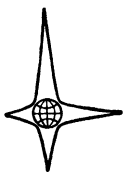


ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

*С. ГУЛА*

**ВАРИАЦИОННЫЕ  
МЕТОДЫ  
В ЗАДАЧАХ  
О СОБСТВЕННЫХ  
ЗНАЧЕНИЯХ**



ИЗДАТЕЛЬСТВО  
«МИР»

**VARIATIONAL METHODS  
FOR EIGENVALUE PROBLEMS**

**AN INTRODUCTION TO THE WEINSTEIN  
METHOD OF INTERMEDIATE PROBLEMS**

*by*

*S. H. GOULD*

*Second edition, revised and enlarged*

**UNIVERSITY OF TORONTO PRESS**

**LONDON: OXFORD UNIVERSITY PRESS 1966**

*С. ГУЛД*

**ВАРИАЦИОННЫЕ  
МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ  
О СОБСТВЕННЫХ  
ЗНАЧЕНИЯХ**

**ВВЕДЕНИЕ В МЕТОД  
ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЗАДАЧ  
ВАЙНШТЕЙНА**

*ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО*

**Б. В. ФЕДОСОВА**

*ПОД РЕДАКЦИЕЙ*

**В. Б. ЛИДСКОГО**

**МОСКВА  
1970**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»**



В книге американского математика С. Гулда не только излагаются важные теоретические результаты, полученные в задачах о собственных значениях, но и рассматриваются приложения этих результатов в различных областях механики, физики и техники. Описываемые автором вариационные методы позволяют получить ряд новых численных результатов с весьма высокой точностью.

Книга отличается удачным построением и четким изложением материала. В ней содержится много нетривиальных примеров.

Книга полезна как математикам, так и физикам, механикам и инженерам-исследователям. Она представляет интерес также и для аспирантов и студентов старших курсов университетов и инженерно-технических вузов.

*Редакция литературы по математическим наукам*

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Хорошо известно, что получаемые методом Ритца приближения для собственных значений самосопряженных задач стремятся к своим предельным значениям сверху. Для оценки точности приближений, даваемых методом Ритца, чрезвычайно важно знать хотя бы грубое приближение снизу. Отыскание оценок снизу представляет большой практический и теоретический интерес.

Настоящая книга посвящена методу, который позволяет в ряде случаев получать такие оценки. Суть его состоит в следующем. Наряду с полуограниченным самосопряженным оператором  $H$ , спектр которого исследуется, рассматривается оператор  $H^{(0)}$  с известными собственными значениями и собственными функциями и такой, что оператор  $H - H^{(0)}$  неотрицателен. Оператор  $H^{(0)}$  называется базовым. Его спектр, очевидно, лежит ниже спектра  $H$ . После того как базовый оператор выбран, с помощью конечномерных возмущений  $H_n$  строится монотонная последовательность промежуточных операторов  $H^{(n)} = H^{(0)} + H_n$ , спектры которых приближают спектр  $H$  снизу. Для отыскания собственных значений промежуточных операторов  $H^{(0)} + H_n$ , где обычно  $H_n v = - \sum_{k=1}^n (v, H^{(0)} p_k) p_k$ , выписывается явно вековое уравнение  $W(\lambda) = 0$ , левая часть которого равна определителю

$$|(R_\lambda^{(0)} p_k, p_l)|_{k, l=1}^n; \quad (1)$$

здесь  $R_\lambda^{(0)}$  — резольвента базового оператора. Определитель  $W(\lambda)$  называется определителем Вайнштейна. В случае дискретного спектра — это мероморфная функция с вещественными нулями и полюсами. Нули и полюсы  $W(\lambda)$  полностью определяют спектр оператора  $H^{(n)}$ .

В первоначальном виде метод промежуточных задач был применен американским математиком А. Вайнштейном для определения собственных частот задачи о зажатой прямоугольной пластине:

$$\Delta^2 u = \lambda u; \quad u|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_\Gamma = 0. \quad (2)$$

Базовой задачей в этом случае послужила задача о свободно вибрирующей пластине:

$$\Delta^2 u = \lambda u; \quad u|_{\Gamma} = \Delta u|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

собственные значения и собственные функции которой выписываются явно. Промежуточные спектры получаются при отыскании стационарных значений функционала

$$I(u) = \int_G (\Delta u)^2 d\sigma / \int_G u^2 d\sigma \quad (4)$$

при дополнительных связях

$$u|_{\Gamma} = 0; \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} p_k(s) ds = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4')$$

Связи (4') являются более жесткими, чем связи в задаче (3), и менее жесткими, чем в задаче (2). Для стационарных значений задачи (4) А. Вайнштейну удалось выписать явно определитель вида (1).

Впоследствии метод получил развитие и обоснование в работах американских математиков Н. Ароншайна, Н. Безли, Д. Фокса и др. Соответствующие результаты изложены и прокомментированы в этой книге.

Отметим, что Н. Безли в уравнении Шредингера для атома гелия

$$Hu = -\Delta_1 u - \Delta_2 u - \frac{a}{r_1} u - \frac{a}{r_2} u - \frac{a}{2} \frac{1}{r_{12}} u = \lambda u$$

отбросил положительный оператор отталкивания электронов  $a/(2r_{12})$  и заменил его серией конечномерных операторов, повышающих энергетические уровни. Уже первые приближения в сочетании с приближениями по Ритцу привели к удовлетворительной точности для нижних трех уровней атома гелия.

Обоснование метода промежуточных задач привело Н. Ароншайна к теории воспроизводящих ядер и к известным теоремам вложения. Эти вопросы, естественно, не нашли в книге полного отражения, однако их место и роль в излагаемой теории очерчены достаточно ясно.

При переводе были устранены замеченные неточности в формулировках и доказательствах и прочие погрешности. Кроме того, были сделаны примечания и ссылки на литературу, по-видимому, не известную автору книги и американским математикам, разработавшим метод промежуточных задач. Укажем, например, что определитель  $W(\lambda)$  в теории интегральных уравнений известен как определитель Бейтмена — по имени английского математика, еще

в 1908 г. установившего связь между детерминантами Фредгольма ядра  $K(x, y)$  и ядра  $K_1(x, y)$ , полученного конечномерным возмущением  $K(x, y)$ . Формула Бейтмена широко использовалась советскими математиками, механиками и физиками в ряде вопросов спектральной теории и при решении прикладных задач.

Книга С. Гулда написана доступно. Основные результаты сформулированы и доказаны сначала в конечномерном случае, где все доказательства существенно проще, а идея сохраняется.

Можно не сомневаться, что книга будет с интересом встречена не только механиками, физиками и инженерами, но и математиками, занимающимися вариационным исчислением и теорией крайних задач.

*В. Б. Лидский*

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Растущая роль теории собственных значений в чистой и прикладной математике, а также в физике и химии стимулирует интерес к различным методам приближенного вычисления собственных значений. Необходимость развивать общую теорию таких методов не вызывает сомнений хотя бы потому, что без такой теории можно упустить благоприятную возможность для конкретных применений. Поэтому в настоящей книге мы придерживаемся чисто математической точки зрения. Все уравнения приводятся в такой форме, в которой наиболее просто выявляются математические идеи, лежащие в основе рассматриваемых методов. Для читателей, интересующихся физической стороной вопроса или применениями, по возможности даются ссылки на соответствующие руководства.

Для последовательных приближений особенно хорошо приспособлены вариационные методы; причины этого неоднократно поясняются в тексте. Цель настоящей книги — дать простое изложение не только хорошо известного ныне метода Рэлея — Ритца для нахождения верхних границ, но в особенности метода Вайнштейна для нахождения нижних границ, что является значительно более трудной задачей.

Настоящая книга выходит в свет в серии, предназначенной для широкого круга читателей, и потому мы предполагаем известным лишь минимум математических знаний. Поскольку все рассматриваемые методы относятся к прямым методам вариационного исчисления, читателю было бы полезно знать основы этого предмета. Тем не менее эти сведения не обязательны, так как они приводятся всюду, где это необходимо. Поскольку доказательства сходимости наших методов опираются на теорию вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве, мы излагаем необходимые разделы этой теории. Упражнения предназначены только для иллюстрации излагаемого материала. Зачастую в них содержатся простые утверждения, доказательства которых в тексте опущены в целях экономии места.

Работа над книгой была начата в сотрудничестве с профессором Вайнштейном, который, будучи обремененным другими обязанностями, был вынужден вскоре оставить ее. Я хочу выразить ему глубокую благодарность не только за конкретную помощь, ока-

занную при написании первых трех глав, но главным образом за то, что он познакомил меня с важной и интересной тематикой, успешной разработке которой немало способствовали его собственные активные исследования. Такую же благодарность я выражаю профессору Ароншайну, постоянно проявлявшему дружеский интерес к моей работе над книгой. Его исследования метода, предложенного Вайнштейном, придали этому методу более систематическую форму и тем самым расширили сферу его приложений.

*С. Х. Г.*



## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В первом издании этой книги было дано систематическое изложение метода промежуточных задач Вайнштейна, с помощью которого можно оценивать снизу собственные значения. Как выяснилось из рецензий на это издание, а также из последующих публикаций, этот метод представляет значительный интерес для математиков. Метод промежуточных задач состоит из трех основных этапов: сначала подбирается базовая задача, потом строятся промежуточные задачи, а затем промежуточные задачи исследуются теоретически и решаются численно в терминах базовой задачи. В последние тридцать лет был достигнут существенный прогресс на всех трех этапах, однако логическая схема осталась такой же, как и в первоначальных работах Вайнштейна.

В работах Ароншайна метод был подвергнут глубокому теоретическому анализу и получил дальнейшие обобщения, а в последнее время интерес к нему значительно повысился благодаря успехам, достигнутым Безли, Фоксом и др. (см., например, Безли [1, 2] и Безли и Фокс [1—10]), в упрощении вычислительного процесса и в расширении сферы численных приложений, особенно в квантовой механике.

Далее, в теоретическом аспекте, Вайнштейн (см., например, [6]) недавно показал, что максимально-минимальное определение собственных значений, предложенное Вейлем [1, 2] на основании вариационных соображений, можно получить, рассматривая поведение мероморфной функции  $W(\lambda)$ , которая была введена Вайнштейном в 1935 г. и играет фундаментальную роль в его методе. На этом пути был получен «критерий Вайнштейна», дающий необходимое и достаточное условие, которому должны удовлетворять связи для того, чтобы собственные значения получали максимальное возможное приращение, в то время как условие, вытекающее из максимально-минимального определения, является лишь достаточным.

До настоящего времени эти новые результаты можно было найти только в журнальных статьях. Цель второго издания — дать их систематическое изложение на основе материала первого издания, который включен сюда в несколько переработанном виде.

С. Х. Г.

## ВВЕДЕНИЕ

Мы будем главным образом заниматься методом Вайнштейна приближенного вычисления собственных значений. Понятие собственного значения является чрезвычайно важным как для чистой, так и прикладной математики. В прикладных вопросах собственные значения выступают в роли определяющих числовых характеристик физических систем. Например, для маятника такой характеристикой является период колебаний, для струны — частоты различных обертонов, для вращающегося вала — критическая угловая скорость, при которой произойдет изгиб вала, и т. д.

Эта книга в целом носит математический, а не физический характер, и потому дифференциальные уравнения колебаний струны, стержня, мембраны, пластины, атомных систем и т. д. даются без вывода. Эти уравнения, а также их обобщения, с которыми мы будем иметь дело на протяжении всего изложения, являются эллиптическими (ср. гл. XI, п. 2). Читатель, интересующийся физическим выводом этих уравнений, может обратиться к любому учебнику по уравнениям математической физики (см., например, Вебстер [2]).

Методы, которыми мы будем заниматься, опираются на тот факт, что собственные значения можно рассматривать с двух точек зрения: дифференциальной и вариационной. С дифференциальной точки зрения собственные значения представляют собой некоторые специальные значения параметра в дифференциальном уравнении; с вариационной — они являются максимумами или минимумами некоторых выражений (под вариационной задачей мы понимаем задачу об отыскании экстремумов, т. е. максимумов или минимумов). Если собственные значения дифференциального уравнения не удастся найти явно, то построить процесс последовательных приближений довольно трудно. Но если задача допускает эквивалентную вариационную формулировку, то можно указать два приема, позволяющих заменить вариационную задачу другой, которую во многих случаях удается решить.

Первый прием состоит в замене данных условий более сильными. Тогда искомый минимум повышается или по крайней мере не понижается, и мы получаем *оценки сверху* для собственных значений исходной задачи. В этом состоит сущность метода Рэлея — Ритца. Второй прием заключается в ослаблении данных условий.

При этом минимум понижается, и мы получаем *оценки снизу* для искомым собственным значений. В этом состоит сущность метода Вайнштейна.

Объединяя эти два метода, можно найти довольно близкие верхние и нижние границы для собственных значений. Однако остается невыясненным вопрос, будут ли наши последовательные приближения в пределе давать требуемые результаты. Чтобы ответить на него, а также и на некоторые другие вопросы существования, мы развиваем идеи Ароншайна. Эти идеи, обсуждаемые в последующих главах, связаны с понятиями гильбертова пространства и функционального пополнения. Следует, однако, подчеркнуть, что, хотя эти глубокие исследования расширяют область применения методов и способствуют дальнейшему теоретическому прогрессу, использование классических методов Рэля — Ритца и Вайнштейна в вычислительной практике не опирается на их результаты; численный пример дан в гл. VII, п. 14. Тем не менее мы надеемся, что подробное описание методов, использующих гильбертово пространство в применении к численным задачам, а именно для оценок собственных значений сравнительно простых физических задач, вызовет интерес у математиков-прикладников.

Прием, позволяющий заменить дифференциальную задачу соответствующей вариационной, допускает наглядную иллюстрацию в случае конечномерных систем, примерами которых могут служить волчок или маятник, в отличие от упругих тел, таких, как струна или пластина. Поэтому в гл. I, II и III рассматривается конечномерный случай. В гл. III излагается новая максимально-минимальная теория Вайнштейна. В гл. IV и VII описываются классические методы Рэля — Ритца и Вайнштейна в их первоначальной форме. В гл. IX изложена абстрактная теория этих методов в гильбертовом пространстве; существование и сходимости в этом случае доказываются просто. Далее в гл. X мы показываем, как на основе понятий, введенных в гл. V, VI и VIII, можно доказать эквивалентность двух задач, а именно классической задачи на собственные значения для дифференциального уравнения и соответствующей задачи для линейного оператора в гильбертовом пространстве. Для зажатой пластины такая эквивалентность впервые была доказана в совместной работе Ароншайна и Вайнштейна [1]. В гл. XI излагаются идеи Ароншайна в случае более общих дифференциальных уравнений. В гл. XII, XIII и XIV представлены новые методы, предложенные только в 1960 г. Безли, Фоксом, Фельтом, Вайнштейном и др. Наконец, в гл. XV излагаются недавние, еще не опубликованные исследования Вайнштейна, в которых дается единая трактовка различных методов, рассмотренных в предыдущих главах.

## КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

**1. Дифференциальные уравнения малых колебаний около положения устойчивого равновесия.** Движение системы с конечным числом степеней свободы, например волчка или маятника, является простым и наглядным и в то же время служит полезной моделью при рассмотрении более сложного движения упругих тел, таких, как струна, мембрана или пластина. Более того, очень важные методы, которые применяются в задачах о движении упругих сред, опираются на результаты этой главы. Примером может служить метод Рэлея — Ритца, который состоит в последовательной аппроксимации упругой среды *конечномерными системами*. В методе Вайнштейна, как мы увидим в дальнейшем, конечномерные системы также играют важную роль.

Положение системы с  $n$  степенями свободы в произвольный момент времени  $t$  определяется заданием  $n$  параметров  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , называемых *обобщенными координатами*, и, следовательно, решение задачи движения состоит в том, чтобы найти обобщенные координаты  $q_i$  как функции времени  $t$ . Мы рассматриваем только консервативные системы. Это значит, что система обладает потенциальной энергией, откуда следует, в частности, что силы трения отсутствуют. Предполагается также, что отсутствуют внешние силы, явно зависящие от времени. При этих предположениях, опираясь на физические свойства системы, мы можем выразить ее потенциальную и кинетическую энергии через обобщенные координаты  $q_i$  и *обобщенные скорости*  $\dot{q}_i$  (точка обозначает дифференцирование по времени). Пусть в некотором положении потенциальная энергия  $\mathcal{U}$  имеет строгий минимум  $\mathcal{U}_0$ . Мы будем рассматривать движение системы в малой окрестности этого положения и покажем, что такое движение является суперпозицией  $n$  гармонических колебаний. Амплитуды этих колебаний произвольны при условии, что они достаточно малы, а частоты полностью определяются физическими свойствами системы.

Мы будем считать, что минимум  $\mathcal{U}_0$  равен нулю и достигается при  $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ . Этого всегда можно добиться, при-

бавив к потенциальной энергии и обобщенным координатам надлежащим образом выбранные постоянные.

Тогда по известной теореме Дирихле <sup>1)</sup> (см., например, Эймс и Мурнаган [1]) точка  $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$  является положением устойчивого равновесия. Это означает, что если значения  $q_i$  и  $\dot{q}_i$  достаточно малы при  $t = 0$ , то они остаются малыми во все последующие моменты времени.

Поскольку  $\mathfrak{A}_0$  — минимум  $\mathfrak{A}$ , имеем

$$\left( \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial q_i} \right)_0 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где индекс 0 означает, что частные производные следует брать в точке  $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ .

Разлагая потенциальную энергию в ряд Тейлора в малой окрестности точки минимума, мы можем записать

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \left\{ q_1^2 \left( \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial q_1^2} \right)_0 + q_1 q_2 \left( \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0 + \dots \right\}$$

с точностью до членов более высокого порядка, которыми можно пренебречь.

Таким образом, мы представили потенциальную энергию в виде *квадратичной формы* (однородного многочлена второй степени) от обобщенных координат  $q_i$ :

$$\mathfrak{A} = \sum_{i, k} a_{ik} q_i q_k,$$

где коэффициенты  $a_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0 = a_{ki}$  — известные постоянные. Суммирование здесь, как и всюду в этой главе, производится от 1 до  $n$ .

Так как  $a_{ik} = a_{ki}$ , то  $\mathfrak{A}$  — *симметричная* квадратичная форма, а поскольку она имеет строгий минимум при  $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ , то  $\mathfrak{A}$  *положительно определена* <sup>2)</sup>. Последнее означает, что  $\mathfrak{A} \geq 0$  при всех значениях  $q_i$ , причем равенство имеет место только тогда, когда все  $q_i = 0$ .

Что касается кинетической энергии  $\mathfrak{K}$ , то ее можно представить в виде симметричной, положительно определенной квадратичной формы от обобщенных скоростей  $\dot{q}_i$ . Чтобы убедиться в этом, рассмотрим материальную точку  $p$  массы  $m$ . Пусть  $x_1, x_2, x_3$  —

<sup>1)</sup> Это в сущности теорема Лагранжа. См. Гантмахер [1, стр. 191]\*.— *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Вообще говоря, квадратичная форма  $\mathfrak{A}$  может быть не положительно определенной, а лишь неотрицательно определенной. Такие случаи исключаются из рассмотрения.— *Прим. перев.*

координаты этой точки в некоторой декартовой прямоугольной системе координат. Поскольку они являются функциями от  $q_i$ ,

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n} \dot{q}_n.$$

Отсюда следует, что кинетическую энергию  $\frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$  материальной точки  $p$  можно записать в виде

$$\sum b_{ik}^{(p)}(q_1, q_2, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_k,$$

где  $b_{ik}^{(p)}$  — функции обобщенных координат  $q_i$ . Так как кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий всех материальных точек, из которых состоит система, то ее можно записать в таком же виде, а именно

$$\mathfrak{K} = \sum b_{ik}(q_1, q_2, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_k.$$

Если мы теперь разложим каждую из функций  $b_{ik}(q_1, q_2, \dots, q_n)$  в ряд Тейлора в малой окрестности точки  $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ , то можно будет пренебречь всеми членами этих разложений, кроме постоянных  $b_{ik}(0, 0, \dots, 0)$ . В самом деле, любой член первой или более высокой степени относительно  $q_i$  дает в разложении  $\mathfrak{K}$  член по крайней мере третьей степени относительно малых величин  $q_i$  и  $\dot{q}_i$ . Обозначая  $b_{ik}(0, 0, \dots, 0)$  через  $b_{ik}$ , получаем  $\mathfrak{K} = \sum b_{ik} q_i \dot{q}_k$ , что и дает нужный результат. Здесь  $b_{ik} = b_{ki}$  — известные постоянные. Как следует из определения кинетической энергии, форма  $\mathfrak{K}$  положительно определена.

Движение системы с известной кинетической и потенциальной энергией описывается классическими уравнениями Лагранжа (см., например, Вебстер [1], а также Гантмахер [1, стр. 77]\*), которые в нашем случае приводятся к виду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Для наших целей более удобной будет несколько иная форма этих уравнений. Приведенная выше форма неудобна тем, что в первое слагаемое входит производная по  $\dot{q}_i$ , а во второе — производная по  $q_i$ . Мы перепишем эти уравнения так, чтобы оба слагаемых содержали частные производные только по  $q_i$ . Для этого введем квадратичную форму

$$\mathfrak{B} = \sum_{i,k} b_{ik} q_i q_k,$$



которая получается из формы  $\mathfrak{L}$  заменой  $\dot{q}_i$  на  $q_i$ . Тогда

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial q_i} = 2(b_{i1}q_1 + b_{i2}q_2 + \dots + b_{in}q_n),$$

откуда

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial q_i} = 2(b_{i1}\dot{q}_1 + b_{i2}\dot{q}_2 + \dots + b_{in}\dot{q}_n) = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i},$$

и уравнения Лагранжа примут вид

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Таким образом, для того чтобы найти движение физической системы, нужно решить систему  $n$  обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Единственная трудность, возникающая при решении, состоит в том, что каждое уравнение содержит все неизвестные функции  $q_i(t)$ . Наша цель — ввести новые переменные  $x_i$  при помощи обратимого линейного преобразования

$$q_i = \sum_k q_{ik} x_k,$$

где  $q_{ik}$  — постоянные,  $\det |q_{ik}| \neq 0$ , так, чтобы квадратичные формы  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{A}$  приняли простой (так называемый *канонический*) вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2, \\ \mathfrak{A} &= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \quad (0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n), \end{aligned}$$

где постоянные  $\lambda_i$  определяются известными коэффициентами  $b_{ik}$  и  $a_{ik}$ . Поскольку форма  $\mathfrak{A}$  положительно определена,  $\lambda_i$  положительны.

В новых переменных  $x_i$  уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x_i} = 0$$

или

$$\ddot{x}_i + \lambda_i x_i = 0.$$

Теперь каждое уравнение содержит только одну неизвестную функцию, и его можно легко решить. Общее решение дается формулами

$$x_i = a_i \sin \nu_i (t + \theta_i), \quad \nu_i^2 = \lambda_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $a_i$  и  $\theta_i$  — постоянные интегрирования.

Отметим простой, но важный частный случай (см. следующий пункт), когда  $a_1 = \dots = a_{h-1} = a_{h+1} = \dots = a_n = 0$ , а  $a_h \neq 0$ . В этом случае решение называется  $h$ -м *собственным колебанием*.



новесия, в результате чего система приходит в движение, исследованием которого мы и займемся. Пусть  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$  обозначают отклонения тел от положения равновесия. После несложных вычислений кинетической и потенциальной энергии находим, что

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= (k_1 - k_2) q_1^2 + k_2 (q_2 - q_1)^2 = k_1 q_1^2 - 2k_2 q_1 q_2 + k_2 q_2^2, \\ \mathfrak{B} &= m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2,\end{aligned}$$

и записываем уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{q}_1 + k_1 q_1 - k_2 q_2 &= 0, \\ m_2 \ddot{q}_2 + k_2 q_2 - k_2 q_1 &= 0.\end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай, когда  $m_1 = m_2 = 1$ ,  $k_1 = 5$ ,  $k_2 = 2$ . Тогда

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= 5q_1^2 - 4q_1 q_2 + 2q_2^2, \\ \mathfrak{B} &= \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2.\end{aligned}$$

Теперь произведем следующее линейное преобразование (метод нахождения коэффициентов этого преобразования будет изложен далее в этой главе; см., например, п. 12):

$$\begin{aligned}q_1 &= 5^{-1/2} x_1 + 2 \cdot 5^{-1/2} x_2, \\ q_2 &= 2 \cdot 5^{-1/2} x_1 - 5^{-1/2} x_2.\end{aligned}$$

Легко проверить, что в новых переменных формы  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  принимают канонический вид:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= x_1^2 + 6x_2^2, \\ \mathfrak{B} &= \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2,\end{aligned}$$

откуда  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 6$ . Уравнения Лагранжа сводятся к простой системе  $\ddot{x}_1 + x_1 = 0$  и  $\ddot{x}_2 + 6x_2 = 0$ , общее решение которой имеет вид

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1 \sin(t + \theta_1), \\ x_2 &= a_2 \sin \sqrt{6}(t + \theta_2).\end{aligned}$$

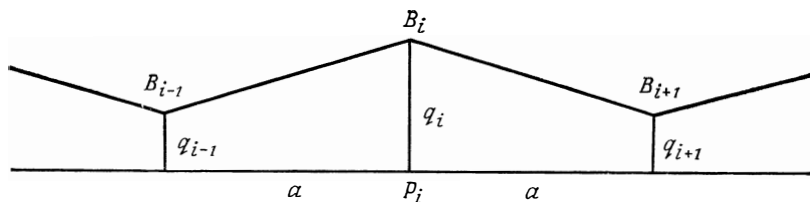
Тогда в исходных переменных общее решение запишется в виде

$$\begin{aligned}q_1 &= a_1 \sin(t + \theta_1) + 2a_2 \sin \sqrt{6}(t + \theta_2), \\ q_2 &= 2a_1 \sin(t + \theta_1) - a_2 \sin \sqrt{6}(t + \theta_2).\end{aligned}$$

**Пример 2.** Рассмотрим колебание струны, расположенной вдоль оси  $x$ , с концами, закрепленными в точках  $x = 0$  и  $x = l$ . Задача станет  $n$ -мерной, если предположить, что в точках  $x = a =$

$= l/(n+1)$ ,  $2a$ ,  $\dots$ , на к струне прикреплены одинаковые бусинки массы  $m$ , а массой струны можно пренебречь. Мы также предположим, что каждая бусинка движется по горизонтальной прямой в направлении оси  $y$  (т. е. можно считать, что система расположена на гладкой горизонтальной плоскости). Обозначим через  $q_i$  отклонение  $i$ -й бусинки в направлении, перпендикулярном струне; тогда наша задача состоит в том, чтобы найти  $q_i$  как функции  $t$ .

Потенциальная энергия системы  $\mathfrak{U}$  вычисляется следующим образом. Считая отклонения малыми, мы можем предполагать,



Р и с. 2.

что натяжение струны, которое мы обозначаем через  $S$ , постоянно. Тогда единственной силой, действующей на  $i$ -ю бусинку, является  $y$ -компонента разности натяжений на соседних прямолинейных участках струны.

Как видно из рис. 2, эта компонента натяжения на отрезке  $B_i B_{i-1}$  равна  $S \cos B_{i-1} B_i P_i = \frac{S}{a} (q_i - q_{i-1})$ , и, следовательно, для силы  $F_i$ , действующей на  $i$ -ю бусинку, мы получаем выражение

$$F_i = \frac{S}{a} \{(q_{i-1} - q_i) - (q_i - q_{i+1})\} = - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial q_i} \\ (i = 1, 2, \dots, n; q_0 = q_{n+1} = 0).$$

Отсюда находим потенциальную энергию

$$\mathfrak{U} = \frac{S}{2a} \{q_1^2 + (q_2 - q_1)^2 + \dots + q_n^2\}.$$

Кинетическая энергия  $\mathfrak{E}$ , очевидно, равна

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2} m \{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dots + \dot{q}_n^2\},$$

откуда

$$\mathfrak{B}(q_1, q_2, \dots, q_n) = \frac{1}{2} m (q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2).$$

Уравнения Лагранжа имеют следующий вид:

$$m\ddot{q}_i + \frac{S}{a} (2q_i - q_{i-1} - q_{i+1}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Теперь произведем линейное преобразование

$$q_i = \sum q_{ik} x_k,$$

где

$$q_{ik} = \frac{2}{\sqrt{m(n+1)}} \sin \frac{\pi ik}{n+1}$$

(метод нахождения коэффициентов этого преобразования будет изложен далее в этой главе). Можно проверить, что формы  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{A}$  принимают в новых переменных канонический вид

$$\mathfrak{B} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2, \quad \mathfrak{A} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2,$$

где

$$\lambda_k = \frac{4S}{ma} \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}.$$

Общее решение дается формулами

$$x_k = a_k \sin v_k (t + \theta_k),$$

где

$$v_k = 2 \sqrt{\frac{S}{ma}} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

или в исходных переменных

$$q_i = \sum q_{ik} a_k \sin v_k (t + \theta_k).$$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Важный принцип суперпозиции колебаний был выдвинут впервые Даниэлем Бернулли. Изложенный выше подход к изучению систем с конечным числом степеней свободы, основанный на применении обобщенных координат, был предложен Лагранжем. Понятие собственных колебаний конечномерных систем стало систематически употребляться в физике благодаря Томпсону и Тейту [1], которые называли эти колебания *нормальными*; этот термин часто употребляется и сейчас.

По поводу изложенного в этой главе см. Раус [2], Рэлей [1], Курант и Гильберт [1], Вебстер [1], Гантмахер [1]\* или любой курс аналитической механики. Возможность одновременного приведения двух квадратичных форм к каноническому виду можно доказать двумя различными способами. Первый метод, который является чисто алгебраическим и наиболее четко может быть изложен в терминах теории матриц (см., например, Перлис [1], а также Гельфанд [1]\*), для наших целей не подходит. Второй метод, которыми пользовались Рэлей и другие, основан на вариационных принципах; он будет подробно рассмотрен в этой главе.

**2. Нормальные координаты. Собственные колебания.** Если бы нам удалось найти упомянутое выше преобразование от координат  $q_i$  к координатам  $x_i$ , то тем самым мы получили бы следующий результат: пусть дана система с такими физическими свойствами, что ее потенциальная и кинетическая энергии определяются в соответствии с вышеизложенным посредством квадратичных форм  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{K}$ . Тогда независимо от того, каким образом система приведена в движение, ее параметры, соответствующие координатам  $x_i$  (они называются *нормальными координатами* системы), изменяются со временем по закону простых гармонических колебаний  $x_i = a_i \sin \nu_i (t + \theta_i)$  с амплитудой  $a_i$  и частотой  $\nu_i$ , где  $\nu_i$  — так называемая круговая частота, равная числу колебаний в секунду, умноженному на  $2\pi$ . Амплитуды  $a_i$  произвольны (они зависят от начальных скоростей), а частоты  $\nu_i$  полностью определяются физическими свойствами системы. Эти частоты будут одними и теми же при любых возможных движениях; таким образом, они являются характеристиками самой системы и потому называются *собственными частотами*. Упомянутые выше постоянные  $\lambda_i$ , равные квадратам собственных частот, называются *собственными значениями* системы или формы  $\mathfrak{U}$  относительно формы  $\mathfrak{K}$ . Вся совокупность собственных значений называется *спектром* системы.

В терминах, заимствованных из акустики, самая низкая из собственных частот  $\nu_i$  называется *основной*, а более высокие собственные частоты — *обертонами*. Колебание, для которого все коэффициенты  $a_i$ , за исключением одного  $a_h$ , равны нулю, называется *h-м собственным колебанием* или *h-м главным колебанием*. ●общее решение с произвольными амплитудами  $a_i$  собственных колебаний является суперпозицией  $n$  собственных колебаний. Такая ситуация, как уже упоминалось выше, является характерной для любого движения в малой окрестности положения системы, в котором потенциальная энергия имеет минимум.

### Примеры

**Пример 1.** В общем решении задачи с двумя массами (п. 1, пример 1)

$$q_1 = b_1 \sin(t + \theta_1) + 2b_2 \sin \sqrt{6}(t + \theta_2),$$

$$q_2 = 2b_1 \sin(t + \theta_1) - b_2 \sin \sqrt{6}(t + \theta_2)$$

произвольные постоянные  $\theta_1$  и  $\theta_2$  определяют начальное положение, или *фазу*, а произвольные постоянные  $b_1$ ,  $b_2$  определяют начальные скорости<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Это не совсем точно, так как начальные положения и скорости масс зависят от  $b_i$  и  $\theta_i$  в совокупности. — *Прим. перев.*





Собственные частоты суть  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ , а собственные значения  $\lambda_1 = \nu_1^2, \lambda_2 = \nu_2^2, \dots, \lambda_n = \nu_n^2$ .

Мы можем получить  $h$ -е собственное колебание, сообщив бусинкам, находящимся в положении равновесия ( $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = 0$ ), начальные скорости, равные  $q_{ih}a_h\nu_h$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ , а  $a_h$  произвольно. При  $h$ -м собственном колебании все  $n$  масс будут колебаться с частотой  $\nu_h$  в фазе по отношению друг к другу, при этом  $i$ -я бусинка будет иметь амплитуду  $q_{ih}a_h$ .

Для иллюстрации рассмотрим случай  $n = 3$  и предположим, в основном для удобства записи, что  $2\sqrt{S/ma} = 1$ . Для собственных частот получаем следующие значения:

$$\nu_1 = \sin^2(\pi/8) = 0,146, \quad \nu_2 = 0,5, \quad \nu_3 = 0,854,$$

а коэффициенты  $q_{ih}$  выписаны в виде такой таблицы:

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{\sqrt{2}}, & 1, & \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 1, & 0, & -1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & -1, & \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}$$

Таким образом, первое собственное колебание имеет вид

$$q_1 = 0,707 \sin 0,146t, \quad q_2 = \sin 0,146t, \quad q_3 = 0,707 \sin 0,146t,$$

второе —

$$q_1 = \sin 0,5t, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = -\sin 0,5t$$

и третье —

$$q_1 = 0,707 \sin 0,854t, \quad q_2 = -\sin 0,854t, \quad q_3 = 0,707 \sin 0,854t.$$

Любое возможное движение, начинающееся из положения равновесия, является линейной комбинацией этих трех собственных колебаний.

**3. Геометрическая аналогия. Косоугольные и прямоугольные системы координат.** Пока еще ничего не было сказано о том, как фактически осуществить преобразование к нормальным координатам и тем самым найти собственные значения системы. Искомое преобразование можно наглядно себе представить, если прибегнуть к замечательной геометрической интерпретации формул для  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$ . Рассматривая совокупность  $n$  переменных, мы будем пользоваться языком аналитической геометрии по аналогии с трехмерным случаем; переменные интерпретируются при этом либо как координаты точки, либо как компоненты вектора, исходящего из начала координат, а уравнения, связывающие эти переменные, определяют геометрические места точек.

Тогда в общих чертах наша программа будет состоять в следующем (более точно мы сформулируем ее в дальнейшем). Мы будем рассматривать параметры  $q_1, q_2, \dots, q_n$  как координаты точки  $n$ -мерного евклидова пространства в *косугольной* координатной системе, выбранной таким образом, чтобы квадрат расстояния от точки  $P$  до начала координат задавался формой  $\sum b_{ik}q_iq_k$ . В этой системе уравнение

$$\sum a_{ik}q_iq_k = 1$$

определяет эллипсоид, который в общем случае расположен наклонно по отношению к осям нашей координатной системы. С помощью обратимого линейного преобразования, называемого *преобразованием к главным осям*, мы вводим новые координаты, отнесенные к прямоугольной координатной системе, оси которой совпадают по направлению с главными осями эллипсоида, а единичные отрезки вдоль каждой оси имеют одинаковую длину.

В этой *прямоугольной* системе форма  $\sum b_{ik}q_iq_k$ , которая задает квадрат расстояния от точки  $P$  до начала координат, принимает вид  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ ; кроме того, поскольку главные оси эллипсоида совпадают теперь по направлению с осями координат, уравнение эллипсоида  $\sum a_{ik}q_iq_k = 1$  приводится к искомому каноническому виду

$$\lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \dots + \lambda_nx_n^2 = 1.$$

Прежде чем приступить к построению преобразования к главным осям, напомним некоторые определения и теоремы, относящиеся к  $n$ -мерному евклидову пространству, а также некоторые простые свойства линейных операторов в этом пространстве.

**4. Свойства евклидова пространства.** Вещественным  $n$ -мерным евклидовым пространством  $\mathfrak{M}_n$  называется множество элементов, называемых *векторами* или *точками*, обладающее тремя перечисленными ниже свойствами. Эти свойства выражают тот факт, что  $\mathfrak{M}_n$  является *линейным, метрическим,  $n$ -мерным* пространством. Элементы пространства, которые мы будем обозначать буквами  $u, v, w$  и  $e$ , снабжая их, если понадобится, индексами, можно наглядно представить себе как множество всех обычных трехмерных векторов, исходящих из общего начала, а скалярное произведение, которое мы определим ниже, можно понимать как произведение длин векторов, умноженное на косинус угла между ними. Можно также представлять себе элементы как точки, т. е. как концы векторов. Мы будем употреблять как термин «вектор», так и термин «точка».

**С в о й с т в о 1.** Множество  $\mathfrak{M}_n$  является линейным пространством; это означает, что

а) для любых двух векторов  $u$  и  $v$  существует единственный вектор  $u + v$ , называемый *суммой*  $u$  и  $v$ ; при этом для любых векторов  $u, v, w$  выполняются равенства

$$u + v = v + u, \quad u + (v + w) = (u + v) + w;$$

б) для любого вектора  $u$  и для любого вещественного числа  $a$  существует единственный вектор  $au$ , такой, что для любых векторов  $u, v, w$  и вещественных чисел  $a, b$  выполняются равенства

$$a(u + v) = au + av, \quad (a + b)u = au + bu, \\ (ab)u = a(bu), \quad 1 \cdot u = u;$$

с) существует (разумеется, единственный) *нулевой вектор*, обозначаемый  $0$  и такой, что для любого вектора  $u$

$$u + 0 = u, \quad 0 \cdot u = 0.$$

Мы обозначаем символом  $0$  как вещественное число нуль, так и нулевой вектор, однако это не должно приводить к недоразумениям.

Из свойств а) — с) следует, что для каждого  $u$  существует вектор  $v$ , такой, что  $u + v = 0$ . Действительно, если мы положим  $v = (-1)u$ , то

$$u + v = 1 \cdot u + (-1)u = (1 - 1)u = 0 \cdot u = 0.$$

Вместо  $(-1)u$  мы будем писать  $-u$ .

Пока еще в пространстве  $\mathfrak{M}_n$  нет *метрики*, так как не введено понятие длины вектора или расстояния между двумя точками. Это понятие вводится ниже.

**С в о й с т в о 2.** Для любых двух векторов  $u$  и  $v$  существует единственное вещественное число  $(u, v)$ , называемое *скалярным произведением*  $u$  и  $v$ , такое, что для любого вещественного числа  $a$  и любых векторов  $u, v, w$

- а)  $(au, v) = a(u, v)$ ,
- б)  $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$ ,
- с)  $(v, u) = (u, v)$ ,
- д)  $(u, u) > 0$ , если  $u \neq 0$ .

Положительный квадратный корень  $\sqrt{(u, u)}$  из скалярного произведения  $u$  на себя называется *длиной* или *нормой*  $u$  и обозначается через  $\|u\|$ .

В соответствии с интуитивным представлением о расстоянии между двумя точками, мы определим теперь расстояние  $d(u, v)$  между двумя произвольными элементами  $u$  и  $v$  как норму их раз-

ности  $\|u - v\| = \|u + (-1)v\|$ . Легко проверяются три основных свойства расстояния:

- (i)  $d(u, u) = 0$ ,
- (ii)  $d(u, v) = d(v, u) > 0$ , если  $u \neq v$ ,
- (iii)  $d(u, v) \leq d(u, w) + d(v, w)$  (неравенство треугольника).

Пространство, в котором расстояние между двумя точками обладает этими тремя свойствами, называется *метрическим пространством*. В таком пространстве можно ввести все обычные метрические понятия и теоремы; например, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0,$$

то мы говорим, что последовательность  $u_n$  *сходится* к  $u$ , и пишем  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$  или  $u_n \rightarrow u$ .

Вектор, норма которого равна 1, называют *единичным*, и говорят, что он *нормирован*. Два вектора  $u$  и  $v$  называются *ортogonalными* друг другу, если  $(u, v) = 0$ . Из свойства 2 вытекает важное следствие, что только нулевой вектор ортогонален самому себе, т. е. имеет нулевую норму. Множество нормированных векторов, любые два из которых ортогональны, называется *ортонормированным*. Для нормы суммы двух векторов нетрудно получить формулу

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u, v) + \|v\|^2,$$

откуда следует важное неравенство Коши — Буняковского  $(u, v) \leq \|u\| \cdot \|v\|$ , имеющее простой геометрический смысл. Действительно, заметим, что выражение

$$\|u + \lambda v\|^2 = \|u\|^2 + 2\lambda(u, v) + \lambda^2 \|v\|^2 \geq 0$$

является неотрицательным квадратным трехчленом относительно  $\lambda$ , и потому дискриминант трехчлена  $(u, v)^2 - \|u\|^2 \|v\|^2$  должен быть отрицательным или нулем.

До сих пор ничего не было сказано о размерности  $\mathfrak{M}_n$ . Чтобы сформулировать третье свойство, выражающее тот факт, что  $\mathfrak{M}_n$  является  $n$ -мерным, нам понадобится понятие линейной зависимости.

Говорят, что векторы  $u_1, \dots, u_h$  являются *линейно независимыми*, если никакая линейная комбинация вида  $u = a_1 u_1 + \dots + a_h u_h$  с вещественными коэффициентами  $a_1, \dots, a_h$  не равна 0, за исключением тривиального случая, когда  $a_1 = \dots = a_h = 0$ . Например, три вектора в обычном трехмерном пространстве являются независимыми, если они не лежат в одной плоскости.

Теперь мы завершим определение  $\mathfrak{M}_n$ , сформулировав

**Свойство 3.** В  $\mathfrak{M}_n$  существует  $n$  линейно независимых векторов  $u_1, \dots, u_n$ , но любые  $n + 1$  векторов линейно зависимы.

Рассматривая эти три свойства в целом, следует отметить, что хотя они и представляют собой естественное обобщение на  $n$ -мерный случай нашего повседневного опыта в пространстве трех измерений, тем не менее мы вправе задать вопрос, являются ли они логически удовлетворительными. Под этим мы понимаем следующее: *совместна* ли данная совокупность свойств, т. е. не противоречат ли эти свойства друг другу, и является ли она *полной*, т. е. дает ли она полное описание  $n$ -мерного евклидова пространства в смысле, который мы поясним ниже.

Чтобы доказать непротиворечивость, построим простой пример множества  $S$ , элементы которого обладают всеми указанными свойствами.

Множество  $S$  состоит из всевозможных наборов  $n$  вещественных чисел  $u = (c_1, \dots, c_n)$ , а скалярное произведение элементов  $u = (c_1, \dots, c_n)$  и  $v = (d_1, \dots, d_n)$  определяется по формуле  $(u, v) = c_1 d_1 + \dots + c_n d_n$ . Если мы возьмем в качестве нулевого элемента  $(0, \dots, 0)$ , элемент  $u + v$  определим как  $(c_1 + d_1, \dots, c_n + d_n)$ , а элемент  $au$  для любого вещественного числа  $a$  определим как  $(ac_1, \dots, ac_n)$ , то легко проверить, что  $S$  обладает всеми перечисленными свойствами, и потому его можно рассматривать как  $n$ -мерное евклидово пространство. Для этого специального примера евклидова  $n$ -мерного пространства мы введем обозначение  $\mathfrak{R}_n$ .

Далее, перечисленные свойства образуют полную совокупность в следующем смысле. Пусть  $\mathfrak{M}_n$  и  $\mathfrak{N}_n$  — два  $n$ -мерных евклидовых пространства, т. е. оба они обладают всеми перечисленными свойствами. Тогда можно установить взаимно однозначное соответствие, которое мы обозначим через  $u \sim v$ , между элементами  $u$  пространства  $\mathfrak{M}_n$  и элементами  $v$  пространства  $\mathfrak{N}_n$ , такое, что если  $u_1 \sim v_1$  и  $u_2 \sim v_2$ , то  $u_1 + u_2 \sim v_1 + v_2$  и  $au_1 \sim av_1$  (в этом случае говорят, что пространства  $\mathfrak{M}_n$  и  $\mathfrak{N}_n$  *изоморфны*), а также такое, что  $(u_1, u_2) = (v_1, v_2)$  (в этом случае говорят, что  $\mathfrak{M}_n$  и  $\mathfrak{N}_n$  *изометричны*). Но тогда эти два пространства не будут существенно отличаться друг от друга, просто их элементы по-разному обозначены. Доказательство того, что все евклидовы  $n$ -мерные пространства изоморфны и изометричны друг другу, состоит в том, что каждое из них, как мы покажем далее, изоморфно и изометрично  $\mathfrak{R}_n$ .

## У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Доказать, что ортонормированные векторы  $v_1, v_2, \dots, v_r$  линейно независимы.

2. Доказать, что ненулевые векторы, выписанные в некотором порядке  $v_1, v_2, \dots, v_r$ , линейно независимы тогда и только тогда, когда никакой из них не является линейной комбинацией предыдущих.



3. Проверить, что  $\mathfrak{R}_n$  является  $n$ -мерным евклидовым пространством.
4. Доказать единственность нулевого вектора.
5. Доказать, что  $a \cdot 0 = 0$  для любого вещественного  $a$ .
6. Доказать, что  $(0, 0) = 0$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

По материалу п. 4—8 см., например, Халмош [1], Джулна [1], Лихневич [1], а также Мальцев [1] \* и Гельфанд [1] \*.

**5. Подпространства евклидова пространства. Базис пространства или подпространства. Полные ортонормированные системы.** Непустое подмножество  $\mathfrak{M}$  пространства  $\mathfrak{M}_n$  называется *линейным многообразием*, если для любых двух векторов  $u, v \in \mathfrak{M}$  любая линейная комбинация  $u$  и  $v$  также принадлежит  $\mathfrak{M}$ . Легко проверить, что линейное многообразие в  $\mathfrak{M}_n$  (его можно наглядно представить себе как прямую или плоскость, проходящую через начало координат) является *подпространством* в том смысле, что оно обладает свойствами 1 и 2. Множество линейно независимых векторов  $u_1, \dots, u_r$  называется (конечным) *базисом*  $\mathfrak{M}$ , если оно порождает  $\mathfrak{M}$ , т. е. если любой вектор  $u \in \mathfrak{M}$  является линейной комбинацией

$$u = k_1 u_1 + \dots + k_r u_r$$

векторов  $u_1, \dots, u_r$ . Нетрудно показать, что коэффициенты  $k_i$  определяются единственным образом. Многообразие  $\mathfrak{M}$ , порожденное векторами  $u_1, \dots, u_r$ , часто обозначается символом  $\mathfrak{M}\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$  или просто  $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$  и называется *линейной оболочкой* этих векторов или подпространством, *натянутой* на эти векторы.

Легко доказать, что каждое линейное многообразие  $\mathfrak{M}$  пространства  $\mathfrak{M}_n$  обладает конечным базисом и что число векторов любого базиса в  $\mathfrak{M}$  одно и то же. Это число называется *размерностью*  $\mathfrak{M}$ . В частности, как легко следует из свойства 3, векторы  $u_1, \dots, u_n$ , упомянутые в формулировке этого свойства, образуют базис в  $\mathfrak{M}_n$ , и тем самым пространство  $\mathfrak{M}_n$  имеет размерность  $n$ .

Любой базис  $v_1, \dots, v_r$  линейного многообразия можно *ортонормировать*, т. е. заменить его некоторым другим базисом  $u_1, \dots, u_r$  того же многообразия так, чтобы  $u_i$  образовывали ортонормированную систему. Для этого мы сначала нормируем первый вектор  $v_1$ , разделив его на норму  $\|v_1\|$ , и положим  $u_1 = v_1/\|v_1\|$ . Далее, построим вектор  $w_2$ , ортогональный  $u_1$ , полагая  $w_2 = v_2 - (v_2, u_1) u_1$ . Геометрически это означает, что мы вычитаем из вектора  $v_2$  его проекцию на  $u_1$ . После этого нормируем  $w_2$ , полагая  $u_2 = w_2/\|w_2\|$ . Затем мы определим вектор  $w_3$ , ортогональный  $u_1$  и  $u_2$ , полагая  $w_3 = v_3 - (v_3, u_1) u_1 - (v_3, u_2) u_2$ , после чего нормируем  $w_3$  и т. д. Следует отметить, что этот процесс,

называемый *процессом ортогонализации Грама — Шмидта*, обладает тем свойством, что каждый вектор  $u_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ , является линейной комбинацией векторов  $v_1, v_2, \dots, v_j$ .

Система векторов, порождающая все пространство, называется *замкнутой*, а система векторов, обладающая тем свойством, что единственным вектором, ортогональным ко всем векторам системы, является нулевой вектор, называется *полной*. Очевидно, что для конечномерных пространств свойства *замкнутости* и *полноты* эквивалентны. Если полная система векторов будет также и ортонормированной, то такую систему мы будем называть *полной ортонормированной системой*, сокращенно п. о. н. с.; это понятие играет фундаментальную роль на протяжении всей книги. Очевидно, что существует по крайней мере одна п. о. н. с. Если система  $u_1, \dots, u_r$ , где  $r < n$ , ортонормирована, то легко показать, что к ней можно присоединить векторы  $u_{r+1}, \dots, u_n$  так, чтобы полученная система  $u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n$  была бы п. о. н. с. Тем самым будет доказано, что если  $s$ -мерное подпространство  $\mathfrak{M}_s$  содержится в  $r$ -мерном подпространстве  $\mathfrak{M}_r$ , то множество векторов  $u \in \mathfrak{M}_r$ , ортогональных  $\mathfrak{M}_s$ , т. е. ортогональных каждому вектору из  $\mathfrak{M}_s$ , является  $(r - s)$ -мерным подпространством  $\mathfrak{M}_{r-s}$ , которое мы будем обозначать через  $\mathfrak{M}_r \ominus \mathfrak{M}_s$  и называть *ортогональным дополнением*  $\mathfrak{M}_s$  в  $\mathfrak{M}_r$ . Ортогональное дополнение некоторого подпространства  $\mathfrak{M}$  во всем пространстве часто обозначается через  $\mathfrak{M}^\perp$ . Из соотношения

$$\mathfrak{M}_{r-s} = \mathfrak{M}_r \ominus \mathfrak{M}_s$$

следует, что  $\mathfrak{M}_s = \mathfrak{M}_r \ominus \mathfrak{M}_{r-s}$  и  $\mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_{r-s} + \mathfrak{M}_s$ , где символ  $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$  обозначает множество векторов вида  $u + v$ , где  $u \in \mathfrak{M}$ , а  $v \in \mathfrak{N}$  (очевидно, что это множество является подпространством). Множество векторов, принадлежащих как  $\mathfrak{M}$ , так и  $\mathfrak{N}$  (мы будем обозначать его через  $\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N}$ ), называется *пересечением*  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{N}$ ; легко видеть, что оно также будет подпространством. Очевидно, что это пересечение будет по крайней мере  $r$ -мерным, если сумма размерностей  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{N}$  равна  $n + r$ .

Если  $u_1, \dots, u_n$  есть п. о. н. с., то каждый вектор  $u$  можно записать в виде

$$u = k_1 u_1 + \dots + k_n u_n,$$

откуда, умножая скалярно на  $u_i$ , получаем  $(u, u_i) = k_i$ , так что  $u = (u, u_1) u_1 + \dots + (u, u_n) u_n$ .

Последнее равенство называется *разложением Фурье* вектора  $u$  по векторам  $u_1, \dots, u_n$ . Умножая его скалярно на  $u$ , мы получаем *теорему Пифагора*  $\|u\|^2 = (u, u) = (u, u_1)^2 + \dots + (u, u_n)^2$ , которая является частным случаем *равенства Парсевалля*

$$(u, v) = (u, u_1)(v, u_1) + \dots + (u, u_n)(v, u_n).$$

Следовательно, для любой ортонормированной системы векторов  $u_1, u_2, \dots, u_r$ , где  $r \leq n$ , имеет место неравенство

$$\|u\|^2 \geq (u, u_1)^2 + \dots + (u, u_r)^2,$$

которое называется *неравенством Бесселя*.

## У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Пусть  $u_1, \dots, u_r$  образуют базис в  $\mathfrak{M}$  и  $u = k_1 u_1 + \dots + k_r u_r$ . Доказать, что коэффициенты  $k_i$  однозначно определяются вектором  $u$ .

2. Доказать, что каждое подпространство в  $\mathfrak{M}_n$  имеет конечный базис.

3. Ортонормировать систему векторов  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$  в  $\mathfrak{R}_3$  с помощью процесса Грама — Шмидта.

4. Доказать, что каждое полное множество векторов в  $\mathfrak{M}_n$  замкнуто и обратно.

5. Доказать, что ортогональное дополнение подпространства само является подпространством.

6. Пусть  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{N}$  — подпространства. Доказать, что  $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$  и  $\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N}$  — также подпространства.

7. Пусть сумма размерностей  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{N}$  равна  $n + r$ . Доказать, что размерность  $\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N}$  не меньше  $r$ .

### 6. Теорема Рисса об общем виде линейного функционала.

Важное свойство скалярного произведения устанавливается в теореме Рисса об общем виде линейного функционала. Чтобы сформулировать эту теорему, нужно прежде всего дать определение *линейного функционала*. Мы определим его как функцию, которая каждому вектору  $u \in \mathfrak{M}_n$  сопоставляет некоторое вещественное число  $f(u)$  таким образом, что для любых векторов  $u_1, u_2 \in \mathfrak{M}_n$  и любых вещественных чисел  $c_1$  и  $c_2$  имеет место равенство  $f(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 f(u_1) + c_2 f(u_2)$ . Например, при фиксированном векторе  $u$  скалярное произведение  $(u, v)$  является линейным функционалом от  $v$ ; чтобы подчеркнуть этот факт, мы пишем  $(u, v) = u(v)$ .

**Т е о р е м а Р и с с а** об общем виде линейного функционала является обращением последнего утверждения, а именно: *для любого линейного функционала  $u(v)$  в  $\mathfrak{M}_n$  существует (и притом единственный) вектор  $u$ , такой, что  $u(v) = (u, v)$  для любого  $v \in \mathfrak{M}_n$* . Другими словами, любой линейный функционал можно представить в виде скалярного произведения.

Для доказательства возьмем какую-либо п. о. н. с.  $v_i$  и положим  $u = \sum u(v_i) v_i$ . Тогда для любого вектора  $v = \sum (v, v_i) v_i$  имеем  $u(v) = \sum (v, v_i) u(v_i) = \sum (u(v_i) v_i, v) = (u, v)$ , что и требовалось доказать.

## У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Доказать, что вектор, существование которого утверждается в теореме Рисса, определяется однозначно.

2. Пусть  $u(v)$  — линейный функционал от  $v$ . Доказать, что множество векторов  $v$ , для которых  $u(v) = 0$ , будет подпространством.

3. Будет ли линейным функционал  $f(u) = \|u\|$ ?

**7. Линейные операторы.** Продолжим рассмотрение  $n$ -мерного евклидова пространства и установим некоторые свойства линейных операторов в таком пространстве.

*Линейным оператором* (или преобразованием)  $H$  в евклидовом пространстве  $\mathfrak{M}_n$  называется функция, которая каждому вектору  $u \in \mathfrak{M}_n$  сопоставляет вектор  $Hu$  таким образом, что для любых двух векторов  $u, v \in \mathfrak{M}_n$  и любых вещественных чисел  $a, b$  выполняется равенство

$$H(au + bv) = aHu + bHv.$$

Очевидно, что  $Hu = 0$ , если  $u = 0$ , и что задание оператора на некотором базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  в  $\mathfrak{M}_n$  может быть распространено единственным образом на все  $\mathfrak{M}_n$ .

Если соответствие, устанавливаемое оператором  $H$ , взаимно однозначно (это эквивалентно, как легко показать, тому факту, что  $Hu = 0$  только тогда, когда  $u = 0$ ), то *обратный* оператор  $H^{-1}$  единственным образом определяется соотношением  $H^{-1}(Hu) = u$ . Если же  $Hu = 0$  для некоторого  $u \neq 0$ , принадлежащего данному подпространству, мы будем говорить, что  $H^{-1}$  не существует для такого подпространства.

*Произведение*  $H_1H_2$  двух операторов  $H_1$  и  $H_2$  определяется равенством  $H_1H_2u = H_1(H_2u)$ ; их *сумма* или *разность* ( $H_1 \pm H_2$ ) определяется равенством

$$(H_1 \pm H_2)u = H_1u \pm H_2u,$$

$a$  оператор  $cH$  для любого вещественного  $c$  — соотношением  $(cH)u = c(Hu)$ . Оператор  $I$ , который каждый вектор  $u$  переводит в себя, называется *тождественным* или *единичным*. Очевидно,  $H^{-1}H = HH^{-1} = I$ , если  $H^{-1}$  существует.

Оператор  $H$  в  $\mathfrak{M}_n$  называется *самосопряженным*, если  $(Hu, v) = (u, Hv)$  для любых  $u, v \in \mathfrak{M}_n$ , и *положительно определенным*, если  $(Hu, u) > 0$  для любого  $u \neq 0$ , принадлежащего  $\mathfrak{M}_n$ .

## У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Доказать, что  $H$  устанавливает взаимно однозначное соответствие тогда и только тогда, когда из того, что  $Hu = 0$ , следует, что  $u = 0$ .

2. Доказать, что поворот плоскости на угол  $\theta$  тогда и только тогда является самосопряженным оператором, когда  $\theta$  кратно  $\pi$ .

**8. Косоугольные и прямоугольные системы координат.** Система векторов  $v_1, \dots, v_n$ , являющаяся базисом в  $\mathfrak{M}_n$ , называется также *системой координат* в  $\mathfrak{M}_n$ , а элементы базиса называются тогда *координатными векторами*. Если  $u = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ , то вещественные числа  $a_1, \dots, a_n$  называются *компонентами* или *координатами*  $u$  в данной системе. Если базис является п. о. н. с., то система координат называется *прямоугольной*, в противном случае — *косоугольной*. В последующем изложении мы будем рассматривать две различные координатные системы, одна из которых прямоугольная, имеющая в качестве базиса п. о. н. с.  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , а вторая система имеет базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , который, как правило, не является п. о. н. с. Следует отметить, что любая п. о. н. с. является базисом в  $\mathfrak{M}_n$  и что существование по крайней мере одной п. о. н. с. гарантируется процессом ортогонализации Грама — Шмидта. Если каждому вектору  $u$  поставить в соответствие набор вещественных чисел, состоящий из его компонент в некоторой фиксированной прямоугольной системе координат, то нетрудно проверить, что это соответствие будет изоморфизмом и изометрией. Следовательно, любое  $\mathfrak{M}_n$  изоморфно и изометрично  $\mathfrak{R}_n$ , как и утверждалось выше. Мы будем иногда обозначать вектор его координатами в данной системе; так, например,

$$u = (q_1, q_2, \dots, q_n) \text{ или } u = (x_1, \dots, x_n).$$

Из свойства 2 (п. 4) следует, что скалярное произведение двух векторов  $u = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  и  $v = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  задается *билинейной формой*

$$(u, v) = \sum_{i, k} q_i r_k (e_i, e_k) = \sum_{i, k} b_{ik} q_i r_k,$$

где через  $b_{ik}$  мы обозначили  $(e_i, e_k)$ . В частности, если обозначить  $\sum b_{ik} q_i r_k$  через  $\mathfrak{B}(u, v)$ , а (положительно определенную) квадратичную форму  $\mathfrak{B}(u, u)$  просто через  $\mathfrak{B}(u)$ , то для квадрата нормы вектора в данной системе координат мы получим выражение

$$\|u\|^2 = \mathfrak{B}(u),$$

которое в прямоугольной системе приводится к виду

$$\|u\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

Однако для нас представляет интерес не этот результат, а его обращение. Дело в том, что в физических задачах мы имеем а priori положительно определенную квадратичную форму  $\sum b_{ik} q_i q_k$ , связанную с кинетической энергией, а требуется найти такую систему координат в  $\mathfrak{M}_n$ , чтобы квадрат нормы в этой системе определялся заданной формой  $\mathfrak{B}(u)$ . Другими словами, нас интересует, суще-

стует ли в  $\mathfrak{M}_n$  такой базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , что  $(e_i, e_k) = b_{ik}$  и, значит,  $\mathfrak{B}(u) = \sum b_{ik}q_iq_k = \|u\|^2$ .

Чтобы ответить на этот вопрос, введем пространство  $\mathfrak{Q}_n$ , элементами которого  $q, r, \dots$  являются наборы  $n$  вещественных чисел  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ , а скалярное произведение двух элементов  $q$  и  $r$ , которое мы обозначим через  $(q, r)_b$ , определяется следующим образом:

$$(q, r)_b = \sum_{i,j} b_{ij}q_i r_j.$$

Легко проверить, что  $\mathfrak{Q}_n$  действительно является  $n$ -мерным евклидовым пространством, которое имеет те же элементы, что и определенное выше пространство  $\mathfrak{M}_n$ , но с другим скалярным произведением. Положим  $f_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $f_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $f_n = (0, 0, \dots, 1) \in \mathfrak{Q}_n$ ; тогда

$$(f_k, f_l)_b = \sum_{i,j} b_{ij}\delta_{ik}\delta_{jl} = b_{kl},$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера, равный 1 при  $i = j$  и 0 в остальных случаях. Поскольку  $\mathfrak{Q}_n$  и  $\mathfrak{M}_n$  являются  $n$ -мерными евклидовыми пространствами, между ними можно установить соответствие, являющееся изоморфизмом и изометрией. Пусть  $e_k$  — такой вектор из  $\mathfrak{M}_n$ , который соответствует  $f_k$  в  $\mathfrak{Q}_n$ . Тогда

$$(e_i, e_k) = (f_i, f_k)_b = b_{ik},$$

и, значит,  $e_1, e_2, \dots, e_n$  будет искомым базисом в  $\mathfrak{M}_n$ .

Если такой базис выбран, то каждый вектор  $u$  однозначно определяет набор косоугольных координат  $q_1, \dots, q_n$ , и обратно. Как и требовалось в физической задаче, эти координаты связаны с координатами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  вектора  $u$  в любой прямоугольной системе координат соотношением

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(u) = \sum b_{ik}q_iq_k &= \sum q_iq_k (e_i, e_k) = \left( \sum q_ie_i, \sum q_ke_k \right) = \\ &= (u, u) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2. \end{aligned}$$

Но в физической задаче задается еще одна форма  $\sum a_{ik}q_iq_k$  и нужно так выбрать прямоугольную систему, чтобы форма  $\sum a_{ik}q_iq_k$  приводилась к сумме квадратов  $\lambda_1x_1^2 + \dots + \lambda_nx_n^2$ .

Чтобы выяснить, как построить нужную прямоугольную систему, прибегнем снова к геометрической аналогии. Мы уже дали чисто геометрическое истолкование формы  $\sum b_{ik}q_iq_k$ , а именно представили ее как скалярное произведение  $(u, u)$ , определенное лишь свойствами  $\mathfrak{M}_n$  без помощи какой бы то ни было системы координат. Чтобы изучить *внутренние* свойства второй формы

$\sum a_{ik}q_iq_k$ , т. е. такие свойства, которые не зависят от выбора системы координат, мы также должны дать этой форме геометрическое истолкование, а именно представить ее в виде некоторого скалярного произведения. Это делается следующим образом: каждому вектору  $u$  мы ставим в соответствие вектор  $Hu$  так, чтобы  $\sum a_{ik}q_iq_k = (Hu, v)$  для любого  $v = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ ; существование такого вектора  $Hu$  немедленно следует из теоремы Рисса об общем виде линейного функционала. Действительно, если мы введем обозначение  $\mathfrak{A}(u, v) = \sum a_{ik}q_iq_k$  (вместо  $\mathfrak{A}(u, u)$  мы часто будем писать просто  $\mathfrak{A}(u)$ ), то  $\mathfrak{A}(u, v)$  будет линейным функционалом от  $v$ , и по теореме Рисса существует вектор  $Hu$ , такой, что  $\mathfrak{A}(u, v) = (Hu, v)$  для любого  $v$ , что и требовалось доказать. Установленное таким образом соответствие между  $u$  и  $Hu$  определяет, как легко видеть, линейный оператор, который мы будем обозначать через  $H$ . Поскольку  $(Hu, v) = \mathfrak{A}(u, v) = \mathfrak{A}(v, u) = (Hv, u) = (u, Hv)$  и  $(Hu, u) = \mathfrak{A}(u, u) \geq 0$ , оператор  $H$  самосопряжен и положительно определен.

На этом этапе мы могли бы задать оператор  $H$  при помощи набора *матриц* (в каждой системе координат своя матрица) подобно тому, как вектор задается координатами (см., например, Перлис [1]). Такое задание оператора является общепринятым, и оно бывает очень полезным во многих вопросах, связанных с  $n$ -мерным евклидовым пространством. Но мы не будем прибегать к такому заданию, поскольку не сможем воспользоваться им в бесконечномерных задачах, с которыми нам придется иметь дело в последующих главах.

Мы определим теперь *собственные числа*  $\lambda_i$  и соответствующие им *собственные векторы*  $u_i$  оператора  $H$  как такие числа и такие ненулевые векторы, для которых  $Hu_i = \lambda_i u_i$ . Иначе говоря, собственным вектором  $u$  оператора  $H$  является такой вектор, который при действии оператора не меняет направления, а собственное значение — это коэффициент растяжения вектора  $u$  под действием оператора  $H$ . Числа  $\lambda_i$  и векторы  $u_i$  называются также собственными значениями и собственными векторами формы  $\mathfrak{A}$  *относительно* формы  $\mathfrak{B}$ . Мы будем часто говорить, что собственный вектор  $u_i$  отвечает соответствующему собственному значению  $\lambda_i$ . Очевидно, что если  $\lambda_i$  — собственное значение, то существует *нормированный* собственный вектор, отвечающий  $\lambda_i$ . Далее, собственное значение положительно определенного оператора обязательно вещественно и положительно, поскольку если  $Hu_i = \lambda_i u_i$ , то  $(Hu_i, u_i) = \lambda_i (u_i, u_i)$  и  $\lambda_i = (Hu_i, u_i)/(u_i, u_i) > 0$ .

Предположим теперь, что мы можем найти п. о. н. с., состоящую из собственных векторов  $u_1, u_2, \dots, u_n$  оператора  $H$ . Тогда векторы  $u_1, u_2, \dots, u_n$  образуют искомую прямоугольную систему координат. В самом деле, пусть  $u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$  —

произвольный вектор  $\mathfrak{M}_n$ . Тогда

$$\begin{aligned}\sum a_{ik}q_iq_k &= (Hu, u) = (x_1Hu_1 + \dots + x_nHu_n, u) = \\ &= (\lambda_1x_1u_1 + \dots + \lambda_nx_nu_n, x_1u_1 + \dots + x_nu_n) = \\ &= \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \dots + \lambda_nx_n^2,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, исходная задача может быть теперь переформулирована следующим образом: *найти п. о. н. с. собственных векторов самосопряженного положительно определенного оператора  $H$ .*

**9. Обратный оператор и функция Грина.** А теперь естественно возникает вопрос, который имеет большое значение для последующих глав. Рассматривая поставленную выше задачу, мы задавали метрику в векторном пространстве с помощью формы  $\mathfrak{B}$ , связанной с кинетической энергией физической системы, в то время как форма  $\mathfrak{A}$ , выражающая потенциальную энергию, определяла уравнение эллипсоида. Но мы могли бы с таким же успехом поменять ролями эти две положительно определенные формы. Тогда в надлежащим образом выбранной системе координат мы получим  $\mathfrak{A}(u, v) = (u, v)$  и, поскольку  $\mathfrak{B}(Hw, v) = \mathfrak{A}(w, v)$ , также и равенство  $\mathfrak{B}(u, v) = \mathfrak{A}(H^{-1}u, v) = (Ku, v)$ , где  $u = Hw$  и  $K = H^{-1}$ . Таким образом, мы пришли к задаче на собственные значения для обратного оператора  $K$ . Но если  $Hu_r = \lambda_r u_r$ , то, подействовав оператором  $K$  на обе части этого равенства, мы получим  $Ku_r = \mu_r u_r$ , где  $\mu_r = 1/\lambda_r$ . Значит, собственные векторы оператора  $K$  совпадают с собственными векторами оператора  $H$ , а собственные значения  $K$  получаются из собственных значений  $H$  переходом к обратным величинам. Итак, если нужно найти собственные значения оператора  $H$ , мы можем найти собственные значения  $K$  и перейти к обратным величинам.

В конечномерном случае безразлично, для какого из операторов  $H$  или  $K$  решать задачу на собственные значения. Однако в последующих главах, где соответствующие операторы будут иметь бесконечное множество собственных значений, мы выясним, что дифференциальные операторы  $H$ , рассматриваемые в гл. IV—VII, имеют спектры, уходящие в бесконечность, и, следовательно, спектры обратных операторов  $K = H^{-1}$  будут сгущаться к нулю. Мы увидим, что для обоснования новых методов нам придется рассмотреть оператор  $K$ , спектр которого сгущается к нулю.

В этом пункте мы покажем, как для данного оператора  $H$  в  $n$ -мерном пространстве  $\mathfrak{M}_n$  эффективно найти обратный оператор  $K$ . Это можно сделать, используя теорию матриц, но мы при-



меним другой метод, который пригодится нам в аналогичных задачах последующих глав.

Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — базис пространства  $\mathfrak{M}_n$ , так что любой вектор  $u$  можно записать в виде  $u = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$ , где вещественные коэффициенты  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  однозначно определяются вектором  $u$ . Рассмотрим множество вещественных функций  $u(x)$ , где независимая переменная  $x$  принимает  $n$  различных значений  $1, 2, \dots, n$ . Полагая  $u(1) = \xi_1, \dots, u(n) = \xi_n$ , мы устанавливаем взаимно однозначное соответствие между множеством векторов  $u \in \mathfrak{M}_n$  и множеством функций  $u(x)$ . Определим скалярное произведение  $(u(x), v(x))$  двух функций  $u(x)$  и  $v(x)$ , полагая  $(u(x), v(x)) = (u, v)$ , и назовем это множество функций вместе с определенным выше скалярным произведением *функциональным пространством*  $\mathfrak{F}$ . Заметим, что  $(u(x), v(x)) = \sum_{x=1}^n u(x) v(x)$  для любых  $u$  и  $v$  тогда и только тогда, когда базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$  является п. о. н. с.

Пусть теперь  $k(x, y)$  — функция двух независимых переменных  $x$  и  $y$ , каждая из которых принимает значения  $1, 2, \dots, n$ . При фиксированном  $x$  функция  $k(x, y)$  является функцией одного переменного  $y$ ; аналогично при фиксированном  $y$  функция  $k(x, y)$  является функцией одного переменного  $x$ .

Если  $k(x, y)$  такова, что при каждом фиксированном  $y = 1, 2, \dots, n$  мы имеем

$$(k(x, y), u(x)) = u(y),$$

то  $k(x, y)$  называется *воспроизводящим ядром* для пространства  $\mathfrak{F}$ . Чтобы доказать существование такого ядра, достаточно проверить, что функция

$$k(x, y) = u_1(x) u_1(y) + \dots + u_n(x) u_n(y),$$

где  $u_1(x), \dots, u_n(x)$  — какая-либо п. о. н. с. в  $\mathfrak{M}_n$ , будет искомой.

Предположим теперь, что базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$  пространства  $\mathfrak{M}_n$  был выбран так, что  $(u, v) = \sum_{k=1}^n H u(x) v(x)$ ; возможность такого выбора доказана в предыдущем пункте. Тогда

$\sum_{x=1}^n k(x, y) H u(x) = u(y)$  для любой функции  $u(x)$ . Функцию  $k(x, y)$ , обладающую этим свойством, мы будем называть *функцией Грина* оператора  $H$  в пространстве  $\mathfrak{F}$ .

Если мы теперь определим оператор  $K$  в  $\mathfrak{M}_n$  выражением

$$Ku(y) = \sum_{x=1}^n k(x, y) u(x),$$

то

$$Ku(y) = \sum_{x=1}^n k(x, y) HH^{-1}u(x) = H^{-1}u(y),$$

и, значит, оператор  $K$  является обратным к  $H$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

О воспроизводящих ядрах в конечномерном пространстве см. Ароншайн [5, стр. 346].

**10. Главные полуоси эллипсоида как собственные векторы.** Прежде чем приступить к решению основной задачи о нахождении всех собственных элементов оператора  $H$ , мы хотим сформулировать ее в терминах главных полуосей эллипсоида  $(Hu, u) = 1$ . Такая трактовка задачи не вызвана необходимостью, тем не менее она очень удобна ввиду большой наглядности.

Как это принято в аналитической геометрии, мы будем говорить, что множество векторов  $u$ , удовлетворяющих уравнению  $\mathfrak{H}(u) = (Hu, u) = 1$ , определяет *поверхность второго порядка*. В силу теоремы Вейерштрасса о том, что непрерывная функция на ограниченном замкнутом множестве принимает свои экстремальные значения, функция  $(Hu, u)$ , рассматриваемая на множестве всех векторов, норма которых равна 1, принимает минимальное значение  $\lambda_1$  на некотором векторе  $u_1$ , при этом  $\lambda_1 > 0$ , так как  $H$  — положительно определенный оператор. Тогда, как легко видеть, для всех векторов  $u$ , удовлетворяющих уравнению  $(Hu, u) = 1$ , норма  $\|u\|$  ограничена числом  $\lambda_1^{-1/2}$ , и потому естественно назвать эту поверхность второго порядка  *$n$ -мерным эллипсоидом*. Его следует представлять себе расположенным под углом к осям косоугольной системы координат.

Мы определим теперь главные полуоси эллипсоида следующим образом. Для фиксированного  $u$ , такого, что  $(Hu, u) = 1$ , уравнение  $(Hu, v) = 0$  определяет плоскость, параллельную *касательной плоскости* проведенной через конец вектора  $u$ . Если  $u$  ортогонален этой плоскости, т. е. если  $(u, v) = 0$  для любого  $v$ , такого, что  $(Hu, v) = 0$ , то  $u$  называется *главной полуосью*. Другими словами,  $u$  является главной полуосью эллипсоида, если его направление совпадает с направлением нормали к эллипсоиду, восстановленной из конца вектора  $u$ . Из этого определения следует, что собственные векторы  $H$  с точностью до числового множителя

совпадают с главными полуосями эллипсоида  $(Hu, u) = 1$ . Действительно, если  $Hu = \lambda u$  и  $(Hu, v) = 0$ , то  $(u, v) = \lambda^{-1} (Hu, v) = 0$ , так что каждый собственный вектор будет главной полуосью. Обратно, если  $u$  ортогонален любому вектору  $v$ , лежащему в подпространстве  $\mathfrak{M}_{n-1} = \mathfrak{M}_n \ominus \mathfrak{M}_1$ , где  $\mathfrak{M}_1$  порождается единственным вектором  $Hu$ , то  $u$  принадлежит подпространству  $\mathfrak{M}_n \ominus (\mathfrak{M}_n \ominus \mathfrak{M}_1) = \mathfrak{M}_1$  и, значит, имеет вид  $\lambda^{-1} Hu$ ; следовательно, любая главная полуось будет собственным вектором.

Любые два собственных вектора  $u_r$  и  $u_s$ , соответствующие различным собственным значениям  $\lambda_r \neq \lambda_s$ , должны быть ортогональны друг другу. В самом деле, имеем  $Hu_r = \lambda_r u_r$  и  $Hu_s = \lambda_s u_s$ , откуда  $(Hu_r, u_s) = \lambda_r (u_r, u_s)$  и  $(Hu_s, u_r) = \lambda_s (u_s, u_r)$ . Вычитая из первого равенства второе и учитывая самосопряженность  $H$ , получаем  $(\lambda_r - \lambda_s) (u_r, u_s) = 0$  или  $(u_r, u_s) = 0$ , что и требовалось доказать.

С другой стороны, множество собственных векторов, отвечающих одному собственному значению  $\lambda$ , очевидно, образует подпространство  $\mathfrak{M}_r$  некоторой размерности  $r$ , называемое *собственным подпространством*, соответствующим собственному значению  $\lambda$ . В этом случае говорят, что  $\lambda$  есть  *$r$ -кратное собственное значение* или что  $\lambda$  имеет *кратность  $r$* ; например, если трехмерный эллипсоид  $(Hu, u) = 1$  является сплюснутым сфероидом, то  $H$  имеет двукратное собственное значение, отвечающее собственному подпространству  $\mathfrak{M}_2$ , ортогональному наименьшей оси. Поскольку в  $\mathfrak{M}_r$  можно выбрать ортонормированный базис  $u_1, u_2, \dots, u_r$ , ясно, что исходную задачу можно переформулировать следующим образом: *доказать, что эллипсоид  $(Hu, u) = 1$  имеет полную ортогональную систему главных полуосей.*

## У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Доказать, что  $\|u\| \leq \lambda_1^{-1/2}$  для всех  $u$ , удовлетворяющих уравнению  $(Hu, u) = 1$ .
2. Доказать, что множество собственных векторов, отвечающих данному собственному значению  $\lambda$ , образует подпространство.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

О связи между главными осями и собственными значениями см. Курант и Гильберт [1]. Относительно геометрической интерпретации квадратичных форм см. Бохер [1, гл. IX]. О применении операторов в  $n$ -мерном пространстве см., например, Хамбургер и Гримшоу [1].

**11. Задача на собственные значения для самосопряженного оператора.** После этого геометрического экскурса мы возвращаемся к задаче о собственных значениях оператора  $H$ , а именно: *пусть*

дан самосопряженный положительно определенный оператор  $H$ . Доказать, что существует полная ортонормированная система собственных векторов  $u_1, u_2, \dots, u_n$  с собственными значениями  $\lambda_r$ , так что  $Hu_r = \lambda_r u_r$ .

Предположим на время (доказательство будет дано ниже), что любой самосопряженный положительно определенный оператор имеет по крайней мере один собственный вектор  $u_1$ , отвечающий собственному значению  $\lambda'_1$ . Тогда нетрудно доказать существование п. о. н. с. собственных векторов оператора  $H$ .

В самом деле, пусть размерность собственного подпространства, отвечающего  $\lambda'_1$ , равна  $r_1$ . Обозначим это подпространство через  $\mathfrak{M}_1$  (здесь индекс не обозначает размерность). Пусть  $\mathfrak{M}_1$  порождено ортонормированной системой  $u_1, u_2, \dots, u_{r_1}$ . Рассмотрим  $(n - r_1)$ -мерное подпространство  $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{M} \ominus \mathfrak{M}_1$ ; все  $n$ -мерное пространство здесь обозначено просто через  $\mathfrak{M}$ . Для любого вектора  $u_i \in \mathfrak{M}_1$  и любого  $v \in \mathfrak{N}_1$  имеем  $(Hv, u_i) = (v, Hu_i) = \lambda'_1 (v, u_i) = 0$ , откуда следует, что  $Hv$  также принадлежит  $\mathfrak{N}_1$ .

Следовательно,  $\mathfrak{N}_1$  — инвариантное подпространство оператора  $H$ ; это означает, что  $Hv$  принадлежит  $\mathfrak{N}_1$  для любого  $v \in \mathfrak{N}_1$ . Пусть теперь  $H_1$  обозначает сужение  $H$  на  $\mathfrak{N}_1$ , т. е.  $H_1$  определен только на евклидовом пространстве  $\mathfrak{N}_1$  и  $H_1 u = Hu$  для любого  $u \in \mathfrak{N}_1$ . Тогда  $H_1$ , очевидно, также является самосопряженным положительно определенным оператором. Следовательно, при условии, что  $\mathfrak{N}_1$  не пусто,  $H_1$  будет иметь, согласно нашему предположению, по крайней мере одно собственное значение. Это собственное значение оператора  $H_1$  мы обозначим через  $\lambda'_2$ ; очевидно, что оно будет также собственным значением  $H$ .

Предположим теперь, что собственное подпространство  $\mathfrak{M}_2$ , отвечающее собственному значению  $\lambda'_2$ , порождено ортонормированными векторами

$$u_{r_1+1}, u_{r_1+2}, \dots, u_{r_1+r_2},$$

так что  $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$  является  $(r_1 + r_2)$ -мерным; рассмотрим  $(n - r_1 - r_2)$ -мерное подпространство  $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_1 \ominus \mathfrak{M}_2$ . Если  $\mathfrak{N}_2$  не пусто, то снова найдется по крайней мере одно собственное значение  $\lambda'_3$ ; обозначим соответствующее ему собственное подпространство через  $\mathfrak{M}_3 \subset \mathfrak{N}_2$ . Но поскольку число  $n$  конечно, то через несколько шагов, скажем через  $k$ , мы придем к равенству

$$r_1 + r_2 + \dots + r_k = n,$$

и, следовательно,  $\mathfrak{N}_{k+1}$  пусто.

Таким образом, мы нашли  $k$  различных собственных значений  $\lambda'_1 < \lambda'_2 < \dots < \lambda'_k$ , где  $k \leq n$ . Мы можем записать эти собственные значения, повторяя каждое столько раз, какова его кратность,

так что  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Кроме того, мы нашли  $k$  соответствующих собственных подпространств  $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_k$ , причем  $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \dots + \mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}_n$ . Следовательно, все  $\mathfrak{M}_n$  порождается векторами  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , которые, таким образом, образуют п. о. н. с., что и требовалось доказать.

Поскольку собственные векторы образуют п. о. н. с., каждый вектор можно записать в виде  $u = (u, u_1) u_1 + \dots + (u, u_n) u_n$ , откуда

$$Hu = \lambda_1 (u, u_1) u_1 + \dots + \lambda_n (u, u_n) u_n.$$

Это равенство дает так называемое *спектральное разложение* оператора  $H$ .

**12. Характеристическое уравнение.** Нам осталось доказать, что  $H$  имеет по крайней мере одно собственное значение. Это мы сейчас установим (см. также следующую главу) и тем самым завершим доказательство существования п. о. н. с.  $u_1, \dots, u_n$  собственных векторов и соответствующих собственных значений  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  оператора  $H$  или формы  $\mathfrak{A}$  относительно формы  $\mathfrak{B}$ . Одновременно мы укажем метод, позволяющий эффективно найти  $u_i$  и  $\lambda_i$ .

Если  $\lambda$  — собственное значение  $H$ , а  $u$  — соответствующий собственный вектор, то  $Hu = \lambda u$ , откуда, умножая на произвольный вектор  $v = r_1 e_1 + r_2 e_2 + \dots + r_n e_n$ , мы получаем  $(Hu, v) = \lambda (u, v)$  или  $\mathfrak{A}(u, v) = \lambda \mathfrak{B}(u, v)$ . В координатной записи это равенство принимает вид

$$\sum_{i,k} a_{ik} q_i r_k = \lambda \sum_{i,k} b_{ik} q_i r_k$$

или

$$\sum_{i,k} (a_{ik} - \lambda b_{ik}) q_i r_k = 0.$$

Поскольку  $n$  чисел  $r_k$  можно задавать произвольно, такое равенство может иметь место только в случае, когда все коэффициенты при  $r_k$  равны нулю, т. е. если выполнены следующие  $n$  равенств:

$$\sum_i (a_{ik} - \lambda b_{ik}) q_i = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Но эта система линейных уравнений относительно косоугольных координат  $q_1, q_2, \dots, q_n$  (ненулевого) собственного вектора будет иметь решение тогда и только тогда, когда определитель  $|a_{ik} - \lambda b_{ik}|$  равен нулю.

Таким образом, любое собственное значение  $\lambda$  оператора  $H$  является корнем алгебраического уравнения  $n$ -й степени

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & \dots & a_{1n} - \lambda b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - \lambda b_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda b_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

которое называется *характеристическим уравнением* оператора  $H^1$ ).

Далее, если этот определитель обращается в нуль, т. е. если  $\lambda = \lambda_j$  является корнем характеристического уравнения, то система уравнений

$$\sum_i (a_{ik} - \lambda_j b_{ik}) q_i = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

относительно неизвестных  $q_i$  имеет ненулевое (а следовательно, и нормированное) решение. Если корень  $\lambda = \lambda_j$  простой, то нормированное решение системы при этом  $\lambda$

$$q_1 = q_{1j}, q_2 = q_{2j}, \dots, q_n = q_{nj}$$

единственно с точностью до знака, и его можно найти обычными методами теории систем линейных уравнений (см., например, Бохер [1], а также Курош [1]\* и Шилов [1]\*), а именно для каждого фиксированного  $j$  значения  $q_{ij}$  неизвестных  $q_i$  пропорциональны алгебраическим дополнениям элементов какой-либо строки (известной) матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_j b_{11} & \dots & a_{1n} - \lambda_j b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - \lambda_j b_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda_j b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если же  $\lambda = \lambda_j$  является корнем характеристического уравнения кратности  $r$ , то в этом случае существует  $r$  линейно независимых нормированных решений, так что  $\lambda_j$  будет  $r$ -кратным собственным значением  $H^2$ ).

Поскольку в силу основной теоремы алгебры характеристическое уравнение имеет хотя бы один корень, оператор  $H$  имеет по крайней мере одно собственное значение, что мы и предполагали выше. Следует отметить, что все корни  $\lambda_j$  характеристического уравнения, будучи собственными значениями положительно определенного оператора  $H$ , обязательно вещественны и положительны.

Числа  $q_{1j}, q_{2j}, \dots, q_{nj}$  являются косоугольными координатами собственного вектора  $u_j$ , и, следовательно, все собственные векторы нам известны. Таким образом, задача о нахождении собственных значений и собственных векторов оператора  $H$  полностью решена.

Докажем теперь, что косоугольные координаты  $q_{ik}$  совпадают с коэффициентами искомого преобразования  $q_i = \sum q_{ik} x_k$  косоугольной системы координат к прямоугольной. Действительно,

<sup>1)</sup> Здесь существенно, что  $\det \| b_{ij} \| \neq 0$ . — Прим. ред.

<sup>2)</sup> Строгое доказательство этого факта здесь опущено. — Прим. ред.

$k$ -й собственный вектор  $u_k$  можно записать в виде  $u_k = \sum q_{ik}e_i$ , так что для любого вектора  $u = x_1u_1 + \dots + x_nu_n$  имеем

$$u = \sum_k x_k u_k = \sum_k \sum_i x_k q_{ik} e_i = \sum_i \sum_k q_{ik} x_k e_i.$$

Но  $u$  можно записать также в виде  $u = \sum_i q_i e_i$ . Поскольку разложение вектора по базису единственно, то, сравнивая эти два выражения, получаем  $q_i = \sum_k q_{ik} x_k$ . Постоянные  $q_{ik}$  теперь известны и определяют искомое преобразование.

Таким образом, поставленная выше задача о преобразовании к нормальным координатам полностью решена, а вместе с ней решена и исходная физическая задача о нахождении движения колебательной системы с конечным числом степеней свободы.

### Примеры

**Пример 1.** Для задачи о двух массах примера 1 из п. 1 характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} k_1 - m_1 \lambda & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или с учетом того, что  $m_1 = m_2 = 1$ ,  $k_1 = 5$ ,  $k_2 = 2$ ,

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение имеет корни  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 6$ .

Для определения  $q_{ik}$  получаем систему

$$\begin{aligned} (5 - \lambda) q_1 - 2q_2 &= 0 \\ -2q_1 + (2 - \lambda) q_2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда  $q_1 = c$ ,  $q_2 = \frac{1}{2}(5 - \lambda)c$ , где  $c$  — произвольное число.

Таким образом, при  $\lambda_1 = 1$  имеем  $q_{11} = c_1$ ,  $q_{12} = 2c_1$ , а при  $\lambda_2 = 6$  имеем  $q_{21} = c_2$ ,  $q_{22} = -c_2/2$ . Из условия, что  $\mathfrak{B}$  должна приводиться к виду  $x_1^2 + x_2^2$ , получаем  $c_1 = 1/\sqrt{5}$ ,  $c_2 = 2/\sqrt{5}$ , что согласуется с утверждениями п. 1.

**Пример 2.** В задаче о струне с бусинками имеем

$$\mathfrak{A} = \frac{S}{a} \{q_1^2 - q_1 q_2 + q_2^2 - \dots\}$$

и

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2} m \{q_1^2 + q_2^2 + \dots\},$$

так что после сокращения на  $S/2a$  характеристическое уравнение приводится к виду

$$\begin{vmatrix} C & -1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ -1 & C & -1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & -1 & C & -1 \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & -1 & C \end{vmatrix} = 0,$$

где через  $C$  мы обозначили  $2 - ma\lambda/S$ . Этот определитель обращается в нуль при

$$C = 2 - \frac{ma\lambda}{S} = 2 \cos \frac{s\pi}{n+1} \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

что можно доказать следующим образом. Обозначая написанный выше определитель  $n$ -го порядка через  $D_n$  и разлагая его по элементам первой строки, получаем рекуррентное соотношение

$$D_s + D_{s-2} = CD_{s-1} \quad (s = 2, 3, \dots, n),$$

причем  $D_0 = 1$  и  $D_1 = C$ .

Учитывая тригонометрическое тождество

$$\frac{1}{\sin \theta} \{ \sin (s+1) \theta + \sin (s-1) \theta \} = 2 \cos \theta \frac{\sin s \theta}{\sin \theta},$$

мы получаем, что при  $\theta = \arccos (C/2)$  функция  $f(s) = \sin (s+1) \theta / \sin \theta$  удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению, что и  $D_s$ ,  $f(0) = D_0$ ,  $f(1) = D_1$ , и потому  $f(s)$  совпадает с  $D_s$ . Но  $f(n) = D_n$  обращается в нуль при  $\theta = s\pi/(n+1)$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$ , что и дает желаемый результат. Более того, определитель  $D_n$ , будучи многочленом от  $\lambda$  степени  $n$ , может обращаться в нуль только при найденных  $n$  значениях  $C$ , а именно при

$$C = C_s = 2 \cos \frac{s\pi}{n+1} \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Следовательно, поскольку  $\lambda = (S/ma)(2 - C)$ , спектр задачи состоит из

$$\lambda_s = \frac{2S}{ma} \left( 1 - \cos \frac{s\pi}{n+1} \right) = \frac{4S}{ma} \sin^2 \frac{s\pi}{2(n+1)} \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

а для собственных частот мы получаем следующие выражения:

$$v_s = 2 \sqrt{\frac{S}{ma}} \sin \frac{s\pi}{2(n+1)}.$$

Коэффициенты  $q_{rs}$  искомого канонического преобразования при каждом фиксированном  $s$  пропорциональны алгебраическим дополнениям элементов последней строки и  $r$ -го столбца определи-



теля  $D_n$  при  $C = C_s$ . Вычисления показывают, что алгебраические дополнения равны  $D_{r-1}(s)$ , где  $D_{r-1}(s)$  — значение определителя  $D_{r-1}$  при  $C = C_s$ . Используя найденное выше выражение для  $D_r$ , а именно  $D_r = \sin(r+1)\theta/\sin\theta$ , получаем

$$D_{r-1}(s) = \frac{\sin r\theta_s}{\sin\theta_s},$$

где  $\theta_s = \arccos C_s/2 = s\pi(n+1)$ , так что

$$D_{r-1}(s) = \frac{\sin \frac{rs\pi}{n+1}}{\sin \frac{s\pi}{n+1}},$$

и, следовательно,  $q_{rs} = K \sin \frac{rs\pi}{n+1}$ , где  $K$  — коэффициент пропорциональности. Его нужно выбрать так, чтобы преобразование  $q_r = \sum q_{rs}x_s$  приводило форму

$$\mathfrak{B}(q_1, \dots, q_n) = \frac{1}{2}m(q_1^2 + \dots + q_n^2)$$

к виду

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2;$$

другими словами, мы должны нормировать  $n$  векторов  $q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{in}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) при помощи формы  $\mathfrak{B}$ . Для этого нужно положить  $K = \pm 2/\sqrt{m(n+1)}$ , в чем можно убедиться, используя тождество

$$\sum_{r=1}^n \sin^2 \frac{rs\pi}{n+1} = \frac{n+1}{2} \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Выбор знака  $K$  не имеет значения, поскольку знак определяет одно из двух противоположных направлений соответствующего собственного вектора.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Задача о струне с бусинками (см. выше, пример 2) играла важную роль на раннем этапе развития теории рядов Фурье. См., например, Рэлей [1, п. 120—124], а также Гантмахер и Крейн [1, стр. 333]\*.

## ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ДЛЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ СИСТЕМ

**1. Рекурсивное вариационное определение собственных значений.** В гл. I мы определили собственные значения  $\lambda_i$  и собственные векторы  $u_i$  колебательной системы равенством  $Hu_i = \lambda_i u_i$ , где  $H$  — оператор, связанный с системой. Однако основные излагаемые в книге теории и рассматриваемые методы существенно опираются на тот факт, что собственные значения можно охарактеризовать в вариационных терминах, а именно как максимумы или минимумы некоторых выражений.

Как мы видели, собственные векторы можно интерпретировать как главные полуоси эллипсоида. Вариационные принципы, рассматриваемые в настоящей главе, выражают экстремальные свойства главных полуосей. Например, длина наибольшей главной полуоси равна максимальному значению, а именно  $1/\sqrt{\lambda_1}$ , для всевозможных векторов, концы которых находятся на эллипсоиде

$$(Hu, u) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 = 1.$$

Это наглядное свойство эллипсоида наводит нас на мысль определить число  $\lambda_1$  и вектор  $u_1$  с помощью соотношения

$$\frac{1}{\lambda_1} = (u_1, u_1) = \max \frac{(u, u)}{(Hu, u)},$$

где максимум берется по всем векторам  $u$ , для которых  $(Hu, u) = 1$ , а затем доказать (см. следующий пункт), что  $\lambda_1$  и  $u_1$  являются собственными элементами  $H$ . Поскольку формы  $(u, u) = \sum b_{ik} q_i q_k$  и  $(Hu, u) = \sum a_{ik} q_i q_k$  однородны, мы можем переписать это определение в виде  $1/\lambda_1 = \max (u, u)/(Hu, u)$  без дополнительного условия  $(Hu, u) = 1$  или же в виде

$$\lambda_1 = \min \frac{(Hu, u)}{(u, u)} = \min (Hu, u); \quad (u, u) = 1.$$

Отношение  $(Hu, u)/(u, u)$ , связанное с потенциальной и кинетической энергией физической системы, часто называется *частным*

*Рэля*, а тот факт, что квадрат наименьшей собственной частоты системы равен минимуму этого частного, известен как *принцип Рэля*.

Существование по крайней мере одного нормированного решения  $u_1$  (в случае кратного собственного значения решение не будет единственным) следует из теоремы Вейерштрасса о том, что непрерывная функция на ограниченном замкнутом множестве достигает своего максимума и минимума. Таким образом, задача нахождения  $\lambda_1$  и  $u_1$  сводится к минимизации функции  $(Hu, u)/(u, u)$ .

Задачи такого типа, связанные с нахождением экстремальных значений, т. е. максимумов или минимумов некоторых выражений, называются *вариационными*.

Далее, вторая главная полуось эллипсоида есть вектор максимальной длины, ортогональный наибольшей полуоси. Это подсказывает нам определить  $\lambda_2$  и  $u_2$  (их существование снова следует из теоремы Вейерштрасса) с помощью соотношения

$$\frac{(Hu_2, u_2)}{(u_2, u_2)} = \lambda_2 = \min \frac{(Hu, u)}{(u, u)},$$

где минимум берется по всем векторам  $u$ , для которых  $(u_1, u) = 0$ . Аналогично,

$$\frac{(Hu_3, u_3)}{(u_3, u_3)} = \lambda_3 = \min \frac{(Hu, u)}{(u, u)}$$

при условии  $(u_1, u) = (u_2, u) = 0$  и т. д.

Таким образом, мы можем сформулировать следующую гипотезу.

Рекурсивное определение собственных значений:  $r$ -е собственное значение  $\lambda_r$  оператора  $H$  и  $r$ -й собственный вектор  $u_r$  являются соответственно минимальным значением и минимизирующим вектором функции  $(Hu, u)/(u, u)$ ; при этом минимум берется по всем векторам, ортогональным  $r - 1$  предыдущим собственным векторам  $u_1, u_2, \dots, u_{r-1}$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Рекурсивное определение собственных значений принадлежит Веберу; см. [1, п. 7], где оно применяется к задаче о колебаниях мембраны. Физические следствия из этого определения обсуждаются в различных местах книги Рэля [1].

**2. Обоснование вариационного определения.** Мы должны теперь показать, что числа  $\lambda_r$  и векторы  $u_r$ , определенные с помощью рекурсивного вариационного принципа, действительно совпадают с собственными значениями и собственными векторами оператора  $H$ , определенными равенством  $Hu_r = \lambda_r u_r$ .

Для первого минимального значения  $\lambda_1$  мы имеем  $(Hu_1, u_1)/(u_1, u_1) = \lambda_1$ , и  $(Hu, u)/(u, u) \geq \lambda_1$  при любом  $u$ , или, другими словами,

$$(Hu_1, u_1) - \lambda_1 (u_1, u_1) = 0 \text{ и } (Hu, u) - \lambda_1 (u, u) \geq 0.$$

Таким образом, обозначая оператор  $H - \lambda_1 I$  (который, очевидно, является самосопряженным) через  $L_1$ , мы можем написать  $(L_1 u_1, u_1) = 0$  и  $(L_1 u, u) \geq 0$ . Отсюда следует, что функция  $(L_1 u, u)$  имеет минимум при  $u = u_1$ , и, значит, в этой точке ее частные производные по переменным  $x_1, \dots, x_n$  должны обращаться в нуль. Для достижения единообразия терминологии выразим этот результат на языке вариационного исчисления. Положим  $(L_1 u, u) = J(u)$ . Тогда  $J(u_1) = 0$ , а при  $u = u_1 + \varepsilon v$  имеем

$$J(u_1 + \varepsilon v) = (L_1 u_1, u_1) + 2\varepsilon (L_1 u_1, v) + \varepsilon^2 (L_1 v, v) \geq 0,$$

каковы бы ни были вектор  $v$  и вещественное число  $\varepsilon$ .

Таким образом, при фиксированном  $v$  разность  $J(u_1 + \varepsilon v) - J(u_1)$  является функцией только от  $\varepsilon$ ; мы обозначим ее через  $\Phi(\varepsilon)$ . При  $\varepsilon = 0$  эта функция принимает минимальное значение  $\Phi(0)$ , так что ее дифференциал  $d\Phi = \Phi'(0) d\varepsilon$ , который называется *вариацией*  $J(u_1)$ , должен обращаться в нуль. Но для  $\Phi(\varepsilon)$  имеет место следующее выражение:

$$\Phi(\varepsilon) = J(u_1 + \varepsilon v) - J(u_1) = 2\varepsilon (L_1 u_1, v) + \varepsilon^2 (L_1 v, v).$$

Тогда  $\Phi'(0) = 2(L_1 u_1, v) = 0$  при любом  $v$ , в частности при  $v = L_1 u_1$ . Отсюда следует, что вектор  $L_1 u_1$ , будучи ортогональным самому себе, равен нулю. Таким образом,  $L_1 u_1 = Hu_1 - \lambda_1 u_1 = 0$ , т. е.  $u_1$  является собственным вектором, отвечающим собственному значению  $\lambda_1$ , что и требовалось доказать.

Итак, мы доказали, что  $\lambda_1$  и  $u_1$ , которые дают решение рассмотренной выше задачи на минимум, являются в то же время собственным значением и собственным вектором оператора  $H$ . (Заметим, что тем самым мы доказали существование по крайней мере одного собственного значения  $H$  независимо от характеристического уравнения, определенного в гл. I.) Аналогичные рассуждения показывают, что решения  $\lambda_r, u_r$  остальных вариационных задач также являются собственными значениями и собственными векторами оператора  $H$ .

Действительно, в общем случае мы видим, что  $r$ -е минимальное значение  $\lambda_r$  и  $r$ -й минимизирующий вектор  $u_r$  удовлетворяют соотношениям  $(Hu_r, u_r)/(u_r, u_r) = \lambda_r$  и  $(Hu, u)/(u, u) \geq \lambda_r$  или  $(Hu, u) - \lambda_r (u, u) \geq 0$  при любых  $u$ , для которых  $(u, u_1) = \dots = (u, u_{r-1}) = 0$ . Отсюда, рассуждая так же,

как и в предыдущем случае, мы получаем, что  $(L_r u_r, u) = 0$  для любых  $u$ , таких, что  $(u, u_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, r-1$ .

Таким образом,  $L_r u_r$  ортогонален любому вектору, ортогональному  $(r-1)$ -мерному подпространству  $\mathfrak{M}_{r-1}$ , которое натянуто на векторы  $u_1, u_2, \dots, u_{r-1}$ . Отсюда следует, что  $L_r u_r \in \mathfrak{M}_{r-1}$ . Но для любого базисного вектора  $u_i \in \mathfrak{M}_{r-1}$  мы получаем, учитывая самосопряженность оператора  $L_r$ , что

$$(L_r u_r, u_i) = (H u_r, u_i) - \lambda_r (u_r, u_i) = \lambda_i (u_r, u_i) - \lambda_r (u_r, u_i) = 0.$$

Следовательно, вектор  $L_r u_r$  ортогонален любому вектору из  $\mathfrak{M}_n$  и потому равен нулю, а это означает, что  $H u_r = \lambda_r u_r$ . Итак, мы полностью доказали, что числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , определенные рекурсивно как минимумы, совпадают с собственными значениями  $H$ . Других собственных значений оператор  $H$  не имеет, так как минимизирующие векторы  $u_1, \dots, u_n$  уже образуют п. о. н. с.

**3. Колебательные системы при наличии связи.** Большое преимущество вариационного определения собственных значений выявляется при изучении колебательных систем при наличии связи, которая задается условием, что некоторая функция  $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$  переменных  $\xi_1, \dots, \xi_n$  остается все время равной нулю. Мы предполагаем, что связь совместна с положением равновесия, т. е. что  $f(0, \dots, 0) = 0$ . Тогда, разлагая эту функцию в ряд Тейлора, мы получим

$$f(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \Big|_0 \xi_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \xi_n} \Big|_0 \xi_n + \dots = 0,$$

так что для малых колебаний уравнение связи примет вид

$$a_1 \xi_1 + \dots + a_n \xi_n = 0,$$

где коэффициенты  $a_i = \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \Big|_0$  постоянны. Новая система  $S$  будет иметь  $n-1$  степеней свободы и, значит,  $n-1$  собственных значений, которые мы будем обозначать через  $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{n-1}$  с соответствующими (нормированными) собственными векторами  $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_{n-1}$ .

Геометрически эта связь означает, что вектор  $u(t)$ , описывающий положение системы  $S$  в любой момент времени  $t$ , должен находиться в фиксированном  $(n-1)$ -мерном подпространстве, которое задается уравнением  $a_1 \xi_1 + \dots + a_n \xi_n = 0$ .

Мы будем обозначать исходное пространство через  $\mathfrak{M}_n$ , а это  $(n-1)$ -мерное подпространство через  $\mathfrak{M}_{n-1}$  и будем говорить, что  $\mathfrak{M}_{n-1}$  является *подпространством связи* в  $\mathfrak{M}_n$ . Если мы обозначим через  $\varphi$  нормированный вектор связи, ортогональный  $\mathfrak{M}_{n-1}$ , то связь можно задать условием ортогональности  $(u, \varphi) = 0$ .

