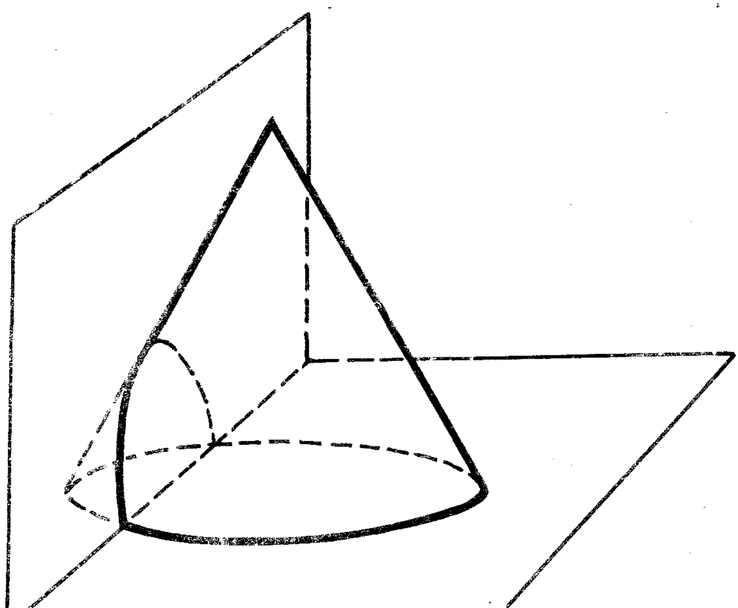
Е. В. МАМОНТОВ

О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ



МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е. В. МАМОНТОВ

О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

НОВОСИБИРСК
1980

УДК 517.944

Е.В.Мамонтов

О корректности задач математической физики.
Учебное пособие. НГУ,
1980, 1–62.

Учебное пособие содержит ряд примеров и контрпримеров, иллюстрирующих важное понятие корректности краевой задачи. Рассматривается несколько задач для уравнений с частными производными и либо доказывается корректность задачи, либо строится пример Адамара, указывающий на ее некорректность.

Учебное пособие может быть полезным студентам и аспирантам математического и физического факультетов в качестве дополнения к имеющимся учебникам по курсам математической физики.

Оглавление

П р е д и с л о в и е

Корректность - одно из основных понятий в теории дифференциальных уравнений. В курсах математической физики приводятся примеры некорректных краевых задач и доказывается корректность постановок ряда краевых задач для уравнений трех основных типов. Настоящее учебное пособие не является систематическим изложением вопроса, а задумано как дополнение к основному курсу и представляет собой набор примеров, иллюстрирующих общее понятие корректности.

При подборе материала использовались различные источники: в разделе 3 - известная работа П.Лакса, а в разделе 7 - статья К.Йоргенса. Большое влияние на выбор материала оказала очень содержательная книга Р.Куранта "Уравнения с частными производными".

Привлекаемый аппарат прост: не предполагается никаких дополнительных знаний, выходящих за рамки известных учебников (И.Г.Петровского, С.Л.Соболева, С.К.Годунова, А.Н.Тихонова и А.А.Самарского). Ссылки на литературу делаются по ходу изложения.

Нумерация формул своя в каждом разделе. Если используется формула из другого раздела, то это специально оговаривается.

Е.В.Мамонтов

I. Понятие корректности. Некоторые примеры

Как известно, краевая задача называется корректно поставленной, или корректной, если ее решение

I) существует,

2) единственно,

3) непрерывно зависит от данных задачи.

Здесь, однако, нужны некоторые уточнения. Если смысл пунктов I) и 2) более или менее понятен, то понятие непрерывной зависимости требует разъяснений. Обычно, когда речь идет о линейных задачах, решение ищется из некоторого линейного пространства E_1, а данные задачи принадлежат некоторому пространству E_2. Пусть нормы в пространствах E_1 и E_2 есть соответственно $\| \|_1$, $\| \|_2$. Тогда говорят, что решение u задачи непрерывно зависит от данных Φ, если при малых изменениях $\|\Phi\|_2$ мало меняется $\|u\|_1$. Ясно, как сформулировать соответствующее определение на ε, δ-языке.

Даже если задача возникает из приложений, необходимо доказывать корректность ее постановки. Ссылки на то, что решение должно существовать из физических соображений, представляются неправомерными, поскольку не ясно, является ли "хорошей" рассматриваемая математическая модель явления. Адамар был первым, кто четко сформулировал понятие корректности и привел примеры некорректно поставленных задач. В этом параграфе мы разберем некоторые примеры, иллюстрирующие все три пункта в понятии корректности.

Пример I. (Г.Леви)

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y} + 2(ix-y)\frac{\partial w}{\partial t} = f(t). \tag{I}$$

Функция $w(x,y,t) = w_1(x,y,t) + iw_2(x,y,t)$ – комплекснозначная функция от трех вещественных переменных x, y, t, $f(t)$ – вещественная функция вещественного переменного t. Разумееется, уравнение (I) может быть записано как система двух вещественных уравнений для двух вещественных функций w_1, w_2. Имеет место

ТЕОРЕМА. Если функция $f(t)$ не аналитическая, то уравнение (I) не имеет решений.

Это замечательный факт, так как речь идет не о какой-либо задаче, а просто о нахождении какого-нибудь решения уравнения. Таких решений не существует, если даже функция $f(t)$ бесконечно дифференцируемая, но не аналитическая, например $f(t)=e^{-1/t^2}$.

Прежде чем доказывать теорему, заметим, что система Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

может быть записана в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)w=0 \qquad \text{с} \qquad w=u+iv.$$

Напомним, что функция $w(x+iy)=w(z)$, имеющая непрерывные первые производные $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$, является аналитической функцией z тогда и только тогда, когда удовлетворяются уравнения Коши-Римана.

Приступим к доказательству теоремы. Мы будем доказывать, что если уравнение (I) имеет решение $w(x,y,t)$, то функция $f(t)$ - аналитическая. В плоскости (x,y) введем полярные координаты: полярный угол θ и $\rho=|z|^2=x^2+y^2$, так что $z=x+iy=\sqrt{\rho}\,e^{i\theta}$. Рассмотрим функцию

$$v(\rho,t)=\int_0^{2\pi} z\,w(\rho,\theta,t)\,d\theta.$$

Нетрудно проверить, что функция v имеет непрерывные первые производные. Имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)w=\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}+i\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)\frac{\partial w}{\partial\theta}+\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}+i\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\frac{\partial w}{\partial\rho}=$$

$$=\frac{\partial w}{\partial\theta}\left(\frac{i}{\sqrt{\rho}}e^{i\theta}\right)+\left(2\sqrt{\rho}\,e^{i\theta}\right)\frac{\partial w}{\partial\rho}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(i\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{\rho}}w\right)+\frac{\partial}{\partial\rho}\left(2\sqrt{\rho}\,e^{i\theta}w\right),$$

так как $\dfrac{\partial\rho}{\partial x}+i\dfrac{\partial\rho}{\partial y}=2\sqrt{\rho}\,e^{i\theta}$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}+i\dfrac{\partial\theta}{\partial y}=\dfrac{i}{\sqrt{\rho}}e^{i\theta}$.
Поэтому

$$i\frac{\partial v}{\partial t}=i\int_0^{2\pi} z w_t\,d\theta=\int_0^{2\pi}(ix-y)\,w_t\,d\theta=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[f(t)-(w_x+iw_y)\right]d\theta=$$
$$=\pi f(t)-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)w\,d\theta.$$

Преобразуем второе слагаемое

$$-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)w\,d\theta=$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{ie^{i\theta}}{\sqrt{\rho}}w\right)d\theta-\frac{\partial}{\partial\rho}\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho}\,e^{i\theta}w\,d\theta=$$
$$=-\frac{\partial}{\partial\rho}\int_0^{2\pi} z w\,d\theta=-\frac{\partial v}{\partial\rho}.$$

Тем самым функция v удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial\rho}+i\frac{\partial v}{\partial t}=\pi f(t). \qquad (2)$$

Запишем уравнение (2) несколько иначе:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\rho}+i\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[v+\pi i\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right]=0. \qquad (3)$$

Равенство (3) показывает, что функция $v+\pi i\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ – аналитическая функция от ρ, t. Если $\rho=0$, то $v=0$, и, значит, функция $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ – аналитическая функция от t. Но тогда $f(t)$ – аналитическая функция от t, и теорема доказана.

При нахождении решений тех или иных задач в виде рядов необходима осторожность, так как такого решения может и не быть, хотя гладкое решение существует.

Пример 2 (С.В.Ковалевская)

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad t>0,\ -\infty<x<\infty,$$
$$u(x,0)=\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad -\infty<x<\infty$$

Гладкое решение этой задачи существует и может быть построено, например, по формуле Пуассона. Попробуем найти решение в виде степенного ряда

$$u(x,t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} u_{ij} x^i t^j ,$$

учитывая, что

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad .$$

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\substack{i=0 \\ j=1}}^{\infty} j u_{ij} x^i t^{j-1} = \sum_{i,j=0}^{\infty} (j+1) u_{i,j+1} x^i t^j ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{\substack{j=0 \\ i=2}}^{\infty} i(i-1) u_{ij} x^{i-2} t^j = \sum_{i,j=0}^{\infty} (i+2)(i+1) u_{i+2,j} x^i t^j .$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем равенство

$$(j+1) u_{i,j+1} = (i+2)(i+1) u_{i+2,j} . \qquad (4)$$

Кроме того,

$$u_{i0} = \begin{cases} (-1)^s , & i = 2s , \\ 0 , & i = 2s+1 , \end{cases} \qquad (5)$$

так как

$$u(x,0) = \sum_{i=0}^{\infty} u_{i0} x^i = 1 - x^2 + x^4 + \dots \quad .$$

Из (4) и (5) получаем

$$u_{2s+1,k} = 0, \qquad u_{2s,k} = \frac{(2s+2k)!}{(2s)!\ k!} (-1)^{k+s} .$$

Тем самым

$$u(x,t) = \sum_{k,s=0}^{\infty} \frac{(2s+2k)!}{(2s)!\ k!} (-1)^{k+s} x^{2s} t^k . \qquad (6)$$

Решение в виде ряда найдено, однако ряд (6) расходится. Действительно,

$$u(0,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!} (-1)^k t^k ,$$

а этот ряд расходится при всех $t > 0$.

Известная теорема Коши-Ковалевской здесь неприменима. Заметим, что прямая $t=0$ является характеристикой.

Этим обстоятельством объясняется и то, что решение задачи Коши для уравнения теплопроводности не единственно.

Пример 3

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t>0, \quad -\infty < x < \infty,$$
$$u(x,0)=0.$$

Очевидно, что $u \equiv 0$ – решение задачи. Мы построим другое, ненулевое решение. Будем искать решение в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\, x^{2n},$$

где $a_n(t)$ – некоторые гладкие функции, такие, что $a_n(0)=0$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(t)\, x^{2n},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n(2n-1)\, a_n\, x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)(2n+1)\, a_{n+1}\, x^{2n},$$

откуда

$$a_n' = (2n+2)(2n+1)\, a_{n+1},$$

или

$$a_{n+1} = \frac{a_n'}{(2n+2)(2n+1)}.$$

Пусть $a_0(t)=f(t)$, тогда

$$a_n(t) = \frac{f^{(n)}(t)}{(2n)!}, \quad u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)}{(2n)!}\, x^{2n}, \tag{7}$$

причем $f^{(n)}(0)=0$.

Итак, если мы подберем функцию $f(t)$ такую, что все ее производные при $t=0$ обращаются в нуль, а ряд (7) сходится, то требуемое решение будет построено.

Рассмотрим для $\alpha > 0$ следующую функцию:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^\alpha}}, & t>0 \\ 0, & t \leqslant 0. \end{cases} \tag{8}$$

Ясно, что $f^{(n)}=0$, $n=1,2,\dots$ Оценим, как растут производные $f^{(n)}(t)$. Продолжим функцию $f(t)$ в комплексную плоскость: $f(z)=e^{-1/z^\alpha}$, $z=t+i\rho$. Согласно теореме Коши,

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi-t}\,d\xi ,$$

в качестве контура Γ может быть взят любой замкнутый контур, не содержащий внутри себя особую точку $z=0$. Мы выберем в качестве контура Γ окружность с центром в точке $z=t$ радиуса ct, $c<1$. Производные $f^{(n)}(t)$ могут быть вычислены следующим образом:

$$f^{(n)}(t)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-t)^{n+1}}\,d\xi .$$

Отсюда

$$|f^{(n)}(t)|\leqslant\frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{2\pi ct}{(ct)^{n+1}}\cdot\max_\Gamma|f(z)|=$$

$$\frac{n!}{(ct)^n}\max_\Gamma|f(z)|.$$

Осталось оценить $\max\limits_\Gamma|f(z)|$. Имеем

$$|f(z)|=|e^{-\frac{1}{z^\alpha}}|=|e^{-\mathrm{Re}\frac{1}{z^\alpha}-i\,\mathrm{Im}\frac{1}{z^\alpha}}|=e^{-\mathrm{Re}\frac{1}{z^\alpha}} . \tag{9}$$

Покажем, что существует постоянная c, $0<c<1$, такая, что $\mathrm{Re}\left(-\frac{1}{z^\alpha}\right)\leqslant-\frac{1}{2t^\alpha}$ при $|z-t|\leqslant ct$. Возьмем сначала $t=1$. Тогда нужно показать, что

$$-\mathrm{Re}\frac{1}{(1+i\rho)^\alpha}\leqslant-\frac{1}{2} . \tag{10}$$

Левая часть неравенства (10) – непрерывная функция ρ, равная -1 при $\rho=0$. Значит, $-\mathrm{Re}\frac{1}{(1+i\rho)^\alpha}\leqslant-\frac{1}{2}$ для $|z-1|=$ $=|\rho|\leqslant c$ с некоторой постоянной c. Общий случай сводится к рассмотренному введением $\tilde z=\frac{z}{t}$. Как только что доказано, существует постоянная c такая, что $-\mathrm{Re}\frac{1}{\tilde z^\alpha}\leqslant-\frac{1}{2}$ при $|\tilde z-1|\leqslant c$.

