

М. Митчнер, Ч. Кругер

ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННЫЕ  
ГАЗЫ

PARTIALLY IONIZED GASES

BY  
M. MITCHNER  
CHARLES H. KRUGER, JR.

Department of mechanical engineering  
Stanford university

A Wiley-Interscience Publication

John Wiley & Sons

New York London Sydney Toronto

1973

Перевод с английского

Под редакцией

д-ра физ.-мат. наук А. А. ИВАНОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

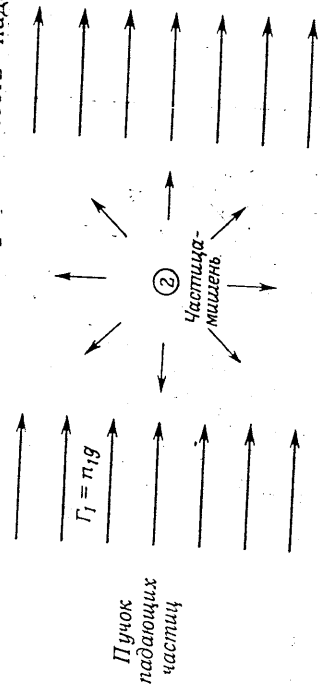
МОСКВА 1976

Таблица 5 (продолжение)

Взаимодействующие частицы	Столкновение	Наименование процесса
I 0	I 0/0e0 I 0/0I I 0/(00)e	Отрыв при столкновении Перезарядка Ассоциативный отрыв (также диссоциация, ионизация, возбуждение, нонно-атомный обмен и т. д.)
I I	I I/I 0e	Отрыв
0 0	0 0/I 0e 0 0/I I 0 (00)/(00) 0 0 0/00e 0 0/I 0e	Потеря электрона (ионизация) Захват электрона Химическая реакция Возбуждение колебательных уровней Ионизация при перераспределении атомов

§ 3. СЕЧЕНИЯ СТОЛКНОВЕНИЙ

Рассмотрим однородный пучок падающих частиц, направленный на частицу-мишень (фиг. 2). Пусть  $n_1$  — плотность падающих



Фиг. 2. К определению сечения столкновения.

частиц пучка, а  $g$  — их скорость относительно частицы-мишени. Интенсивность пучка характеризуется плотностью потока падающих частиц

$$\Gamma_1 = n_1 g, \tag{3.1}$$

т. е. числом падающих частиц, проходящих через единицу площади поверхности, перпендикулярной направлению движения пучка, за единицу времени. Если  $L$  — длина, а  $\tau$  — время, то размерность плотности потока такова:  $[\Gamma_1] = (L^{-3})(L\tau^{-1}) = L^{-2}\tau^{-1}$ .

Полное сечение столкновения падающей частицы (обозначенной цифрой 1) с частицей-мишенью (обозначенной цифрой 2) определяется следующим образом:

$$Q_{12}(g) \equiv \frac{\text{число падающих частиц, сталкивающихся с частицей-мишенью в единицу времени}}{\Gamma_1}. \tag{3.2}$$

Размерность величины  $Q_{12}(g)$  такова:

$$[Q_{12}] = \frac{\tau^{-1}}{[\Gamma_1]} = L^2 = \text{площадь}.$$

Поскольку из равенства (3.2) следует, что (число столкновений/единица времени)  $= \Gamma_1 Q_{12}$  = (число частиц/единица времени, единица площадь) · (площадь), можно интерпретировать  $Q_{12}$  как эффективную геометрическую площадь падающих частиц. Полное сечение столкновения — это величина, характеризующая сталкивающиеся частицы (т. е. атомная величина); она зависит только от типа взаимодействующих частиц (в данном случае  $Q_{12}$  не зависит от порядка индексов) и от относительной скорости  $g$ .

В данном выше определении полного сечения столкновения совершенно не говорится о типе столкновения. Это сечение равно сумме сечений упругого столкновения и сечений всех сопутствующих неупругих столкновений, т. е.

$$Q_{12} = Q_{12}^{(e)} + \sum Q_{12}^{(неe)}. \tag{3.3}$$

Каждое из этих конкретных сечений может быть определено аналогично (3.2) при соответствующей замене числителя. Например, если частица-мишень — атом в основном состоянии, то сечение возбуждения первого уровня частицы-мишени за счет воздействия на нее падающей частицы определяется следующим соотношением:

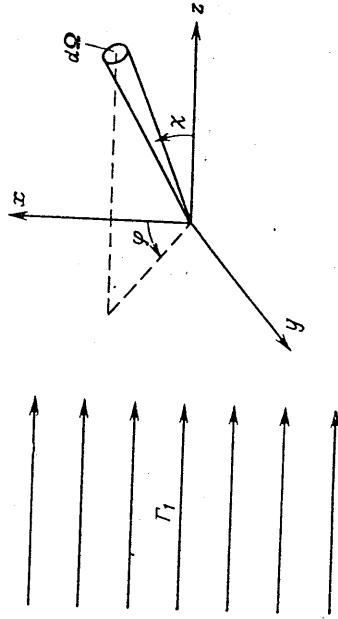
$$Q_{12}^{(1 \rightarrow 2)}(g) \equiv \frac{\text{число падающих частиц, вызывающих возбуждение (1 \rightarrow 2) частицы-мишени в единицу времени}}{\Gamma_1}.$$

В данном случае сечение столкновения зависит от порядка нижних индексов частиц и типа конкретного атомного процесса, а также от относительной скорости частиц  $g$ . Если бы падающей частицей был электрон, то величина  $Q_{12}^{(1 \rightarrow 2)}(g)$  равнялась бы нулю до тех пор, пока относительная кинетическая энергия (§ 6) электрона и атома не превысит пороговую энергию  $\epsilon_{12}$  первого возбужденного уровня. При малых  $g$  мы имеем, очевидно,  $Q = Q^{(e)}$ . Когда же скорость  $g$  оказывается достаточно большой для осуществления неупругого столкновения, второе слагаемое в правой части равенства (3.3), как нетрудно видеть, становится приблизительно того же порядка, что и  $Q^{(e)}$ . Этот вывод подтверждается данными табл. 6 [60, 61].

Таблица 6  
Относительная вероятность различных типов столкновений электронов в атомном водороде

Тип столкновений	Энергия падающих электронов, эВ			
	100	200	400	1000
	Доля полного числа столкновений, %			
Упругое столкновение	12,2	10,2	9,8	8,7
Возбуждение 2-го уровня	33,5	33,6	39,0	42,8
Возбуждение 3-го уровня	5,9	5,8	6,8	6,3
Возбуждение 4-го уровня	2,2	2,0	2,2	2,4
Возбуждение 5-го уровня	1,0	0,9	1,0	1,2
Возбуждение более высоких уровней	1,7	1,7	2,0	2,2
Возбуждение дискретных уровней	44,3	44,0	51,0	54,8
Ионизация	43,5	45,8	39,2	36,5
Полное сечение столкновений, 10 <sup>-16</sup> см	2,16	1,32	0,70	0,33
				0,043

При исследовании любого конкретного процесса столкновения, приводящего к рассеянию падающей частицы, следует провести



Фиг. 3. К определению дифференциального сечения столкновения.

дальнейшее разбиение выражения для соответствующего сечения аналогично тому, как это было сделано для полного сечения столкновения. Именно, вводится дифференциальное сечение *рассеяния в пределах телесного угла*  $d\Omega = \sin \chi d\chi d\varphi$ , определяемого полярным углом  $\chi$  и азимутальным углом  $\varphi$  (фиг. 3), которое обозначается

через  $I_{12}(\chi, \varphi)$  и определяется следующим соотношением: число падающих частиц, рассеиваемых частицей-мишенью в телесный угол  $d\Omega$  в единицу времени

$$I_{12}(\chi, \varphi) d\Omega = \frac{\Gamma_1}{4\pi} \quad (3.4)$$

Величина  $I_{12}$ , конечно, также должна зависеть от типа конкретного атомного процесса и от  $g$  и фактически связана с соответствующим сечением соотношением

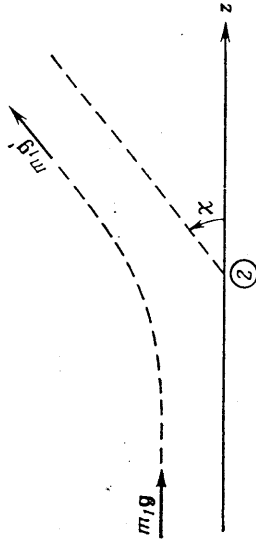
$$Q_{12} = \int_{4\pi} I_{12}(\chi, \varphi) d\Omega. \quad (3.5)$$

Почти во всех случаях рассеяние можно считать азимутально-симметричным, так что, взяв интеграл по  $\varphi$ , получим

$$Q_{12} = 2\pi \int_0^\pi I_{12}(\chi) \sin \chi d\chi. \quad (3.6)$$

Угол  $\chi$  называется *углом рассеяния*.

Когда падающая частица упруго взаимодействует с неподвижной частицей-мишенью, она теряет импульс в направлении своего



Фиг. 4. Передача импульса при упругом рассеянии.

начального движения. Уменьшение  $z$ -компоненты (фиг. 4) импульса частиц, рассеивающихся в пределах угла, заключенного между  $\chi$  и  $\chi+d\chi$  ( $\varphi$  — любое), равно <sup>1)</sup>

$$m_1 g \cos \chi = m_1 g (1 - \cos \chi).$$

Поскольку число падающих частиц, упруго-рассеивающихся в элемент телесного угла  $d\Omega = \sin \chi d\chi d\varphi$  в единицу времени, равно  $\Gamma_1 I_{12}(\chi, \varphi) d\Omega$ , полное уменьшение  $z$ -компоненты импульса в еди-

<sup>1)</sup> Из того, что говорится в § 6, следует равенство  $|g'| = |g|$ . Это равенство требуется доказать в задаче 6.2.

ницу времени дается выражением

$$\int_{4\pi} m_1 g (1 - \cos \chi) \Gamma_1 I_{12}^{(e)}(\chi, \varphi) d\Omega = \\ = (m_1 g \Gamma_1) \int_{4\pi} (1 - \cos \chi) I_{12}^{(e)}(\chi, \varphi) d\Omega.$$

Величина  $m_1 g \Gamma_1$  есть плотность потока импульса в пучке падающих частиц. Поэтому мы можем ввести величину

$$Q_{12}^{(1)}(g) \equiv \int_{4\pi} (1 - \cos \chi) I_{12}^{(e)}(\chi, \varphi) d\Omega \quad (3.7)$$

и назвать ее *сечением передачи импульса*.

Величину  $Q_{12}^{(1)}$  можно интерпретировать и иначе. Поскольку

$$P_{12}(\chi, \varphi) d\Omega \equiv \frac{I_{12}^{(e)}(\chi, \varphi) d\Omega}{Q_{12}^{(e)}} \quad (3.8)$$

есть вероятность упругого рассеяния в элемент телесного угла  $d\Omega$ , *средняя доля импульса, теряемая падающей частицей при упругом столкновении*, составляет

$$\frac{1}{m_1 g} \int_{4\pi} p_{12}(\chi, \varphi) m_1 g (1 - \cos \chi) d\Omega = \frac{Q_{12}^{(1)}}{Q_{12}^{(e)}}. \quad (3.9)$$

Сравним величины  $Q_{12}^{(e)}$  и  $Q_{12}^{(1)}$ . Благодаря наличию в формуле (3.7) множителя  $(1 - \cos \chi)$  рассеяние на большие углы дает больший вклад в сечение, чем рассеяние на малые [действительно,  $(1 - \cos \chi) = 2$  при  $\chi = \pi$  и  $(1 - \cos \chi) = 0$  при  $\chi = 0$ ]. Если  $I_{12}^{(e)}$  не зависит от  $\chi$ , то  $Q_{12}^{(1)} = Q_{12}^{(e)}$ , и эти два сечения будут различаться только тогда, когда имеется заметная концентрация рассеяния в прямом или обратном направлении. В случае упругого рассеяния электрона на атоме при достаточном малых энергиях обычно  $Q_{12}^{(1)} \approx Q_{12}^{(e)}$ , но при более высоких энергиях  $Q_{12}^{(1)}$  может стать даже вдвое меньше  $Q_{12}^{(e)}$  (фиг. 24). Полное сечение упругого столкновения  $Q_{12}^{(e)}$  не фигурирует в точной кинетической теории коэффициентов переноса газов (т. е. теплопроводности, вязкости, электропроводности и т. д.). При вычислении коэффициентов переноса оказывается более предпочтительным использовать набор обобщенных сечений столкновений с передачей импульса, определяемых соотношением

$$Q^{(1)}(g) = \int_{4\pi} (1 - \cos^l \chi) I_{12}^{(e)}(\chi, \varphi) d\Omega, \quad (3.10)$$

где  $l$  — целое положительное число.

**Задача 3.1.** Исходя из понятия сечения столкновения, покажите, что вероятность того, что падающая частица пройдет без столкновений в однородном газе частиц-мишеней плотностью  $n_2$  расстоения, равное или большее  $z$ , равна

$$e^{-z/l_1},$$

где  $l_1 = 1/n_2 Q_{12}$ . [Указание. Нужно составить дифференциальное уравнение, описывающее уменьшение плотности потока падающих частиц  $\Gamma_1(z)$  при прохождении сквозь слой частиц-мишеней толщиной  $dz$ .] Основываясь на этом результате, объясните, почему  $l_1$  называется *средней длиной свободного пробега* падающей частицы.

**Задача 3.2.** Плотность атмосферы Земли меняется с высотой  $z$  приблизительно, как  $n = n_0 \exp\{-z/H\}$ , где  $H$  — так называемая высота атмосферы. Считая сечение столкновения  $Q$  постоянным, найдите вероятность того, что частица, выпущенная вверх с очень большой скоростью (по сравнению со второй космической скоростью), достигнет без столкновений высоты  $z$ . Какова вероятность ухода частицы из поля тяготения Земли? Проведите численный расчет, полагая  $H \sim 10$  км, и проанализируйте результат.

**Задача 3.3.** Покажите, что при взаимодействии твердых шаров радиусом  $a$  (т. е. когда  $I^{(e)} = a^2/4$  и не зависит от угла) справедливо выражение

$$Q^{(1)} = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1 + (-1)^l}{1 + l}\right) \pi a^2.$$

**Задача 3.4.** Взяв для дифференциального сечения выражение

$$I^{(e)}(\chi) = \begin{cases} a & \text{при } 0 \leq \chi < \pi s, \\ b & \text{при } \pi s < \chi \leq \pi, \end{cases}$$

где  $0 \leq s \leq 1$ , определите самым простым способом условия, которые нужно наложить на  $I^{(e)}(\chi)$ , чтобы выполнялось соотношение  $Q^{(1)} > Q^{(e)}$ .

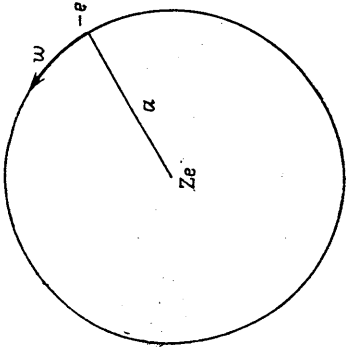
#### § 4. ВЕЛИЧИНЫ СЕЧЕНИЙ СТОЛКНОВЕНИЙ

Строго говоря, атомы не имеют какого-либо определенного «размера» и сила их взаимодействия с другими атомами плавно изменяется с изменением расстояния. Но для удобства часто принимают, что атом имеет радиус  $a$ , который тогда можно найти из соотношения

$$Q \approx \pi a^2. \quad (4.1)$$

Можно, и наоборот, построить модель атома, которая даст величину  $a$ , а затем, пользуясь соотношением (4.1), теоретически считать сечение столкновения.

В 1913 г. Бор предложил очень простую квантовую модель водородоподобного атома, которая впервые позволила удовлетворительно объяснить наблюдавшиеся экспериментально линейчатые спектры. Согласно модели Бора (фиг. 5), атом представляет собой ядро с зарядом  $Ze$ , вокруг которого по круговой орбите вращается со скоростью  $\omega$  электрон с зарядом  $-e$ . Условием механической устойчивости такой системы является равенство центростремительной силы и силы электростатического притяжения, т. е.



$$\frac{m_e \omega^2}{a} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}, \quad (4.2)$$

где  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума (диэлектрическая постоянная). Это условие следует непосредственно из механики Ньютона. Но оно дает лишь одно соотношение для двух параметров модели  $\omega$  и  $a$ . Чтобы получить второе соотношение, Бор принял как постулат, что момент импульса электрона квантуется в соответствии с равенством

$$m_e \omega a = n\hbar \quad (\hbar = h/2\pi), \quad (4.3)$$

где  $h$  — постоянная Планка, а  $n$  — целое положительное число<sup>1)</sup>. Решая уравнения (4.2) и (4.3), получаем следующие значения для величин  $\omega$  и  $a$ :

$$\frac{\omega}{c} = \alpha \frac{Z}{n}, \quad (4.4)$$

$$a = a_0 \frac{n^2}{Z}, \quad (4.5)$$

где  $c$  — скорость света. (Отметим, что в других параграфах книги буквой  $s$  иногда обозначается скорость частицы.) Здесь

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137} \quad (4.6)$$

— безразмерная величина, так называемая *постоянная тонкой структуры*, и

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м} \quad (4.7)$$

<sup>1)</sup> То же самое соотношение было позже получено иначе, когда к электрону, движущемуся по орбите, была применена волновая гипотеза де Бройля. Согласно де Бройлю, движущийся электрон представляет собой волну с длиной  $\lambda = h/m_e v$ . Для того чтобы определенная орбита соответствовала стационарному состоянию, на ее длине должно укладываться целое число длин волн. Таким образом,  $2\pi a = n\lambda$ , или  $m_e \omega a = n\hbar$ .

— радиус первой ( $n = 1$ ) боровской орбиты атома водорода ( $Z = 1$ ).

Помимо того, что эта модель позволяет оценить радиус атома (4.7), она дает также возможность определить энергетические уровни водородоподобного атома. Полная энергия электрона и ядра (отсчитываемая от энергии, соответствующей бесконечному удалению электрона от ядра при нулевой относительной скорости, т. е. от границы серии) равна сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E_n = \frac{m_e \omega^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 a} = - \left( \frac{Z^2 e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \right) \frac{1}{n^2}. \quad (4.8)$$

Как нетрудно убедиться,  $E_1 = -13,6$  эВ. Второй постулат Бора состоит в том, что атом излучает только при переходе электрона скачком с одного уровня  $n$  на более низкий уровень  $m$ . Частота испускаемого при этом излучения дается выражением

$$\nu_{mn} \equiv \frac{E_n - E_m}{h} = \frac{Z^2 e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0 h} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (4.9)$$

Постулаты Бора обеспечивают прекрасное согласие с экспериментом, но содержат очевидное противоречие. Именно, предполагается, что электрон подчиняется одному закону классической электромагнитной теории (закону Кулона) и в то же время нарушается другой закон — не испускается излучение при ускоренном движении заряда (гл. 6). Современная квантовая механика устранила необходимость в постулатах Бора, но важнейшие выводы, основанные на боровской модели, относительно частоты излучения волны и порядка величины атомного радиуса остаются почти без изменения. Один из выводов квантовой теории, который нам понадобится в дальнейшем, не следует из простой модели Бора. Это — выражение для кратности вырождения водородных уровней:

$$g_n = 2n^2. \quad (4.10)$$

Если взять полное сечение столкновения по порядку величины равным площади большого сечения шара радиусом  $a_0$ , то получим

$$\pi a_0^2 = 0,880 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2 = 0,880 \text{ \AA}^2. \quad (4.11)$$

Сечение столкновения часто выражается в единицах  $\pi a_0^2$ .

В литературе по газовой электронике часто встречается величина  $P_c$ , называемая *вероятностью столкновения*. Строго говоря, это не вероятность, а число столкновений, испытываемых падающей частицей при прохождении ею расстояния 1 см в газе частиц-мишеней при температуре 0 °С и давлении 133,3 Па. Эта величина используется главным образом в случае, когда частицы-мишени являются нейтральными. Сечение столкновения связано с ней формулой

$$Q_{12} = 2,83 \cdot 10^{-17} P_c \text{ см}^2. \quad (4.12)$$

Отметим, что данные о сечениях столкновения часто приводятся в зависимости от энергии относительного движения  $\varepsilon$  падающей частицы и частицы-мишени, а не от их относительной скорости. Как будет показано в § 6,

$$\varepsilon = \frac{m_{12}g^2}{2}, \quad (4.13)$$

где

$$m_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (4.14)$$

— приведенная масса. Если падающими частицами являются электроны, а частицей-мишенью — атом, то  $m_1 \ll m_2$  и  $m_{12} \approx m_1 = m_e$ . Имеющаяся в настоящее время довольно обширная информация о сечениях столкновения все же далеко не полна. Результаты теоретических расчетов, как правило, не очень надежны, и поэтому лучше пользоваться экспериментальными данными. Если же экспериментальные данные для рассматриваемого процесса отсутствуют, то часто оказывается возможным экстраполировать другие имеющиеся данные, руководствуясь при этом результатами вычислений. В § 14 собраны типичные данные о сечениях различных процессов столкновения. Этот набор данных нельзя считать исчерпывающим, но он позволит читателю составить себе представление о порядках величин, о характере имеющихся данных и об общих закономерностях, на которые они указывают.

Мы можем заметить, что сечения упругих столкновений электрон — атом (или электрон — молекула) лежат в диапазоне от  $10^{-1}$  до  $10^3$  единиц  $\text{л}^2 \text{а}^2$ . Нерегулярность зависимости сечений упругих электрон-атомных столкновений от энергии отражает существование квантовомеханическую природу электрон-атомных взаимодействий. Упругое же взаимодействие тяжелых частиц, как мы увидим в гл. 5, во многих случаях хорошо описывается в рамках классической механики, и это выражается в более плавной зависимости сечения от энергии.

Сечения неупругих процессов ионизации и возбуждения электроном ударом удивительно регулярны и поэтому являлись предметом многих теоретических исследований. Был предложен ряд «универсальных» формул для этих сечений. Так, для сечения ионизации атома из  $k$ -го возбужденного состояния Дравин предложил следующую формулу:

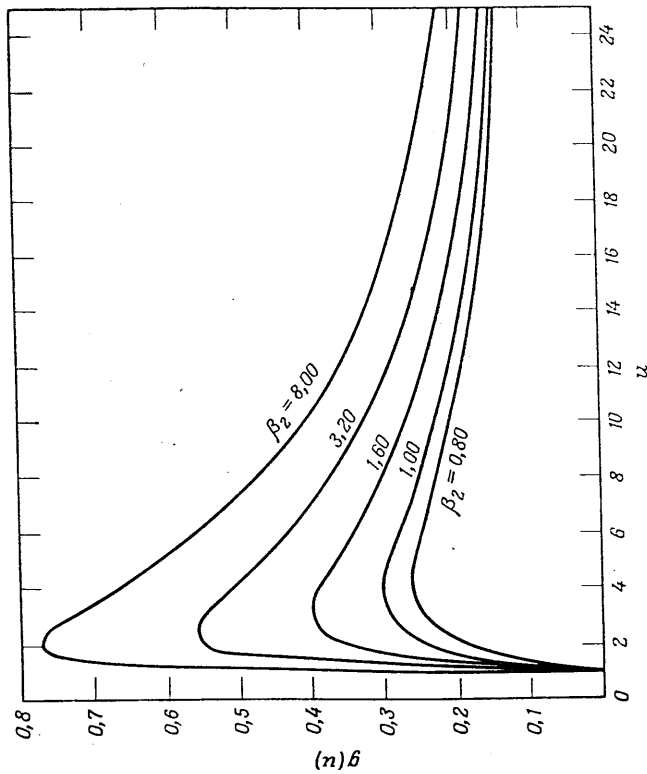
$$Q^{(k \rightarrow \lambda)}(\varepsilon) = 2,66 \text{л}^2 \text{а}^2 \left( \frac{\varepsilon_{1\lambda}}{\varepsilon_{k\lambda}} \right)^2 \xi_{k\lambda} \beta_2 g(u). \quad (4.15)$$

Здесь  $\varepsilon_{1\lambda}$  — потенциал ионизации водорода (13,6 эВ),  $\varepsilon_{k\lambda}$  — пороговая энергия ионизации,  $\xi_{k\lambda}$  — число эквивалентных электронов

на  $k$ -м уровне (т. е. тех электронов, которые имеют одинаковые главное и орбитальное квантовые числа),  $u = \varepsilon/\varepsilon_{k\lambda}$ ,

$$g(u) = \frac{u-1}{u^2} \ln(1,25\beta_2 u), \quad (4.16)$$

а  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — подгоночные коэффициенты порядка единицы. Значения  $\xi_k$  для ионизации с основного уровня ( $k=1$ ) приведены в табл. 2, а для ионизации с возбужденных уровней ( $k > 1$ ) обычно



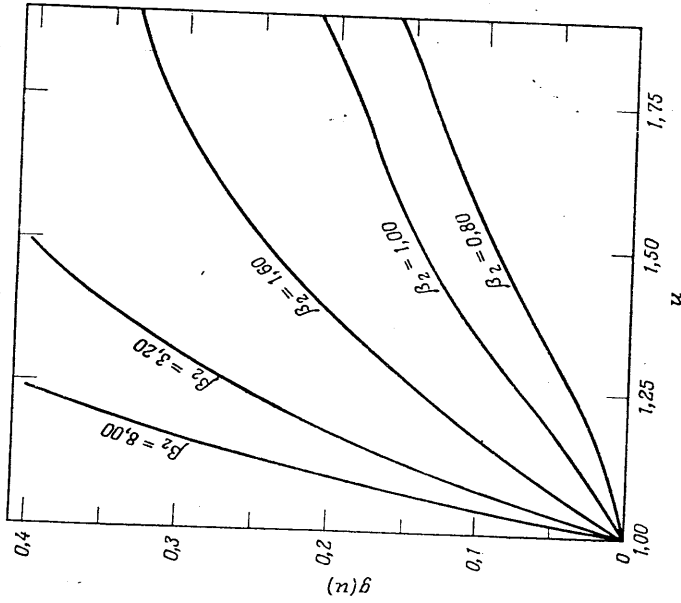
Фиг. 6а. График функции  $g(u)$ , характеризующей зависимость сечений ионизации и возбуждения от скорости [22].  
Общий ход зависимости.

