}\|_\infty\leqslant\\ &\leqslant C\|Bu_1\|_2\|B(u_1-u_2)\|_2(\|u_1\|_\infty+\|u_2\|_\infty)^{p-2}+\\ &\qquad\qquad+C\|B(u_1-u_2)\|_2\|u_2\|_\infty^{p-1}\leqslant\\ &\leqslant\beta(\|u_1\|_a+\|u_2\|_a)^{p-2}\|u_1-u_2\|\end{aligned}$$

для малых $\|u_1\|$ и $\|u_2\|$. Таким образом, первая часть условия (iii) выполняется с $q=p-2$. Аналогично,

$$\begin{aligned}\|J(u_1)-J(u_2)\|_b&=\|u_1^p-u_2^p\|_1=\|(u_1-u_2)Q(u_1,u_2)\|_1\leqslant\\ &\leqslant C\|B(u_1-u_2)\|_2(\|u_1\|_2+\|u_2\|_2)(\|u_1\|_\infty+\|u_2\|_\infty)^{p-2}\leqslant\\ &\leqslant\beta\|u_1-u_2\|(\|u_1\|_\infty+\|u_2\|_\infty)^{p-2}\end{aligned}$$

для малых $\|u_1\|$ и $\|u_2\|$, так что вторая часть (iii) тоже выполняется при $q=p-2$. Теперь, поскольку $d=1/2$ и нужно, чтобы $dq>1$, нужно потребовать, чтобы $q>2$. В итоге при $p>4$ теоремы XI.97—XI.99 гарантируют существование глобального решения уравнения (261) при малых начальных данных и приводят к теории рассеяния для этого уравнения.

Пример 2 (нелинейное уравнение Клейна—Гордона, $n=1$). Прежде чем обсуждать уравнение

$$u_{tt}-u_{xx}+m^2u=-\lambda u^p, \tag{263}$$

нам нужно оценить убывание решений линейного уравнения

$$u_{tt}-u_{xx}+m^2u=0, \quad u(x,0)=f(x), \quad u_t(x,0)=g(x), \tag{264}$$

в терминах подходящих норм, заданных на множестве начальных данных. Метода стационарной фазы для этого недостаточно, и нам придется использовать явные формулы решений линейного уравнения, содержащие специальные функции.

Лемма 2. Предположим, что f, $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Пусть $u(x, t)$ — решение уравнения (264) с начальными данными $\langle f, g\rangle$. Тогда

$$\|u(x, t)\|_\infty \leqslant C|t|^{-1/2}\{\|f\|_1 + \|f'\|_1 + \|f''\|_1 + \|g'\|_1 + \|g\|_1\}. \qquad (265)$$

Доказательство Пусть $u(t)$ есть $L^2(\mathbb{R})$-значная функция, ставящая в соответствие каждому t функцию $u(\cdot, t)$. Явно функция $u(t)$ определяется формулой

$$u(t) = \cos(Bt) f + \frac{\sin(Bt)}{B} g,$$

или

$$[u(t)]^\frown(k) = \cos\left(t\sqrt{k^2+m^2}\right)\hat{f}(k) + \frac{\sin\left(t\sqrt{k^2+m^2}\right)}{\sqrt{k^2+m^2}}\hat{g}(k).$$

Иначе говоря, $u(t)$ при каждом t можно записать в виде

$$u(t) = \frac{\partial R}{\partial t} * f + R * g,$$

где R — обратное преобразование Фурье

$$R(x, t) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\frac{\sin t\sqrt{k^2+m^2}}{\sqrt{k^2+m^2}}\,dk,$$

понимаемое в смысле обобщенных функций. Свертка $R * g$ имеет смысл, поскольку $R \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, а $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Существует много способов представлять себе функцию $R(x, t)$. Вот один из них. Прежде всего заметим, что $R(x, t)$ равна нулю, если $x^2 > t^2$. Это следует из теоремы Пэли — Винера для обобщенных функций с учетом аналитичности и характера роста $(k^2+m^2)^{-1/2}\times \sin t\sqrt{k^2+m^2}$ в комплексной k-плоскости. Далее, легко проверить, что $R(x, t)$ инвариантна относительно преобразований Лоренца двумерной плоскости. Таким образом, $R(x, t)$ есть функция t^2-x^2 для всех $t>0$. Имея это в виду, для всех $x^2 \leqslant t^2$ и $t > 0$ можно написать

$$H\left(\sqrt{t^2-x^2}\right) \equiv R(x, t) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\frac{\sin t\sqrt{k^2+m^2}}{\sqrt{k^2+m^2}}\,dk.$$

Дифференцируя H дважды по t и дважды по x и вычитая результаты, легко обнаружить, что

$$H''(y) + \frac{1}{y}H'(y) + m^2 H(y) = 0,$$

так что

$$H(y) = cJ_0(my) + dY_0(my),$$

где J_0 и Y_0 — функции Бесселя. Константа d должна равняться нулю, поскольку $R(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R})$, а Y_0 имеет особенность вида $1/y$ при $y=0$. Полагая $x=0$, находим, что $c=1/2$, значит, для $t>0$

$$R(x, t) = {}^1/_2 \chi_{\{x \mid x^2 \leqslant t^2\}}(x)\, J_0\left(m\sqrt{t^2 - x^2}\right).$$

В итоге получаем следующее представление:

$$(R * g)(x, t) = \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} J_0\left(m\sqrt{t^2 - y^2}\right) g(x-y)\,dy. \tag{266}$$

Для оценки убывания $R*g$ воспользуемся следующими соотношениями:

$$J_0(\mu) = \left(\frac{2}{\mu\pi}\right)^{1/2} \cos\left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) + O(\mu^{-3/2}),$$
$$J_1(\mu) = O(\mu^{-1/2}),$$

справедливыми при $\mu \to \infty$. Запишем (266) в виде суммы интегралов по $\{y \mid |y| \leqslant t/2\}$ и по $\{y \mid t/2 \leqslant |y| \leqslant t\}$. Первый из них легко оценить с помощью соотношения $|J_0(\mu)| \leqslant c\mu^{-1/2}$:

$$ct^{-1/2}\int_{-t/2}^{t/2} |g(x-y)|\,dy \leqslant ct^{-1/2}\|g\|_1. \tag{267}$$

Остаются два интеграла, один из которых представим в виде

$$\frac{1}{2}\int_{t/2}^{t} J_0\left(m\sqrt{t^2 - y^2}\right) g(x-y)\,dy =$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi m}\right)^{1/2} \int_{t/2}^{t} \frac{\cos\left(m\sqrt{t^2-y^2} - \pi/4\right)}{(t^2 - y^2)^{1/4}}\, g(x-y)\,dy +$$
$$+ \int_{t/2}^{t} O\left((t^2 - y^2)^{-3/4}\right) g(x-y)\,dy.$$

Второй член оценивается неравенством

$$\int_{t/2}^{t} O\left((t^2 - y^2)^{-3/4}\right) g(x-y)\,dy \leqslant$$
$$\leqslant ct^{-3/4}\|g\|_\infty \int_{t/2}^{t} (t-y)^{-3/4}\,dy \leqslant ct^{-1/2}\|g\|_\infty.$$

Для первого члена путем интегрирования по частям получаем

$$-g(x-y)\frac{(t^2-y^2)^{1/4}}{my\sqrt{2\pi m}}\sin\left(m\sqrt{t^2-y^2}-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{y=t/2}^{y=t}+$$

$$+\frac{1}{m\sqrt{2\pi m}}\int_{t/2}^{t}\sin\left(m\sqrt{t^2-y^2}-\frac{\pi}{4}\right)\frac{d}{dy}\left\{\frac{(t^2-y^2)^{1/4}}{y}g(x-y)\right\}dy.$$

Оба полученных члена легко оцениваются величиной $ct^{-1/2}(\|g\|_1+\|g'\|_1)$. Комбинируя эти факты с (267), находим, что

$$\|R*g\|_\infty\leqslant ct^{-1/2}(\|g\|_1+\|g'\|_1).$$

Для анализа $\left(\frac{\partial R}{\partial t}*f\right)$ воспользуемся соотношением

$$\frac{\partial R}{\partial t}=\frac{1}{2}[\delta(x+t)+\delta(x-t)]+\frac{m}{2}\frac{t}{\sqrt{t^2-x^2}}J_1(m\sqrt{t^2-x^2}),$$

которое дает равенство

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t}*f\right)(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+t)+f(x-t)]+$$
$$+\frac{m}{2}\int_{-t}^{t}\frac{t}{\sqrt{t^2-y^2}}J_1(m\sqrt{t^2-y^2})f(x-y)\,dy. \qquad (268)$$

Как и прежде, сначала оценим интеграл по $\{y\,|\,|y|\leqslant t/2\}$. Затем с помощью интегрирования по частям оставшегося выражения легко убедиться, что граничные члены при $y=\pm t$ сокращаются с первым членом в (268). Оценка остальных граничных членов и оставшегося интеграла с помощью второго интегрирования по частям таким же способом, как и выше, приводит к окончательному неравенству

$$\left\|\frac{\partial R}{\partial t}*f\right\|_\infty\leqslant ct^{-1/2}(\|f\|_1+\|f'\|_1+\|f''\|_1).$$

Еще одна производная f появилась из-за дополнительного интегрирования по частям. Итак, лемма доказана. ∎

Для достаточно хороших f и g лемма позволяет получить нужную оценку решения и приводит к определению двух «норм»:

$$\|\langle u,v\rangle\|_a=\|u\|_\infty,$$
$$\|\langle u,v\rangle\|_b=\|u\|_1+\|u'\|_1+\|u''\|_1+\|v\|_1+\|v'\|_1.$$

В качестве гильбертова пространства естественно взять

$$\mathcal{H}=\{\varphi=\langle u,v\rangle\,|\,\|\varphi\|^2=\|Bu\|_2^2+\|v\|_2^2<\infty\}.$$

В таком случае условие (i) выполнено в силу (262). В силу леммы неравенство

$$\|e^{-itA}\varphi\|_a\leqslant c|t|^{-1/2}\|\varphi\|_b$$

выполняется для достаточно гладких φ, а по линейности оно распространяется на все $\varphi \in \mathscr{H}$. В итоге мы получаем (ii). Остается найти p, для которых справедливо (iii). Поскольку $J(\varphi) = \langle 0, -\lambda u^p \rangle$, то

$$\|J(\varphi_1) - J(\varphi_2)\| \leqslant |\lambda| \, \|u_1^p - u_2^p\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant c|\lambda| \, \|u_1 - u_2\|_2 (\|u_1\|_\infty + \|u_2\|_\infty)^{p-1} \leqslant$$
$$\leqslant c|\lambda| (\|\varphi_1\|_a + \|\varphi_2\|_a)^{p-1} \|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$
$$\|J(\varphi_1) - J(\varphi_2)\|_b = |\lambda| \{ \|u_1^p - u_2^p\|_1 + \|(u_1^p - u_2^p)'\|_1 \} \leqslant$$
$$\leqslant c|\lambda| \{ \|u_1 - u_2\|_2 + \|u_1' - u_2'\|_2 \} (\|u_1\|_2 + \|u_2\|_2)(\|u_1\|_\infty + \|u_2\|_\infty)^{p-2} \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda| (\|\varphi_1\|_a + \|\varphi_2\|_a)^{p-2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

В итоге условие (iii) справедливо при $q = p - 2$. Поскольку $d = 1/2$, а нам нужно, чтобы $dq > 1$, необходимо выбрать $q > 2$, так что $p > 4$. Таким образом, с помощью теорем XI.97—XI.99 доказано существование глобального решения для малых начальных данных и существование для них оператора рассеяния при $p > 4$. Отметим, что этот результат не зависит от знака λ и от p (допустимы четные, нечетные и даже дробные значения p).

Пример 3 (нелинейное уравнение Клейна—Гордона, $n = 3$). Для изучения нелинейного уравнения Клейна—Гордона (245) с $F(u) = -\lambda |u|^{p-1} u$ в трехмерном пространстве прежде всего необходима лемма, аналогичная лемме 2.

Лемма 3. Пусть $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ и $u(x, t)$ — решение задачи Коши

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x).$$

Тогда существует универсальная постоянная c, такая, что

$$\|u(x, t)\|_\infty \leqslant c|t|^{-3/2} \|\langle f, g \rangle\|_b, \tag{269}$$

где норма $\|\langle f, g \rangle\|_b$ определена как сумма L_1-норм всех производных f порядка $\leqslant 3$ и всех производных g порядка $\leqslant 2$.

Доказательство этой леммы в принципе похоже на доказательство леммы 2, однако явный вид $R(x, t)$ чуть сложнее. Возникают дополнительные производные от начальных данных, поскольку сама функция $R(x, t)$ содержит J_1. Таким образом, необходимо интегрировать по частям дважды члены, содержащие g, и трижды члены с f. Мы оставляем детали этого доказательства читателю.

Итак, выберем $\|\varphi\|_b$, как сказано в лемме, и положим $\|\varphi\|_a = \|u\|_\infty$. Тогда условие (ii) выполняется при $d = 3/2$. Однако теперь в качестве гильбертова пространства взять пространство $\mathscr{H}$ нельзя, ибо при $n = 3$ неравенство $\|u\|_\infty \leqslant c\|Bu\|_2$ не имеет места. Однако *справедливо* неравенство $\|u\|_\infty \leqslant c\|B^2 u\|_2$, так что мы можем взять

$$\|\langle u, v\rangle\|^2 = \|B^2u\|_2^2 + \|Bv\|_2^2, \quad \mathcal{H}_1 = \{\langle u, v\rangle \mid \|\langle u, v\rangle\| < \infty\}.$$

Тогда свободная динамика унитарна на $\mathcal{H}_1$ и выполнено условие (i). Далее, вычисления, аналогичные проделанным в одномерном случае, показывают, что

$$\|J(\varphi_1) - J(\varphi_2)\| = |\lambda| \, \|B(u_1^p - u_2^p)\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda| (\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|)(\|\varphi_1\|_a + \|\varphi_2\|_a)^{p-2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Выражение нормы $\|J(\varphi_1) - J(\varphi_2)\|_b$ содержит много членов. Рассмотрим член с производной D наивысшего порядка (D_i — частная производная по произвольной координате):

$$\|D_i^2(u_1^p - u_2^p)\|_1 \leqslant \|(D_i^2(u_1 - u_2)) P(u_1, u_2)\|_1 +$$
$$+ 2\|(D_i(u_1 - u_2)) D_i P(u_1, u_2)\|_1 + \|(u_1 - u_2) D_i^2 P(u_1, u_2)\|_1 \leqslant$$
$$\leqslant C(\|Bu_1\|_2 + \|Bu_2\|_2)(\|u_1\|_\infty + \|u_2\|_\infty)^{p-2} \|B^2(u_1 - u_2)\|_2 +$$
$$+ C(\|Bu_1\|_2 + \|Bu_2\|_2)^2 (\|u_1\|_\infty + \|u_2\|_\infty)^{p-3} \|u_1 - u_2\|_\infty \leqslant$$
$$\leqslant \beta \{(\|\varphi_1\|_a + \|\varphi_2\|_a)^{p-3} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_a +$$
$$+ (\|\varphi_1\|_a + \|\varphi_2\|_a)^{p-2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|\}.$$

В итоге (iii) выполняется при $q = p - 2$, но по несколько иным причинам, чем в одномерном случае (не нужно предполагать, что равенство $q = p - 2$ справедливо во всех размерностях). Заметим, что в случае $q = 1$ постоянная β в (iii) мала, если мала сумма $\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$. Поскольку $d = 3/2$, нужно взять $q \geqslant 1$, и тогда $p \geqslant 3$. Для всех таких p мы будем иметь теорию рассеяния и существование глобального решения для уравнения

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = -\lambda |u|^{p-1} u, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \tag{270}$$

с малыми начальными данными независимо от четности p и знака λ.

Для обсуждения теории рассеяния в случае решений нелинейных уравнений, когда ни начальные данные, ни константа связи не малы, нужны результаты о существовании глобальных решений Таким образом, в отличие от малых начальных данных нелинейные члены в общем случае должны иметь правильный знак, так чтобы сохранялась и была ограничена снизу энергия поля. Используя этот закон сохранения, можно показать, что норма любого локального решения не может обращаться в бесконечность за конечное время, и тем самым доказать существование глобального решения (см. § X.13) Если глобальное решение существует, то методы, аналогичные использованным в случае малых начальных данных, позволяют построить волновые операторы. Обозначим через M_t группу *нелинейных* операторов

$$M_t: \varphi_0 \longmapsto \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ есть решение интегрального уравнения (249b):

$$\varphi(t) = e^{-itA}\varphi_0 + \int_0^t e^{-i(t-s)A} J(\varphi(s))\, ds.$$

Теорема XI.100 (существование волновых операторов). Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и J — нелинейное отображение $\mathcal{H}$ в себя. Предположим, что существуют «нормы» $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$, удовлетворяющие условиям (i) — (iii) при $q > 1$. Предположим, что для каждого η и T решения $M_t\varphi_0$ уравнения (249b) равномерно ограничены (по $\|\cdot\|$-норме) для всех $\|\varphi_0\| \leqslant \eta$ и всех $0 < |t| \leqslant T$. Тогда:

(a) для каждого $\varphi_- \in \Sigma_{\text{scat}}$ существует единственное глобальное решение $\varphi(\cdot)$ уравнения (249b), такое, что $\varphi(t) \in \Sigma_{\text{scat}}$ при любом t и

$$\|\varphi(t) - e^{-itA}\rho_-\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to -\infty;$$

(b) Ω^+: $\varphi_- \mapsto \varphi(0)$ — взаимно однозначное отображение из Σ_{scat} в Σ_{scat}, равномерно непрерывное на шарах в Σ_{scat};

(c) для $\varphi_+ \in \Sigma_{\text{scat}}$, $t \to +\infty$ и отображения Ω^-: $\varphi_+ \mapsto \varphi(0)$ справедливы утверждения, аналогичные (a) и (b).

Доказательство. Мы только наметим идею доказательства, поскольку детали очень похожи на случай малых начальных данных. Пусть задано $\varphi_- \in \Sigma_{\text{scat}}$ и $\|\varphi_-\|_{\text{scat}} \leqslant \eta$ (отметим, что η не предполагается малым). Пусть $X_{\eta,\varphi_-,T}$ обозначает множество $\mathcal{H}$-значных непрерывных функций $\psi(\cdot)$ на $(-\infty, T]$, таких, что

$$|||\psi(t) - e^{-itA}\varphi_-|||_{(-\infty,T]} \equiv \sup_{-\infty < t \leqslant T} \|\psi(t) - e^{-itA}\varphi_-\| + \\ + \sup_{-\infty < t \leqslant T} (1+|t|)^d \|\psi(t) - e^{-itA}\varphi_-\|_a \leqslant \eta.$$

Для каждого T множество $X_{\eta,\varphi_-,T}$ есть полное метрическое пространство. Введем $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{M}$, как и раньше. Тогда

$$(\mathcal{M}\psi)(t) = e^{-itA}\varphi_- + (\mathcal{Y}\psi)(t).$$

Оценки (256) и (257) теоремы XI.97 показывают, что $|||(\mathcal{Y}\psi)(t)|||_{(-\infty,T]}$ мала и что $\mathcal{M}$ — сжатие, если T достаточно близко к $-\infty$. (Поскольку начальные данные не малы, нужное условие малости вытекает из пункта (b) леммы 1, из-за чего мы и требуем, чтобы $q > 1$). Таким образом, $\mathcal{M}$ имеет неподвижную точку в X_{η,φ_-,T_0} при некотором определенном T_0. Следовательно, как и в теореме XI.97, можно доказать, что $\varphi(t) \in \Sigma_{\text{scat}}$ для каждого $t \in (-\infty, T_0]$ и что предел в (a) существует.

В силу оценок (256) и (257), для всех φ_- с $\|\varphi_-\| \leqslant \eta$ можно пользоваться одним и тем же T_0. Поэтому можно определить отображение

$$\Omega^+_{T_0}\colon \varphi_- \mapsto \varphi(T_0)$$

на $\mathscr{B}_\eta = \{\psi \in \Sigma_{scat} \mid \|\psi\|_{scat} \leqslant \eta\}$ и, как в теоремах XI.97 и XI.98, доказать его взаимную однозначность и равномерную непрерывность как отображения из $\mathscr{B}_\eta$ в Σ_{scat}. До сих пор существование глобального решения не использовалось.

Легко проверить, что для $t \leqslant T_0$ наше решение $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(t) = e^{-i(t-T_0)A}\varphi(T_0) + \int_{T_0}^{t} e^{-i(t-s)A} J(\varphi(s))\,ds.$$

Поскольку J удовлетворяет условию Липшица, функция $\varphi(t) = M_{t-T_0}\varphi(T_0)$ есть локальное решение этого уравнения в окрестности T_0, но, в силу предположений об ограниченности M_t, это глобальное по t решение. В силу локальной единственности, определенное таким образом $\varphi(t)$ совпадает с ранее построенным $\varphi(t)$ при $t \leqslant T_0$. Легко установить, что $\varphi(t)$ удовлетворяет (249b) и что, в силу (254) и (253), решение $\varphi(t)$ лежит в Σ_{scat} при всех t. В самом деле, из равномерной ограниченности M_t вместе с (253) и (254) следует, что M_t для каждого t и каждого η_0 есть равномерно непрерывное взаимно однозначное отображение $\mathscr{B}_{\eta_0}$ в Σ_{scat} (задача 128). Таким образом, для каждого η можно определить

$$\Omega^+ = M_{-T_0}\Omega^+_T, \quad \text{т. е. } \Omega^+\colon \varphi_- \mapsto \varphi(0).$$

Заметим, что T_0 зависит от η. В силу свойств M_{-T_0} и $\Omega^+_{T_0(\eta)}$, получаем, что Ω^+ — взаимно однозначное равномерно непрерывное отображение $\mathscr{B}_\eta$ в Σ_{scat}. Поскольку η произвольно, Ω^+ переводит Σ_{scat} в Σ_{scat} и равномерно непрерывно на шарах. Довольно просто проверить, что Ω^+ взаимно однозначно на всем Σ_{scat}. Это доказывает (a) и (b); доказательство (c) аналогично. ∎

Примеры 1 и 2 (заново). Для доказательства существования волновых операторов нужно установить существование глобального решения и равномерную непрерывность. Для нелинейного уравнения Клейна — Гордона это сделано при $\lambda > 0$ и $p \geqslant 1$ в задаче 75 к гл. X. Аналогичные методы (задача 130) применимы и в случае нелинейных уравнений Шредингера, если воспользоваться гильбертовым пространством из примера 1 и сохраняющимися величинами

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^2\,dx, \qquad \int_{\mathbb{R}} \left\{\frac{1}{2}|u_x(x,t)|^2 + \frac{1}{p+1}|u(x,t)|^{p+1}\right\}dx.$$

В итоге, в силу теоремы XI.100 и уже проведенного анализа примеров 1 и 2, будет доказано существование волновых операторов при $p>4$ и $\lambda>0$.

Пример 3 (заново). В случае $n=3$ мы установили, что условия (i)—(iii) выполняются при $d=3/2$ и $q=p-2$. Поскольку в теореме XI.100 q должно быть больше 1, нужно брать $p>3$. При $p\geqslant 5$ вопрос о существовании глобальных сильных решений уравнения (270) открыт; при $p=3$ методами § X.13 можно доказать существование глобальных решений и равномерную непрерывность на шарах. В пограничном случае $p=3$, когда $q=1$ и теорема XI.100 может не выполняться, требуемые результаты можно получить при помощи специальной оценки

$$\|e^{-i(t-s)A}J(\varphi(s))\|_a=\|B^{-1}\sin[(t-s)B]u^3(s)\|_\infty\leqslant$$
$$\leqslant C\|Bu^3(s)\|_2\leqslant C\|\varphi(s)\|\,\|\varphi(s)\|_a^2.$$

Она позволяет провести доказательство теоремы XI.100 и в случае $p=3$. В задаче 129 от читателя требуется провести такое доказательство.

Все это служит иллюстрацией очень важного факта. Поскольку условия теорем XI.97—XI.101 и способы доказательства носят весьма общий характер, в конкретных приложениях часто можно получить более сильные результаты, используя специфические свойства конкретных операторов.

Теперь, как и в квантовомеханическом случае, мы подошли к действительно трудной задаче: к вопросу об асимптотической полноте. Для того чтобы понять, в чем здесь дело, предположим, что φ_0 лежит в области значений Ω^+, построенного в теореме XI.100. Нам надо доказать существование такого состояния φ_+, что решение $\varphi(t)$ уравнения

$$\varphi(t)=e^{-itA}\varphi_0+\int_0^t e^{-i(t-s)A}J(\varphi(s))\,ds$$

удовлетворяет условию

$$\|\varphi(t)-e^{-itA}\varphi_+\|\to 0 \qquad \text{при} \qquad t\to+\infty.$$

Попробуем методом Кука построить φ_+, показав, что $\{e^{itA}\varphi(t)\}$ есть направленность Коши при $t\to\infty$. С помощью (249b) получаем

$$\|e^{it_1A}\varphi(t_1)-e^{it_2A}\varphi(t_2)\|\leqslant\int_{t_2}^{t_1}\|J(\varphi(s))\|\,ds.$$

Таким образом, все, что нужно,—это оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|J(\varphi(s))\|\,ds<\infty. \tag{270a}$$

В типичных случаях для этого надо получить априорные оценки, которые гарантируют достаточно быстрое убывание по t подходящих норм всех решений уравнений (249) с гладкими начальными данными. Более того, для доказательства непрерывности оператора рассеяния скорость такого убывания нужно уметь оценивать в терминах скорости убывания соответствующих решений свободного уравнения. Как мы объяснили в начале этого раздела, нужное убывание может не иметь места для общего нелинейного уравнения из-за наличия связанных состояний. Но даже без связанных состояний доказательство априорных оценок — очень трудное дело. На самом деле пока изучены лишь очень специальные случаи. Мы проиллюстрируем используемые при этом методы, доказав следующую теорему.

Теорема XI.101. Пусть f и g — вещественнозначные функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, и пусть u — решение задачи

$$\begin{aligned} &u_{tt}-\Delta u=-u^3, && x\in\mathbb{R}^3, \quad t\in\mathbb{R},\\ &u(x,\ 0)=f(x), && u_t(x,\ 0)=g(x). \end{aligned} \tag{270b}$$

Пусть $\varphi(t)=\langle u(x,\ t),\ u_t(x,\ t)\rangle$ и $\|\varphi\|$ обозначает энергетическую норму без взаимодействия: $\|\varphi\|^2=\|\nabla u\|_2^2+\|u_t\|_2^2$. Пусть e^{-itA}, где $A=i\begin{bmatrix}0 & I\\ \Delta & 0\end{bmatrix}$, — группа, соответствующая решению свободного волнового уравнения $v_{tt}-\Delta v=0$. Тогда существуют такие $\psi_\pm$, что $\|\psi_\pm\|<\infty$ и $\|\varphi(t)-e^{-itA}\psi_\pm\|\to 0$ при $t\to\pm\infty$.

Существование гладких решений (270b) обсуждается в задаче 76 к гл. X. С помощью методов § X.13 можно доказать, что при начальных данных класса $C_0^\infty\times C_0^\infty$ решение $u(x,\ t)$ лежит в $C_0^\infty\times C_0^\infty$ при всех t. Результат, аналогичный теореме XI.101, справедлив для комплекснозначных решений, если $-u^3$ заменить на $-u|u|^2$. Теорема XI.101 не вполне удовлетворительна. Хотя она и утверждает асимптотическую свободу решений (270b) с гладкими начальными данными, она ничего не говорит о том, какие $\psi_\pm$ реализуются. Таким образом, у нас нет явного описания области определения оператора рассеяния. Тем не менее доказательство теоремы XI.101 иллюстрирует трудности, которые надо преодолевать при доказательстве асимптотической полноты.

Наше доказательство теоремы XI.101 будет основано на существовании специальной сохраняющейся величины — **конформного заряда**

$$Q_C=\int k_0(\mathbf{x},\ t)\,d^3x, \tag{270c}$$

где

$$k_0(\mathbf{x},\ t)=(t^2+|\mathbf{x}|^2)\left[{}^1/_2u_t^2+{}^1/_2(\nabla u)^2+{}^1/_4u^4\right]+2tu_t\mathbf{x}\cdot\nabla u+2tu_tu-u^2. \tag{270d}$$

Используя тот факт, что u удовлетворяет (270b) и имеет компактный носитель при каждом t, легко проверить, что Q_C не зависит от t. Ответ на более тонкий вопрос: как находить такие сохраняющиеся величины — дан в дополнении, где также объясняется, какие члены нужно интегрировать по частям, чтобы установить независимость от времени.

Доказательство теоремы XI.101. Поскольку $J(\langle u, v\rangle) = \langle 0, -u^3\rangle$, имеем $\|J(\varphi(s))\| = \|u^3\|_2$. Учитывая сохранение энергии

$$E(t) = \int {}^1/_2 [(\nabla u)^2 + u_t^2 + {}^1/_2 u^4]\, d^3x$$

и оценку Соболева $\|u\|_6 \leqslant C \|\sqrt{-\Delta + 1}\, u\|_2$, легко убедиться (задача 76 к гл. X), что $\|u(s)^3\|_2$ ограничена при изменении s внутри любого компактного множества. Таким образом, для проверки (270a) нужно показать, что $\|u(s)^3\|_2$ достаточно быстро убывает на ∞. Записав $\|u(s)^3\|_2 \leqslant \|u(s)\|_\infty \|u(s)^2\|_2$, мы сначала используем сохранение Q_C для доказательства неравенства $\|u(s)^2\|_2 \leqslant C|s|^{-1}$, а затем применим оценку Соболева и итерационную процедуру для того, чтобы установить неравенство $\|u(s)\|_\infty \leqslant C|s|^{-1/6}$.

Начнем с равенства $r^{-1}\nabla(ru) = \nabla u + r^{-2}\mathbf{r}u$, в силу которого

$$(r^2 + t^2)(\nabla u)^2 = (r^2 + t^2)[r^{-1}\nabla(ru)]^2 + r^{-2}(r^2 + t^2)u^2 + A,$$

где

$$A = -2u\frac{\partial(ru)}{\partial r} - 2r^{-2}t^2u\frac{\partial(ru)}{\partial r}.$$

После некоторых преобразований получим, что

$$r^2A = r^2u^2 - t^2u^2 - \frac{\partial}{\partial r}(r^3u^2 + t^2ru^2),$$

и потому

$$\int_{\mathbf{R}^3} A\, d^3x = \int_{\mathbf{R}^3} u^2r^{-2}(r^2 - t^2)\, d^3x,$$

ибо $\int r^{-2}(\partial f/\partial r)\, d^3x = -4\pi f(0)$, если носитель f компактен, а сама функция f гладкая вне нуля и класса C^1 вплоть до нуля. В итоге

$$\int (r^2 + t^2)(\nabla u)^2\, d^3x = \int [(r^2 + t^2)(r^{-1}\nabla(ru))^2 + 2u^2]\, d^3x,$$

так что

$$Q_C = \int (t^2 + |\mathbf{x}|^2)({}^1/_4 u^4)\, d^3x + \int B\, d^3x,$$

где

$$B = {}^1/_2 (r^2 + t^2)[(r^{-1}\nabla(ru))^2 + u_t^2] + 2tu_t\mathbf{x}\cdot(r^{-1}\nabla(ru)).$$

Применяя неравенство $abcd \leqslant [{}^1/_2(a^2+c^2)][{}^1/_2(b^2+d^2)]$, мы видим, что B положительно. Поэтому $\int u^4 d^3x \leqslant 4Q_0 t^2$, откуда

$$\|u(t)^2\|_2 \leqslant C|t|^{-1} \tag{270e}$$

Пусть $\varphi_0 = \langle f, g\rangle$. Первая компонента $e^{-itA}\langle f, g\rangle$ удовлетворяет свободному уравнению, и в силу (216а) ее можно заменить величиной

$$[e^{-itA}\langle f, g\rangle]_1 = (4\pi t)^{-1}\int g(x+y)\, dS_{|t|} + \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{4\pi t}\int f(x+y)\, dS_{|t|}\right],$$

где $dS_{|t|}$ — обычная мера на сфере радиуса $|t|$ (с центром в нуле), нормированная условием $\int dS_{|t|} = 4\pi t^2$. Из этого явного представления немедленно вытекает, что для $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$\|[e^{-itA}\varphi_0]_1\|_\infty \leqslant C(1+|t|)^{-1}. \tag{270f}$$

Более того,

$$\|[e^{-itA}\langle 0, g\rangle]_1\|_\infty \leqslant C|t|^{-1/2}\|\nabla g\|_{6/5}. \tag{270g}$$

Для доказательства этого неравенства положим $|y|=1$, $t>0$ и учтем, что

$$|g(y)| \leqslant \int_1^\infty |(\nabla g)(ry)|\, dr,$$

так что, в силу неравенства Гёльдера,

$$\left|\int g(y)\, dS_1\right| \leqslant \int_{S_1}\int_1^\infty (|\nabla g|\, r^{5/3})\, r^{-5/3}\, dr\, dS_1 \leqslant C\left\{\int_{S_1}\int_1^\infty |\nabla g|^{6/5} r^2\, dr\, dS_1\right\}^{5/6},$$

где $C = \left(4\pi\int_1^\infty r^{-10} dr\right)^{1/6} < \infty$. Эта оценка и масштабное преобразование (для $t>0$) дают

$$\left|\frac{1}{4\pi t}\int_{S_t} g(x+y)\, dS_t\right| \leqslant Ct^{-1/2}\left\{\int_{S_1}\int_t^\infty |\nabla g|^{6/5} r^2\, dr\, dS_1\right\}^{5/6},$$

откуда следует (270g).

Теперь предположим, что u есть решение (270b). Тогда (270f) и (270g) дают (для $t>0$):

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \leqslant \|[e^{-itA}\varphi_0]_1\|_\infty + \int_0^t \|[e^{-i(t-s)A}\langle 0, -u(s)^3\rangle]_1\|_\infty\, ds \leqslant$$

$$\leqslant C(1+t)^{-1} + C\int_0^t (t-s)^{-1/2}\|\nabla(u(s)^3)\|_{6/5}\, ds.$$

Используя (270e) и априорную ограниченность $\|\nabla u\|_2$, вытекающую из сохранения энергии, получаем

$$\|\nabla u^3\|_{6/5} \leqslant 3\|(\nabla u)u^2\|_{6/5} \leqslant 3\|\nabla u\|_2\|u^2\|_3 \leqslant \leqslant C\|u\|_4^{4/3}\|u\|_\infty^{2/3} \leqslant C(1+s)^{-2/3}\|u\|_\infty^{2/3}.$$

Таким образом, если положить $M(t) = \sup\limits_{0<s<t}\|u(\cdot, s)\|_\infty$, то

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \leqslant C(1+t)^{-1} + DM(t)^{2/3}t^{-1/6},$$

где $D = C\int\limits_0^1 (1-\sigma)^{-1/2}\sigma^{-2/3}\,d\sigma < \infty$. Отсюда мы прежде всего заключаем, что $\sup\limits_{0<t<\infty} M(t) < \infty$, а затем, что

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \leqslant C|t|^{-1/6} \tag{270h}$$

для $t > 0$. Доказательство для $t < 0$ аналогично. Неравенства (270h) и (270e) влекут за собой неравенство (270a), которое, как уже отмечалось, доказывает утверждение теоремы.

Дополнение к § XI.13. Сохраняющиеся токи

Один из способов убедиться в сохранении Q_C, заданного формулой (270c), состоит в том, чтобы ввести величину

$$\mathbf{k} = -(\nabla u)\{(|\mathbf{x}|^2 + t^2)u_t + 2t\mathbf{x}\cdot\nabla u + 2tu\} - -2t\mathbf{x}\left(\tfrac{1}{2}u_t^2 - \tfrac{1}{2}(\nabla u)^2 - \tfrac{1}{4}u^4\right) \tag{270i}$$

и, воспользовавшись дифференциальным уравнением (270b), получить равенство

$$\frac{\partial k_0}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{k} = 0.$$

Тогда

$$\frac{dQ_C}{dt} = \int \frac{\partial k_0}{\partial t}\,d^3x = -\int \nabla\cdot\mathbf{k}\,d^3x = 0,$$

если учесть, что u, а следовательно, и $\mathbf{k}$ принадлежат классу C^∞ и имеют компактный носитель по x для любого t (это вытекает из принадлежности начальных данных классу $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$).

Темой настоящего дополнения служит круг идей, в целом называемых **теоремой Нётер**, объясняющий способы отыскания величин, подобных k_0 и $\mathbf{k}$. Лучше всего изложить их в рамках лагранжева формализма, который мы прежде всего и опишем. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, а u — вещественнозначная функция $\mathbf{x}$ (по поводу распространения теории на многокомпонентные u см. задачу 152). Пусть $\mathscr{L}$ — функция $n+2$ вещественных переменных: $\mathscr{L}(a, \mathbf{b}, c)$, где $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. По заданной на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ вещественнозначной функции $u(\mathbf{x}, t)$ мы строим функцию $F_u(\mathbf{x}, t) = \mathscr{L}(u_t, \nabla u, u)$, зависящую от x и t. Дальше мы будем использовать общепринятые, хотя и не совсем корректные обозначения. Во-первых, мы не будем обозначать переменные a, $\mathbf{b}$, c, а будем писать u_t, ∇u, u, так что $\partial\mathscr{L}/\partial u_t$ будет обозначать производную $\mathscr{L}$ на $\mathbb{R}^{n+2}$ по первой переменной. Во-вторых, при неявно заданной u мы будем писать $\mathscr{L}(\mathrm{x}, t)$ или $\mathscr{L}$, имея в виду введенную выше функцию $F_u(\mathrm{x}, t)$ Таким образом, символ типа $(\partial/\partial t)\,(\partial\mathscr{L}/\partial u_t)$ указывает, что мы вычисляем функцию $\partial\mathscr{L}/\partial a$ при $a=u_t$ и т. д., а затем вычисляем частную производную по t полученной функции от x и t. Символ $\partial\mathscr{L}/\partial(\nabla u)$ обозначает n мерный вектор $\langle\partial\mathscr{L}/\partial b_1, \ldots, \partial\mathscr{L}/\partial b_n\rangle$, вычисленный при $a=u_t$, $\mathbf{b}=\nabla u$, $c=u$ Несмотря на то что такие обозначения несколько двусмысленны, они вполне стандартны и весьма удобны, если к ним привыкнуть.

Мы хотим выбрать $\mathscr{L}$ таким, чтобы рассматриваемое уравнение имело вид **уравнения Эйлера — Лагранжа**

$$(\mathscr{D})\,(u)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_t}\right)+\nabla\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla u)}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u}=0. \tag{270j}$$

Уравнение (270b) имеет как раз такой вид, если выбрать

$$\mathscr{L}(u_t, \nabla u, u)={}^1/_2u_t^2-{}^1/_2(\nabla u)^2-{}^1/_4u^4. \tag{270k}$$

Причина, по которой уравнение (270j) столь полезно, связана с **принципом наименьшего действия** или, точнее, с **принципом стационарного действия**. Пусть заданы открытая ограниченная область Ω в $\mathbb{R}^{n+1}$ с гладкой границей и C^∞-функция u в окрестности Ω. Определим **действие** соотношением

$$A_\Omega(u)=\int_\Omega \mathscr{L}(u_t, \nabla u, u)\,d^nx\,dt.$$

Если $v\in C_0^\infty(\Omega)$, т. е. v класса C^∞ и обращается в нуль около границы Ω, то

$$\frac{d}{d\lambda}A_\Omega(u+\lambda v)\,|_{\lambda=0}=-\int_\Omega v\,(\mathscr{D})\,(u)\,d^3x\,dt, \tag{270l}$$

т. е. u есть решение (270j) тогда и только тогда, когда для любой Ω действие A_Ω стационарно при малых изменениях u *строго внутри* Ω. Это позволяет связать инвариантность уравнения (270j) относительно каких-то преобразований с инвариантностью $\mathscr{L}$. Рассмотрим гладкие преобразования координат

$$s=s(\mathrm{x}, t),\qquad \mathrm{y}=\mathrm{y}(\mathrm{x}, t)$$

и гладкую функцию V из $\mathbb{R}^{n+2}$ в $\mathbb{R}$. Пусть

$$\bar{u}(\mathrm{x}, t)=V(u(\mathrm{y}(\mathrm{x}, t), s(\mathrm{x}, t)), \mathrm{y}(\mathrm{x}, t), s(\mathrm{x}, t)).$$

Когда $\tilde{u}$ есть решение (270j), если u — решение этого уравнения? *Достаточное* условие таково: $\delta\mathscr{L} \doteq 0$, где

$$\delta\mathscr{L} \equiv [\mathscr{L}(\tilde{u})](x, t) - J[\mathscr{L}(u)](y(x, t), s(x, t)), \qquad (270m)$$

а J — якобиан преобразования T: $\langle x, t\rangle \mapsto \langle y, s\rangle$. Первый член в правой части (270m) означает, что $\mathscr{L}$ вычисляется на функции $\tilde{u}$ вместо u. Второй член показывает, что сначала вычисляется $\mathscr{L}(u)$, а затем делается замена переменных. Если $\delta\mathscr{L} = 0$, то $A_\Omega(\tilde{u}) = A_{T[\Omega]}(u)$, и действие стационарно на u тогда и только тогда, когда оно стационарно на $\tilde{u}$. Таким образом, если $\delta\mathscr{L} = 0$, то $\tilde{u}$ есть решение (270j), когда таково u. Как мы увидим, условие $\delta\mathscr{L} = 0$ *не* необходимо для инвариантности (270j) относительно замены $u \mapsto \tilde{u}$ (см. примеры 3 и 4 ниже).

Теорема Нётер выражает тот факт, что по заданному однопараметрическому семейству преобразований, оставляющих инвариантным A, всегда можно найти сохраняющуюся величину для соответствующего уравнения Эйлера — Лагранжа. Суть приведенных выше выкладок в том, что условие $\delta\mathscr{L} = 0$ достаточно для инвариантности A. Ниже мы будем предполагать, что $\langle x, t\rangle$ пробегает все пространство $\mathbb{R}^{n+1}$, а все преобразования гладкие. На самом деле в приложениях очень часто возникает желание использовать сингулярные преобразования, которые не определены на всем $\mathbb{R}^{n+1}$; множество областей Ω тогда ограничивается требованием отсутствия в них особых точек преобразований. Хотя такие тонкости вызывают некоторые теоретические трудности, на практике они не важны. Дело в том, что «теорема Нётер» дает способ последовательных действий, в результате которых мы получаем выражение, претендующее на роль сохраняющейся величины для данного дифференциального уравнения. Сохранение этой величины всегда можно проверить прямым вычислением; важность теоремы Нётер в том, что она дает последовательный метод нахождения кандидатов на эту роль.

Итак, пусть

$$s_\varepsilon = s(x, t, \varepsilon), \qquad y_\varepsilon = y(x, t, \varepsilon)$$

— гладкое семейство гладких преобразований координат, и пусть V_ε — гладкое семейство гладких отображений $\mathbb{R}^{n+2}$ в $\mathbb{R}$. Введем

$$\tilde{u}_\varepsilon(x, t) = V_\varepsilon(u(y_\varepsilon, s_\varepsilon), y_\varepsilon, s_\varepsilon).$$

Предположим далее, что при $\varepsilon = 0$, $s_0 = t$, $y_0 = x$ и $V_0(u(y_0, s_0), y_0, s_0) = u$, так что наша замена как зависимых, так и независимых переменных при $\varepsilon = 0$ обращается в тождественную операцию.

Теперь введем

$$X_j(\mathrm{x},\ t)=\left.\frac{\partial(\mathrm{y}_\varepsilon)_j}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},\qquad X_0(\mathrm{x},\ t)=\left.\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},$$

$$\Psi(u,\ \mathrm{x},\ t)=\left.\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},\qquad S(u)=\left.\frac{\partial(\delta_\varepsilon\mathscr{L})}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},$$

$$j_0=(u_tX_0+\nabla u\cdot\mathbf{X}+\Psi)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_t}-\mathscr{L}X_0, \tag{270n}$$

$$\mathrm{j}=(u_tX_0+\nabla u\cdot\mathbf{X}+\Psi)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla u)}-\mathscr{L}\mathbf{X}. \tag{270o}$$

Полагая $\partial_0\equiv\partial/\partial t$, получаем

$$\partial_0 j_0+\nabla\cdot\mathrm{j}=S(u). \tag{270p}$$

Таким образом, в частности, если $\delta_\varepsilon\mathscr{L}\equiv0$ для всех ε и $\langle j_0,\ \mathrm{j}\rangle$ убывают достаточно быстро на ∞, то $\int\limits_{\mathbb{R}^n} j_0(\mathrm{x},\ t)\,d^nx$ — постоянная во времени величина. Для доказательства (270p) сначала заметим, что

$$F\equiv\left.\frac{\partial\tilde u_\varepsilon}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=u_tX_0+\nabla u\cdot\mathbf{X}+\Psi,$$

так что при $\varepsilon=0$ можно написать

$$\partial_0 j_0+\nabla\cdot\mathrm{j}=\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_t}\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla u)}\cdot\nabla F+\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_t}\right)+\nabla\cdot\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla u)}\right)\right]F\right\}-$$
$$-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}X_0-(\nabla\mathscr{L})\cdot\mathbf{X}-\mathscr{L}\left(\frac{\partial X_0}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{X}\right). \tag{270q}$$

С помощью уравнения Эйлера — Лагранжа (270j) легко отождествить величину в фигурных скобках с $\partial\mathscr{L}(\tilde u_\varepsilon)/\partial\varepsilon\,|_{\varepsilon=0}$. Более того,

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}X_0+\nabla\mathscr{L}\cdot\mathbf{X}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}[\mathscr{L}(\mathrm{y},\ s)]\Big|_{\varepsilon=0}$$

и

$$\left.\frac{\partial J}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\frac{\partial X_0}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{X},$$

так что правую часть (270q) можно отождествить с $S(u)$. Это и доказывает (270p).

Пара $j=\langle j_0,\ \mathrm{j}\rangle$ называется **током**, отвечающим однопараметрическому семейству; если $\partial_0 j_0+\nabla\cdot\mathrm{j}=0$, то говорят, что **ток сохраняется**. Величина $S(u)$ называется **источником тока**.

Пример 1 (сохранение энергии и тензор энергии-импульса). Рассмотрим уравнение $u_{tt}=\Delta u-F(u)$. Тогда лагранжиан имеет вид $^1/_2u_t^2-{}^1/_2(\nabla u)^2-G(u)$, где $G(y)=\int\limits_0^y F(x)\,dx$. Ясно, что семейство сдвигов по времени $\langle \mathbf{x}, t\rangle \mapsto \langle \mathbf{x}, t+\varepsilon\rangle$, $V_\varepsilon(u)=u$, оставляет уравнение движения инвариантным, и легко понять, что $\delta\mathscr{L}=0$ для всех ε. Более того, $\mathbf{X}=0$, $\Psi=0$, $X_0=1$. Результирующий ток j_0, j_i, обычно обозначаемый через t_{00}, t_{0i}, имеет вид

$$t_{00}={}^1/_2 u_t^2+{}^1/_2(\nabla u)^2+G(u), \qquad t_{0i}=-u_t(\nabla_i u).$$

Из (270j) вытекает, что $\partial_0 t_{00}+\sum_{i=1}^{n}\partial_i t_{0i}=0$, и мы узнаем в равенстве $(d/dt)\int t_{00}\,d^nx=0$ закон сохранения энергии (конечно, его можно получить из дифференциального уравнения интегрированием по частям). Причина, по которой в обозначение тока входят два индекса, в том, что можно еще учесть инвариантность относительно сдвигов в пространстве $\langle \mathbf{x}, t\rangle \mapsto \langle \mathbf{x}+\varepsilon\delta_i, t\rangle$, где $\delta_i=\langle 0, \ldots, 1, \ldots, 0\rangle$ с 1 на i-м месте. Результирующий ток j_0, j_k обычно обозначают через t_{i0}, t_{ik}. Легко обнаружить, что

$$t_{0i}=-t_{i0} \quad \text{и} \quad t_{ij}=t_{ji}, \qquad 1\leqslant i,\ j\leqslant n. \tag{270r}$$

В частности, сохраняется импульс $\int u_t(\nabla_i u)\,d^nx$. Величину $t_{\mu\nu}$ часто называют **тензором энергии-импульса**, хотя в последовательных релятивистских обозначениях то, что мы обозначали $t_{\mu\nu}$, обычно обозначают через $T^\mu{}_\nu$.

Пример 2 (ток для масштабных преобразований (270b)). Благодаря специальному выбору степени нелинейного члена в (270b) легко убедиться, что множество решений (270b) переходит в себя под действием преобразования $\langle \mathbf{x}, t\rangle \mapsto \langle \lambda\mathbf{x}, \lambda t\rangle$; $u\mapsto\lambda u$. Для таких **масштабных преобразований** $\delta\mathscr{L}=0$. Если взять $\lambda=e^\varepsilon$, то $X_0=t$, $X_i=x_i$, $\Psi=u$ В результате сохраняющейся величиной будет

$$\int\left[t\left({}^1/_2 u_t^2+{}^1/_2(\nabla u)^2+{}^1/_4 u^4\right)+u_t\mathbf{x}\cdot\nabla u+u_t u\right]d^3x. \tag{270s}$$

Мы выписали общее соотношение (270p), включающее источник $S(u)$, по двум причинам. Во-первых, может оказаться полезной **нарушенная симметрия**, когда $S(u)\neq 0$; например, если $S(u)\leqslant 0$ при $t\geqslant 0$, то из (270p) следует, что $\int j_0(\mathbf{x}, t)\,d^3x\leqslant\leqslant\int j_0(\mathbf{x}, 0)\,d^3x$ для всех $t\geqslant 0$, а это может быть полезным (см задачу 153). Во-вторых, если $S(u)$ имеет вид $\partial_0 b_0+\nabla\cdot\mathbf{b}$, то $\partial_0 k_0+\nabla\cdot\mathbf{k}=0$ для $\mathbf{k}=\mathbf{j}-\mathbf{b}$, так что сохраняется k_0. Сначала мы рассмотрим случай нарушенной симметрии, а затем вернемся к классу случаев, когда $S(u)$ автоматически имеет вид $\partial_0 b_0+\nabla\cdot\mathbf{b}$.

Пример 3 (нарушенная масштабная инвариантность для уравнения $u_{tt}=\Delta u-u|u|^{p-1}$). Если $\mathscr{L}={}^1/_2 u_t^2-{}^1/_2(\nabla u)^2-(p+1)^{-1}|u|^{p+1}$

в трехмерном пространстве, то при масштабных преобразованиях $\langle \mathbf{x}, t\rangle \mapsto \langle \lambda\mathbf{x}, \lambda t\rangle$, $u \mapsto \lambda u$ величина $\delta\mathscr{L}$ не равна нулю, когда $p \neq 3$. Часть $u_{tt}-\Delta u$ лагранжиана $\mathscr{L}$ инвариантна, но

$$\delta\mathscr{L} = -(p+1)^{-1}(\lambda^{p+1}-\lambda^4)\,|u(\lambda\mathbf{x}, \lambda t)|^{p+1}.$$

Взяв $\lambda = e^{\varepsilon}$ и вычислив $\partial(\delta_\varepsilon\mathscr{L})/\partial\varepsilon$, находим, что

$$S(u) = (p+1)^{-1}(3-p)\,|u|^{p+1},$$

поэтому $S(u) \leqslant 0$ при $p \geqslant 3$. Поскольку заряд (270s), отвечающий масштабным преобразованиям, не обладает очевидными свойствами положительности, это соотношение имеет ограниченную ценность; однако конформную инвариантность, которую мы применяли при доказательстве теоремы XI.101, можно заменить нарушенной конформной инвариантностью и получить аналогичный результат для

$$u_{tt} = \Delta u - u\,|u|^{p-1} \tag{270t}$$

при $3 < p < 5$ (задача 153). Действительно, это уравнение обладает определенной масштабной инвариантностью; ясно, что при $\langle \mathbf{x}, t\rangle \mapsto \langle \lambda\mathbf{x}, \lambda t\rangle$, $u \mapsto \lambda^{\alpha} u$ с $\alpha = 2(p-1)^{-1}$ решения (270r) переходят в другие решения. В этом случае неверно, что $\delta\mathscr{L} = 0$; на самом деле $\mathscr{L}(\tilde{u}) = \lambda^{2+2\alpha}\mathscr{L}(u)(y, s)$, тогда как $J\mathscr{L}(u)(y, s) = \lambda^{4\alpha}\mathscr{L}(u)$. Это означает, что $A_\Omega(\tilde{u}) = \lambda^{2-2\alpha}A_{T[\Omega]}(u)$; таким образом, инвариантность дифференциального уравнения можно понять, руководствуясь принципом стационарности действия. Однако $S(u) = (2-2\alpha)\mathscr{L}(u)$, так что ток, отвечающий такому масштабному преобразованию, не сохраняется. Более того, S не является дивергенцией (задача 154); поэтому нельзя получить сохраняющийся ток заменой j на k. Это показывает, что инвариантность дифференциального уравнения, которая не означает инвариантности действия, может не давать новой сохраняющейся величины.

Существует один общий случай, когда $S(u)$ автоматически имеет вид $\partial_0 b_0 + \nabla\cdot\mathbf{b}$, а именно когда $\delta_\varepsilon\mathscr{L} = \partial_0 B_0^{(\varepsilon)} + \nabla\cdot\mathbf{B}^{(\varepsilon)}$; действительно, достаточно взять $b_0 = \partial B_0^{(\varepsilon)}/\partial\varepsilon$, $\mathbf{b} = \partial\mathbf{B}^{\varepsilon}/\partial\varepsilon$. Заметим, что если

$$\delta\mathscr{L} = \partial_0 B_0 + \nabla\cdot\mathbf{B}, \tag{270u}$$

где $B(\mathbf{x})$ — функция только $\tilde{u}$ и ее производных в точке $\mathbf{x}$, то $A_\Omega(\tilde{u}) = A_{T[\Omega]}(u) + \int\limits_{\partial\Omega}[B_0\,d\sigma_0 + \mathbf{B}\cdot d\sigma]$, так что для $\tilde{v}$, обращающихся в нуль около $\partial\Omega$,

$$A_\Omega(\tilde{u}+\lambda\tilde{v}) - A_\Omega(\tilde{u}) = A_{T[\Omega]}(u+\lambda v) - A_{T[\Omega]}(u).$$

Итак, из (270р) следует, что рассматриваемое преобразование переводит одни решения уравнения Эйлера—Лагранжа в другие. Когда $S(u)=\partial_0 b_0+\nabla\cdot\mathbf{b}$, сохраняется $\int (j_0-b_0)\,d^nx$ и инвариантность основного дифференциального уравнения можно связать с сохраняющейся величиной, отличной от $\int j_0\,d^nx$

Пример 4 (конформная инвариантность уравнения (270b)). Инверсия $z\mapsto z^{-1}$ аналитична в комплексной плоскости вне начала координат; таким образом, $u(x(x^2+y^2)^{-1},\ -y(x^2+y^2)^{-1})$ — гармоническая функция в $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, если такова u. Возможность формального продолжения из x в ix наводит на мысль, что если $u_{tt}-u_{xx}=0$, то $u(x(t^2-x^2)^{-1},\ t(t^2-x^2)^{-1})$ также есть решение волнового уравнения вне точек $t^2-x^2=0$, и в этом можно убедиться прямым вычислением. В четырехмерном пространстве это уже не так; чтобы убедиться в этом, рассмотрим сначала гармонический случай Функция $u(\mathbf{x})=|\mathbf{x}|^{-2}$ гармоническая вне точки $\mathbf{x}=0$, но функция $\tilde u(\mathbf{x})\equiv u(\mathbf{x}|\mathbf{x}|^{-2})=|\mathbf{x}|^2$ таким свойством не обладает. Поскольку единственной другой сферически симметричной гармонической функцией является 1, можно испытать функцию $\tilde u(\mathbf{x})\equiv|\mathbf{x}|^{-2}u(\mathbf{x}|\mathbf{x}|^{-2})$; и в самом деле, путем долгих вычислений можно показать, что $\Delta\tilde u=|\mathbf{x}|^{-4}(\Delta u)^{\sim}$. Аналогично, для $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, $t\in\mathbb{R}$ определим **лоренцеву инверсию** соотношениями

$$\mathbf{y}(\mathbf{x},t)=\mathbf{x}(t^2-|\mathbf{x}|^2)^{-1},\qquad s(\mathbf{x},t)=t(t^2-|\mathbf{x}|^2)^{-1},$$
$$V(u,\mathbf{x},t)=(t^2-|\mathbf{x}|^2)^{-1}u.$$

Если $\tilde u(\mathbf{x},t)=V(u(\mathbf{y},s),\mathbf{y},s)$, то $\tilde u$ есть решение уравнения $\tilde u_{tt}=\Delta\tilde u$ тогда и только тогда, когда таковым является u. В самом деле,

$$\tilde u_{tt}-\Delta\tilde u=(t^2-|x|^2)^{-2}(u_{tt}-\Delta u)^{\sim}. \qquad (270\text{v})$$

Поскольку рассматриваемые преобразования сингулярны при $|\mathbf{x}|=t$, это утверждение справедливо только вне плоскости $|\mathbf{x}|=t$. Дальше мы не будем думать об этой трудности, а просто покажем, что $\partial_0 k_0+\nabla\cdot\mathbf{k}=0$ для всех точек $\langle\mathbf{x},t\rangle$ с $|\mathbf{x}|\neq t$, когда k_0 и $\mathbf{k}$ заданы формулами (270d) и (270i). При этом легко понять, что k_0 и $\mathbf{k}$ класса C^∞, и потому результат будет выполняться для всех $\langle\mathbf{x},t\rangle$, откуда и будет вытекать сохранение конформного заряда $\int k_0\,d^3x$

Уравнение (270v) показывает, что преобразование $u\mapsto\tilde u$ сохраняет решения и уравнения (270b) Это наводит на мысль вычислить изменение $\delta\mathcal{L}$ при лоренцевой инверсии для лагранжиана $\mathcal{L}=\frac{1}{2}u_t^2-\frac{1}{2}(\nabla u)^2-\frac{1}{4}u^4$. Для таких вычислений удобно перейти к релятивистским обозначениям. Пусть x_μ $(\mu=0,1,2,3)$

обозначают t, x_1, x_2, x_3, а x^μ обозначают t, $-x_1$, $-x_2$, $-x_3$. Введем матрицу из элементов $g^{\mu\nu}=g_{\mu\nu}$, равных нулю при $\mu\neq\nu$ и 1 (соответственно -1), если μ и ν одновременно принимают значение 0 (соответственно 1, 2, 3). Наконец, положим $\partial^\mu=\partial/\partial x_\mu$. Кроме того, мы будем пользоваться соглашением о суммировании по повторяющимся индексам, так что $x^\lambda x_\lambda=t^2-|\mathbf{x}|^2$, $\partial^\lambda\partial_\lambda=$ $=\partial_0^2-\Delta$ и т. д. Начнем с изучения якобиевой матрицы $T^\mu{}_\nu=\partial^\mu y_\nu$, где $y_\nu=(x^\lambda x_\lambda)^{-1}x_\nu$ — лоренцева инверсия. Прямым вычислением получаем, что $T^\mu{}_\nu=(x^\lambda x_\lambda)^{-1}S^\mu{}_\nu$, где

$$S^\mu{}_\nu=\delta^\mu{}_\nu-2(x^\lambda x_\lambda)^{-1}x^\mu x_\nu, \tag{270w}$$

а $\delta^\mu{}_\nu$ — единичная матрица. Существенно то, что $S^\mu{}_\nu$ есть лоренцево преобразование, т. е.

$$S^\lambda{}_\varkappa g_{\lambda\mu}S^\mu{}_\nu=g_{\varkappa\nu}.$$

Перейдя к определителям, мы увидим, что $|\det(S)|=1$, так что якобиан $J\,|\det T|=(x^\lambda x_\lambda)^{-4}$. Используя отмеченную выше инвариантность, получим

$$g_{\mu\nu}T^\mu{}_\varkappa T^\nu{}_\lambda\,\partial^\varkappa v\,\partial^\lambda v=(x^\lambda x_\lambda)^{-2}g_{\mu\nu}\partial^\mu v\,\partial^\nu v. \tag{270x}$$

Пусть теперь $\tilde u(x)\equiv(x^\lambda x_\lambda)^{-1}u(y(x))$. Тогда

$$\partial^\mu\tilde u=(x^\lambda x_\lambda)^{-1}T^\mu{}_\nu(\partial^\nu u)(y)-2(x^\lambda x_\lambda)^{-2}x^\mu u(y). \tag{270y}$$

Если воспользоваться далее (270x) и взять $\mathcal{L}(u)={}^1/_2\,g_{\mu\nu}\partial^\mu u\,\partial^\nu u-$ $-{}^1/_4u^4$, то

$$(\delta\mathcal{L})(u)=2(x^\lambda x_\lambda)^{-3}u(y)^2-2(x^\lambda x_\lambda)^{-3}x_\mu u\,\partial^\mu(u(y))=\partial_\mu B^\mu, \tag{270z}$$

где $B^\mu=-x^\mu(x^\lambda x_\lambda)^{-3}u(y)^2$. Средняя часть (270z) получается после возведения в квадрат (270y) и учета того факта, что единственный квадратичный по $\partial^\mu u$ член в $\mathcal{L}(\tilde u)$ сокращается с соответствующим членом в $J\mathcal{L}(u)(y)$.

Лоренцева инверсия не определяет непрерывную группу симметрий, а представляет собой отдельное преобразование. Однако, если сделать инверсию, затем сдвиг $-\varepsilon$ по времени, а затем снова инверсию, мы получим непрерывную группу симметрий. Таким образом, определим

$$\mathbf{y}(\mathbf{x},t,\varepsilon)=\mathbf{x}F,\quad s(\mathbf{x},t,\varepsilon)=(t-\varepsilon(t^2-|\mathbf{x}|^2))F,\quad V(\mathbf{x},t,u,\varepsilon)=uF,$$
$$F(\mathbf{x},t,\varepsilon)=(t^2-|\mathbf{x}|^2)\left[\{t-\varepsilon(t^2-|\mathbf{x}|^2)\}^2-|\mathbf{x}|^2\right]^{-1}.$$

Это довольно сложное выражение называется конформным преобразованием. Точнее, конформная группа есть 15-параметрическая группа, состоящая из преобразований Пуанкаре, масштабных преобразований и лоренцевой инверсии. Соответственно для уравнения (270b) существуют 15 сохраняющихся величин, из которых при доказательстве теоремы XI.101 мы использовали всего две (энергию и временну́ю компоненту конформного тока), хотя в этом дополнении мы рассмотрели также три компоненты импульса и масштабные преобразования.

Для приведенного выше конформного преобразования путем прямого дифференцирования получаем $\Psi = 2tu$, $X_j = 2x_j t$, $X_0 = t^2 + |\mathbf{x}|^2$, и потому

$$j_0 = (|\mathbf{x}|^2 + t^2)\,(^1/_2 u_t^2 + {}^1/_2 (\nabla u)^2 + {}^1/_4 u^4) + 2tu_t \mathbf{x}\cdot\nabla u + 2tu_t u,$$
$$\mathbf{j} = (-\nabla u)\,\{(|\mathbf{x}|^2 + t^2)\,u_t + 2t\mathbf{x}\cdot\nabla x + 2tu\} - 2t\mathbf{x}\,(^1/_2 u_t^2 - {}^1/_2 (\nabla u)^2 - {}^1/_4 u^4).$$

Зная, что $\delta\mathscr{L}$ не обращается в нуль при инверсии, мы не ожидаем этого и для конформного преобразования, но мы надеемся, что $S(u) = \partial^\mu b_\mu$, поскольку $\delta\mathscr{L} = \partial^\mu B_\mu$ для инверсии. Как и при вычислениях с инверсией, величина $S(u)$ получается в виде разности между $^1/_2 (\partial^\mu \tilde{u})(\partial_\mu \tilde{u})$ и $^1/_2 J\,(\partial^\mu u)(\partial_\mu u)$. Поскольку

$$\tilde{u} = (1 + 2\varepsilon t)\,u\,(y) + O\,(\varepsilon^2),$$

получаем

$$\partial^\mu \tilde{u} = (1 + 2\varepsilon t)\,\partial^\mu\,(u\,(y)) + 2\varepsilon\delta^\mu{}_0 u + O\,(\varepsilon^2),$$

так что дополнительный член (с точностью до порядка $O(\varepsilon^2)$) как раз и имеет вид $^1/_2 [4\varepsilon\delta^\mu{}_0 u\,(\partial^\mu u)] = \varepsilon\partial_0(u^2)$ В итоге $S(u) = \partial_0(u^2)$, и потому если положить $\mathbf{k} = \mathbf{j}$, $k_0 = j_0 - u^2$, то $\partial_0 k_0 + \nabla\cdot\mathbf{k} = 0$. Таким образом, проверено, что для (270b) сохраняется заряд, даваемый выражением (270c), и, более того, мы описали, как отыскивать такие сохраняющиеся величины.