Но тогда

$$-\mathrm{Re}\frac{1}{\left(\frac{z}{t}\right)^\alpha}\leqslant-\frac{1}{2}\qquad\text{при } \left|\frac{z}{t}-1\right|\leqslant c ,$$

$$-\mathrm{Re}\frac{1}{z^\alpha}\leqslant-\frac{1}{2t^\alpha}\qquad\text{при } |z-t|\leqslant ct .$$

Используя полученную оценку и равенство (9), можем написать, что $\max\limits_{\Gamma} |f(z)| \leqslant e^{-\frac{1}{2t^\alpha}}$, откуда

$$|f^{(n)}(t)| \leqslant \frac{n!}{(ct)^n} e^{-\frac{1}{2t^\alpha}} = \frac{n!}{c^n} \psi(t)$$

с $\psi(t) = t^{-n} e^{-\frac{1}{2t^\alpha}}$. Функция $\psi(t)$ имеет максимум в точке $t = \left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, равный $(2n)^{\frac{n}{\alpha}}(\alpha e)^{-\frac{n}{\alpha}}$, поэтому при всех t

$$|f^{(n)}(t)| \leqslant n!\, c^{-n} (\alpha e)^{-\frac{n}{\alpha}} (2n)^{\frac{n}{\alpha}}. \qquad (11)$$

В силу оценки (11) ряд для решения $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)}{(2n)!} x^{2n}$ мажорируется рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\; c^{-n} (\alpha e)^{-\frac{n}{\alpha}} (2n)^{\frac{n}{\alpha}}}{(2n)!} x^{2n}. \qquad (12)$$

По признаку Даламбера ряд (12) сходится, если $x^2 < R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Вычислим указанный предел:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, c^{-n} (\alpha e)^{-\frac{n}{\alpha}} (2n)^{\frac{n}{\alpha}}}{(2n)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\; c^{-n-1} (\alpha e)^{-\frac{n+1}{\alpha}} (2n+2)^{\frac{n+1}{\alpha}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2c\alpha^{\frac{1}{\alpha}} (2n+2)^{1-\frac{1}{\alpha}}.$$

Если мы возьмем $\alpha > 1$, то $R = \infty$, и, значит, мажорантный ряд (12) сходится при всех x. Тем более сходится при всех x ряд (7). Итак, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(e^{-\frac{1}{t^\alpha}}\right)^{(n)}}{(2n)!} x^{2n}$$

при любом $\alpha > 1$ сходится при всех x, и его сумма может служить примером ненулевого решения задачи Коши с нулевыми начальными данными.

Классическим является следующий пример.

Пример 4 (Ж.Адамар)

Рассмотрим задачу Коши для системы уравнений Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \qquad (13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x),$$

$u_0(x)$, $v_0(x)$ – заданные гладкие функции. Система уравнений

(I3) имеет частные решения вида $u=Ue^{i(\alpha x+\beta y)}$, $v=Ve^{i(\alpha x+\beta y)}$ с постоянными α, β, связанными соотношением $\beta=\pm i\alpha$. Постоянные U, V таковы, что $V=iU$. Если взять $\alpha=n$, $\beta=-in$, то указанное семейство решений есть

$$u_n(x,y)=U_n e^{inx+ny},\quad v_n=iU_n e^{inx+ny} \tag{I4}$$

Так как система уравнений (I3) имеет вещественные коэффициенты, то вещественные части функций (I4) также удовлетворяют системе уравнений Коши-Римана. Итак, система уравнений Коши-Римана имеет однопараметрическое семейство решений (мы выбираем $U_n=e^{-\sqrt{n}}$)

$$u_n=e^{-\sqrt{n}}e^{ny}\cos nx,\quad v_n=-e^{-\sqrt{n}}e^{ny}\sin nx \tag{I5}$$

с начальными данными при $y=0$

$$u_n(x,0)=e^{-\sqrt{n}}\cos nx,\quad v_n(x,0)=-e^{-\sqrt{n}}\sin nx. \tag{I6}$$

Если $n\to\infty$, то функции (I6) вместе со всеми своими производными равномерно стремятся к нулю. В то же время $u_n(0,y)=e^{-\sqrt{n}}e^{ny}$, $v_n(0,y)=0$, и, следовательно, норма решения в пространстве непрерывных функций стремится к бесконечности. Приведенный пример указывает на отсутствие непрерывной зависимости решения от данных Коши для системы уравнений Коши-Римана, если рассмотрение ведется в пространствах непрерывных функций.

После того, как Адамар привел свой пример, были построены примеры "типа примера Адамара" и в других задачах. В таких случаях удобно просто говорить о "примерах Адамара". В дальнейшем мы будем излагать такие примеры, а сейчас остановимся еще на одном.

Пример 5

При $t<0$ ищется решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad -\infty<x<\infty, \tag{I7}$$

такое, что $u(x,0)=u_0(x)$ – гладкая функция. Покажем, что сформулированная задача некорректна. Уравнение (I7) имеет решения вида $u_n(x,t)=e^{-\sqrt{n}}e^{-n^2t}\cos nx$ с начальными данными

$$u_n(x,0)=e^{-\sqrt{n}}\cos nx. \tag{I8}$$

функции (I8) равномерно стремятся к нулю вместе со всеми своими производными. В то же время функции $u_n(0,t) = e^{-\sqrt{n}}\, e^{-n^2 t}$ стремятся к бесконечности, если n стремится к бесконечности, а $t < 0$. Как и в примере 4, отсюда следует, что в пространствах непрерывных функций задача Коши для уравнения теплопроводности в сторону отрицательных значений t является некорректной.

2. Связь между условиями, входящими в понятие корректности

Здесь мы покажем, что в некоторых случаях из однозначной разрешимости задачи при любых ее данных следует непрерывная зависимость решения от данных задачи. На самом деле такая ситуация является общей, но мы ограничимся рассмотрением задачи Коши для одного линейного дифференциального уравнения.

Итак, пусть L – линейный дифференциальный оператор порядка m :

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \mathcal{D}^\alpha, \qquad \mathcal{D}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$x = (x_1, \dots, x_n),\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),\ |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n .$$

Рассмотрим задачу Коши с данными на плоскости $x_n = 0$:

$$\begin{gathered} Lu = 0, \quad x_n > 0, \\ u\big|_{x_n = 0} = g_0, \dots, \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_n^{m-1}}\right|_{x_n = 0} = g_{m-1} . \end{gathered} \tag{I}$$

Пусть все коэффициенты $a_\alpha(x)$ и функции $g_0, \dots, g_{m-1} \in C^\infty$, являются бесконечно дифференцируемыми функциями своих аргументов. Мы считаем также, что данные Коши заданы на всей плоскости $x_n = 0$. Предположим, что задача (I) имеет и притом единственное решение из C^∞ при любых начальных данных из C^∞. Тогда

I) имеется конечная область зависимости,

2) верна априорная оценка, из которой следует непрерывная зависимость решения от начальных данных.

Тем самым верно, что (существование решения) + (единственность решения) $\Longrightarrow$ (непрерывная зависимость).

Поясним понятие конечной области зависимости. Говорят, что имеется конечная область зависимости, если для любого компактного множества A существует компактное подмножество K в плоскости $x_n = 0$ такое, что для данных Коши, равных нулю на K , решение равно нулю на A . В частности, множество A может состоять из одной точки.

Доказательство утверждений I), 2) будет опираться на теорему о замкнутом графике для метрических пространств. Мы не будем доказывать эту теорему, а приведем только ее формулировку и необходимые определения. Доказательство теоремы можно прочитать, например,. в книге У.Рудина "Функциональный анализ" (М.,Мир, 1975).

Пусть X - линейное метрическое пространство с метрикой $d(p_1, p_2), p_1, p_2 \in X$. Как обычно, предполагается, что алгебраические операции непрерывны.

О п р е д е л е н и е. Полное линейное метрическое пространство X называется F - пространством, если метрика инвариантна, т.е. $d(p_1+p_3, p_2+p_3) = d(p_1, p_2)$ для любых p_1, p_2, p_3 из X.

Пусть X, Y - два F - пространства с метриками d_1, d_2 соответственно. Пусть далее T - линейный оператор, действующий из X в Y. Графиком оператора T называется множество пар $(p, T(p))$, $p \in X$, $T(p) \in Y$. Ясно, что в множестве пар может быть введена метрика $d = d_1 + d_2$.

О п р е д е л е н и е. Оператор T называется замкнутым, если его график замкнут. Или оператор T замкнут, если из условий $p_n \to p$, $T(p_n) \to q$ следует, что p принадлежит области определения T и $T(p) = q$.

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА О ЗАМКНУТОМ ГРАФИКЕ. Линейный замкнутый оператор T, действующий из одного F - пространства X в другое F - пространство Y, определенный на всем X, непрерывен на X.

Вернемся к задаче (I). Рассмотрим множество C^∞ - решений уравнения $Lu = 0$. Это линейное пространство. Метрику зададим следующим образом: $d(u_1, u_2) = |u_1 - u_2|$ с

$$|u| = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i_1,\dots,i_j=1}^{n} \frac{1}{k!\,j!} \; \frac{\mu_{i_1\dots i_j}(k,u)}{1+\mu_{i_1\dots i_j}(k,u)}, \qquad (2)$$

где j, k - целые неотрицательные числа, а

$$\mu_{i_1\dots i_j}(k,u) = \max_{x_1^2+\dots+x_n^2 \leq k^2} \left| \frac{\partial^j u}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_j}} \right|,$$

Для $j=0$
$$\mu(\kappa, u) = \max_{x_1^2+\ldots+x_n^2 \le \kappa^2} |u|.$$

Ряд (2), очевидно, сходится для любой функции u, так как он мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{\kappa=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{n^j}{\kappa!\, j!}$.

Рассмотрим также линейное пространство C^∞ - наборов $g=[g_0,\ldots,g_{m-1}]$. Метрику в этом линейном пространстве определим равенством $d(g^1, g^2)=|g^1-g^2|$, где

$$|g| = |[g_0,\ldots,g_{m-1}]| = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i_1,\ldots,i_j=1}^{n-1} \frac{1}{\ell!\, j!} \frac{\hat{\mu}_{i_1\ldots i_j}(\ell,g)}{1+\hat{\mu}_{i_1\ldots i_j}(\ell,g)}, \quad (3)$$

$$\hat{\mu}_{i_1\ldots i_j}(\ell,g) = \max_{0\le q\le m-1}\ \max_{x_1^2+\ldots+x_n^2\le \ell^2} \left|\frac{\partial^j g_q}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_j}}\right|$$

Ряд (3) сходится для любого g. Очевидно, что оба метрических пространства являются полными.

Пусть T - оператор, переводящий набор $[g_0,\ldots,g_{m-1}]$ в решение u уравнения $Lu=0$. Оператор T определен, так как решение единственно. Кроме того, T

1) определен на всем пространстве наборов g,
2) линеен,
3) замкнут.

Первое справедливо, поскольку предполагается существование решения задачи при любых начальных данных; линейность и замкнутость очевидны. Мы можем воспользоваться теоремой о замкнутом графике, так как оба введенных пространства, очевидно, являются F - пространствами. Оператор T - непрерывен, в частности T непрерывен в нуле. Тем самым для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что как только $|g|<\delta$, то $|u|<\varepsilon$. Выведем отсюда справедливость следующего утверждения.

Для произвольного целого неотрицательного числа K найдутся целые положительные числа L, J со следующими свойствами: для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что как только

$$\sum_{\ell=0}^{L} \sum_{j=0}^{J} \sum_{i_1 \ldots i_j = 1}^{n-1} \hat{\mu}_{i_1 \ldots i_j}(\ell, q) < \delta,$$

то

$$\mu(\kappa, u) < \varepsilon.$$

Зададимся некоторым $\varepsilon_0 > 0$. Существует $\delta_0 > 0$ такое, что как только $\|[q_0, \ldots, q_{m-1}]\| < \delta_0$, то $\mu(\kappa, u) < \varepsilon_0$. В самом деле, непрерывность оператора T позволяет по заданному ε^* найти такое δ_0, что $|u| < \varepsilon^*$, если $\|[q_0, \ldots, q_{m-1}]\| < \delta_0$. Возьмем $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon_0}{\kappa!\,(1+\varepsilon_0)}$, тогда найденное δ_0 будет искомым. Найдутся такие числа $L(\delta_0)$, $J(\delta_0)$, что

$$\sum_{L(\delta_0)+1}^{\infty} \sum_{J(\delta_0)+1}^{\infty} \sum_{i_1, \ldots, i_j = 1}^{n-1} \frac{1}{\kappa!\, j!} \frac{\hat{\mu}_{i_1 \ldots i_j}}{1 + \hat{\mu}_{i_1 \ldots i_j}} < \frac{\delta_0}{2}.$$

Если потребовать, чтобы

$$\sum_{\ell=0}^{L(\delta_0)} \sum_{j=0}^{J(\delta_0)} \sum_{i_1 \ldots i_j = 1}^{n-1} \frac{1}{\ell!\, j!} \frac{\hat{\mu}_{i_1 \ldots i_j}}{1 + \hat{\mu}_{i_1 \ldots i_j}} < \frac{\delta_0}{2},$$

то будет выполняться неравенство $|q| < \delta_0$, и, значит, $\mu(\kappa, u) < \varepsilon_0$. Но

$$\sum_{\ell=0}^{L(\delta_0)} \sum_{j=0}^{J(\delta_0)} \sum_{i_1 \ldots i_j = 1}^{n-1} \frac{1}{\ell!\, j!} \frac{\hat{\mu}_{i_1 \ldots i_j}}{1 + \hat{\mu}_{i_1 \ldots i_j}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\ell=0}^{L(\delta_0)} \sum_{j=0}^{J(\delta_0)} \sum_{i_1 \ldots i_j = 1}^{n-1} \hat{\mu}_{i_1 \ldots i_j},$$

и, если

$$\sum_{\ell=0}^{L} \sum_{j=0}^{J} \sum_{i_1 \ldots i_j = 1}^{n-1} \hat{\mu}_{i_1 \ldots i_j} < \frac{\delta_0}{2} = \tilde{\delta},$$

то $\mu(\kappa, u) < \varepsilon_0$. Пусть теперь ε произвольно и $\varepsilon = \lambda \varepsilon_0$, тогда в качестве δ можно взять $\delta = \lambda \tilde{\delta}_0$, так как $\mu(\kappa, u)$ и $\hat{\mu}_{i_1 \ldots i_j}(\ell, q)$ зависят от q и u линейно.

Итак, $\mu(\kappa, u) < \varepsilon$, если

$$\sum_{\ell=0}^{L} \sum_{j=0}^{J} \sum_{i_1 \ldots i_j = 1}^{n-1} \hat{\mu}_{i_1 \ldots i_j}(\ell, q) < \delta,$$

причем числа L, J зависят только от K. Отсюда стандартным путем (от противного) выводится справедливость неравенства

$$\mu(K,u) \leqslant C \sum_{\ell=0}^{L} \sum_{j=0}^{J} \sum_{i_1\dots i_j=1}^{n-1} \hat{\mu}_{i_1\dots i_j}(\ell,g) \equiv C\Sigma(g) \qquad (4)$$

с некоторой постоянной $C>0$. Действительно, если такой постоянной не найдется, то существуют последовательности g^n, u_n такие, что $\frac{\mu(K,u_n)}{\Sigma(g^n)} \geqslant n$. Рассмотрим последовательности

$$\tilde{g}^n = \frac{g^n}{n\cdot\Sigma(g^n)}, \quad \tilde{u}_n = \frac{u_n}{n\cdot\Sigma(g^n)}.$$ Тогда

$\Sigma(g^n) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$. В то же время $\mu(K,\tilde{u}_n) = \frac{\mu(K,u_n)}{n\cdot\Sigma(g^n)} \geqslant 1$, и, например, для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ δ не найдется.

Неравенство (4) представляет собой априорную оценку решения в C – норме через начальные данные в некоторой C^s – норме. Эта оценка гарантирует непрерывную зависимость решения от начальных данных в указанных нормах.