В случае  $n = 3$ , например, все допустимые векторы, которые описывают положение системы со связью, лежат в плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной заданному вектору связи  $\varphi$ , а главные полуоси эллипса, которые получаются в сечении эллипсоида  $(Hu, u) = 1$  этой плоскостью, будут собственными векторами системы со связью.

**4. Часть оператора в подпространстве.** Теперь мы хотим выяснить, какой оператор  $\tilde{H}$  соответствует системе при наличии связи. Другими словами, для какого оператора  $\tilde{H}$  эти полуоси будут собственными векторами, соответствующими собственным значениям  $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{n-1}$ .

Чтобы ответить на этот вопрос, введем сначала *оператор проектирования* (или *проектор*)  $P$ , такой, что для любого вектора  $u \in \mathfrak{M}_n$  вектор  $Pu$  является ортогональной проекцией  $u$  на плоскость связи. Другими словами, оператор  $P$  определяется равенством  $Pu = u - (u, \varphi) \varphi$ , имеющим простой геометрический смысл. Оператор проектирования, очевидно, является *неотрицательным*. Это означает, что  $(Pu, u) \geq 0$  для любого  $u$ ; однако он не будет положительно определенным, поскольку  $(Pu, u) = 0$  при  $u = \varphi \neq 0$ . Для любого вектора  $u \in \mathfrak{M}_n$  вектор  $Pu \in \mathfrak{M}_{n-1}$ ; в частности, если  $u \in \mathfrak{M}_{n-1}$ , то  $u = Pu$ . Наконец, для любого вектора  $u \in \mathfrak{M}_{n-1}$  и любого вектора  $v \in \mathfrak{M}_n$  мы имеем  $(Pv, u) = (v, u)$ . Действительно,  $v = Pv + (v, \varphi) \varphi$  и  $(\varphi, u) = 0$ , откуда

$$(v, u) = (Pv, u) + ((v, \varphi) \varphi, u) = (Pv, u),$$

что и требовалось доказать.

Если мы теперь определим  $\tilde{H}$ , полагая  $\tilde{H} = PH$  и сужая область определения  $\tilde{H}$  до  $\mathfrak{M}_{n-1}$ , то ясно, что  $\tilde{H}$  действительно будет искомым оператором, т. е. что  $\tilde{\lambda}_r$  и  $\tilde{u}_r$  будут его собственными элементами. В самом деле,

$$\tilde{\lambda}_1 = (H\tilde{u}_1, \tilde{u}_1) = \min (Hu, u), \quad u \in \mathfrak{M}_{n-1}, (u, u) = 1.$$

Но  $(Hu, u) = (PHu, u) = (\tilde{H}u, u)$  для всех  $u \in \mathfrak{M}_{n-1}$ ; следовательно,

$$\tilde{\lambda}_1 = (\tilde{H}\tilde{u}_1, \tilde{u}_1) = \min (\tilde{H}u, u), \quad u \in \mathfrak{M}_{n-1}, (u, u) = 1,$$

а это и означает, что  $\tilde{\lambda}_1$  и  $\tilde{u}_1$  являются собственными элементами  $\tilde{H}$ .

Аналогично, если мы рассмотрим  $r$  ортонормированных векторов связи  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$  и определим оператор проектирования  $P$  равенством

$$Pu = u - (u, \varphi_1) \varphi_1 - \dots - (u, \varphi_r) \varphi_r,$$

то собственные элементы колебательной системы с такими связями будут совпадать с собственными элементами оператора  $\tilde{H} = PH$ , рассматриваемого на подпространстве  $\mathfrak{M}_{n-r}$ . Через  $\mathfrak{M}_{n-r}$  мы обозначаем здесь подпространство векторов  $u$ , ортогональных ко всем векторам связи  $\varphi_i$ . Этот оператор называется *частью  $H$  в  $\mathfrak{M}_{n-r}$* .

**5. Теорема Рэля в случае одной связи.** По сравнению с первоначальным определением собственных значений вариационное определение имеет следующее преимущество. Из исходного определения мы не можем сделать никакого заключения о том, как ведут себя собственные частоты системы при наложении связей, т. е. мы не знаем, как сравнивать по величине  $\lambda_i$  и  $\tilde{\lambda}_i$ . Но, используя вариационные свойства, можно без труда доказать знаменитую теорему Рэля о том, что характеристические (собственные) частоты системы со связью выше (или по крайней мере не ниже), чем частоты исходной системы. Справедливость этой теоремы для сплошных сред подтверждается нашим повседневным опытом. Например, у официантов есть привычка щелкать пальцами по бокалу, чтобы проверить, нет ли в нем трещины. Высота звука, который издает бокал, зависит от его собственных частот. Если трещина есть, то собственные частоты понижаются; этот факт можно объяснить с помощью теоремы Рэля, так как с появлением трещины убирается связь, которая существовала между двумя частями целого бокала.

*Теорема Рэля (в случае одной связи). Наименьшая собственная частота системы  $S$ , на которую наложена добавочная связь, заключена между первой и второй собственными частотами исходной системы, т. е.*

$$\lambda_1 \leq \tilde{\lambda}_1 \leq \lambda_2.$$

Чтобы доказать левое неравенство, заметим, что  $\lambda_1$  является минимумом  $(Hu, u)$ , когда  $u$  пробегает множество всех нормированных векторов, а  $\tilde{\lambda}_1$  является минимумом того же выражения, но векторы  $u$  в этом случае подчинены ограничению  $(\varphi, u) = 0$ . Отсюда тотчас же следует, что  $\lambda_1 \leq \tilde{\lambda}_1$ .

Мы воспользовались здесь очевидным, но важным принципом, который для наших целей удобно сформулировать следующим образом.

*Если к условиям, которые налагаются в вариационной задаче на допустимые функции, добавить дополнительные условия, то мы получим новую задачу, для которой соответствующий минимум*

не ниже, чем минимум исходной задачи, поскольку множество допустимых функций новой задачи содержится в множестве функций исходной задачи.

Для иллюстрации приведем пример. Предположим, что проводятся конкурсные экзамены, к которым допускаются все студенты Соединенных Штатов, и что студенту, который сделает минимальное число ошибок, присуждается премия. Вторая премия присуждается при дополнительном условии, а именно она учреждена только для студентов из штата Мэн. Ясно, что студент, получивший вторую премию, сделает не меньше ошибок, чем студент, получивший первую премию.

В нашей вариационной задаче мы имеем аналогичную ситуацию. Поскольку  $\lambda_1$  является минимумом  $(Hu, u)$  по всем нормированным векторам  $u$ , а  $\tilde{\lambda}_1$  будет минимумом того же выражения, но при дополнительном условии, что  $u$  лежит в заданной плоскости, ясно, что  $\lambda_1 \leq \tilde{\lambda}_1$ . Это простое сравнение множества допустимых векторов, которые подчинены большему или меньшему числу ограничений, играет важную роль в рассуждениях Рэля. Мы будем в последующем называть его *общим принципом сравнения*, а также *принципом монотонности*, поскольку минимум возрастает монотонно при добавлении связей.

Осталось доказать, что  $\tilde{\lambda}_1 \leq \lambda_2$ . Мы показали, что при добавлении связи наименьшее собственное значение колебательной системы возрастет. Теперь мы хотим доказать, что оно не может стать больше, чем  $\lambda_2$ . Для этого постараемся вычислить, какое максимальное значение может принимать  $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_1(\varphi) = \tilde{\lambda}_1(a_1, \dots, a_n)$  как функция вектора связи  $\varphi$ , или, что то же самое, как функция переменных  $a_1, \dots, a_n$ . В частном случае  $\varphi = u_1$  плоскость связи ортогональна первому собственному вектору  $u_1$ ; поэтому по определению второго собственного значения будем иметь  $\tilde{\lambda}_1(1, 0, \dots, 0) = \lambda_2$ . Следовательно, по крайней мере для одного вектора связи, а именно  $\varphi = u_1$ , основная частота системы может стать равной второй частоте исходной системы. Но ни при каком векторе связи основная частота не может стать еще больше.

Действительно, пусть  $u^*$  — нормированный вектор, принадлежащий пересечению подпространства  $\mathfrak{M}_2(u_1, u_2)$  с  $(n-1)$ -мерным подпространством связи (это пересечение не пусто, так как его размерность равна по крайней мере 1; см. гл. I, п. 5). Тогда

$$u^* = (u^*, u_1) u_1 + (u^*, u_2) u_2,$$

и поскольку  $u^* \in \mathfrak{M}_{n-1}$ , имеем

$$(Hu^*, u^*) \geq \tilde{\lambda}_1 = \min (Hu, u),$$



где минимум берется по всем нормированным векторам  $u \in \mathfrak{M}_{n-1}$ . С другой стороны, полагая  $(u^*, u_1) = a_1$ ,  $(u^*, u_2) = a_2$ , мы получим

$$(Hu^*, u^*) = a_1^2 (Hu_1, u_1) + 2a_1a_2 (Hu_1, u_2) + a_2^2 (Hu_2, u_2).$$

Но  $(Hu_1, u_1) = \lambda_1$ ,  $(Hu_2, u_2) = \lambda_2$  и  $(Hu_1, u_2) = 0$ , так что

$$(Hu^*, u^*) = a_1^2\lambda_1 + a_2^2\lambda_2 \leq (a_1^2 + a_2^2)\lambda_2,$$

поскольку  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ . Так как  $u^*$  — нормированный вектор, то  $a_1^2 + a_2^2 = 1$ . Окончательно получаем, что  $(Hu^*, u^*) \leq \lambda_2$  и, значит,  $\tilde{\lambda}_1 \leq \lambda_2$ , что и требовалось доказать.

**Пример.** В задаче о двух массах (пример 1 из п. 1 гл. I) зададим связь уравнением  $q_1 = 0$ ; это значит, что только вторая масса может двигаться. Для системы со связью мы имеем  $\mathfrak{A} = 2q_2^2$ ,  $\mathfrak{B} = q_1^2$ , так что  $\tilde{\lambda}_1 = 2$ , и это число действительно находится между  $\lambda_1 = 1$  и  $\lambda_2 = 6$ . Наложим теперь другую связь  $(u, u_1) = 0$ , где  $u = (q_1, q_2)$ , а  $u_1$  — первый собственный вектор системы с компонентами  $(1, 2)$  (см. п. 11 гл. I). Тогда  $q_2 = -(1/2)q_1$ , так что  $\mathfrak{A} = (15/2)q_1^2$ ,  $\mathfrak{B} = (5/4)q_1^2$ , и для  $\tilde{\lambda}_1$  получаем следующее характеристическое уравнение:  $15/2 - (5/4)\tilde{\lambda}_1 = 0$ , откуда  $\tilde{\lambda}_1 = 6$ . Таким образом, согласно общей теории, для этой связи  $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_2$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Относительно теоремы этого пункта см. Рэлей [1, п. 92а], а также Гантмахер [2, стр. 286] \*.

**6. Независимое, или максимально-минимальное, определение собственных значений.** Рассматривая теорему Рэля с другой точки зрения, мы можем дать новое и очень удобное определение собственных значений. Неравенство  $\lambda_1 \leq \tilde{\lambda}_1 \leq \lambda_2$  с точки зрения самого Рэля выражает свойство числа  $\tilde{\lambda}_1$ , т. е. первого собственного значения системы со связью. Но если обратить внимание на правую часть этого неравенства, то можно считать, что оно выражает свойство числа  $\lambda_2$ , т. е. второго собственного значения исходной системы. Действительно, это неравенство можно использовать для нового определения, которое в отличие от прежнего рекурсивного определения не зависит от первого собственного вектора.

*Второе собственное значение колебательной системы равно максимальному значению, которое может принять минимум  $(Hu, u)/(u, u)$  при наложении одной связи.*

Совершенно аналогично можно определить и  $r$ -е собственное значение.

**Независимое** (или максимально-минимальное) **определение** собственных значений:  $r$ -е собственное значение колебательной системы равно максимальному значению, которое может принять минимум  $(Hu, u)/(u, u)$  при добавлении  $r - 1$  связей.

Чтобы доказать эквивалентность этого независимого определения рекурсивному, предположим, что  $r - 1$  связей задаются векторами  $\varphi_1, \dots, \varphi_{r-1}$ . Пусть  $\tilde{\lambda}_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{r-1})$  — минимальное значение, которое принимает выражение  $(Hu, u)/(u, u)$ , причем минимум берется по всем векторам  $u$ , удовлетворяющим условиям  $(u, \varphi_i) = 0$ . Из общего принципа сравнения известно, что при добавлении этих связей основная частота системы повышается. Мы хотим узнать, до какого значения она может возрастать, т. е. каково максимальное значение выражения  $\tilde{\lambda}_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{r-1})$ , рассматриваемого как функция векторов связи  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{r-1}$ . В частном случае, когда  $\varphi_1 = u_1, \dots, \varphi_{r-1} = u_{r-1}$ , мы имеем, согласно рекурсивному определению,

$$\tilde{\lambda}_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{r-1}) = \lambda_r,$$

где  $\lambda_r$  есть  $r$ -е собственное значение системы без связей. Таким образом, мы можем по крайней мере одним способом выбрать  $r - 1$  связей так, чтобы основная частота системы стала равной  $r$ -й собственной частоте исходной системы.

Покажем, что при любом другом выборе  $r - 1$  связей основная частота не может увеличиться. Действительно, пусть  $u^*$  — нормированный вектор, принадлежащий пересечению подпространств  $\mathfrak{M}\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$  и  $\mathfrak{M}_{n-r+1} = \mathfrak{M}_n \ominus \mathfrak{M}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{r-1}\}$ . (Это пересечение опять-таки имеет размерность, по крайней мере равную 1.) Тогда  $u^*$  можно записать в виде

$$u^* = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \dots + k_r u_r,$$

где  $k_i = (u^*, u_i)$ , так что

$$(Hu^*, u^*) = (H(k_1 u_1 + \dots + k_r u_r), k_1 u_1 + \dots + k_r u_r),$$

откуда точно так же, как и при доказательстве теоремы Рэля, мы получаем, что  $(Hu^*, u^*) \leq \lambda_r$ .

Далее, при любом выборе связей  $\varphi_1, \dots, \varphi_{r-1}$

$$\tilde{\lambda}_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{r-1}) \leq (Hu^*, u^*),$$

так как  $\tilde{\lambda}_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{r-1})$  равно минимуму  $(Hu, u)$  по всем нормированным векторам, удовлетворяющим условию  $(u, \varphi_i) = 0$ ,

в то время как на вектор  $u^*$  наложено еще дополнительное ограничение, а именно: он должен принадлежать  $\mathfrak{M}(u_1, u_2, \dots, u_r)$ .

Следовательно, как и утверждалось,  $\tilde{\lambda}_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{r-1}) \leq \lambda_r$ , и тем самым доказана эквивалентность независимого и рекурсивного определений  $r$ -го собственного значения.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Максимально-минимальное определение собственных значений было впервые дано Фишером [1, стр. 249]. Но единственная цель статьи Фишера состояла в том, чтобы дать чисто аналитическое определение *сигнатуры* квадратичной формы (см., например, Бохер [1]), а колебания систем у него вовсе не рассматривались. В теории колебаний это определение было введено Вейлем [1], [2], которое фигурировало у него под названием «фундаментальной леммы». Курант [1] обратил внимание на важность этого определения для физических систем.

**7. Теорема Рэлея для любого числа связей.** Новое максимально-минимальное определение является очень важным, и в этом мы можем убедиться уже сейчас. До сих пор, добавляя одну или несколько связей, мы исследовали, как это повлияет только на первое собственное значение. А теперь мы можем доказать следующую теорему.

**Т е о р е м а Р э л е я** (для любого числа связей)<sup>1)</sup>. Если на колебательную систему с собственными значениями  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  наложить  $h$  произвольных связей  $(u, \psi_1) = (u, \psi_2) = \dots = (u, \psi_h) = 0$ , где  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_h$  — произвольные независимые наперед заданные векторы, то новые собственные значения  $\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \dots \leq \tilde{\lambda}_{n-h}$  будут разделять старые в том смысле, что  $\lambda_r \leq \tilde{\lambda}_r \leq \lambda_{r+h}$  для любого  $r \leq n - h$ .

Здесь бы нам мало помогло прежнее рекурсивное определение, согласно которому  $\lambda_2$ , например, есть минимум  $(Hu, u)/(u, u)$  по всем векторам  $u$ , ортогональным первому собственному вектору исходной системы, а  $\tilde{\lambda}_2$  — минимум  $(Hu, u)/(u, u)$  по всем  $u$ , ортогональным и вектору связи  $\psi_1$  и новому собственному вектору  $\tilde{u}_1$ . Действительно, а priori мы не можем сравнить эти два множества векторов, подчиненных различным условиям ортогональности.

Если же воспользоваться максимально-минимальным определением, то доказать общую теорему Рэлея совсем просто. В самом деле,

$$\tilde{\lambda}_r = \tilde{\lambda}_r(\psi_1, \dots, \psi_h; \varphi_1, \dots, \varphi_{r-1})$$

<sup>1)</sup> Эта теорема по существу содержится в мемуаре Пуанкаре [1]\*.—  
Прим. ред.

теперь определяется как наибольшее значение, которое может принять при варьировании связей  $\varphi_i$  минимум выражения  $(Hu, u)/(u, u)$ , взятый по всем  $u$ , подчиненным  $r + h - 1$  условиям

$$(u, \varphi_i) = 0, \quad (u, \psi_j) = 0, \quad i = 1, \dots, r - 1, \quad j = 1, \dots, h,$$

в то время как  $\lambda_{r+h}$  является наибольшим значением, которое может принять тот же самый минимум, если изменяются все  $r + h - 1$  связей. Следовательно,  $\tilde{\lambda}_r \leq \lambda_{r+h}$ .

С другой стороны, в частном случае, когда  $\varphi_1 = u_1, \dots, \dots, \varphi_{r-1} = u_{r-1}$ , мы имеем

$$\tilde{\lambda}_r(\psi_1, \dots, \psi_h; u_1, \dots, u_{r-1}) \leq \tilde{\lambda}_r.$$

Следовательно, поскольку  $\lambda_r = \lambda_r(u_1, \dots, u_{r-1})$  является минимумом  $(Hu, u)/(u, u)$  без дополнительных ограничений  $(u, \psi_1) = \dots = (u, \psi_h) = 0$ , то

$$\lambda_r \leq \tilde{\lambda}_r(\psi_1, \dots, \psi_h; u_1, \dots, u_{r-1}) \leq \tilde{\lambda}_r \leq \lambda_{r+h},$$

что и требовалось доказать.

Максимально-минимальные свойства важны именно благодаря тому, что с их помощью мы можем сравнить собственные значения исходной и модифицированной задачи. В частности, большое значение они имеют для методов Рэлей — Ритца и Вайнштейна, которые состоят в нахождении верхних и нижних границ для искомых собственных значений путем сравнения их с собственными значениями модифицированных задач.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

По поводу теоремы Рэлей о разделении см. Рэлей [1, п. 92a], где утверждается, что в полной общности эта теорема, по-видимому, была доказана Раусом [2].

## КРИТЕРИЙ ВАЙНШТЕЙНА МАКСИМАЛЬНОГО УВЕЛИЧЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

**1. Вводные замечания по поводу функции Вайнштейна.** Функция Вайнштейна, называемая также определителем Вайнштейна, была введена в 1935 г. и с тех пор широко использовалась на практике благодаря приложениям в квантовой механике, а также в теории резонанса и теории изгиба. Поскольку эти приложения охватывают бесконечномерные задачи, мы отложим их до следующих глав.

Однако совсем недавно Вайнштейн (см. [7], [8], [10]) использовал эту функцию для других целей, а именно для дальнейшего развития максимально-минимальной теории собственных значений, где она применяется как в конечномерных, так и в бесконечномерных задачах. В настоящей главе мы рассмотрим эту усовершенствованную теорию в конечномерном случае, а в гл. IX и XIV снова вернемся к ней в бесконечномерном случае.

Простые свойства этой функции позволят сразу же получить все результаты гл. II, а некоторые из них улучшить. Например, мы видели (гл. II, п. 6), что максимально-минимальное определение собственных значений устанавливает достаточное (но не необходимое) условие, которому должны удовлетворять  $r$  связей, чтобы при наложении этих связей собственные значения исходной системы максимально увеличились; это условие состоит в том, что  $r$  векторов связи должны быть первыми  $r$  собственными векторами исходной системы. Теперь же с помощью функции Вайнштейна мы получим простой критерий, который является необходимым и достаточным для такого максимального увеличения. Поскольку в численных задачах возрастание собственных значений соответствует улучшению аппроксимаций, ясно, что такой критерий представляет большой практический интерес.

Функция Вайнштейна для колебательной системы с  $r$  связями  $p_1, p_2, \dots, p_r$  — это функция одной вещественной переменной  $\lambda$ , определенная на вещественной оси  $-\infty < \lambda < \infty$ , хотя в некоторых разделах теории, особенно в приложениях к квантовой механике, она определяется и в комплексной плоскости. Обычно

эта функция обозначается через  $W(\lambda)$ , хотя иногда оказываются удобными обозначения  $W(\lambda; p_1, p_2, \dots, p_r)$  или  $W_{0r}(\lambda)$ . Она определяется следующей формулой:

$$W(\lambda) = \det \begin{vmatrix} (R_\lambda p_1, p_1) & (R_\lambda p_1, p_2) & \dots & (R_\lambda p_1, p_r) \\ (R_\lambda p_2, p_1) & (R_\lambda p_2, p_2) & \dots & (R_\lambda p_2, p_r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (R_\lambda p_r, p_1) & (R_\lambda p_r, p_2) & \dots & (R_\lambda p_r, p_r) \end{vmatrix},$$

которая в важном частном случае, когда имеется только одна связь, принимает вид  $W(\lambda) = (R_\lambda p, p)$ . Здесь  $R_\lambda$  обозначает резольвентный оператор, определенный далее.

Нас в первую очередь будет интересовать вопрос, каким образом функция Вайнштейна зависит от  $n - r$  собственных значений  $\lambda_1^{(r)}, \lambda_2^{(r)}, \dots, \lambda_{n-r}^{(r)}$  системы со связями и собственных значений  $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_n^{(0)}$  системы без связей. Верхний индекс здесь и далее обозначает число связей, которые налагаются на систему. Эта зависимость устанавливается фундаментальной формулой Ароншайна

$$W(\lambda) = \frac{(\lambda_1^{(r)} - \lambda)(\lambda_2^{(r)} - \lambda) \dots (\lambda_{n-r}^{(r)} - \lambda)}{(\lambda_1^{(0)} - \lambda)(\lambda_2^{(0)} - \lambda) \dots (\lambda_n^{(0)} - \lambda)},$$

которая будет доказана ниже<sup>1)</sup>. Эта формула показывает, что  $W(\lambda)$  является мероморфной функцией (в нашем конечномерном

<sup>1)</sup> При отыскании стационарных значений формы  $(Hu, u)$  при наличии  $r$  связей  $(u, p_s) = 0$  ( $s = 1, 2, \dots, r$ ) и условия нормировки  $(u, u) = 1$  методом множителей Лагранжа приходят к уравнению

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} H - \lambda E & P' \\ P & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (1)$$

где  $H$  есть  $(n \times n)$ -матрица формы, а  $P$  есть  $(r \times n)$ -матрица, в строках которой стоят координаты связей,

$$P = \| p_{si} \|, \quad s = 1, 2, \dots, r; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Определитель (1) называется окаймленным определителем Лагранжа (см. Раус [2, § 57—67, 78]) и возникает при определении частот колеблющейся системы, стесненной  $r$  связями. В цитированной книге Рауса прослеживается связь между корнями определителей  $\Delta(\lambda) = 0$  и  $D(\lambda) = 0$  и доказывается теорема о перемежаемости корней при наложении одной связи ( $D(\lambda) = |H - \lambda E|$ ).

Заметим, что если раскрыть определитель  $\Delta(\lambda)$  по известным формулам для блочных матриц (см. Гантмахер [1], стр. 59)\*, то получается формула

$$\frac{\Delta(\lambda)}{D(\lambda)} = (-1)^r \det P (H - \lambda E)^{-1} P'. \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что в правой части (3) стоит определитель Вайнштейна  $W(\lambda)$ ; левая часть после разложения на множители приводит к указанной в тексте формуле Ароншайна для  $W(\lambda)$ . — *Прим. ред.*

случае отношением двух многочленов), полюсы которой совпадают с собственными значениями (с учетом их кратности) системы без связи, а нули — с собственными значениями системы со связями.

**2. Резольвентный оператор.** Поскольку собственные элементы  $\lambda_i$  и  $u_i$  оператора  $H$  определяются уравнением  $(H - \lambda I)u = 0$ ,  $u \neq 0$ , то отсюда следует, что при заданном вещественном  $\lambda$ , не являющемся собственным значением  $H$ , оператор  $H - \lambda I$  аннулирует только нулевой вектор, и, следовательно (гл. I, п. 7), обратный оператор  $(H - \lambda I)^{-1}$  однозначно определен на всех векторах  $n$ -мерного пространства  $\mathfrak{M}_n$ . Этот оператор называется *резольвентой*  $H$  и обозначается через  $R_\lambda$ . Если же число  $\lambda$  совпадает с собственным значением  $\lambda_i$  кратности  $r$ , то  $H - \lambda I$  аннулирует все векторы соответствующего собственного подпространства  $\mathfrak{M}_r$ , и потому обратный оператор  $R_\lambda = (H - \lambda I)^{-1}$  можно определить только на ортогональном дополнении  $\mathfrak{M}_n \ominus \mathfrak{M}_r$ , т. е. на векторах  $v$ , таких, что  $(v, u_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ . Легко проверить, что  $\mathfrak{M}_n \ominus \mathfrak{M}_r$  является *инвариантным подпространством* оператора  $H - \lambda I$  в том смысле, что для любого вектора  $v \in \mathfrak{M}_n \ominus \mathfrak{M}_r$  вектор  $(H - \lambda I)v$  также принадлежит  $\mathfrak{M}_n \ominus \mathfrak{M}_r$  и что в этом подпространстве однозначно определен оператор  $(H - \lambda I)^{-1}$ , который мы и называем в этом случае резольвентой. Итак, для любого вектора  $v \in \mathfrak{M}_n \ominus \mathfrak{M}_r$  вектор  $w = R_\lambda v$  определяется условием, что  $w \in \mathfrak{M}_n \ominus \mathfrak{M}_r$  и  $(H - \lambda I)w = v$ . Таким образом, для всех вещественных  $\lambda$  можно определить оператор  $R_\lambda$  с той оговоркой, что в случае, когда  $\lambda$  — собственное значение  $H$ , мы рассматриваем резольвенту только на подпространстве  $\mathfrak{M}_n \ominus \mathfrak{M}_r$ <sup>1)</sup>.

Для любого собственного вектора  $u_i$  имеем  $(H - \lambda I)u_i = (\lambda_i - \lambda)u_i$ , так что, применяя к обеим частям равенства оператор  $R_\lambda$ , мы получим

$$R_\lambda u_i = \frac{u_i}{\lambda_i - \lambda} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

откуда видно, что  $R_\lambda$  будет линейным самосопряженным оператором с теми же собственными векторами  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , что и у оператора  $H$ , но с собственными значениями  $(\lambda_1 - \lambda)^{-1}, (\lambda_2 - \lambda)^{-1}, \dots, (\lambda_n - \lambda)^{-1}$ . Отсюда следует, что для любого вектора  $v$  с компонентами  $(v, u_1), (v, u_2), \dots, (v, u_n)$

$$R_\lambda v = \frac{(v, u_1)}{\lambda_1 - \lambda} u_1 + \dots + \frac{(v, u_n)}{\lambda_n - \lambda} u_n,$$

где в случае, если  $\lambda = \lambda_i$  является собственным значением  $H$  (при этом необходимо, чтобы  $(v, u_i) = 0$ ), отношение  $(v, u_i)/(\lambda_i - \lambda)$

<sup>1)</sup> Согласно общепринятому определению резольвенты, оператор  $R_\lambda$  не существует, если  $\lambda$  является собственным значением. — *Прим. перев.*

полагается равным нулю, а соответствующий символ  $(\lambda_i - \lambda)^{-1}$  не учитывается в спектре оператора  $R_\lambda$ .

До сих пор мы предполагали, что силы, действующие на систему, зависят только от ее положения. Теперь же мы допустим, что к системе приложена периодическая внешняя сила  $f(t)$ , компоненты которой  $f_i \sin(\omega t + \delta_i)$  изменяются гармонически с частотой  $\omega = \sqrt{\lambda}$  в  $2\pi$  секунд и с амплитудами  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ , которые можно рассматривать как координаты некоторого фиксированного вектора  $f$ . Задача нахождения движения системы под действием этой силы может быть решена с помощью резольвентного оператора следующим образом.

Уравнения Лагранжа при наличии внешней силы (см., например, Вебстер [1] и Гантмахер [1]\*) имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_i} = f_i \sin(\omega t + \delta_i),$$

или

$$\ddot{x}_i + \lambda_i x_i = f_i \sin(\omega t + \delta_i),$$

где  $f_i = (f, u_i)$  — проекция вектора  $f$  на  $i$ -ю ось, а  $f_i \sin(\omega t + \delta_i)$  — обобщенная компонента внешней силы, соответствующая нормальной координате  $x_i$ . Общее решение записывается в виде

$$x_i(t) = \frac{(f, u_i)}{\lambda_i - \lambda} \sin(\sqrt{\lambda} t + \delta_i) + a_i \sin \sqrt{\lambda_i} (t + \theta_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $a_i$  и  $\theta_i$  — постоянные интегрирования,  $(f, u_i)/(\lambda_i - \lambda)$  — компоненты резольвентного вектора,

$$R_\lambda f = \frac{(f, u_1)}{\lambda_1 - \lambda} u_1 + \dots + \frac{(f, u_n)}{\lambda_n - \lambda} u_n,$$

где  $\lambda = \omega^2$ .

**3. Некоторые замечания о резонансе; физический смысл функции Вайнштейна.** Если теперь для удобства записи мы положим  $\delta_i = a_i = \theta_i = 0$ , то проекция внешней силы  $f \sin \omega t$  на направление движения  $R_\lambda f \sin \omega t$  будет равна  $c (R_\lambda f, f) \sin \omega t = c W(\lambda) \sin \omega t$ , где  $c = (R_\lambda f, R_\lambda f)^{1/2}$  — постоянная, которую можно сделать равной 1, выбирая надлежащим образом величину  $f$ . Таким образом, для любой периодической внешней силы  $f$  постоянной амплитуды, но произвольной по направлению и для любой частоты  $\omega = \sqrt{\lambda}$  значение  $W(\lambda)$  дает амплитуду результирующей периодической силы, действующей вдоль направления движения системы.

Следовательно, зная значение  $W(\lambda)$  при любом данном  $\lambda$ , мы можем сразу предсказать поведение системы при действии



внешней силы с частотой  $\omega = \sqrt{\lambda}$ . Если частота будет такой, что значение  $\lambda$  очень мало отличается от собственного значения  $\lambda_i$  системы, к которой не приложены внешние силы, то значение  $W(\lambda)$  будет главным образом зависеть от члена  $(f, u_i)/(\lambda_i - \lambda)$  при условии, что  $(f, u_i) \neq 0$ , и потому будет очень большим. Поскольку амплитуда соответствующего колебания  $x_i(t)$  будет заключена между двумя значениями  $|(f, u_i)|/(\lambda_i - \lambda) \pm a_i$ , система будет колебаться с большой амплитудой, т. е. наступит резонанс. Однако если  $(f, u_i) = 0$ , то внешняя сила не будет действовать в  $i$ -м направлении, так что  $W(\lambda)$  не будет иметь полюса при  $\lambda = \lambda_i$ , и резонанс не наступит. Важная роль, которую собственные значения играют в физике, объясняется главным образом их применением при исследовании явления резонанса.

С другой стороны, если мы выберем частоту  $\sqrt{\lambda}$  внешней силы так, чтобы  $\lambda$ , которое мы теперь обозначим через  $\lambda_i^{(1)}$ , было нулем функции  $W(\lambda) = (R_\lambda f, f)$ , то направление движения  $R_\lambda f$  будет ортогональным направлению силы, которая в этом случае не производит работы. Другими словами, вектор  $f$  можно интерпретировать как связь, которая вынуждает систему совершать в плоскости, перпендикулярной  $f$ , движение, описываемое уравнением  $x = R_\lambda f \sin \omega t$ . Но тогда из результатов гл. II следует, что  $\lambda = \lambda_i^{(1)}$  является собственным значением системы со связью. Таким образом, мы пришли к результату, играющему основную роль во всем последующем изложении, — нули функции Вайнштейна совпадают с собственными значениями системы со связью.

После этих эвристических замечаний о значении функции Вайнштейна при исследовании резонанса и изучении систем со связями мы снова займемся строгим математическим рассмотрением свойств этой функции.

**4. Свойства функции Вайнштейна в случае одной связи.** Из определения функции  $W(\lambda) = (R_\lambda p, p)$  мы имеем

$$W(\lambda) = (R_\lambda p, p) = \frac{(u_1, p)^2}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{(u_2, p)^2}{\lambda_2 - \lambda} + \dots + \frac{(u_n, p)^2}{\lambda_n - \lambda},$$

$$W'(\lambda) = \frac{(u_1, p)^2}{(\lambda_1 - \lambda)^2} - \frac{(u_2, p)^2}{(\lambda_2 - \lambda)^2} + \dots + \frac{(u_n, p)^2}{(\lambda_n - \lambda)^2} > 0.$$

Таким образом,  $W(\lambda)$  определена для всех  $\lambda$ , за исключением нескольких полюсов, в которых мы положим  $W(\lambda) = \infty$ . Эти полюсы совпадают с такими собственными значениями  $\lambda_i$  оператора  $H$ , что вектор  $p$  и соответствующее собственное подпространство не ортогональны. Если же  $p$  ортогонален этому подпространству, то функция  $W(\lambda)$  может быть положительной, отрицательной или равной нулю, но обязательно конечной.

Записывая неравенства  $W(\lambda) > 0$  или  $W(\lambda) < 0$ , мы всегда будем предполагать, что  $W(\lambda)$  имеет конечное значение.

Производная  $W'(\lambda)$  также определена всюду, за исключением полюсов, и всюду положительна, так что  $W(\lambda)$  всюду строго возрастает. Далее,  $W(\lambda)$  положительна при  $\lambda < \lambda_1$  и отрицательна при  $\lambda > \lambda_n$ . Следовательно,  $W(\lambda)$  имеет ровно один нуль в каждом промежутке между двумя соседними полюсами. Других нулей она иметь не может, и, значит, число нулей на единицу меньше числа полюсов. Кроме того, все нули — простые, так как  $W'(\lambda)$  нигде не обращается в нуль, и все полюсы также будут простыми, как это видно из определения.

В случае когда  $H$  имеет кратные собственные значения, введем следующее обозначение. Предположим, что  $H$  имеет  $k \leq n$  различных собственных значений  $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k$  с кратностями  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , так что  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ . Для сокращения записи положим

$$n_i = m_1 + m_2 + \dots + m_i$$

для  $i = 1, 2, \dots, k$ . Тогда мы имеем

$$\mu_1 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n_1} < \mu_2 = \lambda_{n_1+1} = \dots = \lambda_{n_2} < \dots$$

$$\dots < \mu_k = \lambda_{n_{k-1}+1} = \lambda_{n_{k-1}+2} = \dots = \lambda_{n_k}.$$

Следовательно,  $W(\lambda)$  можно записать в виде

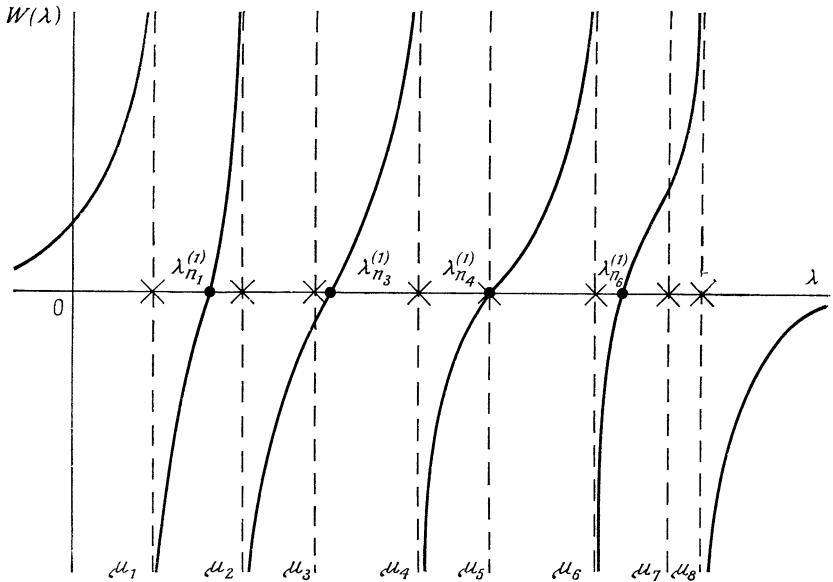
$$W(\lambda) = \frac{a_1^2}{\mu_1 - \lambda} + \frac{a_2^2}{\mu_2 - \lambda} + \dots + \frac{a_k^2}{\mu_k - \lambda},$$

где  $a_i^2 = \sum_j (f, u_j)^2$  и суммирование производится по ортонормированным векторам  $u_j$ , порождающим собственное подпространство, соответствующее  $\mu_i$ .

В качестве примера рассмотрим случай, когда  $k = 8$ , и пусть  $a_3 = a_5 = a_7 = 0$ . Тогда точки  $\mu_3, \mu_5, \mu_7$  не будут полюсами  $W(\lambda)$ , и пусть, например,  $W(\mu_3) < 0$ ,  $W(\mu_5) = 0$ ,  $W(\mu_7) > 0$ .

График  $W(\lambda)$  как функции  $\lambda$  для нашего случая изображен на рис. 3. На этом рисунке каждое из различных собственных значений  $\mu_i$  оператора  $H$  обозначено крестиком; в этих точках сосредоточены как бы «гроздьи» из  $m_i$  собственных значений. Собственным значением с наименьшим индексом в  $i$ -й «грозди» будет  $\lambda_{n_{i-1}+1}$ , а с наибольшим —  $\lambda_{n_i}$ . Нули  $W(\lambda)$  отмечены точками и обозначены через  $\lambda_{n_1}^{(1)}$ ,  $\lambda_{n_3}^{(1)}$ ,  $\lambda_{n_4}^{(1)}$  и  $\lambda_{n_6}^{(1)}$  соответственно. Такие обозначения для нулей мы выбрали по той причине, что, как это будет впоследствии доказано, эти числа представляют собственные значения системы со связью; точная ситуация описывается ниже в критерии Вайнштейна.

Таким образом, исходная задача имеет  $n$  собственных значений  $\lambda_i$ , а модифицированная задача имеет  $n - 1$  собственных



Р и с. 3. График функции Вайнштейна  $W(\lambda)$  при наличии одной связи.

значений  $\lambda_i^{(1)}$ , причем, как мы знаем из теоремы Рэля,  $\lambda_i^{(1)}$  разделяют  $\lambda_i$ . В следующем пункте мы сформулируем более точный результат о поведении  $\lambda_i^{(1)}$ .

**5. Критерий Вайнштейна в случае одной связи.** Условимся говорить, что  $i$ -е собственное значение *частично увеличивается* при наложении связи, если  $\lambda_i^{(0)} < \lambda_i^{(1)} < \lambda_{i+1}^{(0)}$ , и *максимально увеличивается*, если  $\lambda_i^{(1)} = \lambda_{i+1}^{(0)}$ .

Из свойств функции Вайнштейна следует, как мы увидим далее, что в любом случае  $\lambda_i^{(0)} \leq \lambda_i^{(1)} \leq \lambda_{i+1}^{(0)}$ , т. е. при наложении связей ни одно собственное значение не может уменьшиться и в то же время не может стать больше (при наложении только одной связи) следующего по номеру собственного значения. Таким образом, если  $\lambda_i^{(0)} = \lambda_{i+1}^{(0)}$ , то отсюда, очевидно, следует, что  $\lambda_i^{(0)} = \lambda_i^{(1)} = \lambda_{i+1}^{(0)}$ . Но если  $\lambda_i^{(0)} < \lambda_{i+1}^{(0)}$ , то имеет место следующий критерий Вайнштейна (в случае одной связи):  $i$ -е собственное значение  $\lambda_i^{(0)}$  ( $< \lambda_{i+1}^{(0)}$ ) свободной системы *максимально увеличивается* ( $\lambda_i^{(1)} = \lambda_{i+1}^{(0)}$ ) тогда и только тогда, когда  $W(\lambda_{i+1}^{(0)}) \leq 0$ .

Для примера возьмем в качестве вектора связи первый собственный вектор  $u_1 = p$ . В этом случае, как следует из результатов гл. II, имеет место максимальное увеличение. Тогда

$$W(\lambda) = \frac{(u_1, u_1)^2}{\lambda_1^{(0)} - \lambda} + \frac{(u_1, u_2)^2}{\lambda_2^{(0)} - \lambda} + \dots + \frac{(u_1, u_n)^2}{\lambda_n^{(0)} - \lambda} = \frac{1}{\lambda_1^{(0)} - \lambda},$$

так что при  $\lambda = \lambda_2^{(0)} > \lambda_1^{(0)}$  мы будем иметь

$$W(\lambda_2^{(0)}) = \frac{1}{\lambda_1^{(0)} - \lambda_2^{(0)}} < 0,$$

что согласуется с критерием Вайнштейна.

Как мы увидим ниже, используя функцию Вайнштейна, можно также получить критерий того, что собственное значение не увеличивается, и, следовательно, методом исключения можно будет установить, когда будет иметь место частичное увеличение.

**6. Правило Ароншайна и формула Ароншайна.** Доказательство критерия Вайнштейна, а также и другие важные результаты, такие, как правило и формула Ароншайна, мы получим как следствия из двух следующих ниже предложений А и В. В этих предложениях символ  $\mathfrak{M}(H, \lambda)$  обозначает собственное подпространство оператора  $H$ , соответствующее  $\lambda$ , а  $\dim \mathfrak{M}(H, \lambda)$  — размерность этого подпространства; при этом, если  $\lambda$  не является собственным значением  $H$ , мы считаем, что  $\mathfrak{M}(H, \lambda)$  — нулевое подпространство и  $\dim \mathfrak{M}(H, \lambda) = 0$ . В общих чертах смысл этих предложений состоит в том, что размерность собственного подпространства, отвечающего данному вещественному числу  $\lambda$ , повышается на 1, если  $\lambda$  — нуль функции Вайнштейна  $W(\lambda)$ , понижается на 1, если  $\lambda$  — полюс  $W(\lambda)$ , и остается неизменной в остальных случаях.

*А. Каково бы ни было вещественное число  $\lambda$  четыре следующих утверждения эквивалентны <sup>1)</sup>:*

1)  $W(\lambda) = 0$ ;

2)  $\mathfrak{M}(H^{(0)}, \lambda) \subset \mathfrak{M}(H^{(1)}, \lambda)$  (включение строгое);

3) существует вектор  $v \notin \mathfrak{M}(H^{(0)}, \lambda)$ , такой, что <sup>2)</sup>  $v \neq 0$  и

$$\mathfrak{M}(H^{(1)}, \lambda) = \mathfrak{M}(H^{(0)}, \lambda) + \mathfrak{M}\{v\};$$

4) существует вектор  $v \in \mathfrak{M}(H^{(1)}, \lambda)$ , не принадлежащий  $\mathfrak{M}(H^{(0)}, \lambda)$ .

<sup>1)</sup> Здесь  $H^{(1)}$  обозначает сужение  $H^{(0)}$  на  $(n-1)$ -мерное подпространство, ортогональное связи. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Правая часть следующей ниже формулы представляет собой ортогональную сумму. — *Прим. ред.*

В. Каково бы ни было вещественное число  $\lambda$  четыре следующих утверждения эквивалентны:

- 1)  $W(\lambda) = \infty$ ;
- 2)  $\mathfrak{M}(H^{(1)}, \lambda) \subset \mathfrak{M}(H^{(0)}, \lambda)$  (включение строгое);
- 3) существует вектор  $v \notin \mathfrak{M}(H^{(1)}, \lambda)$ , такой, что

$$\mathfrak{M}(H^{(0)}, \lambda) = \mathfrak{M}(H^{(1)}, \lambda) + \mathfrak{M}\{v\};$$

4) существует вектор  $v \in \mathfrak{M}(H^{(0)}, \lambda)$ , не принадлежащий  $\mathfrak{M}(H^{(1)}, \lambda)$ .

Докажем сначала предложение А. Для этого покажем, что  $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$  (символ  $\Rightarrow$  означает «влечет за собой»).

$(1) \Rightarrow (2)$ . Если  $W(\lambda) = 0$ , то для любого  $w \in \mathfrak{M}(H^{(0)}, \lambda)$  имеем  $(p, w) = 0$ , так как в противном случае  $\lambda$  было бы полюсом  $W(\lambda)$ . Следовательно,  $w$  принадлежит области определения  $H^{(1)}$  и

$$(H^{(1)} - \lambda I)w = (H^{(0)} - \lambda I)w - ((H^{(0)} - \lambda I)w, p)p = 0.$$

Таким образом, любой вектор  $w \in \mathfrak{M}(H^{(0)}, \lambda)$  принадлежит также  $\mathfrak{M}(H^{(1)}, \lambda)$ . С другой стороны, поскольку вектор  $p$  ортогонален  $\mathfrak{M}(H^{(0)}, \lambda)$ , к нему можно применить оператор  $R_\lambda$ . Полагая  $R_\lambda p = v$ , мы будем иметь  $(v, p) = 0$ , поскольку

$$(v, p) = (R_\lambda p, p) = W(\lambda) = 0.$$

Вектор  $v$  не является собственным вектором  $H^{(0)}$  с собственным значением  $\lambda$ , так как  $(H^{(0)} - \lambda I)v = p \neq 0$ . В то же время

$$\begin{aligned} (H^{(1)} - \lambda I)v &= (H^{(0)} - \lambda I)v - (H^{(0)}v, p)p = \\ &= p - (H^{(0)}v, p)p = p - p = 0, \end{aligned}$$

так как  $H^{(0)}v = (H^{(0)} - \lambda I)v + \lambda v = p + \lambda v$ , и потому

$$(H^{(0)}v, p) = (p, p) + \lambda(v, p) = 1.$$

Следовательно,  $v$  является собственным вектором  $H^{(1)}$ , соответствующим  $\lambda$ , откуда и следует, что  $(1) \Rightarrow (2)$ .

$(2) \Rightarrow (3)$ . Рассмотрим произвольный вектор  $v \in \mathfrak{M}(H^{(1)}, \lambda)$ , ортогональный  $\mathfrak{M}(H^{(0)}, \lambda)$ . Вектор  $(H^{(0)} - \lambda I)v$  будет также ортогонален подпространству  $\mathfrak{M}(H^{(0)}, \lambda)$ , поскольку ортогональное дополнение к собственному подпространству оператора  $H^{(0)}$  инвариантно (п. 2). Кроме того, в силу (2) вектор  $p$ , ортогональный  $\mathfrak{M}(H^{(1)}, \lambda)$  по определению  $H^{(1)}$ , будет ортогонален  $\mathfrak{M}(H^{(0)}, \lambda)$ . Поэтому можно применить оператор  $R_\lambda$  к обеим частям равенства  $(H^{(0)} - \lambda I)v = ap$ , где  $a = (H^{(0)}v, p) \neq 0$ . В результате мы получим, что  $v = aR_\lambda p$ . Следовательно,  $v$  кратен фиксированному вектору  $R_\lambda p$ , и наше утверждение тем самым доказано.

Поскольку (4) является очевидным следствием (3), нам остается только доказать, что  $(4) \Rightarrow (1)$ . Так как  $v \in \mathfrak{M}(H^{(1)}, \lambda)$  и  $v \notin \mathfrak{M}(H^{(0)}, \lambda)$ , то

$$(H^{(0)} - \lambda I)v = (H^{(1)} - \lambda I)v + (H^{(0)}v, p)p = (H^{(0)}v, p)p = ap \quad (a \neq 0).$$

Отсюда следует, что вектор  $p$  ортогонален  $\mathfrak{M}(H^{(0)}, \lambda)$ , и мы можем написать  $v = R_\lambda p + u$ , где  $u \in \mathfrak{M}(H^{(0)}, \lambda)$ . Поскольку  $v$  принадлежит области определения  $H^{(1)}$ , то  $(v, p) = 0$ . Учитывая также, что  $(u, p) = 0$ , получаем

$$W(\lambda) = (R_\lambda p, p) = (v, p) - (u, p) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство предложения В проводится в той же последовательности.

(1)  $\Rightarrow$  (2). Заметим, что если  $W(\lambda) = \infty$ , то проекция  $w$  вектора  $p$  на  $\mathfrak{M}(H^{(0)}, \lambda)$  не равна нулю, иначе  $\lambda$  не было бы полюсом  $W(\lambda)$ . По свойству проекции  $(w, p) = (w, w) \neq 0$ . Следовательно,  $w$  не может принадлежать области определения оператора  $H^{(1)}$  и, значит, не может быть собственным вектором  $H^{(1)}$ . С другой стороны, если  $v \in \mathfrak{M}(H^{(1)}, \lambda)$ , то

$$0 = (H^{(1)} - \lambda I)v = (H^{(0)} - \lambda I)v - (H^{(0)}v, p)p.$$

Умножая это равенство скалярно на  $w$ , получим

$$(H^{(0)}v, p)(w, w) = ((H^{(0)} - \lambda I)v, w) = (v, (H^{(0)} - \lambda I)w) = 0,$$

откуда следует, что  $(H^{(0)}v, p) = 0$ . Значит,  $(H^{(0)} - \lambda I)v = 0$ , т. е.  $v \in \mathfrak{M}(H^{(0)}, \lambda)$ . Следовательно, (1)  $\Rightarrow$  (2).

Далее, любой вектор  $v \in \mathfrak{M}(H^{(0)}, \lambda)$ , ортогональный  $w$ , будет также ортогонален  $p$ , так как  $(p, v) = (w, v) = 0$  по свойству проекции. Но тогда  $v \in \mathfrak{M}(H^{(1)}, \lambda)$ . А это и означает, что (2)  $\Rightarrow$  (3).

Поскольку (4) является очевидным следствием (3), остается доказать, что (4)  $\Rightarrow$  (1). Из того, что  $v$  является собственным вектором  $H^{(0)}$  с собственным значением  $\lambda$ , но не является собственным вектором  $H^{(1)}$ , следует, что  $(p, v) \neq 0$ . Но тогда  $\lambda$  будет полюсом  $W(\lambda)$ , что и требовалось доказать.

Предложения А и В можно сформулировать теперь в виде правила, которое мы будем называть *правилом Ароншайна*: *если вещественное число  $\lambda$  является собственным значением  $H^{(0)}$  кратности  $m$ <sup>1)</sup>, то оно будет собственным значением  $H^{(1)}$  кратности*

<sup>1)</sup> Если  $\lambda$  не является собственным значением  $H^{(0)}$ , то ему приписывается кратность 0.— *Прим. перев.*

$m - 1$ ,  $m + 1$  или  $m$  в зависимости от того, будет ли  $\lambda$  полюсом  $W(\lambda)$ , нулем  $W(\lambda)$  или  $W(\lambda) \neq 0, \infty$ ; и все собственные значения  $H^{(1)}$  учитываются таким образом.

Следовательно, функция, определенная формулой Ароншайна

$$W(\lambda) = \frac{(\lambda_1^{(1)} - \lambda) \dots (\lambda_{n-1}^{(1)} - \lambda)}{(\lambda_1^{(0)} - \lambda) \dots (\lambda_n^{(0)} - \lambda)},$$

имеет те же нули и полюсы с учетом кратностей, что и функция Вайнштейна, определенная выше. Поскольку обе эти функции рациональны, то они равны с точностью до постоянного множителя. Но если в выражении для функции Вайнштейна

$$W(\lambda) = \frac{(u_1, p)^2}{\lambda_1^{(0)} - \lambda} + \dots + \frac{(u_n, p)^2}{\lambda_n^{(0)} - \lambda}$$

привести слагаемые к общему знаменателю  $(\lambda_1^{(0)} - \lambda) \dots (\lambda_n^{(0)} - \lambda)$ , то сразу же будет видно, что эта постоянная равна 1. Действительно, коэффициент при старшей степени  $\lambda$  в числителе, а именно  $(-1)^{n-1}$ , будет таким же, как и в формуле Ароншайна, а знаменатели в обеих формулах совпадают. Таким образом, формула Ароншайна полностью доказана.

**7. Доказательство критерия Вайнштейна при наличии одной связи.** Прежде всего мы покажем, что  $\lambda_i^{(0)} \leq \lambda_i^{(1)} \leq \lambda_{i+1}^{(0)}$ , т. е. что ни одно собственное значение не может уменьшиться при наложении одной связи и в то же время не может стать больше следующего по номеру собственного значения. Обозначим через  $N^{(0)}(\lambda)$  и  $N^{(1)}(\lambda)$  число собственных значений  $H^{(0)}$  или  $H^{(1)}$  соответственно, не превосходящих  $\lambda$ , и положим  $N_{01}(\lambda) = N^{(0)}(\lambda) - N^{(1)}(\lambda)$ . Из правила Ароншайна и из поведения функции Вайнштейна (рис. 3) ясно, что функция  $N_{01}(\lambda)$  равна нулю при  $\lambda < \lambda_1^{(0)}$ , возрастает скачком до 1 при прохождении через первый полюс  $W(\lambda)$ , убывает скачком до нуля при прохождении через первый нуль  $W(\lambda)$ , затем снова возрастает до 1 при прохождении через следующий полюс и т. д. Поскольку нули и полюсы  $W(\lambda)$  обязательно разделяют друг друга, отсюда следует, что  $N_{01}(\lambda)$  может принимать только два значения: 0 или 1; она равна 0 в нулях  $W(\lambda)$ , равна 1 в полюсах  $W(\lambda)$ , а в промежутках между ними сохраняет постоянное значение, равное значению на левом конце. В частности,  $N_{01}(\lambda) = 1$  при  $\lambda > \lambda_n^{(0)}$ .

Теперь предположим, что  $\lambda_i^{(1)} < \lambda_i^{(0)}$  при некотором  $i$ . Тогда при  $\lambda = \lambda_i^{(1)}$  имеем  $N^{(0)}(\lambda) < i$ , а  $N^{(1)}(\lambda) = i$ ; следовательно,  $N_{01}(\lambda) < 0$ , что невозможно. Если же предположить, что  $\lambda_i^{(1)} > \lambda_{i+1}^{(0)}$ , то при  $\lambda = \lambda_{i+1}^{(0)}$  мы получим, что  $N^{(0)}(\lambda) = i + 1$ ,  $N^{(1)}(\lambda) < i$ , откуда  $N_{01}(\lambda) \geq 2$ , что опять-таки невозможно.

Таким образом, мы получаем искомое *основное неравенство*  $\lambda_i^{(0)} \leq \lambda_i^{(1)} \leq \lambda_{i+1}^{(0)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

Мы теперь можем доказать в полной общности критерий Вайнштейна в случае одной связи.

**К р и т е р и й В а й н ш т е й н а.** Если  $\lambda_i^{(0)} = \lambda_{i+1}^{(0)}$ , то  $\lambda_i^{(0)} = \lambda_i^{(1)} = \lambda_{i+1}^{(0)}$  (этот тривиальный случай мы уже доказали); если же  $\lambda_i^{(0)} < \lambda_{i+1}^{(0)}$ , то

а)  $\lambda_i^{(1)} = \lambda_{i+1}^{(0)}$  тогда и только тогда, когда  $W(\lambda_{i+1}^{(0)}) \leq 0$ ; в этом случае собственное значение максимально увеличивается;

б)  $\lambda_i^{(1)} = \lambda_i^{(0)}$  тогда и только тогда, когда  $W(\lambda_i^{(0)}) \geq 0$ ; в этом случае собственное значение не увеличивается;

с)  $\lambda_i^{(0)} < \lambda_i^{(1)} < \lambda_{i+1}^{(0)}$  тогда и только тогда, когда  $W(\lambda^{(0)}) < 0$  или равна  $\infty$ , а  $W(\lambda_{i+1}^{(0)}) > 0$  или равна  $\infty$ ; это случай частичного увеличения, который имеет место, когда ни (а) ни (б) не выполняются.

Для упрощения записи в процессе доказательства введем следующие обозначения. Условимся называть интервалом типа (п, н) интервал оси  $\lambda$ , ограниченный слева полюсом  $W(\lambda)$ , а справа ближайшим нулем  $W(\lambda)$ . Аналогично, интервал типа (н, п) ограничен слева нулем  $W(\lambda)$ , а справа ближайшим полюсом  $W(\lambda)$ . Заметим, что  $W(\lambda) < 0$  в интервале типа (п, н) и  $W(\lambda) > 0$  в интервале типа (н, п). В силу правила Ароншайна  $N_{01}(\lambda) = 1$  в полюсе  $W(\lambda)$  и в последующем интервале типа (п, н), так как с возрастанием  $\lambda$  значение  $N_{01}(\lambda)$  может изменяться только в полюсе или нуле  $W(\lambda)$ ; точно так же  $N_{01}(\lambda) = 0$  в нуле  $W(\lambda)$  и в последующем интервале типа (н, п).

Таким образом, если  $W(\lambda_i^{(0)}) \geq 0$ , то  $\lambda_i^{(0)}$  лежит в интервале типа (н, п) или совпадает с его левым концом, откуда  $N_{01}(\lambda_i^{(0)}) = 0$ , а это значит, что  $\lambda_i^{(0)} = \lambda_i^{(1)}$ . Обратно, если  $\lambda_i^{(0)} = \lambda_i^{(1)}$ , то  $N_{01}(\lambda_i^{(0)}) = 0$ , откуда следует, что  $\lambda_i^{(0)}$  лежит в интервале типа (н, п) или совпадает с его левым концом и, следовательно,  $W(\lambda_i^{(0)}) \geq 0$ , что и завершает доказательство случая (б).

Пусть теперь  $\mu_i^{(1)}$  находится в интервале типа (п, н) или совпадает с его левым концом; тогда  $W(\mu_i) < 0$  или равна  $\infty$ , и  $N_{01}(\mu_i) = 1$ . Следовательно,  $\lambda_{n_i}^{(0)} < \lambda_{n_i}^{(1)}$ , так что  $\lambda_{n_i}^{(0)}$  действительно увеличивается. В силу основного неравенства  $\lambda_{n_i}^{(1)}$  либо совпадает с  $\lambda_{n_i+1}^{(0)}$ , либо будет меньше, чем  $\lambda_{n_i+1}^{(0)}$ ; во втором случае  $\lambda_{n_i}^{(1)}$  будет ближайшим следующим нулем  $W(\lambda)$ . Но при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  мы имеем  $W(\mu_i + \varepsilon) < 0$ , и так как  $W(\lambda)$

<sup>1)</sup> Напомним, что через  $\mu_i$  обозначаются собственные значения, занумерованные в порядке возрастания без учета кратности, а через  $\lambda_i$  — собственные значения с учетом кратности. — *Прим. перев.*



непрерывна (в области определения) и строго возрастает, то следующий нуль  $W(\lambda)$  будет не меньше, чем  $\lambda_{n_{i+1}}^{(0)}$ , тогда и только тогда, когда  $W(\lambda_{n_{i+1}}^{(0)}) \leq 0$ , что и доказывает случай (а). Случай (с) получается из (а) и (b) методом исключения.

Таким образом, критерий Вайнштейна, позволяющий делать выводы об увеличении собственных значений при наложении одной связи, полностью доказан. В дальнейшем нам будет удобно применять его в несколько иной форме. Из свойств  $W(\lambda)$  видно, что для любого заданного  $\lambda$  можно выбрать такое достаточно малое положительное  $\varepsilon$ , что при всех  $0 < \eta \leq \varepsilon$  значение  $W(\lambda - \eta)$ , которое мы будем называть *числом Вайнштейна*, будет конечным, не равным нулю и сохраняющим знак в промежутке  $0 < \eta \leq \varepsilon$ . Таким образом, число Вайнштейна  $W(\lambda - \varepsilon)$  отрицательно, если  $W(\lambda)$  имеет конечное неотрицательное значение, а в остальных случаях  $W(\lambda - \varepsilon)$  положительно. Следовательно, мы можем сформулировать критерий Вайнштейна в следующей форме:

*Если  $\lambda_i^{(0)} < \lambda_{i+1}^{(0)}$ , то  $\lambda_i^{(1)} = \lambda_{i+1}^{(0)}$  тогда и только тогда, когда число Вайнштейна  $W(\lambda_{i+1}^{(0)} - \varepsilon)$  отрицательно.*

**8. Функция Вайнштейна в случае нескольких связей.** В этом пункте мы введем необходимые обозначения в случае нескольких связей и докажем фундаментальную лемму Ароншайна, которая дает нам возможность легко перейти от одной связи к нескольким.

Пусть на систему наложено  $r$  независимых связей, которые задаются  $r$  ортонормированными векторами связи  $p_1, p_2, \dots, p_r$ . Тогда, как мы выяснили в гл. II, п. 4, соответствующий оператор  $H^{(r)}$  определяется по формуле  $H^{(r)} = P^{(r)}H$ , и его область определения является подпространство  $\mathfrak{M}_{n-r} = \mathfrak{M}_n \ominus \mathfrak{M}_r$ , где  $\mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_r \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$  есть  $r$ -мерное подпространство, натянутое на векторы связи, а  $P^{(r)}$  — оператор проектирования на  $\mathfrak{M}_{n-r}$ , определенный при любых  $u \in \mathfrak{M}_n$  равенством

$$P^{(r)}u = u - (u, p_1) p_1 - \dots - (u, p_r) p_r.$$

Будем искать теперь собственные значения  $\lambda^{(r)}$  оператора  $H^{(r)}$ , не являющиеся собственными значениями  $H^{(0)}$ , и соответствующие им ненулевые собственные векторы  $u^{(r)}$ . Прежде всего, для любого такого собственного вектора  $u^{(r)}$  мы имеем

$$(H^{(r)} - \lambda^{(r)}I) u^{(r)} = (H^{(0)} - \lambda^{(r)}I) u^{(r)} - \sum_{i=1}^r \xi_i p_i = 0,$$

где  $\xi_i = (H^{(0)}u^{(r)}, p_i)$  — постоянные, не равные нулю одновременно. Тогда, поскольку  $\lambda^{(r)}$  не является собственным значением  $H^{(0)}$ , к обеим частям равенства можно применить оператор  $R_\lambda =$

$= R_\lambda^{(0)} = (H^{(0)} - \lambda^{(r)}I)^{-1}$ , определенный в п. 2, и мы получим равенство

$$u^{(r)} = \sum_{i=1}^r \xi_i \bar{R}_\lambda p_i.$$

Но, кроме того, вектор  $u^{(r)}$  обязан принадлежать области определения оператора  $H^{(r)}$ , т. е. он должен удовлетворять соотношениям  $(u^{(r)}, p_j) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ . Следовательно,

$$\sum_{i=1}^r \xi_i (R_\lambda p_i, p_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r).$$

Эта система из  $r$  линейных однородных уравнений с  $r$  неизвестными  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , будет иметь нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель  $|(R_\lambda^{(0)} p_i, p_j)|$  равен нулю. При фиксированных связях  $p_1, p_2, \dots, p_r$  этот определитель, называемый *определителем Вайнштейна*, будет функцией только от  $\lambda$ , которую мы будем обозначать через  $W_{0r}(\lambda)$  или просто через  $W(\lambda)$ . Таким образом, по определению

$$W_{0r}(\lambda) = \det \begin{vmatrix} (R_\lambda^{(0)} p_1, p_1) & \dots & (R_\lambda^{(0)} p_1, p_r) \\ \dots & \dots & \dots \\ (R_\lambda^{(0)} p_r, p_1) & \dots & (R_\lambda^{(0)} p_r, p_r) \end{vmatrix}.$$

Точно так же для любой пары индексов  $i, j$  ( $1 \leq i \leq j \leq r$ ) мы можем определить соответствующую функцию Вайнштейна  $W_{ij}(\lambda)$  следующим образом.

Для оператора  $H^{(1)}$ , действующего в подпространстве  $\mathfrak{M}^{(1)} = \mathfrak{M}^{(0)} \ominus [p_1]^1$ , мы определяем резольвентный оператор  $R_\lambda^{(1)} = (H^{(1)} - \lambda I)^{-1}$  точно так же, как и в п. 2. Подобным же образом определяем  $R_\lambda^{(2)} = (H^{(2)} - \lambda I)^{-1}$ , где  $H^{(2)}$  действует в  $\mathfrak{M}^{(2)} = \mathfrak{M}^{(1)} \ominus [p_2]$ , и т. д. до  $R_\lambda^{(r-1)}$ . После этого мы определим функцию Вайнштейна  $W_{ij}(\lambda)$  как определитель порядка  $(j - i)$ :

$$W_{ij}(\lambda) = \det \begin{vmatrix} (R_\lambda^{(i)} p_{i+1}, p_{i+1}) & (R_\lambda^{(i)} p_{i+1}, p_{i+2}) & \dots & (R_\lambda^{(i)} p_{i+1}, p_j) \\ (R_\lambda^{(i)} p_{i+2}, p_{i+1}) & (R_\lambda^{(i)} p_{i+2}, p_{i+2}) & \dots & (R_\lambda^{(i)} p_{i+2}, p_j) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (R_\lambda^{(i)} p_j, p_{i+1}) & (R_\lambda^{(i)} p_j, p_{i+2}) & \dots & (R_\lambda^{(i)} p_j, p_j) \end{vmatrix},$$

где элемент, стоящий на пересечении  $k$ -й строки и  $l$ -го столбца, имеет вид  $(R_\lambda^{(i)} p_{i+k}, p_{i+l})$ . Ясно, что этот определитель соответствует наложению  $j - i$  дополнительных связей  $p_{i+1}, p_{i+2}, \dots$

<sup>1)</sup> Символом  $[p]$  обозначается одномерное подпространство, натянутое на вектор  $p$ . — Прим. ред.

$\dots, p_j$  на систему, к которой уже были приложены  $i$  связей  $p_1, p_2, \dots, p_i$ . Для дальнейшего изложения удобно положить  $W_{00}(\lambda) = 1$ .

**9. Лемма Ароншайна.** Поскольку  $r$  связей можно наложить либо одновременно, что приведет к функции Вайнштейна  $W_{0r}(\lambda)$ , либо последовательно, что приведет к  $r$  последовательным функциям Вайнштейна  $W_{01}(\lambda), W_{12}(\lambda), \dots, W_{r-1, r}(\lambda)$ , весьма вероятно, что  $W_{0r}(\lambda)$  может быть выражена через  $W_{01}(\lambda), W_{12}(\lambda), \dots, W_{r-1, r}(\lambda)$ . Оказывается, справедлива следующая лемма Ароншайна:  $W_{0r} = W_{01}W_{12} \dots W_{r-1, r}$ , которую мы сейчас докажем.

Если мы применим оператор  $H^{(i)}, i = 1, 2, \dots, r-1$ , к вектору  $R^{(i)}p_{i+1}$  (для удобства записи индекс  $\lambda$  опускается), то получим

$$H^{(i)}R^{(i)}p_{i+1} = H^{(0)}R^{(i)}p_{i+1} - (\beta_1 p_1 + \dots + \beta_i p_i),$$

где

$$\beta_j = (H^{(0)}R^{(i)}p_{i+1}, p_j) \quad (j = 1, 2, \dots, i).$$

Следовательно,

$$(H^{(i)} - \lambda I)R^{(i)}p_{i+1} = (H^{(0)} - \lambda I)R^{(i)}p_{i+1} - (\beta_1 p_1 + \dots + \beta_i p_i),$$

откуда

$$(H^{(0)} - \lambda I)R^{(i)}p_{i+1} = \beta_1 p_1 + \dots + \beta_i p_i + p_{i+1},$$

так что применение к обеим частям равенства оператора  $R^{(0)}$  дает

$$R^{(i)}p_{i+1} = R^{(0)}(\beta_1 p_1 + \dots + \beta_i p_i + p_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, r-1).$$

В определителе

$$W_{0r} = \det \begin{vmatrix} (R^{(0)}p_1, p_1) & (R^{(0)}p_1, p_2) & \dots & (R^{(0)}p_1, p_r) \\ (R^{(0)}p_2, p_1) & (R^{(0)}p_2, p_2) & \dots & (R^{(0)}p_2, p_r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (R^{(0)}p_r, p_1) & (R^{(0)}p_r, p_2) & \dots & (R^{(0)}p_r, p_r) \end{vmatrix}$$

прибавим к  $(i+1)$ -й строке первую строку, умноженную на  $\beta_1$ , вторую строку, умноженную на  $\beta_2$ , и т. д. и наконец  $i$ -ю строку, умноженную на  $\beta_i$ . Прделав такие операции с  $(r-1)$ -й,  $(r-2)$ -й,  $\dots$ , 3-й, 2-й и 1-й строками, мы не изменим величину определителя. При этом элемент  $(i+1)$ -й строки, стоящий на главной диагонали, будет иметь вид  $(R^{(i)}p_{i+1}, p_{i+1}) = W_{i, i+1}$ , а все элементы ниже этой диагонали равны нулю, поскольку  $R^{(i)}p_{i+1} \in \mathfrak{M} \ominus [p_1, p_2, \dots, p_i]$ , и, значит, при умножении этого вектора на  $p_1, p_2, \dots, p_i$  получается нуль. Следовательно,  $W_{0r} = W_{01}W_{12} \dots W_{r-1, r}$ . Лемма Ароншайна доказана.

**10. Критерий Вайнштейна в случае нескольких связей.** Мы ограничимся рассмотрением наиболее интересного случая, а именно случая максимального увеличения, для которого критерий Вайнштейна можно сформулировать следующим образом<sup>1)</sup>.

**К р и т е р и й В а й н ш т е й н а:**  *$i$ -е собственное значение колебательной системы максимально увеличивается при наложении  $r$  связей, т. е.  $\lambda_i^{(r)} = \lambda_{i+r}^{(0)}$  тогда и только тогда, когда в  $(r + 1)$ -членной последовательности чисел Вайнштейна*

$$W_{00} = 1, W_{01}, W_{02}, \dots, W_{0, r-1}, W_{0,r}$$

*имеется не менее  $k$  перемен знака, где  $W_{0j}$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ) — значение функции Вайнштейна  $W_{0j}$  в точке  $\lambda_{i+r}^{(0)} - \varepsilon$ , конечное и не равное 0, а  $k$  — наименьшее целое неотрицательное число, для которого  $\lambda_{i+k}^{(0)} = \lambda_{i+r}^{(0)}$ .*

В самом деле, предположим, что  $\lambda_i^{(r)} = \lambda_{i+k}^{(0)} = \lambda_{i+r}^{(0)}$ , и пусть  $k(j)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, r$ , обозначает число собственных значений  $\lambda$  в спектре  $j$ -й модифицированной системы

$$\begin{aligned} \dots \leq \lambda_i^{(j)} \leq \lambda_{i+1}^{(j)} \leq \dots \leq \lambda_{i+k(j)-1}^{(j)} < \lambda_{i+k(j)}^{(j)} = \\ = \lambda_{i+k}^{(0)} = \lambda_{i+k+1}^{(0)} = \dots = \lambda_{i+r}^{(0)} \leq \dots, \end{aligned}$$

которые удовлетворяют неравенствам  $\lambda_i^{(j)} \leq \lambda < \lambda_{i+r}^{(0)}$ . Таким образом,  $k(j)$  — невозрастающая функция  $j$ , и  $k(0) = k$ ,  $k(r) = 0$ .

Если  $k(j) > 0$ , то при добавлении следующей связи  $p_{j+1}$  наибольшее из этих  $k(j)$  собственных значений, а именно  $\lambda_{i+k(j)-1}^{(j)}$ , увеличится до  $\lambda_{i+k}^{(0)}$  тогда и только тогда, когда  $W_{j, j+1}(\lambda_{i+k}^{(0)} - \varepsilon) < 0$ . Но ни одно собственное значение с меньшим номером нельзя повысить до  $\lambda_{i+k}^{(0)}$  добавлением единственной связи  $p_{j+1}$ , поскольку по теореме Рэлея (которая была доказана в гл. II и результаты которой получены вновь как непосредственное следствие результатов предыдущих пунктов)  $\lambda_{i+k(j)-2}^{(j+1)} \leq \lambda_{i+k(j)-1}^{(j)} < \lambda_{i+k}^{(0)}$ . Таким

<sup>1)</sup> Задача об отыскании наиболее жестких связей была поставлена в связи с проблемой устойчивости сжатых стержней И. Г. Бубновым в 1912 г. («Строительная механика корабля», т. 1, 1912). Этой задаче посвящен ряд работ советских математиков и механиков (см. Папкович [1], Нудельман [1], [2], Дольберг [1], [2]). В последней из цитированных работ найдены необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять связи наибольшей жесткости. При доказательстве М. Д. Дольберг использовал формулу Бейтмена (см. примечание на стр. 198).

В связи с условиями наибольшей жесткости см. недавно появившуюся статью американского математика Стенджера [1]\*. — Прим. ред.

образом, при условии  $k(j) > 0$  мы имеем  $k(j+1) = k(j) - 1$ , если  $W_{j, j+1}(\lambda_{i+k}^{(0)} - \varepsilon) < 0$ , и  $k(j+1) = k(j)$  в противном случае.

Пусть теперь  $m$  обозначает наименьшее значение  $j$ , для которого  $k(j) = 0$ . Поскольку  $k(0) = k$ , то из наших рассуждений следует, что из  $m$  чисел Вайнштейна

$$W_{01}(\lambda_{i+k}^{(0)} - \varepsilon), W_{12}(\lambda_{i+k}^{(0)} - \varepsilon), W_{23}, \dots, W_{m-1, m}$$

в точности  $k$  чисел должны быть отрицательными. Что касается  $r - m$  чисел  $W_{m, m+1}, W_{m+1, m+2}, \dots, W_{r-1, r}$ , то они могут быть совершенно произвольными, поскольку мы уже имеем

$$\lambda_i^{(m)} = \lambda_{i+1}^{(m)} = \dots = \lambda_{i+k}^{(m)} = \lambda_{i+r}^{(m)},$$

и, значит, оставшиеся  $r - m$  связей, как бы мы их ни выбирали, не могут повлиять на значение  $\lambda_i^{(m)} = \lambda_{i+1}^{(m+1)} = \dots = \lambda_i^{(r)} = \lambda_{i+r}^{(0)}$ .

На основании вышеизложенных рассуждений мы можем сформулировать наш критерий следующим образом:  $\lambda_i^{(r)} = \lambda_{i+r}^{(0)}$  тогда и только тогда, когда в последовательности чисел Вайнштейна (конечных и не равных нулю)

$$W_{01}, W_{12}, \dots, W_{r-1, r}$$

имеется не менее  $k$  отрицательных чисел. Но в силу леммы Ароншайна  $W_{0j} = W_{01}W_{12} \dots W_{j-1, j}$ , откуда немедленно следует, что критерий максимального увеличения можно сформулировать в нужной нам форме, а именно: в последовательности

$$W_{00} = 1, W_{01}, W_{02}, \dots, W_{0r}$$

должно быть не менее  $k$  перемен знака, где  $k$  — наименьшее целое неотрицательное число, такое, что  $\lambda_{i+k}^{(0)} = \lambda_{i+r}^{(0)}$ .

**11. Применение критерия Вайнштейна.** Чтобы продемонстрировать применение критерия Вайнштейна, докажем следующее утверждение, которое уже не раз упоминалось в предыдущих пунктах этой главы. *Классическое условие, налагаемое на связи в максимально-минимальном определении собственных значений* (в форме, данной Вейлем; см. гл. II, п. 6) *и состоящее в том, что векторы связи должны совпадать с первыми  $r - 1$  собственными векторами исходной системы, является достаточным для максимального увеличения первого собственного значения; однако это условие не является необходимым.*

Доказательство проводится следующим образом. Если  $p_1 = u_1, p_2 = u_2, \dots, p_{r-1} = u_{r-1}$ , то функция Вайнштейна  $W_{0r}(\lambda)$  будет

иметь вид

$$W_{0r}(\lambda) = \det \begin{vmatrix} (R_\lambda u_1, u_1) & \dots & (R_\lambda u_1, u_r) \\ \dots & \dots & \dots \\ (R_\lambda u_r, u_1) & \dots & (R_\lambda u_r, u_r) \end{vmatrix}.$$

Предположим сначала, что  $\lambda_{r-1}^{(0)} < \lambda_r^{(0)}$ ; тогда по критерию Вайнштейна члены последовательности  $W_{01}, W_{02}, \dots, W_{0, r-1}$ , взятые при  $\lambda = \lambda_r^{(0)} - \varepsilon$ , должны иметь чередующиеся знаки.

Поскольку  $R_\lambda u_i = u_i/(\lambda_i - \lambda)$  и  $(u_i, u_j) = 0$  при  $i \neq j$ , все элементы определителя  $W_{0r}(\lambda)$  равны нулю, за исключением элементов, стоящих на главной диагонали, при этом  $i$ -й диагональный элемент равен  $1/(\lambda_i - \lambda_r + \varepsilon)$ , и потому он отрицателен при  $i < r$ . Тогда в последовательности главных миноров отрицательные и положительные члены чередуются. Но  $i$ -й главный минор равен  $W_{0i}$ , а это дает искомый результат.

Точно так же, если  $m$  — наименьший номер, такой, что  $\lambda_m^{(0)} = \lambda_r^{(0)}$ , то первые  $m - 1$  членов на главной диагонали отрицательны, а потому критерий Вайнштейна и в этом случае выполняется. Таким образом, мы доказали, что для максимального увеличения первого собственного значения достаточно выбрать связи так, как указано в сформулированном выше утверждении.

Но максимальное увеличение может быть достигнуто и при другом выборе связей. Действительно, предположим, что  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n$ , и пусть  $p_1 = u_1 - \alpha u_3$ , где  $0 < \alpha^2 \leq (\lambda_3 - \lambda_2)/(\lambda_2 - \lambda_1)$ . Тогда

$$W_{01}(\lambda) = \frac{(u_1, p_1)^2}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{(u_2, p_1)^2}{\lambda_2 - \lambda} + \frac{(u_3, p_1)^2}{\lambda_3 - \lambda}.$$

Но  $(u_1, p_1) = 1$ ,  $(u_2, p_1) = 0$ ,  $(u_3, p_1) = -\alpha$ , так что

$$W_{01}(\lambda) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{\alpha^2}{\lambda_3 - \lambda} = \frac{1}{\lambda_3 - \lambda} \left( \alpha^2 - \frac{\lambda_3 - \lambda}{\lambda - \lambda_1} \right).$$

Ясно, что это выражение отрицательно при  $\lambda = \lambda_2 - \varepsilon$ , и, следовательно, первое собственное значение  $\lambda_1^{(0)}$  максимально увеличивается при наложении связи  $p_1$ .

В случае  $n = 3$  этот результат дает ответ на следующую геометрическую задачу. Пусть дан трехмерный эллипсоид с различными главными осями и центром в начале координат. Нужно найти такой вектор  $p$ , чтобы длина средней полуоси была равна наибольшему радиусу, ортогональному  $p$ . Ясно, что в качестве вектора  $p$  можно взять наибольшую полуось, как и требуется в лемме Вейля, но мы только что показали, что можно выбрать этот вектор и иначе, и, более того, нашли все такие векторы.

Применения критерия Вайнштейна к бесконечномерным задачам, и в особенности к задачам гидродинамики, рассматриваются в гл. XIV, п. 6.

## У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Доказать, что если  $\lambda$  — нуль  $W(\lambda)$  при наличии одной связи, то  $\mathfrak{M}(H^{(1)}, \lambda) = \mathfrak{M}(H^{(0)}, \lambda) \oplus v$ , где  $v = p + R_{\lambda}p$ , а если  $\lambda$  — полюс  $W(\lambda)$ , то  $\mathfrak{M}(H^{(0)}, \lambda) = \mathfrak{M}(H^{(1)}, \lambda) \oplus w$ , где  $w$  — проекция  $p$  на  $\mathfrak{M}(H^{(1)}, \lambda)$ .

2. Если рассматривать собственное значение  $\mu$  оператора  $H$  кратности  $m$  как «гроздь» из собственных значений  $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_{k+m}$ , то при наложении одной связи имеются четыре возможности: 1) «гроздь» пополняется одним собственным значением, которое приходит снизу ( $\lambda_k^{(1)} = \lambda_{k+1}^{(0)} = \mu$ ), и в то же время теряет одно собственное значение сверху ( $\lambda_{k+m}^{(1)} > \lambda_{k+m}^{(0)} = \mu$ ); 2) есть пополнение и нет потери; 3) нет пополнения и есть потеря; 4) нет ни потери, ни пополнения. Доказать, что эти четыре возможности имеют место соответственно при следующих условиях:  $W(\mu) < 0$ ,  $W(\mu) = 0$ ,  $W(\mu) = \infty$ ,  $W(\mu) > 0$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Относительно изложенного в этой главе см. Вайнштейн [7], [8], [10].

## КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

**1. Непрерывные колебательные системы.** Между задачами на собственные значения для непрерывных колебательных систем и для систем, которые мы до сих пор рассматривали, имеется тесная аналогия. Теперь мы будем изучать колебания струн, стержней, мембран и пластин, изгиб стержней и пластин, а также поведение некоторых систем атомной физики. Важность этих задач хорошо известна в одинаковой степени математикам, физикам и инженерам. Начиная с XVIII века, когда Даниил Бернулли нашел решение задачи о колебаниях струны, прогресс анализа и прикладной математики был тесно связан с подобными задачами. Они оказали решающее влияние на формирование современной теории дифференциальных и интегральных уравнений, а также вариационного исчисления. Теория колебаний находит многочисленные приложения, начиная от инженерных задач и кончая весьма запутанными вопросами теоретической физики.

**2. Задача Бернулли о колебаниях струны.** Мы начнем с короткого изложения идей Даниила Бернулли. Его задачу можно сформулировать так:

*Найти движение колеблющейся струны с закрепленными концами, если известны положение и скорость каждой ее точки в начальный момент времени  $t = 0$ .*

Для удобства предположим, что длина струны равна  $\pi$ , а ее концы закреплены в точках  $x = 0$  и  $x = \pi$ , и пусть  $w(x, t)$  обозначает поперечное отклонение струны в момент  $t$ . Пусть начальная форма струны задается функцией  $\varphi(x) = w(x, 0)$ , а начальная скорость в каждой ее точке — функцией  $\psi(x) = w_t(x, 0)$ , где нижний индекс обозначает частную производную по  $t$ . Если отсутствуют внешние силы, то любое решение задачи Бернулли должно удовлетворять уравнению в частных производных второго порядка, которое при надлежащем выборе единиц



измерения можно записать в привычной для нас форме  $w_{tt} - w_{xx} = 0$ .

Метод, который Бернулли применил для решения этой задачи, совершенно аналогичен рассмотренному в гл. I методу интегрирования уравнений Лагранжа. Сначала он искал простейшие возможные движения, а именно такие, при которых каждая точка струны совершает простые гармонические колебания, отличающиеся только по амплитуде от колебаний других точек. Такое движение, которое называется *собственным колебанием* струны, описывается функцией  $w(x, t)$  вида  $w(x, t) = u(x) f(t)$ , где  $u(x)$  является функцией только от  $x$ , а  $f(t)$  является функцией только от  $t$ . Мы увидим далее, что для того, чтобы удовлетворить краевым условиям  $w(0, t) = w(\pi, t) = 0$ , функция  $f(t)$  должна быть периодической, так что с точки зрения акустики каждый малый участок струны издает звук такой же высоты, что и другие участки, и вся струна издает чистый музыкальный тон — основной тон струны или один из ее обертонов. Общее колебание струны сводится тогда к наложению таких собственных колебаний.

В гл. I и II положение системы можно было полностью описать с помощью  $n$  координат вектора  $q(t)$ . Теперь же положение струны в произвольный момент времени  $t$  уже нельзя задать с помощью конечной совокупности  $n$  чисел; оно описывается функцией  $w(x, t)$ , определенной на отрезке  $0 \leq x \leq \pi$ , и по этой причине мы говорим, что задача является *бесконечномерной*. Мы увидим ниже, что бывает полезно рассматривать  $w$  как вектор с бесконечным множеством компонент.

В случае  $n$  степеней свободы мы выяснили, что любое возможное движение системы является суперпозицией  $n$  частных движений — *собственных колебаний*, частоты которых, равные квадратному корню из собственных значений, полностью определяются физическими свойствами системы. В настоящем случае, когда имеется бесконечное множество степеней свободы, Бернулли нашел, что собственные колебания, т. е. колебания вида  $w(x, t) = u(x) f(x)$ , возможны только тогда, когда функции  $u(x)$ , определенные с точностью до постоянного множителя, принадлежат некоторой специальной бесконечной последовательности функций  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ , называемых *собственными функциями* системы. Частоты этих собственных колебаний называются *собственными частотами* системы и полностью определяются ее физическими свойствами.

**3. Решение задачи Бернулли.** Бернулли рассуждал следующим образом. Допустим, что существует решение, которое представляется в виде

$$w(x, t) = u(x) f(t).$$

Подставляя функцию  $w$  в уравнение  $w_{tt} - w_{xx} = 0$ , мы получаем

$$u(x) f''(t) - u''(x) f(t) = 0,$$

или

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{f''(t)}{f(t)}.$$

Поскольку левая часть последнего равенства не зависит от  $t$ , а правая не зависит от  $x$ , то они могут быть равны друг другу при всех значениях  $x$  и  $t$  только в том случае, если каждое из них равно одной и той же постоянной, которую мы будем обозначать через  $-\lambda$  (ниже будет доказано, что эта постоянная отрицательна). Таким образом, мы имеем  $u''/u = f''/f = -\lambda$  или  $-u'' = \lambda u$  и  $-f'' = \lambda f$ .

Эти уравнения *однородны*, т. е. если  $u^*$  и  $u^{**}$  являются решениями первого из уравнений, то  $au^* + bu^{**}$  также является его решением при любых постоянных  $a$  и  $b$ . Функция, тождественно равная нулю, является тривиальным решением любого однородного уравнения. Любое другое решение, если оно существует, называется *нетривиальным*.

Поскольку концы струны закреплены,

$$w(0, t) = u(0) f(t) = 0$$

и

$$w(\pi, t) = u(\pi) f(t) = 0$$

при всех значениях  $t$ ; следовательно, если исключить тривиальный случай  $f(t) \equiv 0$ , мы имеем  $u(0) = u(\pi) = 0$ . Это однородные краевые условия, которым должно удовлетворять решение уравнения  $-u_{xx} = \lambda u$ . Если не учитывать краевые условия, то нетривиальное решение будет существовать при любых значениях  $\lambda$ . В самом деле, поскольку уравнение является линейным однородным с постоянными коэффициентами, любое его решение имеет вид  $u = au^* + bu^{**}$ , где  $a$  и  $b$  — произвольные постоянные, а  $u^*$  и  $u^{**}$  — два частных решения:  $u^* = e^{ivx}$ ,  $u^{**} = e^{-ivx}$ , где  $v = \sqrt{\lambda}$ .

Но если принять во внимание краевые условия, то положение существенно изменится. Задача будет иметь нетривиальные решения только при некоторых специальных значениях  $\lambda$ . Функция  $u = ae^{ivx} + be^{-ivx}$  удовлетворяет условию  $u(0) = 0$  только при  $a = -b$ , а второму условию  $u(\pi) = 0$  она удовлетворяет только при  $\lambda = n^2$ , где  $n$  — целое число. Таким образом, все возможные решения имеют вид

$$u_n = d_n (e^{inx} - e^{-inx}) = c_n \sin nx,$$

где  $c_n \neq 0$ , а  $n = 1, 2, 3, \dots$

При этом для функции  $f(t)$  получаем уравнение  $f''(t) + n^2 f(t) = 0$ , решение которого при каждом значении  $n$  имеет вид

$$f_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

где  $a_n, b_n$  — произвольные постоянные, так что упомянутая выше периодичность очевидна. Таким образом,  $n$ -е собственное колебание описывается формулой

$$w_n(x, t) = \sin nx (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Такая ситуация типична для задач на собственные значения. Сначала мы имеем смешанную задачу, т. е. дифференциальное уравнение типа  $w_{xx} - w_{tt} = 0$ , решение которого должно удовлетворять краевым условиям типа  $w(0, t) = w(\pi, t) = 0$  при всех значениях  $t$ . Существование чистых обертонов в музыке наводит нас на мысль искать частные решения в виде

$$w(x, t) = u(x) f(t),$$

и тем самым мы приходим к дифференциальному уравнению  $-u'' = \lambda u$ , содержащему неизвестный параметр  $\lambda$ . Вместе с граничными условиями  $u(0) = u(\pi) = 0$  это уравнение определяет форму струны. При любом фиксированном  $\lambda$  мы имеем краевую задачу, для которой тождественно равная нулю функция является решением. В общем случае это тривиальное решение будет единственным, однако для некоторой последовательности значений  $\lambda_1 = 1^2, \lambda_2 = 2^2, \dots, \lambda_n = n^2, \dots$  существуют и другие решения  $u_n(x) = c_n \sin nx$ .

Задача, в которой требуется найти числа  $\lambda_n$  и соответствующие функции  $u_n$ , называется *задачей на собственные значения для дифференциального уравнения или краевой задачей*. Числа  $\lambda_n$  называются *собственными значениями* задачи, функции  $u_n$  — *собственными функциями*, а множество всех собственных значений, каждое из которых входит с некоторой кратностью (гл. I), — ее (точечным) *спектром*. Говорят, что функция  $u_n$  *отвечает* соответствующему собственному значению  $\lambda_n$ .

После того как были установлены эти факты, Бернулли продолжал решать исходную задачу. Он рассуждал так: можно ли с помощью наложения этих частных собственных колебаний струны получить решение, которое удовлетворяло бы начальным условиям, т. е. можно ли подобрать постоянные  $a_n$  и  $b_n$  так, чтобы решение

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

удовлетворяло условиям  $w(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $w_t(x, 0) = \psi(x)$ ? Для этого необходимо, чтобы

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

и, кроме того, если почленно продифференцировать ряд для  $w(x, t)$ , а это в те времена делалось без всяких колебаний, чтобы

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \sin nx.$$

В современной терминологии это означает, что данные функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  нужно разложить в ряд Фурье, или, как мы будем говорить, в ряд по собственным функциям.

Для вычисления коэффициентов  $a_n$  и  $b_n$  можно применить хорошо известный прием, который впервые использовал Эйлер, современник и друг Даниила Бернулли.

Умножая первое из уравнений на  $k$ -ю собственную функцию  $u_k = \sin kx$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , и интегрируя от 0 до  $\pi$ , мы получаем

$$\int_0^{\pi} \varphi(x) \sin kx \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\pi} \sin kx \sin nx \, dx.$$

Но, как показывают простые вычисления,

$$\int_0^{\pi} \sin kx \sin nx \, dx = 0,$$

если  $k \neq n$ , и

$$\int_0^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin kx \, dx,$$

и аналогично

$$kb_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(x) \sin kx \, dx.$$

На этом решение задачи Бернулли заканчивается, если не рассматривать вопросы сходимости, к которым мы вернемся в последующих главах.

Если сравнить разложение в ряд Фурье функции

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$$

по собственным функциям  $u_k = \sin kx$  с разложением Фурье (гл. I, п. 5)  $n$ -мерного вектора

$$u = \sum_{k=1}^n (u, u_k) u_k$$

по собственным векторам  $u_k$ , то видно, что коэффициент  $a_k = (2/\pi) \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin kx dx$  естественно назвать по аналогии скалярным произведением  $\varphi(x)$  и  $(2/\pi) \sin kx$ . Отметим, что операцию интегрирования здесь можно рассматривать как естественное обобщение на бесконечномерные задачи операции суммирования, которая участвует в определении скалярного произведения  $(u, v) = \sum b_{ik} x_i y_k$  или  $(u, v) = \sum a_{ik} x_i y_k$  в  $n$ -мерном пространстве. В дальнейшем мы увидим, что подобные аналогии имеют место довольно часто.

## У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Найти собственные значения и собственные функции задачи для так называемой свободной струны

$$u'' + \lambda u = 0, \quad u'(0) = u'(\pi) = 0,$$

а также для струны, один конец которой закреплен, а второй свободен, т. е. при краевых условиях  $u(0) = u'(\pi) = 0$ .

2. Дифференциальное уравнение для однородной струны с закрепленными концами при наличии силы трения, пропорциональной скорости, имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k \frac{\partial w}{\partial t}, \quad w(0, t) = w(\pi, t) = 0,$$

где  $k$  — постоянная. Найти собственные функции.

3. Выписать спектр (учитывая кратность каждого собственного значения) и соответствующие собственные функции задачи с *периодическими краевыми условиями*

$$u'' + \lambda u = 0, \quad u(0) = u(\pi), \quad u'(0) = u'(\pi).$$

4. Найти собственные значения задачи

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(-1) = y(1) = 0.$$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Превосходный исторический очерк, посвященный задаче Бернулли, можно найти у Римапа [1]. Современное изложение этих вопросов см. в книгах Черчилля [1], а также Тихонова и Самарского [1, стр. 81]\*.

**4. Формулировка задачи в терминах операторов.** В этой книге автор не ставил перед собой задачи исследовать разложение заданной функции в ряд по собственным функциям. Этому вопросу будет уделяться внимание лишь постольку, поскольку это необходимо в связи с нашей основной целью, соответствующей первой части задачи Бернулли. Мы будем заниматься не задачей о суперпозиции собственных функций, удовлетворяющей заданным начальным условиям, а вычислением собственных значений, которые помимо того, что они играют важную роль в теории рядов Фурье, имеют много практических и теоретических приложений. Например, они тесно связаны с тремя чрезвычайно важными для практики явлениями: а именно резонансом системы при вынужденных колебаниях, продольным изгибом нагруженных балок, пластин и ферм и поведением электронов в атоме и молекуле. Вычисление собственных значений сложных физических систем является довольно трудной задачей. В дальнейшем мы рассмотрим некоторые теории и методы, которые были развиты в этом направлении.

В основе этой теории лежит следующая идея. В гл. II мы видели, что собственные значения оператора  $H$ , которые определялись первоначально с помощью уравнения  $Hu = \lambda u$ , можно также охарактеризовать в вариационных терминах, т. е. как минимумы некоторых функционалов. Вариационное определение во многих вопросах предпочтительнее исходного. Здесь мы имеем аналогичную ситуацию. В задаче о колебаниях струны нам удалось вычислить собственные значения  $\lambda_1 = 1^2$ ,  $\lambda_2 = 2^2$ , . . . . .  $\lambda_n = n^2$ , . . . , но в общем случае собственные значения краевых задач в явном виде не определяются, и лучший способ вычислить их приближенно состоит в переходе к соответствующей вариационной задаче.

С этой целью удобно переформулировать краевую задачу в терминах операторов, и этим мы теперь и займемся.

Если краевые условия задаются в точках  $x = a$  и  $x = b$ , то замкнутый интервал  $[a, b]$  называется *фундаментальным интервалом* задачи. Если  $n$  — порядок старшей производной, которая входит в уравнение, то через  $C^{(n)}$  мы обозначим класс функций, определенных на фундаментальном интервале, которые имеют непрерывные производные до порядка  $n$  включительно. Функция  $u(x)$ , принадлежащая  $C^{(n)}$ , называется *допустимой*, если она удовлетворяет заданным краевым условиям задачи. Например, в задаче Бернулли  $n = 2$ , фундаментальный интервал

есть  $[0, \pi]$ , а функция  $u(x) \in C^{(n)}$  допустима, если  $u(0) = u(\pi) = 0$ .

Сумма  $h = f + g$  двух допустимых функций  $f(x)$  и  $g(x)$  определяется равенством  $h(x) = f(x) + g(x)$  для любой точки  $x \in [a, b]$ . Точно так же для любого вещественного числа  $c$  и любой допустимой функции  $f$  определяется произведение  $cf = h$ , если положить  $h(x) = cf(x)$  для любого  $x$ . Ясно, что  $f + g$  и  $cf$  также являются допустимыми функциями, и, следовательно, класс допустимых функций (которые называются также векторами) образует линейное пространство в том смысле, что оно обладает свойством 1 (см. гл. I). Такое пространство обычно называют функциональным пространством. В отличие от пространств, рассматривавшихся в гл. I, это функциональное пространство, которое мы обозначим через  $\mathfrak{M}_\infty$ , бесконечномерно. Это значит, что для любого  $n = 1, 2, 3, \dots$  найдется  $n$  линейно независимых элементов  $u_1, \dots, u_n$ , таких, что  $a_1u_1 + \dots + a_nu_n = 0$  только тогда, когда  $a_1 = \dots = a_n = 0$ . В последующих пунктах мы снабдим пространство  $\mathfrak{M}_\infty$  метрикой и будем его обозначать  $\mathfrak{F}^{(n)}$ .

Теперь мы поступим точно так же, как и в гл. I. Преобразование  $A$ , переводящее допустимую функцию  $u(x)$  в функцию  $v(x) = Au(x)$ , мы назовем оператором и будем обозначать его прописной латинской буквой. Множество допустимых функций  $u$ , для которых операция  $Au$  определена, называется областью определения  $A$ , а множество функций вида  $Au$  — областью значений  $A$ <sup>1)</sup>. Операторы с конечномерной областью значений, играющие важную роль для используемых нами приближенных методов, называют операторами конечного ранга. Для любых двух операторов  $A$  и  $B$  оператор  $A + B$  определяется равенством  $(A + B)u = Au + Bu$ , оператор  $AB$  — равенством  $(AB)u = A(Bu)$ , и оператор  $cB$  для любой постоянной  $c$  — равенством  $(cB)u = c(Bu)$ ; связь между областью определения суммы или произведения и областями определения слагаемых или сомножителей очевидна.

<sup>1)</sup> Таким образом, для того чтобы задать оператор, нужно указать его область определения и закон, по которому каждой функции  $u$  ставится в соответствие ее образ. В этой главе в основном рассматриваются дифференциальные операторы. Для таких операторов соответствие между функцией и ее образом задается при помощи некоторого дифференциального выражения, т. е. выражения, содержащего функцию и ее производные. Например, в случае задачи о колебаниях струны дифференциальное выражение имеет вид  $-d^2/dx^2$ . Область определения дифференциального оператора состоит из функций, для которых имеет смысл дифференциальное выражение и которые удовлетворяют крайним условиям (например,  $u(a) = u(b) = 0$ ).

В дальнейшем автор не всегда удачно употребляет термин «дифференциальный оператор» вместо «дифференциальное выражение». В большинстве случаев из текста ясно, о чем идет речь. В переводе, там где это необходимо, термин «дифференциальный оператор» заменяется термином «дифференциальное выражение». — Прим. перев.

Оператор  $I$ , переводящий каждую функцию в себя, называется *тождественным* или *единичным*. Все операторы, с которыми мы будем иметь дело, как легко доказать, *линейны*. Это значит, что если область определения  $A$  содержит  $u$  и  $v$ , то она содержит также  $c_1u + c_2v$  для любых вещественных  $c_1$  и  $c_2$ , причем

$$A(c_1u + c_2v) = c_1Au + c_2Av.$$

Если оператор  $A$  не переводит никакие две функции из области определения в одну и ту же функцию, то он имеет единственный обратный  $A^{-1}$ , такой, что  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ , где  $A^{-1}$  определяется соотношением  $A^{-1}u = v$ , если  $Av = u$ . Если же в области определения  $A$  существуют две функции  $u$  и  $v$ , такие, что  $Au = Av$ , то мы будем говорить, что  $A^{-1}$  не существует. Из линейности оператора  $A$  следует, что  $A^{-1}$  существует в том и только в том случае, когда единственной функцией, удовлетворяющей уравнению  $Au = 0$ , является функция, тождественно равная нулю. Если

$$(Au, u) = \int_a^b Au \cdot u \, dx > 0$$

для любой функции  $u \neq 0$ , принадлежащей области определения  $A$ , то говорят, что  $A$  *положительно определен*<sup>1)</sup>. Ясно, что положительно определенный оператор имеет обратный.

Мы теперь можем сформулировать задачу о колебаниях струны следующим образом.

Пусть  $A = -d^2/dx^2$ , а  $B = I$ . Найти все значения  $\lambda$ , для которых существует ненулевая допустимая функция  $u$ , такая, что  $Au = \lambda Bv$ .

#### У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Рассмотрим неоднородную струну с модулем упругости  $p(x)$  и плотностью  $\rho(x)$ . Пусть отклонение  $u(x)$  вызывает восстанавливающую силу, равную  $q(x)u(x)$ . Задача о колебаниях такой струны приводит к общему уравнению Штурма — Лиувилля

$$pu'' + ru' - qu = -\lambda ru, \quad u(a) = u(b) = 0,$$

где  $p, q, r$  — функции от  $x$ , положительные на интервале  $[a, b]$ , и  $r = p'$ . Определить для этого случая операторы  $A$  и  $B$ .

<sup>1)</sup> Это определение правомерно лишь при условии, что рассматриваются лишь комплекснозначные функции и

$$(Au, u) = \int_a^b Au \cdot \bar{u} \, dx > 0.$$

Из дальнейшего следует, что автор имеет в виду лишь самосопряженные операторы. — Прим. ред.



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Определения и теоремы, относящиеся к операторам, введенным в этом и последующих пунктах этой главы, см. у Джулиа [1] или у Лихнеровича [1]. Относительно уравнений Штурма — Лиувилля см. Айнс [1], а также Петровский [1]\*.

**5. Определение собственных значений с помощью резольвенты. Вынужденные колебания.** В гл. III мы установили, что собственные значения задачи  $Hu = \lambda u$  можно определить как такие значения  $\lambda$ , для которых резольвентный оператор  $R_\lambda = (H - \lambda I)^{-1}$  не существует<sup>1)</sup>. Сейчас мы отметим некоторые полезные свойства резольвентного оператора  $R_\lambda$  для колеблющейся струны, которые проверяются почти так же, как и в гл. III. Действительно, пусть к струне приложена внешняя сила  $F(x, t) = v(x) \sin \omega t$  (гл. III). Если мы будем искать решение в виде  $w(x, t) = u(x) \sin \omega t$ , где  $u(x)$  — неизвестная функция, которую нужно определить, то мы получим уравнение  $-\omega^2 u \sin \omega t = u'' \sin \omega t + v \sin \omega t$ . Полагая  $\lambda = \omega^2$  и  $-u'' = Hu$ , мы можем записать это уравнение в виде  $(H - \lambda I)u = v$ , откуда  $u = R_\lambda v$ .

Вектор  $R_\lambda v$  снова можно выразить через нормированные собственные векторы оператора  $H$ :

$$u_1 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sin x, \quad u_2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sin 2x, \quad \dots, \quad u_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sin nx, \quad \dots$$

В самом деле, положим

$$R_\lambda v = \frac{(v, u_1) u_1}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{(v, u_2) u_2}{\lambda_2 - \lambda} + \dots + \frac{(v, u_n) u_n}{\lambda_n - \lambda} + \dots,$$

где  $(v, u_i) = \int_a^b v u_i dx$ . Тогда, применяя формально к этому равенству оператор  $H - \lambda I$ , мы получим

$$(H - \lambda I) R_\lambda v = (v, u_1) u_1 + \dots + (v, u_n) u_n + \dots = v,$$

и при условии сходимости ряда для  $R_\lambda v(x)$  при каждом  $x \in [a, b]$  будем иметь  $R_\lambda = (H - \lambda I)^{-1}$ , что и требовалось доказать. Как это будет видно из дальнейшего, все рассматриваемые в этой книге операторы обладают тем свойством, что ряд для  $R_\lambda v(x)$  сходится равномерно на  $[a, b]$ .