1. График функции  $g(u)$  для сечения ионизации представлен на фиг. 6а и 6б. Из формулы (4.15) следует, что вблизи порога  $Q^{(k \rightarrow \lambda)} \sim (\varepsilon - \varepsilon_{k\lambda})$  в соответствии с экспериментом, а при больших энергиях электронов  $Q^{(k \rightarrow \lambda)} \sim \ln \varepsilon/\varepsilon_{k\lambda}$  в соответствии с квантовомеханическими расчетами. Формула (4.15) приблизительно в таком виде, в каком она приведена, за исключением логарифмического множителя, была выведена Томсоном (1912 г.) на основе классической механики. Томсоновское сечение ионизации рассматривается в § 8.

Для сечения возбуждения атома электронным ударом с  $k$ -го уровня на  $l$ -й Дравин [22] предложил следующую формулу:

$$Q_G^{(k \rightarrow l)}(\varepsilon) = 4\pi a_0^2 \left( \frac{e_{1\lambda}^H}{e_{kl}} \right)^2 f_k \beta_{1k} g(\mu). \quad (4.17)$$

Здесь  $\varepsilon_{kl}$  — пороговая энергия возбуждения,  $g(\mu)$  — функция (4.16), но теперь  $\mu = \varepsilon/\varepsilon_{kl}$ . Величина  $f_{kl}$  — это сила осциллятора для



Фиг. 66. График функции  $g(u)$ , характеризующей зависимость сечений ионизации и возбуждения от скорости  $u$  [22].  
Ход зависимости при пороговых значениях  $u$ .

поглощения фотона в рассматриваемом переходе (§ 9). Формула (4.17) неприменима к переходам, для которых  $f_{kl} = 0$ . Говорят, что такие переходы оптически запрещены. Максимальные значения сечений возбуждения оптически запрещенных переходов могут быть того же порядка, что и оптически разрешенных переходов, но они быстрее убывают при увеличении энергии разрешенных переходов. Результаты квантовомеханических расчетов, проведенных Ситоном [73], хорошо согласуются с формулой (4.17) при  $\beta_1 = 1$  и  $\beta_2 = 0,8$ .

В научной литературе часто используются формулы, аналогичные формулам (4.15) и (4.17), выведенные Грининским [35] в классическом приближении для сечения  $Q_G(\varepsilon; \varepsilon_{kl}, \Delta\varepsilon)$  столкновения, при котором падающий электрон с первоначальной энергией  $\varepsilon$ , сталкиваясь со связанным электроном, находящимся на  $k$ -м уровне, теряет энергию, большую или равную  $\Delta\varepsilon$ . Грининский получил формулу

$$Q_G(\varepsilon, \varepsilon_{kl}, \Delta\varepsilon) = 4\pi a_0^2 \left( \frac{e_{1\lambda}^H}{\Delta\varepsilon} \right)^2 \xi_{kl} g(u, v), \quad (4.18a)$$

где

$$g(u, v) = \frac{u-1}{u^2} \left( \frac{u}{u+v} \right)^{3/2} \left( 1 - \frac{1}{u} \right)^{v/(v+1)} \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{2v}{3} \left( 1 - \frac{1}{2u} \right) \ln \left[ e + \left( \frac{u-1}{v} \right)^{1/2} \right] \right\}, \quad (4.18b)$$

причем  $\mu = \varepsilon/\Delta\varepsilon$ ,  $v = \varepsilon_{kl}/\Delta\varepsilon$ . Если  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{kl}$ , то из соотношения (4.18a) получим сечение ионизации

$$Q_G^{(k \rightarrow l)}(\varepsilon) = 4\pi a_0^2 \left( \frac{e_{1\lambda}^H}{\varepsilon_{kl}} \right)^2 \xi_{kl} g(u, 1) \quad (4.19)$$

при  $\mu = \varepsilon/\varepsilon_{kl}$ . Аналогично можно получить сечение возбуждения для оптически разрешенного перехода на  $l$ -й уровень в случае, когда минимальная потеря энергии больше возбуждения  $\varepsilon_{kl}$ , но меньше энергии возбуждения следующего оптически разрешенного уровня  $\varepsilon_{l, l+1}$ . Именовано,

$$Q_G^{(k \rightarrow l)}(\varepsilon) = 4\pi a_0^2 \xi_{kl} \left[ \left( \frac{e_{1\lambda}^H}{\varepsilon_{kl}} \right)^2 g(u_l, v_l) - \left( \frac{e_{1\lambda}^H}{\varepsilon_{l, l+1}} \right)^2 g(u_{l+1}, v_{l+1}) \right], \quad (4.20)$$

где  $u_p = \varepsilon/\varepsilon_{kp}$  и  $v_p = \varepsilon_{kl}/\varepsilon_{kp}$ . Грининский вывел также формулы для сечений возбуждения, соответствующих оптически запрещенным переходам. Вопрос о связи между результатом Грининского (4.18) и вычислениями Томсона рассматривается в § 8.

Грининский проводит вычисления на основе классической механики, но, чтобы получить конечные результаты, делает ряд специальных предположений, а поэтому в некоторой степени его результаты можно считать полуэмпирическими, так же как формулы Дравина. Очкур и Петрунькин [67] сравнивали формулы (4.15) (при  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ) и (4.19) для сечений ионизации с многочисленными экспериментальными данными. Всюду, кроме области вблизи порога, результаты вычислений и экспериментальные данные обычно различаются не более чем в 2 раза.

Для формул (4.17) и (4.20) проводилось меньше сравнений с экспериментальными значениями сечений возбуждения, но и здесь

расхождение не превышало одного порядка величины. Дополнительные сравнения были проведены Бауэром и Бартки [5], которые распространили метод Грининского на вычисления сечений электрон-молекулярных неупругих столкновений. Из обзоров статей по процессам ионизации и возбуждения электронным ударом можно указать работы [49, 65, 71]. Хотя в одних случаях оказываются более точными формулы Грининского, а в других — формулы Дравина, в целом не имеется достаточно веских оснований для выбора между теми и другими. Важное значение имеет общая закономерность, обнаруживаемая обеими формулами (4.17) и (4.19), а именно то, что сечения возбуждения велики для переходов с малым изменением энергии. К этому вопросу мы вернемся в гл. 9.

Если изменение  $\Delta\epsilon$  внутренней энергии электронных состояний при упругом столкновении тяжелых частиц значительно, то сечение такого столкновения может быть очень малым (по сравнению с сечением упругого столкновения) даже тогда, когда относительная кинетическая энергия  $v = m_1 g^2/2$  до столкновения существенно превышает  $\Delta\epsilon$ . Мессин и Бархоп [60] высказали предположение, что для того, чтобы сечение неупругого столкновения было сравнимо с сечением упругого, столкновение должно дополнительно удовлетворять условию *неадиабатичности*. Если исходить из предположения классической механики, то можно сказать, что, когда относительная скорость двух электронов мала по сравнению с орбитальной скоростью связанных электронов, у последних достаточно времени, чтобы постепенно приспособиться к изменению силового поля без совершения переходов, и столкновение в этом случае почти адиабатическое.

Классическое определение адиабатического столкновения таково. Будем рассматривать атом как осциллятор с собственной частотой  $\nu_0$ , а столкновение — как воздействие на этот осциллятор внешней зависящей от времени силы  $F(t)$  в течение времени порядка  $\tau$ . Чтобы найти, каков результат действия внешней силы на осциллятор, разложим  $F(t)$  в интеграл Фурье  $F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$ .

В этом разложении лишь вклад частот, близких к  $\nu_0$ , создает заметные вынужденные осцилляции. Преобразование Фурье обладает следующим свойством: если  $F(t)$  не обращается в нуль на отрезке  $\tau$ , то область частот, в которой амплитуда Фурье  $G(\nu)$  отлична от нуля, определяется соотношением

$$\nu \lesssim \frac{1}{\tau}.$$

(Отметим, что, например, в случае  $\delta$ -функции Дирака мы имеем  $\tau \rightarrow 0$ , и поэтому для ее фурье-представления необходим полный набор частот.) Из предыдущего неравенства следует условие сла-

бого возмущения осциллятора

$$\frac{1}{\tau} \ll \nu_0.$$

Если  $a$  — расстояние между взаимодействующими атомами, а  $g$  — их относительная скорость, то  $\tau \sim a/g$  и условие адиабатичности столкновения имеет вид

$$\frac{a\nu_0}{g} \gg 1.$$

В случае столкновений между тяжелыми частицами нужно связать частоту осциллятора  $\nu_0$  с изменением внутренней энергии  $\Delta\epsilon$ , пользуясь соотношением  $\nu_0 = \Delta\epsilon/h$ , которое следует из формулы (4.9) для боровской модели атома. Тогда получаем, что сечение неупругого столкновения с изменением внутренней энергии мало по сравнению с типичным сечением упругого столкновения при  $a\Delta\epsilon/hg \gg 1$ . Следовательно, мы можем написать условие неадиабатичности:

$$\frac{a\Delta\epsilon}{hg} \lesssim 1, \quad (4.21)$$

где подразумевается равенство лишь по порядку величины. Понятие неадиабатичности относится к понятиям классической физики, и поэтому не удивительно, что для отдельных взаимодействий отмечались отклонения от условия неадиабатичности. Но в общем это условие выполняется в широкой области, о чем свидетельствуют данные о сечениях перезарядки, представленные на фиг. 45.

Если мы рассмотрим для примера атомы гелия при комнатной температуре ( $a \approx 2 \cdot 10^{-8}$  см), то условие (4.21) примет вид  $32\Delta\epsilon \lesssim 1$  (энергия — в электронвольтах). Поэтому даже в данном случае сравнительно быстро движущихся атомов неупругие сечения будут малы при  $\Delta\epsilon \lesssim 0,1$  эВ. Для более тяжелых атомов  $g$  меньше, а  $a$  больше, так что столкновения еще более адиабатичны. Из условия неадиабатичности вытекает то практически важное следствие, что при температурах, меньших нескольких электронвольт, и при не слишком низких степенях ионизации столкновения между тяжелыми частицами в общем не должны играть существенной роли в процессах электронного возбуждения и ионизации. Но имеются и исключения из этого правила. Так, например, столкновения атомов между собой составляют важный механизм ионизации в зоне сжатия, которая следует сразу же за сильной волной ионизации, распространяющейся в нейтральном газе. Здесь ионизация при столкновении атомов между собой играет существенную роль до тех пор, пока не образуется достаточное количество электронов и не включится более эффективный механизм ионизации за счет электрон-атомных столкновений.



В заключение заметим, что любому микроскопическому процессу соответствует обратный процесс. Так, например, возбуждение соответствует потере возбуждения, или сверхдругое столкновение (столкновение второго рода). Ионизация электронным ударом соответствует трехчастичная рекомбинация и т. д. Сечения прямых и обратных процессов взаимосвязаны. Соотношение между ними можно найти на основе принципа детального равновесия, о котором речь пойдет в § 11.

**Задача 4.1.** Исходя из модели Бора, вычислите потенциал ионизации атома водорода в электронвольтах. Какова энергия в электронвольтах первого возбужденного уровня относительно основного? Можно ли наблюдать визуально излучение, испускаемое при переходах электронов с первого возбужденного уровня на основной?

**Задача 4.2.** Атомарный водород находится при температуре 4000 К и атмосферном давлении (100 кПа). Исходя из модели Бора, определите квантовое число энергетического уровня, для которого радиус орбиты равен среднему расстоянию между частицами  $n^{-1/3}$ .

**Задача 4.3.** При столкновении двух атомов водорода один из них возбуждается с  $n$ -го уровня на  $(n+1)$ -й. Исходя из боровской модели атома, покажите, что условие неадиабатичности соответствует приближенному соотношению  $g \gg \omega$ , где  $g$  — относительная скорость атомов, а  $\omega$  — орбитальная скорость электрона на  $n$ -м уровне.

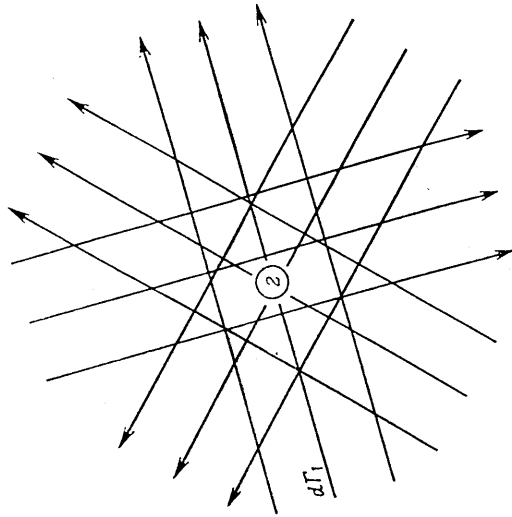
**Задача 4.4.** Покажите, что в случае столкновения  $e - H$  требование закона сохранения энергии  $e \gg \epsilon_{n, n+1}$  автоматически обеспечивается выполнение условия неадиабатичности, а в случае столкновения  $H - H$  этого нет.

**Задача 4.5.** Спектральная серия представляет собой совокупность линий, соответствующих переходам с одного и того же *нижнего* уровня. Квантовое число этого общего уровня называется порядком серии. Каков наименьший порядок серии водорода, линии которой перекрываются с линиями другой серии?

**Задача 4.6.** Определите наименьшее главное квантовое число, при котором сечение возбуждения водорода электронным ударом превышает  $1 \text{ мкм}^2$ . Для простоты примите кинетическую энергию относительного движения при столкновении равной удвоенной пороговой энергии рассеиваемого процесса возбуждения. Учтите также, что для соседних высоколежащих уровней водорода сила осциллятора  $f_{m, m+1}$  равна  $\sim 0,25 m$ .

### § 5. СКОРОСТЬ ПРОЦЕССА, ЧАСТОТА СТОЛКНОВЕНИЙ, СРЕДНЯЯ ДЛИНА СВОБОДНОГО ПРОБЕГА

Для того чтобы при исследовании взаимодействия частиц в газе можно было пользоваться понятием сечения столкновения, необходимо предположить, что газ достаточно разрежен и длительность



Фиг. 7. Частица-мишень в газе.

столкновения намного меньше времени между двумя столкновениями. Для наглядности мы здесь будем считать скорости  $g$  относительного движения всех частиц газа приблизительно одинаковыми. (В следующем параграфе это предположение будет снято.) Одну частицу газа будем считать частицей-мишенью, а остальные частицы можно рассматривать как входящие в состав пучков падающих частиц с бесконечно малой интенсивностью  $d\Gamma$ , движущихся к частице-мишени со всех сторон (фиг. 7). Обозначим плотность частиц, имеющих одинаковое направление скорости, через  $dn_1$ ; тогда  $d\Gamma = gdn_1$ . Суммируя по всем бесконечно малым пучкам, получаем, что число падающих частиц, взаимодействующих с частицей-мишенью в единицу времени, равно  $n_1gQ_{12}$ . Если в единице объема находится  $n_2$  частиц-мишеней, то *полная скорость процесса* (т. е. полное число столкновений в единицу времени между падающими частицами и частицами-мишенями на единицу объема) дается выражением

$$R_{12} = n_1 n_2 g Q_{12} (g). \quad (5.1a)$$

Если падающие частицы и частицы-мишени идентичны, то в этой формуле каждое столкновение учитывается дважды, а поэтому  $R_{11} = n_1^2 Q_{11}(g)/2$  (подробнее см. [79, стр. 52]).

Вводя соответствующие сечения, можно определить скорости отдельных атомных процессов или групп процессов. Например, если плотность частиц на некотором возбужденном уровне  $l$  равна  $n_l$ , то скорость потери возбуждения частицами сорта 2 с переходом под действием частиц сорта 1 на некоторый более низкий уровень  $k$  составит

$$R_{12}^{(l \rightarrow k)} = n_1 n_2 g Q_{12}^{(l \rightarrow k)}(g),$$

или, в более общем виде, для некоторого процесса  $p$

$$R_{12}^{(p)} = n_1 n_2 g Q_{12}^{(p)}(g). \quad (5.16)$$

Для процессов, характеризующихся нулевой пороговой энергией, таких, как потеря возбуждения или рекомбинация, наша упрощенная модель, в которой относительные скорости всех частиц принимаются одинаковыми, дает неплохие результаты. Но когда мы переходим к процессам с ненулевой пороговой энергией, типа ионизации и возбуждения, недостаточность такой модели становится очевидной. При определенных условиях лишь у небольшой доли частиц газа относительные энергии будут превышать пороговое значение и только эти частицы смогут принять участие в процессе. Ясно, что в подобных случаях было бы неправильно характеризовать газ единственным значением относительной скорости, и поэтому приходится учитывать фактическое распределение частиц по скоростям (§ 6).

В отличие от эффективного сечения, которое можно назвать атомной или микроскопической величиной, скорость процесса есть величина макроскопическая. Под этим подразумевается то, что скорость процесса зависит от параметров, определяющих термодинамическое состояние газа (температура, давление). Иллюстрацией может служить выражение (6.28) для скорости процесса, где зависимость от температуры содержится в явном виде.

Поскольку можно считать, что любой атомный процесс приводит к уменьшению числа частиц-мишеней в единице объема со скоростью  $R_{12}^{(p)}$ , для этого процесса мы можем написать

$$\frac{dn_2}{dt} = -R_{12}^{(p)}. \quad (5.2)$$

Уравнение (5.2) во многих случаях может быть использовано для определения времени релаксации  $p$ -го процесса:

$$\tau^{(p)} \approx \frac{n_2}{R_{12}^{(p)}}. \quad (5.3)$$

Когда время релаксации процесса  $\tau^{(p)}$  велико по сравнению со временем, в течение которого частица-мишень находится в данной

области, говорят, что поток в данной области «заморожен». Это означает, что можно пренебречь влиянием данного процесса на поток и считать частицы не взаимодействующими. В другом предельном случае, когда  $\tau^{(p)}$  очень мало по сравнению с постоянной времени потока, последний называют «равновесным».

Число всех столкновений *отдельной* падающей частицы в единицу времени со всеми частицами-мишенями газа называется *полной частотой столкновений* (с данными частицами-мишенями) и дается выражением

$$\nu_{12} = \frac{R_{12}}{n_1} = n_2 g Q_{12}(g). \quad (5.4)$$

Частоты столкновений для отдельных процессов определяются аналогичным образом:

$$\nu_{12}^{(p)} = n_2 g Q_{12}^{(p)}(g). \quad (5.5)$$

Примером может служить частота столкновений с передачей импульса

$$\nu_{12}^{(1)} = n_2 g Q_{12}^{(1)}(g), \quad (5.6)$$

которая используется при вычислении коэффициентов переноса [формула (3.7)]. Если в газе имеются частицы-мишени нескольких разных сортов, то полная частота столкновений падающих частиц со всеми частицами-мишенями составит

$$\nu_1 = \sum_s \nu_{1s}. \quad (5.7)$$

(Аналогичное соотношение можно написать для каждого отдельно взятого атомного процесса.) Время между двумя столкновениями определенного вида равно обратной величине соответствующей частоты столкновений.

*Средняя длина свободного пробега* падающей частицы между двумя столкновениями равна произведению скорости частицы на интервал между столкновениями:

$$l_1 = \frac{g}{\nu_1} = \frac{1}{\sum_s n_s Q_{1s}}. \quad (5.8)$$

Траектория падающей частицы имеет вид ломаной линии, длина отдельных участков которой равна  $l_1$ . Поэтому в данном случае нельзя просто говорить о средней длине свободного пробега для одного из нескольких атомных процессов, как это делалось в отношении частоты столкновений. Статистические расчеты, проведенные методом случайных блужданий [48], дают для длины свободного пробега относительно процесса  $p$  следующее выражение:

$$l_1^{(p)} \approx \left( \frac{\nu_1}{\nu_1^{(p)}} \right)^{1/2} l_1. \quad (5.9)$$

Отношение  $v_1/v_1^{(p)}$  равно числу всех столкновений, испытываемых падающей частицей между двумя столкновениями  $p$ -типа. Произведение корня квадратного из этой величины на длину сегмента ломаной является характерной комбинацией, которая фигурирует в теории многих диффузионных процессов.

В случае частично ионизованных газов из всех скоростей процесса наиболее важное значение имеет скорость электронной рекомбинации. Макроскопический коэффициент рекомбинации  $\alpha$  определяется следующим соотношением (в отсутствие процессов ионизации):

$$\frac{dn_e}{dt} = -\alpha n_e n_i, \quad (5.10)$$

где  $n_i$  — плотность ионов, с которыми рекомбинируют электроны. Коэффициенты рекомбинации обычно не очень трудно измерить, и для  $\alpha$  имеется значительное количество данных. Во многих случаях  $\alpha$  — единственная величина, которую необходимо знать. Коэффициенты рекомбинации выражаются в единицах  $\text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$ .

Известны несколько разных механизмов рекомбинации. Если энергия, высвобождаемая при рекомбинации электрона  $e$  и иона  $A^+$ , уносится фотоном  $\phi$ , то рекомбинацию называют *излучательной*. Такой процесс может быть представлен уравнением



Если энергия, высвобождающаяся при рекомбинации, уносится третьим телом, добавляясь к его кинетической энергии, то рекомбинацию называют *трехчастичной*. Поскольку масса электрона значительно меньше массы ионов и атомов, различают два типа трехчастичной рекомбинации — когда третьим телом является электрон:



и когда третьим телом является какая-нибудь тяжелая частица  $X$ :



В том случае, когда электрон рекомбинирует с молекулярным ионом ( $AB^+$ ), особенно эффективным является процесс, при котором энергия рекомбинации идет на диссоциацию молекулы и на увеличение кинетической энергии продуктов реакции. Такой процесс *диссоциативной* рекомбинации представляется уравнением



Избыток энергии, возникающий при рекомбинации, может быть затрачен также на образование нейтрального атома, в котором одновременно возбуждены два электрона. Энергия получившегося дважды возбужденного атома лежит выше границы серии, и такое состояние неустойчиво. Но атом может быть стабилизирован, если

электрон перейдет на более низкий связанный уровень, излучив фотон соответствующей энергии. Такой процесс *двухэлектронной* рекомбинации условно записывается следующим образом:



Фактические значения коэффициентов рекомбинации зависят от типа ионной компоненты, участвующей в процессе, но можно указать приблизительно порядок величины коэффициента  $\alpha$  для всех процессов, перечисленных выше. Типичные значения коэф-

Таблица 7

Типичные коэффициенты рекомбинации

Тип рекомбинации	$\alpha$ , $\text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$ при $T = 300 \text{ K}$
Излучательная	10 <sup>-12</sup>
Трехчастичная (третья частица — электрон)	
$n_e = 10^{12} \text{ см}^{-3}$	9 · 10 <sup>-8</sup>
$n_e = 10^{14} \text{ см}^{-3}$	9 · 10 <sup>-6</sup>
$n_e = 10^{16} \text{ см}^{-3}$	9 · 10 <sup>-4</sup>
Трехчастичная (третья частица — тяжелая)	
He ( $\rho = 100 \text{ Па}$ )	7 · 10 <sup>-9</sup>
Ar ( $\rho = 100 \text{ Па}$ )	7 · 10 <sup>-11</sup>
Воздух ( $\rho = 100 \text{ Па}$ )	2 · 10 <sup>-7</sup>
H <sub>2</sub> ( $\rho = 100 \text{ Па}$ )	2 · 10 <sup>-7</sup>
Диссоциативная	10 <sup>-7</sup>
Двухэлектронная	10 <sup>-12</sup>

фициента  $\alpha$  при комнатной температуре приведены в табл. 7. Значения  $\alpha$  для трехчастичной рекомбинации (третья частица тяжелая) взяты у Мессе и Бархона [60, стр. 635] и вычислены на основании уравнения (9.11), введенного в гл. 5. Значения  $\alpha$  для трехчастичной рекомбинации (третья частица — электрон) вычислены по формуле (в единицах МКС)

$$\alpha = 1,09 \cdot 10^{-20} n_e T^{-9/2} \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-1}, \quad (5.16)$$

выведенной Хинновом и Хиршбергом [43]. Как установлено, эта формула хорошо согласуется с экспериментальными данными, полученными при температурах ниже 3000 K (подробнее см. гл. 9 и 9').

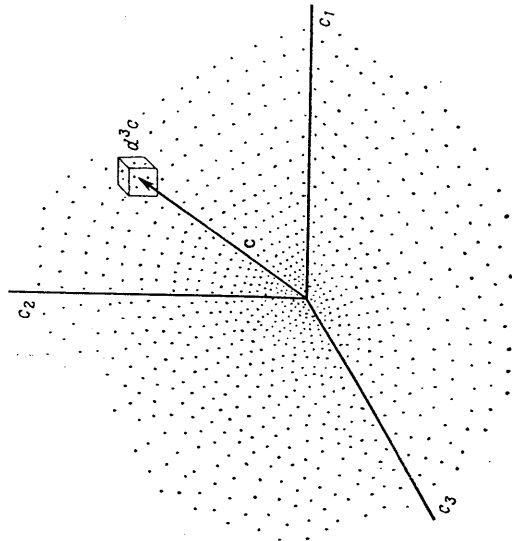
О скорости трехчастичной (третья частица тяжелая) рекомбинации (5.13) имеется очень много экспериментальных данных.