Точно так же можно было бы показать справедливость априорной оценки, в левой части которой стоит любая величина $\mu_{i_1\dots i_j}(K,u)$. Иначе говоря, имеет место непрерывная зависимость производных любого порядка решения от начальных данных. Теперь становится понятен смысл примеров Адамара: отсутствие непрерывной зависимости в любых C^s – нормах позволяет утверждать, что либо решения задачи не существует при каких-то C^∞ – начальных данных, либо оно не единственно. Так, задача Коши для уравнения Лапласа имеет решение для аналитических начальных данных, но не разрешима, вообще говоря, для начальных данных из C^∞.

Покажем теперь, что из неравенства (4) следует наличие конечной области зависимости. Компакт A лежит в некотором шаре $x_1^2+\dots+x_n^2 \leqslant K^2$. Если начальные данные равны нулю в шаре радиуса L, то правая часть неравенства (4) равна нулю и $\mu(K,u)=0$. Тем самым $u=0$ в шаре $x_1^2+\dots+x_n^2 \leqslant K^2$ и, значит, на компакте A. В качестве компакта K может быть, следовательно, выбран шар $x_1^2+\dots+x_n^2 \leqslant L^2$.

3. Асимптотические решения систем уравнений первого порядка и корректность задачи Коши

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \qquad c=const,$$

имеет решения вида

$$u=Ae^{(\alpha x+\beta y+\gamma t)}, \quad A=const, \tag{I}$$

при условии, что постоянные α, β, γ удовлетворяют соотношению $\gamma^2=(\alpha^2+\beta^2)c^2$. Указанные решения - плоские волны - используются при анализе различных краевых задач. Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения с данными на плоскости S, определяемой уравнением $t=kx+ly$:

$$u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy}), \tag{2}$$

$$u|_S=\varphi, \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S=\psi.$$

Здесь $\frac{\partial u}{\partial n}$ означает производную по нормали. Можно считать, что на плоскости S задана функция и все ее первые производные, так как первое из данных Коши можно дифференцировать по направлениям, лежащим в плоскости S. Найдем значения плоской волны и ее производных на плоскости S:

$$u|_S=Ae^{[\alpha+\gamma k]x+[\beta+\gamma l]y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_S=\alpha u\big|_S, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_S=\beta u\big|_S, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_S=\gamma u\big|_S.$$

Полагаем

$$\alpha+\gamma k=i\lambda n, \qquad \beta+\gamma l=i\mu n,$$

n - целое положительное, λ, μ - вещественные. Тогда γ определится из уравнения $\frac{1}{c^2}\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$, или

$$\left(\frac{1}{c^2}-k^2-l^2\right)\gamma^2+2in\left[\lambda k+\mu l\right]\gamma+(\lambda^2+\mu^2)n^2=0. \tag{3}$$

Предположим, что $k^2+l^2\neq\frac{1}{c^2}$, т.е. что плоскость S не характеристическая. Уравнение (3) будет иметь корни с ненулевой вещественной частью, если выполняется неравенство

$$-(\lambda k+\mu \ell)^2-(\lambda^2+\mu^2)\left(\frac{1}{c^2}-k^2-\ell^2\right)>0,$$

или

$$\lambda^2\left(\ell^2-\frac{1}{c^2}\right)-2k\ell\lambda\mu+\mu^2\left(k^2-\frac{1}{c^2}\right)>0.$$

Если

$$k^2+\ell^2>\frac{1}{c^2} \tag{4}$$

всегда можно подобрать такие λ, μ, чтобы последнее неравенство удовлетворялось.

В этом случае говорят, что плоскость S не является плоскостью пространственного типа. Если выполняется противоположное неравенство $k^2+\ell^2<\frac{1}{c^2}$, то плоскость S называется плоскостью пространственного типа. Итак, если S не является плоскостью пространственного типа, то волновое уравнение имеет набор решений (полагаем $A=e^{-\sqrt{n}}$)

$$u_n=e^{-\sqrt{n}}e^{(i\lambda n-\gamma k)x+(i\mu n-\gamma\ell)y+\gamma t}$$

с γ, определяемым из уравнения (3). Вещественная часть γ отлична от нуля и, как нетрудно видеть, линейно зависит от n. Поэтому когда $n\to\infty$, $t\neq 0$, то $|u_n|\to\infty$, в то время как на плоскости S функции u_n стремятся к нулю вместе со всеми своими производными. Тем самым мы построили еще один пример Адамара и показали, что задача Коши для волнового уравнения с данными на плоскости не пространственного типа поставлена не корректно. Для плоскости S пространственного типа построение примера Адамара не проходит, так как корни уравнения (3) в этом случае чисто мнимые. В разделе 4 будет доказана корректность постановки задачи Коши с данными на поверхности пространственного типа.

Волновое уравнение может быть заменено системой уравнений первого порядка для функций $u_1=u_t,\ u_2=u_x,\ u_3=u_y$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c^2}\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{\partial u_3}{\partial y}=0,\\
&\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial u_3}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial y}=0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Нетрудно также переписать данные Коши задачи (2) как данные Коши для системы (5). Пример Адамара, построенный для волнового уравнения, дает пример Адамара для системы (5). Нужная последовательность решений системы (5) получается дифференцированием последовательности u_n.

Указанное построение примеров Адамара не проходит, если коэффициенты уравнений переменны, так как решений в виде плоских волн у таких уравнений не существует. Мы обсудим ниже построение решений, заменяющих, в некотором смысле, плоские волны, и построим примеры Адамара для систем уравнений с переменными коэффициентами.

Пусть M - линейный матричный дифференциальный оператор первого порядка

$$Mu = u_t + \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + Qu, \tag{6}$$

действующий на вектор-функции u с m компонентами; A_j, Q - $m \times m$ - матрицы, являющиеся функциями от $x = (x_1, \dots, x_n)$ и t. Вместо суммы $\sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial u}{\partial x_j}$ будем писать просто $\sum_{j=1}^{n} A_j u_{x_j}$. Тогда

$$Mu = u_t + \sum_{j=1}^{n} A_j u_{x_j} + Qu. \tag{6^{I}}$$

Мы хотим построить формальные решения

$$u \sim e^{i\xi\ell(x,t)} \left\{ v_0 + \frac{v_1}{\xi} + \frac{v_2}{\xi^2} + \dots \right\} \tag{7}$$

уравнения $Mu = 0$. Здесь ℓ - скаляр, v_K - вектор-функции, ξ - вещественный параметр. Подставим (7) в (6), получим

$$Mu = i\xi e^{i\xi\ell} \left[\ell_t \cdot I + \sum_{j=1}^{n} \ell_{x_j} A_j \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{\xi^n} + \ell^{i\xi\ell} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Mv_n}{\xi^n}.$$

Коэффициент при ξ есть

$$i e^{i\xi\ell} \left[\ell_t \cdot I + \sum_{j=1}^{n} \ell_{x_j} A_j \right] v_0, \tag{8}$$

(I - единичная матрица), а при ξ^{-n}, $n \geqslant 0$

$$i e^{i\xi\ell} \left[\ell_t \cdot I + \sum_{j=1}^{n} \ell_{x_j} A_j \right] v_{n+1} + e^{i\xi\ell} Mv_n. \tag{9}$$

Потребуем, чтобы эти величины обращались в нуль. Для выражения (8) это требование означает, что матрица $\ell_t + \sum_{j=1}^{n} \ell x_j A_j$ зануляет вектор v_0. Если $v_0 \neq 0$, то это может быть, если только матрица $\ell_t+\sum_{j=1}^{n}\ell_{x_j}A_j$ вырождена.

Предположим, что в каждой точке x,t матрица $\sum_{j=1}^{n}p_jA_j$ имеет m различных собственных значений для всех вещественных значений параметров p_j. Собственные значения $\lambda_\nu(x,t,p_1,\dots,p_n)$, $\nu=1,\dots,m$, зависят аналитически от элементов матрицы $\sum_{\nu=1}^{n}p_jA_j$, поэтому они – аналитические функции от p и имеют ту же гладкость по x,t, что и матрицы A_j.

Условие вырожденности матрицы $\ell_t\cdot I+\sum_{j=1}^{n}\ell_{x_j}A_j$ означает, что $-\ell_t$ – собственное значение матрицы $\sum_{j=1}^{n}\ell_{x_j}A_j$, и приводит к следующему дифференциальному уравнению для <u>фазовой функции ℓ:</u>

$$\ell_t+\lambda(x,t,\ell_{x_1},\dots,\ell_{x_n})=0, \qquad (10)$$

где λ – одна из m функций λ_ν.

Пусть λ_ν – вещественнозначны и дважды непрерывно дифференцируемы, тогда при достаточно малых t можно построить решение уравнения (10) с заданными значениями на плоскости $t=0$. Если матрицы A_j дважды непрерывно дифференцируемы по x,t, то и λ_ν дважды непрерывно дифференцируемы по x,t. От остальных своих аргументов они зависят аналитически. Напомним, как можно решить задачу Коши

$$\ell_t+\lambda(x,t,p_1,\dots,p_n)=0, \qquad (10^{I})$$

$$\ell\big|_{t=0}=\ell_0(x).$$

Продифференцируем уравнение (10^{I}) по x_j:

$$\frac{\partial\ell_t}{\partial x_j}+\frac{\partial\lambda}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\lambda}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial p_k}{\partial x_j}=0.$$

Но
поэтому $\dfrac{\partial\ell_t}{\partial x_j}=\dfrac{\partial\ell_{x_j}}{\partial t}=\dfrac{\partial p_j}{\partial t}$, $\quad\dfrac{\partial p_k}{\partial x_j}=\dfrac{\partial\ell_{x_k}}{\partial x_j}=\dfrac{\partial\ell_{x_j}}{\partial x_k}=\dfrac{\partial p_j}{\partial x_k}$,

$$\frac{\partial p_j}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial p_j}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial p_k}=-\frac{\partial\lambda}{\partial x_j},\quad j=1,\dots,n. \qquad (11)$$

Введем кривые, задаваемые уравнениями $\dfrac{dx_k}{dt}=\dfrac{\partial\lambda}{\partial p_k}$, тогда левая часть (11) представляет собой производную $\dfrac{dp_j}{dt}$ вдоль этих кривых, и равенство (II) может быть переписано следующим образом:

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial\lambda}{\partial x_j}.$$

Введенные кривые называются характеристиками уравнения (IO) и бихарактеристиками для оператора M. Из определения следует, что функция λ однородна первой степени по переменным p, так что справедливо тождество Эйлера $\lambda = p\cdot\lambda_p$. Вычислим $\frac{d\ell}{dt}$ вдоль бихарактеристик:

$$\frac{d\ell}{dt} = \ell_t + \ell_x\cdot\lambda_p = \ell_t + p\cdot\lambda_p = \ell_t + \lambda = 0.$$

Мы получаем, следовательно, что фазовая функция ℓ постоянна вдоль бихарактеристик. Теперь ясно, как решить задачу Коши. Нужно провести бихарактеристическую кривую $x = x(t)$ через каждую точку (x, t). Если эта кривая пересекает плоскость $t = 0$ в точке x_0, то нужно положить $\ell(x,t) = \ell_0(x_0)$. Нахождение бихарактеристики, проходящей через точку $(x_0, 0)$, сводится к решению задачи Коши для канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x_j}{dt} = \frac{\partial\lambda}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial\lambda}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n, \tag{I2}$$

с начальными данными

$$x_j(0) = (x_0)_j, \quad p_j(0) = p_j^0 = \left.\frac{\partial\ell_0}{\partial x_j}\right|_{x=x_0}.$$

Если λ – комплекснозначная функция, то существование решения уравнения (IO) следует из теоремы Коши-Ковалевской. В этом случае нужно считать, что матрицы A_j зависят от x, t аналитически.

Обозначим через

$$R = R_\nu(x, t, p_1, \dots, p_n), \quad \nu = 1, 2, \dots, m,$$

правый собственный вектор матрицы $\sum_{j=1}^{n} p_j A_j$, отвечающий собственному значению λ_ν. В качестве ℓ возьмем какое-нибудь решение уравнения (IO) и подставим в (8) и (9). Заметим, что для обращения (8) в нуль должно быть.

$$v_0 = \sigma R, \tag{13}$$

где $\sigma = \sigma(x, t)$. Чтобы (9) для $n = 0$ равнялось нулю, v_1 и v_0 должны удовлетворять условию

$$\left[\ell_t I + \sum_{j=1}^{n} \ell_{x_j} A_j \right] v_1 - iM v_0 = 0 . \tag{14}$$

Уравнение (14) – линейное уравнение для v_1 с вырожденной матрицей и, значит, имеет решение тогда и только тогда, когда iMv_0 ортогонально левому нуль-вектору L матрицы $\ell_t I + \sum_{j=1}^{n} \ell_{x_j} A_j$ (вектору, удовлетворяющему равенсту $L(\ell_t I + \sum_{j=1}^{n} \ell_{x_j} A_j$). Тогда

$$LMv_0 = 0,$$

или в силу (13)

$$LM[\sigma R] = L\left\{ \sigma_t R + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{x_j} A_j R + Q\sigma R + \sigma R_t + \sigma \sum_{j=1}^{n} A_j R_{x_j} \right\} =$$

$$= L\left\{ \left(\sigma_t I + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{x_j} A_j\right) R + \sigma M[R] \right\} = 0.$$

Нормируем L и R так, что $LR = 1$, и положим $LA_j \cdot R = a_j$, $LM[R] = b$. Тогда последнее соотношение может быть переписано как

$$\sigma_t + \sum_{j=1}^{n} a_j \sigma_{x_j} + b\sigma = 0, \tag{15}$$

т.е. как уравнение первого порядка.

Направление дифференцирования в (15) – бихарактеристическое. В самом деле, дифференцируя тождество

$$\left(\sum_{j=1}^{n} p_j A_j \right) R = \lambda R$$

по p_μ, получаем

$$A_\mu R + \left(\sum_{j=1}^{n} p_j A_j \right) R_{p_\mu} = \lambda_{p_\mu} R + \lambda R_{p_\mu} .$$

Умножив это соотношение на вектор L, получим соотношение

$$LA_\mu R = \lambda_{p_\mu} .$$

Из полученного равенства и (12) следует справедливость нашего утверждения.

Мы будем выделять случай, когда величины λ, ℓ, R, L – вещественны. Это будет, когда плоскость $t = 0$ – <u>пространственного типа</u>.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Плоскость $t=0$ называется пространственно-подобной (пространственного типа) для оператора M, если собственные значения λ_ν, $\nu=1,2,\ldots,m$, матрицы $\sum_{j=1}^{n} p_j A_j$ вещественны для всех вещественных p_j.

В этом случае мы можем построить решение σ уравнения (I5) с заданными начальными условиями при $t=0$ методом характеристик.

Если плоскость $t=0$ не является пространственноподобной, то нужно привлекать теорему Коши-Ковалевской, считая начальные данные аналитическими.

Функция v_0 найдена, так как найден множитель σ. Для определения v_1 заметим, что

$$v_1 = \sigma_1 R + h_1$$

с h_1, определяемым однозначно из (I4). Чтобы найти σ_1, нужно привлечь уравнение для v_2, получающееся приравниванием нулю выражения (9) при $n=1$, и провести предыдущие рассуждения. Множитель σ_1 будет удовлетворять дифференциальному уравнению, аналогичному (I5), и так далее. Мы должны предполагать при этом нужную гладкость у матриц A_j.