XI.14. Рассеяние спиновых волн

Обсудим теперь физические системы, совсем непохожие на те, которые мы анализировали до сих пор, но рассеяние в которых хорошо описывается формализмом двух гильбертовых пространств, введенным в § 3. Мы рассмотрим систему квантовомеханических спинов, находящихся по одному в узлах решетки $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$ и взаимодействующих с ближайшими соседями. Основные состояния для каждого спина — это либо «спин-вверх», либо «спин-вниз», но, поскольку система подчиняется квантовомеханическим законам, возможны и суперпозиции этих состояний. В итоге множество состояний для одного спина в фиксированном узле $\alpha \in \mathbb{Z}^3$ есть единичная сфера в двумерном комплексном гильбертовом пространстве. Если в момент времени $t = 0$ задано состояние, где один выделенный спин направлен вверх, а все остальные вниз, то взаимодействия, точно описанные ниже, носят такой характер, что по мере развития системы во времени в ней бежит элементарная «волна», отвечающая перемещению направленного вверх спина по решетке, т. е. при $t \to \infty$ возникает нестационарная суперпозиция состояний с одним спином вверх, охватывающая все больше и больше узлов, все дальше отстоящих от начального узла. Если начать с двух спинов, направленных вверх, то возникает суперпозиция состояний с двумя спинами вверх. Если сначала эти узлы далеки друг от друга, то в течение очень малого времени оба спина эволюционируют более или менее как две независимые элементарные спиновые волны, ибо взаимодействие затрагивает только ближайших соседей. По мере эволюции этих состояний во времени появляется ненулевая вероятность возникновения состояния с двумя соседними спинами, направленными вверх. Такие спины взаимодействуют, что приводит к рассеянию. Именно этот процесс мы и хотим изучить.

Описанная система спинов является моделью (называемой **гейзенберговой моделью**) ферромагнетика. Со спинами связаны магнитные моменты, и основное взаимодействие носит магнитный характер. Описанные выше волны возбуждения обычно называют **магнитными спиновыми волнами**, или **магнонами**. Следует отметить одну особенность нашей системы: мы рассмотрели спиновые волны на фоне всех спинов, опущенных вниз, что, как мы увидим, отвечает основному состоянию системы. Можно с таким же успехом рассматривать систему со всеми спинами вверх или в любом другом фиксированном направлении, что даст другие возможные основные состояния. На самом деле, в силу общей инвариантности относительно вращений, такие теории эквивалентны той, которую мы развиваем. В основном состоянии система пребывает только при нулевой абсолютной температуре; при ненулевой температуре мы имеем «суперпозицию возбужденных состояний». Существует некоторое количество глубоких, хотя и не строгих работ о магнонах при ненулевых температурах (см. Замечания).

Обсуждение, проводимое в этом разделе, связано с различными вопросами, которых мы еще не касались. Во-первых, мы имеем дело с бесконечной системой, а в общем случае бесконечные системы наиболее естественно описываются на языке C^*-алгебр. Это так и для модели Гейзенберга при ненулевых температурах; но благодаря тому что основное состояние гейзенбергова магнетика можно явно описать, в этом случае удается избежать использования техники C^*-алгебр. Однако даже здесь существует ряд других идей, интересных с физической и математической точек зрения, например явление спонтанного нарушения симметрии, которые требуют применения C^*-алгебр. Мы вернемся к этому кругу вопросов в последующих томах. Во-вторых, в описании всех процессов рассеяния, которые мы изучали до сих пор, использовалось сравнение некоей априорной «свободной динамики» с динамикой системы со взаимодействием. В интересующей нас сейчас ситуации «свободная динамика» не определяется какой-то заранее заданной системой, а скорее задается частью системы со взаимодействием, а именно динамикой одномагнонных состояний. Эта идея появится вновь в § 16 при изучении рассеяния в квантовополевых системах со взаимодействием.

Опишем сначала модель с конечным числом спинов. Пусть Λ — конечное подмножество в $\mathbf{Z}^3$. Каждой точке $\alpha \in \Lambda$ сопоставим экземпляр пространства $\mathbb{C}^2$ и обозначим его $\mathbb{C}^2_\alpha$. Будем называть векторы

$$e_1^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_0^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

состояниями со **спином вверх** и **спином вниз** в точке α соответственно. Гильбертовым пространством состояний конечного числа спинов, по одному в каждой точке $\alpha \in \Lambda$, будет

$$\mathscr{H}_\Lambda = \bigotimes_{\alpha \in \Lambda} \mathbb{C}^2_\alpha. \tag{271}$$

Множество векторов вида $\bigotimes_{\alpha \in \Lambda} e^{(\alpha)}_{a_\alpha}$, где $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ — последовательность нулей и единиц, есть базис в $\mathscr{H}_\Lambda$; для удобства мы далее будем писать $\psi(\{a_\alpha\}) = \bigotimes_{\alpha \in \Lambda} e^{(\alpha)}_{a_\alpha}$.

Для того чтобы определить гамильтониан H_Λ этой конечной системы, введем некоторые термины и обозначения. Пусть σ_x, σ_y, σ_z — матрицы Паули, т. е.

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix};$$

положим $\sigma_\pm = {}^1/_2 (\sigma_x \pm i\sigma_y)$, так что

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица σ_+ переворачивает вверх спин, направленный вниз, а σ_- — наоборот. Интерпретация ${}^1/_2\sigma$ как вектора квантовомеханического момента количества движения следует из того, что этот вектор удовлетворяет коммутационным соотношениям алгебры Ли группы трехмерных вращений. Для каждого $\alpha \in \Lambda$ обозначим через $\sigma_x^{(\alpha)}$, $\sigma_y^{(\alpha)}$, $\sigma_z^{(\alpha)}$, $\sigma_\pm^{(\alpha)}$ операторы в $\mathscr{H}_\Lambda$, действующие соответственно как σ_x, σ_y, σ_z, $\sigma_\pm$ на α-ю компоненту тензорного произведения и как единичная матрица на остальные компоненты. Таким образом, на базисных векторах $\psi(\{a_\beta\})$ имеем

$$\sigma_z^{(\alpha)} \psi(\{a_\beta\}) = (2a_\alpha - 1)\, \psi(\{a_\beta\}),$$

$$\sigma_+^{(\alpha)} \psi(\{a_\beta\}) = \begin{cases} 0, & \text{если } a_\alpha = 1, \\ \psi(\{a_\beta + \delta_{\beta\alpha}\}), & \text{если } a_\alpha = 0. \end{cases}$$

Тогда гамильтониан определяется следующим образом:

$$H_\Lambda = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{|\alpha-\beta|=1,\\ \alpha,\,\beta \in \Lambda}} \left(\sigma_z^{(\alpha)}\sigma_z^{(\beta)} + 4\sigma_+^{(\alpha)}\sigma_-^{(\beta)}\right). \tag{272}$$

Сумма берется по всем *упорядоченным* парам $\langle\alpha, \beta\rangle$ ближайших узлов. Из-за множителя 1/2 каждая неупорядоченная пара вносит в энергию вклад $\sigma_z^{(\alpha)}\sigma_z^{(\beta)} + 2\sigma_+^{(\alpha)}\sigma_-^{(\beta)} + 2\sigma_-^{(\alpha)}\sigma_+^{(\beta)} = \sigma^{(\alpha)} \cdot \sigma^{(\beta)}$, где мы положили $\sigma^{(\alpha)} = \langle\sigma_x^{(\alpha)}, \sigma_y^{(\alpha)}, \sigma_z^{(\alpha)}\rangle$. Помня об упомянутой выше связи с вращениями, легко понять, что гамильтониан инвариантен относительно одновременного вращения всех спинов. Знак минус в (272) показывает, что состояния с параллельными спинами имеют более низкую энергию, чем состояния с антипараллельными.

Можно показать (задача 132), что если сделать множество Λ связным множеством, соединив между собой всех ближайших соседей, то основное состояние H_Λ будет $(n+1)$-кратно вырожденным, где n — число точек в Λ. Энергия этого основного состояния равна $-k$, где k — число пар ближайших соседей. Одним из собственных векторов, описывающих основное состояние, является $\psi_0 \equiv \bigotimes_{\alpha \in \Lambda} e_0^{(\alpha)}$. Остальные базисные собственные векторы в подпространстве основных состояний можно получить применением нужное число раз оператора $\sum_{\alpha \in \Lambda} \sigma_+^{(\alpha)}$.

При переходе к $\Lambda = \mathbb{Z}^3$ возникают две трудности. Во-первых, необходимо решить, что использовать в качестве гильбертова пространства состояний бесконечной системы. Во-вторых, нужно решить, какую величину использовать в качестве гамильтониана, особенно в свете того, что энергия основного состояния (т. е. низшее собственное значение) H_Λ стремится к $-\infty$, когда объем $|\Lambda|$ множества Λ стремится к бесконечности.

Один метод определения гильбертова пространства бесконечной системы связан с развитием идеи бесконечного тензорного произведения и использованием (272); но, поскольку нас в первую очередь интересует другая реализация основной структуры, мы относим обсуждение бесконечных тензорных произведений в Замечания. Здесь мы рассмотрим бесконечномерное гильбертово пространство $\mathscr{H}$ с базисом $\{\psi(\{a_\beta\})\}$, где $a = \{a_\beta\}$ последовательность нулей и единиц, индексированная точками $\mathbb{Z}^3$, *в которой лишь конечное число* $a_\beta \neq 0$; таким образом, $\mathscr{H}$ состоит из векторов вида

$$\sum_a{}' c(a)\,\psi(a),$$

($\sum'$ означает, что берутся лишь те a, для которых выполнено выделенное курсивом условие), где $c(a) \in \mathbb{C}$ и $\sum_a{}' |c(a)|^2 < \infty$.

Внутреннее произведение в $\mathcal{H}$ задается так:

$$\left(\sum' d(a)\psi(a),\ \sum' c(a)\psi(a)\right)=\sum' \overline{d(a)}\,c(a);$$

ψ_0 будет обозначать базисный вектор, у которого все a_β равны нулю.

Для полного обоснования сделанного выбора $\mathcal{H}$ нужна теория C^*-алгебр, но можно отметить, что без выделенного курсивом условия мы получили бы несепарабельное пространство, тогда как наше $\mathcal{H}$ сепарабельно. Более того, $\sigma_x^{(\alpha)}$, $\sigma_y^{(\alpha)}$, $\sigma_z^{(\alpha)}$, $\sigma_\pm^{(\alpha)}$ можно определить как и раньше, а гамильтониан H можно построить следующим способом.

Непосредственно использовать формулу (272) для определения $H_{\mathbb{Z}^3}$ нельзя, ибо на каждом $\psi(\{a_\beta\})$ сумма в $H_{\mathbb{Z}^3}$ будет расходиться. Однако если заменить произведение $\sigma_z^{(\alpha)}\sigma_z^{(\beta)}$ всюду, где оно встречается, на $\sigma_z^{(\alpha)}\sigma_z^{(\beta)}-1$, т. е. положить

$$H_{\mathbb{Z}^3}=-\frac{1}{2}\sum_{\substack{|\alpha-\beta|=1,\\ \alpha,\,\beta\in\mathbb{Z}^3}}\left(\sigma_z^{(\alpha)}\sigma_z^{(\beta)}-1+4\sigma_+^{(\alpha)}\sigma_-^{(\beta)}\right), \tag{273}$$

то эта сумма будет сходиться на каждом $\psi(\{a_\beta\})$. Поскольку мы просто изменили энергию основного состояния на (бесконечную) постоянную, физика модели не изменится. Опустим теперь индекс Z^3 и возьмем в качестве области определения $D(H)$ гамильтониана H плотное множество конечных линейных комбинаций векторов $\psi(a)$. Поскольку на каждом векторе $v\in D(H)$ все, кроме конечного числа членов в Hv, равны нулю, H корректно определен на $D(H)$. В действительности справедливо

Предложение. Оператор H самосопряжен в существенном и неотрицателен, ψ_0 — единственный вектор, для которого $H\psi_0=0$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}_n$ — линейная оболочка тех $\psi(\{a_\beta\})$, для которых $\sum_\beta a_\beta=n$. Тогда $H=\bigoplus_n \mathcal{H}_n$, $\mathcal{H}_n\subset D(H)$, H оставляет $\mathcal{H}_n$ инвариантным и ограничен на каждом $\mathcal{H}_n$. Ясно, что H — прямая сумма ограниченных самосопряженных операторов, и потому, в силу элементарных рассуждений, которыми мы уже не раз пользовались (см. пример 2 в § VIII.10 или задачу 1 к гл. X), он самосопряжен в существенном. Кроме того, H положителен, поскольку

$$\sigma_z^{(\alpha)}\sigma_z^{(\beta)}+2\sigma_+^{(\alpha)}\sigma_-^{(\beta)}+2\sigma_-^{(\alpha)}\sigma_+^{(\alpha)}\leqslant 1$$

для любых α и β (задача 131). Доказательство простоты нулевого собственного значения мы оставляем читателю в качестве упражнения (задача 133). ∎

Как мы уже упомянули в последнем доказательстве, H оставляет каждое подпространство $\mathscr{H}_n$ инвариантным. Начнем с анализа $H \upharpoonright \mathscr{H}_1$. Пусть $\eta_\alpha = \psi(\{\delta_{\alpha\beta}\})$ для каждого $\alpha \in Z^3$, т. е. η_α — вектор, описывающий состояние со спином вверх в узле α и со всеми остальными спинами вниз. По определению H и в силу того что у α всего шесть ближайших соседей β_i, входящих в виде (α, β_i) и (β_i, α) в сумму (273), имеем

$$H\eta_\alpha = 12\eta_\alpha - 2 \sum_{|\beta-\alpha|=1} \eta_\beta$$

Произвольный $\varphi \in \mathscr{H}_1$ можно разложить в ряд $\varphi = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^3} \varphi(\alpha)\eta_\alpha$, так что $H\varphi = \sum (H\varphi)(\alpha)\eta_\alpha$, где

$$(H\varphi)(\alpha) = 2\left(6\varphi(\alpha) - \sum_{|\beta-\alpha|=1} \varphi(\beta)\right). \tag{274}$$

Для лучшего понимания $H \upharpoonright \mathscr{H}_1$ полезно знать, что H коммутирует с очевидным представлением Z^3 сдвигами в $\mathscr{H}$. Значит, отображение пространства $l^2(Z^3)$, заданное формулой $\{\varphi(\alpha)\} \longmapsto \{(H\varphi)(\alpha)\}$, коммутирует со сдвигами, что очевидно благодаря (274). Тогда преобразование Фурье $l^2(Z^3) \xrightarrow{\wedge} L^2([-\pi, \pi]^3)$ дает спектральное представление H. В самом деле, полагая

$$\hat{\varphi}(k) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^3} \varphi(\alpha) e^{-ik\cdot\alpha},$$

мы обнаружим, что $(H\varphi)^\wedge(k) = \mu(k)\hat{\varphi}(k)$, где

$$\mu(k) = 4(3 - \cos k_1 - \cos k_2 - \cos k_3).$$

Таким образом, $H \upharpoonright \mathscr{H}_1$ выглядит как решеточный вариант свободной кинетической энергии в нерелятивистской квантовой механике, поскольку $\mu = 2|k|^2 + O(k^4)$ при малых k.

Теперь мы можем объяснить, в каком смысле $H \upharpoonright \mathscr{H}_2$ есть гамильтониан, описывающий состояния, которые асимптотически выглядят как две свободно движущиеся элементарные спиновые волны. Однако прежде подчеркнем, что естественным пространством двух спиновых волн служит не $\mathscr{H}_2$, а $\mathscr{H}_1 \otimes_s \mathscr{H}_1$. Причина симметризации тензорного произведения в том, что физически не имеет смысла указывать, какой из двух спинов «первый». Причина симметрии (а не антисимметрии) в том, что мы выбрали спиновые операторы, отнесенные к различным узлам, коммутирующими. Такой выбор основан на желании иметь спиновые операторы в качестве независимых квантовых наблюдаемых. Если бы мы взяли σ в различных узлах антикоммутирующими, мы получили бы «свободный ферми-газ» без рассеяния.

Введем отображение

$$J_2\colon (\mathcal{H}_1 \otimes_s \mathcal{H}_1) \to \mathcal{H}_2, \quad J_2(\eta_\alpha \otimes_s \eta_\gamma) = \begin{cases} \psi(\{\delta_{\alpha\beta} + \delta_{\gamma\beta}\}), & \alpha \neq \gamma, \\ 0, & \alpha = \gamma, \end{cases}$$

и воспользуемся теорией рассеяния в двух гильбертовых пространствах, построенной в § 3.

Теорема XI.102. Пусть $H_2 \equiv H \restriction \mathcal{H}_2$ и $H_1^{\otimes} = H_1 \otimes I + I \otimes H_1$. Тогда

$$\Omega_2^{\pm} = \operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{itH_2} J_2 e^{-itH_1^{\otimes}}$$

существуют и являются изометриями из $\mathcal{H}_1 \otimes_s \mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$.

Доказательство. Согласно методу Кука, пределы существуют, если

$$\int_{\pm 1}^{\pm\infty} \| [H_2 J_2 - J_2 H_1^{\otimes}] e^{-itH_1^{\otimes}} \varphi \| \, dt < \infty \tag{275}$$

на тотальном множестве векторов φ. Более того, для доказательства изометричности $\Omega_2^{\pm}$ достаточно показать, что

$$\left\| (J_2^* J_2 - 1) e^{-itH_1^{\otimes}} \varphi \right\| \to 0 \tag{276}$$

при $t \to \pm\infty$. Мы докажем (275), оставив доказательство (276) читателю (задача 134).

Введем $V\colon \mathcal{H}_1 \otimes_s \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1 \otimes_s \mathcal{H}_1$ соотношением

$$V = J_2^* H_2 J_2 - H_1^{\otimes}.$$

У V два важных свойства. Во-первых, это ограниченное отображение. Во-вторых, его носитель лежит в области $|\alpha - \beta| \leqslant 2$ в следующем смысле. Отождествим $\mathcal{H}_1 \otimes_s \mathcal{H}_1$ со множеством симметричных функций из $l^2(Z^3 \times Z^3)$, воспользовавшись отображением $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}(\cdot, \cdot)$, где $\varphi = \sum \tilde{\varphi}(\alpha, \beta)\, \eta_\alpha \otimes \eta_\beta$. Определим $\tilde{V}$ формулой $\tilde{V}\tilde{\varphi} = \widetilde{V\varphi}$. Если теперь ввести оператор χ на $l^2(Z^3 \times Z^3)$ соотношением

$$(\chi\tilde{\varphi})(\alpha, \beta) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(\alpha, \beta) & \text{при } |\alpha - \beta| \leqslant 2, \\ 0 & \text{при } |\alpha - \beta| > 2, \end{cases}$$

то $\tilde{V}\chi = \tilde{V}$. В этом можно убедиться, если учесть, что H_2 действует как $H_1^{\otimes}$, если α и β не являются ближайшими соседями и не имеют общих соседей. Далее будем опускать $\tilde{}$.

Поскольку V такое хорошее, (275) можно получить путем простого применения метода стационарной фазы. Обозначим символом $\hat{}$ преобразование Фурье из $l^2(Z^3\times Z^3)$ в $L^2([-\pi,\pi]^3\times\times[-\pi,\pi]^3)$. Пусть φ — вектор из $\mathscr{H}_1\otimes_s\mathscr{H}_1$, такой, что $\hat{\varphi}\in\in C_0^\infty([-\pi,\pi]^3\times[-\pi,\pi]^3)$ и

(i) $\operatorname{supp}\hat{\varphi}$ не содержит точек, у которых хотя бы одна координата равна $\pm\pi$;

(ii) $\operatorname{supp}\hat{\varphi}\subset\{\langle k, l\rangle \mid \partial\mu(k)/\partial k\neq\partial\mu(l)/\partial l\}$.

В таком случае мы утверждаем, что для любого $m>0$ существуют постоянные C_m и T, такие, что при $t>T$

$$\left|\left(e^{-itH_1^{\otimes}}\varphi\right)(\alpha,\beta)\right|\leqslant C_m(|\alpha|+|\beta|+|t|+1)^{-m} \tag{277}$$

в области $|\alpha-\beta|\leqslant 2$. Предположим пока, что (277) справедливо. Тогда для φ такого, как выше,

$$\begin{aligned}\left\|J_2Ve^{-itH_1^{\otimes}}\varphi\right\|^2_{\mathscr{H}_2}\leqslant\left\|Ve^{-itH_1^{\otimes}}\varphi\right\|^2_{\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_1}=\left\|V\chi e^{-itH_1^{\otimes}}\varphi\right\|^2_{\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_1}\leqslant\\ \leqslant\|V\|^2\left\|\chi e^{-itH_1^{\otimes}}\varphi\right\|^2_{\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_1}=\|V\|^2\sum_{|\alpha-\beta|\leqslant 2}\left|\left(e^{-itH_1^{\otimes}}\varphi\right)(\alpha,\beta)\right|^2\leqslant\\ \leqslant d\|V\|^2(1+|t|)^{-4}\end{aligned}$$

в силу (277). Следовательно,

$$\int_{\pm 1}^{\pm\infty}\left\|J_2Ve^{-itH_1^{\otimes}}\varphi\right\|dt<\infty,$$

откуда, в силу $J_2J_2^*=I$, заключаем, что (275) имеет место. Поскольку множество рассматриваемых φ плотно, волновые операторы существуют.

Доказательство неравенства (277) есть простое упражнение на метод стационарной фазы из первого дополнения к § 3. Действительно, нужна только элементарная теорема XI.14. В самом деле, положим $\omega=|\alpha|+|\beta|+|t|$ и

$$f_{\alpha,\beta,t}(k,l)=(\alpha\cdot k+\beta\cdot l-t\mu(k)-t\mu(l))(|\alpha|+|\beta|+|t|)^{-1}.$$

Тогда

$$\left(e^{-itH_1^{\otimes}}\varphi\right)(\alpha,\beta)=\text{const}\int e^{i\omega f_{\alpha,\beta,t}(k,l)}\hat{\varphi}(k,l)\,dk\,dl$$

удовлетворяет (277) в силу теоремы XI.14 и условий (i) и (ii). ∎

Обобщение изложенного на n-спиновые волны не является сложной проблемой; мы воспользуемся обозначениями, охватывающими сразу все n. Пусть $\mathscr{F}_1$ — фоково пространство, построенное на основе $\mathcal{H}_1$. Определим

$$J: \mathcal{F}_1 \to \mathcal{H}$$

с помощью следующих отображений $\otimes_s^n \mathcal{H}_1$ на $\mathcal{H}_n$:

$$J(\eta_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \eta_{\alpha_n}) = \begin{cases} \psi(\{\delta_{\alpha_1\beta} + \ldots + \delta_{\alpha_n\beta}\}), & \text{если все } \alpha \text{ различны,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда, повторяя проведенное выше доказательство, получаем, что справедлива

Теорема XI.103. Операторы

$$\Omega^{\pm} = \operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{itH} J e^{-itd\Gamma(H_1)}$$

существуют и изометричны.

Если $\varphi \in \otimes_s^n \mathcal{H}_1$, то $\Omega^{\pm}\varphi$ суть состояния, которые асимптотически выглядят как n свободных спиновых волн. Мы как раз и описали состояния рассеяния, отвечающие системе с n перевернутыми спинами, распадающейся на n частей. Вспоминая N-частичное уравнение Шредингера, можно задаться вопросом, а нет ли других каналов рассеяния, отвечающих связанным группам (кластерам) нескольких перевернутых спинов. Да, они есть, но эти «связанные состояния» обладают дополнительной сложностью по сравнению с уравнением Шредингера. В последнем случае из полного гамильтониана можно выделить энергию движения центра масс, так что «связанные состояния» суть собственные векторы фиксированного оператора. Ключевой факт состоит в том, что если $\mu_S(\mathbf{k}) = k^2$ и $\sum_1^N \mathbf{k}_i = 0$, то

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_S(\mathbf{a} + \mathbf{k}i) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{N} \mu_S(\mathbf{k}_i),$$

так что для произвольных $\mathbf{k}_i$ энергия $\sum_{i=1}^{N} \mu_S(\mathbf{k}_i)$ есть сумма одной функции, зависящей только от $\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \ldots + \mathbf{k}_N$, и одной функции, зависящей только от $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_{N-1} - \mathbf{k}_N$. Для функции $\mu(\mathbf{k}) = 3 - \cos k_1 - \cos k_2 - \cos k_3$ это не так. «Выделение движения центра масс» в системе спиновых волн отвечает реализации $H_n \equiv H \restriction \mathcal{H}_n$ как

$$(H_n\varphi)(K, k_1, \ldots, k_{n-1}) = (H_n(K)\varphi_K)(k_1, \ldots, k_{n-1}),$$

где $K = k_1 + \ldots + k_n$, а $H_n(K)$ — зависящий от K оператор. В итоге H_n реализуется как «расслоенный оператор» в смысле § XIII.16, или, по-иному, как «прямой интеграл». K есть оператор полного импульса, коммутирующий с H_n. «Связанное состояние» тогда есть собственное значение $H_n(K)$ для некоторого фиксированного K, в типичном случае непрерывно меняющееся при изменении K. Когда такие «связанные состояния» присутствуют (а в описанной выше системе они существуют; см. Замечания), можно построить дополнительные волновые операторы, ассоциированные с новыми каналами, так, как это делалось в случае уравнения Шредингера.

Для рассеяния в $\mathcal{H}_2$ можно доказать асимптотическую полноту (задача 135).

XI.15. Квантовополевое рассеяние I: внешнее поле

Вы можете полагать, что это — вопрос, который всерьез может задать лишь теоретик-полевик, который сошел с ума, проведя так много лет в столь малом числе измерений.

С. КОЛМАН

В этом и в следующем разделах мы рассматриваем рассеяние в квантовой теории поля. В § 16 показано, что в теории поля, которая удовлетворяет аксиомам Вайтмана, а также некоторым дополнительным предположениям, существует естественный способ построения оператора рассеяния. Эта общая конструкция, называемая теорией Хаага — Рюэля, и элегантна, и важна, поскольку показывает, как в принципе вайтмановы поля связаны с рассеянием отдельных частиц. К сожалению, построение динамики для нетривиальных полевых теорий и проверка аксиом Вайтмана — очень сложное дело, завершенное пока что лишь для некоторых моделей в одном и двух пространственных измерениях. В этом разделе мы рассматриваем то, что должно быть гораздо более простой задачей: рассеяние во внешнем поле. Эта задача должна быть проще, поскольку взаимодействующее поле удовлетворяет *линейному* волновому уравнению, например:

$$\varphi_{tt}(x, t) - \Delta\varphi(x, t) + m^2\varphi(x, t) = V(x, t)\varphi(x, t), \qquad (278)$$

где $V(x, t)$ — внешний потенциал.

Одно важное явление, связанное с квантованной версией этого уравнения, — явление рождения пар. Если в исходный момент начать с состояния без частиц, то среднее значение поля будет ненулевым, и в результате благодаря линейности (278) правая часть будет действовать как источник и будет ненулевой. Другими словами, будет ненулевой вероятность рождения пар частиц.

Явление рождения пар приводит к двум поразительным следствиям в математической структуре теории. Во-первых, «свободная» динамика при $t = -\infty$ отличается от «свободной» динамики при $t=+\infty$. Во-вторых, теория усложняется в том отношении, что должны быть отличны от нуля амплитуды рассеяния, описывающие переход n приходящих частиц в m уходящих. Оказывается, что все эти амплитуды могут быть описаны посредством некоторого фундаментального решения *классического* полевого уравнения.

Прежде чем начать обсуждение уравнения (278), мы бы хотели сстановиться на некоторых причинах, обусловливающих интерес к задачам во внешнем поле. Во-первых, поскольку задачи во внешнем поле «решаются явно», они часто использовались как аппроксимации и как наводящие соображения при изучении реальных взаимодействий. Один пример применения такой аппроксимации дает ядерная физика, где нуклонное поле рассматривается как внешнее поле для мезонов. Считается, что это разумно, поскольку нуклоны гораздо тяжелее мезонов. Случай, когда задачи во внешнем поле были применены в качестве наводящих соображений,—это исследование инфракрасных особенностей в квантовой электродинамике. Во-вторых, некоторые юкавские поля можно представить как интегралы по внешним полям после того, как «фермионы проинтегрированы». Внешние поля в этой задаче не являются гладкими, а включают в себя ультрафиолетовые особенности. В-третьих, имеется большое число инвариантных волновых уравнений, равно как и множество взаимодействий, каждое из которых можно использовать при описании высших спинов, и хотелось бы знать, какие из соответствующих волновых полей стабильны при взаимодействии с внешним полем. Если свободные поля не стабильны по отношению к взаимодействию с внешним полем (точнее говоря, если теория взаимодействия обладает различными патологиями), то считается, что взаимодействие с полностью квантованным полем будет еще хуже. Сейчас становится несомненным *отсутствие* уравнений спина 3/2 или выше, которые обладают полностью непатологическими взаимодействиями с внешними полями. Это не обязательно огромное бедствие, поскольку частицы со спином 3/2 могут возникать в теориях, где поля имеют спин 1/2 (см. замечания к § IX.8). Более серьезна та проблема, что гравитационное поле в уравнениях Эйнштейна имеет спин 2. Были предложены два способа ее решения. Первый основан на том, что гравитационные уравнения обладают весьма специальными нелинейностями, которые, возможно, не допускают хороших моделей на основе внешних полей. Более радикальное предположение состоит в том, что гравитон есть связанное состояние двух фотонов, а «гравитационное поле»—производный объект!

В этом разделе мы рассмотрим только случай нулевого спина со взаимодействием (278). Мы предполагаем, что $V(x, t)$—вещественнозначная C^∞-функция переменных x и t с компактным носителем. Наша цель — построить квантовое поле, удовлетворяющее уравнению (278) и всем аксиомам Вайтмана, за исключением пуанкаре-инвариантности (мы не можем ожидать пуанкаре-инвариантности, поскольку этим свойством не обладает V), а затем развить теорию рассеяния. Огромное преимущество линейного уравнения движения для поля состоит в том, что для порождения квантовополевой динамики можно пользоваться аналогичным классическим волновым уравнением. Итак, мы начинаем с изучения проблемы существования и теории рассеяния для классического волнового уравнения:

$$w_{tt}-\Delta w+m^2 w=V(x,\ t)\,w, \qquad (279)$$
$$w(x,\ 0)=w_1(x),\quad w_t(x,\ 0)=w_2(x).$$

Как и в § 10, положим $B=\sqrt{-\Delta+m^2}$ и перепишем (279) как систему уравнений первого порядка:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & I \\ -B^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix}.$$

Чтобы облегчить в последующем переход к квантовополевой задаче, удобно диагонализовать свободную часть динамики. Пусть

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} B^{1/2} & iB^{-1/2} \\ B^{1/2} & -iB^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Положим $\mathfrak{h}=L^2(\mathbb{R}^3)$, выберем $\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}$ в качестве нашего гильбертова пространства и определим операторы h_0 и $v(t)$ как

$$-ih_0\equiv T\begin{pmatrix} 0 & I \\ -B^2 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}=i\begin{pmatrix} -B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$
$$-iv(t)\equiv T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V & 0 \end{pmatrix}T^{-1}=\frac{i}{2}B^{-1/2}V(x,\ t)\,B^{-1/2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Если ввести $\eta(t)=\langle\alpha(t),\ \beta(t)\rangle=T\langle w(t),\ w_t(t)\rangle$, то (279) превратится в уравнение

$$\eta'(t)=-ih_0\eta(t)-iv(t)\,\eta(t) \qquad (280)$$

с начальным условием

$$\eta(0)=\langle\alpha_0(x),\ \beta_0(x)\rangle\equiv T\langle w(0),\ w_t(0)\rangle$$

на $(\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h})$-значную функцию $\eta(t)$. Оператор h_0 самосопряжен на $D(h_0)=D(B)\oplus D(B)$, а $v(t)$ — непрерывная функция из $\mathbb{R}$ в множество ограниченных операторов на $\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}$, удовлетворяющая оценке

$$\|v(t)\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h})}\leqslant 2m^{-1}\sup_{x,\ t}|V(x,\ t)|\equiv M<\infty.$$

Итак, для каждого t оператор

$$ih(t) \equiv i(h_0 + v(t))$$

есть генератор экспоненциально ограниченной полугруппы на $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$, и все $ih(t)$ имеют, в силу теоремы X.50, $D(h_0)$ в качестве общей области определения. Затем, поскольку мы предполагаем, что $V(x, t)$ непрерывно дифференцируема, легко проверить (задача 137), что операторы $ih(t)+M+1$ удовлетворяют условиям (a)—(c) теоремы X.70. Таким образом, из теоремы X.70 следует, что существует непрерывное семейство $u(t, s)$ ограниченных операторов на $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$, такое, что $u(t, s)\eta_0$ дифференцируемо при $\eta_0 \in D(h_0)$ и

$$\frac{d}{dt} u(t, s)\eta_0 = -ih(t)u(t, s)\eta_0, \quad u(s, s)\eta_0 = \eta_0. \tag{281}$$

Далее, в силу оценки на $\|v(t)\|$, оператор $u(t, s)$ удовлетворяет неравенству $\|u(t, s)\eta_0\| \leqslant e^{M|t-s|}\|\eta_0\|$. Отметим, что, поскольку $-ih(t)$ также порождает экспоненциально ограниченную полугруппу, $u(t, s)$ определен для всех t и s и удовлетворяет равенству $u(t_1, t_2)u(t_2, t_3) = u(t_1, t_3)$. Поскольку эволюция в обратном направлении по времени удовлетворяет тем же оценкам, что и выше, имеем

$$e^{-M|t-s|}\|\eta_0\| \leqslant \|u(t, s)\eta_0\| \leqslant e^{M|t-s|}\|\eta_0\| \tag{282}$$

для всех t и s. Отметим, что, поскольку возмущения ограничены, можно было бы для определения динамики пользоваться рядом Дайсона в представлении взаимодействия (см. обсуждение после теоремы X.69) вместо более тонкой теоремы X.70.

Семейство операторов $T^{-1}u(t, s)T$ обладает двумя другими важными свойствами. Во-первых, развитие во времени причинно. Иначе говоря, если начальные данные $w_0 = \langle w(x, s), w_t(x, s)\rangle$ имеют носитель в множестве Σ, то $w(t) = T^{-1}u(t, s)Tw_0$ имеет носитель в $\{x \mid |x-y| \leqslant |t-s|$ для некоторого $y \in \Sigma\}$. Идея доказательства в точности та же, что и в теореме X.77, за исключением того, что нелинейный член $-|u|^2u$ заменен на $V(x, t)w$. Во-вторых, пусть λ обозначает оператор

$$\lambda = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

на $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$. Тогда для всех t и s

$$u(t, s)^* \lambda u(t, s) = \lambda = u(t, s)\lambda u(t, s)^*. \tag{283a}$$

Прежде чем доказывать равенство (283a), отметим, что в исходных переменных оно эквивалентно следующему утверждению. Величина

$$q \equiv \int_{\mathbb{R}^3} [\overline{w(x, t)}w_t(x, t) - w(x, t)\overline{w_t(x, t)}]\,d^3x \qquad (283\mathrm{b})$$

не зависит от времени для решений w уравнения (279). После квантования (283a) будет выражать сохранение «заряда». Для доказательства (283a) заметим, что, в силу ограниченности $u(t, s)$ и поляризационного тождества, достаточно показать, что

$$(u(t, s)\eta_0, \lambda u(t, s)\eta_0) = (\eta_0, \lambda\eta_0) = (u(t, s)^*\eta_0, \lambda u(t, s)^*\eta_0)$$

для η_0 из плотного множества. Таким образом, достаточно показать, что (283b) не зависит от времени для решений уравнения (279) с начальными данными из $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ Решение тогда лежит в $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ во все моменты времени. Более того, (283b) — не что иное, как вронскиан двух решений w и $\overline{w}$ уравнения (279), а потому не зависит от времени, ибо допустимо необходимое интегрирование по частям, так как $w(\cdot, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. В терминах теоремы Нётер, рассмотренной в дополнении к § 13, сохранение величины q есть отражение инвариантности относительно замены $w \longmapsto e^{i\theta}w$ (задача 152).

Сказанное суммирует

Теорема XI.104. Пусть $V(x, t)$ — непрерывно дифференцируемая функция с компактным носителем в $\mathbb{R}^4$. Пусть $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$, h_0 и $v(t)$ такие, как выше. Тогда существует сильно непрерывное двупараметрическое семейство $u(t, s)$ ограниченных операторов в $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$, такое, что

(a) $u(t_3, t_2)\,u(t_2, t_1) = u(t_3, t_1)$; $u(t, t) = I$;
(b) если $\eta_1 \in D(h_0)$, то справедливо (281), а $\eta(t) = u(t, 0)\,\eta(0)$ удовлетворяет (280);
(c) если $\operatorname{supp} w(0) \in \Sigma$, то $\operatorname{supp} T^{-1}u(t, 0)\,Tw(0) \subset \{x \mid |x - y| \leqslant |t - s|$ для некоторого $y \in \Sigma\}$;
(d) выполнено (283a);
(e) пусть $w_1 \in D(B^2)$ и $w_2 \in D(B)$. Положим $\langle\alpha, \beta\rangle = T\langle w_1, w_2\rangle$. Определим $\langle\alpha(t), \beta(t)\rangle \equiv u(t, 0)\langle\alpha, \beta\rangle$. Тогда функция $w(t) = 2^{-1/2}\{B^{-1/2}\alpha(t) + B^{-1/2}\beta(t)\}$ дважды дифференцируема со значениями в $L^2(\mathbb{R}^3)$ и удовлетворяет уравнению (279) с начальными данными $w(0) = w_1$, $w_t(0) = w_2$.

Утверждения (a) — (d) уже доказаны; (e) выполнено, поскольку условия (279) и (280) эквивалентны; необходимо лишь проверить детали, связанные с областями определения (задача 138).

Теперь мы введем классическое представление взаимодействия, которое позже будет полезно и в квантовой теории поля. Пусть

$$\tilde{u}(t, s) = e^{ith_0}\,u(t, s)\,e^{-ish_0}.$$

Тогда для $\eta_0 \in D(h_0)$

$$\frac{d}{dt}\tilde{u}(t, s)\eta_0 = e^{ith_0}(-iv(t))u(t, s)e^{-ish_0}\eta_0 = \\ = e^{+ith_0}(-iv(t))e^{-ith_0}(e^{+ith_0}u(t, s)e^{-ish_0})\eta_0,$$

так что вектор $\tilde{u}(t, s)\eta_0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\tilde{u}(t, s)\eta_0 = -i\tilde{v}(t)\tilde{u}(t, s)\eta_0,$$
$$\tilde{u}(s, s)\eta_0 = \eta_0,$$

где

$$\tilde{v}(t) = e^{+ith_0}v(t)e^{-ith_0}.$$

Отметим, что, в силу оценки (282) и равенства $u(s, t)u(t, s) = u(s, s) = I$, как $u(t, s)$, так и $\tilde{u}(t, s)$ — ограниченные операторы с ограниченными обратными.

Обратимся далее к классической теории рассеяния для уравнения (280), которая из-за наших сильных предположений о $V(x, t)$ очень проста. Пусть $u_0(t)$ обозначает e^{-ith_0}, и пусть t_0 достаточно велико, так что $v(x, t) = 0$ при $|t| \geqslant t_0$. Пусть задано $\eta_- \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$. Определим $W_+\eta_-$ как такой вектор в $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$, для которого

$$\|u_0(t)\eta_- - u(t, 0)(W_+\eta_-)\|_{\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to -\infty. \tag{284}$$

Согласно части (а) теоремы XI.104, имеем

$$\eta(x, t) \equiv u(t, -t_0)u_0(-t_0)\eta_-(x) = u(t, 0)u(0, -t_0)u_0(-t_0)\eta_-(x).$$

Более того, при $t < -t_0$ справедливо равенство $u(t, -t_0) = u_0(t + t_0)$, поскольку $v(t) = 0$ при $t < -t_0$. Итак, при $t < -t_0$ получаем

$$\eta(x, t) = u_0(t + t_0)u_0(-t_0)\eta_-(x) = u_0(t)\eta_-(x),$$

так что если мы положим

$$W_+\eta_- = u(0, -t_0)u_0(-t_0)\eta_-,$$

то (284) выполняется, поскольку норма равна нулю при $t < -t_0$. Аналогично,

$$W_-\eta_+ = u(0, t_0)u_0(t_0)\eta_+.$$

Поскольку и u_0, и u сюръективны, $\operatorname{Ran} W_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h} = \operatorname{Ran} W_-$, так что теория асимптотически полна и

$$S_{\mathrm{cl}} = W_-^{-1}W_+ = [u(0, t_0)u_0(t_0)]^{-1}[u(0, -t_0)u_0(-t_0)] = \\ = u_0(-t_0)u(t_0, 0)u(0, -t_0)u_0(-t_0) = \\ = u_0(-t_0)u(t_0, -t_0)u_0(-t_0) = \tilde{u}(t_0, -t_0).$$

Таким образом, классический оператор рассеяния — не что иное, как пропагатор от $-t_0$ до t_0 в представлении взаимодействия.

Обратимся теперь к квантовополевой задаче и начнем с введения заряженного свободного скалярного поля массы m. Пусть $\mathcal{F}_s^{(1)}(L^2(\mathbb{R}^3))$ — бозонное фоково пространство над $L^2(\mathbb{R}^3)$, и пусть $a^\dagger(\cdot)$ и $a(\cdot)$ — операторы рождения и уничтожения на $\mathcal{F}_s^{(1)}(L^2(\mathbb{R}^3))$, стоящие в формулах (X.74), (X.75) и (X.76). Как и в § X.7, мы обозначаем через F_0 множество конечночастичных векторов и полагаем

$$D_{\mathcal{S}} = \{\psi \in F_0 \,|\, \psi^{(n)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n}) \text{ для всех } n \geqslant 1\}.$$

Пусть $\mathcal{F}_s^{(2)}(L^2(\mathbb{R}^3))$ — другой экземпляр того же фокова пространства, на котором соответствующие операторы уничтожения и рождения мы обозначим через $b(\cdot)$ и $b^\dagger(\cdot)$. Если $\mathcal{F}^{(1)}(L^2(\mathbb{R}^3))$ — гильбертово пространство каких-то бозонов, а $\mathcal{F}_s^{(2)}(L^2(\mathbb{R}^3))$ — гильбертово пространство соответствующих античастиц, то гильбертово пространство объединенной системы есть

$$\mathcal{H} = \mathcal{F}_s^{(1)}(L^2(\mathbb{R}^3)) \otimes \mathcal{F}_s^{(2)}(L^2(\mathbb{R}^3)) = \mathcal{F}\ (\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}).$$

Для каждого $f \in \mathfrak{h}$ операторы $a(f)$, $a^\dagger(f)$, $b(f)$, $b^\dagger(f)$ могут быть естественным образом отождествлены с операторами $a(f) \otimes I$, $a^\dagger(f) \otimes I$, $I \otimes b(f)$, $I \otimes b^\dagger(f)$ в $\mathcal{H}$, которые мы для простоты по-прежнему будем обозначать $a(f)$, $a^\dagger(f)$, $b(f)$ и $b^\dagger(f)$. Определим, как описано в § X.7, операторнозначные обобщенные функции $a(p)$, $a^\dagger(p)$, $b(p)$, $b^\dagger(p)$. В терминах этих операторов уничтожения и рождения в $\mathcal{H}$ определим **свободный гамильтониан**

$$H_0 = \int_{\mathbb{R}^3} \mu(p)\, a^\dagger(p)\, a(p)\, d^3p + \int_{\mathbb{R}^3} \mu(p)\, b^\dagger(p)\, b(p)\, d^3p,$$

где $\mu(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$, **операторы числа частиц**

$$N_+ = \int_{\mathbb{R}^3} a^\dagger(p)\, a(p)\, d^3p, \qquad N_- = \int_{\mathbb{R}^3} b^\dagger(p)\, b(p)\, d^3p$$

и **оператор заряда**

$$Q = N_+ - N_-.$$

Пользуясь теоремой Нельсона об аналитических векторах, легко проверить, что операторы H_0, N_+, N_- и Q в существенном самосопряжены на области $D_{\mathcal{S}} \otimes D_{\mathcal{S}}$, которую впредь мы будем обозначать просто $D_{\mathcal{S}}$. Определим **заряженное свободное скалярное бозонное поле** как операторнозначную обобщенную функцию (заметьте, что индекс нуль указывает на то, что поле свободное, а не на фиксирование нулевого момента времени):

$$\varphi_0(f,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\{a(e^{-iBt}B^{-1/2}f)+b^\dagger(e^{iBt}B^{-1/2}f)\}$$

для $f\in\mathfrak{H}$. Формально $\varphi_0(x,\ t)$ задается простым выражением

$$\varphi_0(x,\ t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[e^{-i(\mu(p)t-p\cdot x)}a(p)+e^{i(\mu(p)t-p\cdot x)}b^\dagger(p)\right]\frac{d^3p}{\sqrt{2\mu(p)}}.$$

Определим также **поля в нулевой момент времени** как

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}(e^{ip\cdot x}a(p)+e^{-ip\cdot x}b^\dagger(p))\frac{d^3p}{\sqrt{2\mu(p)}},$$

$$\pi_0(x)\equiv\dot\varphi_0(x)^*=\frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}(e^{-ip\cdot x}a^\dagger(p)-e^{ip\cdot x}b(p))\sqrt{\frac{\mu(p)}{2}}\,d^3p.$$

Поле $\varphi_0(x,\ t)$ выражается через поле $\varphi_0(x)$ формулой

$$\varphi_0(f,\ t)=e^{iH_0t}\varphi_0(f)e^{-iH_0t}.$$

Операторы рождения и уничтожения удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[a(f),\ a^\dagger(g)]=(f,\ g)_{L^2},\quad [b(f),\ b^\dagger(g)]=(f,\ g)_{L^2},\quad [a^\#(f),\ b^\#(g)]=0$$

для вещественнозначных функций $f,\ g\in L^2(\mathbb{R}^3)$, где индекс $\#$ обозначает наличие или отсутствие крестика.

Если $\mathcal{U}^{(1)}$ и $\mathcal{U}^{(2)}$ — действие группы Лоренца в $\mathcal{F}_s^{(1)}(L^2(\mathbb{R}^3))$ и $\mathcal{F}_s^{(2)}(L^2(\mathbb{R}^3))$, возьмем $\mathcal{U}=\mathcal{U}^{(1)}\otimes\mathcal{U}^{(2)}$ в качестве представления этой группы в нашем случае. Заметим, наконец, что имеется вакуум $\psi_0=\psi_0^{(1)}\otimes\psi_0^{(2)}$, определенный посредством вакуумов $\psi_0^{(i)}$ в пространствах $\mathcal{F}_s^{(i)}(L^2(\mathbb{R}^3))$. Четверка $\langle\mathcal{H},\ \mathcal{U},\ \varphi_0(x,\ t),\ \psi_0\rangle$ удовлетворяет очевидному обобщению аксиом Гординга — Вайтмана на неэрмитовы поля. Этот факт, а также другие сделанные выше утверждения можно проверить точно так же, как и в случае эрмитова скалярного поля, рассмотренного в § X.7 (задача 139).

Наша цель — решить операторнозначную задачу Коши, т. е. найти операторнозначную обобщенную функцию $\varphi(x,\ t)$, удовлетворяющую уравнению и начальным условиям

$$\begin{gathered}\frac{d^2}{dt^2}\varphi(x,\ t)-\Delta\varphi(x,\ t)+m^2\varphi(x,\ t)=V(x,\ t)\varphi(x,\ t),\\ \varphi(x,\ 0)=\varphi_0(x),\qquad \frac{d}{dt}\varphi(x,\ 0)=\pi_0(x)^*.\end{gathered}\tag{285}$$

Мы будем действовать как в классическом случае и сначала решим задачу

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a(x, t) \\ b^\dagger(x, t) \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} -B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(x, t) \\ b^\dagger(x, t) \end{pmatrix} + \\ + \frac{i}{2} B^{-1/2} V B^{-1/2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(x, t) \\ b^\dagger(x, t) \end{pmatrix} = \\ = -i(h_0 + v(t))\begin{pmatrix} a(x, t) \\ b^\dagger(x, t) \end{pmatrix}, \tag{286}$$

$$a(x, 0) = a(x), \quad b^\dagger(x, 0) = b(x),$$

где $a(x)$ — обратный фурье-образ $a(p)$ и где предполагается, что уравнение выполнено в смысле (операторнозначных) обобщенных функций. Поскольку уравнение *линейно*, его можно решить, пользуясь классическим решением. Если

$$u(t, 0) = \begin{pmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) \\ u_{21}(t) & u_{22}(t) \end{pmatrix},$$

где $u_{ij}(t)$: $\mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}$, то, по крайней мере формально,

$$\begin{pmatrix} a(x, t) \\ b^\dagger(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) \\ u_2(t) & u_{22}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(x) \\ b^\dagger(x) \end{pmatrix}.$$

Итак, для $f \in \mathfrak{h}$ определим операторнозначные обобщенные функции $a(\cdot, t)$ и $b^\dagger(\cdot, t)$ посредством

$$a(f, t) = a(u_{11}^{\mathrm{T}}(t) f) + b^\dagger(u_{12}^{\mathrm{T}}(t) f),$$
$$b^\dagger(f, t) = a(u_{21}^{\mathrm{T}}(t) f) + b^\dagger(u_{22}^{\mathrm{T}}(t) f),$$

где $u_{ij}^{\mathrm{T}}(t)$ — результат транспонирования $u_{ij}(t)$ на $\mathfrak{h}$ — связан с $u_{ij}(t)^*$ посредством $u_{ij}^{\mathrm{T}}(t) = Cu_{ij}(t)^* C$. Мы предостерегаем читателя, что здесь везде транспонирования проводятся в $\mathfrak{h} = L^2(\mathbb{R}^3)$, а не по матричным индексам. Наконец, введем $\varphi(\cdot, t)$ и $\pi(\cdot, t)$, полагая

$$\varphi(f, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{a(B^{-1/2}f, t) + b^\dagger(B^{-1/2}f, t)\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}}\{a((u_{11}^{\mathrm{T}}(t) + u_{21}^{\mathrm{T}}(t)) B^{-1/2} f) + b^\dagger((u_{12}^{\mathrm{T}}(t) + u_{22}^{\mathrm{T}}(t)) B^{-1/2} f)\}, \tag{287a}$$

$$\overline{\pi}(f, t)^* = \frac{i}{\sqrt{2}}\{-a(B^{1/2}f, t) + b^\dagger(B^{1/2}f, t) = \\ = \frac{i}{\sqrt{2}}\{a((-u_{11}^{\mathrm{T}}(t) + u_{21}^{\mathrm{T}}(t)) B^{1/2} f) + b^\dagger((-u_{12}^{\mathrm{T}}(t) + u_{22}^{\mathrm{T}}(t)) B^{1/2} f)\}; \tag{287b}$$

$\pi(\cdot,\ t)$ определено лишь для $f \in D(B^{1/2})$. В силу (281), имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &u'_{11}(t) + u'_{21}(t) = -iB(u_{11}(t) - u_{21}(t)), \\ &u'_{12}(t) + u'_{22}(t) = iB(-u_{12}(t) + u_{22}(t)), \\ &u''_{11}(t) + u''_{21}(t) = (-B^2 + B^{1/2}VB^{-1/2})(u_{11}(t) + u_{21}(t)), \\ &u''_{12}(t) + u''_{22}(t) = (-B^2 + B^{1/2}VB^{-1/2})(u_{12}(t) + u_{22}(t)). \end{aligned}$$

Таким образом, для вещественнозначных функций $f \in D(B)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi(f,\ t) &= \frac{i}{\sqrt{2}}\{a([-B(u_{11}(t) - u_{21}(t))]^{\mathrm{T}} B^{-1/2} f) + \\ &\quad + b^\dagger([B(-u_{12}(t) + u_{22}(t))]^{\mathrm{T}} B^{-1/2} f)\} = \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}}\{-a((u^{\mathrm{T}}_{11}(t) - u^{\mathrm{T}}_{21}(t)) B^{1/2} f) + \\ &\quad + b^\dagger((-u^{\mathrm{T}}_{12}(t) + u^{\mathrm{T}}_{22}(t)) B^{1/2} f)\} = \pi(f,\ t)^* \end{aligned}$$

и аналогично для $f \in D(B^2)$

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(f,\ t) = \varphi(-B^2 f,\ t) + \varphi(Vf,\ t),$$

откуда видно, что $\varphi(\cdot,\ t)$ удовлетворяет (285) в смысле обобщенных функций.

В терминах операторов $a(f,\ t)$, $b^\dagger(f,\ t)$ определим естественным образом операторы

$$a^\dagger(f,\ t) = a(Cf,\ t)^*, \qquad b(f,\ t) = b^\dagger(Cf,\ t)^*.$$

Тогда в момент времени t эти операторы удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$\begin{gathered} [a(f,\ t),\ a^\dagger(g,\ t)] = (Cf,\ g), \quad [b(f,\ t),\ b^\dagger(g,\ t)] = (Cf,\ g), \\ [a^\#(f,\ t),\ b^\#(g,\ t)] = 0. \end{gathered}$$

Чтобы в этом убедиться, заметим, что

$$\begin{aligned} a(f,\ t) &= a(u^{\mathrm{T}}_{11} f) + b^\dagger(u^{\mathrm{T}}_{12} f), \\ a^\dagger(g,\ t) &= a(u^{\mathrm{T}}_{11} Cg)^* + b^\dagger(u^{\mathrm{T}}_{12} Cg)^* = a^\dagger(Cu^{\mathrm{T}}_{11} Cg) + b(Cu^{\mathrm{T}}_{12} Cg) = \\ &= a^\dagger(u^*_{11} g) + b(u^*_{12} g). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} [a(f,\ t),\ a^\dagger(g,\ t)] &= [a(u^{\mathrm{T}}_{11} f),\ a^\dagger(u^*_{11} g)] + [b^\dagger(u^{\mathrm{T}}_{12} f),\ b(u^*_{12} g)] = \\ &= (Cu^{\mathrm{T}}_{11} f,\ u^*_{11} g) - (Cu^*_{12} g,\ u^{\mathrm{T}}_{12} f) = \\ &= (u^*_{11} Cf,\ u^*_{11} g) - (u^*_{12} Cf,\ u^*_{12} g) = \\ &= (Cf,\ (u_{11} u^*_{11} - u_{12} u^*_{12}) g) = (Cf,\ g), \end{aligned}$$

поскольку $u_{11}u_{11}^* - u_{12}u_{12}^* = I$ в силу (283a). Другие коммутаторы вычисляются аналогично. Отсюда следует, что

$$[\varphi(f, t), \pi(g, t)] = i(Cf, g).$$

Наконец, проверим, что поле $\varphi(x, t)$ причинно, иными словами что

$$[\varphi(f, t), \varphi(g, t')] = 0, \tag{288a}$$

$$[\varphi(f, t), \varphi(g, t')^*] = 0, \tag{288b}$$

если множества $\{\langle x, t\rangle | x \in \operatorname{supp} f\}$ и $\{\langle x, t'\rangle | x \in \operatorname{supp} g\}$ пространственно-подобно разделены. Поскольку $a(f)$ коммутирует с $a(g)$ для всех f и g и аналогично ведет себя $b(\cdot)$, (288a) выполняется автоматически. Мы докажем равенство (288b) в случае, когда $t' = 0$. Общий случай доказывается аналогично при помощи соотношения $u(t_1, t_2)u(t_2, t_3) = u(t_1, t_3)$ (задача 140). Итак,

$$\begin{aligned}
[\varphi(f, t), \varphi(g)^*] &= \frac{1}{2}[a((u_{11}+u_{21})^{\mathrm T}B^{-1/2}f),\ a^\dagger(CB^{-1/2}g)] + \\
&\quad + \frac{1}{2}[b^\dagger((u_{12}+u_{22})^{\mathrm T}B^{-1/2}f), b(CB^{-1/2}g)] = \\
&= \frac{1}{2}(C(u_{11}+u_{21})^{\mathrm T}B^{-1/2}f, CB^{-1/2}g) - \\
&\quad - \frac{1}{2}(B^{-1/2}g, (u_{21}+u_{22})^{\mathrm T}B^{-1/2}f) = \\
&= \frac{1}{2}((u_{11}+u_{21})^* CB^{-1/2}f, CB^{-1/2}g) - \\
&\quad - \frac{1}{2}((u_{21}+u_{22})^* CB^{-1/2}f, CB^{-1/2}g) = \\
&= \frac{1}{2}(Cf, B^{-1/2}\{(u_{11}+u_{21}) - (u_{12}+u_{22})\}B^{-1/2}Cg).
\end{aligned}$$

Пусть теперь

$$d(t) = \begin{pmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) \end{pmatrix} \equiv T^{-1}u(t, 0)T.$$

Тогда $d_{12}(t) = B^{-1/2}\{(u_{11}+u_{21}) - (u_{12}+u_{22})\}B^{-1/2}$. Поскольку решение классического уравнения причинно (теорема XI.104(c)), заключаем, что матричный элемент $(Cf, d_{12}(t)Cg)$ равен нулю при $t < T$, если носители f и g находятся на расстоянии T друг от друга.

Сказанное выше суммирует

Теорема XI.105. Пусть $\varphi(f, t)$ и $\pi(f, t)$ заданы равенствами (287). Тогда $\varphi(\cdot, t)$ и $\pi(\cdot, t)$ суть операторнозначные обобщенные функции и

(a) $\varphi(\cdot, t)$ удовлетворяет уравнению и начальным условиям (285), где $\varphi_0(x)$ и $\pi_0(x)$—свободные поля в нулевой момент времени;

(b) $\frac{d}{dt}\varphi(\cdot, t)=\pi(\cdot, t)^*$;

(c) в каждый момент t поля $\varphi(\cdot, t)$ и $\pi(\cdot, t)$ удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям $[\varphi(f, t), \pi(g, t)] = i(Cf, g)$;

(d) имеет место микроскопическая причинность.

Обратимся теперь к задаче рассеяния во внешнем поле $V(x, t)$. Пусть $\varphi_{\rm in}(x, t)$ — свободное заряженное скалярное поле массы m с соответствующими операторами рождения и уничтожения $a^\dagger_{\rm in}$ и $a_{\rm in}$. Как и ранее, $V(x, t)$ — вещественнозначная функция, равная нулю при $|t| \geqslant t_0$. Нам бы хотелось решить следующую задачу Коши:

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(x, t) - \Delta\varphi(x, t) + m^2\varphi(x, t) = V(x, t)\varphi(x, t), \tag{289}$$

$$\varphi(x, -t_0) = \varphi_{\rm in}(x, -t_0), \qquad \varphi^*(x, -t_0) = \pi_{\rm in}(x, -t_0).$$

Если ввести

$$\begin{aligned} a_{\rm in}(f, t) &\equiv e^{iH_0t}a_{\rm in}(f)\,e^{-iH_0t} = a_{\rm in}(e^{-iBt}f),\\ b^\dagger_{\rm in}(f, t) &\equiv e^{iH_0t}b^\dagger_{\rm in}(f)\,e^{-iH_0t} = b^\dagger_{\rm in}(e^{iBt}f),\end{aligned}$$

то $\varphi_{\rm in}(x, -t_0)$ и $\pi_{\rm in}(x, -t_0)$ выражаются через $a_{\rm in}(x)$ и $b^\dagger_{\rm in}(x)$ формулами

$$\begin{aligned} \varphi_{\rm in}(f, -t_0) &= 2^{-1/2}\{a_{\rm in}(B^{-1/2}f, -t_0) + b^\dagger_{\rm in}(B^{-1/2}f, -t_0)\} =\\ &= 2^{-1/2}\{a_{\rm in}(e^{iBt_0}B^{-1/2}f) + b^\dagger_{\rm in}(e^{-iBt_0}B^{-1/2}f)\},\\ \pi_{\rm in}(\bar{f}, -t_0)^* &= i2^{-1/2}\{-a_{\rm in}(e^{iBt_0}B^{1/2}f) + b^\dagger_{\rm in}(e^{-iBt_0}B^{1/2}f)\}.\end{aligned}$$

Задачу Коши (289) можно решить способом, аналогичным тому, которым была решена задача Коши для $t=0$. Положим $u(t) = u(t, -t_0)$ и введем

$$\begin{aligned} a(x, t) &\equiv u_{11}(t)\,a_{\rm in}(x, -t_0) + u_{12}(t)\,b^\dagger_{\rm in}(x, -t_0),\\ b^\dagger(x, t) &\equiv u_{21}(t)\,a_{\rm in}(x, -t_0) + u_{22}(t)\,b^\dagger_{\rm in}(x, -t_0)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \varphi(f, t) &\equiv 2^{-1/2}\{a(B^{-1/2}f, t) + b^\dagger(B^{-1/2}f, t)\} =\\ &= 2^{-1/2}\{a_{\rm in}((u^T_{11} + u^T_{21})B^{-1/2}f, -t_0) + b^\dagger_{\rm in}((u^T_{12} +\\ &\qquad + u^T_{22})B^{-1/2}f, -t_0)\} =\\ &= 2^{-1/2}\{a_{\rm in}(e^{iBt_0}(u^T_{11} + u^T_{21})B^{-1/2}f) +\\ &\qquad + b^\dagger_{\rm in})\,e^{-iBt_0}(u^T_{12} + u^T_{22})B^{-1/2}f)\},\\ \pi(f, t)^* &\equiv i2^{-1/2}\{a_{\rm in}(e^{iBt_0}(-u^T_{11} + u^T_{21})B^{1/2}f) +\\ &\qquad + b^\dagger_{\rm in}(e^{-iBt_0}(-u^T_{12} + u^T_{22})B^{1/2}f)\}.\end{aligned}$$

Тогда, как и выше, $d\varphi(f, t)/dt = \pi(f, t)^*$ и $\varphi(x, t)$ удовлетворяет (289) в смысле обобщенных функций. В частности, $\varphi(x, t) = \varphi_{\text{in}}(x, t)$ при всех $t \leqslant -t_0$.

Поскольку $\varphi(x, t)$ удовлетворяет (289), а $V(x, t) = 0$ при $t \geqslant t_0$, имеем

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(x, t) - \Delta\varphi(x, t) + m^2\varphi(x, t) = 0, \qquad t \geqslant t_0.$$

Иными словами, $\varphi(x, t)$ удовлетворяет уравнению свободного поля при $t \geqslant t_0$. Это наводит на мысль ввести

$$a_{\text{out}}(x, t_0) = u_{11}(t_0, -t_0)\, a_{\text{in}}(x, -t_0) + u_{12}(t_0, -t_0)\, b^\dagger_{\text{in}}(x, -t_0),$$
$$b^\dagger_{\text{out}}(x, t_0) = u_{21}(t_0, -t_0)\, a_{\text{in}}(x, -t_0) + u_{22}(t_0, -t_0)\, b^\dagger_{\text{in}}(x, -t_0)$$

и

$$\varphi_{\text{out}}(f, t) = 2^{-1/2}\{a_{\text{out}}(e^{-i(t-t_0)B}B^{-1/2}f, t_0) + b^\dagger_{\text{out}}(e^{i(t-t_0)B}B^{-1/2}f, t_0)\},$$
$$\pi_{\text{out}}(f, t)^* = i2^{-1/2}\{-a_{\text{out}}(e^{i(t-t_0)B}B^{1/2}f, t_0) + b^\dagger_{\text{out}}(e^{i(t-t_0)B}B^{1/2}f, t_0)\}.$$

Для $f \in \mathscr{S}$ величины $a_{\text{out}}(f, t)$, $b^\dagger_{\text{out}}(f, t)$, $\varphi_{\text{out}}(f, t)$ и $\pi_{\text{out}}(f, t)$ и все их произведения — корректно определенные операторы на $D_{\mathscr{S}}$. Далее, $d\varphi_{\text{out}}(f, t)/dt = \pi_{\text{out}}(f, t)^*$, и $\varphi_{\text{out}}(x, t)$ — «свободное поле» в том смысле, что оно удовлетворяет свободному уравнению Клейна — Гордона при всех t. Заметим также, что $\varphi(x, t) = \varphi_{\text{out}}(x, t)$ при всех $t \geqslant t_0$. Позже мы увидим, хотя априори это и не очевидно, что для out-полей существует вакуум ψ_{out}, что

$$H_{\text{out}} = \int_{\mathbf{R}^3} \mu(p)\, a^\dagger_{\text{out}}(p, t_0)\, a_{\text{out}}(p, t_0)\, d^3p + \int_{\mathbf{R}^3} \mu(p)\, b^\dagger_{\text{out}}(p, t_0)\, b_{\text{out}}(p, t_0)\, d^3p \tag{290}$$

имеет смысл самосопряженного оператора в $\mathscr{H}$ и что

$$\varphi_{\text{out}}(x, t) = e^{iH_{\text{out}}(t-t_0)}\varphi_{\text{out}}(x, t_0)\, e^{-iH_{\text{out}}(t-t_0)},$$
$$\pi_{\text{out}}(x, t) = e^{iH_{\text{out}}(t-t_0)}\pi_{\text{out}}(x, t_0)\, e^{-iH_{\text{out}}(t-t_0)}.$$

Поскольку a_{out} содержит в себе некоторые $b^\dagger_{\text{in}}$, оператор H_{out} не аннулирует вакуум ψ_{in}, так что $H_{\text{out}} \neq H_{\text{in}} \equiv H_0$. Таким образом, асимптотически свободная динамика около $t = +\infty$ — не то же самое, что асимптотически свободная динамика около $t = -\infty$. Динамическая ситуация изображена на рис. XI.15. В соответствии с общими идеями этой главы нам следует ввести преобразование рассеяния $\mathfrak{S}$ как отображение множества операторов, заданное соответствиями

$$\mathfrak{S}\colon \varphi_{\text{in}}(x, 0) \longmapsto \varphi_{\text{out}}(x, 0), \qquad \pi_{\text{in}}(x, 0) \longmapsto \pi_{\text{out}}(x, 0).$$

Мы увидим, что $\mathfrak{S}$ унитарно порождаемо, т. е. что существует унитарный оператор S в $\mathscr{H}$, такой, что

$$\varphi_{\text{out}}(f, 0) = S^{-1}\varphi_{\text{in}}(f, 0)\, S, \qquad \pi_{\text{out}}(f, 0) = S^{-1}\pi_{\text{in}}(f, 0)\, S.$$

Мы назовем S **оператором рассеяния**, а $\mathfrak{S}$ — **оператором рассеяния в гейзенберговой картине**, поскольку он представляет собой пре-

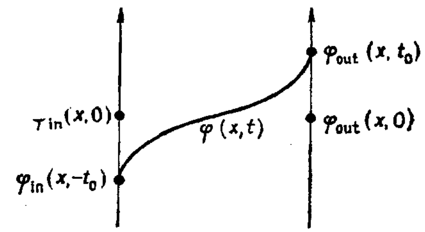


Рис. XI.15.