### § 6. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ ПО СКОРОСТЯМ И СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ВЕЛИЧИН

В кинетической теории газов частично ионизованный газ полностью характеризуется заданным функцией распределения по скоростям для каждой его компоненты. Функция распределения  $f(c)$  определяется таким образом, что произведение

$$nf(c) d^3c, \quad (6.1)$$

где  $n$  — локальная плотность рассматриваемой компоненты газа, дает среднюю плотность частиц в единице объема, скорость которых лежит в интервале от  $c$  до  $c + dc$ . В общем случае функция



Фиг. 8. Распределение в пространстве скоростей.

распределения зависит не только от скорости частиц, но и от координаты и времени. По определению функция  $f(c)$  удовлетворяет следующему нормировочному соотношению:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(c) d^3c = 1.$$

Рассмотрим элемент объема газа  $d^3x$ , расположенный в точке  $x$ . Пусть этот объем достаточно велик, так что в нем много частиц, но мал по сравнению с пространственным масштабом изменения макроскопических свойств газа. Скорости всех частиц объема  $d^3x$ , принадлежащих любой конкретной компоненте ионизованного газа, в любой момент времени можно представить точками в пространстве скоростей (фиг. 8). С течением времени эти точки будут перемещать-

Но они, по-видимому, позволяют сделать (см., например, [36]) общий вывод, что скорость такой рекомбинации мала (табл. 7). Правда, результаты некоторых теоретических расчетов противоречат этому выводу (см., например, [68]). Скорости обратных процессов ионизации при столкновении атомов между собой, вычисленные на основании принципа детального равновесия (§ 11), примененного к уравнению (9.11) гл. 5, согласуются по порядку величины с результатами измерений, проведенных Келли [47] на инертных газах, хотя теоретические температурные зависимости отличаются от экспериментальных. К выводам, основанным на таком сравнении, следует относиться осторожно, поскольку скорость трехчастичной рекомбинации (когда третья частица тяжелая) может зависеть от типа участвующих в процессе частиц. Очевидно, что процесс (5.13) еще недостаточно изучен.

Процессы рекомбинации, представленные уравнениями (5.11) — (5.15), принято считать независимыми, и это во многих случаях вполне допустимо. Но, вообще говоря, они могут быть взаимосвязанными. Так, в работе [4] показано наличие связи между излучательным процессом (5.11) и столкновительным процессом (5.12) (подробнее см. гл. 9).

**Задача 5.1.** Имеется смесь гелия и частично ионизованного калия при температуре 2000 К. При какой концентрации гелия скорость трехчастичной рекомбинации  $e + K^+ + He \rightarrow K + He$  превысит скорость излучательной рекомбинации  $e + K^+ \rightarrow K + \varphi$ ?

**Задача 5.2.** Для той же смеси газов, что и в задаче 5.1, определите, при какой концентрации электронов скорость трехчастичной рекомбинации  $e + K^+ + e \rightarrow K + e$  превысит скорость излучательной рекомбинации.

**Задача 5.3.** В медленно движущуюся струю аргона с начальной температурой 2000 К и давлением 400 кПа вводится небольшое количество паров калия так, что концентрация электронов становится равной  $10^{12} \text{ см}^{-3}$ . Затем этот газ проходит, расширяясь, через сверхзвуковое сопло длиной 8 см и ускоряется до 1000 м.с<sup>-1</sup>. После расширения температура газа становится равной 1100 К, а давление — 100 кПа. Определите приблизительно плотность электронов на выходе сопла. Проведите все необходимые выкладки.

**Задача 5.4.** Исходя из формулы (5.9), выведенной методом случайных блужданий, определите среднее расстояние  $\bar{l}^R$ , которое проходит ион до рекомбинации. Вычислите величину  $\bar{l}^R$  для ионов калия, находящихся в аргоне при атмосферном давлении и температуре 2000 К, предполагая, что мы имеем дело с трехчастичной рекомбинацией (когда третья частица — электрон). Концентрацию электронов считайте равной  $10^{12} \text{ см}^{-3}$ .

Вообще говоря, скорости компонент газа могут отличаться от средней массовой скорости и одна от другой. Эти различия удобно характеризовать *диффузионной скоростью* каждой компоненты. Так, диффузионная скорость электронов определяется следующей разностью:

$$U_e(x, t) \equiv u_e(x, t) - u(x, t) \quad (6.6)$$

Аналогичные соотношения могут быть написаны и для других компонент. Из определения массовой скорости следует, что диффузионные скорости должны удовлетворять соотношению

$$\rho_e U_e + \rho_i U_i + \rho_n U_n = 0 \quad (6.7)$$

При описании столкновительных газов обычно удобнее оперировать со скоростями частиц, измеренными в системе координат, движущейся со средней массовой скоростью  $u(x, t)$ , а не в лабораторной системе координат, как было в случае, представленном на фиг. 8. Для этой цели мы можем ввести так называемую *хаотическую скорость*

$$C \equiv c - u(x, t) \quad (6.8)$$

и считать функцию распределения зависящей от  $C$ , а не от  $c$ . Тогда среднее число частиц любой из компонент (в единице объема) с хаотической скоростью, лежащей в интервале от  $C$  до  $C + dC$ , будет равно  $n_f(C) d^3C$ . Выражение для диффузионной скорости компоненты  $s$  будет аналогично выражению (6.2):

$$U_s(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C f_s(C) d^3C.$$

Для простого газа (т. е. газа, состоящего из одной компоненты)  $U_s = 0$ . Результаты, выраженные через среднюю массовую скорость, в известном смысле соответствуют отклонениям первого порядка от того, что мы имеем в случае неподвижного газа.

Если предположить, что каждая частица компоненты  $s$  несет заряд  $e_s$ , то можно говорить о потоке плотности заряда, переносимого данной компонентой (в некоторой лабораторной системе координат); он называется *плотностью тока компоненты* и дается выражением

$$j_s \equiv e_s n_s u_s. \quad (6.9)$$

Введя диффузионную скорость компоненты  $U_s$  и произведя подстановку  $u_s = u + U_s$ , мы можем написать

$$j_s = e_s n_s u + J_s, \quad (6.10)$$

где

$$J_s \equiv e_s n_s U_s \quad (6.11)$$

ся, некоторые будут исчезать, а другие будут появляться, так как частицы выходят из объема  $d^3x$  и входят в него. Рассмотрим теперь элемент объема в пространстве скоростей  $d^3c$ , положение которого задается вектором  $c$ . Функцию распределения определим так, чтобы величина  $n_f(c) d^3c d^3x$  давала полное число частиц рассматриваемого типа в объеме  $d^3c$ , усредненное по промежутку времени, достаточно большому для того, чтобы много частиц могло войти в рассматриваемый объем или выйти из него, но малому по сравнению с временными масштабами изменения макроскопических свойств газа.

В простейшей модели частично ионизованного газа необходимо ввести минимум три типа частиц — электроны, положительные ионы и нейтральные частицы. В дальнейшем часто будет удобно представлять газ именно такой моделью. Приближенные результаты для более сложных газов, содержащих несколько ионных и нейтральных компонент, могут быть получены с помощью простой модели, если ее параметры интерпретировать как определенным образом усредненные параметры ионной и нейтральной компонент сложной реальной системы.

Для газа, состоящего из разных компонент, можно определить *среднюю скорость* каждой его компоненты по отношению к некоторой лабораторной системе отсчета. Таким образом, если  $f_e(c)$  — функция распределения электронов по скоростям в лабораторной системе координат, то средняя скорость электронного газа дается выражением

$$u_e = \int_{-\infty}^{\infty} c f_e(c) d^3c. \quad (6.2)$$

В общем случае величина  $u_e = u_e(x, t)$  есть функция координаты и времени. Скорости ионной  $u_i(x, t)$  и нейтральной  $u_n(x, t)$  компоненты определяются аналогичным образом. Удельные плотности электронов, ионов и нейтральных частиц определяются следующими соотношениями:

$$\rho_e(x, t) = m_e n_e(x, t), \quad (6.3a)$$

$$\rho_i(x, t) = m_i n_i(x, t), \quad (6.3b)$$

$$\rho_n(x, t) = m_n n_n(x, t). \quad (6.3в)$$

Полная плотность газа равна

$$\rho(x, t) = \rho_e + \rho_i + \rho_n. \quad (6.4)$$

Средняя массовая скорость газа определяется соотношением

$$u(x, t) \equiv \frac{\rho_e u_e + \rho_i u_i + \rho_n u_n}{\rho}. \quad (6.5)$$

а модуль этого вектора равен

$$d\Gamma_1 = [n_1 f_1(C) d^3C] |C - W|. \quad (6.186)$$

По определению эффективного сечения процесса число падающих частиц пучка бесконечно малой интенсивности, взаимодействующих в единицу времени в процессе  $p$  с одной частицей-мишенью, равно

$$n_1 f_1(C) d^3C |C - W| Q_{12}^{(p)}(|C - W|).$$

Поскольку в единице объема находится  $n_2 f_2(W) d^3W$  частиц-мишеней, скорости которых лежат в интервале от  $W$  до  $W + dW$ , среднее число процессов  $p$ -типа, протекающих в единицу времени и в единице объема между падающими частицами со скоростями класса  $C$  и частицами-мишенями со скоростями класса  $W$ , т. е. то, что мы можем называть *дифференциальной скоростью процесса*  $p$ , определяется соотношением

$$dR_{12}^{(p)} = n_1 n_2 f_1(C) f_2(W) |C - W| Q_{12}^{(p)}(|C - W|) d^3C d^3W. \quad (6.19a)$$

Полное число процессов  $p$ , протекающих в единице объема за единицу времени, составляет

$$R_{12}^{(p)} = n_1 n_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(C) f_2(W) |C - W| Q_{12}^{(p)}(|C - W|) d^3C d^3W. \quad (6.196)$$

Интеграл в уравнении (6.196) есть не что иное, как среднее значение величины  $gQ_{12}^{(p)}(g)$ . В случае процессов, имеющих пороговую энергию, как явствует из выражения (6.196), область интегрирования уменьшается и сводится к той области, где  $Q_{12}^{(p)} \neq 0$ . Если падающие частицы и частицы-мишени идентичны, то в этой формуле каждое столкновение учитывается дважды, а потому в правую часть равенства (6.196) нужно добавить множитель  $1/2$  (подробнее см. [79]).

Предположим теперь, что  $f_1$  и  $f_2$  — максвелловские функции хаотических скоростей, соответствующие температуре  $T$ , т. е.

$$f_1(C) = f_1^{(M)} = \left( \frac{m_1}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_1 C^2 / 2kT}, \quad (6.20)$$

и аналогичным образом записывается функция  $f_2(W)$ . (Строго говоря, функции распределения такого вида применимы только в условиях термодинамического равновесия, а в неравновесных случаях они дают лишь приближенные результаты. Но такое приближение часто оказывается вполне удовлетворительным.) Тогда

4\*

есть плотность тока *проводимости* данной компоненты, а  $e_s n_s \mathbf{u}$  — плотность *конвекционного* тока данной компоненты. В противоположность конвекционному току проводимости не зависит от системы отсчета. Полная плотность тока для всего газа получается суммированием по всем его компонентам,  $\mathbf{j} = \sum_s \mathbf{j}_s$ , и может быть записана как

$$\mathbf{j} \equiv \rho^c \mathbf{u} + \mathbf{J}, \quad (6.12)$$

где

$$\mathbf{J} = \sum_s e_s n_s \mathbf{U}_s, \quad (6.13)$$

— *плотность полного тока проводимости*, а величина

$$\rho^c \equiv \sum_s e_s n_s, \quad (6.14)$$

— *полная плотность заряда*. Если мы обозначим заряд, переносимый электроном, через  $-e$  и предположим, что в нашей модели заряд каждого иона равен единице, то получим

$$\mathbf{J} = e (n_i \mathbf{U}_i - n_e \mathbf{U}_e) \quad (6.15)$$

и

$$\rho^c = e (n_i - n_e). \quad (6.16)$$

Чтобы вывести формулу для скорости процесса, аналогичную формуле (5.16), т. е.  $R_{12}^{(p)} = n_1 n_2 g Q_{12}^{(p)}(g)$ , но с учетом функции распределения частиц по скоростям, мы поступим следующим образом. Представим себе газ (фиг. 7) в виде суперпозиции пучков падающих частиц бесконечно малой интенсивности. Типичный пучок состоит из частиц, принадлежащих к классу скоростей  $C$ . В системе координат, движущейся с массовой скоростью, плотность падающих частиц в таком пучке равна  $dn_1 = n_1 f_1(C) d^3C$ . Скорость каждой такой падающей частицы относительно частицы-мишени со скоростью  $W$  равна  $\mathbf{g} = C - W$ . Следовательно, число частиц пучка, пересекающих в единицу времени единичную площадку, перпендикулярную вектору  $\mathbf{g}$ , равно  $dn_1 g$ , где

$$g = |C - W|. \quad (6.17)$$

Поскольку пучок имеет то же направление, что и вектор  $\mathbf{g}$ , *дифференциальная плотность потока* (падающих частиц, движущихся со скоростью  $C$  относительно частиц-мишеней, скорость которых равна  $W$ ) может быть в векторной форме записана следующим образом:

$$d\Gamma_1 = [n_1 f_1(C) d^3C] (C - W), \quad (6.18a)$$

скорость процесса  $p$  может быть записана следующим образом:

$$R_{12}^{(p)} = n_1 n_2 \frac{(m_1 m_2)^{3/2}}{(2\pi kT)^3} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-(m_1 C^2 + m_2 W^2)/2kT} |C - W| \times$$

$$\times Q_{12}^{(p)}(|C - W|) d^3 C d^3 W. \quad (6.21)$$

Теперь мы произведем замену переменных интегрирования, введя скорости центра масс и относительные скорости частиц. В системе координат, движущейся со средней массовой скоростью, они определяются следующим образом:

$$\mathbf{G} \equiv \frac{m_1 \mathbf{C} - m_2 \mathbf{W}}{m_1 + m_2}, \quad (6.22a)$$

$$\mathbf{g} \equiv \mathbf{C} - \mathbf{W}. \quad (6.22b)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\mathbf{C} = \mathbf{G} + \frac{m_2}{m_1} \mathbf{g}, \quad (6.23a)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{G} - \frac{m_1}{m_2} \mathbf{g}, \quad (6.23b)$$

где

$$m_{12} \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (6.24)$$

— приведенная масса. Нетрудно показать, что якобиан такого преобразования равен единице, и поэтому

$$d^3 C d^3 W = d^3 G d^3 g. \quad (6.25)$$

С учетом формул (6.23) полную кинетическую энергию двух частиц в системе координат, движущейся со средней массовой скоростью, можно записать в виде

$$\frac{m_1 C^2}{2} + \frac{m_2 W^2}{2} = \frac{m_1 + m_2}{2} G^2 + \frac{m_{12}}{2} g^2. \quad (6.26)$$

Первый член в правой части равенства (6.26) есть кинетическая энергия системы двух частиц, движущейся как целое со скоростью центра масс в системе отсчета, которая сама движется со средней массовой скоростью. Второй член есть кинетическая энергия относительного движения

$$\varepsilon = \frac{m_{12}}{2} g^2. \quad (6.27)$$

Относительные скорости частиц  $\mathbf{g} = \mathbf{C} - \mathbf{W} = \mathbf{c} - \mathbf{w}$  в лабораторной системе отсчета и системе отсчета, движущейся со средней массовой скоростью, одинаковы, так что энергия  $\varepsilon$  тоже одинакова в обеих системах отсчета. Скорость центра масс частиц в лабораторной системе отсчета равна  $\mathbf{G}_u = \mathbf{G} + \mathbf{u}$ .

Вводя сферические координаты, можно написать  $d^3 g = g^2 dg d\Omega_g$ , где  $d\Omega_g$  — элемент телесного угла в направлении  $\mathbf{g}$ . Аналогичное выражение может быть написано для  $d^3 C$ . Произведя соответствующие подстановки в формуле (6.21) и взяв интеграл по телесному углу, получим

$$R_{12}^{(p)} = n_1 n_2 \frac{(4\pi)^2 (m_1 m_2)^{3/2}}{(2\pi kT)^3} \int_0^\infty G^2 e^{-(m_1 + m_2) G^2 / 2kT} dG \times$$

$$\times \int_0^\infty g^3 e^{-m_{12} g^2 / 2kT} Q_{12}^{(p)}(g) dg.$$

Поскольку  $\int_0^\infty y^2 e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}/4$ , имеем окончательно

$$R_{12}^{(p)} = n_1 n_2 \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m_{12}}{2kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty g^3 e^{-m_{12} g^2 / 2kT} Q_{12}^{(p)}(g) dg = \\ = n_1 n_2 \left( \frac{8kT}{\pi m_{12}} \right)^{1/2} \int_0^\infty x e^{-x} Q_{12}^{(p)} \left( \sqrt{\frac{2kT}{m_{12}}} x \right) dx, \quad (6.28)$$

где  $x = m_{12} g^2 / 2kT$ . Выражение (6.28) показывает, что скорость процесса есть макроскопическая величина, зависящая от термодинамического состояния газа. Для процесса, имеющего порог, нижний предел интегрирования в формуле (6.28) будет равен пороговой энергии.

Экспоненциальный весовой множитель, который входит в подынтегральное выражение в формуле (6.28), соответствует тому, что распределение частиц, участвующих в рассматриваемой реакции, по скоростям считается максвелловским. В некоторых случаях предположение о максвелловском распределении не выполняется и формула (6.28) дает неверные результаты. В качестве примера мы можем рассмотреть скорость процесса электронного возбуждения  $R_{12}^{(h \rightarrow l)}$  в газе при температуре, значительно меньшей пороговой энергии. Тогда вклад в интеграл (6.28) даст только высокоэнергетический «хвост» функции распределения электронов по скоростям. Поскольку процесс возбуждения приводит к убыванию электронов в хвосте, если только не происходит их пополнения с равной скоростью, то вполне можно считать, что основная часть электронов имеет приблизительно максвелловское распределение по скоростям, а электроны высокоэнергетического хвоста распределены иначе. В этом случае, как это показано в гл. 9, экспоненциальный весовой множитель  $\exp\{-x\}$ , должен быть заменен другим, что может существенно повлиять на величину скорости процесса.

Формулы (6.29) и (6.30) можно рассматривать как определение среднего (с энергетическим весом) значения зависящей от скорости частоты столкновений с передачей импульса, ибо нетрудно показать, что

$$\bar{v}_{12} = \int_0^{\infty} \left( \frac{m_{12}g^2/2}{3kT/2} \right)^{1/2} v_{12}^{(1)}(g) f_{12}^M(g) 4\pi g^2 dg.$$

Здесь  $f_{12}^M$  — максвелловская функция распределения для гипотетической частицы, имеющей приведенную массу  $m_{12}$ . Некоторые примеры усредненных по энергии сечений столкновений, вычисленных по формуле (6.30), представлены на фиг. 29.

Теперь можно точнее определить среднюю длину свободного пробега, даваемую формулой (5.8):

$$l_1 \equiv \frac{\bar{C}_1}{\bar{v}_1} = \left[ \sum_s \left( \frac{m_1}{m_{1s}} \right)^{1/2} n_s \bar{Q}_{1s} \right]^{-1}, \quad (6.33)$$

где

$$\bar{C}_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} C f_1(C) d^3C = \left( \frac{8kT}{\pi m_1} \right)^{1/2} \quad (6.34)$$

— средняя скорость хаотического движения максвелловских падающих частиц, добавляющаяся к локальной средней массовой скорости газа.

**Задача 6.1.** Покажите, что якобиан преобразования (6.22) или (6.23) равен единице и поэтому  $d^3C d^3W = d^3G d^3g$ .

**Задача 6.2.** Если скорости двух частиц до столкновения даются формулами (6.23), то после столкновения их скорости равны

$$C' = G' + \frac{m_{12}}{m_1} g',$$

$$W' = G' - \frac{m_{12}}{m_2} g'.$$

При упругом столкновении полный импульс и полная кинетическая энергия частиц сохраняются. Докажите, что  $G' = G$  и что  $|g'| = |g|$ .

**Задача 6.3.** Частица с массой  $m$  и начальной скоростью  $S$  взаимодействует с первоначально покоящимся атомом (масса которого равна  $M$ ) так, что после столкновения направление ее скорости не меняется. Атом возбуждается и переходит с основного уровня на уровень, лежащий выше на величину  $\epsilon_{12}$ . Скорости частицы и атома после столкновения стали  $C'$  и  $W'$ .

В заключение данного параграфа скажем несколько слов о кинетической теории коэффициентов переноса. Исторически первая попытка связать коэффициенты переноса с микроскопическими характеристиками частиц, составляющих газ, была сделана на основе понятия средней длины свободного пробега или, что эквивалентно, средней частоты столкновений. Такой подход будет использован в § 12 при вычислении вязкости и теплопроводности частично ионизованного газа и в § 13 при вычислении электропроводности. Как мы увидим в дальнейшем, «метод средней длины свободного пробега» неудовлетворителен в том смысле, что он дает выражения, содержащие усредненные (по скоростям частиц) частоты столкновений, но не предполагает какого-нибудь определенного способа усреднения. Устанавливая ту или иную процедуру усреднения, можно получить хорошие результаты, отличающиеся от точных, вероятно, не более чем в 2—3 раза. Для достижения же большей точности следует использовать более строгий кинетический подход, основанный на вычислении функции распределения из уравнения Больцмана. Такой подход изложен в гл. 7 и 8. Как будет там показано, он не основан на понятии средней длины свободного пробега.

В большинстве случаев коэффициенты переноса определяются в основном упругими столкновениями с рассеянием на большие углы, и в связи с этим мы рассмотрим частоту столкновений с передачей импульса  $Q_{12}^{(1)}(g) = n_2 Q_{12}^{(1)}(g)$ , определенную соотношением (5.6). Чтобы найти среднюю частоту столкновений с передачей импульса, мы в соответствии с первым приближением более строгой теории (приближением Чепмена — Энскога) напишем

$$\bar{v}_{12} \equiv n_2 \bar{g}_{12} Q_{12}, \quad (6.29)$$

где  $\bar{Q}_{12}$  — среднее сечение столкновения с передачей импульса, даваемое выражением

$$\bar{Q}_{12} \equiv \frac{2}{3} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} Q_{12}^{(1)} \left( \sqrt{\frac{2kT}{m_{12}}} x \right) dx, \quad (6.30)$$

а величина

$$\bar{g}_{12} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |C - W| f_1(C) f_2(W) d^3C d^3W = \left( \frac{8kT}{\pi m_{12}} \right)^{1/2} \quad (6.31)$$

есть средняя относительная скорость частиц с максвелловским распределением по скоростям. Выражение (6.31) получено с использованием формулы (6.28). В случае когда сечение столкновения медленно меняется вблизи  $\bar{g}_{12}$ , можно воспользоваться приближенным соотношением:

$$\bar{Q}_{12} \approx \frac{4}{3} Q_{12}^{(1)}(\bar{g}_{12}) \approx Q_{12}^{(1)}(\bar{g}_{12}). \quad (6.32)$$



**Задача 6.10.** Плотность хаотического тока для каждой компоненты газа определяется как заряд, переносимый данной компонентой в единицу времени через единичную площадку (в одну сторону). Вычислите плотность электронного и ионного хаотического тока (в амперах на квадратный сантиметр) в газе, содержащем частично ионизованный калий, при температуре 0,216 эВ и при  $n_e = n_i = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ . Считайте, что частицы имеют максвелловское распределение по скоростям.

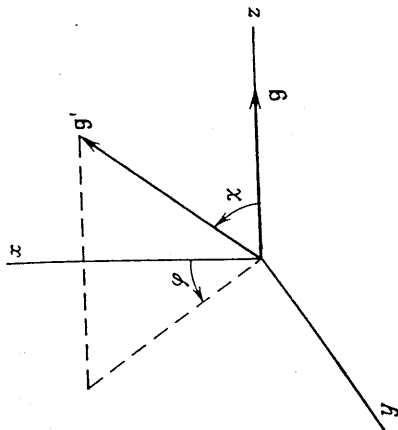
### § 7. ПЕРЕДАЧА ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА ПРИ УПРУГОМ СТОЛКНОВЕНИИ

При упругом столкновении двух частиц их суммарная кинетическая энергия не меняется. Скорости же частиц в любой системе отсчета, кроме системы, движущейся со скоростью центра масс двух частиц (задача 6.2), в процессе столкновения не остаются без изменения. Например, если падающая частица налетает на первоначально покоящуюся частицу-мишень, последняя приходит в движение. При этом падающая частица теряет часть своей кинетической энергии.

Рассмотрим движущийся газ, описываемый полем макроскопических средних массовых скоростей  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ , и две частицы в нем, которые в момент времени  $t$  находятся в точке  $x$  с координатами, измеряемыми в локальной системе отсчета, движущейся с мгновенной скоростью  $\mathbf{u}$ . В макроскопическом масштабе расстояние различие в фактических координатах частиц несущественно, а в макроскопических масштабах времени длительность столкновения бесконечно мала. Обозначим скорости частиц в указанной системе отсчета до столкновения через  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{W}$  и предположим, что столкновение частиц приводит к рассеянию, описываемому углами  $(\chi, \varphi)$  в движущейся системе отсчета (фиг. 9). Согласно формуле (6.23а), скорости падающей частицы до и после столкновения могут быть записаны в виде

$$\mathbf{C} = \mathbf{G} + \frac{m_{12}}{m_1} \mathbf{g}, \quad (7.1a)$$

$$\mathbf{C}' = \mathbf{G} + \frac{m_{12}}{m_1} \mathbf{g}'. \quad (7.1b)$$



Фиг. 9. Рассеяние в относительной системе отсчета.