<sup>1)</sup> В отличие от гл. III здесь и далее автор придерживается общепринятого определения, согласно которому резольвента не существует, если  $\lambda$  есть точка спектра. — *Прим. перев.*

Таким образом, резольвентный оператор  $R_\lambda$  имеет те же собственные функции, что и  $H$ , а собственные значения  $R_\lambda$  равны

$$(\lambda_1 - \lambda)^{-1}, (\lambda_2 - \lambda)^{-1}, \dots, (\lambda_n - \lambda)^{-1}, \dots,$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  — собственные значения  $H$ .

Как следствие мы получаем, что если  $\lambda$  не является собственным значением  $H$ , то уравнение  $(H - \lambda I)u = v$  имеет единственное решение для любых  $v$ , а если  $\lambda = \lambda_m$  совпадает с собственным значением  $H$ , то уравнение  $(H - \lambda I)u = v$  имеет решение только тогда, когда  $(v, u_m) = 0$  для любого собственного вектора  $u_m$ , отвечающего  $\lambda_m$ . В этом случае решение записывается в виде

$$u = \frac{(v, u_1)}{\lambda_1 - \lambda} u_1 + \dots + \frac{(v, u_n)}{\lambda_n - \lambda} u_n + \dots,$$

при этом если  $\lambda = \lambda_m$  и  $(v, u_m) = 0$ , то слагаемое  $(v, u_m) u_m / (\lambda_m - \lambda)$  считается равным 0. Решение в этом случае не будет единственным. В самом деле, если мы прибавим к  $u$  любую линейную комбинацию  $w = c_i u_i + c_j u_j + \dots$  собственных векторов  $u_i, u_j, \dots$ , отвечающих  $\lambda$ , то  $u + w$  также будет удовлетворять уравнению  $(H - \lambda I)u = v$ .

**6. Метрика в функциональном пространстве.** По аналогии с билинейными формами

$$\mathfrak{A}(u, v) = \sum a_{ik} q_i r_k$$

и

$$\mathfrak{B}(u, v) = \sum b_{ik} q_i r_k$$

мы определим в  $n$ -мерном векторном пространстве два выражения

$$\mathfrak{A}(u, v) = \int_a^b Au \cdot v \, dx \quad \text{и} \quad \mathfrak{B}(u, v) = \int_a^b Bu \cdot v \, dx, \quad \text{где } u \text{ и } v \text{ — допустимые функции.}$$

Эти выражения, которые каждой паре функций ставят в соответствие число, называются *функционалами*. Ясно, что эти функционалы *билинейны*, т. е. линейны по каждой переменной  $u$  и  $v$  в отдельности, так что выражения  $\mathfrak{A}(u, u)$  и  $\mathfrak{B}(u, u)$  (мы будем сокращенно обозначать их через  $\mathfrak{A}(u)$  и  $\mathfrak{B}(u)$ ) являются *квадратичными функционалами*.

Квадратичный функционал  $\mathfrak{A}$  называется *положительно определенным*, если  $\mathfrak{A}(u) > 0$  для  $u \neq 0$ . Очевидно, что функционалы, связанные с задачей о колебаниях струны, положительно опреде-

лены. Например, если  $A = -d^2/dx^2$ ,  $u(a) = u(b) = 0$ , то

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(u) &= \int_a^b Au \cdot u \, dx = - \int_a^b \frac{d^2u}{dx^2} u \, dx = \\ &= -u \frac{du}{dx} \Big|_a^b + \int_a^b \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx = \int_a^b u'^2 dx > 0. \end{aligned}$$

Продолжая геометрическую аналогию, зададим метрику с помощью одного из этих двух положительно определенных функционалов, например с помощью  $\mathfrak{I}$ . Другими словами, определим скалярное произведение  $(u, v)$  любых двух функций  $u$  и  $v$ , полагая

$$\begin{aligned} (u, v) &= \mathfrak{I}(u, v) = \int_a^b Bu \cdot v \, dx. \text{ В частности, если } B \text{ — тожде-} \\ \text{ственный оператор, как в задаче Бернулли, то } (u, v) &= \\ &= \int_a^b u(x)v(x) \, dx. \end{aligned}$$

Пространство функций класса  $C^{(2)}$  на интервале  $[a, b]$  со скалярным произведением  $\int_a^b uv \, dx$  мы будем обозначать через  $\mathfrak{F}^{(2)}$ . Легко проверить, что  $\mathfrak{F}^{(2)}$  — линейное метрическое пространство, т. е. оно обладает свойствами 1 и 2, сформулированными в гл. I, п. 4. Что касается свойства 3, то его, очевидно, нужно изменить следующим образом.

**Свойство 3** (для «функционального пространства»):

Для любого целого  $n$  существует  $n$  линейно независимых функций  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Другими словами, функциональное пространство «бесконечномерно».

В заключение отметим, что все определения и теоремы, опирающиеся только на свойства 1 и 2 из гл. I, можно перенести без изменений на пространство  $\mathfrak{F}^{(2)}$ . Неотрицательный квадратный корень  $(u, u)^{1/2}$  из скалярного произведения  $u(x)$  на себя называется нормой  $\|u\|$  функции  $u(x)$ . Последовательность функций  $\{u_n\}$  называется последовательностью Коши, если  $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|u_m - u_n\| = 0$ .

Говорят, что последовательность  $\{u_n\}$  сходится к  $u$ , и пишут  $u_n \rightarrow u$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0$ , и т. д. Функция, норма которой равна единице, называется нормированной. Например, как легко вычислить, собственные функции  $c_n \sin nx$  будут нормированными, если  $c_n = \sqrt{2/\pi}$ . Две функции, скалярное произведение которых равно нулю, называются ортогональными, а система норми-

рованных функций, любые две функции которой ортогональны, называется *ортонормированной*. Неравенство Коши — Буняковского  $|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$  справедливо для любых  $u$  и  $v$ ; доказательство остается прежним. Из этого неравенства следует, как и в гл. I, что скалярное произведение  $(u, v)$  является непрерывным функционалом от  $u$ , т. е.  $(u_n, v) \rightarrow (u, v)$ , если  $u_n \rightarrow u$ , а также, что функция, ортогональная самой себе, и потому имеющая равную нулю норму, тождественно равна нулю.

Система функций  $\{u_n(x)\}$  называется *полной*, если единственной функцией, ортогональной к любой функции  $u_n(x)$ , является нулевая функция. Если система одновременно ортонормирована и полна, то она называется *полной ортонормированной* (сокращенно п. о. н. с.). В элементарной теории рядов Фурье доказывается, что система собственных функций  $\sqrt{2/\pi} \sin nx$  является п. о. н. с.; этот факт будет установлен также в последующих главах.

## У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Доказать, что  $\mathfrak{F}^{(2)}$  бесконечномерно.
2. Нормировать собственные функции из упражнений к п. 3, задавая метрику с помощью оператора  $B = I$ .
3. Нормировать те же собственные функции, задавая метрику с помощью оператора  $A = -D^2$  <sup>1)</sup>.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

По многим рассматриваемым нами в дальнейшем вопросам, относящимся к пространствам, элементами которых являются функции одной или нескольких переменных, читатель может обратиться к монографии Рисса и Секефальви-Надя [1].

**7. Самосопряженные операторы второго порядка. Задача Штурма — Лиувилля.** До сих пор мы рассматривали только колебания однородной струны, для которой соответствующий оператор  $H$  определяется дифференциальным выражением  $-D^2$ . Для иллюстрации важного понятия самосопряженности мы исследуем теперь более общий оператор второго порядка, соответствующий задаче о колебаниях неоднородной струны при наличии восстанавливающей силы. Оператор  $H$  в этом случае (см. Курант и Гильберт [1]) определяется следующим дифференциальным выражением:

$$-Hu(x) = \{p(x)u'(x)\}' - q(x)u(x)$$

или

$$-Hu = pu'' + p'u' - qu,$$

<sup>1)</sup> Символом  $D$  обозначается операция дифференцирования  $d/dx$ . — Прим. перев.

где функция  $p(x)$ , равная по существу модулю упругости струны, предполагается положительной всюду на  $[a, b]$ , а  $q(x)$ , которая определяет восстанавливающую силу, — неотрицательной.

Для того чтобы лучше понять специфические свойства этого оператора, рассмотрим сначала более общий дифференциальный оператор второго порядка  $L$ , определенный дифференциальным выражением

$$Lu = p_0 u'' + p_1 u' + p_2 u,$$

где мы теперь не требуем, чтобы  $p_1 = p_0'$ . Функции  $p_i$  предполагаются дифференцируемыми достаточное число раз, так что можно выполнять интегрирования по частям.

Для любых  $u$  и  $v \in C^{(2)}$  мы можем перебросить дифференцирование с  $u$  на  $v$ , т. е. проинтегрировать дважды по частям, и получить формулу Грина

$$(Lu, v) = \int_a^b Lu \cdot v \, dx = (u, L^*v) + M(u, v) \Big|_a^b,$$

где

$$L^*v = (p_0 v)'' - (p_1 v)' + p_2 v$$

и

$$M(u, v) = u' p_0 v - u (p_0 v)' + u p_1 v.$$

Дифференциальное выражение  $L^*$  называется сопряженным к  $L$ . Если дифференциальные выражения  $L$  и  $L^*$  совпадают, то оператор  $L$  называется формально самосопряженным. Легко проверить, что для формальной самосопряженности оператора  $L$  необходимо и достаточно, чтобы  $p_1 = p_0'$ ; таким образом, мы видим, что оператор  $H$  для неоднородной струны формально самосопряжен. Как показано ниже в упр. 3, без потери общности при рассмотрении операторов второго порядка можно ограничиться формально самосопряженными операторами.

Перейдем теперь к рассмотрению краевых условий, которые мы будем сокращенно записывать в виде  $U_k(u) = 0$ , где  $U_k$  — линейные формы относительно  $u(a)$ ,  $u'(a)$ ,  $u(b)$ ,  $u'(b)$ . Нас будет интересовать вопрос, какие краевые условия нужно наложить в задаче на собственные значения  $Lu = \lambda u$ , чтобы оператор  $\{L, U_k\}$ , определенный дифференциальным выражением  $L$  и краевыми условиями  $U_k$ , был самосопряженным в следующем смысле. Во-первых, оператор должен быть симметричным; это значит, что  $(Lu, v) = (u, Lv)$  для любых допустимых  $u$  и  $v$ . Кроме того, должно выполняться еще одно условие, которое мы сформулируем ниже. Соответствующая задача на собственные значения  $Hu = \lambda u$  называется задачей Штурма — Лиувилля (см. Айнс [1, стр. 210])

и указанную там литературу, а также Петровский [1, стр. 22—26]\*).

Пусть  $U_1, U_2, U_3, U_4$  — четыре произвольные независимые линейные формы относительно выражений  $u(a), u'(a), u(b), u'(b)$ , т. е.

$$U_i(u) = \alpha_1^{(i)}u(a) + \alpha_2^{(i)}u'(a) + \beta_1^{(i)}u(b) + \beta_2^{(i)}u'(b),$$

где  $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \beta_1^{(i)}, \beta_2^{(i)}$  — постоянные. Тогда существуют однозначно определенные независимые формы  $V_1, V_2, V_3, V_4$ , линейные относительно выражений  $v(a), v'(a), v(b), v'(b)$ , такие, что

$$\begin{aligned} M(u, v) \Big|_a^b &= [u(p_1v - p_0v' - p_0v') + u'p_0v] \Big|_a^b = \\ &= U_1V_1 + U_2V_2 + U_3V_3 + U_4V_4. \end{aligned}$$

Например, в задачах, где мы имеем дело только с условиями равенства нулю  $u(x)$  или  $u'(x)$  в концевых точках, формы  $U_i$  имеют специальный вид:

$$U_1 = u(a), U_2 = u'(a), U_3 = u(b), U_4 = u'(b).$$

Из написанного выше выражения для  $M(u, v) \Big|_a^b$  видно, что

$$\begin{aligned} V_1 &= \{p_0'(a) - p_1(a)\}v(a) + p_0(a)v'(a), & V_2 &= -p_0(a)v(a), \\ V_3 &= \{p_1(b) - p_0'(b)\}v(b) - p_0(b)v'(b), & V_4 &= p_0(b)v(b). \end{aligned}$$

Пусть теперь

$$\{U_k\} = \{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_m}\} \quad (0 \leq m \leq 4)$$

обозначает некоторое подмножество форм  $U_i$ , а

$$\{V_{k'}\} = \{V_{j_1}, V_{j_2}, \dots, V_{j_{4-m}}\}$$

обозначает *дополнительное* подмножество форм  $V_j$  в том смысле, что индексы  $i_1, \dots, i_m$  и  $j_1, \dots, j_{4-m}$  в совокупности дают всю последовательность 1, 2, 3, 4. Тогда говорят, что краевые условия

$$V_{j_1}(u) = V_{j_2}(u) = \dots = V_{j_{4-m}}(u) = 0$$

сопряжены данным условиям

$$U_{i_1}(u) = U_{i_2}(u) = \dots = U_{i_m}(u) = 0$$

относительно дифференциального выражения  $L$ , а оператор  $\{L^*, V_{k'}\}$  называется *сопряженным* к оператору  $\{L, U_k\}$ . Если оператор формально самосопряжен, т. е. если  $L = L^*$ , а формы  $V_{k'}$  можно выразить линейно через  $U_k$ , то оператор будет симметричным. Действительно, в этом случае любые две функции  $u$  и  $v$ , удовлетворяющие краевым условиям  $U_k = 0$ , будут удовлетво-

рять также и сопряженным условиям  $V_{k'} = 0$ , и, следовательно,

$$(Lu, v) = (u, Lv),$$

поскольку внеинтегральные члены в формуле Грина, равные  $M(u, v)|_a^b$ , обращаются в нуль. Грубо говоря, сопряженные краевые условия  $V_{k'} = 0$  можно описать как минимальное множество условий, которые вместе с данными краевыми условиями  $U_k = 0$  обеспечивают обращение в нуль выражения  $M(u, v)|_a^b$ . Если не только формы  $V_{k'}$  можно выразить линейно через  $U_k$ , но и, наоборот, формы  $U_k$  линейно выражаются через  $V_{k'}$ , то краевые условия  $U_k = 0$  и  $V_{k'} = 0$  будут эквивалентными, и оператор называется *самосопряженным* (в этом и состоит упомянутое выше второе условие). Например, условия  $U_1(u) = u(a) = 0$  и  $U_3(u) = u(b) = 0$  вместе с дифференциальным выражением  $H$  (см. выше) определяют самосопряженный оператор. (Формы  $U_2(u)$  и  $U_4(u)$  можно выбрать произвольно, например  $U_2(u) = u'(a)$ ,  $U_4(u) = u'(b)$ , лишь бы формы  $U_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , были линейно независимы.) В самом деле,

$$V_2(u) = -p_0(a)u(a) = -p_0(a)U_1(u);$$

$$V_4(u) = p_0(b)u(b) = p_0(b)U_3(u).$$

Если рассмотреть дифференциальный оператор порядка  $n$ <sup>1)</sup>, то легко видеть, что в случае самосопряженного оператора  $n$  — четное число<sup>2)</sup> и число краевых условий в точности равно порядку оператора. Мы будем иметь дело в дальнейшем только с самосопряженными операторами, поскольку используемые нами вариационные методы применимы только к таким операторам.

## У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Доказать, что для того, чтобы оператор  $A = p(x) \frac{d^2}{dx^2} + r(x) \frac{d}{dx}$  был формально самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы  $r = p'$  (ср. упр. 1 п. 4).

2. Найти внеинтегральные члены в формуле Грина для оператора  $A$  из предыдущего упражнения.

3. Пусть  $A$  имеет такой же вид, как и в упр. 1, но  $r \neq p'$ . Найти интегрирующий множитель  $m(x)$ , т. е. функцию  $m(x)$ , такую, чтобы оператор  $mA = mp \frac{d^2}{dx^2} + mr \frac{d}{dx}$  был формально самосопряженным.

4. Исследовать краевые условия, при которых оператор  $H$ , определенный выражением  $-Hu = pu'' + p'u' - qu$ ,  $p > 0$ ,  $q \geq 0$ , будет положительно определенным.

<sup>1)</sup> *Порядком* дифференциального оператора называется порядок старшей производной в соответствующем дифференциальном выражении. — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> Всюду рассматриваются вещественные дифференциальные выражения. — *Прим. ред.*

**8. Вариационные принципы для собственных значений.** По аналогии с конечномерным случаем (гл. II) мы можем ожидать и докажем это ниже, что собственные значения  $\lambda_i$  и собственные функции  $u_i$  можно также охарактеризовать как решения вариационных задач и что замена краевой задачи вариационной принесет большую пользу при рассмотрении приближенных методов.

Сформулируем два возможных вариационных определения.

1) **Рекурсивное определение.** Первое собственное значение  $\lambda_1$  и первая собственная функция  $u_1$  оператора  $H$  равны соответственно минимальному значению  $\lambda_1$  и минимизирующей функции  $u_1$  функционала  $(Hu, u)/(u, u)$ . Аналогично, второе собственное значение  $\lambda_2$  и вторая собственная функция  $u_2$  определяются соотношением  $\lambda_2 = (Hu_2, u_2)/(u_2, u_2) = \min (Hu, u)/(u, u)$ ;  $(u, u_1) = 0$ , и вообще  $\lambda_r$  и  $u_r$  обладают тем свойством, что

$$\lambda_r = \frac{(Hu_r, u_r)}{(u_r, u_r)} = \min \frac{(Hu, u)}{(u, u)},$$

где функции  $u$  подчинены  $r - 1$  ограничениям  $(u, u_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, r - 1$ .

2) **Независимое (максимально-минимальное) определение.** Пусть  $v_1, \dots, v_{r-1}$  суть  $r - 1$  произвольных допустимых функций, которые мы будем называть *функциями связи*, и пусть  $\lambda_r(v_1, \dots, v_{r-1})$  обозначает минимум  $(Hu, u)/(u, u)$  по всем допустимым функциям  $u$ , удовлетворяющим  $r - 1$  условиям  $(u, v_i) = 0$ . Тогда  $r$ -е собственное значение  $\lambda_r$  равно *максимуму* по всевозможным наборам  $r - 1$  функций  $v_i$  *минимума* функционала  $(Hu, u)/(u, u)$  по всем функциям  $u$ , ортогональным  $r - 1$  функциям  $v_1, \dots, v_{r-1}$ .

Иначе говоря,  $r$ -е собственное значение равно наибольшему из всех значений, которые принимает минимум функционала  $(Hu, u)/(u, u)$  при добавлении  $r - 1$  связей.

Доказательство того, что оба принципа, максимально-минимальный и рекурсивный, дают одно и то же значение  $\lambda_r$ , проводится так же, как и в гл. II. Действительно, если мы положим  $v_1 = u_1, \dots, v_{r-1} = u_{r-1}$ , то по определению  $\lambda_r(v_1, \dots, v_{r-1})$  совпадает с  $r$ -м собственным значением  $\lambda_r$ , определенным рекурсивно, а при любом другом выборе произвольных функций  $v_i$  мы имеем неравенство  $\lambda_r(v_1, \dots, v_{r-1}) \leq \lambda_r$ , которое доказывается точно так же, как и в гл. II.

С помощью максимально-минимального свойства можно также доказать, как и в гл. II, общую теорему Рэля для непрерывных систем.

**Теорема Рэля** (для конечного числа связей). *Если на колебательную систему с собственными значениями  $\lambda_1 \leq$*



$\leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$  наложить  $r$  произвольных связей  $(u, v_1) = (u, v_2) = \dots = (u, v_r) = 0$ , где  $v_i$  — наперед заданные допустимые функции, то новые собственные значения  $\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \dots$  разделяют старые в том смысле, что  $\lambda_n \leq \tilde{\lambda}_n \leq \lambda_{n+r}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

## У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Сформулировать вариационную задачу, соответствующую дифференциальному уравнению

$$py'' + p'y' - qy + \lambda py = 0.$$

2. Сформулировать вариационную задачу, соответствующую уравнению

$$py'' + ry' - qy + \lambda py = 0,$$

где  $r \neq p'$ . (Указание: см. упр. 3 из п. 7).

**9. Проблема существования минимизирующих функций.** Следует отметить, что в предыдущем пункте предполагалось существование минимизирующих функций  $u_1, u_2, \dots$  и т. д. В гл. II, когда мы искали  $n$ -мерный вектор  $u_1$ , минимизирующий функцию  $(Hu, u)/(u, u)$ , нам было известно заранее, что такой вектор существует в силу теоремы Вейерштрасса о том, что непрерывная функция на ограниченном замкнутом множестве достигает своего минимума. Однако в бесконечномерном случае, когда отыскивается функция  $u_1$ , минимизирующая функционал  $(Hu, u)/(u, u)$ , мы а priori не гарантированы, что такая функция действительно существует. История так называемого *принципа Дирихле* (см. Курант [3]) показывает, что легко построить примеры с такими краевыми условиями, при которых действительно не существует минимизирующей функции, например найти кратчайшую кривую класса  $C^{(2)}$ , соединяющую точки  $A$  и  $B$ , при условии, что в точке  $A$  эта кривая перпендикулярна прямой  $AB$ .

В наших задачах ситуация такова. Положительно определенный функционал  $(Hu, u)/(u, u)$  ограничен снизу нулем и потому имеет точную нижнюю границу (сокращенно т. н. г.), которую мы обозначим через  $\lambda_1$ . Следовательно, существует *минимизирующая последовательность* функций  $w_1, \dots, w_n, \dots$ , такая, что

$$\frac{(Hw_i, w_i)}{(w_i, w_i)} \rightarrow \lambda_1.$$

Однако из существования минимизирующей последовательности еще не следует, что существует допустимая функция  $u_1$ , для которой

$$\frac{(Hu_1, u_1)}{(u_1, u_1)} = \lambda_1.$$

Чтобы установить существование такой функции, нам нужно будет доказать, как будет видно из дальнейшего, что обратный оператор  $H^{-1}$  вполне непрерывен (определение см. в гл. VIII, п. 5). Кроме того, в наших рассуждениях существенно используется тот факт, что оператор  $H^{-1}$  действует в *полном* пространстве. Понятие полноты рассматривается в следующем пункте.

**10. Полные и неполные пространства.** Метрическое пространство  $\mathfrak{S}$  называется *полным*, если любая последовательность Коши в  $\mathfrak{S}$  сходится к пределу, который также принадлежит  $\mathfrak{S}$ . Таким образом,  $n$ -мерные евклидовы пространства, рассмотренные в гл. I, являются полными; это следует из основных свойств вещественных чисел. Однако функциональное пространство  $\mathfrak{F}^{(n)}$ , состоящее из всех функций класса  $C^{(n)}$  на интервале  $[a, b]$ , не будет полным. Докажем этот факт.

Пусть  $\mathfrak{F}^{(0)}$  обозначает пространство непрерывных функций на  $[a, b]$  со скалярным произведением  $(u, v) = \int_a^b uv \, dx$ . Будем говорить, что подпространство  $\mathfrak{X}$  пространства  $\mathfrak{S}$  *плотно* в  $\mathfrak{S}$ , если любой элемент  $u \in \mathfrak{S}$  является пределом некоторой последовательности  $\{v_n\} \in \mathfrak{X}$ , т. е.  $\lim \|u - v_n\| = 0$ . Тогда можно показать, что  $\mathfrak{F}^{(n)}$  плотно в  $\mathfrak{F}^{(0)}$  — результат, который бывает полезен во многих вопросах. На самом деле мы можем доказать больше, а именно, что  $\mathfrak{F}^{(\infty)}$  плотно в  $\mathfrak{F}^{(0)}$ , где  $\mathfrak{F}^{(\infty)}$  обозначает пространство функций на  $[a, b]$ , имеющих непрерывные производные любого порядка, с тем же самым скалярным произведением  $(u, v) = \int_a^b uv \, dx$ . Для этого рассмотрим «регуляризацию» функции  $u(x) \in \mathfrak{F}^{(0)}$ , т. е. функцию  $v(x)$ , значение которой в каждой точке  $x$  равно «взвешенному значению»  $u(x)$  на интервале  $(x - \delta, x + \delta)$ , где «вес»  $\rho_\delta(x)$  определяется следующим образом:

$$\rho_\delta(x - \xi) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x - \xi| \geq \delta, \\ \frac{k}{\delta} \exp \frac{-\delta^2}{\delta^2 - (x - \xi)^2}, & \text{если } |x - \xi| < \delta, \end{cases}$$

где  $\delta$  и  $k$  — надлежащим образом подобранные постоянные (см. ниже). Другими словами, мы полагаем

$$v(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) \rho_\delta(x - \xi) \, d\xi,$$

где  $u(\xi)$  — непрерывное продолжение функции  $u(x)$  на некоторый интервал  $(\alpha, \beta)$ , содержащий  $(a, b)$ . Легко видеть, что функ-

ция  $v(x)$ , которая называется *сверткой*  $u(x)$  и  $\rho_\delta(x)$  и часто обозначается через  $u * \rho_\delta$ , имеет производные любого порядка, поскольку мы можем дифференцировать под знаком интеграла.

Если мы теперь выберем  $k$  так, чтобы  $k^{-1} = \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{x^2-1}} dx$ , и  $\delta$  так, чтобы  $|u(x_1) - u(x_2)| < \varepsilon$  при  $|x_1 - x_2| < \delta$ , где  $\varepsilon$  — произвольное наперед заданное положительное число, то простое вычисление показывает, что  $\|v - u\| < \varepsilon \sqrt{b-a}$ . Таким образом,  $u$  является пределом последовательности функций  $v_n(x)$ , где

$$v_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) \rho_{1/n}(x - \xi) d\xi \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

и, следовательно,  $\mathfrak{F}^{(\infty)}$  плотно в  $\mathfrak{F}^{(0)}$ .

Пусть теперь  $u \in \mathfrak{F}^{(0)}$  — функция, не принадлежащая  $\mathfrak{F}^{(n)}$ , и пусть  $\{w_k\}$  — последовательность функций из  $\mathfrak{F}^{(n)}$ , сходящаяся к  $u$ . Тогда из неравенства треугольника следует, что  $w_1, w_2, \dots, w_k, \dots$  является последовательностью Коши, которая не сходится ни к одной из функций пространства  $\mathfrak{F}^{(n)}$ . Таким образом, пространство  $\mathfrak{F}^{(n)}$  не полно; в следующей главе мы рассмотрим различные методы *пополнения* неполных пространств.

## У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Доказать, что  $n$ -мерное евклидово пространство полно.

2. Провести со всеми подробностями заключительные рассуждения изложенного выше доказательства того факта, что  $\mathfrak{F}^{(\infty)}$  плотно в  $\mathfrak{F}^{(0)}$ .

**11. Совпадение множества минимумов вариационных задач со спектром. Уравнение Эйлера — Лагранжа.** Нам осталось еще доказать, что каждое число  $\lambda_r$  в последовательности минимумов является собственным значением  $H$  и обратно.

Доказательство прямого утверждения этой теоремы проводится почти так же, как и в гл. II; незначительные изменения вызваны тем, что пространство  $\mathfrak{F}^{(n)}$  неполно. Рассмотрим, например, первый минимум  $\lambda_1$ . Мы имеем

$$\lambda_1 = \min \frac{(Hu, u)}{(u, u)} = \frac{(Hu_1, u_1)}{(u_1, u_1)},$$

и, следовательно, для функции  $u_1 + \varepsilon v$  справедливо неравенство

$$(H(u_1 + \varepsilon v), u_1 + \varepsilon v) \geq \lambda_1 (u_1 + \varepsilon v, u_1 + \varepsilon v)$$

или  $(\bar{L}_1(u_1 + \varepsilon v), u_1 + \varepsilon v) \geq 0$ , где  $L_1 = H - \lambda_1 I$ . Обозначим

теперь  $(L_1u, u)$  через  $J(u)$ . Тогда  $J(u_1) = 0$ , и в то же время

$$J(u_1 + \varepsilon v) = (L_1u_1, u_1) + 2\varepsilon (L_1u_1, v) + \varepsilon^2 (v, v) \geq 0.$$

Если мы зафиксируем  $v$ , то выражение  $J(u_1 + \varepsilon v)$  будет функцией только от  $\varepsilon$ , которую мы обозначим через  $\Phi(\varepsilon)$ . Эта функция принимает минимальное значение  $\Phi(0)$  при  $\varepsilon = 0$ , и потому ее дифференциал  $d\Phi = \Phi'(0) d\varepsilon = 2(L_1u_1, v) d\varepsilon$ , называемый вариацией функционала  $J(u)$  при  $u = u_1$ , должен обращаться в нуль при  $\varepsilon = 0$ . Таким образом,  $(L_1u_1, v) = 0$  для любого  $v \in \mathfrak{F}^{(n)}$ .

В гл. II на основании этого равенства можно было заключить, что  $L_1u_1 = 0$ , поскольку вектор  $L_1u_1$  был ортогонален любому вектору  $v \in \mathfrak{M}_n$ . Мы могли бы прийти к такому выводу и теперь, если бы знали заранее, что  $L_1u_1 \in \mathfrak{F}^{(2)}$ . Но, так как  $u_1 \in \mathfrak{F}^{(2)}$ , мы можем только утверждать, что  $L_1u_1 \in \mathfrak{F}^{(0)}$ , поскольку вторая производная  $u_1$  непрерывна. Тем не менее если функция  $L_1u_1 \in \mathfrak{F}^{(0)}$  ортогональна любой функции из  $\mathfrak{F}^{(2)}$ , то  $L_1u_1$  будет ортогональна также любой функции из  $\mathfrak{F}^{(0)}$ , поскольку  $\mathfrak{F}^{(2)}$  плотно в  $\mathfrak{F}^{(0)}$ , а скалярное произведение  $(L_1u_1, v)$  непрерывно зависит от  $v$ . Следовательно,  $L_1u_1 = 0$ , что и требовалось доказать.

Рассуждения в общем случае  $r$ -го минимума  $\lambda_r$  и  $r$ -й минимизирующей функции  $u_r$  проводятся так же, как и в гл. II, с указанными выше изменениями.

Докажем обратное утверждение, а именно что каждое собственное значение  $H$  содержится в последовательности минимумов  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \dots \rightarrow \infty$ . Пусть  $\lambda$  — фиксированное собственное значение  $H$  с отвечающей ему собственной функцией  $u$ . Выберем  $\lambda_m > \lambda$ ; это возможно, поскольку, как будет доказано в последующих главах (см., например, гл. VIII, п. 6), последовательность минимумов стремится к бесконечности. Тогда функция  $u$  не может быть ортогональной ко всем минимизирующим функциям  $u_i, i = 1, 2, \dots, m-1$ . В противном случае мы имели бы  $\lambda = (Hu, u)/(u, u) \geq \lambda_m$ , так как  $\lambda_m$  является минимумом  $(Hu, u)/(u, u)$ , если наложены  $m-1$  условий  $(u, u_i) = 0$ . Таким образом, если бы мы смогли показать, что  $(\lambda_i - \lambda)(u, u_i) = 0$  для всех  $i = 1, 2, \dots, m-1$ , то тем самым получили бы требуемый результат, а именно доказали бы, что  $\lambda = \lambda_i$  для некоторого  $i \leq m-1$ .

Положим  $L = H - \lambda I$  и  $L_i = H - \lambda_i I, i = 1, 2, \dots, m-1$ . Тогда  $Lu = 0$ , поскольку  $u$  — собственная функция  $H$ , а так как  $u_i$  — минимизирующая функция для  $(Hu, u)/(u, u)$ , то по доказанному выше  $L_iu_i = 0$ . Кроме того,  $(L_iu, u_i) = (L_iu_i, u)$ , так как  $H$ , а значит, и  $L_i$  — самосопряженные операторы. Следовательно,

$$(L_iu, u_i) = (L_iu_i, u) = (0, u) = 0 \text{ и } (Lu, u_i) = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, m-1).$$

Вычитая из первого равенства второе и учитывая, что  $(L_i - L)u = (\lambda_i - \lambda)u$ , получаем  $(\lambda_i - \lambda)(u, u_i) = 0$ , что и требовалось доказать.

Итак, мы доказали, что собственные значения дифференциальной задачи  $Hu = \lambda u$  совпадают с последовательными минимумами вариационной задачи  $(Hu, u)/(u, u) = \min$ . Связь между этими двумя задачами заключается в том, что уравнение  $Hu - \lambda u = 0$  является так называемым *уравнением Эйлера — Лагранжа* для вариационной задачи  $(Hu, u)/(u, u) = \min$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Изложенное изящное доказательство того факта, что каждое собственное значение является минимумом, основывается на работе Германна [1].

**12. Метод Рэля — Ритца.** Максимально-минимальное определение собственных значений лежит в основе метода Рэля — Ритца, с помощью которого можно получить оценку сверху для собственных значений (положительно определенного) оператора  $H$ . Этот метод состоит в том, что задача на собственные значения для оператора  $H$  заменяется последовательностью задач рассмотренного в гл. I типа.

Как обычно, мы будем обозначать последовательность собственных значений, для которых отыскивается верхняя граница, через  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \dots$ , а соответствующие собственные функции через  $u_1, u_2, \dots, u_r, \dots$ . Тогда  $\lambda_r = \min (Hu, u)/(u, u)$  при условиях  $(u, u_s) = 0$ ;  $s = 1, 2, \dots, r - 1$ . Для любого целого  $n$  выберем произвольную систему  $n$  линейно независимых допустимых функций  $f_i(x)$ , так называемых *координатных функций*, и затем найдем минимум  $(Hu, u)/(u, u)$ , но не по всем допустимым функциям  $u$ , а только по функциям  $w$  вида  $w = \xi_1 f_1 + \dots + \xi_n f_n$ , где  $\xi_i$  — постоянные, т. е. по функциям  $w$ , принадлежащим *подпространству Ритца*  $\mathfrak{R}_n$ , натянутому на выбранные координатные функции  $f_1, f_2, \dots, f_n$ .

Мы заменяем исходную вариационную задачу для оператора  $H$  следующей задачей: найти постоянные  $\Lambda_r$  и соответствующие функции  $w_r$ , такие, что

$$\Lambda_r = \frac{(Hw_r, w_r)}{(w_r, w_r)} = \min \frac{(Hw, w)}{(w, w)}$$

при условиях

$$(w, w_s) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots, r - 1,$$

где функции  $w$  принадлежат подпространству  $\mathfrak{R}_n$ .

Но для таких функций мы имеем

$$(Hw, w) = (H(\sum_i \xi_i f_i), \sum_k \xi_k f_k) = \sum_{i, k} (Hf_i, f_k) \xi_i \xi_k = \sum_{i, k} a_{ik} \xi_i \xi_k$$

и

$$(w, w) = (\sum_i \xi_i f_i, \sum_k \xi_k f_k) = \sum_{i, k} (f_i, f_k) \xi_i \xi_k = \sum_{i, k} b_{ik} \xi_i \xi_k,$$

где  $a_{ik}$  и  $b_{ik}$  — известные постоянные,  $a_{ik} = (Hf_i, f_k)$ ,  $b_{ik} = (f_i, f_k)$ , а квадратичные формы  $\sum a_{ik} \xi_i \xi_k$  и  $\sum b_{ik} \xi_i \xi_k$  положительно определены. Таким образом, нахождение  $\Lambda_r$  сводится к известной задаче, которую мы решили в гл. I.

Следовательно, можно рассматривать числа  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ , называемые *верхними границами Рэлея — Ритца*, как известные постоянные. Докажем теперь, что

$$\Lambda_r \geq \lambda_r \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

При  $r = 1$  это неравенство очевидно, поскольку и  $\Lambda_1$ , и  $\lambda_1$  являются минимумами функционала  $(Hu, u)/(u, u)$ , но  $\Lambda_1$  ищется при более сильных ограничениях, чем  $\lambda_1$ . Но уже при  $r = 2$  мы имеем

$$\lambda_2 = \min \frac{(Hu, u)}{(u, u)}, \quad (u, u_1) = 0,$$

и

$$\Lambda_2 = \min \frac{(Hw, w)}{(w, w)}, \quad (w, w_1) = 0, \quad w \in \mathfrak{R}_n,$$

так что а priori нельзя сравнить множества функций, которые в этих двух случаях подчинены различным ограничениям. Как в гл. II, мы воспользуемся максимально-минимальным определением.

Введем  $n$  новых постоянных  $\tilde{\Lambda}_r$ , определенных соотношениями

$$\tilde{\Lambda}_r = \min \frac{(Hw, w)}{(w, w)} \left\{ \begin{array}{l} (w, u_s) = 0, \quad w \in \mathfrak{R}_n, \\ r = 1, \dots, n; \quad s = 1, \dots, r-1. \end{array} \right.$$

Другими словами,  $\tilde{\Lambda}_r$  является минимумом  $(Hw, w)/(w, w)$ , где функции  $w$  принадлежат тому же подпространству, как и при нахождении  $\Lambda_r$ , но с такими же условиями ортогональности, что и для  $\lambda_r$ . Тогда из общего принципа сравнения следует, что  $\tilde{\Lambda}_r \geq \lambda_r$ , поскольку множество допустимых функций (функций сравнения) для  $\lambda_r$  шире, чем для  $\tilde{\Lambda}_r$ . Если мы докажем теперь, что  $\Lambda_r \geq \tilde{\Lambda}_r$ , то получим искомое неравенство.

Чтобы показать, что  $\Lambda_r \geq \tilde{\Lambda}_r$ , определим функции  $\tilde{w}_s \in \mathfrak{R}_n$  (которые можно наглядно представлять себе как проекции функций  $u_s$  на  $\mathfrak{R}_n$ ) таким образом, чтобы для любого  $w \in \mathfrak{R}_n$  выполня-

лось равенство  $(w, u_s) = (w, \tilde{w}_s)$ . Если мы найдем такие функции  $\tilde{w}_s$ , то отсюда сразу же будет следовать неравенство  $\Lambda_r \geq \tilde{\Lambda}_r$ , поскольку  $\tilde{\Lambda}_r = \min (Hu, u)/(u, u)$  при  $r-1$  фиксированных связях  $(w, u_s) = (w, \tilde{w}_s) = 0$ , где  $\tilde{w}_s \in \mathfrak{R}_n$ , в то время как  $\Lambda_r$  является максимальным значением, которое может принять этот минимум, когда  $r-1$  связей варьируются в  $\mathfrak{R}_n$ .

Компоненты  $\tilde{\xi}_i^{(s)}$  искомым функций  $\tilde{w}_s$  можно легко найти из условия  $(w, u_s) = (w, \tilde{w}_s)$  для любого  $w \in \mathfrak{R}_n$ . В самом деле,

$$(w, u_s) = \left( \sum_i \xi_i f_i, u_s \right) = \sum_i (u_s, f_i) \xi_i,$$

$$(w, \tilde{w}_s) = \left( \sum_i \xi_i f_i, \sum_k \tilde{\xi}_k^{(s)} f_k \right) = \sum_i \sum_k b_{ik} \tilde{\xi}_k^{(s)} \xi_i,$$

где, как и выше,  $b_{ik} = (f_i, f_k)$ . Следовательно,  $n$  чисел  $\tilde{\xi}_1^{(s)}$ ,  $\tilde{\xi}_2^{(s)}$ , ...,  $\tilde{\xi}_n^{(s)}$  удовлетворяют системе  $n$  уравнений

$$\sum_k b_{ik} \tilde{\xi}_k^{(s)} = (u_s, f_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Некоторые из функций  $\tilde{w}_s$  могут быть тождественно равны нулю (это имеет место, когда  $u_s$  ортогональна подпространству  $\mathfrak{R}_n$ ) и функции  $\tilde{w}_s$  не обязательно различны. Но  $\det \| b_{ik} \|$  не равен нулю, поскольку форма  $\sum_{i,k} b_{ik} \xi_i \xi_k$  положительно определена, и потому  $\tilde{w}_s$  определяются единственным образом.

Таким образом, доказано, что, выбирая  $n$  координатных функций  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , мы можем получить верхние границы для первых  $n$  собственных значений нашей системы. Обозначим эти верхние границы через  $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}$ . Если теперь присоединить к этим координатным функциям  $(n+1)$ -ю функцию  $f_{n+1}$ , не являющуюся линейной комбинацией  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , то можно будет вычислить таким же образом, как и выше,  $n+1$  чисел  $\lambda_1^{(n+1)}, \lambda_2^{(n+1)}, \dots, \lambda_n^{(n+1)}, \lambda_{n+1}^{(n+1)}$ , которые также будут верхними границами. При этом мы будем иметь оценку и для следующего собственного значения  $\lambda_{n+1}$  исходной задачи. Существенным является то обстоятельство (и это очень важно для практического счета), что оценки для первых  $n$  собственных значений  $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}$  улучшаются или по крайней мере не ухудшаются. Для того чтобы доказать это утверждение, а именно что  $\lambda_r^{(n+1)} \leq \leq \lambda_r^{(n)}$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$ , заметим, что если при произвольном

выборе функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{r-1}$  мы положим

$$\lambda_r^{(n+1)}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{r-1}) = \min \frac{(Hw, w)}{(w, w)},$$

где

$$w \in \mathfrak{R}_{n+1} \text{ и } (w, \varphi_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r-1),$$

а через  $\lambda_r^{(n)}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{r-1})$  обозначим минимум того же выражения при тех же условиях ортогональности, но при  $w$ , изменяющихся в  $\mathfrak{R}_n \subset \mathfrak{R}_{n+1}$ , то

$$\lambda_r^{(n+1)}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{r-1}) \leq \lambda_r^{(n)}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{r-1}),$$

так что

$$\lambda_r^{(n+1)} = \max \lambda_r^{(n+1)}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{r-1}) \leq \lambda_r^{(n)} = \max \lambda_r^{(n)}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{r-1}),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, для любого конечного  $n$  можно составить следующую (треугольную) таблицу:

	1-я моди- фициро- ванная задача	2-я моди- фициро- ванная задача	3-я моди- фициро- ванная задача	...	$n$ -я моди- фициро- ванная задача	Исходная задача
1-е собственное зна- чение	$\lambda_1^{(1)}$	$\lambda_1^{(2)}$	$\lambda_1^{(3)}$	...	$\lambda_1^{(n)}$	$\lambda_1$
2-е собственное зна- чение		$\lambda_2^{(2)}$	$\lambda_2^{(3)}$	...	$\lambda_2^{(n)}$	$\lambda_2$
3-е собственное зна- чение			$\lambda_3^{(3)}$	...	$\lambda_3^{(n)}$	$\lambda_3$
...	...	...	...	...	...	...
$n$ -е собственное зна- чение				...	$\lambda_n^{(n)}$	$\lambda_n$

В  $r$ -м столбце этой таблицы расположены в неубывающем порядке  $r$  собственных значений  $r$ -й модифицированной задачи, а в  $s$ -й строке — возрастающая последовательность  $s$ -х собственных значений различных модифицированных задач, которые все лучше и лучше аппроксимируют  $s$ -е собственное значение исходной задачи. Отметим еще раз, что собственные значения Рэля — Ритца *оценивают сверху* исходные собственные значения.

Естественно возникает вопрос, можно ли выбрать бесконечную последовательность координатных функций  $f_1, f_2, \dots, \dots, f_n, \dots$  так, чтобы при любом фиксированном  $r$  соответствующая последовательность верхних границ  $\lambda_r^{(n)}$  сходилась



при  $n \rightarrow \infty$  к исходному собственному значению  $\lambda_r$ . Утвердительный ответ на этот вопрос следует из результатов, изложенных в гл. VIII и XI. Используя символ  $\searrow$  для обозначения монотонной сходимости сверху, мы можем составить следующую бесконечную таблицу:

ТАБЛИЦА РЭЛЕЯ — РИТЦА

	1-я моди- фициро- ванная задача	2-я моди- фициро- ванная задача	3-я моди- фициро- ванная задача	...	n-я моди- фициро- ванная задача	...	Исход- ная задача
1-е собственное значение	$\lambda_1^{(1)}$	$\geq \lambda_1^{(2)}$	$\geq \lambda_1^{(3)}$	$\geq \dots \geq$	$\lambda_1^{(n)}$	$\geq \dots \geq$	$\searrow \lambda_1$
2-е собственное значение		$\lambda_2^{(2)}$	$\geq \lambda_2^{(3)}$	$\geq \dots \geq$	$\lambda_2^{(n)}$	$\geq \dots \geq$	$\searrow \lambda_2$
3-е собственное значение			$\lambda_3^{(3)}$	$\geq \dots \geq$	$\lambda_3^{(n)}$	$\geq \dots \geq$	$\searrow \lambda_3$
...	...	...	...	...	...	...	...
n-е собственное значение				...	$\lambda_n^{(n)}$	$\geq \dots \geq$	$\searrow \lambda_n$
							$\vdots$
							$\downarrow$
							$\infty$

### Пример использования метода Рэля — Ритца

Метод Рэля — Ритца применялся во многих задачах физики, химии и прикладной математики (см., например, Хохенемзер [1], Джеймс [1], Крылов [1]), так что невозможно выделить хотя бы один характерный тип задач. Мы ограничимся тем, что рассмотрим задачи о колебаниях струны.

В задаче на собственные значения  $u'' + \lambda u = 0$ ,  $u(0) = u(\pi) = 0$  в качестве координатных функций Ритца мы будем брать многочлены. Поскольку многочлен первой степени, обращающийся в нуль на концах, тождественно равен нулю, возьмем в качестве  $f_1$  многочлен второй степени и вообще в качестве  $f_n$  возьмем многочлен  $(n+1)$ -й степени, обращающийся в нуль на концах. Обозначая приближенную минимизирующую функцию через  $w = \xi_1 f_1 + \dots + \xi_n f_n$ , мы получим на основании вышеизложенного (гл. I) систему  $n$  уравнений

$$\sum_{i=1}^n \xi_i (a_{ik} - \lambda b_{ik}) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

для определения постоянных  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , где

$$a_{ik} = (Hf_i, f_k) = \int_0^\pi f_i' f_k' dx \quad \text{и} \quad b_{ik} = (f_i, f_k) = \int_0^\pi f_i f_k dx.$$

Очевидно, что эти уравнения можно упростить, если выбрать  $f_n(x)$  так, чтобы они образовывали ортонормированную систему. Проводя шаг за шагом несложные вычисления, мы приходим к тому, что

$$f_1(x) = 30^{1/2} \pi^{-5/2} x(\pi - x), \quad f_2(x) = 210^{1/2} \pi^{-7/2} 2x(\pi - x)(\pi - 2x)$$

и т. д. Полагая  $n=1$ , получаем для  $\Lambda_1$  единственное уравнение

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = a_{11} &= \int_0^\pi f_1'^2(x) dx = 30\pi^{-5} \int_0^\pi (\pi^2 - 4\pi x + 4x^2) dx = \\ &= 10\pi^{-2} = 1,013. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\Lambda_1 = 1,013$  является первой оценкой сверху, которую дает метод Рэля — Ритца для истинного собственного значения  $\lambda_1 = 1$ . Если положить  $n=2$ , то  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  будут корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \Lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \Lambda \end{vmatrix} = 0,$$

где  $a_{12} = a_{21} = \int_0^\pi f_1' f_2' dx = 0$ ,  $a_{22} = \int_0^\pi f_2'^2 dx = 42/\pi^2 = 4,25$ , откуда

получаются две первые верхние оценки Ритца  $\Lambda_1 = a_{11} = 1,013$  и  $\Lambda_2 = a_{22} = 4,25$  для истинных собственных значений  $\lambda_1 = 1$  и  $\lambda_2 = 4$ .

Ясно, что этот процесс можно продолжить до таких значений  $n$ , какие потребуются для наших целей.

## У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. В задаче  $u'' + \lambda u = 0$ ,  $u(-1) = u(1) = 0$  взять в качестве координатных функций Ритца  $f_n(x) = x^{n-1}(1 - x^2)$ . Полагая  $n=3$ , найти оценки для первых трех собственных значений. Результаты сравнить с ответами к упр. 4 из п. 3.

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } \Lambda_1 &= 2,468 > \lambda_1 = 2,465, \\ \Lambda_2 &= 10,5 > \lambda_2 = 9,86, \\ \Lambda_3 &= 25,53 > \lambda_3 = 22,14. \end{aligned}$$

2. Провести вычисления по методу Рэля — Ритца для случая  $n=3$ , следуя схеме, используемой в тексте для случая  $n=1$  и 2.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ И ИСТОРИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Обычно, говоря о методе Рэлей — Ритца, ссылаются на статью Ритца [1] (см. также [2]). На протяжении нескольких лет после 1909 г. и даже совсем недавно этот метод связывался лишь с именем одного Ритца, по крайней мере за пределами Великобритании. В этой связи приведем выдержку из статьи Рэлей [2]: «Я хотел бы обратить внимание на замечательный мемуар В. Ритца..., ранняя смерть которого явилась тяжелой утратой для математической физики... Общий метод аппроксимации находит весьма изящные применения, однако я удивлен тем, что Ритц считает свой метод новым... Именно таким методом я нашел поправки, вызванные открытым концом органной трубы (*Phil. Trans.*, 161 (1870); *Scientific Papers*, I, p. 57)... Вычисления были затем усовершенствованы в «Теории звука», т. II, приложение А. Мне всегда казалось, что этот трактат насыщен приложениями рассматриваемого метода (см. § 88—91, 102, 209, 210, 265), но, вероятно, наиболее точная его формулировка содержится в недавней статье, напечатанной в *Phil. Mag.*, 47 (1899), 566; *Scientific Papers*, IV, p. 407, где он принимает почти такую же форму, как и у Ритца... Я был твердо убежден, что этот метод можно применять с еще большим успехом, как это сделал Ритц для случая высших гармоник».

Приведем далее высказывание Куранта [2]: «Со времен Гаусса и Томпсона проблема эквивалентности краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, с одной стороны, и задач вариационного исчисления, с другой стороны, занимала центральное место в анализе. На первых порах интерес был вызван преимущественно теоретическим обоснованием теорем существования, и лишь много позже два физика, лорд Рэлей и Вальтер Ритц, рассмотрели практические приложения; они независимо пришли к идее использовать эту эквивалентность для численного нахождения решений, заменяя вариационную задачу более простыми аппроксимирующими задачами нахождения экстремума, в которых определению подлежало только конечное число параметров. Рэлей в своем классическом труде «Теория звука» и в других публикациях впервые применил такую процедуру. Но только блестящий успех Вальтера Ритца и последующие трагические обстоятельства вызвали всеобщий интерес к этому вопросу. В двух публикациях (1908 и 1909 гг.) Ритц, сознающий приближающуюся смерть от туберкулеза, с большим мастерством изложил свою теорию».

**13. Естественные краевые условия.** До сих пор, сравнивая краевые и вариационные задачи, мы начинали с рассмотрения самосопряженной задачи  $Hu = \lambda u$  с заданными краевыми условиями  $U_i(u) = 0$  и искали такие значения  $\lambda$ , при которых существуют нетривиальные решения. При этом краевые условия играли существенную роль, так как, если бы они не принимались во внимание, нетривиальные решения существовали бы при любом  $\lambda$ . Далее, переходя к вариационной задаче, мы искали минимум выражения  $(Hu, u)/(u, u)$  при тех же краевых условиях. Теперь возникает следующий вопрос. Вполне естественно искать минимум  $(Hu, u)/(u, u)$ , не задавая никаких краевых условий. Какой тогда будет соответствующая краевая задача? В частности, каковы ее краевые условия?

Чтобы ответить на этот вопрос, мы обратим описанный выше процесс. Ранее мы исходили из дифференциального уравнения  $Lu = 0$ , где  $L = H - \lambda I$ , и показывали, что оно является

уравнением Эйлера — Лагранжа для вариационной задачи  $(Hu, u)/(u, u) = \lambda = \min$ . Например, в случае колеблющейся однородной струны уравнение  $-u'' - \lambda u = 0$  является уравнением Эйлера — Лагранжа для вариационной задачи

$$\frac{-\int_a^b u'' u \, dx}{\int_a^b u^2 \, dx} = \min, \quad u(a) = u(b) = 0,$$

которую можно представить в виде

$$\frac{(Hu, u)}{(u, u)} = \frac{(H_1 u, H_1 u)}{(u, u)} = \frac{\int_a^b u'^2 \, dx}{\int_a^b u^2 \, dx} = \min,$$

где  $H_1 u = u'$ .

Действуя в обратном порядке, рассмотрим сначала выражение, подлежащее минимизации, а именно

$$\frac{(H_1 u, H_1 u)}{(u, u)} = \frac{\int_a^b u'^2 \, dx}{\int_a^b u^2 \, dx},$$

и пусть  $\lambda$  обозначает его минимум по всем  $u \in C^{(2)}$ , не подчиненным никаким граничным условиям. Тогда для минимизирующей функции  $u$  имеем

$$\int_a^b u'^2 \, dx - \lambda \int_a^b u^2 \, dx = 0,$$

$u \in C^{(2)}$ , в то время как

$$\int_a^b (u' + \varepsilon v')^2 \, dx - \lambda \int_a^b (u + \varepsilon v)^2 \, dx \geq 0$$

для любой функции вида  $u + \varepsilon v$ , где  $v$  — произвольная функция, принадлежащая  $C^{(2)}$ . Возводя в квадрат и производя соответствующие упрощения, получаем неравенство

$$2\varepsilon \int_a^b (u'v' - \lambda uv) \, dx + \varepsilon^2 \int_a^b (v' - \lambda v)^2 \, dx \geq 0.$$

Но тогда необходимо, чтобы

$$\int_a^b (u'v' - \lambda uv) dx = 0,$$

так как в противном случае мы могли бы сделать предыдущее выражение отрицательным, выбрав  $\varepsilon$  достаточно малым и противоположным по знаку  $\int_a^b (u'v' - \lambda uv) dx$ . Интегрированием по частям получаем

$$\int_a^b u'v' dx = u'v \Big|_a^b - \int_a^b u''v dx$$

и, следовательно, окончательно будем иметь

$$u'v \Big|_a^b - \int_a^b (u'' + \lambda u)v dx = 0.$$

Легко видеть, что множество функций  $v \in \mathfrak{F}^{(2)}$ , удовлетворяющих условиям  $v(a) = v(b) = 0$ , плотно в  $\mathfrak{F}^{(2)}$ , а значит, и в  $\mathfrak{F}^{(0)}$ , так что функция  $u'' + \lambda u \in \mathfrak{F}^{(0)}$  должна быть тождественным нулем, поскольку она ортогональна всем таким функциям  $v$ .

Таким образом, минимизирующая функция  $u$  должна удовлетворять уравнению (Эйлера — Лагранжа)

$$u''(x) + \lambda u = 0,$$

которое не содержит  $v$ .

Возвращаясь теперь к равенству

$$u'v \Big|_a^b - \int_a^b (u'' + \lambda u)v dx = 0,$$

которое должно выполняться при всех  $v \in \mathfrak{F}^{(2)}$ , мы получаем, что  $u'v \Big|_a^b = 0$  при всех  $v \in \mathfrak{F}^{(2)}$ , откуда следует, что  $u'(a) = u'(b) = 0$ .

Итак, мы получим важный результат:

*Минимизирующая функция  $u$  вариационной задачи*

$$\lambda = \frac{(u', u')}{(u, u)} = \min,$$

где функции  $u \in \mathfrak{F}^{(2)}$  не подчинены никаким краевым условиям, не только удовлетворяет уравнению Эйлера — Лагранжа для

этой задачи, но и автоматически удовлетворяет условиям  $u'(a) = u'(b) = 0$ , которые по этой причине называются *естественными краевыми условиями*.

Таким образом, задача на собственные значения, соответствующая колебаниям струны, не подчиненной никаким краевым условиям (так называемой *свободной* струны), формулируется так: найти такие значения  $\lambda$ , при которых существует нетривиальное решение  $u$  уравнения  $u'' + \lambda u = 0$  при (естественных) краевых условиях  $u'(a) = u'(b) = 0$ .

Краевые условия могут быть частично заданными, а частично естественными. Например, если задано условие  $u(a) = 0$ , то рассуждения, аналогичные изложенным выше, показывают, что соответствующим естественным условием будет  $u'(b) = 0$ . Исследуем в более общей постановке вопрос о естественных краевых условиях для любого формально самосопряженного оператора  $H$  второго порядка. Мы будем называть такой оператор *формально положительно определенным*, если с помощью интегрирования по частям можно представить скалярное произведение  $(Hu, v)$  в виде суммы конечного числа членов вида  $(H_i u, H_i v)$  и внеинтегральных членов, т. е.

$$(Hu, v) = \sum (H_i u, H_i v) + N(u, v) \Big|_a^b.$$

Как обычно, все функции в этих выражениях предполагаются вещественными. Например, оператор  $H = -d^2/dx^2$  является формально положительно определенным, поскольку

$$(Hu, v) = (-u'', v) = \int_a^b u'v' dx - u'v \Big|_a^b = (H_1 u, H_1 v) - u'v \Big|_a^b.$$

Аналогично, в случае неоднородной струны, где  $H$  определяется выражением

$$H = -(pu')' + qu \quad (p > 0, q \geq 0),$$

имеем

$$\begin{aligned} (Hu, v) &= \int_a^b \{(-pu')'v + quv\} dx = \\ &= \int_a^b (pu'v' + quv) dx - pu'v \Big|_a^b = \\ &= (H_1 u, H_1 u) + (H_2 u, H_2 u) - pu'v \Big|_a^b, \end{aligned}$$

где  $H_1 u = p^{1/2} u'$  и  $H_2 u = q^{1/2} u$ , а функции  $p^{1/2}$  и  $q^{1/2}$  вещественны в силу условий  $p > 0$ ,  $q \geq 0$  <sup>1)</sup>.

Если  $H$  — двучленный оператор порядка  $2t$ , т. е.  $H = (-1)^t (pu^{(t)})^{(t)} + qu$ , то определенное выше выражение  $N(u, v)$  билинейно по  $v, v', \dots, v^{(t-1)}$  и  $u^{(t)}, u^{(t+1)}, \dots, u^{(2t-1)}$ . Таким образом (см. определение самосопряженного оператора в п. 7), если

$$V_1(v), V_2(v), \dots, V_{2t}(v)$$

есть множество, состоящее из  $2t$  произвольных линейно независимых форм типа

$$V_i(v) = \alpha_i v(a) + \alpha_i' v'(a) + \dots + \alpha_i^{(t-1)} v^{(t-1)}(a) + \beta_i v(b) + \beta_i' v'(b) + \dots + \beta_i^{(t-1)} v^{(t-1)}(b),$$

то существуют (см. п. 7) однозначно определенные линейно независимые формы

$$U_1, U_2, \dots, U_{2t},$$

линейные по

$$u^{(t)}(a), u^{(t+1)}(a), \dots, u^{(2t-1)}(b), u^{(t)}(b), u^{(t+1)}(b), \dots, u^{(2t-1)}(b),$$

такие, что

$$N(u, v) \Big|_a^b = V_1 U_{2t} + V_2 U_{2t-1} + \dots + V_{2t} U_1.$$

Пусть теперь  $\{V_k\} = \{V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_m}\}$  ( $0 \leq m \leq 2t$ ) — некоторое произвольное подмножество форм  $V_i$ , а

$$\{U_{k'}\} = \{U_{j_1}, U_{j_2}, \dots, U_{j_{2t-m}}\}$$

— дополнительное подмножество форм  $U_j$  в том смысле, что для любого  $V \in \{V_{k'}\}$  и для любого  $U \in \{U_{k'}\}$  сумма индексов  $V$  и  $U$  не равна  $2t + 1$ . Тогда условия

$$U_{j_1}(u) = \dots = U_{j_{2t-m}}(u) = 0$$

мы будем называть *естественными краевыми условиями* вариационной задачи  $(Hu, u)/(u, u) = \min$  при заданных условиях

$$V_{i_1}(u) = \dots = V_{i_m}(u) = 0.$$

С помощью тех же рассуждений, которые использовались в рассмотренном выше примере, можно показать, что если к условиям, данным в вариационной задаче:

$$\frac{(Hu, u)}{(u, u)} = \sum \frac{(H_i u, H_i u)}{(u, u)} = \min,$$

<sup>1)</sup> Заметим, что оператор  $-d^2 y / dx^2 + q(x)y$ ,  $y(0) = y(\pi) = 0$ , может быть положительно определенным при  $q(x) < 0$ . — Прим. ред.

добавить естественные краевые условия, то оператор  $H$  будет самосопряженным, и что минимизирующая функция  $u$  автоматически удовлетворяет естественным условиям.

### У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Найти естественные краевые условия для вариационной задачи

$$\frac{\int_a^b u'^2 dx}{\int_a^b u^2 dx} = \min$$

и для более общей задачи

$$\frac{\int_a^b [u^{(2l)}]^2 dx}{\int_a^b u^2 dx} = \min.$$

2. Дать подробное доказательство того, что минимизирующая функция автоматически удовлетворяет естественным краевым условиям, определенным выше для общего случая.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Термин «естественные краевые условия» ввел Курант. Более общее понятие, связанное с трансверсальностью в вариационном исчислении, рассматривается в книге Куранта и Гильберта [1]. См. также замечания Ароншайна [2] по поводу нестабильных граничных условий.



## ВОСПРОИЗВОДЯЩИЕ ЯДРА И ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПОПОЛНЕНИЕ

**1. Обратный оператор. Функция Грина. Воспроизводящие ядра.** В гл. I (п. 9) нам было безразлично, вычислять ли собственные значения оператора  $H$  или его обратного  $K = H^{-1}$ . Однако в бесконечномерном случае, как мы установим в дальнейшем, дифференциальный оператор  $H$  не обладает рядом важных свойств (например, полной непрерывностью; см. гл. VIII), присущих его обратному, так что в некоторых последующих главах нам придется вместо  $H$  пользоваться оператором  $K$ . Эту главу мы начнем с рассмотрения примера, очень важного для функций одной переменной, а именно мы найдем оператор, обратный дифференциальному оператору  $H$  второго порядка  $Hu = -(pu)'' + qu$  с крайевыми условиями  $u(a) = u(b) = 0$ . Это значит, что мы найдем оператор  $H^{-1} = K$ , такой, что  $Hu = f$  при  $Kf = u$ .

Поскольку  $H$  положительно определен, такой оператор  $K$  обязательно существует и, по-видимому, должен выражаться интегралом. Действительно, мы найдем функцию  $k(x, \xi)$  двух переменных, которая называется *функцией Грина* (или *функцией влияния*) оператора  $H$ , такую, что *интегральный оператор*  $K$ , определенный равенством

$$Kf(x) = \int_a^b k(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

является обратным к  $H$ . Следует отметить, что, поскольку для определения  $H$  нужно указать фундаментальный интервал  $[a, b]$  и задать условия  $u(a) = u(b) = 0$ , функция Грина, вообще говоря, зависит от интервала и крайевых условий.

Функция  $k(x, \xi)$  будет найдена сначала из физических соображений, а затем мы докажем, что построенный таким образом оператор  $K$  действительно является обратным к  $H$ .

Когда мы в гл. IV записывали уравнение движения неоднородной струны, предполагалось, что на струну не действует никакая внешняя сила (например, сила тяжести), так что в поло-

жении равновесия форма струны определяется уравнением  $u(x) = 0$ , эквивалентным уравнению  $Hu = 0$ . Но при наличии поперечной внешней силы, такой, что сила, действующая на единицу длины, равна  $f(x)$ , форма струны в положении равновесия описывается уравнением  $Hu = f$  (см., например, Курант и Гильберт [1]).

Таким образом, если мы сможем отыскать функцию, описывающую при наличии внешней силы  $f$  форму струны в положении равновесия, то, поскольку  $Hu = f$ , мы тем самым построим обратный оператор  $K$ .

Следующие эвристические рассуждения подсказывают такой подход к решению этой задачи. Предположим, что мы знаем прогиб струны  $k(x, \xi)$  в точке  $x$ , вызванный единичной силой, приложенной в другой точке  $\xi$ . Если мы теперь представим себе, что струна разбита на отрезки длины  $d\xi$  и что к каждому отрезку приложена сила  $f(\xi) d\xi$ , то прогиб, вызванный силой, действующей в точке  $\xi$ , равен  $k(x, \xi) f(\xi) d\xi$ , а суммарный прогиб может быть получен наложением отдельных прогибов; следовательно,

он равен  $\int_a^b k(x, \xi) f(\xi) d\xi$ . Функция  $k(x, \xi)$  может быть найдена из следующих соображений.

При фиксированном  $\xi$  можно ожидать, что  $k(x, \xi)$ , рассматриваемая как функция от  $x$ , удовлетворяет дифференциальному уравнению  $Hk = 0$  в любой точке  $x \neq \xi$ , поскольку  $k(x, \xi)$  дает прогиб, соответствующий приложенной силе, которая в точках  $x \neq \xi$  равна нулю. Но в точке  $x = \xi$  должна быть некоторая особенность, так как плотность силы в этой точке, т. е. единичной силы, сосредоточенной в одной точке, равна бесконечности.

С физической точки зрения единичная сила не может быть приложена в точности к одной точке; ее следует представлять себе распределенной на малом интервале длины  $2\varepsilon$  с центром в точке  $x = \xi$ . Тогда, если обозначить через  $f_\varepsilon(x)$  плотность

так распределенной силы, мы будем иметь  $\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f_\varepsilon(x) dx = 1$ , поскольку  $f_\varepsilon(x)$  равна нулю при  $x \leq \xi - \varepsilon$  и  $x \geq \xi + \varepsilon$ .

Положение равновесия струны определяется теперь из уравнения

$$Hu = -(pu')' + qu = f_\varepsilon(x),$$

откуда, интегрируя от  $\xi - \varepsilon$  до  $\xi + \varepsilon$ , мы получаем равенство

$$-pu' \Big|_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} qu dx = 1,$$

из которого в свою очередь следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-pu') \Big|_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} = 1.$$

Поскольку искомым функцию  $k(x, \xi)$  при фиксированном  $\xi$  можно представлять себе как предельное положение  $u(x)$  при  $\varepsilon$ , стремящемся к нулю, то, следовательно, производная  $\partial k(x, \xi)/\partial x$  имеет в точке  $x = \xi$  скачок, равный  $1/p(\xi)$ .

Итак, функцию Грина  $k(x, \xi)$  оператора  $Hu = -(pu')' + qu$  при условиях  $u(a) = u(b) = 0$  можно охарактеризовать следующим образом. При фиксированном  $\xi$  функция  $k(x, \xi)$  непрерывна, удовлетворяет краевым условиям, имеет непрерывную вторую производную всюду, кроме точки  $x = \xi$ , где первая производная имеет скачок, равный  $1/p(\xi)$ ; кроме того,  $k(x, \xi)$  удовлетворяет данному дифференциальному уравнению всюду, за исключением точки  $x = \xi$ .

Теперь, когда эвристическим путем найдены эти условия, можно проверить с помощью вычислений, что такая функция  $k(x, \xi)$  обладает требуемым свойством, а именно если  $u(x) = \int_a^b k(x, \xi) f(\xi) d\xi$ , где  $f(\xi)$  — непрерывная функция, то  $Hu = f(x)$ . В самом деле, поскольку  $k(x, \xi)$  непрерывна, а  $\partial k/\partial x$  имеет единственный скачок при  $x = \xi$ , то, дифференцируя по  $x$ , мы получим

$$\begin{aligned} u'(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{x-\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x} f(\xi) d\xi + \int_{x+\varepsilon}^b \frac{\partial k}{\partial x} f(\xi) d\xi \right], \\ u''(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{x-\varepsilon} \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} f(\xi) d\xi + \int_{x+\varepsilon}^b \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} f(\xi) d\xi \right] + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ f(x-\varepsilon) \frac{\partial k}{\partial x} \Big|_{\xi=x-\varepsilon} - f(x+\varepsilon) \frac{\partial k}{\partial x} \Big|_{\xi=x+\varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} Hu &= -(pu')' + qu = -pu'' - p'u' + qu = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{x-\varepsilon} \left\{ -p \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} - p' \frac{\partial k}{\partial x} + qk \right\} f(\xi) d\xi + \right. \\ &+ \int_{x+\varepsilon}^b \left\{ -p \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} - p' \frac{\partial k}{\partial x} + qk \right\} f(\xi) d\xi \Big] + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-p) \left[ f(x-\varepsilon) \frac{\partial k}{\partial x} \Big|_{\xi=x-\varepsilon} - f(x+\varepsilon) \frac{\partial k}{\partial x} \Big|_{\xi=x+\varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

Выражение в первых квадратных скобках равно  $\int Hkf(\xi) d\xi$  и, значит, равно нулю, поскольку  $Hk = 0$  для  $x \neq \xi$ , а выражение во вторых квадратных скобках стремится к  $f(x)$ , так как  $\partial k/\partial x$  имеет скачок при  $x = \xi$ , равный  $1/p(\xi)$ . Следовательно,  $Hu = f(x)$ , и, значит, оператор  $K$ , определенный равенством  $Ku = \int_a^b k(x, \xi) u(\xi) d\xi$ , действительно является обратным к  $H$ .

Функция Грина  $k(x, \xi)$  называется *ядром интегрального оператора*  $K$ , определенного по формуле  $Ku = \int_a^b k(x, \xi) u(\xi) d\xi$ .

Если, как и в настоящем случае,  $k(x, \xi)$  конечна для всех  $x$  и  $\xi$  на  $[a, b]$  и если  $\mathfrak{A}(u)$  задает норму, то  $k(x, \xi)$  называется также *воспроизводящим ядром* по следующей причине. При фиксированном  $x$  функция  $k(x, \xi)$  является функцией одной переменной, так что для данной функции  $u$  можно рассмотреть скалярное произведение  $(u, k)_A$ , определенное с помощью формы  $\mathfrak{A}$ , а именно

$$(u, k)_A = (u(\xi), k(x, \xi))_A = \int_a^b k(x, \xi) Hu(\xi) d\xi = KHu(x) = u(x).$$

Таким образом,  $(u, k)_A = u$ , и мы можем сказать, что ядро  $k(x, \xi)$  *воспроизводит*  $u$  при скалярном умножении на  $u$ .

По аналогии с п. 9 гл. I представим функцию Грина в несколько иной форме, которая является важной для дальнейшего изложения. Рассуждения мы проведем на примере оператора  $H = -D^2$  при условиях  $u(0) = u(\pi) = 0$  (идея остается той же и в общем случае, однако рассуждения несколько усложняются). Мы знаем, что собственными функциями  $H$  являются функции  $\sqrt{2/\pi} \sin nx$ . Как будет видно из дальнейшего (гл. VIII, п. 6), оператор  $H$  обладает п. о. н. с. собственных функций, так что система функций

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2x, \quad \dots, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, \quad \dots$$

является п. о. н. с. в  $\mathfrak{F}^{(2)}$  с нормой  $\|u\|^2 = \int_a^b u^2 dx$ . Эти же функции будут собственными функциями обратного оператора  $K = H^{-1}$ , поскольку равенство  $Hu = \lambda u$  эквивалентно равенству  $Ku = \mu u$ , где  $\mu = 1/\lambda$ .

По аналогии с конечномерным случаем (гл. I, п. 9) зададим теперь метрику с помощью оператора  $H = -D^2$ , т. е. определим

новое скалярное произведение  $(u, v)_A$  по формуле

$$(u, v)_A = \int_0^{\pi} Hu \cdot v \, dx = - \int_0^{\pi} u''v \, dx = \int_0^{\pi} u'v' \, dx.$$

Функциональное пространство, снабженное этой нормой, мы будем обозначать через  $\mathfrak{F}_A^{(2)}$ . Легко проверить, что функции

$$u_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x, \quad u_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2x, \dots, u_n = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, \dots$$

образуют ортонормированную систему в  $\mathfrak{F}_A^{(2)}$ . Эта система полна, поскольку в нее входит (с некоторым постоянным множителем) любая собственная функция  $K$ . Но тогда отсюда следует (см. ниже, а также гл. I, п. 9), что функцию Грина можно представить в виде ряда

$$k(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) u_n(\xi) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin nx \sin n\xi,$$

который по признаку Вейерштрасса сходится равномерно по  $x$  и  $\xi$ .

Докажем, что  $k(x, \xi)$  действительно является функцией Грина. Для этого заметим, что в силу теоремы Парсеваля (ср. гл. I, п. 5, и гл. VIII, п. 3)

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (u, u_n) u_n(x),$$

где

$$(u, u_n) = - \int_0^{\pi} u_n''(\xi) u(\xi) \, d\xi.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u(x) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} u_n(x) u_n''(\xi) u(\xi) \, d\xi = - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} u_n(x) u_n(\xi) u''(\xi) \, d\xi = \\ &= \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) u_n(\xi) Au(\xi) \, d\xi = \int_0^{\pi} k(x, \xi) Au(\xi) \, d\xi, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

## У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Показать, что функция Грина для оператора  $H = -D^2$ ,  $u(0) = u(\pi) = 0$ , равна

$$k(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x(\pi - \xi)}{\pi} & (0 \leq x \leq \xi), \\ \frac{(\pi - x)\xi}{\pi} & (\xi \leq x \leq \pi). \end{cases}$$

2. Показать, что функция Грина для оператора  $H = -D^2$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u'(1) = 0$ , равна

$$k(x, \xi) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq \xi), \\ \xi & (\xi \leq x \leq 1). \end{cases}$$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

По поводу изложенного выше вывода функции Грина из «физических соображений» с последующей проверкой см. Курант и Гильберт [1]. Относительно функции Грина как бесконечного ряда см. Ароншайн [5], а также Бергман и Шиффер [1]. Исторические сведения относительно функции Грина см. в книге Келлога [1].

**2. Абстрактное пополнение. Гильбертово пространство.** До сих пор мы рассматривали пространства  $\mathfrak{F}^{(2)}$  или  $\mathfrak{F}_A^{(2)}$  функций класса  $C^{(2)}$  со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_a^b u(x) \cdot v(x) dx \quad \text{или} \quad (u, v)_A = - \int_a^b H u(x) \cdot v(x) dx.$$

Эти пространства не являются полными, что, как мы видели (гл. IV, п. 10), приводит к некоторым трудностям. Поэтому мы сейчас рассмотрим различные методы пополнения метрического пространства, которое будем обозначать через  $\mathfrak{F}$ , присоединяя к  $\mathfrak{F}$  некоторые дополнительные элементы, для которых надлежащим образом определено скалярное произведение. В результате мы получим более широкое пространство  $\overline{\mathfrak{F}}$ , называемое *пополнением*  $\mathfrak{F}$ , которое уже будет полным и будет содержать  $\mathfrak{F}$  в качестве плотного подмножества.

Первый из рассматриваемых нами методов носит название *абстрактного* пополнения (см., например, Люстерник и Соболев [1]\*). Он состоит в следующем. Пусть  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  — последовательность Коши элементов  $\mathfrak{F}$ , не имеющая в  $\mathfrak{F}$  предела. Попытаемся определить новый элемент  $u$  в искомом пространстве  $\overline{\mathfrak{F}}$ , который был бы пределом последовательности  $\{u_n\}$ . В качестве такого элемента  $u$  мы можем взять саму последовательность  $\{u_n\}$ . Если две последовательности  $\{u_n\}$  и  $\{v_n\}$  элементов  $\mathfrak{F}$

бесконечно близки, т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - v_n\| = 0$ , то мы будем счи-

тать, что они представляют один и тот же элемент  $u \in \overline{\mathfrak{F}}$ . Две такие последовательности мы называем *эквивалентными* и в качестве элемента  $u$  берем целый класс эквивалентных последовательностей. Для такого элемента  $u$  можно ввести следующее обозначение:  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ , где  $\{u_n\}$  — одна из определяющих  $u$  эквивалентных последовательностей. Условимся также говорить, что элемент  $v$  неполного пространства  $\mathfrak{F}$  определяется последовательностью  $\{v_n\}$ , если  $\{v_n\}$  сходится к  $v$ .

Превратим множество  $\overline{\mathfrak{F}}$  в линейное метрическое пространство, определив линейные операции и скалярное произведение следующим образом:

$$cu = \lim (cu_n), (u + v) = \lim (u_n + v_n), (u, v) = \lim (u_n, v_n),$$

где  $c$  — произвольное вещественное число, а  $\{u_n\}$  и  $\{v_n\}$  — любые последовательности элементов из  $\mathfrak{F}$ , определяющие  $u$  и  $v$ . Нетрудно показать, используя неравенство треугольника, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v_n)$  всегда существует и что всякая последовательность Коши элементов  $\overline{\mathfrak{F}}$  имеет предел, принадлежащий  $\overline{\mathfrak{F}}$ .

Таким образом, пространство  $\overline{\mathfrak{F}}$  является *полным*, т. е. обладает следующим свойством (ср. с тремя свойствами, рассмотренными в гл. I, п. 4, и в гл. IV, п. 6):

**Свойство 4.** Любая последовательность Коши элементов  $\overline{\mathfrak{F}}$  сходится к некоторому элементу  $\overline{\mathfrak{F}}$ , т. е. если последовательность  $\{u_n\} \in \overline{\mathfrak{F}}$  такова, что  $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\| = 0$ , то существует элемент  $u \in \overline{\mathfrak{F}}$ , такой, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\| = 0$ .

Пространство, обладающее перечисленными выше свойствами 1, 2 и 4, часто называют *гильбертовым пространством*. Если мы присоединим к этим свойствам свойство 3, сформулированное в гл. IV, то пространство будет иметь бесконечную размерность; тем самым исключаются пространства, описанные в гл. I. Пополнение  $\overline{\mathfrak{F}}^{(2)}$  пространства  $\mathfrak{F}^{(2)}$  обладает следующим важным дополнительным свойством (см. упражнение к этому пункту):

**Свойство 5.** Пространство  $\overline{\mathfrak{F}}$  *сепарабельно*, т. е. существует последовательность  $\{u_n\}$  элементов  $\overline{\mathfrak{F}}$ , всюду плотная в  $\overline{\mathfrak{F}}$ ; другими словами, для любого  $v \in \overline{\mathfrak{F}}$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует такой элемент  $u_n \in \{u_n\}$ , что  $\|u_n - v\| < \varepsilon$ .

В гл. VIII мы докажем, что эти пять свойств образуют полную систему аксиом. В этой книге термин «гильбертово пространство» относится только к такому (по существу единственному) пространству, удовлетворяющему этим пяти аксиомам.

## У П Р А Ж Н Е Н И Е

1. Назовем функцию  $f(x)$  *рациональной ступенчатой*, если  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , за исключением конечного множества рациональных точек  $x$ , а в промежутках непрерывности принимает постоянные рациональные значения. Используя такие функции, доказать, что  $\overline{\mathfrak{F}}^{(2)}$  сепарабельно.

**3. Функциональное пополнение.** Только что рассмотренное абстрактное пополнение неудобно для дальнейшего изложения, поскольку присоединенные элементы, являющиеся классами эквивалентных функциональных последовательностей, не являются объектами той же природы, что и исходные элементы  $\mathfrak{F}$ , т. е. функциями, определенными на интервале  $[a, b]$ . Этот факт явится источником трудностей, когда нам нужно будет сравнивать между собой различные подпространства, как того требуют вариационные методы.

Проанализируем эту ситуацию более тщательно. В приложениях вариационных методов к задачам о колебании непрерывных систем мы имеем дело с двумя неполными пространствами  $\mathfrak{R}$  и  $\mathfrak{R}^{(0)}$ , из которых ни одно не содержится в другом. Примером могут служить пространство  $\mathfrak{R}$  функций, удовлетворяющих заданным краевым условиям, и пространство  $\mathfrak{R}^{(0)}$  функций, удовлетворяющих естественным краевым условиям. Допустим, что мы желаем пополнить эти пространства таким образом, чтобы  $\overline{\mathfrak{R}^{(0)}} \supset \overline{\mathfrak{R}}$ ; такое пополнение используется в методе Вайнштейна. Если бы мы осуществили абстрактное пополнение, то не смогли бы сравнить между собой  $\overline{\mathfrak{R}^{(0)}}$  и  $\overline{\mathfrak{R}}$ , так как последовательности Коши функций из  $\mathfrak{R}$ , не принадлежащих пространству  $\mathfrak{R}^{(0)}$ , не будут принадлежать  $\overline{\mathfrak{R}^{(0)}}$ . Наши исходные неполные пространства являются функциональными, т. е. пространствами, элементами которых являются функции, и поскольку нам нужно сравнивать между собой пополнения этих пространств, было бы желательно, чтобы эти пополнения также были бы функциональными пространствами. Если это имеет место, т. е. если присоединенные элементы также являются функциями, мы будем называть такое пополнение *функциональным* при условии, что норма функции  $u \in \mathfrak{F}^{(2)}$  и ее значения  $u = u(x)$  в точках  $x \in [a, b]$  связаны определенным соотношением (см. определение ниже). Это соотношение гарантирует, что из *сходимости по норме* следует *сходимость в каждой точке*, т. е. что последовательность



$\{u_n\}$ , сходящаяся в метрике пополненного пространства, будет также сходиться в каждой точке области определения функций  $u_n$ .

*Функциональное пополнение* неполного функционального пространства  $\mathfrak{F}$  определяется как *пополнение с помощью присоединения новых функций*; при этом должно выполняться следующее условие: для любой точки  $x$  существует число  $M_x$ , такое, что если последовательность  $\{u_n\}$  сходится в  $\overline{\mathfrak{F}}$ , т. е. если существует функция  $u \in \overline{\mathfrak{F}}$ , для которой  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0$ , то

$$|u_n(x) - u(x)| \leq M_x \|u_n - u\|$$

для любого  $x$  из области определения функций пространства  $\overline{\mathfrak{F}}$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Теория функционального пополнения (и псевдофункционального пополнения; см. далее) развита Ароншайном; см. Ароншайн и Смит [2].

**4. Полное пространство  $\mathfrak{Q}^{(2)}$ . Интеграл Лебега. Пространство  $\mathfrak{Q}_2^{(2)}$ .** Наиболее распространенный метод пополнения функционального пространства опирается на теорию интегрирования Лебега. Он приводит к псевдофункциональному пополнению, которое определяется в следующем пункте. В этом случае присоединяемые элементы уже являются не функциями точки, а некоторыми классами эквивалентных функций (см. далее), а пополненное пространство обладает тем свойством, что любая сходящаяся по норме последовательность содержит подпоследовательность, которая сходится поточечно *почти всюду*. Для того чтобы пояснить эти утверждения, дадим краткий набросок теории интегрирования Лебега.

Прежде всего мы рассмотрим случай (однозначной) функции  $u(x)$ , ограниченной на замкнутом интервале  $[a, b]$ ; случай неограниченной функции рассматривается далее. Тогда значения функции  $u(x)$  принадлежат некоторому конечному отрезку  $[c, d]$ , расположенному на вертикальной оси  $y$ . Разобьем отрезок  $[c, d]$  на  $n$  интервалов  $[y_0 = c, y_1], [y_1, y_2], \dots, [y_{i-1}, y_i], \dots, [y_{n-1}, y_n = d]$  и в каждом интервале  $[y_{i-1}, y_i]$  выберем произвольное число  $\tilde{y}_i$ . Обращаем внимание читателя на отличие от интеграла Римана, или  $R$ -интеграла, который определяется в элементарном курсе интегрального исчисления; это отличие состоит в том, что в интеграле Римана разбивается горизонтальный отрезок  $[a, b]$ . Рассмотрим теперь множество  $s_i$  точек  $x_i$  оси  $x$ , для которых  $u(x_i)$  заключено в  $i$ -м промежутке  $[y_{i-1}, y_i]$ . Если  $u(x)$  — непрерывная кусочно монотонная функция, то  $s_i$  состоит из конечного числа замкнутых интервалов, так что естественно

говорить о мере  $m_i$  точечного множества  $s_i$ , определяя ее как сумму длин интервалов, из которых состоит  $s_i$ . Если мы теперь устремим  $n$  к бесконечности так, чтобы длины промежутков  $[y_{i-1}, y_i]$  равномерно стремились к нулю, то, как доказывается в любом учебном пособии (см., например, Мак-Шейн [1], а также Натансон [1]\* и Колмогоров и Фомин [1]\*), независимо от выбора разбиения и чисел  $\tilde{y}_i$  сумма  $\sum_{i=1}^n \tilde{y}_i m_i$  будет стремиться к определенному конечному числу, которое называется *интегралом Лебега*, или  $L$ -интегралом,  $u(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

В случае если  $u(x)$  не является непрерывной и кусочно монотонной, определим меру точечного множества  $s_i$  следующим образом. Пусть  $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$  — некоторая конечная или бесконечная последовательность (возможно, пересекающихся) интервалов оси  $x$ , таких, что каждая точка множества  $s_i$  содержится по крайней мере в одном из интервалов  $I_n$ . Обозначим через  $m_i$  точную верхнюю границу сумм длин интервалов для всевозможных таких последовательностей. (Обращаем внимание на отличие от  $R$ -интеграла, где число интервалов оси  $x$  всегда конечно.) Тогда  $m_i$  называется *внешней мерой* точечного множества  $s_i$ . Но для того, чтобы доказать, что сумма  $\sum \tilde{y}_i m_i$  по-прежнему будет сходиться, необходимо предположить, что структура множества  $s_i$  не является чрезмерно сложной, а именно если длина интервала  $[a, b]$  равна  $l$ , а внешняя мера множества  $s'_i$ , дополнительного к  $s_i$ , равна  $m'_i$ , то  $m_i + m'_i = l$ . В этом случае множество  $s_i$  называется *измеримым*, а  $m_i$  — его *мерой*. (В учебных пособиях приводятся примеры, в которых множества  $s_i$  и  $s'_i$  переплетаются столь сложным образом, что  $m + m' > l$ .) Ясно, что мы можем дать аналогичные определения для пространства двух или большего числа измерений, используя вместо интервалов параллелепипеды.

Говорят, что функция  $u(x)$  *измерима*, если любое множество  $s_i$ , связанное с функцией  $u(x)$  указанным выше образом, является измеримым. Можно доказать, что если функция измерима и ограничена, то сумма  $\sum \tilde{y}_i m_i$  будет по-прежнему сходиться. Определенное таким образом конечное число мы снова называем  $L$ -интегралом  $u(x)$  и говорим, что функция  $u$  является  *$L$ -интегрируемой*. Соответствующим образом определяются и кратные интегралы для функций нескольких переменных.

Если  $u(x)$  не ограничена, то мы сначала выбираем два числа  $c$  и  $d$ ,  $c < d$ , и определяем функцию  $u_{cd}(x)$ , полагая

$$u_{cd}(x) = \begin{cases} c, & \text{если } u(x) < c, \\ u(x), & \text{если } c \leq u(x) \leq d, \\ d, & \text{если } u(x) > d. \end{cases}$$

Тогда  $u(x)$  называется  $L$ -интегрируемой, если любая функция  $u_{cd}(x)$  является  $L$ -интегрируемой и предел

$$\lim_{c \rightarrow -\infty, d \rightarrow +\infty} \int_a^b u_{cd}(x) dx = \int_a^b u(x) dx$$

существует и конечен.

На основании этих замечаний кажется весьма вероятным, и это доказывается в учебниках, что любая  $R$ -интегрируемая функция будет также  $L$ -интегрируемой, поэтому с этого момента все интегралы в тексте можно понимать как интегралы в смысле Лебега.

Поскольку естественно положить  $\|u\|^2 = \int_a^b u^2 dx$ , мы будем рас-

сматривать только такой класс функций, любая функция  $u$  которого измерима, а  $u^2$  является  $L$ -интегрируемой. Для любых двух

элементов  $u$  и  $v$  этого класса положим  $(u, v) = \int_a^b uv dx$  (существо-

вание этого интеграла нетрудно доказать). Мы покажем далее, что этот класс функций, содержащий  $C^{(2)}$  в качестве плотного подмножества, является полным.

Итак, мы хотели бы доказать, что класс функций  $u$ , для которых  $u^2$  является  $L$ -интегрируемой функцией, является искомым пополнением упомянутого выше функционального пространства  $\mathfrak{F}$ .

Но здесь есть следующая трудность. Условимся говорить, что функция  $u(x)$  обладает некоторым свойством *почти всюду* на  $[a, b]$ , если  $u(x)$  обладает этим свойством во всех точках  $[a, b]$ , за исключением точек некоторого множества меры нуль. Простым примером множества меры нуль, которое является плотным в данном интервале, как нетрудно доказать, может служить множество рациональных чисел этого интервала. Легко проверить, что функция, равная нулю почти всюду, является нулевым элементом пополненного пространства, и, следовательно, это пространство не может быть гильбертовым, так как имеет несколько нулевых элементов.

Эту трудность можно обойти следующим образом. Ясно, что если  $u(x)$  и  $v(x)$  являются  $L$ -интегрируемыми и почти всюду

равны друг другу, то  $\int_a^b u(x) dx = \int_a^b v(x) dx$ . Условимся назы-

вать такие функции *эквивалентными* и элементом искомого пространства будем считать целый класс эквивалентных функций. Такое пространство, если только оно полно, будет гильбертовым. Мы его будем обозначать через  $\mathfrak{L}^{(2)}$ .

Тот факт, что  $\mathfrak{Q}^{(2)}$  — полное пространство, составляет содержание знаменитой *теоремы Рисса — Фишера*. Утверждение теоремы является простым следствием (см. ниже) следующей леммы: каждая последовательность Коши функций  $\{u_n\} \in \mathfrak{Q}^{(2)}$  содержит подпоследовательность, которая сходится почти всюду на  $[a, b]$ . В следующем пункте мы положим это свойство в основу определения *псевдофункционального пополнения*.

Доказательство леммы проводится следующим образом. Так как  $\{u_n\}$  — последовательность Коши, то для любого  $\varepsilon$  можно выбрать  $N = N(\varepsilon)$ , такое, что

$$\|u_m - u_n\|^2 < \varepsilon \quad (m, n > N).$$

Выберем далее последовательность положительных целых чисел  $\{N_p\}$ , такую, чтобы  $N_{p+1} > N_p$  и  $N_p > N(2^{-3p})$ . Мы утверждаем, что  $\{u_{N_p}\}$  будет искомой подпоследовательностью  $\{u_n\}$ .

Чтобы доказать это, введем в рассмотрение множества  $D_p$ ,  $p = 1, 2, 3, \dots$ , состоящие из точек  $x \in [a, b]$ , для которых

$$|u_{N_{p+1}} - u_{N_p}| \geq 2^{-p}.$$

Тогда, поскольку

$$\|u_{N_{p+1}} - u_{N_p}\|^2 = \int_a^b |u_{N_{p+1}} - u_{N_p}|^2 dx \leq 2^{-3p},$$

мера  $m(D_p) < 2^{-p}$  для всех таких  $p$ , что  $2^p > b - a$ . Таким образом, обозначая через  $U_p$  объединение множеств  $D_p, D_{p+1}, D_{p+2}, \dots$  мы получим

$$m(U_p) < 2^{-p} + 2^{-(p+1)} + \dots = 2^{-(p-1)},$$

откуда следует, что  $m(U_\infty) = 0$ , где  $U_\infty$  — пересечение множеств  $U_p$ , т. е. множество, каждая точка которого принадлежит любому  $U_p$ . Но любая точка  $x$ , не принадлежащая  $U_\infty$ , не принадлежит и  $D_p$  при  $p$ , больших некоторого  $P$ ; другими словами,

$$|u_{N_{p+1}}(x) - u_{N_p}(x)| < 2^{-p} \quad (p > P),$$

так что  $\{u_{N_p}\}$  сходится почти всюду (т. е. за исключением точек множества  $U_\infty$ ) к некоторой функции  $u(x)$ ; лемма доказана.

Полнота пространства  $\mathfrak{Q}^{(2)}$  теперь доказывается просто. Действительно, так как

$$\int (u_{N_{p+k}} - u_{N_p})^2 dx < \varepsilon \quad (k > 0, N_p > N(\varepsilon)),$$

то с помощью предельного перехода (возможность такого перехода можно легко оправдать) получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int (u_{N_{p+k}} - u_{N_p})^2 dx = \int (u - u_{N_p})^2 dx < \varepsilon,$$

что и доказывает полноту  $\mathcal{Q}^{(2)}$ . Отметим, что значение теории интегрирования Лебега обусловлено главным образом теоремой Рисса — Фишера.

Обобщение на функции двух или большего числа переменных не представляет труда. Рассмотрим, в частности, пространство  $\mathcal{Q}_2^{(2)}$ , состоящее из измеримых функций двух переменных  $u(x, \xi)$ , таких, что  $u^2$  является  $L$ -интегрируемой функцией по двумерной области  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq \xi \leq b$ , со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_a^b \int_a^b u(x, \xi) v(x, \xi) dx d\xi.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться легко проверяемым фактом, что если  $\{\varphi_i(x)\}$  и  $\{\varphi_j(\xi)\}$  — две п.о.н.с. функций одной переменной в пространстве  $\mathcal{Q}^{(2)} = \mathcal{Q}_1^{(2)}$ , то  $\varphi_{ij}(x, \xi) = \varphi_i(x) \times \varphi_j(\xi)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots$ , образуют п.о.н.с. в  $\mathcal{Q}_2^{(2)}$ .

## У П Р А Ж Н Е Н И Е

1. Доказать сформулированное выше утверждение, что если  $\{\varphi_i(x)\}$  и  $\{\varphi_j(\xi)\}$  — п.о.н.с. в  $\mathcal{Q}_1^{(2)}$ , то  $\{\varphi_{ij}(x, \xi)\}$  — п.о.н.с. в  $\mathcal{Q}_2^{(2)}$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Теория интегрирования Лебега изложена во многих книгах; см., например, Мак-Шейп [1], а также Рисс и Секефальви-Надь [1]. По поводу доказательства теоремы Рисса — Фишера см. Стоун [1], имеющиеся там ссылки и упомянутую выше книгу Рисса и Секефальви-Надя.

**5. Псевдофункциональное пополнение.** Подводя итог изложенным выше результатам, можно дать следующее описание полного пространства  $\mathcal{Q}^{(2)}$ . Мы задаемся некоторым классом  $M$  подмножеств интервала  $[a, b]$  (в данном частном случае  $M$  является классом множеств нулевой лебеговой меры). Элементами полного пространства являются классы эквивалентных функций, определенных на  $[a, b]$ ; две функции считаются эквивалентными, если они равны всюду, за исключением некоторого множества точек, принадлежащего  $M$ . При этом мы предполагаем, что  $M$  обладает двумя свойствами, а именно: *счетной аддитивностью* (т. е. множество, являющееся объединением последовательности принадле-

жащих  $M$  множество, также принадлежит  $M$ ) и наследственностью (т. е. любое подмножество множества, принадлежащего  $M$ , само принадлежит  $M$ ).

Дадим теперь общее определение псевдофункционального пополнения. Мы говорим, что полное пространство  $\overline{\mathfrak{F}}$  является псевдофункциональным пополнением функционального пространства  $\mathfrak{F}$  относительно класса  $M$  подмножеств области определения функций из  $\mathfrak{F}$ , обладающего указанными выше свойствами, если  $\overline{\mathfrak{F}}$  удовлетворяет следующим условиям (ср. с определением функционального пополнения, данным в п. 3):

i) элементы  $\overline{\mathfrak{F}}$  являются классами эквивалентных функций, определенных почти всюду (т. е. за исключением множества, принадлежащего классу  $M$ ) в данной области; при этом две функции считаются эквивалентными тогда и только тогда, когда они совпадают почти всюду в своей области определения;

ii) любая функция  $u \in \mathfrak{F}$  принадлежит также и  $\overline{\mathfrak{F}}$ ; более точно, любая функция  $u \in \overline{\mathfrak{F}}$  принадлежит одному из классов эквивалентности  $\overline{\mathfrak{F}}$ ;

iii) подпространство  $\mathfrak{F}$  плотно в  $\overline{\mathfrak{F}}$ ;

iv) любая последовательность  $\{u_n\}$ , сходящаяся по норме к функции  $u \in \overline{\mathfrak{F}}$ , содержит подпоследовательность, сходящуюся почти всюду к  $u$ .

Например, как было доказано выше,  $\mathfrak{L}^{(2)}$  является псевдофункциональным пополнением  $\mathfrak{F}^{(2)}$ .

**6. Выбор нормы, обеспечивающий функциональное пополнение.** В предыдущих пунктах мы видели, что если определить

квадрат нормы по формуле  $\mathfrak{B}(u) = \int_a^b u^2 dx = \|u\|^2$ , то мы

приходим к псевдофункциональному пополнению. Однако, как мы уже указывали, в вариационных методах предпочтительнее иметь дело с функциональным пополнением, если только его можно построить. Посмотрим теперь, чего мы достигнем, определив скалярное произведение  $(u, v)_A$  формулой  $\mathfrak{A}(u, v) = \int_a^b u'v' dx$ . Будем обозначать функциональное пространство

с такой нормой по-прежнему через  $\mathfrak{F}_A^{(2)}$ . В этом случае существование функционального пополнения сразу же следует из того, что найденная выше функция Грина  $k(x, \xi)$  является воспроизводящим ядром. Действительно, если  $v$  — любой элемент  $\mathfrak{F}_A^{(2)}$ ,

то при фиксированном  $x$  мы получаем с помощью неравенства Коши — Буняковского

$$|v(x)| = |(k(x, \xi), v(\xi))_A| \leq \|k_x\|_A \|v\|_A,$$

где  $\|k_x\|_A$  является нормой  $k(x, \xi)$  как функции от  $\xi$  в  $\mathfrak{F}_A^{(2)}$ . (Здесь следует отметить, что, хотя  $\partial k(x, \xi)/\partial \xi$  не существует в единственной точке  $x = \xi$ , скалярное произведение  $(k(x, \xi), k(x, \xi))_A$ , которое в этом примере равно  $\int (\partial k/\partial \xi)^2 dx$  ( $H = A = -D^2$ ), все равно имеет смысл. Обсуждение этого вопроса в более общей постановке см. в статье Ароншайна и Смита [2].)

В силу воспроизводящего свойства ядра  $k(x, \xi)$  имеем

$$\|k_x\|_A^2 = (k(x, \xi), k(x, \xi))_A = k(x, x),$$

так что

$$|v(x)| \leq k^{1/2}(x, x) \|v\|_A,$$

и в качестве числа  $M_x$ , фигурирующего в определении функционального пополнения (п. 3, стр. 162), можно взять  $k^{1/2}(x, x)$ .

Таким образом, функциональное пополнение  $\mathfrak{F}_A^{(2)}$  мы можем построить следующим образом. Применяя полученную оценку к функции  $v = u_m - u_n$ , где  $\{u_n\}$  — последовательность Коши в  $\mathfrak{F}_A^{(2)}$ , имеем

$$0 \leq \lim_{m, n \rightarrow \infty} |u_m(x) - u_n(x)| \leq k^{1/2}(x, x) \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|u_m - u_n\|_A = 0$$

для любого  $x$ , откуда следует, что последовательность вещественных чисел  $u_n(x)$  является последовательностью Коши и потому сходится к некоторому числу  $u(x)$ . Искомое пространство  $\overline{\mathfrak{F}_A^{(2)}}$  состоит из всех функций, полученных таким предельным переходом; нетрудно проверить, что оно обладает всеми требуемыми свойствами, а именно

i) сходимость по норме в  $\overline{\mathfrak{F}_A^{(2)}}$  влечет поточечную сходимость всюду на  $[a, b]$ ;

ii)  $\overline{\mathfrak{F}_A^{(2)}}$  — полное пространство;

iii)  $\mathfrak{F}_A^{(2)}$  плотно в  $\overline{\mathfrak{F}_A^{(2)}}$ ;

iv) для любого фиксированного  $x \in [a, b]$  функция  $k(x, \xi)$ , рассматриваемая как функция  $k_x(\xi)$  от  $\xi$ , принадлежит пространству  $\overline{\mathfrak{F}_A^{(2)}}$ , и  $(k(x, \xi), u(\xi))_A = u(x)$  для всех  $u \in \overline{\mathfrak{F}_A^{(2)}}$ , так что  $k(x, \xi)$  является *воспроизводящим ядром* для полного пространства  $\overline{\mathfrak{F}_A^{(2)}}$ .

Заметим, что и в общем случае, если  $\overline{\mathfrak{F}}_A^{(2)}$  — гильбертово пространство, элементы которого суть функции  $v(x)$ , определенные на отрезке  $[a, b]$  и удовлетворяющие условию

$$|v(x)| \leq M_x \|v\|,$$

$\overline{\mathfrak{F}}_A^{(2)}$  обязательно обладает воспроизводящим ядром. В самом деле, если мы зафиксируем точку  $x$ , то  $v(x)$  является ограниченным линейным функционалом от  $v$ . Тогда по теореме Рисса об общем виде линейного функционала (гл. I, п. 6; в настоящем случае эта теорема доказывается точно так же) существует некоторая функция  $k(x, y)$ , такая, что  $v(x) = (k(x, y), v(y))_A$  для любого  $v$ . Последнее равенство показывает, что  $k(x, \xi)$  является искомым воспроизводящим ядром (см. Ароншайн [5] и Ароншайн и Смит [2]).

Воспроизводящее свойство  $k(x, \xi)$  допускает следующее важное обобщение. Пусть  $\mathfrak{K}$  — некоторое функциональное пространство, содержащее  $\overline{\mathfrak{F}}_A^{(2)}$ , т. е.  $\mathfrak{K} \supset \overline{\mathfrak{F}}_A^{(2)}$ . Тогда для любой функции  $v(x) \in \mathfrak{K}$  имеем

$$(k(x, y), v(y))_A = f(x),$$

где  $f$  — проекция  $v$  на  $\overline{\mathfrak{F}}_A^{(2)}$ . В самом деле, согласно определению проекции,  $v = f + g$ , где  $g$  ортогональна  $\overline{\mathfrak{F}}_A^{(2)}$ , а  $k(x, y)$  как функция  $y$  принадлежит  $\overline{\mathfrak{F}}_A^{(2)}$ , так что

$$(k(x, y), v) = (k(x, y), f + g) = (f, k(x, y)) = f;$$

последнее равенство следует из воспроизводящего свойства.

**7. Представление функций полного пространства с помощью интеграла Лебега.** Пока что мы очень мало знаем о свойствах функций из  $\overline{\mathfrak{F}}_A^{(2)}$ , присоединяемых при пополнении. Для последующих приложений нам необходимы некоторые сведения относительно дифференцируемости этих функций. Мы получим их, воспользовавшись специальным представлением функций из  $\overline{\mathfrak{F}}_A^{(2)}$ . Не будем проводить подробного доказательства; читатель может найти его в работе Ароншайна и Смита [2]. Кроме того, для простоты изложения мы будем рассматривать только частный случай  $H = -D^2$ , хотя рассуждения остаются в силе и для общих операторов второго порядка и даже для операторов с частными производными, которые будут введены в следующей главе.

Для функций исходного неполного пространства  $\mathfrak{F}_A^{(2)}$  справедлива формула

$$u(x) = - \int_a^b k(x, \xi) u''(\xi) d\xi = \int_a^b k'_\xi(x, \xi) u'(\xi) d\xi.$$



Рассмотрим теперь пространство  $\overline{\mathfrak{Y}}_A$  функций, имеющих вид

$$\int_a^b k(x, \xi) w(\xi) d\xi, \text{ при этом мы уже не требуем, чтобы } w(\xi)$$

была производной некоторой функции  $u \in C^{(2)}$ , а требуем только, чтобы  $w \in \mathfrak{Q}^{(2)}$ . (Напомним, что  $w$  принадлежит  $\mathfrak{Q}^{(2)}$ , если  $w$  измерима, а  $w^2$  является  $L$ -интегрируемой.) Тогда из свойств интеграла Лебега следует (подробное доказательство см. в работе Ароншайна и Смита [2]), что это пространство полно и содержит  $\overline{\mathfrak{Y}}_A^{(2)}$  в качестве плотного подмножества. Следовательно, новое пространство  $\overline{\mathfrak{Y}}_A$  изоморфно и изометрично определенному выше пространству  $\overline{\mathfrak{Y}}_A^{(2)}$ , поскольку все пополнения  $\overline{\mathfrak{Y}}_A^{(2)}$ , как легко видеть, изоморфны и изометричны абстрактному пополнению, а значит, и друг другу.