образование, отвечающее рассеянию, в гейзенберговой картине квантовой механики. Заметим, что S может быть определен этими условиями лишь с точностью до фазы. Принятое определение S соответствует S-матрице Яуха в противоположность S-матрице ЭБФМ, которой мы до сих пор пользовались в этом томе. Этот выбор общепринят в теории поля, и мы снова воспользуемся им в следующем разделе. У нас имеется явное действие преобразования $\mathfrak{S}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}(a_{\text{in}}(f)) &= a_{\text{out}}(f, 0) = 2^{-1/2}\{\varphi_{\text{out}}(f, 0) + i\pi(f, 0)^*\} = \\
&= a_{\text{out}}(e^{it_0B}f, t_0) = a_{\text{in}}(u_{11}^{\mathrm{T}}(t_0, -t_0)\, e^{it_0B}f, -t_0) + \\
&\qquad + b_{\text{in}}^{\dagger}(u_{12}^{\mathrm{T}}(t_0, -t_0)\, e^{it_0B}f, -t_0) = \\
&= a_{\text{in}}(e^{it_0B}u_{11}^{\mathrm{T}}(t_0, -t_0)\, e^{it_0B}f) + \\
&\qquad + b_{\text{in}}^{\dagger}(e^{-it_0B}u_{12}^{\mathrm{T}}(t_0, -t_0)\, e^{it_0B}f) = \\
&= a_{\text{in}}(\tilde{u}_{11}^{\mathrm{T}}(t_0, -t_0)\, f) + b_{\text{in}}^{\dagger}(\tilde{u}_{12}^{\mathrm{T}}(t_0, -t_0)\, f)
\end{aligned}$$

и аналогично

$$\mathfrak{S}(b_{\text{in}}^{\dagger}(f)) = b_{\text{out}}^{\dagger}(f, 0) = a_{\text{in}}(\tilde{u}_{21}^{\mathrm{T}}(t_0, -t_0)\, f) + b_{\text{in}}^{\dagger}(\tilde{u}_{22}^{\mathrm{T}}(t_0, -t_0)\, f).$$

Следовательно, преобразование от операторов рождения и уничтожения в нулевой момент времени in-поля к операторам рождения и уничтожения в нулевой момент времени out-поля дается равенством

$$\begin{pmatrix} a_{\text{out}}(x, 0) \\ b_{\text{out}}^{\dagger}(x, 0) \end{pmatrix} = S_{\text{cl}} \begin{pmatrix} a_{\text{in}}(x, 0) \\ b_{\text{in}}^{\dagger}(x, 0) \end{pmatrix},$$

где $S_{\text{cl}} = \tilde{u}(t_0, -t_0) = e^{it_0h_0}u(t_0, -t_0)e^{it_0h_0}$ — классический оператор рассеяния.

Мы пытаемся построить унитарный оператор S, такой, что

$$S^{-1}a^{\#}_{\text{in}}(f)S = a^{\#}_{\text{out}}(f), \qquad S^{-1}b^{\#}_{\text{in}}(f)S = b^{\#}_{\text{out}}(f), \tag{291}$$

где $a^{\dagger}_{\text{out}}$, b_{out} выражаются через a_{out}, $b^{\dagger}_{\text{out}}$ обычными формулами, включающими сопряжение C. Поскольку h_0 коммутирует с λ и выполняется (283), $\tilde{u}(t_0, -t_0)$ удовлетворяет равенству

$$\tilde{u}(t_0, -t_0)^*\lambda\tilde{u}(t_0, -t_0) = \lambda = \tilde{u}(t_0, -t_0)\lambda\tilde{u}(t_0, -t_0)^*. \tag{292}$$

Таким образом, то же доказательство, что и в теореме XI.105, показывает, что операторы a_{out}, b_{out} удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$[a_{\text{out}}(f, 0), a^{\dagger}_{\text{out}}(g, 0)] = (Cf, g), \qquad [b_{\text{out}}(f, 0), b^{\dagger}_{\text{out}}(g, 0)] = (Cf, g),$$

а все остальные коммутаторы исчезают.

Следующая теорема сводит вопрос об унитарной порождаемости преобразования рассеяния к проверке некоторого свойства классического пропагатора.

Теорема XI.106. Предположим, что $\tilde{u}_{11}(t_0, -t_0)^{-1}\tilde{u}_{12}(t_0, -t_0)$ — оператор Гильберта — Шмидта в $L^2(\mathbb{R}^3)$. Тогда существует унитарный оператор S в $\mathscr{H} = \mathscr{F}^{(1)}_s(L^2(\mathbb{R}^3)) \otimes \mathscr{F}^{(2)}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$, такой, что выполняются равенства (291).

Доказательство. Поскольку $\tilde{u}$ удовлетворяет (292), имеем

$$\tilde{u}^*_{11}\tilde{u}_{11} = 1 + \tilde{u}^*_{12}\tilde{u}_{12}, \qquad \tilde{u}_{11}\tilde{u}^*_{11} = 1 + \tilde{u}_{12}\tilde{u}^*_{12}, \tag{293}$$

так что $\tilde{u}^*_{11}\tilde{u}_{11} \geqslant 1$ и $\tilde{u}_{11}\tilde{u}^*_{11} \geqslant 1$, откуда следует, что $\operatorname{Ran} \tilde{u}_{11} = L^2(\mathbb{R}^3)$ и что $\tilde{u}^{-1}_{11}$ существует и ограничен. Итак, произведение $\tilde{u}_{11}(t_0, -t_0)^{-1}\tilde{u}_{12}(t_0, -t_0)$ имеет смысл.

Чтобы доказать теорему, мы построим в $\mathscr{H}$ вектор ψ_{out} — вакуумный вектор для out-полей. Как только это будет сделано, будет легко выписать оператор S^{-1} явно.

Согласно теоремам VI.17 и VI. 22(e) и сделанным предположениям, в $L^2(\mathbb{R}^3)$ существуют ортонормированные наборы $\{f_l\}$, $\{g_l\}$, такие, что оператор $L = \tilde{u}^{-1}_{11}\tilde{u}_{12}$ можно записать в виде

$$Lh = \sum_{l=1}^{N_0} \lambda_l (g_l, h) f_l,$$

где λ_l — собственные значения оператора $|L|$ и $\sum \lambda_l^2 < \infty$. Число N_0 может быть конечным или бесконечным. Мы рассмотрим случай $N_0 = \infty$, поскольку именно здесь возникают наибольшие трудности. Из (293) следует, что

$$1 = LL^* + (\tilde{u}_{11}^{-1})(\tilde{u}_{11}^{-1})^*, \tag{294}$$

а поскольку $LL^*h = \sum \lambda_i^2 (f_i, h) f_i$, отсюда вытекает, что $\lambda_i \leqslant 1$, так как $(\tilde{u}_{11}^{-1})(\tilde{u}_{11}^{-1})^* \geqslant 0$. Далее, если $\lambda_{i_0} = 1$ для некоторого i_0, то (294) влечет за собой равенство $(\tilde{u}_{11}^{-1})^* f_{i_0} = 0$, которое неверно, поскольку $\operatorname{Ran} \tilde{u}_{11}^{-1} = L^2(\mathbb{R}^3)$. Итак, $\lambda_i < 1$ для всех i.

Далее, обозначим вакуум в $\mathscr{H}$ через ψ_{in}, и пусть F_{in} — множество конечных линейных комбинаций векторов вида $\psi_1 \otimes \psi_2$, где $\psi_i \in F_0 \subset \mathscr{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$. При помощи ортонормированных наборов $\{f_i\}$, $\{g_i\}$ введем операторы

$$a_i = a_{\text{in}}(Cf_i), \qquad b_i = b_{\text{in}}(g_i).$$

Формально out-вакуум задается формулой

$$\psi_{\text{out}} = d\left(\prod_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i a_i^* b_i^*}\right)\psi_{\text{in}},$$

где константа d выбрана так, что $\|\psi_{\text{out}}\| = 1$. Чтобы придать смысл этому выражению, начнем с рассмотрения вектора $e^{-\lambda_1 a_1^* b_1^*}\psi_{\text{in}}$, который мы определим степенным рядом:

$$e^{-\lambda_1 a_1^* b_1^*}\psi_{\text{in}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_1 a_1^* b_1^*)^n}{n!}\psi_{\text{in}}.$$

Для каждого n вакуум ψ_{in} лежит в области определения оператора $(a_1^* b_1^*)^n$ и

$$(a_1^* b_1^*)^n \psi_{\text{in}} = \left|\sqrt{n!}\, S_n (\otimes^n f_1)\right| \otimes \left|\sqrt{n!}\, S_n (\otimes^n \bar{g}_1)\right| = \\ = n!\, (\otimes^n f_1) \otimes (\otimes^n \bar{g}_1).$$

Для разных n векторы $(a_1^* b_1^*)^n \psi_{\text{in}}$ ортогональны, поэтому

$$\left\|e^{-\lambda_1 a_1^* b_1^*}\psi_{\text{in}}\right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{2n}}{(n!)^2} \|(a_1^* b_1^*)^n \psi_{\text{in}}\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_1^{2n} = \frac{1}{1-\lambda_1^2}.$$

Итак, вектор $e^{-\lambda_1 a_1^* b_1^*}\psi_{\text{in}}$ имеет смысл, поскольку $\lambda_1 < 1$. Аналогично, пользуясь тем, что $(f_1, f_2) = 0 = (g_1, g_2)$, имеем

$$(a_2^* b_2^*)^{n-s} (a_1^* b_1^*)^s \psi_{\text{in}} = \left[\sqrt{n!}\, S_n (\otimes^{n-s} f_2 \otimes^s f_1)\right] \otimes \\ \otimes \left|\sqrt{n!}\, S_n (\otimes^{n-s} \bar{g}_2 \otimes^s \bar{g}_1)\right|,$$

откуда

$$\|(a_2^* b_2^*)^{n-s} (a_1^* b_1^*)^s \psi_{\text{in}}\|^2 = (n!)^2 \left[\frac{(n-s)!\, s!}{n!}\right]^2 = [(n-s)!\, s!]^2.$$

Таким образом,

$$\left\|e^{-\lambda_2 a_2^* b_2^*} e^{-\lambda_1 a_1^* b_1^*} \psi_{\rm in}\right\|^2 = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-\lambda_1 a_1^* b_1^* - \lambda_2 a_2^* b_2^*)^n \psi_{\rm in}\right\|^2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)^2 \sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{n!}{(n-s)!\,s!}\right)^2 \lambda_1^{2s}\lambda_2^{2(n-s)} \|(a_2^* b_2^*)^{n-s}(a_1^* b^*)^s \psi_{\rm in}\|^2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n} \lambda_1^{2s}\lambda_2^{2(n-s)} = (1-\lambda_1^2)^{-1}(1-\lambda_2^2)^{-1}.$$

Продолжая действовать таким способом, мы покажем, что вектор $\chi_N = \left(\prod_{i=1}^{N} e^{-\lambda_i a_i^* b_i^*}\right)\psi_{\rm in}$ существует и что $\|\chi_N\|^2 = \prod_{i=1}^{N}(1-\lambda_i^2)^{-1}$. Более того, пользуясь ортонормированностью векторов $\{f_i\}$ и векторов $\{g_i\}$, аналогично предыдущему вычислению (задача 141а) получаем, что

$$\|\chi_N - \chi_M\|^2 = \prod_{i=1}^{N}(1-\lambda_i^2)^{-1} - \prod_{i=1}^{M}(1-\lambda_i^2)^{-1}. \tag{295}$$

В силу допущения о том, что L — оператор Гильберта — Шмидта, $\sum \lambda_i^2 < \infty$, так что бесконечное произведение $\prod_{i=1}^{\infty}(1-\lambda_i^2)^{-1}$ сходится. Следовательно, $\{\chi_N\}$ — последовательность Коши, и мы обозначим ее должным образом нормированный предел через $\psi_{\rm out}$.

Для доказательства того, что $\psi_{\rm out}$ аннулируется оператором $a_{\rm out}(f)$, напомним, что

$$a_{\rm out}(f) = a_{\rm in}(\tilde{u}_{11}^{\rm T} f) + b_{\rm in}^{\dagger}(\tilde{u}_{12}^{\rm T} f).$$

Поскольку $\operatorname{Ran}(\tilde{u}_{11}^{\rm T})^{-1} = L^2(\mathbb{R}^3)$, можно считать, что f имеет вид $f = (\tilde{u}_{11}^{\rm T})^{-1} h$. Выберем $h = Cf_i$. Тогда

$$a_{\rm out}((\tilde{u}_{11}^{\rm T})^{-1} Cf_i) = a_{\rm in}(Cf_i) + b_{\rm in}^{\dagger}(\tilde{u}_{12}^{\rm T}(\tilde{u}_{11}^{\rm T})^{-1} Cf_i) =$$

$$= a_{\rm in}(Cf_i) + b_{\rm in}^{\dagger}(C((\tilde{u}_{11})^{-1}\tilde{u}_{12})^* f_i) =$$

$$= a_{\rm in}(Cf_i) + b_{\rm in}^{\dagger}(C\lambda_i g_i) = a_i + \lambda_i b_i^*.$$

В силу ортогональности наборов $\{f_i\}$ и $\{g_i\}$, все операторы $a_i^\#$ и $b_i^\#$ коммутируют при разных i, так что

$$(a_i + \lambda_i b_i^*)\chi_N = \left(\prod_{j\neq i}^{N} e^{-\lambda_j a_j^* b_j^*}\right)(a_i + \lambda_i b_i^*) e^{-\lambda_i a_i^* b_i^*}\psi_{\rm in} = 0,$$

поскольку $(a_i + \lambda_i b_i^*) e^{-\lambda_i a_i^* b_i^*}\psi_{\rm in} = 0$ за счет канонических коммутационных соотношений, которым удовлетворяют a_i и a_i^* (задача

141b). Устремляя $N \to \infty$, видим, что ψ_{out} лежит в области определения оператора $a_{\text{out}}((\tilde{u}_{11}^{\text{T}})^{-1}Cf_l)$ и что $a_{\text{out}}((\tilde{u}_{11}^{\text{T}})^{-1}Cf_l)\psi_{\text{out}}=0$. Предположим, что $k \in \{f_i\}^{\perp}$. Тогда $a_{\text{out}}((\tilde{u}_{11}^{\text{T}})^{-1}Ck)=a_{\text{in}}(Ck)$, а поскольку $a_{\text{in}}(Ck)$ коммутирует с $a_i^{\#}$ и $b_i^{\#}$ для всех i, заключаем, что $a_{\text{out}}((\tilde{u}_{11}^{\text{T}})^{-1}Ck)\psi_{\text{out}}=0$. Разлагая произвольное $h \in L^2(\mathbb{R}^3)$ по набору $\{f_l\}$ и некоторому базису в $\{f_l\}^{\perp}$, легко получить из предыдущего, что ψ_{out} лежит в области определения оператора $a_{\text{out}}((\tilde{u}_{11}^{\text{T}})^{-1}h)$ и что $a_{\text{out}}((\tilde{u}_{11}^{\text{T}})^{-1}h)\psi_{\text{out}}=0$. Доказательство того, что b_{out} аннулирует ψ_{out}, аналогично и использует равенство $\tilde{u}_{21}^{*}(\tilde{u}_{22}^{*})^{-1}=\tilde{u}_{11}^{-1}\tilde{u}_{12}$, которое следует из того, что $\tilde{u}$ удовлетворяет (292).

Введем

$$h_l=(\tilde{u}_{11}^{-1})*f_l/\sqrt{1-\lambda_l^2},\qquad k_l=(\tilde{u}_{22}^{-1})*g_l/\sqrt{1-\lambda_l^2}$$

и

$$\tilde{a}_l\equiv a_{\text{out}}(Ch_l),\qquad \tilde{b}_l\equiv b_{\text{out}}(k_l).$$

Тогда, проводя такие же вычисления, как и выше, имеем

$$\tilde{a}_l=a_{\text{in}}(\tilde{u}_{11}^{\text{T}}Ch_l)+b_{\text{in}}^{\dagger}(\tilde{u}_{12}^{\text{T}}Ch_l)=\frac{a_l+\lambda_l b_l^{*}}{\sqrt{1-\lambda_l^2}}\ \text{ и }\ \tilde{b}_l=\frac{b_l+\lambda_l a_l^{*}}{\sqrt{1-\lambda_l^2}}.$$

Из (294) легко следует, что $\{h_l\}$ — ортонормированный набор. Чтобы обнаружить, что и $\{k_l\}$ — ортонормированный набор, воспользуемся сначала равенством (283a) и докажем, что

$$\sum_{l=1}^{\infty}\lambda_l^2(g_l,\ \cdot)g_l=LL^{*}=\tilde{u}_{22}^{-1}\tilde{u}_{21}\tilde{u}_{21}^{*}(u_{22}^{-1})^{*}=I-\tilde{u}_{22}^{-1}(\tilde{u}_{22}^{-1})^{*},$$

откуда ортонормированность легко следует. Теперь дополним $\{h_l\}$ до ортонормированного базиса в $L^2(\mathbb{R}^3)$, который мы обозначим $\{\eta_l\}$, и дополним $\{Ck_l\}$ до ортонормированного базиса, который обозначим $\{\gamma_l\}$. Для векторов вида $\prod a_{\text{in}}^{\dagger}(\eta_l)\prod b_{\text{in}}^{\dagger}(\gamma_j)\psi_{\text{in}}$ определим S^{-1}, полагая

$$S^{-1}\colon\ \psi_{\text{in}}\mapsto\psi_{\text{out}},$$

$$S^{-1}\colon\ \prod a_{\text{in}}^{\dagger}(\eta_l)\prod b_{\text{in}}^{\dagger}(\gamma_j)\psi_{\text{in}}\mapsto\prod a_{\text{out}}^{\dagger}(\eta_i)\prod b_{\text{out}}^{\dagger}(\gamma_j)\psi_{\text{out}},$$

где произведения взяты по некоторым конечным наборам индексов i и j. Сначала отметим, что правая часть имеет смысл, поскольку ψ_{out} лежит в области определения оператора $\prod a_{\text{out}}^{\dagger}(\eta_l)\prod b_{\text{out}}^{\dagger}(\gamma_j)$. Если $\eta_i=(\tilde{u}_{11}^{-1})^{*}f_i/\sqrt{1-\lambda_i^2}$, то

$$a_{\text{out}}^{\dagger}(\eta_i)=(a_i^{*}+\lambda_i b_i)/\sqrt{1-\lambda_i^2}.$$

С другой стороны, если η_i — один из других базисных элементов, то $\eta_i = (\tilde{u}_{11}^{-1})^* f$, где $f \in \{f_i\}^{\perp}$ и $\|f\| = 1$. Все это выполняется потому, что, как следует из (294), $(\tilde{u}_{11}^{-1})^*$ — изометрия из $\{f_i\}^{\perp}$ на $\{(\tilde{u}_{11}^{-1})^* [\{f_i\}]\}^{\perp}$. Таким образом, в этом случае $a_{\text{out}}^{\dagger}(\eta_i) = a_{\text{in}}(Cf)^*$, где $f \perp \{f_i\}$. Аналогичные утверждения, основанные на свойствах $(\tilde{u}_{22}^{-1})^*$, выполняются для $b_{\text{out}}^{\dagger}(\gamma_i)$. Итак, каждый сомножитель в $\prod a_{\text{out}}^{\dagger}(\eta_i) \prod b_{\text{out}}^{\dagger}(\gamma_j)$ есть произведение конечного числа степеней операторов $a_i^{\#}$, $b_i^{\#}$, $a_{\text{in}}(Cf)$, $b_{\text{in}}(g)$. Когда такие произведения применяются к χ_N, то предельное состояние ψ_{out} все еще существует, поскольку операторы $a_i^{\#}$, $b_i^{\#}$ при $N > i$ не влияют на сделанные утверждения о сходимости χ_N. Кроме того, операторы $a_{\text{in}}(Cf)$, $b_{\text{in}}(g)$ коммутируют с $e^{-\lambda_i a_i^* b_i^*}$ для всех i, поскольку $f \perp \{f_i\}$, $g \perp \{g_i\}$, и при пронесении внутрь также не влияют на сделанные утверждения. Та же самая ортогональность и определения операторов $\tilde{a}_i$, $\tilde{b}_i$ гарантируют, что операторы $a_{\text{out}}^{\dagger}(\eta_i)$, $a_{\text{out}}(C\eta_i)$, $b_{\text{out}}^{\dagger}(\gamma_i)$, $b_{\text{out}}(C\gamma_i)$ удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям, откуда следует, что S^{-1} сохраняет норму и сохраняет ортогональность при действии на ортонормированном базисе $\left\{\prod a_{\text{in}}^{\dagger}(\eta_i) \prod b_{\text{in}}^{\dagger}(\gamma_i)\psi_{\text{in}}\right\}$ в $\mathscr{H}$. Таким образом, S^{-1} однозначно продолжается до изометрии $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}$, и легко проверить, что выполняется (291). Читателю предлагается восполнить детали предыдущего построения (задача 141c)

Для того чтобы показать, что оператор S^{-1} унитарен, достаточно показать, что он имеет плотную область значений, а для этого достаточно показать, что каждый вектор вида $\prod a_{\text{in}}^{\dagger}(\eta_i) \times \times \prod b_{\text{in}}^{\dagger}(\gamma_i)\psi_{\text{in}}$ может быть аппроксимирован конечными линейными комбинациями векторов вида $\prod a_{\text{out}}^{\dagger}(\eta_i) \prod b_{\text{out}}^{\dagger}(\gamma_i)\psi_{\text{out}}$. Чтобы убедиться в этом, определим вектор $\psi_{\text{in}}' = d' \prod_{i=1}^{\infty} e^{\lambda_i \tilde{a}_i^* \tilde{b}_i^*}\psi_{\text{out}}$. Те же соображения, что и при построении ψ_{out}, показывают, что правая часть сходится и что $a_{\text{in}}(C\eta_i)\psi_{\text{in}}' = 0 = b_{\text{in}}(C\gamma_j)\psi_{\text{in}}'$ для всех i и j. Таким образом, подбирая константу d', получим $\psi_{\text{in}}' = \psi_{\text{in}}$ и

$$\prod a_{\text{in}}^{\dagger}(\eta_i) \prod b_{\text{in}}^{\dagger}(\gamma_i)\psi_{\text{in}} = \prod a_{\text{in}}^{\dagger}(\eta_i) \prod b_{\text{in}}^{\dagger}(\gamma_i)\, d' \prod_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n \tilde{a}_n^* \tilde{b}_n^*}\psi_{\text{out}}.$$

Поскольку $a_{\text{in}}^{\dagger}(\eta_i)$ и $b_{\text{in}}^{\dagger}(\gamma_i)$ можно выразить через $\tilde{a}_i^{\#}$, $\tilde{b}_i^{\#}$ или непосредственно через $a_{\text{out}}^{\dagger}$, $b_{\text{out}}^{\dagger}$, приблизить бесконечное произведение конечным и заменить оставшиеся экспоненты конечными суммами их тейлоровых разложений, левая часть допускает аппроксимацию конечными линейными комбинациями слагаемых вида $\prod a^{\dagger}_{\mathrm{out}}(\eta_i)\prod b^{\dagger}_{\mathrm{out}}(\gamma_j)\psi_{\mathrm{out}}$, что и требуется ∎

Прежде чем доказывать, что $\tilde{u}_{12}(t_0, -t_0)$ — оператор Гильберта — Шмидта, сделаем несколько замечаний о только что законченном доказательстве. Во-первых, все построение можно обратить и показать, что если отображение $a_{\mathrm{in}}\mapsto a_{\mathrm{out}}$, $b_{\mathrm{in}}\to b_{\mathrm{out}}$ унитарно порождаемо, то $\tilde{u}_{11}^{-1}\tilde{u}_{12}$ — оператор Гильберта — Шмидта. Во-вторых, доказательство опиралось лишь на предположение о том, что указанный оператор есть оператор Гильберта — Шмидта, и на равенство (292), а потому то же самое доказательство вместе с приведенным ниже предложением показывает, что для каждого t существует унитарный оператор $U(t, -t_0)$, удовлетворяющий условиям

$$\varphi(x, t)=U(t, -t_0)\varphi_{\mathrm{in}}(x, -t_0)U(t, -t_0)^{-1},$$
$$\pi(x, t)=U(t, -t_0)\pi_{\mathrm{in}}(x, -t_0)U(t, -t_0)^{-1},$$

т. е. динамика, определенная теоремой XI.105, унитарно порождаема. Наконец, если положить $H_{\mathrm{out}}=S^{-1}H_{\mathrm{in}}S$, то H_{out} задается формулой

$$H_{\mathrm{out}}=\int_{\mathbb{R}^3}\mu(p)a^{\dagger}_{\mathrm{out}}(p, 0)a_{\mathrm{out}}(p, 0)dp+\int_{\mathbb{R}^3}\mu(p)b^{\dagger}_{\mathrm{out}}(p, 0)b_{\mathrm{out}}(p, 0)dp.$$

Кроме того, H_{out} задается формулой (290), а свободная динамика out-поля — оператором $e^{itH_{\mathrm{out}}}$. Все эти факты тривиальны, коль скоро имеется оператор S, ибо они суть не что иное, как перефразировка соответствующих фактов относительно (свободного) in-поля.

Предложение. Допустим, что $V(x, t)$ принадлежит C^{∞} и имеет компактный носитель в $\mathbb{R}^4$. Тогда описанные выше $u_{12}(t, -t_0)$ и $\tilde{u}_{12}(t, -t_0)$ — операторы Гильберта — Шмидта на $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Доказательство. Поскольку $u_{12}(t, s)=e^{-itB}\tilde{u}_{12}(t, s)e^{-isB}$, достаточно доказать предположение для $\tilde{u}_{12}(t, -t_0)$. Так как $t\mapsto\tilde{v}(t)$ — сильно непрерывное отображение $\mathbb{R}$ в множество ограниченных операторов на $L^2(\mathbb{R}^3)$, $\tilde{u}(t, -t_0)$ задается разложением Дайсона (теорема X.69):

$$\tilde{u}(t, -t_0)f=f+\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n\int_{-t_0}^{t}\int_{-t_0}^{t_1}\dots\int_{-t_0}^{t_{n-1}}\tilde{v}(t_1)\dots\tilde{v}(t_n)f\,dt_n\dots dt_1. \tag{296}$$

В качестве первой попытки показать, что $\tilde{u}_{12}$ — оператор Гильберта — Шмидта, можно было бы доказать оценку $M_2\equiv\sup_t\|\tilde{v}(t)\|_{\mathcal{J}_2}<$

$< \infty$, ибо тогда n-й член в (296) был бы оператором Гильберта—Шмидта с нормой Гильберта—Шмидта, не превосходящей $|t_0+t|^n M_2^n/n!$. К сожалению, величина M_2 бесконечна; действительно,

$$\tilde{v}(t) = \begin{pmatrix} e^{iBt}Re^{-iBt} & e^{+iBt}Re^{iBt} \\ -e^{-iBt}Re^{-iBt} & -e^{-iBt}Re^{iBt} \end{pmatrix},$$

где $R = -{}^1/_2 B^{-1/2}V(x, t)B^{-1/2}$, так что след

$$\operatorname{Tr}(R^*R) = \frac{1}{4}\int |\hat{V}(k-p, t)|^2 (k^2+m^2)^{-1/2}(p^2+m^2)^{-1/2}\, d^3k\, d^3p$$

бесконечен, поскольку подынтегральное выражение убывает лишь как $|k+p|^{-2}$, когда $|k+p| \to \infty$ при фиксированной разности $k-p$. Однако

$$M_4 \equiv \sup_t \|\tilde{v}(t)\|_{\mathcal{I}_4} < \infty,$$

так как $|V(x, t)|^{1/2}B^{-1/2} \in \mathcal{I}_8$ в силу теоремы XI.20 и того, что $f(y) = (y^2+m^2)^{-1/4} \in L^8(\mathbb{R}^3)$. Поскольку $\|AB\|_{\mathcal{I}_2} \leqslant \|A\|_4 \|B\|_4$, n-й член в правой части (296) при $n \geqslant 2$—оператор Гильберта—Шмидта с соответствующей нормой, ограниченной величиной $M_4^n|t_0+t|^n/n!$. Таким образом, поскольку член с $n=0$ не имеет элемента (1, 2), достаточно доказать, что

$$G(t) = \int_{-t_0}^{t} \tilde{v}_{12}(s)\, ds$$

—оператор Гильберта—Шмидта (это *неверно*, если индекс 1 2 заменить на 1 1). Далее, $G(t)$ имеет в p-пространстве интегральное ядро

$$g(k, p, t) = \int_{-t_0}^{t} (k^2+m^2)^{-1/4}(p^2+m^2)^{-1/4}\hat{V}(k-p, s) \times$$
$$\times \exp\left[-is\left(\sqrt{k^2+m^2}+\sqrt{p^2+m^2}\right)\right] ds,$$

и с помощью интегрирования по частям легко найти, что

$$|g(k, p, t)| \leqslant C\left[(k^2+m^2)^{-1/4}(p^2+m^2)^{-1/4}\left\{(k^2+m^2)^{1/2}+\right.\right.$$
$$\left.\left. +(p^2+m^2)^{1/2}\right\}^{-1}(1+|k-p|^2)^{-4}\right]. \qquad (297)$$

Таким образом, $g \in L^2(\mathbb{R}^6)$ для каждого t, так что $G(t)$—оператор Гильберта—Шмидта. ∎

Это вычисление, если его проводить в четырех пространственных измерениях, обладает одной интригующей особенностью. В этом случае правая часть (297) не лежит в L^2, так что естественно попытаться снова проинтегрировать по частям. Если после первого интегрирования по частям не возникло граничного члена, то так можно улучшить убывание и тем самым оценить член в (296) с $n=1$, но если граничный член не равен нулю, то член с $n=1$ *не будет* оператором Гильберта—Шмидта. Для всех t члены с $n \geqslant 3$—операторы Гильберта—Шмидта; это видно непосредственно, так как в этом случае $M_8 < \infty$. Член с $n=2$ тоже оператор Гильберта—Шмидта, в чем можно убедиться после однократного интегрирования по частям. Поскольку $\hat{V}(\cdot, -t_0)=0$, граничный член не лежит в L^2, если $\hat{V}(\cdot, t) \neq 0$, а потому получаем, что в случае четырех пространственных измерений $u_{12}(t, -t_0)$ — оператор Гильберта—Шмидта только для тех t, для которых $V(\cdot, t)=0$. Значит, может случиться, что преобразование, отвечающее рассеянию, *унитарно порождаемо*, тогда как динамика для промежуточных моментов времени не обладает этим свойством. Это явление имеет место и в пространстве трех измерений, если рассматриваются подходящие уравнения с высшими спинами или применяются взаимодействия, отличные от взаимодействия в (278).

Сказанное суммирует

Теорема XI.107. Предположим, что $V(x, t)$ принадлежит C^∞ и имеет компактный носитель в $\mathbb{R}^4$. Пусть φ_{in} — свободное заряженное скалярное поле массы m. Тогда существуют операторнозначные обобщенные функции $\varphi(x, t)$ и $\pi(x, t)$ при каждом t, такие, что $\pi(x, t)^* = d\varphi(x, t)/dt$ и выполняется (289). Существует семейство унитарных операторов $U(t, -t_0)$ на $\mathcal{H}$, такое, что

$$\varphi(x, t) = U(t, -t_0)\,\varphi_{\text{in}}(x, -t_0)\,U(t, -t_0)^{-1},$$
$$\pi(x, t) = U(t, -t_0)\,\pi_{\text{in}}(x, -t_0)\,U(t, -t_0)^{-1}.$$

Наконец, пусть φ_{out} определено, как выше. Тогда существует унитарный оператор рассеяния S на $\mathcal{H}$, такой, что

$$\varphi_{\text{out}}(x, 0) = S^{-1}\varphi_{\text{in}}(x, 0)\,S,$$
$$\pi_{\text{out}}(x, 0) = S^{-1}\pi_{\text{in}}(x, 0)\,S.$$

Наконец, отметим, что путем обобщения изложенных выше идей можно доказать следующий абстрактный результат

Теорема XI.108. Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное комплексное гильбертово пространство, и пусть $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ — бозонное пространство Фока над $\mathcal{H}$. Для каждого $f \in \mathcal{H}$ пусть $a^-(f)$ — оператор уничтожения на $\mathcal{F}_s(H)$, определенный формулой (X.62). Положим

$$a(f) = a^-(Cf), \qquad a^\dagger(f) = (a^-(f))^*,$$

где C — некоторое заданное сопряжение на $\mathcal{H}$ Пусть $\langle B_+, B_- \rangle$ — пара ограниченных линейных преобразований на $\mathcal{H}$, которые удовлетворяют условиям

$$B_+^*B_+ - B_-^*B_- = I, \qquad B_+^*CB_- = B_-^*CB_+, \tag{298}$$

$$K_+^*K_+ - K_-^*K_- = I, \qquad K_+^*CK_- = K_-^*CK_+, \tag{299}$$

где

$$K_+ = B_+^*, \qquad K_- = -CB_-^*C. \tag{300}$$

Положим

$$\begin{aligned} a_B(f) &\equiv a^\dagger(CB_-Cf) + a(CB_+Cf), \\ a_B^\dagger(f) &\equiv a^\dagger(B_+f) + a(B_-f). \end{aligned} \tag{301}$$

Тогда унитарный оператор W на $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$, такой, что

$$a_B(f) = W^{-1}a(f)W, \qquad a_B^\dagger(f) = W^{-1}a^\dagger(f)W,$$

существует тогда и только тогда, когда B_- — оператор Гильберта — Шмидта. W определяется однозначно с точностью до общего фазового множителя.

Отображение $\langle a, a^\dagger\rangle \mapsto \langle a_B, a_B^\dagger\rangle$, заданное в (301), называется **преобразованием Боголюбова.** Условия на B_+, B_- — именно те, которые требуются для выполнения равенств

$$[a_B(f), a_B(g)] = 0 = [a_B^\dagger(f), a_B^\dagger(g)]$$

и

$$[a_B(f), a_B^\dagger(g)] = (Cf, g)_{\mathscr{H}}.$$

Операторы K — это операторы B для обратного преобразования Боголюбова, а формулы (299) гарантируют обратимость. Иными словами, если выполнены (298) и (299), то

$$a^\dagger(f) = a_B^\dagger(K_+f) + a_B(K_-f), \qquad a(f) = a_B^\dagger(CK_-Cf) + a_B(CK_+Cf).$$

XI.16. Квантовополевое рассеяние II: теория Хаага — Рюэля

В этом разделе мы хотим описать идеи, относящиеся к рассеянию в классе теорий поля, удовлетворяющих аксиомам Вайтмана из § IX.8. Важную роль в нашем изложении будет играть свободное поле из § X.7. В предыдущем разделе мы обсудили простой пример, в котором уравнение поля было линейным, внешнее поле классическим (не операторнозначным) и имело компактный носитель в пространстве-времени. И даже в этом случае построение было нетривиальным. Как же можно надеяться на построение теории рассеяния для общей теории квантованных полей, когда не имеет места ни одно из перечисленных упрощений? Ответ прост. Мы проведем аксиоматическое построение. Будем предполагать, что выполняются аксиомы Гординга — Вайтмана, в частности что существует унитарная динамика взаимодействия. В предыдущем разделе мы как раз и занимались описанием такой динамики. Замечательно, что в общем случае теорию рассеяния можно построить, пользуясь спектральным условием и микропричинностью.

Первая принципиальная проблема, с которой мы сталкиваемся, — отсутствие естественной «свободной» динамики, к которой взаимодействующая динамика могла бы приближаться при $t \to \pm\infty$. Интересно, что это свойственно не только общему аксиоматическому подходу, но также и тому типу моделей, которые были введены в § X.7 и получены путем возмущения свободного поля массы m_0. Это как-то странно, поскольку, казалось бы, гамильтониан H_0 этого свободного поля должен играть роль гамильтониана свободной динамики. Но, во-первых, эти два гамильтониана действуют в двух разных гильбертовых пространствах. В самом деле, когда пространственное обрезание из § X.7 снято, следует перейти к новому представлению канонических коммутационных соотношений, поскольку справедливо общее утверждение, известное как теорема Хаага. Эта теорема утверждает, что любая вайтманова теория поля, в которой в нулевой момент времени существуют φ и π, унитарно эквивалентные таким же величинам свободной теории, сама есть свободная теория поля. Во-вторых, физически важен тот факт, что масса взаимодействующих частиц не может равняться m_0, иными словами, в теории взаимодействующих квантованных полей, в отличие от классических полевых теорий, частицы никогда не могут избавиться от самодействия. Эти две причины связаны между собой, поскольку даже для свободного поля изменение массы означает изменение представления канонических коммутационных соотношений.

«Свободная динамика» в смысле, который мы позже уточним, будет свободным полем, но с правильной физической массой, отличной от m_0. В этом смысле существует аналогия с рассеянием спиновых волн в том, что динамика сравнения определяется некоторой частью динамики со взаимодействием. Тот факт, что гамильтониан свободного поля и гамильтониан взаимодействующего поля естественным образом заданы на разных гильбертовых пространствах, укладывается в формализм двух гильбертовых пространств. Однако, рассмотрения одних лишь гамильтонианов еще недостаточно. Действительно, массовый гиперболоид $\{p \mid p \cdot p = m^2\}$ порождает абсолютно непрерывный спектр бесконечной кратности на $[m, \infty)$. Таким образом, изучая лишь спектр H, невозможно узнать, присутствует ли только вклад этого гиперболоида или имеются также и «многочастичные состояния». Эта проблема отчасти проясняется, если рассмотреть объединенный спектр энергии-импульса. Но истинная теория рассеяния должна быть связана с пространственно-временным поведением поля $A(x)$ (чтобы избежать путаницы, мы пользуемся обозначением Φ для свободного поля и A для взаимодействующего).

Для начала предположим, что $\Phi_m(x, t)$ — свободное поле массы $m > 0$, описанное в § X.7. Из (X.84) ясно, что для каждого фиксированного t поля $\Phi_m(\cdot, t)$ и $\dot{\Phi}_m(\cdot, t)$ — операторнозначные обощенные функции; тот факт, что не требуется сглаживания по t, — особая черта свободного поля и в общих вайтмановых теориях не имеет места. Пусть $f(x, t)$ — регулярный волновой пакет для уравнения Клейна — Гордона $f_{tt} = \Delta f - m^2 f$ типа введенного и рассмотренного в первом дополнении к § 3. Введем символ $\overleftrightarrow{\partial_0}$:

$$(g\overleftrightarrow{\partial_0}k)(t) \equiv \int \left[g(x, t)\frac{\partial}{\partial t}k(x, t) - k(x, t)\frac{\partial}{\partial t}g(x, t)\right]d^3x,$$

который отображает пары функций от x и t в функцию от t. Тогда $f\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m$ не зависит от времени, поскольку как f, так и Φ_m удовлетворяют уравнению Клейна — Гордона, которое является уравнением второго порядка по t, а $f\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m$, по существу, его вронскиан. Действительно, если преобразование Фурье функции f по пространственным переменным имеет вид

$$\hat{f}(p, t) = (2\mu(p))^{-1/2}h(p)e^{-i\mu(p)t}, \tag{302a}$$

то

$$f\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m = i\int h(p)a^\dagger(p)d^3p, \tag{302b}$$

а если

$$\hat{f}(p, t) = (2\mu(p))^{-1/2}h(p)e^{+i\mu(p)t}, \tag{302c}$$

то

$$f\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m = -i\int h(-p)a(p)d^3p. \tag{302d}$$

В частности, (302b) показывает, что если N пробегает 0, 1, ..., а f_i — всевозможные функции, удовлетворяющие (302a), то векторы

$$(f_1\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m)(f_2\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m)\ldots(f_N\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m)\Omega_0$$

пробегают тотальное множество в $\mathcal{H}_0$ — гильбертовом пространстве свободного поля.

Предположим, что $\langle\mathcal{H}, U, A, D\rangle$ — эрмитово скалярное поле, удовлетворяющее аксиомам Гординга — Вайтмана (свойства 1—8 из § IX.8) и обладающее двумя дополнительными свойствами.

Свойство 9 **(верхняя и нижняя массовые щели).** Пусть P_μ — генераторы представления подгруппы трансляций $U(a, I)$ группы Пуанкаре. Для некоторого $m > 0$ и некоторого $\varepsilon > 0$ спектр P_μ содержится в множестве

$$\{0\} \cup H_m \cup \overline{V}_{m+\varepsilon,+} \equiv$$
$$\equiv \{0\} \cup \{p \mid p^2 = m^2;\ p_0 > 0\} \cup \{p \mid p^2 \geqslant (m+\varepsilon)^2;\ p_0 > 0\},$$

где $p^2 = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$. Более того, множество S собственных векторов оператора P^2 с собственным значением m^2 непусто, и существует циклический вектор относительно действия подгруппы $U(a, I)$ на S.

S — семейство векторов, описывающих состояния одной бесспиновой частицы массы m. Благодаря свойству 9 собственное значение m^2 — изолированное собственное значение P^2.

Свойство 10 **(связь вакуума с одночастичными состояниями).** Спектральный вес $d\rho$ в представлении Челлена — Лемана (теорема IX.34) имеет вид

$$d\rho(s) = \delta(s-m) + d\tilde{\rho}(s),$$

где носитель $d\tilde{\rho}$ находится в $[m+\varepsilon, \infty)$.

Свойство 10, по существу, говорит о том, что не все векторы вида $A(f)\psi_0$, где ψ_0 — вакуум, ортогональны S. Действительно, при этом условии $d\rho(s) = \alpha\delta(s-m) + d\tilde{\rho}(s)$, где $\alpha \neq 0$, так что A можно умножить на константу, с тем чтобы обратить α в 1.

Выберем функцию $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ так, чтобы $h(y) = 1$ вблизи $y = m^2$ и $\operatorname{supp} h \subset (0, m^2 + \varepsilon)$. Определим новую операторнозначную обобщенную функцию $B(\mathrm{x}, t)$ как $\hat{B}(p) = h(p^2)\hat{A}(p)$, т. е. положим

$$B(g) = A(Tg), \qquad \text{где} \qquad \widehat{Tg}(p) = h(p^2)\hat{g}(p). \tag{303}$$

Пусть теперь $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Тогда функция $\hat{f}(\mathrm{p})e^{-ip_0t_0}h(p^2)$ лежит в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, так что g в (303) можно выбрать в виде $f(\mathrm{x})\delta(t-t_0)$, иными словами, $B(\mathrm{x}, t)$ — обобщенная функция от x, гладкая по t, и аналогично $\dot{B}(\mathrm{x}, t)$ — обобщенная функция от x. В действительности для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ оператор $B(f, t)$ принадлежит C^∞ по t. В частности, для любого $f \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ с $f(\cdot, t)$ и $\partial_0 f(\cdot, t)$ из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ для каждого t можно построить $(f\overleftrightarrow{\partial_0}B)(t)$. В общем случае, даже когда f удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона, $(f\overleftrightarrow{\partial_0}B)(t)$ зависит от времени, поскольку B этому уравнению не удовлетворяет, но тем не менее справедлива

Лемма 1. Пусть f — регулярный волновой пакет для уравнения Клейна — Гордона массы m. Тогда вектор $(f\overleftrightarrow{\partial_0}B)(t)\psi_0$ не зависит от t, где ψ_0 — вакуум теории.

Доказательство. В общем случае $B(x)$ не удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона, однако $B(x)\psi_0$ удовлетворяет. ∎

Согласно свойству 10,

$$((f\overleftrightarrow{\partial_0}B)\psi_0,\ (g\overleftrightarrow{\partial_0}B)\psi_0) = ((f\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m)\Omega_0,\ (g\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m)\Omega_0). \qquad (304)$$

Действительно, левую часть (304) можно выразить через двухточечную функцию A. Поскольку B включает в себя множитель $h(p^2)$, в силу свойства 10 в спектральном весе остается лишь член $\delta(s-m)$, т. е. остается ровно то же самое, что было бы, если бы A равнялось Φ_m. Поскольку $\hat{\Phi}_m(p) = h(p^2)\hat{\Phi}_m(p)$, (304) выполняется.

Теперь приведем основную теорему Хаага — Рюэля.

Теорема XI.109. Пусть A — эрмитова скалярная теория поля, удовлетворяющая аксиомам Гординга — Вайтмана (свойства 1—8), а также свойствам 9 и 10. Определим B, как выше. Тогда:

(a) для любых регулярных волновых пакетов $f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}$ пределы

$$\lim_{t\to\mp\infty}(f^{(1)}\overleftrightarrow{\partial_0}B)(t)\ldots(f^{(n)}\overleftrightarrow{\partial_0}B)(t)\psi_0 \equiv \eta_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$$

существуют в равномерной топологии на $\mathcal{H}$ и не зависят от выбора функции h.

(b) Пусть $\mathcal{H}_{\mathrm{in}}$ и $\mathcal{H}_{\mathrm{out}}$ — замкнутые оболочки векторов η_{in} и η_{out}; $\mathcal{H}_{\mathrm{in}}$ и $\mathcal{H}_{\mathrm{out}}$ инвариантны под действием представления U группы Пуанкаре.

(c) Существуют операторнозначные обобщенные функции φ_{in} на $\mathcal{H}_{\mathrm{in}}$ и φ_{out} на $\mathcal{H}_{\mathrm{out}}$, такие, что $\langle\mathcal{H}_{\mathrm{in}}, U, \varphi_{\mathrm{in}}\rangle$ и $\langle\mathcal{H}_{\mathrm{out}}, U, \varphi_{\mathrm{out}}\rangle$ унитарно эквивалентны свободному полю массы m и

$$\eta_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}) = \left(f^{(1)}\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}\right)\cdots\left(f^{(n)}\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}\right)\psi_0.$$

Прежде чем рассматривать физическую интерпретацию этой теоремы и ее доказательство, отметим математическое следствие, аналогичное спектральным свойствам, вытекающим из существования волновых операторов в обычной квантовой механике. Поскольку сужение U на $\mathcal{H}_{\mathrm{in}}$ унитарно эквивалентно представлению группы Пуанкаре для свободного поля, получаем

Следствие 1. В теории поля, удовлетворяющей свойствам 1—10, спектр энергии-импульса содержит область $\{p \mid p^2 \geqslant (2m)^2;\ p_0 > 0\}$.

В частности, получаем поразительный вывод: невозможно построить вайтманову теорию поля со спектром $\sigma(P) = \{p \mid p^2 = m^2,\ p_0 > 0\} \cup \{0\}$!

Чтобы облегчить понимание сути теоремы XI.109 с точки зрения теории рассеяния, можно либо попытаться переписать эту теорему в терминах некоего подобия волнового оператора, либо придать обычной нерелятивистской теории форму, аналогичную теореме XI.109. Здесь мы действуем первым способом, а по поводу второго отсылаем читателя к литературе, указанной в Замечаниях, и задачам (задача 142). Пусть функции $f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}$ удовлетворяют (302а). Определим отображение J плотного подмножества гильбертова пространства $\mathscr{H}_0$ свободного поля массы m в пространство $\mathscr{H}$, полагая

$$J\left[\prod_{i=1}^{n}\left(f^{(i)}\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m\right)\Omega_0\right] = \prod_{i=1}^{n}\left(f^{(i)}\overleftrightarrow{\partial_0}B\right)(t=0)\,\psi_0.$$

Это определение корректно, поскольку заданный вектор $\psi \in \mathscr{H}_0$ можно не более чем одним способом записать в виде

$$\psi = \prod_{i=1}^{n}\left(f^{(i)}\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m\right)\Omega_0,$$

если $f^{(i)}$ *удовлетворяют* (302а). Мы не можем пользоваться более естественной формулой

$$J\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\Phi_m(g^{(i)})\right)\Omega_0\right] = \left[\prod_{i=1}^{n} A(g^{(i)})\right]\psi_0$$

именно потому, что хотим, чтобы J было корректно определено. Пусть $\mathscr{D}_0$ — множество векторов вида $\prod_{i=1}^{n}\left(f^{(i)}\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m\right)\Omega_0$, которое, в силу (302b), тотально в $\mathscr{H}_0$. Тогда имеет место

Следствие 2. Операторы $\Omega^{\pm} = \operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty} e^{itH}Je^{-itH_0}$ существуют и определяют частичные изометрии $\mathscr{H}_0 \xrightarrow{\Omega^+} \mathscr{H}_{\text{in}}$ и $\mathscr{H}_0 \xrightarrow{\Omega^-} \mathscr{H}_{\text{out}}$.

Доказательство. Пусть $e^{-ith_0}f$ задано как $(e^{-ith_0}f)(x, s) = f(x, t+s)$. Тогда

$$e^{-itH_0}\left[\prod_{i=1}^{n} f^{(i)}\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m\right]\Omega_0 = \prod_{i=1}^{n}\left[e^{-ith_0}f^{(i)}\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m\right]\Omega_0,$$

так что

$$e^{itH}Je^{-itH_0}\left[\prod_{i=1}^{n} f^{(i)}\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m\right]\Omega_0=\prod_{i=1}^{n} e^{itH}(f^{(i)}(\cdot,t)\overleftrightarrow{\partial_0}B(\cdot,0))\,e^{-itH}\psi_0=$$
$$=\prod_{i=1}^{n}(f^{(i)}\overleftrightarrow{\partial_0}B)(t)\,\psi_0.$$

Следовательно, по теореме XI.109, пределы, определяющие $\Omega^\pm$, существуют и

$$\Omega^\pm\left[\prod_{i=1}^{n} f^{(i)}\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m\right]\Omega_0=\prod_{i=1}^{n}\left(f^{(i)}\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}\right)\psi_0. \tag{305}$$

В силу утверждения (с) основной теоремы, $\Omega^\pm$ — изометрии. ∎

Равенство (305) утверждает, что

$$\Omega^\pm\Phi_m=\varphi_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}\Omega^\pm.$$

В частности, S-матрица Яуха $S=\Omega^+(\Omega^-)^*$ удовлетворяет равенству $\varphi_{\text{out}}=S^{-1}\varphi_{\text{in}}S$, если выполнено условие *асимптотической полноты:*

$$\mathscr{H}_{\text{in}}=\mathscr{H}_{\text{out}}=\mathscr{H}. \tag{306}$$

Конечно, бывает, что (306) в некоторых моделях нарушается, например, это так для многих обобщенных свободных полей (см. замечания к § IX.8). Обычно надеются, что это происходит из-за искусственности этих моделей и что реальные модели удовлетворяют условию асимптотической полноты, по крайней мере если можно сконструировать асимптотические поля для каждого отдельного массового гиперболоида и построить соответствующие состояния со всевозможными асимптотическими частицами. По этой причине при углублении исследований равенства (306) часто принимают в качестве аксиомы.

Обратимся теперь к доказательству теоремы XI.109. Оно опирается на четыре факта. Первый — это лемма 1. Второй — убывание регулярных волновых пакетов для уравнения Клейна — Гордона в соответствии с резюмирующей теоремой XI.17 и ее следствием. Для описания третьего факта необходимо ввести понятие усеченных функций Вайтмана (УФВ).

Определение. **Разбиение** упорядоченного множества $\langle 1,\ldots,n\rangle$ — это семейство P упорядоченных подмножеств $S_1=\langle i_1,\ldots,i_{k(1)}\rangle,\ldots$ $\ldots,S_l=\langle i'_1,\ldots,i'_{k(l)}\rangle$, таких, что $i_1<\ldots<i_{k(1)},\ldots,i'_1<\ldots$ $\ldots<i'_{k(l)}$ и $\bigcup S_l=\langle 1,\ldots,n\rangle$, $S_j\cap S_q=\varnothing$ при $j\neq q$. Символом $\mathscr{P}_n$ будем обозначать множество всех разбиений множества $\langle 1,\ldots,n\rangle$.

Определение. **Усеченные функции Вайтмана** (усеченные вакуумные средние) суть обобщенные функции $\mathscr{W}_{n,\,T}$, определенные в терминах обобщенных функций Вайтмана $\mathscr{W}_n$ соотношением

$$\mathscr{W}_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{P \in \mathscr{P}_n} \mathscr{W}_{k(1),\,T}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k(1)}}) \ldots$$
$$\ldots \mathscr{W}_{k(l),\,T}\left(x_{i'_1}, \ldots, x_{i'_{k(l)}}\right). \quad (307)$$

Очевидно, что функции $\mathscr{W}_{n,\,T}$ рекуррентно определяются формулой (307), поскольку если $\mathscr{W}_{1,\,T}, \ldots, \mathscr{W}_{n-1,\,T}$ уже найдены, то в точности один член в правой части (307), а именно тот, для которого $P = \{\langle 1, \ldots, n \rangle\}$, не известен и определяется формулой (307). Первые несколько функций $\mathscr{W}_{n,\,T}$ выглядят так:

$$\mathscr{W}_{1,\,T}(x_1) = (\psi_0, \varphi(x_1)\psi_0),$$
$$\mathscr{W}_{2,\,T}(x_1, x_2) = (\psi_0, \varphi(x_1)\varphi(x_2)\psi_0) - (\psi_0, \varphi(x_1)\psi_0)(\psi_0, \varphi(x_2)\psi_0),$$
$$\mathscr{W}_{3,\,T}(x_1, x_2, x_3) = \mathscr{W}_3(x_1, x_2, x_3) - \mathscr{W}_1(x_1)\mathscr{W}_2(x_2, x_3) -$$
$$- \mathscr{W}_1(x_2)\mathscr{W}_2(x_1, x_3) - \mathscr{W}_1(x_3)\mathscr{W}_2(x_1, x_2) +$$
$$+ 2\mathscr{W}_1(x_1)\mathscr{W}_1(x_2)\mathscr{W}_1(x_3).$$

Существует множество явных формул для $\mathscr{W}_{n,\,T}$ (см. Замечания и задачу 143), однако неявные формулы (307) — это все, что нам потребуется. Причина, по которой функции $\mathscr{W}_{n,\,T}$ естественны, состоит в следующем факте, который мы в конечном счете докажем. Поскольку $\mathscr{W}_{n,\,T}$ трансляционно-инвариантна, можно построить, как и в § IX.8, функцию $\mathscr{W}_{n,\,T}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$. При выполнении предположения о спектре (свойство 9) носитель $\hat{W}_n$ лежит в $\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n-1}(-\overline{V}_{m,\,+} \cup \{0\})$, а носитель $\hat{W}_{n,\,T}$ — в $\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n-1}(-\overline{V}_{m,\,+})$. В частности, носители фурье-образов функций $W_{n,\,T}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$ и $W_{n,\,T}(-\zeta_{n-1}, \ldots, -\zeta_1)$ не пересекаются, что важно для дальнейшего.

Третий основной факт, необходимый для доказательства теоремы XI.109, — это следующая

Теорема XI.110 (кластерное свойство УФВ). Фиксируем $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n})$. Для $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^3$ положим

$$F(a_1, \ldots, a_n) = \int_{\mathbb{R}^{4n}} \mathscr{W}_{n,\,T}(x_1, \ldots, x_n) f(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)\, dx_1 \ldots dx_n \quad (308)$$

(где a_i стоит вместо $\langle a_i, 0 \rangle \in \mathbb{R}^4$). Определим функцию G равенством

$$G(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = F(a_1, \ldots, a_n); \quad \alpha_i = a_{i+1} - a_i.$$

Тогда $G \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{3n-3})$.

Последний результат, нужный для доказательства теоремы XI.109, — это

Теорема XI.111. Пусть K — обобщенная функция из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^\nu)$, так что $K*f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$ для любого $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$. Тогда для любого N существуют дифференциальный оператор $P(D)$ с постоянными коэффициентами и непрерывная функция F на $\mathbb{R}$, такие, что

$$K=P(D)F,\qquad |F(x)|\leqslant C(1+x^2)^{-N}.$$

Теперь мы обращаемся к доказательству теоремы XI.109. Теоремы XI.110 и XI.111 будут доказаны позже в этом разделе.

Доказательство теоремы XI.109. Введем символ $B_f(t)$ для обозначения $f(\cdot,t)\overleftrightarrow{\partial_0}B(\cdot,t)$. Пусть $C_1(t),\ \dots,\ C_n(t)$ суть n операторов, каждый из которых есть либо какой-нибудь $B_f(t)$, либо его производная по времени. Пусть $(\psi_0,\ C_1(t)\dots C_n(t)\psi_0)_T$ — усеченное вакуумное среднее, определенное подобно УФВ выше. Прежде всего утверждается, что

$$|(\psi_0,\ C_1(t)\dots C_n(t)\psi_0)_T|\leqslant c(1+|t|)^{-3/2(n-2)}. \tag{309}$$

Для доказательства этого неравенства разложим сначала функции C_i в суммы по функциям $B(x,t)$, сглаженным с функциями f. Все новые функции f суть регулярные волновые пакеты для уравнения Клейна — Гордона, поскольку они совпадают либо с исходными f, либо с их производными по времени. Итак, левая часть (309) ограничена суммой членов вида

$$\left|\int f^{(1)}(x_1,\ t)\dots f^{(n)}(x_n,\ t)(\psi_0,\ Q_1(x_1,\ t)\dots Q_n(x_n,\ t)\psi_0)_T\,d^{3n}x\right|, \tag{310}$$

где каждое Q есть B, ∂_0B или ∂_0^2B. Определим $K(\zeta_1,\ \dots,\ \zeta_{n-1})$, полагая

$$K(\zeta_1,\ \dots,\ \zeta_{n-1})=(\psi_0,\ Q_1(x_1,\ t)\dots Q_n(x_n,\ t)\psi_0)_T,\qquad \zeta_i=x_{i+1}-x_i.$$

$K\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{3n-3})$ и не зависит от t в силу трансляционной ковариантности теории относительно сдвигов по времени. Согласно (303), обобщенная функция K, сглаженная с g из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n-3})$, может быть переписана как $W_{n,T}$, сглаженная с $\tilde{g}$ из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n-4})$, так что, по теореме XI.110, $K*g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n-3})$ для каждой $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n-3})$. Таким образом, по теореме XI.111, можно найти дифференциальный оператор $P(D)$ и непрерывную функцию F, такие, что $K=P(D)F$ и

$$|F(\zeta_1,\ \dots,\ \zeta_{n-1})|\leqslant C(1+|\zeta|^2)^{-3n}.$$

Поэтому (310) мажорируется суммой членов вида

$$C\left|\int g_1(x_1,\ t)\dots g_n(x_n,\ t)(1+|\zeta|^2)^{-3n}\,d^{3n}x\right|, \tag{311}$$

где каждая функция g_i — производная некоторой $f^{(i)}$, и потому есть регулярный волновой пакет для уравнения Клейна — Гордона. В результате, согласно следствию теоремы XI.17,

$$|g_2(x_2,\ t)| \leqslant c_2(1+|t|)^{-3/2},\ \ldots,\ |g_n(x_n,\ t)| \leqslant c_n(1+|t|)^{-3/2},$$
$$\int |g_1(x_1,\ t)|\, d^3x_1 \leqslant c_1(1+|t|)^{3/2},$$

так что (311) мажорируется выражением

$$c(1+|t|)^{-3/2(n-1)} \int |g_1(x,\ t)|\,(1+|\zeta|^2)^{-3n}\, d^{3n}x \leqslant d(1+|t|)^{-3/2\,(n-2)}.$$

Это доказывает оценку (309).

Пользуясь (309), можно при помощи модифицированного приема Кука доказать, что предел из теоремы XI.109 (а) существует. Пусть

$$\eta(t) = B_{f^{(1)}}(t) \ldots B_{f^{(n)}}(t)\, \psi_0.$$

Мы докажем, что

$$\left\| \frac{d\eta}{dt} \right\| \leqslant c(1+|t|)^{-3/2}, \tag{312}$$

так что существуют $\lim\limits_{t \to \mp\infty} \eta(t)$. Очевидно, $\|d\eta/dt\|^2$ — сумма членов вида $(\psi_0,\ C_1(t) \ldots C_{2n}(t)\,\psi_0)$, а потому — сумма произведений членов вида $(\psi_0,\ C_{i_1}(t) \ldots C_{i_k}(t)\,\psi_0)_T$. Поскольку $(\psi_0,\ B(x,\ t)\,\psi_0) = 0$, ни одно из этих произведений не содержит одноточечного усеченного вакуумного среднего. Каждое произведение принадлежит к одному из следующих типов:

1. Один из сомножителей есть m-точечное усеченное вакуумное среднее с $m \geqslant 4$. В силу (309), этот сомножитель ограничен величиной $(1+|t|)^{-3}$.
2. Нет ни одного сомножителя предыдущего типа, но входит по крайней мере одно трехточечное усеченное вакуумное среднее. В этом случае, поскольку $2n$ четно, должны входить по крайней мере два таких множителя, каждый из которых убывает как $(1+|t|)^{-3/2}$, так что общее убывание опять не медленнее, чем $(1+|t|)^{-3}$.
3. Все сомножители — двухточечные функции. В этом случае один из сомножителей должен быть вида

$$\left(\psi_0,\ B_{f^{(1)}}(t)\, \frac{dB_{f^{(2)}}}{dt}(t)\,\psi_0\right), \quad \text{или} \quad \left(\psi_0,\ \frac{dB_{f^{(1)}}(t)}{dt}\, \frac{dB_{f^{(2)}}(t)}{dt}\,\psi_0\right),$$

или

$$\left(\psi_0,\ \frac{dB_{f^{(1)}}}{dt}(t)\, B_{f^{(2)}}(t)\,\psi_0\right) = \left(\frac{dB_{\overline{f^{(1)}}}}{dt}(t)\,\psi_0,\ B_{f^{(2)}}(t)\,\psi_0\right),$$

а каждый из них обращается в нуль в силу леммы 1. Значит, такие произведения обращаются в нуль.

Следовательно, $\|d\eta/dt\|^2 \leqslant C(1+|t|)^{-3}$, что доказывает (312), а потому и часть (a) теоремы.

Инвариантность $\mathscr{H}_{\text{in}}$ и $\mathscr{H}_{\text{out}}$ относительно пространственно-временных сдвигов очевидна. Инвариантность относительно преобразований Лоренца и независимость пределов от выбора функции h доказываются в работах, указанных в Замечаниях.

Равенства (302) наводят на мысль определить $a^{\dagger}_{\text{in}}(p)$ равенством

$$\left(i\int h(p)a^{\dagger}_{\text{in}}(p)d^3p\right)(\eta_{\text{in}}(f^{(2)}, \ldots, f^{(n)})) = \eta_{\text{in}}(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}),$$

где h и $f^{(1)}$ связаны соотношением (302a), и $a_{\text{in}}(p)$ с помощью аналогичного равенства и соотношения (302c). Поле φ_{in} можно определить формулой (X.85). Ковариантность φ_{in} и φ_{out} относительно пространственно-временных сдвигов очевидна. Доказательство лоренцевой ковариантности снова можно найти в литературе. Унитарная эквивалентность φ_{in} свободному полю Φ_m следует из равенства

$$V(\eta_{\text{in}}(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})) = \left[\prod_{i=1}^{n}(f^{(i)}\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m)\right]\Omega_0.$$

Для проверки того, что оператор V корректно определен и унитарен, следует доказать лишь, что

$$(\eta_{\text{in}}(f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}), \eta_{\text{in}}(g^{(1)}, \ldots, g^{(n)})) = \\ = \left(\left(\prod_{i=1}^{m} f^{(i)}\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m\right)\Omega_0, \left(\prod_{i=1}^{n} g^{(i)}\overleftrightarrow{\partial_0}\Phi_m\right)\Omega_0\right). \qquad (313)$$

Тогда легко убедиться, что

$$V\varphi_{\text{in}}V^{-1} = \Phi_m.$$

Левая часть (313) — предел скалярного произведения $\left(\prod B_{f^{(i)}}\psi_0, \prod B_{g^{(i)}}(t)\psi_0\right)$ при $t \to -\infty$. Представляя это произведение как сумму усеченных вакуумных средних, видим, что те члены, в которые входят m-точечные средние с $m \geqslant 3$, исчезают в силу (309). При $t \to -\infty$ остаются только те члены, которые являются произведениями двухточечных средних и, по лемме 1, не зависят, как мы уже объясняли, от времени. В силу свойства 10, эти средние тождественны двухточечной функции для поля Φ_m; см. (304). Поскольку n-точечная функция свободного поля есть сумма произведений двухточечных функций (см. X.162), равенство (313) выполняется. ∎

Доказательство теоремы XI.111. По теореме о замкнутом графике отображение $f \mapsto K * f$ непрерывно. Пусть $T = \hat{K}$. Тогда, по предположению и равенству $\widehat{K * f} = (2\pi)^{\nu/2}\hat{K}\hat{f}$ (теорема IX.4), произведение gT принадлежит $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$ для любого $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$. Отсюда следует, что T есть C^∞-функция, каждая из производных которой растет полиномиально, т. е. $T \in \mathcal{O}_M$ (см. задачу 23 к гл. V). Для заданного N подберем k так, чтобы для всех α с $|\alpha| \leqslant 2N$ выполнялось

$$|(D^\alpha T)(x)| \leqslant c(1+x^2)^k.$$

Пусть теперь $G(x) = (1+x^2)^{-k-\nu} T(x)$. Тогда для $|\alpha| \leqslant 2N$

$$|(D^\alpha G)(x)| \leqslant c(1+x^2)^{-\nu}.$$

Итак, поскольку $D^\alpha G$ лежит в L^1, $F = \check{G}$ — обобщенная функция, которая есть ограниченная непрерывная функция, и для нее произведение $x^\alpha F(x)$ ограничено для каждого $|\alpha| \leqslant 2N$. Следовательно,

$$|F(x)| \leqslant c(1+x^2)^{-N}$$

и $K = (1-\Delta)^{k+\nu} F$. ∎

Теперь мы начнем доказательство теоремы XI.110. Сначала требуется установить, что $\hat{W}_{n,\mathrm{T}}$ имеет носитель в $(-\overline{V}_{m,+})^{n-1}$.