Конечный отрезок

$$u_N = e^{i\xi\ell}\left\{v_0 + \frac{v_1}{\xi} + \ldots + \frac{v_N}{\xi^N}\right\}$$

построенного формального ряда удовлетворяет равенству

$$Mu_N = e^{i\xi\ell}\frac{Mv_N}{\xi^N}, \tag{I6}$$

поэтому ряд

$$e^{i\xi\ell}\left\{v_0 + \frac{v_1}{\xi} + \ldots\right\}$$

называют асимптотическим решением уравнения $Mu=0$. Мы не будем останавливаться на приближенном решении задачи Коши с помощью таких рядов, а используем их для построения примеров Адамара.

ТЕОРЕМА. Пусть M – линейный оператор первого порядка

$$Mu = u_t + \sum_{j=1}^{n} A_j u_{x_j} + Qu,$$

коэффициенты A_j, Q которого – аналитические функции x, t. Если плоскость $t=0$ не пространственного типа для M, то задача Коши с данными на плоскости $t=0$ поставлена некорректно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матрица A предполагается такой, что $\sum_{j=1}^{n} p_j A_j$ имеет m различных собственных значений $\lambda_\nu(x,t,p_1,\dots,p_n)$, $\nu=1,2,\dots,m$. Существует точка $(x_0, 0)$ такая, что для некоторого набора $p_1,\dots,p_n$ вещественных чисел среди собственных значений λ_ν имеется невещественное. Обозначим его $\lambda(x,t,p_1,\dots,p_n)$. Мнимая часть λ не равна нулю для $x=x_0$ и t достаточно малого. Пусть $\ell(x,t)$ – решение уравнения (10) с начальными данными

$$\ell(x,0)=\sum_{j=1}^{n} p_j x_j . \tag{17}$$

Ясно, что $\mathcal{J}m\,\ell$ – мнимая часть ℓ – не равна нулю для $x=x_0$ и t достаточно малого. Пусть G – любая ограниченная область в x,t – пространстве, содержащая точку $(x_0, 0)$, $\mathcal{D}$ – ее пересечение с плоскостью $t=0$, и пусть $\rho = \max_{(x,t)\in\bar{G}} \mathcal{J}m\,\ell(x,t)$. Так как мнимая часть ℓ меняет знак при $t=0$, то $\rho>0$.

Рассмотрим отрезок u_N формального ряда длины N

$$u_N = e^{i\xi\ell}\left\{v_0+\frac{v_1}{\xi}+\dots+\frac{v_N}{\xi^N}\right\}.$$

Обозначим $Mu_N=f_\xi$, $u_N(x,0)=\varphi_\xi$. При любом $k\geq 0$ C^k – нормы этих величин в областях G и $\mathcal{D}$ соответственно ведут себя при $\xi\to+\infty$ следующим образом:

$$\|f_\xi\|_k = O(e^{\rho\xi}\xi^{k-N}),\quad \|\varphi_\xi\|_k = O(\xi^k), \tag{18}$$

где символ O означает, что левые части равенств не превосходят правых, умноженных на некоторые постоянные. Пусть максимум ρ достигается в точке p^*, тогда

$$u_\xi(p^*) = e^{\rho\xi}v_0(p^*)\left[1+O(\xi^{-1})\right]. \tag{19}$$

Для достаточно малых t функция v не обращается в нуль. Это видно из проделанных выше построений. Выберем $N>k$ и вместо u рассмотрим $\tilde{u}=e^{-\xi\rho}\xi^{\alpha}$, $0<\alpha<N-k$. Тогда, с понятными обозначениями, из (18)

$$\|\tilde{f}_\xi\|_k = O(\xi^{k-N+\alpha}),\quad \|\varphi_\xi\|_k = O(e^{-\xi\rho}\xi^{k+\alpha}), \tag{18$^{\rm I}$}$$

а из (I9)

$$\tilde{u}_\xi(P^*) = \xi^\alpha v_0(P^*)\left[1 + O(\xi^{-1})\right]. \qquad (I9^I)$$

Равенства $(I8^I)$, $(I9^I)$ показывают, что при $\xi \to \infty$ $\|\tilde{f}_\xi\|_\kappa \to 0$, $\|\varphi_\xi\|_\kappa \longrightarrow 0$, но $u_\xi(p^*) \to \infty$. Тем самым некорректность задачи Коши в этом случае установлена. Легко убедиться, что сформулированное определение плоскости пространственного типа дает плоскость $t = \kappa x + \ell y$ - пространственного типа для системы (5), если и только если $\kappa^2 + \ell^2 < \frac{1}{c^2}$. Чтобы убедиться в этом, нужно сделать замену переменных:

$$t' = t - \kappa x - \ell y, \quad x' = x, \quad y' = y,$$

переводящую нашу плоскость в плоскость $t' = 0$.

4. Задачи Коши и Гурса для волнового уравнения

Мы рассмотрим здесь волновое уравнение с тремя пространственными переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t),\ c=const \qquad (\mathrm{I})$$

и решим задачу Коши с данными на поверхности S, задаваемой уравнением $t=\chi(x,y,z)$. В разделе 3 был построен пример Адамара (очевидным образом обобщающийся на случай трех пространственных переменных), доказывающий некорректность задачи Коши для аналитической поверхности S непространственного типа.

Прежде всего поверхность S не должна быть характеристической. Вообще поверхность $\Phi(x,y,z,t)=0$ – характеристическая, если $\Phi_t^2=c^2(\Phi_x^2+\Phi_y^2+\Phi_z^2)$ в силу $\Phi=0$. Особую роль среди всех характеристических поверхностей играет характеристический конус $c^2(t-t_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2-(z-z_0)^2=0$ с вершиной в точке $(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t_0)$. Так, решение задачи Коши с данными

$$u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0)=\psi(x,y,z) \qquad (2)$$

зависит от начальных данных φ и ψ и их производных до некоторого порядка только на пересечениии характеристического конуса с плоскостью $t=0$, а в случае двух пространственных переменных $x,\ y$ – и от значений функций $\varphi,\ \psi$ внутри области, ограниченной указанной кривой. Решение задачи (I),(2) дается явными формулами, которые показывают, что решение существует, если f,ψ дважды, а φ трижды непрерывно дифференцируемы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Поверхность S, задаваемая уравнением $t=\chi(x,y,z)$, называется поверхностью пространственного типа (пространственноподобной) для волнового уравнения, если выполняется неравенство

$$\chi_x^2+\chi_y^2+\chi_z^2<\frac{1}{c^2}. \qquad (3)$$

Так, плоскость $t=0$ – пространственного типа.

Будем считать нашу поверхность S пространственноподобной, лежащей выше плоскости $t=0$ ($\chi>0$), и займемся решением задачи Коши для уравнения (I) в области $t>\chi(x,y,z)$ с данными

$$u\Big|_{t=\chi(x,y,z)}=\varphi(x,y,z),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=\chi(x,y,z)}=\psi(x,y,z). \tag{4}$$

Функции φ, ψ и χ считаем достаточно гладкими. В процессе решения задачи требования гладкости будут уточнены.

Решение задачи (I),(4) получается в результате решения двух вспомогательных задач.

Задача I. Ищется такая функция $\bar{u}$, что

$$\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2}\right)+\bar{f}(x,y,z,t),$$

$$\bar{u}\big|_S=\varphi(x,y,z),\quad \bar{u}_t\big|_S=\psi(x,y,z).$$

Функция $\bar{f}$ не задается заранее. Это любая функция, такая, что на S разность $f-\bar{f}$ обращается в нуль вместе со своими первыми и вторыми производными.

Если функция $\bar{u}$ будет найдена, то $u=\bar{u}+\bar{\bar{u}}$, где $\bar{\bar{u}}$ – решение задачи 2.

Задача 2.

$$\frac{\partial^2\bar{\bar{u}}}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2\bar{\bar{u}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{\bar{u}}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\bar{\bar{u}}}{\partial t^2}\right)+\bar{\bar{f}},\quad \bar{\bar{f}}=f-\bar{f},$$

$$\bar{\bar{u}}\big|_S=0,\quad \bar{\bar{u}}_t\big|_S=0.$$

Решим сначала задачу I. Введем новую переменную $s=t-\chi(x,y,z)$. Тогда

$$\bar{u}(x,y,z,t)=\bar{u}(x,y,z,s+\chi(x,y,z))=v(x,y,z,s),$$

$$\bar{u}_t=v_s,\quad \bar{u}_{tt}=v_{ss},\quad \bar{u}_x=v_x-v_s\cdot\chi_x,$$

$$\bar{u}_{xx}=v_{xx}-2\chi_x v_{xs}+v_{ss}\cdot\chi_x^2-v_s\cdot\chi_{xx},$$

$$\bar{u}_{yy}=v_{yy}-2\chi_y\cdot v_{ys}+v_{ss}\cdot\chi_y^2-v_s\cdot\chi_{yy},$$

$$\bar{u}_{zz} = v_{zz} - 2\chi_z \cdot v_{zs} + v_{ss} \cdot \chi_z^2 - v_s \cdot \chi_{zz}.$$

Поэтому функция v удовлетворяет уравнению

$$M[v] \equiv v_{ss}\left[1 - c^2(\chi_x^2 + \chi_y^2 + \chi_z^2)\right] + 2c^2\left[\chi_x v_{xs} + \chi_y v_{ys} + \chi_z \cdot v_{zs}\right]$$

$$- c^2(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) + c^2(\chi_{xx} + \chi_{yy} + \chi_{zz}) v_s = \bar{f}(x, y, z, s+\chi),$$

или

$$M[v] \equiv L_0[v_{ss}] + L_1[v_s] + L_2[v] = \bar{f}(x, y, z, s+\chi), \tag{5}$$

$$L_0 = 1 - c^2(\chi_x^2 + \chi_y^2 + \chi_z^2), \quad L_1 = 2c^2\left(\chi_x \frac{\partial}{\partial x} + \chi_y \frac{\partial}{\partial y} + \chi_z \frac{\partial}{\partial z}\right) + c^2 \Delta\chi,$$

$$L_2 = -c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right).$$

Кроме того, должны удовлетворяться начальные данные

$$v\big|_{s=0} = \varphi(x, y, z), \qquad v_s\big|_{s=0} = \psi(x, y, z). \tag{6}$$

Обозначим $v_k = \dfrac{\partial^k v}{\partial s^k}\Big|_{s=0}$, $\bar{f}_k = \dfrac{\partial^k \bar{f}}{\partial s^k}\Big|_{s=0}$. Подберем коэффициенты v_k так, чтобы функция

$$v(x, y, z, s) = \sum_{k=0}^{4} v_k(x, y, z) \frac{s^k}{k!}$$

решала задачу I, т.е. удовлетворяла соотношениям (5),(6). Из (6) получаем

$$v_0(x, y, z) = \varphi, \qquad v_1 = \psi.$$

Продифференцируем уравнение (5) k раз по s и положим $s=0$. Тогда

$$L_0[v_{k+2}] + L_1[v_{k+1}] + L_2[v_k] = \bar{f}_k.$$

Полагая здесь $k = 0, 1, 2$, получаем

$$\begin{aligned} L_0[v_2] + L_1[v_1] + L_2[v_0] &= \bar{f}_0, \\ L_0[v_3] + L_1[v_2] + L_2[v_1] &= \bar{f}_1, \\ L_0[v_4] + L_1[v_3] + L_2[v_2] &= \bar{f}_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Потребуем теперь, чтобы

$$\bar{f}_0 = f\big|_S, \quad \bar{f}_1 = \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_S, \quad \bar{f}_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Big|_S.$$

Из соотношений (7) величины v_2, v_3, v_4 определяются. Тогда

$$\bar{f} = M[v] = L_0[v_{ss}] + L_1[v_s] + L_2[v] =$$
$$= \bar{f}_0 + s\bar{f}_1 + \frac{s^2}{2}\bar{f}_2 + \frac{s^3}{6}\left(L_1[v_4] + L_2[v_3]\right) +$$
$$+ \frac{s^4}{24} L_2[v_4].$$

дважды непрерывно дифференцируема и разность $f - \bar{f}$ обращается в нуль на поверхности S вместе со своими первыми и вторыми производными.

Перейдем к решению задачи 2. Определим функцию $\bar{\bar{f}}$ равенством

$$\bar{\bar{f}} = \begin{cases} f - \bar{f} & \text{при} \quad t \geqslant \chi(x, y, z) \\ 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \chi(x, y, z) \end{cases}$$

и решим задачу Коши

$$\bar{\bar{u}}_{tt} = c^2(\bar{\bar{u}}_{xx} + \bar{\bar{u}}_{yy} + \bar{\bar{u}}_{zz}) + \bar{\bar{f}}, \quad t > 0,$$
$$\bar{\bar{u}}\big|_{t=0} = 0, \qquad \bar{\bar{u}}_t\big|_{t=0} = 0.$$

Это можно сделать, так как $\bar{\bar{f}}$ дважды непрерывно дифференцируема. Функция $\bar{\bar{u}}$ будет решением задачи 2, если выполняются равенства

$$\bar{\bar{u}}\big|_S = 0, \qquad \bar{\bar{u}}_t\big|_S = 0.$$

Чтобы доказать их справедливость, возьмем точку (x_0, y_0, z_0, t_0) на поверхности S и рассмотрим половину характеристического конуса с вершиной в этой точке, соответствующую значениям $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Тем самым речь идет о куске поверхности

$$c(t_0 - t) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0.$$

Точки (x, y, z, t), лежащие в замыкании области, ограниченной этим куском поверхности и плоскостью $t = 0$, характеризуются неравенствами

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \leqslant c(t_0 - t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0.$$

Все эти точки лежат под поверхностью S, т.е. $t \leqslant \chi(x, y, z)$. В самом деле,

$$c(\chi(x,y,z,t)-t)=c(t_0-t)+c(\chi(x,y,z)-\chi(x_0,y_0,z_0))\geq$$
$$\geq\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}+$$
$$+c\int_0^1\frac{d}{d\alpha}\chi[x_0+\alpha(x-x_0),\ y_0+\alpha(y-y_0),\ z_0+\alpha(z-z_0)]d\alpha=$$
$$=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}+$$
$$+c\int_0^1[(x-x_0)\chi_x+(y-y_0)\chi_y+(z-z_0)\chi_z]d\alpha.$$

Но

$$|(x-x_0)\chi_x+(y-y_0)\chi_y+(z-z_0)\chi_z|\leq$$
$$\leq\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\sqrt{\chi_x^2+\chi_y^2+\chi_z^2}\leq$$
$$\leq\frac{1}{c}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

так как $\chi_z^2+\chi_y^2+\chi_z^2<\frac{1}{c^2}$. Тем самым $\chi-t<0$. Поскольку решение задачи Коши для волнового уравнения с данными на плоскости $t=0$ единственно, то нужные равенства имеют место и построение решения закончено.

Легко видеть, что нужно накладывать следующие требования гладкости рассматриваемых функций: $\varphi\in C^4$, $\psi\in C^3, \chi,\ f\in C^2$.