1. Как будут выглядеть уравнения законов сохранения при таком столкновении?

2. Выразите конечную скорость частицы с массой  $m$  через  $C$ ,  $M$  и  $\mathbf{g}_{12}$ .

3. Пользуясь полученной формулой, найдите минимальную начальную кинетическую энергию, которую должна иметь частица. Какова минимальная кинетическая энергия при  $m = 2M$ ? Проанализируйте результаты.

**Задача 6.4.** Выведите приближенное выражение для скорости процесса ионизации электронным ударом в частично ионизованной цезиевой плазме. При этом можно считать, что температура плазмы намного меньше потенциала ионизации цезия (3,89 эВ).

**Задача 6.5.** Покажите, что средняя и среднеквадратичная скорости падающих частиц, имеющих максвелловское распределение по скоростям, равны  $(8kT/\pi m_1)^{1/2}$  и  $3kT/m_1$ . Покажите, что средняя относительная скорость дается выражением  $\bar{g}_{12} = (8kT/\pi m_{12})^{1/2}$ , среднеквадратичная относительная скорость — выражением  $\bar{g}_{12}^2 = 3kT/m_{12}$ . Покажите, что  $\bar{g}_{12}^2 = m_{12}/kT$  и  $\bar{g}_{12}^{-2} = (2m_{12}/\pi kT)^{1/2}$ .

**Задача 6.6.** Температура газа равна 2500 К. Вычислите средние скорости следующих частиц: 1) электрона, 2) атома водорода, 3) атома аргона, 4) атома цезия. При какой температуре средняя скорость атомов аргона будет равна средней скорости электронов ( $T = 2500 \text{ К}$ )?

**Задача 6.7.** Среднее сечение рекомбинации можно вычислять по приближенной формуле  $\alpha \approx \bar{g}_e \bar{Q}_{\text{рекомб}}$ . Пользуясь данными табл. 7, вычислите среднее сечение излучательной рекомбинации.

**Задача 6.8.** Согласно формуле (6.18а), дифференциальную плотность потока, соответствующую нулевой средней массовой скорости, для частиц любого типа можно написать в виде  $d\Gamma = n f(\mathbf{C}) \mathbf{C} d^3\mathbf{C}$ . Покажите, что в случае максвелловского распределения по скоростям полное число частиц, пересекающих в единицу времени единичную площадку (в одну сторону), равно

$$\bar{C} = \frac{n\bar{C}}{4}.$$

где  $\bar{C} = (8kT/\pi m)^{1/2}$ .

**Задача 6.9.** Покажите, что в случае, когда частицы типа 1 имеют максвелловское распределение с температурой  $T_1$ , а частицы типа 2 — максвелловское распределение с температурой  $T_2$ , вместо формулы (6.28) можно пользоваться выражением

$$R_{12}^{(p)} = n_1 n_2 \left[ \frac{8k}{\pi} \left( \frac{T_1}{m_1} + \frac{T_2}{m_2} \right)^{1/2} \int_0^\infty x e^{-x} Q_{12}^{(p)}(\mathbf{g}) d\mathbf{x} \right].$$

Здесь использовано равенство  $\mathbf{G}' = \mathbf{G}$ , которое следует из закона сохранения импульса при упругом столкновении (задача 6.2).

Энергия, теряемая падающей частицей в процессе столкновения, определяется следующим образом:

$$\Delta \varepsilon_{12}(\mathbf{C}, \mathbf{W}; \chi, \varphi) \equiv \frac{m_1 C^2}{2} - \frac{m_1 C'^2}{2} = m_{12} \mathbf{G} \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{g}') \quad (7.2)$$

Производя усреднение по всем углам рассеяния, получим

$$\Delta \varepsilon_{12}(\mathbf{C}, \mathbf{W}) \equiv \int_{4\pi} \Delta \varepsilon_{12}(\mathbf{C}, \mathbf{W}; \chi, \varphi) p_{12}(\chi, \varphi) d\Omega = \\ = m_{12} \mathbf{G} \cdot \int_{4\pi} (\mathbf{g} - \mathbf{g}') \frac{I_{12}^{(e)}(\chi) d\Omega}{Q_{12}^{(e)}}, \quad (7.3a)$$

где  $p_{12}(\chi, \varphi) d\Omega$  — вероятность упругого рассеяния в элемент телесного угла  $d\Omega$ , определяемая формулой (3.8). Для вычисления интеграла в выражении (7.3a) воспользуемся сферической системой координат, ось  $z$  которой направлена параллельно вектору  $\mathbf{g}$ . Поскольку  $\mathbf{g}' = |g \sin \chi \cos \varphi, g \sin \chi \sin \varphi, g \cos \chi|$ , мы можем написать

$$\int_{4\pi} (\mathbf{g} - \mathbf{g}') I_{12}^{(e)}(\chi) d\Omega = \\ = g \int_0^\pi I_{12}^{(e)}(\chi) \sin \chi \int_0^{2\pi} [-\sin \chi \cos \varphi, -\sin \chi \sin \varphi, (1 - \cos \chi)] d\varphi d\chi = \\ = g \int_0^\pi I_{12}^{(e)}(\chi) \sin \chi [0, 0, 2\pi(1 - \cos \chi)] d\chi = \\ = g [0, 0, Q_{12}^{(1)}(g)] = Q_{12}^{(1)}(g) \mathbf{g}.$$

Используя соотношения (6.22), получаем окончательно

$$\Delta \varepsilon_{12}(\mathbf{C}, \mathbf{W}) = m_{12} \frac{Q_{12}^{(1)}(g)}{Q_{12}^{(e)}(g)} \mathbf{G} \cdot \mathbf{g} = \\ = \frac{m_{12}}{m_1 + m_2} \frac{Q_{12}^{(1)}(g)}{Q_{12}^{(e)}(g)} (m_1 \mathbf{C} + m_2 \mathbf{W}) \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{W}). \quad (7.3b)$$

Рассмотрим сначала частный случай, когда частица-мишень первоначально покоится, т. е.  $\mathbf{W} = 0$ . Тогда из формулы (7.3b) следует, что

$$\Delta \varepsilon_{12}(\mathbf{C}, 0) = \frac{2m_{12}}{m_1 + m_2} \frac{Q_{12}^{(1)}(g)}{Q_{12}^{(e)}(g)} \left( \frac{m_1 C^2}{2} \right).$$

Таким образом, средняя доля начальной кинетической энергии, теряемая падающей частицей, которая налетает на покоящуюся частицу-мишень со скоростью  $C$ , равна

$$\frac{\Delta \varepsilon_{12}(\mathbf{C}, 0)}{m_1 C^2/2} = \frac{2m_{12}}{m_1 + m_2} \frac{Q_{12}^{(1)}(C)}{Q_{12}^{(e)}(C)}. \quad (7.4)$$

Этот результат чаще всего применяется к столкновениям, в которых падающей частицей является электрон, а частицей-мишенью — тяжелая частица (атом, молекула или ион). Поскольку  $Q_{12}^{(1)} \approx Q_{12}^{(e)}$ , получим

$$\frac{\Delta \varepsilon_{eh}(\mathbf{C}, 0)}{m_e C^2/2} \approx \frac{2m_e}{m_h}. \quad (7.5)$$

где  $m_h$  — масса тяжелой частицы. То обстоятельство, что отношение масс в правой части равенства (7.5) мало, означает, что в некоторых случаях энергетический обмен между частицами газа может быть весьма незначительным. В подобных случаях вводится понятие *температуры электронов*  $T_e$ , которая может существенно отличаться от температуры тяжелых частиц  $T$ . Такая ситуация наблюдается часто, например когда мы имеем дело с разрядами в газах, где  $T_e > T$  (гл. 4, § 5). Можно также ввести частоту столкновений с обменом энергией

$$\nu_{eh}^E \equiv \frac{2m_e}{m_h} \nu_{eh}^{(1)}. \quad (7.6)$$

Величина, обратная  $\nu_{eh}^E$ , есть характерное время, в течение которого электрон может передать свою энергию тяжелым частицам через упругие столкновения.

Вернемся теперь к формуле (7.3b) и вычислим энергию, теряемую падающей частицей с начальной скоростью  $C$  в упругих столкновениях, усредненную по скоростям всех частиц-мишеней типа 2, присутствующих в газе, т. е. величину

$$\Delta \varepsilon_{12}(\mathbf{C}) \equiv \int \Delta \varepsilon_{12}(\mathbf{C}, \mathbf{W}) f_2(\mathbf{W}) d^3W. \quad (7.7)$$

Для того чтобы провести такое вычисление, предположим, что отношение  $Q_{12}^{(1)}/Q_{12}^{(e)}$  не зависит от относительной скорости. С учетом определенных диффузионной скорости [формула (6.6)]

$$\mathbf{U}_2 \equiv \int \mathbf{W} f_2(\mathbf{W}) d^3W \quad (7.8)$$

и температуры

$$\frac{3}{2} kT_2 \equiv \int \frac{m_2 W^2}{2} f_2(\mathbf{W}) d^3W = \frac{m_2 \bar{W}^2}{2} \quad [(7.9)]$$

получим

$$\Delta \varepsilon_{12}(C) = \frac{2m_{12}}{m_1 + m_2} \frac{Q_{12}^{(1)}}{Q_{12}^{(e)}} \left[ \frac{m_1 C^2}{2} - \frac{3}{2} kT_2 + \frac{m_2 - m_1}{2} C \cdot U_2 \right]. \quad (7.10)$$

Наконец, мы можем вычислить среднюю энергию, теряемую падающей частицей за одно столкновение в результате упругих столкновений со всеми частицами-мишенями типа 2:

$$\overline{\Delta \varepsilon_{12}} \equiv \int \Delta \varepsilon_{12}(C) f_1(C) d^3C. \quad (7.11a)$$

Окончательно получим

$$\overline{\Delta \varepsilon_{12}} = \frac{2m_{12}}{m_1 + m_2} \frac{Q_{12}^{(1)}}{Q_{12}^{(e)}} \left[ \frac{3}{2} k(T_1 - T_2) + \frac{m_2 - m_1}{2} U_1 \cdot U_2 \right], \quad (7.11б)$$

или

$$\frac{\overline{\Delta \varepsilon_{12}}}{\varepsilon_1} = \frac{2m_{12}}{m_1 + m_2} \frac{Q_{12}^{(1)}}{Q_{12}^{(e)}} \left[ \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{m_2 - m_1}{m_1} \frac{U_1 \cdot U_2}{c^2} \right]. \quad (7.11в)$$

По порядку величины второй член в формуле (7.11в) равен

$$\frac{m_2 - m_1}{\sqrt{m_2 m_1}} \frac{U_1 U_2}{c \bar{W}}.$$

Отношение  $U/c$  диффузионной скорости любой компоненты столкновительного газа к тепловой обычно очень мало, а потому второй член значительно меньше единицы<sup>1)</sup>. Поэтому соотношение (7.11б) можно переписать в приближенном виде:

$$\overline{\Delta \varepsilon_{12}} \approx \frac{2m_{12}}{m_1 + m_2} \frac{3}{2} k(T_1 - T_2). \quad (7.11г)$$

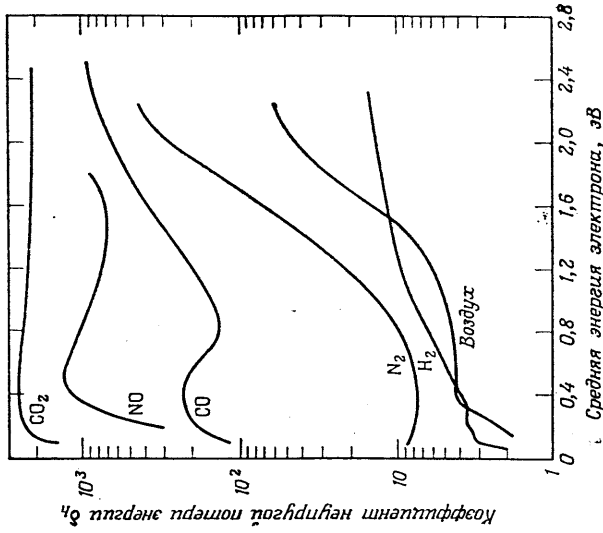
Формула (7.11г) хорошо выполняется для столкновений электронов с атомами, особенно при температуре ниже пороговой энергии первого возбужденного уровня. В случае же столкновений электронов с молекулами нужно учитывать влияние неупругих столкновений. Для этого можно ввести коэффициент неупругой потери энергии  $\delta_h$  и записать среднюю энергию, теряемую одним электроном за одно столкновение, в виде

$$\overline{\Delta \varepsilon_{eh}} = \frac{2m_e}{m_h} \delta_h \frac{3}{2} k(T_e - T).$$

На фиг. 10 (см. также [59, стр. 727]) представлены экспериментальные значения  $\delta_h$  для ряда молекулярных газов при комнатной температуре, полученные в условиях очень слабой ионизации, когда распределение частиц, по-видимому, не максвелловское.

<sup>1)</sup> По той же самой причине второй член не появляется в результатах точной теории в гл. 8. Читателя следует предостеречь от некритического принятия таких обычно малых «лишних» членов, получаемых на основе приближенного анализа.

Поскольку экспериментальные данные довольно трудно привести к такому виду [61, стр. 53], этот график служит лишь иллюстрацией, показывающей, что  $\delta_h$  может отличаться от единицы на несколько порядков величины.



Фиг. 10. Энергия, теряемая электронами при столкновении с различными молекулами [76, стр. 148].

Отметим, что изложенный способ учета неупругой потери энергии при столкновениях электронов с молекулами является приближенным даже в том случае, если, как предполагается здесь, скорость обмена между вращательной и колебательной модами, с одной стороны, и поступательной модой, с другой — велика. Когда же связь слабая, необходим более детальный расчет (см., например, [7]).

Действуя так же, как в начале данного параграфа, мы можем вычислить и среднюю потерю импульса при упругом столкновении между частицами двух типов в газе. Из соотношения (7.1) для каково-нибудь конкретного столкновения имеем

$$\Delta p_{12}(C, W; \chi, \varphi) \equiv m_1 C - m_1 C' = m_{12}(g - g'). \quad (7.13)$$

Усредняя по углам рассеяния, получим

$$\Delta p_{12}(G, W) = m_{12} \frac{Q_{12}^{(1)}(g)}{Q_{12}^{(e)}(g)} g = m_{12} \frac{Q_{12}^{(1)}(C - W)}{Q_{12}^{(e)}(C - W)}. \quad (7.14)$$

Если опять предположить, что  $Q_{12}^{(1)}/Q_{12}^{(e)}$  не зависит от относительной скорости, то потеря импульса падающей частицей, имеющей скорость  $C$  за одно столкновение, усредненная по столкновениям со всеми частицами-мишенями типа 2, будет равна

$$\Delta p_{12}(C) \equiv \int \Delta p_{12}(C, W) f_2(W) d^3W = m_{12} \frac{Q_{12}^{(1)}}{Q_{12}^{(e)}} (C - U_2). \quad (7.15a)$$

В большинстве случаев  $|U_2| \ll |C|$ , и, таким образом, мы имеем приближенный результат, который будет использован в § 12:

$$\Delta p_{12}(C) \approx \frac{m_{12}}{m_1} p_1, \quad (7.15b)$$

где  $p_1 = m_1 C$  — начальный импульс падающей частицы. И наконец, усредняя соотношение (7.15a) по всем падающим частицам, мы получим среднюю потерю импульса падающими частицами при одном упругом столкновении с частицей-мишенью типа 2:

$$\overline{\Delta p_{12}} = m_{12} \frac{Q_{12}^{(1)}}{Q_{12}^{(e)}} (U_1 - U_2) \approx m_{12} (U_1 - U_2). \quad (7.16)$$

Соотношениями (7.11г) и (7.16) для средней передачи энергии и импульса в процессе упругих столкновений мы воспользуемся в гл. 4 при изложении теории многокомпонентных частично ионизованных газов.

**Задача 7.1.** С какой скоростью (в ваттах на кубический сантиметр) теряют энергию электроны в единице объема с температурой 3000 К за счет столкновений с атомами гелия (при 2000 К)? Плотность электронов равна  $10^{13}$  см $^{-3}$ , полное давление газа равно 100 кПа. За какое время электронная температура уменьшится до равновесного значения? Каким станет это время, если гелий заменить двуокисью углерода?

**Задача 7.2.** В гелий при постоянном давлении 290 кПа и температуре 2500 К добавляют небольшое количество паров цезия, и смесь проходит через сверхзвуковое сопло длиной 10 см, изэнтропически расширяясь до числа Маха, равного трем. Температура гелия и других тяжелых частиц падает до 625 К, а плотность гелия уменьшается до  $10^{18}$  см $^{-3}$ . Определите температуру электронов на выходе из сопла, полагая, что до расширения смеси температура электронов равнялась температуре тяжелых частиц.

**Задача 7.3.** Пользуясь формулой (5.9), введенной методом случайных блужданий, напишите приближенное выражение для среднего расстояния  $\bar{l}^E$ , которое проходит «горячий» электрон, пока он не придет в энергетическое равновесие с основным газом, состоящим из тяжелых частиц. Какова эта «длина энергетической релаксации электрона» в аргоне при атмосферном давлении и температуре 2000 К?

**Задача 7.4.** Рассматривается частично ионизованная газовая смесь калия и аргона при температуре 2200 К и давлении 100 кПа. Мольная доля калия равна 0,001.

1. Каково приблизительно «среднее расстояние», которое должен пройт «горячий» электрон для того, чтобы выравнять свою температуру с температурой тяжелых частиц?

2. Какое количество (в мольных долях)  $CO_2$  нужно добавить в газ для уменьшения длины температурной релаксации электронов до 0,01 см? (Укажите. Для упрощения вычислений можно пренебречь столкновениями электронов с атомами и ионами калия и считать молекулярные веса  $CO_2$  и Ar приблизительно одинаковыми.)

**Задача 7.5.** Сколько упругих столкновений должен в среднем испытывать атом цезия, находящийся в гелии, для того чтобы заметно изменился его импульс?

## § 8. СТОЛКНОВЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Случай упругого столкновения заряженных частиц в одних отношениях проще, а в других сложнее случая столкновения незаряженных частиц. Взаимодействие между двумя заряженными частицами описывается хорошо известным кулоновским потенциалом, что позволяет сразу же найти точное выражение для дифференциального сечения  $I(\chi, g)$ . В гл. 5, § 5, будет выведена формула Резерфорда

$$I(\chi, g) = \frac{(b_0/2)^2}{\sin^4(\chi/2)}, \quad (8.1a)$$

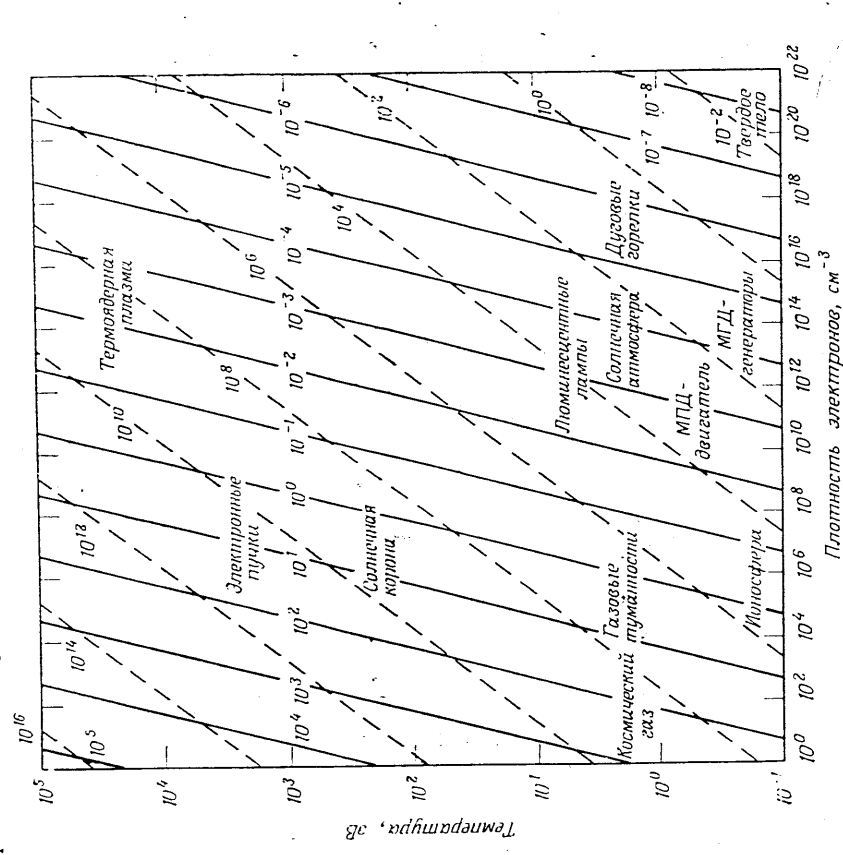
где

$$b_0 = \frac{Ze^2/4\pi\epsilon_0}{m_{12}g^2}. \quad (8.1b)$$

Здесь  $e$  и  $Ze$  — заряды двух частиц, а  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума. Величину  $b_0$  в соответствии с классической механикой можно интерпретировать как прицельное расстояние для рассеяния на угол, равный  $90^\circ$ . Как видно из фиг. 11, прицельное расстояние — это расстояние между частицей-мишенью и первоначальной траекторией падающей частицы. Осложнения возникают при попытке вычислить сечение столкновения с передачей импульса  $Q^{\chi}$ , определенное соотношением (3.7). Нетрудно видеть, что в случае взаимодействия двух заряженных частиц интеграл в соотношении (3.7) расходится и что это обусловлено очень сильной тенденцией к рассеянию вперед ( $\chi \rightarrow 0$ ), выраженной соотношением (8.1a).

С физической точки зрения в том обстоятельстве, что сечение  $Q^{\chi}$  обращается в бесконечность, находит отражение в дальней области кулоновских сил. Кулоновский потенциал меняется обратно пропорционально расстоянию между частицами. Столь медленное

чтобы  $N_D$  было мало, необходимо, чтобы  $n_e$  было велико, а  $T$  — мало; но эти условия, как правило, в газах несовместимы. Таким образом, благодаря коллективному поведению заряженных частиц



Фиг. 12. Дебаевский радиус экранирования  $\lambda_D$  (в сантиметрах, сплошные линии) и число  $N_D$  электронов в дебаевской сфере (пунктир) для различных типов плазмы.

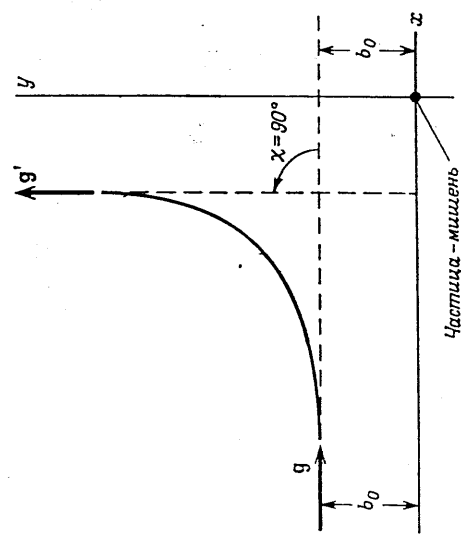
сечение столкновения с передачей импульса оказывается конечным. Как будет показано в гл. 5, § 5 [формула (5.16)],

$$Q^{(1)}(g) \approx 4\pi b_0^2 \ln \left[ 1 + \left( \frac{\lambda_D}{b_0} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (8.4)$$

Подставив это выражение в соотношение (6.30), получим усреднённое по энергиям сечение столкновения с передачей импульса:

$$\bar{Q} = 6\pi b_0^2 \int_0^\infty e^{-x} \ln \left[ 1 + \Lambda^2 \left( \frac{2x}{3} \right)^2 \right]^{1/2} dx, \quad (8.5)$$

уменьшение кулоновского взаимодействия приводит к тому, что все частицы налетающего пучка (используемого для определения эффективного сечения) в какой-то мере взаимодействуют с частицей-мишенью независимо от расстояния между ними. Поэтому геометрическая площадь препятствия, которое частица-мишень представляет для пучка, оказывается как бы бесконечно большой.



Фиг. 11. Прицельное расстояние для рассеяния на  $90^\circ$ .