Лемма 2. Пусть a — пространственно-подобный вектор из $\mathbb{R}^4$. Тогда

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathcal{W}_n(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}+\lambda a, \ldots, x_n+\lambda a) = \\ = \mathcal{W}_i(x_1, \ldots, x_i)\,\mathcal{W}_{n-i}(x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

в том смысле, что для любых $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4i})$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4(n-i)})$

$$\mathcal{W}_n(f \otimes g_{\lambda a}) \to \mathcal{W}_i(f)\,\mathcal{W}_{n-i}(g) \tag{314}$$

при $\lambda \to \infty$, где

$$(f \otimes g_{\lambda a})(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_i)\, g(x_{i+1}-\lambda a, \ldots, x_n - \lambda a).$$

Более того, фурье-образ $W_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$ — (знаконеопределенная) мера по переменной p_i (при сглаживании по другим переменным) и

$$\hat{W}_n(p_1, \ldots, p_{n-1}) = (2\pi)^2\, \hat{W}_i(p_1, \ldots, p_{i-1}) \times \\ \times \hat{W}_{n-i}(p_{i+1}, \ldots, p_{n-1})\,\delta(p_i) + R(p), \tag{315}$$

где (после усреднения по другим переменным) R — мера по p_i, задающая нулевой вес при $p_i = 0$.

Доказательство. Фиксируем $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4l})$, $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4(n-l)})$. Пусть

$$\psi_1 = \int \overline{f(x_1, \ldots, x_l)}\, \varphi(x_l) \ldots \varphi(x_1)\, \psi_0\, dx_1 \ldots dx_l,$$

$$\psi_2 = \int g(x_1, \ldots, x_{n-l})\, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_{n-l})\, \varphi_0\, dx_1 \ldots dx_{n-l}.$$

Тогда, как и при доказательстве теоремы IX.32, если $g_a(x) = g(x_1 - a, \ldots, x_{n-l} - a)$, то

$$\mathscr{W}_n(f \otimes g_a) = \int\limits_{\mathbb{R}^4} e^{ik \cdot a} d(\psi_1, E_{\tilde{k}}\psi_2),$$

где E_Ω — спектральная мера для энергии-импульса, а $\tilde{k} = \langle k_0, -\mathbf{k} \rangle$. В силу единственности вакуума,

$$d(\psi_1, E_{\tilde{k}}\psi_2) = (\psi_1, \psi_0)(\psi_0, \psi_2)\, \delta(\tilde{k}) + R(\tilde{k}).$$

Отсюда (315) следует непосредственно. Доказательство равенства (314), которое не используется ниже, отнесено в задачи (задача 145). ∎

Лемма 3. Для полей, обладающих свойством 9, носитель $\hat{W}_{n, \mathrm{T}}$ содержится в $(-\overline{V}_{m,+})^{(n-1)}$ при $n \geqslant 2$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы IX.32, по свойству 9 носитель $\hat{W}_n$ лежит в $(\{0\} \cup (-\overline{V}_{m,+}))^{n-1}$. Очевидно, что $\hat{W}_{n, \mathrm{T}}$ обладает тем же свойством. Более того, $\hat{W}_{n, \mathrm{T}}$ — мера по каждой переменной, как в лемме 2. Итак, следует доказать лишь, что $\hat{W}_{n, \mathrm{T}}$, будучи сглаженной по всем переменным, за исключением p_l, не содержит вклад $\delta(p_l)$. Доказательство проводится индукцией по n. При $n = 2$ имеем $W_{2, \mathrm{T}}(x) = W_2(x) - W_1^2$, так что

$$\hat{W}_{2, \mathrm{T}}(p) = \hat{W}_2(p) - (2\pi)^2 \delta(p) W_1^2$$

и, значит, по (315) $\delta(p)$-вклад в $\hat{W}_{2, \mathrm{T}}$ равен нулю. Пусть теперь, по предположению индукции, носитель $\hat{W}_{j, \mathrm{T}}$ лежит в $(-\overline{V}_{m,+})^{(j-1)}$ при $j = 2, \ldots, n-1$. Фиксируем i и рассмотрим

$$\hat{\mathscr{W}}_{n, \mathrm{T}} = \hat{\mathscr{W}}_n - \sum_{\substack{P \in \mathscr{P}_n \\ P \neq \{1, \ldots, n\}}} \Big(\prod_{S_j \in P} \mathscr{W}_{S_j, \mathrm{T}}\Big)^{\wedge}.$$

Разобьем сумму по $\mathscr{P}_n$ на две части. В первую отнесем те $P \in \mathscr{P}_n$, для которых никакие $k_1 \leqslant i$ и $k_2 \geqslant i+1$ не принадлежат одному и тому же подмножеству $S_j \in P$. Очевидно, сумма по таким P дает фурье-образ $\mathscr{W}_i(x_1, \ldots, x_l)\, \mathscr{W}_{n-i}(x_{i+1}, \ldots, x_n)$, так что вклад этой суммы в $\hat{W}_{n, \mathrm{T}}(p)$ в точности уничтожает $\delta(p_i)$-часть $\hat{W}_n$. Во второй части суммы p_i есть сумма импульсов, от которых зависит $\hat{W}_{S_j,\,\mathrm{T}}$, и, таким образом, по предположению индукции, эта сумма имеет носитель по p_l в $(-\bar{V}_{m,+})$ (см. задачу 146). Отсюда следует, что $\hat{W}_{n,\,\mathrm{T}}(p)$ не содержит $\delta(p_l)$-вклада, и потому ее носитель лежит в $(-\bar{V}_{m,+})^{(n-1)}$. ∎

Доказательство теоремы XI.110. Поскольку функция F из (308) обладает тем свойством, что ее производные снова имеют тот же самый вид, нужно лишь показать, что для любого N

$$\sup_{\alpha} d(\alpha)^N F(a_1, \ldots, a_n) < \infty, \tag{316}$$

где $d(\alpha) = \left(\sum_{l=1}^{n-1}(a_{l+1}-a_l)^2\right)^{1/2}$. Очевидно, достаточно показать, что для любого единичного вектора $\hat{\alpha} \in \mathbb{R}^{3n-3}$ оценка (316) выполнена равномерно по $\alpha/\|\alpha\|$ в некоторой фиксированной окрестности $\hat{\alpha}$. Для заданного $\hat{\alpha}$ сначала утверждаем, что найдется разбиение набора $\langle 1, \ldots, n\rangle$ на два набора $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ и $I' = \{i'_1, \ldots, i'_{n-k}\}$, такие, что если $a_{l+1} - a_l = \hat{\alpha}_l$, то $\|a_j - a_{i'}\| \geqslant n^{-3/2}$ для всех $j \in I$ и $i' \in I'$. Это вытекает из следующего построения. Некоторая компонента $\hat{\alpha}$, скажем $\hat{\alpha}_j$, должна иметь длину не меньше $n^{-1/2}$. Рассмотрим n плоскостей в $\mathbb{R}^3$, перпендикулярных вектору $a_{j+1} - a_j$ и проходящих через точки a_l. Очевидно, что для какой-то пары соседних плоскостей расстояние между этими плоскостями не меньше $n^{-1}\|a_{j+1} - a_j\| \geqslant n^{-3/2}$. Возьмем в качестве I точки по одну сторону от этой пары, а в качестве I' — по другую. Выберем окрестность M около $\hat{\alpha}$ так, чтобы если $\alpha/\|\alpha\| \in M$, то для всех $j \in I$ и $i' \in I'$ было

$$\|a_j - a_{i'}\| \geqslant \frac{1}{2n^{3/2}}\|\alpha\|.$$

Пусть $\tilde{M} = \{\alpha \neq 0 \mid \alpha/\|\alpha\| \in M\}$. Докажем, что (316) выполняется для $\alpha \in \tilde{M}$. Поскольку единичная сфера может быть покрыта конечным числом таких окрестностей M, отсюда будет следовать (316). Введем

$$\mathscr{W}'_{n,\,\mathrm{T}}(x_1, \ldots, x_n) = \mathscr{W}_{n,\,\mathrm{T}}\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, x_{i'_1}, \ldots, x_{i'_{n-k}}\right),$$

$$\mathscr{W}''_{n,\,\mathrm{T}}(x_1, \ldots, x_n) = \mathscr{W}_{n,\,\mathrm{T}}\left(x_{i'_1}, \ldots, x_{i'_{n-k}}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\right),$$

где мы упорядочили наборы I и I' так, что $i_1 < \ldots < i_k$, $i'_1 < \ldots < i'_{n-k}$. Мы утверждаем, что для любого N и любого $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n})$

$$\sup_{\alpha \in \tilde{M}} |d^N(\alpha)(\mathscr{W}'_{n,\,\mathrm{T}}(g_\alpha) - \mathscr{W}_{n,\,\mathrm{T}}(g_\alpha))| < \infty, \tag{317a}$$

$$\sup_{\alpha \in \tilde{M}} |d^N(\alpha)(\mathscr{W}''_{n,\,\mathrm{T}}(g_\alpha) - \mathscr{W}_{n,\,\mathrm{T}}(g_\alpha))| < \infty. \tag{317b}$$

Принимая (317) пока на веру, докажем (316) для $\alpha \in \tilde{M}$. Пусть S' (соответственно S'') — носитель $\mathscr{W}'$ (соответственно $\mathscr{W}''$). Если $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle \in S'$ (соответственно S''), то, в силу леммы 3 и задачи 146, сумма $P = \sum_i p_i$, где суммирование ведется по $i \in I'$ (соответственно по $i \in I''$), лежит в $-\bar{V}_{m,+}$ (соответственно $\bar{V}_{m,+}$). Пусть h — ограниченная C^∞-функция с ограниченными производными, такая, что $h = 1$ на $-\bar{V}_{m,+}$ и $h = 0$ на $\bar{V}_{m,+}$. Пусть $g = (h\tilde{f})^{\check{}}$. Тогда $\mathscr{W}''_{n,\,\mathrm{r}}(g_a) = 0$ и $\mathscr{W}_{n,\,\mathrm{T}}(g_a) = \mathscr{W}'_{n,\,\mathrm{I}}(f_a)$. Итак, в силу (317), $\sup\limits_{\alpha \in \tilde{M}} |d^N(\alpha)\mathscr{W}'_{n,\,\mathrm{r}}(f_a)| < \infty$. Снова применяя (317a), получаем, что

$$\sup_{\alpha \in \tilde{M}} |d^N(\alpha)\mathscr{W}_{n,\,\mathrm{T}}(f_a)| < \infty.$$

Это доказывает (316).

Таким образом, для завершения доказательства осталось доказать лишь (317). Пусть $\alpha \in M$ фиксировано, и пусть $x \in \mathbb{R}^{4n}$ таково, что $\|x\| < d(\alpha)/4n^{3/2}$. Тогда для любых $j \in I$, $i' \in I'$

$$\|x_j - x_{i'}\|^2 \leqslant 2(\|x_{i'}\|^2 + \|x_j\|^2) \leqslant 2\|x\|^2 < {}^1/_2(d(\alpha)/2n^{3/2})^2 \leqslant {}^1/_2\|a_j - a_{i'}\|^2.$$

Полагая $\zeta = x_{i'} - x_j \in \mathbb{R}^4$ и $\alpha = a_{i'} - a_j \in \mathbb{R}^3$, имеем

$$\zeta_0^2 + \zeta^2 < {}^1/_2\|\alpha\|^2,$$

так что

$$(|\zeta_0| + |\zeta|)^2 \leqslant 2\zeta_0^2 + 2|\zeta|^2 < \|\alpha\|^2,$$

или

$$|\zeta_0| < \|\alpha\| - \|\zeta\| \leqslant \|\alpha + \zeta\|.$$

Итак, вектор $\zeta + \alpha$ пространственно-подобен, иными словами, если $\|x\| < d(\alpha)/4n^{3/2}$, $\alpha \in \tilde{M}$ и $j \in I$, $i' \in I'$, то векторы $(x+a)_{i'}$ и $(x+a)_j$ пространственно-подобно разделены. Отсюда, в силу локальной коммутативности, следует, что для таких x имеет место равенство

$$\mathscr{W}'_{n,\,\mathrm{r}}(x+a) = \mathscr{W}_{n,\,\mathrm{r}}(x+a).$$

Таким образом, для любого $h_{(a)}$ из C^∞, равного 1 при $\|x\| \geqslant d(\alpha)/4n^{3/2}$, выполняется оценка

$$|\mathscr{W}_{n,\,\mathrm{T}}(g_a) - \mathscr{W}_{n,\,\mathrm{I}}(g_a)| \leqslant |\mathscr{W}^{(a)}_{n,\,\mathrm{r}}(gh_{(a)})| + |\mathscr{W}^{(a)}_{n,\,\mathrm{T}}(gh_{(a)})|, \tag{318}$$

где $\mathscr{W}^{(a)}(x) = \mathscr{W}(x+a)$. Функцию $h_{(a)}$ можно выбрать обращающейся в нуль на множестве таких x, для которых $\|x\| \leqslant d(\alpha)/8n^{3/2}$, и такой, что при $d(\alpha) \geqslant 1$ нормы $\|D^\beta h_{(a)}\|$ равномерно ограничены по a. По теореме о регулярности для обобщенных функций умеренного роста существуют дифференциальный оператор $P(D)$ и непрерывная функция F с $|F(x)| \leqslant c(1+x^2)^N$, такие, что $\mathscr{W}_{n,\,T} = P(D)F$. Итак,

$$|\mathscr{W}^{(a)}_{n,\,T}(gh_{(a)})| \leqslant c_0 \int (1+(x+a)^2)^N |P(D)(gh_{(a)})|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant c(1+a^2)^N \int (1+x^2)^N \,|\, P(D)\,(gh_{(a)})\,(x)\,|\,dx.$$

В силу убывания g и свойств носителя $h_{(a)}$, последний интеграл стремится к нулю быстрее любой степени $d(\alpha)$. Таким образом, (317a) следует из (318), если заметить, что для любого α можно подобрать соответствующий вектор a, удовлетворяющий неравенству $a^2 \leqslant cd(\alpha)^2$, взяв, скажем, $a_1 = 0$. Доказательство (317b) аналогично.

XI.17. Фазово-пространственный анализ рассеяния и спектральная теория

На первом шаге доказательства нужно ждать. Частице может потребоваться много времени, чтобы уйти далеко от рассеивателя. Следует запастись терпением. Вспомните, как долго пришлось ждать, пока появилось доказательство асимптотической полноты.

В. ЭНСС

В этом разделе мы описываем замечательный подход к исследованию полноты и спектральных задач для операторов Шредингера. Возможности этого метода распространяются на многочастичные системы. Мы разбираем здесь двухчастичную задачу, где с точностью до некоторых различий в предположениях о логарифмическом поведении результаты для локальных потенциалов очень похожи на теорему Агмона—Като—Куроды (теорему XIII.33), доказанную в § XIII.8. Однако методы совершенно различны: последняя теория основана на внушительном, хотя и элегантном механизме, включающем сужения преобразований Фурье на сферы (§ IX.9), теорию локально гладких возмущений (§ XIII.7) и аналитическую теорию Фредгольма (§ VI.5). Для сравнения укажем, что в этом разделе будет применяться немногим более, чем метод Кука, интегрирование по частям (в духе теоремы XI.14), а также одно важное физическое соображение: частица в любом состоянии, не являющемся связанным, должна проводить продолжительные периоды времени вдали от рассеивателя (точный смысл этому утверждению придается теоремой РАГЭ, которую мы доказываем в дополнении к этому разделу) и в эти периоды времени потенциалом можно пренебречь. Если разложить состояние в это время на две части: одну со скоростями, направленными от рассеивающего центра, и другую со скоростями, направленными к рассеивающему центру, то одна из этих частей не должна участвовать во взаимодействии в обозримом будущем, а другая — в обозримом прошлом.

На протяжении всего нашего рассмотрения двухчастичной задачи мы полагаем $H_0 = -{}^1/_2\Delta$. Этот выбор массы, $m=1$, удобен, поскольку скорости тогда совпадают с импульсами. Под $F(S)$ мы понимаем оператор, являющийся умножением на характеристическую функцию множества S.

Определение. Симметрический оператор V в $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ называют **потенциалом Энсса** тогда и только тогда, когда

(a) V есть относительно ограниченное возмущение H_0 с относительной гранью $a<1$;

(b) функция h на $[0, \infty)$, заданная посредством
$$h(R) = \|V(H_0+i)^{-1}F(|x|\geqslant R)\|,$$
лежит в $L^1(0, \infty; dR)$. При этом $h(R)$ автоматически монотонно убывает и $\lim\limits_{R\to\infty} h(R) = 0$.

Заметим, что мы не требуем, чтобы V был оператором умножения, но если это так, то, как можно показать (задача 151d), $h(R)$ лежит в L^1 тогда и только тогда, когда этим свойством обладает функция
$$h(R) = \|F(|x|\geqslant R)V(H_0+i)^{-1}\|.$$
В частности, если V — оператор умножения, причем произведение $(1+|x|)^{1+\varepsilon}V(H_0+i)^{-1}$ ограничено, и если V имеет относительную H_0-грань, меньшую 1, то V — потенциал Энсса.

Чтобы показать, насколько естественно условие Энсса, начнем с доказательства того, что если V — потенциал Энсса, то существуют волновые операторы. Пусть f — функция из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$, такая, что $\hat{f}$ имеет компактный носитель в области $\{k \mid |k|>a\}$. Согласно следствию теоремы XI.14,
$$|(e^{-itH_0}(H_0+i)f)(x)| \leqslant C(1+|x|+|t|)^{-\nu-1}, \qquad |x|\leqslant {}^1/_2 a|t|,$$
для некоторого C, откуда видно, что
$$\int_{-\infty}^{\infty} \|F(|x|\leqslant {}^1/_2 a|t|)e^{-itH_0}(H_0+i)f\|\,dt < \infty. \tag{319}$$
Напишем теперь:
$$Ve^{-itH_0}f = V(H_0+i)^{-1}F(|x|\leqslant {}^1/_2 a|t|)e^{-itH_0}(H_0+i)f +$$
$$+V(H_0+i)^{-1}F(|x|\geqslant {}^1/_2 a|t|)e^{itH_0}(H_0+i)f.$$

Тогда

$$\|Ve^{-itH_0}f\| \leqslant \|V(H_0+i)^{-1}\| \, \|F(|x| \leqslant {}^1/_2 a|t|)e^{-itH_0}(H_0+i)f\| + \\ + \|V(H_0+i)^{-1}F(|x| \geqslant {}^1/_2 a|t|)\| \, \|(H_0+i)f\|. \qquad (320)$$

По (319) первый член лежит в $L^1(\mathbb{R}, dt)$ По условию Энсса второй член также лежит в $L^1(\mathbb{R}, dt)$; значит,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|Ve^{-itH_0}f\, dt\| < \infty,$$

и, следовательно, в силу обычных рассуждений о плотном множестве и возможности применить метод Кука, волновые операторы $\Omega^{\pm}(H, H_0)$ существуют. На самом деле можно сказать намного больше. Для двухчастичного случая основной результат дает

Теорема XI.112 (теорема Энсса). Пусть V — потенциал Энсса, и пусть $H=H_0+V$ — самосопряженная операторная сумма. Тогда:

(1) операторы $\Omega^{\pm}(H, H_0)$ существуют и полны;
(2) спектр $\sigma_{\text{sing}}(H)$ пуст;
(3) единственная возможная (конечная) точка накопления множества $\sigma_{\text{pp}}(H)$ — это 0, и любое ненулевое собственное значение имеет конечную кратность.

Отметим, что, в частности, из этой теоремы следует равенство $\sigma_{\text{ess}}(H)=[0, \infty)$. Это заключение не вытекает автоматически из теоремы Вейля (§ XIII.4), поскольку оператор V может не быть относительно компактным.

Для доказательства теоремы Энсса требуется

Теорема XI.113. Пусть $H=H_0+V$, где $H_0=-{}^1/_2\Delta$ и V — потенциал Энсса. Пусть $\{\varphi_n\}$ — последовательность единичных векторов, такая, что

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \|F(|x| \leqslant n)\varphi_n\| = 0$;
(ii) для некоторых $a>0$, $b>0$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \|[E_{(-a,\, a)}(H)+E_{(b,\, \infty)}(H)]\varphi_n\| = 0,$$

где $E_\Omega(H)$ — семейство спектральных проекторов оператора H.

Тогда $\varphi_n = \varphi_{n;\,\text{in}} + \varphi_{n;\,\text{out}} + \varphi_{n;\,\text{w}}$, где

$$\overline{\lim}\, \|\varphi_{n;\,\text{in}}\| < \infty, \qquad \overline{\lim}\, \|\varphi_{n;\,\text{out}}\| < \infty, \qquad (321)$$

$$\lim_{n\to\infty} \|(\Omega^+ - 1)\varphi_{n;\,\text{in}}\| = 0 = \lim_{n\to\infty} \|(\Omega^- - 1)\varphi_{n;\,\text{out}}\|, \qquad (322)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t<0} \|F(|x| \leqslant \delta n)e^{-itH_0}\varphi_{n;\,\text{in}}\| = 0 \qquad (323)$$

для некоторого $\delta > 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_{n;\,\mathrm{w}}\| = 0. \qquad (324)$$

Основная идея будет состоять в разбиении φ_n на части: одну с импульсами наружу и другую — внутрь. Таким способом мы отделяем те части, которые предназначены для мусорной корзины (wastebasket), и сваливаем их в общую кучу, обозначаемую $\varphi_{n;\,\mathrm{w}}$. Конечно, мы могли бы вынуть эти части из корзины и объединить их все с $\varphi_{n;\,\mathrm{in}}$ без нарушения условий (321) — (323), но с идейной точки зрения удобнее не делать этого. Мы отложим доказательство теоремы XI.113, а пока воспользуемся ею для доказательства теоремы XI.112.

Доказательство теоремы XI.112. Мы уже показали, что волновые операторы существуют. Пусть $\varphi \in \mathscr{H}_{\mathrm{sing}}(H)$, причем $E_{(-a,\,a)}(H)\varphi = E_{(b,\,\infty)}(H)\varphi = 0$ для некоторых a, b. Поскольку оператор $(H_0+i)(H+i)^{-1}$ ограничен, а $F(|x|\leqslant n)\,(H_0+i)^{-1}$ компактен, компактен и $F(|x|\leqslant n)(H+i)^{-1}$. Итак, по теореме РАГЭ, доказанной в дополнении, мы индуктивно можем построить такую последовательность $\{\tau_n\}$, что $\tau_{n+1} > \tau_n > 0$ и $\|F(|x|\leqslant n)\times$ $\times e^{-i\tau_n H}\varphi\| \leqslant 1/n$. Пусть $\varphi_n = e^{-i\tau_n H}\varphi$. Тогда $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы XI.113, так что

$$\|\varphi_n - \Omega^+\varphi_{n;\,\mathrm{in}} - \Omega^-\varphi_{n;\,\mathrm{out}}\| \to 0. \qquad (325)$$

Поскольку $\operatorname{Ran}\Omega^{\pm} \subset \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(H) \subset \mathscr{H}_{\mathrm{sing}}^{\perp}$, а пространство $\mathscr{H}_{\mathrm{sing}}$ инвариантно под действием e^{-itH}, мы видим, что $\|\varphi_n\| \to 0$, и потому $\varphi = 0$. Отсюда следует, что $\mathscr{H}_{\mathrm{sing}}(H) = \{0\}$.

Далее, пусть $\varphi \in \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(H)$, и предположим, что $\varphi \in (\operatorname{Ran}\Omega^-)^{\perp}$ и $E_{(-a,\,a)}(H)\varphi = E_{(b,\,\infty)}(H)\varphi = 0$ для некоторых a, b. Как и выше, выполняется (325). Мы получаем, что $(\varphi_n, \Omega^-\varphi_{n;\,\mathrm{out}}) = 0$, поскольку e^{-itH} оставляет множество $(\operatorname{Ran}\Omega^-)^{\perp}$ инвариантным. Более того,

$$|(\varphi_n, \Omega^+\varphi_{n;\,\mathrm{in}})| = |(\varphi, e^{i\tau_n H}\Omega^+\varphi_{n;\,\mathrm{in}})| = |((\Omega^+)^*\varphi, e^{i\tau_n H_0}\varphi_{n;\,\mathrm{in}})| \leqslant$$
$$\leqslant \|F(|x|\geqslant \delta n)(\Omega^+)^*\varphi\|\,\|\varphi_{n;\,\mathrm{in}}\| + \|\varphi\|\,\|F(|x|\leqslant \delta n)\,e^{i\tau_n H_0}\varphi_{n;\,\mathrm{in}}\|.$$

В силу (321), первый член стремится к нулю, а по (323) так же ведет себя и второй. Таким образом, последовательность $\{\varphi_n\}$ асимптотически ортогональна $\Omega^+\varphi_{n;\,\mathrm{in}} + \Omega^-\varphi_{n;\,\mathrm{out}}$, а тем самым сама себе. Отсюда следует, что $\varphi = 0$, поэтому $(\operatorname{Ran}\Omega^-)^{\perp} \cap \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(H) = \{0\}$. Итак, $\operatorname{Ran}\Omega^- = \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(H)$ и аналогично $\operatorname{Ran}\Omega^+ = \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(H)$, так что волновые операторы полны.

Наконец, предположим, что $\{\varphi_n\}$ — последовательность ортогональных нормированных собственных векторов оператора H, $H\varphi_n = E_n\varphi_n$ и $E_n \to E \neq 0$. Если выбрать a, b так, чтобы $E \notin [-a, a] \cup [b, \infty)$, то выполняется предположение (b) теоремы XI.113. Более того, в силу компактности оператора $F(|x|\leqslant R)\times$

$\times(H+i)^{-1}$ и ортонормированности $\{\varphi_n\}$, имеем

$$\|F(|x|\leqslant R)\varphi_n\|=|E_n+i|\,\|F(|x|\leqslant R)(H+i)^{-1}\varphi_n\|\to 0.$$

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что φ_n удовлетворяет предположению (а) теоремы XI.113. Итак, выполняется (325), значит, $\{\varphi_n\}$ асимптотически лежит в $\mathcal{H}_{ac}(H)$, что невозможно. Это противоречие влечет за собой справедливость утверждения (3). ∎

Доказательство теоремы XI.113 опирается на три подготовительные леммы. Первая — это утверждение, которое мы должны будем повторить в § XIII.5, что на больших расстояниях H и H_0 выглядят похоже.

Лемма 1. Пусть Φ — непрерывная функция на $\mathbb{R}$, исчезающая на бесконечности. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\|[\Phi(H)-\Phi(H_0)]F(|x|\geqslant n)\|=0. \tag{326}$$

Доказательство. Поскольку оператор H ограничен снизу, выберем $E_0<\inf\sigma(H)-1$. Тогда для $z\leqslant E_0+1$ и $\Phi(x)=(x-z)^{-1}$ (326) выполняется, так как

$$\|[\Phi(H)-\Phi(H_0)]F(|x|\geqslant n)\|\leqslant\|(H-z)^{-1}\|\,\|V(H_0-z)^{-1}F(|x|\geqslant n)\|$$

и второй множитель стремится к нулю в силу условия Энсса и простого рассуждения (задача 151c). Поскольку разность $(H-z)^{-1}-(H_0-z)^{-1}$ равномерно ограничена и аналитична в области $\operatorname{Re} z\leqslant E_0+1$, из теоремы Витали следует сходимость производных от $[(H-z)^{-1}-(H_0-z)^{-1}]F(|x|\geqslant n)$ к нулю, т. е. (326) выполняется для $\Phi(x)=(x-E_0)^{-m}$ и, таким образом, для Φ, полиномиально зависящих от $(x-E_0)^{-1}$. Но по теореме Стоуна — Вейерштрасса такие полиномы $\|\cdot\|_\infty$-плотны во множестве непрерывных функций на $[E_0+1,\infty)$, исчезающих на бесконечности. Применяя $\varepsilon/3$-прием, получаем (326) для всех указанных в условии функций Φ. ∎

Во-вторых, нам нужна несколько более тонкая версия следствия теоремы XI.14.

Лемма 2. Пусть K — компактное подмножество в $\mathbb{R}^\nu$, и пусть $\mathcal{O}$ — его открытая окрестность. Пусть $C(x_0,t)=\{x_0+vt\mid v\in\mathcal{O}\}$ — «классически разрешенная область» для частиц, начинающих движение из точки x_0 со скоростями из $\mathcal{O}$. Тогда для любого l существуют целое число μ и константа D, такие, что

$$|e^{-itH_0}u(x)|\leqslant D(1+\operatorname{dist}(x,C(x_0,t)))^{-l}\|(1+|x-x_0|^\mu)u\| \tag{327}$$

для всех u с $\operatorname{supp}\hat{u}\subset K$ и всех $x\notin C(x_0,t)$.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $x_0=0$, поскольку оператор e^{-itH_0} коммутирует с трансляциями. Имея в виду предельный переход, можно предполагать, что $u\in\mathscr{S}$. По теореме XI.14 и доводам, приведенным при доказательстве ее следствия, для $\operatorname{supp}\hat{u}\subset K$, $u\in\mathscr{S}$ и $x\notin C(0, t)$ имеем

$$|(e^{-itH_0}u)(x)|\leqslant D_0(1+|x|+|t|)^{-l}\sum_{|\alpha|\leqslant l}\|D^\alpha\hat{u}\|_\infty.$$

Отсюда следует (327), если заметить, что, согласно неравенству Соболева и теореме Планшереля,

$$\sum_{|\alpha|\leqslant l}\|D^\alpha\hat{u}\|_\infty\leqslant C_0\sum_{|\alpha|\leqslant l+\nu+1}\|D^\alpha\hat{u}\|_2\leqslant C_1\|(1+|x|^{l+\nu+1})u\|_2$$

и что

$$|\operatorname{dist}(x, C(0, t))|\leqslant C(|x|+|t|+1). \tag{328}$$

Действительно, пусть $v_\infty=\sup\{|v|\,|\,v\in\mathfrak{S}\}$. Тогда либо $|x|\leqslant v_\infty|t|$, и в этом случае $|\operatorname{dist}(x, C(0, t))|\leqslant 2v_\infty|t|$, либо $|x|\geqslant v_\infty|t|$, и в этом случае $|\operatorname{dist}(x, C(0, t))|\leqslant 2|x|$. ∎

Наконец, нам нужна лемма о локализации в фазовом пространстве.

Лемма 3. Пусть $\mathscr{X}_\alpha$, $\alpha\in Z^\nu$, — характеристическая функция единичного куба с центром в α. Пусть $f\in\mathscr{S}$ — фиксированная положительная функция, и пусть $f_\alpha=f*\mathscr{X}_\alpha$. Предположим, что $\int f d^\nu x=1$. Для каждого $\alpha\in Z^\nu$ пусть g_α — функция из $\mathscr{S}$, такая, что $\sup_\alpha\|(1-\Delta)^\nu g_\alpha\|_2<\infty$. Тогда ($P=-i\nabla$, X есть оператор умножения на x):

(a) оператор T, заданный априори на C_0^∞ как $Tu=\sum_\alpha g_\alpha(P)f_\alpha(X)u$, определяет ограниченное отображение из $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ в $L^2(\mathbb{R}^\nu)$;

(b) для некоторой не зависящей от R константы C выполнено неравенство $\left\|\sum_{|\alpha|\leqslant {}^9/_4 R} f_\alpha(X)u\right\|_2\leqslant C[\|F(|x|\leqslant {}^7/_8 R)u\|_2+R^{-1}\|u\|_2]$.

Доказательство. (a) $\overline{g_\alpha}(P)g_\beta(P)$ — свертка с некоторой функцией $h_{\alpha\beta}$. Мы утверждаем, что $|h_{\alpha\beta}(x)|\leqslant C_0(1+|x|)^{-2\nu}$ для константы C_0, не зависящей от α и β. Это следует из равномерной оценки норм $\|\overline{g_\alpha}g_\beta\|_1$ и $\|(-\Delta)^\nu\overline{g_\alpha}g_\beta\|_1$, которая по правилу Лейбница вытекает из предположений о $\|g_\alpha\|_2$ и $\|(-\Delta)^\nu g_\alpha\|_2$. Таким образом,

$$\|Tu\|^2=\sum_{\alpha,\beta}\int\overline{u(x)}f_\alpha(x)h_{\alpha\beta}(x-y)f_\beta(y)u(y)\,dx\,dy\leqslant$$

$$\leqslant C_0\sum_{\alpha,\beta}\int|u(x)|f_\alpha(x)(1+|x-y|)^{-2\nu}f_\beta(y)|u(y)|\,dx\,dy=$$

$$=C_0\int|u(x)|(1+|x-y|)^{-\nu}|u(y)|\,dx\,dy\leqslant C_1\|u\|^2,$$

где на втором шаге мы воспользовались равенством $\sum_\alpha f_\alpha = 1$, а на последнем неравенством Юнга.

(b) Применяя неравенство Юнга, имеем

$$\|[f*F(|x|\leqslant {}^3/_4 R)]u\| \leqslant \|v\| + \|w\|,$$

где

$$\begin{aligned}\|v\| &= \|[f*F(|x|\leqslant {}^3/_4 R)]F(|x|\leqslant {}^7/_8 R)u\|_2 \leqslant \\ &\leqslant \|f*F(|x|\leqslant {}^3/_4 R)\|_\infty \|F(|x|\leqslant {}^7/_8 R)u\|_2 \leqslant \\ &\leqslant \|f\|_1 \|F(|x|\leqslant {}^7/_8 R)u\|_2\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\|w\| &= \|[f*F(|x|\leqslant {}^3/_4 R)]F(|x|\geqslant {}^7/_8 R)u\|_2 \leqslant \\ &\leqslant \|[f*F(|x|\leqslant {}^3/_4 R)]F(|x|\geqslant {}^7/_8 R)\|_\infty \|u\|_2.\end{aligned}$$

При $|y|\geqslant {}^7/_8 R$

$$(f*F(|x|\leqslant {}^3/_4 R))(y) = \int_{|x|\leqslant {}^3/_4 R} f(y-x)\,dy = \int_{|x|\leqslant {}^3/_4 R} h(y-x)\,dy,$$

где $h = fF(|x|\geqslant {}^1/_8 R)$, поскольку неравенства $|y|\geqslant {}^7/_8 R$ и $|x|\leqslant {}^3/_4 R$ влекут за собой, что $|y-x|\geqslant {}^1/_8 R$. Итак, $\|w\|\leqslant$ $\leqslant F(|x|\geqslant {}^1/_8 R)f\|_1\|u\|_2$. ∎

Доказательство теоремы XI.113. Выберем функцию Φ из $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ так, чтобы $\Phi = 0$ на $(-{}^1/_2 a, {}^1/_2 a)$ и $(2b, \infty)$ и $\Phi = 1$ на $[\inf\sigma(H), -a]$

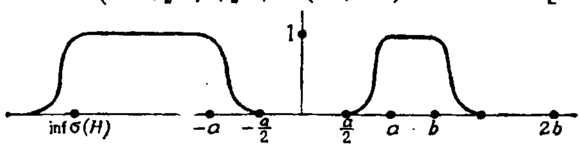


Рис. XI.16.

и $[a, b]$ (рис. XI.16). Пусть $\eta_n = \Phi(H_0)\varphi_n$ и

$$\varphi_{n;\,\mathrm{w}}^{(1)} \equiv \varphi_n - \eta_n = [1-\Phi(H)]\varphi_n + [\Phi(H)-\Phi(H_0)]\varphi_n.$$

Тогда $\|\varphi_{n;\,\mathrm{w}}^{(1)}\| \to 0$ при $n\to\infty$, поскольку первый член стремится к нулю по предположению (ii) теоремы, а второй — по предположению (i) и лемме 1. Более того, поскольку $\Phi(H_0)$ — свертка с фиксированной функцией из $\mathscr{S}$, как и при доказательстве части (b) леммы 3, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \|F(|x|\leqslant {}^7/_8 n)\eta_n\| = 0. \tag{329}$$

Теперь проведем обещанное разбиение на «вылетающие частицы» и «влетающие частицы». Пусть f — фиксированная положительная функция из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$, такая, что носитель $\hat{f}$ лежит в $\{k \,|\, |k| \leqslant$

$\leqslant {}^1/_2\sqrt{a}\}$ и $\int f(x)\,d^\nu x = 1$. Тогда для свертки $f_\alpha \equiv f * \mathscr{X}_\alpha$ носитель $\hat{f}_\alpha$ также лежит в $\{k \mid |k| \leqslant {}^1/_2\sqrt{a}\}$, а носитель $\widehat{f_\alpha\eta_n}$ — в $\{k \mid {}^1/_2\sqrt{a} < |k| < 2\sqrt{b} + {}^1/_2\sqrt{a}\}$. Фиксируем функции g и h из $\mathscr{S}$, такие, что: (i) $g(k) + h(k) = 1$ для $|k| < 2\sqrt{b} + {}^1/_2\sqrt{a}$; (ii) $g(k) = 0$ (соответственно $h(k) = 0$), если $|k| > {}^1/_6\sqrt{a}$ и k образует угол, меньший $30°$, с единичным вектором в направлении k_1 (соответственно $-k_1$). Пусть g_α и h_α—функции, полученные поворотом g и h таким образом,

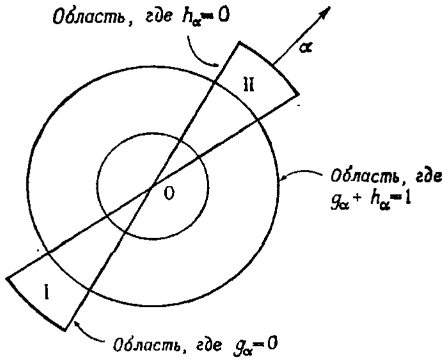


Рис. XI.17.

чтобы запрещенный конус для g_α (соответственно h_α) располагался вокруг направления от α назад к 0 (соответственно в обратном этому направлении); см. рис. XI.17. Мы возьмем

$$\varphi_{n;\,\mathrm{in}} = \sum_{|\alpha| \geqslant {}^3/_4 n} h_\alpha(P)\, f_\alpha(X)\,\eta_n \equiv \sum \eta_{n;\,\alpha,\,\mathrm{in}},$$

$$\varphi_{n;\,\mathrm{out}} = \sum_{|\alpha| \geqslant {}^3/_4 n} g_\alpha(P)\, f_\alpha(X)\,\eta_n \equiv \sum \eta_{n;\,\alpha,\,\mathrm{out}},$$

$$\varphi^{(2)}_{n;\,\mathrm{w}} = \sum_{|\alpha| < {}^3/_4 n} f_\alpha(X)\,\eta_n; \qquad \varphi_{n;\,\mathrm{w}} = \varphi^{(1)}_{n;\,\mathrm{w}} + \varphi^{(2)}_{n;\,\mathrm{w}}.$$

Поскольку $\mathrm{supp}\,\widehat{f_\alpha\eta_n}$ содержится во множестве, где $g_\alpha + h_\alpha = 1$, то $\varphi_{n;\,\mathrm{in}} + \varphi_{n;\,\mathrm{out}} + \varphi^{(2)}_{n;\,\mathrm{w}} = \eta_n$. Более того, $\|\varphi^{(2)}_{n;\,\mathrm{w}}\| \to 0$ по части (b) леммы 3 и равенству (329). Итак, выполняется равенство (324), а в силу части (a) леммы 3 выполняются и неравенства (321). Остается доказать (322) и (323).

Далее утверждается, что для некоторого фиксированного $\delta > 0$, всех l, $|\alpha| \geqslant {}^3/_4 n$, $t \geqslant 0$ и $|x| \leqslant \delta(n + |t|)$

$$|(e^{-itH_0}(H_0 + i)\,\eta_{n;\,\alpha,\,\mathrm{out}})(x)| \leqslant C_l(1 + |\alpha| + n + |t|)^{-l}. \tag{330}$$

Применяя лемму 2, это можно получить из следующих двух фактов:

(a) $\sup\limits_{n,\,\alpha} \| |x-\alpha|^{\mu} (H_0+i) g_{\alpha}(P) f_{\alpha}(x) \eta_n \| < \infty$. Это следует из того, что равномерно ограничена норма $\| |x-\alpha|^{\mu} f_{\alpha} \|_{\infty}$ и равномерно ограничены производные от $(k^2+i) g_{\alpha}$.

(b) Пусть $C_{\alpha}(t) = \{\alpha + vt \mid v \in \operatorname{supp} g_{\alpha}(k) \cap \{{}^1/_2\sqrt{a} \leqslant |k| \leqslant 2\sqrt{b} + {}^1/_2\sqrt{a}\}\}$. Тогда для x, α, t, таких же, как выше,

$$\operatorname{dist}(x, C_{\alpha}(t)) \geqslant \delta(1 + |\alpha| + n + |t|), \tag{331}$$

коль скоро δ достаточно мало. Иначе говоря, для $t \geqslant 0$, $|\alpha| \geqslant {}^3/_4 n$, $|x_0| \leqslant \delta n$, $|w| \leqslant \delta$ и

$$v \in V_0 \equiv \operatorname{supp} g_{\alpha} \cap \{{}^1/_2\sqrt{a} < |k| \leqslant 2\sqrt{b} + {}^1/_2\sqrt{a}\}$$

имеем $\operatorname{dist}(x_0 + wt,\ \alpha + vt) \geqslant c(1 + |\alpha| + n + t)$. Предположим, можно доказать, что это расстояние всегда отлично от нуля, когда α заменено на $(1-\varepsilon)\alpha$ Тогда, сжимая δ, можно интересующее нас расстояние оценить снизу величиной $2c(1 + |\alpha| + t)$, а пользуясь тем, что $|\alpha| \geqslant {}^3/_4 n$, найти искомую оценку. То, что это расстояние не обращается в нуль, означает, что частица, начиная движение из точки $\alpha - x_0$ со скоростью $v - w$, не попадает в начало координат, а это очевидно.

Из (300) для показателя степени $l + \nu/2$ немедленно получаем, что при $t > 0$ и $|\alpha| \geqslant {}^3/_4 n$

$$F(|x| \leqslant \delta n + a\delta |t|)(H_0+i) e^{-itH_0} \eta_{n:\,\alpha.\,\mathrm{out}} \| \leqslant C_l' (1 + |\alpha| + n + |t|)^{-l},$$

а тогда для $t \geqslant 0$

$$\| F(|x| \leqslant \delta n + a\delta |t|)(H_0+i) e^{-itH_0} \varphi_{n;\,\mathrm{out}} \| \leqslant C_l''(1 + n + |t|)^{-2}. \tag{332}$$

Это неравенство, его аналог для $t \leqslant 0$ с заменой out на in, а также (320) влекут за собой (322). Предельное равенство (323) получается путем доказательства аналога (322) без дополнительного множителя (H_0+i). ∎

Дополнение к § XI.17. Теорема РАГЭ

В этом дополнении мы докажем теорему Винера о L^2-средних преобразования Фурье меры, а также еще один результат в том же духе, который мы называем теоремой РАГЭ в соответствии с вкладом, который внесли в него Рюэль, Амрейн, Георгеску и Энсс.

Напомним, что конечная (положительная) бэрова мера μ на локально компактном пространстве X обладает таким свойством: $\mu(\{x\}) = 0$ для всех, за исключением не более чем счетного множества точек x, и что $\sum_{x\in X} \mu(\{x\}) \leqslant \mu(X) < \infty$, а потому $\sum_{x\in X} |(\mu(\{x\}))|^2$ — конечное число.

Теорема XI.114 (теорема Винера). Пусть μ — конечная бэрова мера на $\mathbb{R}$, и пусть

$$F(t) = \int e^{-ixt} d\mu(x)$$

— ее фурье-образ (с точностью до множителя $(2\pi)^{-1/2}$). Тогда

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |F(t)|^2 dt = \sum_{x\in\mathbb{R}} |\mu(\{x\})|^2. \tag{333}$$

В частности, если μ не имеет чистых точек, то этот предел равен нулю.

Доказательство. В силу формулы для F и теоремы Фубини (мера $d\mu \otimes d\mu \otimes (2T)^{-1} dt$ на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[-T, T]$ конечна),

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |F(t)|^2 dt = \int d\mu(x) \int d\mu(y) \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-i(x-y)t} dt =$$

$$= \int d\mu(x) H(T, x),$$

где

$$H(T, x) = \int d\mu(y) [T(x-y)]^{-1} \sin(T(x-y)).$$

Подынтегральное выражение в H поточечно ограничено единицей и сходится к 0 (соответственно 1) при $T \to \infty$, если $y \neq x$ (соответственно $y = x$). Применяя теорему о мажорированной сходимости, получаем, что

$$\lim_{T\to\infty} H(T, x) = \mu(\{x\}) \quad \text{и} \quad |H(T, x)| \leqslant \mu(\mathbb{R}).$$

Снова применяя теорему о мажорированной сходимости, имеем

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |F(t)|^2 dt = \int d\mu(x) \mu(\{x\}) = \sum_{x\in\mathbb{R}} |\mu(\{x\})|^2. \blacksquare$$

Заметим, что эта теорема и ее доказательство обобщаются до утверждения, что

$$\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |F(n)|^2 \to \sum_{x\in\mathbb{R}} |\mu(\{x\})|^2,$$

а отсюда в свою очередь следует теорема VII.14b (которую мы без доказательства привели в т. 1), см. задачу 148.

Определение. Пусть A — самосопряженный оператор. Обозначим через $P_{\text{cont}}(A)$ проектор на множество всех векторов φ, спектральная мера которых не имеет чистых точек, т. е. проектор на ортогональное дополнение к множеству собственных векторов оператора A.

Теорема XI.115 (теорема РАГЭ). Пусть A — самосопряженный оператор, и пусть C — ограниченный оператор, так что оператор $C(A+i)^{-1}$ компактен. Тогда:

(a) для всех $\varphi \in P_{\text{cont}}(A)\mathcal{H}$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|Ce^{-itA}\varphi\|^2\,dt \to 0 \quad \text{при } T\to\infty; \tag{334}$$

(b) для некоторого $\varepsilon(T)$, стремящегося к нулю, когда $T\to\infty$, имеем для всех $\varphi\in D(A)$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|Ce^{-itA}P_{\text{cont}}(A)\varphi\|^2\,dt \leqslant \varepsilon(T)\|(A+i)\varphi\|^2; \tag{335}$$

(c) утверждение (334) справедливо и без степени 2; кроме того, имеет место неравенство

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|Ce^{-itA}P_{\text{cont}}(A)\varphi\|\,dt \leqslant \varepsilon(T)^{1/2}\|(A+i)\varphi\|. \tag{336}$$

Доказательство. (a) следует из (b) в силу простого соображения, основанного на плотности, поскольку область $D(A)\cap \operatorname{Ran} P_{\text{cont}}(A)$ плотна в $\operatorname{Ran} P_{\text{cont}}(A)$ и

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|Ce^{-itA}\varphi\|^2\,dt \leqslant \|C\|^2\|\varphi\|^2. \tag{337}$$

(c) следует из (a), (b) и неравенства Шварца. Записывая

$$\|Ce^{-itA}P_{\text{cont}}(A)\varphi\|^2 = \|C(A+i)^{-1}e^{-itA}P_{\text{cont}}(A)(A+i)\varphi\|^2,$$

видим, что достаточно доказать аналог (335), когда оператор C компактен, а $\varepsilon(T)\|(A+i)\varphi\|^2$ заменено на $\varepsilon(T)\|\varphi\|^2$.

Для любых C и T положим

$$\varepsilon_C(T) = \sup_{\varphi\neq 0}\|\varphi\|^{-2}(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}\|Ce^{-itA}P_{\text{cont}}(A)\varphi\|^2\,dt.$$

Тогда, в силу (337), $\varepsilon_C(T) \leqslant \|C\|^2$, а поскольку $\|a+b\|^2 \leqslant \leqslant 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$, то

$$\varepsilon_{C+D}(T) \leqslant 2\varepsilon_C(T) + 2\varepsilon_D(T).$$

Итак, чтобы показать, что $\varepsilon_C(T) \longrightarrow 0$ для компактного оператора C, достаточно доказать это для оператора C конечного ранга, а тем самым и для оператора C ранга 1. Поскольку $P_{\mathrm{cont}}(A)$ коммутирует с e^{-iAt}, нужно показать лишь, что для $\psi \in \operatorname{Ran} P_{\mathrm{cont}}(A)$ и всех φ

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |(\psi,\ e^{-itA}\varphi)|^2\,dt \leqslant \varepsilon(T)\,\|\varphi\|^2,$$

где $\varepsilon(T) \longrightarrow 0$ при $T \longrightarrow \infty$.

Как при доказательстве леммы 1 перед теоремой XI.7, можно перейти к спектральному представлению, так что

$$(\psi,\ e^{-itA}\varphi) = \int e^{-itx}\,h(x)\,d\mu(x),$$

где $d\mu$ — спектральная мера для ψ и $\int |h(x)|^2\,d\mu(x) \leqslant \|\varphi\|^2$. Как и при доказательстве теоремы Винера, имеем

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |(\psi,\ e^{-itA}\varphi)|^2\,dt = \int h(x)\,d\mu(x)\int \overline{h(y)}\,\frac{\sin((x-y)T)}{(x-y)T}\,d\mu(y).$$

Применяя неравенство Шварца, получим

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |(\psi,\ e^{-itA}\varphi)|^2\,dt \leqslant \|\varphi\|^2\,\delta(T),$$

где

$$\delta(T) = \left[\int d\mu(x)\,d\mu(y)\left|\frac{\sin((x-y)T)}{(x-y)T}\right|^2\right]^{1/2}.$$

Как при доказательстве теоремы Винера, $\delta(T) \longrightarrow 0$ при $T \longrightarrow \infty$, поскольку μ не имеет чистых точек. ∎

Следствие. Пусть A — самосопряженный оператор на сепарабельном гильбертовом пространстве, не имеющий точечного спектра. Тогда существует последовательность $t_n \longrightarrow \infty$, такая, что $e^{-it_nA} \longrightarrow 0$ слабо при $n \longrightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис. Тогда оператор $C = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}(\varphi_k,\ \cdot)\,\varphi_k$ компактен, так что по предыдущему доказательству,

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|Ce^{-itA}\psi\|^2\,dt\leqslant\varepsilon(T)\,\|\psi\|^2$$

с $\varepsilon(T)\to 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\sum_{k,\,m}2^{-k-m}\,|(\varphi_k,\,e^{-itA}\varphi_m)|^2\right]dt\leqslant\varepsilon(T).$$

Поскольку функция g, обозначающая выражение, стоящее в квадратных скобках, положительна и стремится к нулю в среднем, должна найтись такая последовательность $t_n\to\infty$, что $g(t_n)\to 0$ (очевидно, существует T_n с $\varepsilon(T_n)\leqslant 2^{-n}$, и тогда $t_n\in$ $\in(^1/_2T_n,T_n)$, причем $g(t_n)\leqslant 4(2^{-n})$). Но если сумма стремится к нулю, то каждое скалярное произведение $(\varphi_k,\ e^{-it_nA}\varphi_m)\to 0$ при $n\to\infty$, что и означает слабую сходимость. ∎

Если A обладает сингулярным спектром, то может случиться, что e^{-itA} не стремится слабо к нулю при $t\to\infty$ (задача 149).

В *нашем* изложении теории Лакса — Филлипса мы априори предполагали отсутствие сингулярного спектра. Идеи, заложенные в теореме РАГЭ, позволяют избежать этого (см. задачу 150).

Мы завершаем это дополнение, приведя один результат типа теоремы РАГЭ, который, возможно, будет полезен при рассмотрении многочастичного рассеяния.

Теорема XI.116. Пусть A — самосопряженный оператор с пустым сингулярным спектром. Пусть C и D — два ограниченных оператора, таких, что $(A+i)^{-1}C$ и $D(A+i)^{-1}$ компактны. Тогда для любого ε можно найти проектор P на *конечное* число собственных векторов A и некоторое $T\geqslant 0$, такие, что при $t>T$

$$\|D(A+i)^{-2}e^{-iAt}(1-P)C\|\leqslant\varepsilon.$$

Прежде чем доказывать эту теорему, опишем один ее частный случай. Предположим, что $C=D=F(|x|\leqslant n)$, а $A=-\Delta+V$, где V — локальный потенциал Энсса. Тогда теорема утверждает, что если в исходный момент времени φ сосредоточено в области $|x|\leqslant n$, т. е. $F(|x|\leqslant n)\varphi=\varphi$, то φ можно разбить на две части: $P\varphi+(1-P)\varphi$. Здесь $P\varphi$ — линейная комбинация имеющихся в системе связанных состояний. Другая часть обладает тем свойством, что если ждать достаточно долгое время, то она «покинет область взаимодействия» и не вернется, т. е.

$$\|F(|x|\leqslant n)\,e^{-itH}(1-P)\varphi\|\leqslant\varepsilon\|(H+i)^2\varphi\|\qquad\text{для всех } t>T_0.$$

Доказательство теоремы XI.116. Как и при доказательстве теоремы РАГЭ, нам нужно лишь найти такие T и P, что при

$t>T$

$$\|Q_1 e^{-itA}(1-P)Q_2\| \leqslant \varepsilon,$$

где Q_1 и Q_2 — два оператора ранга 1. Пусть P_{ac} — проектор на абсолютно непрерывное пространство оператора A, пусть φ_1, φ_2, ... — собственные векторы A, и пусть P_n — ортогональный проектор на линейную оболочку векторов φ_1, ..., φ_n. Наконец, пусть $P_\infty = \text{s-lim}\, P_n = 1 - P_{ac}$. По лемме Римана—Лебега (см. § IX.2), $\|Q_1 e^{-iAt} P_{ac} Q_2\| \to 0$ при $t \to \infty$, поэтому мы можем выбрать T так, чтобы эта норма была меньше $\varepsilon/2$ при $t > T$. Поскольку Q_2 имеет ранг 1, $\|(P_\infty - P_n) Q_2\| \to 0$ при $n \to \infty$ и, значит, можно выбрать n так, чтобы $\|(P_\infty - P_n) Q_2\| \leqslant (\varepsilon/2)\|Q_1\|$. Выбирая $P = P_n$, получаем, что при $t > T$

$$\|Q_1 e^{-iAt}(1-P)Q_2\| \leqslant \|Q_1 e^{-iAt} P_{ac} Q_2\| + \|Q_1 e^{-itA}(P_\infty - P_n) Q_2\| \leqslant \varepsilon. \blacksquare$$

ЗАМЕЧАНИЯ

§ XI.1. Геометрические идеи, упомянутые в третьем абзаце этого раздела, определяют часть данных рассеяния без обращения к сравнению со свободной динамикой. По существу, для определения сечения рассеяния не требуется ничего, кроме этих геометрических идей, но для определения задержки во времени их уже недостаточно. Дальнейшее обсуждение см. в статье Девиса—Саймона, цитированной в замечаниях к § 4, а также статьи: J. Dollard, Scattering into cones, I. Potential Scattering.—*Commun. Math. Phys.* **12** (1969), 193—203, и J. M. Jauch, R. Lavine, R. G. Newton, Scattering into cones. — *Helv. Phys. Acta* 45 (1972), 325—330. Многие авторы формулировали предположения о том, что квантовое состояние есть «состояние рассеяния» или лежит в $\mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sing}$, на геометрическом языке; см. D. Ruelle, A remark on bound states in potential scattering theory.—*Nuovo Cimento A* **61** (1969), 655—662; C. Wilcox, Scattering states and wave operators in the abstract theory of scattering.—*J. Funct. Anal.* **12** (1973), 257—274; W. Amrein, V. Georgescu, On the characterization of bound states and scattering states in quantum mechanics.—*Helv. Phys. Acta* **46** (1973), 635—658; J. Dollard, On the definition of scattering subspace in non-relativistic quantum mechanics.—*J. Math. Phys.* **18** (1977), 229—232; K. B. Sinha, On the absolutely and singularly continuous subspaces in scattering theory.—*Ann. Inst. H. Poincaré, Sect A* **26** (1977), 263—277. Идеи Рюэля существенным образом входят в работу Энсса, которая рассматривается в § 17. См. § 17, дополнение к нему и соответствующее место в Замечаниях.

S-преобразование, которое мы определили как $S = (\Omega^-)^{-1}\Omega^+$, иногда называют S-матрицей ЭБФМ в честь Экштейна (O. Ekstein, Theory of time dependent scattering for multichannel processes.—*Phys. Rev.* **101** (1956), 880—889) и Ф. Березина, Л. Фаддеева, Р. Минлоса (см. их статью в: Тр. 4-го Всесоюзного матем. съезда. Т. 2—Л., 1964, с. 532—544). S'-преобразование называют S-матрицей Яуха в честь Яуха (J. Jauch, Theory of the scattering operator I, II.—*Helv. Phys. Acta* **31** (1958), 127—158, 661—684). Можно выразить различие между этими двумя преобразованиями, записав двухчастичное рассеяние в формальных обозначениях, употребляемых физиками. Функцию $(2\pi)^{-3/2}\psi(\cdot, k)$, которая рассматривалась в § 6 и 7, запишем как $|k, \text{in}\rangle$, а аналогичное состояние $(2\pi)^{-3/2}\psi(\cdot, -k)$, которое асимптотически в будущем переходит в плоскую волну, как $|k, \text{out}\rangle$. Наконец, состояние $(2\pi)^{-3/2}e^{ik\cdot x}$

запишем как $|k$, free$\rangle$. Величина, представляющая физический интерес, есть $S(k, k')=\langle k$, out $|k'$, in$\rangle$; S и S' формально определяются формулами

$$S(k, k')=\langle k, \text{free} | S | k', \text{free}\rangle=\langle k, \text{in} | S' | k', \text{in}\rangle.$$

Отсюда видно, что S и S' связаны преобразованием подобия Ω^+: $|k$, free$\rangle \longmapsto$ $\longmapsto |k$, in$\rangle$.

§ *XI.2*. Большая часть этого раздела и, в частности, теоремы XI.1, XI.2 и XI.3 взяты из работы Саймона: B. Simon, Wave operators for classical particle scattering.—*Commun. Math. Phys.* **23** (1971), 37—48. Подобные результаты в несколько другой постановке были получены Куком, Хунцикером и Проссером: J. Cook, Banach algebras and asymptotic mechanics. In: Cargese Lectures in Theoretical Physics (F. Lurchit, ed.). New York: Gordon and Breach, 1967; W. Hunziker, The S-matrix in classical mechanics.—*Commun. Math. Phys.* **8** (1968), 282—299; R. Prosser, On the asymptotic behavior of certain dynamical systems.—*J. Math. Phys.* **13** (1972), 186—196. Кук, Хунцикер и Проссер работали в $L^2(\Sigma, d^6x)$ и определяли унитарные операторы формулами $(U_t^{(0)} f)(\omega)=f(T_t^{(0)}\omega)$ и $(U_t f)(\omega)=f(T_t\omega)$. Затем они строили волновые операторы в виде $\text{s-lim}_{t\to\pm\infty} U_{-t} U_t^{(0)}$, пользуясь методами квантовой теории. Нам кажется более естественным работать непосредственно в фазовом пространстве.

Красивое рассуждение, с помощью которого в теореме XI.3 доказывалось, что $\mu(N_+\triangle N_-)=0$, появилось впервые у Литльвуда (J. E. Littlewood, On the problem of n bodies.—*Comm. Sem. Math. Lund*, tome supp. dédié à M. Riesz (1952), 143—151) и у Зигеля (C. L. Siegel. Vorlesungen über Himmelsmechanik.—New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1956). Оно было переоткрыто Хунцикером в цитированной выше работе. Литльвуд рассматривал также некоторые случаи с кулоновыми силами.

Рассеяние на центральном потенциале, т. е. формула (7), рассматривается во многих учебниках; см., например, Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теоретическая физика. Т. 1. Механика.—М.: Физматгиз, 1958, или Р. Ньютон, Теория рассеяния волн и частиц. Пер. с англ.—М.: Мир, 1969.

Использование формулы $\ddot{I}=\dot{\mathbf{r}}^2+\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}$ в теореме XI.3 тесно связано с теоремой вириала (см. книгу Ландау и Лифшица). В центральном случае вместо нее можно воспользоваться законами сохранения энергии и момента количества движения (см. задачу 14).

§ *XI.3*. Многие понятия абстрактной нестационарной теории рассеяния были введены в связи с двухчастичными квантовыми системами, описываемыми в § 4. Волновые операторы были впервые формализованы Мёллером (C. Møller, General properties of the characteristic matrix in the theory of elementary particles, I.—*Danske Vid. Selsk. Mat-Fys. Medd.* **23** (1945), 1—48). Но у него не было ясного представления о том, каким понятием предела следует пользоваться. К. Фридрихс в своей работе: K. Friedrichs, On the perturbation of continuous spectra.—*Comm. Pure Appl. Math.* **1** (1948), 361—406, ввел волновые операторы для класса моделей, где V—интегральный оператор с «малым» гладким ядром. Эта статья Фридрихса содержала также идеи, из которых выросла теория возмущений для погруженных собственных значений, описанная в § XII.5 и XII.6. Однако высказанные в этой работе идеи лежали без движения вплоть до работы Яуха (цитированной в замечаниях к § 1), работ Кука и Като (цитируемых ниже) и работы Ладыженской и Фаддеева (О. А. Ладыженская, Л. Д. Фаддеев, О возмущениях непрерывного спектра.—ДАН СССР **120** (1958), 1187—1190), появившихся в 1957—1958 гг. Дальнейшее развитие идей, связанных с моделями, рассмотренными Фридрихсом, см. в работе Л. Д. Фаддеева, О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра.—Тр. МИАН им. В. А. Стеклова **73** (1964), 292—313, в которой снимается условие «малости».

Метод Кука (теорема XI.4) был сформулирован в его работе: J. Cook, Convergence of the Møller wave matrix. — *J. Math. and Phys.* **36** (1957), 82—87, для конкретной ситуации $\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R}^3)$, $V\in L^2$, $A=-\Delta+V$, $B=-\Delta$. Теорема XI.5 есть абстрактное оформление идеи Купша и Сандаса: J. Kupsch and W. Sandhas, Møller operators for scattering on singular potentials. — *Commun. Math. Phys.* **2** (1966), 147—154. До недавнего времени единственный способ обращения с волновыми операторами, если $A-B$ задается как квадратичная форма, состоял в использовании более глубоких и сложных методов, чем метод Кука, таких, как теория Като—Бирмана. Более сильная теорема, чем XI.6, была доказана Шехтером (M. Schechter, A new criterion for scattering theory. — *Duke. Math. J.* **44** (1977), 863—877), который пользовался стационарными методами, а не методом Кука. В своей статье, подсказанной работой Шехтера, Саймон нашел то доказательство теоремы XI.6, которое приведено в тексте (B. Simon, Scattering theory and quadratic forms: On a theorem of Schechter. — *Commun. Math. Phys.* **53** (1977), 151—153). Эта теорема была распространена Шехтером на случай двух гильбертовых пространств: M. Schechter, Wave operators for pairs of spaces and the Klein — Gordon equation. — *Aequationes Mathematicae* **18** (1978), 398—399.

Одно из следствий теории Като — Бирмана — это теорема об инвариантности для абсолютно непрерывного спектра при предположениях о возмущении, не зависящих от возмущаемого оператора. Подобного рода теорема есть и для существенного спектра; см. § XIII.4. К сожалению, никакой такой теоремы для сингулярного спектра быть не может. В самом деле, можно найти самосопряженный оператор A и возмущение единичного ранга C, такие, что A не имеет сингулярного спектра, но $A+C$ имеет. Этот пример рассмотрен в § XIII.6. Значит, любая теорема об инвариантности для сингулярного спектра должна включать условия, связывающие невозмущенный оператор и возмущение.

То что мы назвали теорией Като—Бирмана, имеет сложную историю. Като ввел понятие обобщенных волновых операторов и доказал, что $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны, если $A-B$ имеет конечный ранг (T. Kato, On finite dimensional perturbations of self-adjoint operators. — *J. Math. Soc. Japan* **9** (1957), 239 — 249). Этот результат был распространен на случай $A-B\in\mathscr{I}_1$ с чисто абсолютно непрерывными A и B (M. Rosenblum, Perturbations of continuous spectrum and unitary equivalence. — *Pacific J. Math.* **7** (1957), 997 — 1010), а затем на общий случай операторов со следом (теорема XI.8) (T. Kato, Perturbation of continuous spectra by trace class operators. — *Proc. Japan. Acad.* **33** (1957), 260 — 264). Эти результаты были получены в основном методами, характерными для стационарной задачи; полное доказательство в рамках нестационарной задачи было предложено Т. Като в его книге «Теория возмущений линейных операторов» (Пер. с англ. — М.: Мир, 1972).

Идея воспользоваться резольвентами чтобы распространить теорему Като-Розенблюма на случаи, когда $A-B$ не ограничен, принадлежит Путнаму (R. Putnam, Continuous spectra and unitary equivalence. — *Pac. J. Math.* **7** (1957), 993—995). Курода доказал ослабленный вариант теоремы XI.9, а именно: если $B-A$ относительно B-ограничен и $(A+i)^{-1}=(B+i)^{-1}+(A+i)^{-1}C^*D(B+i)^{-1}$, причем оба оператора $C(B+i)^{-1}$ и $D(A+i)^{-1}$ являются операторами Гильберта — Шмидта, то $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны (S. Kuroda, Perturbations of continuous spectra by unbounded operators, I, II. — *J. Math. Soc. Japan* **11** (1959), 247—262; **12** (1960), 243—257). Теорема XI.9 в том случае, когда операторы A и B ограничены снизу, доказана М. Бирманом в статье: Условия существования волновых операторов. — *ДАН СССР* **143** (1962), 506—509. Общий случай рассмотрен де Бранжем (L. de Branges, Perturbation of selfadjoint transformations. — *Amer. J. Math.* **84** (1962), 543—580), Бирманом и Крейном (М. Бирман, М. Г. Крейн, О теории волновых операторов и операторов рассеяния. — *ДАН СССР* **144** (1962), 475 — 478) и Бирманом (М. Бирман, Критерий существования волновых операторов. — *Изв. АН СССР*, сер. матем. **27** (1963), 883— 906).