Таким образом, любую функцию  $u \in \overline{\mathfrak{Y}}_A^{(2)}$  можно представить в виде

$$u(x) = \int_0^\pi k'_\xi(x, \xi) w(\xi) d\xi,$$

где  $w(\xi)$  — некоторая функция из  $\mathfrak{Q}^{(2)}$ . Используя выражение для  $k(x, \xi)$

$$k(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x(\pi - \xi)}{\pi} & (0 \leq x \leq \xi), \\ \frac{(\pi - x)\xi}{\pi} & (\xi \leq x \leq \pi), \end{cases}$$

получаем

$$u(x) = \frac{\pi - x}{\pi} \int_0^x w(\xi) d\xi - \frac{x}{\pi} \int_x^\pi w(\xi) d\xi,$$

откуда видно, что  $u(x)$  непрерывна всюду на  $[0, \pi]$ . Кроме того, за исключением множества точек  $x$  нулевой меры, мы имеем (см. Натансон [1, стр. 221] \*)

$$u'(x) = w(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi w(\xi) d\xi,$$

так что  $u'(x)$  существует почти всюду.

Итак, каждая функция  $u \in \overline{\mathfrak{Y}}^{(2)}$  непрерывна. Отсюда, используя вычисления, проведенные в п. 1, мы можем получить следующий важный результат:  $Ku \in C^{(2)}$  для любой функции  $u \in \overline{\mathfrak{Y}}_A^{(2)}$ .

Значение этого результата состоит в том, что любая собственная функция  $u$  оператора  $K$ , будучи равной  $Ku/\lambda$ , принадлежит

$C^{(2)}$ , и потому ее можно рассматривать как решение исходного дифференциального уравнения  $-u''(x) = \lambda u$ . (Более подробно аналогичные результаты обсуждаются в работах Фридрихса [1], [2] и т. д.)

**8. Стабильные и нестабильные краевые условия.** Представление  $u(x)$  в виде

$$u(x) = \int_a^b k_{\xi}^{\pm}(x, \xi) w(\xi) d\xi$$

упрощает исследование вопроса о *стабильных* и *нестабильных* краевых условиях. До сих пор мы предполагали, что функции неполного пространства  $\mathfrak{F}_A^{(2)}$  удовлетворяют условиям  $u(a) = u(b) = 0$ . Поскольку  $k_{\xi}^{\pm}(a, \xi) = k_{\xi}^{\pm}(b, \xi) = 0$  при всех  $\xi$ , ясно, что любая функция  $u$ , принадлежащая пополнению  $\overline{\mathfrak{F}_A^{(2)}}$ , также удовлетворяет этим же условиям. Условия, сохраняющиеся в процессе пополнения, называются *стабильными*. Но если рассмотреть функции из  $C^{(2)}$ , удовлетворяющие краевым условиям  $u'(a) = u'(b) = 0$  (соответствующее функциональное пространство мы обозначим через  $\mathfrak{G}^{(2)}$ ), то легко показать (см. ниже), что функции из  $\overline{\mathfrak{G}^{(2)}}$  уже не будут удовлетворять этим условиям. Такие условия не сохраняются при пополнении и потому называются *нестабильными*.

Нестабильность условий  $u'(a) = u'(b) = 0$  можно легко установить, построив пример функции  $u \in C^{(2)}$ , которая не удовлетворяет этим условиям, но принадлежит  $\overline{\mathfrak{G}^{(2)}}$ , поскольку она является пределом последовательности Коши функций  $\{u_n\} \in \mathfrak{G}^{(2)}$ . Простейшим примером является многочлен  $u = x^2 - 1$  на отрезке  $[-1, 1]$ , для которого

$$-u'(-1) = u'(1) = 2 \neq 0.$$

Действительно, рассмотрим монотонную последовательность чисел  $\{\varepsilon_n\}$ , стремящуюся к нулю ( $0 < \varepsilon_n < 1$ ), и определим  $u_n$  по формуле

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x) = x^2 - 1 & (-1 + \varepsilon_n < x < 1 - \varepsilon_n), \\ P_4(x) & (1 - \varepsilon_n \leq x \leq 1), \\ P_4(-x) & (-1 \leq x \leq -1 + \varepsilon_n), \end{cases}$$

где  $P_4(x)$  — многочлен четвертой степени, который определяется из следующих условий (полезно сделать чертеж):

$$\begin{aligned} P_4(1) = P_4'(1) = 0, & \quad P_4(1 - \varepsilon_n) = u(1 - \varepsilon_n), \\ P_4'(1 - \varepsilon_n) = u'(1 - \varepsilon_n), & \quad P_4''(1 - \varepsilon_n) = u''(1 - \varepsilon_n). \end{aligned}$$

Несложное вычисление показывает, что  $\{u_n\}$  сходится к  $u$ , поскольку

$$\|u - u_n\|^2 = 2 \int_{1-\varepsilon}^1 (u' - u'_n)^2 dx < k\varepsilon_n$$

для некоторого  $k$ , не зависящего от  $n$ , например  $k = 400$ .

Наконец, мы видим, что  $\overline{\mathfrak{F}}^{(2)} \subset \overline{\mathfrak{E}}^{(2)}$ , так как любую функцию  $u(x)$ , удовлетворяющую условиям  $u(a) = u(b) = 0$ , можно аппроксимировать с помощью функций  $\{u_n\}$ , удовлетворяющих не только условиям  $u(a) = u(b) = 0$ , но также условиям  $u'(a) = u'(b) = 0$ .

Учитывая, что норма в обоих пространствах задается выражением

$$\|u\|^2 = \int_a^b u'^2 dx,$$

читатель легко построит нужную последовательность  $\{u_n\}$ , следуя данному выше образцу.

Отметим, что нестабильные краевые условия в точности совпадают с естественными условиями, которые были определены выше, — факт, имеющий фундаментальное значение для рассматриваемых нами методов. В самом деле, как уже отмечалось выше, мы будем иметь дело с неполными пространствами  $\mathfrak{R}$  и  $\mathfrak{R}^{(0)}$ , ни одно из которых не содержит другое, поскольку функции из  $\mathfrak{R}$  удовлетворяют заданным условиям, в то время как функции из  $\mathfrak{R}^{(0)}$  удовлетворяют естественным краевым условиям. Таким образом, если перейти к пополнениям  $\overline{\mathfrak{R}}$  и  $\overline{\mathfrak{R}}^{(0)}$ , то условия, которым удовлетворяли функции из  $\mathfrak{R}$ , сохраняются в  $\overline{\mathfrak{R}}$ , а естественные условия для  $\mathfrak{R}^{(0)}$  не сохраняются в  $\overline{\mathfrak{R}}^{(0)}$ , и мы получим включение  $\overline{\mathfrak{R}}^{(0)} \supset \overline{\mathfrak{R}}$ , как и требуется в вариационных методах. Аналоги этих результатов будут необходимы нам в более сложных задачах, рассматриваемых в следующих главах.

## КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ, МЕМБРАН И ПЛАСТИН

**1. Колебания стержня.** В предыдущей главе мы рассмотрели некоторые теоретические вопросы, связанные с задачей о колебаниях струны, с тем, чтобы пролить свет на более сложные задачи для стержней, мембран и пластин, к которым мы теперь переходим. Более общие задачи будут рассмотрены в гл. XI.

Мы начинаем с рассмотрения колебаний однородного стержня, концы которого находятся в точках  $x = a$  и  $x = b$ . При надлежащем выборе единиц измерения любая функция  $w(x, t)$ , описывающая возможное движение стержня, удовлетворяет дифференциальному уравнению четвертого порядка  $\partial^2 w / \partial t^2 + \partial^{(4)} w / \partial x^4 = 0$  (см., например, Вебстер [2], а также Тихонов и Самарский [1, стр. 142]\*).

Мы снова ищем решения (собственные колебания) в виде  $w(x, t) = u(x) f(t)$ . Поставляя это выражение для  $w$  в уравнение, получим

$$u f_t'' + u_x^{(4)} f = 0$$

или

$$u_x^{(4)} / u = f_t'' / f = \lambda,$$

где  $\lambda$  — некоторая постоянная, откуда  $u_x^{(4)} - \lambda u = 0$  и  $f_t'' + \lambda f = 0$ . Таким образом, если обозначить через  $H$  оператор четырехкратного дифференцирования  $D^4$ , то наша задача на собственные значения по-прежнему будет иметь вид  $(H - \lambda I) u = 0$ . Для того чтобы определить подходящие краевые условия, снова преобразуем выражение  $(Hu, v)$ , интегрируя по частям. В результате мы получим

$$(Hu, v) = \int_a^b u^{(4)} v \, dx = (u''' v - u'' v') \Big|_a^b + \int_a^b u'' v'' \, dx,$$

откуда видно, что оператор  $H = D^4$  является формально положительно определенным.

Таким образом, краевые условия, заданные и естественные (гл. IV, п. 13), должны быть такими, чтобы  $(uu''' - u'u'') \Big|_a^b = 0$ . Ясно, что оператор  $H$ , определенный с помощью дифференциального выражения  $D^4$ , при таких граничных условиях будет симметричным. Действительно, для любых допустимых функций  $u$  и  $v$  мы имеем

$$(Hu, v) = \int_a^b u^{(4)}v \, dx = \int_a^b u''v'' \, dx = (u, Hv).$$

Вариационная задача, для которой уравнение  $Hu - \lambda u = 0$  является уравнением Эйлера—Лагранжа, по-прежнему будет иметь вид  $\lambda = \min (Hu, u)/(u, u)$ . Последнее выражение можно записать также в виде

$$\lambda = \min \frac{\int_a^b (u'')^2 \, dx}{\int_a^b u^2 \, dx}.$$

Без существенных изменений переносятся на случай стержня и другие понятия и результаты, рассмотренные ранее для струны. Так, с помощью аналогичных рассуждений можно доказать теорему Рэля. Замечания относительно вынужденных колебаний и резольвенты остаются в силе и в этом случае. Для функции Грина зажатого стержня ( $0 \leq x \leq \pi$ ) можно получить следующее выражение (см., например, Коллатц [1, стр. 458]):

$$k(x, \xi) = \frac{1}{6\pi^3} x^2 (\xi - \pi)^2 (3\pi\xi - 2\xi x - \pi x) \quad (x \leq \xi);$$

при  $x \geq \xi$  переменные  $x$  и  $\xi$  нужно поменять местами. Поскольку функция Грина  $k(x, \xi)$  всюду конечна, остаются в силе все замечания относительно функционального пополнения. Если краевые условия не заданы, то говорят, что стержень *свободен*; естественные краевые условия в этом случае имеют вид

$$u''(0) = u''(\pi) = u'''(0) = u'''(\pi) = 0.$$

Если заданы условия  $u(0) = u(\pi) = 0$ , то говорят, что стержень *закреплен*; соответствующие естественные условия имеют вид  $u''(0) = u''(\pi) = 0$ . Если заданы условия  $u(0) = u'(0) = u(\pi) = u'(\pi) = 0$ , то говорят, что стержень *зжат*; в этом случае естественные условия отсутствуют. Задача на собственные значения для зажатого стержня имеет вид

$$u^{(4)} - \lambda u = 0, \quad u(0) = u'(0) = u(\pi) = u'(\pi) = 0.$$

Обозначая  $\lambda^{1/4}$  через  $\nu$ , получаем следующее характеристическое уравнение для собственных значений  $\lambda$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \operatorname{ch} \nu \pi & \operatorname{sh} \nu \pi & \sin \nu \pi & \cos \nu \pi \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh} \nu \pi & \operatorname{ch} \nu \pi & \cos \nu \pi & -\sin \nu \pi \end{vmatrix} = 2(1 - \cos \nu \pi \operatorname{ch} \nu \pi) = 0.$$

Положительные корни  $\nu_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , уравнения  $\cos \nu \pi \operatorname{ch} \nu \pi = 1$  можно найти графически или с помощью других численных методов; они имеют вид  $\nu_n = n + 1/2 + (-1)^{n-1} \varepsilon_n$ , где  $\varepsilon_1 < 0,007$ , и последовательность  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  достаточно быстро стремится к нулю.

Соответствующие собственные функции легко вычисляются, и их можно нормировать либо в метрике  $\|u\|^2 = \int_0^\pi u^2 dx$ , либо в метрике

$$\|u\|^2 = \int_0^\pi u^{(4)} u dx = \int_0^\pi (u'')^2 dx.$$

Если обозначить собственные функции во втором случае через  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ , то для функции Грина зажатого стержня  $H = D^4$ ,

$$u(0) = u'(0) = u(\pi) = u'(\pi) = 0,$$

будем иметь следующее выражение:

$$k(x, \xi) = u_1(x) u_1(\xi) + u_2(x) u_2(\xi) + \dots,$$

как и в случае струны.

## У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Вычислить собственные функции для зажатого стержня и нормировать их в метрике  $\|u\|^2 = \int_a^b (u'')^2 dx$ .

2. Вычислить собственные значения, собственные функции и функцию Грина для оператора  $H = D^4$  при следующих краевых условиях:

i) условия не заданы; свободный стержень;

ii)  $u(0) = u(\pi) = 0$ ; закрепленный стержень;

iii)  $u'(0) = u'(\pi) = 0$ ; стержень между двумя гладкими стенками.

В каждом случае найти естественные краевые условия. Заметьте, что  $\lambda = 0$  в некоторых случаях является собственным значением. Найдите кратность каждого собственного значения.

**2. Колебания мембраны.** В случае мембран и пластин, являющихся двумерными телами, мы будем иметь дело с уравнениями в частных производных.

Пусть в положении равновесия мембрана занимает область  $R$  горизонтальной  $(x, y)$ -плоскости, ограниченной кривой  $C$ . Функция  $w(x, y, t)$ , описывающая движение мембраны, должна удовлетворять уравнению (см., например, Курант и Гильберт [1])  $w_{xx} + w_{yy} - w_{tt} = 0$ . Мы по-прежнему будем искать решения (собственные колебания) вида  $w(x, y, t) = u(x, y) f(t)$ . Подставляя это выражение в уравнение и обозначая *лапласиан*  $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  через  $\Delta$ , мы получаем  $-\Delta u/u = -f_{tt}/f = \lambda$ , так что  $-\Delta u - \lambda u = 0$ .

Обозначая теперь оператор  $-\Delta$  через  $H$ , мы снова сможем записать нашу задачу в виде  $(H - \lambda I)u = 0$ . Преобразуя выражение  $(Hu, v)$  с помощью интегрирования по частям, получаем

$$(Hu, v) = - \int_R \int v \Delta u \, dx \, dy = \int_R \int (u_x v_x + u_y v_y) \, dx \, dy - \int_C v \frac{\partial u}{\partial n} \, ds,$$

где  $ds$  — элемент длины дуги кривой  $C$ , а  $\partial u/\partial n$  — производная по внешней нормали. Отсюда следует, что оператор  $H = -\Delta$  является формально положительно определенным.

Если определить теперь естественные краевые условия для оператора с частными производными  $H = -\Delta$  аналогично тому, как это было сделано в п. 13 гл. IV, то граничные условия, заданные и естественные, будут обеспечивать равенство нулю выражения  $\int_C u (\partial u/\partial n) \, ds$ . Таким образом, в случае когда краевые усло-

вия не задаются, естественные условия будут иметь вид  $\partial u/\partial n = 0$ . Чаще всего рассматривают закрепленную мембрану, когда  $u = 0$  на границе; естественные условия тогда отсутствуют. Можно рассматривать также смешанные условия, когда  $u = 0$  на некоторой части границы, а на остальной части выполняются естественные условия  $\partial u/\partial n = 0$ .

Оператор  $H$  при таких краевых условиях по-прежнему будет самосопряженным, так как для любых допустимых  $u$  и  $v$  мы имеем

$$(Hu, v) = - \int_R \int v \Delta u \, dx \, dy = \int_R \int (u_x v_x + u_y v_y) \, dx \, dy = (u, Hv).$$

Соответствующей вариационной задачей по-прежнему является задача

$$\lambda = \min \frac{(Hu, u)}{(u, u)},$$

которую в этом случае можно преобразовать к виду

$$\lambda = \min \frac{\iint_R (u_x^2 + u_y^2) dx dy}{\iint_R u^2 dx dy} .$$

**3. Собственные элементы квадратной мембраны.** Собственные значения мембраны зависят от ее формы, и только в редких случаях, например для круглой или прямоугольной мембраны, их можно вычислить точно. В качестве простого примера, который будет нам полезен в дальнейшем, рассмотрим квадратную мембрану  $|x| \leq \pi/2, |y| \leq \pi/2$  при краевом условии  $u = 0$ , т. е. с закрепленным краем.

Для нахождения собственных значений и собственных функций мы получим уравнение  $u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0$ . Будем искать решения вида

$$u(x, y) = v(x) w(y).$$

Для таких решений имеем  $v''w + vw'' + \lambda vw = 0$  или  $v''/v + w''/w = -\lambda$ , откуда следует, что каждое из выражений  $v''/v = \mu$  и  $w''/w = \nu$  равно некоторой постоянной. Таким образом, чтобы выполнялись краевые условия, мы должны иметь с точностью до постоянного множителя

$$v(x) = \cos(2m - 1)x \quad \text{или} \quad v(x) = \sin 2mx$$

и

$$w(y) = \cos(2n - 1)y \quad \text{или} \quad w(y) = \sin 2ny,$$

где  $m$  и  $n$  — целые числа. Значения  $\lambda$  приведены в следующей таблице:

КВАДРАТНАЯ МЕМБРАНА

Собственные функции	Собственные значения
$\cos(2m - 1)x \cos(2n - 1)y$	$(2m - 1)^2 + (2n - 1)^2$
$\cos(2m - 1)x \sin 2ny$	$(2m - 1)^2 + (2n)^2$
$\sin 2mx \cos(2n - 1)y$	$(2m)^2 + (2n - 1)^2$
$\sin 2mx \sin 2ny$	$(2m)^2 + (2n)^2$

Итак, спектр рассматриваемой задачи состоит из чисел 2, 5, 5, 8, 10, 10, . . . , 65, 65, 65, 65, . . . , т. е. из всех чисел вида  $m^2 + n^2$ , где  $mn \neq 0$ . Следует отметить, что большинство собственных значений мембраны являются кратными, как видно из выписанной выше последовательности. Например, для случая



$5 = 1^2 + 2^2$  мы имеем две линейно независимые собственные функции  $\sin x \cdot \sin 2y$  и  $\sin 2x \cdot \sin y$ , так что 5 является собственным значением кратности 2. Аналогично,

$$65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$$

является собственным значением кратности 4 и т. д.

**4. Колебания пластины.** В случае пластины мы будем предполагать (см., например, Курант и Гильберт [1]), что функция  $w(x, y, t)$ , описывающая возможное движение пластины, должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных четвертого порядка

$$w_{xxxx} + 2w_{xxyy} + w_{yyyy} + w_{tt} = 0.$$

Мы ищем решения (собственные колебания) вида  $w(x, y, t) = u(x, y)f(t)$ . Подстановка в уравнение дает  $\Delta\Delta u f(t) + u(x, y)f_{tt} = 0$  или  $\Delta\Delta u/u = -f_{tt}/f = \lambda$ , так что  $\Delta\Delta u - \lambda u = 0$  или  $(H - \lambda I)u = 0$ , где  $H$  обозначает теперь итерированный лапласиан  $\Delta\Delta$ . Для того чтобы определить подходящие краевые условия, воспользуемся снова соответствующей формулой Грина, которая на этот раз получается двукратным интегрированием по частям, а именно

$$\begin{aligned} (Hu, v) &= \iint_R v \Delta\Delta u \, dx \, dy = \iint_R \Delta u \Delta v \, dx \, dy + \\ &+ \int_C v \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \, ds - \int_C \frac{\partial v}{\partial n} \Delta u \, ds, \end{aligned}$$

откуда следует, что оператор  $H = \Delta\Delta$  формально положительно определен и что краевые условия, заданные и естественные, должны быть такими, чтобы

$$\int_C \left( u \frac{\partial \Delta u}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \Delta u \right) ds = 0.$$

Оператор  $H = \Delta\Delta$  при этих краевых условиях будет симметричным, поскольку

$$(Hu, v) = \iint_R \Delta u \Delta v \, dx \, dy = (u, Hv).$$

Соответствующая вариационная задача снова имеет вид  $\lambda = \min (Hu, u)/(u, u)$ ; ее можно также записать в виде

$$\lambda = \min \frac{(H_1 u, H_1 u)}{(u, u)} = \min \frac{\iint_R (\Delta u)^2 \, dx \, dy}{\iint_R u^2 \, dx \, dy}.$$

Если краевые условия не заданы (свободная пластина), то всюду на границе должны выполняться естественные условия  $\Delta u = 0$  и  $\partial \Delta u / \partial n = 0$ . Если задано условие  $u = 0$  (закрепленная пластина), то соответствующим естественным условием будет  $\Delta u = 0$ . Если же заданы условия  $u = 0$  и  $\partial u / \partial n = 0$  всюду на  $C$  (зажатая пластина), то естественные условия отсутствуют. Можно рассматривать также смешанные условия, например  $u = 0$  на некоторой части границы и  $\partial u / \partial n = 0$  на остальной части. Тогда естественные условия имеют вид  $\Delta u = 0$  и  $\partial \Delta u / \partial n = 0$  соответственно. В отличие от рассмотренных ранее задач собственные функции здесь не выражаются через известные элементарные функции.

**5. Функция Грина для мембраны.** До сих пор мы ничего не сказали о том, как найти функцию Грина в случае оператора  $H$  с частными производными. Естественно ожидать, что эта задача окажется значительно более сложной, чем в случае струны, поскольку двумерные области могут иметь самую разнообразную форму. Ввиду этого полезно решать задачу в два этапа: сначала ищется так называемое фундаментальное решение (см. далее), которое не зависит от формы области, а затем — компенсирующая часть (см. далее), которая строится так, чтобы функция Грина удовлетворяла заданным граничным условиям. Функцией Грина для закрепленной мембраны, т. е. для задачи  $-\Delta u = 0$ ,  $u = 0$  на  $C$ , будет функция  $k(x, y, \xi, \eta)$ , такая, что если  $-\Delta u = f$ , то  $u = \iint k(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta$ . Чтобы найти такую функцию  $k$ , рассмотрим снова единичную силу, сконцентрированную в единственной точке  $(\xi, \eta)$ , и будем искать отклонение  $k(x, y, \xi, \eta)$ , вызванное этой силой в точке  $(x, y)$ . Мы представляем себе единичную силу с плотностью  $f_\varepsilon$ , распределенной по маленькому кругу  $C_\varepsilon$  радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $(\xi, \eta)$ . Тогда  $f_\varepsilon = 0$  для точек  $(x, y)$ , не лежащих в  $C_\varepsilon$ , и

$$\iint_{C_\varepsilon} f_\varepsilon(x, y) dx dy = 1.$$

Прогиб мембраны в положении равновесия при действии этой силы определяется из уравнения  $\Delta u = -f_\varepsilon(x, y)$ . Интегрируя его почленно по кругу  $C_\varepsilon$ , получаем

$$-\iint_{C_\varepsilon} \Delta u dx dy = \iint_{C_\varepsilon} f_\varepsilon dx dy = 1.$$

Далее, полагая в формуле Грина

$$-\iint (u\Delta v - v\Delta u) dx dy = \int \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds$$

$v(x, y) = 1$ , получаем

$$\iint_{C_\varepsilon} \Delta u dx dy = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

где  $\Gamma_\varepsilon$  — окружность, ограничивающая круг  $C_\varepsilon$ .

Но так же, как и раньше, мы можем рассматривать функцию Грина  $k(x, y, \xi, \eta)$  как предел  $u(x, y)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Следовательно,  $k(x, y, \xi, \eta)$  должна удовлетворять условию

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial n} ds = -1,$$

которое будет выполнено, если предположить, что  $\partial k / \partial n$  принимает на окружности  $\Gamma_\varepsilon$  постоянное значение  $-(2\pi r)^{-1}$ . Тогда, поскольку радиус  $r$  и внешняя нормаль совпадают по направлению,

$$k = \frac{-1}{2\pi} \log r + \gamma(x, y, \xi, \eta),$$

где  $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$ , а функция  $\gamma$  такова, что

$$\int \frac{\partial \gamma}{\partial n} ds = 0$$

по любому замкнутому контуру, лежащему в рассматриваемой области; это условие будет выполнено, если  $\Delta \gamma = 0$ . Кроме того, нужно потребовать, чтобы выполнялось граничное условие  $k = 0$ , т. е. чтобы  $\gamma = (2\pi)^{-1} \log r$  на границе.

Таким образом, мы свели задачу нахождения функции Грина к двум задачам, первая из которых состоит в отыскании так называемого *фундаментального решения*  $F(x, y, \xi, \eta) = (-2\pi)^{-1} \log r$  (см. ниже) уравнения  $-\Delta u = 0$ , а вторая — в построении функции  $\gamma(x, y, \xi, \eta)$ , удовлетворяющей условиям  $\gamma \in C^{(2)}$ ,  $\Delta \gamma = 0$  внутри области и  $\gamma = -F$  на границе.

**6. Фундаментальное решение. Компенсирующая часть.** Сформулируем теперь более точно две эти задачи. Рассмотрим уравнение  $Hu = 0$ , где  $H$  — формально самосопряженный оператор порядка  $m$ . Функция  $u = u(x, y, \xi, \eta)$  называется *фундаментальным решением* этого уравнения с особенностью в точке  $(\xi, \eta)$ , если для любой функции  $v(x, y) \in C^{(m)}$  справедливо равенство

$$v(\xi, \eta) = \iint_R u H v dx dy + \int_C M(u, v) ds,$$

где  $(\xi, \eta)$  — фиксированная точка в  $R$ , а  $ds$  — элемент длины дуги в плоскости переменных  $x, y$ . Например, в случае, если  $H = -\Delta$ , мы имеем

$$v(\xi, \eta) = \iint_R uHv \, dx \, dy - \int_C \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds.$$

Если же фундаментальное решение  $u$  обладает также тем свойством, что  $\int_C M(u, v) \, ds = 0$  при всех допустимых  $v$ , то оно называется *функцией Грина* оператора  $H$ . Поскольку в рассматриваемых задачах равенство  $\int_C M(u, v) \, ds = 0$  выполняется, если

$u$  удовлетворяет краевым условиям, можно сказать, что фундаментальное решение, удовлетворяющее краевым условиям, является функцией Грина этой задачи. Ясно, что такая функция  $u$  будет также функцией Грина и в прежнем смысле, так как

$$v(\xi, \eta) = \iint_R uHv \, dx \, dy, \text{ и, следовательно, если } Hv = w, \text{ то } v = \\ = \iint_R uw \, dx \, dy.$$

Далее, если  $F(x, y, \xi, \eta)$  — фундаментальное, а  $\gamma(x, y, \xi, \eta)$  — *регулярное* решения уравнения  $Hu = 0$  (т. е.  $\gamma \in C^{(m)}$  как функция от  $x$  и  $y$ ), то  $F + \gamma$  также является фундаментальным решением. В самом деле,

$$\iint_R (vH\gamma - \gamma Hv) \, dx \, dy = \int_C M(\gamma, v) \, ds = - \iint_R \gamma Hv \, dx \, dy,$$

так что

$$\iint_R (F + \gamma) Hv \, dx \, dy + \int_C M(F + \gamma, v) \, ds = \\ = \iint_R FHv \, dx \, dy + \int_C M(F, v) \, ds = v,$$

поскольку

$$\iint_R \gamma Hv \, dx \, dy + \int_C M(\gamma, v) \, ds = 0.$$

Если  $\gamma$  — регулярное решение уравнения  $Hu = 0$ , такое, что  $F + \gamma$  является функцией Грина, то  $\gamma$  называется *компенсирующей частью* для  $F$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Дальнейшие сведения о фундаментальных решениях для очень широкого класса дифференциальных уравнений, имеющих отношение к нашим задачам, можно найти в книге Джона [1, гл. II]. Результаты относительно фундаментальных решений для некоторых конкретных задач имеются во многих недавних работах; см., например, Плейель [1], Браудер [1].

**7. Функция Грина и обратный оператор для мембраны.** Первую часть задачи нахождения функции Грина для оператора  $H = -\Delta$  мы уже решили. В самом деле, легко проверить, что построенная нами функция  $F = (-2\pi)^{-1} \log r$  является фундаментальным решением уравнения  $Hu = 0$ . При решении второй части задачи, т. е. при нахождении компенсирующей части для  $F$ , существенную роль играет форма области  $R$ , которая может быть достаточно сложной. Задача отыскания решения уравнения  $-\Delta u = 0$ , удовлетворяющего заданным краевым условиям, известна под названием *задачи Дирихле*. Таким образом, для того чтобы найти компенсирующую часть  $\gamma$  для каждой точки  $P$ , лежащей внутри области  $R$ , нужно решить задачу Дирихле с граничными значениями  $(-2\pi)^{-1} \log r$ . На ранней стадии изучения этого вопроса предполагалось, что решение этой задачи существует всегда в силу следующих соображений, которые Риман называл *принципом Дирихле*.

Как было установлено ранее, уравнение  $-\Delta u = 0$  является уравнением Эйлера — Лагранжа для функционала  $\iint (u_x^2 + u_y^2) dx dy$ , и, следовательно, искомое решение уравнения  $-\Delta u = 0$  является минимизирующей функцией для этого функционала при заданных краевых условиях, если, конечно, такая функция существует. Поскольку функционал положителен и, значит, имеет точную нижнюю границу, считалось очевидным, что минимизирующая функция может быть найдена как предел минимизирующей последовательности функций. Но мы уже видели (гл. IV, п. 9), что из существования минимизирующей последовательности еще не следует существование минимизирующей функции. Действительно, можно построить пример такой области  $R$ , для которой функция Грина не существует. Тем не менее для всех рассматриваемых нами областей функция Грина существует.

Для квадратной мембраны, например, функцию Грина можно построить таким же образом, как для струны или стержня, а именно с помощью нормированных собственных функций, найденных в п. 3, причем норма определяется по формуле

$$\|u\|^2 = (Hu, u) = - \iint_R \Delta u \, dx \, dy.$$

Если обозначить эти собственные функции через  $u_1(x, y)$ ,  $u_2(x, y)$ ,  $\dots$ ,  $u_n(x, y)$ ,  $\dots$ , то функцию Грина  $k(x, y, \xi, \eta)$  можно задать с помощью ряда

$$k(x, y, \xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) u_n(\xi, \eta)$$

точно так же, как и в гл. V, п. 1. Этот ряд не будет сходиться в тех точках  $(x, y, \xi, \eta)$ , для которых  $x = \xi$ ,  $y = \eta$ ; в них функция Грина обращается в бесконечность. Однако интеграл  $\int \int k(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta$  будет сходиться, в чем можно убедиться, принимая во внимание свойства главной части  $k$ , а именно  $F = (-2\pi)^{-1} \log r$ . Таким образом, искомым обратный оператор  $K = H^{-1} = (-\Delta)^{-1}$ , определенный по формуле

$$Ku = \int \int k(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

существует.

В отличие от функции Грина для струны или стержня, где мы имеем дело с обыкновенными дифференциальными уравнениями, функция Грина для мембраны

$$k(x, y, \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \log r + \gamma(x, y, \xi, \eta)$$

обращается в бесконечность при  $x = \xi$ ,  $y = \eta$ . Этот факт является чрезвычайно важным для нашей теории, поскольку он означает, что метод функционального пополнения, которым мы пользовались в рассмотренных ранее задачах, в данном случае уже не применим. В этом можно убедиться, проанализировав использовавшиеся там рассуждения. Нетрудно показать, что такое явление имеет место всегда, когда число независимых переменных больше половины порядка дифференциального уравнения. Тем не менее *псевдофункциональное* пополнение по-прежнему возможно и может быть использовано для тех же целей, хотя оно будет более сложным, чем функциональное. В этом случае функция Грина называется *псевдовоспроизводящим ядром* (см. Ароншайн [2], Ароншайн и Смит [2]).

По аналогии с задачей для струны рассмотрим пространство  $\mathfrak{R}$  функций  $u(x, y) \in C^{(2)}$ , равных нулю на границе, скалярное произведение в котором определено формулой

$$(u, v) = \int \int_R Ku \cdot v dx dy,$$

и пространство  $\mathfrak{R}^{(0)}$  функций класса  $C^{(2)}$  с условием  $\partial u / \partial n = 0$  на границе. Тогда таким же способом, как и ранее, мы докажем,

что  $\bar{\mathfrak{R}} \subset \bar{\mathfrak{R}}^{(0)}$ . Однако для того, чтобы показать, что  $Ku \in C^{(2)}$ , нам понадобится двумерный аналог ранее доказанной теоремы о существовании  $u''(x)$ . Он называется теоремой Лихтенштейна (см. Соболев [1]):

*Если  $w(x, y)$  — произвольная функция пространства  $\Omega_2^{(2)}$  (ср. гл. V, п. 4), то функция*

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint \log r(x, y, \xi, \eta) w(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

*имеет почти всюду вторые частные производные  $u''_{xx}$  и  $u''_{yy}$ .*

Доказательство является значительно более сложным, чем в одномерном случае, и потому мы отсылаем читателя к работам Лихтенштейна [1] и Фридрихса [4]. Аналогичные теоремы в более общем случае доказаны, например, в работе Морри [1] (см. также имеющиеся там ссылки). Следует отметить, что, хотя в каждой из рассматриваемых задач мы эффективно вычисляем функцию Грина, не используя фундаментальное решение (и тем самым не прибегая к принципу Дирихле), в каждом случае все же следует находить это решение для доказательства того факта, что собственные функции дифференцируемы достаточно число раз, и потому их можно рассматривать в качестве решений исходной задачи на собственные значения для данного дифференциального уравнения.

**8. Функция Грина для закрепленной пластины.** Исходя из функции Грина для мембраны, можно без труда построить функцию Грина для закрепленной пластины. Будем сокращенно обозначать точку  $(x, y)$  через  $z$ , точку  $(\xi, \eta)$  через  $z'$ , а выражения  $dx dy$  и  $d\xi d\eta$  через  $dz$  и  $dz'$ . Если обозначить теперь через  $g(z, z')$  функцию Грина для мембраны, то искомую функцию Грина для закрепленной пластины, которую мы будем обозначать через  $g_2(z, z')$ , можно представить в виде

$$g_2(z, z') = \iint_R g(z, z'') g(z'', z') dx'' dy''.$$

Действительно, если  $\Delta \Delta u = f$ , то имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \iint g_2(z, z') f(z') dz' = \\ & = \iiint \iint g(z, z'') g(z'', z') f(z') dx'' dy'' dx' dy' = u(x, y) \end{aligned}$$

(для доказательства достаточно поменять порядок интегрирования во втором интеграле). Кроме того, из определения  $g_2(z, z')$  следует, что

$$\Delta_{(z')} g_2(z, z') = -g(z, z') \quad (z \neq z'),$$

где  $\Delta_{(z')}$  обозначает лапласиан по переменным  $\xi$  и  $\eta$ . Отсюда вытекает, что при фиксированном  $z$  функция  $g_2(z, z')$  удовлетворяет краевым условиям  $g_2 = \Delta g_2 = 0$  и, значит, действительно является искомой функцией Грина для закрепленной пластины. (Ясно, что подобный метод непригоден в случае зажатой пластины, поскольку краевые условия в этом случае не совпадают с условиями для закрепленной мембраны.)

Как и прежде, мы можем сказать, что интегральный оператор  $K$  с ядром, равным функции Грина  $g_2$ , является обратным к оператору  $\Delta$  в том смысле, что для любой функции  $u(x, y)$  функция

$$v(x, y) = Ku(x, y) = \int \int g_2(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

будет решением краевой задачи  $\Delta v(x, y) = u(x, y)$  в  $R$ ,  $v = \Delta v = 0$  на  $C$ .

### У П Р А Ж Н Е Н И Е

1. Провести подробную проверку того, что

$$g_2(z, z') = \int_{\mathbf{R}} g(z, z'') g(z'', z') dx'' dy''$$

является функцией Грина для закрепленной пластины.

**9. Функция Грина для зажатой пластины.** В случае оператора  $H = \Delta\Delta$  с краевыми условиями  $u = \partial u / \partial n = 0$  (зжатая пластина) стандартные рассуждения показывают, что

$$F(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{8\pi} r^2 \log r$$

является фундаментальным решением. Действительно, поступая так же, как и в предыдущих случаях, мы приходим к уравнению

$$\int_{C_\varepsilon} \int \Delta\Delta u \, dx \, dy = \int_{C_\varepsilon} \int f_\varepsilon \, dx \, dy = 1 = \int_C \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \, ds,$$

откуда следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_C \frac{\partial \Delta F}{\partial n} \, ds = 1.$$



Таким образом, мы можем положить  $d\Delta F/dn = (2\pi r)^{-1}$  или  $\Delta F = (2\pi)^{-1} \log r$ . В полярных координатах  $\Delta F$  выражается следующим образом:

$$\Delta F = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (rF_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{F_\varphi}{r} \right\},$$

так что в нашем случае

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rF_r) = \frac{1}{2\pi} \log r,$$

откуда мы находим фундаментальное решение  $F = (1/8\pi) r^2 (\log r - 1)$ . Но функция  $(1/8\pi) r^2$  является регулярным решением уравнения  $\Delta \Delta u = 0$ . Таким образом, решение  $F = (1/8\pi) r^2 \log r$  также является фундаментальным.

Поскольку фундаментальное решение  $F(x, y, \xi, \eta)$  ограничено, а компенсирующая часть, будучи регулярным решением, также ограничена, функция Грина (обозначим ее через  $g_{11}$ ) как сумма этих двух функций будет также ограниченной, и, значит, мы можем осуществить функциональное пополнение так же, как и в случае струны или стержня. То, что компенсирующая часть существует, кажется весьма вероятным в силу принципа Дирихле. Мы докажем это строго, построив функцию  $g_{11}$  другим способом (см. Заремба [1], [2], Ароншайн [5, стр. 386]).

Обозначим через  $\mathfrak{B}$  пространство функций  $u(x, y) = u(z)$ , гармонических в области  $R$  и таких, что интеграл  $\iint_R u^2 dx dy$  конечен, с нормой  $\|u\|^2 = \iint_R u^2 dx dy$ . Нетрудно показать, что  $\mathfrak{B}$  обла-

дает воспроизводящим ядром; обозначим его через  $h(z, z')$ . В самом деле, если  $\zeta_0$  — произвольная точка  $R$  и  $\Gamma$  — круг радиуса  $\rho$  с центром в точке  $\zeta_0$ , целиком лежащий в  $R$ , то в силу известного свойства гармонических функций

$$f(\zeta_0) = \frac{1}{\pi \rho^2} \int_{\Gamma} \int f(\xi) d\xi d\eta,$$

откуда с помощью неравенства Коши — Буняковского мы получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |f(\zeta_0)| &\leq \frac{1}{\pi \rho^2} \left[ \int_{\Gamma} \int d\xi d\eta \right]^{1/2} \left[ \int_{\Gamma} \int |f(\xi)|^2 d\xi d\eta \right]^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi} \rho} \left[ \int_{\Gamma} \int |f(\xi)|^2 d\xi d\eta \right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \rho} \|f\|, \end{aligned}$$

из которого вытекает существование воспроизводящего ядра (гл. V, п. 6). Из этого неравенства следует также, что пространство  $\mathfrak{B}$  является полным и, следовательно, гильбертовым. Действительно, если последовательность  $\{f_n\}$  является последовательностью Коши в смысле сходимости по норме  $\mathfrak{B}$ , то  $\{f_n(\xi_0)\}$  будет сходиться равномерно по  $\xi_0 \in R$ , и предельная функция такой последовательности гармонических функций является также гармонической (см. Петровский [1]\*).

Тогда искомая функция Грина  $g_{11}(z, z_1)$  задается формулой

$$g_{11}(z, z_1) = \int \int g(z, z') g(z', z_1) dx' dy' - \\ - \int \int g(z, z') dx' dy' \int \int h(z', z'') g(z'', z_1) dx'' dy'',$$

где  $g$  — обычная функция Грина для закрепленной мембраны (п. 5). В самом деле, мы проверим сейчас, что функция  $g_{11}(z, z_1)$  обладает требуемыми свойствами функции Грина, а именно что  $\Delta g_{11} = 0$  при  $z \neq z_1$  в  $R$ ,  $g_{11} = \partial g_{11} / \partial n = 0$  на  $C$ .

Используя свойства функции  $g$ , получаем

$$\Delta g_{11} = g(z, z_1) - \int \int h(z, z'') g(z'', z_1) dx'' dy'',$$

откуда следует, что  $\Delta g_{11} = 0$ , поскольку обе функции в правой части являются гармоническими. Ясно также, что  $g_{11} = 0$  на  $C$ , так как  $g$  на границе обращается в нуль. Наконец, докажем, что  $\partial g_{11} / \partial n = 0$  на  $C$ . Для этого заметим, что в силу формулы Грина

$$\int \int \Delta g_{11} \cdot p \, dz - \int \int g_{11} \Delta p \, dz = \int_C \frac{\partial g_{11}}{\partial n} p \, ds - \int_C g_{11} \frac{\partial p}{\partial n} \, ds$$

условие  $\partial g_{11} / \partial n = 0$  на  $C$  эквивалентно условию  $\int \int \Delta g_{11} \cdot p \, dz = 0$  для любой гармонической функции  $p$ <sup>1)</sup>. Но из написанного выше выражения для  $\Delta g_{11}$  видно, что  $\Delta g_{11}$  равна разности между  $g(z, z_1)$  и ее проекцией на  $\mathfrak{B}$ ; следовательно, скалярные произведения этих функций на любую функцию  $p \in \mathfrak{B}$  равны. Таким образом,  $(\Delta g_{11}, p) = 0$ , что и требовалось доказать.

<sup>1)</sup> В самом деле, по формуле Грина в силу того, что  $\Delta p \equiv 0$ ,  $g_{11}|_C = 0$ , имеем

$$\int \int \Delta g_{11} \cdot p \, dz = \int_C \frac{\partial g_{11}}{\partial n} p \, ds.$$

Остается заметить, что в подынтегральном выражении правой части  $p$  — любая непрерывная на границе  $C$  функция. — Прим. ред.

**10. Функциональное пополнение пространства в случае зажатой пластины.** Обозначим через  $\mathfrak{R}$  пространство допустимых функций  $u(x, y)$  в задаче о колебаниях зажатой пластины. т. е. пространство функций  $u \in C^{(4)}$ , удовлетворяющих условиям  $u = \partial u / \partial n = 0$  на границе, с нормой  $\|u\|^2 = \iint (\Delta u)^2 dx dy$ . Это пространство не будет полным. Однако мы можем, как и в рассмотренных ранее задачах, произвести функциональное пополнение, в результате чего получим гильбертово пространство  $\overline{\mathfrak{R}}$ . Функции  $u(x, y) = u(z)$  исходного неполного пространства  $\mathfrak{R}$  удовлетворяют уравнению

$$u(z) = \iint k(z, z') \Delta \Delta u(z') dz' = \iint \Delta_{(z')} k(z, z') \Delta u(z') dz'.$$

Рассмотрим теперь класс всех функций  $u(z)$  вида  $u(z) = \iint \Delta_{(z')} k(z, z') f(z') dz'$ , где от  $f(z')$  мы требуем только, чтобы она принадлежала  $\mathfrak{Q}_2^{(2)}$  (гл. V, п. 4). Тогда из свойств интеграла Лебега следует (ср. с замечаниями в гл. V, п. 7), что этот класс является полным и что множество  $\mathfrak{R}$  плотно в нем, так что рассматриваемый класс можно отождествить с  $\overline{\mathfrak{R}}$ . Аналогично, если мы обозначим через  $\mathfrak{R}^{(0)}$  пространство допустимых функций в случае закрепленной пластины, то любую функцию, принадлежащую  $\overline{\mathfrak{R}^{(0)}}$ , можно задать в виде

$$u(z) = \iint \Delta_{(z')} g_2(z, z') f(z') dz' = - \iint g(z, z') f(z') dz',$$

где  $g$  — функция Грина для закрепленной мембраны, а  $f$  — произвольная функция из  $\mathfrak{Q}_2^{(2)}$ .

Пользуясь языком электростатики или теории тяготения, можно сказать, что любой элемент пространства  $\overline{\mathfrak{R}^{(0)}}$  является *гриновским потенциалом* функции  $f \in \mathfrak{Q}_2^{(2)}$ .

Построенные полные пространства  $\overline{\mathfrak{R}}$  и  $\overline{\mathfrak{R}^{(0)}}$  будут играть в дальнейшем важную роль благодаря следующему обстоятельству. Неполное пространство  $\mathfrak{R}$  не является подпространством  $\overline{\mathfrak{R}^{(0)}}$ , поскольку функции этих пространств удовлетворяют различным краевым условиям:  $\partial u / \partial n = 0$  и  $\Delta u = 0$  соответственно. Но при пополнении (ср. гл. V, п. 7) стабильные условия, т. е. такие, которые содержат производные порядка, меньшего, чем половина порядка дифференциального уравнения (в нашем случае меньшего 2), сохраняются, а нестабильные, т. е. условия порядка 2 или более, теряются (см. Соболев [1]\*), и мы можем доказать нужное нам включение  $\overline{\mathfrak{R}} \subset \overline{\mathfrak{R}^{(0)}}$  таким же методом, как и в гл. V,

п. 8. Как мы уже указывали ранее, это включение является очень важным по следующей причине. В гл. VIII и IX мы рассмотрим метод Вайнштейна для линейных операторов в абстрактном гильбертовом пространстве  $\mathfrak{L}$ . Как будет выяснено в этих главах, успешное применение этого метода зависит от того, сможем ли мы найти объемлющее пространство  $\mathfrak{L}^{(0)}$  так, чтобы  $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}^{(0)}$ . В гл. X мы покажем, что пространства  $\bar{\mathfrak{K}}$  и  $\bar{\mathfrak{K}}^{(0)}$ , которые являются гильбертовыми пространствами, такими, что  $\bar{\mathfrak{K}} \subset \bar{\mathfrak{K}}^{(0)}$ , можно отождествить с абстрактными пространствами  $\mathfrak{L}$  и  $\mathfrak{L}^{(0)}$  метода Вайнштейна. Тем самым установленные в абстрактном случае теоремы существования и сходимости автоматически переносятся на краевые задачи.

В следующей гл. VII мы рассмотрим метод Вайнштейна в его первоначальной форме, не привлекая теорию операторов в гильбертовом пространстве и, следовательно, не затрагивая вопросов существования и сходимости.

## МЕТОД ВАЙНШТЕЙНА В ЕГО ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ ФОРМЕ

**1. Метод Вайнштейна в случае зажатой пластины.** В этой главе мы рассмотрим метод Вайнштейна в той форме, в которой он первоначально рассматривался в работе Вайнштейна [1], т. е. без привлечения теории гильбертовых пространств и линейных операторов. Вследствие этого все вопросы существования и сходимости будут отложены до следующих глав.

Метод Вайнштейна будет изучен на примере задачи на собственные значения для зажатой пластины

$$Hu - \lambda u = \Delta \Delta u - \lambda u = 0,$$

$u = \partial u / \partial n = 0$  на  $C$ . Функция  $u$  является допустимой, если  $u \in C^{(4)}$  и удовлетворяет этим краевым условиям. Следуя Вайнштейну, зададим скалярное произведение формулой  $(u, v) = \int\int_R uv \, dx \, dy$ .

Мы видели, что собственные числа этой задачи

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \rightarrow \infty,$$

определенные сначала как такие значения  $\lambda$ , при которых уравнение  $Hu = \lambda u$  имеет нетривиальное решение, можно охарактеризовать также как минимумы вариационной задачи. Налагая дополнительные условия на допустимые функции, например требуя, чтобы они принадлежали подпространству Рэля — Ритца, мы можем тем самым получить оценку сверху для собственных значений.

Но для получения оценок снизу необходимо ослабить эти условия. Один из способов заключается в ослаблении граничных условий, в результате чего мы приходим к так называемой *базовой задаче*, собственные значения которой

$$\lambda_{10} \leq \lambda_{20} \leq \dots \leq \lambda_{n0} \leq \dots$$

дают оценки снизу для соответствующих собственных значений исходной задачи. При этом базовая задача должна быть выбрана так, чтобы мы могли эффективно найти ее собственные значения и «вставить» между ней и исходной задачей последовательность промежуточных задач, собственные значения которых легко вычисляются и к тому же стремятся к собственным значениям исходной задачи. В этом случае можно составить следующую бесконечную таблицу (стрелки, направленные снизу вверх, обозначают монотонную сходимость снизу):

ТАБЛИЦА ВАЙНШТЕЙНА

	Базовая задача	1-я промежуточная задача	2-я промежуточная задача	...	$n$ -я промежуточная задача	Исходная задача
1-е собственное значение	$\lambda_{10} \leq$	$\lambda_{11} \leq$	$\lambda_{12} \leq \dots \leq$		$\lambda_{1n} \leq \dots \nearrow$	$\lambda_1$
2-е собственное значение	$\lambda_{20} \leq$	$\lambda_{21} \leq$	$\lambda_{22} \leq \dots \leq$		$\lambda_{2n} \leq \dots \nearrow$	$\lambda_2$
...	...	...	...	...	...	...
$m$ -е собственное значение	$\lambda_{m0} \leq$	$\lambda_{m1} \leq$	$\lambda_{m2} \leq \dots \leq$		$\lambda_{mn} \leq \dots \nearrow$	$\lambda_m$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$	$\downarrow$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$

В каждой строке и каждом столбце этой таблицы расположена неубывающая последовательность вещественных чисел;  $n$ -й столбец дает последовательные собственные значения  $n$ -й промежуточной задачи, а  $m$ -я строка дает последовательность  $m$ -х собственных значений различных промежуточных задач, которые с каждым шагом все лучше и лучше аппроксимируют исходную задачу.

**2. Задача о закрепленной пластине как базовая задача для зажатой пластины.** Если зажатая пластина имеет форму квадрата или любую другую форму, отличную от круга, то ее собственные частоты, т. е. квадратные корни из собственных значений, нельзя выразить точно через элементарные или протабулированные специальные функции. Однако, используя метод Вайнштейна, можно связать эти собственные значения с собственными значениями задачи о закрепленной квадратной пластине, для которой единственным заданным условием является условие  $u = 0$ , а второе условие  $\Delta u = 0$  является естественным. Задача для закреп-

ленной пластины будет базовой, а промежуточные задачи мы получим, налагая последовательно краевые условия, соответствующие все большему и большему заземлению края пластины, которые в пределе становятся эквивалентными краевому условию  $\partial u/\partial n = 0$  для зажатой пластины.

Осуществление этой программы мы начнем с того, что вычислим собственные значения для закрепленной пластины. А именно мы покажем, что они равны квадратам собственных значений мембраны такой же формы, а соответствующие собственные функции для обеих задач совпадают. Дифференциальное уравнение для мембраны, будучи уравнением второго порядка, значительно проще, чем уравнение четвертого порядка для пластины, а собственные значения квадратной мембраны полностью известны (гл. VI, п. 3). После этого мы приступим к решению промежуточных задач, которые также можно свести к краевым задачам для уравнений второго порядка. Таким образом, мы будем получать все более точные приближения снизу для собственных значений задачи о колебаниях зажатой пластины, решить которую иным способом не представляется возможным<sup>1)</sup>.

Поскольку с помощью метода Вайнштейна можно получать последовательные приближения снизу, его можно эффективно использовать в сочетании с методом Рэля — Ритца, который дает последовательные приближения сверху.

Дифференциальное уравнение четвертого порядка  $\Delta \Delta u - \lambda u = 0$  в случае закрепленной пластины сводится к краевой задаче для уравнения второго порядка следующим образом. Если  $u(x, y)$  — собственная функция закрепленной пластины, мы имеем

$$(\Delta \Delta - \lambda) u = (\Delta - \lambda^{1/2})(\Delta + \lambda^{1/2}) u = (\Delta - \lambda^{1/2}) \tilde{u} = 0,$$

где  $(\Delta + \lambda^{1/2}) u$  обозначено через  $\tilde{u}$ . Очевидно, что функция  $\tilde{u}$  равна нулю на границе, поскольку  $\Delta u$  и  $u$  в отдельности обращаются в нуль. Но тогда  $\tilde{u}$  должна быть равна нулю всюду в области, иначе  $-\lambda^{1/2}$  было бы собственным значением закрепленной мембраны, а это невозможно, поскольку, как мы выяснили в гл. VI, все собственные значения мембраны положительны. Значит,  $\tilde{u} = (\Delta + \lambda^{1/2}) u = 0$  тождественно. Но этот результат означает, что каждая собственная функция закрепленной пластины является также собственной функцией мембраны, а собственное значение  $\lambda^{1/2}$ , отвечающее функции  $u$  как собственной функции мембраны, является квадратным корнем из  $\lambda$  — соответствующего соб-

<sup>1)</sup> В связи с этой задачей см. также работу Треффта [3] и ее обобщение в статьях Рафальсона [1], [2] и Бирмана [1], [2]. Обзор этих работ имеется в книге Михлина [1]. — *Прим. ред.*

ственного значения закрепленной пластины. Очевидно, что верно также и обратное, т. е. каждая собственная функция мембраны является также и собственной функцией закрепленной пластины.

**3. Промежуточные задачи.** Установив таким образом, что между задачами на собственные значения для мембраны и для закрепленной пластины нет существенной разницы, можно считать, что наша базовая задача решена. Будем теперь последовательно добавлять к условиям для закрепленной пластины новые краевые условия, чтобы в пределе получить задачу для зажатой пластины.

Для определения промежуточных задач возьмем последовательность линейно независимых функций

$$p_1(x, y), p_2(x, y), \dots, p_n(x, y), \dots$$

По причине, которая скоро выяснится, будем предполагать эти функции гармоническими, т. е. что  $\Delta p_i = 0$ .

В нашей базовой задаче мы имеем краевое условие  $u = 0$ . Добавив  $n$  условий

$$\int_C p_i(s) \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0,$$

получим  $n$ -ю промежуточную задачу. Другими словами, мы требуем, чтобы производная  $\partial u / \partial n$  удовлетворяла условиям  $\int_C p_i(\partial u / \partial n) ds = 0$  для  $n$  функций  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , а не для всех функций  $p$ , как это будет в случае зажатой пластины, т. е. при условии  $\partial u / \partial n = 0$ . Будем называть эти условия *вспомогательными*.

Мы уже знаем, что в таблице Вайнштейна

$$\begin{array}{cccccc} \lambda_{10} & \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} & \\ \lambda_{20} & \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} & \\ \cdot & & & & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot & \\ \lambda_{m0} & & & & & \lambda_{mn} \\ \cdot & & & & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot & \end{array}$$

составленной для значений  $i = 1, 2, \dots, n$ , числа, стоящие в  $i$ -м столбце, образуют неубывающую положительную последо-



вательность, так как они являются собственными числами  $i$ -й задачи, т. е. минимумами вариационных задач при последовательном наложении все более жестких условий ортогональности. Но, поскольку функции  $p_i(x, y)$  — гармонические (см. замечание выше), вспомогательные условия

$$\int_C p_i \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

можно также выразить в терминах ортогональности. В самом деле, по формуле Грина мы имеем

$$(p, \Delta u) - (u, \Delta p) = \int_C \left( p \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial p}{\partial n} \right) ds,$$

и, поскольку  $u = 0$  на  $C$ , а  $\Delta p_i = 0$  в  $R$ , условия

$$\int_C p_i(s) \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

эквивалентны условиям

$$(p_i, \Delta u) = \int \int p_i \Delta u dx dy = 0.$$

Тогда те же рассуждения, которые применялись для столбцов, показывают, что в строках таблицы расположены неубывающие последовательности положительных чисел.

Предположим теперь, что функции  $p_1(x, y)$ ,  $p_2(x, y)$ , ... выбраны так, что последовательность  $p_1(s)$ ,  $p_2(s)$ , ...,  $p_n(s)$ , ... образует полную систему функций на границе в том смысле, что если  $\int_C \varphi(s) p_i(s) ds = 0$  для всех  $i$ , то функция  $\varphi(s)$  тождественно равна нулю. Относительно возможности такого выбора см. п. 10. Тогда последовательность элементов  $m$ -й строки будет, по-видимому, сходиться к  $m$ -му собственному значению зажатой пластины (это будет доказано в гл. IX и X).

**4. Естественные краевые условия.** Ясно, что, пока задано конечное число краевых условий указанного вида, у нас есть возможность задать их в большем числе; другими словами, эти условия не исключают естественных краевых условий. В гл. VI было установлено, что естественным краевым условием для закрепленной пластины является  $\Delta u = 0$ . С помощью тех же рассуждений мы покажем сейчас, что естественные краевые условия для  $n$ -й промежуточной задачи состоят в том, что функция  $\Delta u$

принадлежит подпространству, натянутому на  $n$  функций  $p_1(s), p_2(s), \dots, p_n(s)$ ; другими словами,

$$\Delta u_{mn} = \sum_{k=1}^n a_{mk} p_k(s)$$

на границе. Здесь  $u_{mn}$  обозначает  $m$ -ю собственную функцию  $n$ -й промежуточной задачи, а  $a_{mk}$  — некоторые пока еще неопределенные постоянные.

Общий ход рассуждений, которые являются типичными для вариационного исчисления, остается таким же, как и в п. 13 гл. IV, посвященном естественным краевым условиям. Детально эти рассуждения проводятся ниже.

Пусть  $\lambda$  — один из последовательных минимумов

$$\lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \dots, \lambda_{m,n}$$

$n$ -й промежуточной задачи, и пусть  $u$  — соответствующая минимизирующая функция. Тогда в обозначениях гл. VI

$$\lambda = \min \frac{(\Delta u, \Delta u)}{(u, u)}$$

при обычных рекурсивных условиях ортогональности, а вариация соответствующего выражения  $(\Delta u, \Delta u) - \lambda (u, u)$  выглядит следующим образом:

$$(\Delta \Delta u - \lambda u, v) + \int_C \left( \Delta u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \right) ds.$$

Эта вариация должна обращаться в нуль для любой допустимой функции  $v$ , такой, что

$$\int_C p_k \frac{\partial v}{\partial n} ds = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Таким образом, рассуждая как обычно (гл. IV, п. 13), мы получим, что

$$\int_C \Delta u \frac{\partial v}{\partial n} ds = 0$$

для любых  $v$  с указанными свойствами.

Другими словами, если мы рассмотрим векторное пространство, состоящее из функций  $p(s)$ , скалярное произведение в котором определено формулой

$$(p, q) = \int pq ds,$$

то  $\Delta u$ , рассматриваемая как функция на границе, ортогональна ко всем функциям  $\partial v / \partial n$ , которые ортогональны  $p_1(s), p_2(s), \dots, p_n(s)$ . А это означает (ср. гл. I, п. 5), что  $\Delta u$  принадлежит подпространству, натянутому на  $p_1(s), p_2(s), \dots, p_n(s)$ .

Таким образом, для нахождения  $\lambda_{mn}$ , собственных значений  $n$ -й промежуточной задачи, нужно найти такие решения дифференциального уравнения

$$\Delta \Delta u - \lambda u = 0,$$

которые удовлетворяют заданному краевому условию  $u = 0$ , вспомогательным краевым условиям

$$(p_k, \Delta u) = 0 \quad \text{или} \quad \int_C p_k(s) \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

и, наконец, естественным краевым условиям

$$\Delta u_{mn} = \sum_{k=1}^n a_{mk} p_k(s).$$

**5. Сведение к уравнениям второго порядка.** В рассматриваемом частном случае эту задачу можно решить, воспользовавшись изложенным выше методом сведения к уравнениям второго порядка. Зафиксируем  $m$  и будем рассматривать  $m$ -е собственное значение каждой из промежуточных задач. При этом для упрощения обозначений первый индекс будет опускаться. Кроме того, мы будем писать  $\mu$  вместо  $\sqrt{\lambda}$  и  $2\mu_n a_k$  вместо  $a_{mk}$ , где  $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$ . Тогда естественные условия можно переписать в виде

$$\Delta u_n = 2\mu_n \sum_{k=1}^n a_k p_k(s).$$

Если положить  $u = z + \tilde{z}$ , где  $\tilde{z} = \frac{1}{2\mu} (\Delta + \mu) u$ , то из уравнения

$$(\Delta \Delta - \lambda I) u = (\Delta - \mu I) (\Delta + \mu I) u = 0$$

следует, что  $(\Delta - \mu I) \tilde{z} = 0$ .

Далее, применяя к обеим частям равенства  $(\Delta + \mu I) u = 2\mu \tilde{z}$  оператор  $\Delta$ , получаем равенство

$$\Delta \Delta u + \mu \Delta u = 2\mu \Delta \tilde{z},$$

которое, если принять во внимание, что  $\Delta \Delta u = \lambda u$ , можно переписать в виде

$$\lambda u + \mu \Delta u = 2\mu \Delta \tilde{z},$$

или  $\mu u + \Delta u = 2\Delta \tilde{z}$ , поскольку  $\lambda = \mu^2$ . Но  $u = z + \tilde{z}$  и  $\Delta \tilde{z} = \mu \tilde{z}$ , так что окончательно получаем  $(\Delta + \mu)z = 0$ . Тогда, складывая равенства  $(\Delta - \mu)\tilde{z} = 0$  и  $(\Delta + \mu)z = 0$ , имеем

$$\Delta(\tilde{z} + z) + \mu(z - \tilde{z}) = 0, \text{ или } \Delta u = \mu(\tilde{z} - z).$$

Из краевых условий следует, что

$$u = z + \tilde{z} = 0 \text{ на } C$$

и

$$\frac{\Delta u}{\mu} = \tilde{z} - z = 2 \sum_{k=1}^n a_k p_k(s),$$

откуда

$$z = - \sum_{k=1}^n a_k p_k(s), \quad \tilde{z} = \sum_{k=1}^n a_k p_k(s),$$

т. е. функции  $z$  и  $\tilde{z}$  являются решениями однородных уравнений  $(\Delta + \mu)z = 0$  и  $(\Delta - \mu)\tilde{z} = 0$  с неоднородными краевыми условиями.

Эти однородные уравнения с неоднородными краевыми условиями можно свести обычным способом к неоднородным уравнениям с однородными краевыми условиями. Для этого рассмотрим функции

$$v = z + \sum a_k p_k(x, y), \quad \tilde{v} = \tilde{z} - \sum a_k p_k(x, y).$$

Тогда, поскольку функции  $p_k$  гармонические,  $v$  и  $\tilde{v}$  удовлетворяют уравнениям

$$\Delta v + \mu v = \mu \sum_{k=1}^n a_k p_k, \quad \Delta \tilde{v} - \mu \tilde{v} = \mu \sum a_k p_k,$$

однородным краевым условиям  $v = \tilde{v} = 0$  и вспомогательным условиям  $(p_k, \Delta u) = (p_k, \Delta v + \Delta \tilde{v}) = 0$ .

**6. Интегрирование уравнений второго порядка. Определитель Вайнштейна.** Интегрирование второго из этих уравнений, а именно  $\Delta \tilde{v} - \mu \tilde{v} = \mu \sum a_k p_k$ ,  $\mu = \sqrt{\lambda} > 0$ , не вызывает трудностей. В самом деле, мы знаем, что собственные значения оператора  $H = -\Delta$  положительны, так что однородное уравнение  $\Delta \tilde{v} - \mu \tilde{v} = 0$ , где  $\mu = \sqrt{\lambda} > 0$ , имеет только тривиальное решение. Следовательно, по свойству резольвенты (гл. IV, п. 5) соответствующее неоднородное уравнение  $\Delta \tilde{v} - \mu \tilde{v} = \mu \sum a_k p_k$  имеет единственное равное нулю на границе решение вида

$$\tilde{v} = \mu \sum_{j=1}^n a_j \tilde{v}_j,$$

где  $\tilde{v}_j$  однозначно определяются из уравнений

$$\Delta \tilde{v}_j - \mu \tilde{v}_j = p_j, \quad \tilde{v}_j = 0 \text{ на } C.$$

Каждую функцию  $\tilde{v}_j = R_{-\mu} p_j$  можно разложить в ряд Фурье по собственным функциям  $u_k$  уравнения для мембраны:

$$\tilde{v}_j = R_{-\mu} p_j = - \sum_{\sigma=1}^{\infty} (p_j, u_{\sigma}) \frac{u_{\sigma}}{\mu + \omega_{\sigma}},$$

где  $\omega_{\sigma}$  есть  $\sigma$ -е собственное значение мембраны.

Однако при интегрировании второго уравнения

$$\Delta v + \mu v = \mu \sum a_k p_k$$

могут возникнуть значительные трудности. Действительно, может оказаться, что  $\mu_n$ , равное положительному квадратному корню из собственного значения  $n$ -й промежуточной задачи для закрепленной пластины, равно одному из собственных значений  $\omega_{\sigma}$  мембраны, и в этом случае разложение резольвенты будет иметь нуль в знаменателе. Если же  $\mu$  не является собственным значением уравнения колебания мембраны, то решение найти нетрудно. Как и в рассмотренном выше случае, решение единственно и имеет вид

$$v = \mu \sum_{j=1}^n a_j v_j,$$

где

$$v_j = \sum_{\sigma=1}^{\infty} (p_j, u_{\sigma}) \frac{u_{\sigma}}{\mu - \omega_{\sigma}}.$$

Таким образом, оставляя на некоторое время в стороне трудный случай, когда  $\mu_n$  является собственным значением  $\omega_{\sigma}$  мембраны, мы будем иметь

$$u = v + \tilde{v} = \mu \sum_{j=1}^n a_j (v_j + \tilde{v}_j) = \mu \sum_{j=1}^n a_j u_j,$$

где

$$u_j = v_j + \tilde{v}_j = 2 \sum_{\sigma=1}^{\infty} (p_j, u_{\sigma}) \frac{\omega_{\sigma} u_{\sigma}}{\mu^2 - \omega_{\sigma}^2}.$$

Тогда вспомогательные условия можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^n a_j (p_k, \Delta u_j) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Заметим, что  $n$  неизвестных  $a_1, a_2, \dots, a_n$  не могут одновременно быть равными нулю, так как  $\mu$  было бы тогда собственным значением уравнения мембраны.

Таким образом, определитель  $|(p_k, \Delta u_j)|$ , называемый *определителем Вайнштейна*, должен равняться нулю, и мы приходим к следующему результату:

Если  $\lambda_{mn}$ , собственное значение  $n$ -й промежуточной задачи, не является в то же время собственным значением базовой задачи, то при любых фиксированных  $m$  и  $n$  число  $\mu_{mn} = \sqrt{\lambda_{mn}}$  является корнем  $\mu = \mu_{mn}$  уравнения

$$|(p_k, \Delta u_j)| = 0 \quad (j, k = 1, 2, \dots, n),$$

где  $u_j = v_j + \tilde{v}_j$ , а  $\mu$  входит в выражения для  $v_j$  и  $\tilde{v}_j$  согласно приведенным выше формулам.

Проводя рассуждения в обратном порядке, можно доказать, что квадрат любого корня этого уравнения при условии, что этот корень не является собственным значением базовой задачи, будет собственным значением по крайней мере одной из промежуточных задач, причем кратность этого собственного значения равна кратности корня (см. Вайнштейн [1]).

Для того чтобы выяснить, как входит  $\mu$  в определитель Вайнштейна  $|(p_k, \Delta w_j)|$ , поступим следующим образом. Считая собственные функции мембраны  $u_1, u_2, \dots$  нормированными, запишем равенство Парсеваля (гл. I, п. 6)

$$(p_k, \Delta w_j) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} (p_k, u_{\sigma}) (\Delta w_j, u_{\sigma}) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} c_{\sigma}^{(k)} (\Delta w_j, u_{\sigma}).$$

Но в прежних обозначениях мы имеем также  $w_j = v_j + \tilde{v}_j$ , где

$$v_j = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{c_{\sigma}^{(j)} u_{\sigma}}{\mu - \omega_{\sigma}}, \quad \tilde{v}_j = - \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{c_{\sigma}^{(j)} u_{\sigma}}{\mu + \omega_{\sigma}},$$

$$\Delta v_j + \mu v_j = p_j, \quad \Delta \tilde{v}_j - \mu \tilde{v}_j = p_j.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (\Delta w_j, u_{\sigma}) &= (\Delta v_j + \Delta \tilde{v}_j, u_{\sigma}) = (2p_j + \mu(\tilde{v}_j - v_j), u_{\sigma}) = \\ &= \left( 2p_j - \mu \sum_{\gamma=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\mu + \omega_{\gamma}} + \frac{1}{\mu - \omega_{\gamma}} \right] c_{\gamma}^{(j)} u_{\gamma}, u_{\sigma} \right) = \\ &= 2c_{\sigma}^{(j)} - 2\mu^2 \frac{c_{\sigma}^{(j)}}{\mu^2 - \omega_{\sigma}^2} = -2\mu^2 \frac{c_{\sigma}^{(j)} \omega_{\sigma}^2}{\mu^2 - \omega_{\sigma}^2}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение для  $(\Delta w_j, u_\sigma)$  в равенство Парсевала для  $(p_k, \Delta w_j)$ , мы получаем искомое уравнение для  $\mu = \mu^{(n)}$  — собственных значений  $n$ -й промежуточной задачи, которые не совпадают с собственными значениями базовой задачи, а именно:

$$\left| \sum_{\sigma=1}^{\infty} c_{\sigma}^{(j)} c_{\sigma}^{(k)} \frac{\omega_{\sigma}^2}{\omega_{\sigma}^2 - \mu^2} \right| = 0 \quad (j, k = 1, 2, \dots, n).$$

**7. Резюме.** Подведем итог изложенным результатам относительно метода Вайнштейна. Для того чтобы оценить снизу собственные значения, которые определяются как минимумы вариационных задач, мы должны построить базовую задачу с более слабыми условиями. В случае квадратной зажатой пластины, который мы используем для иллюстрации, заданные краевые условия соответствующей задачи являются настолько сильными, что они исключают какие бы то ни было естественные краевые условия. Для того чтобы получить более гибкую задачу, некоторые из этих заданных условий опускаются, и тем самым задача сводится к задаче о закрепленной пластине с естественным краевым условием  $\Delta u = 0$ ; ее можно решить явно. После этого мы начинаем восстанавливать исходные краевые условия, постепенно добавляя вспомогательные условия; берем произвольную последовательность линейно независимых функций  $p_1(s), p_2(s), \dots, p_n(s), \dots$  на границе и требуем, чтобы  $u$  удовлетворяла условиям  $\int p_i (\partial u / \partial n) ds = 0$ , но не для всех  $p_i$  (это снова привело бы нас к зажатой пластине), а лишь для первых  $n$  функций  $p_i$ . Такое множество вспомогательных условий не исключает естественного краевого условия, состоящего в том, что функция  $\Delta u$  должна принадлежать подпространству, натянутому на  $p_i(s)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , т. е.

$$\Delta u_{mn} = \sum_{k=1}^n a_{mk} p_k$$

при некоторых постоянных  $a_{mk}$ , не равных нулю одновременно. Кроме того,  $u_{mn}$  должна также удовлетворять вспомогательным условиям, и это дает нам систему линейных уравнений для  $a_{mk}$ , определитель которой должен равняться нулю. Приравнявая нулю этот определитель, получаем уравнение, которому удовлетворяют собственные значения промежуточной задачи, которые не являются в то же время собственными значениями базовой задачи.

**8. Консервативные собственные значения.** Естественно, что наша следующая цель состоит в том, чтобы получить характеристическое уравнение, которому удовлетворяют остальные собственные значения  $n$ -й промежуточной задачи, являющиеся также собственными значениями базовой задачи. Такие собственные значения мы будем называть *консервативными*. Действительно, только тогда, когда мы определим эти собственные значения, каждое с соответствующей кратностью, можно будет расположить все собственные значения в  $n$ -й столбец таблицы Вайнштейна и получить тем самым аппроксимацию собственных значений исходной задачи. Для того чтобы приписать каждому неконсервативному собственному значению правильный номер в полном спектре, консервативном и неконсервативном, необходимо, конечно, исследовать только те собственные значения  $\omega$  базовой задачи, которые меньше данного  $\lambda$ .

Вайнштейн и здесь предложил метод, позволяющий последовательно проверить, не будет ли собственное значение базовой задачи собственным значением  $n$ -й промежуточной задачи, а если будет, то какой кратности. Этот метод аналогичен изложенному выше с той лишь разницей, что нам придется теперь иметь дело не только с постоянными  $a_k$ , связанными с промежуточной задачей, но и с постоянными  $b_j$ , связанными с базовой задачей.

Этот метод состоит в следующем. Пусть  $\omega = \omega_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) является  $n$ -м собственным значением в спектре  $\omega_1, \omega_2, \dots$  мембраны. Обозначим через  $r = r_n$  кратность  $\omega$  в этом спектре. а через  $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \dots, u_r^{(n)}$  базис (не обязательно ортонормированный) соответствующего собственного подпространства.

Теперь мы имеем такую задачу: определить те собственные значения мембраны, которые принадлежат также спектру  $m$ -й промежуточной задачи.

Чтобы решить эту задачу, рассмотрим снова два уравнения из п. 5 (вместо  $\mu$  мы пишем теперь  $\omega$ )

$$\Delta v - \omega v = \omega \sum_{k=1}^m a_k p_k, \quad \Delta \tilde{v} + \tilde{\omega} \tilde{v} = \omega \sum_{k=1}^m a_k p_k.$$

Из того, что у мембраны нет отрицательных собственных значений, по-прежнему следует, что первое из этих уравнений имеет единственное (равное нулю на границе) решение при любых значениях постоянных  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . Что касается второго уравнения, то необходимое и достаточное условие существования решения, равного нулю на границе, состоит в том, что

$$\sum_{k=1}^m a_k (p_k, u_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r)$$



для  $r$  собственных функций уравнения мембраны  $u_j$ , отвечающих  $\omega$ . Тогда для того, чтобы  $\omega$  принадлежало спектру  $m$ -й промежуточной задачи, необходимо и достаточно, чтобы  $m$  уравнений

$$(p_k, \Delta v + \Delta \tilde{v}) = (p_k, \Delta u) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

удовлетворяла по крайней мере одна функция  $u = v + \tilde{v}$ , где  $v$  и  $\tilde{v}$  соответствуют различным возможным решениям системы

$\sum_{k=1}^m a_k(p_k, u_j) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ , включая и тривиальное решение; более точно, кратность  $\rho$  ( $\geq 0$ ) числа  $\omega$  в спектре  $m$ -й промежуточной задачи равна числу линейно независимых функций  $u$ .

Для того чтобы придать этому критерию удобную форму, рассмотрим отдельно три случая  $r > m$ ,  $r = m$ ,  $r < m$ .

**9. Консервативные собственные значения, имеющие большúю кратность  $r > m$  в спектре базовой задачи.** Итак, предположим сначала, что кратность  $\omega$  в спектре задачи о мембране больше, чем число функций  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , с помощью которых строится  $m$ -я промежуточная задача. Тогда число  $r$  уравнений

$\sum_{k=1}^m a_k(p_k, u_j) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ , больше числа неизвестных, но эта система имеет во всяком случае тривиальное решение  $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$ , которому соответствуют (поскольку  $\Delta \tilde{v} -$

$-\omega \tilde{v} = \omega \sum_{k=1}^m a_k p_k$  и  $\Delta v + \omega v = \omega \sum_{k=1}^m a_k p_k$ ) функции

$$\tilde{v} = 0 \quad \text{и} \quad v = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_r u_r,$$

где  $b_k$  — произвольные постоянные. Таким образом, мы имеем

$$u = v \quad \text{и} \quad \Delta u = -\omega \sum_{k=1}^r b_k u_k.$$

Из условий  $(p_k, \Delta v + \Delta \tilde{v}) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , получаем систему  $m$  линейных однородных уравнений

$$\sum_{k=1}^r b_k (p_j, u_k) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

с  $r$  неизвестными  $b_k$ . Здесь число уравнений меньше числа неизвестных, так что всегда существует одно или несколько ненулевых линейно независимых решений, которым соответствует столько же независимых решений  $u = v$  для  $m$ -й промежуточной задачи. Таким образом, мы получили следующий результат:

*Собственное значение  $\omega$ , кратность которого в спектре задачи о мембране больше  $m$ , всегда принадлежит спектру  $m$ -й промежуточной задачи.*

Кратность  $\rho$  ( $> 0$ ) такого собственного значения  $\omega$  не меньше числа линейно независимых решений системы

$$\sum_{k=1}^r b_k(p_j, u_k) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Чтобы точно определить  $\rho$ , нужно учесть также возможные ненулевые решения системы  $\sum_{k=1}^m a_k(p_k, u_j) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ , для которых соответствующие  $v$  и  $\tilde{v}$  удовлетворяют условиям

$$(p_k, \Delta v + \Delta \tilde{v}) = (p_k, \Delta u) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Хотя мы можем в каждом случае определить кратность каждого  $\omega$  в спектре  $m$ -й задачи, дать общее правило нелегко. Заметим, однако, что если мы начнем испытывать последовательные собственные значения базовой задачи, то эту трудность можно устранить, если выбрать число вспомогательных функций  $m$  по крайней мере не меньшим, чем кратность  $r$  проверяемого собственного значения  $\omega$ .

**10. Случай  $r = m$ . Различающие последовательности. Уравнение Вайнштейна для консервативных собственных значений.**

В случае  $r = m$  мы имеем систему  $\sum_{k=1}^r a_k(p_k, u_j) = 0$ ,  $j = 1, \dots, r$ , из  $r$  уравнений с  $r$  неизвестными  $a_1, a_2, \dots, a_r$ . Очевидно, что исследование упростится, если предположить, что определитель  $|(p_k, u_j)|$  этой системы не равен нулю. В этом случае система имеет только тривиальные решения  $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$ , и тогда не возникает та трудность, с которой мы встретились ранее в случае  $r > m$ . Действительно, мы получаем, что  $\tilde{v} = 0$  и  $v = b_1 u_1 + \dots + b_r u_r$ , так что уравнения  $(p_k, \Delta v + \Delta \tilde{v}) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^r b_k(p_j, u_k) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r).$$

Определитель этой системы получается транспонированием определителя системы  $\sum_{k=1}^r a_k(p_k, u_j) = 0$  и потому не равен нулю.

Следовательно,  $b_1 = b_2 = \dots = b_r = 0$ , и, значит, функция  $u = v + \tilde{v}$  тождественно равна нулю, так что  $\omega$  не будет собственным значением  $m$ -й промежуточной задачи.

Простота этого результата побуждает нас выбрать специальным образом основную последовательность  $p_1, p_2, \dots$ , которая до сих пор строилась произвольно. Будем говорить, что последовательность, состоящая из  $r = r_n$  гармонических функций  $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots, p_{r_n}^{(n)}$ , является *присоединенной к собственному значению*  $\omega_n$ , если определитель  $|(p_k^{(n)}, u_j^{(k)})|$ ,  $j, k = 1, 2, \dots, r_n$ , отличен от нуля.

Справедлива следующая теорема существования: *для каждого*  $n = 1, 2, \dots$  *существует последовательность, присоединенная к собственному значению*  $\omega_n$ .

Для доказательства заметим, что такой последовательностью является, например, последовательность гармонических функций  $p_k^{(n)}(x, y)$ ,  $k = 1, 2, \dots, r_n$ , значения которых на границе равны нормальным производным собственных функций  $u_k^{(n)}$ . Действительно, если  $w = 0$  на границе, то по формуле Грина (см., например, гл. VI, п. 5) мы имеем  $(p, \Delta w) = \int_C p (\partial w / \partial n) ds$ ,

и, следовательно,

$$\begin{aligned} (p_k^{(n)}, u_j^{(n)}) &= -\frac{1}{\omega_n} (p_k^{(n)}, \Delta u_j^{(n)}) = -\frac{1}{\omega_n} \int_C p_k^{(n)} \frac{\partial u_j^{(n)}}{\partial n} ds = \\ &= -\frac{1}{\omega_n} \int_C p_k^{(n)} p_j^{(n)} ds. \end{aligned}$$

Таким образом, определитель  $|(p_k^{(n)}, u_j^{(n)})|$  равен с точностью до множителя  $(-1/\omega_n)r_n^2$  определителю Грама

$$\left| \int_C p_k^{(n)} p_j^{(n)} ds \right| \quad (j, k = 1, 2, \dots, r_n)$$

для функций  $p_k^{(n)}(s) = \partial u_k^{(n)} / \partial n$ . Но из линейной независимости собственных функций  $u_k^{(n)}(x, y)$  сразу следует (см., например, Вайнштейн [1]), что их нормальные производные  $p_k^{(n)}(s) = \partial u_k^{(n)} / \partial n$  также являются линейно независимыми, и, следовательно, их определитель Грама не равен нулю, что и требовалось доказать.

Назовем теперь *различающей последовательностью* такую последовательность линейно независимых гармонических функций  $p_1(x, y), p_2(x, y), \dots$ , которая для любого  $\omega_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , содержит присоединенную к  $\omega_n$  последовательность. Промежуточную задачу, построенную при помощи таких функций  $p_i(x, y)$ , будем называть *различающей задачей*.

Такую последовательность легко построить. Для этого можно, например, выписать одну за другой присоединенные последовательности для каждого  $\omega_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , а затем исключить из полученной последовательности члены, являющиеся линейными комбинациями предшествующих членов. В частности, если мы положим  $p_k^{(n)}(s) = \partial u_k^{(n)} / \partial n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ;  $k = 1, 2, \dots, r_n$ ), то тем самым будет построена последовательность, которая однозначно определяется задачей о колебаниях мембраны. Мы будем называть ее *регулярной различающей последовательностью*. Заметим, что она является полной на границе в том смысле, что только тождественно равная нулю функция может быть ортогональной каждой функции  $p_k(s)$  последовательности. Это естественно приводит к предположению, доказанному Ароншайном и Вайнштейном [1], что спектры промежуточных задач, построенных при помощи такой последовательности, сходятся при увеличении  $n$  к спектру задачи о зажатой пластине. К этой теме мы вернемся еще в гл. IX и X. Отметим здесь только следующий факт (см. Колотти [1]): последовательность  $p_k(x, y)$  гармонических функций, совпадающих с  $\partial u_k / \partial n$  в регулярных точках границы, полна в классе гармонических функций с интегрируемым квадратом в области  $D$ , имеющей конечное число угловых точек, при условии, что каждая функция  $p$  непрерывна в  $D + \gamma$ , где  $\gamma$  — любая дуга границы, не содержащая угловой точки.

**11. Случай  $r < m$ .** Мы готовы теперь рассмотреть третий случай  $r < m$ , когда  $r = r_n$ , кратность  $n$ -го собственного значения  $\omega = \omega_n$  мембраны, меньше, чем число  $m$  функций  $p_i(x, y)$ , при помощи которых построена промежуточная задача. Нам нужно определить кратность  $\rho = \rho_n (\geq 0)$  собственного значения  $\omega$  в спектре промежуточной задачи.

Пусть снова  $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \dots, u_r^{(n)}$  образуют базис собственного подпространства, отвечающего собственному значению  $\omega$ , и пусть  $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \dots, p_{\alpha_r}$  — последовательность, присоединенная к  $\omega$ . Чтобы избежать двойных индексов, будем обозначать ее через  $p_1, p_2, \dots, p_r$ . Тогда  $|(p_k, u_j^{(n)})| \neq 0$ ,  $j, k = 1, 2, \dots, r$ .

Отметим теперь тот очевидный факт, что, не изменяя спектра промежуточной задачи, можно заменить функции  $p_1, p_2, \dots, p_m$  другими функциями  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , которые порождают то же линейное подпространство. В частности, оставляя первые  $r$  функций  $p_1, p_2, \dots, p_r$  неизменными, можно заменить остальные функции  $p_{r+q}$ ,  $q = 1, 2, \dots, m - r$ , функциями  $\hat{p}_{r+q}$ , каждая из которых ортогональна собственному подпространству мембраны, отвечающему собственному значению  $\omega$ . Для этого нужно

ПОЛОЖИТЬ

$$\hat{p}_{r+q} = p_{r+q} - \sum_{h=1}^r A_{qh} p_h$$

и определить коэффициенты  $A_{q1}, A_{q2}, \dots, A_{qr}$  из  $r$  условий ортогональности

$$(\hat{p}_{r+q}, u_j^{(n)}) = (p_{r+q}, u_j^{(n)}) - \sum_{h=1}^r A_{qh} (p_h, u_j^{(n)}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r).$$

А это, безусловно, можно сделать, поскольку для каждого фиксированного  $q$  эта система из  $r$  уравнений для определения  $r$  неизвестных имеет ненулевой определитель  $|(p_h, u_j^{(n)})|$ . Предполагая, что функции  $\hat{p}_{r+q}$  уже найдены таким способом, для упрощения обозначений мы будем опускать крышки над  $p$ . Тогда, поскольку  $(p_h, u_j^{(n)}) = 0$  при  $h > r$  и  $|(p_h, u_j^{(n)})| \neq 0$ , система уравнений  $\sum_{k=1}^m a_k (p_k, u_j^{(n)}) = 0$  сводится к системе

$$\sum_{k=1}^r a_k (p_k, u_j^{(n)}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r)$$

с отличным от нуля определителем, и, следовательно,  $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$ . Таким образом, вместо  $\Delta v + \omega v = \omega \sum_{k=1}^m a_k p_k$  мы можем

писать  $\Delta v + \omega v = \omega \sum_{k=r+1}^m a_k p_k$ , и, поскольку функции  $p_{r+q}$  ортогональны собственным функциям  $u_j^{(n)}$ , это уравнение имеет решение при любых  $a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_m$ . Тогда общее решение уравнения  $\Delta v + \omega v = \omega \sum_{k=r+1}^m a_k p_k$  запишется в виде

$$v = \omega \sum_{j=r+1}^m a_j v_j - \sum_{k=1}^r b_k u_k^{(n)},$$

где постоянные  $b_k$  произвольны, а функции  $v_j$  удовлетворяют уравнениям

$$\Delta v_j + \omega v_j = p_j \quad (v_j = 0 \text{ на границе, } j = r+1, \dots, m).$$

Обозначим через  $v_{r+1}^{(0)}, \dots, v_m^{(0)}$  некоторый набор частных решений этих уравнений. Общее решение можно записать тогда в виде

$$v_j = v_j^{(0)} + \sum_{\sigma=1}^r C_{j\sigma} u_{\sigma}^{(n)} \quad (j = r+1, \dots, m)$$

с произвольными постоянными  $C_{j\sigma}$ . Если мы теперь определим функции  $\tilde{v}_j$  и  $w = v + \tilde{v}$ , как и раньше, то будем иметь  $\tilde{v} = \omega \sum_{j=r+1}^m a_j \tilde{v}_j$ , где  $\tilde{v}_j$  обозначает (единственное) решение уравнения

$$\Delta \tilde{v}_j - \omega \tilde{v}_j = p_j \quad (\tilde{v}_j = 0 \text{ на } C; j = r+1, \dots, m).$$

Положим

$$w_j = v_j + \tilde{v}_j = v_j^{(0)} + \sum_{\sigma=1}^r C_{j\sigma} u_\sigma^{(n)} + \tilde{v}_j.$$

Тогда

$$w = - \sum_{k=1}^r b_k u_k^{(n)} + \omega \sum_{j=r+1}^m a_j w_j.$$

Промежуточные граничные условия  $(p_k, \Delta w) = 0$  можно записать теперь в виде системы из  $m$  уравнений с  $m$  неизвестными  $b_1, b_2, \dots, b_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_m$ :

$$\sum_{h=1}^r b_h (p_k, u_h^{(n)}) + \sum_{j=r+1}^m a_j (p_k, \Delta w_j) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

и поскольку определитель  $|(p_k, u_\sigma^{(n)})|$ ,  $k, \sigma = 1, 2, \dots, r$ , не равен нулю, эту систему можно упростить, выбирая постоянные  $C_{j\sigma}$  так, чтобы

$$(p_k, \Delta w_{r+q}) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r; q = 1, 2, \dots, m-r).$$

Но если  $\omega$  принадлежит спектру  $m$ -й промежуточной задачи, то числа  $b_1, \dots, b_r, a_{r+1}, \dots, a_m$  не равны нулю одновременно, и, значит, определитель системы

$$\begin{vmatrix} (p_1, u_1^{(n)}) \dots (p_1, u_r^{(n)}) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (p_r, u_1^{(n)}) \dots (p_r, u_r^{(n)}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (p_{r+1}, \Delta w_{r+1}) \dots (p_{r+1}, \Delta w_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & (p_m, \Delta w_{r+1}) \dots (p_m, \Delta w_m) \end{vmatrix}$$

должен обращаться в нуль. В этом определителе в правом верхнем углу стоит нулевой блок, поскольку функции  $p_{r+q}$  ортогональны собственному подпространству мембраны, отвечающему собственному значению  $\omega$ . В левом нижнем углу также стоит нулевой блок, так как  $(p_k, \Delta w_{r+q}) = 0$ .

Поскольку мы имеем дело с различающей последовательностью, главный минор  $(p_k, u_j^{(n)})$ , где  $j, k = 1, 2, \dots, r$ , не равен

нулю, и мы получаем искомое уравнение Вайнштейна для консервативных собственных значений

$$|(p_k, \Delta w_j)| = 0 \quad (j, k = r + 1, r + 2, \dots, m),$$

которое дает необходимое условие того, чтобы  $\omega$  принадлежало спектру  $m$ -й промежуточной задачи.

Проводя рассуждения в обратном порядке, можно убедиться в том, что всякий корень  $\omega = \omega_n$  уравнения  $|(p_k, \Delta w_j)| = 0$  принадлежит спектру  $m$ -й промежуточной задачи, и его кратность  $\rho_n$  в этом спектре равна  $m - r_n - R$ , где  $r_n$  — кратность  $\omega = \omega_n$  в спектре мембраны, а  $R$  — ранг матрицы  $(p_k, \Delta w_j)$ ;  $j, k = r + 1, r + 2, \dots, m$ .

Уравнение Вайнштейна для консервативных собственных значений  $\mu = \omega$  можно записать в явном виде подобно тому, как это делалось в случае  $\mu \neq \omega$ , и воспользоваться проведенными там вычислениями. Чтобы различить эти два случая, будем ставить крышки над буквами в консервативном случае  $\mu = \omega$ , а эти же буквы без крышек будем использовать в неконсервативном случае  $\mu \neq \omega$ . Положим

$$\hat{w}_{r+q} = w_{r+q} - \sum_{h=1}^r A_{qh} w_h \quad (q = 1, 2, \dots, m - r),$$

где постоянные  $A_{qh}$  определяются так же, как в неконсервативном случае. В уравнениях

$$\Delta v + \omega v = \omega \sum_{k=r+1}^m a_k p_k \quad \text{и} \quad \Delta \hat{v}_j - \omega \hat{v}_j = \hat{p}_j$$

напишем  $\mu$  вместо  $\omega$ . Тогда так же, как и раньше, мы получим искомое уравнение

$$|(p_k, \Delta \hat{w}_j)| = -2\mu^2 \left| \sum_{\sigma=1}^{\infty} \hat{c}_{\sigma}^{(j)} \hat{c}_{\sigma}^{(k)} \frac{\omega_{\sigma}^2}{\omega_{\sigma}^2 - \mu^2} \right| \quad (j, k = r + 1, \dots, m),$$

где  $\hat{c}_{\sigma}^{(k)} = (\hat{p}_k, u_{\sigma})$  и

$$\hat{c}_{\sigma}^{(r+q)} = c_{\sigma}^{(r+q)} - \sum_{h=1}^r A_{qh} c_{\sigma}^{(h)} \quad (q = 1, 2, \dots, m - r; \sigma = 1, 2, \dots).$$

Итак, данное здесь правило позволяет определить кратности  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ , с которыми собственные значения  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  входят в спектр  $m$ -й промежуточной задачи. С другой стороны, раньше мы выяснили, как находить собственные значения задачи, отличные от  $\omega$ . Таким образом, мы знаем все собственные значения  $m$ -й модифицированной задачи, меньшие  $\omega_{n+1}$ . Обозначим эти значения через  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M$ . Индекс  $M$  зави-

сит от  $m$  и стремится к бесконечности с ростом  $m$ . Последовательно придавая  $m$  значения  $1, 2, \dots$ , мы с каждым шагом не только будем получать нижние границы  $\mu_1^2, \mu_2^2, \dots, \mu_M^2$  для все большего числа собственных значений зажатой пластины, но в то же время улучшать оценки, полученные на предыдущем шаге.

**12. Изгиб зажатой пластины.** В своей работе [1] Вайнштейн рассматривал не только уравнение колебаний пластины  $\Delta \Delta u - \lambda u = 0$ , но также и уравнение  $\Delta \Delta w + \lambda \Delta w = 0$ , наименьшее собственное значение которого определяет продольное давление, при котором произойдет изгиб зажатой металлической пластины (см., например, Коллатц [1]). Граничные условия снова имеют вид  $u = 0, \partial u / \partial n = 0$ , но соответствующее частное Рэлея теперь другое, а именно

$$(\Delta \Delta u, u) / (\Delta u, u);$$

после интегрирования по частям его можно записать в виде

$$\iint_S (\Delta u)^2 dx dy / \iint_S (u_x^2 + u_y^2) dx dy.$$

Мы снова строим базовую задачу, отбрасывая условие защемления  $\partial u / \partial n = 0$  и заменяя его естественным краевым условием  $\Delta u = 0$ . Теперь можно точно так же, как и раньше, свести задачу к уравнению второго порядка колеблющейся мембраны. Действительно, имеем

$$\Delta \Delta u + \lambda \Delta u = \Delta (\Delta u + \lambda u) = 0,$$

так что

$$\Delta u + \lambda u = p(x, y, \lambda),$$

где  $p$  — гармоническая функция, т. е.  $\Delta p = 0$ . Но в силу того, что  $u = \Delta u = 0$  на границе,  $p = 0$  на границе. Гармоническая функция, равная нулю на границе, должна быть тождественным нулем (см., например, Курант и Гильберт [1]). Тогда из уравнения  $\Delta u + \lambda u = p(x, y, \lambda) = 0$  следует, что  $u$  является собственной функцией  $u_n$  оператора  $-\Delta$ , а  $\lambda$  — соответствующим собственным значением  $\lambda = \lambda_n = \omega_n$ .

Обратно, любая собственная функция  $u_n$  мембраны, т. е. оператора  $-\Delta$ , очевидно, будет решением нашей краевой задачи для уравнения четвертого порядка. Таким образом, базовая задача для изгиба пластины сводится к задаче о колебаниях мембраны.

Чтобы построить промежуточные задачи, снова выберем последовательность гармонических функций  $p_1(x, y), p_2(x, y), \dots$



. . . ,  $p_n(x, y)$ , . . . . Присоединяя к базовой задаче  $m$  вспомогательных условий

$$\int_C p_i(s) \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

мы получаем  $m$ -ю промежуточную задачу. Естественные краевые условия снова будут иметь вид  $\Delta u = \sum_{k=1}^m a_{mk} p_k(s)$ , и мы приходим к уравнению

$$\Delta u + \mu u = \mu \sum_{k=1}^m a_k p_k(x, y).$$

Дальнейшие рассуждения проходят так же, как и в случае задачи о колебаниях пластины.

В своей первой работе [1], посвященной этому методу, Вайнштейн рассмотрел квадратную пластину  $|x| \leq \pi/2$ ,  $|y| \leq \pi/2$  и вычислил нижнюю границу 5,1 для первого собственного значения  $\lambda_1$  задачи об изгибе зажатой пластины. Затем в работе [2] он получил для этого собственного значения чрезвычайно точные оценки  $5,30362 < \lambda < 5,31173$ . В гл. VI, п. 3, мы видели, что для квадратной мембраны  $|x| \leq \pi/2$ ,  $|y| \leq \pi/2$  спектр состоит из чисел 2, 5, 5, 8, 10, 10, . . . , так что второе собственное значение  $\lambda_2 = 5$  мембраны меньше первого собственного значения  $\Lambda_1$  задачи об изгибе пластины. Вайнштейн высказал предположение, что этот результат должен быть справедлив для пластины и мембраны произвольной, но одинаковой формы. Это предположение было доказано Пейном [1]. В следующем пункте мы приведем доказательство этого результата.

**13. Предположение Вайнштейна о первом собственном значении задачи об изгибе пластины.** Предположение Вайнштейна, которое нам нужно доказать, состоит в следующем: первое собственное значение задачи об изгибе зажатой пластины не меньше второго собственного значения мембраны с закрепленным краем той же формы, т. е.  $\lambda_2 \leq \Lambda_1$ .

Мы начнем с рекурсивного определения  $\lambda_2$ , а именно

$$\lambda_2 = \min \left[ D(\psi) / \iint \psi^2 dA \right]$$

по всем  $\psi$ , таким, что  $\iint u_1 \psi dA = 0$ , где  $u_1$  — первая собственная функция задачи о мембране. Здесь  $D(\psi) = \iint (\psi_x^2 + \psi_y^2) dx dy$ , а двойное интегрирование производится по некоторой области пло-

скости переменных  $x, y$ . В качестве пробных функций будем подставлять в частное Рэлея следующие две функции:

$$\psi_1 = a_1 W_1 + \frac{\partial W_1}{\partial x}, \quad \psi_2 = a_2 W_1 + \frac{\partial W_1}{\partial y},$$

где  $W_1$  — первая собственная функция пластины, удовлетворяющая уравнению  $\Delta^2 W + \Lambda \Delta W = 0$  и краевым условиям  $W = \partial W / \partial n = 0$ . Постоянные  $a_1$  и  $a_2$  выбираются так, чтобы выполнялось условие  $\iint u_1 \psi dA = 0$ .

Подстановка  $\psi_1$  и  $\psi_2$  в частное Рэлея дает следующие неравенства:

$$\lambda_2 \leq \frac{a_1^2 D(W_1) + D(\partial W_1 / \partial x)}{a_1^2 \iint W_1^2 dA + \iint (\partial W_1 / \partial x)^2 dA},$$

$$\lambda_2 \leq \frac{a_2^2 D(W_1) + D(\partial W_1 / \partial y)}{a_2^2 \iint W_1^2 dA + \iint (\partial W_1 / \partial y)^2 dA}.$$

Используя простое арифметическое неравенство

$$\frac{m + m'}{n + n'} > \min \left( \frac{m}{n}, \frac{m'}{n'} \right),$$

справедливое при любых положительных  $m, n, m', n'$ , мы получаем

$$\lambda_2 \leq \frac{(a_1^2 + a_2^2) D(W_1) + D(\partial W_1 / \partial x) + D(\partial W_1 / \partial y)}{(a_1^2 + a_2^2) \iint W_1^2 dA + D(W_1)}.$$

Но, поскольку  $W_1 = \partial W_1 / \partial n = 0$  на границе, из формулы Грина (гл. VI, п. 4) следует, что

$$D \left( \frac{\partial W_1}{\partial x} \right) + D \left( \frac{\partial W_1}{\partial y} \right) = \iint (\Delta W_1)^2 dA.$$

Подставляя это выражение в неравенство для  $\lambda_2$  и учитывая, что в силу неравенства Коши — Буняковского

$$D(W_1) \leq \frac{\iint (\Delta W_1)^2 dA}{D(W_1)} \iint W_1^2 dA,$$

а также что

$$\iint (\Delta W_1)^2 dA - \Lambda_1 D(W_1) = 0,$$

мы получаем искомое неравенство

$$\lambda_2 \leq \Lambda_1.$$

В случае круга, когда собственные элементы можно найти точно, собственные значения  $\lambda_2$  и  $\Lambda_1$  совпадают. Рассматривая

свойства соответствующих собственных функций, Пейн показал, что круг является единственной областью, для которой  $\lambda_2$  равно  $\Lambda_1$ .

**14. Численный пример: применение метода Вайнштейна для зажатой пластины под нагрузкой.** В ранних статьях Вайнштейн [1], [2] использовал свой метод для нахождения нижних граничных собственных значений зажатой ненагруженной квадратной пластины. К этой задаче мы еще вернемся в гл. X, а сейчас дадим численное решение несколько более общей задачи о нахождении наименьшего собственного значения квадратной зажатой пластины  $|x| < \pi/2$ ,  $|y| < \pi/2$  под нагрузкой.

Эта задача находит применение при рассмотрении приема звуковых сигналов мембраной микрофона, собственные частоты которой пропорциональны квадратным корням из вычисленных ниже собственных значений. Следующий ниже расчет взят из статьи Вайнштейна и Чайна [1] с небольшими изменениями в обозначениях. Задача на собственные значения в этом случае ставится так:

$$\Delta \Delta u - \tau \Delta u - \lambda u = 0$$

в области  $S$  с условиями

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

на границе  $C$ , где  $\tau$  — нагрузка, деленная на коэффициент жесткости пластины на изгиб.

При  $\tau = 0$  это уравнение сводится к рассмотренному выше уравнению  $\Delta \Delta u - \lambda u = 0$ . В случае  $\tau \neq 0$  потребуются лишь незначительные изменения в прежних рассуждениях. Так, вместо записи  $(\Delta - \lambda^{1/2})(\Delta + \lambda^{1/2})u = 0$ , которой мы пользовались в п. 2, рассматривая уравнение  $\Delta \Delta u - \lambda u = 0$ , мы будем иметь для уравнения  $\Delta \Delta u - \tau \Delta u - \lambda u = 0$  следующее представление:

$$(\Delta + \alpha)(\Delta - \beta)u = 0, \quad \alpha > 0, \beta > 0,$$

где  $\beta - \alpha = \tau$ ,  $\alpha\beta = \lambda$ , так что  $\lambda = \alpha(\alpha + \tau)$ , или

$$\alpha = -\frac{1}{2}\tau + \left(\frac{1}{4}\tau^2 + \lambda\right)^{1/2}, \quad \beta = \frac{1}{2}\tau + \left(\frac{1}{4}\tau^2 + \lambda\right)^{1/2}.$$

Далее, мы видим, как и в п. 5, что

$$u = z + \tilde{z} \text{ в } S + C,$$

где  $z$  и  $\tilde{z}$  являются решениями уравнений

$$\Delta z + \alpha z = 0,$$

$$\Delta \tilde{z} - \beta \tilde{z} = 0,$$

так что справедливо следующее тождество:

$$\Delta u = \Delta(z + \tilde{z}) = \beta \tilde{z} - \alpha z \quad \text{в } S + C.$$

Те же соображения, что и раньше, приводят к соответствующей вариационной задаче, которую мы обозначим через  $P$ :

$$\frac{(Hu, u)}{(u, u)} = \min,$$

где оператор  $H$  теперь имеет вид  $H = \Delta\Delta - \tau\Delta$ . Применяя формулу Грина, получаем

$$(Hu, u) = \int_S \int (\Delta u)^2 dx dy + \tau \int_S \int \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Чтобы получить возрастающую последовательность нижних границ для  $\lambda_i$ , начнем, как обычно, с того, что устраним в вариационной задаче  $P$  краевое условие  $\partial u / \partial n = 0$ . Тогда мы получим базовую задачу  $P_0$  с заданным условием  $u = 0$  и естественным условием  $\Delta u = 0$ , т. е. задачу о колебаниях закрепленной пластины под нагрузкой. Далее, так же как и раньше, базовая задача сводится к задаче о мембране. А именно из тождеств  $u = z + \tilde{z}$  и  $\Delta u = \beta \tilde{z} - \alpha z$ , а также из условий  $u = 0$ ,  $\Delta u = 0$  на  $S$  мы получаем, что  $z = 0$  и  $\tilde{z} = 0$  на  $S$ . Тогда из уравнения  $\Delta \tilde{z} - \beta \tilde{z} = 0$ ,  $\beta > 0$ , следует, что  $\tilde{z} = 0$  — тождественный нуль и, значит,  $u = z$ . Таким образом, собственные функции  $u$  задачи  $P_0$  о закрепленной пластине совпадают с собственными функциями  $z$  задачи о мембране  $\Delta u + \alpha u = 0$  в  $S$ ,  $u = 0$  на  $S$ , а собственные значения  $\lambda_{10}, \lambda_{20}, \dots, \lambda_{m0}, \dots$  задачи  $P_0$  связаны с собственными значениями  $\alpha$  мембраны соотношением  $\lambda = \alpha (\alpha + \tau)$ .