Положение облегчается тем, что в большинстве газов из-за наличия других заряженных частиц характер взаимодействия двух данных частиц изменяется, когда расстояние между ними становится большим. Как будет показано в гл. 3, § 4, окружающие заряженные частицы, все вместе взятые, как бы экранируют отдельные частицы от взаимодействия друг с другом, когда расстояние между ними превысит величину порядка дебаевского радиуса экранирования [гл. 3, формула (2.4)]

$$\lambda_D \equiv \left( \frac{\epsilon_0 k T}{n_e e^2} \right)^{1/2} \quad (8.2)$$

Условие применимости такой модели заключается в том, что число электронов в сфере радиусом  $\lambda_D$  должно быть велико, т. е. должно выполняться соотношение

$$N_D = \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 n_e \gg 1. \quad (8.3)$$

Типичные значения  $\lambda_D$  и  $N_D$  для самых разнообразных частично ионизованных газов приведены на фиг. 12. Эти данные свидетельствуют о том, что условие (8.3) почти всегда выполняется. Для того

где

$$\bar{b}_0 \equiv \frac{Ze^2}{12\pi\epsilon_0 kT} \quad (8.6)$$

и где

$$\Lambda \equiv \frac{\lambda_D}{b_0} \quad (8.7a)$$

Поскольку  $n_{12}g^2 = 3kT$ , из сравнения соотношений (8.6) и (8.16) следует, что  $\bar{b}_0$  — это прицельное расстояние, при котором «усредненная» частица рассеивается на угол  $90^\circ$ . Кроме того, так как

$$\Lambda \equiv \frac{9}{Z} N_D, \quad (8.7b)$$

из (8.3) следует, что

$$\Lambda \gg 1. \quad (8.7в)$$

Поскольку логарифмический множитель под интегралом в соотношении (8.5) есть медленно (по сравнению с экспонентой) меняющаяся функция переменной  $x$ , а основной вклад в интеграл дает члены с  $x \sim O(1)$ , можно написать

$$\bar{Q} = 6\pi\bar{b}_0^2 \ln(1 + \eta^2\Lambda^2)^{1/2} \int_0^\infty e^{-x} dx = 6\pi\bar{b}_0^2 \ln(1 + \eta^2\Lambda^2)^{1/2},$$

где  $\eta^2$  — множитель порядка единицы. Если предположить, что вместо неравенства (8.7в) выполняется более жесткое условие

$$\ln \Lambda \gg 1, \quad (8.7г)$$

то можно воспользоваться следующим приближенным выражением:

$$\ln(1 + \eta^2\Lambda^2)^{1/2} \approx \ln \eta\Lambda = \ln \Lambda + \ln \eta \approx \ln \Lambda. \quad (8.8)$$

Чтобы не забывать, что соотношение (8.5) применяется к заряженным частицам, в дальнейшем будем писать  $\bar{Q} = \bar{Q}_{ei}$ . Но, поскольку соотношение (8.5) не зависит от массы частиц, участвующих в столкновении, мы имеем  $\bar{Q}_{ee} = \bar{Q}_{ei}$  (при  $Z = 1$ ). С учетом формулы (8.8) получим

$$\bar{Q}_{ei} \equiv 6\pi\bar{b}_0^2 \ln \Lambda. \quad (8.9)$$

Соответствующая средняя частота электрон-ионных столкновений с передачей импульса составляет (при  $Z = 1$ )

$$\bar{\nu}_{ei} \equiv n_i \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} \left(\frac{m_e}{kT}\right)^{3/2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 n_e}\right)^2 \ln \Lambda. \quad (8.10)$$

Приведем формулы для вычисления некоторых введенных выше величин (при  $Z = 1$ ), выраженных в единицах СИ:

$$\lambda_D = 69,0 \left(\frac{T}{n_e}\right)^{1/2} \text{ м}, \quad (8.11a)$$

$$\bar{b}_0 = \frac{5,56 \cdot 10^{-6}}{T} \text{ м}, \quad (8.11б)$$

$$\Lambda = 1,24 \cdot 10^7 \left(\frac{T^3}{n_e}\right)^{1/2}, \quad (8.11в)$$

$$\bar{Q}_{ei} = 5,85 \cdot 10^{-10} \frac{\ln \Lambda}{T^2} \text{ м}^2, \quad (8.11г)$$

$$\bar{\nu}_{ei} = 3,64 \cdot 10^{-6} n_i \frac{\ln \Lambda}{T^{3/2}} \text{ с}^{-1}. \quad (8.11д)$$

Доминирующую роль в динамике процесса экранирования играют электроны. Поэтому если температура электронов и ионов неодинакова [формула (7.5)], то величину  $T$  в формулах (8.11) нужно заменить величиной  $T_e$ . Значения  $\ln \Lambda$  при  $Z = 1$  приведены в табл. 8.

Таблица 8

Величина  $\ln \Lambda$ 

T, К	Плотность электронов $n_e$ , м <sup>-3</sup>									
	10 <sup>12</sup>	10 <sup>15</sup>	10 <sup>18</sup>	10 <sup>19</sup>	10 <sup>20</sup>	10 <sup>21</sup>	10 <sup>22</sup>	10 <sup>24</sup>	10 <sup>27</sup>	
10 <sup>2</sup>	9,43	5,97	2,52	1,37	—	—	—	—	—	
10 <sup>3</sup>	12,8	9,43	5,97	4,82	3,67	2,52	1,37	—	—	
2 · 10 <sup>3</sup>	13,9	10,5	7,01	5,86	4,71	3,56	2,40	—	—	
3 · 10 <sup>3</sup>	14,5	11,1	7,62	6,47	5,32	4,17	3,02	—	—	
10 <sup>4</sup>	16,3	12,8	9,43	8,28	7,12	5,97	4,82	—	—	
10 <sup>5</sup>	19,7	16,3	12,8	11,7	10,6	9,43	8,28	2,52	—	
10 <sup>6</sup>	22,8	19,3	15,9	14,8	13,6	12,4	11,3	8,96	5,54	
10 <sup>7</sup>	25,1	21,6	18,1	17,0	15,9	14,7	13,6	11,2	7,85	
10 <sup>8</sup>	27,4	24,0	20,5	19,4	18,2	17,0	15,9	13,6	10,1	

При температурах, превышающих  $4,2 \cdot 10^5$  К, введены поправки на квантовые эффекты согласно Спитцеру [75]. Можно заметить, что величина  $\ln \Lambda$  сравнительно слабо меняется в довольно широких пределах изменения  $T$  и  $n_e$ . Приведем пример: при  $T = 2000$  К и  $n_e = 10^{20}$  м<sup>-3</sup> мы имеем  $\ln \Lambda \approx 5$  и  $\bar{Q}_{ei} \approx 7 \cdot 10^{-16}$  м<sup>2</sup>. Для сравнения отметим, что типичное значение сечения столкновения электрона с нейтральной частицей составляет  $10^{-19}$  м<sup>2</sup>. В относительной большой величине сечения столкновения между заряженными частицами отражается действующий характер кулоновского взаимодействия.

Поскольку в соотношении (8.4) эффект экранирования учитывается лишь приближенно (гл. 5, § 5), нац. вывод выражения (8.9)

для усредненного по энергиям сечения  $\bar{Q}_{ei}$  с самого начала ограничен условием (8.7д), а именно

$$\ln \Lambda \gg 1.$$

На основе теории, в которой эффект экранирования учитывается точнее, Кихара, Аоно и Итикава [54] показали, что при более мягком условии (8.7в)

$$\Lambda \gg 1$$

вместо (8.9) получается более точное выражение

$$\bar{Q}_{ei} = 6\pi\bar{b}_0^2 (\ln \Lambda - 1,37).$$

Поскольку процесс экранирования фактически связан с одновременным взаимодействием многих частиц, его нельзя адекватно охарактеризовать эффективным сечением одной частицы. Строго говоря, приведенное выше выражение дает некое усредненное по энергии сечение, которое совместно с формулой (5.1) из гл. 4 [см. также формулу (7.12)] характеризует ту скорость, с которой электроны теряют энергию при упругих столкновениях с ионами. (Относительно теории, на основании которой получены описанные здесь результаты, см. работу [53].)

Точная теория коэффициентов переноса для частично ионизованных газов, как показано в гл. 8, дает особенно простые результаты в двух предельных случаях: в пределе *слабой ионизации*, когда можно пренебречь столкновениями заряженных частиц (такие газы называются *лоренцевскими*), и в пределе *полной ионизации*, когда потенциалы взаимодействия между частицами хорошо известны.

Для практических целей важно иметь критерий применимости результатов теории, полученных в предельных случаях слабой или полной ионизации. Введем среднюю частоту столкновений с переносом импульса, характеризующую столкновения электрона со *всеми* нейтральными частицами,

$$\bar{v}_{eN} \equiv \sum_n \bar{v}_{en} \quad (8.12)$$

и будем считать газ слабо ионизованным в том случае, если  $\bar{v}_{ei} \ll \bar{v}_{eN}$ , и полностью ионизованным, если  $\bar{v}_{ei} \gg \bar{v}_{eN}$ . Степень ионизации, разделяющая эти два предельных случая, определяется условием  $\bar{v}_{ei} = \bar{v}_{eN}$ . Если в газе присутствуют только однократно ионизованные ионы одного сорта, то, как будет показано в гл. 3,  $n_e \approx n_i$ , и поэтому это условие примет вид

$$\frac{n_e}{n_N} = \frac{\bar{Q}_{eN}}{\bar{Q}_{ei}}, \quad (8.13)$$

где  $\bar{Q}_{eN} = \sum_n (n_n/n_N) \bar{Q}_{en}$  и  $n_N = \sum_n n_n$ .

Для иллюстрации применения этого условия рассмотрим случай, когда нейтральными частицами являются молекулы водорода. Следуя работе [19], возьмем

$$\bar{Q}_{eH_2} \approx \begin{cases} 13,5 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2 & \text{при } T \leq 4 \text{ эВ,} \\ 3,0 \cdot 10^{-17} \frac{\text{м}^2}{T^{1/2}} & \text{при } 4 \text{ эВ} \ll T \leq 30 \text{ эВ.} \end{cases}$$

Подставив эти значения  $\bar{Q}_{eH_2}$  в формулу (8.11г), мы затем по формуле (8.13) найдем значения критической величины  $n_e/n_N$ , приведенные в табл. 9. Поскольку при низких температурах сечение  $\bar{Q}_{ei}$  очень

Таблица 9

$n_e, \text{ м}^{-3}$	Величины $(n_e/n_N)$ для $H_2$ , при которых $\bar{v}_{ei} = \bar{v}_{eN}$				
	T, К				
	101	102	103	104	105
1012	4·10 <sup>-9</sup>	3·10 <sup>-7</sup>	2·10 <sup>-5</sup>	1·10 <sup>-3</sup>	0,8·10 <sup>-1</sup>
1015	9·10 <sup>-9</sup>	4·10 <sup>-7</sup>	3·10 <sup>-5</sup>	2·10 <sup>-3</sup>	1·10 <sup>-1</sup>
1018		9·10 <sup>-7</sup>	4·10 <sup>-5</sup>	3·10 <sup>-3</sup>	1·10 <sup>-1</sup>
1021			9·10 <sup>-5</sup>	4·10 <sup>-3</sup>	2·10 <sup>-1</sup>
1024				9·10 <sup>-3</sup>	3·10 <sup>-1</sup>

велико, столкновения заряженных частиц могут играть существенную роль даже при сравнительно небольшой степени ионизации.

В заключение данного параграфа покажем, как, пользуясь формулой Резерфорда для дифференциального сечения столкновений, можно вывести выражение для томсоновского сечения ионизации электронным ударом, о котором говорилось в § 4. Согласно Томсону [77], процесс ионизации трактуется как передача энергии, превышающей потенциал ионизации, в классическом двухчастичном столкновении между электроном с кинетической энергией  $\epsilon = m_1 C^2/2$  (падающая частица) и электроном атома (частица-мишень), который предполагается покоящимся и несвязанным. С учетом этих предположений и в соответствии с уравнением (6.22) относительная скорость до столкновения равна  $\mathbf{g} = \mathbf{C}$ , а скорость центра масс  $\mathbf{G} = m_1 \mathbf{C}/(m_1 + m_2) = m_1 \mathbf{g}/(m_1 + m_2)$ . Из соотношения (7.2) следует, что потеря энергии падающей частицей при столкновении, приводящем к рассеянию на угол  $\chi_0$  в системе отсчета, движущейся со скоростью центра масс, дается выражением

$$\Delta \epsilon = \frac{m_{12} m_1}{m_1 + m_2} (\mathbf{g}^2 - \mathbf{g}'^2) = \frac{2m_{12}}{m_1 + m_2} \epsilon (1 - \cos \chi_0) = \frac{4m_{12}^2}{m_1 + m_2} \sin^2 \frac{\chi_0}{2}. \quad (8.14)$$

Сечение столкновения  $Q_T(\epsilon; \Delta \epsilon)$ , при котором падающая частица с энергией  $\epsilon$  и зарядом  $e$ , сталкиваясь с покоящейся частицей-

мишенью с зарядом  $Ze$ , теряет энергию, большую или равную  $\Delta\epsilon$ , определяется из соотношения (8.1), как

$$Q_T(\epsilon; \Delta\epsilon) = 2\pi \int_{\chi_0}^{\pi} \frac{(b_0/2)^2}{\sin^4(\chi/2)} \sin \chi d\chi.$$

Нижний предел интегрирования  $\chi_0$  выражается через  $\Delta\epsilon$  соотношением (8.14). Производя интегрирование, имеем

$$Q_T(\epsilon; \Delta\epsilon) = 2\pi b_0^2 \int_{\chi_0}^{\pi} \frac{d \sin(\chi/2)}{\sin^3(\chi/2)} = \frac{\pi (Ze^2/4\pi\epsilon_0)^2}{m_1^2 a_0^4} \left[ \frac{1}{\sin^2(\chi_0/2)} - 1 \right] = \\ = \pi \left( \frac{m_1}{2m_{12}} \right)^2 \frac{(Ze^2/4\pi\epsilon_0)^2}{e^2} \left[ \frac{4m_{12}}{m_1 + m_2} \frac{\epsilon}{\Delta\epsilon} - 1 \right].$$

Используя соотношение (4.8) и считая  $m_1 = m_2 = m_e$  и  $Z = 1$ , получаем

$$Q_T(\epsilon; \Delta\epsilon) = 4\pi a_0^2 \left( \frac{e^2/\lambda_0}{\Delta\epsilon} \right)^2 \left( \frac{u-1}{u^2} \right), \quad (8.15)$$

где  $u = \epsilon/\Delta\epsilon$ . Томсоновское сечение ионизации получается приравнением величины  $\Delta\epsilon$  потенциалу ионизации и умножением правой части соотношения (8.15) на число эквивалентных электронов [ср. с формулой (4.15)], находящихся на энергетическом уровне, с которого происходит ионизация атома. Если сравнить этот результат с формулой Гринзиского (4.18), учитывающей то обстоятельство, что электрон атома находится в движении, то нетрудно видеть, что формула Гринзиского переходит в формулу Томсона в пределе при  $u = (\epsilon_{iA}/\Delta\epsilon) \rightarrow 0$ , соответствующем пренебрежимо малому начальному движению электрона атома.

**Задача 8.1.** Докажите, что  $\Lambda = (9/Z) N_D$ .

**Задача 8.2.** Типичные температура и давление продуктов сгорания МГД-генератора открытого цикла составляют  $T = 2600$  К и  $p = 100$  кПа. В рабочей камере генератора, использующего в качестве рабочего тела этиловый спирт с добавками КОН и охлаждаемого азотом, содержатся обычно следующие химические вещества:

Вещество	Мольная доля	Среднее сечение, $10^{-20} \text{ м}^2$
$\text{N}_2$	0,36	13
$\text{H}_2\text{O}$	0,32	55
$\text{CO}_2$	0,16	13
$\text{CO}$	0,08	10
$\text{K}$	0,003	560
Прочие	0,077	10

Плотность электронов составляет  $8 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ . Вычислите 1) дебаевский радиус экранирования  $\lambda_D$ ; 2) среднее прицельное расстояние для рассеяния на  $90^\circ$  ( $\bar{b}_0$ ); 3) величину  $\ln \Lambda$ ; 4) среднюю длину свободного пробега электрона  $l_e$ ; 5) среднюю частоту столкновений электрона с тяжелой частицей  $\bar{\nu}_{eH} = \sum_i \bar{\nu}_{ei}$ ; 6) расстояние между частицами  $n_e^{-1/3}$  и  $l_{\text{полн}}$ .

**Задача 8.3.** Исходя из условий предыдущей задачи, вычислите плотность электронов, при которой средняя частота столкновений электронов с ионами равна средней частоте столкновений электронов с нейтральными частицами. Сравнив полученное значение плотности с заданным, определите, допустимо ли в данном случае приближение «очень слабой ионизации», т. е. можно ли данный газ считать лоренцевским.

**Задача 8.4.** Покажите, что если при интегрировании в формуле (8.5) сохранить все члены, по порядку величины большие  $1/\Lambda$ , то будет получен следующий результат:  $\bar{Q}_{ei} = 6\pi b_0^2 (\ln \Lambda - 0,983)$ . (Рассматриваемый интеграл можно выразить через интегралы от синусов и косинусов, а затем разложить в бесконечный ряд при  $\Lambda \gg 1$ .)

### § 9. ПРОЦЕССЫ ИЗЛУЧЕНИЯ

Выше мы рассматривали в основном взаимодействие между частицами, имеющими конечную массу. В данном параграфе мы перейдем к вопросу о взаимодействии излучения с веществом. Согласно квантовой теории, поле излучения во многих отношениях можно считать эквивалентным совокупности особого рода частиц, именуемых квантами или фотонами. Для дальнейшего изложения будут важны следующие характерные свойства фотонов. Все они движутся со скоростью света  $c$ , их энергия определяется их частотой  $\nu$  в соответствии с соотношением

$$\epsilon_\nu = h\nu, \quad (9.1)$$

где  $h$  — постоянная Планка. Они несут импульс

$$p_\nu = \frac{h\nu}{c} \Omega, \quad (9.2)$$

где  $\Omega$  — единичный вектор, определяющий направление движения фотона. Корпускулярный подход к процессам излучения удобен тем, что позволяет использовать аналогию с процессами, рассмотренными в предыдущих параграфах. Однако при этом не следует упускать из виду, что между фотоном и частицей с конечной массой нет полной аналогии, и в некоторых случаях они существенно различаются. Обсуждение процессов излучения в этой главе по необходимости будет кратким. Классическое обоснование некоторых основных понятий более полно дано в гл. 6.



Рассмотрим дифференциальный элемент объема  $d^3x$  частично ионизованного газа, в некоторый момент времени  $t$  расположенный между  $x$  и  $x + dx$ . Для каждого фотона, содержащегося в этом элементарном объеме  $d^3x$ , имеется соответствующий вектор в пространстве импульсов, пропорциональный импульсу данного фотона. Направления этих векторов соответствуют различным направлениям движения фотонов, а их длина — различным частотам фотонов. Введем теперь функцию распределения фотонов по импульсам в полной аналогии с функцией распределения материальных частиц по скоростям, введенной в § 6. Так, если  $n_\nu$  — число фотонов в единице объема, мы определим *функцию распределения фотонов по импульсам*  $f_\nu(p_\nu)$  таким образом, чтобы величина

$$n_\nu f_\nu(p_\nu) d^3p_\nu \quad (9.3)$$

давала среднее число фотонов на единицу объема с импульсами в пределах от  $p_\nu$  до  $p_\nu + dp_\nu$ . Предполагается, что  $f_\nu$  зависит от координаты  $x$  и времени  $t$ . По определению функция  $f_\nu(p_\nu)$  должна удовлетворять условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\nu(p_\nu) d^3p_\nu = 1.$$

Геометрическую интерпретацию функции распределения фотонов по импульсам можно провести на основе схемы, представленной на фиг. 8, если скорость частицы сменить импульсом фотона  $p_\nu$ . Распределение фотонов в газе можно также характеризовать более употребительной и полностью эквивалентной величиной, а именно спектральной плотностью излучения. Умножим величину (9.3) на скорость света  $c$ . Тогда по аналогии с формулой (6.186) мы получим *дифференциальную плотность потока фотонов*

$$[n_\nu f_\nu(p_\nu) d^3p_\nu] c. \quad (9.4)$$

Поскольку энергия каждого фотона равна  $h\nu$ , дифференциальная плотность потока энергии равна

$$chtv_\nu f_\nu(p_\nu) d^3p_\nu. \quad (9.5a)$$

Элемент объема в пространстве импульсов  $d^3p_\nu$  может быть записан в сферических координатах:

$$d^3p_\nu = p_\nu^2 dp_\nu d\Omega = p_\nu^2 \frac{h}{c} d\nu d\Omega.$$

Здесь  $d\Omega$  — элемент телесного угла, определяемого единичным вектором  $\Omega$ . Поэтому *дифференциальную плотность потока энергии* можно записать, как

$$I_\nu(\Omega) d\nu d\Omega, \quad (9.5b)$$

где

$$I_\nu(\Omega) \equiv chtv_\nu p_\nu^2 \frac{h}{c} f_\nu(p_\nu) \quad (9.6)$$

— *спектральная плотность излучения*. Величина (9.5б) есть энергия излучения в спектральном интервале  $d\nu$ , испускаемого в пределах телесного угла  $d\Omega$  вблизи направления  $\Omega$  и проходящего через единичную площадку (перпендикулярную вектору  $\Omega$ ) за единицу времени.

При облучении частицы-мишени пучком фотонов, дифференциальная плотность потока которых дается выражением (9.4), фотоны могут взаимодействовать с частицей, обладающей ненулевой массой, любым из нескольких возможных способов. Основные типы взаимодействия таковы: 1) *поглощение* и *индуцированное излучение* и 2) *рассеяние*. В дальнейшем эти процессы будут рассмотрены подробно. Любой конкретный процесс излучения  $P$ , в котором участвует частица-мишень, можно охарактеризовать некоторым сечением  $Q_P^{(p)}$  в прямой аналогии с сечениями столкновительных процессов между материальными частицами, определяемыми соотношением (3.2). Зависимость сечения излучательных процессов от частоты (или от энергии фотона  $h\nu$ ) аналогична зависимости сечения столкновения от относительных скоростей частиц (или от относительной кинетической энергии  $\epsilon = m_1 s g^2/2$ ). Число фотонов пучка, описываемых выражением (9.4), взаимодействующих в процессе  $P$  в единицу времени с одной частицей-мишенью, равно

$$\begin{aligned} n_\nu f_\nu(p_\nu) d^3p_\nu c Q_P^{(p)}. \end{aligned}$$

Если число частиц-мишеней в единице объема со скоростями между  $W$  и  $W + dW$  составляет  $n_2 f_2(W) d^3W$ , то по аналогии с формулой (6.19a) дифференциальная скорость процесса  $P$  между фотонами и этими частицами-мишенями дается выражением

$$\begin{aligned} dR_{\nu}^{(P)} &= n_\nu n_2 f_\nu(p_\nu) f_2(W) c Q_P^{(p)} d^3p_\nu d^3W = \\ &= [n_2 f_2(W) d^3W] \left[ \frac{I_\nu(\Omega)}{h\nu} d\nu d\Omega \right] Q_P^{(p)}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

В случае *поглощения* фотон полностью уходит из налетающего пучка, и его энергия передается частице-мишени. Этот процесс не имеет точных аналогов среди столкновительных процессов, но несколько напоминает столкновительное возбуждение и ионизацию. Аналогом столкновительных процессов, обратных сверхупругим столкновениям и трехчастичной рекомбинации, среди излучательных процессов является *индуцированное излучение*. Здесь фотоны определенной частоты, находящиеся в налетающем пучке, индуцируют испускание фотона возбужденной частицей-мишенью, причем фотон испускается в направлении распространения пучка и с той же частотой. Кроме того, падающее и испускаемое излучение когерентны и могут интерферировать. Процессы индуцированного излучения играют главную роль в работе лазеров, но в других случаях они менее важны. Изолированная возбужденная

частица может испустить фотон даже в отсутствие индуцирующего излучения. Такой процесс называется *спонтанным излучением*; он не имеет аналога среди столкновительных процессов.

Излучение — это процесс, обратный поглощению, и, как мы увидим далее в § 11, эти два процесса связаны между собой принципом детального равновесия. Поэтому в оставшейся части параграфа мы будем рассматривать в основном процессы поглощения. Когда пучок излучения падает на частицы-мишени, спектральное распределение прошедшего излучения может быть либо линейчатым, либо непрерывным.

Частоты, соответствующие *линиям поглощения*, очень близки к некоторым частотам переходов  $\nu_{kl} = \epsilon_k/h$ , даваемым соотношением Бора (4.9). Следовательно, линии поглощения соответствуют переходам между двумя дискретными энергетическими уровнями и являются, как принято говорить, результатом *связанно-связанных* переходов. Сечение поглощения при связанно-связанных атомных переходах с уровня  $k$  на уровень  $l$  может быть записано в виде

$$Q_{\nu}^{(k \rightarrow l)} = \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} f_{kl} \varphi(\nu) = 2,65 \cdot 10^{-9} f_{kl} \varphi(\nu). \quad (9.8)$$

Безразмерная величина  $f_{kl}$ , являющаяся атомной константой, называется *силой осциллятора* для поглощения при переходах  $k \rightarrow l$ . Эта величина обычно лежит в интервале от нуля до единицы. Функция  $\varphi(\nu)$  называется *функцией формы линии поглощения*, она удовлетворяет следующему условию нормировки:

$$\int_0^{\infty} \varphi(\nu) d\nu = 1. \quad (9.9)$$

Вообще говоря, функция  $\varphi(\nu)$  отлична от нуля только в небольшом интервале частот вблизи частоты перехода  $\nu_{kl}$ . Ширина линии обычно определяется окружением атома, и поэтому  $\varphi(\nu)$  не является атомным параметром. В случае водорода сила осциллятора для поглощения может быть точно рассчитана на основе квантовой теории. Для поглощательного перехода с уровня, главное квантовое число которого равно  $m$ , на уровень с главным квантовым числом  $l$  имеем

$$f_{mn} = \frac{32}{3\pi} \sqrt{\frac{g_{bb}}{3}} \frac{g_{bb}}{m^3 n^3 (1/m^2 - 1/n^2)^3}. \quad (9.10)$$

Величина  $g_{bb}$  — это множитель Гаунта для связанно-связанных переходов; он порядка единицы и затабулирован Мензелом и Пекерисом [63]; величина  $f_{mn}$  затабулирована Гринном, Рашем и Чандлером [33]. Некоторые типичные значения  $f_{mn}$  приведены в табл. 10.