Теорема XI.10 принадлежит Бирману (М. Бирман, Локальный критерий существования волновых операторов. — *Изв. АН СССР*, сер. матем. 32 (1968), 914—942), причем его доказательство считается очень трудным.

Оригинальные доказательства в теории Като—Бирмана были заметно труднее, чем приведенное у нас доказательство теоремы XI.7. Пирсон сначала высказал основную идею этого доказательства (D. B. Pearson, General theory of potential scattering with absorption at local singularities. — *Helv. Phys. Acta* 47 (1974), 249—264), а затем, следуя предложениям Жинибра и Като, представил полное доказательство (D. B. Pearson, A generalization of Birman's trace theorem. — *J. Funct. Anal.* 28 (1978), 182—186). Пирсон сформулировал эту теорему с дополнительным множителем J (более ранние доказательства тоже можно расширить таким образом), что привело к унифицированному подходу, который мы излагаем. Приведенное нами доказательство теоремы XI.9 и доказательство в задаче 25, по-видимому, являются новыми. Доказательство в таком контексте теоремы XI.10 принадлежит Жинибру и Пирсону, а доказательство теоремы XI.13—Дейфту (P. Deift, Classical Scattering Theory with a Trace Condition. — Princeton Series in Physics. Princeton Univ. Press, 1979). Литературные ссылки, относящиеся к теореме XI.13, приведены в замечаниях к § 10. Теорема XI.12 принадлежит Д. Яфаеву (Замечание о теории рассеяния для возмущенного полигармонического оператора. — *Матем. заметки* 15 (1974), 445—454). Мы приводим доказательства Рида и Саймона, которые переоткрыли результат Яфаева в статье, цитированной в замечаниях к § 10. Часть утверждения теоремы XI.12, касающаяся операторов $\Omega^{\pm}(A, B)$, следует непосредственно из теоремы Бирмана.

Теория Като—Бирмана была распространена Девисом на некоторые пары $\langle A, B\rangle$, где A самосопряжен, а V предполагается только таким, что iB m-аккретивен (E. B. Davies, Two Channel Hamiltonians and the Optical Model of Nuclear Scattering, Preprint. — Oxford Univ. Press, 1978).

Принцип инвариантности (теорема XI.11) доказан в последовательно усложнявшихся условиях Бирманом в цитированных выше статьях 1962 и 1963 гг. и Като (T. Kato, Wave operators and unitary equivalence. — *Pacific J. Math.* 15 (1965), 171—180).

Общий принцип инвариантности — теорема XI.23 — принадлежит Чандлеру и Гибсону (C. Chandler and A. Gibson, Invariance principle for scattering with long-range (and other) potentials. — *Indiana Univ. Math. J.* 25 (1976), 443—460). Мы следуем их доказательству. Более ранние результаты были слабее, потому что там требовалось, чтобы $|t|^{\alpha}\|\varphi'(t)\|_{\vartheta}\in L^1$ с некоторым $\alpha > 1/2$ или по меньшей мере чтобы $\|\varphi(t)-\Omega^{\pm}u\|=O(t^{-1/2})$ при $t\to\mp\infty$. Это не то, чтобы в точности слабее, но слабее для большинства практических приложений. Более ранние результаты появлялись в следующих работах: Л. А. Сахнович, Принцип инвариантности обобщенных волновых операторов. — *Функц. анализ и прилож.* 5 (1971), 61—68; В. Б. Матвеев, Принцип инвариантности для обобщенных волновых операторов. В сб.. Проблемы матем. физики 5 (1972), 77—85, и *Теор. и матем. физ.* 8 (1971), 49—54; J. A. Donaldson, A. G. Gibson, R. Hirsh. On the invariance principle of scattering theory. — *J Funct. Anal.* 14 (1973), 131—145. Результат Чандлера и Гибсона сформулирован для более широкого класса функций φ и применим к волновым операторам, модифицированным для дальнодействующих потенциалов (см. § 9) и для теории двух гильбертовых пространств.

Другие общие результаты об инвариантности волновых операторов были получены Волленбергом и Оберманом (M. Wollenberg The invariance principle for wave operators. — *Pacific J. Math.* 59 (1975), 303; P. Obermann, M. Wollenberg, Abel Wave Operators, I: General theory. — *Math. Nachr.* 85 (1978), 141—159; II: Wave operators for functions of operators. — *J. Funct. Anal.* 30 (1978), 48—59). В последних работах показано, что если пользоваться более слабым понятием волнового оператора, то принцип инвариантности выполняется *всегда*.

Вообще говоря, неверно, что если $\varphi(A)-\varphi(B)$ принадлежит классу операторов со следом, то $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют. Возьмем, например, $\varphi(x)=x^2$ и $A=$ умножение на x, $B=$ умножение на $|x|$ в $L^2(\mathbb{R})$. Однако если функция φ имеет обратную, это всегда верно, и, более общо, если для каждого r существует допустимая функция φ_r, такая, что $\varphi_r(A)-\varphi_r(B)$ принадлежит классу операторов со следом и φ_r взаимно однозначна на $(-r, r)$, то $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны. Этот результат обсуждается в книгах Като и Дейфта, цитированных выше. В качестве его типичного применения приведем такое доказательство теоремы XI.9: из того, что $(A+i)^{-1}-(B+i)^{-1}\in\mathfrak{J}_1$, следует, что $(A+ir)^{-1}-(B+ir)^{-1}\in\mathfrak{J}_1$ при всех $r\neq 0$, откуда вытекает, что вещественная часть $\varphi_r(A)-\varphi_r(B)$ принадлежит $\mathfrak{J}_1$, где $\varphi_r(x)=\mathrm{Re}\,(x+ir)^{-1}=x(x^2+r^2)^{-1}$. Это φ_r удовлетворяет всем условиям теоремы, и, следовательно, $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны.

Теорема XI.8 не выполняется, если $A-B$ — всего только оператор Гильберта—Шмидта, ибо, как доказал фон Нейман (J. von Neumann, Charakterisierung des Spectrums eines Integral-Operators. — *Actualités Sci. Indust.* **229** (1935), 38—55), для любого данного самосопряженного B существует A с чисто точечным спектром, такой, что $A-B$ — оператор Гильберта—Шмидта. Этот результат был распространен на идеалы $\mathfrak{J}_p$ с $p>1$ в работе: S. Kuroda, On a theorem of Weyl—von Neumann. — *Proc. Japan Acad.* **34** (1958), 11—15.

Теория Като—Бирмана применялась ко многим проблемам, которые не отражены в этой книге. Существуют приложения к теории спектров операторов Теплица (M. Rosenblum, The absolute continuity of Toeplitz's matrices. — *Pacific J. Math.* **10** (1960), 987—996) и к рассеянию нейтронов (Y. Shizuta, On the fundamental equations of spatially independent problems of neutron thermalization theory. — *Progr. Theor. Phys.* **32** (1964), 489—511).

История формулировки теории рассеяния в двух гильбертовых пространствах будет подробнее рассказана в замечаниях к § 10. Отметим пока, что кинематика (предложения 4 и 5) была систематически развита в работе Като (T. Kato, Scattering theory with two Hilbert spaces. — *J. Funct. Anal.* **1** (1967), 342—369) и что теорема XI.13 принадлежит Белопольскому и Бирману (А. Белопольский, М. Бирман, Существование волновых операторов в теории рассеяния для пары пространств. — *Изв. АН СССР*, сер. матем. **32** (1968), 1162—1175.

Важность метода стационарной фазы для теории рассеяния была отмечена уже, во всяком случае, в статье Бренига и Хаага (W. Brenig, R. Haag, General quantum theory of collision processes. — *Fortschr. Phys.* **7** (1959), 183—242). Этот метод применен во многих работах о рассеянии на дальнодействующих потенциалах, например в статье Буслаева и Матвеева, и поднят на уровень высокого искусства в статье Л. Хёрмандера (обе они цитируются в замечаниях к § 9). Мы близко следуем Хёрмандеру в изложении теорем XI.14, XI.15 и XI.16. Теорема XI.17 существенна для теории рассеяния Хаага—Рюэля; об этом написано в замечаниях к § 16.

Теорема XI.20 появилась у Зейлера и Саймона (E. Seiler, B. Simon, Bounds in the Yukawa$_2$ quantum field theory: Upper bound on the pressure, Hamiltonian bound and linear lower bound. — *Commun. Math. Phys.* **45** (1975), 99—114). Теоремы, утверждающие, что $f(X)\,g(-i\nabla)$ принадлежит классу операторов со следом при соответствующих f и g, восходят к Стайнспрингу (W. Stinespring, A sufficient condition for an integral operator to have a trace. — *J. Reine Angew. Math.* **200** (1958), 200—207). Его результаты позволяют брать f такого вида, как в теореме XI.21, но сильно ограничивают g. Теорема XI.21 — это специальный случай результата Бирмана и Соломяка (М. Ш. Бирман и М. З. Соломяк, Об оценках сингулярных чисел интегральных операторов, III. Операторы в ограниченных областях. — *Вестник ЛГУ*, сер. мат., мех., астр. **24** (1969), 35—48). Они вводят норму

$$\|f\|_{\mathrm{BS}}=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\Big(\int_{0\leqslant x_i\leqslant 1}|f(x-m)|^2\,dx\Big)^{1/2}$$

и показывают, что если $\| f \|_{BS}$ конечна и $g \in L^2_\delta$, то $f(x)\, g(-i\nabla)$ имеет след. Так как легко показать, что $\| f \|_{BS} \leqslant C \| f \|_{L^2_\delta}$, из их результата вытекает теорема XI.21. На самом деле можно показать (задача 37), что достаточно, чтобы $\| f \|_{BS}$ и $\| g \|_{BS}$ были конечны. Обратно, если f и g ненулевые, то это условие является также необходимым, см. книгу Саймона: B. Simon, Trace Ideal Methods. — London Math. Soc. Lecture Notes, London and New York: Cambridge Univ. Press, 1979. Като независимо доказал теоремы XI.20 и XI.21 (не опубликовано). Мы следуем доказательству Като теоремы XI.21. Теорема XI.22 принадлежит Цвикелю: M. Cwickel, Weak type estimates for singular values and the number of bound states of Schrödinger operators. — *Ann. Math.* **106** (1977), 93—102. Ранее Саймон доказал этот результат при более сильных предположениях: $g = L^{q'}_w(\mathbb{R}^n)$, $q' = q/(q-1)$ и $f \in L^{q-\varepsilon} \cap L^{q'-\varepsilon}$ с некоторым $\varepsilon > 0$ (B Simon, Analysis with weak trace ideals and the number of bound states of Schrödinger operators. — *Trans. Amer. Math. Soc.* **224** (1977), 367—380). Есть также теорема типа теоремы XI.22 для случая $1 < q < 2$ с нормами, связанными с $\| \cdot \|_{BS}$; см. книгу Саймона.

Соотношение $H^2_D - m^2 = 2m\,(1 \otimes H_S)$, использованное при обсуждении примера 2 в третьем дополнении, восходит по крайней мере к Джонсону и Липпману: M. H. Johnson, B. A. Lippman, Motion in a constant magnetic field. — *Phys. Rev.* **76** (1949), 828—832. Соответствующая инвариантность рассеяния «очевидна» для физика, представляющего себе задачу в стационарной постановке; см. замечания о принципе инвариантности в третьем дополнении к § 8. На первый взгляд может показаться странным, что удается доказать существование $\Omega^{\pm}(H_S(A), H_S(0))$, не предполагая ничего о B и делая предположения лишь об A. Заметим, что $B = \operatorname{rot} A$ может убывать на бесконечности медленнее, чем A, если A очень быстро осциллирует. Таким образом, упомянутое выше явление связано с идеями дополнения 2 к § 8 и указанной в замечаниях к этому разделу литературой. Фактически можно доказать многие из упоминаемых там результатов Комбескюра—Жинибра на основе тождества $H^2_D - m^2 = 2m\,(1 \otimes H_S)$.

§ XI.4. Теорема XI.24 была впервые доказана для случая $V \in L^2$ Куком в его основной статье, цитированной в замечаниях к предыдущему разделу. Распространение на случай потенциалов с убыванием вида $|x|^{-1-\varepsilon}$ принадлежит Хаку (M. Hack, On the convergence to the Møller wave operators. — *Nuovo Cimento* **9** (1958), 731—733). Примерно в то же время Курода доказал близкий результат (S. Kuroda, On the existence and unitarity property of the scattering operator. — *Nuovo Cimento* **12** (1959), 431—454). Расширение на n измерений рассмотрено Браунелом (F Brownell, A note on Cook's wave matrix theorem. — *Pacific J. Math.* **12** (1962), 47—52). Для центральных потенциалов этот результат улучшен Лундквистом (E. Lundquist, On the existence of the scattering operator. — *Ark. Mat.* **7** (1967), 145—157). Результаты Лундквиста вытекают из теоремы XI.31, однако он пользовался лишь методом Кука. Расширение метода Кука, включающее магнитные поля, можно найти у Икэбе и Тайоси (T. Ikebe, T. Tayoshi, Wave and scattering operators for second order elliptic operators in $\mathbb{R}^3$. — *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto* **A4** (1968), 483—496).

Обобщения теоремы Хака—Кука на $-\Delta + V$, где V не обязательно оператор умножения, содержится в работах: K. Jörgens, J. Weidmann, Zur Existenz der Wellenoperatoren. — *Math. Z.* **131** (1973), 141—151; K. Veselič, J. Weidmann, Zur Existenz der Wellenoperatoren für eine allgemeine Klasse von Operatoren. — *Math. Z.* **134** (1973), 255—274; Asymptotic estimates of wave functions and the existence of wave operators. — *J. Funct. Anal.* **17** (1974), 61—77; C. Wilcox, Scattering states and wave operators in the abstract theory of scattering. — *J. Funct. Anal.* **12** (1973), 257—274; A. M. Berthier, P. Collet, Existence and completeness of the wave operators in scattering theory with momentum dependent potentials. — *J. Funct. Anal.* 26 (1977), 1—15.

Теорема XI.25 содержится в статье Купша и Сандаса, а теорема XI.26 есть в сущности в статье Шехтера. Обе эти статьи цитировались в замечаниях к § 3. Теорема XI.27 принадлежит Аврону и Хербсту (J. Avron, I. Herbst, Spectral and scattering theory of Schrödinger operators related to the Stark effect. — *Commun. Math. Phys.* 52 (1977), 239—254). Дальнейшее обсуждение теоремы XI.25 можно найти у Робинсона (D. Robinson, Scattering, theory with singular potentials I. The two-body problem. — *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A* 21 (1974), 185—216). Теоремы типа XI.30 при $n \leqslant 3$ появились в цитированной выше статье Куроды. Теорема XI.31 тоже принадлежит Куроде (S. Kuroda, On a theorem of Green and Lanford. — *J. Math. Phys.* 3 (1962), 933—935).

Соотношение $\overline{S\psi(x)} = (S^*\overline{\psi})(x)$ называется «инвариантностью относительно отражения времени» вследствие одной фундаментальной симметрии гамильтониана, которую мы сейчас рассмотрим. Обозначим отображение $\psi \mapsto \overline{\psi}$ через T. Это антилинейное отображение и $TH_0 = H_0T$, $TV = VT$. Следовательно, $Te^{iH_0t} = e^{-iH_0t}T$ и $Te^{iHt} = e^{-iHt}T$. Вследствие этого изменения знака T называется отражением времени. Легко видеть, что $T\Omega^{\pm} = \Omega^{\mp}T$, так что $T(\Omega^-)^*\Omega^+ = (\Omega^+)^*\Omega^-T = [(\Omega^-)^*\Omega^+]^*T$, откуда $\overline{S\psi} = S^*\overline{\psi}$. Для частиц со спином отражение времени сложнее. Значение отражения времени в квантовой теории впервые было выявлено Вигнером (E. P. Wigner, Über die Operation der Zeitumkehr in der Quantenmechanik. — *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Mat.-Phys. Kl. II* (1931), 546—559).

Теоремы типа XI.32 получены Дейфтом и Саймсном (P. Deift, B. Simon, On the decoupling of finite singularities from the question of asymptotic completeness in two-body quantum systems. *J. Funct. Anal.* 23 (1976), 218—238). Дейфт и Саймон опирались на отделение граничных условий Дирихле (см. § XIII.15) и оценки, связанные с фейнмановыми интегралами по траекториям. Их результаты были существенно обобщены и улучшены Комбескюром и Жинибром (M. Combescure, J. Ginibre, Scattering and local absorption for the Schrödinger operator. — *J. Funct. Anal.* 29 (1978), 54—73), которые воспользовались гладким обрезанием J, как и в приведенном нами доказательстве. Наш вывод построен по их образцу. Обе статьи появились как результат попыток понять пример Пирсона. Контрпример Пирсона появился в статье: D. Pearson, An example in potential scattering illustrating the breakdown of asymptotic completeness. — *Commun. Math. Phys.* 40 (1975), 125—146, где можно найти все относящиеся к нему подробности. До статьи Пирсона было известно несколько примеров с $\operatorname{Ran}\Omega^+ \neq \operatorname{Ran}\Omega^-$, но всем им было свойственно патологическое поведение на ∞; см.: T. Kato, S. Kuroda, A remark on the unitarity property of the scattering operator. — *Nuovo Cimento* 14 (1959), 1102—1107; The abstract theory of scattering. — *Rocky Mountain J. Math.* 1 (1971), 127—171.

Литература о кластерных свойствах дана в замечаниях к следующему разделу.

Существует обширная литература по теории рассеяния на зависящих от времени потенциалах: E. Davies, Time-dependent scattering theory. — *Math. Ann.* 210 (1974), 149—162; J. Goldstein, Temporally inhomogeneous scattering theory. In: *Analyse fonctionnelle et applications* (L. Nachbin, ed.), pp. 125—132. — Paris: Hermann, 1975; J. Goldstein, C. Monlezun, Temporally inhomogeneous scattering theory, II; approximation theory and second order equations. — *SIAM J. Math. Anal.* 7 (1976), 276—290; J. Hendrickson, Temporally inhomogeneous scattering theory for modified wave operators. — *J. Math. Phys.* 16 (1975), 768—771; *N*-body scattering into cones with long-range time-dependent potentials. — *J. Math. Phys.* 17 (1976), 729—733; J. Howland, Stationary scattering theory for time-dependent Hamiltonians. — *Math. Ann.* 207 (1974), 315—

335; A. Inoue, An example of temporally inhomogeneous scattering.—*Proc. Japan Acad.* **49** (1973), 407—410; Wave and scattering operators for an evolving system $d/dt-iA(t)$.—*J. Math. Soc. Japan* **26** (1974), 608—624; C. Monlezun, Temporally inhomogeneous scattering theory.—*J. Math. Anal. Appl.* **47** (1974), 133—152; E. Schmidt, On scattering by time-dependent perturbations.—*Indiana Univ. Math. J.* **24** (1975) 925—935; K. Yajima, Scattering theory for Schrödinger equations with potentials periodic in time.—*J. Math. Soc. Japan* **29**, (4) (1977), 729—743. S. T. Kuroda, H. Morita, An estimate for solutions of Schrödinger equations with time-dependent potentials and the associated scattering theory.—*J. Fac. Sci. Tokyo* 24 (1977), 459—475; J. Howland, Scattering theory for Hamiltonians periodic in time.—*Indiana Univ. Math. J.* 28 (1979), 471—494.

Пример 3 рассмотрен Девисом в работе: E. B. Devies, Scattering from infinite sheets.—*Proc. Cambridge Philos. Soc.* 82 (1977), 327—334, где можно найти детали доказательства того, что $\operatorname{Ran}\Omega^+=\operatorname{Ran}\Omega^-$. Девис доказал также результат, интересный для физической интерпретации рассеяния одной ячейкой. А именно: если $|W(x)|\leqslant C(1+|x|)^{-\alpha}$ и

$$V_L(x)=\sum_{n_2,\ n_3\in\mathbb{Z}} W(x_1,\ x_2-n_2L,\ x_3-n_3L),$$

то волновые операторы $\Omega^\pm(-\Delta+V_L,\ -\Delta)$ сильно сходятся к $\Omega^\pm(-\Delta+W,\ -\Delta)$ при $L\to\infty$ Этот результат следует из общей теоремы о сходимости (задача 16).

Пример 4 рассмотрен Девисом и Саймоном (E. B. Davies, B. Simon, Scattering theory for systems with different spatial asymptotics on the left and right.—*Commun. Math. Phys.* **63** (1978), 277—301). Более ранние упоминания о рассеянии на потенциалах $V(x)$, у которых пределы при $x\to\infty$ и $x\to-\infty$ различны, можно найти, например, в работах: P. Alsholm, T. Kato, Scattering theory with long range potentials.—*Proc. Amer. Math. Soc. Institute on Partial Defferential Equations* 1971. pp. 393—399 (см. замечание (4) на стр. 394), и S. Ruijsenaars, P. Bongaarts, Scattering theory for one-dimensional step potentials.—*Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A* **26** (1977), 1—17. См. § 17, где развит другой подход к вопросу о полноте в двухчастичных системах.

§ XI. 5. Дополнительное обсуждение N-частичных квантовых систем см. в § XI.17, XIII.2, XIII.3, XIII.5, XIII.10, XIII.11 и XIII.13. Многие вопросы и, в частности, теория рассеяния кратко и хорошо изложены в книге: W. Hunziker, Mathematical Theory of Multi-particle Quantum Systems.—Lectures in Theoretical Physics, vol. X (A. Barut, W. Britten, eds.).—New York: Gordon and Breach, 1968.

Формальные основы N-частичного рассеяния с применением волнового оператора и, в частности, ортогональность каналов впервые рассматривались Яухом во второй из серии работ, указанных в замечаниях к § 1. Теорема Хака (теорема XI.34) опубликована в его работе: M. Hack, Wave operators in multichannel scattering.—*Nuovo Cimento ser. X* **13** (1959), 231—236. Обобщение теоремы Хака на потенциалы с локальными особенностями определенного вида (по существу, n-частичный аналог теоремы XI.25) получено в работе: W. Hunziker, Time-dependent scattering theory for singular potentials.—*Helv. Phys. Acta.* **40** (1967), 1052—1062. См. также P. Ferrerro, O. de Pazzis, D. Robinson, Scattering theory with singular potentials, II. The N-body problem and hard cores.—*Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A* **21** (1974), 217—232.

Наиболее исчерпывающие результаты о полноте в N-частичной задаче до сих пор были получены в случае $N=3$. Основная идея, математическая техника и самые первые результаты принадлежат здесь Л. Д. Фаддееву (см. его монографию Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц.—Труды МИАН им. В. А. Стеклова, вып. 69, 1963). Существенные технические усовершенствования и обобщения этих результатов даны

Томасом (L. Thomas, Asymptotic completeness in two and three particle quantum mechanical scattering. — *Ann. Phys.* **90** (1975), 127—165), Жинибром и Муленом (J. Ginibre, M. Moulin, Hilbert space approach to the quantum mechanical three body problem. — *Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A* **21** (1974), 97—145; в частности, в этой работе доказана теорема XI.37), а также Д. Р. Яфаевым (О сингулярном спектре в системе трех частиц. — *Матем. сб.* **106** (1978), 622—640; К теории многоканального рассеяния в паре пространств. — *ТМФ* **37** (1978), 48—57) и Ядзимой (K. Yajima, An abstract stationary approach to three body scattering. — *J. Fac. Sci. Tokyo* **25** (1978), 109—132).

Было много попыток распространить программу Фаддеева на системы N тел. Аналоги основных интегральных уравнений Фаддеева выведены в работах О. А. Якубовского (Об интегральных уравнениях в теории N-частичного рассеяния. — *Яд. физика* **5** (1967), 937—942) и Ф. А. Березина (Асимптотика собственных функций многочастичного уравнения Шредингера. — *ДАН СССР* **163** (1965), 795—798). Некоторая часть этих исследований обобщена на основе уравнений Якубовского Хеппом (K. Hepp, On the quantum mechanical N-body problem. — *Helv. Phys. Acta* **42** (1969), 425—458) и на основе уравнений Березина И. М. Сигалом (Асимптотическая полнота систем многих частиц. — *ДАН СССР* **204** (1972), 795—798). Ни то, ни другое обобщение не полно, поскольку налагается дополнительное условие: определенные интегральные уравнения в некоторых вспомогательных банаховых пространствах не должны обладать решениями. В случае $N=3$ Фаддеев сумел преодолеть эту трудность и полностью завершить свой анализ, опираясь на известные результаты о двухчастичных системах. Абстрактная переформулировка программы Фаддеева в рамках теории разложений по собственным функциям Като—Куроды (см. замечания к § 6) дана в работе: J. Howland, Abstract stationary theory of multichannel scattering. — *J. Funct. Anal.* **22** (1976), 250—282.

Для некоторых специальных многоканальных систем с числом частиц больше трех утверждения об асимптотической полноте делались в работах Хагедорна (G. Hagedorn, Asymptotic completeness for a class of four particle Schrödinger operators. — *Bull. Amer. Math. Soc.* **84** (1978), 155—156) и Сигала (I. Sigal, On quantum mechanics of many-body systems with dilation analytic potentials. — *Bull. Amer. Math. Soc.* **84** (1978), 152—154).

Другой подход, отличающийся от подхода Фаддеева, был выдвинут Дейфтом и Саймоном (P. Deift, B. Simon, A time dependent approach to the completeness of multiparticle quantum systems. — *Comm. Pure Appl. Math.* **30** (1977), 573—583). Ими был доказан некоторый аналог предложения 3 из § 3.

Кластерные свойства многоканальных волновых операторов и операторов рассеяния впервые были установлены в работе Хунцикера (W. Hunziker, Cluster properties of multiparticle systems. — *J. Math. Phys.* **6** (1965), 6—10). Аналогичные кластерные свойства по отношению к трансляциям по времени выведены Тэйлором (J. R. Taylor, Timelike cluster properties in nonrelativistic scattering. — *J. Math. Phys.* **8** (1967), 2131—2137). Изучение этих свойств мотивировалось соображениями о кластерных свойствах релятивистской S-матрицы, высказанными в работе: E. H. Wichmann, J. H. Crichton, Cluster decomposition properties of the S-matrix. — *Phys. Rev.* **132** (1963), 2788—2799. Для квантовой теории поля, подчиняющейся аксиомам Вайтмана и обладающей массовой щелью, кластерные свойства S-матрицы доказаны Хеппом (K. Hepp, Spatial cluster decomposition properties of the S-matrix. — *Helv. Phys. Acta* **37** (1964), 659—662; One-particle singularities of the S-matrix in quantum field theory. — *J. Math. Phys.* **6** (1965), 1762—1767). Одно важное следствие кластерных свойств заключается в том, что рассеяние заряженных частиц полностью определяется состояниями рассеяния с зарядом нуль. Например, электрон-электронное рассеяние можно изучать, рассматривая состояния с двумя электронами и двумя сильно удаленными позитронами. В силу кластерного свойства, электрон-электронная амплитуда рассеяния может быть получена в пределе при удалении позитронов на бесконечность.

Теория Като—Бирмана применялась для доказательства полноты N-частичного рассеяния в области энергий, где невозможен развал системы на три или более кластеров. Указанный результат принадлежит Комбу (J. M. Combes, Time dependent approach to nonrelativistic multichannel scattering.— *Nuovo Cimento A* **64** (1969), 111—144); см. также B. Simon, Geometric methods in multiparticle quantum systems.— *Commun. Math. Phys.* 55 (1977), 259—274; N-body scattering in the two-cluster region.— *Commun. Math. Phys.* **58** (1978), 205—210.

Ссылки для дальнейшего изучения аналитических свойств амплитуды рассеяния в случае двух частиц приводятся в замечаниях к § 7. В случае N частиц аналитические свойства отчасти затрагивались в указанных выше работах Фаддеева и Хеппа; более полно они обсуждаются в работах: P. Federbush, Results on the analyticity of many-body scattering amplitudes in perturbation theory.— *J. Math. Phys.* 8 (1967), 2415—2419; M. Rubin, R. Sugar, G. Tiktopoulos, Dispersion relations for 3 particle scattering amplitudes. I, II.— *Phys. Rev.* **146** (1966), 1130—1149; **159** (1967), 1348—1362; F. Riahi, On the analyticity properties of the N-body scattering amplitude in non-relativistic quantum mechanics.— *Helv. Phys. Acta* **42** (1969), 299—329.

Существует обширная физическая литература о многих очень интересных аспектах N-частичного квантового рассеяния помимо существования и полноты. В качестве введения к этой литературе читатель может обратиться к монографии Ньютона, указанной в замечаниях к § 2, и к книгам М. Л. Голдбергера и К. М. Ватсона, Теория столкновений. Пер. с англ.— М.: Мир, 1967, и Нэттолла и Ватсона (J. Nuttall, K. Watson, Topics in Several Particle Dynamics.— San Francisco: Holden-Day, 1967).

§ *IX.6*. Технические детали доказательства теоремы XI.41 можно найти в монографии Саймона (B. Simon, Quantum Mechanics for Hamiltonians Defined as Quadratic Forms.— Princeton Univ. Press, 1971). В основном это доказательство содержится в § IV.5 этой монографии, хотя для леммы 1 требуется § II.9, для леммы 2—§ III.4, для леммы 5—§ V.3, а лемма 6 находится в § V.4. Детали, касающиеся теоремы XI.42, можно найти в § V.5 указанной монографии. По поводу теоремы о нулях функции, аналитической в открытой верхней полуплоскости и непрерывной в ее замыкании, читателю следует обратиться к книге: К. Гофман, Банаховы пространства аналитических функций. Пер. с англ.— М.: Мир, 1963.

Разложения по собственным функциям непрерывного спектра такого типа, как в теореме XI.41, были впервые установлены для обыкновенных дифференциальных уравнений К. Кодаирой и Э. Титчмаршем в 1940-х гг., хотя общая идея разложения по собственным функциям восходит еще к трудам Д. Бернулли и Ж. Фурье. Исторический обзор и многочисленные ссылки можно найти у Данфорда и Шварца, т. II, стр. 747 русского перевода. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений применима к операторам Шредингера в $\mathbb{R}^3$ со сферически симметричными потенциалами, поскольку такие операторы являются прямыми суммами обыкновенных дифференциальных операторов (см. дополнение к § X.1). Этот подход и возникающие в его рамках разложения по собственным функциям были предложены Грином и Ланфордом (T. Green, O. Lanford III, Rigorous derivation of the phase shift formula for the Hilbert space scattering operator of a single particle.— *J. Math. Phys.* **1** (1960), 131—140), а также Вейдманом (J. Weidmann, Zur Spectraltheorie von Sturm—Liouville Operatoren.— *Math. Z.* **98** (1967), 268—302). См. дополнение 3 к § 8.

Наиболее раннее изучение разложений по собственным функциям непрерывного спектра, связанных с дифференциальными операторами в частных производных, проведено А. Я. Повзнером в его работе: О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $-\Delta u+cu$.— *Матем. сб.* **32** (1953), 109—156. Связь с теорией рассеяния впервые была указана в другой его работе: О разложениях по собственным функциям, являющимся решениями задачи рассеяния.— *ДАН СССР* **104** (1955), 360—363; см. также: T. Ikebe, Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operators and their application to scattering theory.— *Arch. Rational Mech. Anal.* **5** (1960), 1—34 (Erratum: Remarks on the orthogonality of eigenfunctions for the Schrödinger operator on $\mathbb{R}^n$.— *J. Fac. Sci. Tokyo Univ., Sect. I*, 17 (1970), 355—361).

Л. Д. Фаддеев в работе: О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора Шредингера.— *Вестник ЛГУ* 7 (1957), 164—172, доказал равномерную сходимость разложений по собственным функциям. Другой подход к разложениям по собственным функциям, отличный от подхода Повзнера — Икэбе, был развит Д. М. Эйдусом в работе: Принцип предельной амплитуды.— *УМН* **24** (1969), 91—156.

Главная идея нашего доказательства теоремы XI.41, состоящая в том, что связь между функцией Грина и собственными функциями при помощи формулы Стоуна приводит к (82e′), заимствована у Икэбе. Изложение Икэбе отличается от нашего главным образом в двух родственных направлениях. Во-первых, налагаются другие условия на потенциал V: требуется лишь $V(r)=O(r^{-2-\varepsilon})$ вместо $V\in L^1$, однако потенциалы должны быть непрерывными по Гёльдеру всюду, за исключением конечного множества точек. Во-вторых, Икэбе вводит вспомогательное банахово пространство, содержащее неизмененную функцию Липпмана — Швингера $\varphi(x, k)$. Для решения уравнения Липпмана — Швингера он вынужден опираться на теорию компактных операторов в произвольных банаховых пространствах, и при изучении ядра вместо критерия Гильберта — Шмидта используются соображения равностепенной непрерывности. Прием факторизации потенциала в виде $V=|V|^{1/2}V^{1/2}$ и перехода к модифицированному уравнению Липпмана—Швингера независимо был предложен Рольником (H. Rollnik, Streumaxima und gebundene Zustände.— *Z. Phys.* **145** (1956), 639—653), Гроссманом и Ву (см. замечания к § 7) и Дж. Шварцем (J. Schwartz, Some non-self-adjoint operators.— *Comm. Pure Appl. Math.* **13** (1960), 609—639). При факторизации $V=|V|^a V^{1-a}$, где $1/4<a<3/4$, получается модифицированное уравнение Липпмана — Швингера, ядро которого принадлежит классу Гильберта — Шмидта при условии $\int |V(x)|^{2a}|V(y)|^{2-2a}|x-y|^{-2}\,dx\,dy<\infty$, а неоднородный член лежит в L^2, если $\int |V(x)|^{2\varepsilon}dx<\infty$. В силу неравенства Соболева эти интегралы конечны, если $V\in L^{3/2}$. С учетом этих соображений можно использовать методы данного раздела для рассмотрения потенциалов с поведением $O(r^{-2-\varepsilon})$ на бесконечности (задача 57).

Метод Икэбе применялся для изучения операторов Шредингера в пространстве с числом измерений $n\neq 3$ в работе: D. Thoe, Eigenfunction expansions associated with Schrödinger operators in $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 4$.— *Arch. Rational Mech. Anal.* **26** (1967), 335—356, и для изучения нелокальных потенциалов в работе: M. Bertero, G. Talenti, G. A. Viano, Eigenfunction expansions associated with Schrödinger two-particle operators.— *Nuovo Cimento A* **62** (1969), 27—87. Построения, аналогичные проведенным Икэбе и Тое, но с использованием других условий, можно найти в работе: P. Alsholm, G. Schmidt, Spectral and scattering theory for Schrödinger operators.— *Arch. Rational Mech. Anal.* 40 (1971), 281—311.

Обсуждаемое в этом разделе разложение по собственным функциям Повзнера — Икэбе следует отличать от разложения по собственным функциям Гординга и Гельфанда которое рассмотрено в книге: K. Maurin, General Eigenfunction Expansions and Unitary Representations of Topological Groups.— Warszawa: PWN, 1968. Это последнее разложение является абстрактным и сопоставляется любому оператору. Факт его существования не дает никакой информации о спектре; в нем не содержится почти ничего, кроме некоей удобной формы записи спектральной теоремы. С другой стороны, разложения Повзнера — Икэбе говорят о связи с теорией рассеяния асимптотической полноте и отсутствии сингулярного спектра.

Обобщения разложений Повзнера—Икэбе на более абстрактную постановку задачи, включая некоторые другие эллиптические дифференциальные операторы, обсуждались в серии работ Куроды (S. Kuroda Stationary theory of scattering and eigenfunction expansions I, II.— *Sûgaku* 18 (1966), 74—85, 135—144; Perturbation of eigenfunction expansions.— *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 57 (1967), 1213—1217, а также (главная статья этой серии) An abstract stationary approach to perturbation of continuous spectra and scattering theory.— *J. Analyse Math.* **20** (1967), 57—117). Идеи и методы Куроды тесно связаны со «стационарными методами» Фридрихса, которые мы обсуждаем здесь, а также с методами Агмона, Куроды и Лавина, которые мы рассматриваем в § XIII.8. Отметим еще раз, что разделение между «теорией рассеяния» и «спектральными свойствами» содержит элемент произвола. Указанные работы предшествовали абстрактной теории Като—Куроды, которую мы обсуждаем в конце замечаний к данному разделу.

Наше обсуждение истории разложений по собственным функциям будет неполным, если мы не попытаемся дать общую характеристику «стационарных методов». Во многих отношениях «старомодная» наивная теория рассеяния, описываемая ниже в замечаниях к данному разделу, является стационарной картиной, однако «современная» стационарная теория в физике, вообще говоря, основана на следующих двух важных работах: B. A. Lippmann, J. Schwinger, Variational principles for scattering processes I.— *Phys. Rev.* 79 (1950), 469—480; M. Gell'Mann, M. L. Goldberger, The formal theory of scattering.— *Phys. Rev.* **91** (1953), 398—408. Уравнение Липпмана—Швингера появилось в первой из этих работ. В статье Гелл-Манна и Голдбергера было предложено использовать «абелевы пределы», т. е. $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon t}f'(t)\,dt$ вместо $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ (дискретный вариант такого предела восходит к Абелю), и приводилась формула $S=1-2\pi i\delta(E-E')\,T(k, k')$. Эти стационарные методы, т. е. методы, не использующие прямо предела *по времени*, в последние 25 лет настолько доминировали в физической литературе, что более естественная зависящая от времени картина рассеяния нередко совершенно упускалась из вида! Пример, в котором абелев предел для волновых операторов существует и является унитарным, хотя обычные волновые операторы не существуют, приводится в работе Хауленда (J. Howland, Banach space techniques in the perturbation theory of self-adjoint operators with continuous spectrum.— *J. Math. Anal. Appl.* **20** (1967), 22—47).

В работе: T. Ikebe, On the phase shift formula for the scattering operator.— *Pacific J. Math.* 15 (1965), 511—523, Т. Икэбе доказал теорему XI.42 для класса потенциалов, подчиняющихся его форме разложения по собственным функциям.

В математической литературе под названием «стационарных методов» фигурирует другая система идей. Сам метод и многочисленные ссылки на литературу можно найти в § X.5 книги Като (указанной в замечаниях к § 3). Многие идеи этого метода восходят к работе Фридрихса 1948 г. (см. замечания к § 3). Основным уравнением теории служит интегральное уравнение, используемое в книге Като при доказательстве теоремы Като—Бирмана. Допустим для простоты, что H_0 и V ограничены, $H=H_0+V$ и H_0 имеет только абсолютно непрерывный спектр. Тогда, если существует $\Omega^-(H, H_0)$, то

$$\Omega^- = I + i\int\limits_0^\infty e^{itH_0}V\Omega^- e^{-itH_0}\,dt.$$

Введем символ Γ^+ для операции $T\longmapsto\Gamma^+(T)=i\int\limits_0^\infty e^{itH_0}Te^{-itH_0}\,dt$, в том случае когда этот интеграл существует (со сходимостью в сильной топологии); получим уравнение Фридрихса

$$\Omega^- = I + \Gamma^+ (V\Omega^-). \tag{338}$$

Здесь важно, что $\Gamma^+ (T)$ обладает двумя абстрактными свойствами: (a) $T = \Gamma^+ (T) H_0 - H_0\Gamma^+ (T)$; (b) $\Gamma^+ (T) e^{itH_0} \to 0$ в сильном смысле при $t \to \infty$. Поэтому $\Gamma^+ (\cdot)$ можно рассматривать как операцию, «обратную» к $[H_0, \cdot]$ и подчиняющуюся «граничному условию» (b). Абстрактные свойства (a) и (b) полностью характеризуют $\Gamma^+ (T)$. Используя эту характеризацию Γ^+, иногда возможно решить уравнение (338) с помощью итераций, по крайней мере если потенциал V в некотором смысле «мал». Опять-таки и здесь существует связь со спектральным анализом. Весьма близкую технику мы будем рассматривать в § XIII.7.

Теорема XI.43 (a) появилась в работах: Л. Д. Фаддеев, Единственность решения обратной задачи рассеяния.— *Вестник ЛГУ* **7** (1956), 126—130; C. Zemach, A. Klein, The Born expansion in nonrelativistic quantum theory I.— *Nuovo Cimento* **10** (1958), 1078—1087. Обобщение на n измерений обсуждается в работах: W. Faris, Perturbations of non-normalizable eigenvectors.— *Helv. Phys. Acta* **44** (1971), 930—936; Time decay and the Born series.— *Rocky Mountain J. Math*. **1** (1971), 637—648. Теорема XI.43 (b) доказана в работе: M. Scadron, S. Weinberg, J. Wright, Functional analysis and scattering theory.— *Phys. Rev*. **135** (1964), B202—B207. Родственные результаты по теории рассеяния при малых константах связи обсуждаются в § XIII.7, XII.8 и замечаниях к ним. Применение методов суммирования и, в частности, аппроксимантов Паде для «суммирования» ряда Борна в тех областях, где он расходится, рассматривается в работах: J. R. Chisholm, Solution of linear integral equations using Padé approximants and the Jost function.— *Nuovo Cimento A* **61** (1969), 747—754; J. L. Basdevant, B. W. Lee, Padé approximation and bound states: Exponential potential.— *Nuclear Phys. B* **13** (1969), 182—188.

Теперь мы хотели бы обсудить «наивную теорию рассеяния», которая восходит к работе Борна (M. Born, Quantenmechanik der Stossvorgänge.— *Z. Phys*. **38** (1926), 803—827). Это поможет нам включить теорему XI.41 в определенную перспективу и установить связь с тем, что читатель, вероятно, встречал в учебниках по квантовой механике. В типичном эксперименте по рассеянию пучок с *приблизительно* постоянной энергией E посылается в мишень. Допустим, что мишень состоит из N частиц. В обычном приближении предполагают, что результат равен N-кратному результату рассеяния на одной из частиц мишени. Справедливость этого допущения зависит от нескольких факторов, которые в большинстве экспериментов имеют место (когда же это не так, требуется более сложный анализ). (1) Расстояния между частицами мишени намного больше «радиуса» сил, т. е. их характеристического параметра убывания. В твердой мишени типичные расстояния между частицами равны $R_0 \approx 10^{-8}$ см, а типичные силы в ядерных экспериментах имеют радиус порядка 10^{-13} см. (2) С хорошим приближением должно выполняться то свойство, что каждая частица пучка, проходя через мишень, рассеивается не более чем на одной частице мишени. Если представлять себе мишень из «слоев», расположенных через каждые 10^{-8} см, то вероятность рассеяния на каждом слое равна приблизительно $\sigma/\pi R^2$, где σ есть полное сечение, а R — расстояние между частицами мишени. Поскольку в типичных ядерных экспериментах $\sigma < 10^{-25}$ см^2, то эта вероятность — порядка 10^{-9}. Значит, в мишени толщиной 10^{-2} см «вероятность» кратного столкновения составляет около 10^{-3}, так что в типичных случаях (2) справедливо. (3) В соответствии с понятиями квантовой механики нельзя считать, что данная частица пучка рассеивается на какой-то определенной частице мишени; скорее, существуют амплитуды рассеяния на каждой из частиц мишени, и наблюдаемая амплитуда является квадратом суммы N отдельных амплитуд. Чтобы эта величина равнялась умноженному на N квадрату одной типичной амплитуды, необходимо отсутствие интерференционных эффектов. В свою очередь для этого длина волны де Бройля λ_D частицы в пучке должна быть намного меньше расстояния между частицами. Опять-таки в ядерном эксперименте с энергией налетающих протонов 10 Мэв $\lambda_0 \approx 10^{-13}$, т. е. гораздо меньше R. Таким образом, в типичной ситуации можно считать пучок рассеивающимся на единственной частице мишени, если верно учесть нормировочные множители, включающие плотности числа частиц мишени и налетающего пучка.

Очередное приближение состоит в том, что пучок считают «бесконечно» протяженным. Математически это весьма жесткое допущение, поскольку оно приводит к ненормируемым состояниям, однако физически оно гораздо слабее перечисленных выше приближений (1)—(3)! Итак, представим себе, что мы сначала имеем плоскую волну e^{ikz}. Ее импульс есть $\langle 0, 0, k\rangle$ в $\mathbf{R}^3$ (в системе единиц с $\hbar=1$), так что это—плоская волна, «приходящая» из $z=-\infty$. После рассеяния в области, находящейся очень далеко от мишени, мы ожидаем найти уходящую волну сферического типа, но с плотностью, зависящей от угла рассеяния. Если V сферически симметричен, эта волна при больших r должна иметь вид $f(\theta)e^{ikr}/r$, где $f(\theta)$ характеризует рассеяние. Знак $+$ в экспоненте e^{+ikr}, связанный, как мы дальше увидим, со знаком в уравнении Липпмана—Швингера, необходим для того, чтобы волна была *уходящей*, т. е. чтобы ее импульс был направлен вовне. Плотность налетающего пучка на единицу площади и единицу времени равна $1/v$, где v—скорость частицы. Выделяя площадку $r^2\,d\Omega$, расположенную под углом рассеяния θ, мы наблюдаем за единицу времени $\{[|f(\theta)|^2/r^2]\,r^2\,d\Omega\}/v$ частиц. Таким образом, дифференциальное сечение рассеяния равно

$$d\sigma/d\Omega=|f(\theta)|^2.$$

Главное допущение наивной теории рассеяния заключается в том, что «состояние рассеяния» есть собственная функция уравнения Шредингера, имеющая асимптотический вид $e^{ikz}+f(\theta)e^{ikr}/r$ *при больших* r. На первый взгляд, это допущение выглядит абсурдным, поскольку если $\varphi \underset{r\to\infty}{\sim} e^{ikz}+f(\theta)r^{-1}e^{ikr}$, то φ *в любой момент времени* имеет и приходящую плоскую волну, и уходящую сферическую волну. Однако, разумеется, в стационарной картине лучшего ожидать и нельзя! Кроме того, если взять состояние, которое в нулевой момент времени имеет вид $\int g(k)\varphi(x,k)\,dk$, то при больших r *и больших* t оно будет иметь вид $\int g(k)e^{ik(z-kt)}\,dk+f(\theta)r^{-1}\int g(k)e^{ik(r-kt)}\,dk$. Тогда по лемме Римана—Лебега, первый интеграл при больших z и t и функции g с пиком вблизи k_0 имеет заметную величину только при $z\approx k_0t$, а второй интеграл — при $r\approx k_0t$. Поэтому при $t\to-\infty$ второй интеграл пренебрежимо мал для всех r (ибо $r\geqslant 0$). Таким образом, можно надеяться восстановить зависящую от времени картину, строя «пакеты» из волновых функций наивного типа. Такую картину можно обосновать и непосредственно—см. дополнение 3 к § 8.

Отметим еще, что некоторые попытки обосновать формулу $d\sigma/d\Omega=|f(\theta)|^2$ исходя из строгого определения S-оператора можно найти в работах: J. Dollard, Scattering into cones, I: Potential scattering.— *Commun. Math. Phys.* 12 (1969), 193—203; J. Jauch, R. Lavine, R. G. Newton, Scattering into cones.— *Helv. Phys. Acta* 45 (1972), 325—330.

Метод наивной теории рассеяния можно резюмировать как отыскание функций $\varphi(x,k)$, «удовлетворяющих» $H\varphi=k^2\varphi$ и $\varphi(x,k) \underset{|x|\to\infty}{\sim} e^{ikz}+f(\theta)r^{-1}e^{ikr}$. Тогда $f(\theta)$ интерпретируется как функция, квадрат которой дает дифференциальное сечение. Приведем формальный вывод, показывающий, что $\varphi(x,k)$ должна удовлетворять уравнению Липпмана—Швингера. Пусть $\varphi=e^{ikz}+\eta$. Тогда из $(H-k^2)\varphi=0$ вытекает, что $(H_0-k^2)\varphi=-V\varphi$ или $(H_0-k^2)\eta=-V\varphi$. Таким образом, формально $\eta=-(H_0-k^2)^{-1}V\varphi$ или φ удовлетворяет соотношению $\varphi = e^{ikz} - (H_0 - k^2)^{-1} V\varphi$. Конечно, оператор $(H_0 - k^2)^{-1}$ не является корректно определенным. Как мы сейчас увидим, выбор $\varphi = e^{ikz} - [H_0 - (k^2 + i0)]^{-1} V\varphi$ непосредственно связан с желанием обеспечить, чтобы при больших z было $\varphi - e^{ikz} \sim e^{ikr} r^{-1} f(\theta)$, а не $e^{-ikr} r^{-1} f(\theta)$.

Таким образом, мы отождествляем наивную волновую функцию φ с функцией Липпмана—Швингера. Следовательно, для φ имеет место уравнение

$$\varphi(\mathbf{x}, k) = e^{ikz} - (4\pi)^{-1} \int e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1} V(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{k})\, d\mathbf{y},$$

где $\mathbf{k} = \langle 0, 0, k\rangle$. При больших $|\mathbf{x}|$ имеем $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1} \approx |\mathbf{x}|^{-1}$ и $\exp(ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \approx \exp(ik|\mathbf{x}| - ik\cdot\hat{\mathbf{x}}|\mathbf{y}|) = \exp(ik|\mathbf{x}| - ik|\mathbf{y}|\cos\theta)$, где θ — угол между x и y. Отсюда формально

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \underset{|\mathbf{x}|\to\infty}{\sim} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}} + |\mathbf{x}|^{-1} e^{ik|\mathbf{x}|} f(\theta),$$

где

$$f(\theta) = -(4\pi)^{-1} \int e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} V(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{k})\, d\mathbf{y} = -2\pi^2 T(\mathbf{k}', \mathbf{k}),$$

если $\mathbf{k}'$ определено соотношениями $k' = \mathbf{k}$ и $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' = \cos\theta$. Все это рассуждение дает формальное обоснование формул (96) и (97а).

Заметим, что если бы мы подчинили φ соотношению $\varphi = e^{ikz} - [H_0 - (k^2 - i0)]^{-1} V\varphi$, то пришли бы к $\varphi \underset{r\to\infty}{\sim} e^{ikz} + \tilde{f}(\theta) r^{-1} e^{-ikr}$. Наше желание иметь при больших r формулу $\varphi - e^{ikz} \sim e^{+ikr} r^{-1}$, таким образом, прямо связано с «предписанием $+i0$» в уравнении Липпмана — Швингера.

Абстрактный подход к разложениям по собственным функциям самым тесным образом связан с результатами § XIII.8, где читатель найдет обширную библиографию, включающую и историю вопроса. Здесь мы заметим, что систематическая теория была развита Като и Куродой в работе: T. Kato, S. Kuroda, Theory of simple scattering and eigenfunction expansions.— In: Functional Analysis and Related Fields, pp. 99—131.— New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1970. Применения этих идей к многочастичному рассеянию можно найти в работе Хауленда, указанной в замечаниях к § 5.

Хорошо известно, что в случае экспоненциального убывания потенциала резольвента допускает аналитическое продолжение в каком-то подходящем смысле. См., например, вторую из статей Гроссмана и Ву, указанных в замечаниях к § 7, цитированную выше монографию Саймона, работу: C. Dolph, J. McLeod, D. Thoe, The analytic continuation to the unphysical sheet of the resolvent kernel and the scattering operator associated to the Schrödinger operator.— *J. Math. Anal. Appl.* **16** (1966), 311—332, или серию статей: N. Shenk, D. Thoe, Eigenfunction expansions and scattering theory for perturbations of $-\Delta$.— *J. Math. Anal. Appl.* **36** (1971), 313—351; *Rocky Mountain J. Math.* **1** (1971), 89—125.

§ XI.7. Целесообразность изучения аналитических свойств амплитуды рассеяния первоначально мотивировалась соображениями, не связанными с потенциальным рассеянием. Самые первые дисперсионные соотношения были доказаны для индекса преломления в оптической среде Кронигом (R. Kronig, On the theory of dispersion of X-rays.— J. Amer. Optical Soc. **12** (1926), 547—558) и Крамерсом (H. A. Kramers, Atti del Congresso Int. di Fisica, Como, 1927).

В начале 50-х годов «дисперсионная теория» развивалась как метод анализа и интерпретации данных рассеяния в теории элементарных частиц. При этом любой из аспектов теории в своем развитии проходил 4 типичные стадии. Вначале выдвигалось предположение о том или ином аналитическом свойстве. Затем кто-либо находил «доказательство» этого свойства, далекое от какой-либо строгости, но демонстрирующее физические основания, по которым это свойство должно быть верным. Далее строилось строгое доказательство в рамках квантовой теории поля; такие строгие доказательства исходили не из аксиом Вайтмана, но из более сильного формализма ЛСЦ (лишь гораздо позднее формализм ЛСЦ был выведен из аксиом Вайтмана, дополненных некоторыми допущениями; см. § 16 и замечания к нему). Наконец, опираясь на идеи этого квантовополевого доказательства, получали доказательство аналогичного свойства в потенциальном рассеянии. В ряде случаев третья стадия так и не была завершена, хотя четвертая проходила успешно.

Начальные исторические этапы дисперсионной теории довольно запутаны. Итог им подводится в гл. 10 книги Голдбергера и Ватсона, указанной в замечаниях к § 5. Мы же отметим три фундаментальные работы: R. Kronig, A supplementary condition in Heisenberg's theory of elementary particles.— *Physica* **12** (1946), 543—544; M. Gell'Mann, M. L. Goldberger, W. Thirring, Use of causality conditions in quantum theory.— *Phys. Rev.* **95** (1954), 1612—1627; M. L. Goldberger, Use of causality conditions in quantum theory.— *Phys. Rev.* **97** (1955), 508—510. Последняя статья содержала эвристический «вывод» дисперсионных соотношений для пион—нуклонного рассеяния вперед. Первое строгое доказательство в рамках формализма ЛСЦ квантовой теории поля принадлежит Симанзику (K. Symanzik, Derivation of dispersion relations for forward scattering.— *Phys. Rev.* **105** (1957), 743—749). Первое доказательство дисперсионного соотношения для потенциального рассеяния вперед (более слабый вариант теоремы XI.46) принадлежит Хури (N. Khuri, Analyticity of the Schrödinger scattering amplitude and non-relativistic dispersion relations. — *Phys. Rev.* **107** (1957), 1148—1156). Хури использовал формулировку потенциального рассеяния в терминах теории Фредгольма, данную Йостом и Пайсом (R. Jost, A. Pais, On the scattering of a particle by a static potential.— *Phys. Rev.* **82** (1951), 840—851). Теорема XI.46 с доказательством, весьма близким к нашему, опубликована в работе: A. Grossmann, T. T. Wu, Schrödinger scattering amplitude, I.— *J. Math. Phys.* **3** (1961), 710—713.

Дисперсионные соотношения для рассеяния не вперед, т. е. аналитичность $f(\cdot, \Delta)$ при фиксированном вещественном Δ, были предложены почти одновременно пятью группами физиков: Голдбергером, Намбу и Оме [неопубликовано], Гелл-Манном и Полкингорном [неопубликовано], Симанзиком [неопубликовано], Саламом (A. Salam, On generalized dispersion relations.— *Nuovo Cimento* **3** (1956), 424—429), а также Каппсом и Такедой (R. Capps, G. Takeda, Dispersion relations for finite momentum-transfer pion-nuclear scattering.— *Phys. Rev.* **103** (1956), 1877—1896). Строгие доказательства в рамках квантовой теории поля принадлежат Боголюбову, Медведеву и Поливанову (Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов, Вопросы теории дисперсионных соотношений.— М.: Физматгиз, 1958) и Бреммерману, Оме и Тэйлору (H. Bremmerman, R. Oehme, J. G. Taylor, Proof of dispersion relations in quantized field theories.— *Phys. Rev.* **109** (1958), 2178—2190). Доказательство аналитичности по Δ при фиксированном k принадлежит Леману (H. Lehmann, Scattering matrix and field operators.— *Nuovo Cimento Suppl.* **14** (1959), 153—176). В потенциальном рассеянии наиболее ранний вариант теоремы XI.47 установлен Хунцикером (W. Hunziker, Regularitätseigenschaften der Streuamplitude im Fall der Potentialstreuung.— *Helv. Phys. Acta* **34** (1961), 593—620). Доказательство, использующее факторизацию потенциала, опубликовано в работе: A. Grossmann, T. T. Wu, Schrödinger scattering amplitude, III.— *J. Math. Phys.* **3** (1962), 684—689.

Доказательство теоремы XI.47 можно найти в гл. 6 монографии Саймона, указанной в замечаниях к § 6. Единственная теорема, явно там сформулированная, включает аналитичность в D_α, однако доказательство проходит и для любого D_β с $0 < \beta \leqslant \alpha$.

Обобщенные потенциалы Юкавы изучались весьма интенсивно, поскольку они считались самыми близкими нерелятивистскими аналогами релятивистского рассеяния. Свод различных результатов по аналитичиости для такнх потенциалов, включая и доказательство теоремы XI.48, можно найти в книге: В. де Альфаро и Т. Редже, Потенциальное рассеяние. Пер. с англ.— М.: Мир, 1966. Наиболее интересные результаты для юкавских потенциалов включают совместную аналитичиость по Δ и E и соответствующее представление Мандельстама; эта теория обсуждается в § V.6 и замечаниях к нему.

Помимо обсуждаемых в данном разделе результатов по аналитичности имеются еще три обширных класса подобных результатов. Во-первых, существуют результаты о свойствах аналитичности в N-частичном рассеянии — ссылки на них можно найти в замечаниях к § 5. Другой класс образуют результаты о свойствах аналитичности отдельных парциально-волновых амплитуд, рассматриваемые в § 8. И наконец, существуют результаты о свойствах аналитичности по угловому моменту, кратко обсуждаемые в замечаниях к § 8.

Как объяснялось в § 1, физические представления, лежащие в основе аналитичности, связаны с причинностью. Однако в наших доказательствах эта связь оставалась скрытой, потому что представления о причинности связаны с зависимостью от времени, тогда как доказательства проводились не зависящими от времени методами. Теория Лакса—Филлипса, изложенная в § 11, представляет собой зависящий от времени формализм теории рассеяния, прямо основанный на причинности. Поэтому в подходе Лакса—Филлипса аналитические свойства возникают из причинности совершенно естественно. Однако в силу технических трудностей теория Лакса—Филлипса применяется к нерелятивистскому квантовомеханическому рассеянию лишь для очень узкого класса потенциалов.

§ XI.8. Ссылки на статьи, где описывается теория разложений по собственным функциям для центральных потенциалов, даны в замечаниях к § 6. Спектральный анализ гл. XIII для этого класса потенциалов в основном развит Вейдманом (J. Weidmann, Zur Spektraltheorie von Sturm—Liouville Operatoren.— *Math. Z.* 98 (1967), 268—302).

То, что амплитуда рассеяния, получаемая в теореме XI.53, автоматически удовлетворяет условию унитарности, совсем не случайно. Существует общий принцип, согласно которому если спектры H и H_0 просты (что выполнено на каждом подпространстве состояний с фиксированным значением углового момента), $\Omega^{\pm}(H, H_0)$ существуют, $\sigma_{ac}(H) \subset \sigma_{ac}(H_0)$ и абсолютно непрерывный спектр H_0 подчиняется некоторому техническому условию, то $\Omega^{\pm}(H, H_0)$ полны. Этот результат обсуждается в задачах 87 и 88. Основная идея высказана в статье Куроды в *Nuovo Cimento*, цитированной в замечаниях к § 4. Ошибка, имеющаяся в этой статье, исправлена в работе Дейфта и Саймона, упоминаемой в тех же замечаниях.

Теоремы, подобные теореме XI.49, характерны для теории разложений по собственным функциям Куроды (см. замечания к § XI.6 и XIII.8); см. в особенности работу: T. Kato, S. Kuroda, The abstract theory of scattering.— *Rocky Mountain J. Math.* 1 (1971), 127—171. Наше изложение следует Като (см. Scattering theory, pp. 90—113 In: Studies in applied math. (A. H. Taub, ed.), Math. Assoc. Amer., Buffalo, New York. 1971). Курода показал (S. Kuroda, Scattering theory for differential operators, I.— *J. Math. Soc. Japan* **25** (1973), 75—104), что слои $T(E)$ лежат в некоторых классах $\mathcal{I}_p$, зависящих от точного характера убывания V. Он допускает более медленное убывание, чем то, которое предполагается в теореме XI.49.

Фундаментальная связь между временем задержки и фазой квантовой амплитуды рассеяния открыта Эйзенбадом (L. Eisenbud, Ph. D. Thesis, Princeton Univ. 1948 [неопубликовано]); см. также: E. P. Wigner, Laws/limit for the energy derivative of the scattering phase shift.— *Phys. Rev.* 98 (1955), 145—147. Дальнейшее обсуждение можно найти в работе: J. M. Jauch, J. P. Marchand, The time delay operator for simple scattering systems.— *Helv.*

Phys. Acta **40** (1967), 217—229, а также J. M. Jauch, K. B. Sinha, B. N. Misra, Time-delay in scattering processes.— *Helv. Phys. Acta* **45** (1972), 398—426.

Компактность оператора $S(E)-I$ для некоторых трехчастичных систем была доказана в работе: R. Newton, The three particle S-matrix.— *J. Math. Phys.* **15** (1974), 338—343.

Как и многое другое, разложение по парциональным волнам и связь с собственными функциями (теорема XI.53) восходят к классической монографии: Дж. С. Стрэтт (Рэлей), Теория звука. Пер. с англ.— М.— Л.: Гостехтеориздат, 1944. Использование разложения по парциальным волнам в квантовой теории рассеяния было впервые предложено Факсеном и Хольцмарком (M. Faxen, J. Holtsmark, Beitrag zur Theorie des Durchganges langsamer Elektronen durch Gase.— *Z. Phys.* **45** (1927), 307—324).

Тот факт, что естественная область сходимости ряда Лежандра есть эллипс, является открытием К. Неймана (K. Neumann, Über die Entwickelung einer Funktion mit imaginärem Argument, nach der Kugelfunktionen erster und zweiter Art.— Halle: Verlag von Schmidt, 1862) и Томе (L. W. Thome, Über die Reihen welche nach Kugelfunktion fortschreiten.— *J. Math.* **66** (1866), 337—343). Основная формула (137) еще раньше была доказана в работе: E. Heine, Theorie der Anziehung eines Ellipsoids.— *J. Math.* **42** (1851), 70—82. Подробное обсуждение ряда Лежандра, основанное на аналогии с рядом Тейлора, проведено в работе: T. Kinoshita, J. J. Loeffel, A. Martin, Upper bounds for the scattering amplitude at high energy.— *Phys. Rev. B* **135** (1964), 1464—1482.

Связь между обыкновениыми дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями, устанавливаемая при помощи метода вариации постоянных, составляет стандартную принадлежность теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Для уравнений в частных производных наиболее близким аналогом является метод функций Грина. Важное различие между ситуацией для обыкновенных дифференциальных уравнений и для уравнений в частных производных заключается в том, что в первом случае интегральное уравнение является **уравнением Вольтерра** $f(x)=g(x)+\lambda\int k(x, y)f(y)\,dy$, где $k=0$ при $x\leqslant y$. Такие уравнения обладают тем свойством, что отвечающий им ряд Неймана $I+\lambda K+\lambda^2K^2+\ldots$ сходится при всех λ; употребляя более современную терминологию, можно сказать, что этот оператор квазинильпотентен, т. е. $\sigma(K)=\{0\}$. Именно по этой причине исключительное множество $\mathscr{E}$ может появиться при анализе уравнения Липпмана — Швингера, которое соответствует уравнению в частных производных $-\Delta\varphi+V\varphi=E\varphi$, но не появляется при анализе регулярного уравнения и уравнения Йоста, которые отвечают обыкновенному дифференциальному уравнению $-u''+Vu=Eu$.

Подход, использующий уравнение переменной фазы, был детально разработан Ф. Калоджеро; см. в особенности его книгу: Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. Пер. с англ.— М.: Мир, 1972. Существует следующая связь между теоремами XI.55, XI.59 и утверждением теоремы XIII.8 о том, что $n_l(V)$ равно числу нулей функции $u_l(r; E)$: любые два из этих трех утверждений влекут за собой третье. При этом отметим, что в наших доказательствах всех этих результатов используются совершенно разные методы. В частности, можно доказать теорему Левинсона, не прибегая ни к аналитическим свойствам функции Йоста, ни к построению решений Йоста.

Всестороннее обсуждение амплитуд парциальных волн, функций Йоста и др., включая случай $l>0$, проводится в монографии В. де Альфаро и Т. Редже, указанной в замечаниях к § 7.

Формализм функции Йоста для s-волнового рассеяния был предложен в работе: R. Jost, Über die falschen Nullstellen der Eigenwerte der S-matrix.— *Helv. Phys. Acta* **20** (1947), 250—266, и разработан далее В. Баргманом (V. Bargmann, On the connection between phase shifts and the scattering potential.— *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949), 488—493). В первоначальном определении Йоста было $\eta(k) \equiv \eta(0, k)$. Определение через вронскиан представляет собой позднейшее усовершенствование, особенно полезное при $l > 0$, когда $x=0$ — особая точка. Обозначения $\eta(x, k)$, $\eta(k)$ не являются стандартными; вместо них чаще используют $f(x, k)$ и $f(k)$, от чего мы отказались, поскольку символ f употребляется для амплитуды рассеяния. Как мы показываем в замечаниях к § XIII.17, функция Йоста есть определитель Фредгольма, соответствующий радиальному уравнению Липпмана—Швингера.