Чтобы получить возрастающую последовательность нижних границ для собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  исходной задачи  $P$ , мы связываем  $P_0$  и  $P$ , согласно прежнему плану, с помощью цепочки промежуточных вариационных задач  $P_1, P_2, \dots$ , решения которых можно выразить через решения задачи  $P_0$ .

Следуя описанной выше схеме, мы берем последовательность

$$p_1(x, y), p_2(x, y), \dots, p_{m-1}(x, y), p_m(x, y), \dots$$

гармонических функций с краевыми значениями

$$p_1(s), p_2(s), \dots, p_{m-1}(s), p_m(s), \dots$$

Тогда  $m$ -е собственное значение  $\lambda_{mn}$   $n$ -й промежуточной задачи  $P_n$  определяется с помощью вариационного (рекурсивного или

независимого) принципа, применяемого к вариационной задаче

$$\frac{(Hu, u)}{(u, u)} = \min$$

при заданном условии  $u = 0$ , при  $n$  вспомогательных условиях  $\int_C p_k (\partial u / \partial n) ds = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , и естественном условии

$$\Delta u = \sum_{k=1}^n a_{mk} p_k(s).$$

Сосредоточив внимание только на первом собственном значении, мы получим следующее правило для вычисления  $\lambda_{1n}$ .

Пусть  $z_i$  и  $\tilde{z}_i$  являются решениями уравнений

$$\begin{aligned} \Delta z_i + \alpha z_i &= 0, \\ \Delta \tilde{z}_i - \beta \tilde{z}_i &= 0 \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} z_i &= p_i(s), \\ \tilde{z}_i &= p_i(s), \end{aligned}$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  рассматриваются как параметры. Как мы выяснили выше, решения этих уравнений можно выразить через решения базовой задачи  $P_0$ . Положим  $u_i = z_i + \tilde{z}_i$  и вычислим элементы  $\alpha_{ij}(\lambda)$  определителя Вайнштейна, а именно

$$\alpha_{ij}(\lambda) = \int_C p_i \frac{\partial u_j}{\partial n} ds = \int_S \int p_i(x, y) (\beta \tilde{z}_j - \alpha z_j) dx dy.$$

Тогда можно утверждать, что  $\lambda_{1n}$  является наименьшим корнем уравнения

$$W(\lambda) = |\alpha_{ij}(\lambda)| = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

если только  $\lambda_{1n}$  меньше второго собственного значения  $\lambda_{20}$  базовой задачи. В частном случае квадратной пластины  $|x| \leq \pi/2$ ,  $|y| \leq \pi/2$  Вайнштейн и Чэйн выяснили, что удобно положить

$$p_i(x, y) = \frac{\operatorname{ch}(\beta_{2i-1}\pi/2) \operatorname{ch}(\alpha_{2i-1}\pi/2)}{\operatorname{ch}(2i-1)\pi/2} C(x, y),$$

где

$$C(x, y) = \operatorname{ch}(2i-1)x \cos(2i-1)y + \operatorname{ch}(2i-1)y \cos(2i-1)x$$

и

$$\alpha_{2i-1} = [(2i-1)^2 - \alpha]^{1/2}, \quad \beta_{2i-1} = [(2i-1)^2 + \beta]^{1/2}.$$

На границе мы имеем

$$p_i \left( \pm \frac{\pi}{2}, y \right) = \cos(2i+1)y \operatorname{ch} \beta_{2i-1} \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} \alpha_{2i-1} \frac{\pi}{2},$$

$$p_i \left( x, \pm \frac{\pi}{2} \right) = \cos(2i-1)x \operatorname{ch} \beta_{2i-1} \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} \alpha_{2i-1} \frac{\pi}{2}.$$

Тогда из уравнений для  $z_i$  и  $\tilde{z}_i$  получаем

$$z_i = -\operatorname{ch} \beta_{2i-1} \frac{\pi}{2} [\cos(2i-1)x \operatorname{ch} \alpha_{2i-1} y + \cos(2i-1)y \operatorname{ch} \alpha_{2i-1} x],$$

$$\tilde{z}_i = \operatorname{ch} \alpha_{2i-1} \frac{\pi}{2} [\cos(2i-1)x \operatorname{ch} \beta_{2i-1} y + \cos(2i-1)y \operatorname{ch} \beta_{2i-1} x].$$

Подставляя выражения для  $p_i(x, y)$ ,  $z_i$  и  $\tilde{z}_i$  в формулу для элемента  $\alpha_{ij}$  определителя Вайнштейна, мы получим после несложных вычислений, что

$$\alpha_{ij} = 4 \operatorname{ch} \alpha_{2i-1} \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} \alpha_{2j-1} \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} \beta_{2i-1} \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} \beta_{2j-1} \frac{\pi}{2} (A_{ij} + B_{ij}),$$

где

$$A_{ij} = A_{ji} = \frac{2(2j-1)(2i-1)(-1)^{i+j}}{(2i-1)^2 + (2j-1)^2} \left( \frac{\beta}{\beta_{2j-1}^2 + (2i-1)^2} + \frac{\alpha}{\alpha_{2j-1}^2 + (2i-1)^2} \right),$$

$$B_{ii} = \frac{1}{2} \left[ \beta_{2i-1} \pi \operatorname{th} \beta_{2i-1} \frac{\pi}{2} - \alpha_{2i-1} \pi \operatorname{th} \alpha_{2i-1} \frac{\pi}{2} \right],$$

$$B_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Результаты вычислений приведены в следующей таблице (эта таблица начинается со значения  $\tau = 5$ ; соответствующие результаты для  $\tau = 0$  даны в таблице в конце гл. X):

$\tau$	Закрепленная пластина		Зажатая пластина			
	1-е собств. значение $\lambda_1^{(0)}$	2-е собств. значение $\lambda_2^{(0)}$	$\lambda_1^{(1)}$	$\lambda_2^{(1)}$	$\lambda_3^{(1)}$	Метод Рэлея—Ритца
5	14	50	24,982	25,222	25,236	25,509
10	24	75	36,639	36,845	36,862	37,443
15	34	100	48,084	48,253	48,284	49,261
20	44	125	59,289	59,452	59,491	61,008
30	64	175	81,651	81,760	81,809	84,372
50	104	275	125,43	125,56	125,59	130,85
100	204	535	225,56	225,63	225,65	246,58
200	404	1 025	443,15	443,24	443,25	477,58

Во втором и третьем столбцах этой таблицы приведены значения  $\lambda_{10}$  и  $\lambda_{20}$  для закрепленной пластины. Следующие три столбца дают наименьший корень определителя Вайнштейна при  $m = 1, 2, 3$ . Поскольку эти корни меньше соответствующего собственного значения  $\lambda_{20}$ , они совпадают, согласно общей теории, с собственными значениями  $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}$  и дают возрастающую последовательность нижних границ для искомого наименьшего собственного значения исходной задачи  $P$ . Соответствующие верхние границы, вычисленные по методу Рэля — Ритца, расположены в последнем столбце таблицы. Они получены подстановкой в вариационную задачу  $P$  (см. упр. 2 ниже) пробных функций

$$u = A \cos^2 x \cos^2 y + B \cos^3 x \cos^3 y.$$

Сравнение с  $\lambda_{13}$  показывает, что ошибка в значениях  $\lambda_1$  при малых нагрузках не превосходит 1,2%, а при больших нагрузках — 7% и может быть значительно меньше. Так как  $\lambda_{13}$  мало отличается от  $\lambda_{12}$ , нижняя граница, по-видимому, дает лучшее приближение к истинному значению  $\lambda_1$ , чем верхняя граница, полученная методом Рэля — Ритца.

## У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Провести вычисления по методу Рэля — Ритца для настоящей задачи при  $\tau = 5$ , взяв в качестве подпространства Ритца  $A \cos^2 x \cos^2 y$ . Сравнить полученные результаты с числами последнего столбца приведенной выше таблицы. Сделать то же самое для подпространства Ритца  $B \cos^3 x \cos^3 y$ , а затем для

$$A \cos^2 x \cos^2 y + B \cos^3 x \cos^3 y.$$

2. Определите спектр задачи (продольный изгиб зажатого стержня)

$$u^{(4)}(x) + \lambda u^{(2)}(x) = 0, \quad |x| \leq \frac{\pi}{2}, \quad u\left(-\frac{\pi}{2}\right) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

сначала элементарными средствами, а затем по методу Вайнштейна. *Указание:* сведите базовую задачу к задаче о колебаниях струны, а затем постройте промежуточные задачи с помощью двух функций  $p_1(x) = 1$ ,  $p_2(x) = x$ . Оказывается, что вторая промежуточная задача почти совпадает с исходной задачей (см. Вайнштейн [1]).

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Превосходное изложение метода Вайнштейна и некоторые его уточнения читатель может найти в следующих статьях: Арф [1], Вайнбергер [1—3], Вайнштейн [2—5].

## ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

**1. Цель главы.** В предыдущих главах, посвященных применениям методов Рэлея — Ритца и Вайнштейна к крайевым задачам, мы оставили без ответа некоторые важные вопросы существования предельных функций и сходимости последовательных приближений. В следующей главе, следуя Ароншайну, мы применим метод Вайнштейна к задаче, тесно связанной с рассмотренными ранее, а именно к задаче вычисления собственных значений операторов в гильбертовом пространстве. При этом выяснится, что, когда рассматриваемые операторы вполне непрерывны (см. ниже), можно дать утвердительный ответ на вопросы существования и сходимости, которые нами до сих пор не затрагивались.

Далее естественно возникает вопрос, можно ли свести наши крайевые задачи к задачам на собственные значения для вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве и получить тем самым необходимые результаты относительно существования и сходимости. Мы увидим, что крайевые задачи, которые были рассмотрены ранее, действительно допускают такое сведение. В гл. IX мы осуществим такое преобразование для задачи о колебаниях пластины и дадим численный пример. Настоящая глава содержит необходимые основные сведения о линейных операторах в абстрактном гильбертовом пространстве.

**2. Свойства гильбертова пространства. Их непротиворечивость и полнота.** Для удобства сформулируем снова пять свойств гильбертова пространства, с которыми мы познакомились в гл. V.

**О п р е д е л е н и е.** Множество  $\mathfrak{H}$  элементов  $u, v, \dots$ , называемых также *векторами* или *точками*, является (вещественным) *гильбертовым пространством*, если оно обладает следующими пятью свойствами:

**С в о й с т в о 1.** Множество  $\mathfrak{H}$  является *линейным* пространством, т. е.



а) для любых двух элементов  $u$  и  $v$  существует элемент  $u + v$ , такой, что

$$u + v = v + u \quad \text{и} \quad u + (v + w) = (u + v) + w$$

при любых  $u, v, w \in \mathfrak{H}$ ;

б) для любого  $u$  и для любого вещественного  $a$  существует элемент  $au$ , такой, что

$$a(u + v) = au + av; \quad (a + b)u = au + bu;$$

$$(ab)u = a(bu); \quad 1 \cdot u = u$$

для всех  $u, v \in \mathfrak{H}$  и всех вещественных  $a, b$ ;

с) существует нулевой элемент  $0$ , такой, что для любого  $u \in \mathfrak{H}$

$$u + 0 = u, \quad 0 \cdot u = 0.$$

Обычно при определении гильбертова пространства предполагается, что коэффициенты  $a$  могут принимать комплексные значения, но мы ограничимся так называемым вещественным гильбертовым пространством, требуя, чтобы коэффициенты  $a$ , а также и скалярное произведение, определяемое ниже, были вещественными. Вместо  $u + (-1)v$  мы будем писать  $u - v$ .

**Свойство 2.** Для любых двух элементов  $u, v \in \mathfrak{H}$  определено вещественное число  $(u, v)$ , называемое *скалярным произведением*  $u$  и  $v$ , такое, что при всех  $u, v, w \in \mathfrak{H}$  и при любом вещественном  $a$

$$\text{а) } (au, v) = a(u, v);$$

$$\text{б) } (u + v, w) = (u, w) + (v, w);$$

$$\text{с) } (v, u) = (u, v);$$

$$\text{д) } (u, u) > 0, \text{ если } u \neq 0.$$

Квадратный корень из скалярного произведения  $(u, u) = \|u\|^2$  элемента  $u$  на себя называется *нормой*  $u$  и обозначается через  $\|u\|$ .

**Свойство 3.** Пространство  $\mathfrak{H}$  *бесконечномерно*. Это означает, что для любого  $n = 1, 2, 3, \dots$  существует  $n$  *линейно независимых* элементов  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , таких, что  $a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n = 0$  только тогда, когда  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ .

**Свойство 4.** Пространство  $\mathfrak{H}$  является *полным*, т. е. любая последовательность Коши в  $\mathfrak{H}$  сходится к некоторому элементу из  $\mathfrak{H}$ . Более точно, если последовательность  $\{u_n\}$  элементов  $\mathfrak{H}$  такова, что  $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\| = 0$ , то существует элемент  $u \in \mathfrak{H}$ , такой, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\| = 0$ .

**Свойство 5.** Пространство  $\mathfrak{H}$  *сепарабельно*. Это означает, что существует последовательность элементов из  $\mathfrak{H}$ , *всюду плотная* в  $\mathfrak{H}$ , т. е. существует последовательность  $\{u_n\} \in \mathfrak{H}$ , такая, что для любого  $v \in \mathfrak{H}$  и любого  $\varepsilon > 0$  имеет место неравенство  $\|u_n - v\| < \varepsilon$  при некотором  $u_n \in \{u_n\}$ .

Как и в гл. I, возникает вопрос, не противоречат ли эти пять свойств друг другу. Построив простой пример множества, обладающего всеми пятью свойствами, мы снова получим ответ на этот вопрос.

Рассмотрим множество  $\mathfrak{H}$ , элементами которого являются все последовательности вещественных чисел  $u = (c_1, c_2, \dots)$ , такие, что ряд из квадратов  $c_1^2 + c_2^2 + \dots$  сходится, а скалярное произведение двух элементов  $u = (c_1, c_2, \dots)$  и  $v = (d_1, d_2, \dots)$  определяется следующим образом:

$$(u, v) = c_1 d_1 + c_2 d_2 + \dots$$

Нетрудно доказать, что этот ряд всегда сходится (см., например, Стоун [1]). Естественно положить  $0 = (0, 0, \dots)$ , сумму  $u + v$  определить как  $(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots)$ , а  $au$  определить как  $(au_1, au_2, \dots)$ . Тогда легко проверить, что это пространство будет обладать всеми пятью свойствами. Это гильбертово пространство мы будем обозначать через  $l_2$ .

Кроме того, эти пять свойств образуют полную систему аксиом, как будет доказано ниже, а именно мы покажем, что любое гильбертово пространство изоморфно и изометрично  $l_2$ .

**3. Подпространства. Замкнутость и полнота. Полные ортонормированные системы. Проекция.** Существенная разница между гильбертовым пространством  $\mathfrak{H}$  и  $n$ -мерным пространством выясняется при рассмотрении подпространств. Определение *линейного многообразия*  $\mathfrak{M}$  в  $\mathfrak{H}$  остается таким же, как и в случае евклидовых пространств, рассмотренных в гл. I. Таким образом, если каждый элемент  $\mathfrak{M}$  является линейной комбинацией фиксированного конечного множества  $v_1, v_2, \dots, v_n$  элементов  $\mathfrak{M}$ , то ясно, что  $\mathfrak{M}$  само будет  $n$ -мерным евклидовым пространством, вложенным в  $\mathfrak{H}$ . Но если  $\mathfrak{M}$  бесконечномерно, то оно может и не быть гильбертовым пространством.

Чтобы убедиться в этом, введем понятие *предельной точки* множества  $\mathfrak{M}$  как такой точки пространства  $\mathfrak{H}$ , которая является пределом последовательности различных элементов  $\mathfrak{M}$ . (Здесь и далее мы позволяем себе пользоваться терминами, которые были введены для функциональных пространств в гл. IV. Например, элемент  $u$  является *пределом* последовательности элементов  $\{u_n\}$ , если  $\lim \|u - u_n\| = 0$ ; элементы  $u$  и  $v$  взаимно *ортого-*

нальны, если  $(u, v) = 0$ ; последовательность  $\{u_n\}$ , для которой  $(u_n, u_n) = 1$  и  $(u_m, u_n) = 0$  при  $n \neq m$ , называется ортонормированной и т. д.) Множество точек из  $\mathfrak{M}$  называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Для любого множества  $\mathfrak{M}$  множество  $\overline{\mathfrak{M}}$ , состоящее из точек  $\mathfrak{M}$  и его предельных точек, называется *замыканием*  $\mathfrak{M}$ . Легко видеть, что замыкание любого множества замкнуто. Если линейное многообразие не является замкнутым, то оно, очевидно, не может быть гильбертовым пространством, поскольку оно не полно. В качестве простого примера такого многообразия в  $l_2$  рассмотрим множество всех точек, являющихся конечными линейными комбинациями точек  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , где  $P_i$  — последовательность  $(0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$ , в которой на  $i$ -м месте стоит 1, а на остальных местах — нули. Это множество не является замкнутым, поскольку оно не содержит своей предельной точки  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$ . С другой стороны, легко проверить, что любое замкнутое бесконечномерное многообразие само является гильбертовым пространством. Кроме того, конечномерное многообразие является, очевидно, замкнутым. Поэтому мы будем называть *подпространством* пространства  $\mathfrak{H}$  замкнутое линейное многообразие.

С каждым множеством подпространств  $\mathfrak{H}^{(i)}$  можно связать два корректно определенных подпространства: их *пересечение*  $\mathfrak{L}$  и их *замкнутую сумму*  $\mathfrak{M}$ . А именно

а)  $\mathfrak{L}$  является наибольшим подпространством, которое содержится в любом  $\mathfrak{H}^{(i)}$ . Это значит, что если  $u \in \mathfrak{L}$ , то  $u \in \mathfrak{H}^{(i)}$  при любом  $i$ , и если  $\mathfrak{L}'$  — другое подпространство, обладающее этим свойством, то  $\mathfrak{L}' \subset \mathfrak{L}$ ;

б)  $\mathfrak{M}$  является наименьшим подпространством, содержащим все  $\mathfrak{H}^{(i)}$ , т. е. если  $u \in \mathfrak{H}^{(i)}$  при некотором  $i$ , то  $u \in \mathfrak{M}$ , и если  $\mathfrak{M}'$  — другое подпространство, обладающее этим свойством, то  $\mathfrak{M}' \supset \mathfrak{M}$ .

В самом деле, непосредственно проверяется, что множество  $\mathfrak{L}$  элементов, принадлежащих всем  $\mathfrak{H}^{(i)}$ , является замкнутым линейным многообразием, а тогда можно определить  $\mathfrak{M}$  как пересечение всех подпространств, содержащих любое  $\mathfrak{H}^{(i)}$ . Ясно, что  $\mathfrak{M}$  можно определить также как замыкание множества всех конечных линейных комбинаций векторов, взятых из различных  $\mathfrak{H}^{(i)}$ .

Говорят, что данное множество векторов  $\mathfrak{B}$  *порождает*  $\mathfrak{H}_1$  или что подпространство  $\mathfrak{H}_1$  *натянута* на это множество векторов, если  $\mathfrak{H}_1$  является пересечением всех подпространств, содержащих данное множество. В качестве порождающего множества векторов мы будем, как правило, рассматривать *ограниченную* последовательность, т. е. последовательность  $\{u_n\}$ , такую, что

$\|u_n\| < M$  для некоторой постоянной  $M$ . Точная нижняя граница таких постоянных  $M$  называется *границей* последовательности. Например, границей ортонормированной последовательности является единица.

Если  $\mathfrak{B}$  является *базисом*  $\mathfrak{E}_1$ , т. е. если  $\mathfrak{B}$  порождает  $\mathfrak{E}_1$ , но никакое собственное подмножество множества  $\mathfrak{B}$  не обладает этим свойством, то число входящих в  $\mathfrak{B}$  векторов (которое может быть и бесконечным), как нетрудно показать, не зависит от выбора  $\mathfrak{B}$  и называется *размерностью*  $\mathfrak{E}_1$ . В частности, если  $\{u_n\}$  является ортонормированной последовательностью в  $\mathfrak{E}_1$ , то для любого  $u \in \mathfrak{E}$  и любого целого  $n$  мы имеем

$$0 \leq \left\| u - \sum_{i=1}^n a_i u_i \right\|^2 = (u, u) - 2 \sum_{i=1}^n a_i (u_i, u_i) + \\ + \sum_{i=1}^n a_i^2 (u_i, u_i) = (u, u) - \sum_{i=1}^n a_i^2,$$

где  $a_i = (u, u_i)$ . Следовательно,  $\sum_{i=1}^n a_i^2 \leq (u, u)$  при любом  $n$ , так что

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i^2$  существует и справедливо *неравенство Бесселя*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 \leq \|u\|^2.$$

Если ортонормированная система  $\{u_n\}$  является *полной*, т. е. если только нулевой вектор может быть ортогональным всем  $u_n$ ,

то вместо неравенства Бесселя мы будем иметь равенство  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = \|u\|^2$ ,

которое называется *равенством Парсеваля*. Это следует из того, что в случае полной системы для любого элемента  $u$  имеет место

равенство  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i u_i$ , или, другими словами, каждый элемент  $u \in \mathfrak{E}$  представляется его *рядом Фурье*

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n + \dots, \quad a_i = (u, u_i).$$

В самом деле, если обозначить  $\sum_{i=1}^n a_i u_i$  через  $f_n$ , то

$$\|f_m - f_n\|^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^m a_i u_i \right\|^2 = \sum_{i=n+1}^m a_i^2 \quad (m > n).$$

Следовательно, поскольку ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$  сходится, мы получаем, что  $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\| = 0$ , откуда в силу полноты пространства  $\mathfrak{H}$  следует, что последовательность  $\{f_n\}$  сходится к некоторому  $f$ . Но  $f$  должно совпадать с  $u$ , поскольку

$$(f, u_i) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n, u_i \right) = a_i = (u, u_i)$$

для любого  $u_i$ , так что вектор  $f - u$  ортогонален любому  $u_i$  и потому является нулевым вектором. Таким образом, выписанный выше ряд Фурье сходится к  $u$ , что и утверждалось.

Обратно, если  $\{a_i\}$  — произвольный элемент  $l_2$ , то существует такой вектор  $u \in \mathfrak{H}$ , что  $(u, u_i) = a_i$ , и потому  $\|u\|^2 = \sum a_i^2$ .

Действительно, если мы положим  $f_n = \sum_{i=1}^n a_i u_i$ , то  $\{f_n\}$  будет последовательностью Коши элементов пространства  $\mathfrak{H}$ , и, значит, она сходится к некоторому элементу  $u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i$ , который, очевидно, обладает требуемыми свойствами. Легко проверить, что, сопоставив каждому элементу  $u \in \mathfrak{H}$  соответствующий элемент  $\{a_i\} \in l_2$ , мы получим упомянутые выше изоморфизм и изометрию между  $\mathfrak{H}$  и  $l_2$ .

Система  $\{u_n\}$ , которая порождает все  $\mathfrak{H}$ , называется *замкнутой*; существование по крайней мере одной такой системы следует из сепарабельности  $\mathfrak{H}$ . Очевидно, что замкнутая система  $\{u_i\}$  будет также и полной, поскольку произвольный элемент  $v$ , ортогональный каждому  $u_i$ , должен быть так же ортогонален любому элементу  $v_n$  последовательности

$$v_1 = a_{11}u_1, \quad v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2, \quad \dots, \quad v_n = a_{1n}u_1 + \dots + a_{nn}u_n, \quad \dots,$$

сходящейся к  $v$ . Следовательно, по непрерывности скалярного произведения  $(v, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} (v, v_n) = 0$ , и, значит,  $v$  — нулевой элемент, что и утверждалось.

Если мы, удалив из замкнутой системы  $\{v_n\}$  все элементы, являющиеся линейными комбинациями предшествующих элементов, образуем подсистему  $\{w_n\}$ , а затем с помощью описанного в гл. I процесса Грама — Шмидта ортонормируем последовательность  $\{w_n\}$ , то получим ортонормированную систему  $\{u_n\}$ , которая будет замкнутой и, следовательно, полной. Поскольку с помощью

такого же процесса, очевидно, можно построить ортонормированный базис для любого данного подпространства  $\mathfrak{M}$ , мы приходим к важному результату: любой элемент  $u \in \mathfrak{E}$  можно единственным образом представить в виде суммы  $u = v + w$ , где  $v \in \mathfrak{M}$ , а  $w \in \mathfrak{E} \ominus \mathfrak{M}$ . Действительно, если  $v_1, v_2, \dots$  — ортонормированный базис в  $\mathfrak{M}$ , а  $w_1, w_2, \dots$  — ортонормированный базис в  $\mathfrak{E} \ominus \mathfrak{M}$ , то

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} (u, v_i) v_i \quad \text{и} \quad w = \sum_{i=1}^{\infty} (u, w_i) w_i.$$

Элемент  $v$ , определенный таким образом, называется *проекцией*  $u$  на подпространство  $\mathfrak{M}$ . Относительно единственности проекции см. приведенные ниже упражнения.

*Полные ортонормированные системы* (сокращенно п. о. н. с.), построенные таким способом, будут играть в теории гильбертовых пространств такую же роль, как и прямоугольные координатные системы в евклидовом пространстве. Исходя из любой полной системы, можно построить с помощью процесса Грама — Шмидта полную ортонормированную систему, которая, как мы видели выше, является замкнутой. Мы установили также, что справедливо и обратное утверждение: любая замкнутая система полна. Таким образом, замкнутость и полнота в  $\mathfrak{E}$  являются эквивалентными понятиями.

## У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Доказать, что замыкание любого подмножества пространства  $\mathfrak{E}$  замкнуто.

2. Доказать, что проекция данного вектора на данное подпространство единственна.

3. Доказать, что любое замкнутое бесконечномерное многообразие в  $\mathfrak{E}$  само является гильбертовым пространством. (*Замечание:* совсем не очевидно, что любое подмножество сепарабельного пространства сепарабельно.)

4. Доказать, что любое конечномерное многообразие в  $\mathfrak{E}$  замкнуто.

5. Пусть  $\{\mathfrak{E}^{(i)}\}$  — некоторое множество подпространств пространства  $\mathfrak{E}$ , и пусть  $\mathfrak{L}$  — множество элементов, принадлежащих всем  $\mathfrak{E}^{(i)}$ . Доказать, что  $\mathfrak{L}$  является подпространством.

6. Доказать, что замкнутая сумма  $\mathfrak{M}$  некоторой совокупности подпространств  $\mathfrak{E}^{(i)}$  является замыканием множества всех конечных линейных комбинаций векторов, взятых по одному из различных подпространств  $\mathfrak{E}^{(i)}$ .

7. Привести пример замкнутого подпространства пространства  $l_2$  и полной системы в  $l_2$ .

8. Рассмотрим подмножество пространства  $l_2$ , состоящее из всех последовательностей  $a_1, a_2, \dots$ , у которых только конечное число элементов  $a_i$  отлично от нуля. Является ли оно гильбертовым пространством?

9. При каких вещественных  $p$  последовательность  $\{x_n\}$ , где  $x_n = n^p$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , принадлежит  $l_2^p$ ?

**4. Сильная и слабая сходимост.** Наличие бесконечной ортонормированной последовательности векторов является специфическим свойством, отличающим  $\mathfrak{H}$  от  $n$ -мерных евклидовых пространств. Ввиду этого необходимо различать в  $\mathfrak{H}$  два вида сходимости, слабую и сильную, которые в  $n$ -мерном пространстве совпадают.

*Сильная сходимост*, или просто *сходимост*, определяется, как и в гл. IV, т. е. последовательность  $\{u_n\}$  сходится к  $u$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0$ . Таким образом, п. о. н. с., хотя она и ограничена, не может быть сильно сходящейся и даже не содержит сильно сходящейся подпоследовательности, поскольку расстояние  $\|u_m - u_n\|$  между любыми двумя элементами  $u_n$  и  $u_m$  равно  $\sqrt{2}$ .

Это важное свойство  $\mathfrak{H}$ , состоящее в том, что ограниченная последовательность может не содержать сходящейся подпоследовательности, можно сформулировать иначе. Будем говорить, что подмножество  $\mathfrak{S}$  евклидова или гильбертова пространства  $\mathfrak{M}$  (при этом  $\mathfrak{S}$  может совпадать со всем  $\mathfrak{M}$ ) *компактно*, если любая бесконечная последовательность элементов  $\mathfrak{S}$  содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу из  $\mathfrak{S}$ . Например, единичный шар в евклидовом  $n$ -мерном пространстве, т. е. множество  $\mathfrak{S}$  векторов  $u$ , таких, что  $\|u\| \leq 1$ , компактен по теореме Больцано — Вейерштрасса, а единичный шар в  $\mathfrak{H}$ , как мы только что показали, не обладает этим свойством.

Но все доказательства теорем существования в гл. II опирались как раз на теорему Больцано — Вейерштрасса для евклидовых пространств. Поэтому, если мы хотим использовать аналогию между евклидовым и гильбертовым пространствами, чтобы доказать в дальнейшем существование собственных функций, необходимо найти такое свойство гильбертова пространства, которое бы наилучшим образом заменяло свойство компактности единичного шара в евклидовом пространстве.

Для этого заметим, что, хотя п. о. н. с.  $\{u_n\}$  и не является сильно сходящейся, тем не менее она обладает некоторыми свойствами сходящихся последовательностей. Например, если  $v$  — произвольный элемент  $\mathfrak{H}$ , то согласно равенству Парсеваля, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n, v)^2$  сходится к  $\|v\|^2$ , так что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v) = 0$ . Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v) = (0, v).$$

Это свойство п. о. н. с. можно сформулировать иначе: существует фиксированный вектор  $u$ , а именно  $u = 0$ , такой, что  $(u_n, v) \rightarrow (u, v)$  для любого  $v \in \mathfrak{H}$ .

Чтобы прояснить эту ситуацию, введем следующие определения:

i) Последовательность  $\{u_n\}$  элементов пространства  $\mathfrak{E}$ , обладающую тем свойством, что для любого  $p \in \mathfrak{E}$  последовательность вещественных чисел  $\{(p, u_n)\}$  является последовательностью Коши (и тем самым сходится), будем называть *слабой последовательностью Коши*.

ii) Если для данной последовательности  $\{u_n\}$  существует фиксированный элемент  $u$ , такой, что  $(u_n, v) \rightarrow (u, v)$  для любого  $v \in \mathfrak{E}$ , то будем говорить, что  $\{u_n\}$  *слабо сходится*, и называть  $u$  *слабым пределом*  $\{u_n\}$ . Слабая сходимость обозначается символом  $u_n \rightharpoonup u$ . (В лемме III далее доказывается, что любая слабая последовательность Коши слабо сходится.)

Ясно, что слабый предел определен единственным образом и что из сильной сходимости к  $u$  следует слабая сходимость к  $u$ , но обратное неверно. Таким образом, мы можем сформулировать полученный выше результат так: любая п. о. н. с. слабо сходится к нулевому элементу.

iii) Подмножество  $\mathfrak{E}$  гильбертова пространства  $\mathfrak{E}$  называется *слабо компактным*, если любая бесконечная последовательность элементов  $\mathfrak{E}$  содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу  $\mathfrak{E}$ .

Теперь мы можем доказать следующую важную теорему, ради которой главным образом и было введено понятие слабой сходимости:

*Единичный шар  $\|u\| \leq 1$  в гильбертовом пространстве слабо компактен.*

Доказательство этой фундаментальной теоремы опирается на четыре леммы.

**Л е м м а I.** *Если ограниченная последовательность  $\{u_n\}$  такова, что для каждого фиксированного элемента  $p_m$ , принадлежащего п. о. н. с.  $\{p_m\}$ , последовательность  $\{(u_n, p_m)\}$  сходится, то последовательность  $\{(p, u_n)\}$  сходится при любом  $p \in \mathfrak{E}$ ; другими словами,  $\{u_n\}$  является слабой последовательностью Коши.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** П. о. н. с.  $\{p_m\}$ , будучи полной, является также и замкнутой. Таким образом, для любого элемента  $u \in \mathfrak{E}$  и любого  $\varepsilon > 0$  можно найти конечную линейную комбинацию  $p$  векторов  $\{p_m\}$ , такую, что  $\|u - p\| < \varepsilon$ . Поскольку последовательность  $\{(p_m, u_n)\}$  сходится, существует такое целое число  $N(\varepsilon)$ , что для любых  $k, n > N(\varepsilon)$  имеет место нера-



венство  $|(p, u_k) - (p, u_n)| < \varepsilon$ . Тогда для таких  $k$  и  $n$  мы имеем

$$\begin{aligned} |(u - p, u_n - u_k)| &\leq \|u - p\| \|u_n - u_k\| \leq \\ &\leq \varepsilon (\|u_n\| + \|u_k\|) \leq 2M\varepsilon, \end{aligned}$$

где  $M$  — граница последовательности  $\{u_n\}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} |(u, u_n) - (u, u_k)| &\leq \\ &\leq |(u - p, u_k - u_n)| + |(p, u_k - u_n)| \leq 2M\varepsilon + \varepsilon, \end{aligned}$$

так что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u, u_n)$  существует, согласно критерию Коши для вещественных чисел.

**Л е м м а II.** Если последовательность  $\{u_n\}$  элементов пространства  $\mathfrak{H}$  такова, что последовательность  $|(u_n, v)|$  ограничена для любого  $v \in \mathfrak{H}$ , то  $\{u_n\}$  сама является ограниченной, т. е. ограничена последовательность  $\|u_n\|$ .

Положим  $|(u_n, v)| = |u_n(v)|$  и предположим противное: пусть последовательность  $\|u_n\|$  не ограничена. Тогда в любом шаре  $S(v_0, \varepsilon)$  с центром в точке  $v_0$  радиуса  $\varepsilon$  найдется элемент  $v$ , для которого последовательность  $\{u_n(v)\}$  не ограничена, т. е. для любого  $C$  существует вектор  $v \in S(v_0, \varepsilon)$  и номер  $n_0$ , такие, что

$$|u_{n_0}(v)| > C.$$

Действительно, в противном случае неравенство  $|(u_n, v)| \leq C$  выполнялось бы для всех  $v \in S(v_0, \varepsilon)$ , а, значит, в силу непрерывности  $u_n(v)$  и для всех  $v$ , принадлежащих границе  $S(v_0, \varepsilon)$ . Но тогда для всех  $v \in \mathfrak{H}$  выполнялось бы неравенство  $|u_n(v)| < (2C/\varepsilon) \|v\|$ , что можно доказать следующим образом.

Пусть  $v_\varepsilon = \varepsilon v / \|v\|$  и  $v_s = v_0 + v_\varepsilon$ . Тогда  $u_n(v_\varepsilon) = u_n(v_s) - u_n(v_0)$ . Но если  $|u_n(v_s)| \leq C$  и  $|(u_n, v_0)| < C$ , то  $|u_n(v_\varepsilon)| \leq 2C$ , и, следовательно,

$$|u_n(v)| = \frac{\|v\|}{\varepsilon} |u_n(v_\varepsilon)| \leq \frac{2C}{\varepsilon} \|v\|.$$

Полагая в этом неравенстве  $v = u_n$ , получим, что  $\|u_n\| \leq 2C/\varepsilon$ , вопреки нашему предположению. Следовательно, можно выбрать  $n_1$  и  $v_1$  так, чтобы

$$|u_{n_1}(v_1)| > 1.$$

Тогда в силу непрерывности  $u_{n_1}$  найдется  $\varepsilon_1 < 1/2$ , такое, что

$$|u_{n_1}(v)| > 1$$

для всех  $v$  в шаре  $S_1(v_1, \varepsilon_1)$ . Полагая последовательно  $m = 2, 3, 4, \dots$ , мы найдем номер  $n_m$  и элемент  $v_m$ , принадлежащий внутренности шара  $S_{m-1}(v_{m-1}, \varepsilon_{m-1})$ , так, чтобы

$$|u_{n_m}(v_m)| > m,$$

а затем выберем  $\varepsilon_m < 1/2^m$  так, чтобы шар  $S_m(v_m, \varepsilon_m)$  находился бы полностью в  $S_{n-1}$  и

$$|u_{n_m}(v)| > m$$

для всех  $v \in S_m$ .

Тогда  $\{v_m\}$  является последовательностью Коши<sup>1)</sup>, и по свойству 4 она сходится к некоторому вектору  $w$ , который, очевидно, принадлежит любому шару  $S_m$ . Но

$$|u_{n_1}(w)| > 1, |u_{n_2}(w)| > 2, \dots, |u_{n_m}(w)| > m, \dots,$$

а это противоречит предположению об ограниченности последовательности  $\{u_n(w)\}$ .

**Л е м м а III.** *Любая слабая последовательность Коши  $\{u_n\}$  слабо сходится.*

По лемме II существует такое  $M$ , что  $\|u_n\| < M$  для любого  $n$ . Положим  $f(v) = \lim (u_n, v)$ ; предел существует, поскольку  $\{u_n\}$  является слабой последовательностью Коши. Но  $|(u_n, v)| \leq \|u_n\| \|v\| \leq M \|v\|$ , так что  $f(v)$  — ограниченный линейный функционал, и по теореме Рисса, которая доказывается так же, как и в гл. I, п. 6,  $f(v)$  можно записать в виде

$$f(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v) = (u, v).$$

Следовательно,  $u_n \rightarrow u$ , что и требовалось доказать.

**Л е м м а IV.** *Если  $u_n \rightarrow u$  и  $v_n \rightarrow v$ , то  $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$ .*

Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned} |(u_n, v_n) - (u, v)| &= |(u_n - u, v_n) + (u, v_n - v)| \leq \\ &\leq |(u_n - u, v_n)| + |(u, v_n - v)|. \end{aligned}$$

Поскольку  $v_n \rightarrow v$ , то по лемме II существует постоянная  $b$ , такая, что  $\|v_n\| \leq b$ . Кроме того,  $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ , так как  $u_n \rightarrow u$ . Следовательно,

$$|(u_n - u, v_n)| \leq \|u_n - u\| \|v_n\| \rightarrow 0.$$

Но

$$|(u, v_n - v)| = |(u, v_n) - (u, v)| \rightarrow 0,$$

поскольку  $v_n \rightarrow v$ . Таким образом,  $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$ , что и утверждалось.

1) Действительно,  $\|v_m - v_n\| \leq \|v_m - v_{m+1}\| + \|v_{m+1} - v_{m+2}\| + \dots + \|v_{n-1} - v_n\| \leq \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^{m-1}}$ . — Прилм. ред.

Теперь мы докажем нашу основную теорему о том, что каждая последовательность  $\{u_n\}$  элементов единичного шара содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому вектору  $u$  этого шара. Пусть  $\{p_m\}$  — произвольная п. о. н. с. Тогда, поскольку  $\{u_n\}$  ограничена, последовательность  $\{(p_m, u_n)\}$  ограничена при любом  $p_m$  в силу неравенства Коши — Буняковского. Следовательно, можно выбрать подпоследовательность  $\{u_n^{(1)}\}$  последовательности  $\{u_n\}$  так, чтобы сходилась последовательность  $\{(p_1, u_n^{(1)})\}$ , а при  $m > 1$  можно выбрать подпоследовательность  $\{u_n^{(m)}\}$  последовательности  $\{u_n^{(m-1)}\}$  так, чтобы сходилась последовательность  $\{(p_m, u_n^{(m)})\}$ . Тогда при любом фиксированном  $m$  диагональная последовательность  $\{v_n\} = \{u_n^{(n)}\}$  начиная по крайней мере с  $m$ -го члена будет подпоследовательностью последовательности  $\{u_n^{(m)}\}$ . Следовательно,  $(p_m, v_n)$  сходится при любом фиксированном  $p_m$ , а тогда по лемме I последовательность  $(p, v_n)$  сходится при любом  $p \in \mathfrak{E}$ , и по лемме III существует вектор  $u$ , такой, что  $v_n \rightarrow u$ . Кроме того,  $\|u\| \leq 1$ , т. е.  $u$  принадлежит единичному шару. В самом деле, если бы  $\|u\| > 1$ , то, учитывая, что  $\|v_n\| \leq 1$ , мы имели бы по неравенству Коши — Буняковского

$$|(u, v_n)| \leq \|u\| \|v_n\| \leq \|u\| < \|u\|^2 = (u, u)$$

для любого  $v_n$ , а это невозможно, так как  $v_n \rightarrow u$ , и, значит,  $(u, v_n) \rightarrow (u, u)$ .

## У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Доказать, что любая последовательность в  $\mathfrak{E}$  имеет не более одного слабого предела.
2. Доказать, что из сильной сходимости следует слабая сходимость.

**5. Вполне непрерывные операторы.** Оператор  $H$  в пространстве определяется (гл. I) как преобразование, которое отображает множество  $\mathfrak{D}$  векторов  $u \in \mathfrak{E}$  на множество  $\mathfrak{R}$  векторов  $v = Hu \in \mathfrak{D}$ . Термин «отображает на» означает, что любой вектор, принадлежащий  $\mathfrak{R}$ , является образом некоторого вектора из множества  $\mathfrak{D}$ . Напоминаем читателю, что под словом «оператор» следует всюду понимать «линейный оператор» (см. определение в гл. I). Так же как и раньше, для данного оператора определяют понятия *области определения, области значений, обратного оператора*, а также понятия *суммы, произведения* и т. д. двух или более операторов.

Если  $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$  и  $\|Hu\| \leq c \|u\|$  для некоторого вещественного числа  $c$  при всех  $u \in \mathfrak{E}$ , то говорят, что  $H$  ограничен в  $\mathfrak{E}$

и точная нижняя граница всех таких  $s$  называется *нормой*  $H$ . Каждый рассматриваемый нами оператор будет либо ограниченным, либо обратным к некоторому ограниченному оператору. Такой оператор  $H$  называется *самосопряженным* в  $\mathfrak{E}$ , если  $(Hu, v) = (u, Hv)$  для любых  $u, v$  из области определения  $H$ . Мы будем рассматривать только самосопряженные операторы.

Оператор  $H$  называется *непрерывным*, если  $Hu_n \rightarrow Hu$  всякий раз, когда  $u_n \rightarrow u$ . Любой непрерывный оператор является ограниченным; нетрудно показать, что верно также и обратное (см. упражнения). Оператор  $H$  называется *идемпотентным*, если  $H^2u = Hu$  для любого  $u \in \mathfrak{D}$ . Оператор проектирования  $P_{\mathfrak{M}}$  на подпространство  $\mathfrak{M}$  определяется равенством  $P_{\mathfrak{M}}u = v$ , где  $v$  — проекция  $u$  на  $\mathfrak{M}$ . Легко проверить, что оператор проектирования является неотрицательно определенным и идемпотентным с нормой, равной единице. Оператор  $P_{\mathfrak{M}}H$ , рассматриваемый на подпространстве  $\mathfrak{M}$ , называется *частью оператора  $H$  в  $\mathfrak{M}$* . Ясно, что любая часть положительно определенного оператора является положительно определенным оператором.

Используя понятие сильной сходимости, можно переформулировать определение непрерывного оператора следующим образом: оператор  $H$  является *непрерывным*, если любую сильно сходящуюся последовательность элементов из  $\mathfrak{D}$  он преобразует в сильно сходящуюся последовательность элементов из  $\mathfrak{M}$ .

Но многие рассматриваемые в этой главе операторы обладают более сильным свойством, так называемой *полной непрерывностью*. Мы уже подчеркивали в предыдущих главах, что это свойство является для нас чрезвычайно важным. Оно состоит в следующем: *оператор  $H$  является вполне непрерывным, если любую слабо сходящуюся последовательность элементов из  $\mathfrak{D}$  он преобразует в сильно сходящуюся последовательность элементов из  $\mathfrak{M}$* .

Другими словами, вполне непрерывный оператор отображает любое ограниченное замкнутое множество из его области определения в компактное множество, к которому так же, как в гл. II, можно применять теоремы Вейерштрасса. Именно этим обстоятельством объясняется важная роль вполне непрерывных операторов, которую они играют в наших доказательствах существования собственных элементов.

Полная непрерывность влечет за собой непрерывность, и оба эти понятия совпадают в конечномерных пространствах. В силу этого вполне непрерывный оператор имеет норму, которую мы будем обычно обозначать через  $\lambda_1$ . Ясно, что сумма или разность двух вполне непрерывных операторов будет вполне непрерывным оператором. Кроме того, любая слабо сходящаяся последовательность переводится непрерывным оператором в слабо сходящуюся

ся последовательность, так как если  $u_n \rightarrow u$ , то  $(Hu_n, v) = (u_n, Hv) \rightarrow (u, Hv) = (Hu, v)$  для любого  $v$ . (Мы воспользовались здесь самосопряженностью  $H$ , но теорема справедлива и для несамосопряженных операторов.) Таким образом, произведение  $H_1 \dots H_n$  непрерывных операторов будет вполне непрерывным оператором, если хотя бы один из сомножителей вполне непрерывен.

## У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Доказать, что любой оператор проектирования является неотрицательно определенным идемпотентным оператором с нормой, равной единице.
2. Доказать, что если  $H$  положительно определен, а  $L$  — часть оператора  $H$  в подпространстве  $\mathfrak{M}$ , то  $L$  также положительно определен.
3. Построить две слабо сходящиеся последовательности  $\{u_i\}$  и  $\{v_i\}$  в  $l_2$  так, чтобы последовательность  $(u_i, v_i)$  расходилась.
4. Доказать, что всякий непрерывный оператор ограничен и обратен. (Указание: если  $H$  не ограничен, то существует такая последовательность  $\{v_m\}$ , что  $\|Hv_m\| > m \|v_m\|$ . Положить  $w_m = v_m/m \|v_m\|$ .)

**6. Спектр положительно определенного, вполне непрерывного оператора.** Пусть  $H$  — самосопряженный, положительно определенный, вполне непрерывный оператор. (Определение положительной определенности см. в гл. I.) Вещественное число  $\lambda$ , для которого уравнение  $Hu - \lambda u = 0$  имеет нетривиальное решение  $u$ , мы по-прежнему называем *собственным значением*  $H$ , а  $u$  — соответствующим *собственным вектором*. Так же как и в гл. I, можно доказать, что  $\lambda_i$  положительны и что любые два собственных вектора  $u_i$  и  $u_j$ , отвечающие различным собственным значениям  $\lambda_i$  и  $\lambda_j$ , ортогональны. Множество всех собственных векторов, отвечающих фиксированному собственному значению  $\lambda_i$ , образует замкнутое линейное многообразие  $\mathfrak{M}_i$ , называемое *собственным подпространством*, соответствующим  $\lambda_i$ . Размерность этого подпространства<sup>1)</sup> называется *кратностью*  $\lambda_i$ . Очевидно, что если мы возьмем некоторое множество собственных значений  $\lambda_i$ , то можно выбрать собственные векторы  $u_i$ , соответствующие  $\lambda_i$ , таким образом, чтобы они образовывали ортонормированную систему и порождали подпространство, натянутое на все собственные векторы, соответствующие данному множеству собственных значений. Для этого в каждом собственном подпространстве  $\mathfrak{M}_i$  нужно построить ортонормированный базис и взять объединение всех базисных векторов.

Сформулируем и докажем теперь основную теорему:

*Если  $H$  — самосопряженный, положительно определенный, вполне непрерывный оператор, определенный на всем пространстве*

<sup>1)</sup> Конечность размерности собственного подпространства устанавливается ниже. — Прим. ред.

$\mathfrak{H}$ , то множество всех его собственных значений  $\lambda_i$ , расположенных в невозрастающем порядке, причем каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность, образует бесконечную последовательность положительных чисел, сходящуюся к нулю:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots \rightarrow 0.$$

Кроме того, ортонормированная последовательность соответствующих собственных векторов  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  является полной ортонормированной системой, которая определяется однозначно с точностью до выбора базиса в каждом собственном подпространстве  $\mathfrak{M}_i$ . Короче говоря,  $H$  имеет по существу единственную п. о. н. с. собственных векторов.

Сначала мы докажем, что  $H$  имеет по крайней мере одно собственное значение. Для этого покажем, что существует по крайней мере один нормированный вектор  $u_1$ , на котором квадратичный функционал  $(Hu, u)$  принимает значение  $\lambda_1$ , где  $\lambda_1$  — норма  $H$ , т. е.  $\lambda_1 = \sup \|Hu\| = \sup (Hu, u) = \max (Hu, u)$  по всем нормированным векторам  $u$ . Действительно, пусть  $\{v_n\}$  — нормированная и, следовательно, ограниченная максимизирующая последовательность, т. е. такая последовательность, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (Hv_n, v_n) = \lambda_1$ . Поскольку единичный шар в  $\mathfrak{H}$  слабо компактен, последовательность  $\{v_n\}$  содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому вектору  $u_1$ ,  $\|u_1\| \leq 1$ . Тогда в силу полной непрерывности  $H$  последовательность  $\{Hv_n\}$  сильно сходится к  $Hu_1$ . По лемме IV,  $(Hv_n, v_n) \rightarrow (Hu_1, u_1)$ , так что  $(Hu_1, u_1) = \lambda_1$ , и остается только доказать, что  $u_1$  — нормированный вектор. Но если  $\|u_1\| < 1$ , то, полагая  $w = \mu u_1$ , где  $\mu = \|u_1\|^{-1} > 1$ , мы получаем  $(Hw, w) = \mu^2 \lambda_1 > \lambda_1$ , что противоречит определению  $\lambda_1$  как точной верхней границы. Следовательно,  $\|u_1\| = 1$ , и мы доказали, что  $(Hu, u)$  действительно достигает своего максимума

$$\lambda_1 = \max (Hu, u) = (Hu_1, u_1) = \frac{(Hu_1, u_1)}{(u_1, u_1)}.$$

То, что  $u_1$  является собственным вектором  $H$ , соответствующим  $\lambda_1$ , доказывается теперь так же, как и в гл. II. Кроме того, очевидно, что  $\lambda_1$ , определенное равенством  $\lambda_1 = \sup (Hu, u)$  по всем нормированным векторам  $u$ , является наибольшим собственным значением  $H$ . Заметим, что в гл. II мы предпочитали иметь дело с минимумами, а не с максимумами, как в настоящем случае.

Теперь доказательство того, что  $H$  имеет п. о. н. с. собственных векторов, завершается в основном так же, как и в гл. II. А имен-

но предположим, что уже найдены  $k - 1$  ортонормированных собственных векторов  $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$ , соответствующих собственным значениям  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}$ . Мы построим усеченный оператор  $H_k$ , определив его с помощью равенства

$$H_k u = H u - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i (u, u_i) u_i.$$

Легко видеть, что  $H_k$  — самосопряженный и вполне непрерывный оператор, поскольку таковым является  $H$ .

Рассмотрим теперь многообразие  $\mathfrak{E} \ominus \mathfrak{M} [u_1, u_2, \dots, u_{k-1}]$ , которое, очевидно, является гильбертовым пространством; обозначим его через  $\mathfrak{E}_k$ . Оператор  $H_k$  не может быть нулевым оператором, так как в противном случае  $H u$  был бы равен нулю при любом  $u \in \mathfrak{E}_k$ , что противоречит положительной определенности  $H$ . Положим

$$\lambda_k = \sup_{\|u\|=1} (H_k u, u) > 0$$

и построим последовательность  $\{v_n\}$ ,  $\|v_n\| = 1$ , такую, чтобы  $\lim_{n \rightarrow \infty} (H_k v_n, v_n) = \lambda_k$  и, кроме того, чтобы существовал  $\lim_{n \rightarrow \infty} H_k v_n = w$ . Как и выше, можно убедиться, что такая последовательность существует, поскольку  $\lambda_k$  есть  $\sup (H_k v, v)$ , а оператор  $H_k$  вполне непрерывен.

Рассмотрим теперь  $\|H_k v_n - \lambda_k v_n\|^2 = \|H_k v_n\|^2 + \lambda_k^2 - 2\lambda_k (H_k v_n, v_n)$ . Мы имеем

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|H_k v_n - \lambda_k v_n\|^2 = \|w\|^2 + \lambda_k^2 - 2\lambda_k^2 = \|w\|^2 - \lambda_k^2 \leq 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (H_k v_n - \lambda_k v_n) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k v_n = w.$$

Таким образом, существует предел  $\lim v_n = w/\lambda_k$ , который мы обозначим через  $u_k$ . Тогда  $\|u_k\| = 1$  и  $H_k u_k = \lambda_k u_k$ , так что  $u_k$  — собственный вектор усеченного оператора  $H_k$  с собственным значением  $\lambda_k$ .

Покажем теперь, что  $\lambda_k$  является собственным значением исходного оператора  $H$ . В самом деле, мы имеем  $(u_k, u_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k-1$ , поскольку

$$\lambda_k (u_k, u_j) = (H_k u_k, u_j) = (u_k, H_k u_j).$$

Но из определения  $H_k$  следует, что

$$H_k u_j = H u_j - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i (u_j, u_i) u_i,$$

так что

$$\begin{aligned}\lambda_k(u_k, u_j) &= (u_k, Hu_j) - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i(u_j, u_i)(u_k, u_i) = \\ &= (u_k, Hu_j) - \lambda_j(u_j, u_j)(u_k, u_j) = \lambda_j(u_k, u_j) - \lambda_j(u_k, u_j) = 0.\end{aligned}$$

Следовательно,  $Hu_k = H_k u_k =: \lambda_k u_k$ , и, значит,  $\lambda_k$  действительно является собственным значением  $H$ .

Таким образом, мы получаем последовательность собственных значений

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots > 0$$

и соответствующих собственных функций

$$u_1, u_2, u_3, \dots,$$

и нам остается доказать, что система векторов  $u_1, u_2, u_3, \dots$  полна.

Прежде всего заметим, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} Hu_k = 0$ . Действительно, в противном случае, используя полную непрерывность  $H$  и тот факт, что последовательность  $\{\lambda_k u_k\}$  ограничена числом  $\lambda_1$ , мы смогли бы выделить из последовательности  $Hu_k = \lambda_k u_k$  ортогональную подпоследовательность, сходящуюся к некоторому  $u \neq 0$ . Но это невозможно, поскольку для такой последовательности

$$\lim \|Hu_m - Hu_n\|^2 = \lim (\|Hu_m\|^2 + \|Hu_n\|^2) = 0.$$

Следовательно,  $\lambda_k u_k \rightarrow 0$ , а поскольку  $\|u_k\| = 1$ , то  $\lambda_k \rightarrow 0$ , как и утверждалось. Но отсюда немедленно следует полнота системы  $\{u_n\}$ . Действительно, предположим противное, и пусть вектор  $u$  ортогонален любому  $u_n$ . Тогда при любом  $k = 1, 2, 3, \dots$  мы имеем

$$Hu = H_k u + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i(u, u_i) u_i,$$

так что  $(Hu, u) = (H_k u, u)$ , и, следовательно,

$$(Hu, u) = \lim_{k \rightarrow \infty} (H_k u, u) \leq \|u\|^2 \lim \lambda_k = 0;$$

здесь мы воспользовались определением  $\lambda_k$  как точной верхней границы.

Таким образом, в силу положительной определенности  $H$ ,  $u = 0$ , и, следовательно,  $\{u_n\}$  — полная система, что и требовалось доказать.

**7. Полная непрерывность интегральных операторов с ядром типа Гильберта — Шмидта.** В качестве примера, иллюстрирующего



полученный результат, рассмотрим оператор  $K$ , определенный на функциях гильбертова пространства  $\mathfrak{H}^{(2)}$  (гл. V, п. 1), где  $K = H^{-1}$  — оператор, обратный к дифференциальному оператору  $H$ , который задается выражением  $Hu = -(pu')' + qu$ , как в случае неоднородной струны. В том же пункте мы видели, что  $K$  — интегральный оператор:

$$Ku = \int_a^b k(x, \xi) u(\xi) d\xi,$$

ядром которого  $k(x, \xi)$  является функция Грина.

Чтобы доказать, что  $K$  является вполне непрерывным, определим норму  $N(K)$ <sup>1)</sup> оператора  $K$  равенством

$$N^2(K) = \sum_{j=1}^{\infty} \|K\varphi_j\|^2,$$

где  $\{\varphi_j\}$  — некоторая п. о. н. с.; можно показать, что  $N(K)$  не зависит от выбора п. о. н. с. Рассматривая ядро  $k(x, \xi)$  как функцию из  $\mathfrak{L}_2^{(2)}$  (гл. V, п. 4), мы получаем с помощью равенства Парсеваля, что

$$N^2(K) = (k, k) = \iint k^2(x, \xi) dx d\xi = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}^2 < \infty,$$

где

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} k(x, \xi) \varphi_i(x) \varphi_j(\xi) d\xi dx = \\ &= \int_0^{\pi} \left[ \int_0^{\pi} k(x, \xi) \varphi_j(\xi) d\xi \right] \varphi_i(x) dx = (K\varphi_j, \varphi_i). \end{aligned}$$

Действительно, согласно равенству Парсеваля

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(K\varphi_j, \varphi_i)|^2 = \|K\varphi_j\|^2$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|K\varphi_j\|^2 = \iint k^2 d\xi dx < +\infty.$$

Теперь нетрудно доказать, что если оператор  $K$  имеет конечную норму  $N(K)$ , то он вполне непрерывен. Действительно,

<sup>1)</sup> Эта норма отличается от введенной ранее  $\|K\|$ . — *Прим. перев.*

пусть  $\{f_i(x)\}$  — произвольная ограниченная последовательность, причем  $\|f_i\| \leq c$ . Нам нужно показать, что последовательность  $Kf_1, Kf_2, \dots, Kf_n, \dots$  содержит подпоследовательность Коши. Пусть  $\{\varphi_i\}$  — некоторая п. о. н. с. Тогда

$$f_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \varphi_k, \quad \text{где } a_{ik} = (f_i, \varphi_k),$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 = \|f_i\|^2 \leq c^2,$$

так что  $|a_{ik}| \leq c$  при всех  $i, k$ .

Таким образом, последовательность  $\{a_{i1}\}$  первых компонент векторов  $f_i$  ограничена, и по теореме Больцано — Вейерштрасса можно выделить подпоследовательность  $\{f_{i_1}\}$ , первые компоненты которой  $\{a_{i_1, 1}\}$  сходятся к некоторому пределу  $a_1$ . По той же причине существует подпоследовательность последовательности  $\{f_{i_1}\}$ , состоящая из функций  $\{f_{i_2}\}$ , такая, что ее первые компоненты  $\{a_{i_1, 1}\}$  сходятся к  $a_1$ , а вторые компоненты  $\{a_{i_2, 2}\}$  также сходятся к некоторому числу  $a_2$ . Продолжая этот процесс по индукции, мы получим последовательность, которую обозначим  $\{g_i\}^1$ , такую, что при всех  $k = 1, 2, 3, \dots$  последовательность  $k$ -х компонент  $b_{1k}, b_{2k}, \dots, b_{nk}, \dots$  сходится к некоторому вещественному числу  $b_k$ . Поскольку  $b_{ik}$  принадлежат множеству компонент  $a_{ik}$ , имеет место неравенство  $|b_{ik}| \leq c$  при всех  $i, k$ .

Покажем теперь, что последовательность  $Kg_i$  является последовательностью Коши, т. е. что для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N = N(\varepsilon)$ , такой, что  $\|Kg_m - Kg_n\|^2 < \varepsilon$  при всех  $n, m > N$ . Доказательство проводится следующим образом. Мы имеем

$$\begin{aligned} \|Kg_m - Kg_n\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (b_{mk} - b_{nk}) K\varphi_k \right\|^2 \leq \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^M \right\|^2 + \left\| \sum_{k=M+1}^{\infty} \right\|^2 = S_1 + S_2, \end{aligned}$$

где число  $M$  будет определено ниже.

Так как  $|b_{ik}| \leq c$  при всех  $i, k$ , то  $|b_{mk} - b_{nk}| \leq 2c$ . Следовательно,

$$S_2 \leq 4c^2 \sum_{k=M+1}^{\infty} \|K\varphi_k\|^2.$$

<sup>1)</sup> Для этого нужно взять диагональную последовательность (см. доказательство теоремы на стр. 182). — *Прим. перев.*

Но ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \|K\varphi_k\|^2 = N^2(K)$  сходится, и, значит, мы можем выбрать  $M$  столь большим, чтобы  $4c^2 \sum_{k=M+1}^{\infty} \|K\varphi_k\|^2 < \varepsilon/2$ . Зафиксируем такое  $M$  и рассмотрим теперь

$$S_1 = \left\| \sum_{k=1}^M (b_{mk} - b_{nk}) K\varphi_k \right\|^2.$$

При фиксированном  $k$  последовательность  $b_{ik}$  сходится к  $b_k$ . Следовательно, мы можем выбрать число  $N_k$  столь большим, чтобы

$$|b_{mk} - b_{nk}|^2 < \frac{\varepsilon}{2M \|K\varphi_k\|^2}$$

при всех  $m, n > N_k$ . Если положить  $N > N_k$  для  $k = 1, 2, \dots, M$ , то мы получим, что  $S_1 < \varepsilon/2$ , так что для такого  $N$ , как и требовалось доказать,  $S_1 + S_2 < \varepsilon$ .

Ядро  $k(x, \xi)$ , такое, что интеграл  $\int \int k^2(x, \xi) dx d\xi$  конечен, называется *ядром типа Гильберта — Шмидта*, и мы доказали, что интегральный оператор с таким ядром вполне непрерывен. Если в качестве скалярного произведения в  $\overline{\mathfrak{H}}^{(2)}$  взять  $(u, v) = \int_0^\pi u'v' dx$ , то проведенные выше рассуждения показывают, что оператор  $K$  является вполне непрерывным в этой метрике, если  $\int \int (\partial k / \partial \xi)^2 dx d\xi$  конечен.

Заметим далее, что, поскольку самосопряженный оператор  $K$  является вполне непрерывным, его собственные функции образуют п. о. н. с. Но собственные функции оператора  $K$  такие же, как и у  $H$ . Таким образом, мы доказали, в частности, что система собственных функций

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots$$

оператора  $H = -d^2/dx^2$  с условиями  $u(0) = u(\pi) = 0$  полна в  $\overline{\mathfrak{H}}^{(2)}$ . Это известный результат теории рядов Фурье.

Таким же образом можно доказать, что интегральные операторы, определенные в гл. VI для стержня, мембраны и пластины, являются вполне непрерывными в любой из двух возможных метрик.

## У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Доказать, что  $N^2(K) = \sum_{i=1}^{\infty} \|K\varphi_i\|^2$  не зависит от выбора п. о. н. с.  $\{\varphi_i\}$ .
2. Доказать, что если оператор  $K$  имеет п. о. н. с.  $\{u_i\}$  собственных функций и  $\{\lambda_i\} \rightarrow 0$ , где  $\lambda_i$  — соответствующие собственные значения, то  $K$  вполне непрерывен.
3. Доказать, что если  $K$  имеет конечную норму  $N(K)$ , то  $N^2(K) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2$ .

**8. Сходимость операторов и подпространств.** Пусть  $L$  — часть оператора  $H$  в подпространстве  $\mathfrak{Q}$ , которое может совпадать со всем  $\mathfrak{E}$ . В методе Вайнштейна, который подробно рассматривается ниже, строится последовательность сужающихся гильбертовых пространств

$$\mathfrak{Q}'_1 \supset \mathfrak{Q}'_2 \supset \mathfrak{Q}'_3 \supset \dots \supset \mathfrak{Q}'_n \supset \dots \supset \mathfrak{Q},$$

причем каждое из  $\mathfrak{Q}'_i$  содержит  $\mathfrak{Q}$ . В методе Рэлея — Ритца строится последовательность расширяющихся подпространств

$$\mathfrak{Q}''_1 \subset \mathfrak{Q}''_2 \subset \dots \subset \mathfrak{Q}''_n \subset \dots \subset \mathfrak{Q},$$

каждое из которых содержится в  $\mathfrak{Q}$ . Пусть  $L'_i$  — часть  $H$  в  $\mathfrak{Q}'_i$ . Если нам удастся вычислить собственные значения  $L'_1, L'_2, \dots$ , то из общего принципа сравнения будет следовать, что мы получим убывающую последовательность верхних границ для собственных значений оператора  $L^1$ ). Аналогично, собственные значения операторов  $L''_1, L''_2, \dots$ , где  $L''_i$  — часть  $L$  в  $\mathfrak{Q}''_i$ , дадут возрастающую последовательность нижних границ для собственных значений  $L$ .

Рассмотрим, в частности, убывающую последовательность  $\{\lambda'_{nk}\}$  при фиксированном  $k$ , где  $\lambda'_{nk}$  есть  $k$ -е собственное значение оператора  $\mathfrak{Q}'_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Поскольку эта последовательность ограничена снизу числом  $\lambda_k$ , она имеет предел. Нас интересует, при каких условиях этот предел будет совпадать с  $\lambda_k$ , т. е. как следует выбирать последовательность подпространств  $\{\mathfrak{Q}'_n\}$ . Аналогично, как следует выбирать последовательность  $\{\mathfrak{Q}''_n\}$ ?

Чтобы ответить на этот вопрос, нам понадобятся два определения сходимости, одно из которых относится к операторам, а второе — к подпространствам.

<sup>1)</sup> Напомним, что в отличие от предыдущих глав собственные значения определяются как максимумы, а не как минимумы функционала  $(Hu, u)$ . — *Прим. перев.*

**О п р е д е л е н и е I.** Последовательность операторов  $\{L^{(n)}\}$  *сходится* к оператору  $L$  (обозначение:  $L^{(n)} \rightarrow L$ ), если  $L^{(n)}u \rightarrow Lu$  для любого  $u \in \mathfrak{S}$ . Далее, мы говорим, что  $\{L^{(n)}\}$  *равномерно сходится* к  $L$  (обозначение:  $L^{(n)} \rightrightarrows L$ ), если  $\|L^{(n)} - L\| \rightarrow 0$ , т. е. нормы операторов  $L^{(n)} - L$  сходятся к нулю.

**О п р е д е л е н и е II.** Последовательность подпространств  $\{\mathfrak{Q}^{(n)}\}$  *сходится* к подпространству  $\mathfrak{Q}$ , если последовательность операторов  $\{P^{(n)}\}$  сходится к оператору  $P$ , где  $P^{(n)}$  — оператор проектирования на  $\mathfrak{Q}^{(n)}$ , а  $P$  — оператор проектирования на  $\mathfrak{Q}$ .

Далее, для фиксированного  $k$  и  $n = 1, 2, 3, \dots$  пусть  $\lambda_k^{(n)}$  обозначает  $k$ -е собственное значение оператора  $L^{(n)}$ , а  $\lambda_k$ , как и раньше, обозначает  $k$ -е собственное значение  $L$ , где  $L^{(n)}$  и  $L$  — части оператора  $H$  соответственно в  $\mathfrak{Q}^{(n)}$  и  $\mathfrak{Q}$ .

Теперь сформулируем нашу основную теорему.

**Т е о р е м а.** Если  $\{\mathfrak{Q}^{(n)}\}$  *сходится* к  $\mathfrak{Q}$ , то  $\{\lambda_k^{(n)}\}$  *сходится* к  $\lambda_k$ .

Действительно, если  $L^{(n)} \rightrightarrows L$  (как будет доказано в следующей ниже лемме), то, используя максимально-минимальное свойство  $\lambda_k^{(n)}$ , а также рекурсивное определение  $\lambda_k$ , для всех нормированных векторов  $u$ , ортогональных первым  $k - 1$  собственным векторам  $L$ , имеем

$$\begin{aligned} \lambda_k^{(n)} &\leq \max (L^{(n)}u, u) = \max [(Lu, u) + (L^{(n)}u, u) - (Lu, u)] \leq \\ &\leq \max (Lu, u) + \max |(L^{(n)}u, u) - (Lu, u)| \leq \\ &\leq \lambda_k + \max |((L^{(n)} - L)u, u)|. \end{aligned}$$

Но из неравенства Коши — Буняковского следует, что

$$|((L^{(n)} - L)u, u)| \leq \|(L^{(n)} - L)u\| \leq \|L^{(n)} - L\|.$$

Таким образом,  $\lambda_k^{(n)} \leq \lambda_k + \|L^{(n)} - L\|$ . Аналогично,  $\lambda_k \leq \lambda_k^{(n)} + \|L^{(n)} - L\|$ , так что  $|\lambda_k^{(n)} - \lambda_k| \leq \|L^{(n)} - L\| \rightarrow 0$ , что и требовалось доказать.

Итак, теорема будет доказана, если мы докажем следующую лемму.

**Л е м м а.** Если  $\{\mathfrak{Q}^{(n)}\} \rightarrow \mathfrak{Q}$ , то  $L^{(n)} \rightrightarrows L$ , где  $L^{(n)}$  — часть данного оператора  $H$  <sup>1)</sup> в подпространстве  $\mathfrak{Q}^{(n)}$ .

Некоторое неудобство при доказательстве вызывает тот факт, что операторы  $L^{(n)}$  рассматриваемой последовательности имеют

<sup>1)</sup> Предполагается, что оператор  $H$  вполне непрерывен. — Прим. ред.

различные области определения  $\mathfrak{Q}^{(n)}$ . Однако легко проверить, что  $L^{(n)}$  имеет те же положительные собственные значения и те же самые собственные векторы, что и  $P^{(n)}HP^{(n)}$ . То же самое справедливо для  $L$  и  $RHP$ . Операторы  $P^{(n)}HP^{(n)}$  и  $RHP$  определены на всем  $\mathfrak{E}$ . Таким образом, теорема будет доказана, если мы покажем, что  $P^{(n)}HP^{(n)} \xrightarrow{\rightarrow} RHP$ .

Чтобы доказать это, предположим, что  $P^{(n)}HP^{(n)} \not\xrightarrow{\rightarrow} RHP$ , и придем тогда к противоречию. В самом деле, если это так, то существует подпоследовательность  $\{j\}$  целых чисел  $\{n\}$ , такая, что

$$\|P^{(j)}HP^{(j)} - RHP\| > a > 0 \quad (j = n_1, n_2, \dots).$$

Тогда по определению нормы оператора существует последовательность нормированных векторов  $u_j$ , таких, что  $\|P^{(j)}HP^{(j)}u_j - RHPu_j\| > a > 0$ . Но последовательность нормированных векторов  $u_j$  содержит слабо сходящуюся подпоследовательность  $\{u_i\} \rightarrow u$ , для которой

$$\|P^{(i)}HP^{(i)}u_i - RHPu_i\| \rightarrow 0.$$

Это означает, что  $P^{(i)}HP^{(i)}u_i$  и  $RHPu_i$  не могут иметь один и тот же предел.

Мы получим желаемое противоречие, если покажем, что на самом деле  $RHPu_i$  и  $P^{(i)}HP^{(i)}u_i$  сходятся к одному и тому же пределу, а именно  $RHPu$ . С одной стороны, мы имеем, что  $RHPu_i \rightarrow RHPu$ , поскольку  $u_i \rightarrow u$ , а оператор  $RHP$  вполне непрерывен. С другой стороны, поскольку  $\mathfrak{Q}^{(i)} \rightarrow \mathfrak{Q}$ , получаем, что  $P^{(i)}w \rightarrow Pw$  для любого  $w \in \mathfrak{E}$ . Следовательно, в силу леммы IV из п. 4

$$(u_i, P^{(i)}w) \rightarrow (u, Pw) \text{ или } (P^{(i)}u_i, w) \rightarrow (Pu, w).$$

Значит,  $P^{(i)}u_i \rightarrow Pu$ , и потому  $HP^{(i)}u_i \rightarrow HPu$ , или  $\|HPu - HP^{(i)}u_i\| \rightarrow 0$ , поскольку  $H$  вполне непрерывен. Но

$$\begin{aligned} & \|RHPu - P^{(i)}HP^{(i)}u_i\| \leq \\ & \leq \|RHPu - P^{(i)}HPu\| + \|P^{(i)}HPu - P^{(i)}HP^{(i)}u_i\|, \end{aligned}$$

где  $\|RHPu - P^{(i)}HPu\| \rightarrow 0$ , так как  $\mathfrak{Q}^{(n)} \rightarrow \mathfrak{Q}$ .

А так как любой оператор проектирования  $P^{(i)}$  имеет норму, равную единице, то

$$\|P^{(i)}HPu - P^{(i)}HP^{(i)}u_i\| \leq \|HPu - HP^{(i)}u_i\| \rightarrow 0,$$

как мы только что доказали. Следовательно,  $P^{(i)}HP^{(i)}u_i \rightarrow RHPu$ , и доказательство леммы, а вместе с ней и теоремы закончено.

## У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Доказать, что если последовательность операторов  $\{L^{(n)}\}$  равномерно сходится, то  $\{L^{(n)}\}$  сходится.
2. Построить сходящуюся последовательность операторов  $\{L^{(n)}\}$  в  $l_2$ , такую, чтобы сходимость не была равномерной.
3. Будем говорить, что последовательность  $\{L^{(n)}\}$  слабо сходится к  $L$  (обозначение:  $\{L^{(n)}\} \rightharpoonup L$ ), если  $L^{(n)}f \rightarrow Lf$  для любого  $f \in \mathfrak{E}$ . Построить две слабо сходящиеся последовательности операторов  $\{A^{(n)}\}$  и  $\{B^{(n)}\}$  в  $l_2$ , такие, чтобы последовательность  $\{C^{(n)} = A^{(n)}B^{(n)}\}$  не была бы слабо сходящейся.
4. Доказать, что если  $\{A^{(n)}\}$  и  $\{B^{(n)}\}$  сходятся, то  $\{A^{(n)}B^{(n)}\}$  также сходится.
5. Доказать, что если  $\{A^{(n)}\}$  и  $\{B^{(n)}\}$  сходятся равномерно, то  $\{A^{(n)}B^{(n)}\}$  также сходится равномерно.
6. Доказать, что если последовательность операторов проектирования  $\{P^{(n)}\}$  слабо сходится к оператору проектирования  $P$ , то  $P^{(n)} \rightarrow P$ .
7. Доказать, что если последовательность операторов проектирования  $\{P^{(n)}\}$  сходится к оператору  $L$ , то  $L$  — оператор проектирования.
8. Построить в  $l_2$  последовательность операторов проектирования  $\{P^{(n)}\}$ , слабо сходящуюся к оператору  $L$ , не являющемуся оператором проектирования.
9. Доказать, что если  $L$  есть часть оператора  $H$  в  $\mathfrak{M}$ , а  $P$  — оператор проектирования на  $\mathfrak{M}$ , то  $L$  и  $PHP$  имеют одни и те же положительные собственные значения и соответствующие собственные векторы.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Относительно изложенного в этой главе см. Стоун [1], Секефальви-Надь [1] и в особенности Ароншайн [1], [9].

## МЕТОД ВАЙНШТЕЙНА И АРОНШАЙНА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

**1. Описание метода.** Мы можем теперь рассмотреть и детально обосновать метод, развитый Вайнштейном и Ароншайном, для вполне непрерывных операторов в абстрактном гильбертовом пространстве (см. Ароншайн [1]).

Мы исходим из пространства  $\mathfrak{L}$ , в котором действует часть  $L$  оператора  $K$ . Пусть нам известны собственные значения, собственные векторы и резольвента  $L$  и нужно вычислить собственные значения оператора  $N$  — части  $K$  в подпространстве  $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{L}$ , причем  $\mathfrak{L} \ominus \mathfrak{N}$  имеет бесконечную размерность. Другими словами, мы знаем собственные значения и собственные векторы в более широком пространстве  $\mathfrak{L}$ , а ищем собственные значения в подпространстве  $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{L}$ . Для наглядности полезно считать  $\mathfrak{L}$  и  $\mathfrak{N}$  гильбертовыми пространствами, полученными пополнением множеств допустимых функций соответственно для закрепленной и зажатой пластины (гл. VI).

Мы будем последовательно аппроксимировать эту задачу  $n$ -мерными задачами следующим образом. Выберем в бесконечномерном пространстве  $\mathfrak{L} \ominus \mathfrak{N}$  п.о.н.с.  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ , и пусть  $\mathfrak{L}^{(n)}$  при каждом фиксированном  $n$  обозначает бесконечномерное пространство  $\mathfrak{L} \ominus \mathfrak{M}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ , где через  $\mathfrak{M}(p_1, p_2, \dots, p_n)$  мы обозначили, как и в гл. I,  $n$ -мерное евклидово пространство, натянутое на векторы  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Выберем в  $\mathfrak{N}$  п. о. н. с.  $\{q_i\}$ . Тогда последовательности  $\{q_i\}$  и  $\{p_i\}$ , вместе взятые, порождают  $\mathfrak{L}$ , и мы можем записать следующие разложения Фурье:

$$Pu = (u, q_1) q_1 + (u, q_2) q_2 + \dots,$$

$$P^{(n)}u = (u, q_1) q_1 + \dots + (u, p_{n+1}) p_{n+1} + \dots,$$

откуда следует, что последовательность подпространств  $\{\mathfrak{L}^{(n)}\}$  сходится к подпространству  $\mathfrak{L}$ . Таким образом, если мы сможем найти собственные значения  $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \dots$  операторов  $L^{(n)}$ , то, согласно основной теореме из п. 8 гл. VIII, эти собственные зна-



чения с ростом  $n$  будут сходиться к искомым собственным значениям оператора  $N$ . В дальнейшем для упрощения обозначений мы будем вместо  $L^{(n)}$  писать  $L'$ .

Итак, наша задача теперь состоит в том, чтобы найти числа  $\zeta$ , для которых существуют нормированные векторы  $u' \in \mathfrak{S}'$ , такие, что  $L'u' - \zeta u' = 0$ . Это уравнение, содержащее оператор  $L'$ , собственные значения которого мы хотим найти, можно преобразовать так, чтобы оно содержало только оператор  $L$ , а его мы предполагаем известным.

Действительно, пусть  $P'$  и  $P$  — операторы проектирования на  $\mathfrak{S}'$  и  $\mathfrak{Q}$  соответственно. Тогда  $L' = P'K$ , а  $L = PK$ . Но  $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{Q}$ , так что  $P' = P'P$  и, значит,  $L' = P'K = P'PK = = P'L$ . Тогда для любого  $u' \in \mathfrak{S}'$  в силу свойств операторов проектирования вектор  $(L - L')u'$  принадлежит  $n$ -мерному пространству  $\mathfrak{Q} \ominus \mathfrak{S}'$ .

Поскольку  $p_1, p_2, \dots, p_n$  является п. о. н. с. в этом пространстве,  $Lu' - L'u' = \sum \xi_k p_k$  при некоторых постоянных  $\xi_k$ . Но если  $u'$  является собственным вектором  $L'$ , соответствующим собственному значению  $\zeta$ , то  $L'u' = \zeta u'$  и потому

$$Lu' - \zeta u' = \sum_{k=1}^n \xi_k p_k \quad (u' \in \mathfrak{S}').$$

Обратно, если при некоторых значениях  $\xi_k$  мы найдем вектор  $u' \in \mathfrak{S}'$ , такой, что  $Lu' - \zeta u' = \sum \xi_k p_k$ , то ясно, что  $u'$  будет собственным вектором  $L'$ , поскольку, применяя  $P'$  к обеим частям этого равенства, мы получим

$$P'Lu' - \zeta P'u' = L'u' - \zeta u' = 0.$$

Таким образом, задача нахождения собственных векторов  $u' \in \mathfrak{S}'$  и собственных значений  $\zeta$  оператора  $L'$  эквивалентна задаче отыскания векторов  $u'$ , таких, что

$$Lu' - \zeta u' = \sum_{k=1}^n \xi_k p_k$$

при некоторых постоянных  $\xi_k$ . Эта последняя задача может быть решена, поскольку оператор  $L$  нам известен.

**2. Определитель Вайнштейна; его нули и полюсы. Правило Ароншайна для нахождения собственных значений.** Займемся теперь подробным исследованием этой задачи, при этом конечномерный случай, рассмотренный в гл. III, будет служить нам моделью. Заметим прежде всего, что если  $\zeta$  не является одним из собственных значений  $\lambda_k$  оператора  $L$ , то в силу свойств резоль-

венты в  $\mathfrak{Q}$  существует единственное решение  $u'$ , а именно

$$u' = R_{\zeta} \left( \sum_{k=1}^n \xi_k p_k \right) = \sum_{k=1}^n \xi_k R_{\zeta} p_k.$$

Но мы требуем, чтобы  $u' \in \mathfrak{Q}'$ , т. е.  $u'$  должно удовлетворять соотношениям  $(u', p_m) = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$ , откуда, используя выражение для  $u'$ , получаем

$$\sum_{k=1}^n \xi_k (R_{\zeta} p_k, p_m) = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, n).$$

Эта система уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель, называемый *определителем Вайнштейна* и обозначаемый через  $W_{\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}'}(\zeta)$  или просто  $W(\zeta)$ , обращается в нуль:

$$W(\zeta) = W_{\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}'}(\zeta) = \det |(R_{\zeta} p_k, p_m)| = 0.$$

Таким образом, мы показали, что для того чтобы число  $\zeta$ , не являющееся собственным значением  $\lambda_k$  оператора  $L$ , было собственным значением  $\lambda'_k$  оператора  $L'$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\zeta$  было нулем функции  $W(\zeta)$ .

Теперь, по-видимому, необходимо разработать некоторый метод, который позволил бы судить, будет ли число  $\zeta$ , совпадающее с одним из собственных значений  $L$ , некоторым собственным значением  $L'$ . Только тогда мы сможем полностью выписать аппроксимирующие последовательности. Покажем теперь, что, исследуя не только нули, но и полюсы  $W(\zeta)$ , можно найти все  $\lambda'_k$ .

Основную теорему мы сформулируем в виде следующего правила Ароншайна:

*Определитель Вайнштейна  $W(\zeta)$ , рассматриваемый как функция вещественной переменной  $\zeta$ , является аналитической функцией (т. е. разлагается в ряд Тейлора) в любой точке  $\zeta$ , за исключением нуля и некоторого множества полюсов, которые образуют последовательность, сходящуюся к нулю. Множество нулей  $W(\zeta)$  совпадает с множеством таких  $\lambda'_k$ , которые не принадлежат спектру  $L$ , а множество полюсов  $W(\zeta)$  — с множеством таких  $\lambda_k$ , которые не принадлежат спектру  $L'$ <sup>1)</sup>.*

Для того чтобы было легче запомнить это правило, приведем здесь формулу Ароншайна

$$W(\zeta) = \left( -\frac{1}{\zeta} \right)^n \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta - \lambda'_k}{\zeta - \lambda_k}.$$

<sup>1)</sup> Точная формулировка дана в терминах порядка  $W(\lambda)$  в точке  $\lambda$  на стр. 203. — *Прим. ред.*

Эта формула (относительно ее обобщений см. Курода [1]) показывает, каким образом нули и полюсы определителя Вайнштейна связаны в правиле Ароншайна с собственными значениями  $\lambda'_k$  и  $\lambda_k$ .

В отличие от конечномерного случая эта формула содержит множитель  $(-1/\zeta)^n$ . Ее доказательство в этом случае является значительно более трудным, и мы его не приводим (см. Ароншайн [1] <sup>1)</sup>). Для наших целей оказывается достаточным правило Ароншайна, которое мы докажем в следующем пункте. Сейчас же мы рассмотрим пример.

Обозначим через  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$  собственные значения  $L$ , через  $\omega'_1 \geq \omega'_2 \geq \dots$  нули  $W(\zeta)$  и через  $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \dots$  полю-

<sup>1)</sup> Пусть ядро  $K_1(x, y)$  получается конечномерным возмущением ядра  $K(x, y)$ :

$$K_1(x, y) = K(x, y) - \sum_{m=1}^n f_m(x) g_m(y), \quad (1)$$

$$a \leq x, \quad y \leq b.$$

Тогда детерминанты Фредгольма  $\Delta(\mu)$  и  $D(\mu)$  ядер  $K_1(x, y)$  и  $K(x, y)$  связаны формулой Бейтмена

$$\frac{\Delta(\mu)}{D(\mu)} = \delta(\mu), \quad (2)$$

где

$$\delta(\mu) = \begin{vmatrix} 1 + \mu d_{11}(\mu) & \dots & \mu d_{1n}(\mu) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mu d_{n1}(\mu) & \dots & 1 + \mu d_{nn}(\mu) \end{vmatrix} \quad (3)$$

и

$$d_{ij}(\mu) = ((E - \mu K)^{-1} f_i, g_j)$$

(см. Бейтмен [1], а также Гантмахер [2] и М. Г. Крейн [1]).

Если ядро эрмитово, то определитель  $\delta(\mu)$  при  $g_j = K f_j$  и  $\mu = 1/\zeta$  превращается в определитель Вайнштейна, а формула (2) превращается в формулу Ароншайна.

В формуле Ароншайна, приведенной в тексте, нужно доказать лишь сходимость бесконечного произведения. Заметим, однако, что

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta - \lambda'_k}{\zeta - \lambda_k} = \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\lambda'_k - \lambda_k}{\zeta - \lambda_k} \right),$$

а ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda'_k - \lambda_k|$  всегда сходится, если эрмитов вполне непрерывный оператор возмущается конечномерным.

Формула Бейтмена получила обобщение в работах М. Г. Крейна [1—2]. Она широко использовалась в ряде работ советских механиков и физиков. См., например, Гершгорин [1], Лившиц [1—3], Дольберг [1—2]. — *Прим. ред.*

сы  $W(\zeta)$ . Пусть эти последовательности таковы:

$$\{\lambda_k\} \text{ — собственные значения } L: 9 = 9 > 7 = 7 = 7 = 7 > 5 > 3 = \\ = 3 = 3 > 2 = 2 > 1 = 1 = 1 = 1 > 0,9 > 0,7 > \\ > 0,5 = 0,5 > 0,3 > \dots;$$

$$\{\omega'_k\} \text{ — нули } W(\zeta): 8 > 6 = 6 > 4 > 1 > 0,8 > 0,3 > \dots;$$

$$\{\omega_k\} \text{ — полюсы } W(\zeta): 9 > 7 = 7 > 3 > 2 > 0,7 > 0,5 > \dots$$

Тогда, чтобы получить последовательность  $\{\lambda'_k\}$ , мы должны добавить к последовательности  $\{\omega'_k\}$  все те члены последовательности  $\{\lambda_k\}$ , которые не содержатся в  $\{\omega_k\}$ . Выпишем члены последовательности  $\{\lambda_k\}$ , которые не принадлежат  $\{\omega_k\}$ , а именно:

$$9 > 7 = 7 > 5 > 3 = 3 > 2 > 1 = 1 = 1 = 1 > 0,9 > \\ > 0,5 > 0,3 > \dots$$

Добавив их к последовательности  $\{\omega'_k\}$ , получим

$$\{\lambda'_k\} \text{ — собственные значения } L': 9 > 8 > 7 = 7 > 6 = 6 > \\ > 5 > 4 > 3 = 3 > 2 > 1 = 1 = 1 = 1 = 1 > \\ > 0,9 > 0,8 > 0,5 > 0,3 = 0,3 > \dots$$

Таким образом, если мы знаем  $\{\lambda_k\}$ , то, согласно нашему правилу, необходимо только найти нули и полюсы функции  $W(\zeta) = \det |(R_\zeta p_k, p_{ni})|$ . Поскольку  $p_k$  и  $R_\zeta$  известны, можно считать, что эти нули и полюсы нам также известны. В следующей главе мы займемся их эффективным вычислением в частных случаях.

**3. Полюсы определителя Вайнштейна для первой промежуточной задачи.** Мы переходим теперь к обоснованию правила Ароншайна. Начнем с первой промежуточной задачи, т. е. с  $n = 1$ . В этом случае у нас имеется единственная функция  $p_1$ , которую мы будем обозначать просто через  $p$ . Докажем, что  $W(\zeta) = (R_\zeta p, p)$  обладает следующими свойствами:

i)  $W(\zeta)$  аналитична в любой точке  $\zeta$ , за исключением  $\zeta = 0$  и некоторых полюсов;

ii) полюсы  $W(\zeta)$  простые и образуют убывающую последовательность  $\{K_m\}$ , являющуюся подпоследовательностью  $\{\lambda_m\}$ ;

iii) нули  $W(\zeta)$  простые и образуют убывающую последовательность  $\{K'_m\}$ , разделяющую последовательность полюсов, т. е.  $K_m > K'_m > K_{m+1}$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$

Доказательство, точно такое же, как и в конечномерном случае, проводится следующим образом. Собственные векторы  $u_1, u_2, \dots, u_m, \dots$  оператора  $L$  образуют п. о. н. с., а в силу свойств резольвенты мы имеем

$$p = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m, \quad \text{где } \alpha_m = (p, u_m), \quad \sum \alpha_m^2 = 1,$$

$$R_{\zeta} p = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{\lambda_m - \zeta} u_m.$$

Тогда

$$W(\zeta) = (R_{\zeta} p, p) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^2}{\lambda_m - \zeta},$$

откуда

$$W(\zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m}{\omega_m - \zeta}, \quad \gamma_m > 0, \quad \sum \gamma_m = 1,$$

где последовательность  $\{\omega_m\}$  получается из последовательности  $\{\lambda_m\}$ , если вычеркнуть те  $\lambda_m$ , для которых  $\alpha_m = 0$ , а кратные собственные значения  $\lambda_m$  записать только один раз, но с коэффициентом  $\gamma_m$ , равным сумме коэффициентов  $\alpha_m^2 + \alpha_m'^2 + \dots$  по всем собственным векторам п. о. н. с., соответствующим  $\lambda_m$ . Эта запись функции  $W(\zeta)$  является весьма удобной для исследования нулей и полюсов. В самом деле, все утверждения, касающиеся полюсов, устанавливаются сразу же. Действительно, поскольку

$$\sum \gamma_m = 1, \quad \text{ясно, что ряд } \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m / (\omega_m - \zeta) \text{ сходится равномерно}$$

на любом множестве точек  $\zeta$ , которое находится на положительном расстоянии от множества собственных значений  $\lambda_m$ . Но мы уже знаем, что собственные значения образуют последовательность, сходящуюся к нулю. Следовательно, можно утверждать, что  $W(\zeta)$  является аналитической всюду, за исключением нуля и точек  $\lambda_m$  (точнее, за исключением либо всех  $\lambda_m$ , либо некоторых из них, поскольку некоторые  $\alpha_m$  могут быть равны нулю), а из написанной выше формулы видно, что все полюсы  $W(\zeta)$  простые.

**4. Правило Ароншайна для промежуточных задач.** Займемся теперь изучением нулей  $W(\zeta)$ . Заметим, что, поскольку

$$W(\zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m}{\omega_m - \zeta}$$

положительна при любых отрицательных  $\zeta$  и отрицательна при  $\zeta > \omega_1$ , любой нуль  $W(\zeta)$ , если он существует, должен лежать между двумя полюсами. Но между любыми последовательными полюсами  $\omega_{m+1} < \omega_m$  действительно должен найтись по крайней мере один нуль, так как при стремлении  $\zeta$  к  $\omega_{m+1}$  справа член  $\gamma_{m+1}/(\omega_{m+1} - \zeta)$ , и только этот член, стремится к  $-\infty$ , а если  $\zeta$  стремится к  $\omega_m$  слева, то этот член  $\gamma_{m+1}/(\omega_{m+1} - \zeta)$  стремится к  $+\infty$ . Отсюда следует, что непрерывная функция  $W(\zeta)$  обращается в нуль в некоторой точке  $\omega'_m$  этого интервала. Далее,  $W(\zeta)$  является строго монотонно возрастающей функцией на этом интервале, поскольку ее производная  $W'(\zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m/(\omega_m - \zeta)^2$  всюду положительна. Следовательно,  $\omega'_m$  — единственный нуль в этом интервале, и он простой, поскольку  $W'(\zeta)$  не обращается в нуль в точке  $\omega'_m$ .

Введем теперь следующие обозначения. Пусть  $\{\xi_m\}$  — невозрастающая последовательность положительных чисел. Для любого числа  $\xi$  обозначим через  $\mu_\xi(\xi_m)$  кратность  $\xi$  в последовательности  $\{\xi_m\}$ , т. е. сколько раз число  $\xi$  встречается в этой последовательности. Например, мы полагаем  $\mu_\xi(\lambda_m) = 0$ , если  $\xi$  не является собственным значением оператора  $L$ ; если же  $\xi$  является собственным значением, то  $\mu_\xi(\lambda_m)$  равно его кратности.

Далее, для любой точки  $\xi \neq 0$  обозначим через  $\nu_\xi(W)$  порядок нуля функции  $W(\zeta)$  в точке  $\xi$ . Таким образом, если  $\xi$  — обыкновенная точка для  $W(\zeta)$ , в которой  $W \neq 0$ , то  $\nu_\xi(W) = 0$ ; если же  $\xi$  — нуль  $W(\zeta)$  порядка  $\nu > 0$ , то  $\nu_\xi(W) = \nu > 0$ . Кроме того, условимся полюс порядка  $\mu > 0$  считать нулем порядка  $-\mu$ , так что в этом полюсе  $\nu_\xi(W) = \nu < 0$ , где  $\nu = -\mu$ .

Очевидно, чтобы обосновать правило Ароншайна для случая  $n = 1$ , нужно доказать, что

$$\mu_\xi(\lambda'_m) - \mu_\xi(\lambda_m) = \nu_\xi(W) \quad (\xi > 0),$$

где  $\mu_\xi(\lambda'_m)$  — размерность собственного подпространства  $\mathcal{Q}'_\xi$ , натянутого на собственные векторы оператора  $L'$ , отвечающие собственному значению  $\xi$ , а  $\mu_\xi(\lambda_m)$  — размерность собственного подпространства  $\mathcal{Q}_\xi$ , так что если  $\xi$  не является собственным значением  $L'$ , то  $\mathcal{Q}'_\xi$  состоит только из нулевого вектора, и аналогичное утверждение имеет место для  $\mathcal{Q}_\xi$ .

**5. Промежуточные задачи и максимально-минимальное свойство собственных значений.** Доказательство критерия Вайнштейна в бесконечномерном случае аналогично доказательству, приведенному в гл. III. Мы ограничимся кратким перечислением результатов.

Пусть  $L$  — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве  $\mathfrak{H}$  с дискретным спектром  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ , и пусть, как обычно,  $R(u) = (Lu, u)/(u, u)$  обозначает частное Рэля. Пусть  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$  суть  $n-1$  ортонормированных функций, а  $\lambda(p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$  — минимум  $R(u)$  по всем  $u$ , ортогональным функциям  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ . Тогда  $\lambda(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) \leq \lambda_n$ ; это можно доказать двумя способами. Первое доказательство, опирающееся на фундаментальную лемму Вейля, дано в гл. IV, п. 8, а второе, использующее свойства функции Вайнштейна, аналогично изложенному в гл. III для конечномерного случая. Тогда мы приходим к следующему критерию Вайнштейна максимального увеличения собственных значений.

Пусть

$$\lambda_{s-1} < \lambda_s = \lambda_{s+1} = \dots = \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \dots$$

Введем определители Вайнштейна

$$W_{0m}(\lambda) = W_m(\lambda) = \det |(R_\lambda p_k, p_i)| = \det \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p_k, u_n)(p_i, u_n)}{\lambda_n - \lambda} \right|;$$

$$W_0 = W_{00}(\lambda) = 1 \quad (i, k = 1, 2, \dots, m; m = 0, 1, 2, \dots, n),$$

и рассмотрим определитель  $W_m$  при  $\lambda = \lambda_n - \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — некоторое фиксированное, достаточно малое, положительное число. Тогда *необходимое и достаточное условие на функции  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ , при котором  $\lambda(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) = \lambda_n$ , состоит в том, чтобы в последовательности  $W_0, W_1, W_2, \dots, W_{n-1}$  имелось в точности  $s-1$  перемен знака<sup>1)</sup>.*

Мы можем доказать теперь предложения А и В, сформулированные в гл. III, п. 6, точно таким же способом, что и раньше. Из этих утверждений сразу же вытекает *правило Ароншайна* для  $n = 1$ :

*Неконсервативные собственные значения оператора  $L'$  (т. е. не являющиеся собственными значениями  $L$ ) совпадают с нулями функции Вайнштейна  $W(\lambda)$ , а консервативные собственные значения  $L'$  совпадают с теми собственными значениями  $L$ , которые не являются полюсами  $W(\lambda)$ .*

Что касается правила Ароншайна для любых  $n$ , то в  $n$ -мерном случае мы вывели его непосредственно из формулы Ароншайна. Но в бесконечномерном случае, поскольку формула Ароншайна не доказана, мы должны вывести это правило из леммы Ароншайна, утверждающей, что  $W_{0n} = W_{01} \cdot W_{12} \cdot W_{23} \cdots W_{n-1, n}$ .

1) См. примечание на стр. 71.— *Прим. ред.*

Она доказывается точно так же, как и раньше. Из этой леммы сразу же следует, что при всех  $n$

$$v_{\xi}(W) = v_{\xi}(W_{01}) + v_{\xi}(W_{12}) + \dots + v_{\xi}(W_{n-1, n}).$$

Кроме того, как и в случае  $n = 1$ , имеем

$$\mu_{\xi}(\lambda_m^{(k-1)}) - \mu_{\xi}(\lambda_m^{(k)}) = v_{\xi}(W_{k-1, k}) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

откуда, складывая, получаем равенство<sup>1)</sup>

$$v_{\xi}(W) = \mu_{\xi}(\lambda_m) - \mu_{\xi}(\lambda_m^{(n)}),$$

которое эквивалентно правилу Ароншайна для произвольного числа  $n$  связей.

---

<sup>1)</sup> По поводу этой формулы см. Гантмахер и Крейн [1—2]\*, где используется формула Бейтмена, а также недавний результат Куроды [1].—  
*Прим. ред.*



## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВАЙНШТЕЙНА И АРОНШАЙНА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ К КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИНЫ

**1. Схема применения метода.** В предыдущей главе рассматривалось применение метода Вайнштейна и Ароншайна к линейным операторам в гильбертовом пространстве. В этой главе мы займемся сведением краевой задачи о колебаниях пластины к задаче на собственные значения для вполне непрерывных операторов. Тем самым будут доказаны теоремы существования и сходимость наших приближенных методов (см. Ароншайн [3]).

Рассмотрим применение метода в важном частном случае квадратной зажатой пластины:

$$\begin{aligned}Hu &= \Delta \Delta u = \lambda u, & |x| < \frac{\pi}{2}, & & |y| < \frac{\pi}{2}, \\u &= \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x = -\frac{\pi}{2}, & & x = \frac{\pi}{2}, \\u &= \frac{\partial u}{\partial y} = 0, & y = -\frac{\pi}{2}, & & y = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Эту задачу будем называть задачей  $P$ . В качестве базовой задачи  $P^{(0)}$  возьмем задачу для закрепленной пластины, которая, как было показано в гл. VI, допускает точное решение. Краевые условия в этом случае имеют вид  $u = \Delta u = 0$ .

Наша программа состоит в следующем. Обозначим через  $\mathfrak{K}$  пространство всех допустимых функций задачи  $P$ , т. е. всех функций класса  $C^{(4)}$ , удовлетворяющих краевым условиям задачи  $P$ . Аналогично, через  $\mathfrak{K}^{(0)}$  обозначим пространство допустимых функций задачи  $P^{(0)}$ . В обоих случаях норма определяется выражением

$$\|u\|^2 = \mathfrak{A}(u) = \int \int \Delta \Delta u \cdot u \, dx \, dy = \int \int (\Delta u)^2 \, dx \, dy.$$

Два эти пространства  $\mathfrak{K}$  и  $\mathfrak{K}^{(0)}$  удовлетворяют всем аксиомам гильбертова пространства, за исключением аксиомы полноты. Кроме того, имеется еще одно препятствие для применения метода Вайнштейна, а именно включение  $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}^{(0)}$  не имеет места,

поскольку краевые условия в  $\mathfrak{K}$  и  $\mathfrak{K}^{(0)}$  различны. С помощью функций Грина (гл. V и VI) мы произведем функциональное пополнение пространств  $\mathfrak{K}$  и  $\mathfrak{K}^{(0)}$ , расширяя их до полных пространств  $\bar{\mathfrak{K}}$  и  $\bar{\mathfrak{K}}^{(0)}$  соответственно. При этом мы получим, рассуждая, как в гл. V, п. 7, что в процессе пополнения стабильные условия (т. е. условия, включающие производные, порядок которых меньше 2) сохраняются, а нестабильные условия (т. е. условия, включающие производные второго или более высокого порядка) теряются. Таким образом, функции, которые присоединяются к  $\mathfrak{K}$ , все еще будут удовлетворять условиям  $u = du/dn = 0$ , а функции, которые присоединяются к  $\mathfrak{K}^{(0)}$ , уже не должны удовлетворять условию  $\Delta u = 0$ , и мы получаем требуемое включение  $\bar{\mathfrak{K}} \subset \bar{\mathfrak{K}}^{(0)}$ . Любая функция  $u(x, y) = u(z) \in \bar{\mathfrak{K}}^{(0)}$  записывается в следующем виде (гл. V, п. 7):

$$u(z) = - \iint g(z, z') f(z') dz',$$

где  $g$  — функция Грина для закрепленной мембраны, а  $f$  — некоторая функция из  $\mathcal{Q}^{(2)}$ . Другими словами, общий элемент пространства  $\bar{\mathfrak{K}}^{(0)}$  является гриновским потенциалом, плотность которого задается общим элементом  $\mathcal{Q}^{(2)}$ , а подпространство  $\bar{\mathfrak{K}}$  состоит из тех элементов  $\bar{\mathfrak{K}}^{(0)}$ , нормальные производные которых равны нулю на границе.

Однако метод Вайнштейна, развитый в предыдущей главе, пока еще нельзя применять к оператору  $H = \Delta\Delta$ , поскольку, как легко видеть,  $H$  не является вполне непрерывным. Поэтому мы должны, как отмечалось в гл. II и V, найти собственные значения оператора  $K = H^{-1}$ , который определяется для любого  $u \in \mathfrak{K}$  формулой

$$Ku(x, y) = \iint k(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

поскольку этот оператор является вполне непрерывным. Числа, обратные к собственным значениям оператора  $K$ , будут собственными значениями  $H$  (гл. V, п. 1).

Первый шаг в применении метода Вайнштейна состоит в том, чтобы задать последовательность функций  $p_i$ , с помощью которых строятся промежуточные задачи. Как отмечалось в начале гл. IX, желательно, чтобы  $p_i$  образовывали п. о. н. с. для дополнительного подпространства  $\mathfrak{P} = \bar{\mathfrak{K}}^{(0)} \ominus \bar{\mathfrak{K}}$ . Такую п. о. н. с. можно построить явно благодаря следующим свойствам функций  $p \in \mathfrak{P}$ . Прежде всего  $\Delta\Delta p = 0$ , как будет доказано ниже. Кроме того, мы уже видели, что  $\bar{\mathfrak{K}}^{(0)}$  состоит из таких функций, которые являются гриновскими потенциалами некоторых функций  $q \in \mathcal{Q}^{(2)}$ .