Таблица 10

Сила осциллятора  $f_{mn}$  для водорода

Конечный уровень $l$	Исходный уровень $m$		
	$m=1$ (линия Лаймана)	$m=2$ (линия Бальмера)	$m=3$ (линия Пашена)
1	—	—0,104	—0,0087
2	0,416	—	—0,284
3	0,079	0,637	—
4	0,029	0,119	0,841
5	—	0,044	0,150
6	—	0,02	0,0554
7	—	—	—
8	0,010	0,0237	0,0421
9—∞	—	—	—
$\sum_n f_{mn}$	0,564	0,762	0,839
$\int f_{mn} d\eta$	0,436	0,238	0,161
$\sum_n f_{mn} + \int f_{mn} d\eta$	1,00	1,00	1,00

Отрицательные числа в табл. 10 — это значения силы осциллятора для излучения, они определяются для любого атома при  $\epsilon_l > \epsilon_k$  по формуле

$$f_{lk} = -\frac{g_k}{g_l} f_{kl}. \quad (9.11)$$

(Величина  $f_{m\eta}$  в табл. 10 есть поглощательная сила осциллятора для переходов с уровня  $m$  в континуум [11].) Поглощательную силу осциллятора для других атомов можно вычислить приближенными методами, рассмотренными Гринмом [34]. Экспериментальные значения этой величины приводятся в работах [30, 81, 82]. Высоколежащие уровни большинства атомов являются водородоподобными по своей структуре, и поэтому в приближенных расчетах для них можно использовать силу осциллятора для водорода.

Пропорциональное частоте сечение поглощения при связанно-связанных переходах, даваемое формулой (9.8), вообще говоря, зависит от макроскопического состояния газа. Поэтому удобно ввести другую величину, которая характеризует поглощение при связанно-связанных переходах и тоже является атомным параметром. Подставив выражение (9.8) в формулу (9.7), получим дифференциальную скорость процесса поглощения фотонов, частоты

которых лежат в интервале  $d\nu$  при переходах  $k \rightarrow l$ :

$$dR_{\nu}^{(k \rightarrow l)} = [n_h f_h(\mathbf{W}) d^3W] \frac{e^2 f_{hl} d\Omega}{4\epsilon_0 n_c c} I_{\nu}(\Omega) \varphi(\nu) d\nu. \quad (9.12)$$

Полное число всех переходов  $k \rightarrow l$  на единицу объема в единицу времени из телесного угла  $d\Omega$  получается интегрированием выражения (9.12) по распределению по скоростям частиц на  $k$ -м уровне и по всем частотам, которые дают вклад в переходы  $k \rightarrow l$ . Полагая, что  $I_{\nu}(\Omega)$  и  $f_{\nu}$  — функции частоты, медленно меняющиеся по ширине линии, получим

$$\Delta R_{\nu_{hl}}^{(k \rightarrow l)} = n_h B_{hl} I_{\nu_{hl}}(\Omega) d\Omega, \quad (9.13)$$

где

$$B_{hl} = \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c h \nu_{hl}} f_{hl} \quad (9.14)$$

есть коэффициент Эйнштейна для поглощения.

Произведение

$$B_{kl} I_{\nu_{kl}}(\Omega) d\Omega \quad (9.15a)$$

можно интерпретировать как вероятность того, что в единицу времени из телесного угла  $d\Omega$  произойдет один переход  $k \rightarrow l$  с поглощением излучения для индуцированного излучения  $B_{kl}$  определяется так, что

$$B_{kl} I_{\nu_{kl}}(\Omega) d\Omega \quad (9.15b)$$

есть вероятность индуцированного излучения в единицу времени в телесный угол  $d\Omega$ , соответствующего переходу  $l \rightarrow k$ . Коэффициент Эйнштейна для спонтанного излучения  $A_{lk}$  определяется так, что величина

$$\frac{A_{lk}}{4\pi} d\Omega \quad (9.15в)$$

представляет собой вероятность того, что в единицу времени в атоме произойдет один спонтанный переход  $l \rightarrow k$  с испусканием излучения в телесный угол  $d\Omega$ . Спонтанное излучение пространственно изотропно, а поэтому вероятность (в единицу времени) спонтанного перехода  $l \rightarrow k$  с испусканием излучения в любом направлении равна  $A_{lk}$ . Для сильных линий величина  $A_{lk}$  порядка  $10^8$  с<sup>-1</sup> [гл. 6, формула (9.11)]. Все три коэффициента Эйнштейна и сила осциллятора для поглощения взаимосвязаны между собой, как видно из соотношений (9.14) и (11.7). Отметим, что разные авторы определяют коэффициенты Эйнштейна по-разному.)

Механизмы, которые вносят вклад в фактор, определяющий форму линии,  $\varphi(\nu)$ , можно разделить на четыре группы:

1) естественное уширение (обусловленное спонтанным излучением); 2) уширение давлением (обусловленное взаимодействием с соседними частицами); 3) доплеровское уширение (обусловленное тепловым движением); 4) комбинированные механизмы уширения.

*Естественное уширение* должно было бы наблюдаться даже в случае изолированного и неподвижного атома. Поскольку возбужденный атом способен к спонтанному излучению, мы располагаем каким-то конечным временем для измерения энергии возбужденного уровня. Но тогда из принципа неопределенности Гейзенберга следует, что энергию любого возбужденного уровня нельзя указать точно. Неопределенность в энергии составляет  $\Delta E_l \approx \hbar \gamma_l$ , где

$$\gamma_l = \sum_{j < l} A_{lj}. \quad (9.16a)$$

Соответствующая функция формы линии поглощения для переходов  $k \rightarrow l$  имеет вид

$$\varphi(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma_{lk}/4\pi}{(\nu - \nu_{kl})^2 + (\gamma_{lk}/4\pi)^2}, \quad (9.16б)$$

где

$$\gamma_{lk} = \gamma_l + \gamma_k. \quad (9.16в)$$

Ширина линии при значении величины  $\varphi(\nu)$ , равном половине ее максимального значения (т. е. *полуширина линии*), дается выражением

$$\Delta \nu_N = \frac{\gamma_{lk}}{2\pi}. \quad (9.16г)$$

Функция формы линии для естественного уширения — это атомная характеристика. Естественная полуширина линии для излучения в видимой части спектра составляет  $\Delta \lambda_N \approx 10^{-4}$  Å. Функция (9.16б) называется *лоренцевской* формой линии.

Естественная ширина линии в частично ионизованных газах почти всегда меньше ширины, обусловленной давлением, и доплеровской ширины. Различные механизмы, которые вносят вклад в *уширение давлением*, имеют следующие названия:

- 1) холцмарковское уширение (называемое также резонансным уширением и самоуширением), обусловленное взаимодействием с нейтральными частицами того же сорта;
- 2) лоренцевское, или ван-дерваальсовское, уширение, обусловленное взаимодействием с нейтральными частицами другого сорта;
- 3) штарковское уширение, обусловленное взаимодействием с заряженными частицами.

Уширение давлением, обусловленное взаимодействием с нейтральными частицами, приближенно описывается лоренцевской формой линии, но постоянную  $\gamma_{lk}$  в формуле (9.16б) нужно заменить величиной

$$\Gamma_{lk} = \gamma_{lk} + 2\sqrt{\nu_a}, \quad (9.17a)$$

где

$$\bar{v}_a^{(\text{опт})} = \sum_p n_p \bar{g}_{ap} \bar{Q}_{ap}^{(\text{опт})} \quad (9.176)$$

есть *оптическая частота столкновений* поглощающего атома  $a$  с возмущающими частицами  $p$ . *Оптическое сечение*  $\bar{Q}_{ap}^{(\text{опт})}$  для поглощающего атома и возмущающих компонент обычно больше, чем соответствующее среднее сечение столкновения с передачей импульса, определенное соотношением (6.30). Методы теоретического вычисления  $\bar{Q}_{ap}^{(\text{опт})}$  излагаются в работе [1], но лучше пользоваться экспериментальными значениями, приведенными в работах [18, 42, 45]. Взаимодействие с соседними частицами может также приводить к наибольшему сдвигам центра линии, но во многих случаях этим можно пренебречь. При давлении 100 кПа полуширина линии, обусловленная взаимодействием с нейтральными частицами для видимой части спектра, порядка  $\Delta\lambda_L \approx 0,05 \text{ \AA}$ . Форма линии, соответствующая штарковскому уширению, во всех случаях, кроме водорода и некоторых линий гелия, приблизительно лоренцевская, но величину  $\gamma_{nl}/2\pi$  в формуле (9.166) нужно заменить полушириной штарковского уширения. Теоретические полуширины и сдвиги линии для штарковского уширения можно найти в работе Грима [34]. При плотности электронов порядка  $10^{16} \text{ см}^{-3}$  эффект Штарка может приводить к уширениям линий от нескольких ангстрем до нескольких десятков ангстрем в зависимости от атома и рассматриваемой линии.

Частота излучения в системе, связанной с движущимся атомом, должна отличаться от частоты, измеренной покоящимся наблюдателем, из-за эффекта Доплера. Даже если бы атом в связанной с ним системе отсчета мог поглощать излучение только единственной частоты  $\nu_k$ , покоящемуся наблюдателю казалось бы, что атом поглощает излучение различных частот в зависимости от его относительной скорости. Для частиц с максвелловским распределением по скоростям чисто *доплеровская форма* линии имеет вид

$$\varphi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(\Delta\nu_D/2)\sqrt{\ln 2}} \exp \left\{ - \left[ \frac{\nu - \nu_k}{\Delta\nu_D/2\sqrt{\ln 2}} \right]^2 \right\}, \quad (9.18a)$$

где величина

$$\Delta\nu_D = \nu_k \sqrt{\frac{8kT \ln 2}{m_a c^2}} = 7,16 \cdot 10^{-7} \sqrt{\frac{T}{M_a}} \nu_k \quad (9.18b)$$

есть доплеровская полуширина. Здесь  $M_a$  — молекулярный вес поглощающей частицы. Например, для  $D$ -линии натрия при 2000 К мы имеем  $\Delta\lambda_D = 0,04 \text{ \AA}$ . Доплеровская форма линии отличается от лоренцевской значительно более быстрым спадом в крыльях линий.

При наличии одновременно доплеровского уширения и уширения давлением форма линии определяется соотношением

$$\varphi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D/2 \sqrt{\ln 2}} V(a, x), \quad (9.19a)$$

где

$$V(a, x) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2} dy}{a^2 + (x-y)^2}. \quad (9.19b)$$

Фойгтовская форма линии  $V(a, x)$  заимствована Амбарцумяном [2] и Митчелом и Земанским [64]. Здесь

$$a = \sqrt{\ln 2} \frac{\Gamma_{ln}/2\pi}{\Delta\nu_D} \quad (9.19b)$$

и

$$x = 2\sqrt{\ln 2} \frac{\nu - \nu_k}{\Delta\nu_D}. \quad (9.19b)$$

Вблизи центра линии (т. е. при  $x \ll 1$ ) фойгтовская форма линии  $V(a, x)$  похожа на доплеровскую, а в крыльях линий (т. е. при  $x \gg 1$ ) она переходит в лоренцевскую. Это схематически показано на фиг. 13.

*Непрерывное поглощение* возникает в результате 1) связанно-свободных переходов и 2) свободно-свободных переходов. Атом, электрон которого находится на  $k$ -м энергетическом уровне (фиг. 14), может поглотить любой фотон, энергия которого превышает потенциал ионизации с  $k$ -го уровня, поскольку кинетическая энергия свободных электронов, возникающих при этом, может быть любой. Поэтому сечение поглощения при *связанно-свободных переходах*, т. е. сечении фотоионизации, является непрерывной отличной от нуля функцией частоты во всем диапазоне частот, определяемых неравенством

$$h\nu \geq \epsilon_{kl}. \quad (9.20)$$

Сечение фотоионизации с уровня, главное квантовое число которого равно  $m$ , для атома водорода дается выражением

$$Q_{\nu}^{(m \rightarrow n)} = \frac{64}{3\sqrt{3}} \frac{e^2/4\pi\epsilon_0}{hc} (\pi a_0^2)^2 \frac{m}{Z^2} \left( \frac{\epsilon_{m\eta}}{h\nu} \right)^3 g_{bf} = \frac{64}{3\sqrt{3}} \frac{e^2/4\pi\epsilon_0}{hc} (\pi a_0^2)^2 \frac{m}{Z^2} \left( \frac{\epsilon_{m\eta}}{h\nu} \right)^3 g_{bf}, \quad (9.21)$$

где  $\epsilon_{m\eta}$  — потенциал ионизации  $m$ -го уровня. Величина  $g_{bf}$  — множитель Гаунта для связанно-свободных переходов, вычисленный Карзасом и Латтером [46] и в большинстве случаев, представляющих практический интерес, очень близкий к единице. В отличие от сечения связанно-связанного поглощения сечение связанно-свобод-

ного перехода является атомным параметром. Выражение (9.21) показывает, что сечение ионизации при пороговом значении энергии конечно, и это обычно соответствует истине. Обратный столкновительный процесс — радиационный захват — рассматривается в § 11 и в гл. 6, § 8.

Свободный электрон в поле иона или атома также может поглощать (и испускать) излучение при переходе из одного свободного состояния в другое свободное состояние. Поглощение при свободно-свободных переходах, или *тормозное* поглощение (фиг. 14), соответствует переходам между состояниями в континууме. Поглощаются могут фотоны любой энергии, и, таким образом, сечение поглощения при свободно-свободных переходах является непрерывной ненулевой функцией, определенной для всех частот. В действительности процесс поглощения при свободно-свободных переходах происходит с участием трех тел — фотона, электрона и тяжелой частицы, а поэтому обычное определение эффективного сечения необходимо соответствующим образом изменить. Из уравнения (9.7) мы видим, что эффективное сечение выступает в роли коэффициента пропорциональности, связывающего дифференциальную скорость процесса и произведение функций распределения частиц, участвующих в процессе. Обобщая это представление, дифференциальную скорость поглощения при свободно-свободных переходах можно записать так:

$$dR_{\nu}^{(\kappa \rightarrow \lambda)} = [n_2 f_2 (W) d^3 W] \left[ \frac{I_{\nu}(\Omega)}{h\nu} d\nu d\Omega \right] [n_e f_e(C) d^3 C] \beta_{\nu}^{(\kappa \rightarrow \lambda)}. \quad (9.22)$$

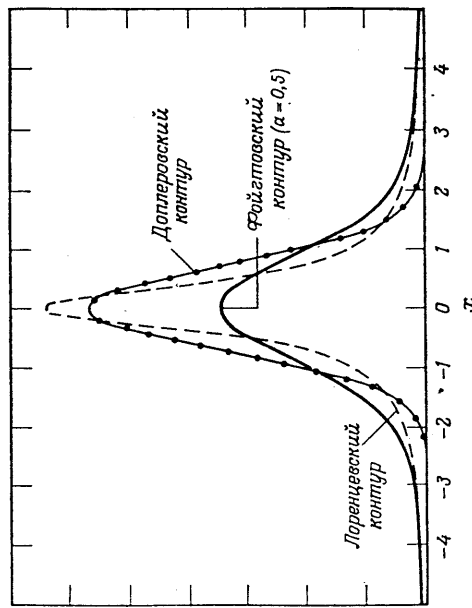
Коэффициент поглощения при свободно-свободных переходах  $\beta_{\nu}^{(\kappa \rightarrow \lambda)}$  имеет размерность длины в пятой степени. Для поглощения при свободно-свободных переходах в поле иона с зарядом  $Ze$  имеем

$$\beta_{\nu}^{(\kappa \rightarrow \lambda)} \approx \frac{128\pi^3}{3\sqrt{3}} \left( \frac{e^2/4\pi\epsilon_0}{\hbar c} \right)^2 Z^2 C_0^3 \left( \frac{\epsilon_{\nu}^{\lambda}}{h\nu} \right)^3 \frac{g_{ff}}{C/c} = 1,8 \cdot 10^2 \frac{Z^2 g_{ff}}{\nu^3 C} \text{ м}^5. \quad (9.23)$$

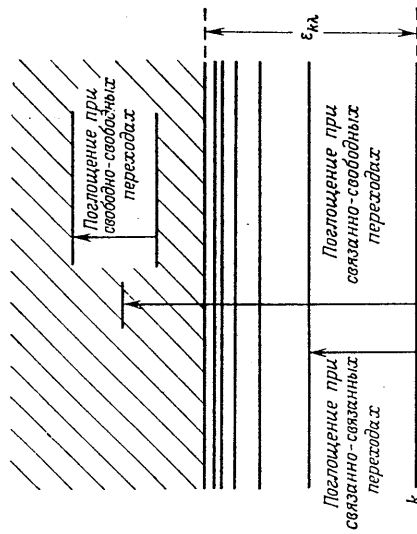
Здесь  $C$  — скорость электрона (которая приблизительно равна относительной скорости). Зельдович и Райзер [85] показали, что множитель Гаунта  $g_{ff}$  для свободно-свободных переходов — порядка единицы везде, кроме области низких частот ( $\nu \ll 2\epsilon_0 m_e C^2 / Ze^2$ ). Часто оказывается удобным использовать величину

$$Q_{\nu}^{(\kappa \rightarrow \lambda)} \equiv n_e \int_0^{\infty} \beta_{\nu}^{(\kappa \rightarrow \lambda)} f_e(C) d^3 C \quad (9.24)$$

в качестве эффективного сечения поглощения при свободно-свободных переходах в процессе взаимодействия фотона с тяжелойми



Фиг. 13. Форма линии при наличии одновременно доплеровского уширения и уширения давлением (фойгтовский контур линии).



Фиг. 14. Линейчатое и непрерывное поглощение.

частицами. Для поглощения ионами при свободно-свободных переходах и при максвелловском распределении электронов эта величина равна

$$Q_v^{(k \rightarrow \lambda)} = 2,3 \cdot 10^2 \frac{n_e Z^2 g_{ff}}{v^3 \bar{C}_e} \text{ м}^2, \quad (9.25)$$

где  $\bar{C}_e = (8kT_e / \pi m_e)^{1/2}$  — средняя скорость электронов. В противоположность величине  $\beta_v^{(k \rightarrow \lambda)}$  величина  $Q_v^{(k \rightarrow \lambda)}$  не является атомным параметром.

Зельдович и Райзер [85] показали, что отношение сечения поглощения при свободно-свободных переходах электроном и нейтральной частицей к сечению поглощения электроном и ионом равно отношению сечений столкновения с передачей импульса при столкновениях электрон — нейтральная частица и электрон — ион. Вопрос о свободно-свободных переходах весьма обширен (см., например, работы [1, 6, 85]).

Полезно сравнить сечения поглощения для связанно-связанных, связанно-свободных и свободно-свободных переходов, учитывая, что условия могут очень заметно отличаться от рассмотренных.

Для излучения в видимой части спектра с шириной линии 0,05 Å по формулам (9.8) и (9.166) для сечения поглощения при связанно-связанном переходе, соответствующем центру линии, получим  $Q_{v, \text{ли}}^{(k \rightarrow \lambda)} \sim 10^{-12} \text{ см}^2$ . Из выражения (9.21) следует, что на краю линии поглощения  $Q_v^{(k \rightarrow \lambda)} \sim 10^{-17} \text{ см}^2$ . Из выражения (9.25) при концентрации электронов  $10^{16} \text{ см}^{-3}$  и  $\bar{C}_e \sim 10^7 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$  получим  $Q_v^{(k \rightarrow \lambda)} \sim 10^{-24} \text{ см}^2$ .

По аналогии с выражением (5.8) мы можем определить среднюю длину свободного пробега фотона для  $p$ -го излучательного процесса, при котором фотоны взаимодействуют с частицами-мишенями сорта 2:

$$l_v^{(p)} = \frac{1}{n_2 Q_v^{(p)}}. \quad (9.26)$$

Фактическая средняя длина свободного пробега фотона заданной частоты равна  $l_v = [\sum_p n_2 Q_v^{(p)}]^{-1}$ , где суммирование проводится по всем процессам, которые могут повлиять на частоту  $\nu$ . Слой газа толщиной  $L$  называется *оптически тонким* для излучения данной частоты, если  $l_v \gg L$ . Фотоны, испускаемые в оптически тонкий слой газа, имеют большую вероятность пройти этот слой, не поглотившись. Если же  $l_v \ll L$ , то слой газа называется *оптически толстым*; фотоны в таком слое по большей части захватываются. Для линейчатого излучения газ часто оказывается оптически толстым вблизи центра линии и оптически тонким в крыльях

линии. Когда такое излучение испускается из газа, ширина линии обычно гораздо больше собственной ширины линии и форма ее совершенно иная. Проблема вычисления формы линий поглощения и излучения для макроскопического набора частиц относится к теории переноса излучения [1].

Согласно квантовой теории, поглощение и испускание излучения атомом — простые одноступенчатые процессы. Рассеяние же на атоме есть *простой* квантовый процесс, состоящий из двух ступеней. Процесс рассеяния состоит из поглощения фотона с начальным импульсом  $(h\nu/c) \Omega$  и последующего излучения фотона с конечным импульсом  $(h\nu'/c) \Omega'$ . Вообще говоря, процесс рассеяния — это не то же самое, что независимый процесс поглощения, за которым следует независимый процесс излучения. В некоторой степени рассеяние фотона на атоме аналогично столкновению двух частиц; при столкновении направления движения частиц меняются, а внутренние состояния могут измениться или остаться прежними. Зельдович и Райзер [85] утверждают, что рассеянием света в условиях земной атмосферы всегда можно пренебречь по сравнению с поглощением. Мы здесь лишь кратко остановимся на различных процессах рассеяния.

Прежде всего различают нерезонансное и резонансное рассеяние. Под *нерезонансным рассеянием* подразумевается рассеяние фотонов с частотой, лежащей далеко от любой из частот атомных переходов  $\nu_k$ . Нерезонансное рассеяние возможно как при энергиях фотонов, сравнимых с характерной энергией связи электрона или меньших ее, так и при энергиях, намного превышающих ее. В первом случае наблюдается либо *релеевское* (или *когерентное*) *рассеяние*, при котором  $\nu' = \nu$ , либо *комбинационное рассеяние*, при котором  $\nu' \neq \nu$ . При энергиях фотона, намного превышающих энергию связи электрона, когда электроны можно считать свободными, или при рассеянии просто на свободных электронах говорят о *томсоновском рассеянии* (или, при релятивистских энергиях, о *комптоновском рассеянии*). Характер *резонансного рассеяния* зависит от соотношения между частотным интервалом  $\delta\nu$  падающего излучения и естественной полушириной линии  $\Delta\nu_N$ . Если  $\delta\nu \ll \Delta\nu_N$  и атом остается невозмущенным в других отношениях по крайней мере в течение времени  $(\delta\nu)^{-1}$ , то падающее и рассеянное излучение когерентны и спектральное распределение падающего излучения идентично спектральному распределению рассеянного излучения. Если же  $\delta\nu \gg \Delta\nu_N$ , что обычно наблюдается в газах, то рассеянное и падающее излучение не когерентны и спектральное распределение рассеянного излучения определяется формой линии. Процесс рассеянного излучения определяется (формой) линии. Процесс рассеяния в последнем случае в точности эквивалентен независимому процессу поглощения, за которым следует независимый процесс излучения. Процессы рассеяния и их связь с процессами поглощения рассматриваются в работах [20, 34, 40].

**Задача 9.1.** Покажите, что полная плотность энергии излучения в точке составляет

$$q^R = \frac{1}{c} \int_0^\infty \int_{4\pi} I_\nu(\Omega) d\Omega d\nu$$

и что тепловой поток излучения дается выражением [79, гл. 11]

$$q^R = \int_0^\infty \int_{4\pi} I_\nu(\Omega) \Omega d\Omega d\nu.$$

**Задача 9.2.** Покажите, что сила осциллятора для переходов между соседними высоколежащими уровнями водорода дается формулой

$$f_{m, m+1} \approx 0,25 m.$$

**Задача 9.3.** Рассматривая  $A_{nm}$  как функцию  $m$ , покажите, что для водорода эта величина проходит через минимум при  $m = n/\sqrt{3}$  и что

$$A_{\min} \approx \frac{4,2 \cdot 10^{10}}{n^6} \text{ с}^{-1}.$$

**Задача 9.4.** Покажите, что для переходов в водороде с уровня  $n$  на более низкий ( $m \ll n$ ) справедливо выражение

$$A_{nm} \approx \frac{1,6 \cdot 10^{10}}{n^5 m} \text{ с}^{-1}.$$

Покажите, что для переходов на ближайшие уровни с  $m = n - \Delta n$ ,  $\Delta n \ll n$ , выполняется формула

$$A_{n, n-\Delta n} \approx \frac{0,8 \cdot 10^{10}}{n^5 \Delta n} \text{ с}^{-1}.$$

(На основании результатов задач 9.3 и 9.4 можно сделать вывод, что с высоколежащих уровней наиболее вероятны спонтанные переходы либо на основной уровень, либо на соседние.)

**Задача 9.5.** Вычислите сечение поглощения при связанно-связанных переходах и среднюю длину свободного пробега фотона в центре линии при переходах в водороде с уровня с  $n = 1$  на уровень с  $n = 2$ . Предположите, что имеется естественное уширение линии и концентрация водорода составляет  $10^{10} \text{ см}^{-3}$ .