Поведение $\eta(k)$ для потенциала λV как функции от константы связи λ, особенно при $\lambda \longrightarrow \infty$, изучалось Шаданом (K. Chadan, The asymptotic behavior of the number of bound states of a given potential in the limit of large coupling.— *Nuovo Cimento* 58 (1968), 191—204) и Франком (W. M. Frank, Strong coupling limit in potential theory, I, II.— *J. Math. Phys.* 8 (1967), 466—476; 9 (1968), 1890—1898). Особый интерес представляет связь между этим поведением и числом $n(\lambda V)$ сферически симметричных связанных состояний оператора $-\Delta + \lambda V$. Для широкого класса потенциалов было доказано, что $\lim\limits_{\lambda \to \infty} n(\lambda V)/\lambda^{1/2} = \pi^{-1} \int |V_-(x)|^{1/2}\, dx$, где $V_-(x) = \max\{-V, 0\}$. Совсем другим способом мы докажем это в § XIII.15.

Теорема Левинсона была доказана им в работе: N. Levinson, On the uniqueness of the potential in a Schrödinger equation for a given asymptotic phase.— *Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd.* 25 (1949). Общая теория функций Йоста и подробное обсуждение теоремы Левинсона для парциальных волн с $l > 0$ (в особенности случая $f(0) = 0$) даны в работе: R. G. Newton, Analytic properties of radial wave functions.— *J. Math. Phys.* **1** (1960), 319—347.

Доказательство теоремы XI.61 с помощью метода, аналогичного нашему, появилось в работе: A. Bottino, A. M. Longoni, T. Regge, Potential scattering for complex energy and angular momentum.— *Nuovo Cimento* **23** (1962), 954—1004. Другим методом близкий результат был получен в работе: L. Brown, D. Fivel, B. W. Lee, R. F. Sawyer, Fredholm method in potential scattering and its application to complex angular momentum.— *Ann. Phys.* 25 (1963), 187—220.

Для обобщенных потенциалов Юкавы скачки $f_0(k^2)$ на разрезе $(-\infty, -\mu_0^2)$ можно вычислить непосредственно с помощью веса C в выражении $\int\limits_{\mu_0}^{\infty} C(\mu) e^{-\mu x}\, d\mu$; итерации дают на n-м шаге скачок в интервале $[-(n+1)^2\mu_0^2, -n^2\mu_0^2]$. Этот метод, разработанный Мартеном (A. Martin, On the analytic properties of partial wave scattering amplitudes obtained from Schrödinger's equation.— *Nuovo Cimento* **14** (1959), 403—425; Analytic properties of $l \neq 0$ partial wave amplitudes for a given class of potentials.— *Nuovo Cimento* 15 (1962), 99—109), подробно обсуждается в книге де Альфаро и Редже.

Скачки на разрезах для обобщенных потенциалов Юкавы представляют особую важность в связи с тем, что $s_0(k^2)$ полиномиально ограничена (стремится к 1 при $k \longrightarrow \infty$), так что можно написать дисперсионные соотношения. Этим данный случай решительно отличается от потенциалов класса C_0^∞, для которых функция Йоста является целой, а $f_0(E)$ мероморфна в $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. Здесь $s_0(k^2)$ не обладает полиномиальным ростом при $k \longrightarrow \infty$.

Вариационные методы типа формулы Кона (136c) представляют интерес, поскольку они указывают на то, что погрешность между a и $\beta(\psi) - (h\psi, \psi)$ имеет порядок квадрата погрешности между ψ и φ. Исходя из этого ряд авторов развили вариационные методы для произвольных фазовых сдвигов; см., например, L. Hulthén, Variational problem for the continuous spectrum of a Schrödinger equation.— *Kgl. Fys. Salla Lund Fortschn.* 14 (1944), 1—13; W. Kohn, Variational methods in nuclear collision problems.— *Phys. Rev.*

74 (1948), 1763—1772. Третий принцип предложен Швингером в его неопубликованных лекциях; он описан в работе: J. Blatt, J. Jackson, On the interpretation of neutron-proton scattering data by the Schwinger variational method.— *Phys. Rev.* 76 (1949), 18—37. То, что эти принципы при определенных обстоятельствах могут приводить к точным оценкам, было показано в серии работ Т. Като (Variational methods in collision problems.— *Phys. Rev.* **80** (1950), 475; Notes on Schwinger's variational method.— *Progr. Theor. Phys.* **6** (1951), 295—305; Upper and lower bounds on scattering phases.— *Progr. Theor. Phys.* 6 (1951), 394—407). Оценка, которую мы приводим в теореме XI.61$^1/_2$, и ее доказательство даны в работе: L. Spruch, L. Rosenberg, Upper bounds on scattering lengths for static potentials.— *Phys. Rev.* **116** (1959), 1034—1040, и обсуждаются в дальнейших работах этих же авторов: Upper bounds on scattering lengths for compound systems: n-D quartet scattering.— *Phys. Rev.* **117** (1960), 1095—1102; Bounds on scattering phase shifts: Static central potentials.— *Phys. Rev.* **120** (1960), 474—482; Bounds on scattering phase shifts for compound systems.— *Phys. Rev.* **121** (1961), 1720—1726; Minimum principle for multi-channel scattering.— *Phys. Rev.* **125** (1962), 1407—1414. Влияние на эти оценки связанных состояний обсуждается в работе: L. Rosenberg, L. Spruch, T. O'Malley, Upper bounds on scattering lengths when composite bound states exist.— *Phys. Rev.* **118** (1960), 184—192. Розенберг и Шпрух указывают, что их оценки можно вывести также и с помощью применявшихся ранее методов Като. Читатель, возможно, заметил, что (136d) есть нижняя граница, тогда как у Розенберга и Шпруха рассматривается верхняя граница. Причина в том, что для a они используют соглашение о знаках, противоположное нашему. Это их соглашение, при котором длина рассеяния на твердой сфере положительна (и равна радиусу сферы), распространено в литературе больше, чем наше, но, в общем, оба достаточно употребительны.

Существует довольно обширная литература по осциллирующим потенциалам. Анализ рассеяния на нецентральных потенциалах с сильными осцилляциями на бесконечности (подобных потенциалам в примере 1 дополнения 2) можно найти в работах: В. Б. Матвеев, М. М. Скриганов, Волновые операторы для уравнения Шредингера с быстро осциллирующим потенциалом.— *ДАН СССР* 202 (1972), 755—757; М. М. Скриганов, О спектре оператора Шредингера с быстро осциллирующим потенциалом.— *Труды МИАН им. В. А. Стеклова*, 125 (1973), 187—195: M. Combescure, J. Ginibre, Spectral and scattering theory for the Schrödinger operator with strongly oscillating potentials.— *Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A* 24 (1976), 17—29; M. Schechter, Spectral and scattering theory for elliptic operators of arbitrary order.— *Comm. Math. Helv.* 49 (1974), 84—113; M. Schechter, Scattering theory for the Schrödinger equation with potentials not of short range.— В кн.: Комплексный анализ и его приложения (сб. статей, посвященный академику И. Н. Векуа к его семидесятилетию).— М.: Наука, 1978, с. 601—607. В частности, конструкция квадратичной формы, намеченная в примере 1, была дана независимо Комбескюром, Жинибром и Шехтером. Используя методы, описываемые в § XIII.8, эти авторы также получили для рассеяния на потенциалах указанного класса более сильные результаты, чем приведенные нами.

В связи с примером Пирсона (см. § 4) происходило обсуждение осцилляций в окрестности нуля; см., например, W. O. Amrein, V. Georgescu, Strong asymptotic completeness of wave operators for highly singular potentials.— *Helv. Phys. Acta* 47 (1974), 517—533, а также M. L. Baetman, K. Chadan, Scattering theory with highly singular oscillating potentials.— *Ann. Inst. H. Poincaré A* 24 (1976), 1—16. Эти локальные осцилляции можно контролировать с помощью метода теоремы XI.68. Так, Бетман и Шадан анализируют регулярное интегральное уравнение с осциллирующими потенциалами вполне аналогично тому, как мы анализируем уравнение Йоста, когда заново рассматриваем пример 1. На самом деле мы как раз и следовали их подходу, но только сосредоточивая внимание на области $r=\infty$ вместо $r=0$. Отсутствие положительных собственных значений в этом случае (теорема XI.68 (a)), по-видимому, представляет собой новый результат, хотя Бейман и Шадан могли бы доказать это, если бы рассмотрели осцилляции на бесконечности.

Части (a) и (c) теоремы XI.67 принадлежат Аткинсону (F. Atkinson, The asymptotic solutions of second order differential equations.— *Ann. Mat. Pura Appl.* 37 (1954), 347—378)

Теорема XI.66 получена в работе: J. Dollard, C. Friedman, On strong product integration.— *J. Funct. Anal.* 28 (1978), 309—354. Применение этой теоремы для вывода некоторых результатов Аткинсона, а также теорема XI.67 (b) имеются в работе этих же авторов: Product integrals and the Schrödinger equation.— *J. Math. Phys.* 18 (1977), 1598—1607.

Теорема XI.69 основана на абстрактном варианте одного рассуждения Грина и Ланфорда (T. A. Green, O. E. Lanford, III, Rigorous derivation of phase shift formula for the Hilbert space scattering operator of a single particle.— *J. Math. Phys.* 1 (1960), 139—148). Эти авторы идут также дальше, допуская в следствии 1 потенциалы с $|V(x)| \leqslant C|x|^{-1-\varepsilon}$; они достигают этого путем рассмотрения вкладов высших порядков в ряд для решения Йоста. Применение этой теории в сочетании с теоремой XI.67 предложено Доллардом и Фридманом (J. Dollard, C. Friedman, Existence of the Møller wave operators for $r^{-\beta}\lambda \sin(\mu r^{\alpha})$.— *Ann. Phys.* 111 (1978), 251—266).

Существование и полнота волновых операторов для нецентральных потенциалов с поведением на бесконечности типа $r^{-1}\sin r$ были получены — но только для области достаточно высоких энергий — в работе: K. Mochizuki, J. Uchiyama.— Nagoya Institute of Technology, preprint, 1977.

Результаты, приведенные в дополнениях, показывают, насколько тонким является эффект положительных собственных значений. Допустим, например, что $V(r) \sim Cr^{-1}\sin(r^{\alpha})$ при больших r. Если $\alpha < 1$, то $\partial V/\partial r = O(r^{-1-\varepsilon})$, так что, в силу теоремы XIII.58, положительных собственных значений нет. Если $\alpha > 1$, то $\int\limits_x^{\infty} V(r)\,dr = O(r^{-1-\varepsilon})$, так что положительных собственных значений нет в силу теоремы XI.68. Значит, такие собственные значения возможны лишь при $\alpha = 1$, и в некоторых случаях они действительно встречаются.

Замечания к данному разделу (последнему из тех, которые посвящены нерелятивистскому квантовому рассеянию с короткодействующими силами) мы завершаем кратким описанием *некоторых* из тем, *не* затронутых ни в основном тексте, ни в замечаниях.

(1) Очень большой интерес представляет теория аналитического продолжения величин $f_l(E)$ по l. Идея принадлежит Т. Редже (T. Regge, Introduction to complex angular momenta.— *Nuovo Cimento* 14 (1959), 951—976). Она обсуждается далее в книге: R. G. Newton, The Complex J-Plane: Complex Angular Momentum in Non-Relativistic Quantum Scattering Theory.— New York: Benjamin, 1964. Предварительные сведения о применениях этого метода в физике частиц можно найти в монографии: P. D. B. Collins, E. U. Squires, Regge Poles in Particle Physics.— New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1968.

(2) «Обратная задача» восстановления потенциала по заданным $\delta_l(k)$. Основной работой здесь является статья И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана: Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции.— *Изв. АН СССР*, сер. матем. 15 (1951), 309—360. Более полную историю вопроса и обсуждение метода Гельфанда — Левитана можно найти в гл. 12 книги де Альфаро и Редже. Весьма прозрачное изложение, включающее и более новые результаты, содержат монографии: З. С. Агранович и В. А. Марченко, Обратная задача теории рассеяния.— Харьков: Изд. Харьковского гос. ун-та, 1960, и Л. Д. Фаддеев, Обратная задача в квантовой теории рассеяния.— *УМН* 14 (1959), 57—119; II.— Совр. проблемы математики 3 (1974), 93—180; Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера.— *Труды*

МИАН им. В. А. Стеклова 73 (1964), 314—333; J. J. Loeffel, On an inverse problem in potential scattering theory.— *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A* 8 (1968), 339—447. Весьма красивый новый подход к обратной задаче был предложен в работе Дейфта и Трубовица (P. Deift, E. Trubowitz, Inverse scattering on the line.— *Comm. Pure Appl. Math.* 32 (1979), 121—252).

(3) N/D-метод Чью и Мандельстама (G. Chew, S. Mandelstam, Theory of low-energy pion-pion interaction.— *Phys. Rev.* 119 (1963), 467—477).

(4) Общие методы получения информации на основе аналитических свойств многочастичных амплитуд рассеяния. Это особенно существенно в релятивистской теории рассеяния, однако представляет интерес и для нерелятивистской теории. Математическую трактовку см. в книге: A. Martin, Scattering Theory: Unitarity, Analiticity and Crossing.— Lecture Notes in Physics, № 3, Springer-Verlag, 1969. Изложение, ориентированное на приложения к физике частиц и связи с теорией возмущений в квантовой теории поля, дано в монографиях: Дж. Чью, Аналитическая теория S-матрицы. Пер. с англ.— М.: Мир, 1968; Р. Иден, Соударения элементарных частиц при высоких энергиях. Пер. с англ.— М.: Наука, 1970; R. J. Eden, P. V. Landshoff, D. I. Olive, J. C. Polkinghorne, The Analytic S-matrix.— London and New York: Cambridge Univ. Press, 1966.

§ *XI.9*. Классическое кулоново рассеяние впервые было исследовано лордом Резерфордом как часть его знаменитого эксперимента, приведшего к заключению, что атомы имеют ядра. Резерфорду очень повезло, так как квантовое кулоново сечение оказалось в точности равным классическому (чудо продолжалось — борновское приближение оказалось точным для этого случая!). А еще ему повезло в том, что α-частицы в его опыте имели слишком малую энергию и не могли эффективно взаимодействовать с ядром посредством ядерных сил, поэтому он наблюдал только кулоново рассеяние.

Обсуждение точных решений для классического кулонова рассеяния с точки зрения симметрии (вектор Ленца) см. в работе: H. Abarbanel, The inverse r-squared force: An introduction to its symmetries.— Studies in Mathematical Physics, Essays in Honor of Valentine Bargmann (E. Lieb, B. Simon, A. Wightman, eds.).— Princeton Univ. Press, 1976.

Классическая теория рассеяния для дальнодействующих сил с той точки зрения, с которой она здесь изложена, построена Хербстом (I. Herbst, Classical scattering with long-range forces.— *Commun. Math. Phys.* 35 (1974), 193—214). Вся теорема XI.73, исключая то, что относится к оценке (165), принадлежит Хербсту. Обсуждение «асимптотически центральных» потенциалов — новый материал.

Квантовое кулоново рассеяние впервые рассмотрено Гордоном (W. Gordon, Über den Stoss zweier Punktladungen nach der Wellenmechanik.— *Z. Phys.* 48 (1928), 180—191). Он работал с разложением по собственным функциям кулоновой задачи, имея дело a priori со стационарным формализмом. Он обнаружил, что собственные функции непрерывного спектра для больших r имеют вид не

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}+\frac{e^{ikr}}{r}f(\theta),$$

но

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}+r^{-1}\exp\{i[kr+\lambda k^{-1}\ln(4kr)]\}f_{\mathrm{E}}(\theta)$$

при больших r и $\theta\neq 0$, и отождествил $f_{\mathrm{E}}(\theta)$ с кулоновой амплитудой рассеяния. Тем самым он исключил бесконечные фазы.

В нестационарной постановке задача о кулоновом рассеянии появилась впервые у Долларда (J. Dollard, Asymptotic convergence and Coulomb interaction.— *J. Math. Phys.* 5 (1964), 729—738). По этой причине мы пользуемся символом $U_{\mathrm{D}}(t)$. Его результаты были обобщены на более общие дальнодействующие потенциалы в работах: W. O. Amrein, Ph. A. Martin, B. Misra, On the asymptotic condition in scattering theory.— *Helv. Phys. Acta* 43 (1970), 313—344; В. С. Буслаев и В. Б. Матвеев, Волновые операторы для уравнения Шредингера с медленно убывающим потенциалом.— *Теор. и матем. физика* 2 (1970), 367—376; P. K. Alsholm, T. Kato, Scattering with long-range potentials. In: Partial Differential Equations, pp. 393—399.— Proc. Symp. Pure Math., vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1973; L. Hörmander, The existence of wave operators in scattering theory.— *Math. Z.* **146** (1976), 69—91. Амрейн и др. распространили метод Долларда на потенциалы $r^{-\alpha}$ с $\alpha > 1/2$. Буслаев и Матвеев, а также Альсхольм и Като пользовались приближениями высших порядков для решений уравнения Гамильтона — Якоби, и им требовалось знание все более старших производных по мере расширения области действия потенциала; например, Буслаев и Матвеев вводят условие $|D^{\alpha}V_l(x)| \leqslant C(1+x)^{-\varepsilon-|\alpha|}$ для всех $|\alpha| \leqslant k$, где $k = [n/2]+2+[1/\varepsilon]$ ($[a]$ = наибольшее целое число, меньшее a). Самый сильный результат принадлежит Хёрмандеру, работа которого содержит теорему XI.84. Хёрмандер имел дело с дифференциальными операторами для H_0 с постоянными коэффициентами общего вида.

Доллард и Хёрмандер обсуждают также многоканальные задачи.

Разложение по собственным функциям для чисто кулонова случая обсуждается в статье Долларда. Собственные функции дальнодействующих потенциалов общего вида составляют часть общей проблемы спектрального анализа таких потенциалов, и некоторые ссылки можно найти в замечаниях к § XIII.8. В число недавних работ по этому предмету входят: T. Ikebe, Spectral representations for Schrödinger operators with long-range potentials.— *J. Funct. Anal.* 20 (1975), 158—177; Spectral representations for Schrödinger operators with long-range potentials — Perturbation by short-range potentials.— *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto* **11** (1976), 551—558; T. Ikebe, H. Isozaki, Completeness of modified wave operators for long range potentials.— *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto* **15** (1979), 679—718; H. Isozaki, On the long range wave operators.— *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto* **13** (1977), 589—626; H. Kitada, Scattering theory for Schrödinger operators with long-range potentials, I, II.— *J Math. Soc. Jap.* **29** (1977), 665—691; G. Pinchuk, Abstract time independent wave operator theory for long-range potentials.— Berkeley thesis, unpublished; Y. Saito, Eigenfunction expansions for the Schrödinger operator with long-range potentials, $Q(y) = O(|y|^{-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$.— *Osaka J. Math.* **14** (1977), 37—53. Помимо этого, С. Агмон анонсировал необычайно полные результаты, основанные на обобщении его техники L^2-пространств с весом. Наконец, В. Энсс сообщил нам, что его методы, описанные в § 17, можно так модифицировать, чтобы они годились и для дальнодействующих потенциалов, включая кулоновы.

Квантовые S-операторы на массовой поверхности обычно очень сингулярны при $k = k'$ (рассеяние на нулевой угол). В короткодействующем случае обобщенная функция $s(k, k')$ имеет единственную особенность типа $\delta(k-k')$ при $k = k'$; в кулоновом случае особенность хуже, см.: I. Herbst, On the connectedness structure of the Coulomb S-matrix.— *Commun. Math. Phys.* **35** (1974), 181—191.

Наконец, мы хотим сделать несколько замечаний о фазе амплитуды кулонова рассеяния. Как мы уже подробно объяснили, эта фаза не определяется исходной нестационарной теорией. Тем не менее в некотором смысле эта фаза измерима! Чтобы понять это явление, нам придется сказать несколько слов о том, как экспериментально проверяются дисперсионные соотношения; дальнейшую информацию по этому поводу, важную для нашего обсуждения, можно найти в указанной выше книге Р. Идена.

Хотелось бы проверить дисперсионные соотношения вперед для сильно взаимодействующих систем. Проблема здесь в том, что единственно приемлемые мишени — это заряженные частицы, а именно протоны в водородной мишени. Более того, для обнаружения после рассеяния наиболее удобны тоже заряженные частицы, скажем π^+. Поскольку частицы заряжены, наряду с сильными взаимодействиями имеются кулоновы силы, и в результате возникает, из-за очень малого угла кулонова рассеяния, бесконечное сечение. Как же попытаться найти «сильную часть» амплитуды рассеяния, чтобы проверить дисперсионные соотношения вперед? Физики делают такую подстановку:

$$f(\theta) = f_s(\theta) + f_c(\theta), \tag{339}$$

где $f_c(\theta)$ — «обычная» кулонова амплитуда, как она найдена Гордоном. Ниже мы обсудим это предположение подробнее. В типичном случае дифференциальное сечение при малых углах имеет вид сплошной линии на схематическом рис XI.18. Точечная линия отвечает точным значениям $|f_c|^2$. Как теперь «разыскать» $\operatorname{Im} f_s(\theta=0)$ и $\operatorname{Re} f_s(\theta=0)$? В области, где f_c очень мала, дифференциальное сечение сводится в основном к $|f_s(\theta)|^2$. Линия из крестиков на рис. XI.18 соответствует экстраполяции пробной $|f_s(\theta)|^2$ к $\theta=0$. Проинтегрировав ее по θ и воспользовавшись оптической теоремой, можно узнать, что такое $\operatorname{Im} f_s(\theta=0)$. Как теперь найти $\operatorname{Re} f_s(\theta=0)$? Можно ожидать, что $f_s(\theta)$ медленно меняется вблизи $\theta=0$, поэтому достаточно найти $\operatorname{Re} f_s(\theta=\theta_0)$. Провал при $\theta=\theta_0$ вызван интерференцией между f_s и f_c в точке, где $|f_s| \sim |f_c|$.

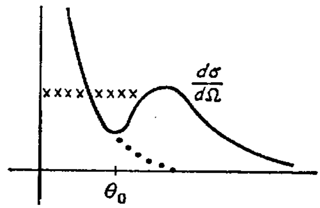


Рис. XI.18.

Глубина этого провала *и знание* f_c позволяют определить аргумент f_s, а значит, $\operatorname{Re} f_s(\theta=\theta_0)$. Теперь можно проверять дисперсионное соотношение вперед. Суть в том, что если мы поверим дисперсионным соотношениям вперед, то можно обратить весь анализ и «измерить» аргумент f_c. Как это согласуется с тем, что этот аргумент остается неопределенным в обычной нестационарной теории? Ключ, видимо, в соотношении (339) и в дисперсионных соотношениях вперед. Амплитуда f_s в (339) не будет настоящей амплитудой рассеяния для сильных взаимодействий, так как f *не* линейна по потенциалу. Следовательно, (339) рассматривается как определение f_s. Итак, наша *гипотеза* такова: при выборе модифицированной квантовой динамики, который мы сделали в кулоновом случае (и с помощью которого Доллард получает «обычную» кулонову динамику, если $V_s=0$), и любом центральном достаточно короткодействующем потенциале функция $f(k, \theta; \lambda r^{-1}+V_s) - f(k, \theta; \lambda r^{-1})$ имеет предел $g(k)$ при $\theta \to 0$, являющийся граничным значением функции, аналитической и полиномиально ограниченной в плоскости с разрезом $\mathbb{C}\setminus[0, \infty)$, причем $g(\bar{k}) = \overline{g(k)}$. Однако это не верно ни для какой другой долларловой динамики, которая приводит к *другим* фазам. Доказательство этой гипотезы объяснило бы, почему фаза Гордона «правильная».

§ *XI.10.* Идея формулировки теории рассеяния для волнового уравнения как задачи в гильбертовом пространстве восходит по крайней мере к работам М. Ш. Бирмана (Об условиях существования волновых операторов.— *Изв. АН СССР*, сер. матем. 27 (1963), 883—906) и Лакса и Филлипса (P. Lax, R. Phillips, The wave equation in exterior domains.— *Bull. Amer. Math. Soc.* 68 (1962), 47—49). Необходимость применения унитарных групп на различных пространствах впервые была отмечена в работе: C. Wilcox, Wave operators and asymptotic solutions of wave propagation problems of classical physics.— *Arch. Rational Mech. Anal.* 37 (1966), 37—78. Мы следовали главным образом общим идеям Като (T. Kato, Scattering theory with two Hilbert spaces.— *J. Funct. Anal.* 1 (1967), 342—369). В частности, теоремы XI.75 и XI.76 в случае $\mathscr{H}_0 = \mathscr{H}_1$ содержатся в работе Като, включающей случай, когда B_0 или B_1 имеют нетривиальное ядро. Като ввел понятие эквивалентности для операторов отождествления и неоднократно подчеркивал, что с физической точки зрения одни операторы отождествления более естественны, чем другие.

Подробно наше доказательство существования и полноты волновых операторов в случае оптического рассеяния в неоднородной среде (пример 2) изложено в работе: M. Reed, B. Simon, The scattering of classical waves from inhomogeneous media,— *Math. Z.* **155** (1977), 163—180. Построение волновых операторов для уравнений Максвелла, проведенное в тексте, доказывает сходимость по норме, отличной от энергетической нормы. Это можно обойти, рассматривая волновые уравнения для векторных потенциалов. См., например, только что упомянутую статью. Рассеяние на препятствии (пример 3) с точки зрения, принятой в этом разделе, обсуждалось в работах: C. Wilcox, Scattering Theory for the d'Alembert Equation in Exterior Domains.— Lecture Notes in Math. **442**. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1975; P. Deift, Classical Scattering Theory with a Trace Condition.— Princeton Univ. Press, 1979. Дополнительные ссылки по поводу рассеяния на препятствиях можно найти в замечаниях к § 11.

Первые доказательства асимптотической полноты для акустического и оптического рассеяния в неоднородной среде были независимо даны в работах: М. Ш. Бирман, Задачи рассеяния для дифференциальных операторов при возмущении пространства.— *Изв. АН СССР*, сер. матем. **35** (1971), 440—455; J. Schulenberger, C. Wilcox, Completeness of the wave operators for perturbations of uniformly propagative systems.— *J. Funct. Anal.* **7** (1971), 447—472. Ряд результатов для некоторых очень специальных случаев был получен в статье: М. Ш. Бирман, Об условиях существования волновых операторов.— *Изв. АН СССР*, сер. матем. **27** (1963), 883—906. В статье Бирмана 1971 г. и статье Шуленбергера и Уилкокса на коэффициенты налагались некоторые условия гладкости. Эти условия отбросили В. Г. Дейч в статье: Приложение метода ядерных возмущений в теории рассеяния для пары пространств.— *Изв. высш. учебных заведений*, Математика № 6 (1971), 33—42, и Шуленбергер (J. Schulenberger, A local compactness theorem for wave propagation problems of classical physics.— *Indiana Univ. Math. J.* **22** (1972), 429—432). Обсуждавшаяся нами идея использовать перестановочное соотношение, для того чтобы избавиться от условий гладкости, принадлежит П. Дейфту.

Подход Шуленбергера—Уилкокса отличается от нашего тем, что они сводят волновое уравнение второго порядка к системе уравнений первого порядка как по временной, так и по пространственным переменным. Например, в случае акустического рассеяния, если u удовлетворяет (187), то $v(x) \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = E(x)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{3} A_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) v \equiv i\Lambda v, \tag{340}$$

где

$$E(x) = \begin{pmatrix} \rho(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\rho(x)\, c(x)^2 \end{pmatrix},$$

а A_i — постоянные матрицы, такие, что

$$\sum_{i=1}^{3} A_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, свободное уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = E_0^{-1}\left(\sum_{i=1}^{3} A_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) v \equiv i\Lambda_0 v, \tag{341}$$

где E_0 — постоянная матрица. В своей статье 1966 г. Уилкокс начал изучение теории рассеяния для общих систем первого порядка вида (340), (341), в которых

(i) E_0, $E(x)$, A_i самосопряжены;

(ii) E_0 и $E(x)$ строго положительно определены, причем $0 < e_0 \leqslant E(x) \leqslant e_1$;

(iii) корни $\det\left(\lambda E_0 - \sum_{i=1}^{n} A_i p_i\right) = 0$ имеют постоянную кратность и постоянный знак при $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;

(iv) $E(x) \to E_0$ достаточно быстро при $|x| \to \infty$.

Уилкокс назвал системы, подчиненные несколько более сильным условиям, «равномерно распространяющимися», и доказал существование волновых операторов. Акустическое уравнение, уравнения Максвелла в однородной среде и многие другие классические уравнения относятся к классу равномерно распространяющихся. При выводе многих результатов условие (iii) можно ослабить, потребовав, чтобы ранг $\left(\sum_{i=1}^{n} A_i p_i\right)$ не зависел от p при $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. К таким системам относятся уравнения Максвелла в произвольной неоднородной среде. Однако вопрос о полноте оставался открытым, поскольку ни теоремы Белопольского — Бирмана, ни редукции Като к одному гильбертову пространству еще не было.

Теорема Белопольского — Бирмана (теорема XI.13) была доказана в их статье: А. Л. Белопольский, М. Ш. Бирман, Существование волновых операторов в теории рассеяния для пары пространств.— *Изв. АН СССР*, сер. матем. **32** (1968), 1162—1175; а в работе: Некоторые приложения локального признака существования волновых операторов.— *ДАН СССР* **185** (1969), 735—738, Бирман отметил, что эту теорему можно использовать для доказательства полноты в системах вида (340), (341), *если* $\sum A_i \partial/\partial x_i$ эллиптичен. К сожалению, системы первого порядка, соответствующие акустическому волновому уравнению и уравнениям Максвелла, не эллиптичны, поскольку $\sum A_i p_i$ имеет нулевое собственное значение. Затем Шуленбергер и Уилкокс в своей статье 1971 г. показали, что если справедливы коэрцитивные оценки, то теорему Белопольского — Бирмана можно обобщить на случай с нулевыми модами. В статье: Coerciveness inequalities for non-elliptic systems of partial differential equations.— *Ann. Mat. Pura Appl.* 88 (1971), 229—305, Шуленбергер и Уилкокс доказали необходимые неравенства и таким образом завершили доказательство полноты для акустического и оптического рассеяния в неоднородной среде. Их доказательство коэрцитивных неравенств было существенно упрощено в работе: T. Kato, On a coerciveness theorem of Schulenberger and Wilcox.— *Indiana Univ. Math. J.* **25** (1975), 979—985. См. также книгу Дейфта. В подходе Бирмана, предложенном в 1971 г., коэрцитивные неравенства были не нужны, но все еще использовалась локальная компактность. Недавно Дейфт в своей книге показал, что не нужно ни то, ни другое. Он использовал более общий принцип инвариантности, обсуждавшийся в замечаниях к § 3, который утверждает, что если

$$\frac{\Lambda_0^n}{(\Lambda_0 + ia)^{2n}} - \frac{\Lambda^n}{(\Lambda + ia)^{2n}} \in \mathcal{I}_1 \tag{342}$$

для каждого $a \neq 0$, то справедливы и теорема существования, и теорема полноты волновых операторов. Затем он смог проверить (342), поскольку нулевые моды исключаются из Λ_0 и Λ.

Метод Агмона — Куроды (см. § XIII.18) был обобщен так, чтобы можно было изучать системы, встречающиеся в этом разделе, в работе: T. Kato, Scattering theory for abstract differential equations of the second order.— *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **19** (1972), 377—392.

В случае акустического волнового уравнения проблема нулевой моды — совершенно необязательная трудность, которая появляется только при сведении к уравнению первого порядка по пространственным производным. При переходе к уравнению первого порядка только по временнóй производной, как это мы делали в примере 1, эллиптичность сохраняется и можно прямо применять метод Като редукции к одному гильбертову пространству или теорему Белопольского — Бирмана. В случае уравнений Максвелла приходится сталкиваться с неэллиптической системой первого порядка по пространственным и временнóй координатам. Но, как отмечалось в примере 2, эту систему легко превратить в (неэллиптическую) систему второго порядка. Добавляя перекрестную часть в лапласиан и наделяя нулевые моды нетривиальной динамикой, систему можно сделать эллиптической. Тогда из эллиптичности и теории редукции Като будет следовать полнота. Поскольку такая добавочная динамика не взаимодействует с динамикой ненулевых мод, рассеяние этих мод не меняется. Детали можно найти в статье Рида и Саймона. Мораль всего сказанного такова: имеешь эллиптичность — сохрани ее, не имеешь — займей.

Результаты о конечности следов при изменении граничных условий восходят к работе: М. Ш. Бирман, Возмущения непрерывного спектра сингулярного эллиптического оператора при изменении границы и граничных условий.— *Вестник ЛГУ*, мат. мех. астрон. **1** (1962), 22—55. Теорема XI.79 доказана с помощью методов винерова интеграла в статье Дейфта — Саймона, упомянутой в замечаниях к § 4; см. также книгу: B. Simon, Functional Integration and Quantum Physics.— New York: Academic Press, 1979. Теоремы XI.80 и XI.81 взяты из уже упоминавшейся книги Дейфта; наше изложение следует многим его идеям. В его доказательстве теоремы XI.81, которое очень сильно отличается от нашего, проведенного в специальном случае, используются результаты Кальдерона (A. Calderón, Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions.— Proc. Symp. Pure Appl. Math. v. 4, pp. 33—49.— Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1961). Дейфт обсуждает случай более общих акустических операторов, учитывающих как препятствия, так и неоднородности. Он также отмечает, что теорема XI.81 не охватывает физически интересный случай, когда Г представляет собой кусок гиперплоскости («дифракционный эксперимент»). Однако наше доказательство теоремы XI.81 можно модифицировать, с тем чтобы охватить этот случай (задача 119). Дейфт развил другой подход, работающий в случаях, когда удается доказать только компактность $\tilde{R}_{\Gamma US;\,N}$ — результат, связанный с теоремами типа Реллиха из § XIII.14. Его идея (в обозначениях дополнения) состоит в том, чтобы доказать компактность $R^2_{\Gamma;\,N}\chi$ и χR_0^2, а затем доказать конечность следа оператора $R^2_{\Gamma;\,N}(1-\chi)-(1-\chi)R_0^2$. Последний факт влечет за собой существование волновых операторов $\Omega^{\pm}(H_{\Gamma;\,N}, H_0, 1-\chi)$, а первый — асимптотическую эквивалентность $1-\chi$ единице.

Идея леммы 6 в доказательстве теоремы XI.81′ взята из работы: F. Guerra, L. Rosen, B. Simon, Boundary conditions for the $P(\varphi)_2$ Euclidean field theory.— *Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A* 25 (1976), 231—334, где похожий метод применялся при доказательстве некоторых технических оценок, связывающих $R_{\Gamma;\,N}$ с R_0.

§ XI.11. Основной источник для того подхода к теории рассеяния, который излагается в этом разделе,— книга: П. Лакс, Р. Филлипс, Теория рассеяния. Пер. с англ.— М.: Мир, 1971. Теорема о представлении (теорема XI.82), дающая связь между приходящим и уходящим подпространствами и оператором рассеяния, впервые была сформулирована и доказана в статье: Я. Г. Синай, Динамические системы со счетнократным лебеговским спектром. I.— *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **25** (1961), 899—924. Синай вывел эту теорему из теоремы единственности фон Неймана (теорема XI.84). Лакс и Филлипс предложили доказательство, исходящее из основных принципов: сначала они доказали дискретный вариант (теорема XI.83), а потом получили спектральное представление на $L^2[0, 2\pi;\ N]$ при помощи преобразования Фурье. Пользуясь комплексным анализом и преобразованием Кэли, они нашли спектральное представление на $L^2(-\infty, \infty;\ N)$ для непрерывного случая, а затем при помощи обратного преобразования Фурье получили теорему XI.82. Доказательство, которое мы предложили, построено на идеях теоремы Макки об импримитивности. Связь между этой теоремой и теоремой фон Неймана была отмечена еще в статье: G. W. Mackey, A theorem of Stone and von Neumann.— *Duke Math. J.* **16** (1949), 313—326, а далее развивается в его книге: Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics.— New York: Benjamin, 1968. Ссылки на теорему фон Неймана можно найти в замечаниях к § VIII.5; другое доказательство намечено в задаче 30 к гл. X. Наше доказательство леммы к теореме XI.82 построено по примеру знаменитого доказательства фон Неймана теоремы о единственности меры Хаара (J. von Neumann, The uniqueness of Haar's measure.— *Матем. сб.* **1** (1936), 721—734).

Существуют связи между эргодической теорией и теоремами XI.82 и XI.83, которыми занимались Колмогоров и Синай, что и объясняет интерес Синая к этим теоремам. В самом деле, рассмотрим преобразование пекаря (пример 2 в § VII.4). Если D_+ есть пространство функций одного лишь x, таких, что $\int f\,dx=0$, то D_+ можно рассматривать как уходящее пространство для сужения U на $\{1\}^\perp$, откуда следует, что U есть перемешивание. Теорема XI.82 важна для непрерывного случая. Действительно, определим **K-систему** как пространство с мерой $\langle\Omega, \Sigma, \mu\rangle$, где $\mu(\Omega)=1$, однопараметрическую группу T_t сохраняющих меру преобразований и такую подалгебру $\Sigma_+\subset\Sigma$, что (i) $T_t[\Sigma_+]\subset\Sigma_+$ при $t>0$; (ii) наибольшая σ-алгебра, содержащаяся во всех $T_t[\Sigma_+]$, есть $\{\varnothing, \Omega\}$; (iii) наименьшая σ-алгебра, содержащая все $T_t[\Sigma_+]$, есть Σ. Если выбрать $\mathcal{H}=\left\{f\in L^2 \,\middle|\, \int f d\mu=0\right\}$, $D_+=\{f\in\mathcal{H} \mid f\ \ \Sigma_+\text{-измеримы}\}$ и $U(t)f=f\circ T_t^{-1}$, то D_+ есть уходящее подпространство и, в частности, T_t — перемешивание.

В своей книге Лакс и Филлипс в качестве основного примера, иллюстрирующего приложения их главных теорем (пример 3), пользуются рассеянием звуковых волн на препятствии с граничными условиями Дирихле. Их теория применима также к граничным условиям Неймана и некоторым другим. Мы рассмотрели рассеяние в неоднородной среде как иллюстрацию общей теории для того, чтобы облегчить сравнение с техникой § 10. Вследствие интереса к связи между геометрией препятствия, локальным убыванием энергии и полюсами оператора рассеяния (см. ниже) рассеяние на препятствии в однородной среде оказалось основной задачей, которая рассматривалась в литературе, хотя многие авторы указывали на то, что их результаты распространяются и на неоднородную среду. Специально неоднородный случай рассмотрен при помощи теории Лакса—Филлипса в работе: J. La Vita, J. Schulenberger, C. Wilcox, The scattering theory of Lax and Phillips and wave propagation problems of classical physics.— *ONR Tech. Rep.* **16** (1971).

Теорема XI.89 представляет собой частный случай общей теоремы Фура и Сигала (Y. Foures, I. Segal, Causality and analyticity.— *Trans. Amer. Math.*

Soc. 78 (1955), 385—405). Доказательство теоремы Фату можно найти в гл. 11 книги: P. Duren, Theory of H^p Spaces.— New York: Academic Press, 1970. Сама идея восходит к работе Фату (P. Fatou, Séries trigonométiques et séries de Taylor.— *Acta Math.* 30 (1906), 335—400), который рассматривал случай ограниченной аналитической функции в круге. Оператор рассеяния $s(z)$ в книге Лакса и Филлипса аналитичен в *нижней* полуплоскости, так как они определяют преобразование Фурье со знаком плюс, а мы—со знаком минус. Доказательство теорем XI.90 и XI.91, связывающих полюсы $s(z)$ со спектром B, см. в книге Лакса и Филлипса. Формулировки там другие, так как они записывают полугруппы в виде $Z(t)=e^{Bt}$, а мы—в виде e^{-Bt}. Поэтому у них B имеет спектр в левой полуплоскости, а у нас—в правой.

Полюсы оператора рассеяния тесно связаны с физическими наблюдениями, так что важно определить их положение в нижней полуплоскости. Согласно теореме XI.90, эта задача сводится к изучению $\sigma(B)$. С помощью функционального исчисления для B результат теоремы XI.91 может быть усилен в разных направлениях за счет дополнительных допущений.

Теорема. Пусть выполнены все условия теоремы XI.91. Тогда:

(a) если $\|Z(T)\|=a<1$ для некоторого T, то

$$\sigma(B)\subset\{z \mid \operatorname{Re} z\geqslant-(\ln a)/T\};$$

(b) если $Z(T)$ компактен для некоторого T, то при любом $c>0$ в множестве $\{z \mid \operatorname{Re} z<c\}$ содержится лишь конечное множество точек из $\sigma(B)$;

(c) если при некотором T область значений $Z(T)$ лежит в $D(B)$, то существуют $a\in\mathbb{R}$, $b<0$, такие, что

$$\sigma(B)\subset\{z \mid \operatorname{Re} z>a+b\ln|z|\}.$$

Условия (a) и (b) были найдены Лаксом и Филлипсом в их книге. Они показали также, что из условия (b) вытекает существование асимптотического ряда по энергетической норме для решения в ограниченной области; этот ряд представляет собой сумму экспонент с отношениями, зависящими от положения полюсов. Из-за этого в приложениях особенно важно убедиться в том, что выполнено условие (b). Условие (c) было установлено и доказано в работе Лакса и Филлипса (P. Lax, R. S. Phillips, A logarithmic bound on the location of the poles of the scattering matrix.— *Arch. Rational Mech. Anal.* 40 (1971), 268—280) для уравнения $u_{tt}-c(x)^2\Delta u-q(x)u=0$ при многочисленных различных предположениях. Моравец и Людвиг (C. S. Morawetz, D. Ludwig, The generalized Huygens' principle for reflecting bodies.— *Comm. Pure Appl. Math.* 22 (1969), 189—205) доказали общий принцип Гюйгенса для распространения особенностей и убывания энергии при рассеянии на выпуклом теле (граничные условия Дирихле) и воспользовались этим результатом для доказательства (b). Другое доказательство (b), основанное на той же формулировке принципа Гюйгенса, изложено в статье: R. S. Phillips, A remark on the preceding paper of C. S. Morawetz and D. Ludwig.— *Comm. Pure Appl. Math.* 22 (1969), 207—211. В статьях Моравеца (C. S. Morawetz, The decay of solutions of the exterior initial-boundary value problem for the wave equation.— *Comm. Pure Appl. Math.* 14 (1961), 561—568; The limiting amplitude principle.— *Comm. Pure Appl. Math.* 15 (1962), 349—361) было показано, что энергия убывает равномерно как t^{-1} в ограниченных областях вне звездообразного препятствия; далее Лакс, Моравец и Филлипс показали, что из этого следует экспоненциальное убывание (P. Lax, O. S. Morawetz, R. S. Phillips, Exponential decay of solutions of the wave equation in the exterior of a star-shaped obstacle.— *Comm. Pure Appl. Math.* 16 (1963), 477—486). Отсюда в свою очередь следует, что $\|Z(t)\varphi\|\leqslant ce^{-\alpha t}\|\varphi\|$, так что (a) выполняется в случае звездообразного препятствия, Заметим, что, проверяя предположения теоремы XI.91 в примере 3, мы пользовались фактом убывания энергии, но не требовали ни равномерности, ни каких-либо специальных геометрических условий на препятствие. С другой стороны, чтобы получить равномерное убывание, надо наложить некоторые геометрические требования (как видно из названий цитированных статей), потому что если край препятствия сильно зазубрен, можно удержать энергию в его окрестности на произвольно большое время, подбирая соответствующие граничные условия. В своей книге Лакс и Филлипс высказывают гипотезу, что если время пребывания световых лучей в окрестности препятствия не ограничено сверху, то $\|Z(t)\|=1$ при всех t. Эта гипотеза была подтверждена Ральстоном (J. Ralston, Solutions of the wave equation with localized energy.— *Comm. Pure Appl. Math.* **22** (1969), 807—823). В другой статье Ральстон показывает, что это справедливо и в неоднородном случае, если $c(x)$ слишком «извивается» на бесконечности (Trapped rays in spherically symmetric media and poles of the scattering matrix.— *Comm. Pure Appl. Math.* **24** (1971), 571—582). Другая гипотеза Лакса и Филлипса состояла в том, что если время пребывания вблизи препятствия ограничено, то $Z(t)$ в конце концов компактен, откуда, в частности, следует в силу (233), что $\|Z(t)\|$ становится меньше единицы. Эта последняя более слабая гипотеза была доказана в работе: C. Morawetz, J. Ralston, W. Strauss, Decay for solutions of wave equations outside of non-trapping obstacles.— *Comm. Pure Appl. Math.* **30** (1977), 447—508. Связь между геометрией препятствия и полюсами оператора рассеяния через оценки убывания энергии—одна из самых замечательных черт метода Лакса—Филлипса. На этом пути Моравец и Людвиг показывают, что формальное решение задачи рассеяния, предлагаемое геометрической оптикой, является асимптотическим к точному решению в теории Лакса—Филлипса (C. S. Morawetz, D. Ludwig, An inequality for the reduced wave operator and the justification of geometrical optics.— *Comm. Pure Appl. Math.* **21** (1968), 187—203). Другие результаты, относящиеся к положению полюсов $s(z)$, см. в статьях: P. Lax, R. S. Phillips, Decaying modes for the wave equation in the exterior of an obstacle.— *Comm. Pure Appl. Math.* **22** (1969), 737—787; On the scattering frequencies for the Laplace operator for exterior domains.— *Comm. Pure Appl. Math.* **25** (1972), 85—101.

Приложение их метода к квантовому рассеянию описано Лаксом и Филлипсом в их книге, а дальнейшее развитие—в статье: P. D. Lax, R. S. Phillips, The acoustic equation with an indefinite energy form.— *J. Funct. Anal.* **1** (1967), 37—83. См. также: C. Dolph, J. McLeod, D. Thoe, The analytic continuation to the unphysical sheet of the resolvent kernel and the scattering operator associated with the Schrödinger equation.— *J. Math. Anal. Appl.* **16** (1966), 311—332.

В своей книге Лакс и Филлипс приводят также два доказательства (одно из них принадлежит М. Шифферу) того, что препятствие (в случае условий Дирихле) однозначно определено оператором рассеяния. Это утверждение было обобщено Майдой (A. Majda, High frequency asymptotics for the scattering matrix and the inverse problem of acoustical scattering.— *Comm. Pure Appl. Math.* **29** (1976), 261—291; A representation formula for the scattering operator and the inverse problem for arbitrary bodies.— *Comm. Pure Appl. Math.* **30** (1977), 165—194), который показал, что препятствие с выпуклой оболочкой определяется при помощи явной формулы высокочастотными асимптотиками ядра $k(\theta, \omega; \sigma)$ оператора $I-\hat{S}$. Результаты Майды в свою очередь были обобщены Лаксом и Филлипсом (P. Lax, R. S. Phillips, Scattering of sound waves from an obstacle.— *Comm. Pure Appl. Math.* **30** (1977), 195—233).

Подход Лакса и Филлипса был далее развит и применен в разнообразных других ситуациях. Для случая четных размерностей см.: P. Lax, R. S. Phillips, Scattering theory for the acoustic equation in an even number of space dimensions.— *Indiana Univ. Math. J.* **22** (1972), 101—134. Для симметрических гиперболических систем с сохраняющейся энергией см.: P. D. Lax, R. S. Phillips, Scattering theory.— *Rocky Mountain J. Math.* 1 (1971), 173—223. Для диссипативных гиперболических систем см.: P. D. Lax, R. S. Phillips, Scattering theory for dissipative hyperbolic systems.— *J. Funct. Anal.* 14 (1973), 172—236; C. Foias, On the Lax—Phillips nonconservative scattering theory.— *J. Funct. Anal.* 19 (1975), 272—301. Для движущихся рассеивающих объектов см.: J. Cooper W. Strauss, Energy boundedness and decay of waves reflected off a moving boundary.— *Indiana Univ. Math. J.* 25 (1976), 671—690. Для приложений к явлениям переноса см.: P. D. Lax, R. S. Phillips, Scattering theory for transport phenomena. In.: Functional Analysis (B. Gelbaum. ed.).— Thompson, 1967. Рассеяние в некоторых неевклидовых геометриях, которое приводит к S-матрицам, связанным с автоморфными функциями, исследовано в работах: Б. С. Павлов, Л. Д. Фаддеев, Теория рассеяния и автоморфные функции.— *Записки научных семинаров ЛОМИ* 27 (1972), 161—193, и P. Lax, R. S. Phillips, Scattering Theory for Automorphic Functions.— Ann Math. Stud. 87.— Princeton Univ. Press, 1976.

Прием скручивания из дополнения восходит к работе Девиса и Саймона указанной в замечаниях к § 4. Они рассматривают случай граничного условия Неймана, а также некоторые другие приложения.

§ XI.12. Материал этого раздела основан на трех статьях: J. Hejtmanek, Scattering theory of the linear Boltzmann operator.— *Commun. Math. Phys.* 43 (1974), 109—120; B. Simon, Existence of the scattering matrix for the linearized Boltzmann equation.— *Commun. Math. Phys.* 41 (1975), 99—108; J. Voigt, On the existence of the scattering operator for the linear Boltzmann equation.— *J. Math. Anal. Appl.* 58 (1977), 541—558. См. также работу: V. Protopopescu, On the scattering matrix for the linear Boltzmann equation.— *Rev. Roumaine Phys.* 21 (1976), 991—994.

Хейтманек (статья которого была первой появившейся в виде препринта) выделил проблему и доказал основной результат о разрешимости из теоремы XI.93, включая утверждения (а)—(с), и теорему XI.94. Саймон ввел лемму, появившуюся в тексте перед теоремой XI.94, доказал теорему XI.95 при более сильном предположении, что $(\operatorname{diam} D)(M(\sigma_a)+M(\sigma_p))<1$, и при этом же предположении доказал теорему XI.96. Замечания Саймона о том, что эти идеи тесно связаны с теорией гладких возмущений, рассмотрены в § XIII.7. Работа Саймона содержит также пример, показывающий, что динамика может не обладать свойством обращаемости в L^1_+. Фойгт доказал оценку из теоремы XI.98 (d), а также теоремы XI.95 и XI.96 в использованных нами предположениях. Он также обобщил эти результаты на некоторые случаи с некомпактным носителем и дал пример регулярной подкритической пары, для которой оператор $\tilde{\Omega}^-$ не существует.

Общее (т. е. нелинейное) уравнение Больцмана было предложено в работе. L. Boltzmann, Über die Aufstellung und Integration der Gleichungen, welche die Molekularbewegung in Gasen bestimmen.— *Sitz. Wien.* 74 (1876), 503. Недавнее обсуждение математических проблем, связанных с этим уравнением, см. в книге: E. G. D. Cohen, W. Thirring, The Boltzmann Equation.— Vienna: Springer 1973. Линеаризованное уравнение Больцмана интенсивно применялось для изучения совсем других явлений, которые мы здесь не рассматривали. Для тех явлений переноса, которые связаны с реакторами, см.: I. Bell, S. Glasston, Nuclear Reactor Theory.— Princeton, N. J.: Van Nostrand, 1970; для явлений переноса в звездах см.: D. Mihalas, Stellar Atmospheres.— San Francisco: Freeman, 1970.

§ XI.13. Первые результаты теории рассеяния для уравнения

$$u_{tt}-\Delta u+m^2u=-gu^3 \tag{343}$$

были доказаны Сигалом: I. Segal, Quantization and dispersion for nonlinear relativistic wave equations.— Proc. Conf. Math. Theory of Elementary Particles

(Dedham, Mass. 1965), pp. 79—108.— Cambridge, Mass.: MIT Press. Сигал показал, что для всех достаточно хороших решений u_- свободного уравнения существует решение u уравнения (343), такое, что $u_- - u \to 0$, когда $t \to -\infty$. Аналогично, для каждого u_+ существует некоторое u. Таким образом, Сигал построил волновые операторы $\Omega^\pm$ на определенных множествах хороших асимптотических данных. В работе: I. Segal, Dispersion for nonlinear relativistic wave equations.— *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **1** (1968), 459—497, он показал, что если u_- и u_+ малы (или g мало), то операторы $\Omega^\pm$ имеют обратные, так что для малых данных существует оператор рассеяния. Эта статья содержит бо́льшую часть представленных нами сведений о рассеянии для малых данных. Впоследствии методы для малых данных были применены Чедемом к более общим уравнениям (J. Chadam, Asymptotics for $\Box u = m^2u + G(x, t, u, u_x, u_t)$. I, II.— *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Fis. Mat.* **26** (1972), 33—65, 67—95), а Валем к случаю $m=0$ (W. von Wahl, Über die klassische Lösbarkeit des Cauchyproblems für nichtlineare Wellengleichungen bei kleinen Anfangswerten und das asymptotische Verhalten der Lösungen.— *Math. Z.* **114** (1970), 281—299. Абстрактная теория низкоэнергетического рассеяния, излагаемая нами, близко следует построению Штрауса (W. Strauss, Nonlinear scattering theory. In.: Scattering Theory in Mathematical Physics (J. Lavita and J.-P. Marchand, eds.).— Dordrecht, The Netherlands: Reidel, 1974). Приводимое нами доказательство теоремы XI.98 содержит некоторые дополнительные улучшения, сделанные Штраусом.

Наше доказательство теоремы XI.101 построено по образцу оригинального доказательства Штрауса (W Strauss, Decay and asymptotics for $\Box u = F(u)$. — *J. Funct. Anal.* **2** (1968), 409—457). Идея доказательства оценки убывания интегрированием по частям и идентификацией положительных слагаемых в сохраняющейся величине восходит по крайней мере к работе: C. Morawetz, The limiting amplitude principle.— *Comm. Pure Appl. Math.* **15** (1963), 349—361. Доказать асимптотическую полноту для уравнения (343) в случае $m > 0$ гораздо труднее, чем в случае $m=0$. Несмотря на то что имеется нарушенный конформный заряд, аналогичный заряду из задачи 153, слагаемое, являющееся источником, положительно, что нарушает оценку убывания. Для случая $m>0$ и когда $g=g(x)$ мала на бесконечности, Штраус построил операторы Ω^+ и Ω^- в работе: W. Strauss, Decay of solutions of hyperbolic equations with localized nonlinear terms. In: Symposia Mathematica, Vol. VII, Probleme di Evoluzione, Istituto Nazionale di Alta Mathematica (Roma).— New York: Academic Press, 1971, pp. 339—355. Далее, Моравец и Штраус доказали асимптотическую полноту для $m>0$, когда g — положительная константа, в статье: C. Morawetz, W. Strauss, Decay and scattering of solutions of a nonlinear relativistic wave equation.— *Comm. Pure Appl. Math.* **25** (1972), 1—31. Их весьма трудное доказательство улучшает слабую оценку убывания, которая ранее была получена Моравецем (C. Morawetz, Time decay for the Klein—Gordon equation.— *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **306** (1968), 291—296). Абстрактная версия их доказательства появилась в работе: M. Reed, Construction of the scattering operator for abstract nonlinear wave equations.— *Indiana Univ. Math. J.* **25** (1976), 1017—1027. Дальнейшие свойства оператора рассеяния доказаны в статье: C. Morawetz, W. Strauss, On a nonlinear scattering operator.— *Comm. Pure Appl. Math.* **26** (1973), 47—54.

Асимптотическая полнота для нелинейного уравнения Шредингера

$$idu/dt = (-\Delta + m)\, u + f(u)$$

для различных нелинейных членов $f(u)$ была доказана в работах: J. E. Lin, W. Strauss, Decay and scattering of solutions of the nonlinear Schrödinger equation.— *J. Funct. Anal.* **30** (1978), 245—263; J. Ginibre, G. Velo, On a class of non-linear Schrödinger equations, I, II.— *J. Funct. Anal.* **32** (1979), 1—32, 33—71; III.— *Ann. Institut H. Poincaré* **28** (1978), 287—316. Для получения необходимой априорной оценки убывания Жинибр и Вело пользуются нарушенной инвариантностью аналогично применению нарушенной конформной инвариантности, описанному в задаче 153.

По этому предмету имеется обширная литература. Ссылки и дальнейшее обсуждение см. в лекциях М. Рида: M. Reed, Abstract Non-linear Wave Equations. Lecture Notes in Mathematics, **507**.— New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1976, лекциях Штрауса «Non-linear scattering theory», на которые мы ссылались выше, и его же лекциях в сб. «Invariant wave equations», на которые мы ссылаемся ниже.

Обсуждение связанных состояний в нелинейных системах и, в частности, детали рассмотренного в этом разделе примера можно найти в работе: W. Strauss, Existence of solitary waves in higher dimensions.— *Commun. Math. Phys.* **55** (1977), 149—162, где приведены ссылки на более ранние работы.

Проводилось также интенсивное исследование частного класса уравнений, включающего уравнение Кортевега—де Фриза и уравнение sin-Гордон, которые обладают связанными состояниями с очень специальными свойствами. А именно, здесь нет рассеяния между каналами. Иными словами, состояние, которое выглядит как n солитонов при $t=-\infty$, будет выглядеть как n солитонов и при $t=+\infty$. На самом деле даже скорости солитонов будут теми же самыми. Как введение в литературу по этому вопросу см.: C. Scott, F. Chu, D. McLaughlin, The soliton: A new concept in applied science.— *Proc. IEEE* **61** (1973), 1443—1483, и Nonlinear Wave Motion (A. Newell, ed.), Lectures in Applied Mathematics, **15**.— Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1974.

Теорема Нётер восходит к работе: E. Noether, Invariante Variationsprobleme.— *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* (1918), 235—257. Эти идеи стали стандартной частью классической теории поля; см., например, соответствующее рассмотрение в книге: Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей.— М.: Наука, 1976. То, что инварианты динамики связаны с группами преобразований, коммутирующих с динамикой,— идея, знакомая по классической и квантовой механике. Пусть $T_t^{(H)}$ — поток в фазовом пространстве, порождаемый гамильтонианом $H(p, q)$ посредством уравнений Гамильтона (X.153). Если $T_t^{(f)}$ — поток, порождаемый $f(p, q)$, и $T_t^{(H)}T_s^{(f)}=T_s^{(f)}T_t^{(H)}$, то функция f инвариантна относительно действия $T_t^{(H)}$, т. е. $f(T_t^{(H)}\langle p, q\rangle)=f(p, q)$. В квантовой механике пусть H — гамильтониан, а A — другой самосопряженный оператор. Если e^{-isH} и e^{-itA} коммутируют, то спектральные меры оператора A инвариантны относительно действия e^{-itH}, т. е. $\left(E_\Omega^{(A)}e^{-itH}\varphi, e^{-itH}\varphi\right)=\left(E_\Omega^{(A)}\varphi, \varphi\right)$ для всех φ и t. Отметим, однако, две вещи, относящиеся к случаю классической теории поля. Во-первых, удобнее работать в лагранжевой формулировке, чем в гамильтоновой. Во-вторых, сохраняющиеся величины возникают как интегралы от локальных плотностей.

Для знакомства с другим, хотя и родственным подходом к нахождению сохраняющихся величин см. лекции Штрауса: W. Strauss, Nonlinear invariant wave equations. In: Invariant Wave Equations, Lecture Notes in Physics, **73**.— New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1978, pp. 197—249.

Группа дробно-линейных преобразований плоскости $\mathbb{C}$ геометрически порождается вращениями, трансляциями, масштабными преобразованиями и инверсией на $\mathbb{R}^2$. Аналогично, группа преобразований $\mathbb{R}^4$, порождаемая вращениями, трансляциями, масштабными преобразованиями и инверсией $x \longrightarrow x/x\cdot x$, называется конформной группой, поскольку она также сохраняет углы. Если мы продолжим t до it, то группа вращений перейдет в группу Лоренца, а инверсия станет лоренцевой инверсией; это и будет именно та группа, которую физики обычно называют конформной группой. Она сохраняет углы в смысле лоренцева скалярного произведения.

§ *XI.14.* Понятие магнонов впервые возникло в физической литературе в связи с теорией ферромагнетизма. В наши намерения не входит сколько-нибудь полное обсуждение обширной литературы по этой теме, как и вообще по модели Гейзенберга. Упомянем лишь поучительную статью Дайсона (F. Dyson, General theory of spin-wave interactions.— *Phys. Rev.* **102** (1956), 1217—1230) и коллекцию препринтов по ферромагнетизму, выпущенную Японским физическим обществом.

Основные идеи теории рассеяния в модели Гейзенберга при нулевой температуре были высказаны Уоттсом (G. J. Watts, Theory of spin-wave scattering.— Ph. D. Thesis, Bedford College, 1973) и Хеппом (K. Hepp, Scattering theory in the Heisenberg ferromagnet.— *Phys. Rev.* *B* **5** (1979), 95—97). Подробный обзор можно найти у Стритера (R. F. Streater, Spin-wave scattering. In: Scattering Theory in Mathematical Physics (J. A. La Vita, J. P. Marchand. eds.), pp. 273—298.— Dordrecht, The Netherlands, Reidel. 1974).

Связанные состояния магнонов рассматриваются в работах: J. G. Hanus, Bound states in the Heisenberg ferromagnet.— *Phys. Rev. Lett.* **11** (1963), 336—337; M. Wortis, Bound states of two spin waves in the Heisenberg ferromagnet.—*Phys. Rev.* **132** (1963), 85—97.

В одномерной модели Гейзенберга рассеяние магнонов можно исследовать гораздо подробнее, поскольку многие формулы могут быть получены в замкнутом виде. В частности, при каждом n существует одно и только одно n-магнонное связанное состояние. Причина, по которой эта модель так легко поддается изучению, заключается в том, что, подобно одномерным солитонам, спиновые волны не рассеиваются друг на друге, а также нет передачи импульса. Дальнейшие подробности см. в работах: L. Thomas, Ground state representation of the infinite one-dimensional Heisenberg ferromagnet. I.— *J. Math. Anal. Appl.* **59** (1977), 392—414; D. Babbitt, L. Thomas, Ground state representation of the infinite one-dimensional Heisenberg ferromagnet. II. An explicit Plancherel formula.— *Commun. Math. Phys.* **54** (1977), 255—278; D. Babbitt, L. Thomas, Ground state representation of the infinite one-dimensional Heisenberg ferromagnet, III. Scattering theory.— *J. Math. Phys.* **19** (1978), 1699—1704.

Гильбертово пространство, построенное нами в случае бесконечного объема, допускает также реализацию в виде бесконечного тензорного произведения. Пусть

$$D_0=\left\{\bigotimes_{\alpha\in\mathbb{Z}^3} v_\alpha \,\middle|\, v_\alpha\in\mathbb{C}^2 \text{ и все } v_\alpha, \text{ за исключением конечного числа, равны } \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Линейную структуру введем здесь так, чтобы произведение $\bigotimes v_\alpha$ было линейным по каждому из сомножителей при фиксированных остальных. Для v и w из D_0, $v=\bigotimes v_\alpha$, $w=\bigotimes w_\alpha$ определим

$$(v,\, w)=\prod_{\alpha\in\mathbb{Z}^3}(v_\alpha,\, w_\alpha)_{\mathbb{C}^2_\alpha}. \tag{344}$$

Это произведение не бессмысленно, поскольку все его члены, за исключением конечного числа, равны единице. Далее, можно показать, что (344), расширенное до полуторалинейной формы, определяет внутреннее произведение на D_0 (задача 136). Пополнение D_0 по этому внутреннему произведению есть гильбертово пространство—одно из несчетного множества различных между собой тензорных произведений, которые мы можем построить, заменяя $\binom{0}{1}$ различными последовательностями. Это пространство изоморфно $\mathscr{H}$ относительно отображения $\psi(\{\alpha_\beta\})\mapsto\bigotimes v_\beta$, где $v_\beta=\binom{0}{1}$ (соответственно $\binom{1}{0}$) при $\alpha_\beta=0$ (соответственно 1). Бесконечные тензорные произведения были введены Дж. фон Нейманом (J. von Neumann, On infinite direct products.— *Compositio Math.* **6** (1938), 1—77). Краткое изложение их теории дано в приложении к работе: M. Reed, Self-adjointness in infinite tensor product spaces.— *J. Funct. Anal.* 5 (1970), 94—124.

§ XI.15. Математическое описание рассеяния квантованных полей восходит к работам: R. Feynman, The theory of positrons.— *Phys. Rev.* **76** (1949), 749—759; A. Salam, P. Matthews, Fredholm theory of scattering in a given time-dependent field.— *Phys. Rev.* **90** (1953), 690—695; J. Schwinger, Theory of quantized fields, IV, V.— *Phys. Rev.* **92** (1953), 1283—1299; **93**(1954), 615—628. Во всех этих четырех работах рассматривается электрон-позитронное рассеяние в заданном внешнем классическом электромагнитном поле. Фейнман выписал последовательные приближения для некоторых амплитуд рассеяния в терминах классических пропагаторов и рассмотрел связи между полученными им формулами, теорией дырок Дирака и вторичным квантованием. В работах Салама—Мэтьюза и Швингера выписано то, что присутствовало в работе Фейнмана неявно, а именно разложения типа Дайсона для оператора рассеяния в терминах внешнего поля и квантованного in-поля, а также изучена сходимость выражений для некоторых матричных элементов.

Реализация юкавских теорий в виде интеграла по внешним полям на формальном уровне была развита в работах: A. Salam, P. Matthews, The Green's functions of quantized fields.— *Nuovo Cimento* **12** (1954), 563—565; Propagators of quantized fields.— *Nuovo Cimento* **2** (1955), 120—134. Для двумерной теории этот формализм был поставлен на строгую основу Э. Зайлером (E. Seiler, Schwinger functions for the Yukawa model in two dimensions with space-time cutoff.— *Commun. Math. Phys.* **42** (1975), 153—182). См. также: E. Seiler, B. Simon, Nelson's symmetry and all that in the $(\text{Yukawa})_2$ and $(\varphi^4)_3$ field theories.— *Ann. Phys.* **97** (1976), 476—518. Именно этот формализм обеспечил большую часть последних достижений теории, включая проверку выполнения аксиом Вайтмана при малых константах связи.