Следовательно, поскольку  $p \in \overline{\mathfrak{K}}^{(0)}$ , мы имеем  $q = -\Delta p$ , так что  $\Delta q = -\Delta \Delta p = 0$ , или, другими словами,  $q$  — гармоническая функция, т. е. функция, лапласиан которой равен нулю. Таким образом, функции  $p$  можно описать как гриновские потенциалы с гармонической плотностью; следует, однако, отметить, что эти рассуждения применимы только для функций  $p \in C^{(4)}$ . Тем не менее ниже будет доказано, что такие функции образуют плотное множество в пространстве  $\mathfrak{F}$ , и, значит, можно построить полную систему, состоящую из функций  $p$ , принадлежащих пересечению  $\mathfrak{F} \cdot C^{(4)}$  пространств  $\mathfrak{F}$  и  $C^{(4)}$ . Таким образом, задача построения полной системы  $\{p_n\}$  в пространстве  $\mathfrak{F}$  с нормой

$$\|p\|^2 = \iint (\Delta p)^2 dx dy$$

эквивалентна задаче нахождения полной системы  $\{q_n\}$  в пространстве  $\mathfrak{D}$ , состоящем из всех гармонических функций, с нормой

$$\|q\|^2 = \iint q^2 dx dy,$$

и потому такую систему мы сможем выписать явно (см. ниже).

## 2. Выражения для элементов определителя Вайнштейна.

Выполнение намеченной программы мы начнем с доказательства того факта, что  $\Delta \Delta p = 0$  для всех  $p \in \mathfrak{F} \cdot C^{(4)}$ . Для произвольных  $v$  и  $w \in \mathfrak{K}^{(0)}$  мы имеем  $(v, w) = \iint \Delta v \Delta w dx dy$ . Но если  $v$  и  $w \in C^{(4)}$ , то

$$(v, w) = \iint \Delta v \Delta w dx dy = \iint \Delta \Delta v \cdot w dx dy + \iint \left( \Delta v \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial \Delta v}{\partial n} w \right) ds,$$

и если  $v$  и  $w$  принадлежали  $\mathfrak{K}^{(0)}$ , то оба члена в криволинейном интеграле обратятся в нуль. Однако, поскольку  $v$  и  $w$  принадлежат только  $\overline{\mathfrak{K}}^{(0)}$ , можно утверждать, что обращается в нуль только один член

$$\iint \frac{\partial \Delta v}{\partial n} w ds,$$

так как  $w$  удовлетворяет стабильному граничному условию  $w = 0$ . Таким образом, для  $p \in \mathfrak{F} \cdot C^{(4)}$  и  $u \in \overline{\mathfrak{K}}^{(0)}$  имеем

$$0 = (p, u) = \iint \Delta \Delta p \cdot u dx dy + \iint \Delta p \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Если  $u$  равна нулю вне некоторого малого круга в  $R$ , то

$$\iint \Delta p \cdot u \, dx \, dy = 0,$$

откуда в силу непрерывности  $\Delta p$  следует, что  $\Delta p = 0$  в  $R$ , как и утверждалось.

Осталось доказать, что  $\mathfrak{F} \cdot C^{(4)}$  плотно в  $\mathfrak{F}$ . Для этого рассмотрим функцию  $u \in \overline{\mathfrak{K}}^{(0)}$ , такую, что  $(p, u) = 0$  для всех  $p \in \mathfrak{F} \cdot C^{(4)}$ . Поскольку  $\Delta p = 0$ , имеем

$$0 = (p, u) = \iint \Delta p \cdot u \, dx \, dy + \int \Delta p \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int \Delta p \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Это равенство может выполняться при всех  $p \in \mathfrak{F} \cdot C^{(4)}$  только тогда, когда  $\partial u / \partial n = 0$ . Таким образом, любая функция  $u \in \overline{\mathfrak{K}}^{(0)}$ , ортогональная всем  $p \in \mathfrak{F} \cdot C^{(4)}$ , должна принадлежать  $\overline{\mathfrak{K}}$ . Но тогда  $\overline{\mathfrak{K}} \supset \overline{\mathfrak{K}}^{(0)} \ominus \overline{\mathfrak{F} \cdot C^{(4)}}$ , так что

$$\overline{\mathfrak{F} \cdot C^{(4)}} \supset \overline{\mathfrak{K}}^{(0)} \ominus \overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{F} = \overline{\mathfrak{F}}.$$

Это означает, что  $\overline{\mathfrak{F} \cdot C^{(4)}} = \overline{\mathfrak{F}}$ , т. е. что  $\mathfrak{F} \cdot C^{(4)}$  плотно в  $\mathfrak{F}$ , что и требовалось доказать.

Следующий шаг, согласно изложенному выше, состоит в построении полной системы функций  $\{q_n\}$  в пространстве  $\mathfrak{Q}$  всех гармонических функций с нормой  $\|q\|^2 = \iint q^2 \, dx \, dy$ . Ясно, что такую систему можно построить многими способами. Например, мы можем взять следующую систему функций, занумеровав ее в одну последовательность ( $k = 1, 2, 3, \dots$  в каждом случае):

$$\begin{aligned} & \cos (2k - 1) x \operatorname{ch} (2k - 1) y, \\ & \operatorname{ch} (2k - 1) x \cos (2k - 1) y, \\ & \cos (2k - 1) x \operatorname{sh} (2k - 1) y, \\ & \operatorname{ch} 2kx \sin 2ky, \\ & \sin 2kx \operatorname{ch} 2ky, \\ & \operatorname{sh} (2k - 1) x \cos (2k - 1) y, \\ & \sin 2kx \operatorname{sh} 2ky, \\ & \operatorname{sh} 2kx \sin 2ky. \end{aligned}$$

Мы теперь готовы к вычислению элементов  $(v_m, p_n)$  определителя Вайнштейна, где  $v_m = R_{\xi} p_m = (K^{(0)} - \xi I)^{-1} p_m$ , а  $p_n$  — гриновский потенциал от указанных функций  $q$ .

По определению резольвенты имеем  $(K^{(0)} - \xi I) v_m = p_m$ , откуда, применяя к обеим частям оператор  $\Delta$ , получаем  $v_m - \xi \Delta v_m = 0$ , поскольку  $\Delta p_m = 0$ , а оператор  $K^{(0)}$  является

обратным к  $\Delta\Delta$ . Обозначая  $1/\zeta$  через  $\mu$ , а  $-\zeta v_m$  через  $w_m$ , перепишем последнее равенство в виде  $\Delta\Delta w_m - \mu w_m = 0$  в  $R$ . Далее,  $K^{(0)}w_m = \Delta K^{(0)}v_m = 0$  на  $C$ . Из равенства  $(K^{(0)} - \zeta I)v_m = p_m$  мы получаем

$$\begin{aligned} -\zeta v_m &= p_m = 0, \\ -\zeta \Delta v_m &= \Delta p_m = q_m \end{aligned}$$

или  $w_m = 0$ ,  $\Delta w_m = q_m$  на  $C$ . Теперь можно, разделяя переменные, решить краевую задачу  $\Delta\Delta w - \mu w = 0$  в  $R$ ,  $w = 0$ ,  $\Delta w = q$  на  $C$ .

Подставляя  $w(x, y) = w_1(x)w_2(y)$  в уравнение  $\Delta^2 w - \mu w = 0$ , получаем уравнение

$$\frac{d^4 w_1(x)}{dx^4} w_2(y) + 2 \frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} \frac{d^2 w_2(y)}{dy^2} + w_1(x) \left[ \frac{d^4 w_2(y)}{dy^4} - \mu w_2(y) \right] = 0.$$

Оно будет иметь решение  $w_1(x)$ , не зависящее от  $y$ , если существуют постоянные  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , такие, что система

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_2(y)}{dy^2} &= \gamma_1 w_2(y), \\ \frac{d^4 w_2(y)}{dy^4} - \mu w_2(y) &= \gamma_2 w_2(y) \end{aligned}$$

имеет решение  $w_2(y)$ . Тогда  $w_1(x)$  будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d^4 w_1(x)}{dx^4} + 2\gamma_1 \frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} + \gamma_2 w_1(x) = 0.$$

Общим решением уравнения  $d^2 w_2/dy^2 = \gamma_1 w_2$  является  $w_2 = \alpha_0 e^{\delta y} + \alpha_1 e^{-\delta y}$ , где через  $\delta$  обозначено  $\gamma_1^{1/2}$ . Далее, общее решение уравнения

$$\frac{d^4 w_2}{dy^4} - \mu w_2 = \gamma_2 w_2$$

имеет вид  $w_2 = \beta_0 e^{\delta y} + \beta_1 e^{i\delta y} + \beta_2 e^{-\delta y} + \beta_3 e^{-i\delta y}$ , где  $\delta = (\gamma_2 + \mu)^{1/4}$ .

Таким образом, система двух дифференциальных уравнений для  $w_2$  будет иметь решение только при таком выборе параметров  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2$ , при которых оба выражения для  $w_2$  совпадают.

Это возможно, если  $\gamma_2 + \mu = \gamma_1^2$ , поскольку в этом случае можно положить  $\beta_0 = \alpha_0, \beta_2 = \alpha_1, \beta_1 = \beta_3 = 0$ , и общее решение, удовлетворяющее обоим уравнениям, будет иметь вид

$$w_2 = \alpha_0 e^{\delta y} + \alpha_1 e^{-\delta y}.$$

Тогда решение  $w_1(y)$  задается выражением

$$w_1 = \xi_0 e^{\eta_0 x} + \xi_1 e^{\eta_1 x} + \xi_2 e^{-\eta_0 x} + \xi_3 e^{-\eta_1 x},$$

где  $\eta_0 = (-\gamma^2 + \mu^{1/2})^{1/2}$ ,  $\eta_1 = (-\gamma^2 - \mu^{1/2})^{1/2}$ , а  $\xi_i$  произвольны. Таким образом, решение  $w(x, y) = w_1(x) w_2(y)$  является линейной комбинацией следующих восьми линейно независимых решений:

$$\begin{array}{ll} \text{ch } \eta_0 x \text{ ch } \gamma y, & \text{ch } \eta_1 x \text{ ch } \gamma y, \\ \text{ch } \eta_0 x \text{ sh } \gamma y, & \text{ch } \eta_1 x \text{ sh } \gamma y, \\ \text{sh } \eta_0 x \text{ ch } \gamma y, & \text{sh } \eta_1 x \text{ ch } \gamma y, \\ \text{sh } \eta_0 x \text{ sh } \gamma y, & \text{sh } \eta_1 x \text{ sh } \gamma y, \end{array}$$

где  $\gamma$  — произвольная постоянная.

Но решение  $w$ , которое мы ищем, должно быть такой линейной комбинацией этих решений (возможно, с различными значениями постоянной  $\gamma$ ), чтобы удовлетворялись краевые условия  $w = 0$  и  $\Delta w = q$ , где  $q$  — функция, принадлежащая одной из восьми подпоследовательностей, выписанных на стр. 207. Так, если  $q = \cos mx \text{ ch } my$ ,  $m = 1, 3, 5, \dots$ , легко проверить, что

$$w_m = 2\mu^{-1/2} \text{ch } m \frac{\pi}{2} \cos mx \left\{ \frac{\text{ch } \theta_0 y}{\text{ch } \theta_0 \frac{\pi}{2}} - \frac{\text{ch } \theta_1 y}{\text{ch } \theta_1 \frac{\pi}{2}} \right\},$$

где

$$\theta_0 = (m^2 + \mu^{1/2})^{1/2}, \quad \theta_1 = (m^2 - \mu^{1/2})^{1/2}.$$

Аналогичные формулы имеют место и в остальных семи случаях выбора  $q$ .

Таким образом, мы получаем элементы определителя Вайнштейна в виде интеграла

$$(v_m, p_n) = -\mu (w_m, p_n) = -\mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta w_m q_n dx dy.$$

**3. Вычисления для квадратной пластины.** Чтобы показать, как проходит процесс вычисления, рассмотрим уравнение Вайнштейна для собственных значений первой промежуточной задачи, а именно  $\int \int \Delta w \cdot q dx dy = 0$ , где можно взять  $q = \cos x \text{ ch } y$ . Мы получим

$$w = 2\mu^{-1/2} \text{ch } \frac{\pi}{2} \cos x \left\{ \frac{\text{ch } \theta_0 y}{\text{ch } \theta_0 \frac{\pi}{2}} - \frac{\text{ch } \theta_1 y}{\text{ch } \theta_1 \frac{\pi}{2}} \right\}.$$

Тогда  $\Delta w = (1 - \theta_1^2) w_1 - (1 - \theta_0^2) w_0$ , где через  $w_0$  мы обозначили

$$2\mu^{-1/2} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \cos x \frac{\operatorname{ch} \theta_0 y}{\operatorname{ch} \theta_0 \frac{\pi}{2}},$$

а через  $w_1$

$$2\mu^{-1/2} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \cos x \frac{\operatorname{ch} \theta_1 y}{\operatorname{ch} \theta_1 \frac{\pi}{2}}.$$

Таким образом,

$$q \Delta w = 2\mu^{-1/2} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \cos^2 x \operatorname{ch} y \left\{ (1 - \theta_1^2) \frac{\operatorname{ch} \theta_1 y}{\operatorname{ch} \theta_1 \frac{\pi}{2}} - (1 - \theta_0^2) \frac{\operatorname{ch} \theta_0 y}{\operatorname{ch} \theta_0 \frac{\pi}{2}} \right\},$$

и  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} q \Delta w dx dy$  легко вычисляется. Приравнявая результат

нулю (и обозначая для удобства  $\pi/2$  через  $\rho$ ), получаем уравнение

$$\nu \operatorname{ch} \rho \theta_0 \{ (1 - \theta_1) \operatorname{sh} \rho (1 + \theta_1) + (1 + \theta_1) \operatorname{sh} \rho (1 - \theta_1) \} + \\ + (2 + \nu) \operatorname{ch} \rho \theta_1 \{ (1 - \theta_0) \operatorname{sh} \rho (1 + \theta_0) + (1 + \theta_0) \operatorname{sh} \rho (1 - \theta_0) \} = 0,$$

где  $\nu = \mu^{1/2}$ , так что  $\theta_0 = (1 + \nu)^{1/2}$  и  $\theta_1 = (1 - \nu)^{1/2}$ .

Это трансцендентное уравнение относительно  $\nu = \mu^{1/2} = \zeta^{-1/2}$  можно решить численно или графически, и мы получим (бесконечное множество) значений  $\nu$ . Можно показать, что ни одно из найденных значений  $\zeta$  не равняется ни одному из известных нам собственных значений базовой задачи, т. е. задачи о закрепленной пластине, и потому мы получили спектр  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots$  первой промежуточной задачи.

Переходя теперь к промежуточным задачам более высокого порядка, т. е. к задачам, в которых используется несколько функций  $q$ , заметим, что можно провести вычисления с большей точностью без дополнительных затрат труда, если воспользоваться следующими соображениями. Мы дадим здесь только несколько указаний к решению задачи. По поводу некоторых деталей см. Ароншайн [3].

Будем говорить, что функция  $q(x, y)$  является функцией типа 0 по  $x$ , если  $q$  — четная функция  $x$ , и типа 1, если  $q$  нечетна; аналогично формулируются определения по переменной  $y$ . Далее, будем говорить, что  $q$  имеет тип  $[i, j]$ ,  $i = 0, 1$ ;  $j = 0, 1$ , если  $q$  является функцией типа  $i$  по  $x$  и типа  $j$  по  $y$ . Заметим, что в выписанной выше последовательности функций  $q(x, y)$  имеются функции всех четырех типов.

Любую функцию  $f(x, y)$ , заданную на квадрате  $|x| \leq \pi/2$ ,  $|y| \leq \pi/2$ , можно разложить единственным образом в сумму четырех функций, каждая из которых имеет определенный тип, а именно

$$f = f_{00} + f_{01} + f_{10} + f_{11},$$

$$\text{где } f_{ij} = \frac{1}{4} \sum_{k=0,1} \sum_{l=0,1} (-1)^{ik+jl} f\{(-1)^k x, (-1)^l y\}.$$

Отсюда с помощью несложных рассуждений следует, что можно рассматривать задачи  $P$  и  $P^{(0)}$  для каждого типа функций в отдельности и применять метод Вайнштейна для каждой такой «частичной» задачи. Тогда последовательность собственных значений полной задачи может быть получена объединением всех собственных значений соответствующих четырех «частичных» задач в одну последовательность.

Собственные значения исходной задачи	Тип задачи	Нижняя граница	Верхняя граница	Среднее значение	Ошибка в %
1-е	00	13,2820	13,3842	13,3331	0,39
2-е	01	55,240	56,561	55,9005	1,2
3-е	10	55,240	56,561	55,9005	1,2
4-е	11	120,007	124,074	122,0405	1,7
5-е	00	177,67	182,14	179,905	1,3
6-е	00	178,3	184,5	181,4	1,7
7-е	01	277,42	301,55	289,485	4,3
8-е	10	277,42	301,55	289,485	4,3
9-е	01	454	477	465,5	2,5
10-е	10	454	477	465,5	2,5
11-е	00	488	548	518	6,1
12-е	11	600,840	621,852	611,346	1,8
13-е	11	601,569	646,939	624,254	3,8

В работе Ароншайна [3] собственные значения, меньшие 625, вычислены для четвертой промежуточной задачи в каждой из четырех «частичных» задач. Так как переменные  $x$  и  $y$  равноправны, задачи типа  $[1, 0]$  и  $[0, 1]$  имеют одинаковые собственные значения, которые в спектре полной задачи будут поэтому двукратными. В таблице приведены результаты вычислений нижних границ для первых 13 собственных значений; 4 первых значения были вычислены Вайнштейном в 1937 г. Верхняя граница, приведенная в таблице, получена обычным методом Рэля — Ритца.



ПРИМЕНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ  
К ОБЩИМ КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ

**1. Задача на собственные значения для общих дифференциальных операторов.** До сих пор описываемые методы рассматривались подробно лишь в применении к специальным случаям струны, стержня, мембраны и пластины. Теперь будет дано конспективное изложение некоторых результатов Ароншайна и его соавторов (см. главным образом Ароншайн [2]) относительно применения приближенных методов к более общим задачам. Доказательства зачастую опускаются; их общий характер становится ясным, если провести аналогию с результатами предыдущих глав. Центральное место во всех этих методах занимает вопрос об отыскании подходящих промежуточных задач. До сих пор мы получали эти задачи, изменяя краевые условия. Построенные таким образом задачи называются *промежуточными задачами первого типа*. В этой главе рассматриваются только такие задачи. Промежуточные задачи второго типа, связанные с существенным изменением самого оператора, изучаются в дальнейших главах. Некоторые другие методы, включающие, например, изменение краевых условий и самой области или изменение условий непрерывности решения внутри области, развиты Ароншайном [4] (см. также работу Ароншайна и Цейхнера [1]).

Мы начинаем с постановки задачи на собственные значения для общих дифференциальных операторов в случае двух независимых переменных. Аналогичные формулы могут быть получены ценой некоторых усложнений и для  $n$  переменных.

Рассмотрим два линейных однородных дифференциальных выражения  $A$  и  $B$ , определенных в области  $D$ . *Задача состоит в том, чтобы найти все числа  $\mu$ , для которых существует функция  $u$ , не равная тождественно нулю, удовлетворяющая в области  $D$  уравнению*

$$Au = \mu B u,$$

*а на границе  $C$  области  $D$  некоторым заданным однородным краевым условиям.*

Мы называем дифференциальное выражение  $A$  линейным однородным, если  $Au$  является суммой конечного числа членов вида

$$p(x, y) \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Относительно границы  $C$  предполагается, что она состоит из конечного числа аналитических дуг  $C_1, \dots, C_r$ , так что

$$C = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 + \dots + \bar{C}_r,$$

где  $\bar{C}_k$  обозначает замыкание  $C_k$ . Пусть на каждой дуге  $C_k$  задано  $h_k$  линейных однородных дифференциальных выражений  $\Lambda_{ki}$  ( $i = 1, 2, \dots, h_k$ ), порядок которых меньше порядка  $A$ . Тогда краевые условия, которые налагаются на решения  $u$  нашей задачи, можно записать в виде

$$\Lambda_{ik}u = 0 \text{ на } C_k \\ (i = 1, 2, \dots, h_k; k = 1, 2, \dots, r).$$

Примером может служить задача о колебаниях квадратной пластины, некоторые стороны которой зажаты, а остальные свободны.

**2. Самосопряженные и формально положительные дифференциальные выражения.** Для того чтобы можно было применять наши методы, выражения  $A$  и  $B$  и граничные операторы  $\Lambda_{ki}$  должны обладать некоторыми свойствами, которые мы сейчас обсудим.

Рассмотрим сначала выражение  $A$ ; предполагается, что его порядок больше порядка  $B$ . По правилу дифференцирования произведения выражение  $Au \cdot \bar{v}$  при любых функциях  $u$  и  $v$  можно представить в виде

$$Au \cdot \bar{v} = u \cdot \bar{A^*v} + \frac{\partial}{\partial x} \Gamma_1(u, v) + \frac{\partial}{\partial y} \Gamma_2(u, v),$$

где  $\bar{A^*}$  имеет такую же структуру, что и  $A$ ,  $\bar{v}$  обозначает функцию, комплексно сопряженную с  $v$  (на протяжении этой главы мы будем считать, что функции принимают комплексные значения),  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — билинейные эрмитовы выражения порядка меньшего, чем  $A$ , т. е.  $\Gamma_1(u, v)$  и  $\Gamma_2(u, v)$  представляют собой суммы членов вида

$$q(x, y) \frac{\partial^{k+l} u}{\partial x^k \partial y^l} \frac{\overline{\partial^{m+n} v}}{\partial x^m \partial y^n}.$$

Например, если

$$Au = -\Delta u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

то

$$-\Delta u \cdot \bar{v} = u(-\overline{\Delta v}) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \bar{v} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \bar{v} \right).$$

Ясно, что выражения  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  определяются неоднозначно; например, можно заменить  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  билинейными выражениями

$$\Gamma_1(u, v) + \frac{\partial}{\partial y} \Omega(u, v), \quad \Gamma_2(u, v) - \frac{\partial}{\partial x} \Omega(u, v),$$

где  $\Omega$  — произвольное билинейное выражение, порядок которого не выше порядка  $A$ .

Что касается выражения  $A^*$ , то оно определяется написанным выше равенством однозначно. Это выражение называется *сопряженным* к  $A$  <sup>1)</sup>. Если  $\overline{A^*}$  совпадает с  $A$ , то говорят, что  $A$  — *самосопряженное* выражение.

Если, кроме того, для самосопряженного выражения  $A$  можно написать равенство

$$Au \cdot \bar{v} = \sum_{k=1}^n A_k u \cdot \overline{A_k v} + \frac{\partial}{\partial x} \Gamma'(u, v) + \frac{\partial}{\partial y} \Gamma''(u, v),$$

где  $A_k$  — линейные однородные дифференциальные выражения, а  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$  — билинейные эрмитовы дифференциальные выражения, то говорят, что  $A$  *формально положительно*. Например,

$$-\Delta u \cdot \bar{v} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial u}{\partial x} \bar{v} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \bar{v} \right)$$

и

$$\Delta \Delta u \cdot \bar{v} = \Delta u \Delta \bar{v} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \bar{v} - \Delta u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \Delta u}{\partial y} \bar{v} - \Delta u \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right],$$

так что выражения  $A = -\Delta$  и  $A = \Delta \Delta$  формально положительны. Порядок положительного выражения должен быть четным, поскольку он равен удвоенному максимальному порядку выражений  $A_k$ . Мы будем обозначать порядок такого выражения через  $2t$ . Сумма членов наивысшего порядка, а именно

$$\sum_{m=0}^{2t} P_m(x, y) \frac{\partial^{2t} u}{\partial x^m \partial y^{2t-m}},$$

называется *главной частью*  $Au$ . Если выражение  $A$  является формально положительным, то  $-A$  называется *формально отрицательным*, а оба выражения  $A$  и  $-A$  называются *эллиптическими*. Следует отметить, что мы рассматриваем только эллиптические операторы.

<sup>1)</sup> В этом легко убедиться, взяв интегралы в обеих частях равенства определяющего  $A^*$ , по области  $G$ ; если функции  $u, v$  равны нулю в граничной полоске, то дивергентный член обращается в нуль. — *Прим. ред.*

**3. Адекватные граничные условия.** Пусть  $A$  — самосопряженное дифференциальное выражение. Рассмотрим интеграл

$$\iint_D Au \cdot \bar{v} dx dy = \iint_D u \cdot \overline{Av} dx dy + \int_C \{\alpha(z) \Gamma_1(u, v) + \beta(z) \Gamma_2(u, v)\} ds,$$

где  $z$  — произвольная точка границы, а  $\alpha(z)$  и  $\beta(z)$  — направляющие косинусы внешней нормали в точке  $z$ . Это равенство получается интегрированием по частям.

Дифференциальное выражение  $A$  вместе с граничными выражениями  $\Lambda_{ki}$  определяет *линейный дифференциальный оператор*  $\{A, \Lambda_{ki}\}$ . Такой оператор называется *формально самосопряженным*, если при некотором выборе  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  можно представить граничные члены  $\alpha(z) \Gamma_1(u, v) + \beta(z) \Gamma_2(u, v)$  в виде

$$\alpha(z) \Gamma_1(u, v) + \beta(z) \Gamma_2(u, v) = \sum_{i=1}^{h_k} [\Lambda_{ki} u \overline{\Lambda_{ki}' v} - \Lambda_{ki}' u \overline{\Lambda_{ki} v}]$$

для  $z \in C_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$ , где  $\Lambda_{ki}'$  — некоторые граничные выражения, которые имеют смысл на  $C_k$ .

Пусть, далее,  $A$  — формально положительное выражение. Рассмотрим интеграл

$$\iint_D Au \cdot \bar{v} dx dy = \iint_D \sum_{k=1}^n A_k u \overline{A_k v} dx dy + \int_C \{\alpha(z) \Gamma'(u, v) + \beta(z) \Gamma''(u, v)\} ds.$$

Тогда оператор  $\{A, \Lambda_{ki}\}$  называется *формально положительно определенным*, если

$$\begin{aligned} \alpha(z) \Gamma'(u, v) + \beta(z) \Gamma''(u, v) = \\ = \sum_{k=1}^{h_k} \Lambda_{ki} u \overline{\Lambda_{ki}' v} + \sum_{i=1}^{h_k} \Lambda_{ki}'' u \overline{\Lambda_{ki} v} + \sum_{j=1}^{n_k} \Omega_{kj} u \overline{\Omega_{kj} v} \end{aligned}$$

для  $z \in C_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$ , где  $\Lambda_{ki}''$ ,  $\Lambda_{ki}'''$  — линейные граничные выражения, определенные на  $C_k$ , а  $\Omega_{kj}$  — дифференциальные выражения на  $C_k$  порядка, меньшего  $t$ <sup>1)</sup>, обладающие тем свойством, что если для некоторой функции  $u$  выполнены условия  $A_k u = 0$  и на каждой дуге  $C_k$  имеют место равенства  $\Lambda_{ki} u = 0$  и  $\Omega_{kj} u = 0$  при  $k = 1, 2, \dots, r$ , то  $u \equiv 0$ .

Из этого определения вытекает, что если оператор  $\{A, \Lambda_{ki}\}$  формально положительно определен, то квадратичная форма

<sup>1)</sup> Предполагается, что оператор  $A$  порядка  $2t$ . — Прим. ред.

$\iint_D Au \cdot \bar{u} \, dx \, dy$  является положительно определенной. Действительно, в этом случае <sup>1)</sup>

$$\iint_D Au \cdot \bar{v} \, dx \, dy = \iint_D \sum_{k=1}^n A_k u \overline{A_k v} \, dx \, dy + \sum_{k=1}^r \int_{C_k} \sum_{j=1}^{n_k} \Omega_{kj} u \overline{\Omega_{kj} v} \, ds,$$

так что

$$\iint_D Au \cdot \bar{u} \, dx \, dy = \iint_D \sum_{k=1}^n |A_k u|^2 \, dx \, dy + \sum_{k=1}^r \int_{C_k} \sum_{j=1}^{n_k} |\Omega_{kj} u|^2 \, ds,$$

и, следовательно, квадратичная форма положительна при  $u \neq 0$ .

Краевые условия  $\Lambda_{ki} u = 0$ , такие, что оператор  $\{A, \Lambda_{ki}\}$  является формально положительно определенным, называются *согласованными с A*, если каждое из выражений  $\Lambda_{ki}$  имеет порядок, меньший, чем  $A$ , и, кроме того, набор  $\Lambda_{ki}$  слабее любого другого набора  $\tilde{\Lambda}_{ki}$ , для которого  $\{A, \tilde{\Lambda}_{ki}\}$  является формально положительно определенным. При этом мы говорим, что набор  $\Lambda_{ki}$  слабее набора  $\tilde{\Lambda}_{ki}$ , если любая функция  $u$ , удовлетворяющая условиям  $\tilde{\Lambda}_{ki} u = 0$ , удовлетворяет также условиям  $\Lambda_{ki} u = 0$ . Можно доказать, что согласованный набор краевых условий для оператора порядка  $2t$  содержит в точности  $t$  краевых условий на каждой дуге  $C_k$ . Поскольку в дальнейшем нам придется иметь дело только с согласованными краевыми условиями, мы будем заменять во всех формулах  $h_k$  на  $t$ .

Предполагая, что выражения  $A$  и  $B$  формально положительны, мы будем говорить, что краевые условия  $\Lambda_{ki} u = 0$  *адекватны* задаче  $Au = \mu Bu$ , если операторы  $\{A, \Lambda_{ki}\}$  и  $\{B, \Lambda_{ki}\}$  формально положительно определены и набор  $\Lambda_{ki}$  согласован с  $A$ .

**4. Функция Грина дифференциального оператора.** Предположим прежде всего (доказательство см. в работе Джона [1]), что существует *фундаментальное решение*  $f(z, z')$  уравнения  $Au = 0$ , которое определяется следующими четырьмя условиями. (Здесь  $z$  обозначает точку  $(x, y)$ ,  $z'$  — точку  $(x', y')$ , так что  $f$  и  $g$  являются функциями четырех переменных.)

Для любой фиксированной точки  $z' \in D$  функция  $f(z, z')$  как функция двух переменных  $x$  и  $y$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $f(z, z')$  принадлежит классу  $C^{(2b)}$  в  $D - z'$ ;
- 2)  $f(z, z')$  удовлетворяет уравнению  $Af = 0$  в  $D - z'$ ;

<sup>1)</sup> Предполагается, что  $\Lambda_{ki} u = 0$  на каждом куске  $C_k$  границы  $C$ . — *Прим. ред.*

3) существует положительная постоянная  $M$ , такая, что для любой производной функции  $f$  порядка  $2l - 1$  (мы обозначим ее через  $f^{(2l-1)}$ ) справедлива оценка

$$|z - z'| |f^{(2l-1)}(z, z')| \leq M$$

при всех  $z \in D$ ;

4) если  $\Gamma_\rho(u, v)$  — билинейное выражение на окружности  $|z - z'| = \rho$ , такое, что

$$\iint Au \cdot \bar{v} dx dy = \iint u \cdot \bar{Av} dx dy + \int_C \Gamma(u, v) ds + \int_{|z-z'|=\rho} \Gamma_\rho(u, v) ds,$$

где двойной интеграл берется по области  $D$ , из которой удален круг  $|z - z'| \leq \rho$ , то

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{|z-z'|=\rho} \Gamma_\rho(1, f) ds = 1.$$

Функция Грина  $g(z, z')$  оператора  $\{A, \Lambda_{hi}\}$  определяется тогда как фундаментальное решение уравнения  $Au = 0$ , удовлетворяющее краевым условиям  $\Lambda_{hi}g(z, z') = 0$  на  $C$  для любой фиксированной точки  $z' \in D$ . Если функция Грина существует, то она единственна. Однако существование функции Грина еще не доказано для многих задач, удовлетворяющих нашим определениям. В частности, при доказательстве могут возникнуть трудности, связанные с наличием угловых точек на границе, но мы не будем обсуждать эти вопросы. Для того чтобы доказать некоторые из формулируемых ниже утверждений, необходимо сделать некоторые предположения относительно непрерывности функции Грина. Эти предположения, по-видимому, выполняются во всех представляющих практический интерес случаях (см. Ароншайн [2]).

**5. Построение (функционального или псевдофункционального) гильбертова пространства.** Значение функции Грина  $g(z, z')$  состоит в том, что, взяв ее в качестве ядра, можно построить интегральный оператор  $G$ , который является обратным к  $A^{-1}$ . Иными словами, для любой функции  $u$  из класса  $C^{(2l)}(D)$  (а на самом деле из некоторого более широкого класса) равенства

$$Au = v \text{ в } D, \Lambda_i u = 0 \text{ на } C \quad (i = 1, 2, \dots, l)$$

эквивалентны следующему равенству:

$$u(z') = \iint_D v(z) g(z, z') dx dy = \iint_D Au(z) g(z, z') dz.$$

<sup>1)</sup> В дальнейшем в обозначениях операторов краевые условия зачастую опускаются (см. примечание на стр. 82). — *Прим. перев.*

Обозначим теперь через  $\mathfrak{K}$  класс допустимых функций, т. е. класс функций, принадлежащих  $C^{(2t)}(D)$  и удовлетворяющих краевым условиям  $\Lambda_{ki}u = 0$ . Тогда  $\mathfrak{K}$ , очевидно, является векторным пространством, и мы знаем, что для  $u \in \mathfrak{K}$  квадратичные формы

$$\iint_D Au \cdot \bar{u} \, dx \, dy = \mathfrak{A}(u) \quad \text{и} \quad \iint_D Bu \cdot \bar{u} \, dx \, dy = \mathfrak{B}(u)$$

можно записать в виде

$$\iint_D Au \cdot \bar{u} \, dx \, dy = \iint_D \sum_{k=1}^n |A_k u|^2 \, dx \, dy + \sum_{k=1}^r \int_{\tilde{C}_k} \sum_{j=1}^{n_k} |\Omega_{kj} u|^2 \, ds$$

и

$$\iint_D Bu \cdot \bar{u} \, dx \, dy = \iint_D \sum_{k=1}^{n'} |B_k u|^2 \, dx \, dy + \sum_{k=1}^r \int_{\tilde{C}_k} \sum_{j=1}^{n'_k} |\Theta_{kj} u|^2 \, ds.$$

Пусть первая из этих форм определяет норму в  $\mathfrak{K}$ , т. е. мы полагаем  $\|u\|^2 = \mathfrak{A}(u)$ . Тогда пространство  $\mathfrak{K}$  обладает всеми свойствами гильбертова пространства, за исключением свойства полноты. Поэтому естественно построить пространство  $\overline{\mathfrak{K}}$ , такое, чтобы  $\overline{\mathfrak{K}}$  было бы функциональным пополнением  $\mathfrak{K}$ , или, если это невозможно, псевдофункциональным пополнением  $\mathfrak{K}$ .

Ситуация здесь такова. Если число независимых переменных не превосходит половины порядка  $A$ , то функция Грина является воспроизводящим ядром, и мы можем построить функциональное пополнение  $\overline{\mathfrak{K}}$  пространства  $\mathfrak{K}$ . Если же это не так, то, желая сохранить прежнее соотношение

$$u(z') = (u(z), g(z, z')),$$

мы должны будем трактовать скалярное произведение в некотором обобщенном смысле, поскольку  $g(z, z')$  уже не будет конечной при  $z = z'$  и потому при любом фиксированном  $z'$  не будет принадлежать пространству  $\mathfrak{K}$ .

Чтобы придать смысл скалярному произведению, заменим  $g(z, z')$  функцией  $g_\rho(z, z')$ , определенной по формуле

$$g_\rho(z, z') = \frac{1}{\pi \rho^2} \int_{C'} g(z, z'') \, dz'',$$

где  $C'$  — круг с центром в  $z'$  радиуса  $\rho'$ . Тогда, если

$$u(z) = \lim_{\rho \rightarrow 0} (u(z'), g_\rho(z, z'))$$

при любом  $u \in \mathfrak{K}$ , мы будем говорить, что  $g(z, z')$  является псевдо-воспроизводящим ядром для пространства  $\mathfrak{K}$ . Функции Грина,

с которыми нам приходится иметь дело, всегда будут либо воспроизводящими, либо псевдовоспроизводящими ядрами.

Пространство  $\mathfrak{R}$ , обладающее псевдовоспроизводящим ядром, всегда можно пополнить до псевдофункционального пространства  $\overline{\mathfrak{R}}$ , элементами которого будут функции, определенные всюду в  $D$ , кроме некоторых исключительных множеств (гл. V, п. 5). Естественно ожидать, что процедура пополнения будет существенно более сложной, чем в случае функционального пополнения, описанного в гл. V. Мы не будем вдаваться в эти подробности и даже не будем пытаться определить исключительные множества. Современная теория меры и емкости остается вне нашего поля зрения (см. Ароншайн и Смит [1] и Шоке [1]).

**6. Норма присоединенных элементов.** Поскольку функции  $u(z) \in \overline{\mathfrak{R}}$  могут не принадлежать  $C^{(2t)}$ , норма  $\|u\|$ , задаваемая для  $u \in \mathfrak{R}$  формулой

$$\|u\|^2 = \int \int Au \cdot \bar{u} dz,$$

будет определена для  $u \in \overline{\mathfrak{R}}$  только в том случае, если мы придадим смысл выражению  $\int \int Au \cdot \bar{u} dx dy$  для всех таких  $u$ . Это делается следующим образом.

Каждой функции  $u \in \mathfrak{R}$  соответствует в силу равенства

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \int \int Au \cdot \bar{u} dx dy = \int \int \sum_{k=1}^n |A_{ku}|^2 dx dy + \\ &+ \sum_{l=1}^r \int_{C_l} \sum_{j=1}^{n_l} |\Omega_{lj}u|^2 ds \end{aligned}$$

(см. п. 3) единственный набор функций  $\{A_{ku}, \Omega_{lj}u\}$ . Рассмотрим теперь гильбертово пространство  $\mathfrak{H}$ , элементами которого являются всевозможные наборы

$$\sigma = \{f_k, \varphi_{lj}\} \quad (k = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, n_l),$$

где  $f_k$  и  $\varphi_{lj}$  — функции, квадратично интегрируемые по Лебегу на  $D$  и  $C$  соответственно. Норма в  $\mathfrak{H}$  определяется следующим образом:

$$\|\sigma\|^2 = \sum_{k=1}^n \int_D \int |f_k|^2 dx dy + \sum_{l=1}^r \sum_{j=1}^{n_l} \int_C |\varphi_{lj}|^2 ds.$$



Если мы определим преобразование  $T$  из  $\mathfrak{K}$  в  $\mathfrak{H}$ , полагая

$$\sigma = Tu = \{A_k u, \Omega_{lj} u\},$$

то, поскольку  $\mathfrak{A}(u) = \|Tu\|^2$  для  $u \in \mathfrak{K}$ , преобразование  $T$  будет *изометричным* в том смысле, что  $(Tu, Tv) = (u, v)$  для любых  $u, v \in \mathfrak{K}$ . Кроме того, в силу положительной определенности  $A$  преобразование  $T$  имеет обратное  $T^{-1}$ . Так как  $\mathfrak{K}$  — неполное пространство, его образ  $T(\mathfrak{K})$  в  $\mathfrak{H}$  является собственным подмножеством  $\mathfrak{H}$ , и преобразование  $T$  единственным образом можно продолжить на полное пространство  $\overline{\mathfrak{K}}$ ; при этом  $\overline{\mathfrak{K}}$  отображается на замыкание  $T(\mathfrak{K})$  в  $\mathfrak{H}$ . Следовательно, каждому элементу  $u \in \overline{\mathfrak{K}}$  будет соответствовать единственный элемент  $\sigma = Tu \in \mathfrak{H}$ , компоненты которого можно обозначить через

$$Tu = \{A_k u, \Omega_{lj} u\}.$$

Положим теперь по определению

$$\int \int Au \cdot \bar{v} \, dx \, dy = \sum_{k=1}^n A_k u \cdot \overline{A_k v} \, dx \, dy + \sum_{l=1}^r \int_C \sum_{j=1}^{n_l} \Omega_{kj} u \overline{\Omega_{kj} v} \, ds$$

для любых  $u$  и  $v \in \overline{\mathfrak{K}}$ .

**7. Собственные элементы в полном пространстве.** Общий элемент  $u(z') \in \overline{\mathfrak{K}}$  можно теперь построить следующим образом. Рассмотрим произвольный элемент  $\sigma = \{f_k, \varphi_{lj}\} \in \mathfrak{H}$  и запишем

$$u(z') = \int_D \int \sum_{k=1}^n f_k A_k G(z, z') \, dx \, dy + \sum_{l=1}^r \int_{C_l} \sum_{j=1}^{n_l} \varphi_{lj} \overline{\Omega_{lj} G(z, z')} \, ds.$$

Используя свойства функции Грина, можно доказать, что все производные  $u$  порядка, меньшего  $t - 1$ , непрерывны в  $\overline{D}$  (за исключением, возможно, конечных точек  $C_k$ ); далее, производные порядка  $t - 1$  существуют всюду, за исключением малых множеств, а производные порядка  $t$  существуют в некотором обобщенном смысле (см. Ароншайн [2]). Производные, порядок которых больше  $t$ , в общем случае не существуют ни в каком смысле. Краевые условия  $\Lambda_{li} u = 0$  удовлетворяются на  $C_l$  для всех операторов  $\Lambda_{li}$  порядка, меньшего  $t$ , причем для операторов порядка  $t - 1$  выражение  $\Lambda_{li} u$  существует всюду, за исключением некоторых малых множеств. С другой стороны, граничные условия  $\Lambda_{li} u = 0$ , порядок которых больше  $t - 1$ , уже не обязательно выполняются для функций пространства  $\overline{\mathfrak{K}}$ . Поскольку

эти последние условия теряются в процессе пополнения пространства  $\mathfrak{K}$ , они называются *нестабильными*, а условия, порядок которых меньше  $t$ , называются *стабильными*.

Если мы теперь введем оператор  $K$ , полагая  $K = A^{-1}B$ , то собственные значения  $K$ , которые определяются равенством  $Ku = \lambda u$ , будут равны обратным величинам  $\lambda = 1/\mu$  собственных значений  $\mu$  исходной задачи  $Au = \mu Bu$ ; в этом можно сразу же убедиться, применив к обеим частям равенства оператор  $A^{-1}$ . Можно доказать, что, за исключением угловых точек границы, собственные функции  $K$ , которые, согласно определению, принадлежат  $\bar{\mathfrak{K}}$ , на самом деле принадлежат  $\mathfrak{K}$  и, следовательно, являются достаточное число раз дифференцируемыми, что позволяет рассматривать их как решения исходного дифференциального уравнения. Используя тот факт, что порядок  $B$  меньше порядка  $A$ , можно также доказать (см. Ароншайн [2, п. 10]), что  $K$  — вполне непрерывный оператор. Таким образом, если определить собственные значения  $K$  как экстремальные значения частного  $(Ku, u)/(u, u)$  с помощью вариационных принципов, то можно использовать информацию, полученную в гл. VIII относительно спектра таких операторов в гильбертовом пространстве.

**8. Приближенные методы.** Теперь мы можем обсудить общую схему применения приближенных методов Рэля — Ритца или Вайнштейна к краевым задачам для дифференциальных уравнений.

В этих методах задача нахождения собственных значений  $K$  называется исходной задачей, а пространство  $\bar{\mathfrak{K}}$  — исходным пространством. Возможность применения приближенных методов зависит от того, можем ли мы построить вспомогательную задачу на собственные значения для оператора  $K^{(0)}$ , определенного на вспомогательном гильбертовом пространстве  $\bar{\mathfrak{K}}^{(0)}$ , причем оператор  $K^{(0)}$  положительно определен, вполне непрерывен и имеет известное спектральное разложение. Для метода Вайнштейна вспомогательная задача должна быть такой, чтобы исходное пространство  $\bar{\mathfrak{K}}$  было бы подпространством вспомогательного пространства  $\bar{\mathfrak{K}}^{(0)}$ , а оператор  $K$  — частью  $K^{(0)}$  в  $\bar{\mathfrak{K}}$ . Если же применяется метод Рэля — Ритца, то вспомогательная задача должна быть такой, чтобы  $\bar{\mathfrak{K}}^{(0)}$  было подпространством  $\bar{\mathfrak{K}}$ , а  $K^{(0)}$  — частью  $K$  в  $\bar{\mathfrak{K}}^{(0)}$ .

**9. Стабильные и нестабильные нормальные краевые условия.** Для того чтобы можно было применять эти методы, необходимо сделать некоторые предположения о граничных операторах  $\Lambda_{li}$ ,

определяющих адекватные краевые условия. Эти предположения выполняются во всех случаях, представляющих практический интерес.

Прежде всего заметим, что производные  $\partial^{k+l}u/\partial x^k \partial y^l$ , которые входят в граничные операторы  $\Lambda_{ki}$ , можно на каждой аналитической дуге  $C_k$  представить в виде линейных комбинаций нормальных и тангенциальных производных

$$\frac{\partial^{k'+l'}u}{\partial n^{k'} \partial s^{l'}} \quad (k' + l' \leq k + l).$$

Порядок старшей нормальной производной в таком представлении граничного оператора называется *нормальным порядком*, а граничный оператор  $\Lambda$  называется *нормальным оператором*, если его порядок равен нормальному порядку.

Если граничные операторы  $\Lambda_{ki}$  адекватны задаче  $Au = \mu Bv$ , то можно показать (см. Ароншайн [2, п. 9]), что в их выражения входят только нормальные операторы и что совокупность стабильных операторов полностью определяет нестабильные.

Наметим доказательство этого утверждения. Для точки  $z = z(s)$ , лежащей на границе, будем писать  $\alpha = \alpha(s) = \alpha(z(s))$ ,  $\beta = \beta(s) = \beta(z(s))$ . Можно доказать, что граничный оператор  $\alpha(z) \Gamma_1(u, v) + \beta(z) \Gamma_2(u, v)$ , который определяется для положительно определенного оператора  $A$  уравнением

$$\alpha(z) \Gamma_1(u, v) + \beta(z) \Gamma_2(u, v) = \sum_{i=1}^{h_k} (\Lambda_{ki} u \overline{\Lambda'_{ki} v} - \Lambda'_{ki} u \overline{\Lambda_{ki} v})$$

(ср. п. 3), содержит каждый из  $2t$  членов

$$(-1)^k p(s) \frac{\partial^{2t-1-k} u}{\partial n^{2t-1-k}} \frac{\partial^k \bar{v}}{\partial n^k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2t-1),$$

где

$$p(s) = \sum_{m=0}^{2t} p_m(x(s), y(s)) \alpha^m(s) \beta^{2t-m}(s).$$

Здесь функции  $p_m(x(s), y(s))$  являются коэффициентами главной части  $A$  (см. п. 2).

Тогда выражение для  $\alpha \Gamma_1 + \beta \Gamma_2$  принимает вид

$$\alpha(s) \Gamma_1(u, v) + \beta(s) \Gamma_2(u, v) = \sum_{k=0}^{2t-1} (-1)^k p(s) \Phi_{2t-1-k} u \Phi_k \bar{v},$$

где  $\Phi_k$  — нормальный оператор порядка  $k$ .

Рассмотрим также граничное выражение

$$\alpha(s) \Gamma'(u, v) + \beta(s) \Gamma''(u, v) - \sum_{j=1}^{n_l} \Omega_{lj} u \overline{\Omega_{lj} v},$$

где  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$  определяются с некоторым произволом (см. п. 2). Для каждой дуги  $C$  выберем любые  $t$  нормальных граничных операторов  $\Phi_{lk} = \Phi_k$  порядка  $k = 0, 1, \dots, t-1$  (для упрощения обозначений мы пишем  $\Phi_k$  вместо  $\Phi_{lk}$ ). Тогда можно доказать, что при надлежащем выборе  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$  и при некоторых слабых предположениях о том, как изменяются операторы  $\Phi_k = \Phi_{lk}$  от дуги к дуге, существует *единственная* совокупность  $t$  нормальных граничных операторов  $\Psi_{2t-1-k} = \Psi_{2t-1-k}$ ,  $l$  порядка  $2t-1-k$ , такая, что

$$\begin{aligned} \alpha(s) \Gamma'(u, v) + \beta(s) \Gamma''(u, v) - \sum_{j=1}^{n_l} \Omega_{lj} u \overline{\Omega_{lj} v} = \\ = \sum_{k=0}^{t-1} (-1)^k p(s) \Psi_{2t-1-k} u \Phi_k \bar{v}. \end{aligned}$$

Читателю предлагается самостоятельно построить эти операторы для рассмотренных ранее задач.

Чтобы показать, каким образом нестабильные граничные условия данной задачи определяются ее стабильными условиями, рассмотрим разложение последовательности  $0, 1, 2, \dots, t-1$  на две взаимно дополнительные последовательности

$$k'_1, k'_2, \dots, k'_{v'} \quad \text{и} \quad k''_1, k''_2, \dots, k''_{v''},$$

где  $v' + v'' = t$ . Помимо набора  $\{\Phi_k\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, t-1$ , нормальных операторов рассмотрим другой набор  $\{\tilde{\Phi}_{k''}\}$ , где  $\tilde{\Phi}_{k''} = \Phi_{k''}$  и  $\tilde{\Phi}_{k''}$  — произвольные нормальные операторы на  $C_l$  порядка  $k''$ , причем  $k''$  пробегает индексы  $k''_1, \dots, k''_{v''}$ . Согласно изложенному выше, новому набору  $t$  стабильных граничных операторов  $\{\tilde{\Phi}_{k''}\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, t-1$ , соответствует набор нестабильных граничных операторов  $\{\tilde{\Psi}_{2t-1-k''}\}$ . Тогда можно доказать, что два набора краевых условий  $\Psi_{2t-1-k''} u = 0$  и  $\tilde{\Psi}_{2t-1-k''} u = 0$ , где  $k'' = k''_1, k''_2, \dots, k''_{v''}$ , эквивалентны. Другими словами, нестабильные операторы  $\Psi_{2t-k''}$  по существу определяются стабильными операторами  $\Phi_{k''}$ .

Рассмотрим теперь некоторую адекватную систему краевых условий для нашей задачи, определяемую операторами  $\Lambda_{li}$ . Для каждого  $l$  отберем из них стабильные операторы (пусть это будут  $\Lambda_{l1}, \Lambda_{l2}, \dots, \Lambda_{lv''}$ ) и выпишем их порядки  $k'$  в виде возрастающей последовательности:

$$0 \leq k'_1 < k'_2 < \dots < k'_{v'} \leq t-1.$$

Обозначим  $\Lambda_{li}$  через  $\Phi_{k'_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, \nu'$ , а для каждого дополнительного индекса  $k''$  выберем произвольный нормальный оператор  $\Phi_{k''}$  порядка  $k''$ , например

$$\Phi_{k''} = \frac{\partial^{k''}}{\partial n^{k''}}.$$

Если теперь для полученного набора  $t$  операторов  $\{\Phi_k\}$  построить соответствующий набор  $\{\Psi_{2t-1-k}\}$ , то можно доказать, что две системы краевых условий  $\Lambda_{li} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, t$ , и

$$\Phi_{k'} u = \Psi_{2t-1-k''} u = 0 \quad (k' = k'_1, \dots, k'_{\nu'}; k'' = k''_1, \dots, k''_{\nu''})$$

эквивалентны. Этот результат проясняет смысл утверждения, что предписанные стабильные условия нашей задачи полностью определяют соответствующие нестабильные условия. С вариационной точки зрения нестабильные условия являются естественными условиями задачи.

#### 10. Промежуточные задачи первого типа. Метод Вайнштейна.

В промежуточных задачах первого типа требуется, чтобы пространство  $\bar{\mathfrak{K}}^{(0)}$ , соответствующее базовой задаче  $P^{(0)}$ , было более широким, чем пространство  $\bar{\mathfrak{K}}$ , соответствующее исходной задаче  $P$ , как в методе Вайнштейна, или чтобы  $\bar{\mathfrak{K}}^{(0)}$  было подпространством  $\bar{\mathfrak{K}}$ , как в методе Рэля — Ритца. В связи с этим можно доказать, что  $\bar{\mathfrak{K}}$  будет содержаться в  $\bar{\mathfrak{K}}^{(0)}$  тогда и только тогда, когда стабильные граничные операторы базовой задачи образуют более слабую систему, чем стабильные операторы исходной задачи. Аналогично,  $\bar{\mathfrak{K}}^{(0)}$  содержится в  $\bar{\mathfrak{K}}$  тогда и только тогда, когда стабильные операторы исходной задачи образуют более слабую систему, чем стабильные операторы промежуточной задачи. Здесь мы рассмотрим первый из этих двух случаев, а именно  $\bar{\mathfrak{K}} \subset \bar{\mathfrak{K}}^{(0)}$ , как в методе Вайнштейна.

Чтобы применить абстрактную теорию, развитую в гл. IX, нужно прежде всего построить полную систему функций  $p_\nu$  в пространстве  $\mathfrak{F} = \bar{\mathfrak{K}}^{(0)} \ominus \bar{\mathfrak{K}}$ . Это можно сделать следующим образом.

Система собственных функций  $u_m^{(0)}$  является ортонормированной и полной в пространстве  $\bar{\mathfrak{K}}^{(0)}$ . Следовательно, функцию Грина  $g^{(0)}(z, z')$  можно представить (ср. гл. V, п. 1) в виде ряда

$$g^{(0)}(z, z') = \sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(0)}(z) \overline{u_m^{(0)}(z')}.$$

Как мы выяснили в п. 5, функция Грина является либо воспроизводящим ядром, либо псевдовоспроизводящим ядром. Если

$g^{(0)}$  является воспроизводящим ядром, то написанный выше ряд сходится для любой пары точек  $z$  и  $z' \in D$ . Если же  $g^{(0)}$  является псевдовоспроизводящим ядром, то ряд может расходиться. Тем не менее он будет представлять функцию Грина в следующем смысле.

Пусть  $F$  — интегро-дифференциальный линейный функционал, который представляется в виде суммы интегралов типа  $\int \int Eu \, dx \, dy$  или  $\int_{C_l} \pi u \, ds$ . Здесь  $E$  и  $\pi$  — линейные однородные дифференциальные выражения порядка  $\leq t-1$ , определенные в  $D$  или на  $C_l$  соответственно, с ограниченными коэффициентами. Такой функционал  $F$  определен на всех функциях  $u \in \mathfrak{K}^{(0)}$ , а также и на функции Грина  $g^{(0)}(z, z')$ , рассматриваемой как функция  $z$ . Тогда можно сказать, что  $\sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(0)}(z) u_m^{(0)}(z')$  представляет  $g^{(0)}(z, z')$  в том смысле, что для любого такого функционала  $F$  ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(0)}(z') \overline{F(u_m^{(0)}(z))}$$

сходится и

$$F(g^{(0)}(z, z')) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(0)}(z') \overline{F(u_m^{(0)}(z))}.$$

Чтобы построить  $p_\nu$ , рассмотрим равенство (см. п. 2), выражающее положительную определенность  $A$ , а именно

$$Au \cdot \bar{v} = \sum_{m=1}^n A_m u \cdot \overline{A_m v} + \frac{\partial}{\partial x} \Gamma^{(0)}(u, v) + \frac{\partial}{\partial y} \Gamma^{(0)}(u, v).$$

Подставляя  $p_\nu$  вместо  $u$  и  $g^{(0)}(z, z')$  вместо  $v$  и интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} \int \int Au \cdot \bar{v} \, dz &= \int \int \sum_{m=1}^n A_m p_\nu(z) \overline{A_m g^{(0)}(z, z')} \, dx \, dy + \\ &+ \sum_{l=1}^r \int \sum_{j=1}^{n_l} \Omega_{lj} p_\nu(z(s)) \overline{\Omega_{lj}(g^{(0)}(z(s), z'))} \, ds + \\ &+ \sum_{l=1}^r \int_{C_l} p(s) \sum_{k_0} (-1)^{k_0} \Psi_{l, 2l-1-k_0} p_\nu(z(s)) \Phi_{l, k_0} g^{(0)}(z(s), z') \, ds, \end{aligned}$$

где индексы  $k_0$  обозначают порядки стабильных условий исходной задачи, которые опускаются в промежуточной задаче. В силу общего воспроизводящего свойства  $g^{(0)}$  мы получаем такое равенство:

$$p_{\nu}(z') = - \sum_{l=1}^r \int_{C_l} p(s) \sum_{k_0} (-1)^{k_0} \Psi_{l, 2t-1-k_0} p_{\nu}(r(s)) \Phi_{l, k_0} g^{(0)}(r(s), z') ds.$$

Таким образом, значение функции  $p_{\nu}$  в точке  $z'$  равно значению функционала указанного выше типа на функции Грина  $g^{(0)}$ . Следовательно, функцию  $p_{\nu}(z')$  можно разложить в ряд по собственным функциям

$$p_{\nu}(z') = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m^{(0)}(z'),$$

где

$$\alpha_m = \overline{F_{\nu}(u_m^{(0)})} = - \sum_{l=1}^r \int_{C_l} p(s) \sum_{k_0} (-1)^{k_0} \Psi_{l, 2t-1-k_0} p_{\nu}(z(s)) \Phi_{l, k_0} u_m^{(0)} ds.$$

Функции  $\Psi_{l, k_0}^{(v)}(s) = \Psi_{l, 2t-1-k_0} p_{\nu}$ , заданные на  $C_l$ , полностью определяют  $p_{\nu}(z')$ . Мы можем выбрать их произвольно, лишь бы они были достаточно гладкими, и тогда функции  $p_{\nu}(z')$  находятся как решения краевой задачи  $Ap_{\nu} = 0$  при условиях

$$\Phi_{l, k_0} p_{\nu} = 0, \quad \Psi_{l, 2t-1-k_0} p_{\nu} = \Psi_{l, k_0}^{(v)}(s), \quad \Psi_{l, 2t-1-k_0} p_{\nu} = 0.$$

Выбрав должным образом функции  $\Psi_{l, k_0}^{(v)}$ , мы можем получить полную систему функций  $p_{\nu}$ , а также ортогональные разложения этих функций по собственным функциям  $u_m^{(0)}$ .

После того как функции  $p_{\nu}$  будут найдены таким образом, можно перейти к следующему шагу в методе Вайнштейна (ср. гл. X), а именно к вычислению функций

$$v_{\nu}(\xi) = R_{\xi}^{(0)} p_{\nu},$$

действуя резольвентным оператором  $R_{\xi}^{(0)}$  на функцию  $p_{\nu}$ . Но (гл. IV, п. 5) мы имеем

$$R_{\xi}^{(0)} p_{\nu} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(p_{\nu}, u_m^{(0)})}{\lambda_m - \xi} u_m^{(0)}.$$

Кроме того, как мы только что видели,

$$p_v = \sum_{m=0}^{\infty} F_v(u_m^{(0)}) u_m^{(0)},$$

так что  $(p_v, u_m^{(0)}) = F_v(u_m^{(0)})$ . Итак,

$$v_v(\zeta) = R_{\zeta}^{(0)} p_v = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_v(u_m^{(0)})}{\lambda_m - \zeta} u_m^{(0)}.$$

Элементы определителя Вайнштейна представляются теперь в виде

$$(v_v, p_l) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m - \zeta} \overline{F_v(u_m^{(0)})} F_l(u_m^{(0)}).$$

Поскольку можно вычислить коэффициенты  $F_v(u_m^{(0)})$ , мы имеем явное выражение для элементов определителя Вайнштейна в общем случае. Это выражение позволяет сразу же найти все возможные полюсы определителя Вайнштейна  $W(\zeta)$ , и нам остается только вычислить нули, расположенные между двумя последовательными полюсами. Как видно из результатов предыдущих глав, вычисление нулей является в общем случае весьма трудной задачей, поскольку выражения для элементов определителя Вайнштейна содержат бесконечное множество слагаемых. В последующих главах будет показано, что во многих случаях промежуточные задачи можно строить так, чтобы эти выражения содержали только конечное число слагаемых.



ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ЗАДАЧИ ВТОРОГО ТИПА.  
СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВЫБОР БЕЗЛИ

**1. Второй способ построения промежуточных задач.** До сих пор промежуточные задачи для метода Вайнштейна мы получали из базовой задачи, последовательно присоединяя новые связи. Другими словами, мы ограничивали область определения базового оператора. Промежуточные задачи, в которых изменение базового оператора сводится к ограничению его области определения, называются *задачами первого типа* (см. начало гл. XI).

Но можно строить промежуточные задачи, последовательно заменяя базовый оператор другими операторами, как правило, с той же областью определения. *Задачи второго типа* первоначально были введены Ароншайном [6] в 1950 г., а позже Безли, Фокс и другие успешно применили их для численного решения задач классической механики и особенно квантовой теории.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Численные примеры для задач второго типа, которые рассматриваются в оставшейся части этой книги, взяты из работ Безли [1], [2] и Безли и Фокса [1—10]. Читатель может найти другие примеры в работах Гея [1], Штадтера [1] и Вайнштейна [5—10]. За дальнейшей информацией относительно различных методов, использующих задачи второго типа, можно обратиться к статьям Вайнштейна, а также Безли и Фокса.

**2. Случай  $H = H^{(0)} + H'$ , где  $H'$  — положительно определенный оператор.** В наиболее простом, но очень важном частном случае применения задач второго типа (см., в частности, Безли и Фокс [2]) предполагается, что оператор  $H$ , собственные элементы которого нужно найти, зная собственные элементы  $H^{(0)}$ , можно представить в виде  $H = H^{(0)} + H'$ , где  $H'$  — положительно определенный оператор. Это предположение выполняется во многих задачах квантовой механики. Тогда, поскольку  $(H^{(0)}u, u) = (Hu, u) - (H'u, u)$  и  $H'$  положительно определен, из максимально-минимального определения вытекает, что известные собственные значения оператора  $H^{(0)}$  дают, как и требуется,

оценку снизу искомым собственным значениям  $H$ . Если, например,  $H = H^{(0)} + I$ , где  $I$  — тождественный оператор, то у оператора  $H$ , очевидно, будут те же собственные векторы, что и у  $H^{(0)}$ , а собственные значения увеличатся на единицу.

Но для произвольного оператора  $H'$  связь между собственными элементами  $H^{(0)}$  и  $H$  будет, разумеется, более сложной. Чтобы исследовать этот вопрос, введем последовательность  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$  линейно независимых функций, которая порождает все гильбертово пространство  $\mathfrak{H}$ . Однако в отличие от предыдущего мы не будем использовать эти функции для наложения связей на  $H^{(0)}$ , а будем строить с их помощью новые операторы  $H^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , спектр которых, монотонно возрастая с ростом  $k$ , стремится к спектру  $H$ .

Другими словами, если

$$\lambda_1^{(k)} \leq \lambda_2^{(k)} \leq \dots$$

— собственные значения  $H^{(k)}$ , то

$$\lambda_i^{(0)} \leq \lambda_i^{(k)} \leq \lambda_i^{(k+t)} \leq \lambda_i \quad (i, k, t = 1, 2, \dots)$$

и

$$\lambda_i^{(k)} \rightarrow \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, k \rightarrow \infty.$$

**3. Проекционные операторы для задач второго типа.** Поскольку мы хотим, чтобы собственные значения  $H^{(k)}$  монотонно возрастали с ростом  $k$ , естественно ввести проекционные операторы, так как норма проекции вектора растет при увеличении размерности пространства, на которое этот вектор проектируется. Определим операторы  $H^{(k)}$ , полагая  $H^{(k)} = H^{(0)} + H'P^{(k)}$ , где через  $P^{(k)}$  обозначен проектор на подпространство, натянутое на первые  $k$  векторов  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . Но в связи с тем, что собственные значения  $H'$  можно охарактеризовать как минимумы скалярного произведения  $(H'u, u)$ , удобно определить проекторы  $P^{(k)}$  не с помощью скалярного произведения  $(u, v)$ , а с помощью нового скалярного произведения  $[u, v] = (H'u, v)$ , которое удовлетворяет всем необходимым аксиомам, поскольку оператор  $H'$  положительно определен. Такие проекторы, явные выражения которых будут найдены в следующих двух пунктах, называются  $H'$ -ортогональными.

В силу свойств операторов проектирования имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq [P^{(k)}u, P^{(k)}u] &= [P^{(k)}u, u] = (H'P^{(k)}u, u) \leq \\ &\leq [P^{(k+t)}u, P^{(k+t)}u] = (H'P^{(k+t)}u, u). \end{aligned}$$

Отсюда для операторов  $H^{(k)} = H^{(0)} + H'P^{(k)}$  получаем неравенство

$$(H^{(k)}u, u) \leq (H^{(k+t)}u, u).$$

Тогда в силу максимально-минимального принципа

$$\lambda_i^{(k)} \leq \lambda_i^{(k+t)} \quad (i, k, t = 1, 2, \dots),$$

так что промежуточные собственные значения растут с ростом  $k$ .

**4. Уравнение Вайнштейна в случае проектирования на одномерное подпространство.** Рассмотрим простейший случай  $k=1$ , когда используется только первый вектор  $p_1$ . Тогда оператор  $H^{(1)}$  имеет вид  $H^{(1)} = H^{(0)} + H'P^{(1)}$ , где  $P^{(1)}$  есть  $H'$ -ортогональный проектор на  $p_1$ , т. е.

$$P^{(1)}u = \frac{[u, p_1]}{[p_1, p_1]} p_1 = \frac{(u, H'p_1)}{(p_1, H'p_1)} p_1,$$

или

$$P^{(1)}u = c_1 p_1, \quad \text{где } c_1 = \frac{(u, H'p_1)}{(p_1, H'p_1)}.$$

Попытаемся получить уравнение для собственных значений  $\lambda$  промежуточного оператора  $H^{(1)}$  в терминах резольвенты  $R_\lambda = (H^{(0)} - \lambda I)^{-1}$  базового оператора  $H^{(0)}$ . Для этих собственных значений и соответствующих собственных векторов  $u$  имеем

$$0 = H^{(1)}u - \lambda u = H^{(0)}u + H'P^{(1)}u - \lambda u,$$

так что

$$(H^{(0)} - \lambda I) u = -H'P^{(1)}u$$

или

$$(H^{(0)} - \lambda I) u = -c_1 H'p_1.$$

Тогда, если  $u$  является собственным вектором  $H^{(1)}$ , соответствующим неконсервативному собственному значению  $\lambda$ , можно применить резольвенту  $R_\lambda$  и получить равенство

$$u = -c_1 R_\lambda H'p_1,$$

откуда, подставляя значение  $c_1$ ,

$$(p_1, H'p_1) u = - (u, H'p_1) R_\lambda H'p_1.$$

Умножив скалярно это равенство на  $H'p_1$ , получим

$$(p_1, H'p_1) (u, H'p_1) = - (u, H'p_1) (R_\lambda H'p_1, H'p_1)$$

или

$$(p_1 + R_\lambda H'p_1, H'p_1) = 0,$$

что и дает искомое уравнение.

Таким образом, если ввести *модифицированную функцию Вайнштейна*  $\widehat{W}(\lambda)$ , полагая  $\widehat{W}(\lambda) - \widehat{W}(\lambda; p_1) = (p_1 + R_\lambda H'p_1, H'p_1) =$

$= W(\lambda; H'p_1) + (p_1, H'p_1)$ , то уравнение для неконсервативных собственных значений  $\lambda$  первой промежуточной задачи можно записать в виде  $\widehat{W}(\lambda) = 0$ .

**5. Проектирование на подпространство, натянутое на  $k$  векторов.** Чтобы построить  $k$ -ю промежуточную задачу, возьмем  $k$  векторов  $p_1, p_2, \dots, p_k$  и положим  $H^{(k)} = H^{(0)} + H'P^{(k)}$ , где через  $P^{(k)}$  обозначен  $H'$ -ортогональный проектор на подпространство  $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ . Оператор проектирования  $P^{(k)}$  можно записать в виде

$$P^{(k)}u = c_1p_1 + c_2p_2 + \dots + c_kp_k.$$

Но в отличие от случая  $k = 1$  мы не можем теперь представить  $c_i$  в виде  $c_i = [u, p_i]/[p_i, p_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , поскольку мы хотим охватить случай, когда векторы  $p_1, p_2, \dots, p_k$  не являются взаимно ортогональными. Для определения постоянных  $c_i$  воспользуемся основным свойством оператора проектирования на подпространство  $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ , а именно  $[u, p_i] = [P^{(k)}u, p_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , для любых  $u$ . Другими словами,  $c_i$  находятся из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} (H'u, p_j) &= [u, p_j] = [P^{(k)}u, p_j] = \\ &= c_1 [p_1, p_j] + \dots + c_k [p_k, p_j] = \\ &= c_1 (H'p_1, p_j) + \dots + c_k (H'p_k, p_j) \quad (j = 1, 2, \dots, k). \end{aligned}$$

Таким образом,  $c_i = b_{1i}(H'u, p_1) + \dots + b_{ki}(H'u, p_k)$ , где  $\|b_{ji}\|$  — квадратная матрица порядка  $k$ , обратная к матрице Грама  $\| [p_j, p_i] \| = \| (H'p_j, p_i) \|$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, k$ . Существование обратной матрицы следует из линейной независимости векторов  $p_i$ .

Для искомого собственного вектора  $u$  мы имеем тогда

$$0 = H^{(k)}u - \lambda u = (H^{(0)} - \lambda I)u + H'P^{(k)}u,$$

так что

$$(H^{(0)} - \lambda I)u = -H'P^{(k)}u = -H'(c_1p_1 + \dots + c_kp_k) = -\sum_{i=1}^k c_i H'p_i.$$

Если  $u$  как собственный вектор  $H^{(k)}$  соответствует неконсервативному собственному значению  $\lambda$ , то можно записать его в таком виде:

$$u = -\sum_{j=1}^k c_j R_\lambda H'p_j.$$

Тогда, используя тот факт, что все  $c_i$  не могут одновременно равняться нулю, мы можем получить искомое характеристическое уравнение для  $\lambda$  следующим образом.

Для произвольного  $u$

$$P^{(k)}u = \sum_{i,j=1}^k [u, p_i] b_{ij} p_j = \sum_{j=1}^k c_j p_j,$$

так что для любого  $p_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, k$ , мы имеем

$$\begin{aligned} (u, H' p_l) &= [u, p_l] = [u, P^{(k)} p_l] = [P^{(k)} u, p_l] = \\ &= \sum_{j=1}^k c_j [p_j, p_l] = \sum_{j=1}^k c_j (p_j, H' p_l). \end{aligned}$$

В частности, если  $u = -\sum_{j=1}^k c_j R_\lambda H' p_j$  — собственный вектор, то

$$\sum_{j=1}^k c_j (p_j + R_\lambda H' p_j, H' p_l) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, k).$$

Но эта система  $k$  уравнений имеет нетривиальное решение относительно  $c_1, c_2, \dots, c_k$  тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, т. е.

$$\det | (p_j + R_\lambda H' p_j, H' p_i) | = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, k).$$

Таким образом, любое  $\lambda$ , удовлетворяющее этому уравнению и не принадлежащее спектру  $H^{(0)}$ , будет собственным значением  $H^{(k)}$ , причем кратность  $\lambda$  как собственного значения равна его кратности как корня уравнения. Соответствующие собственные векторы  $u$  оператора  $H^{(k)}$  имеют вид  $u = -\sum_{i=1}^k c_i R_\lambda H' p_i$ . Вводя модифицированную функцию Вайнштейна

$$\widehat{W}(\lambda; p_1, \dots, p_k) = \det | (p_j + R_\lambda H' p_j, H' p_l) | \quad (j, l = 1, 2, \dots, k),$$

мы снова можем придать нашему результату следующую форму: неконсервативные собственные значения  $k$ -й промежуточной задачи должны удовлетворять уравнению  $\widehat{W}(\lambda) = 0$ .

Обратимся теперь к консервативным собственным значениям оператора  $H^{(k)}$ , т. е. к таким значениям, которые являются в то же время собственными значениями  $H^{(0)}$ . Пусть  $u$  — собственный вектор  $H^{(k)}$ , соответствующий собственному значению  $\lambda = \lambda_v^{(0)}$ , которое принадлежит также спектру  $H^{(0)}$ . Пусть  $m$  — кратность  $\lambda$  в спектре  $H^{(0)}$ , а  $\mathfrak{M} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  — соответствующее собственное подпространство. Тогда резольвента  $R_{\lambda_v^{(0)}} = (H^{(0)} - \lambda_v^{(0)} I)^{-1}$  определена на подпространстве  $\mathfrak{M}^\perp$ , являющемся ортогональным дополнением к подпространству  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ . Для любой функции  $u$  имеем  $((H^{(0)} - \lambda I) u, v_i) =$

$= (u, (H^{(0)} - \lambda I) v_i) = 0$ . В частности, если  $u$  — собственная функция  $H^{(k)}$ , то отсюда следует, что функция

$$(H^{(0)} - \lambda I) u = - \sum_{j=1}^k c_j H' p_j$$

принадлежит  $\mathfrak{M}^\perp$ . Таким образом, если мы представим  $u$  в виде  $u = v + w$ , где  $v \in \mathfrak{M} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ , а  $w \in \mathfrak{M}^\perp$ , то будем иметь

$$(H^{(0)} - \lambda I) u = (H^{(0)} - \lambda I) w = - \sum_{j=1}^k c_j H' p_j,$$

так что

$$w = - \sum_{j=1}^k c_j R_{\lambda_{\nu}}^{(0)} H' p_j.$$

Далее, поскольку  $v \in \mathfrak{M}$ , мы можем написать равенство

$$v = - \sum_{j=k+1}^{k+m} c_j v_{j-k},$$

где  $c_{k+1}, \dots, c_{k+m}$  — некоторые постоянные.

Следовательно,  $u = v + w$  имеет вид

$$u = - \sum_{j=1}^k c_j R_{\lambda_{\nu}}^{(0)} H' p_j - \sum_{j=k+1}^{k+m} c_j v_{j-k}.$$

Умножая  $u$  скалярно на  $H' p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , получаем систему  $k$  уравнений для  $k + m$  величин  $c_1, \dots, c_k, c_{k+1}, \dots, c_{k+m}$ :

$$\sum_{j=1}^k c_j (p_j + R_{\lambda_{\nu}}^{(0)} H' p_j, H' p_i) + \sum_{j=k+1}^{k+m} c_j (v_{j-k}, H' p_i) = 0 \quad (i = 1, \dots, k).$$

Но учитывая, что

$$(H^{(0)} - \lambda I) u = - \sum_{j=1}^k c_j H' p_j$$

принадлежит подпространству  $\mathfrak{M}^\perp$ , которое ортогонально подпространству  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ , мы можем приравнять нулю скалярные произведения векторов  $(H^{(0)} - \lambda I) u$  и  $v_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , и получить тем самым еще  $m$  уравнений

$$\sum_{j=1}^k c_j (H' p_j, v_{i-k}) = 0 \quad (i = k+1, k+2, \dots, k+m),$$

для  $k$  величин  $c_1, c_2, \dots, c_k$ .

Эти  $m$  уравнений относительно  $c_1, c_2, \dots, c_k$  вместе с предыдущими  $k$  уравнениями относительно  $c_1, \dots, c_k, c_{k+1}, \dots, c_{k+m}$  образуют систему  $k+m$  уравнений с  $k+m$  неизвестными  $c_1, \dots, c_{k+m}$ . Она имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, т. е.

$$\det \begin{vmatrix} (p_j + R_{\lambda_v^{(0)}} H' p_j, H' p_i) & \cdot & (v_{j-k}, H' p_i) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (H' p_j, v_{i-k}) & \cdot & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

В этом случае  $\lambda = \lambda_v^{(0)}$  является консервативным собственным значением  $H^{(k)}$ , кратность  $m$  которого в спектре  $H^{(k)}$  равна числу линейно независимых решений системы. Соответствующие  $m$  (линейно независимых) собственных векторов имеют вид

$$u_\sigma = - \sum_{j=1}^k c_j^{(\sigma)} R_{\lambda_v^{(0)}} H' p_j - \sum_{j=k+1}^{k+m} c_j^{(\sigma)} v_{j-k},$$

где  $\{c_1^{(\sigma)}, \dots, c_{k+m}^{(\sigma)}\}$ ,  $\sigma = 1, 2, \dots, m$ , — линейно независимые решения системы.

**6. Специальный выбор Безли.** До сих пор векторы  $p_1, p_2, \dots, p_k$  выбирались произвольно. Однако при таком выборе  $p_i$  пользоваться резольвентой

$$R_\lambda u = \frac{(u, u_1)}{\lambda_1 - \lambda} u_1 + \frac{(u, u_2)}{(\lambda_2 - \lambda)} u_2 + \dots$$

часто бывает неудобно, поскольку она содержит бесконечно много слагаемых, зависящих от  $\lambda$ , и потому является трансцендентной мероморфной функцией. При решении уравнения Вайнштейна нужно находить нули такой мероморфной функции; как заметил Ароншайн при первоначальном рассмотрении задач второго типа, вычисление нулей может быть связано с большими техническими трудностями. Впоследствии были предложены различные специальные способы выбора функций  $p_i$  с тем, чтобы можно было свести вычисления к решению конечномерных задач, подобных тем, которые были рассмотрены в гл. I и II.

Мы начнем с простейшего специального способа выбора, который был предложен Безли [1], [2]. Он является очень удобным для практических целей, ибо промежуточные задачи, построенные этим способом, обладают следующими простыми свойствами. В первой промежуточной задаче спектр  $\lambda_1^{(1)} \leq \lambda_2^{(1)} \leq \dots$  оператора  $H^{(1)}$  совпадает со спектром  $H^{(0)}$ , за исключением первого собственного значения, которое действительно увеличивается, т. е.

$$\lambda_1^{(1)} > \lambda_1^{(0)}, \quad \lambda_2^{(1)} = \lambda_2^{(0)}, \quad \dots, \quad \lambda_n^{(1)} = \lambda_n^{(0)}, \dots$$

Следует только отметить, что  $\lambda_1^{(1)}$  может стать больше  $\lambda_2^{(0)}$ , и в этом случае нужно перенумеровать собственные значения, чтобы сохранить их расположение в порядке возрастания. Аналогично, все собственные значения оператора  $H^{(2)}$  те же, что и у  $H^{(0)}$ , кроме первых двух, и т. д. для  $k = 3, 4, \dots$ . Всякий раз, когда собственное значение промежуточной задачи совпадает с собственным значением предыдущей задачи, мы будем говорить, что имеет место *консервативность*. Когда при переходе к следующей промежуточной задаче меняется только одно собственное значение по сравнению с предыдущей задачей (как это имеет место в рассмотренном выше случае), мы будем говорить, что имеет место *максимальная консервативность*.

Рассмотрим сначала простейший случай  $k = 1$ . Легко видеть, что максимальная консервативность будет иметь место, если положить  $p_1 = (H')^{-1}u_1^{(0)}$ , где  $u_1^{(0)}$  — первый собственный вектор базовой задачи. Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned}\widehat{W}(\lambda) &= \widehat{W}(\lambda; p_1) = (p_1 + R_\lambda H' p_1, H' p_1) = (p_1 + R_\lambda u_1^{(0)}, u_1^{(0)}) = \\ &= (R_\lambda u_1^{(0)}, u_1^{(0)}) + (p_1, u_1^{(0)}) = (\lambda_1^{(0)} - \lambda)^{-1} + (p_1, u_1^{(0)}),\end{aligned}$$

так что единственным нулем  $\widehat{W}(\lambda)$  является  $\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(0)} + (p_1, u_1^{(0)})^{-1}$ , откуда следует, что  $\lambda_1^{(1)}$  строго больше  $\lambda_1^{(0)}$ . Что касается тех значений  $\lambda$ , которые являются собственными значениями  $H^{(0)}$ , то очевидно, что  $\lambda_1^{(0)}$  будет полюсом  $W(\lambda; H'p) = (\lambda_1^{(0)} - \lambda)^{-1}$ , а  $\lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}, \dots, \lambda_n^{(0)}, \dots$  не будут полюсами. Таким образом, мы получаем, что  $\lambda_1^{(1)} > \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(1)} = \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_n^{(1)} = \lambda_n^{(0)}, \dots$ , т. е. имеет место требуемая максимальная консервативность. Без труда проверяется, что собственные векторы  $u_i^{(1)}$  оператора  $H^{(1)}$  совпадают с собственными векторами  $u_i^{(0)}$  оператора  $H^{(0)}$ .

Этот результат допускает простое геометрическое истолкование; поскольку при специальном выборе  $p_1 = (H')^{-1}u_1^{(0)}$ , мы имеем

$$P^{(1)}u = c_1 [u, p_1] p_1 = c_1 (u, H' p_1) = c_1 (u, u_1^{(0)}) p_1,$$

и, следовательно, оператор проектирования  $P^{(1)}$  равен нулю на всех собственных функциях  $u_2^{(0)}, u_3^{(0)}, \dots$  оператора  $H^{(0)}$  ввиду того, что они ортогональны  $u_1^{(0)}$ . Но тогда для этих векторов

$$H^{(1)}u = H^{(0)}u + H' P^{(1)}u = H^{(0)}u,$$

---

1) Поскольку  $(p_1, u_1^{(0)})^{-1} = ((H')^{-1}u_1^{(0)}, u_1^{(0)})^{-1} > 0$ ; оператор  $(H')^{-1}$  положительно определен одновременно с  $H'$ . Предполагается, что  $(H')^{-1}$  ограничен. — Прим. ред.



и, значит, собственные элементы у оператора  $H^{(1)}$  те же, что и у  $H^{(0)}$ . В случае произвольного  $k$  положим  $p_i = (H')^{-1}u_i^{(0)}$ ; полученное выше выражение для  $H'P^{(k)}$ , а именно

$$H'P^{(k)}u = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k (H'u, p_i) b_{ij} H'p_j,$$

примет вид

$$H'P^{(k)}u = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k (u, u_i^{(0)}) b_{ij} u_j^{(0)},$$

где матрица  $\{b_{ij}\}$  является теперь обратной к матрице с элементами

$$((H')^{-1}u_j^{(0)}, u_i^{(0)}) = (p_j, u_i^{(0)}).$$

Таким образом, задача на собственные значения для  $k$ -го промежуточного оператора  $H^{(k)} = H^{(0)} + H'P^{(k)}$  принимает вид

$$H^{(k)}u - \lambda u = H^{(0)}u + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k b_{ij} (u, u_i^{(0)}) u_j^{(0)} - \lambda u = 0.$$

Если  $u_i^{(0)}$  — собственный вектор базовой задачи при  $t > k$ , т. е.  $u_i^{(0)}$  не используется при построении функций  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , то, подставляя  $u_i^{(0)}$  в предыдущее выражение, получаем

$$H^{(k)}u - \lambda u = H^{(0)}u_i^{(0)} - \lambda u_i^{(0)} = 0.$$

Следовательно,  $u_i^{(0)}$  является также собственным вектором  $k$ -й промежуточной задачи, а соответствующее собственное значение  $\lambda_i^{(0)}$  промежуточной задачи будет и собственным значением базовой задачи. Таким образом, требуемая максимальная консервативность действительно имеет место.

По аналогии со случаем  $k = 1$ , где первый собственный вектор  $H^{(0)}$  совпадал с собственным вектором  $H^{(1)}$ , можно ожидать, что подпространство, натянутое на первые  $k$  собственных векторов  $u_j^{(0)}$ , т. е. на те собственные векторы, которые использовались для построения  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , будет содержать  $k$  собственных векторов оператора  $H^{(k)}$ . Чтобы исследовать этот случай, подставим в уравнение  $H^{(k)}u - \lambda u = 0$  вектор вида

$$u^{(l)} = \sum_{j=1}^k \alpha_j^{(l)} u_j^{(0)},$$

где коэффициенты  $\alpha_j^{(l)}$  не равны нулю одновременно. Тогда мы получим

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j^{(l)} \lambda_j^{(0)} u_j^{(0)} + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^k \alpha_i^{(l)} b_{ij} u_j^{(0)} - \lambda \sum_{j=1}^k \alpha_j^{(l)} u_j^{(0)} = 0.$$

Так как векторы  $u_j^{(0)}$  линейно независимы, то

$$\sum_{m=1}^k \{(\lambda_j^{(0)} - \lambda) \delta_{mj} + b_{mj}\} \alpha_m^{(l)} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

где  $\delta_{mj}$  есть  $\delta$ -символ Кронекера.

Эта система  $k$  уравнений с  $k$  неизвестными  $\alpha_m^{(l)}$  будет иметь нетривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\det |(\lambda_j^{(0)} - \lambda) \delta_{jm} + b_{jm}| = 0 \quad (j, m = 1, 2, \dots, k).$$

Это и есть искомое уравнение для собственных значений.

Совершенно очевидно, что таким путем мы найдем все собственные значения оператора  $H^{(k)}$ . Действительно, мы показали, что все собственные векторы  $H^{(k)}$ , за исключением  $k$  векторов, совпадают с собственными векторами оператора  $H^{(0)}$  и что остальные  $k$  собственных векторов  $H^{(k)}$  порождают то же подпространство, что и те  $k$  собственных векторов  $H^{(0)}$ , которые не являются собственными векторами  $H^{(k)}$ . Следовательно, собственные векторы  $H^{(k)}$  порождают все пространство  $\mathfrak{S}$ .

Остается невыясненным вопрос, будут ли консервативные собственные значения иметь ту же кратность в спектре  $H^{(k)}$ , что и в спектре  $H^{(0)}$ . В гл. XV, п. 4, мы выясним, что их кратность может повыситься, но не может понизиться <sup>1)</sup>.

Таким образом, при таком специальном выборе  $p_i$  отпадает необходимость находить нули трансцендентных мероморфных функций, и задача сводится только к решению алгебраических уравнений. Практические вычисления сводятся к квадратурам, обращению матрицы и нахождению собственных значений матрицы; таким образом, они могут быть осуществлены стандартными методами на вычислительных машинах.

### 7. Улучшение метода с помощью выбора базовой задачи.

В изложенном выше методе к операторам  $H^{(0)}$  и  $H'$ , участвующим в разложении исходного оператора  $H$  в сумму  $H^{(0)} + H'$ , предъявляются следующие требования: собственные функции  $u_1^{(0)}$ ,  $u_2^{(0)}$ , ... базового оператора  $H^{(0)}$  должны быть известными, оператор  $H'$  должен быть положительно определенным и, кроме того уравнение  $H'p_i = u_i^{(0)}$  должно иметь решение  $p_i = (H')^{-1}u_i^{(0)}$  в гильбертовом пространстве  $\mathfrak{S}^2$ .

Однако рассматриваемый ниже пример показывает, что последнее требование не является обязательным, т. е. положительно

<sup>1)</sup> Это очевидно, поскольку повышение кратности  $\lambda_s^{(0)}$  возможно лишь в том случае, если одно из сдвинутых собственных значений совпадает с  $\lambda_s^{(0)}$  ( $s > k$ ). — Прим. ред.

<sup>2)</sup> См. примечание на стр. 235. — Прим. ред.

определенный оператор  $H'$  может быть таким, что функции  $p_i = (H')^{-1} u_i^{(0)}$  уже не принадлежат  $\mathfrak{E}$ . Пусть  $\mathfrak{E}$  — гильбертово пространство, полученное пополнением по отношению к скалярному произведению  $(u, v) = \int_0^\pi uv \, dx$  множества дважды дифференцируемых функций на отрезке  $[0, \pi]$ , удовлетворяющих следующим условиям четности и граничным условиям (эти условия взяты из практической задачи, которую мы рассмотрим в следующем пункте):

$$u\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = u\left(\frac{\pi}{2} + x\right), \quad u'(0) = u'(\pi) = 0.$$

Таким образом, пространство  $\mathfrak{E}$  до пополнения состояло из функций, имеющих конечную норму, т. е. функций  $u$ , таких, что  $\int_0^\pi u^2 \, dx < \infty$ .

Положим теперь  $H'u = (s \cos^2 x) u$ , где  $s$  — положительная постоянная. Другими словами, действие оператора  $H'$  на функции  $u = u(x)$  сводится просто к умножению на  $s \cos^2 x$ . Тогда

$$(H'u, v) = s \int_0^\pi (\cos^2 x) uv \, dx = (u, Hv)$$

и

$$(H'u, u) = s \int_0^\pi (\cos^2 x) u^2(x) \, dx,$$

так что оператор  $H'$  симметричный и положительно определенный.

В качестве оператора  $H^{(0)}$  возьмем  $H^{(0)}u = -u''$ . Собственными значениями  $H^{(0)}$  (гл. IV, п. 3) являются  $\lambda_i^{(0)} = 4(i-1)^2$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , а соответствующими собственными функциями —

$$u_1^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad u_i^{(0)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2(i-1)x \quad (i = 2, 3, \dots).$$

Из уравнения  $H'p_i = u_i^{(0)}$  находим

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi} s \cos^2 x}, \quad p_i = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos 2(i-1)x}{s \cos^2 x} \quad (i = 2, 3, \dots).$$

Эти функции имеют бесконечную норму, поскольку в знаменателе стоит  $\cos^2 x$ . Следовательно,  $p_i = (H')^{-1} u_i^{(0)}(x)$  не принадлежат пространству  $\mathfrak{E}$ , и непосредственно применять наш метод нельзя.

Однако функции  $p_i$  будут иметь конечную норму, если нам удастся изменить их так, чтобы знаменатель был ограничен снизу

положительным числом, например если мы прибавим в знаменателе положительную постоянную.

Итак, в общем случае можно поступить следующим образом. Предположим, что оператор  $H'$  ограничен снизу, т. е. для некоторой положительной постоянной  $k$  имеет место неравенство  $(H'u, u) \geq k(u, u)$  при всех  $u$ . Например, в случае положительно определенного оператора  $H'$  в качестве  $k$  можно взять любое положительное число. Тогда можно построить новый базовый оператор  $H_1^{(0)}$  и соответствующий оператор  $H'_1$ , выбирая некоторое положительное число  $\alpha > k$  и полагая

$$H_1^{(0)} = H^{(0)} - \alpha I, \quad H'_1 = H' + \alpha I,$$

где  $I$  — тождественный оператор.

В этом случае  $H_1^{(0)}$  будет иметь те же самые собственные векторы, что и  $H^{(0)}$ , а собственные значения  $\lambda_{1i}^{(0)}$  оператора  $H_1^{(0)}$  будут отличаться от собственных значений  $\lambda_i^{(0)}$  оператора  $H^{(0)}$  на  $\alpha$ , т. е.  $\lambda_{1i}^{(0)} = \lambda_i^{(0)} - \alpha$ . Решения  $k$ -й промежуточной задачи, по-видимому, будут неким образом зависеть от  $\alpha$ . В некоторых случаях, как мы увидим в следующих пунктах, произвольную постоянную  $\alpha$  можно выбрать так, чтобы  $k$ -я промежуточная задача давала в некотором смысле наилучшую оценку снизу для собственных значений исходной задачи.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

По поводу изложенного в этом и следующих пунктах см. Безли [2].

**8. Приложение к уравнению Матье.** В качестве первого примера на применение метода специального выбора Безли рассмотрим (см., например, Морс и Фешбах [1]) уравнение Матье  $Hu(x) = \lambda u$ , где оператор  $H$  определяется выражением

$$Hu(x) = -u''(x) + (s \cos^2 x) u,$$

а  $u(x)$  удовлетворяет условиям, упомянутым в предыдущем пункте:

$$u = \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = u \left( \frac{\pi}{2} + x \right), \quad u'(0) = u'(\pi) = 0.$$

По причинам, указанным в предыдущем пункте, мы теперь несколько преобразуем задачу, полагая

$$H_1^{(0)}u = -u'' - \alpha su, \quad H'_1u = s(\cos^2 x + \alpha)u,$$

где  $\alpha$  — некоторая положительная постоянная, которая будет выбрана позже так, чтобы результат был оптимальным.

В предыдущем пункте было установлено, что  $H_1^{(0)}$  имеет следующие собственные значения:

$$\lambda_1^{(0)} = 4(i-1)^2 - \alpha s \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

и соответствующие собственные векторы

$$u_1^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad u_i^{(0)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2(i-1)x, \quad (i=2, 3, \dots).$$

Тогда для элементов  $p_i = (H_1^{(0)})^{-1} u_i$  мы получаем такие выражения:

$$p_1 = \frac{1}{s} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\alpha + \cos^2 x}, \quad p_i = \frac{\sqrt{2}}{s} \frac{\cos 2(i-1)x}{\sqrt{\pi} (\alpha + \cos^2 x)} \quad (i = 2, 3, \dots).$$

Очевидно, что функции  $p_i$  имеют конечную норму.

Будем решать теперь первую промежуточную задачу. Согласно общей теории, оператор  $H^{(1)} = H_1^{(0)} + H_1^{(0)} P^{(1)}$ , где  $P^{(1)}$  — проектор на  $p_1$ , имеет следующие собственные значения:

$$4(i-1)^2 - \alpha s \quad (i = 2, 3, \dots)$$

(это как раз все собственные значения  $H_1^{(0)}$ , за исключением первого) и, кроме того, еще одно собственное значение  $\lambda^{(1)}$ , являющееся корнем уравнения

$$\lambda_1^{(0)} - \lambda + \frac{1}{(p_1, u_1^{(0)})} = 0$$

(в этом случае матрица  $\|b_{ij}\|$  из п. 6 состоит из одного элемента). Его решением является

$$\lambda = -\alpha s + \left[ \int_0^\pi p_1 u_1^{(0)} dx \right]^{-1} = -\alpha s + \left[ \frac{1}{\pi s} \int_0^\pi \frac{dx}{\alpha + \cos^2 x} \right]^{-1}.$$

После интегрирования получаем

$$\lambda = s (\sqrt{\alpha} \sqrt{\alpha+1} - \alpha),$$

откуда видно, что  $\lambda$  — монотонно возрастающая функция  $\alpha$ .

Выберем теперь  $\alpha$  так, чтобы первая промежуточная задача давала наилучшее приближение к исходной задаче. Другими словами, мы хотим выбрать  $\alpha$  так, чтобы первое собственное значение первой промежуточной задачи было наибольшим. Поскольку наименьшее консервативное собственное значение равно  $4 - \alpha s$ , т. е. второму собственному значению базовой задачи,  $\alpha$  нужно выбрать так, чтобы  $s(\sqrt{\alpha} \sqrt{\alpha+1} - \alpha)$  равнялось бы  $4 - \alpha s$ . Очевидно, что не имеет смысла придавать  $\alpha$  большее значение, так как в этом случае пришлось бы перенумеровать собственные

значения и в результате  $4 - \alpha s$  оказалось бы первым собственным значением.

Решая уравнение  $4 - \alpha s = s(\sqrt{\alpha} \sqrt{\alpha + 1} - \alpha)$ , находим, что

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 + (8/s)^2} - 1}{2}.$$

При этом значении  $\alpha$  первая промежуточная задача имеет следующий спектр:

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(1)} = \lambda_2^{(1)} &= 4 + \frac{s}{2} - \frac{s}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{8}{s}\right)^2}, \\ \lambda_i^{(1)} &= 4(i+1)^2 + \frac{s}{2} - \frac{s}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{8}{s}\right)^2} \quad (i = 3, 4, 5, \dots). \end{aligned}$$

В табл. I содержатся численные значения  $\lambda_1^{(1)}$  для пяти значений  $s$ . Для сравнения приведены данные Национального бюро стандартов, полученные другими, более трудоемкими методами, использующими интегрирование по частям.

Таблица I

ПЕРВАЯ ПРОМЕЖУТОЧНАЯ ЗАДАЧА

$s$	$\lambda_1^{(1)}$	Данные Национального бюро стандартов
0,4	0,19500312	0,19500546
1,0	0,46887113	0,46896060
2,0	0,87689438	0,87823447
4,0	1,52786405	1,54486140
8,0	2,34314575	2,48604312

Во второй промежуточной задаче мы должны найти корни квадратного уравнения

$$0 = (b_{11} - \alpha s - \lambda)(b_{22} + 4 - \alpha s - \lambda) - (b_{12})^2,$$

где  $b_{ij}$  — элементы матрицы, обратной к матрице

$$\left\| \begin{array}{cc} \frac{1}{\pi s} \int_0^\pi \frac{dx}{\alpha + \cos^2 x} & \frac{\sqrt{2}}{\pi s} \int_0^\pi \frac{\cos 2x dx}{\alpha + \cos^2 x} \\ \frac{\sqrt{2}}{\pi s} \int_0^\pi \frac{\cos 2x dx}{\alpha + \cos^2 x} & \frac{2}{\pi s} \int_0^\pi \frac{\cos^2 2x dx}{\alpha + \cos^2 x} \end{array} \right\|.$$

При  $s = 8$  мы получаем отсюда собственные значения второй промежуточной задачи:

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(2)} &= 2,343146, & \lambda_2^{(2)} &= 8,828428, \\ \lambda_i^{(2)} &= 4(i-1)^2 - 1,656854 & & (i = 3, 4, 5, \dots). \end{aligned}$$

Точно таким же образом можно решить и третью промежуточную задачу. В табл. II приведены оценки снизу  $\lambda_1^{(3)}$ ,  $\lambda_2^{(3)}$ ,  $\lambda_3^{(3)}$  для первых трех собственных значений  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ , а также значения  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ , полученные Национальным бюро стандартов.

Таблица II

ТРЕТЬЯ ПРОМЕЖУТОЧНАЯ ЗАДАЧА,  $s = 8,0$ 

	Оценки снизу	Данные Национального бюро стандартов
$\lambda_1$	2,48385	2,4860431
$\lambda_2$	9,15316	9,1726651
$\lambda_3$	19,53457	20,1412038

Заметим, что нижняя граница для  $\lambda_1$ , полученная из первой промежуточной задачи, отличается от значения, стоящего в правом столбце таблицы, на 0,1429, в то время как третья промежуточная задача дает отклонение, равное 0,0022.

**9. Оптимальный выбор базовой задачи.** Чтобы показать, как в некоторых случаях можно выбрать параметр  $\alpha$ , при котором базовая задача будет оптимальной, рассмотрим задачу на собственные значения вида

$$Hu = \lambda f(x) u.$$

При этом предполагается, что собственные элементы оператора  $H$  известны и что спектр задачи  $Hu = \lambda f(x) u$  в нижней части состоит из дискретных собственных значений, которые мы обозначим через

$$\Lambda_1 \leq \Lambda_2 \leq \Lambda_3 \leq \dots$$

Функции  $f$  и  $u$  могут зависеть от одной или нескольких переменных. В обоих случаях мы будем обозначать эти переменные просто через  $x$ . Предполагается, кроме того, что  $f$  не равна тождественно постоянной и является положительной, т. е.  $(fu, u) = \int fu^2 dx > 0$ , где интеграл берется по конечной области, на которой рассматривается задача.

Пусть  $M$  — положительный максимум  $f$ . Из вариационного определения собственных значений следует, что задача

$$Hu = \lambda Mu$$

может служить базовой задачей, и мы попытаемся теперь изменить ее оптимальным образом в смысле, который поясняется ниже.

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$Hu = \lambda u,$$

и пусть

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

— ее собственные значения, а

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

— соответствующие собственные функции.

Тогда для любой постоянной  $\alpha \geq M$  задача на собственные значения

$$Hu = \lambda \alpha u$$

является базовой задачей для  $Hu = \lambda f(x)u$  с собственными функциями  $u_1, u_2, u_3, \dots$  и собственными значениями  $\lambda_1/\alpha, \lambda_2/\alpha, \lambda_3/\alpha, \dots$ .

Запишем исходную задачу в виде

$$Hu = \lambda \alpha u - \lambda (\alpha - f) u$$

и введем первую промежуточную задачу следующим образом:

$$Hu = \lambda \left\{ \alpha u - \left( \int uu_n dx \right) \left( \int \frac{u_n^2 dx}{\alpha - f(x)} \right)^{-1} u_n \right\},$$

где  $u_n$  — некоторая собственная функция задачи  $Hu = \lambda u$ . Тогда мы будем говорить, что базовая задача  $Hu = \lambda \alpha u$  является оптимальной при некотором выборе  $\alpha \geq M$ , если она дает наилучшую нижнюю границу для  $n$ -го собственного значения  $\Lambda_n$  исходной задачи  $Hu = \lambda f(x)u$ .

Покажем, что построенная таким образом задача действительно является промежуточной между базовой  $Hu = \lambda \alpha u$  и исходной  $Hu = \lambda \alpha u - \lambda (\alpha - f) u$  задачами. Для этого нужно доказать (в силу максимально-минимального принципа), что рэлеевское частное для промежуточной задачи

$$R_I(u) = \frac{(Hu, u)}{\alpha \int u^2 dx - \left( \int uu_n dx \right)^2 \left( \int \frac{u_n^2 dx}{\alpha - f(x)} \right)^{-1}}$$



заклучено между соответствующими рэлеевскими частными

$$\frac{(Hu, u)}{\alpha(u, u)} \quad \text{и} \quad \frac{(Hu, u)}{\alpha(u, u) - ((\alpha - f)u, u)}.$$

Но из неравенства Коши — Буняковского мы получаем, что

$$\left( \int uu_n dx \right)^2 = \left( \int \frac{\sqrt{\alpha - f} uu_n dx}{\sqrt{\alpha - f}} \right)^2 \leq \left( \int (\alpha - f) u^2 dx \right) \int \frac{u_n^2 dx}{\alpha - f},$$

откуда следует, что знаменатель в  $R_I$  не меньше, чем  $\int fu^2 dx$ , а это влечет за собой требуемое неравенство:

$$\frac{(Hu, u)}{\alpha(u, u)} \leq R_I(u) \leq \frac{(Hu, u)}{\int fu^2 dx}.$$

Решить первую промежуточную задачу не составляет труда. Действительно, если положить  $u = u_k$ ,  $k \neq n$ , то, поскольку  $(u_k, u_n) = 0$ , задача сводится к уравнению  $\lambda_k u_k = \lambda \alpha u_k$ , откуда видно, что  $u_k$  является собственной функцией с собственным значением  $\lambda_k/\alpha$ . Кроме того, если мы положим  $u = u_n$ , то

$$\lambda_n u_n = \lambda D(\alpha) u_n, \quad \text{где} \quad D(\alpha) = \alpha - \left( \int \frac{u_n^2 dx}{\alpha - f(x)} \right)^{-1},$$

откуда следует, что  $u_n$  также будет собственной функцией с собственным значением  $\lambda_n/D(\alpha)$ .

Таким образом, мы показали, что полная система собственных функций  $u_n$  базовой задачи является также системой собственных функций первой промежуточной задачи и что для соответствующих собственных значений имеет место «максимальная консервативность». Последнее означает, что собственные значения промежуточной задачи, за исключением одного, совпадают с собственными значениями базовой задачи.

Одно оставшееся собственное значение  $\lambda_n/D(\alpha)$  строго больше, чем  $\lambda_n/\alpha$ . Это можно проверить, подставляя  $u = u_n$  в написанное выше неравенство Коши — Буняковского. Таким образом, чтобы расположить собственные значения промежуточной задачи в виде неубывающей последовательности

$$\lambda_1^{(1)} \leq \lambda_2^{(1)} \leq \lambda_3^{(1)} \leq \dots,$$

мы должны поставить собственное значение  $\lambda_n/D(\alpha)$  между двумя членами неубывающей последовательности

$$\frac{\lambda_1}{\alpha} \leq \frac{\lambda_2}{\alpha} \leq \dots \leq \frac{\lambda_{n-1}}{\alpha} \leq \frac{\lambda_{n+1}}{\alpha} \leq \dots$$

в соответствующем месте.

Исследуем теперь зависимость спектра от  $\alpha$ , выясняя тем самым, каким образом нужно выбирать  $\alpha$ , чтобы получить наилучшую нижнюю границу для  $\Lambda_n$ .