## § 10. РАВНОВЕСНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Когда газ находится в термодинамическом равновесии, концентрацию частиц каждого сорта можно выразить через термодинамические параметры газа. Систематическое изложение данного вопроса выходит за рамки нашей книги, но мы приведем ряд важных

соотношений, выполняющихся для газа в термодинамическом равновесии. Эти соотношения выводятся в статистической механике (см., например, работы [72, 78, 79]).

Отношение плотности  $n_l$  частиц данного типа (молекул, атомов или ионов), находящихся на верхнем уровне  $l$ , к их плотности  $n_k$  на более низком уровне  $k$  дается *распределением Больцмана*

$$\frac{n_l}{n_k} = \frac{g_l}{g_k} e^{-\epsilon_l/\epsilon_k/kT}. \quad (10.1)$$

Здесь  $g_l$  и  $g_k$  — кратности вырождения  $l$ -го и  $k$ -го уровней, а

$$\epsilon_{li} = |\epsilon_l - \epsilon_k|$$

есть разность энергий между этими уровнями.

Чтобы связать  $n_l$  с полным числом частиц данного типа  $n = n_1 + n_2 + \dots$ , на основании уравнения (10.1) напишем

$$\frac{n}{n_1} = \sum_{l=1}^{l_{\max}} \frac{n_l}{n_1} = \frac{1}{g_1} \sum_{l=1}^{l_{\max}} g_l e^{-\epsilon_l/kT} = \frac{Z(T)}{g_1}, \quad (10.2)$$

где

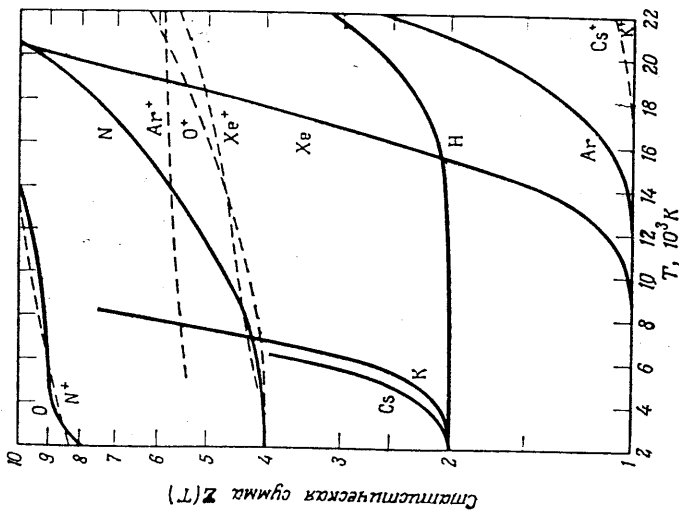
$$Z(T) \equiv \sum_{l=1}^{l_{\max}} g_l e^{-\epsilon_l/kT} = g_1 + g_2 e^{-\epsilon_2/kT} + \dots \quad (10.3)$$

есть статистическая сумма для рассматриваемого типа частиц. Абсолютно свободная частица имеет бесконечное число энергетических уровней, так что  $l_{\max} \rightarrow \infty$  и сумма  $Z(T)$  расходится. Это объясняется тем, что экспоненциальный множитель в выражении (10.3) стремится к постоянному значению вблизи границы континуума, а кратность вырождения растет до бесконечности. (Для водорода  $g_l = 2l^2$ .) В газе же из-за взаимодействия с соседними частицами число энергетических уровней не может превышать некоторого предельного значения  $l_{\max}$ , а поэтому величина  $Z$  конечна. О способах определения величины  $l_{\max}$  или, что то же, снижения потенциала ионизации см. работы [23, 24]. На фиг. 15 представлены кривые зависимости статистической суммы от температуры для некоторых атомов и ионов (потенциалы ионизации уменьшены на 0,1 эВ). Данные для этого графика взяты из работы [23]. При низких температурах величина  $Z$  нечувствительна к «обрезанию». При более высоких температурах увеличение давления приводит к большему снижению потенциала ионизации и, следовательно, к уменьшению  $Z$  [24, 25]. Для некоторых атомов и молекул при не слишком высоких температурах часто оказывается возможным приближенно положить  $Z \approx g_1$ . (Приближенные значения  $Z$  при умеренных температурах для ряда элементов приведены в табл. 2.)

С учетом соотношения (10.2) можно записать распределение Больцмана в другом виде:

$$\frac{n_i}{n} = \frac{g_i}{Z} e^{-e_i/kT}. \quad (10.4)$$

Из-за того влияния, которое оказывает снижение потенциала ионизации на статистическую сумму, последняя зависит не только от температуры, но и от полного термодинамического состояния газа.



Фиг. 15. Зависимость статистической суммы от температуры (понижение потенциалов ионизации составляет 0,1 эВ).

Для каждой компоненты плотность  $n_i^{\dagger}$  однократно ионизованных положительных ионов в основном состоянии и соответствующая плотность  $n_k$  нейтральных частиц на  $k$ -м уровне связаны с плотностью  $n_e$  свободных электронов уравнением Саха

$$\frac{n_e n_i^{\dagger}}{n_k} = 2 \frac{g_i^{\dagger}}{g_k} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-e_{ik}/kT}. \quad (10.5a)$$

Здесь  $g_i^{\dagger}$  — кратность вырождения основного уровня ионов. Данное соотношение можно рассматривать либо как выражение закона

действующих масс, либо как следствие распределения Больцмана (10.1) для континуума [62]. Уравнение (10.5a) применяется отдельно к каждой компоненте газа. Вводя статистические суммы  $Z$  для нейтральных компонент и  $Z_i$  для ионов и пользуясь соотношением (10.2), можно также записать уравнение Саха в следующем виде:

$$\frac{n_e n_i}{n} = 2 \frac{Z_i}{Z} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-e_i/kT}. \quad (10.5b)$$

Здесь  $n_i = n_i^{\dagger} + n_i^{\ddagger} + \dots$  — полная плотность ионов рассматриваемой компоненты. В такой форме записи уравнение Саха часто используется при вычислении плотности электронов в частично ионизованных газах. В единицах СИ

$$\left( \frac{2\pi m_e k}{h^2} \right)^{3/2} = 2,42 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3} \cdot \text{К}^{-3/2}.$$

Уравнение Саха может быть обобщено на случай многократно ионизованных компонент. Если обозначить кратность ионизации частицы через  $r$ , то уравнениям (10.5) можно придать более общий вид:

$$\frac{n_e n_1^{(r+1)}}{n_k^{(r)}} = 2 \frac{g_1^{(r+1)}}{g_k^{(r)}} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-e_k^{(r)}/kT} \quad (10.6a)$$

и

$$\frac{n_e n_i^{(r+1)}}{n_i^{(r)}} = 2 \frac{Z_i^{(r+1)}}{Z_i^{(r)}} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-e_i^{(r)}/kT}. \quad (10.6b)$$

Уравнения (10.5) соответствуют случаю  $r = 0$ . Для отрицательных ионов нужно положить  $r = -1$ , и тогда величина  $e_i^{(-1)}$  будет средством к электрону.

В § 6 отмечалось, что при термодинамическом равновесии устанавливается *максвелловское распределение* по скоростям каждой компоненты газа с функцией распределения

$$f^M(\mathbf{W}) \equiv \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m\mathbf{W}^2/2kT},$$

где  $m$  — масса рассматриваемой компоненты, а  $\mathbf{W}$  — скорость частицы относительно покоящейся жидкости.

Три предыдущих равновесных соотношения, названные именами Больцмана, Саха и Максвелла, относятся к веществу. Если же в термодинамическом равновесии с веществом находится фотон (или поле излучения), то они также имеют равновесное распределение. Соответствующее равновесное значение спектральной плотности излучения, определяемой соотношением (9.6), дается форму-



лой Планка:

$$B_\nu(T) \equiv \frac{2h\nu^3/c^2}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (10.8)$$

Здесь  $c$  — скорость света. Это соотношение выводится в гл. 6, § 11.

Полное термодинамическое равновесие в частично ионизованных газах наблюдается редко, но они часто находятся в состоянии при-ближенного *локального термодинамического равновесия* (ЛТР). Говорят, что газ находится в состоянии ЛТР, если частицы вещества находятся в равновесии между собой, а фотоны *не находятся* в равновесии с веществом. Частично ионизованные газы почти всегда прозрачны во многих частотных диапазонах, и поэтому некоторая доля излучения уходит из газа, нарушая тем самым условия полного термодинамического равновесия. Чтобы вещество находилось в состоянии ЛТР, скорости процессов столкновения, приводящих к заселению и освобождению различных энергетических уровней вещества, должны превышать соответствующие скорости излучательных процессов. Газ, находящийся в состоянии ЛТР, можно описать уравнениями Больцмана и Саха, даже если полное термодинамическое равновесие не является преобладающим.

Уравнения Больцмана и Саха часто применяются к столкновительным газам даже тогда, когда имеются и другие виды отклонений от полного термодинамического равновесия. Например, как указывалось в § 7, температура электронов  $T_e$  часто отличается от температуры тяжелых частиц  $T$ . Оба типа частиц могут иметь распределение Максвелла, но с разными температурами (гл. 8, § 3). В том случае, когда столкновения, определяющие заполнение того или иного электрического уровня или степени ионизации, происходят преимущественно с электронами, температура, фигурирующая в уравнениях Больцмана и Саха, должна интерпретироваться как электронная.

**Задача 10.1.** Вычислите равновесную плотность электронов в смеси паров калия и натрия при давлении 0,1 кПа и температуре 2000 К. Отношение масс К и Na до нагрева равно 10 : 1. Какова плотность  $K^+$  и  $Na^+$ ? Какова плотность электронов в парах чистого цезия при тех же условиях?

**Задача 10.2.** Для создания частично ионизованного аргона при давлении 100 кПа используется дуговой нагреватель. Мы можем считать, что газ находится в состоянии термодинамического равновесия, что плотности электронов и ионов в нем одинаковы, что к каждой из компонент применимо классическое уравнение состояния (т. е.  $p_s = n_s kT$ ) и что к газу применим закон Дальтона о парциальных давлениях. При какой температуре частота столкно-

вений электронов с ионами аргона будет равна частоте их столкновений с атомами аргона? Каково отношение плотности электронов к плотности атомов аргона при этой температуре?

### § 11. ПРИНЦИП ДЕТАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

*Принцип детального равновесия* гласит, что в условиях термодинамического равновесия дифференциальная скорость любого микроскопического процесса равна дифференциальной скорости соответствующего ему обратного процесса. Выражения для дифференциальных скоростей различных процессов даны формулами (6.19a), (9.7), (9.13) и (9.22). *Обратным* процессом считается процесс, имеющий в качестве начального конечное, а в качестве конечного — начальное состояние прямого процесса. Хотя этот принцип не всегда применим в тех случаях, когда в число характеристик состояния входит спиновое квантовое число [40, стр. 412; 10, стр. 530], в случае атомных систем, представляющих для нас интерес, им всегда можно пользоваться. Ниже будет приведено несколько примеров применения этого принципа.

В качестве первого примера рассмотрим процесс возбуждения при столкновении и обратный ему процесс сверхупругого столкновения. В прямом процессе, показанном на фиг. 16, а, частица  $A_1$  со скоростью  $C$  сталкивается с частицей  $A_2$ , возбужденной на уровень  $k$  и имеющей скорость  $W$ . После столкновения частица  $A_1$  имеет скорость  $C'$ , а частица  $A_2$  возбуждается на  $l$ -й уровень, причем скорость ее становится  $W'$ . Теперь частица обозначается через  $A_2'$ . Обратный процесс показан на фиг. 16, б. По формулам (6.22) мы можем определить скорости центра  $G$  и  $G'$  и относительные скорости  $g$  и  $g'$  до и после прямого процесса. Из закона сохранения количества движения системы следует, что

$$G = G', \quad (11.1a)$$

а из закона сохранения энергии —

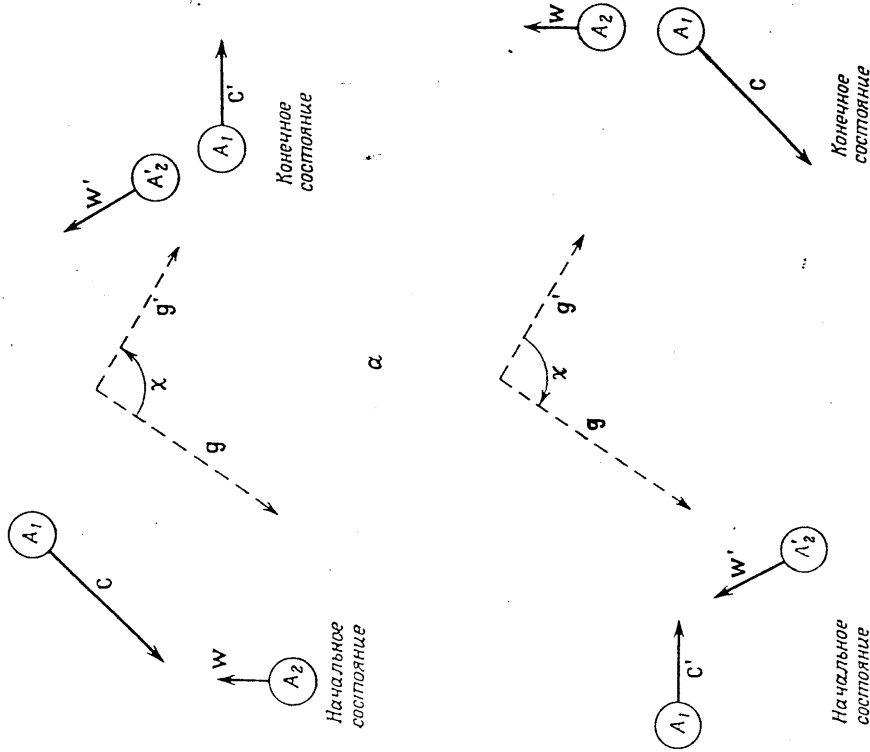
$$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon_k. \quad (11.1b)$$

Здесь  $\varepsilon = m_{12}g^2/2$  и  $\varepsilon' = m_{12}g'^2/2$  — относительные кинетические энергии частицы до и после столкновения. Если дифференциальное сечение прямого процесса обозначить через  $f^{(k \rightarrow l)}(\varepsilon; \chi)$ , где  $\chi$  — угол рассеяния в системе отсчета, связанной с центром масс, то дифференциальная скорость прямого процесса в соответствии с уравнением (6.19a) дается выражением

$$dR^{(k \rightarrow l)} = n_1 n_k f_l(C) f_k(W) g l^{(k \rightarrow l)}(\varepsilon; \chi) d\Omega_g d^3 C d^3 W. \quad (11.2a)$$

Здесь  $n_k$  и  $f_k(W)$  — плотность и функция распределения по скоростям для частиц  $A_2$ , а  $d\Omega_g'$  — элемент телесного угла в направле-

нии  $g'$ . Поскольку угол рассеяния в системе, связанной с центром масс, одинаков для прямого и обратного процессов, можно обозна-



Фиг. 16. Прямой и обратный процессы столкновения.

$a$  — столкновение, приводящее к возбуждению;  $b$  — сверхупругое столкновение.

чить дифференциальное сечение обратного процесса символом  $I^{(l \rightarrow k)}(\epsilon'; \chi)$ . Дифференциальная скорость обратного процесса такова:

$$dR^{(l \rightarrow k)} = n_1 n_2 f_1(C') f_2(W') g' I^{(l \rightarrow k)}(\epsilon'; \chi) d\Omega_g d^3 C' d^3 W'. \quad (11.26)$$

Согласно принципу детального равновесия, правые части уравнений (11.2a) и (11.2б) в условиях термодинамического равновесия равны. Пользуясь равновесными соотношениями (10.1) и (10.7), а

также соотношениями (6.25), (6.26) и (11.1), получаем

$$g_k I^{(k \rightarrow l)}(\epsilon; \chi) d\Omega_g g' d^3 g = g_l I^{(l \rightarrow k)}(\epsilon'; \chi) d\Omega_{g'} d^3 g'. \quad (11.3)$$

Переходя к сферическим координатам, мы можем написать

$$d^3 g = g^2 dg d\Omega_g, \quad (11.4a)$$

$$d^3 g' = g'^2 dg' d\Omega_{g'}. \quad (11.4б)$$

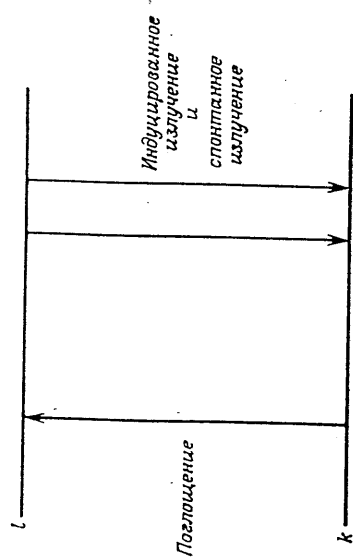
Тогда из соотношения (11.16) следует, что

$$g dg = g' dg'.$$

Подставляя эти соотношения в равенство (11.3), получаем окончательно

$$g_k \epsilon I^{(k \rightarrow l)}(\epsilon; \chi) = g_l \epsilon' I^{(l \rightarrow k)}(\epsilon'; \chi). \quad (11.5)$$

Отметим, что уравнение (11.5) устанавливает связь между атомными параметрами и поэтому справедливо независимо от того, выполняются ли условия термодинамического равновесия или нет.



Фиг. 17. Линейчатое поглощение и испускание.

В качестве второго примера рассмотрим радиационный процесс линейчатого поглощения, схематически показанный на фиг. 17. В этом случае вклад в обратный процесс дают два механизма — индуцированное и спонтанное излучения. Дифференциальная скорость прямого процесса дается формулой (9.13). В силу соотношений (9.15б) и (9.15в) дифференциальную скорость обратного процесса можно записать следующим образом:

$$\Delta I_{\nu_{kl}}^{(l \rightarrow k)} = n_l \left[ B_{lk} I_{\nu_{kl}}(\Omega) + \frac{A_{lk}}{4\pi} \right] d\Omega. \quad (11.6)$$

Приравняв правые части уравнений (9.13) и (11.6) и используя условия равновесия (10.1) и (10.8), после несложных преобразо-

ваний получаем

$$\frac{2h\nu_{kl}^2/c^2}{e^{h\nu_{kl}/kT} - 1} = \frac{A_{lk}/4\pi B_{lk}}{(g_k/g_l)(B_{kl}/B_{lk})e^{h\nu_{kl}/kT} - 1}.$$

Для того чтобы это соотношение было применимо при всех температурах  $T$ , должны выполняться равенства

$$(11.7a)$$

$$g_k B_{kl} = g_l B_{lk},$$

$$(11.7b)$$

$$\frac{A_{lk}}{B_{lk}} = \frac{8\pi h\nu_{kl}^3}{c^2}.$$

В соотношения (11.7) для коэффициентов Эйнштейна входят только атомные параметры, а потому эти соотношения также всегда справедливы независимо от того, находится газ в термодинамическом равновесии или нет.

В качестве третьего примера рассмотрим прямой (радиационный) процесс поглощения при связанно-свободном переходе и обратный (столкновительный) процесс радиационного захвата. Эти процессы описываются уравнением

$$\varphi + A \rightleftharpoons A^+ + e,$$

где  $A^+$  — ион в основном состоянии, образовавшийся из атома  $A$ , находившегося на  $k$ -м уровне. Обозначим массу и скорость атома  $A$  через  $m$  и  $\mathbf{W}$ , а массу и скорость иона  $A^+$  через  $m_i$  и  $m$  —  $m_e$  и  $\mathbf{W}'$ . Если  $\mathbf{C}'$  — скорость электрона, образующегося в процессе фотоионизации, то закон сохранения количества движения системы можно записать следующим образом:

$$\frac{h\nu}{c}\boldsymbol{\Omega} + m\mathbf{W} = m_i\mathbf{W}' + m_e\mathbf{C}' \equiv m\mathbf{G}', \quad (11.8a)$$

где  $\mathbf{G}'$  — скорость движения центра масс после взаимодействия. Поскольку  $(h\nu/c) \ll m|\mathbf{W}|$  для рассматриваемого атомного процесса, мы имеем

$$\mathbf{W} \approx \mathbf{G}'. \quad (11.8b)$$

Из закона сохранения энергии следует, что

$$h\nu + \frac{m_i W'^2}{2} = \frac{m_e C'^2}{2} + \varepsilon_{k\lambda} \approx \frac{m_e g'^2}{2} + \varepsilon_{k\lambda}, \quad (11.9a)$$

где  $g'$  — скорость электронов относительно ионов после процесса поглощения. Таким образом, с учетом равенства (11.8b) мы имеем

$$h\nu = \varepsilon' + \varepsilon_{k\lambda}, \quad (11.9b)$$

где  $\varepsilon' = m_e g'^2/2$  — относительная кинетическая энергия электрона после процесса поглощения.

Согласно формуле (9.7), дифференциальная скорость прямого процесса фотоионизации составляет

$$dR_{\nu}^{(k \rightarrow \lambda)} = [n_k f_k(\mathbf{W}) d^3W] \left[ \frac{I_{\nu}(\boldsymbol{\Omega})}{h\nu} d\nu d\Omega \right] I_{\nu}^{(k \rightarrow \lambda)}(\boldsymbol{\Omega}_{g'}) d\Omega_{g'}. \quad (11.10a)$$

Здесь  $I_{\nu}^{(k \rightarrow \lambda)}(\boldsymbol{\Omega}_{g'})$  — дифференциальное сечение поглощения при связанно-свободном переходе с образованием фотоэлектронов, имеющих относительную скорость  $g' = g'\boldsymbol{\Omega}_{g'}$ , и  $Q_{\nu}^{(k \rightarrow \lambda)} = \int I_{\nu}^{(k \rightarrow \lambda)}(\boldsymbol{\Omega}_{g'}) d\Omega_{g'}$ . Согласно же формуле (6.19a), дифференциальная скорость обратного процесса спонтанного излучения при свободно-связанном переходе дается выражением

$$dR_{\nu}^{(\lambda \rightarrow k)} = [n_e f_e(\mathbf{C}') d^3C'] [n_k^+ f_k(\mathbf{W}') d^3W'] g' I_{\nu}^{(\lambda \rightarrow k)}(\varepsilon'; \boldsymbol{\Omega}) d\Omega, \quad (11.10b)$$

где  $I_{\nu}^{(\lambda \rightarrow k)}(\varepsilon'; \boldsymbol{\Omega})$  — дифференциальное сечение радиационного захвата с образованием фотонов, движущихся в направлении  $\boldsymbol{\Omega}$ . Дифференциальная скорость обратного процесса индуцированного излучения при свободно-связанном переходе может быть записана в виде

$$dR_{\nu}^{(\lambda \rightarrow k)} = [n_e f_e(\mathbf{C}') d^3C'] [n_k^+ f_k(\mathbf{W}') d^3W'] g' I_{\nu}^{(\lambda \rightarrow k)}(\boldsymbol{\Omega}) d\Omega, \quad (11.10в)$$

где  $\tilde{b}_{\nu}^{(\lambda \rightarrow k)}(\boldsymbol{\Omega})$  — дифференциальный коэффициент индуцированного излучения при свободно-связанном переходе. Полное сечение радиационного захвата для спонтанного излучения дается соотношением  $Q_{\nu}^{(\lambda \rightarrow k)}(\varepsilon'; \boldsymbol{\Omega}) = \int I_{\nu}^{(\lambda \rightarrow k)}(\varepsilon'; \boldsymbol{\Omega}) d\Omega$ , и по аналогии мы можем определить  $b_{\nu}^{(\lambda \rightarrow k)} = \int \tilde{b}_{\nu}^{(\lambda \rightarrow k)}(\boldsymbol{\Omega}) d\Omega$ .

В условиях термодинамического равновесия мы имеем равенство  $dR_{\nu}^{(k \rightarrow \lambda)} = dR_{\nu}^{(\lambda \rightarrow k)} + dR_{\nu}^{(\lambda \rightarrow k)}$ . Используя равновесные соотношения (10.5a), (10.7) и (10.8) и проводя интегрирование в обеих частях этого равенства по всем углам  $d\Omega_{g'}$  и  $d\Omega$ , получаем

$$\frac{2h\nu^3 e^2}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{(2g_k^2/g_l)(m_e^2 g'^2 \nu/h) [Q_{\nu}^{(\lambda \rightarrow k)}(\varepsilon')/Q_{\nu}^{(k \rightarrow \lambda)}]}{e^{h\nu/kT} - (2g_k^2/g_l)(m_e^2 g'^2 \nu/h) (b_{\nu}^{(\lambda \rightarrow k)}/Q_{\nu}^{(k \rightarrow \lambda)})}. \quad (11.11)$$

При выводе уравнения (11.11) мы полагаем, что  $m \approx m_i$ . Для того чтобы уравнение (11.11) было справедливо при всех  $T$ , должно выполняться условие

$$Q_{\nu}^{(\lambda \rightarrow k)}(\varepsilon') = \frac{g_k}{2g_l} \frac{(h\nu)^2}{m_e c^2} \frac{Q_{\nu}^{(k \rightarrow \lambda)}}{e}. \quad (11.12)$$

Аналогичное соотношение может быть получено для  $b_{\nu}^{(\lambda \rightarrow k)}$ .