Задача Гурса для многомерного волнового уравнения аналогична следующей задаче для волнового уравнения в одномерном случае:

$$u_{tt}-u_{xx}=0,$$
$$u|_{t=x}=\varphi_1(x),\quad u|_{t=-x}=\varphi_2(x)$$

(здесь и ниже мы будем считать $c=1$, что не ограничивает общности). Решение последней легко построить, используя представление

$$u=f(x-t)+g(x+t).$$

Функции f и g определяются так, чтобы удовлетворить краевым условиям.

В многомерном случае задача Гурса ставится так: требуется найти решение уравнения

$$u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$$

такое, что $u|_K=f|_K$, где $f(x,y,z,t)$ – заданная достаточно гладкая функция, а K обозначает характеристический конус

$$t^2-x^2-y^2-z^2=0.$$

Мы разберем здесь тот случай, когда f - полином. Для произвольной гладкой функции f решение задачи можно получить, приближая f полиномами. На общем случае мы останавливаться не будем, так как его рассмотрение требует привлечения теорем вложения. Ясно, что достаточно решить поставленную задачу для однородных полиномов f, поскольку любой полином есть сумма однородных.

Остановимся на некоторых свойствах вещественных однородных полиномов. Пусть $P = P_N(x,y,z,t)$ и $Q = Q_N(x,y,z,t)$ - два однородных полинома степени N. Совокупность всех таких полиномов образует линейное пространство $E(N)$. Составим выражение

$$\langle P, Q \rangle = P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}\right) Q(x,y,z,t).$$

ЛЕММА I. $\langle P, Q\rangle$ - скалярное произведение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно проверить справедливость следующих аксиом:

I) $\langle P, Q\rangle = \langle Q, P\rangle$,

2) $\langle \lambda P^{(1)} + \mu P^{(2)}, Q\rangle = \lambda \langle P^{(1)}, Q\rangle + \mu \langle P^{(2)}, Q\rangle$,

3) $\langle P, P\rangle \geqslant 0$ и, если $\langle P, P\rangle = 0$, то $P = 0$.

Справедливость равенства 2) очевидна. Следовательно, мы можем проверять I) и 3) для одночленов, а в этом случае проверка не представляет трудностей.

Пусть $L(x,y,z,t) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Через $\mathcal{P}_N(x,y,z,t)$ мы будем обозначать такие однородные полиномы степени N, что

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathcal{P}_N = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathcal{P}_N = 0.$$

Полиномы $\mathcal{P}_N$ образуют в $E(N)$ линейное подпространство $\tilde{E}(N)$. Возникает вопрос, из каких полиномов состоит ортогональное (в смысле введенного скалярного произведения) дополнение этого пространства. Ответ дается следующей леммой.

ЛЕММА 2. Ортогональное дополнение подпространства $\widetilde{E}(N)$ состоит из всех полиномов вида $(t^2-x^2-y^2-z^2)P_{N-2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Удобно доказывать, что ортогональное дополнение подпространства полиномов вида $(t^2-x^2-y^2-z^2)P_{N-2}$ состоит из полиномов $\mathcal{P}_N$. Ясно, что любой полином $\mathcal{P}_N$ принадлежит ортогональному дополнению. Пусть

$\langle(t^2-x^2-y^2-z^2)P_{N-2}, Q\rangle=0$, $Q\in E(N)$, для любого полинома P_{N-2} . Тогда

$$\langle(t^2-x^2-y^2-z^2)P_{N-2}, Q\rangle=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\cdot$$

$$P_{N-2}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial t}\right)Q(x,y,z,t)=$$

$$=\langle P_{N-2},\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)Q\rangle=0.$$

Ввиду произвольности P_{N-2} мы получаем, что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)Q=0,$$

и лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Имеет место однозначное разложение

$$P_N(x,y,z,t)=\mathcal{P}_N+(t^2-x^2-y^2-z^2)\mathcal{P}_{N-2}+(t^2-x^2-y^2-z^2)^2\mathcal{P}_{N-4}+\ldots.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2 единственным образом

$$P_N(x,y,z,t)=\mathcal{P}_N+(t^2-x^2-y^2-z^2)P_{N-2}.$$

Затем применяем лемму к полиному P_{N-2} и т.д.

Решение задачи Гурса может быть осуществлено теперь следующим образом. Разлагаем полином f в сумму рассмотренного вида:

$$f=\mathcal{P}_N+(t^2-x^2-y^2-z^2)\mathcal{P}_{N-2}+(t^2-x^2-y^2-z^2)^2\mathcal{P}_{N-4}+\ldots.$$

Тогда, как легко видеть, полином $\mathcal{P}_N$ - решение задачи.

Отметим, что этим путем можно решить задачу и с данными на гиперболоиде $t^2-x^2-y^2-z^2=c=const$. Решением будет полином

$$\mathcal{P}_N+c\mathcal{P}_{N-2}+c^2\mathcal{P}_{N-4}+\ldots.$$

Однако здесь нет априорных оценок, и переход к общему случаю осуществить нельзя.

Единственность решений разобранных задач Коши и Гурса, а также непрерывная зависимость их решений от данных задачи могут быть доказаны методом интегралов энергии. Мы не будем останавливаться на этих вопросах.

Похожей на задачу Гурса является следующая задача. Ищется функция $u(x,y,z,t)$ такая, что

$$u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}, \quad x>0, \quad 0<t<x, \quad -\infty<y<\infty, \tag{8}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x,y), \quad u|_{t=x}=0. \tag{9}$$

Аналогичная одномерная задача

$$u_{tt}=u_{xx}, \quad x>0, \quad 0<t<x,$$
$$u|_{t=0}=\varphi(x), \quad u|_{t=x}=0$$

легко решается. Решение дается формулой $u=\varphi(x-t)$ (функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию согласования $\varphi(0)=0$). Однако задача (8),(9) поставлена не корректно. Приведем соответствующий пример Адамара, построенный А.Ф.Филипповым. Пусть $\varphi(x,y)=$ $=C\psi(x)\cos py$, C - постоянная, p - вещественный параметр. Будем искать решение задачи (8),(9) вида $u=$ $=Cv(x,t)\cos py$. Для функции v получаем

$$v_{tt}=v_{xx}-p^2 v, \quad x>0, \quad 0<t<x,$$
$$v|_{t=0}=\psi(x), \quad v|_{t=x}=0.$$

Функция $w(x,t)=v-\psi(x-t)$ является решением задачи

$$w_{tt}=w_{xx}-p^2 w-p^2\psi(x-t),$$
$$w|_{t=0}=0, \quad w|_{t=x}=0.$$

Легко проверить, что решение задачи

$$w_{tt}=w_{xx}-f(x,t),$$
$$w|_{t=0}=0, \quad w|_{t=x}=0$$

дается формулой

$$w(x,t)=Af, \quad Af=\frac{1}{2}\iint_{R(x,t)} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где $R(x,t)$ - прямоугольник $0<\xi-\tau<x-t$, $x-t<\xi+\tau<x+t$. Значит, $w(x,t)$ есть решение

интегрального уравнения

$$w(x,t)=\frac{p^2}{2}\iint\limits_{R(x,t)} w(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau+Af \tag{10}$$

с $f=p^2\cdot\psi(x-t)$ и может быть получено как предел последовательных приближений:

$$w_0=0,\quad w_n(x,t)=p^2Aw_{n-1}+Af,\quad n=1,2,\dots.$$

Пусть $\psi(x)\geqslant 0$, $\psi(x)\in C^\infty$ ($0<x<\infty$), $\psi(x)=x$ при $0\leqslant x\leqslant h$, $\psi(x)=0$ при $x\geqslant 2h$. Тогда $f\geqslant 0$, $Af\geqslant 0$, $0\leqslant w_1\leqslant w_2\leqslant\dots$. Оценим w_n снизу. Покажем по индукции, что при $0\leqslant x-t\leqslant h$

$$w_n-w_{n-1}=p^2A(w_{n-1}-w_{n-2})\geqslant\left(\frac{p^2}{4}\right)^n\frac{2t(x-t)^{2n}}{(2n)!}$$

Для $n=1$ имеем $w_1-w_0=Af=A(p^2(x-t))=\frac{p^2}{4}t(x-t)^2$ т.е. наше утверждение справедливо. Пусть оно верно для некоторого $n\geqslant 1$. Вычисляя $A(2t(x-t)^{2n})$ с помощью определения Af и замены переменных $\xi-\tau=\eta$, $\xi+\tau=\zeta$, получаем, что в $R(x,t)$

$$2\tau(\xi-\tau)^{2n}=(\xi+\tau)(\xi-\tau)^{2n}-(\xi-\tau)^{2n+1}>(x-t)\eta^{2n}-\eta^{2n+1}.$$

Интегрируя в пределах $0<\eta<x+t$, $x-t<\zeta<x+t$, получаем

$$A\left(2t(x-t)^{2n}\right)>\frac{1}{4}\,\frac{2t(x-t)^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Значит, наше неравенство верно для всех n. Из этого неравенства следует, что при $0\leqslant x-t\leqslant h$ для $w=\lim\limits_{n\to\infty} w_n$

$$w\geqslant 2t\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p^2}{4}\right)^n\frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}=t\left[\operatorname{ch}\frac{p(x-t)}{2}-1\right]. \tag{11}$$

Пусть $\delta>0$ – мало, $m\geqslant 0$ – любое, $p\geqslant 1$, и функция $\psi(x)$ такова, что $\max\limits_{0\leqslant k\leqslant m}\ \max\limits_{0\leqslant x<\infty}|\psi^{(k)}(x)|\leqslant M$. Рассмотрим данные вида

$$\varphi(x,y)=\frac{\delta\,\psi(x)}{p^m M}\cos py.$$

Все частные производные от $\varphi(x\cdot y)$ до порядка m по модулю не больше δ. Решение задачи (8),(9) имеет вид

$$u=\frac{\delta}{p^m M}\left[\psi(x-t)+w(x,t)\right]\cos py.$$

Если $y=0$, $d \leqslant x-t \leqslant h$, $t \geqslant d$, d - любое положительное, то в силу неравенства (II)

$$u \geqslant \frac{\delta d}{\rho^m M}\left[\operatorname{ch}\frac{\rho d}{2}-1\right].$$

Правая часть последнего неравенства стремится к бесконечности, когда $\rho \to \infty$. В то же время функция $\varphi(x,y)$ стремится равномерно к нулю вместе со всеми своими производными до порядка $m-1$. Тем самым пример Адамара построен.

5. Задача Коши для симметрических гиперболических систем и теорема Коши-Ковалевской

В этом разделе мы обсудим связь между двумя проблемами: существованием гладкого решения симметрической гиперболической системы и теоремой Коши-Ковалевской, утверждающей существование аналитического решения у аналитических систем произвольного типа.

Рассмотрим систему m линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + Qu + f, \tag{1}$$

где $u(x,t) = u(x_1,\dots,x_n,t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$; A_j, Q - вещественные $m \times m$ - матрицы, элементы которых представляют собой гладкие функции x,t. Вектор f - достаточно гладкая функция x,t. Зададим на плоскости $t=0$ данные Коши

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{2}$$

и будем искать гладкое, т.е. один раз непрерывно дифференцируемое, решение задачи (1),(2).

Теорема Коши-Ковалевской утверждает, что существует решение задачи (1),(2), представляющее собой сходящийся степенной ряд в некоторой окрестности каждой точки, где данные аналитичны, если A_j, Q, f аналитически зависят от x,t.

Если отказаться от требования аналитичности системы (1) или начальных данных, то решения задачи Коши, вообще говоря, не существует. Простым примером может служить система уравнений Коши-Римана. В этом случае на систему (1) нужно накладывать ограничения, сводящиеся по существу к требованию ее гиперболичности. Одним из классов уравнений, для которого можно доказать разрешимость задачи Коши при произвольных достаточно гладких начальных данных, является класс симметрических гиперболических систем.

Система уравнений (1) называется <u>симметрической гиперболической,</u> если матрицы A_j симметричны. Мы не будем доказывать теорему существования решения в этом случае. Доказательство можно прочитать, например, в учебнике С.К.Годунова. Напомним только логику рассуждений. Ключевым моментом доказательства является получение априорных оценок решений, т.е. оценок всех возможных решений. Предположение о симметрии матриц A_j, Q позволяет такие оценки установить. Единственность решения отсюда следует сразу же, его существование может быть получено различными путями. Можно приближать коэффициенты системы (I) и начальные данные (2) аналитическими функциями. У возникающих приближенных задач по теореме Коши-Ковалевской решения существуют. Априорные оценки позволяют утверждать, что эти решения сходятся к некоторой гладкой функции, являющейся решением исходной задачи. Можно действовать иначе, доказывая, например, существование решения методом конечных разностей, опираясь на априорные оценки для разностных задач.

Тем самым существование решения задачи (I),(2) можно доказать, и не опираясь на теорему Коши-Ковалевской. Мы покажем сейчас, что справедливость этой теоремы вытекает из следующего факта: задача Коши для системы (I), продолженной на комплексные значения переменных $x_1,\dots,x_n$, сводится к задаче Коши для симметрической гиперболической системы.

Итак, пусть начальные данные (2) - аналитичны по $x_1,\dots,x_n$, матрицы A_j, Q и вектор f зависят от x,t аналитически. Пусть $u(x_1,\dots,x_n,t)$ - некоторое аналитическое решение задачи (I),(2). Переменное t мы оставим вещественным, а переменные $x_1,\dots,x_n$ заменим комплексными переменными $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2,\dots,z_n=x_n+iy_n$. Так как u - аналитическая функция, то определены частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial z_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}-i\frac{\partial u}{\partial y_j}\right),\quad j=1,\dots,n.$$

Кроме того, выполнены n уравнений Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}+i\frac{\partial u}{\partial y_j}\right)=0. \tag{3}$$

В комплексных переменных $z_1,\dots,z_n$ система уравнений (I) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n}A_j\frac{\partial u}{\partial z_j}+Qu+f. \tag{4}$$

Система (4) может быть записана и в вещественном виде, если отделить вещественные и мнимые части, а производные $\frac{\partial u}{\partial z_j}$ выразить через производные $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, $\frac{\partial u}{\partial y_j}$. Аналогично, условие

(2) продолжается в комплексную область

$$u(z,0)=\varphi(z). \qquad (5)$$

Заметим, что (3),(4) – переопределенная система $mn+m$ комплексных уравнений для m комплексных функций $u_1,\dots,u_m$. Попытаемся найти комбинации этих соотношений, которые сводятся к определенной симметрической гиперболической системе. Пусть A_j^* – транспонированная матрица A_j. Умножив уравнения(3) на A_j^* и сложив с (4), получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j+A_j^*}{2}\frac{\partial u}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j-A_j^*}{2i}\frac{\partial u}{\partial y_j}+Qu+f. \qquad (6)$$

Коэффициенты системы (6) $\frac{A_j+A_j^*}{2}$, $\frac{A_j-A_j^*}{2i}$ – эрмитовы матрицы, поэтому вещественные и мнимые части функции u удовлетворяют системе уравнений с симметрическими матрицами. Такого отделения вещественных и мнимых частей можно и не делать, поскольку теория систем с комплексными эрмитовыми матрицами полностью аналогична теории симметрических гиперболических систем. Теоремы существования и единственности гладкого решения верны и в этом случае.