Прежде всего покажем, что собственное значение  $\lambda_n/D(\alpha)$  возрастает при увеличении  $\alpha$ ; остальные собственные значения, очевидно, убывают. Дифференцируя  $D(\alpha)$ , получаем

$$D'(\alpha) = 1 - \left( \int \frac{u_n^2 dx}{(\alpha - f)^2} \right) \left( \int \frac{u_n^2 dx}{\alpha - f} \right)^{-2}.$$

Но из неравенства Коши — Буняковского следует, что

$$\left( \int \frac{u_n u_n dx}{\alpha - f} \right)^2 \leq \left( \int \frac{u_n^2 dx}{(\alpha - f)^2} \right) \left( \int u_n^2 dx \right) = \int \frac{u_n^2 dx}{(\alpha - f)^2},$$

причем равенство не может иметь места, поскольку  $f(x)$  не равна константе. Отсюда видно, что  $D'(\alpha) < 0$ , так что  $\lambda_n/D(\alpha)$  возрастает с ростом  $\alpha$ .

При  $\alpha = M$  имеем

$$D(M) = M - \left( \int \frac{u_n^2 dx}{M - f(x)} \right)^{-1},$$

так что  $D(M) \leq M$ , причем  $D(M) = M$  тогда и только тогда, когда интеграл в правой части расходится. С другой стороны, если  $\alpha \rightarrow \infty$ , то из определения  $D(\alpha)$  следует, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} D(\alpha) = D(\infty) = \int f u_n^2 dx.$$

Таким образом, при некотором  $q \geq n$  будет выполняться неравенство

$$\frac{\lambda_q}{\alpha} \leq \frac{\lambda_n}{D(\alpha)} \leq \frac{\lambda_{q+1}}{\alpha}.$$

Чтобы получить наилучшую оценку для  $\Lambda_n$ , выбирая надлежащим образом  $\alpha$ , рассмотрим значение  $\lambda_{n+1}/M$ . При этом мы будем различать два случая (предполагается, что  $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ ; в случае  $\lambda_n = \lambda_{n+1}$  рассуждения изменяются незначительно):

I.  $\lambda_{n+1}/M \leq \lambda_n/D(M)$ . Тогда наилучшей оценкой для  $\Lambda_n$  является  $\lambda_{n+1}/M$ , которая имеет место при  $\alpha = M$ , так как при  $\alpha > M$  значение  $\lambda_n/D(\alpha)$  возрастает, а  $\lambda_{n+1}/\alpha$  меньше, чем  $\lambda_{n+1}/M$ .

II.  $\lambda_{n+1}/M > \lambda_n/D(M)$ . При возрастании  $\alpha$  отношение  $\lambda_n/D(\alpha)$  возрастает до конечного значения  $\lambda_n/D(\infty)$ , а  $\lambda_{n+1}/\alpha$  стремится, убывая, к нулю, так что уравнение

$$\frac{\lambda_n}{D(\alpha)} = \frac{\lambda_{n+1}}{\alpha}$$

имеет в точности один корень  $\alpha = \alpha_0$ . Теперь мы имеем ситуацию, аналогичную случаю  $\lambda_{n+1}/M = \lambda_n/D(M)$ , рассмотренному выше, причем роль  $M$  играет  $\alpha_0$ . Следовательно, можно утверждать, что  $\lambda_{n+1}/\alpha_0$  является наилучшей нижней границей для  $\Lambda_n$ . Очевидно, что при любом большем значении  $\alpha$  оценка  $\lambda_{n+1}/\alpha$  для  $\Lambda_n$  будет ухудшаться.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

По поводу изложенного в этом и следующих пунктах см. Вайнштейн [9].

**10. Применение метода оптимизации базовой задачи.** В качестве примера оценим первое собственное значение  $\Lambda_1$  задачи о продольном изгибе закрепленного стержня переменной жесткости (ср. Коллатц [1]):

$$-u'' = \lambda(1 + \sin x)u, \quad u(0) = u(\pi) = 0.$$

Уравнение  $-u'' = \lambda u$ ,  $u(0) = u(\pi) = 0$  имеет собственные значения  $\lambda_k = k^2$  и нормированные собственные функции  $u_k = \sqrt{2/\pi} \sin kx$ , так что уравнение для  $\alpha$  запишется в виде

$$\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 x dx}{(\alpha-1) - \sin x} = \frac{4}{3},$$

или, если обозначить  $\alpha - 1$  через  $\beta$ , в виде

$$\frac{2(\beta+1)}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 x dx}{\beta - \sin x} = \frac{2(\beta+1)}{\pi} \left\{ \frac{2\beta^2 \left( \arcsin \beta^{-1} + \frac{\pi}{2} \right)}{\sqrt{\beta^2 - 1}} - \beta\pi - 2 \right\} = \frac{4}{3}.$$

Поскольку левая часть является убывающей функцией  $\beta$ , это уравнение имеет единственный корень  $\beta_0$ , и, согласно общему правилу, наилучшая нижняя граница для  $\Lambda_1$  равна  $\lambda_2/(\beta_0 + 1) = 4/(\beta_0 + 1)$ . Численное значение этой величины можно найти любым стандартным методом численного решения трансцендентных уравнений. Оно равно 0,53940. В результате мы получаем, что  $\Lambda_1$  заключено в следующих границах:

$$0,53940 \leq \Lambda_1 \leq 0,54088$$

(верхняя граница найдена методом Рэлея — Ритца). Заметим, что очевидная нижняя граница равна  $\lambda_1/M = 1/2$ , где  $M = \max(1 + \sin x) = 2$ , так что наш результат существенно улучшает оценку.

Вычислим теперь таким же способом нижнюю границу для  $\Lambda_2$ . Полагая  $u_n = u_2 = \sqrt{2/\pi} \sin 2x$ ,  $\lambda_2 = 4$ ,  $\lambda_3 = 9$ , приходим к следующему уравнению для оптимального значения  $\alpha$ :

$$\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 2x \, dx}{(\alpha-1) - \sin x} = \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} = \frac{9}{5}.$$

Обозначая  $\alpha - 1$  через  $\beta$  и интегрируя, получаем

$$\frac{16(\beta+1)}{\pi} \left\{ \beta - \frac{1}{3} + \frac{\beta(2\beta^2-1)\pi}{4} - \beta^2 \sqrt{\beta^2-1} \left[ \arcsin \frac{1}{\beta} + \frac{\pi}{2} \right] \right\} = \frac{9}{5}.$$

Корень  $\beta_0$  этого уравнения дает наилучшую нижнюю границу  $9/(\beta_0+1) \leq \Lambda_2$ . Численное значение этой величины равно 2,35775, в то время как очевидная нижняя граница  $\lambda_2/M = 2$ . Таким образом,

$$2,35775 \leq \Lambda_2 \leq 2,38228,$$

где верхняя граница снова найдена методом Рэля — Ритца.

**11. Распространение метода специального выбора.** В некоторых задачах может оказаться, что положительно определенный оператор  $H'$  ограничен сверху и снизу, определен на всем гильбертовом пространстве  $\mathfrak{H}$ , но тем не менее элементы  $p_i = (H')^{-1} u_i^{(0)}$  принадлежат не  $\mathfrak{H}$ , а некоторому другому гильбертову пространству, скажем  $\mathfrak{H}'$ , которое получается, если в качестве скалярного произведения функций  $u$  и  $v$  взять не  $(u, v)$  (это привело бы к пространству  $\mathfrak{H}$ ), а  $[u, v] = (H'u, v)$ .

Например, пусть гильбертово пространство  $\mathfrak{H}$  получено пополнением по норме, определяемой скалярным произведением  $(u, v) = \int_0^{\pi} uv \, dx$ , множества функций  $u(x)$  с конечной нормой, удовлетворяющих условиям

$$u(0) = u(\pi) = 0, \quad u''(x) \in \mathcal{L}^2(0, \pi).$$

Определим теперь оператор  $H$ , полагая

$$Hu(x) = -u''(x) + (1 - \cos x)u(x),$$

и пусть  $H^{(0)}u = -u''$ , а  $H'u = (1 - \cos x)u$ . Оператор  $H^{(0)}$  самосопряженный, а его спектр состоит из точек  $\lambda_i^{(0)} = i^2$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Соответствующими нормированными собственными векторами являются

$$u_i^{(0)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin ix \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Оператор умножения  $H'u = (1 - \cos x)u$  является ограниченным симметрическим на всем  $\mathfrak{X}$ . Очевидно,  $H'$  положительно определен. Тем не менее уравнение  $H'p_i = \sqrt{2/\pi} \sin ix$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , не имеет решения  $p_i = (H')^{-1}u_i^{(0)}$ , принадлежащего  $\mathfrak{X}$ , поскольку в пространстве  $\mathfrak{X}'$  функции  $\sqrt{2/\pi} \sin ix / (1 - \cos x)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , не имеют конечной нормы<sup>1)</sup>. Однако в пространстве  $\mathfrak{X}'$  со скалярным произведением  $[u, v] = (H'u, v) = \int_0^\pi (1 - \cos x) uv dx$  функции  $p_i = (H')^{-1}u_i^{(0)}$  имеют конечную норму

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \int_0^\pi \frac{\sin^2 ix}{1 - \cos x} dx \right]^{1/2}.$$

Теперь, поскольку все  $p_i$  принадлежат  $\mathfrak{X}'$ , можно модифицировать наш метод следующим образом. Если  $p$  и  $u$  принадлежат  $\mathfrak{X}'$ , то  $f(u) = [u, p]$  является ограниченным линейным функционалом в  $\mathfrak{X}'$ . Следовательно, существует положительная постоянная  $M$ , такая, что  $|f(u)| \leq M [u, u]^{1/2}$  при всех  $u \in \mathfrak{X}'$ . Кроме того, если  $u$  принадлежит  $\mathfrak{X}$ , то

$$[u, u]^{1/2} = (H'u, u)^{1/2} \leq \|H'\|^{1/2} (u, u)^{1/2}, \quad u \in \mathfrak{X}.$$

Таким образом, мы видим, что  $f(u)$  — ограниченный линейный функционал в  $\mathfrak{X}$ . Тогда по теореме Рисса существует единственный элемент  $H'p$  в  $\mathfrak{X}$ , линейно зависящий от  $p$ , такой, что

$$f(u) = [u, p] = (u, H'p) \quad \text{при всех } u \in \mathfrak{X}.$$

Как и выше, введем теперь промежуточные операторы

$$H^{(k)} = H^{(0)} + H'P^{(k)},$$

где  $P^{(k)}$  — проектор на  $\{p_1, \dots, p_k\}$ .

Для любого  $u \in \mathfrak{X}$  имеем, как и выше,

$$\tilde{H}'Pu = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (u, \tilde{H}'p_i) b_{ij} \tilde{H}'p_j,$$

где  $\|b_{ij}\|$  — матрица, обратная к матрице  $\|[p_i, p_j]\|$ . Предположим теперь, что элементы  $(H')^{-1}u_i^{(0)}$  принадлежат  $\mathfrak{X}'$ , хотя они могут и не принадлежать  $\mathfrak{X}$  (именно с таким положением мы встретимся в примере, рассматриваемом в следующем пункте). Тогда

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 235. Здесь автор ослабляет требования, палагасмые на  $H'$ . — *Прим. ред.*

собственные значения промежуточных задач находятся из уравнения

$$0 = \det |(\lambda_j^{(0)} - \lambda) \delta_{jm} + b_{jm}| \quad (j, m = 1, 2, \dots, k),$$

где  $\{b_{ij}\}$  обозначает матрицу, обратную к  $\{[(\tilde{H}')^{-1} u_i^{(0)}, (\tilde{H}')^{-1} u_j^{(0)}]\}$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

По поводу изложенного в этом и следующих пунктах см. Безлип [2].

**12. Применение обобщенного метода специального выбора.** В качестве примера рассмотрим оператор  $H$ , определенный формулой

$$Hu(x) = -u''(x) + (1 - \cos x)u(x)$$

с граничными условиями  $u(0) = u(\pi) = 0$ , где, как и в предыдущем пункте, мы предполагаем, что  $u''(x) \in \mathfrak{L}^2(0, \pi)$ . Как и выше, естественно положить  $H^{(0)}u = -u''$ , так что  $H^{(0)}$  имеет спектр  $\lambda_i^{(0)} = i^2$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ), а соответствующими нормированными собственными векторами являются

$$u_i^{(0)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin ix \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Оператор  $H'$  определяется тогда формулой  $H'u = (1 - \cos x)u$ . Очевидно, что он ограничен и положительно определен. Здесь мы сталкиваемся с трудностью, о которой говорили раньше, а именно: решение уравнения  $H'p_i = \sqrt{2/\pi} \sin ix$ , равное

$$p_i = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ix}{1 - \cos x},$$

не принадлежит  $\mathfrak{L}^2(0, \pi)$ . Поскольку  $H'$  ограничен снизу, мы могли бы поступить, как в п. 7, т. е. прибавить и вычесть единичный оператор, умноженный на постоянную. Но мы предпочитаем здесь воспользоваться вторым обобщением нашего метода, рассмотренным в предыдущем пункте, главным образом потому, что этот новый метод приводит в данном случае к функциям, удобным для вычислительных целей. Гильбертово пространство  $\mathfrak{S}' \supset \mathfrak{S}$  является пополнением множества классов эквивалентности функций  $u(x)$ , для которых

$$\int_0^\pi (1 - \cos x) u^2 dx$$

существует; скалярное произведение в  $\mathfrak{S}'$  задается формулой

$$[u, v] = \int_0^{\pi} (1 - \cos x) uv \, dx.$$

Оператор  $\tilde{H}'$  является просто оператором умножения  $\tilde{H}'u = (1 - \cos x)u$ . Очевидно, что он ограничен и симметричен в  $\mathfrak{S}'$ . Уравнение  $\tilde{H}'p_i = u_i^{(0)}$  имеет в  $\mathfrak{S}'$  решение

$$p_i = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ix}{1 - \cos x} \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

поскольку

$$[p_i, p_i] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 ix}{1 - \cos x} \, dx$$

существует при всех  $i = 1, 2, \dots$ . Таким образом, мы можем применить развитую выше теорию. Необходимые для вычислений матричные элементы имеют вид

$$[\tilde{H}'^{-1}u_i^{(0)}, \tilde{H}'^{-1}u_j^{(0)}] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin ix \sin jx}{1 - \cos x} \, dx.$$

Возьмем, например,  $k = 4$  и вычислим эти интегралы для  $i, j = 1, 2, 3, 4$ . Мы получим собственные значения четвертой промежуточной задачи расположив в виде неубывающей последовательности корни уравнения

$$\det \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 5 - \lambda & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 10 - \lambda & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 33/2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

а также консервативные собственные значения базовой задачи: 25, 36, 49, ...

Таблица III

**ЧЕТВЕРТАЯ ПРОМЕЖУТОЧНАЯ ЗАДАЧА**

	Нижняя граница	Верхняя граница
$\lambda_1$	1,918 058 12	1,918 058 16
$\lambda_2$	5,031 913	5,031 922
$\lambda_3$	10,011 665	10,014 381
$\lambda_4$	16,538 364	17,035 639

В табл. III приведены результаты, полученные Безли в [2]; верхние границы найдены методом Рэля — Ритца.

**13. Задача об атоме гелия.** В задачах квантовой теории зачастую бывает так, что оператор Гамильтона  $H$ , для которого ставится задача на собственные значения  $Hu = \lambda u$ , не является обратным к вполне непрерывному оператору в отличие от рассматриваемых до сих пор случаев. Важнейшим примером (см., например, Морс и Фешбах [1], т. 1, стр. 590) является уравнение Шредингера  $H\psi = E\psi$ , где собственное значение  $E$  — это энергия, а  $\psi$  — «функция состояния», на которую налагаются определенные условия, исходя из физического смысла задачи. При этих условиях целесообразно определять спектр  $H$  (см., например, Стоун [1], стр. 129) уже не как множество собственных значений, а как (более широкое) множество таких чисел  $\lambda$ , для которых резольвента  $R_\lambda = (H - \lambda I)^{-1}$  не является ограниченным оператором с областью определения, плотной во всем пространстве  $\mathfrak{H}$ . Тогда спектр  $H$  состоит не из дискретных точек, а имеет следующее строение, характерное для многих задач квантовой механики. Оператор  $H$  ограничен снизу, и его спектр в нижней части состоит из дискретного множества собственных значений  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \rightarrow \lambda_\infty$ , где через  $\lambda_\infty$  обозначена конечная предельная точка. Правее  $\lambda_\infty$  оператор имеет (непрерывный спектр), т. е. каждая точка некоторого отрезка вещественной оси принадлежит спектру  $H$ . Наши методы применимы только к вычислению дискретных собственных значений в нижней части спектра.

Рассмотрим пример. В некоторых состояниях атома гелия<sup>1)</sup>, который состоит из ядра и двух электронов, собственные функции  $H$  зависят только от  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_{12}$  и симметричны по пространственным координатам  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  ( $i = 1, 2$ ) двух электронов. Здесь  $r_1 = r_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $r_2 = r_2(x_2, y_2, z_2)$  — длины радиус-векторов каждого из электронов (ядро находится в начале координат), а  $r_{12} = r_{12}(x, y, z)$  — расстояние между ними. Таким образом,  $u = u(r_1, r_2, r_{12})$  — функция шести переменных  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ , каждая из которых может принимать любое вещественное значение.

Пусть гильбертово пространство  $\mathfrak{H}$  состоит из функций  $u$ , зависящих только от  $r_1, r_2, r_{12}$ , симметричных по  $r_1$  и  $r_2$  и интегрируемых в квадрате по всему пространству. Значение последнего условия состоит в том, что если определить скалярное произведе-

<sup>1)</sup> Например,  $S$ -состояние парагелия; см. Морс и Фешбах [1], т. 2, стр. 679. — *Прим. ред.*



ние  $(u, v)$  в  $\mathfrak{H}$  обычным образом как

$$(u, v) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \int \int \int uv \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1 \, dx_2 \, dy_2 \, dz_2,$$

то норма  $(u, u)^{1/2}$  функции  $u$  будет конечной.

В соответствующих единицах измерения гамильтониан для  $S$ -состояний парагелия имеет вид

$$Hu = -\frac{1}{2} \Delta_1 u - \frac{1}{2} \Delta_2 u - \frac{2u}{r_1} - \frac{2u}{r_2} + \frac{u}{r_{12}},$$

где  $\Delta_i$  — оператор Лапласа, действующий на координаты  $r_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Задача на собственные значения  $Hu = \lambda u$  с таким оператором  $H$  допускает удобную базовую задачу  $H^{(0)}u = \lambda u$ , которая получается, если пренебречь взаимодействием электронов, т. е. членом, содержащим  $r_{12}$ . Действительно, оператор  $H' = 1/r_{12}$ , очевидно, является положительно определенным, а спектр оставшегося оператора  $H^{(0)}$ , определенного выражением

$$H^{(0)}u = -\frac{1}{2} \Delta_1 u - \frac{1}{2} \Delta_2 u - \frac{2u}{r_1} - \frac{2u}{r_2},$$

хорошо изучен (см., например, Като [1]). Нижняя часть спектра, будучи дискретной и ограниченной снизу, состоит из собственных значений

$$\lambda_i^{(0)} = -2(1 + i^{-2}) = -4; -2,5; -20/9; \dots \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Поскольку  $H^{(0)}$  — базовый оператор, имеем

$$-4 \leq \lambda_1; -2,5 \leq \lambda_2; -20/9 \leq \lambda_3, \dots,$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  — искомые собственные значения  $H$ .

Соответствующими собственными функциями  $H^{(0)}$  являются

$$u_1^{(0)} = \frac{1}{4\pi} R_{10}(r_1) R_{10}(r_2),$$

$$u_i^{(0)} = \frac{1}{4\pi \sqrt{2}} [R_{10}(r_1) R_{i0}(r_2) + R_{10}(r_2) R_{i0}(r_1)] \quad (i = 2, 3, \dots),$$

где  $R_{i0}$  — нормированные волновые функции водорода.

Следовательно, если в первой промежуточной задаче мы возьмем

$$p_1 = (H')^{-1} u^{(0)} = \frac{r_{12}}{4\pi} R_{10}(r_1) R_{10}(r_2),$$

то, согласно общей теории, дискретная часть спектра первой промежуточной задачи будет совпадать со спектром  $H^{(0)}$ , за исключе-

нием первого собственного значения  $-4$ , которое заменяется на

$$-4 + \frac{1}{((H')^{-1} u_1^{(0)}, u_1^{(0)})}.$$

Численное значение  $((H')^{-1} u_1^{(0)}, u_1^{(0)})$  найдено в приложении к статье Безли [2]; оно равно 1,093750. Таким образом, первая промежуточная задача имеет спектр

$$-3,0857, \quad -2,5, \quad -20/9, \quad \dots,$$

и для искомого первого собственного значения  $\lambda_1$  мы имеем оценку  $-3,0857 \leq \lambda_1$ .

Решим теперь третью промежуточную задачу, построенную с помощью трех функций  $p_i = r_{12} u_i^{(0)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Прежде всего мы должны вычислить элементы матрицы  $((H')^{-1} u_i^{(0)}, u_j^{(0)})$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , а затем найти обратную матрицу. Будем вместо  $((H')^{-1} u_i^{(0)}, u_j^{(0)})$  писать сокращенно  $(i, j)$ . Значения  $(i, j)$  вычислены в приложении к статье Безли [1]; они равны

$$\begin{aligned} (1,1) &= 1,093750, & (1,2) &= -0,318511, & (1,3) &= -0,134091, \\ (2,2) &= 3,085264, & (2,3) &= -0,909351, & (3,3) &= 6,795531. \end{aligned}$$

Далее мы должны решить характеристическое уравнение

$$\det | (\lambda_i^{(0)} - \lambda) \delta_{ij} + b_{ij} | \quad (i = 1, 2, 3),$$

где  $\lambda_1^{(0)} = -4$ ;  $\lambda_2^{(0)} = -2,5$ ;  $\lambda_3^{(0)} = -20/9$ , а  $\delta_{ij}$  есть  $\delta$ -символ Кронекера. Его корни, согласно вычислениям Безли, равны

$$-3,063, \quad -2,165, \quad -2,039.$$

Кроме того, третья промежуточная задача имеет еще консервативные собственные значения

$$-2(1 + i^{-2}) = -2,125; \quad -2,08 \quad (i = 4, 5, \dots),$$

и, таким образом, первые три собственных значения промежуточной задачи, расположенные в порядке возрастания, равны

$$\lambda_1^{(3)} = -3,063, \quad \lambda_2^{(3)} = -2,165, \quad \lambda_{31}^{(3)} = -2,125.$$

Вместе с верхней границей, найденной методом Рэлея — Ритца (см., например, Киносита [1], Кулидж и Джеймс [1]), мы получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} -3,063 &\leq \lambda_1 \leq -2,9037237, \\ -2,165 &\leq \lambda_2 \leq -2,1458 \end{aligned}$$

для собственных значений  $S$ -состояний парагелия.

Ниже, в гл. XIII, п. 8, будут получены более точные оценки методом усечения. Здесь мы только отметим, что неравенства, к которым мы пришли, пользуясь этим методом, иногда можно использовать для нахождения точных численных значений нижних границ, полученных другими, совершенно независимыми методами.

Для примера рассмотрим формулу

$$\lambda_1 \geq (H\psi, \psi) - \frac{(H\psi, H\psi) - (H\psi, \psi)^2}{\lambda^* - (H\psi, \psi)},$$

установленную Темплом [1]<sup>1)</sup> в 1928 г. Она выражает нижнюю границу для первого уровня энергии  $\lambda_1$  через величины  $(H\psi, \psi)$  и  $(H\psi, H\psi)$ , где  $\psi$  — некоторая нормированная допустимая функция, а  $\lambda^*$  — некоторое число; при этом должно выполняться соотношение

$$(H\psi, \psi) \leq \lambda^* \leq \lambda_2.$$

В нашем случае второе из этих неравенств будет выполнено, если взять  $\lambda^* = -2,1655$ . Что касается первого неравенства, то Киносита [1] подобрал требуемую функцию  $\psi$ , состоящую из 80 членов, и вычислил соответствующие выражения. Подстановка в формулу Темпля дает окончательно такую оценку <sup>2)</sup>:

$$-2,9037474 \leq \lambda_1 \leq -2,9037237.$$

**14. Обобщенный метод специального выбора.** Рассмотренный метод специального выбора функций, а именно  $p_i = (H')^{-1} u_i^{(0)}$ , допускает следующее полезное обобщение (см. Безли и Фокс [1]). При построении  $k$  функций  $p_1, p_2, \dots, p_k$  вместо условия  $H'p_i = u_i^{(0)}$  потребуем теперь только, чтобы  $H'p_i$  были линейными комбинациями  $N$  собственных функций  $u_1^{(c)}, u_2^{(c)}, \dots$ , т. е.

$$H'p_i = \sum_{v=1}^N \beta_{iv} u_v^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Тогда, согласно полученным выше результатам, оператор  $H^{(k)}$  можно записать в виде

$$H^{(k)}u = H^{(0)}u + \sum_{i,j=1}^k (u, H'p_i) b_{ij} H'p_j,$$

где  $b_{ij}$  — элементы матрицы, обратной к  $\{(H'p_i, p_j)\}$ . Таким образом, мы имеем

$$H^{(k)}u = H^{(0)}u + \sum_{i,j=1}^k \sum_{\mu,v=1}^N (u, u_v^{(0)}) \beta_{iv} b_{ij} \beta_{j\mu} u_\mu^{(0)}.$$

1) См. также Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов [1]\*.— *Прим. ред.*

2) См. по этому поводу статью Пекериса [1]\*.— *Прим. ред.*

Собственные элементы  $H^{(k)}$  теперь нетрудно найти, если известны собственные элементы  $H^{(0)}$ .

Действительно, рассмотрим подпространство  $\mathfrak{M}$ , натянутое на собственные функции  $u_i^{(0)}$  оператора  $H^{(0)}$ , которые не использовались при построении  $H'p_i$ . Для любой функции  $u \in \mathfrak{M}$  имеем  $H^{(k)}u - \lambda u = H^{(0)}u - \lambda u$ , так что эта функция будет собственной для  $H^{(k)}$  тогда и только тогда, если она является собственной функцией для  $H^{(0)}$ , а собственное значение оператора  $H^{(k)}$ , соответствующее такой функции, будет таким же, как и у  $H^{(0)}$ .

Таким образом, нам остается найти только такие собственные функции, которые являются линейной комбинацией  $N$  функций  $u_v^{(0)}$ , участвующих в построении  $H'p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Положим  $u = \sum_{v=1}^N \gamma_v u_v^{(0)}$  и подставим это выражение в уравнение для собственных значений  $H^{(k)}u - \lambda u = 0$ , где  $H^{(k)}u$  — только что построенный оператор. В силу линейной независимости функций  $u_v^{(0)}$  получаем следующий результат:

$$\sum_{v=1}^N \gamma_v \left( \sum_{i,j=1}^k \beta_{iv} b_{ij} \beta_{j\mu} + (\lambda_v^{(0)} - \lambda) \delta_{v\mu} \right) = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, N).$$

Таким образом, мы получили матричную задачу на собственные значения; с такого рода задачами мы имели дело на протяжении всей книги.

Этот метод может быть особенно полезен, если оператор  $H'$  является оператором умножения на функцию. Рассмотрим, например, волновую задачу для случая вытянутого сфероида (относительно квантовомеханического смысла этой задачи см., например, Морс и Фешбах [1]), где оператор  $H$  определен выражением

$$Hu = -\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{du}{dx} \right] + \frac{m^2 u}{1-x^2} + c^2 x^2 u.$$

Здесь  $m$  — неотрицательное целое число,  $c$  — вещественная постоянная. Гильбертово пространство  $\mathfrak{H}$  получается пополнением множества функций, непрерывных на отрезке  $[-1, 1]$ , дважды непрерывно дифференцируемых на интервале  $(-1, 1)$  и таких, что  $Hu \in \mathfrak{Q}^{(2)}(-1, 1)$ .

Отбрасывая оператор умножения на функцию  $H' = c^2 x^2$ , который, очевидно, является положительно определенным, получаем базовую задачу. Решениями этой задачи

$$-\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{du}{dx} \right] + \frac{m^2 u}{1-x^2} - \lambda u = 0$$

являются присоединенные функции Лежандра  $P_0^m, P_1^m, P_2^m, \dots$ , которые определяются с помощью рекуррентного соотношения (см., например, Уиттекер и Ватсон [1]):

$$xP_n^m = \frac{(n-m+1)P_{n+1}^m + (n+m)P_{n-1}^m}{2n+1}.$$

Если теперь вместо  $p_i = (H')^{-1}u_i^{(0)}$  положить  $p_i = u_i^{(0)} = P_{m+i+1}^m$ , то с помощью рекуррентного соотношения  $H'p_i$  сразу же выражается в виде линейной комбинации  $u_{i-2}^{(0)}, u_{i-1}^{(0)}, u_i^{(0)}, u_{i+1}^{(0)}$  и  $u_{i+2}^{(0)}$ , так что можно применить указанный выше метод. В следующей главе будут приведены другие примеры задач на собственные значения, решения которых удовлетворяют рекуррентным соотношениям.

## УСЕЧЕНИЕ И ДРУГИЕ МЕТОДЫ

**1. Усечение базового оператора.** При построении промежуточных задач второго типа предполагалось, что базовый оператор  $H^{(0)}$  известен, т. е. что его собственные значения и собственные функции можно вычислить. Однако в общем случае, как отмечалось в предыдущей главе, резольвента  $R_\lambda = (H^{(0)} - \lambda I)^{-1}$  выражается в виде бесконечного ряда

$$R_\lambda w = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(w, u_\nu^{(0)}) u_\nu^{(0)}}{\lambda_\nu^{(0)} - \lambda}.$$

Нахождение корней такой функции является трудной задачей, и по существу идея метода Безли специального выбора элементов  $p_1, p_2, \dots$  заключалась в том, чтобы построить такую промежуточную задачу, для которой элементы определителя Вайнштейна состояли бы из конечного числа слагаемых. В этом случае аппроксимирующая задача сводится к конечномерным задачам, описанным в гл. I и II.

В этой главе будут рассмотрены различные методы, позволяющие достигнуть этой цели. Они описаны во многих работах. В частности, некоторые из них рассматриваются в диссертации Гея [1], в которой содержится также не рассматриваемый нами метод, основанный на выборе элементов, в выражения которых входит оператор  $H^{(0)} - \lambda I$ , значительно более простой, чем резольвента.

Мы начинаем с рассмотрения наиболее важного из этих методов, а именно *метода усечения базового оператора*, предложенного Безли и Фоксом [2] (см. замечание в конце настоящего пункта). Он состоит в том, что базовый оператор  $H^{(0)}$ , аппроксимирующий исходный оператор, в свою очередь аппроксимируется операторами, резольвенты которых выражаются в виде конечных сумм. Этот метод применяется на практике преимущественно в задачах второго типа, хотя в равной степени его можно использовать и в задачах первого типа.

Мы строим  $i$ -й *усеченный* оператор  $H^{(i, 0)}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , таким образом, чтобы у  $H^{(0)}$  и  $H^{(i, 0)}$  первые  $i$  собственных значений  $\lambda_v^{(0)}$ ,  $v = 1, 2, \dots, i$ , и соответствующих собственных функций  $u_v^{(0)}$  совпадали, а  $(i+1)$ -е собственное значение  $\lambda_{i+1}^{(0)}$  оператора  $H^{(0)}$  было собственным значением бесконечной кратности для  $H^{(i, 0)}$ ; другими словами, каждое из собственных значений  $\lambda_{i+2}^{(0)}$ ,  $\lambda_{i+3}^{(0)}$ ,  $\dots$  базового оператора  $H^{(0)}$  заменяется на  $\lambda_{i+1}^{(0)}$ . Для любого вещественного  $\lambda$  обозначим через  $E_{\lambda}^{(0)}$  оператор проектирования на подпространство, порожденное всеми собственными векторами  $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots$  оператора  $H^{(0)}$ , отвечающими собственным значениям  $\lambda^{(0)}$  оператора  $H^{(0)}$ , которые не превосходят  $\lambda$ . Ясно, что искомый оператор  $H^{(i, 0)}$  можно определить равенством

$$H^{(i, 0)} = H^{(0)} E_{\lambda_i^{(0)}}^{(0)} + \lambda_{i+1}^{(0)} (I - E_{\lambda_i^{(0)}}^{(0)}) \quad (i = 1, 2, \dots),$$

где  $I$  — единичный оператор.

Исходя из новой базовой задачи, полученной с помощью  $i$ -го усечения базового оператора, можно определить новые операторы  $H^{(i, k)}$   $k$ -й промежуточной задачи следующим образом:

$$H^{(i, k)} = H^{(i, 0)} + H'P^{(k)} \quad (i, k = 1, 2, \dots).$$

Из определения  $H^{(i, k)}$ , используя максимально-минимальный принцип, сразу же получаем, что собственное значение  $\lambda_v^{(i, k)}$ , т. е.  $v$ -е собственное значение оператора  $H^{(i, k)}$ , удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} \lambda_v^{(i, k)} &\leq \lambda_v^{(i+1, k)} \leq \lambda_v^{(k)} \leq \lambda_v, \\ \lambda_v^{(i, k)} &\leq \lambda_v^{(i, k+1)} \leq \lambda_v, \end{aligned}$$

где  $\lambda_v^{(k)}$  есть  $v$ -е собственное значение  $k$ -й промежуточной задачи для неусеченной базовой задачи, а  $\lambda_v$  есть  $v$ -е собственное значение исходного оператора  $H$ .

Спектр каждого из промежуточных операторов находится с помощью обычной для промежуточных задач процедуры. А именно, обозначая для краткости  $\sum_{i=1}^k (u, H'p_i) b_{ij}$  через  $\alpha_j$ , запишем уравнение для собственных значений

$$H^{(i, k)}u - \lambda u = 0$$

в виде

$$H^{(i, 0)}u - \lambda u = - \sum_{j=1}^k \alpha_j H'p_j,$$

причем

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j (p_j, H'p_l) = (u, H'p_l) \quad (l = 1, 2, \dots, k).$$

Если  $u$  — собственный вектор, отвечающий неконсервативному собственному значению, т. е. собственному значению  $\lambda$  оператора  $H^{(i, k)}$ , которое не является в то же время собственным значением  $H^{(i, 0)}$ , то  $u$  можно записать в виде

$$u = - \sum_{j=1}^k \alpha_j R_{\lambda}^{(i)} H' p_j,$$

где  $R_{\lambda}^{(i)} = (H^{(i, 0)} - \lambda I)^{-1}$  — резольвента оператора  $H^{(i, 0)}$ . Основное преимущество метода усечения состоит в том, что для любого вектора  $v \in \mathfrak{H}$  функция  $R_{\lambda}^{(i)} v$  задается выражением

$$R_{\lambda}^{(i)} v = \sum_{v=1}^i \frac{(v, u_v^{(0)}) u_v^{(0)}}{\lambda_v^{(0)} - \lambda} + \frac{1}{\lambda_{i+1}^{(0)} - \lambda} \left[ v - \sum_{v=1}^i (v, u_v^{(0)}) u_v^{(0)} \right].$$

Уравнения

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j (p_j + R_{\lambda} H' p_j, H' p_l) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, k)$$

теперь принимают вид

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j (p_j + R_{\lambda}^{(i)} H' p_j, H' p_l) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, k).$$

Таким образом, для того чтобы вещественное число  $\lambda$  было неконсервативным собственным значением  $H^{(i, k)}$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\lambda$  было корнем уравнения (модифицированного уравнения Вайнштейна)

$$\widehat{W}(\lambda) = \det |(p_j + R_{\lambda}^{(i)} H' p_j, H' p_l)| = 0 \quad (j, l = 1, 2, \dots, k).$$

Предположим, наконец, что  $\lambda = \lambda_v^{(0)}$  является собственным значением  $H^{(i, 0)}$ , которому отвечает собственное подпространство  $\{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ . Тогда собственный вектор  $u$  оператора  $H^{(i, k)}$ , соответствующий  $\lambda_v^{(0)}$ , имеет следующий вид:

$$u = - \sum_{j=1}^k \alpha_j R_{\lambda_v^{(0)}}^{(i)} H' p_j - \sum_{j=k+1}^{k+l} \alpha_j v_{j-k},$$

где постоянные  $\alpha_j$  должны удовлетворять уравнениям

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j (p_j + R_{\lambda_v^{(0)}}^{(i)} H' p_j, H' p_r) + \sum_{j=k+1}^{k+l} \alpha_j (v_{j-k}, H' p_r) = 0$$

$$(r = 1, 2, \dots, k),$$

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j (H' p_j, v_{r-k}) = 0 \quad (r = k+1, k+2, \dots, k+l).$$



Таким образом,  $\lambda_v^{(0)}$  будет собственным значением  $H^{(i, k)}$  тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\begin{vmatrix} (p_j + R\lambda^{(i)} H' p_j, H' p_r) & \dots & (v_{j-k}, H' p_r) \\ \dots & \dots & \dots \\ (H' p_j, v_{r-k}) & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

причем кратность  $\lambda_v^{(0)}$  как собственного значения оператора  $H^{(i, k)}$  равна числу линейно независимых решений  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{k+l}\}$ . Отметим, что даже при произвольном выборе функций  $p_1, p_2, \dots$  резольвента

$$R\lambda^{(i)} H' p_j = \sum_{v=1}^i \frac{(H' p_j, u_v^{(0)}) u_v^{(0)}}{\lambda_v^{(0)} - \lambda} + \frac{1}{\lambda_{i+1}^{(0)} - \lambda} \left[ H' p_j - \sum_{v=1}^i (H' p_j, u_v^{(0)}) u_v^{(0)} \right]$$

содержит только конечное число слагаемых. Численные примеры будут рассмотрены в п. 8.

В заключение следует отметить, что метод усечения разрабатывал также Вайнбергер [4]. В его специальном отчете с общей точки зрения подробно рассматриваются промежуточные задачи.

**2. Метод вторичной проекции.** В этом методе, который был впервые предложен Безли и Фоксом [4], по-прежнему предполагается, что  $H$  можно представить в виде суммы  $H = H^{(0)} + H'$ , где  $H'$  — положительно определенный оператор, а собственные элементы  $\lambda_i^{(0)}, u_i^{(0)}$  оператора  $H^{(0)}$  известны. Чтобы получить последовательные приближения снизу для собственных значений  $H$ , введем операторы

$$H^{(k, l)} = H^{(0)} - \gamma I + \{H' P^{(k)} + \gamma I\} Q^{(l)},$$

где  $\gamma$  — произвольная положительная постоянная,  $P^{(k)}$  есть  $H'$ -ортогональный проектор (см. гл. XII; здесь мы будем называть его первым проектором) на линейную оболочку  $k$  произвольных векторов  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), а  $Q^{(l)}$  — второй проектор, определяемый ниже. Тогда, как будет видно из дальнейшего, собственные значения  $\lambda_i^{(k, l)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , оператора  $H^{(k, l)}$ , которые дают оценку снизу  $\lambda_i^{(k, l)} \leq \lambda_i$ , можно найти, решая две конечномерные задачи на собственные значения размерностей  $k$  и  $l$  соответственно; в эти задачи входят только величины  $(H' p_s, u_i^{(0)})$ ,  $(H' p_s, p_t)$  и  $(H' p_s, H' p_t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ ;  $s, t = 1, 2, \dots, k$ .

Второй проектор определяется следующим образом. Для любого положительного  $\gamma$  оператор  $H^{(k)} = H^{(0)} + H' P^{(k)}$  (гл. XII,

п. 5) можно переписать в виде

$$H^{(k)} = [H^{(0)} - \gamma] + [H'P^{(k)} + \gamma].$$

Поскольку оператор  $H'P^{(k)} + \gamma$  является, очевидно, положительно определенным, мы можем для каждого  $k$  и  $\gamma$  ввести новое скалярное произведение  $\langle u, v \rangle$  по формуле

$$\langle u, v \rangle = ([H'P^{(k)} + \gamma] u, v).$$

Возьмем теперь другую последовательность  $\{q_1, q_2, \dots\}$  линейно независимых элементов рассматриваемого гильбертова пространства  $\mathfrak{H}$ , и пусть  $Q^{(l)}$  обозначает  $(H'P^{(k)} + \gamma)$ -ортогональный проектор на линейную оболочку первых  $l$  векторов последовательности  $q_1, q_2, \dots$ . Проводя в точности такие же рассуждения, как и в случае первого проектора, получаем, что для фиксированных  $k$  и  $\gamma$  выполняются неравенства

$$0 \leq [H'P^{(k)} + \gamma] Q^{(l)} \leq [H'P^{(k)} + \gamma] Q^{(l+1)} \leq H'P^{(k)} + \gamma.$$

Так же как и в случае первого проектирования, находим для оператора  $[H'P^{(k)} + \gamma] Q^{(l)}$  явное выражение

$$[H'P^{(k)} + \gamma] Q^{(l)} u = \sum_{m, n=1}^l (u, [H'P^{(k)} + \gamma] q_m) c_{mn} [H'P^{(k)} + \gamma] q_n,$$

где матрица  $\|c_{mn}\|$  является обратной к матрице

$$\|([H'P^{(k)} + \gamma] q_m, q_n)\|.$$

Определим теперь искомый промежуточный оператор  $H^{(l, k)}$  формулой

$$H^{(l, k)} = [H^{(0)} - \gamma] + [H'P^{(k)} + \gamma] Q^{(l)},$$

из которой следует, что

$$H^{(0)} - \gamma \leq H^{(l, k)} \leq H^{(l+1, k)} \leq H^{(k)} \leq H,$$

и потому собственные значения удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_i^{(0)} - \gamma \leq \lambda_i^{(l, k)} \leq \lambda_i^{(l+1, k)} \leq \lambda_i^{(k)} \leq \lambda_i.$$

В общем случае найти спектр  $H^{(l, k)}$  при произвольном выборе элементов  $q_1, q_2, \dots, q_l$  нисколько не проще, чем спектр  $H^{(k)}$ . Однако при построении оператора  $H^{(l, k)}$  всегда возможен «специальный выбор» функций  $q$  (т. е. такой выбор, при котором задача сводится к конечномерной). В самом деле, мы покажем ниже, что для оператора

$$[H'P^{(k)} + \gamma]^{-1}$$

можно найти явное выражение и выбрать тогда  $q_i$  (аналогично тому, как мы выбирали  $p_i = (H')^{-1} u_i^{(0)}$  при первом проектировании) следующим образом:

$$q_i = [H'P^{(k)} + \gamma]^{-1} u_i^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

откуда, рассуждая так же, как и выше, мы получаем, что оператор  $H^{(l, k)}$  можно представить в виде

$$H^{(l, k)}u = [H^{(0)} - \gamma]u + \sum_{m, n=1}^l (u, u_m^{(0)}) c_{mn} u_n^{(0)}.$$

Из этого выражения для  $H^{(l, k)}$  видно, что подпространство, натянутое на собственные векторы  $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_l^{(0)}$  оператора  $H^{(0)}$ , является инвариантным подпространством оператора  $H^{(l, k)}$  и что  $H^{(l, k)}u$  совпадает с  $(H^{(0)} - \gamma)u$ , если функция  $u$  ортогональна  $\{u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_l^{(0)}\}$ . Значит, в этом ортогональном дополнении спектр оператора  $H^{(l, k)}$  совпадает со спектром известного оператора  $H^{(0)} - \gamma$ . Таким образом, чтобы получить весь спектр оператора  $H^{(l, k)}$ , нужно найти его собственные векторы вида

$$u = \sum_{i=1}^l \beta_i u_i^{(0)},$$

а эта задача сводится, как и в предыдущих случаях, к конечномерной задаче на собственные значения

$$\sum_{i=1}^l \beta_i [(\lambda_i^{(0)} - \gamma) \delta_{ij} + c_{ij} - \lambda \delta_{ij}] = 0 \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Объединяя собственные значения, найденные таким образом, с  $\lambda_{i+1}^{(0)} - \gamma, \lambda_{i+2}^{(0)} - \gamma, \dots$ , мы получим оценки снизу  $\lambda_i^{(l, k)}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , для искомого собственных значений  $\lambda_i$ , и эти оценки улучшаются с ростом  $l$  и  $k$ .

Упомянутое выше явное выражение для  $[H'P^{(k)} + \gamma]^{-1}$  можно получить следующим образом. Из равенства

$$[H'P^{(k)} + \gamma]v = \sum_{i, j=1}^k (v, H'p_i) b_{ij} H'p_j + \gamma v$$

следует, что подпространство  $\{H'p_1, H'p_2, \dots, H'p_k\}$  инвариантно относительно оператора  $H'P^{(k)} + \gamma$ . Значит,  $\gamma$  будет собственным значением бесконечной кратности оператора  $H'P^{(k)} + \gamma$ , а соответствующее собственное подпространство состоит из всех векторов, ортогональных  $\{H'p_1, \dots, H'p_k\}$ . Тогда остальные собственные значения  $H'P^{(k)} + \gamma$ , скажем  $\mu_1 + \gamma$ .

$\mu_2 + \gamma, \dots, \mu_k + \gamma$ , и соответствующие нормированные собственные векторы  $v_1, v_2, \dots, v_k$  можно получить, полагая

$$v = \sum_{i=1}^k d_i H' p_i,$$

где  $d_i$  находятся из алгебраической системы уравнений

$$0 = \sum_{i=1}^k d_i [(H' p_i, H' p_j) - \mu (H' p_i, p_j)] \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Таким образом,

$$[H' P^{(k)} + \gamma]^{-1} u = \sum_{i=1}^k \frac{(u, v_i) v_i}{\mu_i + \gamma} + \frac{1}{\gamma} \left[ u - \sum_{i=1}^k (u, v_i) v_i \right].$$

После того как из этой системы будут найдены  $v_i$  и  $\mu_i$ , коэффициенты  $c_{mn}$  определяются как элементы матрицы, обратной к матрице с известными элементами

$$\frac{1}{\gamma} \left\{ \delta_{mn} - \sum_{i=1}^k \frac{\mu_i}{\mu_i + \gamma} (u_m^{(0)}, v_i) (v_i, u_n^{(0)}) \right\}.$$

**3. Сравнение метода усечения и вторичной проекции.** Недавно Бёрш-Зупан [1] показал, что методы усечения и вторичной проекции по существу эквивалентны. Поясним это.

На ортогональном дополнении к  $\{u_1^{(0)}, \dots, u_l^{(0)}\}$  оператор  $H^{(l, k)}$  совпадает (см. начало п. 2) с оператором  $H^{(0)} - \gamma$  и потому имеет собственные значения  $\lambda_{l+1}^{(0)} - \gamma, \lambda_{l+2}^{(0)} - \gamma, \dots$ . Эти собственные значения монотонно убывают с ростом  $\gamma$ , и, таким образом, для каждого фиксированного  $l$  и  $k$  оценка для  $\lambda_\nu$  ( $\nu \leq l$ ) будет наилучшей, если  $\gamma$  выбрать так, чтобы  $\lambda_{l+1}^{(0)} - \gamma$  совпадало с  $\nu$ -м собственным значением конечномерной задачи на собственные значения

$$\sum_{i=1}^l \beta_i [(\lambda_i^{(0)} - \gamma) \delta_{ij} + c_{ij} - \lambda \delta_{ij}] = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, l),$$

введенной в п. 2.

Предположим теперь, что в методе вторичной проекции постоянная  $\gamma$  выбрана именно таким наилучшим образом. Тогда оба метода дают в точности совпадающие оценки, что можно доказать следующим образом.

В методе вторичной проекции из п. 2 собственное значение  $\lambda$  и собственная функция  $u$ , принадлежащая подпространству  $\{u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_l^{(0)}\}$ , находятся из уравнения

$$[H^{(0)} - \gamma + (H' P^{(k)} + \gamma) Q^{(l)}] u = \lambda u,$$

где  $P^{(k)}$  есть  $H'$ -ортогональный проектор на  $\{p_1, \dots, p_k\}$ , а  $Q^{(l)}$  есть  $(H'P^{(k)} + \gamma)$ -ортогональный проектор на  $\{q_1, \dots, q_l\}$ , где  $q_i$  определяются из уравнения  $(H'P^{(k)} + \gamma)q_i = u_i^{(0)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ .

С другой стороны, в методе усечения из п. 1 собственное значение  $\lambda$  и соответствующая собственная функция  $w$  из подпространства

$$\{u_1^{(0)}, \dots, u_l^{(0)}, H'p_1, H'p_2, \dots, H'p_k\}$$

определяются из уравнения

$$[H^{(0)}T^{(l)} + \lambda_{l+1}^{(0)}(I - T^{(l)}) + H'P^{(k)}]w = \lambda w.$$

Если мы положим  $w = Q^{(l)}u$ , то уравнение метода вторичной проекции принимает следующий вид:

$$(H^{(0)} - \lambda_{l+1}^{(0)})u + (H'P^{(k)} + \lambda_{l+1}^{(0)} - \lambda)w = 0,$$

причем вектор  $w$ , принадлежащий  $\{q_1, \dots, q_l\}$  по определению  $q_i$ , будет также принадлежать

$$\{u_1^{(0)}, \dots, u_l^{(0)}, H'p_1, \dots, H'p_k\}.$$

Далее,  $u \in \{u_1^{(0)}, \dots, u_l^{(0)}\}$ , а из определения  $Q^{(l)}$  следует, что вектор  $u - w$  ортогонален  $\{u_1^{(0)}, \dots, u_l^{(0)}\}$ . Следовательно, по определению  $T^{(l)}$  мы имеем  $u = T^{(l)}w$ , и, таким образом, уравнение метода усечения следует из уравнения метода вторичной проекции.

С другой стороны, пусть  $w$  и  $\lambda$  — решения уравнения метода усечения,  $\lambda < \lambda_{l+1}^{(0)}$ . Положим  $u = T^{(l)}w$  и  $\gamma = \lambda_{l+1}^{(0)} - \lambda$ . Тогда имеет место написанное выше равенство  $(H^{(0)} - \lambda_{l+1}^{(0)})u - (H'P^{(k)} + \lambda_{l+1}^{(0)} - \lambda)w = 0$ , откуда следует, что  $(H'P^{(k)} + \gamma)w \in \{u_1^{(0)}, \dots, u_l^{(0)}\}$  и, значит,  $w \in \{q_1, \dots, q_l\}$ . Поскольку по определению  $T^{(l)}$  функция  $w - u$  ортогональна  $u_1^{(0)}, \dots, u_l^{(0)}$ , из определения  $Q^{(l)}$  следует, что  $w = Q^{(l)}u$ , а, поскольку  $u$  принадлежит линейной оболочке  $u_i^{(0)}$ , уравнение метода вторичной проекции следует из написанного выше уравнения  $(H^{(0)} - \lambda_{l+1}^{(0)})u - (H'P^{(k)} + \lambda_{l+1}^{(0)} - \lambda)w = 0$ .

Таким образом, оба метода дают одни и те же собственные значения  $\lambda < \lambda_{l+1}^{(0)}$ , а соответствующие собственные функции  $u$  и  $w$  связаны соотношениями  $u = T^{(l)}w$  и  $w = Q^{(l)}u$ .

В начале этого пункта мы предположили, что в методе вторичной проекции можно выбрать  $\gamma$  оптимальным образом, а именно  $\gamma = \lambda_{l+1}^{(0)} - \lambda$ . Но, вообще говоря, такой выбор  $\gamma$  возможен не всегда, поскольку  $\lambda$  (собственное значение, для которого мы пытаемся подобрать  $\gamma$  наилучшим образом) заранее неизвестно. Таким образом, метод усечения кажется более предпочтительным,

пока не принимается во внимание вычислительная сторона задачи. Дело в том, что метод вторичной проекции приводит к матричной задаче порядка  $k$ , а метод усечения — к матричной задаче порядка  $k + 1$ .

**4. Разложение оператора в сумму.** В предыдущей главе мы рассмотрели задачу о свободном атоме гелия, т. е. систему с одним ядром. Распространим теперь наши методы на систему, состоящую из нескольких, скажем  $n$ , неподвижных ядер с зарядами  $Z_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, n$ , окруженных  $m$  электронами. Для этого нам потребуется выразить гамильтониан системы в виде суммы положительного оператора  $H'$  и операторов  $H_\alpha$  с известными собственными значениями.

Обозначим радиус-векторы  $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$  ядер через  $R_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, n$ , а радиус-векторы электронов через  $r_i$  и положим

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= R_\alpha - R_\beta & (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n), \\ r_{ij} &= r_i - r_j & (i, j = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

и

$$\rho_{i\alpha} = r_i - R_\alpha \quad (i = 1, 2, \dots, m; \alpha = 1, \dots, n).$$

Таким образом,  $R_{\alpha\beta}$  определяет взаимное расположение ядер,  $r_{ij}$  — взаимное расположение электронов, а  $\rho_{i\alpha}$  — положение электронов по отношению к ядрам.

Начнем с рассмотрения простейшей молекулярной системы иона водорода  $H_2^+$ , состоящего из двух ядер и одного электрона. В учебниках по квантовой химии доказывается, что оператор Гамильтона  $H$  такой системы имеет вид

$$H = -\frac{\Delta_1}{2} - \frac{1}{|\rho_{11}|} - \frac{1}{|\rho_{12}|},$$

где  $\Delta_1$  — оператор Лапласа, действующий на координаты  $r_1$  электрона, а  $|\rho|$  — длина вектора  $\rho$ .

Из определения оператора Лапласа

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ясно, что его можно представить в виде

$$\Delta_1 = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12},$$

где  $a_{11}$  и  $a_{12}$  — некоторые положительные числа, такие, что

$$a_{11} + a_{12} = 1,$$

а  $\Delta_{11}$  и  $\Delta_{12}$  — операторы Лапласа, выраженные через координаты  $\rho_{11}$  и  $\rho_{12}$  соответственно. Тогда  $H$  принимает вид

$$H = H_1 + H_2,$$

где  $H_\alpha = -(1/2) a_{1\alpha} \Delta_{1\alpha} - 1/|\rho_{1\alpha}|$  ( $\alpha = 1, 2$ ). Операторы  $H_1$  и  $H_2$  являются гамильтонианами водородоподобных атомов, так что их собственные значения известны. Таким образом, гамильтониан иона  $H_2^+$  допускает нужное разложение. Член  $H'$  здесь отсутствует.

В общем случае молекулярной системы с  $n$  ядрами и  $m$  электронами оператор  $H$  имеет вид

$$H = - \sum_{i=1}^m \frac{\Delta_i}{2} - \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{Z_\alpha}{|\rho_{i\alpha}|} + \sum_{i>j=1}^m \frac{1}{|r_{ij}|},$$

где  $\Delta_i$  — операторы Лапласа, действующие на  $r_i$ , координаты  $i$ -го электрона. Запишем операторы  $\Delta_i$  в виде

$$\Delta_i = \sum_{\alpha=1}^n a_{i\alpha} \Delta_{i\alpha} \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

где  $\Delta_{i\alpha}$  обозначает оператор Лапласа  $i$ -го электрона, выраженный через координаты  $\rho_{i\alpha}$ , если за начало координат принять  $\alpha$ -е ядро. Тогда

$$H = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^m \left( -\frac{a_{i\alpha} \Delta_{i\alpha}}{2} - \frac{Z_\alpha}{|\rho_{i\alpha}|} \right) + \sum_{i>j=1}^m \frac{1}{|r_{ij}|}.$$

Если определить операторы  $H_\alpha$ , положив

$$H_\alpha = \sum_{i=1}^m \left( -\frac{a_{i\alpha} \Delta_{i\alpha}}{2} - \frac{Z_\alpha}{|\rho_{i\alpha}|} \right) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n),$$

а в качестве  $H'$  взять

$$H' = \sum_{i>j=1}^m \frac{1}{|r_{ij}|},$$

то мы получим для  $H$  нужное представление:

$$H = \sum_{\alpha=1}^n H_\alpha + H'.$$

Очевидно,  $H'$  положительно определен, так как он является оператором умножения на положительную функцию. Собственные значения каждого из операторов  $H_\alpha$  известны, поскольку  $H_\alpha$  является гамильтонианом  $m$  невзаимодействующих частиц типа электронов с массой

$$m_{i\alpha} = (a_{i\alpha})^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, m; \alpha = 1, 2, \dots, n),$$

которые находятся в поле единственного ядра с зарядом  $Z_\alpha$ .

Во многих приложениях оператор  $H$  имеет вид  $H = H^{(0)} = \sum_{\alpha=1}^m H_\alpha$ , т. е. положительный оператор  $H'$  вообще отсутствует. Мы начнем с рассмотрения этих более простых случаев.

Следуя общепринятым в квантовой механике обозначениям, будем обозначать собственные значения  $H$  не через  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ , а через  $E_1 \leq E_2 \leq \dots$ , а ортонормированные функции — через  $\psi_1, \psi_2, \dots$ . Для каждого из операторов  $H_\alpha$  будут использоваться те же обозначения, снабженные индексом  $\alpha$ :

$$E_1^{(\alpha)} \leq E_2^{(\alpha)} \leq \dots$$

и  $\psi_1^{(\alpha)}, \psi_2^{(\alpha)}, \dots$ . Усеченные операторы  $H_\alpha^{(l_\alpha, 0)}$  определим формулой

$$H_\alpha^{(l_\alpha, 0)} \psi = \sum_{\nu=1}^{l_\alpha} (\psi, \psi_\nu^{(\alpha)}) E_\nu^{(\alpha)} \psi_\nu^{(\alpha)} + E_{l_\alpha+1}^{(\alpha)} \left[ \psi - \sum_{\nu=1}^{l_\alpha} (\psi, \psi_\nu^{(\alpha)}) \psi_\nu^{(\alpha)} \right],$$

где  $l_\alpha$  — положительные числа. Согласно основному свойству усеченных операторов, у каждого из операторов  $H_\alpha^{(l_\alpha, 0)}$  первые  $l_\alpha$  собственных значений будут такими же, как и у  $H_\alpha$ , а оставшаяся часть спектра состоит из единственной точки  $E_{l_\alpha+1}^{(\alpha)}$ , являющейся собственным значением бесконечной кратности. Таким образом, операторы  $H_\alpha^{(l_\alpha, 0)}$  удовлетворяют неравенствам

$$H_\alpha^{(l_\alpha, 0)} \leq H_\alpha^{(l_\alpha+1, 0)} \leq H_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n)$$

Неравенство  $A \leq B$ , где  $A$  и  $B$  — симметрические операторы, означает здесь, что область определения  $B$  содержится в области определения  $A$  и что  $(A\psi, \psi) \leq (B\psi, \psi)$  для всех  $\psi$ , принадлежащих области определения  $B$ . В этом случае мы будем говорить, что оператор  $A$  меньше оператора  $B$ . С помощью таких усечений определим теперь оператор  $H^{(l, 0)}$  формулой

$$H^{(l, 0)} = \sum_{\alpha=1}^n H_\alpha^{(l_\alpha, 0)},$$

где индекс  $l$  обозначает набор  $(l_1, l_2, \dots, l_n)$ . Условимся говорить, что  $l^1 \leq l^2$  тогда и только тогда, когда  $l_\alpha^1 \leq l_\alpha^2$  при всех  $\alpha = 1, 2, \dots, n$ . Тогда из неравенства  $l^1 \leq l^2$  следует, что

$$H^{(l^1, 0)} \leq H^{(l^2, 0)} \leq H^{(0)},$$



и, значит, мы будем иметь

$$E_{\nu}^{(l_1, 0)} \leq E_{\nu}^{(l_2, 0)} \leq E_{\nu}^{(0)} \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

так что собственные значения любого из операторов  $H^{(l, 0)}$ , т. е. любой суммы усеченных операторов, зависящей от выбора  $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ , будут нижними границами искомым собственным значений  $H^{(0)}$ . Операторы  $H^{(l, 0)}$  выражаются в явном виде:

$$H^{(l, 0)}\psi = \sum_{\alpha=1}^n \left[ \sum_{\nu=1}^{l_{\alpha}} (\psi, \psi_{\nu}^{(\alpha)}) (E_{\nu}^{(\alpha)} - E_{l_{\alpha}+1}^{(\alpha)}) \psi_{\nu}^{(\alpha)} - E_{l_{\alpha}+1}^{(\alpha)} \psi \right].$$

Отсюда следует, что задача на собственные значения для  $H^{(l, 0)}$  сводится к конечномерной задаче, что мы и хотели показать.

В самом деле, обозначим через  $\mathfrak{M}^{(l)}$  конечномерное подпространство гильбертова пространства  $\mathfrak{H}$ , натянутое на векторы  $\psi_{\nu}^{(\alpha)}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, l_{\alpha}$ ;  $\alpha = 1, 2, \dots, n$ . Это подпространство инвариантно относительно  $H^{(l, 0)}$ , поскольку  $H^{(l, 0)}\psi = \sum_{\alpha=1}^n E_{l_{\alpha}+1}\psi$  для всех  $\psi$ , ортогональных  $\mathfrak{M}^{(l)}$ . Следовательно, если  $\psi \in \mathfrak{M}^{(l)}$ , то  $H^{(l, 0)}\psi$  также принадлежит  $\mathfrak{M}^{(l)}$ . В подпространстве  $\mathfrak{M}^{(l)}$  задача на собственные значения для  $H^{(l, 0)}$  принимает следующий вид:

$$H^{(l, 0)}\psi - E\psi = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\nu=1}^{l_{\alpha}} \gamma_{\nu}^{(\alpha)} \psi_{\nu}^{(\alpha)} - \left( E - \sum_{\alpha=1}^n E_{l_{\alpha}+1}^{(\alpha)} \right) \psi = 0,$$

где

$$\gamma_{\nu}^{(\alpha)} = (\psi, \psi_{\nu}^{(\alpha)}) (E_{\nu}^{(\alpha)} - E_{l_{\alpha}+1}^{(\alpha)}) \quad (\nu = 1, 2, \dots, l_{\alpha}; \alpha = 1, 2, \dots, n).$$

Умножая это уравнение скалярно на  $\psi_{\mu}^{(\beta)}$ , мы получаем искомую конечномерную задачу на собственные значения

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\nu=1}^{l_{\alpha}} \gamma_{\nu}^{(\alpha)} \left[ (\psi_{\nu}^{(\alpha)}, \psi_{\mu}^{(\beta)}) - \left( E - \sum_{\alpha=1}^n E_{l_{\alpha}+1}^{(\alpha)} \right) \frac{\delta_{\nu\mu} \delta_{\alpha\beta}}{E_{\nu}^{(\alpha)} - E_{l_{\alpha}+1}^{(\alpha)}} \right] = 0$$

$$(\mu = 1, 2, \dots, l_{\beta}, \beta = 1, 2, \dots, n),$$

размерность которой равна  $l_1 + l_2 + \dots + l_n$ . Собственные значения этой задачи не превосходят  $\sum_{\alpha=1}^n E_{l_{\alpha}+1}^{(\alpha)}$ . Те из них, которые строго меньше, чем  $\sum_{\alpha=1}^n E_{l_{\alpha}+1}^{(\alpha)}$ , соответствуют собственным векторам  $H^{(l, 0)}$

вида

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\nu=1}^{l_{\alpha}} \gamma_{\nu}^{(\alpha)} \psi_{\nu}^{(\alpha)},$$

а остальная часть спектра оператора  $H^{(l, 0)}$  состоит из собственного значения  $\sum_{\alpha=1}^n E_{l_{\alpha}+1}^{(\alpha)}$  бесконечной кратности, собственное подпространство которого содержит все векторы, ортогональные собственным векторам оператора  $H^{(l, 0)}$ , с собственными значениями, строго меньшими  $\sum_{\alpha=1}^n E_{l_{\alpha}+1}^{(\alpha)}$ .

Таким образом, из неравенств

$$E_{\nu}^{(l, 0)} \leq E_{\nu}^{(l^2, 0)} \leq E_{\nu}^{(0)} \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

следует, что с помощью операторов  $H^{(l, 0)}$  получаются оценки снизу (эти оценки можно *улучшить*, последовательно придавая  $l$  все большие значения) для собственных значений оператора  $H = \sum_{\alpha=1}^n H_{\alpha}$ , а нахождение этих оценок сводится к конечномерным задачам.

В более общем случае, когда  $H = \sum_{\alpha=1}^n H_{\alpha} + H'$ , где  $H'$  положительно определен, дополнительные трудности не возникают; мы просто должны объединить две процедуры, которые уже рассматривались в отдельности. А именно нужно ввести операторы  $H^{(l, 0)}$ , которые меньше, чем  $\sum_{\alpha=1}^n H_{\alpha}$ , а также операторы  $H^{(k)} = H'P^{(k)}$ , которые меньше, чем  $H'$ .

Результирующие оценки снизу, нахождение которых сводится к численному решению конечномерных задач, будут зависеть не только от индексов  $k, l$  и векторов  $p_i$ , но также от значений постоянных  $a_{i\alpha}$ , которые входят в разложение лапласиана в сумму лапласианов, каждый из которых относится к одному ядру. Естественно возникает вопрос, каким образом следует выбирать числа  $a_{i\alpha}$ , чтобы нижние границы, найденные этим методом, были наилучшими.

Положение здесь значительно более сложное, чем в случае задачи для уравнения Матье, рассмотренной в гл. XII, п. 8, где мы имели только один параметр  $\alpha$ . Однако для некоторых частных случаев Безли и Фокс [6] дали оптимальный метод выбора. В следующем пункте будет рассмотрен пример задачи с двумя параметрами.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Относительно изложенного в этом пункте см. Безли и Фокс [6].

**5. Применение метода разложения к задаче о вращающейся балке.** Рассмотрим другой пример (см. Безли и Фокс [10]), в котором используется метод разложения операторов в сумму. Мы оценим собственные значения задачи о балке, вращающейся вокруг неподвижного конца в плоскости, проходящей через ось балки. Соответствующая задача на собственные значения (см., например, Бойс, Ди Прима, Хандельман [1]) такова:

$$u^{(IV)} - \frac{1}{2} a^2 [(1-x^2) u']' - \lambda u = 0 \quad (0 < x < 1),$$

$$u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0,$$

где постоянная  $a$  пропорциональна угловой скорости вращения. Подходящим гильбертовым пространством для этой задачи является  $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}^2(0, 1)$ , а соответствующие операторы задаются формулами

$$H_1 u = u^{(IV)} - \frac{1}{2} a^2 [(1-x^2) u']', \quad u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0,$$

$$H_1 u = u^{(IV)}, \quad u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0,$$

$$H_2 u = -\frac{1}{2} a^2 [(1-x^2) u']', \quad u(0) = [(1-x^2) u']_{x=1} = 0.$$

Задачи на собственные значения для операторов  $H_1$  и  $H_2$ , а именно

$$u^{(IV)} - \lambda u = 0 \quad (0 < x < 1),$$

$$u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0,$$

и

$$-\frac{1}{2} a^2 [(1-x^2) u']' - \lambda u = 0 \quad (0 < x < 1), \quad u(0) = [(1-x) u']_{x=1} = 0$$

в отдельности решаются просто. Собственные значения  $\lambda_v^1$  и собственные функции  $u_v^1$  имеют вид (ср. гл. VI, п. 1)

$$\lambda_v^1 = (\beta_v)^4,$$

$$u_v^1 = \operatorname{ch} \beta_v x - \cos \beta_v x -$$

$$-\frac{\operatorname{ch} \beta_v + \cos \beta_v}{\operatorname{sh} \beta_v + \sin \beta_v} (\operatorname{sh} \beta_v x - \sin \beta_v x) \quad (v = 1, 2, 3, \dots).$$

где  $\beta_v$  — положительные корни уравнения

$$\operatorname{ch} \beta \cos \beta + 1 = 0,$$

расположенные в порядке возрастания.

Для собственных значений  $\lambda_v^2$  и собственных функций  $u_v^2$  получаем следующие выражения:

$$\lambda_v^2 = a^{2\nu} (2\nu - 1), \quad u_v^2 = (-1)^\nu (4\nu - 1)^{1/2} P_{2\nu-1}(x) \\ (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

где  $P_{2\nu-1}$  — полиномы Лежандра степени  $2\nu - 1$ . Безли и Фокс [10] вычислили нижние границы  $\lambda_v^{7,4}$  при  $l_1 = 7$ ,  $l_2 = 4$ . Результаты вычислений приведены в табл. IV, в которой числа  $\hat{\lambda}_v^7$  являются верхними границами, найденными методом Рэлея — Ритца с помощью семи пробных функций.

Таблица IV

$\nu$	$a^2 = 0$		$a^2 = 5$		$a^2 = 200$		$a^2 = 10\,000$	
	$\lambda_v^{7,4}$	$\hat{\lambda}_v^7$	$\lambda_v^{7,4}$	$\hat{\lambda}_v^7$	$\lambda_v^{7,4}$	$\hat{\lambda}_v^4$	$\lambda_v^{7,4}$	$\hat{\lambda}_v^7$
1	12,362	12,362	18,287	18,301	231,74	233,80	10097	10297
2	485,52	485,52	5174,1	517,91	1751,1	1771,7	60936	62004
3	3806,5	3808,8	3891,4	3897,9	7176,0	7305,5	157810	161150
4	14617	14670	14784	14849	21270	21812	312860	321650

**6. Аппроксимация выражениями, содержащими сопряженный оператор.** Предположим снова, что для данного оператора  $H$ , собственные значения которого мы хотим оценить снизу, существует «меньший», чем  $H$ , базовый оператор  $H^{(0)}$  с известными собственными элементами. Предполагается также, что  $H$  и  $H^{(0)}$  — самосопряженные ограниченные снизу операторы и что нижние части их спектров состоят из дискретных собственных значений конечной кратности, причем первая предельная точка спектра  $H^{(0)}$  лежит правее тех собственных значений  $H$ , для которых мы хотим получить оценки. Требование, чтобы базовый оператор был «меньше»  $H$ , означает, что квадратичные формы  $J_{H^{(0)}}(u) = (H^{(0)}u, u)$  и  $J_H(u) = (Hu, u)$ , полученные при пополнении областей определения операторов  $H^{(0)}$  и  $H$ , удовлетворяют неравенству  $J_{H^{(0)}}(u) \leq J_H(u)$  при всех  $u$ , принадлежащих области определения  $J_H$ . Относительно последней предполагается, что она содержится в области определения  $J_{H^{(0)}}$ . Таким образом, мы можем записать  $J_H = J_{H^{(0)}} + J'$ , где  $J'$  — неотрицательная квадратичная форма, т. е.  $J'(u, u) \geq 0$  для всех  $u$ , принадлежащих пересечению областей определения  $J_{H^{(0)}}$  и  $J_H$ .

Пока что мы не ввели ничего нового. Предположим теперь — и это предположение лежит в основе настоящего метода, — что неотрицательную форму  $J'$  можно представить в виде  $J'(u) = (Bu, Bu)'$ , где  $B$  — некоторый оператор с областью значений в гильбертовом пространстве  $\mathfrak{H}'$ , в котором скалярное произведение, обозначаемое через  $(u, v)'$ , определяется в зависимости от конкретной рассматриваемой задачи; в большинстве случаев это новое скалярное произведение совпадает со старым.

Из того факта, что  $J_{H^{(0)}} \leq J_H$ , следует, как и в предыдущих случаях, что  $\lambda_i^{(0)} \leq \lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . В соответствии с общим методом промежуточных задач нужно построить последовательность промежуточных квадратичных форм, собственные значения которых аппроксимировали бы соответствующие собственные значения  $H$ .

Воспользуемся для этого неравенством Бесселя

$$0 \leq (P^{(k)}Bu, Bu)' \leq (P^{(k+1)}Bu, Bu)' \leq (Bu, Bu)',$$

где  $P^{(k)}$  — оператор ортогонального проектирования в  $\mathfrak{H}'$  на линейную оболочку первых  $k$  членов последовательности  $\{p'_1, p'_2, \dots\}$  линейно независимых элементов этого пространства.

Далее, можно записать

$$(P^{(k)}Bu, Bu)' = (B^*P^{(k)}Bu, u)',$$

где  $B^*$  — оператор, сопряженный к  $B$  (гл. IV, п. 7). Оператор  $B^*P^{(k)}B$  можно представить в виде (гл. XII, п. 5)

$$B^*P^{(k)}Bu = \sum_{i,j=1}^k (Bu, p'_i)' b_{ij} B^*p'_j = \sum_{i,j=1}^k (u, B^*p'_i)' b_{ij} B^*p'_j,$$

где матрица  $\|b_{ij}\|$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, k$ , является обратной к матрице  $\|(p'_i, p'_j)'\|$ .

Наконец, мы можем определить промежуточные квадратичные формы  $J^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , полагая

$$J^{(k)}(u) = J_{H^{(0)}}(u) + (B^*P^{(k)}Bu, u).$$

Эти формы удовлетворяют неравенствам

$$J_{H^{(0)}} \leq J^{(k)} \leq J^{(k+1)} \leq J_H \quad (k = 1, 2, \dots).$$

из которых для собственных значений соответствующих самосопряженных операторов мы получаем требуемые неравенства

$$\lambda_i^{(0)} \leq \lambda_i^{(k)} \leq \lambda_i^{(k+1)} \leq \lambda_i \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Эти самосопряженные операторы  $H_{J^{(k)}}$  можно считать известными, поскольку они могут быть представлены в явном виде:

$$H_{J^{(k)}}u = H^{(0)}u + \sum_{i,j=1}^k (u, B^*p_i)' b_{ij}B^*p_j,$$

или, что эквивалентно, в виде

$$H_{J^{(k)}}u = H^{(0)}u + \sum_{i=1}^k \alpha_i B^*p_i,$$

где постоянные  $\alpha_i$  находятся из системы

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i (p_i, p_j)' = (u, B^*p_j)' \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Следует подчеркнуть, что в этом методе используются квадратичные формы в отличие от предыдущих методов, которые описывались исключительно в терминах операторов. Преимущества такого подхода заключаются главным образом (см. Безли и Фокс [5]) в большей общности, которая достигается при использовании операторов  $H_{J^{(k)}}$ , введенных в настоящем пункте, вместо прежних операторов  $H^{(k)}$ . Действительно, теперь уже не требуется, чтобы векторы  $p_i$  принадлежали области значений  $B$ ; нужно только, чтобы они принадлежали области определения  $B^*$ ; в приложениях к задачам для дифференциальных операторов последнее требование означает, что векторы  $p_i$  должны удовлетворять только стабильным краевым условиям (ср. гл. XI, п. 7). Ниже мы дадим краткую схему применения операторов  $H_{J^{(k)}}$  в обобщенном методе специального выбора, а также в методе усечения и вторичной проекции.

В обобщенном методе специального выбора элементы  $p_i$  выбираются так, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$B^*p_i = \sum_{\nu=1}^N \beta_{i\nu} u_{\nu}^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

где  $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_N^{(0)}$  — ортонормированные собственные векторы  $H^{(0)}$ . Подпространство  $\{u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_N^{(0)}\}$  является инвариантным относительно оператора  $H_{J^{(k)}}$ , а на ортогональном дополнении к этому подпространству оператор  $H_{J^{(k)}}$  совпадает с  $H^{(0)}$  и, следовательно, имеет здесь тот же спектр. Остальная часть спектра  $H_{J^{(k)}}$  состоит из  $N$  собственных значений с собственными векторами вида  $u = \sum_{\nu=1}^N \gamma_{\nu} u_{\nu}^{(0)}$ . Эти собственные значения

определяются из условия разрешимости системы уравнений

$$\sum_{\nu=1}^N \gamma_{\nu} \left\{ \sum_{i,j=1}^k \beta_{i\nu} b'_{ij} \beta_{j\mu} + (\lambda_{\nu}^{(0)} - \lambda) \delta_{\nu\mu} \right\} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, N).$$

В методе усечения базового оператора мы заменяем  $H_{J^{(k)}}$  меньшим оператором  $H_{J^{(k)}}^{(l)}$ , который определяется по формуле

$$H_{J^{(k)}}^{(l)} = H^{(l,0)} + B^* P^l B,$$

где  $H^{(l,0)}$  — оператор, полученный из  $H^{(0)}$  усечением порядка  $l$ , т. е.

$$H^{(l,0)} u = \sum_{\nu=1}^l (u, u_{\nu}^{(0)}) \lambda_{\nu}^{(0)} u_{\nu}^{(0)} + \lambda_{l+1}^{(0)} \left[ u - \sum_{\nu=1}^l (u, u_{\nu}^{(0)}) u_{\nu}^{(0)} \right].$$

Для определения спектра оператора  $H_{J^{(k)}}^{(l)}$  мы исходим из уравнения

$$H^{(l,0)} u - \lambda u = - \sum_{i=1}^k \alpha_i B^* p_i,$$

где  $\alpha_i$  определяются из системы

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i (p'_i, p'_j) = (u, B^* p'_j) \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Если  $u$  — собственный вектор  $H_{J^{(k)}}^{(l)}$  с собственным значением  $\lambda$ , которое не принадлежит спектру  $H^{(l,0)}$ , то  $u$  имеет вид

$$u = - \sum_{i=1}^k \alpha_i R_{\lambda}^{(l)} B^* p_i,$$

где  $R_{\lambda}^{(l)} = (H^{(l,0)} - \lambda I)^{-1}$  — резольвента оператора  $H^{(l,0)}$ . Тогда уравнения для  $\alpha_i$  можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i [(p'_i, p'_j) + (R_{\lambda}^{(l)} B^* p_i, B^* p'_j)] = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Следовательно, если  $u$  не является нулевым вектором, то  $\lambda$  должно удовлетворять уравнению

$$\det | (p'_i, p'_j) + (R_{\lambda}^{(l)} B^* p_i, B^* p'_j) | = 0.$$

При каждом таком значении  $\lambda$ , которое не принадлежит спектру  $H^{(l,0)}$ , число решений системы для  $\alpha_i$  равно дефекту (порядок минус ранг) этой матрицы. Если общее число решений для всех значений  $\lambda$ , меньших  $\lambda_{l+1}^{(0)}$ , равно  $l$ , то  $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_l^{(0)}$  не могут быть собственными значениями  $H_{J^{(k)}}^{(l)}$ , а если же число этих реше-

ний меньше  $l$ , то нужно провести дополнительное исследование, чтобы выяснить, какие из собственных значений  $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_l^{(0)}$  базового оператора являются также собственными значениями  $H_{J^{(k)}}^{(l)}$ . При этом  $(l-1)$ -е собственное значение  $\lambda_{l+1}^{(0)}$  базового оператора является собственным значением бесконечной кратности оператора  $H_{J^{(k)}}^{(l)}$ .

Наконец, в методе вторичной проекции оператор  $H_{J^{(k)}}$  заменяется другим, меньшим оператором, который мы также будем обозначать через  $H_{J^{(k)}}^{(l)}$ . Определим оператор  $H_{J^{(k)}}^{(l)}$  формулой

$$H_{J^{(k)}}^{(l)} = H^{(0)} - \gamma + [B^*P^{(k)}B + \gamma] Q^{(l)},$$

где  $\gamma$  — произвольное положительное число, а  $Q^{(l)}$  — проектор, ортогональный по отношению к новому скалярному произведению

$$\langle u, v \rangle = ( [B^*P^{(k)}B + \gamma] u, v ),$$

который переводит все пространство на подпространство, порожденное первыми  $l$  векторами некоторым образом выбранной последовательности  $\{q_1, q_2, \dots\}$  линейно независимых векторов.

Если мы положим

$$q_i = [B^*P^{(k)}B + \gamma]^{-1} u_i^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots),$$

то на подпространстве, ортогональном к  $\{u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_l^{(0)}\}$ , оператор  $H_{J^{(k)}}^{(l)}$  совпадает с  $H^{(0)} - \gamma I$ , а собственные векторы  $H_{J^{(k)}}^{(l)}$ , лежащие в подпространстве  $\{u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_l^{(0)}\}$ , можно искать в виде

$$u = \sum_{i=1}^l \beta_i u_i^{(0)}.$$

Нахождение этих векторов сводится к решению матричной задачи на собственные значения

$$\sum_{i=1}^l \beta_i [(\lambda_i^{(0)} - \gamma) \delta_{ij} + c_{ij} - \lambda \delta_{ij}] = 0 \quad (j = 1, 2, \dots),$$

где матрица  $\|c_{ij}\|$  является обратной к матрице

$$\| (u_i^{(0)}, [B^*P^{(k)}B + \gamma]^{-1} u_j^{(0)}) \|,$$

элементы которой можно считать известными, поскольку они находятся из уравнений

$$\begin{aligned} (u_i^{(0)}, [B^*P^{(k)}B + \gamma]^{-1} u_j^{(0)}) &= \\ &= \frac{1}{\gamma} \left[ \delta_{ij} - \sum_{m,n=1}^k (u_i^{(0)}, B^*p'_m) d_{mn}(\gamma) (B^*p'_n, u_j^{(0)}) \right], \end{aligned}$$



где  $\|d_{mn}(\gamma)\|$  — матрица, обратная к

$$\| (B^* p'_m, B^* p'_n)' + \gamma (p'_m, p'_n)' \|.$$

В работе Штадтера [1] методы, использующие разложение вида  $B^*B$ , применяются для вычисления нижних границ собственных значений задачи о колебаниях мембраны, имеющей форму ромба, у которой все стороны закреплены или две стороны закреплены, а две свободны.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Относительно изложенного в этом пункте, см., например, Безли и Фокс [5], [9] и Штадтер [1].

**7. Численный пример: применение методов, использующих сопряженный оператор.** В этом пункте мы проиллюстрируем два таких метода (см. Безли и Фокс [5]), а именно метод специального выбора и метод усечения, на примере задачи на собственные значения для дифференциального оператора:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} (1 + a \cos^2 x) \frac{d^2 u}{dx^2} - \lambda u &= 0, \\ u(-x) &= u(x), \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ u\left(\frac{\pi}{2}\right) &= u''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \end{aligned}$$

где  $a$  — неотрицательная вещественная постоянная, которую мы в последующих вычислениях полагаем равной 2.

Пространства, операторы и квадратичные формы, введенные в предыдущем пункте, в данном случае таковы (обозначения прежние):

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} &= \mathfrak{H}' = \left\{ u \in \mathfrak{Q}^2 \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \quad u(-x) = u(x) \right\}, \\ Hu &= \frac{d^2}{dx^2} (1 + a \cos^2 x) \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad u\left(\frac{\pi}{2}\right) = u''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \\ H^{(0)}u &= \frac{d^4 u}{dx^4}, \quad u\left(\frac{\pi}{2}\right) = u''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \\ H'u &= a \frac{d^2}{dx^2} \cos^2 x \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad u'' \cos^2 x|_{\pi/2} = 0, \\ J_H(u) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + a \cos^2 x) \left| \frac{d^2 u}{dx^2} \right|^2 dx, \quad u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \end{aligned}$$

$$J_{H^{(0)}}(u) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left| \frac{d^2 u}{dx^2} \right|^2 dx, \quad u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$J'(u) = a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \left| \frac{d^2 u}{dx^2} \right|^2 dx, \quad u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$Bu = -a^{1/2} \cos x \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$B^*v = -a^{1/2} \frac{d^2}{dx^2} (v \cos x), \quad v \cos x|_{\pi/2} = 0.$$

Легко видеть, что собственные векторы оператора  $H^{(0)}$  равны

$$u_v^{(0)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-1)^{v-1} \cos(2v-1)x,$$

а собственные значения  $\lambda_v^{(0)} = (2v-1)^4$ ,  $v = 1, 2, 3, \dots$ . В табл. V эти собственные значения расположены в столбце I.

Если, согласно методу специального выбора Безли, положить  $p_i' = u_i^{(0)} \sec x$ , то мы будем иметь  $B^*p_i' = a^{1/2} (2i-1)^2 u_v^{(0)}$ . Выполнив соответствующие вычисления, получим

$$(p_i', p_j') = 2(2i-1) \quad (k \geq j \geq i; i = 1, 2, \dots, k),$$

$$(B^*p_i', u_v^{(0)}) = \beta_{iv} = a^{1/2} (2i-1)^2 \delta_{iv}, \quad (i, v = 1, 2, \dots, k).$$

Для элементов  $b_{ij}'$  получаем простое выражение:

$$b_{ij}' = \frac{1}{4} \{2\delta_{ij} + \delta_{i1}\delta_{j1} - \delta_{ik}\delta_{jk} - \delta_{i-1,j} - \delta_{i,j-1}\} \quad (i, j = 1, 2, \dots, k).$$

Нижние границы, полученные этим методом при  $k = 7$ , приведены в столбце II табл. V.

В случае обобщенного метода специального выбора (см. ниже) мы можем взять

$$p_i' = a^{1/2} (2i-1)^2 \cos x u_i^{(0)} = Bu_i^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Вычисляя скалярные произведения, получаем

$$(p_i', p_j') = \frac{1}{4} a (2i-1)^2 (2j-1)^2 \{2\delta_{ij} + \delta_{i1}\delta_{j1} - \delta_{i-1,j} - \delta_{i,j-1}\}$$

$$(i, j = 1, 2, \dots),$$

$$(B^*p_i', u_v^{(0)}) = \beta_{iv} = (p_i', p_v')$$

$$(i = 1, 2, \dots, k; v = 1, 2, \dots, k+1),$$

так что, как видно из выражения для  $\beta_{iv}$ , мы действительно имеем дело с обобщенным специальным выбором при  $N = k + 1$ .

Нижние границы, полученные при таком выборе векторов  $p'_i$  при  $k = 7$ ,  $N = k + 1 = 8$ , приведены в столбце III табл. V.

В случае метода усечения положим  $p'_i = u_i^{(0)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Тогда мы получим

$$(p'_i, p'_j)' = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, k),$$

$$(B^* p'_i, u_v^{(0)}) = \frac{2}{\pi} a^{1/2} (2v-1)^2 \left[ \frac{1}{4(v+i-1)^2-1} - \frac{1}{4(v-i)^2-1} \right]$$

$$(i = 1, 2, \dots, k; v = 1, 2, \dots, l)$$

и

$$(B^* p'_i, B^* p'_j) = 4a \{ [i^4 + (i-1)^4] \delta_{ij} - i^4 \delta_{i, j-1} - j^4 \delta_{i-1, j} \}$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, k).$$

Нижние границы, найденные при  $k = 7$  и  $l = 0$ , приведены в столбце IV табл. V. В столбце V даны верхние границы, вычисленные по методу Рэля — Ритца.

Таблица V

ТАБЛИЦА ПРИБЛИЖЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ \*)

Собственные значения	I	II	III	IV	V
1	1,00000	2,36388	2,36388	2,36385	2,36388
2	81,0000	149,652	149,652	149,641	149,652
3	625,000	1149,01	1149,02	1148,68	1149,03
4	2401,00	4405,07	4406,57	4401,71	4406,74
5	6561,00	11953,2	12023,6	11989,0	12033,2
6	14641,0	25317,2	26508,4	26713,4	26843,0
7	28561,7	48485,4	48106,0	47565,3	52375,9

\*) I. Собственные значения  $H^{(0)}$ .

II. Нижние границы, полученные методом специального выбора Безли.

III. Нижние границы, полученные обобщенным методом специального выбора.

IV. Нижние границы, полученные методом усечения  $H_0$ .

V. Верхние границы, полученные методом Рэля — Ритца.

8. Приложение метода усечения к задаче об атоме гелия. В гл. XII, п. 11, решая промежуточную задачу при специальном выборе элементов  $p_i$ , для первого собственного значения атома гелия мы получили оценку  $E_1 \geq -3,0637$ . Теперь мы применим (см. Безли и Фокс [1]) к той же задаче метод усечения, рассмотренный в п. 1 этой главы.

В используемых сейчас обозначениях этот метод состоит в следующем. Мы определяем *усечение*  $H^{(l, 0)}$  оператора  $H^{(0)}$  формулой

$$H^{(l, 0)}\psi = \sum_{i=1}^l (\psi_i^{(0)}, \psi) E_i^{(0)} \psi_i^{(0)} + E_{l+1}^{(0)} [\psi - \sum_{i=1}^l (\psi_i^{(0)}, \psi) \psi_i^{(0)}] \quad (l = 1, 2, \dots)$$

и далее вводим операторы

$$H^{(l, k)} = H^{(l, 0)} + H'P^{(k)} \quad (k, l = 1, 2, \dots).$$

Для любой функции  $\psi$  имеем

$$P^{(k)}\psi = \sum_{i=1}^k \alpha_i p_i,$$

где постоянные  $\alpha_i$  удовлетворяют системе уравнений

$$[p_j, P^{(k)}\psi] = [p_j, \psi] = \sum_{i=1}^k \alpha_i [p_j, p_i] \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

так что

$$H^{(l, k)}\psi = H^{(l, 0)}\psi + \sum_{i=1}^k \alpha_i H'p_i,$$

а система для  $\alpha_i$  записывается в виде

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i (H'p_j, p_i) = (H'p_j, \psi) \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Таким образом, задача на собственные значения для оператора  $H^{(l, k)}$  имеет вид

$$H^{(l, 0)}\psi - E\psi = f_k,$$

где

$$f_k = - \sum_{i=1}^k \alpha_i H'p_i,$$

и для собственных функций, соответствующих неконсервативным собственным значениям  $E$  (т. е. таким  $E$ , которые не являются в то же время собственными значениями  $H^{(l, 0)}$ ), получаем соотношение

$$\psi = \sum_{\nu=1}^l \frac{(\psi_{\nu}^{(0)}, f_k) \psi_{\nu}^{(0)}}{E_{\nu}^{(0)} - E} + \frac{f_k - \sum_{\nu=1}^l (\psi_{\nu}^{(0)}, f_k) \psi_{\nu}^{(0)}}{E_{l+1}^{(0)} - E}.$$

Подставляя сюда выражения для  $f_k$ , приходим к такой формуле:

$$\psi = - \sum_{i=1}^k \alpha_i \left\{ \sum_{\nu=1}^l \frac{(\psi_{\nu}^{(0)}, H'p_i) \psi_{\nu}^{(0)}}{E_{\nu}^{(0)} - E} + \frac{H'p_i - \sum_{\nu=1}^l (\psi_{\nu}^{(0)}, H'p_i) \psi_{\nu}^{(0)}}{E_{l+1}^{(0)} - E} \right\}.$$

Для того чтобы найти постоянные  $\alpha_i$ , нужно подставить это выражение для  $\psi$  в соотношения

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i (H' p_j, p_i) = (H' p_j, \psi) \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Таким образом, мы приходим к системе  $k$  однородных уравнений

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \left\{ (p_j, H' p_i) + \sum_{\nu=1}^l \frac{(\psi_{\nu}^{(0)}, H' p_i) (H' p_j, \psi_{\nu}^{(0)})}{E_{\nu}^{(0)} - E} + \frac{(H' p_j, H' p_j) - \sum_{\nu=1}^l (\psi_{\nu}^{(0)}, H' p_i) (H' p_j, \psi_{\nu}^{(0)})}{E_{l+1}^{(0)} - E} \right\} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Для того чтобы эта система имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы  $E$  удовлетворяло уравнению

$$\det \left\{ (p_j, H' p_i) + \sum_{\nu=1}^l \frac{(\psi_{\nu}^{(0)}, H' p_i) (H' p_j, \psi_{\nu}^{(0)})}{E_{\nu}^{(0)} - E} + \frac{(H' p_j, H' p_j) - \sum_{\nu=1}^l (\psi_{\nu}^{(0)}, H' p_i) (H' p_j, \psi_{\nu}^{(0)})}{E_{l+1}^{(0)} - E} \right\} = 0,$$

которое мы будем называть *характеристическим*.

Сначала получим нижнюю границу с помощью оператора  $H^{(1, 1)}$ , выбирая в качестве  $p_1$  одну из следующих двух функций:

$$p_1 = \frac{\alpha^3}{\pi} e^{-\alpha (r_1 + r_2)}$$

и

$$p_1 = \frac{\beta^3}{\pi} r_{12} e^{-\beta (r_1 + r_2)},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — некоторые постоянные.

В первом случае получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\frac{5}{8} \alpha + \frac{5^2 \times 2^{10} [\alpha^6 / (2 + \alpha)^{10}]}{-4 - E} + \frac{\frac{2}{3} \alpha^2 - 5^2 \times 2^{10} [\alpha^6 / (2 + \alpha)^{10}]}{-5/2 - E} = 0.$$

Наименьший корень этого уравнения, дающий искомую оценку для  $E_1$ , будет максимальным, если значения  $\alpha$  близки к 1,5. При  $\alpha = 1,5$  имеем

$$-3,29 \leq E_1, \quad -2,5 \leq E_i \quad (i = 2, 3, \dots).$$

Взяв в качестве  $p_1$  вторую функцию, получим следующее характеристическое уравнение:

$$0 = \frac{35}{16\beta} + \frac{2^{18} [\beta^6/(2+\beta)^{12}]}{-4-E} + \frac{1-2^{18} [\beta^6/(2+\beta)^{12}]}{-5/2-E}.$$

Наилучшая нижняя граница получается при значениях  $\beta$ , близких к  $\sqrt{5}$ . При  $\beta = \sqrt{5}$  имеем

$$-3,03 \leq E_1, \quad -2,50 \leq E_i \quad (i = 2, 3, \dots).$$

Теперь мы получим более точные оценки, рассматривая усеченный гамильтониан

$$H^{(2,2)} = H^{(2,0)} + H'P^{(2)},$$

где  $P^{(2)}$  — проектор на линейную оболочку двух векторов  $p_1$  и  $p_2$ , которые мы только что определили, а именно

$$p_1 = \frac{(1,5)^3}{\pi} \exp[-1,5(r_1 + r_2)],$$

$$p_2 = \left[ \frac{5\sqrt{5}}{\pi} \right] r_{12} \exp[-\sqrt{5}(r_1 + r_2)].$$

Тогда наше характеристическое уравнение (с определителем второго порядка) принимает такой вид:

$$\begin{vmatrix} 0,937500000 + \frac{1,057078102}{-4-E} + & 0,888014669 + \frac{1,018593688}{-4-E} + \\ + \frac{0,00293802}{-\frac{5}{2}-E} + \frac{0,439983816}{-20/9-E} & + \frac{0,004393440}{-\frac{5}{2}-E} + \frac{0,013788862}{-20/9-E} \\ 0,888014669 + \frac{1,018593688}{-4-E} + & 0,978279740 + \frac{0,981510355}{-4-E} + \\ + \frac{0,004393440}{-\frac{5}{2}-E} + \frac{0,013788862}{-20/9-E} & + \frac{0,006569699}{-\frac{5}{2}-E} + \frac{0,011919946}{-20/9-E} \end{vmatrix} = 0,$$

наименьший корень которого дает оценку  $-3,0008 \leq E_1$ . Отметим, что эта задача второго порядка уже дает лучшую оценку по сравнению с оценкой  $-3,0637 \leq E_1$ , полученной методом специального выбора с помощью задачи третьего порядка в гл. XII, п. 13.

**9. Приложение обобщенного метода специального выбора к ангармоническому осциллятору.** В обобщенном методе специального выбора (гл. XII, п. 14) предполагается, что координатные

функции  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , можно выбрать так, чтобы

$$H'p_i = \sum_{\nu=1}^N \beta_{i\nu} \psi_{\nu}^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Другими словами, для  $k$ -й промежуточной задачи  $k$  функций  $p_i$  можно выбрать так, чтобы функции  $H'p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , выражались в виде линейной комбинации конечного числа  $N$  собственных векторов  $H^{(0)}$ ; число  $N$ , разумеется, зависит от  $k$ .

Как доказано в работе Безли и Фокса [1], гамильтониан  $H^{(k)}$  в этом случае принимает вид

$$H^{(k)}\psi = H^{(0)}\psi + \sum_{i,j=1}^k \sum_{\nu,\mu=1}^N (\psi_{\nu}^{(0)}, \psi) \beta_{i\nu} b_{ij} \beta_{j\mu} \psi_{\mu}^{(0)}.$$

Используя это представление, нетрудно найти собственные значения и собственные функции  $H^{(k)}$ . Действительно, если  $\psi$  такова, что  $(\psi_{\nu}^{(0)}, \psi) = 0$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, N$ , то  $H^{(k)}\psi = H^{(0)}\psi$ , откуда следует, что любая собственная функция  $\psi^{(0)}$  оператора  $H^{(0)}$ , кото-

рая не входит в линейные комбинации  $H'p_i = \sum_{\nu=1}^N \beta_{i\nu} \psi_{\nu}^{(0)}$ , является собственной функцией оператора  $H^{(k)}$  с тем же собственным значением  $E_{\sigma}^{(0)}$ . Остальные собственные функции должны иметь

вид  $\psi = \sum_{\nu=1}^N \gamma_{\nu} \psi_{\nu}^{(0)}$ . Подставляя эту формулу для  $\psi$  в выражение для  $H^{(k)}\psi$ , приходим к эквивалентной алгебраической задаче на собственные значения:

$$\sum_{\nu=1}^N \gamma_{\nu} \left\{ \sum_{i,j=1}^k \beta_{i\nu} b_{ij} \beta_{j\mu} + (E_{\nu}^{(0)} - E) \delta_{\nu\mu} \right\} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, N).$$

Займемся теперь задачей об ангармоническом осцилляторе (см. Безли и Фокс [1]), т. е. рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + x^2\psi + \varepsilon x^4\psi = E\psi,$$

где  $\varepsilon > 0$ , а  $\psi$  — квадратично интегрируемая функция на бесконечном интервале  $-\infty < x < +\infty$ . Для упрощения обозначений мы ограничимся рассмотрением только четных функций.

Положим

$$H^{(0)}\psi = -\frac{d^2\psi}{dx^2} + x^2\psi$$

и  $H'\psi = \varepsilon x^4\psi$ ; тогда четными решениями уравнения  $H^{(0)}\psi = E\psi$  являются хорошо известные собственные функции линейного

осциллятора

$$\psi_i^{(0)} = C_i \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_{2i-2}(x) \quad (i = 1, 2, \dots),$$

где  $C_i = 2^{1-i} [(2i-2)!]^{-1/2} \pi^{-1/4}$ , а  $H_n(x)$  есть  $n$ -й полином Эрмита (см., например, Морс и Фешбах [1]). Соответствующими собственными значениями являются

$$E_i^{(0)} = 4i - 3 \quad (i = 1, 2, \dots),$$

так что мы имеем грубую оценку снизу

$$E_i \geq 4i - 3 \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Принимая во внимание рекуррентные соотношения для полиномов Эрмита (см., например, Морс и Фешбах [1], т. 1, стр. 729), естественно воспользоваться обобщенным методом специального выбора:

$$H' p_i = \sum_{\nu=1}^N \beta_{i\nu} \psi_{\nu}^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

где функции  $p_i$  и постоянные  $N$  и  $\beta_{i\nu}$  выбираются надлежащим образом.

Положим  $p_i = \psi_i^{(0)}$ ; тогда, используя рекуррентные соотношения, получаем

$$\begin{aligned} x^4 \psi_i^{(0)} &= (2i-2)(2i-3)(2i-4)(2i-5) \frac{C_i}{C_{i-2}} \psi_{i-2}^{(0)} + \\ &+ (2i-2)(2i-3)(4i-5) \frac{C_i}{C_{i-1}} \psi_{i-1}^{(0)} + \\ &+ \frac{3}{4} (8i^2 - 12i + 5) \psi_i^{(0)} + \frac{1}{4} (4i-1) \frac{C_i}{C_{i+1}} \psi_{i+1}^{(0)} + \\ &+ \frac{1}{16} \frac{C_i}{C_{i+2}} \psi_{i+2}^{(0)}, \end{aligned}$$

так что  $N = k + 2$ . Поскольку эта формула содержит пять слагаемых, то при  $k = 3$  матрица  $\|\beta_{i\nu}\|$  будет пятого порядка, а именно

$$\|\beta_{i\nu}\| = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 3 & 6\sqrt{2} & 2\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 6\sqrt{2} & 39 & 28\sqrt{3} & 6\sqrt{10} & 0 \\ 2\sqrt{6} & 28\sqrt{3} & 123 & 22\sqrt{30} & 4\sqrt{105} \\ 0 & 6\sqrt{10} & 22\sqrt{30} & 255 & 60\sqrt{14} \\ 0 & 0 & 4\sqrt{105} & 60\sqrt{14} & 435 \end{vmatrix}.$$



При  $k = 3$  приходим к следующей алгебраической системе уравнений:

$$\sum_{\nu=1}^5 \gamma_{\nu} (4\nu - 3 - E) \delta_{\nu\mu} + \varepsilon t_{\nu\mu} = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3, 4, 5),$$

где

$$\|t_{\nu\mu}\| = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 3 & 6\sqrt{2} & 2\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 6\sqrt{2} & 39 & 28\sqrt{3} & 6\sqrt{10} & 0 \\ 2\sqrt{6} & 28\sqrt{3} & 123 & 22\sqrt{30} & 4\sqrt{105} \\ 0 & 6\sqrt{10} & 22\sqrt{30} & 192 & 24\sqrt{14} \\ 0 & 0 & 4\sqrt{105} & 24\sqrt{14} & 48 \end{vmatrix}.$$

Результаты вычислений для первых пяти собственных значений приведены в табл. VI.

Таблица VI

НИЖНИЕ ГРАНИЦЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ АНГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

$\varepsilon$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$
0,0	1,000000	5,000000	9,000000	13,000000	17,000000
0,1	1,065278	5,746596	10,95333	16,17279	21,00000*
0,2	1,118255	6,260404	12,22585	16,90845	21,00000*
0,3	1,163987	6,655885	13,25990	17,64313	21,00000*
0,4	1,204738	6,979830	14,03037	18,63119	21,00000*
0,5	1,241746	7,258083	14,55430	19,88068	21,00000*
0,6	1,275773	7,505763	14,90630	21,00000* 1)	21,31832
0,7	1,307324	7,732038	15,15526	21,00000*	22,87292
0,8	1,336760	7,942661	15,34432	21,00000*	24,49895
0,9	1,364349	8,141353	15,49781	21,00000*	25,00000*
1,0	1,390301	8,330586	15,62953	21,00000*	25,00000*

1) Значения, помеченные звездочками, являются консервативными

**10. Обобщения рассмотренных методов.** Методы, рассмотренные в последних двух главах, существенно зависели от того, как устроена последовательность надлежащим образом подобранных «операторов сравнения»  $H^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Здесь мы обсудим в меру наших возможностей общие свойства этих операторов (см. Безли и Фокс [8]).

Будем предполагать, что самосопряженный оператор  $H$  с областью определения  $D_H$ , действующий в гильбертовом пространстве  $\mathfrak{H}$  со скалярным произведением  $(u, v)$ , ограничен снизу, а его спектр в нижней части состоит из дискретных собственных

значений конечной кратности. Будем считать, что собственные значения  $\lambda_\nu$ , которые мы хотим оценить снизу, расположены в порядке возрастания, так что

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_*,$$

где  $\lambda_*$  — первая предельная точка спектра, которая может быть равна  $\infty$ . Любой оператор сравнения  $\tilde{H}$  должен удовлетворять следующим двум требованиям: во-первых, он должен быть меньше  $H$ ; тогда его собственные значения  $\tilde{\lambda}_\nu$  и первая предельная точка  $\tilde{\lambda}_*$  удовлетворяют неравенствам

$$\tilde{\lambda}_\nu \leq \lambda_\nu, \quad \tilde{\lambda}_* \leq \lambda_* \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

и, во-вторых, его собственные значения  $\tilde{\lambda}_\nu$  должны легко определяться.

Чтобы построить такие операторы сравнения, необходимо располагать дополнительной информацией, которая обычно заключается в том, что мы знаем точное решение задачи на собственные значения для некоторого самосопряженного оператора  $H^{(0)}$ , который меньше  $H$ . Тогда  $H^{(0)}$  можно рассматривать как оператор сравнения, собственные значения которого дают грубые нижние оценки для собственных значений  $H$ . В дальнейшем нам будет удобно предположить, что  $H^{(0)}$  строго меньше  $H$ , так что  $H = H^{(0)} + H'$ , где  $H' > 0$ .