Первая попытка разработать строгий и полный математический аппарат для задач с внешним полем была предпринята Капри (A. Capri, Electron scattering in a given time-dependent electromagnetic field.— *J. Math. Phys.* **10** (1969), 575—580). Капри указал на то, что построение динамики квантованного поля можно полностью свести к построению аналогичной классической динамики. Однако данное Капри доказательство существования вакуума out-полей было неполным. Эту трудность удалось преодолеть в работе: B. Schroer, R. Seiler, J. Swieca, Problems of stability for quantum fields in external time-dependent potentials.— *Phys. Rev. D* **2** (1970), 2927—2937, где были рассмотрены также спины, отличные от 1/2. Для случаев спина 0 (со связью вида (278)) и спина 1/2 обзор развития теории был дан Р. Зайлером (R. Seiler, Quantum theory of particles with spin zero and one half in external fields.— *Commun. Math. Phys.* **25** (1972), 127—151). Наше изложение частично следует этой работе.

Из других работ по проблеме внешнего поля можно указать: J. Bellissard, Quantized fields in interaction with external fields; I. Exact solutions and perturbation expansion; II. Existence theorems.— *Commun. Math. Phys.* **41** (1975), 235—266; **46** (1976), 53—74; P. Bongaarts, S. Ruijsenaars, The Klein paradox as a many particle problem.— *Ann. Phys.* **101** (1976), 289—318; J. M. Chadam, Unitarity of dynamical propagators of perturbed Klein—Gordon equations.— *J. Math. Phys.* **9** (1968), 386—396; W. Hochstenbach, Field theory with an external potential.— *Commun. Math. Phys.* **51** (1976), 211—217; M. Klaus, G. Scharf, The regular external field problem in quantum electrodynamics.— *Helv. Phys. Acta* **50** (1977), 779—802; Vacuum polarisation in Fock space.— *Helv. Phys. Acta* **50** (1977), 803—813; L. E. Lundberg, Relativistic quantum theory for charged spinless particles in external vector fields.— *Commun. Math. Phys.* **31** (1973), 295—316; J. Palmer, Scattering automorphisms of the Dirac fields.— *J. Math. Anal. Appl.* **64** (1978), 189—215; Symplectic groups and the Klein—Gordon field.— *J. Funct. Anal.* **27** (1978), 308—336; S. Ruijsenaars, Charged particles in external fields; I. Classical theory; II. The quantized Dirac and Klein—Gordon theories.— *J. Math. Phys.* **18** (1977), 720—737; *Commun. Math. Phys.* **52** (1977), 267—294. См. также статьи в сб.: Invariant Wave Equations (G. Velo, A. S. Wightman, eds.), Lecture Notes in Physics 73.— Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1978.

Теорема XI.108 принадлежит Шейлу (D. Shale, Linear symmetries of free boson fields.— *Trans. Amer. Math. Soc.* **103** (1962), 149—167). Аналогичная теорема для фермионов доказана в работе: D. Shale, W. Stinespring, Spinor representations of infinite orthogonal groups.— *J. Math. Mech.* **14** (1965), 315—322. В обеих работах используются результаты Сигала (I. Segal, Distributions in Hilbert space and canonical systems of operators.— *Trans. Amer. Math. Soc.* **88** (1958), 12—41. О преобразованиях Боголюбова существует обширная литература. См., например, работы: R. Powers, E. Størmer, Free states of the canonical anti-commutation relations.— *Commun. Math. Phys.* **16** (1970), 1—33; K. Fredenhagen, Implementation of automorphisms and derivations of the CAR algebra.— *Commun. Math. Phys.* **52** (1977), 255—266; G. Labonté, On the nature of strong Bogoliubov transformations for fermions.— *Commun. Math. Phys.* **36** (1974), 59—72, для фермионного случая; P. Kristensen, L. Mejlbo, E. T. Poulsen, Tempered distributions in infinitely many dimensions, III: Linear transformations of field operators.— *Commun. Math. Phys.* **6** (1967), 29—48; A. Klein, Quadratic expressions in a free boson field.— *Trans. Amer. Math. Soc.* **181** (1973), 439—456; Ф. А. Березин, Метод вторичного квантования.— М.: Наука, 1965,— для бозонного случая. См. также S. Ruijsenaars, On Bogoliubov transformations; I, II.— *J. Math. Phys.* **18** (1977), 517—526; *Ann. Phys.* (to appear.)

Для преобразований Боголюбова существует также эквивалентный формализм, использующий симплектические преобразования. Этот подход используется, в частности, в работах Сигала и Шейла. Он отличается большей компактностью и большей математической элегантностью и обнаруживает связи с различными проблемами теории чисел и теории представлений групп. Однако явные вычисления, подобные приводимым в нашем тексте, часто легче выполнить в формализме Боголюбова.

Опишем подход симплектических преобразований. Напомним, что по Сигалу оператор поля $\Phi_S(f)$ (см. § X.7) определялся над любым комплексным гильбертовым пространством $\mathscr{H}$, однако отображение $f \mapsto \Phi_S(f)$ было только *вещественно* линейным. Канонические перестановочные соотношения имели вид

$$[\Phi_S(f), \Phi_S(g)] = i \operatorname{Im}(f, g)_{\mathscr{H}}.$$

Симплектическим преобразованием назовем *вещественное* линейное отображение $T: \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, такое, что

$$\operatorname{Im}(Tf, Tg) = \operatorname{Im}(f, g). \tag{345a}$$

Если обозначить через T^t сопряженное к T как к отображению на вещественном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_r$ с внутренним произведением $(f, g)_r = \operatorname{Re}(f, g)$, то (345a) эквивалентно соотношению

$$T^t J T = J, \tag{345b}$$

где J — оператор умножения на i. Если подобрать комплексное сопряжение C, то можно написать $\mathscr{H}_r = \mathscr{K} \oplus J\mathscr{K}$, где $\mathscr{K}$ — вещественное подпространство $\mathscr{K} = \{\varphi \mid C\varphi = \varphi\}$. В смысле этой прямой суммы $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, и в случае $\dim \mathscr{H} < \infty$ (345b) отождествляется с обычным условием симплектического преобразования. Симплектические преобразования индуцируют естественное преобразование для поля:

$$(\mathscr{T}\Phi)_S(f) = \Phi_S(Tf). \tag{346}$$

Поскольку

$$a^\dagger(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Phi_S(f) - i\Phi_S(Jf)], \quad a(Cf) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Phi_S(f) + i\Phi_S(Jf)],$$

то (346) равносильно (301), если положить

$$
\begin{gathered}
(\mathscr{T}\Phi)_S(f)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[a_B^{\dagger}(f)+a_B(Cf)\right], \\
B_+=\frac{1}{2}[T-JTJ], \qquad B_-=\frac{C}{2}[T+JTJ].
\end{gathered} \tag{347}
$$

Подчеркнем, что $B_\pm$ являются комплексно линейными и (298) эквивалентно (345). Обратные формулы (299), (300) эквивалентны соотношению $T^{-1}=-JT^tJ$, которое имеет место, если оператор T обратим (в общем случае он, возможно, имеет только левый обратный).

Оригинальный результат Шейла о реализуемости утверждает, что если T — обратимое симплектическое преобразование, то унитарный оператор U_T, такой, что $U_T\Phi_S U_T^{-1}=(\mathscr{T}\Phi)_S$, существует в том и только том случае, когда T^tT-I есть оператор Гильберта—Шмидта. Но, в силу (347) и (345b),

$$T^tT-I=2TCB_-, \tag{348}$$

так что критерий Шейла эквивалентен критерию $B_-\in\mathscr{I}_2$, который мы можем установить, поскольку $2T^tC$ обратим. Доказательство Шейла несколько отличается от нашего. Отправным пунктом для него служит вещественное полярное разложение $T=Q\,|T|$ с $|T|=\sqrt{T^tT}$. Ортогональное симплектическое преобразование Q явно реализуется оператором $\Gamma(Q)$, который на $\Gamma_n(\mathscr{H})$ равен $Q\otimes\ldots\otimes Q$. В терминах преобразования Боголюбова $B(Q)_-=0$ в силу (348), так что $B(Q)_+$ унитарен и, тривиальным образом, $\Gamma(U)\,a^{\dagger}(f)\,\Gamma(U)^{-1}=a^{\dagger}(Uf)$. В результате теорему достаточно доказать для случая $T>0$. В этом случае можно формально реализовать T как масштабное преобразование S_T на Q-пространстве и написать явную формулу для унитарного оператора, индуцирующего T: $(Uf)(q)=N_T(q)\,f(S_Tq)$, где $N_T(q)^2$ есть якобиан замены переменных. Условие $T^tT-I\in\mathscr{I}_2$ необходимо, чтобы показать, что $N_T(q)$ корректно определен.

В случае $T^t=T$ теорема Шейла эквивалентна вопросу о том, когда два гауссова процесса являются взаимно абсолютно непрерывными. Этот факт обсуждается в § I.6 книги Б. Саймона «Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля» (Пер. с англ.— М.: Мир, 1976). Соответствующие результаты были хорошо известны в теории вероятностей еще до работы Шейла; см., например, J. Feldman, Equivalence and perpendicularity of Gaussian processes.— *Pacific J. Math.* 8 (1958), 699—708, а также: Я. Гаек, Об одном свойстве нормальных распределений произвольного стохастического процесса.— *Чехосл. матем. ж.* 8 (1958), 610—618.

Для того вида связи, который использовался в данном разделе, всю теорию можно было бы сформулировать для одного эрмитова скалярного поля. Для других видов часто приходится вводить заряженное поле.

Условия гладкости, налагавшиеся в данном разделе на $V(x, t)$, хотя и удобны, не имеют решающего значения. С другой стороны, какие-то условия малости V при $|x|\to\infty$ и $|t|\to\infty$ все же необходимы для проведения нашего простого подхода. Действительно, допустим сначала, что $V(x, t)=\alpha(t)$ и $\alpha(\cdot)$ имеет компактный носитель по t, т. е. мы включаем, а затем выключаем постоянное скалярное поле. Тогда мы можем определить динамику взаимодействия так, как это сделано в данном разделе, получая для каждого момента времени t представление канонических перестановочных соотношений $a(x, t)$, $b^{\dagger}(x, t)$; однако не следует ожидать, что эта динамика будет унитарно реализуема, поскольку включение поля $\alpha(t)$ равносильно изменению массы, а даже для свободного поля такое изменение означает переход к другому представлению канонических перестановочных соотношений (теорема X.46). Физическая причина этого состоит в том, что, поскольку потенциал действует на бесконечном пространстве, он может за конечный промежуток времени рождать бесконечное число пар. Теперь рассмотрим случай, когда $V(x, t) = \beta(x)$ не зависит от времени. Здесь неясно, как определить out-поля и out-динамику даже при условии, что функция $\beta(x)$ локализована в пространстве. И уж никак нельзя ожидать, что представления канонических перестановочных соотношений, соответствующие in-полям и out-полям, в общем случае унитарно эквивалентны, поскольку потенциал действует в интервале времени, достаточном для рождения бесконечного числа пар. Используя аппарат банаховых алгебр, Бонгаартс в работе: P. Bongaarts, The electron-positron field, coupled to external electromagnetic potentials, as an elementary C^*-algebra theory.— *Ann. Phys.* **56** (1970), 108—139, показал, как определить out-поля в случае уравнения Дирака в статическом внешнем поле. Для некоторых весьма частных случаев он доказал унитарную реализуемость динамики. Наличие таких трудностей уже в *линейных* задачах с внешними полями, когда не возникает проблем перемножения операторнозначных обобщенных функций, указывает на то, насколько сложной является динамика в существенно нелинейных полевых теориях.

Значительные усилия были приложены к решению задач с внешними полями для уравнений высших спинов ($s > 1$), когда во всех известных случаях возникают еще дополнительные трудности. Прежде всего нередко бывает трудно подобрать нужное положительно определенное внутреннее произведение на пространстве решений (положительная определенность требуется для вторичного квантования). Если же специально модифицировать внутреннее произведение для придания ему положительной определенности, то утрачиваются перестановочные соотношения для соответствующего распространяющегося поля. Затем в работах Вело и Цванцигера (G. Velo, D. Zwanziger, Propagation and quantization of Rarita—Schwinger waves in an external electromagnetic potential.— *Phys. Rev.* **186**(1969), 1337—1341; Noncausality and other defects of interaction Lagrangians for particles of spin one and higher.— *Phys. Rev.* **188** (1969), 2218—2222) было показано, что для некоторых уравнений, формально лоренц-инвариантных, свойства распространения нарушают причинность. Точнее, было доказано следующее. Назовем фундаментальное решение «причинным», если его носитель лежит в световом конусе будущего, и «слабо причинным», если оно убывает в пространственно-подобных направлениях быстрее любой степени рассеяния. Вело и Цванцигер показали для некоторых уравнений, что *если* слабо причинное фундаментальное решение существует, оно *не* является причинным. Недавно Л. Гординг показал, что существуют такие уравнения и такие внешние поля, для которых нет слабо причинных фундаментальных решений. Известны и другие аномалии. Ряд проясняющих дело обзорных статей по этой теме принадлежит Вайтману: A. S. Wightman, Introductory remarks. In: Troubles in the External Field Problem for Invariant Wave Equations (A. S. Wightman, reviewer).— New York: Gordon and Breach, 1971; Relativistic wave equations as singular hyperbolic systems.— *Proc. Symp. Pure Math.* XXIII, pp. 441—447. Amer. Math. Soc., 1973; Instability phenomena in the external field problem for two classes of relativistic wave equations. In: Essays in honor of Valentine Bargmann, pp. 423—460.— Princeton Univ. Press, 1976.

Существует обширная литература по потенциальному рассеянию для уравнений Дирака и Клейна—Гордона. По уравнению Дирака читатель может обратиться к работам: K. J. Eckhardt, On the existence of wave operators for Dirac operators.— *Manuscripta Math.* **11** (1974), 349—371; Scattering theory for Dirac operators.— *Math. Z.* **139** (1974), 105—131; J. C. Guillot, G. Schmidt, Spectral and scattering theory for Dirac operators.— *Arch. Rational Mech. Anal.* **55** (1974), 193—206; K. Mochinzuki, On the perturbation of the continuous spectrum of the Dirac operator.— *Proc. Japan Acad.* **40** (1964), 707—712; R. Prosser, Relativistic potential scattering.— *J. Math. Phys.* 4 (1963), 1048—1054; M. Thompson, Eigenfunction expansions and the associated scattering theory for potential perturbations of the Dirac equation.— *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 23 (1972), 17—55; статьи Веселича и Вейдмана, указанные в замечаниях к § 4; R. A. Weder, Spectral properties of the Dirac Hamiltonian.— *Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér.* I 87 (1973), 341—355; O. Yamada, On the principle of limiting absorption for the Dirac operator.— *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 8 (1972/73), 557—577. Для уравнения Клейна — Гордона укажем следующие работы: J. M. Chadam, The asymptotic behavior of the Klein—Gordon equation with external potential; I, II.— *J. Math. Anal. Appl.* 31 (1970), 334—348; *Pacific J. Math.* 31 (1969), 19—31; монографию Дейфта, ссылка на которую дана в замечаниях к § 10; T. Kato, Spectral and scattering theory for the *j*-self-adjoint operators associated with the perturbed Klein—Gordon type equations.— *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I A Math.* 23 (1976), 199—221; L. Lundberg, Spectral and scattering theory for the Klein—Gordon equation.— *Commun. Math. Phys.* 31 (1973), 243—257; M. Schechter, The Klein—Gordon equation and scattering theory.— *Ann. Phys.* 101 (1976), 601—609 (см. также работы Шехтера по эллиптическим системам указанные в замечаниях к § XIII.8, и вторую из его статей, приведенных в замечаниях к § 3); W. Strauss, Scattering for hyperbolic equations.— *Trans. Amer. Math. Soc.* 108 (1963), 13—37; D. Thoe, Spectral theory for the wave equation with a potential term.— *Arch. Rational Mech. Anal.* 22 (1966), 364—406; K. Veselic, A spectral theory for the Klein—Gordon equation with an external electrostatic potential.— *Nuclear Phys. A* 147 (1970), 215—224; R. Weder, Self-adjointness and invariance of the essential spectrum for the Klein—Gordon equation.— *Helv. Phys. Acta* 50 (1977), 100—117; Scattering theory for the Klein—Gordon equation.— *J. Funct. Anal.* 27 (1978), 100—117.

§ XI.16. Теория Хаага — Рюэля основывается на работах: R. Haag, Quantum field theories with composite particles and asymptotic completeness.— *Phys. Rev.* 112 (1958), 669—673; The framework of quantum field theory.— *Nuovo Cimento Supp.* 14 (1959), 131—152; D. Ruelle, On the asymptotic condition in quantum field theory.— *Helv. Phys. Acta* 35 (1962), 147—163. Хааг изложил основные элементы доказательства теоремы XI.109, включая введение усеченных вакуумных средних (УВС), и постулировал убывание этих средних. Строгого доказательства убывания регулярных волновых пакетов для уравнения Клейна — Гордона он не дал; его рассуждения основывались на правильных оценках, которые были доказаны лишь формально. Рюэль восполнил эти два пробела, доказав теорему XI.109 (методом, использованным и в нашем изложении) и следствие теоремы XI.17 (другим, хотя и родственным методом). Еще ранее ряд авторов получили частичные результаты о кластерных свойствах УВС; см. G. Dell'Antonio, P. Gulmanelli, Asymptotic conditions in quantum field theories.— *Nuovo Cimento* 12 (1959), 38—53; H. Araki, On the asymptotic behavior of vacuum expectation values at large space-like separations.— *Ann. Phys.* 11 (1960), 260—274; R. Jost, K. Hepp, Über die Matrixelemente des Translationoperators.— *Helv. Phys. Acta* 35 (1962), 34—46. Теорема XI.111 заимствована из книги Л. Шварца по теории распределений (см. замечания к § V.3 и V.4).

Имеется ряд изложений теории Хаага — Рюэля на уровне учебника: в книге Йоста, указанной в замечаниях к § IX.8; в монографии Н. Н. Боголюбова, А. А. Логунова и И. Т. Тодорова «Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля» (М.: Наука, 1969); у К. Хеппа (K. Hepp, On the connection between Wightman and LSZ quantum field theory. In: Axiomatic field theory: Brandeis University, 1965 (M. Chrétien, S. Deser, eds.), pp. 135—246.— New York: Gordon and Breach, 1966). Подобно нашему, все эти изложения используют подход Рюэля.

Если в теореме XI.110 функция принадлежит классу C_0^∞, то $G(\alpha)$ убывает экспоненциально; см.: H. Araki, K. Hepp, D. Ruelle, On the asymptotic behavior of Wightman functions in space-like directions.— *Helv. Phys. Acta* **35** (1962), 164—174.

Лоренц-ковариантность теории рассеяния составляет один из результатов Рюэля и обсуждается подробнее в указанных выше изложениях типа учебника. Рюэль рассматривает также случай частиц и полей высших спинов. Важный момент его анализа заключается в том, что поля целого (соответственно полуцелого) спина порождают асимптотические поля также лишь целого (соответственно полуцелого) спина. Это имеет важное значение для физической интерпретации теоремы о спине и статистике. Хааг и Рюэль обсуждают также, что следует делать в случае нарушения свойства 10: тогда используются подходящие полиномы по полям. Переформулировка теории Хаага—Рюэля в терминах C^*-алгебр в квантовой теории поля дана в работе: R. Haag, H. Araki, Collision cross sections in terms of local observables.— *Commun. Math. Phys.* **4** (1967), 77—91.

Наша физическая интерпретация теоремы XI.109 как теории рассеяния опиралась на запись этой теоремы в терминах волновых операторов в двух гильбертовых пространствах (следствие 2). Однако равным образом можно было бы обосновать такую интерпретацию, переформулировав N-частичную нерелятивистскую квантовую теорию в виде теории поля и записав затем соответствующую теорию рассеяния в форме теоремы XI.109. Это было проделано Сандасом (W. Sandhas, Definition and existence of multichannel scattering states.— *Commun. Math. Phys.* **3** (1966), 358—374) и в лекциях Хеппа (как указывает Хепп, он частично следует неопубликованной работе В. Хунцикера). См. также задачу 142.

Следствие 1 теоремы XI.109 связано с одним общим результатом, который был получен в рамках алгебраического подхода к релятивистской квантовой теории, и утверждает аддитивность $\sigma(P_\mu)$: если $p_\mu, q_\mu \in \sigma(P_\mu)$, то и $p_\mu + q_\mu \in \sigma(P_\mu)$. Это было доказано Борхерсом (H. J. Borchers, Local rings and the connection of spin with statistics.— *Commun. Math. Phys.* **1** (1965), 281—307).

Если наложить на регулярные волновые пакеты $f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}$ условие неперекрывания скоростей (согласно которому для любых $p_i \in \operatorname{supp} \hat{f}^{(i)}$, $p_j \in \operatorname{supp} \hat{f}^{(j)}$ должно быть $p_i/\mu(p_i) \neq p_j/\mu(p_j)$), то $\|d\eta/dt\|$ убывает не только как $t^{-3/2}$, но и быстрее чем t^{-N} для любого N. Это позволяет развить теорию Хаага—Рюэля для случая пространства-времени двух и трех измерений, а также избежать теоремы XI.110. Эти соображения обсуждаются в лекциях Хеппа, а также в его работе: K. Hepp, On the connection between LSZ and Wightman quantum field theory.— *Commun. Math. Phys.* **1** (1965), 95—111.

Существует другое асимптотическое условие, основанное на доказательстве того, что *матричные элементы* релятивистского поля $\int A(x) f(x, s-t)\, d^3x\, ds$ при $t \to \mp\infty$ стремятся к матричным элементам сглаженных полей φ_{in} и φ_{out} (это нужно сопоставить с векторной сходимостью в теореме XI.109). Теория рассеяния, базирующаяся на таком допущении, была развита Леманом, Симанзиком и Циммерманом (H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmerman, Zur Formulierung quantisierter Feldtheorien.— *Nuovo Cimento* **1** (1955), 205—225; The formulation of quantized field theories, II.— *Nuovo Cimento* **6** (1957), 319). Эта «теория ЛСЦ» далее развивалась в работе: V. Glaser, H. Lehmann, W. Zimmerman, Field operators and retarded functions.— *Nuovo Cimento* **6** (1957), 1122—1128. В своих лекциях и в указанной выше статье Хепп доказывает, что в формализме Хаага—Рюэля для полей с соответствующим сглаживанием матричные элементы между состояниями $\eta_{\text{in}}(f_1, \ldots, f_n)$, где функции f_i имеют неперекрывающиеся скорости, сходятся при $t \to -\infty$ к таким же матричным элементам поля φ_{in}. Первый по-настоящему важный результат, к которому привел формализм ЛСЦ,— явная формула для S-матрицы в терминах функций Вайтмана. Эти редукционные формулы были доказаны в работе Хеппа для неперекрывающихся скоростей. Их получение есть первый шаг на пути исследования аналитических свойств амплитуд рассеяния в аксиоматической теории поля. Некоторые аспекты такого исследования, а также многочисленные ссылки на литературу содержит книга Мартена: A. Martin, Scattering Theory: Unitarity, Analyticity and Crossing. Lecture Notes in Physics 3.— New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1969.

Асимптотическую полноту до сих пор не удалось проверить ни в одной из известных моделей взаимодействующих вайтмановых полей. В отдельных случаях нарушение асимптотической полноты возможно за счет того, что в рассмотрение не включено достаточное множество полей. Можно привести следующий искусственный пример. Допустим, что удалось построить квантовую электродинамику со взаимодействием и с асимптотической полнотой, а ее сузили до теории электромагнитного поля в порождаемом им циклическом подпространстве. Такая теория не будет асимптотически полной, поскольку в ее гильбертовом пространстве присутствуют двухчастичные электрон-позитронные состояния, но не присутствуют соответствующие одночастичные состояния, которые, будучи заряженными, не могут быть связаны с вакуумом посредством электромагнитного поля. Многое свидетельствует о том, что подобное явление происходит в некоторых двумерных моделях самодействующих бозонных полей: как полагают, в таких моделях некоторые двухчастичные состояния (солитон-антисолитонные пары) связаны с вакуумом посредством бозонного поля, хотя для соответствующих одночастичных состояний это не так. См. работы: J. Fröhlich, New super-selection sectors («soliton states») in two dimensional Bose quantum field models.— *Commun. Math. Phys.* 47 (1976), 269—310; Phase transitions. Goldstone bosons and topological superselection rules, Part II.— *Acta Phys. Austr. Suppl.* XV (1976), 133—269; Quantum theory of non-linear invariant wave (field) equations. Or: Super selection sectors in constructive quantum field theory. In: Invariant Wave Equations (G. Velo, A. S. Wightman, eds.).— Springer Physics Lecture Notes 73, 1978; J. Bellissard, J. Fröhlich, B. Gidas, Soliton mass and surface tension in the $\lambda(|\varphi^4|)_2$ quantum field models.— *Commun. Math. Phys.* **60** (1978), 37—72.

Значительный прогресс был достигнут в исследовании $P(\varphi)_2$-теорий со слабой связью в области энергий, где отсутствуют трехчастичные состояния. Для этой области энергий было получено и доказательство «асимптотической полноты». Укажем основные работы: T. Spencer, The decay of the Bethe — Salpeter kernel in $P(\varphi)_2$ quantum field models.— *Commun. Math. Phys.* **44** (1975), 143—164; T. Spencer, F. Zirilli, Scattering states and bound states in $\lambda P(\varphi)_2$.— *Commun. Math. Phys.* 49 (1975), 1—16. О дальнейшем развитии см. работы: J. Glimm, A. Jaffe, Two and three body equations in quantum field models.— *Commun. Math. Phys.* 44 (1975), 293—320; J. Dimock, J.-P. Eckmann, On the bound state in weakly coupled $\lambda(\varphi^6-\varphi^4)_2$.— *Commun. Math. Phys.* **51** (1976), 41—54; Spectral properties and bound state scattering for weakly coupled $\lambda P(\varphi)_2$ models.— *Ann. Phys.* **103** (1977), 289—314.

Объекты, подобные УВС, существует в теории вероятностей, где они называются кумулянтами высших порядков, и в статистической механике, где они называются функциями Урселла. Элегантную «аксиоматическую» характеризацию функций Урселла и теорию, возникающую на ее основе, можно найти в работе: J. Percus, Correlation inequalities for Ising spin lattices.— *Commun. Math. Phys.* **40** (1975), 283—308. К существенным результатам, касающимся УВС, принадлежат формула инверсии (задача 143), отношение к свойствам связности диаграммных разложений (задача 144) и следующая формула, принадлежащая П. Картье (неопубликовано); см. также указанную выше статью Перкуса и работу: G. Sylvester, Representations and inequalities for Ising model Ursell functions.— *Commun. Math. Phys.* **42** (1975), 209—220 [Перевод в сб.:

Гиббсовские состояния в статистической физике.— М.: Мир. 1978, с. 69—88.]:

$$(\psi_0, \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\psi_0)_T = \frac{1}{n}(\Psi_0, \Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\Psi_0), \tag{349a}$$

$$\Phi(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \omega^j \varphi_j(x_j). \tag{349b}$$

Здесь ω есть n-й примитивный корень из единицы (т. е. $\omega^n = 1$, $\omega^j \neq 1$, $j = 1, \ldots, n-1$), а $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — независимые копии φ; иначе говоря, мы берем $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}$ (n раз), $\Psi_0 = \psi_0 \otimes \ldots \otimes \psi_0$ и

$$\varphi_j(x) = 1 \otimes \ldots \otimes \varphi(x) \otimes \ldots \otimes 1 \quad \text{(множитель } \varphi \text{ на } j\text{-м месте).}$$

Теория рассеяния для безмассовых частиц в рамках аксиоматического алгебраического формализма была развита в двух замечательных работах Бухгольца: D. Buchholz, Collision theory for massless fermions.— *Commun. Math. Phys.* **42** (1975), 269—279; Collision theory for massless bosons.— *Commun. Math. Phys.* **52** (1977), 147—173. Хотя Бухгольц и пользуется отдельными элементами теории Хаага — Рюэля, но УВС теперь не являются обобщенными функциями умеренного роста, так что требуются существенно новые идеи. Ключевой оказывается идея воспользоваться тем, что решения волнового уравнения подчиняются принципу Гюйгенса. По этой причине, если мы можем установить существование предела $A_f(t)\Omega_0$ (предполагается, что этот объект определен каким-либо подходящим образом и, вообще говоря, зависит от времени, поскольку одночастичные состояния с нулевой массой невозможно выделить из континуума), то мы можем доказать и существование предела $A_f(t)F\Omega_0$ для любого оператора F, получаемого из полей, сглаженных с основными функциями, имеющими носитель в определенных множествах (грубо говоря, это будет «дырка», получаемая исключением объединения границ световых конусов, вершины которых лежат в $\operatorname{supp} f(x, t=0)$). Таким путем доказывается существование предела $A_f(t)\psi$ на плотном множестве векторов ψ.

Нужно подчеркнуть, что при наличии безмассовых частиц неизвестно, как строить состояния рассеяния для *массивных* частиц. В самом деле, неясно, каким образом «отделить» массивную частицу от безмассовых,— возможно, что в теории фотонов и электронов спектр масс не содержит дискретного собственного значения, отвечающего отдельному электрону, но в силу какого-то механизма электроны всегда встречаются лишь в сопровождении бесконечного числа фотонов малой энергии. Эта проблема, отнюдь еще не понятая до конца, называется **инфракрасной проблемой**. Громадная литература по этой теме начинается с работ: F. Bloch, A. Nordsieck, A note on the radiation field of the electron.— *Phys. Rev.* **52** (1937), 54—59; D. Yennie, S. Frautschi, H. Suura, The infrared divergence phenomena and high-energy processes.— *Ann. Phys.* **13** (1961), 379—452. Обсуждение более новых работ см. у Фрёлиха: J. Fröhlich, On the infrared problem in a model of scalar electrons and massless, scalar bosons.— *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A* **19** (1973), 1—103. Следует упомянуть, что аналогичное явление возможно и для безмассовых частиц, и в этом случае теория Бухгольца окажется неприменимой, поскольку она предполагает существование состояний с $H^2 - \mathbf{P}^2 = 0$ ($H \neq 0$).

§ XI.47. В этом разделе наше изложение следует в первую очередь прекрасной работе Энсса (V. Enss, Asymptotic completeness for quantum mechanical potential scattering.— *Commun. Math. Phys.* **61** (1978), 285—291). Отдельные технические приемы заимствованы из работы: B. Simon, Phase space analysis of simple scattering systems: Extensions of some work of V. Enss.— *Duke Math. J.* **46** (1979), 119—168. Эта последняя работа обобщает теорию таким образом, что H_0 можно заменять весьма разнообразными дифференциальными и псевдодифференциальными операторами, включая гамильтонианы Дирака. Энсс распростра-

нил метод на кулоново рассеяние и наметил программу (которую он в настоящее время выполняет) исследования многочастичного рассеяния.

Теорема Винера (теорема XI.114) получена Н. Винером в его книге «Интеграл Фурье и некоторые его приложения» (Пер. с англ.— М.: Физматгиз, 1963). Следствия этой теоремы (в том числе следствие теоремы XI.115) много лет применялись в эргодической теории; см. особенно § 8 книги: K. Jacobs, Lecture Notes on Ergodic Theory.— Aarhus Lecture Note Series 1 (1962/63).

Важность теоремы Винера для получения геометрической характеризации непрерывного спектра в задаче рассеяния была независимо обнаружена Лаксом—Филипсом—де Лиувом (см. стр. 145 книги Лакса и Филлипса, указанной в замечаниях к § 11) и Рюэлем (D. Ruelle, A remark on bound states in potential scattering theory.— *Nuovo Cimento A* **61** (1969), 655—662). Лакс и Филлипс применяют теорему Винера для прямого доказательства следствия теоремы XI.115, а затем с его помощью устанавливают формулу (219). Рюэль же доказал, что для широкого класса операторов Шредингера включая многочастичные при любом R предельное соотношение

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|F(|x|\leqslant R)\,e^{-itH}\varphi\|^2\,dt\to 0$$

при $T\longrightarrow\infty$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi\in P_{\rm cont}(H)$. Амрейн и Георгеску (W. Amrein, V. Georgescu, Bound states and scattering states in quantum mechanics.— *Helv. Phys. Acta* **46** (1973), 633—658) обобщили результаты Рюэля и, в частности, показали, что критическим фактором является компактность оператора $F(|x|\leqslant R)(H+i)^{-1}$ (в анализе Рюэля это оставалось скрытым). Никто из этих авторов не заметил равномерности по φ (с помощью теоремы Винера можно непосредственно показать, что $(\psi,\ e^{-itA}\varphi)$ стремится к нулю в L^2 в среднем, если ψ лежит в $\mathcal{H}_{\rm cont}$); это утверждение о равномерности содержалось в неопубликованном замечании Энсса.

Последняя теорема в дополнении также принадлежит В. Энссу.

ЗАМЕЧАНИЯ О ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ НА ЯЗЫКЕ C^*-АЛГЕБР

Существует простое обобщение идей теории рассеяния, приспособленное к аппарату C^*-алгебр. В настоящих замечаниях мы обсудим наиболее интересные аспекты этих идей, свободно используя понятия теории C^*-алгебр. Это наше обсуждение следует дополнить явными примерами, которые содержатся в приводимых ниже ссылках.

Прежде всего рассмотрим связь между теорией рассеяния и процессом приближения к равновесию в статистической механике. Для начала предположим, что H_0—самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и V лежит в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Определим на $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ естественные автоморфизмы $\alpha_t^{(0)}(A)=e^{iH_0t}Ae^{-iH_0t}$ и $\alpha_t(A)=e^{iHt}Ae^{-iHt}$, где $H=H_0+V$. Положим $\beta_t=\alpha_t\alpha_{-t}^{(0)}$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\beta_t(A)=i\beta_t\left(\alpha_t^{(0)}\left[V,\ \alpha_{-t}^{(0)}(A)\right]\right)=i\beta_t\left(\left[\alpha_t^{(0)}(V),\ A\right]\right),$$

или

$$\beta_t(A)=A+i\int_0^t\beta_s\left[\alpha_s^{(0)}(V),\ A\right]ds. \tag{350}$$

Уравнение (350) решается итерациями:

$$\beta_t(A)=A+\sum \beta_t^{(n)}(A), \tag{351}$$

где

$$\beta_t^{(n)}(A)=(i)^n\int_0^t\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\dots\int_0^{s_{n-1}}\left[\alpha_{s_n}^{(0)}(V),\ \left[\alpha_{s_{n-1}}^{(0)}(V),\ \dots\left[\alpha_{s_1}^{(0)}(V),\ A\right]\dots\right]\right]ds_n\dots\ .$$

Простая оценка показывает, что $\|\beta_t^{(n)}(A)\|\leqslant 2^n(t^n/n!)\|V\|^n\|A\|$, и, следовательно, ряд (351) сходится к решению уравнения (350). Эквивалентно,

$$\alpha_t(A)=\alpha_t^{(0)}(A)+\sum_{n=1}^{\infty}(i)^n\int\limits_{0\leqslant s_n\leqslant\dots\leqslant s_1\leqslant t}\left[\alpha_{s_n}^{(0)}(V),\right.$$
$$\left.\left[\dots\left[\alpha_{s_1}^{(0)}(V),\ \alpha_t^{(0)}(A)\right]\dots\right]\right]ds_1\dots ds_n. \tag{352}$$

Формула (352), выражающая α_t только через $\alpha_t^{(0)}$ и V, служит исходным соотношением для общей теории возмущений автоморфизмов C^*-алгебр. Действительно, допустим, что $\alpha_t^{(0)}$ есть непрерывная по норме однопараметрическая группа автоморфизмов C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ и $V\in\mathfrak{A}$. Тогда выражение, заданное формулой (352), сходится к непрерывной по норме однопараметрической группе автоморфизмов, которую мы и обозначим α_t. Теперь достаточно легко (см. задачу 147) может быть доказана следующая теорема.

Теорема XI.117. Пусть π — представление C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и $\alpha_t^{(0)}$, α_t определены, как указано выше. Допустим, что существует однопараметрическая сильно непрерывная унитарная группа U_t на $\mathscr{H}$, такая, что

$$\pi\left(\alpha_t^{(0)}(A)\right)=U_t\pi(A)U_{-t}. \tag{353a}$$

Пусть H_0 — инфинитезимальный генератор U_t и, по определению, $W_t=e^{i(H_0+\pi(V))t}$. Тогда

$$\pi(\alpha_t(A))=W_t\pi(A)W_{-t}. \tag{353b}$$

Обратно, если для некоторого W_t имеет место (353b), то имеет место и (353a) для некоторого U_t.

Мы видим, таким образом, что автоморфизмы $\alpha_t^{(0)}$ и α_t унитарно реализуемы всегда в одних и тех же представлениях.

Если попытаться установить способ стремления к пределу $\lim\limits_{t\to\mp\infty}\alpha_{-t}\alpha_t^{(0)}(A)$, то (352) в сочетании с методом Кука (см. § 3) дает нам немедленно следующий результат.

Теорема XI.118. Допустим, что для плотного подпространства $\mathfrak{A}_0\subset\mathfrak{A}$ и всех $A\in\mathfrak{A}_0$

$$\|[\alpha_{(\cdot)}^{0}(V),\ A]\|\in L^1(\cdot). \tag{354}$$

Тогда $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\alpha_{-t}\alpha_t^0(A)$ существует для любого $A\in\mathfrak{A}$ и $w\pm=\text{s-}\lim\limits_{t\to\mp\infty}\alpha_{-t}\alpha_t^{(0)}$ суть инъективные морфизмы $\mathfrak{A}$, удовлетворяющие условию

$$w^{\pm}(\alpha_s^{(0)}(A))=\alpha_s(w^{\pm}(A)). \tag{355}$$

Д. Робинсон обнаружил весьма красивую взаимосвязь между теоремой XI.118 и приближением к равновесию в квантовых газах на решетке. Пусть $\alpha_t^{(0)}$ — трансляции по времени в решетчатом газе и V — локальная наблюдаемая. Тогда для любой локальной наблюдаемой A можно ожидать (а в некоторых моделях и доказать!) условие (354), поскольку $\alpha_t^{(0)}(V)$ при $t\to\pm\infty$ «расплывается» по все большей и большей области. Пусть φ — инвариантное состояние для α_t, т.е. для локально возмущенной динамики. Тогда $\varphi(\alpha_t^{(0)}(\cdot))=\varphi(\alpha_{-t}\alpha_t^{(0)}(\cdot))\to$ $\to\varphi(w^{\pm}(\cdot))$ и, в силу (355), $\varphi(w^{\pm}(\cdot))$ суть инвариантные состояния для $\alpha_t^{(0)}$. Таким образом, если движение φ соответствует свободной динамике, это состояние стремится к инвариантному состоянию для $\alpha_t^{(0)}$. Кроме того, при некоторых дополнительных предположениях, если φ есть состояние КМШ для α_t при температуре T, то $\varphi(w^{\pm}(\cdot))$ суть состояния КМШ для $\alpha_t^{(0)}$ при температуре T.

Этот пример теории рассеяния в терминах C^*-алгебр и ее связей со статистической механикой описан в работе: D. Robinson, Return to equilibrium. — *Commun. Math. Phys.* **31** (1973), 171—189. В этой работе можно найти подробности, касающиеся приведенных нами теорем, а также явные вычисления для некоторых моделей. Отдельные аспекты развитого Робинсоном алгебраического подхода к теории рассеяния уже имелись в работе Стритера: R. F. Streater, On certain non-relativistic quantized fields.—*Commun. Math. Phys.* 7 (1968), 93—98, а также в работе Хеппа: K. Hepp, Rigorous results on the s-d model of the Kondo effect.—*Solid State Comm.* 8 (1970), 2087—2090. Дополнительное обсуждение приближения к равновесию в статистической механике (не связанное с теорией рассеяния) содержится в работах: C. Radin, Gentle perturbations.—*Commun. Math. Phys.* **23** (1971), 189—198; O. Lanford, III, D. Robinson, Approach to equilibrium of free quantum systems.—*Commun. Math. Phys.* **24** (1972), 193—210.

Во многих случаях условие (354) оказывается слишком сильным и $\alpha_{-t}\alpha_t^{(0)}$ сходится лишь в слабом смысле, а не по норме. В таких случаях естественнее считать, что $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана. Подобный подход используется в некоторых исследованиях потенциального рассеяния с дальнодействием. Пусть $H_0=-\Delta$ задан в $L^2(\mathbb{R}^n)$ и $\mathfrak{A}=\{H_0\}'$ — семейство операторов, коммутирующих с ограниченными функциями H_0. Пусть V — дальнодействующий потенциал, такой, что для него существуют модифицированные волновые операторы. Пусть, наконец, $\alpha_t(A)=e^{iHt}Ae^{-iHt}$ (возможно, эта величина лежит не в $\mathfrak{A}$, но лишь в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$). Тогда

$$\operatorname*{w-lim}_{t\to\mp\infty}\alpha_t(A)=\operatorname*{w-lim}_{t\to\mp\infty}e^{iHt}U_D(-t)\,AU_D(t)\,e^{-iHt}=\Omega_D^{\pm}A\,(\Omega_D^{\pm})^*.$$

Ссылки на литературу по алгебраическому подходу к рассеянию с дальнодействием даны в замечаниях к § 9.

Описание рассеяния в терминах автоморфизмов играет роль и при изучении спектральных свойств гамильтонианов в некоторых моделях квантовой теории поля с обрезанием. Мы обрисуем соответствующие общие идеи на примере обрезанной $P(\varphi)_2$-теории поля. Пусть $a_t^*(f)=e^{iHt}e^{-iH_0t}a^*(f)\,e^{iH_0t}e^{-iHt}$. Формально

$$\frac{d}{dt}a_t^{\#}(f)=ie^{iHt}\left[V,\,e^{-iH_0t}a^{\#}(f)\,e^{iH_0t}\right]e^{-iHt}.$$

Эта формула, метод Кука и некоторые оценки Л. Розена (L. Rosen, The $(\varphi^{2n})_2$ quantum field theory: Higher order estimates. — *Comm. Pure Appl. Math.* 24 (1971), 417—457) позволяют доказать, что $\lim\limits_{t\to\mp\infty}a_t^{\#}(f)\psi$ существуют для семейства функций f, плотного в одночастичном пространстве, и для семейства векторов ψ, плотного в пространстве Фока. Можно проверить, что получаемые в пределе операторы $a^{\#}_{\pm}(f)$ имеют три важных дополнительных свойства: (1) $[a^{\dagger}_{\pm}(f), a_{\pm}(g)] = -(Cf, g)$; анализ предельного перехода показывает, что алгебраические соотношения сохраняются. (2) Поскольку e^{-iH_0t} имеет специальный вид $e^{iH_0t} = \Gamma(e^{i\omega t})$ для одночастичного оператора ω, то соотношения переплетения принимают вид $e^{iHt}a^{\#}_{\pm}(f)e^{-iHt} = a^{\#}_{\pm}(e^{i\omega t}f)$. (3) Если ψ—собственный вектор H, то $a_{\pm}(f)\psi = 0$ для всех f. Это вытекает из оценок Розена и того факта, что $\operatorname{s-lim}_{t \to \pm\infty} a(e^{i\omega t}f) N^{-1/2} = 0$. Опираясь на свойства (1) и (3), для любого собственного вектора ψ оператора H можно построить такое подпространство $\mathscr{H}_\psi \subset \mathscr{H}$ и такое фоковское представление операторов $a^{\#}_{\pm}(f)$, что ψ будет вакуумом. Так как известно, что существует вектор, для которого $H\psi = E_0\psi$ (см. § XIII.12), то из приведенной конструкции вместе со свойством (2) вытекает, что $H \restriction \mathscr{H}_\psi$ унитарно эквивалентен $H_0 + E_0$, а отсюда следует, что $[m_0 + E_0, \infty) \subset \sigma_{ac}(H)$.

Идея применить теорию рассеяния для изучения квантовополевых гамильтонианов путем построения асимптотических операторов рождения и уничтожения $a^{\#}_{\pm}$ впервые была высказана в работе: Y. Kato, M. Mugibayashi, Regular perturbations and asymptotic limits of operators in quantum field theory.— *Progr. Theor. Phys.* **30** (1963), 103—133, и далее разработана в серии статей Р. Хег-Крона: R. Höegh-Krohn, Asymptotic limits in some models of quantum field theory, I, II, III.—*J. Math. Phys.* **9** (1968), 2075—2080; **10** (1969), 639—643; **11** (1970), 185—188; On the scattering operator for quantum fields.—*Commun. Math. Phys.* **18**(1970), 109—126. К изучению спектральных свойств $P(\varphi)_2$-гамильтонианов с пространственным обрезанием (см. § X.7 и X.9) эта теория применялась в работах: R. Höegh-Krohn, On the spectrum of the space cutoff: $P(\varphi)$: Hamiltonian in two space-time dimensions.—*Commun. Math. Phys.* **21** (1971), 256—260; Y. Kato, N. Mugibayashi, Asymptotic fields in the $\lambda(\varphi^4)_2$ quantum field theory.—*Progr. Theor. Phys.* **45** (1971), 628—639, а к модели Y_2—в работе: J. Dimock, Spectrum of local Hamiltonians in the Yukawa$_2$ field theory.—*J. Math. Phys.* **13** (1972), 477—481. Как в том, так и в другом случае доказано, что $[m_0 + E_0, \infty) \subset \sigma_{ac}(H)$, где $E_0 = \inf \sigma(H)$ и m_0—свободная масса в H_0. Поскольку из результатов Глимма и Джаффе (J. Glimm, A. Jaffe, The $\lambda(\varphi^4)_2$ quantum field theory without cutoffs. II: The field operators and the approximate vacuum.—*Ann. of Math.* **91** (1970), 362—401 (для $(\varphi^4)_2$); Self-adjointness of the Yukawa$_2$ Hamiltonian.—*Ann. Phys.* **60** (1970), 321—383 (в случае Y_2)), а также Розена (L. Rosen, A $\lambda\varphi^{2n}$ field theory with cutoffs.—*Commun. Math. Phys.* **16** (1970), 157—183, в случае $P(\varphi)_2$) известно, что $\sigma_{ess}(H) \subset [m_0 + E_0, \infty)$, то можно сделать вывод, что в этих моделях $\sigma_{ac}(H) = \sigma_{ess}(H) = [m_0 + E_0, \infty)$. Отметим еще, что методы Хег-Крона и Като—Мугибаяси применимы лишь к тем моделям, в которых не происходит перенормировки гильбертова пространства. Чтобы получить реалистические полевые теории следует вернуться к подходу Хаага—Рюэля, о котором говорилось в § 16.

ЗАДАЧИ

†*1*. Докажите, что при предположениях (3) (см. § XI.2) для любого $\langle r_0, v_0 \rangle \in \mathbb{R}^6$ и при любом времени существует решение уравнения (2). [*Указание*. Воспользуйтесь сведениями из дополнения к § X.1, где обсуждается классическое движение на вещественной прямой.]

2. Докажите, что если (4a) выполнено, а (4b), вообще говоря, нет, то отображение, построенное в доказательстве теоремы XI.1, имеет по крайней мере одну неподвижную точку.

3. Найдите пример силы F, для которой выполнено (4a) и нарушено (4b), а отображение в теореме XI.1 имеет более чем одну неподвижную точку, т. е. состояния рассеяния существуют, но не определены однозначно.

Литература к задачам 2, 3: работа Саймона, указанная в замечаниях к § XI.2.

†*4.* Докажите, что если F удовлетворяет условиям (4), то интегральное уравнение (6) эквивалентно дифференциальному уравнению (2a) с граничными условиями (5).

†*5.* Пусть $\mathcal{M}$ — полное метрическое пространство и $c < 1$.

(a) Пусть $\{F_n\}$, F_∞ — семейство отображений пространства $\mathcal{M}$, таких, что $\rho(F_n x, F_n y) \leqslant c\rho(x, y)$ для всех n и всех x, $y \in \mathcal{M}$. Предположим, что $F_\infty x = \lim\limits_{n \to \infty} F_n x$ для всех x и, кроме того, $F_n x = x_n$, $F_\infty x_\infty = x_\infty$. Докажите, что $x_n \longrightarrow x_\infty$.

(b) Пусть F: $\mathbb{R} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ — непрерывное отображение, такое, что $\rho(F(t, x), F(t, y)) \leqslant c\rho(x, y)$, где $c < 1$. Предположим, что $\mathcal{M}$ есть подмножество банахова пространства и $F(t, x)$ как отображение из $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ в $\mathcal{M}$ принадлежит C^∞ по совокупности переменных x и t (т. е. дифференцируемо в смысле Фреше). Определим $g(t) \in \mathcal{M}$ соотношением $F(t, g(t)) = g(t)$. Докажите, что $g(t)$ есть векторнозначная C^∞-функция.

†*6.* Завершите доказательство теоремы XI.2a.

†*7.* Докажите, что в предположениях теоремы XI.2 отображение $\mathcal{F}_{a, b}^{(-\infty)}$: $\Sigma_0 \times \mathcal{M}_T \longrightarrow \mathcal{M}_T$ удовлетворяет всем условиям задачи 5b с очевидным видоизменением, которое требуется при замене $\mathbb{R}$ подмножеством $\mathbb{R}^6$.

**8.* Сформулируйте теорию рассеяния для n-частичной классической системы в канале рассеяния, где все частицы асимптотически свободны. Рассмотрите проблемы, возникающие при попытке обобщения теории рассеяния на случай со связанными состояниями.

9. Найдите центральную силу и решение уравнение Ньютона в поле этой силы, для которых $\lim\limits_{t \to -\infty} |r(t)| = \infty$, $\lim\limits_{t \to +\infty} |r(t)| = r_0 < \infty$.

†*10.* Докажите, что множества Σ_{bound}, Σ_0, $N_\pm$, $N_\pm^{(n)}$, Σ', введенные при доказательстве теоремы XII.3, все измеримы.

11. Докажите формулы (7a) и (7b) для функций $\theta(E, l)$ и $T(E, l)$ в поле центральной силы.

Литература: книга Ньютона, указанная в замечаниях к § 2.

12. Проверьте формулу для $d\sigma/d\Omega$ в центральном случае.

13. Проанализируйте следующее утверждение: в классической механике полные сечения, как правило, бесконечны.

14. В контексте теоремы XI.3, но при дополнительном предположении, что $V(\mathbf{r})$ централен, найдите другое доказательство следующего факта: если $E > 0$ и $\overline{\lim\limits_{t \to \infty}} |r(t)| = \infty$, то $\lim\limits_{t \to \infty} |r(t)| t^{-1} > 0$. [*Указание.* Воспользуйтесь законами сохранения энергии и углового момента.]

15. (a) Пусть A — самосопряженный оператор. Докажите, что $e^{i(A-\lambda)t}\varphi$ при $t \longrightarrow \infty$ сходится по норме в том случае, если φ — собственный вектор A, отвечающий собственному значению λ. [*Указание*. Вычислите слабый предел величины $T^{-1}\int_0^T e^{i(A-\lambda)t}\varphi dt$.]

(b) Пусть A и B — самосопряженные операторы. Докажите, что $e^{iAt}e^{-iBt}$ сходится при $t \to \pm\infty$ по операторной норме в том и только том случае, если $A = B$.

16. Пусть H_0 — фиксированный оператор, V_n и V_∞ суть H_0-ограниченные операторы с относительной гранью $a < 1$, так что $H_0+V_n \to H_0+V_\infty$ в сильном резольвентном смысле. Допустим, что существует плотное множество $D \subset P_{ac}(H_0)$, такое, что $\sup\limits_{n \leqslant \infty} \| V_n e^{-itH_0} u \| \equiv f_u(t)$ принадлежит $L_1(\mathbb{R})$ для $u \in D$. Докажите, что $\Omega^\pm(H_0+V_n, H_0)$ сильно сходится к $\Omega^\pm(H_0+V_\infty, H_0)$. [*Указание*. Покажите сначала, что $\Omega^+(H_0+V_n, H_0)u$ $= u + i\int_0^\infty e^{i(H_0+V_n)t} V_n e^{-itH_0} u \, dt$, и затем воспользуйтесь теоремой о мажорированной сходимости.]

Литература: работа Девиса, указанная в замечаниях к § 4.

†*17*. (a) Покажите, что $|||\cdot|||$ есть норма на $\mathcal{M}(B)$. Полно ли $\mathcal{M}(B)$ по этой норме? [*Указание*. Используйте (16).]

(b) Покажите, что $\mathcal{M}(B)$ плотно в $P_{ac}(B)$ в смысле обычной нормы.

18. Пусть C — ограниченный оператор, A — самосопряженный и для некоторого n оператор $C(A+i)^{-n}$ компактен. Докажите, что $Ce^{-iAt}P_{ac}(A) \to 0$ в сильном смысле при $t \to \pm\infty$. Докажите это же в случае, когда $CE_I(A)$ компактен для всех ограниченных интервалов I.

19. Докажите теорему XI.5 следующим способом: сначала покажите, что существует предел s-lim $e^{iAt}(1-\chi)e^{-iBt}$, а затем с помощью задачи 18 покажите, что s-lim $\chi e^{-iBt} = 0$.

20. Пусть A и B — самосопряженные операторы и $Q(A) = Q(B)$. Пусть φ, $\psi \in Q(A)$. Докажите, что функция $(\varphi, e^{iAt}e^{-iBt}\psi)$ дифференцируема, причем ее производная равна $i(\varphi, e^{iAt}(A-B)e^{-iBt}\psi)$, и проверьте формулу (15).

†*21*. Восполните в доказательстве теоремы Пирсона (теорема XI.7) все детали, относящиеся к областям определения операторов.

22. Постройте операторы A_n и A, такие, что $\| A_n - A \|_1 \to 0$, A_n имеет только абсолютно непрерывный спектр [0, 1] и A имеет абсолютно непрерывный спектр и собственное значение $\lambda = 0$. Выведите отсюда, что $\Omega^\pm(A, A_n)$ не может сильно сходиться к $\Omega^\pm(A, A)$.

23. Пусть $(A_n+i)^{-1} \to (A+i)^{-1}$ по норме операторов со следом. Пусть $J_n = (A_n+i)^{-1}(A+i)^{-1}$ и $J = (A+i)^{-2}$. Докажите, что $\Omega^\pm(A_n, A; J_n) \to$ $\to \Omega^\pm(A, A; J)$ в сильном смысле, и выведите отсюда, что $\Omega^\pm(A_n, A) \to$

$\longrightarrow P_{ac}(A)$. [*Указание.* Воспользуйтесь соотношением

$$\Omega^{\pm}(A_n, A; J_n)(A+i)^2 = \Omega^{\pm}(A_n, A).$$

Докажите, что $\Omega^{\pm}(A, A_n) P_{ac}(A) \longrightarrow P_{ac}(A)$ в сильном смысле.]

24. Предположим, что $E_I(A_n)(A_n - A)E_I(A)$ стремится к нулю по норме операторов со следом для каждого ограниченного интервала I. Предположим, кроме того, что A_n равномерно подчинены A, т. е. функции, входящие в определение подчиненности, могут быть выбраны не зависящими от n. Докажите, что $\Omega^{\pm}(A_n, A) \longrightarrow P_{ac}(A)$ и $\Omega^{\pm}(A, A_n) P_{ac}(A) \longrightarrow P_{ac}(A)$ в сильном смысле.

25. Пусть A и B — самосопряженные операторы, такие, что $(A-z)^{-n} - (B-z)^{-n}$ — оператор со следом при всех $\operatorname{Im} z \neq 0$.

(a) Докажите, что оператор $(A+i)^{-k} - (B+i)^{-k}$ компактен при любом целом $k > n$. [*Указание.* Вычислите производные с помощью интегральной формулы Коши.]

(b) Пусть $J = \sum_{j=1}^{n} (A+i)^{-j}(B+i)^{-n+j-1}$. С помощью теоремы Пирсона докажите, что $\Omega^{\pm}(A, B; J)$ существуют.

(c) Пусть $J' = (A+i)^{-n+1} J$. Докажите, что $\Omega^{\pm}(A, B; J')$ существуют.

(d) Пусть $J'' = (B+i)^{-2n} J$. Докажите, что $\Omega^{\pm}(A, B; J'')$ существуют и равны $n\Omega^{\pm}(A, B; J')$. [*Указание.* Используйте (a).]

(e) Докажите существование и полноту $\Omega^{\pm}(A, B)$.

†*26.* Докажите часть (a) леммы 3, используемой в теории Като—Бирмана.

27. Пусть A и B — самосопряженные операторы. Докажите, что $(A-z)^{-1} - (B-z)^{-1}$ есть оператор со следом для некоторого $z \in \rho(A) \cap \rho(B)$ в том и только том случае, если он есть оператор со следом для всех $z \in \rho(A) \cap \rho(B)$.

28. Пусть $A_n \longrightarrow A$ по норме операторов со следом и φ — допустимая функция. Докажите, что $\Omega^{\pm}(\varphi(A_n), \varphi(A)) \longrightarrow P_{ac}(A)$ и при $n \longrightarrow \infty$. $\Omega^{\pm}(\varphi(A), \varphi(A_n)) P_{ac}(A) \longrightarrow P_{ac}(A)$ в сильном смысле.

29. (a) Пусть $F(z) = (A+E)^{-z-1/2} C (B+E)^{-k(1-z)-1/2}$, и предположим, что $F(0)$ и $F(1)$ — операторы со следом. Докажите, что $F(z)$ есть оператор со следом для всех z с $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$. [*Указание.* Примените лемму о трех прямых к $\operatorname{Tr}(F(z)K)$ для K конечного ранга.]

(b) Докажите (36).

30. Докажите предложение 5 из § 3.

31. (a) Пусть $A = -d^2/dx^2$ задан на $L^2(0, \infty)$ с граничными условиями $u(0) = 0$. Пусть $B = A + V$ определен как сумма квадратичных форм для положительного $V \in L^1_{\mathrm{loc}}(0, \infty)$ (V при $r = 0$ может иметь сколь угодно плохой рост) с $\operatorname{supp} V \subset [0, 1]$. Пусть $\tilde{A} = -d^2/dx^2$ задан на $L^2(0, 1) \oplus L^2(1, \infty)$ с граничными условиями $u(0) = u(1) = 0$ для первого слагаемого и $u(1) = 0$ для второго. Пусть $\tilde{B} = \tilde{A} + V$. Докажите, что $(\tilde{A}+1)^{-1} - (A+1)^{-1}$ и $(\tilde{B}+1)^{-1} - (B+1)^{-1}$ суть операторы со следом. [*Указание.* Эти операторы — конечного ранга.]

(b) Пусть $\tilde{A} = A_1 \oplus A_2$. Докажите, что $(A_1+1)^{-1}$ и $(B_1+1)^{-1}$ — операторы со следом, и выведите отсюда, что $(\tilde{A}+1)^{-1} - (\tilde{B}+1)^{-1}$ есть оператор со следом.

(c) Докажите, что $(A+1)^{-1}-(B+1)^{-1}$ есть оператор со следом.
*(d) Обобщите эти рассуждения на n-мерный случай. [*Указание*. См. работу Дейфта и Саймона, указанную в замечаниях к § 4.]

32. (a) Пусть оператор A в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ самосопряжен на $D(A)$, однако $D(A)$ не плотна. Определим e^{iAt} и $(A+i)^{-1}$ на $\mathscr{H}$, положив их равными нулю на $D(A)^{\perp}$. Сбобщите на этот случай теорему Куроды—Бирмана.
(b) Пусть $B=-\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, A — оператор в $L^2(\mathbb{R}^n \setminus \{x \mid |x| < 1\})$ с граничными условиями Дирихле на сфере. Докажите, что здесь применима теорема Куроды—Бирмана в обобщенной форме (a) с заменой $(A+i)^{-1}$ на $(A+i)^{-n}$. Применима ли здесь теорема Бирмана?
(c) С помощью этих идей рассмотрите рассеяние на препятствии (§ 10), не используя приема введения динамики во внутренней области.

*†*33.* (a) Докажите теорему XI.19(a), используя конечность скорости распространения.
(b) Пусть $\varphi(x, t)$ — решение волнового уравнения с начальными данными из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $x=\langle x_1, 0, \ldots, 0\rangle$ с $x_1>0$. Докажите, что $\varphi(x, t) = \varphi_+(x, t)+\varphi_-(x, t)$, где

$$\varphi_\pm(x, t)=\int_{S^{n-1}} d\Omega \int_0^\infty \alpha^{n-2} e^{i\alpha(\pm t+x_1\cos\theta)} f_\pm(\alpha, \Omega)\, d\alpha$$

и функции $f_\pm$ гладки на $(0, \infty)\times S^{n-1}$ и непрерывны вплоть до $\alpha=0$.
(c) Докажите, что

$$\varphi_\pm(x, t)=\int_{S^{n-1}} g_\pm(\pm t+x_1\cos\theta, \Omega)\, d\Omega,$$

где $|g_\pm(y, \Omega)| \leqslant C(1+|y|)^{-(n-1)}$, и выведите отсюда, что имеет место теорема XI.19 (b).
(d) Примените метод стационарной фазы по переменным $d\Omega$ на сфере S^{n-1} к изучению области $|x|/t \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ и завершите доказательство теоремы XI.19 (c).

34. Примените методы стационарной фазы в нестационарной теории рассеяния.

†35. Восполните детали приема интерполяции, используемого в доказательстве теоремы XI.20.

36. Пусть $f(y)=e^{-y^2}$ и функция g не принадлежит $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Докажите, что $g(x)f(-i\nabla)$ *не* есть ограниченный оператор, и выведите отсюда, что теорема XI.20 не допускает обобщения на L^q с $q<2$.

37. Пусть $\|f\|_{\mathrm{BS}}=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_{0\leqslant x_i-m_i<1}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}$. Докажите, что если f и g удовлетворяют условию $\|f\|_{\mathrm{BS}}+\|g\|_{\mathrm{BS}}<\infty$, то $f(x)g(i\nabla)$ есть оператор со следом и

$$\|f(x)g(-i\nabla)\|_1 \leqslant c\|f\|_{\mathrm{BS}}\|g\|_{\mathrm{BS}}.$$

[*Указание*. Докажите с помощью теоремы XI.21, что $\|f(x)g(i\nabla)\|_1 \leqslant c\|f\|_2\|g\|_2$ для всех f и g с носителями в некотором единичном кубе.] *Примечание*: Норму $\|\cdot\|_{\mathrm{BS}}$ ввели Бирман и Соломяк в своей работе, указанной в замечаниях к § 3.

38. Предположим, что $(1+x^2)^{\gamma/2} f(x)$ и $(1+x^2)^{\delta/2} g(x)$ лежат в $L^p(\mathbb{R}^n)$, где $2 \leqslant p < \infty$ и $\delta > n/p$. Докажите, что $f(x)\, g(-i\nabla)$ принадлежит $\mathfrak{I}_{p/2}$. [*Указание*. Проведите интерполяцию при помощи теоремы XI.21.]

39. Допустим, что $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют.
(a) Докажите, что $(1-P_{[a,b]}(A))\ \Omega^{\pm}(A, B)\, P_{[a,b]}(B)=0$.
(b) Пусть $\varphi(x)=\alpha x+\beta$ для $x \in [a, b]$. Докажите, что

$$\Omega^{\pm}(\varphi(A),\ \varphi(B))\, P_{[a,b]}(B)=\begin{cases} \Omega^{\pm}(A, B)\, P_{[a,b]}(B), & \alpha>0, \\ \Omega^{\mp}(A, B)\, P_{[a,b]}(B), & \alpha<0. \end{cases}$$

(c) Докажите принцип инвариантности для кусочно-линейной φ.

40. Покажите, что $H=-(2\mu_1)^{-1}\Delta_1-(2\mu_2)^{-1}\Delta_2+V(r_1-r_2)$ при замене координат $R=(\mu_1+\mu_2)^{-1}(\mu_1 r_1+\mu_2 r_2)$, $r=r_2-r_1$ переходит в

$$H=-(2M)^{-1}\Delta_R-(2m)^{-1}\Delta_r+V(r),$$

где $M=\mu_1+\mu_2$, $m^{-1}=\mu_1^{-1}+\mu_2^{-1}$.

41. Допустим, что S есть $N\times N$-матрица, и рассмотрим замену координат $x_i=\sum s_{ij}y_j$ на $\mathbb{R}^{3N}$. Предположим, что $\sum\limits_{i=1}^{N}(2\mu_i)^{-1}\Delta_{x_i}$ переходит в $\sum\limits_{i=1}^{N}(2\mu_i)^{-1}\Delta_{y_i}$ и что $x_i-x_j=\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_{ijk}y_k$ для всех i и j (обратите внимание, что сумма до $N-1$). Докажите, что $y_N=a\sum\limits_{i=1}^{N}\mu_i x_i$, где $a=$ $=\left(\sum\limits_{i=1}^{N}\mu_i\right)^{-1/2}\mu_N^{-1/2}$.

†42. Выведите формулу (56) из (55).

†43. Докажите, что линейные комбинации трансляций функции $\varphi_\gamma(x)=$ $=\gamma^{-3/4}e^{-1/2\gamma x^2}$ плотны в $L^2(\mathbb{R}^3)$. [*Указание*. Получите функции Эрмита, взяв производные.]

44. Допустим, что $\int(1+|y|)^{\alpha}|V(y)|^2 d^n y<\infty$ при некотором α, таком, что $n+\alpha>2$. Докажите, что выполнено (45), и сделайте вывод, что $\Omega^{\pm}(-\Delta+V,\ -\Delta)$ существуют. *Примечание*. Этот результат, в отличие от теоремы XI.42, имеет место для случая $n=1$, 2.