Теперь можно забыть о том, как получалась система (6) и решать для нее задачу Коши с гладкими начальными данными (5). Гладкое решение этой задачи существует, если даже отказаться от аналитичности начальных данных и коэффициентов. Но если аналитичность имеет место, то, как будет доказано, указанное решение аналитично и, значит, рассматриваемое при вещественных $x_1,\dots,x_n$ решает задачу (I),(2). Это решение аналитично по $x_1,\dots,x_n$. На этом пути мы устанавливаем теорему Коши-Ковалевской, причем аналитичности коэффициентов системы (I) по переменной t не предполагается. Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Если матрицы A_j, Q, вектор f и вектор-функция $\varphi(z)$ – аналитические функции от $z_1,\dots,z_n$, то решение $u(z_1,\dots,z_n,t)$ задачи (6),(5) аналитично по $z_1,\dots,z_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем величины

$$w^{(j)}=\begin{pmatrix} w_1^j \\ \vdots \\ w_m^j \end{pmatrix}=\frac{\partial u}{\partial \bar z_j}, \qquad j=1,2,\dots,n$$

и получим для них систему mn уравнений первого порядка. Эта система получается применением дифференциальных операторов $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\ell}$ к (6). Так как A_j, Q, f предполагаются аналитическими, то

$$\frac{\partial A_j}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial Q}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Поэтому уравнение для $w^{(\ell)}$ есть

$$\frac{\partial w^{(\ell)}}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j + A_j^*}{2} \frac{\partial w^{(\ell)}}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j - A_j^*}{2i} \frac{\partial w^{(\ell)}}{\partial y_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_j^*}{\partial \bar{z}_\ell} \cdot w^{(j)} \qquad (7)$$

Начальные данные для $w^{(\ell)}$ нулевые:

$$w^{(\ell)}(z, 0) = 0, \qquad (8)$$

так как $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_\ell} = 0$ в силу *аналитичности* φ и выполнения условий Коши-Римана. Совокупность уравнений (7) для $\ell = 1, 2, \ldots, n$ представляет собой систему линейных уравнений с эрмитовыми матрицами в качестве коэффициентов. Как уже было сказано, для таких систем верна теорема единственности решения задачи Коши. Так как правые части полученной системы - нулевые, то решение задачи - нулевое. Тем самым

$$w^{(\ell)} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_\ell} = 0, \quad \ell = 1, 2, \ldots, n,$$

и, значит, u аналитично по переменным $z_1, \ldots, z_n$. По переменной t функция u является гладкой.

Интересно рассмотреть область зависимости полученного решения. Даже если точка находится в вещественной области, область зависимости будет комплексной. Область зависимости получается вещественной, если в системе (6) коэффициент $\frac{A_j - A_j^*}{2i}$ равняется нулю. Это будет, когда $A_j^* = A_j$, т.е. когда исходная система (I) - симметрическая.

В приведенных рассуждениях использовалось аналитическое продолжение начальных данных (2) в *комплексную* область. Аналитическое продолжение - некорректный процесс, так как малые возмущения заданной функции при вещественных x дают большие изменения при комплексных z. Отсутствие устойчивости в процессе аналитического продолжения и является причиной некорректности задачи Коши для систем (I) произвольного типа.

6. Решение смешанной задачи для волнового уравнения

Рассмотрим смешанную задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad t>0, \quad x>0, \quad -\infty < y < \infty, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x,y), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x,y), \quad u\big|_{x=0} = \chi(y,t). \tag{2}$$

Функции φ , ψ , χ предполагаются достаточно гладкими, удовлетворяющими условиям согласования на прямой $t=0$, $x=0$. Здесь будут получены формулы, дающие решение поставленной задачи. Существование решения доказываться не будет, хотя это доказательство можно было бы получить, анализируя выведенные формулы.

Докажем сначала единственность решения. Пусть K - характеристический конус волнового уравнения с вершиной в точке (x_0, y_0, t_0), $t_0 > 0$. Рассмотрим половину этого конуса

$$(t-t_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2=0, \quad t\leqslant t_0,$$

обращенную назад. Характеристический конус вырезает на плоскости $t=0$ круг. Если $t_0>x_0$, то на плоскости $x=0$ он вырезает для $t>0$ некоторую область Σ . Если $t_0<x_0$, то Σ отсутствует.

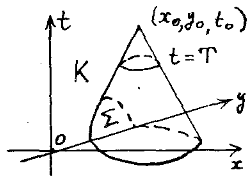


Рис. I

Мы будем рассматривать область Ω , изображенную на рис. I. Область Ω ограничена частью круга, расположенной в полуплоскости $t=0$, $x>0$, частью конуса K , куском Σ плоскости $x=0$ и сечением конуса плоскостью $t=T<t_0$. Умножим уравнение (I) на $2u_t$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_t^2+u_x^2+u_y^2)-\frac{\partial}{\partial x}(2u_t\cdot u_x)-\frac{\partial}{\partial y}(2u_t\cdot u_y)=0. \tag{3}$$

Проинтегрируем тождество (3) по области Ω и воспользуемся теоремой Гаусса-Остроградского. Тогда

$$\iint\limits_{(t=T)\cap\Omega} (u_t^2+u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy = \iint\limits_{(t=0)\cap\Omega} (u_t^2+u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy -$$

$$-\iint\limits_{\Sigma} 2u_t u_x\,dy\,dt - \iint\limits_{K}\left[\alpha(u_t^2+u_K^2+u_y^2)-2\beta u_t u_K - 2\gamma u_t u_y\right]dK,$$

где α, β, γ – компоненты единичной нормали к K, направленной во внешность области Ω. Величины α,β,γ связаны соотношением $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$, причем $\alpha>0$, поэтому

$$\alpha(u_t^2+u_x^2+u_y^2)-2\beta u_t u_x-2\gamma u_t\cdot u_y=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\left[\beta^2u_t^2+\gamma^2u_t^2+\alpha^2u_x^2+\alpha^2u_y^2-2\alpha\beta u_t u_x-2\alpha\gamma u_t u_y\right]=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\left[(\beta u_t-\alpha u_x)^2+(\gamma u_t-\alpha u_y)^2\right].$$

Тем самым форма под знаком интеграла по K неотрицательна, и, значит,

$$\iint\limits_{(t=T)\cap\Omega}(u_t^2+u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy \leqslant$$
$$\leqslant \iint\limits_{(t=0)\cap\Omega}(u_t^2+u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy-\iint\limits_{\Sigma}2u_t\cdot u_x\,dy\,dt. \tag{4}$$

Пусть u_1 и u_2 – два решения задачи (I),(2). Тогда разность $\tilde u=u_1-u_2$ – решение задачи с нулевыми краевыми условиями. Неравенство (4) дает, что $\iint_{(t=T)\cap\Omega}(\tilde u_t^2+\tilde u_x^2+\tilde u_y^2)\,dx\,dy=0$. Отсюда, ввиду произвольности T, $\tilde u=const$, а так как $\tilde u=0$ при $t=0$, то $\tilde u\equiv 0$. Единственность решения доказана.

Отметим, что решение u зависит от значений функций φ, ψ, χ в ограниченных областях. Мы можем считать поэтому все эти функции финитными, т.е. обращающимися в нуль вне ограниченной области. Само решение будет финитным по переменным x, y при каждом t. Ясно также, что в точках (x_0, y_0, t_0) с $t_0<x_0$ решение определяется только начальными данными φ, ψ.

Будем считать пока данные Коши нулевыми. Получим формулу, дающую решение u уравнения (I) с краевыми условиями:

$$u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=0,\quad u|_{x=0}=\chi(y,t).$$

Функция $\chi(y,t)$- гладкая и удовлетворяет условиям согласования. Пусть $\hat{u}$ - преобразование Фурье функции $u(x,y,t)$ по y

$$\hat{u}(x,t;\gamma)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\gamma y}u(x,y,t)dy.$$

Тогда $\hat{u}$ - решение следующей задачи:

$$\hat{u}_{tt}-\hat{u}_{xx}+\gamma^2\hat{u}=0, \tag{5}$$
$$\hat{u}|_{t=0}=0,\quad \hat{u}_t|_{t=0}=0,\quad \hat{u}|_{x=0}=\hat{\chi}=\mu(t).$$

Если $\hat{u}$ найдено, то u дается формулой обращения

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma y}\hat{u}(x,t;\gamma)\,d\gamma.$$

Задачу (5) решим, использовав так называемый принцип Дюамеля. Рассуждения, приведенные ниже, будут не очень строгими: мы не будем обосновывать законность перестановки интегралов, аккуратно изучать распространение встречающихся разрывов и т.д. Тем не менее все наши рассуждения можно сделать строгими. Кроме того, можно рассматривать их как наводящие соображения, служащие для получения формул, а полученные формулы обосновать непосредственно.

Введем функцию $U(x,t)$ как решение задачи

$$U_{tt}-U_{xx}+\gamma^2 U=0,\quad x>0,\quad t>0, \tag{6}$$
$$U(x,0)=U_t(x,0)=0,\quad U(0,t)=1.$$

Функция U не будет непрерывной. Действительно, $U\equiv 0$, если $x>t$ и, в то же время, $U\neq 0$, если $x<t$. Вдоль характеристики $x=t$ функция U разрывна, так как в начале координат разрывны краевые условия. Во всех остальных точках функция U - гладкая. Это можно показать, изучая подробно распространение разрывов функции U. Вообще аккуратное определение функции U требует привлечения обобщенных функций. Чтобы обойтись без них, поступим следующим образом. Введем функции $U_n(x,t)$, $n=1,2,\dots$ как решения задач

$$U_{ntt}-U_{nxx}+\gamma^2 U_n=0,\quad x>0,\ t>0, \tag{7}$$

$$U_n(x,0)=U_{nt}(x,0)=0, \quad U_n(0,t)=\frac{t^n}{n!}.$$

Функции U_n - гладкие, если n большое. Например, функция U_2 непрерывна и имеет всюду непрерывные первые производные. Ее вторые производные - кусочно-гладкие и разрывны вдоль прямой $x=t$. Решение U задачи (6) будем понимать так:

$$U(x,t)=\frac{\partial^n U_n(x,t)}{\partial t^n}. \tag{8}$$

ТЕОРЕМА (принцип Дюамеля). Решение задачи (5) дается формулой

$$\hat{u}(x,t;\gamma)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t U(x,t-\tau)\mu(\tau)d\tau,$$

или

$$\hat{u}=\int_0^t U(x,t-\tau)\mu'(\tau)d\tau.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Второе равенство получается из первого интегрированием по частям, поскольку $\mu(0)=0$. Формула (8) и интегрирование по частям позволяют получить тождество

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t U(x,t-\tau)\mu(\tau)d\tau=U(x,t)\mu(0)+U_1(x,t)\mu'(0)+$$
$$+U_2(x,t)\mu''(0)+\int_0^t U_2(x,t-\tau)\mu'''(\tau)d\tau.$$

Мы считаем выполненными условия согласования $\mu(0)=\mu'(0)=\mu''(0)=0$, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t U(x,t-\tau)\mu(\tau)d\tau=\int_0^t U_2(x,t-\tau)\mu'''(\tau)d\tau.$$

Отсюда видно, что уравнение удовлетворяется при $x>t$ и $x<t$. Проверим выполнение граничного условия:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t U(x,t-\tau)\mu(\tau)d\tau\Big|_{x=0}=\int_0^t U(x,t-\tau)\mu'(\tau)d\tau\Big|_{x=0}=\mu(t).$$

Теорема доказана.

Найдем выражение для $U_3(x,t)$, решив краевую задачу:

$$U_{3tt}-U_{3xx}+\gamma^2U_3=0, \qquad x>0,\ t>0, \tag{9}$$

$$U_3(x,0)=U_{3t}(x,0)=0, \qquad U_3(0,t)=\frac{t^3}{3!}$$

Пусть $v(x;\lambda)$ - преобразование Лапласа функции U_3

$$v(x;\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}U_3(x,t)\,dt, \quad \lambda=\sigma+i\tau. \tag{10}$$

Можно показать (методом интегралов энергии), что U_3 растет по t не быстрее экспоненты, так что интеграл (10) имеет смысл при достаточно больших σ. Умножим уравнение для U_3 на $e^{-\lambda t}$ и проинтегрируем по t от нуля до бесконечности. Имеем

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}U_{3tt}\,dt=\lambda^2 v, \quad \int_0^\infty e^{-\lambda t}U_{3xx}\,dt=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{t^3}{3!}\,dt=\frac{1}{\lambda^4},$$

поэтому v - решение задачи

$$(\lambda^2+\gamma^2)v-\frac{d^2v}{dx^2}=0, \quad x>0,$$

$$v\big|_{x=0}=\frac{1}{\lambda^4}, \qquad v(x,\lambda)\to 0 \text{ при } \operatorname{Re}\lambda\to+\infty,\ x>0.$$

Отсюда

$$v(x;\lambda)=\frac{1}{\lambda^4}e^{-\sqrt{\lambda^2+\gamma^2}\,x},$$

причем ветвь корня такова, что $\sqrt{1}=+1$. Функцию U_3 можно найти по формуле обращения

$$U_3(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{\lambda t}\frac{e^{-\sqrt{\lambda^2+\gamma^2}\,x}}{\lambda^4}\,d\lambda, \tag{11}$$

где интеграл берется по вертикальной прямой $\sigma=\operatorname{Re}\lambda=\text{const}>0$.

Вычислим интеграл (11). Сделаем замену переменной $\lambda=i\gamma\cos\varphi$, $\varphi=\alpha+i\beta$. Тогда $d\lambda=-i\gamma\sin\varphi\,d\varphi$, $\sqrt{\lambda^2+\gamma^2}=\gamma\sin\varphi$, и

$$U_3(x,t)=\frac{1}{2\pi\gamma^3}\int_{L'} e^{i\gamma t\cos\varphi-\gamma x\sin\varphi}\frac{\sin\varphi}{\cos^4\varphi}\,d\varphi. \tag{12}$$

Кривая L' изображена на рис. 2. Имеем

$$e^{i\gamma t\cos\varphi-\gamma x\sin\varphi}=e^{\gamma\sin\alpha[t\,\mathrm{sh}\beta-x\,\mathrm{ch}\beta]+i\gamma\cos\alpha[t\,\mathrm{ch}\beta-x\,\mathrm{sh}\beta]}.$$

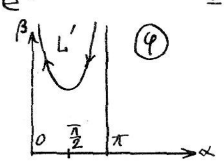


Рис. 2

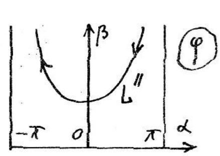


Рис. 3

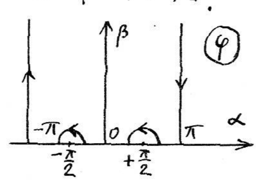


Рис. 4

Вещественная часть показателя $\gamma \sin\alpha[t\,\mathrm{sh}\beta - x\,\mathrm{ch}\beta]$ в области $0<\alpha<\pi$, $\beta>0$ стремится к $-\infty$ при $\beta\to\infty$, если $t<x$, поэтому интеграл (I2) равен нулю, если $t<x$. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть замкнутый контур, состоящий из куска кривой L' и отрезка $\beta=\beta_0$. Интеграл по этому контуру равен нулю при любом β_0, а, значит, и в пределе при $\beta_0\to\infty$.