Мы будем рассматривать здесь операторы сравнения вида  $\tilde{H} = B - (I - P^*) C (I - P)$ , где  $B$  и  $C$  — симметрические операторы, причем  $B \leq H$ ,  $C \geq 0$ , оператор  $P$  конечного ранга (т. е. область его значений — конечномерное подпространство), а  $P^*$  — сопряженный к  $P$ . Кроме того,  $B$ ,  $C$  и  $P$  должны быть такими, чтобы оператор

$$\tilde{H} = B - (I - P^*) C (I - P)$$

обладал двумя следующими свойствами: 1) должно существовать конечномерное подпространство  $\mathfrak{M}$ , которое *приводит*  $\tilde{H}$  (т. е.  $\mathfrak{M}$  является инвариантным подпространством  $\tilde{H}$ ); 2) в ортогональном дополнении к  $\mathfrak{M}$  должны быть известными собственные элементы  $\tilde{H}$ . Ясно, что операторы  $\tilde{H}$  указанного вида меньше  $H$  и что задача на собственные значения для таких операторов, решения которой дают требуемую оценку снизу  $\tilde{\lambda}_\nu$ , будет эквивалентна конечномерной задаче на собственные значения.

Свойства операторов проектирования подсказывает нам, что в качестве  $P$  нужно брать идемпотентный оператор, т. е. оператор, удовлетворяющий условию  $P^2 = P$ .

Такой оператор  $P$  удобно задавать с помощью двух подпространств, а именно  $n$ -мерного подпространства  $\mathfrak{F}$ , являющегося областью значений  $P$ , и  $n$ -мерного подпространства  $\mathfrak{Q}$ , ортогонального области значений  $I - P$ .

В частности, если  $P$  — ортогональный проектор на подпространство  $\mathfrak{F}$ , то оба  $n$ -мерных подпространства  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{Q}$  совпадают; верно и обратное утверждение. Если же в качестве  $\mathfrak{Q}$  взять  $C\mathfrak{F}$ , где  $C$  — положительно определенный на  $\mathfrak{F}$  оператор, то в этом случае  $P$  является ортогональным проектором на  $\mathfrak{F}$  по отношению к скалярному произведению  $[u, v] = (Cu, v)$ . В общем случае оператор  $P$  полностью задается подпространствами  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{Q}$ , если определитель  $|(p_i, q_j)|$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , не равен нулю, где  $\{p_i\}$  — базис в  $\mathfrak{F}$ , а  $\{q_i\}$  — базис в  $\mathfrak{Q}$ .

Таким образом, с помощью введенных выше понятий мы получаем общее описание проекторов, ортогональных по отношению к другому скалярному произведению, например  $(Hu, v)$  с положительно определенным  $H$  (см. п. 2 и 3). В соответствии с часто используемым нами фактом, состоящим в том, что норма проекции фиксированного вектора монотонно возрастает при увеличении размерности подпространства, на которое он проектируется, можно утверждать, что если  $\mathfrak{Q} = C\mathfrak{F}$ , то оператор  $CP$  симметричен и монотонно возрастает при расширении  $\mathfrak{F}$ .

Далее, поскольку  $CP$  симметричен, для всех  $u$  и  $v$  имеют место соотношения

$$\begin{aligned} (P^*CPu, v) &= (CPu, Pv) = (u, CPPv) = \\ &= (u, CPv) = (Cu, Pv) = (P^*Cu, v), \end{aligned}$$

так что  $P^*CP = P^*C$ , и, следовательно,  $P^*C(I - P) = 0$ ,  $(I - P^*)C(I - P) = C(I - P)$ . Таким образом, общий оператор сравнения  $B - (I - P^*)C(I - P)$  можно записать в более простом виде  $B - C(I - P) = B - C + CP$ .

После этих общих замечаний об операторах  $P$  рассмотрим несколько частных случаев операторов  $\tilde{H} = B - C + CP$  и покажем, что, выбирая надлежащим образом  $B$ ,  $C$  и  $P$ , можно получить все операторы, с которыми мы имели дело до сих пор. Так, если положить  $B = H$ ,  $C = H'$ , в качестве  $\mathfrak{F}$  взять конечномерное подпространство области определения  $H'$ , а в качестве  $\mathfrak{Q}$  взять  $H'\mathfrak{F}$ , то  $\tilde{H}$  можно представить в виде

$$\tilde{H} = H - H' + H'P$$

или, положив  $H - H' = H^{(0)}$ , как в гл. XII, п. 2, в виде

$$\tilde{H} = H^{(0)} + H'P.$$

Такой оператор  $\tilde{H}$  будет удовлетворять требованиям, предъявляемым к операторам сравнения, если мы сможем найти подпространство  $\mathfrak{F}$ , которое приводит  $\tilde{H}$ . Возьмем в качестве  $\mathfrak{F}$  такое подпространство, чтобы при некотором целом  $l$

$$H'\mathfrak{F} \subset E_l^{(0)}\mathfrak{F},$$

где  $E_l^{(0)} = E^{(0)}(\lambda_l^{(0)})$  — проектор на линейную оболочку собственных векторов, отвечающих всем собственным значениям  $\lambda$  оператора  $H^{(0)}$ , таким, что  $\lambda \ll \lambda_l^{(0)}$ . Тогда, как мы видели в п. 1., подпространство  $\mathfrak{M} = E_{\lambda_l}^{(0)}\mathfrak{F}$  приводит  $\tilde{H}$  и в ортогональном дополнении к  $\mathfrak{M}$  оператор  $\tilde{H}$  совпадает с известным оператором  $H^{(0)}$ .

В качестве второго примера покажем, каким образом операторы, используемые в методе усечения, рассмотренном в п. 1, могут быть получены из оператора  $B - C + CP$ . Теперь мы положим  $B = H^{(0)}$ ,  $C = H^{(0)} - \lambda_{l+1}^{(0)}I$ , а в качестве подпространств  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{D}$  возьмем  $E_l^{(0)}\mathfrak{F}$ . Таким образом,  $P = E_l^{(0)}$ , и, значит,  $H^{(0)} - \lambda_{l+1}^{(0)}I$  положительно определен на области значений оператора  $I - P$ . Следовательно,

$$H^{(0)} \geq \tilde{H} = H^{(l, 0)} = H^{(0)}E_l^{(0)} + \lambda_{l+1}^{(0)}(I - E_l^{(0)}).$$

Тогда каждый оператор  $H^{(l, 0)}$  будет ограниченным, симметричным и будет иметь такие же  $l$  первых собственных значений и собственных векторов, как и  $H^{(0)}$ , а остальной спектр  $H^{(l, 0)}$  будет состоять из собственного значения  $\lambda_{l+1}^{(0)}$  бесконечной кратности, как и требуется в методе усечения.

Другие частные случаи оператора  $\tilde{H} = B - (I - P^*)C(I - P)$ , с помощью которых можно получать методы, рассмотренные в этой книге, а также метод Вайнбергера и другие методы, читатель найдет в работе Безли и Фокса [8].

## ЗАДАЧИ ПЕРВОГО ТИПА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

**1. Метод Фельта построения задач первого типа.** В начале гл. XII были определены промежуточные задачи первого типа как задачи, которые строятся с помощью сужения области определения базового оператора. Другими словами, мы строили базовую задачу, ослабляя условия исходной задачи, а затем в промежуточных задачах постепенно восстанавливали исходные условия. Новая отличительная черта промежуточных задач первого типа, рассматриваемых в этой главе, состоит в том, что в отличие от прежних задач, где предписанные условия являлись граничными, в задачах этой главы, введенных впервые Фельтом [1], предписанные условия задаются дифференциальными уравнениями в частных производных, которым должны удовлетворять допустимые функции во всей области определения; такие условия часто называют дополнительными условиями.

**2. Пример из гидродинамики.** В качестве иллюстрации рассмотрим произвольное течение несжимаемой жидкости в ограниченной трехмерной области  $G$  произвольной формы (будем, однако, предполагать, что поверхность, ограничивающая  $G$ , состоит из конечного числа гладких кусков); обозначим через  $d$  диаметр области  $G$ , т. е. верхнюю грань расстояний между точками  $G$ . Серрин [1] доказал, что течение будет устойчивым (т. е. возникающие возмущения будут затухать), если число Рейнольдса  $Re = Vd/\nu$  меньше квадратного корня из некоторой положительной постоянной  $\alpha$ , которую мы хотим найти. Здесь  $V$  — максимальное значение скорости в  $G$ , а  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости; читатель, интересующийся физическим смыслом числа Рейнольдса (отношение сил инерции к силам вязкости), может обратиться к книгам Джуса [1] и Ландау и Лившица [1]\*.

**3. Постановка задачи.** Даже в простейших случаях невозможно вычислить  $\alpha$  точно, и Серрин пользовался грубой оценкой снизу,

не выясняя, сколь точна эта оценка. Используя метод промежуточных задач Вайнштейна, Фельту удалось получить довольно близкие верхнюю и нижнюю границы для  $\alpha$ , а именно

$$6\pi^2 \leq \alpha \leq 6,33\pi^2.$$

В первой работе Серрина [1] по этому вопросу показано, что  $\alpha$  можно определить как точную нижнюю границу функционала

$$Q(G, u) = \int_G u_{i,k} u_{i,k} d\tau / \int_G u_i u_i d\tau$$

при дополнительном условии  $\operatorname{div} u = 0$ .

Поясним обозначения. Вектор  $u = (u_1, u_2, u_3)$  — это скорость возмущения течения, которое налагается на стационарное; в частности,  $u$  обращается на границе в нуль. Каждая компонента  $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$  — дифференцируемая функция декартовых координат  $x_i$ . Элемент объема  $d\tau$  равен  $dx_1 dx_2 dx_3$ . Символ  $u_{i,k}$  обозначает  $\partial u_i / \partial x_k$ . Дважды повторяющийся индекс означает, что суммирование ведется от 1 до 3. Таким образом,

$$u_i u_i = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,$$

и

$$u_{i,k} u_{i,k} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2.$$

Наконец,

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

Итак, мы можем написать

$$\alpha = \inf \{Q(G, u), \operatorname{div} u = 0\},$$

где инфимум берется по всем областям  $G$ , которые содержатся в единичном кубе, и по всем непрерывно дифференцируемым функциям  $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$  при условиях  $\operatorname{div} u = 0$  в  $G$ ,  $u = 0$  на границе  $G$ .

**4. Базовая задача.** В гл. VII, рассматривая метод Вайнштейна для задачи о зажатой пластине, мы построили подходящую базовую задачу, отбрасывая неудобное граничное условие  $\partial u / \partial n = 0$ . По аналогии мы построим сейчас базовую задачу, отбрасывая условие  $\operatorname{div} u = 0$ . С помощью этой задачи можно будет получить грубую оценку снизу для  $\alpha$  следующим образом. Для сокращения

обозначений положим

$$A_i = \int_G \left\{ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \right)^2 \right\} d\tau,$$

$$B_i = \int_G (u_i)^2 d\tau \quad (i = 1, 2, 3).$$

Тогда

$$Q(G, u) = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{B_1 + B_2 + B_3}.$$

Пусть  $u_1, u_2, u_3$  — три произвольные функции. Обозначим через  $u_i$  ту из них, для которой значение  $Q_i = A_i/B_i$  будет наименьшим. Тогда, как легко видеть, при замене остальных двух функций нулями значение функционала может только уменьшиться. Таким образом, обозначая  $u_i(x_1, x_2, x_3)$  через  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ , мы можем сосредоточить внимание на нахождении минимума функционала

$$\int_G \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} d\tau / \int_G \varphi^2 d\tau.$$

Но, как мы видели при изучении колебаний мембраны (в гл. VII, п. 2, рассматривался двумерный случай, однако рассуждения переносятся без изменений и на трехмерный случай), минимум этого функционала равен наименьшему собственному значению оператора

$$-\Delta = - \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right).$$

Далее, совершенно очевидно, что в качестве  $G$  можно взять весь единичный куб, поскольку, если  $G'$  — некоторая меньшая область, а  $\varphi$  — минимизирующая функция на  $G'$ , мы можем получить то же значение функционала для большей области  $G$ , полагая  $\varphi = 0$  вне  $G'$ . Итак, рассмотрим в качестве  $G$  единичный куб

$$0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 1, \quad 0 \leq x_3 \leq 1.$$

Теперь можно провести рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых в гл. VI, п. 3, был найден спектр квадратной мембраны; в результате мы получим  $\lambda_1 = 3\pi^2$ .

Таким образом, базовая задача дает первую нижнюю границу для  $\alpha$ , а именно  $3\pi^2 \leq \alpha$ .

**5. Промежуточные задачи.** Теперь возникает вопрос, как построить промежуточные задачи. В первоначальном методе Вайнштейна мы строили базовую задачу, отбрасывая условие

$\partial u / \partial n = 0$  на границе, а затем строили промежуточные задачи, последовательно присоединяя условия

$$\int_G p_i(s) \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Аналогичную процедуру можно применить и здесь. Мы заменим условие  $\operatorname{div} u = 0$  в  $G$  условиями  $\int_G p_i \operatorname{div} u d\tau = 0$  для последовательности функций  $p_1(x_1, x_2, x_3), p_2(x_1, x_2, x_3), \dots$ . Поскольку  $u$  обращается на границе в нуль, то, интегрируя по частям, мы можем записать последнее условие в виде  $\int_G u \operatorname{grad} p d\tau = 0$ . Если в последнем выражении в качестве  $p(x_1, x_2, x_3)$  взять одну из функций  $p(x_1, x_2, x_3) \equiv x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), то наше условие принимает вид  $\int_G u_i d\tau = 0$ , где  $u_i$  есть  $i$ -я компонента вектора  $u = (u_1, u_2, u_3)$ . Но, как и раньше, мы имеем

$$\begin{aligned} \inf \{Q(G, u), \operatorname{div} u = 0\} &\geq \inf \left\{ Q(G, u), \int_G u_i d\tau = 0 \right\} \geq \\ &\geq \min \left\{ \int_G \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} d\tau / \int_G \varphi^2 d\tau, \int_G \varphi d\tau = 0 \right\}, \end{aligned}$$

так что по-прежнему можно рассматривать только одну функцию  $\varphi$ , а в качестве  $G$  взять весь единичный куб.

Таким образом, как и прежде, мы приходим к вариационной задаче — найти наименьшее собственное значение оператора  $-\Delta$ , но теперь уже при дополнительном условии  $\int_G \varphi d\tau = 0$ . Тогда,

используя стандартные рассуждения вариационного исчисления (см., например, Курант и Гильберт [1]), мы получаем, что существует такая постоянная  $c$  (так называемый *множитель Лагранжа*), что минимизирующая функция при данном дополнительном условии будет удовлетворять уравнению  $\Delta \varphi + \lambda \varphi = c$ .

Исследуем два случая  $c = 0$  и  $c \neq 0$ . Если  $c = 0$ , то искомое минимальное значение является собственным значением базовой задачи. Если мы возьмем первое собственное значение, то соответствующая собственная функция не будет удовлетворять дополнительному условию  $\int \varphi d\tau = 0$ , так как  $\varphi = \sin \pi x \sin \pi y \sin \pi z$  неотрицательна всюду в кубе  $0 \leq |x_i| \leq 1$  и потому  $\int \varphi d\tau > 0$ . Однако вторая собственная функция  $\sin 2\pi x_1 \sin \pi x_2 \sin \pi x_3$  уже



удовлетворяет этому условию; следовательно, если  $c = 0$ , то минимум функционала равен  $\lambda_2 = 6\pi^2$ .

Если же  $c \neq 0$ , то можно показать, что наименьшее значение, при котором уравнение  $\Delta\varphi + \lambda\varphi = c$  имеет решение, удовлетворяющее дополнительному условию  $\int \varphi ds = 0$ , больше  $\lambda_2$ . Действительно, если мы подставим общее решение

$$\varphi = \sum_{l, m, n=1} A_{lmn} \sin l\pi x_1 \sin m\pi x_2 \sin n\pi x_3$$

в уравнение  $\Delta\varphi + \lambda\varphi = c$ , то получим, что все коэффициенты  $A_{lmn}$  равны нулю, кроме тех, у которых все индексы  $l, m, n$  нечетные, и в этом случае

$$A_{lmn} = c \left( \frac{4}{\pi} \right)^3 \frac{1}{\lambda - (l^2 + m^2 + n^2) \pi^2} \frac{1}{lmn}.$$

Дополнительное условие  $\int \varphi d\tau = 0$  приводит к следующему уравнению для  $\lambda$ :

$$F(\lambda) = \sum_{l, m, n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - (l^2 + m^2 + n^2) \pi^2} \frac{1}{(lmn)^2} = 0 \quad (l, m, n - \text{нечетные}).$$

Очевидно, что  $\lambda > \lambda_1 = 3\pi^2$ , поскольку в противном случае слагаемые в последнем выражении были бы все отрицательными или бесконечными. Но в интервале  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2 = 6\pi^2$  каждое из этих слагаемых является монотонно убывающей функцией  $\lambda$ , а на конце интервала

$$F(\lambda_2) = F(6\pi^2) = \pi^{-2} \sum_{l, m, n=1}^{\infty} \frac{1}{6 - (l^2 + m^2 + n^2)} \frac{1}{(l m n)^2} \quad (l, m, n - \text{нечетные}).$$

Исследуя несколько первых слагаемых  $l = 1, m = 1, n = 1$ ;  $l = 3, m = 1, n = 1$ ;  $l = 1, m = 3, n = 1$  и т. д., видим, что последняя сумма положительна. Таким образом,  $F(\lambda)$  положительна на всем интервале, и, следовательно, наименьшее значение  $\lambda$ , при котором выполняется дополнительное условие, равно второму собственному значению  $\lambda_2 = 6\pi^2$ .

Итак, первая промежуточная задача дает оценку снизу  $6\pi^2 \leq \alpha$ , которая значительно улучшает оценку  $3\pi^2 \leq \alpha$ , полученную с помощью базовой задачи. В работе Фельта [1] верхняя граница  $6,33\pi^2 > \alpha$  вычисляется по методу Рэля — Ритца.

Вводя дальнейшие функции  $p_i(x)$  и соответствующие дополнительные условия  $\int p_i(x) \operatorname{div} u d\tau = 0$ , можно улучшить нижние

границы аналогично тому, как в первоначальном методе Вайнштейна мы получали улучшенные нижние границы, добавляя дальнейшие связи.

Аналогичные результаты Фельт (см. [1]) получил для некоторых двумерных областей, для которых вариационная задача сводится к задаче об изгибе стержня, а также для некоторых неограниченных областей.

**6. Обобщение задачи Фельта. Применение критерия Вайнштейна.** В работе Вайнштейна [10] рассмотренная выше задача при  $N = 2, 3$  решается в общем случае для  $N$ -мерного куба. В этой работе критерий Вайнштейна максимального увеличения собственных значений (гл. III) используется при нахождении минимума интеграла Дирихле

$$\mathcal{D}(u) = \int_S \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_N \quad (u=0 \text{ на } B)$$

по всем нормированным  $u$  при условии, что среднее значение  $u$  равно нулю, т. е.  $\int_S u dx = 0$ ; здесь через  $S$  обозначен  $N$ -мерный куб  $0 \leq x_i \leq \pi$ , а через  $B$  — его граница.

Условие  $\int_S u dx = 0$  означает, что  $u$  ортогональна функции  $p_1 = 1$ , которая не является первой собственной функцией базовой задачи

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad (u = 0 \text{ на } B).$$

Эта задача имеет следующие собственные функции:

$$u = \left( \frac{2}{\pi} \right)^{N/2} \sin \alpha_1 x_1 \sin \alpha_2 x_2 \dots \sin \alpha_N x_N,$$

отвечающие собственным значениям

$$\lambda = \sum_{k=1}^N \alpha_k^2,$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$  — любые целые положительные числа. Заметим, что  $\lambda_1 = 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2 = N$ , а  $\lambda_2 = 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2 + 2^2 = N + 3$ . Мы хотим выяснить, как повлияет введение условия ортогональности к функции  $p_1 = 1$  на первое собственное значение промежуточной задачи: не увеличится ли оно до второго собственного значения базовой задачи  $\lambda_2 = N + 3$ . Будет доказан интересный результат: максимальное увеличение будет иметь место при  $N = 1, 2, \dots, 8, 9$ , но не при  $N \geq 10$ .

Напомним (гл. IX, п. 5), что, согласно критерию Вайнштейна, для  $n - 1$  функций  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ , удовлетворяющих условию  $(p_i, p_k) = \delta_{ik}$ , необходимое и достаточное условие максимального увеличения состоит в том, чтобы знак  $W_k(\lambda_n - \varepsilon)$  совпадал с  $(-1)^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ , при достаточно малом положительном  $\varepsilon$ .

Поскольку в данном случае мы имеем дело только с одной функцией  $p_1 = 1$ , требуется найти знак определителя Вайнштейна первого порядка

$$W(\lambda) = (R_\lambda p_1, p_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(p_1, u_j)^2}{\lambda_j - \lambda}$$

в точке  $\lambda = \lambda_2 - \varepsilon$ . Впрочем достаточно рассмотреть  $W(\lambda_2)$ , так как  $W(\lambda)$  является монотонно возрастающей функцией  $\lambda$ , и поэтому из неравенства  $W(\lambda_2) \leq 0$  следует, что  $W(\lambda_2 - \varepsilon) < 0$ , а из неравенства  $W(\lambda_2) > 0$  следует, что  $W(\lambda_2 - \varepsilon) > 0$ .

Вычисляя скалярные произведения  $(p_1, u_j)$ , где  $p_1 = 1$ , а  $u_j$  есть  $j$ -я собственная функция базовой задачи (см. выше), мы приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} W(\lambda_2) &= W(N+3) = \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^N \sum_{h_1, \dots, h_N=0}^{\infty} \frac{1}{(2h_1+1)^2 \dots (2h_N+1)^2 [(2h_1+1)^2 + \dots + (2h_N+1)^2 - N - 3]}, \end{aligned}$$

$N = 1, 2, \dots$  Упомянутый выше результат относительно знака  $W(N+3)$  был получен Дж. К. Одсоном (см. Вайнштейн [10]) с помощью вычислений, которые проводятся по следующей схеме.

Положим

$$\begin{aligned} f(h_1, h_2, \dots, h_N) &= \\ &= \frac{1}{(2h_1+1)^2 \dots (2h_N+1)^2 [(2h_1+1)^2 + \dots + (2h_N+1)^2 - N - 3]}. \end{aligned}$$

Тогда формулу для  $W(\lambda_2)$  можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2}\right)^N W(N+3) &= \sum_{h_1, \dots, h_N=0}^{\infty} f(h_1, \dots, h_N) = \\ &= -\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} \sum_{h_1, \dots, h_k=1}^{\infty} f(h_1, \dots, h_k, 0, 0 \dots 0). \end{aligned}$$

При  $k = 1$  мы имеем следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \sum_{h_1=1}^4 f(h_1, 0, \dots, 0) + \sum_{h=5}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)^4} &< \sum_{h_1=1}^{\infty} f(h_1, 0, \dots, 0) < \\ &< \sum_{h_1=1}^4 f(h_1, 0, \dots, 0) + \sum_{h=5}^{\infty} \frac{1}{(2h)^4}; \end{aligned}$$

при  $k = 2, 3, 4$  имеют место аналогичные оценки, но значительно более громоздкие. Наконец, при  $k \geq 5$

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{h_1, \dots, h_k=1}^{\infty} f(h_1, \dots, h_k, 0, \dots, 0) &< \\ &< \left[ \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)^4} \right] \left[ \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)^2} \right]^{k-1}. \end{aligned}$$

Используя эти неравенства, а также известные значения чисел Бернулли (см., например, Дейвис [1]), можно показать, что  $W(9+3) < 0$ , а  $W(10+3) > 0$ . Таким образом, первое собственное значение промежуточной задачи равно  $\lambda_2$  (второму собственному значению базовой задачи) при  $1 \leq N \leq 9$  и меньше, чем  $\lambda_2$ , при  $N \geq 10$ . Представляется, что получить этот результат, не используя критерий Вайнштейна, очень трудно.

## ЕДИНАЯ ТРАКТОВКА ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЗАДАЧ

**1. Единая трактовка Вайнштейна промежуточных задач.** Эта последняя глава посвящена недавним, еще неопубликованным исследованиям Вайнштейна, в которых промежуточные задачи первого и второго типов рассматриваются с единой точки зрения. Цель настоящей главы — показать, как с помощью общей процедуры можно получить характеристическое уравнение как для консервативных, так и неконсервативных собственных значений.

**2. Консервативные собственные значения промежуточных задач первого типа.** В гл. IX рассматривались неконсервативные собственные значения в терминах теории операторов в гильбертовом пространстве. Что касается консервативных собственных значений, то мы ограничились лишь результатами Вайнштейна (гл. VII), не привлекая понятия гильбертова пространства. Теперь же мы рассмотрим консервативные собственные значения в терминах операторов, охватывая при этом и неконсервативный случай, поскольку можно считать, что кратность неконсервативного собственного значения  $\lambda$  в спектре базовой задачи равна нулю.

В  $m$ -й промежуточной задаче мы имеем  $m$  функций связи  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , которые должны быть линейно независимыми, но не обязательно ортонормальными, т. е. мы не предполагаем, что  $(p_i, p_k) = \delta_{ik}$ ,  $i, k = 1, 2, \dots, m$ . Пусть  $\lambda^{(0)}$  обозначает собственное значение кратности  $r$  известного оператора  $H^{(0)}$  с соответствующим собственным подпространством  $\{u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r)}\}$ . Мы хотим получить критерий, позволяющий установить, будет ли  $\lambda^{(0)}$  собственным значением  $m$ -го промежуточного оператора  $H^{(m)}$ , а если будет, то какой кратности и с какими собственными функциями. Ответ на этот вопрос дают недавние исследования Вайнштейна, которые мы излагаем ниже.

Из определения  $H^{(m)}$  (гл. II, п. 4), а именно  $H^{(m)} = P^{(m)}H^{(0)}$ , где  $P^{(m)}$  — проектор на  $\mathfrak{M}^\perp = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}^\perp$ , причем область определения  $H^{(m)}$  содержится в  $\mathfrak{M}^\perp$ , следует, что если

$\lambda = \lambda^{(0)}$  является собственным значением  $H^{(m)}$ , то

$$H^{(m)}u - \lambda u = P^{(m)}H^{(0)}u - \lambda P^{(m)}u = P^{(m)}(H^{(0)}u - \lambda u) = 0,$$

поскольку  $u \in \mathfrak{M}^\perp$  и, значит,  $u = P^{(m)}u$ . Другими словами,  $H^{(0)}u - \lambda u \in \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ , так что

$$H^{(0)}u - \lambda u = \sum_{i=1}^m a_i p_i.$$

Тогда в силу того, что  $u \in \mathfrak{M}^\perp$ , мы получаем соотношение

$$(H^{(0)}u, p_k) = \sum_{i=1}^m a_i (p_i, p_k)$$

или

$$a_i = \sum_{k=1}^m b_{ik} (H^{(0)}u, p_k) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

где матрица  $\|b_{ik}\|$  является обратной к матрице Грама  $\|(p_i, p_k)\|$ .

Далее, собственное подпространство  $\{u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r)}\}$ , очевидно, является инвариантным подпространством  $H^{(0)}$ ; другими словами, для любой функции  $v$  соотношение  $H^{(0)}v \in \{u^{(1)}, \dots, u^{(r)}\}$  имеет место тогда и только тогда, когда  $v \in \{u^{(1)}, \dots, u^{(r)}\}$ . Значит, для произвольного  $u = v + w$ , где  $v \in \{u^{(1)}, \dots, u^{(r)}\}$ , мы будем иметь, что

$$H^{(0)}u - \lambda u = H^{(0)}v - \lambda v$$

принадлежит  $\{u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r)}\}^\perp$ . Таким образом, для того чтобы имело место равенство

$$H^{(1)}u - \lambda^{(0)}u = \sum_{i=1}^m a_i p_i,$$

необходимо, чтобы

$$\sum_{i=1}^m a_i (p_i, u^{(h)}) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, r),$$

что дает  $r$  линейных уравнений для  $m$  постоянных  $a_1, a_2, \dots, a_m$ .

С другой стороны, если вектор  $u \in \{u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r)}\}^\perp$ , то к нему можно применить резольвенту  $(H^{(0)} - \lambda I)^{-1}$ . В результате

мы получим

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^m a_i p_i, u_j \right) \frac{1}{\lambda_j - \lambda^{(0)}} u_j,$$

где  $u_j$  — собственные векторы  $H^{(0)}$ , а штрих над знаком суммы означает, что слагаемые, соответствующие собственным векторам  $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r)}$ , опускаются; другими словами,  $\lambda_j \neq \lambda^{(0)}$ . Принимая во внимание тот факт, что равенство  $(H^0 - \lambda^{(0)}I)u = 0$  влечет за собой соотношение  $u \in \{u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r)}\}$ , мы можем заключить, что если  $u$  удовлетворяет равенству

$$(H^{(0)} - \lambda^{(0)}I)u = \sum_{i=1}^m a_i p_i,$$

то

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^m a_i p_i, u_j \right) \frac{1}{\lambda_j - \lambda^{(0)}} u_j + \lambda^{(0)} \sum_{h=1}^r c_h u^{(h)},$$

где  $c_h$  — неопределенные постоянные,  $h = 1, 2, \dots, r$ .

Из этого выражения для  $u$  мы получаем, что

$$(H^{(0)}u, p_k) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^m (a_i p_i, u_j) \lambda_j (p_k, u_j)}{\lambda_j - \lambda^{(0)}} + \lambda^{(0)} \sum_{h=1}^r c_h (u^{(h)}, p_k)$$

при  $k = 1, 2, \dots, m$ . Кроме того, из равенства  $H^{(0)}u - \lambda^{(0)}u = \sum_{i=1}^m a_i p_i$  следует, что

$$(H^{(0)}u, p_k) = \sum_{i=1}^m (p_i, p_k) a_i + \lambda^{(0)} (u, p_k) = \sum_{i=1}^m (p_i, p_k) a_i,$$

поскольку  $u$ , являясь собственным вектором оператора  $H^{(m)}$ , ортогонален  $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ . Отсюда в силу равенства Парсеваля (гл. I, п. 5) мы имеем

$$(H^0 u, p_k) = \sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=1}^{\infty} (p_i, u_j) (p_k, u_j).$$

Сравнивая эти два выражения для  $(H^{(0)}u, p_k)$ , получаем следующие  $m$  линейных уравнений для  $m+r$  постоянных  $a_i, c_h$ :

$$\sum_{i=1}^m a_i \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(p_i, u_j)(p_k, u_j) \lambda_j - (\lambda_j - \lambda^{(0)})(p_i, u_j)(p_k, u_j)}{\lambda_j - \lambda^{(0)}} - \sum_{h=1}^r (p_i, u^{(h)})(p_k, u^{(h)}) \right\} + \lambda^{(0)} \sum_{h=1}^r c_h (u^{(h)}, p_k) = 0,$$

которые с учетом полученных ранее  $r$  уравнений  $\sum_{i=1}^m a_i (p_i, u^{(h)}) = 0$  можно записать в упрощенном виде

$$\lambda^{(0)} \left[ \sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(p_i, u_j)(p_k, u_j)}{\lambda_j - \lambda^{(0)}} + \sum_{h=1}^r c_h (u^{(h)}, p_k) \right] = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Итак, мы получили систему  $m+r$  уравнений с  $m+r$  неизвестными  $a_i, c_h$ , которые одновременно не могут равняться нулю. Поскольку определитель этой системы не должен обращаться в нуль, мы получили новую форму фундаментального уравнения Вайнштейна, а именно:

$$D = D(\lambda^{(0)}) =$$

	$a_1 \dots a_m$	$c_1 \dots c_r$
$m$	$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(p_i, u_j)(p_k, u_j)}{\lambda_j - \lambda^{(0)}} = (R'_{\lambda^{(0)}} p_i, p_k)$	$(p_1, u^{(1)}), \dots, (p_1, u^{(r)})$ $(p_2, u^{(1)}), \dots, (p_2, u^{(r)})$ $\dots$ $(p_m, u^{(1)}), \dots, (p_m, u^{(r)})$
$r$	$(p_1, u^{(1)}), (p_2, u^{(1)}), \dots, (p_m, u^{(1)})$ $\dots$ $(p_1, u^{(r)}), (p_2, u^{(r)}), \dots, (p_m, u^{(r)})$	0

= 0.

Исследуем отдельно три случая  $m > r, m = r, m < r$ , чтобы посмотреть, как результаты, полученные с помощью нового определителя, согласуются с прежними результатами, сформулированными Вайнштейном.

В случае  $m > r$ , не теряя общности, можно, очевидно, предположить, что в последовательности  $p_1, p_2, \dots, p_r, p_{r+1}, \dots, p_m$  последние  $m-r$  функций  $p_{r+1}, p_{r+2}, \dots, p_m$  ортогональны собственному подпространству  $\{u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r)}\}$ .



Тогда независимо от выбора  $p_1, p_2, \dots, p_r$  определитель  $D(\lambda^{(0)})$  записывается в следующем виде:

	$r$	$m-r$	$1$	
$r$	$(R'p_1, p_1), \dots, (R'p_r, p_1)$ $(R'p_1, p_r), \dots, (R'p_r, p_r)$	$(R'p_{r+1}, p_1), \dots, (R'p_m, p_1)$ $(R'p_{r+1}, p_r), \dots, (R'p_m, p_r)$	$(p_1, u^{(1)}), \dots, (p_1, u^{(r)})$ $(p_r, u^{(1)}), \dots, (p_r, u^{(r)})$	
$m-r$	$(R'p_1, p_{r+1}), \dots, (R'p_r, p_{r+1})$ $(R'p_1, p_m), \dots, (R'p_r, p_m)$	$(R'p_{r+1}, p_{r+1}), \dots, (R'p_m, p_{r+1})$ $\det=W$ $(R'p_{r+1}, p_m), \dots, (R'p_m, p_m)$	$0$	$=0$
$r$	$(p_1, u^{(1)}), \dots, (p_r, u^{(1)})$ $(p_1, u^{(r)}), \dots, (p_r, u^{(r)})$	$0$	$0$	

При этом следует отметить, что определитель порядка  $m-r$ , стоящий в центре, совпадает с определителем  $W$ , который рассматривался ранее Вайнштейном в случае  $m > r$ .

Предположим теперь, что первые  $r$  функций  $p_1, p_2, \dots, p_r$  образуют различающую последовательность по отношению к собственному значению  $\lambda^{(0)}$ , т. е. (гл. VII, п. 10)

$$\det | (p_i, u^{(k)}) | \neq 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, r).$$

Как показано в п. 5, это не приводит к потере общности.

Тогда, разлагая определитель по теореме Лапласа сначала по последним  $r$  строкам, а затем по последним  $r$  столбцам, мы получаем

$$D(\lambda^{(0)}) = | (p_i, u^{(h)}) |^2 W.$$

Таким образом, если первые  $r$  функций  $p_1, p_2, \dots, p_r$  образуют различающую последовательность по отношению к  $\lambda^{(0)}$ , то уравнение  $D(\lambda^{(0)}) = 0$  эквивалентно уравнению  $W = 0$ , откуда следует, что настоящий метод охватывает прежний метод, рассмотренный Вайнштейном.

В случае  $m = r$  определитель  $D(\lambda^{(0)})$  принимает вид

$$D(\lambda^{(0)}) = \begin{array}{c} m \\ r=m \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline (R' p_i, p_k) & (p_i, u^{(k)}) \\ \hline (p_i, u^{(k)}) & 0 \\ \hline \end{array},$$

так что если последовательность  $p_1, p_2, \dots, p_r$  различающая, то  $D(\lambda^{(0)}) \neq 0$  и, следовательно, собственное значение  $\lambda^{(0)}$  не будет консервативным, что опять-таки согласуется (гл. VII, п. 10) с результатами Вайнштейна.

Наконец, в случае  $m < r$  мы имеем

$$D(\lambda^{(r)}) = \begin{array}{c} m \\ r \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline (R' p_i, p_k) & \begin{array}{l} (p_1, u^{(1)}), \dots, (p_1, u^{(r)}) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ (p_m, u^{(1)}), \dots, (p_m, u^{(r)}) \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} (p_1, u^{(1)}), \dots, (p_m, u^{(1)}) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ (p_1, u^{(r)}), \dots, (p_m, u^{(r)}) \end{array} & 0 \\ \hline \end{array},$$

откуда, разлагая этот определитель по теореме Лапласа по первым  $m$  строкам, получаем, что  $D(\lambda^{(0)})$  всегда равен нулю. Следовательно, собственное значение  $\lambda^{(0)}$  высокой кратности ( $r > m$ ) будет консервативным при любом выборе  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , что опять-таки согласуется с результатами Вайнштейна.

**3. Собственные значения промежуточных задач второго типа.**

Напомним, что для построения задачи второго типа мы вводим  $m$  векторов  $p_1, p_2, \dots, p_m$  и затем полагаем  $H^{(m)} = H^{(0)} + H'P^{(m)}$ , где  $H'$  — положительно определенный оператор, а  $P^{(m)}$  — ортогональный проектор на  $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  по отношению к скалярному произведению  $[u, v] = (H'u, v)$ . Тогда (гл. XII, п. 5)

$$P^{(m)} u = c_1 p_1 + c_2 p_2 + \dots + c_m p_m,$$

и для коэффициентов  $c_i$  мы имеем следующие выражения:

$$c_i = b_{1i}(u, H'p_1) + \dots + b_{mi}(u, H'p_m) = \sum_{k=1}^m (u, H'p_k) b_{ki},$$

где  $\|b_{ki}\|$  — матрица, обратная к  $\|(p_k, H'p_i)\|$ .

Собственные векторы  $u$  оператора  $H^{(m)}$  находятся из уравнения

$$H^{(m)}u - \lambda u = (H^{(0)} - \lambda I)u + H'P^{(m)}u = 0,$$

откуда

$$H^{(0)}u - \lambda u = - \sum_{k=1}^m c_k H'p_k.$$

Если  $\lambda$  не является консервативным собственным значением (для консервативных  $\lambda$  требуется дополнительное рассмотрение, примерно такое же, как в предыдущем пункте), мы можем применить резольвенту  $R_\lambda = (H^{(0)} - \lambda I)^{-1}$  к обеим частям последнего равенства. В результате получим

$$u = - \sum_{k=1}^m c_k \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(H'p_k, u_j)}{\lambda_j - \lambda} u_j.$$

Подставляя это выражение для  $u$  в выражение для  $c_i$ , а именно  $c_i = \sum_{k=1}^m (u, H'p_k) b_{ki}$ , получаем следующие равенства:

$$c_i = - \sum_{h=1}^m (u, H'p_h) b_{hi} = - \sum_{k=1}^m c_k \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sum_{h=1}^m (H'p_h, u_j) b_{hi}}{\lambda_j - \lambda}$$

или

$$\sum_{k=1}^m c_k \left[ \delta_{ki} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sum_{h=1}^m (H'p_h, u_j) b_{hi}}{\lambda_j - \lambda} \right] = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Поскольку все  $c_k$  не могут равняться нулю одновременно, мы приходим к следующему характеристическому уравнению Вайнштейна:

$$W = \det \left[ \delta_{ki} + \sum_{j=1}^{\infty} (H'p_k, u_j) \sum_{h=1}^m \frac{(H'p_h, u_j) b_{hi}}{\lambda_j - \lambda} \right] = 0 \quad (k, i = 1, 2, \dots, m).$$

**4. Замечания по поводу специального выбора Безли.** Проиллюстрируем этот результат на примере специального выбора Безли  $p_k = (H')^{-1}u_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . Значения  $k = 1, 2, \dots, m$  мы берем только ради удобства обозначений; с таким же успехом мы могли бы взять любые  $m$  собственных функций  $H^{(0)}$ .

В этом случае  $(H'p_k, u_j) = (u_k, u_j) = \delta_{jk}$  и  $\sum_{h=1}^m \delta_{hj} b_{hi} = b_{ji}$ , так что определитель  $W$  принимает простой вид:

$$W = \begin{vmatrix} 1 + \frac{b_{11}}{\lambda_1 - \lambda} & \frac{b_{12}}{\lambda_1 - \lambda} & \cdots & \frac{b_{1m}}{\lambda_1 - \lambda} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{b_{m1}}{\lambda_m - \lambda} & \frac{b_{m2}}{\lambda_m - \lambda} & \cdots & 1 + \frac{b_{mm}}{\lambda_m - \lambda} \end{vmatrix}$$

или

$$W(\lambda) = [(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_m - \lambda)]^{-1} \det | \delta_{ki} (\lambda_k - \lambda) + b_{ki} | \\ (i, k = 1, 2, \dots, m).$$

Чтобы посмотреть, как этот результат согласуется с нашими прежними результатами, рассмотрим три случая:

I. Корень  $\lambda$  уравнения  $W(\lambda) = 0$  не является собственным значением  $H^{(0)}$ .

II. Корень  $\lambda$  совпадает с одним из собственных значений  $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \dots$  оператора  $H^{(0)}$ , т. е. соответствующая собственная функция  $u_j$ ,  $j > m$ , не участвует в построении  $m$ -й промежуточной задачи.

III. Корень  $\lambda$  совпадает с одним из собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , т. е. соответствующая собственная функция участвует в построении  $m$ -й промежуточной задачи.

В случае I  $\lambda$  является корнем второго множителя  $W(\lambda)$ , т. е.

$$\det | \delta_{ik} (\lambda_i - \lambda) + b_{ik} | = 0,$$

что согласуется с результатом Безли (гл. XII, п. 6); соответствующая собственная функция имеет вид

$$u = \sum_{k=1}^m a_k \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(H'p_k, u_j)}{\lambda_j - \lambda} u_j.$$

Но, поскольку  $H'p_k = u_k$ , сумма  $\sum_{j=1}^{\infty}$  на самом деле будет *конечной*; она является просто линейной комбинацией функций  $H'p_1 = u_1, \dots, H'p_m = u_m$ .

Именно этим обстоятельством объясняется значение специального выбора Безли.

В случае II мы различаем две возможности  $W(\lambda) \neq 0$  и  $W(\lambda) = 0$ . Если  $W(\lambda) \neq 0$ , то кратность  $\lambda$  как собственного

значения  $H^{(m)}$  будет совпадать с его кратностью как собственного значения  $H^{(0)}$ , причем собственными функциями промежуточной задачи, отвечающими собственному значению  $\lambda$ , будут базовые собственные функции  $u_j$ , отвечающие тому же собственному значению, и только они. Но если  $W(\lambda) = 0$ , то собственному значению  $\lambda$  отвечают и другие собственные функции промежуточной задачи. По общей теории, развитой в гл. XII, п. 6, эти добавочные функции будут ортогональны собственным функциям базовой задачи, отвечающим  $\lambda$ , и так же, как и в случае I, они являются

конечными комбинациями  $u = \sum_{k=1}^m c_k u_k$  собственных функций,

не используемых в построении промежуточной задачи. В гл. XII вопрос о кратности  $\lambda$  в этом случае не обсуждался. Теперь же мы можем утверждать, что при переходе от базовой задачи к  $m$ -й промежуточной эта кратность может только повыситься. Кстати, именно такое повышение кратности происходит в случае, когда промежуточная задача строится «наилучшим возможным» образом, как, например, в приложении к уравнению Матге (гл. XII, п. 8), где мы выбирали оптимальное значение параметра  $\alpha$ .

Наконец, в случае III предположим, что  $\lambda$  является одним из собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  оператора  $H^{(0)}$ , которые используются в построении  $m$ -й промежуточной задачи (точнее, используются соответствующие собственные функции). Пусть  $\mu_0$  — кратность  $\lambda$  в спектре базовой задачи. Обозначим через  $-d \leq 0$  порядок полюса в первом множителе выражения

$$W(\lambda) = [(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_m - \lambda)]^{-1} \det | \delta_{ik}(\lambda_i - \lambda) + b_{ik} |,$$

а через  $n \geq 0$  обозначим порядок  $\lambda$  как нуля  $W(\lambda)$ .

Тогда по правилу Ароншайна кратность  $\mu_m$ , собственного значения  $\lambda$  в спектре  $H^{(m)}$ , находится по формуле  $\mu_m = \mu_0 - d + n$ . Согласно нашей новой терминологии,  $\mu_0 - d$  есть число собственных значений, которые не используются в построении промежуточной задачи; некоторые из этих собственных значений появляются, согласно случаю II, в спектре  $H^{(m)}$ , а кратность собственных значений  $\lambda$ , которые используются при построении промежуточной задачи, возрастает на  $n \geq 0$ .

**5. Различающие последовательности.** Поскольку все методы, ведущие к успешному численному решению, так или иначе связаны с различающими последовательностями, целесообразно установить существование таких последовательностей, хотя в некоторых случаях для их построения может потребоваться несущественное изменение базовой задачи, как это будет сделано ниже.

Для задач второго типа  $Hu + H'u = \lambda u$ , где  $H'$  (или  $H' + cI$  при некотором  $c \geq 0$ ) является самосопряженным и положительно определенным; как мы видели в предыдущих пунктах, последовательность Безли  $p_i = (H' + cI)^{-1}u_i$  является различающей, так что нам нужно рассмотреть только задачи первого типа.

Прежде всего покажем, что базовую задачу можно изменить, если это потребует, таким образом, чтобы ни одна из собственных функций, соответствующих некоторому собственному значению  $\lambda$ , не была ортогональна каждому члену  $p_i$  (бесконечной) последовательности функций  $p_1, p_2, \dots$ , определяющей исходную задачу. Действительно, если  $u_\tau$  — такая собственная функция базового оператора  $H^{(0)}$ , т. е.  $(u_\tau, p_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , то  $u_\tau$  будет также собственной функцией исходного оператора  $H$  с тем же собственным значением  $\lambda$ . В самом деле,  $u_\tau$  как собственная функция базового оператора  $H^{(0)}$  будет минимизирующей функцией функционала  $(Hu, u)/(u, u)$  без учета условий ортогональности, в то время как собственная функция исходного оператора  $H$  должна удовлетворять условиям ортогональности  $(u, p_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , а функция  $u_\tau$  по предположению удовлетворяет этим условиям.

Если мы теперь модифицируем исходную задачу, заменив ее задачей

$$Hu - (Hu, u_\tau) u_\tau = \lambda u,$$

то функция  $u_\tau$  уже не будет собственной функцией, отвечающей собственному значению  $\lambda > 0$ , поскольку

$$\lambda u_\tau - \lambda (u_\tau, u_\tau) u_\tau = 0,$$

так как  $(u_\tau, u_\tau) = 1$ . Таким путем мы можем построить модифицированную базовую задачу, для которой функция  $u_\tau$ , ортогональная  $\{p_1, p_2, \dots\}$ , уже не будет собственной функцией, отвечающей собственному значению  $\lambda$ . Если же имеется несколько таких функций  $u_{\tau_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , то мы можем рассмотреть следующую базовую задачу:

$$Hu - \sum_k (Hu, u_{\tau_k}) u_{\tau_k} = \lambda u.$$

Но для такой задачи нетрудно построить различающую последовательность для любого собственного значения  $\lambda$ . Действительно, если  $u_i$  — один из собственных векторов  $u_1, u_2, \dots, u_r$ , то, согласно только что полученному результату, можно выбрать  $q_i$  так, чтобы  $(q_i, u_i) \neq 0$ . Построив таким способом  $q_1, q_2, \dots, q_r$ , мы можем определить функции  $p_1, p_2, \dots, p_r$ , беря линейные комбинации  $q_i$  так, чтобы  $p_i$  было ортогональной к  $u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_r$ , но не была ортогональной к  $u_i$ . Тогда

$(p_i, u_j) = \delta_{ij}$ , так что  $\det |(p_i, u_j)| = 1 \neq 0$ , и, значит, последовательность  $p_1, p_2, \dots, p_r$  действительно является различающей для собственного значения  $\lambda$  базовой задачи.

Разумеется, все собственные значения  $\lambda$ , которые соответствуют собственным функциям  $u_\tau$ , ортогональным  $\{p_1, p_2, \dots\}$ , и которые мы отбросили при построении новой базовой задачи, нужно присоединить к спектру любой промежуточной задачи, построенной с помощью этой базовой задачи. Например, пусть в нашем методе отбрасывается  $\lambda = 5$ , а новая промежуточная задача имеет собственные значения  $2, 7, 10, \dots$ , тогда истинными нижними границами для данной исходной задачи будут числа  $2, 5, 7, 10, \dots$ .

В действительности нет необходимости предполагать, что различающая последовательность существует для всех  $\lambda$ , поскольку легко проверить, является ли данная собственная функция базовой задачи  $u_\tau$  в то же время и собственной функцией исходной задачи, и тем самым исключить ее из рассмотрения.

**6. Достаточность характеристического уравнения.** В этом заключительном пункте мы обсудим вопрос, с которым неоднократно сталкивались на протяжении этой книги, но который до сих пор оставался без ответа. Например, в п. 2 этой главы мы показали, что если  $\lambda^{(0)}$  является консервативным собственным значением промежуточного оператора  $H^{(m)}$  первого типа, то  $\lambda^{(0)}$  должно удовлетворять характеристическому уравнению Вайнштейна

$$D(\lambda^{(0)}) = \begin{array}{|c|c|} \hline (R'_{\lambda^{(0)}} p_i, p_k) & \begin{array}{c} (p_1, u^{(1)}), \dots, (p_1, u^{(r)}) \\ \dots \\ (p_m, u^{(1)}), \dots, (p_m, u^{(r)}) \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} (p_1, u^{(1)}), \dots, (p_m, u^{(1)}) \\ \dots \\ (p_1, u^{(r)}), \dots, (p_m, u^{(r)}) \end{array} & 0 \\ \hline \end{array} = 0.$$

Теперь мы хотим доказать обратный результат: пусть  $n$  — дефект матрицы  $D(\lambda^{(0)})$  (т. е. разность между ее порядком и рангом); тогда собственное подпространство, соответствующее  $\lambda^{(0)}$ , является  $n$ -мерным.

Согласно элементарной теории линейных алгебраических уравнений, система уравнений с определителем  $D(\lambda^{(0)})$  будет иметь  $n$

линейно независимых решений

$$a_1^{(s)}, \dots, a_m^{(s)}, c_1^{(s)}, \dots, c_r^{(s)} \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

которым соответствуют  $n$  собственных функций  $v_1, v_2, \dots, v_n$   $m$ -й промежуточной задачи:

$$v_s = R'_{\lambda^{(0)}} \left( \sum_{i=1}^m a_i^{(s)} p_i \right) + c_1^{(s)} u^{(1)} + \dots + c_r^{(s)} u^{(r)} \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

где  $R'_{\lambda^{(0)}}$  определяется для любого  $f$  формулой

$$R'_{\lambda^{(0)}} f = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(f, u_j)'}{\lambda_j - \lambda^{(0)}} u_j,$$

а

$$\sum' = \sum_{\lambda_j \neq \lambda^{(0)}}.$$

Остается только доказать, что собственные функции  $v_1, v_2, \dots, v_n$  линейно независимы; этот факт не является тривиальным следствием линейной независимости  $n$  решений

$$a_1^{(s)}, \dots, a_m^{(s)}, c_1^{(s)}, \dots, c_n^{(s)} \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Для доказательства предположим, что  $\sum \alpha_s v_s = 0$ , т. е.

$$\sum_{s=1}^n \alpha_s \left\{ R'_{\lambda^{(0)}} \left( \sum_{i=1}^m a_i^{(s)} p_i \right) + \sum_{h=1}^r c_h^{(s)} u^{(h)} \right\} = 0,$$

и покажем, что  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

Так как при построении  $R'_{\lambda^{(0)}}$  не используются собственные векторы, соответствующие  $\lambda^{(0)}$ , вектор  $R'_{\lambda^{(0)}} \left( \sum_{i=1}^m a_i^{(s)} p_i \right)$  ортогонален  $\sum_{h=1}^r c_h^{(s)} u^{(h)}$ . Тогда из нашего предположения следует, что

$$\sum_{s=1}^n \alpha_s R'_{\lambda^{(0)}} \left( \sum_{i=1}^m a_i^{(s)} p_i \right) = 0$$

и

$$\sum_{s=1}^n \alpha_s \left( \sum_{h=1}^r c_h^{(s)} u^{(h)} \right) = 0.$$

Первое из этих равенств запишем в виде

$$R'_{\lambda^{(0)}} \left( \sum_{s=1}^n \alpha_s \sum_{i=1}^m a_i^{(s)} p_i \right) = R'_{\lambda^{(0)}} (g) = 0,$$



где

$$g = \sum_{s=1}^n \alpha_s \sum_{i=1}^m a_i^{(s)} p_i.$$

Поскольку  $(\sum_{i=1}^m a_i^{(s)} p_i, u^{(h)}) = (H^{(0)}u - \lambda^{(0)}u, u^{(h)}) = 0$  при всех  $s$  и  $h$ , мы имеем

$$(g, u^{(h)}) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, r).$$

Из равенства  $R'_{\lambda^{(0)}} g = 0$  получаем, что

$$(R'_{\lambda^{(0)}} g, R'_{\lambda^{(0)}} g) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(g, u_j)^2}{(\lambda_j - \lambda^{(0)})^2} = 0,$$

откуда следует, что  $g = A_1 u^{(1)} + \dots + A_r u^{(r)}$ , где  $A_i$  — некоторые постоянные. Но это означает, что  $g = 0$ , (поскольку  $(g, u^{(h)}) = 0$  при  $h = 1, 2, \dots, r$ ).

Таким образом,

$$\sum_{s=1}^n \alpha_s \left( \sum_{i=1}^m a_i^{(s)} p_i \right) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{s=1}^n \alpha_s a_i^{(s)} \right) p_i = 0,$$

откуда в силу линейной независимости  $p_i$  имеем

$$\sum_{s=1}^m \alpha_s a_i^{(s)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Кроме того, по доказанному выше

$$\sum_{s=1}^n \alpha_s c_h^{(s)} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, m).$$

Учитывая линейную независимость  $n$  векторов

$$a_1^{(s)}, \dots, a_m^{(s)}, c_1^{(s)}, \dots, c_r^{(s)} \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

получаем

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Следовательно, мы приходим к желаемому результату: если определитель Вайнштейна  $D(\lambda^{(0)})$  равен нулю, то собственному значению  $\lambda^{(0)}$  оператора  $H^{(m)}$  соответствуют  $n$  линейно независимых собственных функций.

## БИБЛИОГРАФИЯ

А й н с (I n s e E. L.)

- [1] Ordinary differential equations, Longmans, Green, London, 1927. (Русский перевод: А й н с Э., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939.)

А р о н ш а й н (A r o n s z a j n N.)

- [1]<sup>1</sup>Operators in a Hilbert space<sup>1</sup>).

[2]<sup>1</sup>Differential operators.

[3]<sup>1</sup>Application of Weinstein's method with an auxiliary problem of type I.

[4]<sup>1</sup>Application of Weinstein's method with an auxiliary problem of type II.

[5] Theory of reproducing kernels, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 68 (1950), 337—404. (Русский перевод: А р о н ш а й н Н., Теория воспроизводящих ядер, сб. *Математика*, 7 : 2 (1963), 67—130.)

[6] Approximations methods for eigenvalues of completely continuous symmetric operators, Proceedings of the Symposium on Spectral Theory and Differential Problems (June-July 1950), Stillwater, Okla., Research Foundation, 1951, p. 179.

[7] Green's functions and reproducing kernels, *ibid.*, 335.

[8] The Rayleigh-Ritz and A. Weinstein methods for approximation of eigenvalues. I. Operators in a Hilbert space. II. Differential operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 34 (1943), 474, 594.

[9] Introduction to the theory of Hilbert spaces, Stillwater, Okla., Research Foundation, 1950.

А р о н ш а й н и В а й н ш т е й н (A r o n s z a j n N., W e i n s t e i n A.)

- [1] On the unified theory of eigenvalues of plates and membrans, *Amer. J. Math.*, 64 (1942), 623.

А р о н ш а й н и Д ж е н н и н г с (A r o n s z a j n N., J e n n i n g s A. K.)

- [1]<sup>1</sup>Some developments and applications of a new approximation method for partial differential eigenvalue problems.

А р о н ш а й н и М и л ь г р а м (A r o n s z a j n N., M i l g r a m A. N.)

- [1]<sup>1</sup>Differential operators on Riemannian manifolds.

А р о н ш а й н и С м и т (A r o n s z a j n N., S m i t h K. T.)

- [1] Invariant subspaces of completely continuous operators, *Ann. of Math.*, 60 (1954), 345.

[2]<sup>1</sup>Functional spaces and functional completion.

А р о н ш а й н и Ц е й х н е р (A r o n s z a j n N., Z e i c h n e r A.)

- [1]<sup>1</sup>Preliminary note: Reproducing and pseudoreproducing kernels and their application to the partial differential equations of physics. A new type of auxiliary problem for approximation of eigenvalues by Weinstein's method.

---

<sup>1</sup>) Работы, снабженные индексом <sup>1</sup>, напечатаны гектографическим или mimeографическим способом в Канзасском университете.

А р ф (A r f C.)

- [1] On the methods of Rayleigh-Ritz-Weinstein, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 223.

Б е з л и (B a z l e y N. W.)

- [1] Lower bounds for eigenvalues with applications to the helium atom, *Phys. Rev.*, **120** (1960), 144.  
 [2] Lower bounds for eigenvalues, *J. Math. Mech.*, **10** (1961), 289.

Б е з л и и Ф о к с (B a z l e y N. W., F o x D. W.)

- [1] Lower bounds for eigenvalues of Schrödinger's equation, *Phys. Rev.*, **124** (1961), 483.  
 [2] Truncations in the method of intermediate problems for lower bounds to eigenvalues, *J. Res. Nat. Bur. Standards*, Sect. B, **65B** (1961), 105.  
 [3] Error bounds for eigenvalues of self-adjoint operators, *J. Res. Nat. Bur. Standards*, Sect. B, **66B** (1962), 1.  
 [4] A procedure for estimating eigenvalues, *J. Math. Phys.*, **3** (1962), 469.  
 [5] Lower bounds to eigenvalues using operator decompositions of the form  $B^*B$ , *Arch. Rational Mech. Anal.*, **10** (1962), 352.  
 [6] Lower bounds for energy levels of molecular systems, *J. Math. Phys.*, **4** (1963), 1147.  
 [7] Error bounds for expectation values, *Rev. Mod. Phys.*, **35** (1963), 712.  
 [8] Comparison operators for lower bounds to eigenvalues, Technical Report, July 1963, Battelle Memorial Institute, Geneva.  
 [9] Improvement of bounds to eigenvalues of operators of the form  $T^*T$ , Preliminary report, February 1964, Applied Physics Laboratory, The John Hopkins University, Silver Spring, Md.  
 [10] Methods for lower bounds to frequencies of continuous elastic systems, unpublished manuscript.

Б е й т м е н (B a t e m a n H.)

- [1]\*<sup>1)</sup> *Messengers of Mathematics*, **37** (12) (1908), 179.

Б е р г м а н и Ш и ф ф е р (B e r g m a n S., S c h i f f e r M.)

- [1] Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics, Academic Press, New York, 1953.

Б ё р ш - З у п а н (B ö r s c h - S u p a n W.)

- [1] Comparison of two methods for lower bounds to eigenvalues, to be published.

Б и р м а н М. Ш.

- [1]\* Вариационные методы решения краевых задач, аналогичные методу Трефтца, *Вестник ЛГУ*, сер. матем., мех. и астр., **13** (1956), вып. 3.  
 [2]\* О вариационном методе Трефтца для уравнения  $\Delta^2 u = f$ , *ДАН СССР*, **101** (1955), № 2.

Б о й с, Д и П р и м а, Х а н д е л ь м а н (B o y s e W., D i P r i m a R., H a n d e l m a n G.)

- [1] Vibrations of rotating beams of constant section, Proc. Second U.S. Natl. Congr. of Appl. Mech., Providence, R.I., 1958.

Б о х е р (B o c h e r M.)

- [1] Introduction to higher algebra, Macmillan, New York, 1938. (Русский перевод: Бохер М., Введение в высшую алгебру, ГТТИ, М., 1934.)

Б р а у д е р (B r o w d e r F. E.)

- [1] The Dirichlet problem for linear elliptic equations of arbitrary even order with variable coefficients, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **38** (1952), 230.

В а й н б е р г е р (W e i n b e r g e r H. F.)

- [1] Error estimation in the Weinstein method for eigenvalues, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 643.

1) Звездочкой отмечены работы, добавленные при переводе.

- [2] An optimum problem in the Weinstein method for eigenvalues, *Pacific J. Math.*, 2 (1952), 413.
- [3] An extension of the classical Sturm-Liouville theory, *Duke Math. J.*, 22 (1955), 1—14.
- [4] A theory of lower bounds for eigenvalues, Technical Note BN-183, Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, Univ. Maryland, 1959.

В а й н ш т е й н (Weinstein A.)

- [1] Étude des spectres des equations aux dérivées partielles de la théorie des plaques élastiques, *Mém. des Sciences math.*, fasc. 88, Gauthier-Villars, Paris, 1937.
- [2] Les vibrations et le calcul des variations, *Portugaliae Mathematica*, 2 (1941), 36.
- [3] Separation theorems for the eigenvalues of partial differential equations, Reissner Anniversary Volume (1949), 405.
- [4] Quantitative methods in Sturm-Liouville theory, Proceedings of the Symposium on Spectral Theory and Differential Problems (June — July 1950), Stillwater, Okla., Research Foundation, 1951, 345.
- [5] Variational methods for the approximation and exact computation of eigenvalues, Symposium for Simultaneous Linear Equations and Determination of Eigenvalues, National Bureau of Standards, 1953.
- [6] Bounds for eigenvalues and the method of intermediate problems, Partial differential equations and continuum mechanics, Univ. of Wisconsin Press, Madison, Wis., 1961, 39—53.
- [7] A necessary and sufficient conditions in the maximum-minimum theory of eigenvalues, *Studies in Mathematical Analysis and Related Topics*, Stanford Univ. Press, Stanford, 1962.
- [8] The intermediate problems and the maximum-minimum theory of eigenvalues, *J. Math. Mech.*, 12 (1963), 235—245. (Русский перевод: В а й н ш т е й н А., Промежуточные задачи и максимально-минимальная теория собственных значений, сб. *Математика*, 8 : 5 (1964), 91.)
- [9] On the Sturm-Liouville theory and the eigenvalues of intermediate problems, *Numer. Math.*, 5 (1963), 238—245.
- [10] Some applications of an improved maximum-minimum theory of eigenvalues, to appear in *J. Math. Anal.*

В а й н ш т е й н и Ч а й н (Weinstein A., Chien W. Z.)

- [1] On the vibrations of a clamped plate under tension, *Quart. App. Math.*, 1 (1943).

В е б е р (Weber H.)

- [1] Über die Integration der partiellen Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, 1 (1869), 1—36.

В е б с т е р (Webster A. G.)

- [1] The dynamics of particles, etc., 3rd ed., G. E. Stechert and Co., New York, 1942. (Русский перевод 1-го изд.: В е б с т е р А., Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел, ГИТТЛ, 1933.)
- [2] Partial differential equations of mathematical physics, 2nd ed., corr., Hafner, New York, 1950.

В е й л ь (Weyl H.)

- [1] Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, 71 (1911), 441—469.

Г а н т м а х е р Ф. Р.

- [1]\*Лекции по аналитической механике, Физматгиз, М., 1966.
- [2]\*Теория матриц, изд-во «Наука», М., 1966.

- Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.  
 [1]\*Осцилляционные матрицы и малые колебания механических систем, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.  
 [2]\*Об интегральных ядрах типа функций Грина, Труды Одесского государственного университета, сер. матем., т. I, Одесса, 1935.
- Гей (Gay J. G.)  
 [1] Lower bounds to the eigenvalues of Hamiltonians by intermediate problems, Doctoral Dissertation, University of Florida, Gainesville, Fla.
- Гельфанд И. М.  
 [1]\*Лекции по линейной алгебре, Гостехиздат, М., 1951.
- Германн (Hermann H.)  
 [1] Beziehungen zwischen den Eigenwerten und Eigenfunktionen verschiedener Eigenwertprobleme, *Math. Zeitschr.*, **40** (1935), 221—241.
- Гершгорин С. А.  
 [1]\*О влиянии наложения дополнительных масс на колебания материальной системы, *ПММ*, **1** (1933), 13—24.
- Гротриан (Grottrian W.)  
 [1] Graphische Darstellungen der Spektren von Atomen und Ionen mit ein, zwei und drei Valenzelektronen, 2 vols., Springer, Berlin, 1928. Reprint: Edwards Bros., Ann Arbor, Mich., 1944.
- Дейвис (Davis H. T.)  
 [1] Tables of the higher mathematical functions, II, Bloomington, 1935.
- Джеймс (James H. M.)  
 [1] Some applications of the Rayleigh-Ritz method to the theory of the structure of matter, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47** (1941), 869.
- Дженингс (Jennings A. K.)  
 [1] Some developments and applications of a new approximations methods for partial differential eigenvalue problems.
- Джон (John F.)  
 [1] On the fundamental solution of linear elliptic equations with analytic coefficients, *Commun. Pure and Applied Math.*, **3** (1950).  
 [2] General properties of solutions of linear elliptic partial differential equations. Proceedings of the Symposium on Spectral Theory and Differential Problems (June — July 1950), Stillwater, Okla., Research Foundation, 1951, 113.
- Джулиа (Julia G.)  
 [1] Introduction mathématique aux théories quantiques, 2nd ed., rev. and corr., Gauthier-Villars, Paris, 1949.
- Джус (Joos G.)  
 [1] Theoretical physics, Hafner Publishing Company, Inc., New York, 1934.
- Диас (Diaz J. B.)  
 [1] Upper and lower bounds for eigenvalues, Proceedings of the Eight Symposium on Applied Mathematics, McGraw-Hill, New York, for the American Mathematical Society, Providence, R.I., 1958.
- Дольберг М. Д.  
 [1]\*Об одном обобщении задачи Бубнова, *Укр. матем. журнал*, **3** (1951), № 4, 433—447.  
 [2]\*О связях наибольшей жесткости, *Записки ХГУ и ХМО*, **25** (1957), сер. 4.  
 [3]\*О разложении позитивного ядра в билинейный ряд, *ДАН СССР*, **120** (1958), № 5.  
 [4]\*К вопросу о решении интегрального уравнения с помощью рядов, *ДАН СССР*, **134** (1960), № 1.
- Дольберг М. Д. и Ясницкая Н. Н.  
 [1]\*Об оценке снизу частот колебаний упругих систем, *ДАН СССР*, **173** (1967), № 3.

З а р е м б а (Z a r e m b a S.)

[1] Sur le calcul numérique des fonctions demandées dans le problème de Dirichlet et le problème hydrodynamique, *Bull. internat. de l'Acad. des Sciences de Cracovie* (1909), 125.

[2] Le problème biharmonique restreint, *Ann. de l'École normale*, 26 (3) (1909), 337.

К а п л а н (K a p l a n W.)

[1] Advanced calculus, Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1952.

К а т о (K a t o T.)

[1] Fundamental properties of Hamiltonian operators of Schrödinger type, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 70 (1951), 212.

К е л л о г (K e l l o g O. D.)

[1] Foundations of potential theory, Springer, Berlin, 1929.

К и н о с и т а (K i n o s h i t a T.)

[1] Ground state of the helium atom, *Phys. Rev.*, 105 (1957), 1940.

К о л л а т ц (C o l l a t z L.)

[1] Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1949. (Русский перевод: К о л л а т ц Л., Задачи на собственные значения с техническими приложениями, изд-во «Наука», М., 1968.)

К о л м о г о р о в А. Н. и Ф о м и н С. В.

[1]\*Элементы теории функций и функционального анализа, ч. II, изд-во МГУ, М., 1960.

К о л о т т и (C o l a u t t i M. P.)

[1] Su un teorema di completezza connesso al metodo di Weinstein per il calcolo degli autovalori, *Atti Accad. Torino*, 97 (1962), 1—21.

К р е й н М. Г.

[1]\*О формуле следов в теории возмущений, *Матем. сб.*, 33 (75), № 3 (1953).

[2]\*Об определителях возмущения и формуле следов для унитарных и самосопряженных операторов, *ДАН СССР*, 144 (1962), 268—271.

К р ы л о в Н. М.

[1] Les méthodes de solution approchée des problèmes de la physique mathématique, *Mém. des sciences math.*, fasc. 49, Paris, 1931.

К р ы л о в Н. М. и Б о г о л ю б о в Н. Н.

[1]\*Sur le calcul des racines de la transcendante de Fredholm le plus voisines d'un nombre donné par les méthodes des moindres carrés et de l'algorithme variationnel, *Изв. АН СССР*, ОМЕИ, № 5 (1929), 471—488.

К у л и д ж и Д ж е й м с (C o o l i d g e A., J a m e s M.)

[1] Wave functions for 1S 2S 1S helium, *Phys. Rev.*, 49 (1936), 676.

К у р а н т (C o u r a n t R.)

[1] Über die Eigenwerte bei der Differentialgleichungen der mathematischer Physik. *Math. Zeitschr.*, 7 (1920), 1—57.

[2] Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49 (1943), 1—23.

[3] Dirichlet's principle, Interscience Publishers, New York, 1950.

К у р а н т, Г и л ь б е р т (C o u r a n t R., H i l b e r t D.)

[1] Methods of mathematical physics, Interscience Publishers, New York, 1953. (Русский перевод: К у р а н т Р., Г и л ь б е р т Д., Методы математической физики, изд. 3-е, т. 1—2, ГИИТЛ, М.—Л., 1951.)

К у р о д а (K u r o d a S h i g e T o s h i)

[1] On a generalisation of the Weinstein-Aronszajn formula and the infinite determinant, *Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo*, 11 (1961), 1.

К у р о ш А. Г.

[1]\*Курс высшей алгебры, Физматгиз, М., 1962.

- Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М.  
[1]\*Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1954.
- Лившиц И. М.  
[1]\*Об одной задаче теории возмущений, связанной с квантовой статистикой, *УМН*, 7 (47), вып. 1, (1952), 171—180.  
[2]\* О вырожденных регулярных возмущениях, I, *ЖЭТФ*, 17, № 11 (1947), 1017—1025.  
[3]\* О вырожденных регулярных возмущениях, II, *ЖЭТФ*, 17, № 12 (1947), 1076—1089.
- Лихнерович (Lichnerowicz A.)  
[1] *Algèbre et analyse linéaires*, Masson, Paris, 1947.
- Лихтенштейн (Lichtenstein L.)  
[1] Über die Poissonsche Integral und über die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des logarithmischen Potentials, *J. reine. angew. Math.*, 141 (1912), 12.
- Люстерник Л. А. и Соболев В. И.  
[1]\*Элементы функционального анализа, изд-во «Наука». М., 1965.
- Мак-Шейн (McShane E. J.)  
[1] *Integration*, Princeton University Press, Princeton, 1944.
- Мальцев А. И.  
[1]\*Основы линейной алгебры, ГИТТЛ, М., 1956.
- Михлин С. Г.  
[1]\*Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, М., 1957.
- Морси и Фешбах (Morse P. M., Feshbach H.)  
[1] *Methods of theoretical physics*, 2 vols. consecutively paged, Mc-Graw-Hill, New York, 1953. (Русский перевод: Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики (в 2 томах), ИЛ, М., 1958—1960.)
- Морри (Morrey C. B.)  
[1] *Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics*, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1943.
- Натансон И. П.  
[1]\*Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
- Нудельман Я. Л.  
[1]\*Устойчивость перекрытых балок, Труды Одесского гос. ун-та, матем., т. 4, 1941.  
[2]\*Устойчивость упруго опертых балок, *ПММ*, 3, вып. 4 (1939).  
[3]\*Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем, ГИТТЛ, М.—Л., 1949.
- Папкович П. Ф.  
[1]\*Труды по строительной механике корабля, т. 4, Судпромгиз, Л., 1963.
- Пейн (Payne L. E.)  
[1] Inequalities for eigenvalues of membranes and plates, *J. Rational Mech. Anal.*, 4 (1955), 517.
- Пекерис (Pekeris C. L.)  
[1]\*Ground state of two-electron atoms, *Phys. Rev.*, 112, № 5 (1958), 1649—1658.
- Перлис (Perlis S.)  
[1] *Theory of matrices*, Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1952.
- Петровский И. Г.  
[1]\*Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, М., 1961.
- Плейель (Pleijel A.)  
[1] On the eigenvalues and eigenfunctions of elastic plates, *Comm. on Pure and Applied Math.*, 3 (1950).

- [2] On Green's functions for elastic plates with clamped, supported and free edges, Proceedings of the Symposium on Spectral Theory and Differential Problems (June — July, 1950), Stillwater, Okla., Research Foundation, 1951, 413.
- Пуанкаре (Poincaré H.)
- [1]\* Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique, *Amer. J. Math.*, **12** (1890), 241—294.
- Раус (Routh E. J.)
- [1] Elementary rigid dynamics, 6th ed., Macmillan and Co., London, 1892.
- [2]\* Dynamics of a system of rigid bodies, New York, 6d ed., 1905.
- Рафальсон З. X.
- [1]\* К вопросу о решении бигармонического уравнения, *ДАН СССР*, **64**, № 8 (1949).
- [2]\* К вопросу о решении бигармонического уравнения, *Уч. записки ЛГУ*. № 144, сер. матем., № 23 (1952), 165—191.
- Риман (Riemann B.)
- [1] Gesammelte mathematische Werke. Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, B. G. Teubner, Leipzig, 1892, 227. (Русский перевод: Риман Б., Сочинения, Гостехиздат, М.—Л., 1948.)
- Рисс и Секефальви-Надь (Riesz F., Sz.-Nagy B.)
- [1] Leçons d'analyse fonctionnelle, Budapest, 1952. (Русский перевод: Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, ИЛ., М., 1954.)
- Ритц (Ritz W.)
- [1] Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, *J. reine angew. Math.*, **135** (1908).
- [2] Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern, *Annalen der Physik*, **39** (1909).
- Рэлей (Rayleigh J. W. Strutt Baron)
- [1] The theory of sound, 2nd ed. rev. and enl., Dover Publications, New York, 1945. (Русский перевод: Рэлей Дж., Теория звука, Гостехиздат, М.—Л., 1955.)
- [2] *Phil. Mag.* (Ser. 6), **22** (1911), 225; *Scientific Papers*, **6**, 47, Cambridge University Press, 1899—1920.
- Сви́рский И. В.
- [1] Об оценке точности приближенных методов определения частот колебаний, *Изв. АН СССР*, сер. физ.-матем. и техн. наук, **13** (1953), 59—86.
- Секефальви-Надь (Sz.-Nagy B.)
- [1] Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, Springer, Berlin, 1942.
- Серрин (Serrin J.)
- [1] On the stability of viscous fluid motions, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **3** (1959), 1.
- Соболев С. Л.
- [1]\* Некоторые применения функционального анализа в математической физике, изд-во ЛГУ, 1950.
- Стенджер (Stenger W.)
- [1]\* On Poincaré's bounds for higher eigenvalues, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72**, № 4 (1966), 715—718.
- Стоун (Stone M. H.)
- [1] Linear transformations in Hilbert space, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 15, New York, 1932.
- Темплъ (Temple G.)



- [1] The theory of Rayleigh's principle as applied to continuous systems, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **119 A** (1928), 276.
- Тихонов А. Н. и Самарский А. А.  
[1]\*Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1953.
- Томпсон и Тейт (Thompson W., Tait P. G.)  
[1] Treatise on natural philosophy, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1879.
- Трефтц (Trefftz E.)  
[1] Konvergenz und Fehlerabschätzung beim Ritzschen Verfahren, *Math. Ann.*, **100** (1928), 503.  
[2] Über Fehlerabschätzung bei Berechnung von Eigenwerten, *Math. Ann.*, **108** (1933), 595—604.  
[3] Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren, Proceedings of the Second International Congress for Applied Mechanics, 1927.
- Уайбурн (Whuburn G. T.)  
[1] Analytic topology, Amer. Mat. Soc. Colloquium Publications, vol. 28, New York, 1942.
- Уиттекер и Ватсон (Whittaker E. T., Watson G. N.)  
[1] A course of modern analysis, 4th ed. Cambridge at the University Press, 1927. (Русский перевод: Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, 2-е изд., Физматгиз, М., 1963.)
- Фельт (Velt W.)  
[1] Über ein Stabilitätskriterium der Hydrodynamik, *Arch. for Rat. Mech. and Anal.* (1962), 9—20.
- Фикера (Fichera G.)  
[1] Transformazioni lineari, 3rd ed. Veschi, Rome, 1962.
- Фишер (Fischer E.)  
[1] Über quadratische Formen mit reellen Koeffizienten, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **16** (1905), 234—249.
- Фокс (Fox C.)  
[1] An introduction to the calculus of variations, Oxford University Press, London, 1950.
- Франк и Мизес (Frank P., Mises R. V.)  
[1] Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Vieweg, Braunschweig, 1930; Resenberg, New York, 1943. (Русский перевод: Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, М.—Л., 1937.)
- Фридрихс (Friedrichs K. O.)  
[1] Die Randwert- und Eigenwertproblem aus der Theorie der elastischer Platten. (Anwendungen der direkten Methoden der Variationsrechnung.), *Math. Ann.*, **98** (1928), 205.  
[2] Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, I, II, *Math. Ann.* **109** (1933—1934), 465, 685.  
[3] On differential operators in Hilbert spaces, *Amer. J. Math.*, **61** (1939), 523.  
[4] A theorem of Lichtenstein, *Duke Math. J.*, **14** (1947), 67.
- Халмош (Halmos P. R.)  
[1] Finite dimensional vector spaces, Princeton University Press, Princeton, 1942. (Русский перевод: Халмош П., Конечномерные векторные пространства, Физматгиз, М., 1963.)  
[2] Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity, Chelsea Pub. Co., New York, 1951.
- Хамбургер и Гримшоу (Hamburger H., Grimshaw M. E.)

- [1] Linear transformations in  $n$ -dimensional vector space, Cambridge University Press, Cambridge, 1951.
- Х о х е н е м з е р (H o h e n e m s e r K.)  
[1] Die Methoden zur angenäherten Lösung von Eigenwertproblemen in der Elastokinetik, J. Springer, Berlin, 1932.
- Ч е р ч и л л ь (C h u r c h i l l R. V.)  
[1] Fourier series and boundary value problems, McGraw-Hill, New York, 1941.
- Ш и л о в Г. Е.  
[1]\*Введение в теорию линейных пространств, ГИТТЛ, М., 1956.
- Ш о к е (C h o q u e t C.)  
[1] Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier*, 5 (1953/54, 1955).
- Ш т а д т е р (S t a d t e r J. K.)  
[1] Bounds to eigenvalues of rhombical membranes, Report CF-3084, Applied Physics Laboratory, The Johns Hopkins University, Silver Spring, Md.
- Э й м с и М у р н а г а н (A m e s J. S., M u r n a g h a n F. D.)  
[1] Theoretical mechanics, Ginn and Co., Boston, 1929.

---

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абстрактное пополнение 113  
Адекватные граничные условия 216  
Ангармонический осциллятор 282
- Базис 28, 175  
— ортонормированный 28  
Базовая задача 144, 145, 289  
Билинейная форма 32  
Билинейный функционал 85
- Вариационная задача 46  
Вариация 47  
Вектор 24, 171  
— координатный 32  
— нормированный 26  
— нулевой 25  
— резольвентный 59  
— связи 48  
— собственный 34, 184  
Верхняя граница Рэлея — Ритца 97  
Внешняя мера 117  
Воспроизводящее ядро 36, 108, 111  
Вполне непрерывный оператор 183  
Вспомогательные условия 147  
Всюду плотная последовательность 173  
Вынужденные колебания 84
- Гармоническая функция 206  
Гильбертово пространство 114, 171  
Главная полуось 37  
— часть дифференциального выражения 214  
Главное колебание 21  
Граница последовательности 175  
Граничные условия адекватные 215, 216  
— — нестабильные 221  
— — стабильные 221  
Гриновский потенциал 142
- Дифференциальное выражение 82  
— — самосопряженное 213, 214  
— — сопряженное 214  
— — формально отрицательное 214  
— — положительное 214  
— — эллиптическое 214  
Дифференциальный оператор 82  
Дополнительное подмножество 89  
Допустимая функция 81, 82
- Единичный вектор 26  
— оператор 31, 83  
Естественные краевые условия 102, 105, 106, 148
- Задача Бернулли о колебаниях струны 75  
— Дирихле 136  
Зажатый стержень 128  
Закрепленная пластина 133  
Закрепленный стержень 128  
Замкнутая система векторов 29  
— сумма подпространств 174  
Замкнутое множество 174  
Замыкание 174
- Идемпотентный оператор 183  
Изгиб зажатой пластины 163  
Измеримая функция 117  
Измеримое множество 117  
Изометричное преобразование 220  
— пространство 27  
Изоморфное пространство 27  
Инвариантное подпространство 39, 58  
Интеграл Лебега 117  
Интегральный оператор 108  
 $L$ -интегрируемая функция 117

- Канонический вид квадратичной формы 16  
 Касательная плоскость 37  
 Квадратичная форма 14  
   — — положительно определенная 14  
   — — симметричная 14  
 Квадратичный функционал 85  
   — — положительно определенный 85  
 Колебания мембраны 130  
   — пластины 132  
   — стержня 127  
 Компактное множество 178  
 Компенсирующая часть 134, 135  
 Компонента 32  
 Конечномерная система 13  
 Консервативное собственное значение 155, 156, 296  
 Консервативность 235  
 Координата 32  
 Координатная функция 96  
 Координатный вектор 32  
 Косоугольная система координат 24, 32  
 Краевые условия естественные 102, 105, 106, 148  
   — — нестабильные 125  
   — — периодические 80  
   — — согласованные 216  
   — — сопряженные 89  
   — — стабильные 125  
 Кратность собственного значения 38, 184  
 Критерий Вайнштейна 62, 72, 202, 293  
   — — в случае нескольких связей 71  
   — — — — одной связи 62, 66  
 Лапласиан 130  
 Лемма Ароншайна 70  
 Линейная оболочка 28  
 Линейное метрическое пространство 24  
   — многообразии 28, 173  
   — пространстве 82, 171  
 Линейно независимые векторы 26  
 Линейный оператор 31  
   — — дифференциальный 215  
   — — функционал 30  
 Максимальная консервативность 235, 244  
 Максимальное увеличение собственного значения 62  
 Максимально-минимальное (независимое) определение собственных значений 53  
   — свойство собственных значений 201, 202  
 Мера 117  
   — внешняя 117  
 Метод абстрактного пополнения 113  
   — Вайнштейна 144, 224  
   — — и Ароншайна 195, 204  
   — вторичной проекции 260, 263  
   — использующий сопряженный оператор 271, 276  
   — разложения оператора 265, 270  
   — Рэлея -- Ритца 96, 100  
   — специального выбора 247, 249  
   — — — обобщенный 254, 282  
   — усечения базового оператора 257, 278  
   — Фельта 288  
 Метрика 25, 86  
 Метрическое пространство 26  
 Минимизирующая последовательность 92  
 Множество векторов, порождающее подпространство 174  
   — замкнутое 174  
 Множитель Лагранжа 291  
 Модифицированная функция Вайнштейна 230  
 Независимое (максимально-минимальное) определение 53, 91  
 Непрерывный оператор 183  
 Неравенство Бесселя 30, 175  
   — треугольника 26  
 Нестабильные краевые условия 125, 221  
 Нетривиальное решение 77  
 Норма 25, 86, 172  
   — обеспечивающая псевдофункциональное пополнение 121  
   — оператора 183, 188  
   — присоединенных элементов 219  
 Нормальный оператор 222  
   — порядок 222  
 Нормальные координаты 21  
 Нормированная функция 86  
 Нормированный вектор 26  
   — — собственный 34  
 Нулевой вектор 25  
 Нуль определителя Вайнштейна 197  
 Обертон 21  
 Область значений оператора 82, 182  
   — определения оператора 82, 182

- Обобщенная скорость 13  
 Обобщенные координаты 13  
 Обобщенный метод специального выбора 254, 282  
 Обратный оператор 31, 35, 108, 136, 182  
 Общий принцип сравнения 51  
 Ограниченная последовательность 174  
 Ограниченный оператор 182  
 Однородное уравнение 77  
 Оператор 82, 182  
   — вполне непрерывный 183  
   — дифференциальный 82  
   — единичный 31, 83  
   — идемпотентный 183  
   — интегральный 108  
   — конечного ранга 82  
   — линейный 31  
   — — дифференциальный 215  
   — непрерывный 183  
   — нормальный 222  
   — обратный 182  
   — ограниченный 182  
   — положительно определенный 31, 83  
   — проектирования 49, 183  
   — — неотрицательный 49  
   — самосопряженный 31, 88, 90, 183  
   — симметричный 88  
   — сопряженный 88, 89  
   — тождественный 31, 83  
   — формально положительно определенный 105, 215  
   — — самосопряженный 88, 215  
   — усеченный 258, 263, 279  
 Определитель Вайнштейна 69, 153, 197  
 Оптимальный выбор базовой задачи 242, 246  
 Ортогональное дополнение 29  
 Ортогональные векторы 26  
   — функции 86  
   — элементы 174  
 Ортонормированная система полная 29, 175  
   — — функций 87  
 Ортонормированное множество векторов 26  
 Ортонормированный базис 28  
 Основная собственная частота 21  
 Оценка сверху 11  
   — снизу 12  
  
 Пересечение подпространств 29, 174  
 Периодические краевые условия 80  
  
 Плотное подпространство 93  
 Поверхность второго порядка 37  
 Подпространство 28, 174  
   — инвариантное 39, 58  
   — натянутое на множество векторов 28, 174  
   — Ритца 96  
   — связи 48  
 Полная непрерывность 183, 187  
   — ортонормированная система (п. о. н. с.) 29, 175, 177  
   — — — функций 87  
   — система векторов 29  
   — — функций 87  
 Полное пространство 93, 114, 116, 172  
 Положительно определенная квадратичная форма 14  
   — определенный квадратичный функционал 85  
   — — оператор 31, 83  
 Полус определителя Вайнштейна 197, 199  
 Пополнение 113  
   — абстрактное 113  
   — псевдофункциональное 119, 121, 137  
   — функциональное 115, 116  
 Порядок дифференциального оператора 90  
 Последовательность всюду плотная 173  
   — Коши 86  
   — — слабая 179  
   — минимизирующая 92  
   — ограниченная 174  
   — присоединенная к собственному значению 158  
   — — различающая 158, 304  
   — — регулярная 159  
 Правило Ароншайна 63, 65, 197, 200, 202  
 Предел последовательности 173  
 Предельная точка 173  
 Предположение Вайнштейна о первом собственном значении 164  
 Преобразование к главным осям 24  
 Принцип Дирихле 92, 136  
   — монотонности 51  
   — Рэлея 46  
 Проектор 49  
 Произведение операторов 31, 182  
 Промежуточная задача 147, 201, 290  
   — — второго типа 228, 301  
   — — первого типа 212, 224, 228

- Пространство метрическое 26  
 — полное 114, 116, 172  
 — сепарабельное 114  
 Процесс ортогонализации Грама — Шмидта 29  
 Прямоугольная система координат 24, 32  
 Псевдовоспроизводящее ядро 137, 218  
 Псевдофункциональное пополнение 119, 121, 137  
  
 Равенство Парсеваля 29, 175  
 Равномерная сходимостъ 192  
 Различающая задача 158  
 — последовательность 158, 304  
 — — регулярная 159  
 Разложение Фурье 29  
 Размерность 28, 175  
 Разность операторов 31  
 Рациональная ступенчатая функция 115  
 Регулярное решение 135  
 Резольвента, или резольвентный оператор 58, 84  
 Резольвентный вектор 59  
 Рекурсивное определение 46, 91  
 Ряд Фурье 175  
  
 Самосопряженное дифференциальное выражение 214  
 Самосопряженный оператор 31, 88, 90, 183  
 Свертка 94  
 Свободная пластина 133  
 — струна 105  
 Свободный стержень 128  
 Сепарабельное пространство 114, 173  
 Сильная сходимостъ 178  
 Символ Кронекера 33  
 Симметричная квадратичная форма 14  
 Симметричный оператор 88  
 Система координат 24, 32  
 — — косоугольная 24, 32  
 — — прямоугольная 24, 32  
 — функций полная ортонормированная 87  
 Скалярное произведение 25, 172  
 Слабая последовательность Коши 179  
 Слабо компактное множество 179  
 — сходящаяся последовательность 179  
 Слабый предел 179  
  
 Собственная функция 76, 78  
 — частота 21, 76  
 Собственное значение 21, 78, 184  
 — — консервативное 156, 296  
 — колебание 16, 17, 21, 76  
 — подпространство 38, 184  
 — число 34  
 Собственный вектор 34, 184  
 — — нормированный 34  
 Согласованные условия 216  
 Сопряженное дифференциальное выражение 214  
 Сопряженные краевые условия 89  
 Сопряженный оператор 88, 89  
 Спектр 21, 78  
 Спектральное разложение 40  
 Специальный выбор Безли 234, 302  
 Стабильные краевые условия 125, 221  
 Сужение 39  
 Сумма операторов 31, 182  
 Сходимостъ в точке 115  
 — по норме 115  
 — последовательности операторов 192  
 — — подпространств 192  
 Счетная аддитивность 120  
  
 Таблица Рэлея — Ритца 100  
 Теорема Лихтенштейна 138  
 — Пифагора 29  
 — Рисса 30  
 — Рисса — Фишера 119  
 — Рэлея 50, 54, 91  
 Тожественный оператор 31, 83  
  
 Уравнение Вайнштейна 230  
 — — для консервативных собственных значений 157, 162  
 — Матье 239  
 — Эйлера — Лагранжа 96  
 Усеченный оператор 258, 263, 279  
  
 Фаза 21  
 Форма квадратичная 14  
 Формально отрицательное дифференциальное выражение 214  
 — положительное дифференциальное выражение 214  
 — положительно определенный оператор 105, 215  
 — самосопряженный оператор 88, 215

- Формула Ароншайна 57, 63, 197  
 — Бейтмена 198  
 — Грина 88  
 Фундаментальное решение 134, 216  
 — — с особенностью в точке 134  
 Фундаментальный интервал 81  
 Функционал 85  
 — квадратичный 85  
 — линейный 30  
 Функциональное пополнение 116  
 — пространство 36  
 Функция влияния 108  
 — Вайнштейна 56, 57, 60  
 — — в случае нескольких связей 68  
 — — модифицированная 230  
 — гармоническая 206  
 — Грина 35, 108, 135, 217  
 — — для зажатой пластины 139  
 — — — закрепленной пластины 138  
 — — — мембраны 133, 136  
 — координатная 96  
 — нормированная 86  
 Функция связи 91  
 — собственная 76, 78  
 Характеристическое уравнение 41  
 Частичное увеличение собственных значений 62  
 Частное Рэлея 45, 46  
 Часть оператора в подпространстве 50, 183  
 Число Вайнштейна 68  
 Эквивалентные последовательности 114  
 — функции 118  
 Эллипсоид  $n$ -мерный 37  
 Эллиптическое дифференциальное выражение 214  
 Ядро интегрального оператора 111  
 — псевдовоспроизводящее 137, 218  
 — типа Гильберта — Шмидта 190

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Из предисловия к первому изданию . . . . .	8
Из предисловия ко второму изданию . . . . .	10
Введение . . . . .	11
<b>ГЛАВА I. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ . . . . .</b>	<b>13</b>
1. Дифференциальные уравнения малых колебаний около положения устойчивого равновесия . . . . .	13
2. Нормальные координаты. Собственные колебания . . . . .	21
3. Геометрическая аналогия. Косоугольные и прямоугольные системы координат . . . . .	23
4. Свойства евклидова пространства . . . . .	24
5. Подпространства евклидова пространства. Базис пространства или подпространства. Полные ортонормированные системы . . . . .	28
6. Теорема Рисса об общем виде линейного функционала . . . . .	30
7. Линейные операторы . . . . .	31
8. Косоугольные и прямоугольные системы координат . . . . .	32
9. Обратный оператор и функция Грина . . . . .	35
10. Главные полуоси эллипсоида как собственные векторы . . . . .	37
11. Задача на собственные значения для самосопряженного оператора . . . . .	38
12. Характеристическое уравнение . . . . .	40
<b>ГЛАВА II. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ДЛЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ СИСТЕМ . . . . .</b>	<b>45</b>
1. Рекурсивное вариационное определение собственных значений . . . . .	45
2. Обоснование вариационного определения . . . . .	46
3. Колебательные системы при наличии связи . . . . .	48
4. Часть оператора в подпространстве . . . . .	49
5. Теорема Рэлея в случае одной связи . . . . .	50



- |  |    |
|--|----|
| 6. Независимое, или $\pi$ -максимально-минимальное, определение собственных значений . . . . . | 52 |
| 7. Теорема Рэлея для любого числа связей . . . . .   | 54 |

**ГЛАВА III. КРИТЕРИЙ ВАЙНШТЕЙНА МАКСИМАЛЬНОГО УВЕЛИЧЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ . . . . .** 56

- |   |    |
|---|----|
| 1. Вводные замечания по поводу функции Вайнштейна . . . . .                       | 56 |
| 2. Резольвентный оператор . . . . .   | 58 |
| 3. Некоторые замечания о резонансе; физический смысл функции Вайнштейна . . . . . | 59 |
| 4. Свойства функции Вайнштейна в случае одной связи . . . . .                     | 60 |
| 5. Критерий Вайнштейна в случае одной связи . . . . .                             | 62 |
| 6. Правило Ароншайна и формула Ароншайна . . . . .                                | 63 |
| 7. Доказательство критерия Вайнштейна при наличии одной связи . . . . .           | 66 |
| 8. Функция Вайнштейна в случае нескольких связей . . . . .                        | 68 |
| 9. Лемма Ароншайна . . . . .  | 70 |
| 10. Критерий Вайнштейна в случае нескольких связей . . . . .                      | 71 |
| 11. Применение критерия Вайнштейна . . . . .                                      | 72 |

**ГЛАВА IV. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ . . . . .** 75

- |  |     |
|--|-----|
| 1. Непрерывные колебательные системы . . . . .   | 75  |
| 2. Задача Бернулли о колебаниях струны . . . . .   | 75  |
| 3. Решение задачи Бернулли . . . . .   | 76  |
| 4. Формулировка задачи в терминах операторов . . . . .   | 81  |
| 5. Определение собственных значений с помощью резольвенты. Вынужденные колебания . . . . .               | 84  |
| 6. Метрика в функциональном пространстве . . . . .   | 85  |
| 7. Самосопряженные операторы второго порядка. Задача Штурма — Лиувилля . . . . .                         | 87  |
| 8. Вариационные принципы для собственных значений . . . . .  | 91  |
| 9. Проблема существования минимизирующих функций . . . . .   | 92  |
| 10. Полные и неполные пространства . . . . .   | 93  |
| 11. Совпадение множества минимумов вариационных задач со спектром. Уравнение Эйлера — Лагранжа . . . . . | 94  |
| 12. Метод Рэлея — Ритца . . . . .  | 96  |
| 13. Естественные краевые условия . . . . .   | 102 |

**ГЛАВА V. ВОСПРОИЗВОЖАЮЩИЕ ЯДРА И ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПОПОЛНЕНИЕ . . . . .** 108

- |   |     |
|---|-----|
| 1. Обратный оператор. Функция Грина. Воспроизводящие ядра . . . . . | 108 |
| 2. Абстрактное пополнение. Гильбертово пространство . . . . .       | 113 |

3. Функциональное пополнение . . . . .	115
4. Полное пространство $\mathcal{L}^{(2)}$ . Интеграл Лебега. Пространство $\mathcal{L}^{(2)}$	116
5. Псевдофункциональное пополнение. . . . .	120
6. Выбор нормы, обеспечивающий функциональное пополнение	121
7. Представление функций полного пространства с помощью интеграла Лебега. . . . .	123
8. Стабильные и нестабильные краевые условия . . . . .	125
<b>Г Л А В А VI. КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ, МЕМБРАН И ПЛАСТИН . . . . .</b>	<b>127</b>
1. Колебания стержня. . . . .	127
2. Колебания мембраны . . . . .	130
3. Собственные элементы квадратной мембраны . . . . .	131
4. Колебания пластины . . . . .	132
5. Функция Грина для мембраны . . . . .	133
6. Фундаментальное решение. Компенсирующая часть . . . . .	134
7. Функция Грина и обратный оператор для мембраны . . . . .	136
8. Функция Грина для закрепленной пластины . . . . .	138
9. Функция Грина для зажатой пластины . . . . .	139
10. Функциональное пополнение пространства в случае зажатой пластины. . . . .	142
<b>Г Л А В А VII. МЕТОД ВАЙНШТЕЙНА В ЕГО ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ ФОРМЕ</b>	<b>144</b>
1. Метод Вайнштейна в случае зажатой пластины . . . . .	144
2. Задача о закрепленной пластине как базовая задача для зажатой пластины . . . . .	145
3. Промежуточные задачи . . . . .	147
4. Естественные краевые условия . . . . .	148
5. Сведение к уравнениям второго порядка . . . . .	150
6. Интегрирование уравнений второго порядка. Определитель Вайнштейна . . . . .	151
7. Резюме. . . . .	154
8. Консервативные собственные значения . . . . .	155
9. Консервативные собственные значения, имеющие большую кратность $r > m$ в спектре базовой задачи . . . . .	156
10. Случай $r = m$ . Различающие последовательности. Уравнение Вайнштейна для консервативных собственных значений	157
11. Случай $r < m$ . . . . .	159
12. Изгиб зажатой пластины . . . . .	163
13. Предположение Вайнштейна о первом собственном значении задачи об изгибе пластины . . . . .	164
14. Численный пример: применение метода Вайнштейна для зажатой пластины под нагрузкой . . . . .	166

<b>ГЛАВА VIII. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ . . . . .</b>	<b>171</b>
1. Цель главы . . . . .	171
2. Свойства гильбертова пространства. Их непротиворечивость и полнота . . . . .	171
3. Подпространства. Замкнутость и полнота. Полные ортонормированные системы. Проекция . . . . .	173
4. Сильная и слабая сходимости . . . . .	178
5. Вполне непрерывные операторы . . . . .	182
6. Спектр положительно определенного, вполне непрерывного оператора . . . . .	184
7. Полная непрерывность интегральных операторов с ядром типа Гильберта — Шмидта . . . . .	187
8. Сходимость операторов и подпространств . . . . .	191
<b>ГЛАВА IX. МЕТОД ВАЙНШТЕЙНА И АРОНШАЙНА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ . . . . .</b>	<b>195</b>
1. Описание метода . . . . .	195
2. Определитель Вайнштейна; его нули и полюсы. Правило Ароншайна для нахождения собственных значений . . . . .	196
3. Полюсы определителя Вайнштейна для первой промежуточной задачи . . . . .	199
4. Правило Ароншайна для промежуточных задач . . . . .	200
5. Промежуточные задачи и максимально-минимальное свойство собственных значений . . . . .	201
<b>ГЛАВА X. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВАЙНШТЕЙНА И АРОНШАЙНА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ К КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИНЫ . . . . .</b>	<b>204</b>
1. Схема применения метода . . . . .	204
2. Выражения для элементов определителя Вайнштейна . . . . .	206
3. Вычисления для квадратной пластины . . . . .	209
<b>ГЛАВА XI. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ К ОБЩИМ КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ . . . . .</b>	<b>212</b>
1. Задача на собственные значения для общих дифференциальных операторов . . . . .	212
2. Самосопряженные и формально положительные дифференциальные выражения . . . . .	213
3. Адекватные граничные условия . . . . .	215
4. Функция Грина дифференциального оператора . . . . .	216
5. Построение (функционального или псевдофункционального) гильбертова пространства . . . . .	217
6. Норма присоединенных элементов . . . . .	219

7. Собственные элементы в полном пространстве . . . . .	220
8. Приближенные методы . . . . .	221
9. Стабильные и нестабильные нормальные краевые условия	221
10. Промежуточные задачи первого типа. Метод Вайнштейна . .	224

#### ГЛАВА XII. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ЗАДАЧИ ВТОРОГО ТИПА. СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВЫБОР БЕЗЛИ . . . . . 228

1. Второй способ построения промежуточных задач . . . . .	228
2. Случай $H = H^{(c)} + H'$ , где $H'$ — положительно определенный оператор . . . . .	228
3. Проекционные операторы для задач второго типа . . . . .	229
4. Уравнение Вайнштейна в случае проектирования на одномерное подпространство . . . . .	230
5. Проектирование на подпространство, натянутое на $k$ векторов	231
6. Специальный выбор Безли . . . . .	234
7. Улучшение метода с помощью выбора базовой задачи . . . .	237
8. Приложение к уравнению Матье . . . . .	239
9. Оптимальный выбор базовой задачи . . . . .	242
10. Применение метода оптимизации базовой задачи . . . . .	246
11. Распространение метода специального выбора . . . . .	247
12. Применение обобщенного метода специального выбора . . . .	249
13. Задача об атоме гелия . . . . .	251
14. Обобщенный метод специального выбора . . . . .	254

#### ГЛАВА XIII. УСЕЧЕНИЕ И ДРУГИЕ МЕТОДЫ . . . . . 257

1. Усечение базового оператора . . . . .	257
2. Метод вторичной проекции . . . . .	260
3. Сравнение метода усечения и вторичной проекции . . . . .	263
4. Разложение оператора в сумму . . . . .	265
5. Применение метода разложения к задаче о вращающейся балке	270
6. Аппроксимация выражениями, содержащими сопряженный оператор . . . . .	271
7. Численный пример: применение методов, использующих сопряженный оператор . . . . .	276
8. Приложение метода усечения к задаче об атоме гелия . . . . .	278
9. Приложение обобщенного метода специального выбора к ангармоническому осциллятору . . . . .	281
10. Обобщения рассмотренных методов . . . . .	284

#### ГЛАВА XIV. ЗАДАЧИ ПЕРВОГО ТИПА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ . . . . . 288

1. Метод Фельта построения задач первого типа . . . . .	288
2. Пример из гидродинамики . . . . .	288
3. Постановка задачи . . . . .	288

4. Базовая задача . . . . .	289
5. Промежуточные задачи . . . . .	290
6. Обобщение задачи Фельта. Применение критерия Вайнштейна . . . . .	293
<b>Г Л А В А XV. ЕДИНАЯ ТРАКТОВКА ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЗАДАЧ . . . . .</b>	<b>296</b>
1. Единая трактовка Вайнштейна промежуточных задач . . . . .	296
2. Консервативные собственные значения промежуточных задач первого типа . . . . .	296
3. Собственные значения промежуточных задач второго типа . . . . .	301
4. Замечания по поводу специального выбора Безли . . . . .	302
5. Различающие последовательности . . . . .	304
6. Достаточность характеристического уравнения . . . . .	306
Библиография . . . . .	309
Предметный указатель . . . . .	318

*С. Гулд*

**ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ**

Редактор Д. Борисова. Художник *Т. Ванникова*. Художественный редактор *В. Шаповалов*. Технический редактор *Л. Кондюкова*. Корректор *И. Максимова*

Сдано в производство 13/X 1969 г. Подписано к печати 6/IV 1970 г. Бумага № 1 60×90<sup>1/16</sup>=10,25 бум. л. печ. л. 20,50. Уч.-изд. л. 18,62. Изд. № 1/4598  
Цена 1 р. 54 к. Зак. 1246

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР». Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 16 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Москва, Трехпрудный пер., 9