45. Допустим, что $V_t(x)$ есть семейство функций с носителем в фиксированной компактной области, L^2-нормы которых ограничены некоторой степенью t. Воспользуйтесь методом стационарной фазы и докажите, что зависящие от времени волновые операторы существуют.

46. Допустим, что A — положительный самосопряженный оператор и B — самосопряженный оператор, такой, что
(i) $|B|$ A-ограничен в смысле форм с относительной гранью $\alpha<1$;
(ii) $|B|^{1/2}(A+i)^{-1}$ имеет след.
Докажите, что $(A+B+E)^{-1}-(A+E)^{-1}$ имеет след при достаточно больших E. [*Указание*. Положите $B^{1/2}=B/|B|^{1/2}$ и воспользуйтесь формулой

$$(A+B+E)^{-1}-(A+E)^{-1}=$$
$$=-(A+E)^{-1}B^{1/2}(1+|B|^{1/2}(A+E)^{-1}B^{1/2})^{-1}|B|^{1/2}(A+E)^{-1}.]$$

47. (a) Докажите, что ядро оператора $[-d^2/dx^2+1]^{-1}$ в $L^2(\mathbb{R})$ есть $\frac{1}{2}e^{-|x-y|}$. [*Указание*. Воспользуйтесь преобразованием Фурье.]
(b) Пусть h_0—оператор $-d^2/dx^2$ на $L^2(0, \infty)$ с нулевыми граничными условиями в начале координат. Докажите, что ядро оператора $(h_0+1)^{-1}$ есть $\frac{1}{2}e^{-|x-y|}-\frac{1}{2}e^{-x-y}=K(x, y)$. [*Указание*. Докажите, что $\int K(x, y) f(y)\,dy$ принадлежит $D(h_0)$ и что, применяя к нему (h_0+1), мы получим f.]

48. (a) Пусть V принадлежит L^∞ и имеет компактный носитель. Зная, что (63) выполнено для непрерывных V_n, докажите его для V.
(b) Пусть для произвольного V все V_n принадлежат L^∞, имеют компактный носитель и $V_n \uparrow V$ поточечно. Докажите (63) для V.

†49. Докажите предложение, предшествующее теореме XI.33 и касающееся свойств S-оператора в двухчастичных системах.

50. Пусть A—положительный самосопряженный оператор, и пусть B_∞ и B_n—самосопряженные операторы, такие, что
(i) $|B_n| \leq \frac{1}{2}A+c$ при некоторых фиксированных c и всех n;
(ii) $|B_n|^{1/2}(A+i)^{-1} \longrightarrow |B_\infty|^{1/2}(A+i)^{-1}$ по норме Гильберта—Шмидта;
(iii) $[B_n/|B_n|^{1/2}](A+i)^{-1} \longrightarrow [B_\infty/|B_\infty|^{1/2}](A+i)^{-1}$ по норме Гильберта—Шмидта.
Докажите, что $(A+B_n+i)^{-1} \longrightarrow (A+B_\infty+i)^{-1}$ по норме операторов со следом.

51. Уравнение Клейна — Гордона, ограниченное на положительные частоты, есть уравнение типа Шредингера $i\psi_t=H\psi$ с $H=\sqrt{-\Delta+V(x)+m_0^2}$, где V таков, что $-\Delta+V \geq -m_0^2$. Пусть $H_0=\sqrt{-\Delta+m_0^2}$. Докажите, что
(a) если $V \in L^{3/2}+L^\infty$ и H есть квадратный корень оператора, определенного как сумма форм, то $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ служит существенной областью для оператора H.
(b) Если $V \in L^1 \cap L^{3/2}$, то волновые операторы $\Omega^\pm = \underset{t \to \mp\infty}{\text{s-lim}}\, e^{itH}e^{-itH_0}$ существуют и полны. [*Указание*: воспользуйтесь принципом инвариантности.]

†52. (a) Найдите вид H_0 при переходе к атомным координатам, пользуясь цепным правилом.
(b) Проделайте то же самое для координат Якоби.

53. В лагранжевой механике импульсы $p_1, \ldots, p_n$, сопряженные к координатам $q_1, \ldots, q_n$, определяются посредством $p_i=\partial T/\partial\dot{q}_i$. Покажите, что формулы задачи 52 можно вывести, записав T через новые сопряженные импульсы и положив p_i равными $i^{-1}\partial/\partial q_i$.

†54. Восполните детали доказательства части (a) теоремы XI.38.

†55. Докажите, что

$$\lim_{\min|\mathrm{a}_i-\mathrm{a}_j|\to\infty} \int_0^\infty \left\| (I_{D'}-I_{D^*D'})\, e^{+i\tilde{H}_{D^*D'}t}\, U_D(\mathrm{a})\, e^{-iH_{D'}t}\psi \right\| dt=0,$$

если $\psi \in D(\tilde{H}_0)$, и тем самым завершите доказательство формулы (77b).

†56. Воспользуйтесь теоремой XI.39 для доказательства теоремы XI.40.

*57. Предположим, что $V \in L^p \cap L^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ с $1 < p < 3/2$. Следуя приведенному доказательству теоремы XI.41, докажите аналогичную теорему для $H = H_0 + V$.

58. Постройте функцию f, аналитическую в $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, непрерывную в $\{z \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ и такую, что $z=0$ есть предельная точка нулей f. [*Указание*. Предельная точка нулей функции $\cos z$ есть $z = \infty$.]

59. Пользуясь принципом симметрии Шварца, покажите, что если f аналитична в $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ и непрерывна в $\{z \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, то $\mathscr{E} = \mathbb{R} \cap \{z \mid f(z) = 0\}$ как подмножество $\mathbb{R}$ имеет пустую внутренность.

†60. Пусть $V \in R$, и пусть K_k при $k \in \mathbb{R}$ есть оператор в $L^2(\mathbb{R}^3)$ с ядром $K_k(x, y) = e^{ik|x-y|}(4\pi|x-y|)^{-1}|V(x)|^{1/2}V(y)^{1/2}$.

(a) Докажите, что $\operatorname{Tr}(K_k^* K_k)$ есть константа.

(b) Пользуясь леммой Римана—Лебега, докажите, что $\operatorname{Tr}(K_k^* K_k K_k^* K_k) \to 0$ при $k \to \infty$.

(c) Сделайте вывод, что $\|K_k\| \to 0$ при $k \to \infty$.

Примечание. Это теорема Клейна и Земаха (см. замечания к § 6).

†61. (a) Пусть $V \in R \cap L^1(\mathbb{R}^3)$, и пусть $H_0 = -\Delta$, $H = H_0 + V$ (сумма форм). Докажите, что при $E \notin \sigma(H)$

$$(H-E)^{-1} = (H_0-E)^{-1} - [(H_0-E)^{-1}V^{1/2}][1+|V|^{1/2}(H_0-E)^{-1}V^{1/2}]^{-1}[|V|^{1/2}(H_0-E)^{-1}].$$

[*Указание*. См. задачу 46.]

(b) Пользуясь интегральным уравнением

$$G(x, y; E) = G_0(x, y; E) - \int G_0(x, z; E)V(z)G(z, y; E)\,dz,$$

докажите, что $G(\cdot, y; E) \in L^1$ для почти всех y. [*Указание*. Воспользуйтесь (a) и докажите, что $V^{1/2}G \in L^2$ почти всюду по y.]

†62. Пусть $V \in R$, и пусть $H = H_0 + V$ (сумма форм). Предположим, что $H\psi = E\psi$ при $E = k^2 \geqslant 0$ и $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Пусть $\varphi = |V|^{1/2}\psi$. Докажите, что

$$\varphi(x) = -\int |V(x)|^{1/2} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} V(y)^{1/2}\varphi(y)\,dy.$$

Сделайте вывод, что $E \in \mathscr{E}$, где $\mathscr{E}$ — исключительное множество.

†63. Восполните детали доказательства леммы 5 к теореме XI.41.

*64. Допустим, что $V(x) \leqslant 0$ при всех x и что $V \in L^1 \cap R$. Пусть $-\Delta + V$ имеет отрицательное собственное значение. Докажите, что ряд Борна для $T(0, 0)$ не сходится.

65. В этой задаче мы ставим целью доказательство оценки (98).

(a) Пользуясь масштабным преобразованием

$$G_0(x, y; E) = \lambda^{2-n} G_0(\lambda x, \lambda y; \lambda^2 E) \text{ при } \lambda > 0,$$

покажите, что достаточно рассмотреть случай $\operatorname{Re} E > 0$, $|E| = 1$.

(b) Запишем $G_0 = G_1 + G_2$, где

$$G_1 = (2\pi)^{-n} \int\limits_{|p| \leqslant (1+\varepsilon)^2} (p^2 - E)^{-1} e^{ip\cdot(x-y)}\,d^n p$$

при некотором $\varepsilon > 0$. Докажите, что G_2 аналитична в области $|E| < 1 + \varepsilon$ для каждого фиксированного $x \neq y$ и что $|G_2(x, y; E)| \leqslant |x-y|^{-(n-2)}$; $n \geqslant 3$.

(c) Сдвигая контур интегрирования по $|p|$ в G_1, завершите доказательство оценки (98).
(d) Докажите аналоги (98) при $n=1$, 2, как это описано в тексте.
(e) Покажите, что ответ для $\partial_i(-\Delta-k^2)^{-1}$ будет следовать, если отыскать и доказать аналог оценки (98).

66. Пусть $H=-\alpha\nabla\cdot\beta\nabla\alpha=-f\Delta+g\cdot\nabla+h=-f_0\Delta+V$, как в теореме XI.45. Пусть $H_0=-f_0\Delta$ и $W=g\cdot\nabla+h$.
(a) Докажите, что $\|W\varphi\|\leqslant\varepsilon\|H_0\varphi\|+c_\varepsilon\|\varphi\|$ при любом $\varepsilon>0$ и что $\|W\varphi\|\leqslant\varepsilon\|-f\Delta\varphi\|+c_\varepsilon\|\varphi\|$.
(b) Докажите, что $\|-f\Delta\varphi\|\leqslant(1+\varepsilon)\|H\varphi\|+c'_\varepsilon\|\varphi\|$.
(c) Докажите, что $\|(H-H_0)\varphi\|\leqslant a(\|H\varphi\|+\|H_0\varphi\|)+c\|\varphi\|$ при некотором $a<1$.
(d) Сделайте заключение, что H самосопряжен на $D(H_0)$, пользуясь теоремой X.13.

**67.* Воспользуйтесь методом, описанным в конце § 6, чтобы доказать разложение по собственным функциям для $-\Delta+V$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$, если V убывает экспоненциально.

**68.* (a) Пусть $\langle M,\mu\rangle$ — пространство с мерой и $K(x,y)$, $F(x)K(x,y)F(y)^{-1}$ принадлежат $L^2(M\times M, d\mu\otimes d\mu)$ для F, которая конечна и почти всюду отлична от нуля. Пусть ψ есть L^2-решение уравнения $\psi(x)=\int K(x,y)\psi(y)\,dy$. Докажите, что $F\psi\in L^2(M,d\mu)$.
†(b) Пусть M_k — ядро, заданное формулой (102c), и пусть K_k — ядро оператора $|V|^{1/2}(H_0-k^2)^{-1}V^{1/2}$. Докажите, что $(1-M_k)$ имеет обратный тогда и только тогда, когда $(1-K_k)$ имеет обратный.

†69. Пусть V — потенциал Рольника, $E<0$ и $H=H_0+V$ — сумма форм. Докажите, что $(H_0+V)\psi=E\psi$ с некоторой ненулевой $\psi\in D(H)$ тогда и только тогда, когда

$$(|V|^{1/2}(H_0-E)^{-1}V^{1/2})\varphi=-\varphi$$

с некоторой ненулевой $\varphi\in L^2$, и что ψ и φ связаны соотношением $\varphi=|V|^{1/2}\psi$.

Литература к задачам 68, 69: монография Саймона (см. замечания к § 6), стр. 149—150 и 81—83.

†70. (a) Предположим, что $e^{\alpha|x|}V(x)\in R$ при некотором $\alpha>0$. Докажите, что $e^{\beta|x|}V(x)\in L^1(\mathbb{R}^3)$ при любом $\beta<\alpha$.
(b) Предположим, что $V\in R+L^\infty$ имеет компактный носитель. Докажите, что $V\in R$.

†71. Докажите, что полюсы $(1-M_k)^{-1}$, где M_k задано формулой (102c), простые.

†72. Восполните детали доказательства следствия теоремы XI.46.

†73. Воспользуйтесь теоремой XI.42, чтобы доказать уравнение (105).

74. Пусть H есть N-частичный гамильтониан, такой, что ни один из кластерных гамильтонианов не имеет недискретных собственных значений. Пусть $E=\inf\sigma(H)$. Докажите, что $[E,\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$, где I_n — такие неперекрывающиеся интервалы, что семейство $\mathscr{C}_E$ открытых каналов при энергии E постоянно на каждом I_n.

†*75*. Докажите свойства (1)—(3) и (1′)—(3′) функции $F_V(E)$, использованные при доказательстве теоремы XI.49.

†*76*. Докажите, что отображение $\langle V, E\rangle \longmapsto K_V(E)$ из $R\times\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{J}_2$ (где R — класс Рольника) непрерывно по совокупности аргументов.

†*77*. Докажите часть (c) теоремы XI.49, а именно: если V — потенциал Рольника, то оператор $T(E)$ стремится к нулю по норме, когда $E \longrightarrow \infty$. [*Указание*. Посмотрите обсуждение сходимости ряда Борна при высоких энергиях в § 6 и задачу 60.]

†*78*. Воспользуйтесь теоремой о мажорированной сходимости, чтобы доказать формулу (118), когда $V\in C_0^\infty$.

†*79*. (a) Докажите единственность решений уравнения с переменной фазой (120) вне точки $r=0$, воспользовавшись результатами о единственности из § V.6.
(b) Докажите, что локальные решения уравнения с переменной фазой (120) продолжаются на весь интервал $(0, \infty)$, проверив, что d не может обращаться в бесконечность ни в одной конечной точке.
(c) Воспользуйтесь уравнением с переменной фазой (120), чтобы доказать, что любое решение, удовлетворяющее условию $\lim\limits_{r\to 0} |r^{-1}d(r)| < \infty$, фактически удовлетворяет условию $\lim\limits_{r\to 0} r^{-1}d(r)=0$.
(d) Докажите существование и единственность решений вблизи $r=0$, построив соответствующее сжимающее отображение.

80. Укажем на зависимость от k в уравнении с переменной фазой, записывая $d=d(r, k)$.
(a) Докажите, что $d(r, k)$ непрерывна по k при любом фиксированном r. [*Указание*. Воспользуйтесь доказательством существования.]
(b) Докажите, что $d(r, k) \longrightarrow d_\infty(k)$ при $r \longrightarrow \infty$ локально равномерно по k, так что $d_\infty(k)$ непрерывна. [*Указание*. Воспользуйтесь уравнением с переменной фазой и оценкой $\int\limits_1^\infty |V(x)|\,dx < \infty$.]
(c) Докажите, что $d_\infty(k) \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$. [*Указание*. Докажите это сначала для достаточно малых r, а затем воспользуйтесь уравнением с переменной фазой и тем, что $\int\limits_1^\infty |V(x)|\,dx < \infty$.]
(d) Сделайте вывод, что $d_\infty(k)=\delta_0(k)$ без неопределенности в π.

†*81*. Выведите (123) из (122).

82. Докажите следствие 2 теоремы XI.54. [*Указание*. Воспользуйтесь методами задачи 80.]

†*83*. В контексте теоремы XI.55 докажите, что если $\lim\limits_{r\to\infty} u'(r) \neq 0$, то

$$\lim_{k\to 0}\frac{\delta_0(k^2)-m\pi}{k}=\lim_{r\to\infty}\frac{u(r)-ru'(r)}{u'(r)}.$$

†*84*. (a) Докажите утверждение о единственности теоремы XI.56.

(b) При более сильном допущении $\int\limits_0^1 |V(x)|\,dx < \infty$ докажите более сильное утверждение, что регулярное уравнение имеет единственное решение, которое остается ограниченным при $x \to 0$.

†*85*. (a) Докажите, что $|\sin u| \leqslant [2|u|/(1+|u|)]\, e^{|\operatorname{Im} u|}$ при всех $u \in \mathbb{C}$.

(b) Записав

$$\frac{\sin k(x-y)}{k} = \frac{(\sin kx)\, e^{-iky} - e^{-ikx} \sin ky}{k},$$

докажите, что при $0 \leqslant x \leqslant y$

$$\left| \frac{\sin k(x-y)}{k} \right| \leqslant \frac{4y}{1+|k|\,y} \exp\left[|\operatorname{Im} k|\, y + (\operatorname{Im} k)\, x\right].$$

(c) Пользуясь оценками из (a) и (b), восполните детали доказательства теоремы XI.57.

†*86*. Докажите теорему Левинсона для случая, когда $\eta(0) = 0$, применяя метод функций Йоста. [*Указание.* Покажите, что нуль при $k=0$ простой.]

87. Пусть S — борелево множество в $\mathbb{R}$. Пусть $A(S)$ — умножение на x в $L^2(S, dx)$. Докажите, что

(a) $A(S)$ унитарно эквивалентен $A(T)$ тогда и только тогда, когда $S \Delta T$ имеет меру Лебега нуль.

(b) Спектр $A(S)$ есть $\bar{S}$.

(c) Если существует изометрия U, такая, что $A(S)\, U = UA(T)$, то $T \setminus S$ имеет меру Лебега нуль.

(d) В условиях (c) предположим еще, что T замкнуто и $\sigma(A(S)) = \sigma(A(T))$. Тогда U унитарен.

(e) Если A — любой оператор с простым и абсолютно непрерывным спектром, то A унитарно эквивалентен некоторому $A(S)$. В таком случае S называется **существенным носителем** A.

88. Пусть H и H_0 — два оператора с простым спектром. Допустим, что $\sigma_{ac}(H) \subset \sigma_{ac}(H_0)$, что существенный носитель (см. задачу 87) абсолютно непрерывной части H_0 замкнут и что $\Omega^{\pm}(H, H_0)$ существуют. Докажите, что $\Omega^{\pm}(H, H_0)$ полны. Сохранится ли этот результат, если отказаться от предположения о существенном носителе?

†*89*. (a) Докажите, что локально равномерный предел гармонических функций есть гармоническая функция. [*Указание.* Докажите сходимость в смысле обобщенных функций и воспользуйтесь эллиптической регулярностью или формулой Пуассона.]

(b) Докажите, что из локальной L^1-сходимости гармонических функций вытекает локальная равномерная сходимость. [*Указание.* Воспользуйтесь свойством средних значений.]

†*90*. (a) Докажите, что если $z = \cos\theta$, где $\theta = x + iy$, то $|y| = a$ есть эллипс с фокусами ± 1 и большой полуосью $\operatorname{ch} a$, пользуясь формулой $\cos\theta = (\cos x)(\operatorname{ch} y) + i(\sin x)(\operatorname{sh} y)$.

(b) Докажите, что если $z \in \mathbb{C} \setminus (-1, 1)$ и x мало, то $\sum\limits_{l=0}^{\infty} x^l Q_l(z) = g(x, z)$,

где

$$g(x, z) = \frac{1}{u} \ln \left[\frac{z-x+u}{(z^2-1)^{1/2}} \right] = \frac{1}{2u} \ln \frac{1-(x-u)^2}{1-(x+u)^2}$$

и $u=(1-2zx+x^2)^{1/2}$.

(c) Докажите, что $g(x, z)$ имеет радиус сходимости по x, равный $e^{+|\mathrm{Im}\,\theta|}$, где $\theta = \arccos z$.

(d) Пусть D — компактное множество вне канонического эллипса $|\mathrm{Im}\,\theta| = \ln H$. Покажите, что $\sup\limits_{l,\, z \in D} |Q_l(z) H^l| < \infty$.

91. Докажите пункт (c) теоремы XI.63. [*Указание*. Докажите, что

$$\lim_{l\to\infty} |P_l(z)|^{1/l} = e^{-|\mathrm{Im}\,\theta|}, \text{ где } \theta = \arccos z.]$$

**92*. (a) Пусть $A = -d^2/dx^2$ в $L^2(-\infty, \infty)$. Пусть B_1 (соответственно B_2) есть $-d^2/dx^2$ в $L^2(0, \infty)$ (соответственно $L^2(-\infty, 0)$) с нулевыми граничными условиями в нуле, и пусть $B = B_1 \oplus B_2$. Найдите явные формулы для $(A+1)^{-1}$ и $(B+1)^{-1}$ и сделайте заключение, что $0 \leqslant (B+1)^{-1} \leqslant (A+1)^{-1}$ (операторное неравенство).

(b) Докажите, что $(B+1)^{-1/2}(A+1)^{1/2}$ ограничен, и сделайте вывод, что $\partial(B_1+1)^{-1/2}$ ограничен (где $\partial f = \partial f/\partial r$) и что $W(B_1+1)^{-1/2}$ имеет след, если $W \in L^2_\delta(\mathbb{R})$ для $\delta > 1/2$ (см. теорему XI.21).

(c) Пусть $V = \partial W - W\partial$ = умножение на $\partial W/\partial r$. В предположении, что $W \in L^2_\delta(\mathbb{R})$, докажите, что V — ограниченное как форма возмущение B_1 с относительной гранью нуль и что $(B_1+V+i)^{-1} - (B_1+i)^{-1}$ имеет след.

(d) Пусть W — функция $|x|$ на $\mathbb{R}^n$, причем $\int |W(r)|^2 (1+r^2)^{-1/2-\varepsilon}\, dr < \infty$ с некоторым $\varepsilon > 0$. Пусть $V = \partial W/\partial r$. Докажите, что $\Omega^\pm(-\Delta+V, -\Delta)$ существуют и полны.

†93. (a) Докажите неравенство $|u_n'(x)| \leqslant n\gamma^n \|u_0\| A(x)$, нужное для доказательства предложения во втором дополнении к § 8.

(b) Распространите доказательство этого предложения на случай, когда $u_0(x)$ зависит от x.

94. Пусть u удовлетворяет (151). Докажите, что для всех $f \in L^2(0, \infty)$, имеющих компактный носитель в $(0, \infty) \setminus \mathscr{E}$, $\int f(k)\, u(k, r)\, dk \in L^2(0, \infty)$. [*Указание*. Запишите интеграл в виде двух членов, как подсказывает формула (151). Оцените член с $(1+|r|)^{-1/2-\gamma}$, пользуясь тем, что $f \in L^1$, а другой член с помощью теоремы Планшереля.]

**95*. (a) Предположим, что u удовлетворяет (151) и сверх того

$$\left| \frac{\partial u}{\partial r}(r, k) - k \cos\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(k)\right) \right| \leqslant c(k)(1+|r|)^{-1/2-\gamma}. \tag{356}$$

Докажите, что если f такая, как в задаче 94, то $Y_{lm}(\hat{x}) \times \int (kx)^{-1} f(k)\, u(kx)\, dk$ принадлежит области определения $-\Delta$ в смысле форм.

(b) Покажите, что если выполнено (356), то в допущениях теоремы XI.69 условие «$-\Delta+V$ в существенном самосопряжен в C_0^∞» можно заменить условием «C_0^∞ есть существенная область в смысле форм оператора $H = -\Delta+V$ и $Q(H) = Q(-\Delta)$».

(c) Примените обобщение (b) к потенциалу $(1+|r|^2)^{-1} e^r \cos(e^r)$.

†96. Восполните детали доказательства теоремы XI.70.

97. (a) Пусть $A(y)$ и $T(y)$ — такие матричнозначные функции, что $T(y)$ имеет обратную, $\|T(x)T(y)^{-1}\| \leq 1$, если $x \leq y$, $\tilde{A}(y) = T(y)A(y)T(y)^{-1}$ удовлетворяет условию $\int_R^\infty \|\tilde{A}(y)\| dy < 1$. Допустим, что $T(y)u_0 = u_0$ при всех y. Покажите, что уравнение $u(x) = u_0 + \int_x^\infty A(y)u(y)dy$ имеет решение. [*Указание*. Оцените $T(x)u_n(x)$ по индукции.]

(b) Пусть $f(x)$ — положительная монотонно возрастающая функция и $\tilde{A}$ — некоторая 2×2-матрица в L^1. Покажите, что уравнение

$$\dot{u}(t) = -\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}(t) & \tilde{a}_{12}(t)f(t) \\ \tilde{a}_{21}(t)f(t)^{-1} & \tilde{a}_{22}(t) \end{pmatrix} u(t)$$

имеет решение, стремящееся к $\langle 1, 0\rangle$ на бесконечности.

(c) Постройте решение уравнения $-u''(x) + x^{2n}u(x) = 0$, асимптотически приближающееся к $\exp(-(n+1)^{-1}x^{n+1})$ при $x \to \infty$. [*Указание*. Воспользуйтесь вариацией постоянных и двумя решениями $\exp(\pm(n+1)^{-1}x^{n+1})$.]

(d) Предположим, что $A = A_1 + A_2$, где $\tilde{A}_1(y) = T(y)A_1(y)T(y)^{-1} \in L^1$, и что $A_2(y) = dB(y)/dy$, где $\tilde{B}(y) = T(y)B(y)T(y)^{-1}$ удовлетворяет условию $\tilde{A}\tilde{B} \in L^1$ и $\tilde{B} \to 0$ на бесконечности. Пусть $T(y)u_0 = u_0$. Покажите, что уравнение $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$ имеет решение, удовлетворяющее условию $u(t) \to u_0$ на бесконечности.

(e) Пусть $f(x)$ — положительная монотонно возрастающая функция, такая, что $|\dot{f}(t)| \leq ct^{-\alpha}|f(t)|$, $t \geq R$, $\alpha > 0$. Пусть $\tilde{A}(t)$ есть 2×2-матричнозначная функция, такая, что $\tilde{A} = M_1 + M_2$, где $M_1 \in L^1$, $\tilde{A}M_2 \in L^1$, $t^{-\alpha}M_2 \in L^1$ и $M_2 \to 0$ на бесконечности. Покажите, что уравнение

$$\dot{u}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}(t) & \tilde{a}_{12}(t)f(t) \\ \tilde{a}_{21}(t)f(t)^{-1} & \tilde{a}_{22}(t) \end{pmatrix} u(t)$$

имеет решение, сходящееся к $\langle 1, 0\rangle$ на бесконечности.

98. (a) Пусть f и g — такие функции из $C^1(\mathbb{R})$, что $fg' - gf'$ нигде не обращается в нуль. Допустим, что $\langle u(x), u'(x)\rangle$ и $\langle a(x), b(x)\rangle$ связаны формулами

$$u(x) = a(x)f(x) + b(x)g(x), \qquad u'(x) = a(x)f'(x) + b(x)g'(x).$$

Пусть задана $W(x)$. Докажите, что дифференциальное уравнение $u''(x) = W(x)u(x)$ эквивалентно дифференциальному уравнению $\rho'(x) = \Delta(x)\rho(x)$, где $\rho(x) = \langle a(x), b(x)\rangle$ и

$$\Delta = (f'g - gf')^{-1}\begin{pmatrix} -g(-f'' + Wf) & -g(-g'' + Wg) \\ f(-f'' + Wf) & f(-g'' + Wg) \end{pmatrix}.$$

(b) Докажите теорему XI.67 (c), пользуясь задачей 97e и пунктом (a), выбрав

$$f(x) = x^{-\gamma_j/2\alpha_j}\cos(\alpha_j x/2), \qquad g(x) = x^{\gamma_j/2\alpha_j}\sin(\alpha_j x/2).$$

99. Докажите (155) и сделайте заключение, что обычные волновые операторы в кулоновом случае не существуют. [*Указание.* Сначала докажите, что $(1-P_{ac}(H))\,e^{itH}e^{-itH_0}\longrightarrow 0$ слабо. Затем, пользуясь сходимостью $U_D(t)^*e^{-itH}P_{ac}(H)$, докажите, что $P_{ac}(H)\,e^{itH}e^{-itH_0}\longrightarrow 0$ слабо.]

†*100.* Пусть $W(k, t)$, $P(k)$ — такие вещественнозначные функции, что для каждого s и почти всех k

$$W(k, t+s)-W(k, t)\longrightarrow sP(k),$$

когда $t\longrightarrow\pm\infty$. Докажите, что

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty}\exp(iW(i\nabla, t))\exp(-iW(i\nabla, t+s))=\exp(-isP(i\nabla)).$$

[*Указание.* Воспользуйтесь мажорированной сходимостью.]

†*101.* Воспользуйтесь методом стационарной фазы, чтобы доказать (159а).

102. Пусть $H_0=-\Delta$; $H=-\Delta-\lambda r^{-1}+V_s$; $H'=-\Delta-\lambda r^{-1}$. Пусть $\varphi\in C_0^\infty$ и $\varphi\equiv 1$ вблизи $r=0$. Пусть $\tilde H=H_0-\lambda(1-\varphi)r^{-1}$; $W=-\lambda r^{-1}\varphi$.

(a) Докажите, что $\Omega_D^\pm(H, H_0)=\Omega^\pm(H, H')\,\Omega_D^\pm(H', H_0)$, и заключите, что для доказательства полноты $\Omega_D^\pm(H, H_0)$ достаточно доказать полноту $\Omega_D^\pm(H', H_0)$ и $\Omega^\pm(H, H')$.

(b) Предположим, что $V_s(H_0+1)^{-m-1}$ обладает следом. Докажите, что $V_s(\tilde H+E)^{-m-1}$ имеет след, показав, что $D(H_0^{m+1})=D(\tilde H^{m+1})$.

(c) Докажите, что $W(H_0+1)^{-m-1}$ имеет след при достаточно больших m.

(d) Докажите, что $(\tilde H+E)^{-m}-(H'+E)^{-m}$ и $(\tilde H+E)^{-m}-(H+E)^{-m}$ обладают следом, если $V_s(\tilde H+E)^{-m-1}$ имеет след при достаточно большом m.

(e) Докажите, что если $V_s(H_0+1)^{-m-1}$ имеет след, то $\Omega^\pm(H, H')$ существуют и полны. *Примечание.* $\Omega_D^\pm(H', H_0)$ полны, что видно из явного разложения по собственным функциям; см. основополагающую статью Долларда, цитированную в замечаниях к § 9.

103. Убедитесь, что в классическом случае для дальнодействующих сил $(\Sigma_+\setminus\Sigma_-)\cup(\Sigma_-\setminus\Sigma_+)$ имеет меру нуль и что (167) выполняется для каждой пары $\langle x_0, p_0\rangle$ в $\Sigma_\pm$.

104. Воспользуйтесь методом сжимающих отображений такого типа, как в § 2, чтобы доказать существование решений уравнения (172).

105. Докажите, что для почти всех p_{in}, b_{in} соответствующее дальнодействующее решение $x(t)$, связанное со (172), удовлетворяет условию $\lim_{t\to\infty}|x(t)|=\infty$. [*Указание.* Пусть G — отображение $\langle p_{\text{in}}, a\rangle$ в решение, связанное со (172) в момент $t=0$. Докажите, что G сохраняет меру.]

106. Фиксируем $\alpha>0$. Предположим, что $\sup_x[(1+x)^{\alpha+|\beta|}\,|D^\beta(V_n-V)|]\longrightarrow 0$ при $|\beta|\leqslant 2$. Пусть $N=[1/\alpha]$.

(a) Докажите, что функция $z_N(p, t; V_n)$ сходится к $z_N(p, t; V)$ равномерно по t, когда p принадлежит компактным подмножествам из $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.

(b) Докажите, что решения уравнения (172), связанные с V_n, сходятся при $n\longrightarrow\infty$ к решению, связанному с V.

(c) Докажите, что отображение $\tilde S$, определенное в связи с теоремой XI.73, сходится при $n\longrightarrow\infty$.

(d) Докажите, что если V_n короткодействующий, то $\tilde S$, определенное при помощи z_N, совпадает с частью обычного короткодействующего S.

*107. Пользуясь результатами Хёрмандера, относящимися к решениям уравнения Гамильтона—Якоби, исправьте анализ Хербста классического короткодействующего рассеяния с помощью канонических преобразований. *Литература*: статья Хёрмандера и вторая из статей Хербста, цитированных в замечаниях к § 9.

108. (a) Пусть $W(k\ t)$ — вещественнозначная функция, такая, что при некотором фиксированном H имеем $e^{itH}\exp(-iW(i\nabla,\ t))\longrightarrow\Omega_D^+$, когда $t\longrightarrow-\infty$. Пусть P_D — проектор на $\operatorname{Ran}\Omega_D^+$. Докажите, что для любой другой измеримой функции $\tilde{W}(k, t)$ существуют L^∞-функция $G(k)$ и поднаправленность $t_\alpha\longrightarrow-\infty$, такие, что

$$\operatorname*{w-lim}_{t_\alpha\to-\infty} P_D e^{itH}\exp(-i\tilde{W}(-i\nabla,\ t_\alpha))=\Omega_D^+ G(-i\nabla).$$

[*Указание*. Возьмите в качестве $G(k)$ предельную точку $\exp(iW(k,t)-i\tilde{W}(k,\ t))$ в топологии $\sigma(L^\infty,\ L^1)$, т. е. в $*$-слабой топологии.]

(b) Докажите, что если $\operatorname*{s-lim}_{t\to-\infty} e^{itH}\exp(-i\tilde{W}(-i\nabla,\ t))=\tilde{\Omega}_D^+$ существует, то $P_D\tilde{\Omega}_D^+=\Omega_D^+G(-i\nabla)$.

(c) Если, кроме того, $P_D=P_{ac}(H)$, то $|G(k)|=1$ п. в.

109. Пусть V удовлетворяет условию $|D^\alpha V(x)|\leqslant C(1+x)^{-|\alpha|-\varepsilon}$ при всех α с $|\alpha|\leqslant 3$. Докажите, что V можно представить в виде V_1+V_2, причем $|V_2(x)|\leqslant C(1+x)^{-1-\varepsilon}$ и $|(D^\alpha V_1)(x)|\leqslant C(1+x)^{-m(|\alpha|)}$, где $m(l)=l+\varepsilon$ при $l=0,\ 1,\ 2,\ 3$ и $m(l)=3+\varepsilon+{}^2/_3(l-3)$ при $l\geqslant 3$, действуя следующим образом.

(a) Возьмите $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\psi(x)=1$ при $|x|\leqslant 1$, $\psi(x)=0$ при $|x|\geqslant 2$ и $0\leqslant\psi(x)\leqslant 1$ при всех x. Пусть $\psi_\nu(x)=\psi(2^{-\nu}x)-\psi(2^{1-\nu}x)$ и $V_\nu=V\psi_\nu$. Докажите, что $\|D^\alpha\psi_\nu\|_\infty\leqslant C_\alpha 2^{-\nu|\alpha|}$, $|(D^\alpha\psi_\nu)(x)|\leqslant d(1+|x|)^{-|\alpha|}$, и выведите отсюда, что $|D^\alpha V_\nu(x)|\leqslant C(1+x)^{-|\alpha|-\varepsilon}$, $0\leqslant\alpha\leqslant 3$.

(b) Пусть $\delta=2/3$. Пусть $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, причем $\int\chi(x)\,dx=1$ и $\int|x|^\alpha\chi(x)\,dx=0$ при $0<|\alpha|<3$. Пусть $\chi_\nu(y)=2^{-\delta n\nu}\chi(2^{-\nu\delta}y)$.

Докажите, что

$$\left|V_\nu(x-y)-V_\nu(x)-\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2}(\alpha!)^{-1}(y)^\alpha(D^\alpha V_\nu)(x)\right|\leqslant$$
$$\leqslant C|y|^3(1+x)^{-3-\varepsilon}$$

для всех x, y, таких, что $x\in\operatorname{supp}V_\nu$, $y\in\operatorname{supp}\chi_\nu$. Выведите отсюда, что

$$|\chi_\nu * V_\nu(x)-V_\nu(x)|\leqslant C(1+x)^{-1-\varepsilon}.$$

(c) Докажите, что $D^\alpha(V_\nu*\chi_\nu)\leqslant C_\alpha(1+x)^{-m(|\alpha|)}$.

(d) Завершите доказательство, взяв $V_1=\sum_\nu V_\nu*\chi_\nu$ и $V_2=V-V_1$.

110. Следуя методу задачи 109, покажите, что $V=V_1+V_2$, где $|V_2(x)|\leqslant C(1+x)^{-1-\varepsilon}$ и $|(D^\alpha V_1)(x)|\leqslant C(1+x)^{-m(|\alpha|)}$ с $m(1)+m(3)>4$, если $|D^\alpha V(x)|\leqslant C(1+x)^{-|\alpha|-\varepsilon}$, $|\alpha|\leqslant M$, причем $\varepsilon>1/2$ при $M=1$ и $\varepsilon>1/5$ при $M=2$.

Литература к задачам 109 и 110: статья Хёрмандера, указанная в замечаниях к § 9.

111. (a) Вычислите дифференциальное сечение классического кулонова рассеяния (резерфордово сечение).
(b) Вычислите кулоново сечение в борновском приближении.

†*112.* Используя обозначения теоремы XI.75 § 10, покажите, что

(a) $\langle u, v\rangle \in P_{ac}(A_0) \Leftrightarrow B_0 u \in P_{ac}(B_0)$ и $v \in P_{ac}(B_0)$;

(b) $T_0 P_{ac}(A_0) = \begin{pmatrix} P_{ac}(B_0) & 0 \\ 0 & P_{ac}(B_0)\end{pmatrix}$.

†*113.* Предполагая, что теоремы XI.75 и XI.76 остаются верными и в том случае, когда H_0 и H_1 имеют точечный спектр в нуле, восполните детали доказательства существования волновых операторов при оптическом рассеянии в неоднородной среде (пример 2 в § 10).

114. Пользуясь методами § 10, постройте теорию рассеяния для волновых уравнений

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \qquad u_{tt} - \Delta u + q(x)\, u = 0$$

при подходящих условиях на $q(x)$.

115. Пусть A и B — ограниченные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.
(a) Докажите, что $\sigma(AB)\setminus\{0\} = \sigma(BA)\setminus\{0\}$.
(b) Докажите, перестановочное соотношение (205).

•*116.* Цель этой задачи — распространить теоремы XI.79 и XI.80 на размерности $n \neq 3$.

(a) С помощью метода, использованного при доказательстве теоремы XI.21, покажите, что $(1+x^2)^{-\alpha}(1+p^2)^{-\beta}(1+x^2)^{-\gamma} \in \mathcal{J}_p$ в смысле операторов в $L^2(\mathbb{R}^n)$, если $\beta > n/2p$, $\alpha+\gamma > n/2p$, где α или γ могут быть отрицательными. [*Указание*. Рассмотрите сначала случай $p \geqslant 2$, а затем воспользуйтесь равенством
$(1+x^2)^{-\alpha}(1+p^2)^{-\beta}(1+x^2)^{-\gamma} =$
$= [(1+x^2)^{-\alpha}(1+p^2)^{-\beta/2}(1+x^2)^{-\delta}][(1+x^2)^{\delta}(1+p^2)^{-\beta/2}(1+x^2)^{-\gamma}]$
с подходящим δ.]

(b) Пусть $R_0 = (H_0+1)^{-1}$, а R — другой оператор. Предположим, что $(1+x^2)^k (R - R_0)(1+x^2)^k \in \mathcal{J}_p$ для $p > n/2$ и всех k. Докажите по индукции, что $(1+x^2)^k (R^m - R_0^m)(1+x^2)^k \in \mathcal{J}_p$ для всех k, всех $m = 1, 2, 3, \ldots$ и $p > n/2m$ и, в частности, что $R^m - R_0^m \in \mathcal{J}_1$, если $m > n/2$.

(c) Докажите аналоги теорем XI.79 и XI.80 для произвольного n.

117. Будем говорить, что положительные самосопряженные операторы A и B удовлетворяют условию $A \leqslant B$, тогда и только тогда, когда $Q(B) \subset Q(A)$ и $(\varphi, A\varphi) \leqslant (\varphi, B\varphi)$ для всех $\varphi \in Q(B)$. Предположим, что A и B имеют ограниченные обратные. Докажите, что $B^{-1} \leqslant A^{-1}$. [*Указание*: $(\varphi, B^{-1}\varphi) \leqslant (A^{-1}\varphi, AB^{-1}\varphi) \leqslant (A^{-1}\varphi, \varphi)^{1/2}(B^{-1}\varphi, AB^{-1}\varphi)^{1/2} \leqslant$
$\leqslant (\varphi, A^{-1}\varphi)^{1/2}(\varphi, B^{-1}\varphi)^{1/2}$.]

†*118.* Восполните детали доказательства теоремы XI.81′.

119. Пусть W — ограниченное замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^2$ и $\Gamma = \{\langle x_1, x_2, x_3\rangle \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x_1, x_2\rangle \in W, x_3 = 0\}$. Цель этой задачи — доказательство конечности следа $R^2_{\Gamma;\, N} - R^2_0$.

(a) Покажите, что теорему XI.80 можно модифицировать так, чтобы ее утверждение оставалось справедливым при замене сферы S границей куба C.

(b) Пусть C — куб, а Γ' — часть гиперплоскости, рассекающая C на два прямоугольных параллелепипеда. Докажите, что $\tilde{R}_{\partial C \cup \Gamma; N}$ (оператор Лапласа в $L^2(C)$ с граничными условиями Неймана на $\partial C \cup \Gamma'$) есть оператор Гильберта — Шмидта. [*Указание.* Сосчитайте собственные значения $\tilde{R}$!]

*(c) Завершите доказательство конечности следа $R^2_{\Gamma; N} - R^2_0$.

120. В случае рассеяния на препятствии с граничными условиями Дирихле мы доказали существование $\Omega^{\pm}(A_D, A_0; \overset{*}{I}_{10})$. Пусть J — оператор умножения (обеих компонент) на функцию $\varphi \in C_0^\infty$, обращающуюся в нуль в окрестности препятствия. Докажите существование $\Omega^{\pm}(A_D, A_0; J)$.

121. Докажите единственность представлений, указанных в теоремах XI.82 и XI.83.

122. (a) Пусть $d\nu(\theta)$ — трансляционно-инвариантная борелева мера на окружности. Докажите, что $d\nu = c\,d\theta$. [*Указание.* Примените теорему Фубини к интегралу $\int f(\theta+\theta')\,d\nu(\theta)\,d\theta'$.]

(b) Пусть $d\nu(x)$ — трансляционно-инвариантная борелева мера на $\mathbb{R}$. Докажите, что $d\nu(x) = c\,dx$.

†*123.* Докажите, что операторнозначная функция $f(\sigma+iy)$ аналитична по норме в верхней полуплоскости, используя факт ее слабой аналитичности и привлекая идеи теоремы VI.4.

**124.* Используя идеи примера 3 § 11, проверьте выполнение условий теоремы XI.91 для группы, описывающей взаимодействие, из примера 2.

125. При дополнительном условии $q > 1$ в теореме XI.98 докажите, что $\|e^{itA}\varphi(t) - \varphi_+\|_{\text{scat}} \to 0$ при $t \to +\infty$

†*126.* Докажите, что оператор рассеяния для малых начальных данных, построенный в теореме XI.98, инъективен. [*Указание.* Обратите доказательство части теоремы XI.97, касающейся единственности.]

127. (a) Пусть g — положительная интегрируемая функция на $\mathbb{R}$, а f — измеримая ограниченная на каждом интервале $(-\infty, t)$ функция, удовлетворяющая неравенству

$$f(t) \leqslant c_0 + b_0 \int_{-\infty}^{t} f(s)\,g(s)\,ds \quad \text{для всех } t.$$

Докажите, что

$$f(t) \leqslant c_0 \exp\left(b_0 \int_{-\infty}^{t} g(s)\,ds\right) \quad \text{для всех } t.$$

*(b) Пусть α и β — две эрмитовы 2×2-матрицы, удовлетворяющие условиям

$$\alpha^2 = I = \beta^2, \qquad \beta\alpha + \alpha\beta = 0.$$

Докажите глобальное существование для связанных между собой уравнений Клейна — Гордона и Дирака в одномерном пространстве:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + i\left(i\alpha\frac{\partial}{\partial x} + m_e\beta\right)\psi = -\,ig\beta u\psi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m_0^2 u = \bar{\psi}\cdot\beta\psi,$$

где g — вещественная константа связи, $u(x, t)$ — вещественнозначная функция на $\mathbb{R}^2$, $\psi(x, t)$ — функция на $\mathbb{R}^2$ со значениями в $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, а $\bar{\psi}\cdot\beta\psi$ — скалярное произведение. [*Указание.* Найдите сохраняющиеся величины, воспользуйтесь оценкой Соболева $\|f\|_\infty \leqslant c\|f'\|_2^{1/2}\|f\|_2^{1/2}$ и тупо итерируйте.]

Литература: J. Chadam, Global solutions of the Cauchy problem for the (classical) coupled Maxwell — Dirac equations in one space dimension.— *J. Funct. Anal.* **13** (1973), 173—184.

†*128.* Восполните детали доказательства теоремы XI.100. В частности:
(a) Покажите, что для каждых t и η отображение M_t равномерно непрерывно на $\{\psi\in\Sigma_{\text{scat}} \mid \|\psi\|_{\text{scat}}\leqslant\eta\}$ в $\|\ \|_{\text{scat}}$-топологии. [*Указание.* Сначала покажите, что M_t непрерывно в $\|\cdot\|$-топологии.]
(b) Докажите инъективность Ω^+.

129. (a) Пусть $B=\sqrt{-\Delta+m^2}$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$. Покажите, что существует постоянная c, такая, что

$$\|B^{-1}\sin[(t-s)B]\,u^3(s)\|_\infty\leqslant C\|Bu(s)\|_2\|u(s)\|_\infty^2$$

для каждой $u(s)\in D(B^2)\subset L^2(\mathbb{R}^3)$.
(b) С помощью полученного неравенства, применяя технику теоремы XI.100, постройте волновые операторы для уравнения $u_{tt}-\Delta u+m^2u=-u^3$ в случае $n=3$.

130. Докажите существование глобального решения для нелинейного уравнения Шредингера (261) при $p\geqslant 1$ и $\lambda>0$.

Примечание. Задачи 131, 132, 133 требуют некоторого знакомства с квантовой теорией сложения угловых моментов.

131. Пусть $\sigma^{(\alpha)}$ и $\sigma^{(\beta)}$ — спины Паули в различных узлах гейзенберговой модели. Введем $k_{\alpha\beta}=(\sigma^{(\alpha)}+\sigma^{(\beta)})^2$. Докажите, что собственные значения $k_{\alpha\beta}$ равны 0 и 8 и что $\sigma^{(\alpha)}\cdot\sigma^{(\beta)}=1$, когда $k_{\alpha\beta}=8$, и $\sigma^{(\alpha)}\cdot\sigma^{(\beta)}=-3$, когда $k_{\alpha\beta}=0$.

**132.* (a) Пусть $\sigma^{(\alpha)}$, $\sigma^{(\beta)}$, $\sigma^{(\gamma)}$ — три спина Паули в различных узлах. Докажите, что (в операторном смысле)

$$(1-\sigma^{(\alpha)}\cdot\sigma^{(\beta)})\leqslant 2(1-\sigma^{(\alpha)}\cdot\sigma^{(\gamma)})+2(1-\sigma^{(\beta)}\cdot\sigma^{(\gamma)}).$$

(b) Пусть все $J_{\alpha\beta}\geqslant 0$ и $H=-\sum J_{\alpha\beta}\sigma^{(\alpha)}\cdot\sigma^{(\beta)}$, причем сумма берется по конечному множеству узлов, которое нельзя разбить на две невзаимодействующие части. Докажите, что наинизшее собственное значение H равно $-\sum J_{\alpha\beta}$, а его кратность равна $n+1$, где n — число узлов. [*Указание.* С помощью (a) докажите, что каждый собственный вектор, отвечающий собственному значению $-\sum J_{\alpha\beta}$, имеет полный угловой момент $S=\frac{1}{2}\sum\sigma^{(\alpha)}$ с $s=n/2$.]

**133.* a) Пусть $\sigma^{(\alpha)}$, $\sigma^{(\beta)}$ — спины Паули в различных узлах. Пусть ρ — матрица плотности с $\operatorname{Tr}(\rho\sigma^{(\alpha)}\cdot\sigma^{(\beta)})=1$. Докажите, что $\operatorname{Tr}(\rho\sigma^{(\alpha)})=\operatorname{Tr}(\rho\sigma^{(\beta)})$.
(b) Пусть ψ лежит в пространстве n спинов $\mathscr{H}_n$ системы в бесконечном объеме. Докажите, что

$$\lim_{\Lambda\to\infty}\left(\psi,\ \sum_{\alpha\in\Lambda}\frac{1}{2}(\sigma_z^{(\alpha)}+1)\psi\right)=n.$$

(c) Пусть H — гамильтониан гейзенберговой модели с бесконечным объемом при нулевой температуре. Пусть $\psi\in\mathscr{H}_n$ и $H\psi=0$. Докажите, что $(\psi, \sigma_z^{(\alpha)}\psi)$ не зависит от α, и выведите отсюда, что $n=0$.

†*134*. Проверьте (276).

•*135*. Пусть $H_2(K)$ — слоение, описанное в конце § 14. Пусть $J_2(K)$ и $H_2^{(0)}(K)$ — соответствующие слоения J_2 и $H_1^{\otimes}$. Докажите, что ранг, а потому и след оператора $H_2(K)J_2(K)-J_2(K)H_2^{(0)}(K)$ конечны. Выведите отсюда, что $\operatorname{Ran}\Omega_2^+=\operatorname{Ran}\Omega_2^-$.

136. Докажите, что внутреннее произведение (344) определено корректно, показав, что если v и w по-разному представимы в виде конечных линейных комбинаций векторов из D_0, то (v, w) не зависит от выбора представления.

†*137*. Проверьте, что операторы $h(t)+M+1$ в доказательстве теоремы XI.104 удовлетворяют условиям теоремы X.70.

†*138*. Проверьте часть (e) теоремы XI.104.

†*139*. Убедитесь, что заряженное скалярное поле массы m удовлетворяет обобщенным очевидным образом аксиомам Гординга — Вайтмана.

†*140*. Обобщите доказательство причинности из § 15, для того чтобы показать, что $[\varphi(f, t), \varphi(g, t')^*]=0$, когда $\{\langle x, t\rangle \mid x\in\operatorname{supp} f\}$ пространственно-подобно $\{\langle x, t'\rangle \mid x\in\operatorname{supp} g\}$.

†*141*. Восполните следующие детали доказательства теоремы XI.106.
(a) Завершите доказательство (295).
(b) Докажите, что $(a_i+\lambda_i b_i^*)e^{-\lambda_i a_i^* b_i^*}\psi_{\text{in}}=0$
(c) Восполните детали доказательства изометричности S^{-1}.

142. Фиксируем короткодействующий потенциал V в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\mathcal{F}$ — бозонное фоково пространство, построенное над $L^2(\mathbb{R}^3)$, т. е. $\mathcal{F}_n$ равно $L_s^2(\mathbb{R}^{3n})$ — пространству, состоящему из симметричных функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, заданных на $\mathbb{R}^{3n}$ и суммируемых с квадратом. Определим H в $\mathcal{F}$, потребовав, чтобы H оставлял $\mathcal{F}_n$ инвариантным, V был четным и

$$H\restriction\mathcal{F}_n=-\sum_{i=1}^{n}\Delta_i+\sum_{i<j}V(x_i-x_j).$$

Пусть Ω_0 — фоков вакуум. Определим «полевой оператор», полагая

$$\varphi(x, 0)=(2\pi)^{-3/2}\int[e^{-ip\cdot x}a^\dagger(p)+e^{ip\cdot x}a(p)]\,d^3p/\sqrt{2},$$
$$\varphi(x, t)=e^{itH}\varphi(x, 0)\,e^{-itH}.$$

Под регулярным волновым пакетом для свободного уравнения Шредингера будем подразумевать функцию $f(x, t)$ вида

$$f(x, t)=(2\pi)^{-3/2}\int e^{-itp^2}e^{ip\cdot x}g(p)\,d^3p$$

с $g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Имея такую f, определим $\varphi_f(t)$ соотношением

$$\varphi_f(t)=\int\varphi(x, t)\,f(x, t)\,d^3x.$$

(a) Докажите, что для любых регулярных волновых пакетов $f_1, \ldots, f_n$ вектор

$$\eta(t)\equiv\varphi_{f_1}(t)\ldots\varphi_{f_n}(t)\,\Omega_0$$

имеет предел при $t \to \pm\infty$ в топологии нормы, представив $\eta(t)$ в виде $e^{itH}e^{-itH_0}g$ с подходящим вектором g и воспользовавшись известными фактами о нерелятивистском рассеянии.

(b) Докажите (а) методом Хаага—Рюэля. [*Указание*. УФВ, взятые при равных временах, очень просты; вычислите их точно!]

(c) Предположим, что $H \restriction \mathcal{F}_2$ обладает связанным состоянием. Введите подходящие новые «полевые» операторы ψ так, чтобы, следуя процедуре (а), можно было получить волновые операторы канала для этого связанного состояния при применении ее к полям ψ и волновые операторы канала для свободных частиц и этого связанного состояния, если использовать φ и ψ.

Литература: лекции Хеппа и статья Сандаса, упомянутые в замечаниях к § 16.

143. Докажите, что УФВ явным образом выражаются через обобщенные функции Вайтмана по формулам

$$\mathcal{W}_{n,\,\mathrm{T}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{P \in \mathcal{P}_n} (-1)^{(|P|+1)} c_P \mathcal{W}_{k_1}(x_{l_1}, \ldots, x_{l_{k_1}}) \ldots \mathcal{W}_{k_l}(x_{l'_1}, \ldots, x_{l'_{k_l}}),$$

где $|P| = l$ и $c_P = \begin{cases} 1, & |P| = 1, \\ |P|-1, & |P| \geqslant 2. \end{cases}$

144. Предположим, что для $n = 1, 2, \ldots$ заданы функции $f_n(\lambda)$ на $(0, \infty)$ с асимптотическими рядами $f_n(\lambda) \sim \sum_m a_{n,\,m}\lambda^m$. Определим «усеченные» функции $f_{n,\,\mathrm{T}}(\lambda)$ по индукции с помощью соотношений

$$f_n(\lambda) = \sum N(m_1, \ldots, m_k) f_{m_1,\,\mathrm{T}}(\lambda) \ldots f_{m_k,\,\mathrm{T}}(\lambda),$$

где $N(m_1, \ldots, m_k)$ — число различных разбиений множества $\{1, \ldots, n\}$ на k подмножеств с $m_1, \ldots, m_k$ элементами (так что $N = n!/m_1! \ldots m_k!$, если все m_i различны, и меньше, если некоторые m_i совпадают). Под (n, m)-графом будем понимать множество как-то обозначенных n красных точек и m черных точек, соединенных между собой некоторым числом линий. Каждому графу Γ припишем его величину $V(\Gamma)$, руководствуясь двумя ограничениями: (i) величина графа не меняется при переобозначении красных (соответственно черных) точек; (ii) величина любого графа Γ, равного объединению связных графов $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, равна $V(\Gamma) = V(\Gamma_1) \ldots V(\Gamma_k)$. Предположим, что

$$a_{n,\,m} = \sum_{\Gamma \text{ есть } (n,\,m)\text{-граф}} V(\Gamma).$$

Докажите, что $f_{n,\,\mathrm{T}}(\lambda) \sim \sum a^{\mathrm{T}}_{n,\,m}\lambda^m$, где

$$a^{\mathrm{T}}_{n,\,m} = \sum_{\Gamma \text{—}\textit{связный } (n,\,m)\text{-граф}} V(\Gamma).$$

Примечание. Мы рассмотрели функции $f_n(\lambda)$ одного переменного только с целью сокращения обозначений. Таким же способом можно рассмотреть функции Вайтмана, зависящие от n переменных $x_1, \ldots, x_n$, и соответствующие УФВ. В таком случае аналог сформулированного выше результата приводит к такому следствию: в теориях, где функции $\mathcal{W}_n$ заданы «формальными» суммами фейнмановых диаграмм, УФВ задаются как суммы связных фейнмановых диаграмм. Это означает, что «связная» S-матрица из § 5 соотносится с полной S-матрицей так же, как УФВ — с вакуумными средними.

†145. Проверьте (314). [*Указание*. Докажите, что спектр $\mathbf{a}\cdot\mathbf{P}$ на $\{\psi_0\}^\perp$ содержит лишь абсолютно непрерывную часть, и примените лемму Римана — Лебега.]

†146. (a) Покажите, что свойство носителей $\hat{W}_n$ (теорема IX.32) эквивалентно тому, что носителем $\hat{\mathcal{W}}_n$ служит

$$S_n=\{\langle q_1, \ldots, q_n\rangle \mid q_1\in -\bar{V}_+, q_1+q_2\in -\bar{V}_+, \ldots, q_1+\ldots+q_{n-1}\in -\bar{V}_+, q_1+\ldots+q_n=0\}.$$

[*Указание*. $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_i-x_{i+1})\left(\sum\limits_{j=1}^{i} q_j\right)+x_n\sum\limits_{j=1}^{n} q_j$.]

(b) Пусть $\langle i, \ldots, i_{k_1}\rangle, \ldots, \langle i_1', \ldots, i_{k_l}'\rangle$ — разбиение множества $\{1, \ldots, n\}$, такое, что $i_1<\ldots<i_{k_1}$. Пусть

$$G(x_1, \ldots, x_n)=\mathcal{W}_{k_1}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k(1)}})\ldots\mathcal{W}_{k_l}(x_{i_1'}, \ldots, x_{i_{k(l)}'}).$$

Докажите, что носитель $\hat{G}$ лежит в S_n.

(c) Покажите, что если в (a) вместо $\hat{\mathcal{W}}_n$ взять $\hat{\mathcal{W}}_{n,\mathrm{T}}$ и считать выполненным свойство 9, то $-\bar{V}_+$ можно заменить на $-\bar{V}_{+,m}$.

(d) Пусть $\langle q_1, \ldots, q_n\rangle$ принадлежит носителю $\hat{\mathcal{W}}_{n,\mathrm{T}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_1'}, \ldots$ $\ldots, x_{i_l'})$. Докажите, что $\sum\limits_{i\in I} q_i\in -\bar{V}_{+,m}$ и $\sum\limits_{i\in I'} q_i\in \bar{V}_{+,m}$.

147. Докажите теорему XI.117 из замечаний, касающихся рассеяния в формализме C^*-алгебр.

148. (a) В обозначениях теоремы XI.114 покажите, что

$$N^{-1}\sum_{n=0}^{N-1}|F(n)|^2 \longrightarrow \sum_{x\in\mathbf{R}}|\mu(\{x\})|^2 \quad \text{при} \quad N\longrightarrow\infty.$$

(b) Пусть U — унитарный оператор на сепарабельном гильбертовом пространстве и $\{E_i\}_{i=1}^{M}$ $(M=1, \ldots, \infty)$ — его собственные значения, а P_i — соответствующие собственные проекторы. Покажите, что для любых векторов η, ψ

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1}\sum_{n=0}^{N-1}|(\eta, U^n\psi)|^2=\sum|(\eta, P_i\psi)|^2.$$

(c) Предположим что $U\varphi=\varphi$. Докажите, что

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1}\sum_{n=0}^{N-1}|(\eta, U^n\psi)-(\eta, \varphi)(\varphi, \psi)|=0$$

для всех $\eta, \psi\in\mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда φ — единственный собственный вектор U. (Это теорема VII.14 (b).)

149. (a) Отобразите $Q=\mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty}\{-1, 1\}$ на $[0, 1]$ с помощью функции T: $x\longmapsto$ $\longmapsto\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{-n}(x_n+1)$. Пусть μ_0 — мера на $\{-1, 1\}$, такая, что $\mu_0(\{1\})=$ $=\mu_0(\{-1\})=1/2$, а μ — мера-произведение на Q. Зададим ν на $[0, 1]$ формулой $\nu(A)=\mu(T^{-1}(A))$. Покажите, что ν — канторова мера.

(b) С помощью (a) покажите, что функция $F(t)=\int e^{ixt}\,d\nu(x)$, где ν — канторова мера, представима в виде

$$F(t)=e^{it/2}\prod_{n=1}^{\infty}\cos(3^{-n}t).$$

(c) Покажите, что $F(3^N(2\pi))$ не стремится к 0 при $N\to\infty$, и выведите отсюда, что $F(t)$ не стремится к 0 при $t\to\infty$.

(d) Пусть A — оператор умножения на x в $L^2(0,1;d\nu)$. Покажите, что $U(t)=e^{itA}$ не сходится слабо к нулю.

(e) Если Q отобразить на $[0,1]$ с помощью S: $x\mapsto\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n-1}(x_n+1)$, то $\nu(\cdot)=\mu(S^{-1}(\cdot))$ будет мерой Лебега на $[0,1]$. Почему нельзя утверждать, что $\tilde{F}(2^N(2\pi))$ не стремится к нулю?

(f) Докажите, что $t^{-1}\sin t=\prod_{n=1}^{\infty}\cos(2^{-n-1}t)$.

150. В рамках формализма Лакса—Филлипса предположим, что нам известно лишь то, что A_1 имеет только непрерывный спектр. С помощью леммы 3, доказанной перед теоремой XI.8, и теоремы РАГЭ покажите, что выполняется (219).

151. Пусть V ограничен относительно H_0 $(=-{}^1/_2\,\Delta)$. Фиксируем такое j, что $1-j\in C_0^\infty$, $j(x)=1$ (соответственно 0), если $|x|\geqslant 1$ (соответственно $|x|\leqslant 1/2$). Пусть $j_R(x)=j(x/R)$. Пусть при $z\notin\sigma(H_0)$

$$h(R,z)=\|V(H_0-z)^{-1}F(|x|\geqslant R)\|,$$

$$h_1(R,z)=\|V(H_0-z)^{-1}j_R\|,\quad h_2(R,z)=\|Vj_R(H_0-z)^{-1}\|.$$

(a) Докажите, что $h(R,z)\leqslant h_1(R,z)\leqslant h(R/2,z)$, и выведите отсюда, что $h\in L^1(0,\infty;dR)$ тогда и только тогда, когда $h_1\in L^1$ для того же z.

(b) Используя коммутатор, покажите, что

$$|h_1(R)-h_2(R)|\leqslant C_z R^{-1}h_1(R/2)$$

и что $h_1\in L^1$ тогда и только тогда, когда $h_2\in L^1$ для того же z.

(c) С помощью первой резольвентной формулы покажите, что условие $h_2\in L^1$ не зависит от z.

(d) Пусть V коммутирует с каждой функцией j_R. Докажите, что $h(R,z)$ лежит в L^1 тогда и только тогда, когда $\|F(|x|\geqslant R)V(H_0-z)^{-1}\|$ лежит в L^1.

152. (a) Обобщите формулы (270 п, о, р) на ток, так чтобы иметь возможность рассматривать многокомпонентные поля $\{u_\alpha\}_{\alpha=1}^{n}$ и такие V, которые перепутывают компоненты.

(b) **Внутренняя симметрия** имеет вид: $y=x$, $s=t$, V_α есть функция только $\{u_\beta\}$. Выпишите формулу сохраняющейся величины, отвечающей такой симметрии.

(c) Пусть $\mathscr{L}(u)=|u_t|^2-|\nabla u|^2-G(u)$. Предположим, что u может принимать комплексные значения, но G зависит только от $|u|$. Найдите сохраняющуюся величину Q (обычный «заряд»), соответствующую внутренней симметрии $u\mapsto e^{i\varepsilon}u$.

(d) Пусть u есть n-компонентная функция и $\mathscr{L}(u) = |u_t|^2 - |\nabla u|^2 - G(u)$. В случае когда $\mathscr{L}$ зависит только от $|u|$, выпишите сохраняющиеся величины при условии, что u вещественнозначна ($O(n)$-симметрия) или комплекснозначна ($U(n)$-симметрия). Предположим, что к $\mathscr{L}$ добавлен нарушающий симметрию член $-F(u_1)$. Вычислите источники, входящие теперь в прежде сохранявшиеся токи.

153. (a) Для уравнения $u_{tt} = \Delta u - |u|^{p-1} u$ пусть k_0 задан формулой (270d), где $u^4/4$ заменено на $(1/(p+1))|u|^{p+1}$. Найдите источник, отвечающий нарушенной конформной инвариантности.

(b) Покажите, что если $p > 3$, то $S(u) \leqslant 0$ при $t > 0$.

*(c) Докажите аналог теоремы XI.101 при $3 < p < 5$.

154. Предположим, что $\mathscr{L}(u)$ имеет вид $\partial_0 B_0 + \nabla \cdot \mathbf{B}$ с некоторыми локальными функциями B_0, $\mathbf{B}$ от u. Покажите, что каждая функция удовлетворяет соответствующему уравнению Эйлера—Лагранжа.

155. Найдите остальные девять сохраняющихся величин для (270b), т. е. шесть зарядов, отвечающих лоренцевым преобразованиям, и три других конформных заряда.

156. (a) Найдите ток и источник, отвечающие масштабным преобразованиям уравнения $u_{tt} = \Delta u - |u|^{p-1} u$, когда $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Выберите закон преобразования u так, чтобы $\delta\mathscr{L} = 0$ в «свободном» случае, когда $u_{tt} = \Delta u$.

(b) Повторите все это для конформного заряда.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ [1])

1) Индексы 1, 2 и 4 означают, что это страницы т. 1, 2 и 4 соответственно.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ[1])

[1]) Индексы 1, 2 и 4 означают, что это страницы т. 1, 2 и 4 соответственно

ПОДРОБНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ВЫШЕДШИХ В СВЕТ ЧЕТЫРЕХ ТОМОВ КНИГИ «МЕТОДЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

Том 1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ (М.: Мир, 1977)