Пусть теперь $t>x$. Когда $-\pi<\alpha<0$, $\beta>0$, то $\gamma\sin\alpha[t\,\mathrm{sh}\beta - x\,\mathrm{ch}\beta]\to-\infty$ при $\beta\to\infty$. Следовательно, значение интеграла (I2) не изменится, если интегрировать по кривой L'', изображенной на рис. 3. Контур интегрирования можно деформировать так, чтобы он не проходил через особые точки подынтегральной функции. Значит, можно интегрировать по контуру, изображенному на рис. 4. Но подынтегральная функция периодична по α, поэтому

$$U_3(x,t)=\frac{1}{2\pi\gamma^3}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\gamma t\cos\varphi-\gamma x\sin\varphi}\,\frac{\sin\varphi}{\cos^4\varphi}\,d\varphi$$

(точки $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ надо обходить, деформируя контур).

Введем функцию

$$f(x,t)=\frac{1}{2\pi\gamma^4}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\gamma t\cos\varphi-\gamma x\sin\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^4\varphi},$$

тогда

$$U_3(x,t)=-f_x(x,t).$$

Функция $f(x,t)$ обращается в нуль при $t=x$ вместе со своими производными до третьего порядка. В самом деле, введем переменную $z=e^{i\varphi}$, тогда

$$f(x,x)=\frac{8}{i\pi\gamma^4}\int_{\Gamma}\frac{z^3}{(1+z^2)^4}\,e^{i\gamma x z}\,dz.$$

Интегрирование ведется по единичной окружности Γ, слегка деформированной, так, чтобы обойти точки $z=\pm i$. Подынтегральная функция не имеет особенностей внутри Γ, поэтому $f(x,x)=0$. Аналогично доказывается обращение в нуль производных. Имеем

$$\frac{\partial^4 f}{\partial t^4}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\gamma t\cos\varphi-\gamma x\sin\varphi}\,d\varphi. \qquad (I3)$$

Интеграл (13) может быть выражен через функцию Бесселя J_0.
Напомним, что функции Бесселя $J_n(x)$, $n=0, 1, 2, \dots,$ - это регулярные решения уравнения Бесселя:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

Такие решения представляются рядами, могущими служить определением бесселевых функций:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k!\,(n+k)!}.$$

В частности,

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}.$$

Нам потребуются следующие соотношения (a , b - вещественные числа):

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\varphi - n\varphi)}\,d\varphi, \qquad (14)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-b\sin\varphi + ia\cos\varphi}\,d\varphi = J_0\left(\sqrt{a^2-b^2}\right), \quad a \geq b, \qquad (15)$$

$$\int_0^{\infty} J_0(ax)\cos bx\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}, & 0<b<a, \\ 0, & b>a. \end{cases} \qquad (16)$$

(О функциях Бесселя можно прочитать, например, в учебнике Тихонова и Самарского. Все перечисленные равенства выведены в книге: Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций.-М:ИЛ,1949).
Формула (15) показывает, что

$$\frac{\partial^4 f}{\partial t^4} = J_0\left(\gamma\sqrt{t^2-x^2}\right).$$

Интегрируем это равенство по t с учетом обращения в нуль f, f_t, f_{tt}, f_{ttt} при $t=x$. Тогда

$$f(x,t) = \frac{1}{3!}\int_x^t (t-\tau)^3 J_0\left(\gamma\sqrt{\tau^2-x^2}\right)d\tau,$$

и, значит,

$$U_3(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{3!}\int_x^t (t-\tau)^3 J_0\left(\gamma\sqrt{\tau^2-x^2}\right)d\tau.$$

Отсюда (при $t > x$)

$$U(x,t) = \frac{\partial^3 U_3}{\partial t^3} = -\frac{\partial}{\partial x}\int_x^t J_0\left(\gamma\sqrt{\tau^2-x^2}\right)d\tau.$$

Окончательно,

$$U(x,t) = \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_x^t J_0\left(\gamma\sqrt{\tau^2-x^2}\right)d\tau & \text{при } t > x, \\ 0 & \text{при } t < x. \end{cases} \qquad (17)$$

Теперь можно вычислить

$$\hat{u}(x,t) = \int_0^t U(x,t-\tau)\,\mu'(\tau)\,d\tau.$$

Ясно, что $\hat{u} = 0$ при $t < x$, все вычисления ведем для $t > x$.
Выражение (17) дает

$$U(x,t-\tau) = \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_x^{t-\tau} J_0\left(\gamma\sqrt{\sigma^2-x^2}\right)d\sigma & \text{при } t-\tau > x, \\ 0 & \text{при } t-\tau < x \end{cases}$$

Поэтому

$$\hat{u}(x,t) = \int_0^{t-x}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\int_x^{t-\tau} J_0\left(\gamma\sqrt{\sigma^2-x^2}\right)d\sigma\right\}\mu'(\tau)\,d\tau =$$

$$= \left[\left(-\frac{\partial}{\partial x}\int_x^{t-\tau} J_0\left(\gamma\sqrt{\sigma^2-x^2}\right)d\sigma\right)\mu(\tau)\right]_0^{t-x} +$$

$$+\int_0^{t-x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_x^{t-\tau} J_0\left(\gamma\sqrt{\sigma^2-x^2}\right)d\sigma\right)\mu(\tau)\,d\tau =$$

$$= \mu(t-x) - \int_0^{t-x}\frac{\partial}{\partial x}J_0\left(\gamma\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}\right)\mu(\tau)\,d\tau =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{t-x} J_0\left(\gamma\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}\right)\mu(\tau)\,d\tau.$$

Итак, решение задачи (5) дается формулой

$$\hat{u}(x,t,\gamma)=\begin{cases}0 & \text{при } t<x,\\ -\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_0^{t-x} J_0\left(\gamma\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}\right)\hat{\chi}(\tau)\,d\tau & \text{при } t>x.\end{cases} \tag{18}$$

Функция $u(x,y,t)$ восстанавливается с помощью формулы обращения

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma y}\,\hat{u}(x,t;\gamma)\,d\gamma.$$

Если $t<x$, то $u=0$. Пусть $t>x$, тогда

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma y}\left[-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{t-x} J_0\left(\gamma\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}\right)\hat{\chi}\,d\tau\right]d\gamma=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma y}\left[\int_0^{t-x} J_0\left(\gamma\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\gamma\eta}\chi(\eta,\tau)\,d\eta\right)d\tau\right]d\gamma=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{t-x}\chi(\eta,\tau)\,d\tau\,d\eta\int_{-\infty}^{\infty} J_0\left(\gamma\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}\right)e^{i\gamma(y-\eta)}\,d\gamma=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{t-x}\chi(\eta,\tau)\,d\tau\,d\eta\int_0^{\infty} J_0\left(\gamma\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}\right)\cos\gamma|y-\eta|\,d\gamma.$$

Используем формулу (16), получим

$$\int_0^{\infty} J_0\left(\gamma\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}\right)\cos\gamma|y-\eta|\,d\gamma=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{при } |y-\eta|>\sqrt{(t-\tau)^2-x^2},\\ \dfrac{1}{\sqrt{(t-\tau)^2-x^2-(y-\eta)^2}} & \text{при } |y-\eta|<\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}\end{cases}$$

Отсюда при $t>x$

$$u(x,y,t)=-\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{t-x} d\tau\int_{y-\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}}^{y+\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}}\frac{\chi(\eta,\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2-x^2-(y-\eta)^2}}\,d\eta. \tag{19}$$

Рассмотрим в пространстве (ξ, η, τ) конус

$$(\tau - t)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2 = 0$$

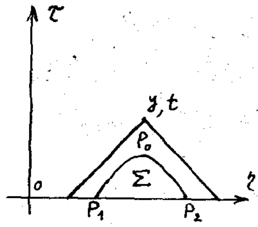


Рис.5

с вершиной в точке (x, η, t) (рис.5). Он пересекает плоскость $\xi = 0$ по гиперболе $(t-\tau)^2 - x^2 - (\eta - y)^2 = 0$. Эта кривая вместе с отрезком прямой $\tau = 0$ ограничивает в плоскости $\xi = 0$ область $\sum(x, \eta, t)$, (сравните с рис.I, где $\sum = \sum(x_0, \eta_0, t_0)$). Точка P_0 имеет координаты $\eta = y$, $\tau = t - x$. Координаты точки P_1: $\tau = 0$, $\eta = y - \sqrt{t^2 - x^2}$, а точки P_2: $\tau = 0$, $\eta = y + \sqrt{t^2 - x^2}$. Нетрудно убедиться, что равенство (I9) может быть переписано так:

$$u(x, y, t) = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \iint\limits_{\Sigma(x,y,t)} \frac{\chi(\eta, \tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - x^2 - (y-\eta)^2}} d\eta\, d\tau. \quad (20)$$

Решение смешанной задачи с нулевыми начальными данными получено.

Если данные Коши не нулевые, то можно действовать следующим образом. Представим решение u в виде суммы двух функций:

$$u = u_1 + u_2 .$$

Функция u_1 - решение задачи с нулевыми начальными данными и с заданным граничным условием при $x = 0$. Эта задача нами решена. Функция u_2 - решение смешанной задачи с нулевым граничным условием при $x = 0$ и с заданными условиями на плоскости $t = 0$. Эту задачу можно решить, продолжая данные Коши на отрицательные значения переменной x нечетным образом и пользуясь затем формулой, дающей решение задачи Коши.

7. Задача Коши для нелинейных волновых уравнений

Нелинейными волновыми уравнениями называют следующие уравнения:

$$u_{tt} - \Delta u = F(u).$$

Мы разберем здесь случай $F(u) = \pm u^n$, n - целое положительное, большее единицы. Будем считать, также, что имеется только одно пространственное переменное x. Тем самым мы будем иметь дело с уравнениями вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \pm u^n. \tag{I}$$

На прямой $t = 0$ зададим начальные условия

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \tag{2}$$

и будем искать в области $t > 0$, $-\infty < x < \infty$ решение поставленной задачи Коши. Нетрудно показать, что при достаточно малых значениях времени t дважды непрерывно дифференцируемое решение задачи Коши существует, если $\varphi(x) \in C^2$, $\psi(x) \in C^1$. Возникает вопрос о существовании решения при всех значениях переменной t. Как будет показано ниже, ответ будет разный, в зависимости от четности или нечетности n. В последнем случае важен еще и знак в правой части уравнения (I).

Прежде чем доказывать соответствующие теоремы, напомним, что решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x)$$

дается формулой Даламбера

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-t) + \varphi(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi \tag{4}$$

и докажем следующую теорему единственности.

ТЕОРЕМА Решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(u), \tag{5}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}=\psi(x), \tag{6}$$

$F(u)\in C^1$, однозначно определяется в области $0<t<\frac{b-a}{2}$, $a+t<x<b-t$ начальными данными, заданными на отрезке $a<x<b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задача (5),(6) имеет два решения $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$. Их разность $u=u_1-u_2$ является решением задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F(u_1)-F(u_2),$$

$$u(x,0)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0.$$

Но $F(u_1)-F(u_2)=F'(\bar u)(u_1-u_2)$ для некоторого $\bar u$, и поэтому функция u является решением линейного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=Au \tag{7}$$

с $A=A(x,t)=F'(\bar u)$. Умножим уравнение (7) на $2u_t$:

$$2u_t(u_{tt}-u_{xx})=2Au_tu.$$

Так как

$$2u_t(u_{tt}-u_{xx})=\frac{\partial}{\partial t}(u_t^2+u_x^2)-\frac{\partial}{\partial x}(2u_t\cdot u_x),$$

то имеет место тождество

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_t^2+u_x^2)-\frac{\partial}{\partial x}(2u_t u_x)=2Au_t\cdot u. \tag{8}$$

Проинтегрируем тождество (8) по области $\mathscr{D}$, изображенной на рис.6. Область $\mathscr{D}$ ограничена снизу отрезком прямой $t=0$, сверху отрезком прямой $t=T<\frac{b-a}{2}$, слева и справа характеристиками $x-t=a$ и $x+t=b$.

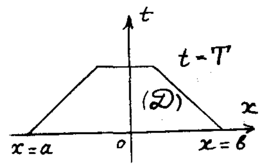


Рис.6

Тогда

$$\iint_{\mathscr{D}}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[u_t^2+u_x^2\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[2u_t\cdot u_x\right]\right\}dxdt=2\iint_{\mathscr{D}}Au_tu\,dxdt.$$

Левая часть равенства может быть преобразована по формуле Грина следующим образом:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial}{\partial t}(u_t^2+u_x^2) - \frac{\partial}{\partial x}(2u_t \cdot u_x) \right] dx dt = -\int\limits_a^b (u_t^2+u_x^2)\Big|_{t=0} dx +$$

$$+ \int\limits_{a+T}^{b-T} (u_t^2+u_x^2)\Big|_{t=T} dx + \int\limits_0^T (u_t-u_x)^2\Big|_{t=b-x} dt + \int\limits_0^T (u_t+u_x)^2\Big|_{t=x-a} dt,$$

откуда

$$\int\limits_{a+T}^{b-T} (u_t^2+u_x^2)\Big|_{t=T} \leqslant \int\limits_a^b (u_t^2+u_x^2)\Big|_{t=0} dx + 2C \iint\limits_{\mathcal{D}} |u||u_t| dx dt$$

с некоторой постоянной $C>0$ такой, что $|A| \leqslant C$. Так как начальные данные нулевые, то первое слагаемое в правой части обратится в нуль. Второе слагаемое справа преобразуем, записав интеграл как повторный и воспользовавшись неравенством $2|u||u_t| \leqslant u^2+u_t^2$. Тогда

$$\int\limits_{a+T}^{b-T} (u_t^2+u_x^2)\Big|_{t=T} dx \leqslant C \int\limits_0^T \Big[\int\limits_{a+t}^{b-t} (u_t^2+u^2) dx \Big] dt. \qquad (9)$$

Заметим еще, что

$$u(x,T) = \int\limits_0^T u_t(x,t)\, dt, \quad u^2(x,T) = \Big(\int\limits_0^T u_t(x,t)\, dt \Big)^2 \leqslant T \int\limits_0^T u_t^2(x,t)\, dt$$

и

$$\int\limits_{a+T}^{b-T} u^2(x,T)\, dx \leqslant T \int\limits_{a+T}^{b-T} \Big(\int\limits_0^T u_t^2 dt \Big) dx =$$

$$= T \int\limits_0^T \Big(\int\limits_{a+T}^{b-t} u_t^2 dx \Big) dt \leqslant T \int\limits_0^T \Big[\int\limits_{a+T}^{b-T} (u_t^2+u_x^2+u^2) dx \Big] dt. \qquad (10)$$

Обозначим

$$I(t) = \int\limits_{a+t} (u_t^2+u_x^2+u^2)\, dx,$$

тогда наличие неравенств (9) и (10) позволяет утверждать, что справедливо следующее неравенство:

$$I(T) \leqslant (C+T) \int\limits_0^T I(t)\, dt, \qquad (11)$$

из которого, ввиду произвольности T, следует, что $I(t) \equiv 0$.

Чтобы убедиться в этом, перепишем неравенство (II) так:

$$I(T)-\mathscr{D}\int_0^T I(t)\,dt \leqslant 0,$$

где в качестве постоянной $\mathscr{D}$ может быть выбрана величина $C+\frac{b-a}{2}$, и обозначим $R(T)=\int_0^T I(t)\,dt$. Тогда $I(T)=R'(T)$

$$R'-\mathscr{D}R(T)\leqslant 0. \tag{12}$$

Умножим неравенство (12) на $e^{-\mathscr{D}T}$, получим

$$e^{-\mathscr{D}T}R'(T)-\mathscr{D}e^{-\mathscr{D}T}R(T)\leqslant 0,$$

или

$$\frac{d}{dT}\left[e^{-\mathscr{D}T}R(T)\right]\leqslant 0.$$

Отсюда $e^{-\mathscr{D}T}R(T)\leqslant R(0)=0$, и, значит,

$$R(T)=0, \quad I(t)=0.$$

Выражение под знаком интеграла должно обращаться в нуль во всей рассматриваемой области, следовательно, $u\equiv 0$ всюду в этой области, и теорема доказана.

Доказанная теорема имеет два очевидных, но важных следствия:

1) значение решения $u(x,t)$ в точке (x_0,t_0) определяется значениями начальных данных только на отрезке $x_0-t_0\leqslant x\leqslant x_0+t_0$

2) если начальные данные отличны от нуля только на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$, то при каждом t решение обращается в нуль вне отрезка $a-t\leqslant x\leqslant b+t$.

Следствие 1 позволяет ограничиваться финитными, т.е. равными нулю вне конечного отрезка, данными Коши, а следствие 2 позволяет утверждать, что в этом случае при каждом t решение будет финитным.

Вернемся к рассмотрению уравнения (1). В случае четного n мы будем выбирать знак плюс в правой части. Этого всегда можно добиться заменой u на $-u$. В случае нечетного n решения уравнения (1) ведут себя по-разному, в зависимости от знака в правой части. Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Для каждого целого положительного $n \geqslant 2$ можно подобрать такие финитные бесконечно дифференцируемые функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, что гладкое решение задачи Коши

$$u_{tt} - u_{xx} = u^n, \tag{13}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{14}$$

не существует при всех положительных значениях t.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x,t)$ – решение уравнения (13) с финитными данными (14). Это решение финитно при каждом t. Умножим уравнение (13) на $2u_t$, тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u_t^2 + u_x^2\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(2u_t \cdot u_x\right) = 2u_t \cdot u^n$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u_t^2 + u_x^2 - \frac{2}{n+1} u^{n+1}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(2u_t \cdot u_x\right) = 0 .$$

Проинтегрируем это тождество по прямоугольнику $0 < t < T$, $-a < x < a$ с большим положительным a и воспользуемся формулой Грина. Интегралы по боковым сторонам прямоугольника обратятся в нуль, и мы получим равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(u_t^2 + u_x^2 - \frac{2}{n+1} u^{n+1}\right)\Big|_{t=T} dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(u_t^2 + u_x^2 - \frac{2u^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_{t=0} dx .$$

Все интегралы имеют смысл, так как на самом деле берутся по конечным отрезкам. Иначе говоря, <u>энергия</u>

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(u_t^2 + u_x^2 - \frac{2}{n+1} u^{n+1}\right) dx .$$

постоянна и от времени не зависит.

Покажем, что для некоторых финитных данных Коши величина $L(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x,t)\,dx$ обращается в бесконечность для конечного t. Этого не может быть, если решение существует при любых $t > 0$, так как оно финитно, и, значит, интеграл на самом деле берется по конечному промежутку.

Пусть $\alpha > 0$ и данные φ , ψ таковы, что

а) $\dfrac{d}{dt}\left\{\left[L(t)\right]^{-\alpha}\right\}\Big|_{t=0} < 0,$

б) $\dfrac{d^2}{dt^2}\left\{\left[L(t)\right]^{-\alpha}\right\}\Big|_{t=0} \leqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$.

Тогда за конечное время $[L(t)]^{-\alpha}$ обратится в нуль. Действительно,

$$[L(t)]^{-\alpha} = [L(0)]^{-\alpha} + \frac{d}{dt}\left\{[L(t)]^{-\alpha}\right\}\Big|_{t=0}\cdot t +$$

$$+\frac{d^2}{dt^2}\left\{[L(t)]^{-\alpha}\right\}\Big|_{t=\tilde{t}}\cdot\frac{t^2}{2}, \quad 0 \leqslant \tilde{t} \leqslant t,$$

откуда

$$[L(t)]^{-\alpha} \leqslant [L(0)]^{-\alpha} + \frac{d}{dt}\left\{[L(t)]^{-\alpha}\right\}\Big|_{t=0}\cdot t, \tag{15}$$

а выражение в правой части неравенства (15) обращается в нуль при некотором конечном положительном значении t . Условие а) будет выполнено, если функции φ , ψ выбрать одного знака, поскольку

$$\frac{d}{dt}\left\{[L(t)]^{-\alpha}\right\}\Big|_{t=0} = -2\alpha\,[L(0)]^{-\alpha-1}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\psi(x)\,dx.$$

Попытаемся удовлетворить условие б). Имеем

$$\left\{[L(t)]^{-\alpha}\right\}' = -\alpha L^{-\alpha-1}\cdot L',$$

$$\left\{[L(t)]^{-\alpha}\right\}'' = \alpha(\alpha+1)L^{-\alpha-2}L'^2 - \alpha L^{-\alpha-1}L'' =$$

$$= -\alpha L^{\alpha-2}\left[L''L - (\alpha+1)L'^2\right],$$

и так как $L(t) \geqslant 0$, то достаточно показать справедливость при всех t неравенства

$$L''L - (\alpha+1)L'^2 \geqslant 0.$$

Но

$$L'(t) = 2\int_{-\infty}^{\infty} u u_t\,dx, \quad L''(t) = 2\int_{-\infty}^{\infty}(u u_{tt} + u_t^2)\,dx,$$

так что

$$L''L-(\alpha+1)L'^2=4(\alpha+1)\left\{\left(\int_{-\infty}^{\infty}u^2dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}u_t^2dx\right)-\left(\int_{-\infty}^{\infty}uu_tdx\right)^2\right\}+$$

$$+2L(t)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}uu_{tt}dx-(2\alpha+1)\int_{-\infty}^{\infty}u_t^2dx\right\}.$$

Первый член в правой части неотрицателен в силу неравенства Буняковского, поэтому нужно обеспечить только выполнение неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty}uu_{tt}dx-(2\alpha+1)\int_{-\infty}^{\infty}u_t^2dx\geqslant 0. \tag{16}$$

Левая часть неравенства (16) может быть преобразована с использованием уравнения (13) следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty}uu_{tt}dx-(2\alpha+1)\int_{-\infty}^{\infty}u_t^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}u^{n+1}dx+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}uu_{xx}dx-(2\alpha+1)\int_{-\infty}^{\infty}u_t^2dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}u^{n+1}dx-\int_{-\infty}^{\infty}u_x^2dx-(2\alpha+1)\int_{-\infty}^{\infty}u_t^2dx.$$

Как было показано, энергия

$$E(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(u_t^2+u_x^2-\frac{2}{n+1}u^{n+1}\right)dx$$

от t не зависит, $E(t)=E(0)$, поэтому, выбрав $2\alpha+1=\frac{n+1}{2}$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}u^{n+1}dx-\int_{-\infty}^{\infty}u_x^2dx-(2\alpha+1)\int_{-\infty}^{\infty}u_t^2dx=$$

$$=-\frac{n+1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(u_t^2+u_x^2-\frac{2}{n+1}u^{n+1}\right)dx+\frac{n-1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}u_x^2dx=$$

$$=-\frac{n+1}{2}E(0)+\frac{n-1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}u_x^2dx.$$

Значит, неравенство (I6) удовлетворяется, если

$$E(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi'^2+\psi^2-\frac{2}{n+1}\varphi^{n+1}\right]dx<0.$$

Этого всегда можно добиться умножением функции $\varphi(x)\geqslant 0$ ($\varphi(x)\not\equiv 0$ на положительную постоянную, так как $n+1>2$. Мы берем функцию $\psi(x)\geqslant 0$ так, чтобы выполнялось условие а). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай нечетного n, выбирая знак минус в правой части уравнения (I):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-u^n, \qquad n \text{ - нечетно.} \tag{I7}$$

Будем искать решение уравнения (I7) с начальными данными (2). Функции φ, ψ можно считать финитными. При каждом t решение также будет финитным. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА. Пусть $u(x,t)$ - дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (I7), тогда энергия

$$E(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[u_t(x,t)\right]^2+\left[u_x(x,t)\right]^2+\frac{2}{n+1}\left[u(x,t)\right]^{n+1}\right\}dx$$

от t не зависит

$$E(t)=E(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[\psi(x)\right]^2+\left[\varphi'(x)\right]^2+\frac{2}{n+1}\left[\varphi(x)\right]^{n+1}\right\}dx.$$

Кроме того, $|u(x,t)|\leqslant U$ с постоянной U, зависящей только от $E(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим уравнение (I7) на $2u_t$, получим

$$2u_t(u_{tt}-u_{xx})+2u_t\cdot u^n=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u_t^2+u_x^2+\frac{2}{n+1}u^{n+1}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(2u_t\, u_x\right)=0. \tag{I8}$$

Проинтегрируем тождество (I8) по прямоугольнику $-a<x<a$, $0<t<T$, где $a>0$ - велико, и воспользуемся формулой Грина. Интегралы по боковым сторонам прямоугольника обратятся в нуль, и мы получим равенство $E(T)=E(0)$. Докажем вторую часть теоремы. Пусть $C>0$ - некоторая постоянная, а M - множество всех тех x, где $|u(x)|\leqslant C$. Мера дополнения $\tilde{M}$ множества M, очевидно, не превышает

$\frac{n+1}{2} \quad \frac{E(0)}{C^{n+1}}$. Если $x_1, x_2 \in \tilde{M}$, то

$$|u(x_2,t)-u(x_1,t)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} u_x dx \right| \leqslant \sqrt{|x_2-x_1|} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{n+1}{2} \frac{E(0)}{C^{n+1}}} \cdot \sqrt{E(0)} = E(0) \left(\frac{n+1}{2C^{n+1}} \right)^{1/2}$$

Значит, для любого x

$$|u(x,t)| \leqslant C + E(0) \sqrt{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{C^{\frac{n+1}{2}}} \qquad (19)$$

Правая часть неравенства (19) имеет минимум при $C = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{3/n+3} \cdot [E(0)]^{2/n+3}$, поэтому мы можем написать, что

$$|u(x,t)| \leqslant [E(0)]^{\frac{2}{n+3}} \left[\left(\frac{n+1}{2} \right)^{\frac{3}{n+3}} + \left(\frac{n+1}{2} \right)^{-\frac{n}{n+3}} \right],$$

и лемма доказана.

ТЕОРЕМА. Пусть $\varphi \in C^2$, $\psi \in C^1$ – финитные функции. Тогда существует единственное решение уравнения (17) с этими начальными данными на прямой $t=0$. Указанное решение существует при всех $t>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (17) с начальными данными (2), очевидно, эквивалентно интегральному уравнению

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-t)+\varphi(x+t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi) d\xi - \qquad (20)$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} [u(\xi,\tau)]^n d\xi .$$

Любое решение уравнения (17) с начальными данными (2) является решением интегрального уравнения (20), и, наоборот, любое непрерывное решение уравнения (20) дважды непрерывно дифференцируемо и решает рассматриваемую задачу Коши. Уравнение (20) получается с помощью формулы Даламбера (4). Единственность решения была доказана ранее. Будем решать уравнение (20) итерациями. Полагаем $u_0 \equiv 0$ и

$$u_k(x,t) = \frac{\varphi(x-t)+\varphi(x+t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi) d\xi -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} [u_{k-1}(\xi,\tau)]^n d\xi .$$

По лемме $|\varphi(x)|\leqslant U$ с постоянной, зависящей только от $E(0)$. Докажем по индукции, что $|u_k|\leqslant 2U$, $k=0,1,2\ldots$. Это верно для $k=0$. Далее, если $|u_{k-1}|\leqslant 2U$, то

$$|u_k(x,t|\leqslant U+\sqrt{\frac{t}{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(\xi)\,d\xi}+2^{n-1}U^n t^2.$$

Поэтому $|u_k(x,t)|\leqslant 2U$ для $0\leqslant t\leqslant T$ с

$$T=min\left\{\frac{U^2}{2E(0)},\ \frac{1}{2^{n/2}\cdot U^{\frac{n-1}{2}}}\right\}.$$

Докажем по индукции, что

$$|u_{k+1}-u_k|\leqslant(2U)\left[n(2U)^{n-1}\right]^k\cdot\frac{t^{2k}}{(2k)!}. \tag{2I}$$

Для $k=0$ неравенство справедливо: $|u_1-u_0|=|u_1|\leqslant 2U$. Пусть

$$|u_k-u_{k-1}|\leqslant 2U\left[n(2U)^{n-1}\right]^{k-1}\frac{t^{2k-2}}{(2k-2)!}.$$

Тогда

$$|u_{k+1}-u_k|\leqslant\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}|u_k^n-u_{k-1}^n|\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant(2U)\left[n(2U)^{n-1}\right]^{k-1}\left[n(2U)^{n-1}\right]\cdot\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}|u_k-u_{k-1}|\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant 2U\left[n(2U)^{n-1}\right]^k\cdot\frac{1}{2}\int_0^t 2(t-\tau)\,\frac{\tau^{2k-2}}{(2k-2)!}\,d\tau=$$

$$=(2U)\left[n(2U)^{n-1}\right]^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}.$$

Оценка (2I) показывает, что ряд

$$u_0+(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+\ldots$$

и последовательность u_k сходятся равномерно при $0\leqslant t\leqslant T$. Предел - непрерывная функция u, удовлетворяющая интегральному уравнению. Следовательно, функция u решает поставленную задачу Коши. Функция u определена при $0 \leqslant t \leqslant T$, причем ширина полосы T зависит только от $E(0)$. Мы можем снова решить задачу Коши для уравнения (17) с заданными $u(x, T)$, $u_t(x, T)$. Решение будет существовать в полосе $T \leqslant t \leqslant 2t$, так как $E(T) = E(0)$, и т.д. Полученное решение определяется, таким образом, при всех $t > 0$, и теорема доказана.

Замечание. Чрезвычайно важным обстоятельством, позволившим доказать теорему, является наличие оценки $|u(x,t)| \leqslant U$, установленной в лемме. Указанная оценка представляет собой одномерную теорему вложения. Переход к случаю многих пространственных переменных требует привлечения многомерных теорем вложения.

Евгений Владимирович Мамонтов

О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Ответственный редактор С.К.Годунов

Темплан 1980, поз. 7

Редактор С.Л.Розина
Корректоры А.Г.Крюгер, Н.П.Черноиванова
Обложка художника Н.А.Савельевой

Подписано в печать 30.09.80.
Формат 60x84, 1/16, Бумага картографическая Тираж 600 экз.
Заказ № 965 Объем 4 п.л., 3,8 уч.-изд.л. Цена 20 коп.

Редакционно-издательский отдел Новосибирского университета;
ротапринт НГУ, 630090, Новосибирск-90, Пирогова 2.