Сечение излучательной рекомбинации для иона водорода (фиг. 40) согласуется с соотношениями (11.12) и (9.21). Кривые

сечения излучательной рекомбинации при захвате электрона на основные уровни калия и цезия, приведенные на фиг. 41, были рассчитаны по формуле (11.12) на основании данных по фотоионизации, которые обычно гораздо проще получить экспериментально. Сечения фотоионизации конечны при пороговых значениях энергии [59, стр. 1068], и поэтому в пределе при  $\epsilon' \rightarrow 0$  сечения излучательной рекомбинации изменяются пропорционально  $1/\epsilon'$ . Общие вопросы фотоионизации более обстоятельно рассмотрены в работах [58, 59].

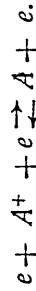
Сечения радиационного захвата электрона атомом или ионом, вероятно, *очень малы* по сравнению с сечениями упругих столкновений, что явствует из следующих качественных рассуждений [60, стр. 330]. Измеренное время жизни атома в возбужденном состоянии по отношению к спонтанному переходу на более низкий уровень составляет величину порядка  $10^{-8}$  с. Этот результат можно интерпретировать как свидетельство того, что электрон должен находиться на возбужденной орбите вблизи ядра в течение времени порядка  $10^{-8}$  с, пока не появится реальная возможность излучательного перехода. Хотя сказанное относится к связанно-связан-ным переходам, мы можем провести такие же рассуждения в случае свободно-связанных переходов. Так, если  $\tau$  — длительность столкновения свободного электрона с атомом или ионом, то вероятность радиационного захвата в процессе столкновения составит  $p \sim \tau/10^{-8}$ . Если  $a$  — радиус взаимодействия, а  $g_e$  — относительная скорость электрона, то  $\tau \sim a/g_e$  и  $p \sim 10^8 a/g_e$ . При характерном значении  $a \sim 10^{-7}$  см и  $g_e \sim 10^8$  см·с $^{-1}$  имеем  $p \sim 10^{-7}$ . Поскольку сечение столкновения по порядку величины составляет  $Q^{(e)} \sim 10^{-15}$  см $^2$ , сечение излучательной рекомбинации на конкретный уровень по порядку величины равно

$$pQ^{(e)} \sim 10^{-22} \text{ см}^2.$$

В действительности при захвате *положительными ионами* обычно имеется целый ряд разрешенных состояний, в которые может происходить захват, и это может существенно увеличивать сечение. Дальнейшее кулоновское притяжения также способствует увеличению сечения рекомбинации, но даже с учетом этого оно остается относительно малым. В случае захвата *нейтральными атомами* существует, по-видимому, лишь одно разрешенное состояние, а поскольку действующее притяжение отсутствует, сечение такого захвата еще меньше.

Строго говоря, принцип детального равновесия применим (со сделанными выше оговорками) к микроскопическим процессам, соответствующим переходу из одного квантового состояния в другое. Но *методом* детального равновесия часто выводят с использованием макроскопических скоростей процессов приближенные соотношения для макроскопических процессов. Таким методом часто

пользуются в химической кинетике. В качестве примера рассмотрим процесс рекомбинации электрона в трехчастичном процессе, описываемый уравнением (5.12):



Как говорилось по поводу уравнения (5.10), скорость прямого процесса можно выразить через коэффициент рекомбинации  $\alpha = \beta(T_e)n_e$ , где

$$R^{(\text{рекомб})} = \beta(T_e)n_e^2n_i. \quad (11.13a)$$

Скорость соответствующего обратного процесса ионизации может быть записана следующим образом:

$$R^{(\text{иониз})} = S(T_e)n_en, \quad (11.13b)$$

где  $S(T_e)$  — константа ионизации, а  $n$  — плотность частиц сорта  $A$ . Основанием для введения константы ионизации является то, что ионизация происходит при столкновении двух тел, а потому скорость ионизации должна быть пропорциональна произведению плотностей сталкивающихся частиц. Согласно принципу детального равновесия, в условиях термодинамического равновесия  $R^{(\text{рекомб})} = R^{(\text{иониз})}$  и, следовательно,

$$S(T_e) = \left( \frac{n_en_i}{n} \right)_{\text{равн}} \beta(T_e), \quad (11.14)$$

где  $(n_en_i/n)_{\text{равн}}$  есть функция температуры  $T_e$ , даваемая правой частью формулы (10.56). Если образование электронов определяется главным образом процессом (5.12) и  $n_e \approx n_i$ , то полная скорость рождения электронов в единице объема дается выражением

$$\frac{dn_e}{dt} = \alpha(T_e)[(n_e^*)^2 - n_e^2], \quad (11.15)$$

где  $(n_e^*)^2 \equiv n(n_e^2/n)_{\text{равн}}$ .

**Задача 11.1.** Выведите формулу (11.11).

**Задача 11.2.** Коэффициент  $\alpha^{(\lambda \rightarrow \kappa)}$  ( $\epsilon'$ )/ $4\pi$  спонтанного излучения электрона при свободно-свободном переходе (т. е. *тормозного* излучения) на единичный интервал частоты и единицу телесного угла при относительной кинетической энергии электрона  $\epsilon'$  можно определить согласно формуле для дифференциальной скорости процесса

$$dR^{(\lambda \rightarrow \kappa)} = n_en_i f_e(C') f_2(W') d^3C' d^3W' g' \left[ \frac{\alpha^{(\lambda \rightarrow \kappa)}(\epsilon')}{4\pi} dv d\Omega \right].$$

Исходя из принципа детального равновесия покажите, что

$$\frac{\alpha^{\lambda \rightarrow \kappa}(\epsilon')}{\beta^{(\kappa \rightarrow \lambda)}} = \frac{8\pi\nu^2}{c^2} \sqrt{\frac{m_e}{2}} \sqrt{\frac{V\epsilon}{\epsilon'}},$$

где  $\beta_{\nu}^{(\alpha \rightarrow \lambda)}$  — коэффициент поглощения при свободно-свободном переходе [формула (9.22)], а  $\epsilon = \epsilon' - h\nu$  — относительная кинетическая энергия электрона после процесса излучения.

**Задача 11.3.** На основании принципа детального равновесия (5.16) вычислите скорость ионизации паров цезия в условиях равновесия при давлении 0,1 кПа и температуре 2000 К. Сравните это значение скорости ионизации с вычисленным по формуле, введенной в задаче 6.4. Чем объяснить расхождение?

**Задача 11.4.** При анализе детального равновесия в случае процесса  $e + A_k \rightarrow e + A_i + e_b$  дифференциальная скорость реакции должна выражаться не только через скорость налетающего электрона  $C$ , но и через скорость первоначально связанного электрона  $C_b$ , который в результате процесса становится свободным. Считая тяжелую частицу неподвижной и вводя микроскопическую константу ионизации  $q^{(k \rightarrow \lambda)}$  ( $\epsilon, \epsilon_b$ ), зависящую от энергий обоих электронов  $\epsilon = m_e C^2/2$  и  $\epsilon_b = m_e C_b^2/2$ , для прямого, процесса имеем

$$dR^{(k \rightarrow \lambda)} = n_k [n_e f_e(C) d^3C] C q^{(k \rightarrow \lambda)}(\epsilon, \epsilon_b) d^3C_b.$$

[Чаще сечение ионизации определяется через  $q^{(k \rightarrow \lambda)}$  следующим образом:  $Q^{(k \rightarrow \lambda)}(\epsilon) = 4\pi \int_0^{e-\epsilon_b} q^{(k \rightarrow \lambda)}(\epsilon, \epsilon_b) \sqrt{2\epsilon_b/m_e} d\epsilon_b$ .] Для обратного процесса мы можем написать

$$dR^{(\lambda \rightarrow k)} = n_i^+ [n_e f_e(C') d^3C'] [n_e f_e(C_b) d^3C_b] C' q^{(\lambda \rightarrow k)}(\epsilon', \epsilon_b),$$

где  $\epsilon' = m_e C'^2/2$  — энергия налетающего электрона после столкновения, причем  $\epsilon = \epsilon_{k\lambda} + \epsilon' + \epsilon_b$ . Покажите, что

$$\epsilon q^{(k \rightarrow \lambda)}(\epsilon, \epsilon_b) = \frac{2g_i^+}{q_h} \left(\frac{m_e}{h}\right)^3 \epsilon' q^{(\lambda \rightarrow k)}(\epsilon', \epsilon_b).$$

**Задача 11.5.** Скорость процесса  $e + A_i^+ \rightarrow A_k + h\nu$  можно написать в виде  $R^{(\lambda \rightarrow k)} = n_e n_i^+ A_{k\lambda}$ . Полагая, что электроны имеют максвелловское распределение по скоростям, выразите константу  $A_{k\lambda}$  через сечение фотоионизации  $Q_{\lambda}^{(k \rightarrow \lambda)}$ . Найдите величину  $A_{k\lambda}$  для водорода при температуре 0,2 эВ.

**Задача 11.6.** Покажите, что для электронов с максвелловским распределением по скоростям выполняются соотношения

$$\frac{S^{(k \rightarrow l)}}{S^{(l \rightarrow k)}} = \frac{g_l}{g_k} e^{-\epsilon_{kl}/kT_e},$$

$$\frac{S^{(l \rightarrow \lambda)}}{S^{(\lambda \rightarrow l)}} = \frac{2g_l^+}{g_l} \left(\frac{2\pi m_e kT_e}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\epsilon_{l\lambda}/kT_e}.$$

Здесь  $R^{(k \rightarrow l)} = n_e n_l S^{(k \rightarrow l)}$ ,  $R^{(l \rightarrow k)} = n_e n_l S^{(l \rightarrow k)}$ ,  $R^{(l \rightarrow \lambda)} = n_e n_l S^{(k \rightarrow \lambda)}$  и  $R^{(\lambda \rightarrow l)} = n_e^+ n_l^+ S^{(\lambda \rightarrow l)}$ .

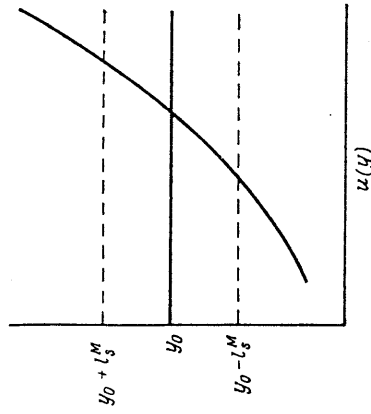
**Задача 11.7.** В пренебрежении спонтанным излучением зависимость спектральной плотности потока излучения, проходящего через газ в рабочем объеме лазера, от расстояния дается соотношением  $dI_{\nu}/dx = \alpha I_{\nu}$ , где  $\alpha$  — коэффициент усиления. Покажите, что при частоте, соответствующей переходу в центре линии (ширина которой определяется давлением) между верхними и нижними уровнями, плотности которых равны  $n_2$  и  $n_1$ , справедливо выражение

$$\alpha = \frac{\lambda^2}{4\pi\tau\nu^{(\text{опт})}} \left( n_2 - g_2 \frac{n_1}{g_1} \right).$$

Здесь  $\tau$  — время жизни возбужденного состояния по отношению к спонтанному переходу с верхнего уровня на нижний,  $\nu^{(\text{опт})}$  — оптическая частота столкновений, а  $\lambda$  — длина волны.

## § 12. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА — ВЯЗКОСТЬ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

При наличии пространственной неоднородности макроскопических параметров столкновительных газов на микроскопическом уровне возможен перенос импульса частиц, их энергии и самого вещества. На макроскопическом уровне таким процессам переноса соответствуют явления вязкости, теплопроводности и диффузии. В данном параграфе мы выведем приближенные выражения для коэффициента вязкости  $\eta$  и коэффициента теплопроводности  $\lambda$ , частично ионизованных газов, основываясь на представлении о средней длине свободного пробега. В следующем параграфе тем же методом мы выведем соотношения для скоростей диффузии частиц в присутствии электрического поля. Строгая теория коэффициентов переноса излагается в гл. 8. На основании результатов, представленных в гл. 8, можно полагать, что соотношения, введенные методом средней длины свободного пробега, справедливы с точностью до коэффициента порядка 2—3. Такая потеря точности при применении метода средней длины свободного пробега компенсируется большей наглядностью выводов, позволяющих сконцентрировать внимание на сущности физических процессов, лежащих в основе явления, а также простотой формул. В дальнейших выводах мы будем пренебрегать коэффициентами порядка единицы.



Фиг. 18. Профиль скорости (к вычислению коэффициента вязкости).

Рассмотрим случай, когда средняя массовая скорость жидкости и направлена вдоль оси  $x$  и зависит только от  $y$ , как показано на фиг. 18. Когда частица сорта  $s$  пересекает плоскость  $y = y_0$ , она переносит среднее значение  $x$ -компоненты импульса  $m_s u_s \approx m_s u$ , соответствующее приблизительно тому положению частицы, где она в последний раз претерпела столкновение, *хаотизирующее импульс*. Обозначим соответствующее расстояние от плоскости  $y = y_0$  через  $l_s^M$ . Среднее число частиц сорта  $s$ , пересекающих плоскость  $y = y_0$  в единице площади за единицу времени в обоих направлениях, пропорционально  $n_s \bar{C}_s$  [см. задачу 6.8 или гл. 3, формула (3.3)]. Таким образом, плотность потока  $x$ -компоненты импульса, переносимого частицей сорта  $s$  вверх, составит приблизительно

$$n_s \bar{C}_s m_s u (y_0 - l_s^M),$$

а соответствующий поток вниз будет равен

$$n_s \bar{C}_s m_s u (y_0 + l_s^M).$$

В соответствии с законами Ньютона вклад  $(\tau_s)_{xy}$  в тангенциальную силу трения, вносимый частицами сорта  $s$  (сила, действующая в направлении  $x$  на единицу площади, перпендикулярную направлению  $y$ ), определяется полной плотностью потока  $x$ -компоненты импульса, переносимого вниз этими частицами. Разлагая скорость  $u$  в ряд Тейлора и оставляя в  $l_s^M$  только члены первого порядка, получаем

$$(\tau_s)_{xy} = \eta_s \frac{du}{dy}, \quad (12.1)$$

где

$$\eta_s \approx m_s n_s \bar{C}_s l_s^M. \quad (12.2)$$

Полный вклад в тангенциальную силу трения получается суммированием по всем сортам частиц и дается следующим выражением:

$$\tau_{xy} = \eta \frac{du}{dy}, \quad (12.3)$$

где

$$\eta \approx \sum_s m_s n_s \bar{C}_s l_s^M \quad (12.4)$$

— коэффициент вязкости.

Средняя длина свободного пробега для процесса хаотизации импульса  $l_s^M$  представляет собой среднее эффективное «прямое» расстояние, которое проходит частица сорта  $s$ . Маловероятно, что тяжелые частицы будут заметно отклоняться при столкновениях с легкими частицами, и поэтому по аналогии с длиной свободного пробега, определяемой соотношением (6.33), при вычислении  $l_s^M$  влиянием таких столкновений можно пренебречь.

Средняя частота столкновений частиц типа  $s$  с частицами типа  $r$  определяется соотношением (6.29) и равна

$$\bar{v}_{sr} = n_r \bar{g}_{sr} \bar{Q}_{sr}.$$

В соответствии с формулой (7.156) среднее относительное изменение импульса частицы сорта  $s$  за одно столкновение с частицей сорта  $r$  равно  $m_s r / m_s$ . Поэтому число столкновений в единицу времени, приводящих к полной хаотизации импульса частицы сорта  $s$  в результате ее столкновений с частицами сорта  $r$ , можно записать как

$$n_r \bar{g}_{sr} \bar{Q}_{sr} \frac{2m_{sr}}{m_s}.$$

(Множитель 2 введен, чтобы придать этому выражению вид, обычный для частоты столкновений в случае, когда  $m_r = m_s$ .) Тогда полная частота столкновений с хаотизацией импульса для частиц сорта  $s$  равна

$$\bar{v}_s^M \equiv \sum_r n_r \bar{g}_{sr} \bar{Q}_{sr} \frac{2m_{sr}}{m_s}.$$

За время порядка  $(\bar{v}_s^M)^{-1}$  частица сорта  $s$  пройдет расстояние  $l_s^M = \bar{C}_s (\bar{v}_s^M)^{-1}$ , и поэтому

$$l_s^M = \frac{1}{\sum_r 2(m_{sr}/m_s)^{1/2} n_r \bar{Q}_{sr}}. \quad (12.5)$$

Этот результат несколько отличается от обычного выражения (6.33) для длины свободного пробега.

Коэффициент вязкости простого газа, т. е. газа, состоящего из частиц одного сорта, определяется из уравнений (12.4) и (12.5) как  $\eta_s^* \approx m_s n_s \bar{C}_s l_s^M$ , где  $l_s^M = (\sqrt{2} n_s \bar{Q}_{ss})^{-1}$ . Формулу (12.4) для вязкости газовой смеси можно переписать через коэффициенты вязкости простого газа как

$$\eta = \sum_s \left( \frac{n_s}{\sum_r n_r M_{sr}} \right) \eta_s^*, \quad (12.6)$$

где

$$M_{sr} = \sqrt{\frac{2m_{sr}}{m_s} \frac{\bar{Q}_{sr}}{\bar{Q}_{ss}}}. \quad (12.7)$$

Хотя формула (12.6) была получена из приближенного соотношения (12.4), в настоящей форме запись ее можно считать точной. Эта формула (*правило смеси*) позволяет приближенно вычислять коэффициент вязкости произвольной газовой смеси, если известны коэффициенты вязкости отдельных компонент газа. Например, при при-

менения формулы (12.6) можно использовать как экспериментальные значения коэффициентов вязкости простых газов, так и более точную формулу, полученную на основе представления о среднем свободном пробеге [79, гл. IV]:

$$\eta_s^* = \frac{1}{2} m_s n_s \bar{C}_s l_s. \quad (12.8)$$

Вклад электронов и ионов в сумму (12.4) удобно определить, используя трехкомпонентную модель частично ионизованного газа, введенную в § 6. При  $n_e \approx n_i$  имеем

$$l_e^M = \frac{1}{(\sqrt{2}+2) n_e \bar{Q}_{ei} + 2n_n \bar{Q}_{en}}, \quad (12.9a)$$

$$l_i^M = \frac{1}{\sqrt{2} n_e \bar{Q}_{ei} + 2(m_{in}/m_n)^{1/2} n_n \bar{Q}_{in}}. \quad (12.9b)$$

Величины  $l_e^M$  и  $l_i^M$  — одного порядка, а поэтому

$$\frac{\eta_e}{\eta_i} = \frac{m_e \bar{C}_e l_e^M}{m_i \bar{C}_i l_i^M} \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \ll 1. \quad (12.10)$$

Таким образом, вклад электронов в коэффициент вязкости пренебрежимо мал. В общем случае можно написать

$$\eta \approx \sum_h m_h n_h \bar{C}_h l_h^M, \quad (12.11a)$$

где

$$l_h^M = \frac{1}{\sum_g 2(m_{hg}/m_h)^{1/2} n_g \bar{Q}_{hg}}. \quad (12.11b)$$

Суммирование в соотношениях (12.11) проводится только по всем тяжелым частицам, и то же самое относится к формуле (12.6). Для полностью ионизованного газа, состоящего из электронов и ионов одного сорта с зарядом  $Z$ , из соотношений (12.8) и (8.9) получаем

$$\eta_i \approx 0,27 \frac{(4\pi\epsilon_0)^2 \sqrt{m_i} (kT)^{5/2}}{Z^2 e^4 \ln \Lambda}. \quad (12.12)$$

Точная теория, как будет показано в гл. 8, § 5, дает такую же формулу, но с численным коэффициентом 0,407.

Перейдем теперь к теплопроводности. В этом случае предполагается, что температура электронов  $T_e(y)$  и тяжелых частиц  $T(y)$  неоднородна. С точностью до множителя порядка единицы средняя энергия, переносимая одним электроном, равна  $kT_e(y)$ . Плотность потока энергии, переносимой электронами вверх, определяется электронным потоком тепла  $(q_e)_y$ , и по аналогии с формулой (12.1)

можно показать, что

$$(q_e)_y = -\lambda_e \frac{dT_e}{dy}, \quad (12.13a)$$

где

$$\lambda_e \approx k n_e \bar{C}_e l_e^M \quad (12.13b)$$

— коэффициент теплопроводности электронов. Поток тепла (12.13a) представляет собой разность энергий, переносимых частицами, которые проходят вверх и вниз через рассматриваемую плоскость. Поскольку среднее эффективное «прямолнейное» расстояние, которое частицы проходят между столкновениями, не зависит от того, какое явление переноса рассматривается, величина  $l_e^M$  в формуле (12.13b) та же самая, что и в формуле (12.5). Поток тепла, переносимый тяжелыми частицами, составляет

$$(q_H)_y = -\lambda_H \frac{dT}{dy}. \quad (12.14a)$$

Коэффициент теплопроводности тяжелых частиц имеет следующее приближенное значение:

$$\lambda_H \approx \sum_h \lambda_h = \sum_h k n_h \bar{C}_h l_h^M, \quad (12.14b)$$

где  $l_h^M$  — величина, даваемая формулой (12.11b). Полный поток тепла дается соотношением

$$q_y = -\lambda_e \frac{dT_e}{dy} - \lambda_H \frac{dT}{dy}, \quad (12.15)$$

и в случае, когда  $T_e(y) = T(y)$ , мы имеем

$$q_y = -\lambda \frac{dT}{dy},$$

где  $\lambda = \lambda_e + \lambda_H = \sum_s \lambda_s$  — теплопроводность газа как целого. В отличие от вклада в коэффициент вязкости вклад электронов в коэффициент теплопроводности в общем случае нельзя считать пренебрежимо малым, поскольку

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_i} \sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \gg 1. \quad (12.16)$$

Коэффициент теплопроводности простого газа, состоящего из частиц сорта  $s$ , дается приближенно формулами (12.14b) и (12.11b) и равен  $\lambda_s^* \approx k n_s \bar{C}_s l_s^M$ , где  $l_s^M = (\sqrt{2} n_s \bar{Q}_{ss})^{-1}$ . Поэтому мы можем написать теплопроводность газовой смеси в виде суммы, аналогичной сумме в формуле (12.6):

$$\lambda = \sum_s \left( \frac{n_s}{n_r M_{s,r}} \right) \lambda_s^*, \quad (12.17)$$

где  $M_{sr}$  — множитель, даваемый формулой (12.7). Чтобы учесть колебательную и вращательную внутреннюю энергию, переносимую многоатомными молекулами, можно в формулу (12.17) подставить более общее выражение для коэффициента теплопроводности простого газа, выведенное с использованием средней длины свободного пробега:

$$\lambda_s = \left[ \frac{15}{8} k n_s \bar{C}_s l_s \right] \left[ \frac{9\gamma_s - 5}{15(\gamma_s - 1)} \right]. \quad (12.18)$$

Здесь символом  $\gamma_s$  обозначено отношение удельных теплоемкостей для частиц сорта  $s$ , а второй множитель в правой части равенства (12.18) представляет собой поправочный множитель Эйкеца, учитывающий вращение и колебания молекулы [79, гл. 1]. Для одноатомного газа  $\gamma_s = 5/3$ , и этот множитель равен единице. Численный коэффициент  $15/8$  отражает отчасти корреляцию между скоростью частицы и количеством энергии, переносимой между скоростью движения. Учитывая этот множитель, электронную теплопроводность можно записать в следующем виде:

$$\lambda_e = \frac{2,4}{1 + \bar{v}_{ei}/\sqrt{2}\bar{v}_{eH}} \frac{k^2 n_e T_e}{m_e \bar{v}_{eH}}, \quad (12.19)$$

где  $\bar{v}_{eH} = \sum_h \bar{v}_{eh}$  — полная средняя частота столкновений электронов со всеми тяжелыми частицами. Для полностью ионизованного газа численный множитель, стоящий в этом приближенном выражении для  $\lambda_e$ , равен 1,4. Точное его значение, как будет показано в гл. 8, § 5, равно 3,20.

**Задача 12.1.** Важным безразмерным параметром при решении задач о вязкости и передаче тепла является число *Прандтля*  $Pr \equiv c_p \eta / \lambda$ . (Здесь  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении.) Начертите график зависимости  $Pr$  от содержания гелия (в мольных долях) для смеси гелия с ксеноном. (Для простоты считайте все сечения одинаковыми.)

**Задача 12.2.** Покажите, что уравнение (12.6) для вязкости двойной смеси совпадает с приближенной формулой, выведенной на основе кинетической теории [44, формула (8.2—22)] при значении молекулярного параметра  $A_{12}^* = 5/3$ .

**Задача 12.3.** Равновесная аргоновая плазма имеет температуру 10 000 К. Предположим, что  $\bar{Q}_{AA} = 18 \text{ \AA}^2$  и  $\bar{Q}_{A+} = 87 \text{ \AA}^2$ . Определите 1) отношение плотности электронов к плотности атомов аргона, при котором вклад электронов в полную теплопроводность составит 50%; 2) давление плазмы в этих условиях; 3) электропроводность такой плазмы.

### § 13. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ

Предположим, что однородный частично ионизованный газ находится в постоянном электрическом поле  $\mathbf{E}$ . Под действием электрического поля заряженные частицы в промежутках между столкновениями будут ускоряться. Но из-за столкновений средняя скорость частиц не будет бесконечно возрастать. Влияние электрического поля, если последнее не слишком велико, сводится к тому, что электроны дрейфуют в направлении, противоположном направлению вектора  $\mathbf{E}$ , а положительные ионы дрейфуют в направлении этого вектора.

Чтобы вычислить скорость дрейфа электронов в электрическом поле, возьмем систему координат, движущуюся со средней массовой скоростью газа, и напишем уравнение движения электрона в этой системе. В рассматриваемом случае электрическое поле, измеренное в этой движущейся системе координат, будет равно электрическому полю  $\mathbf{E}$  в лабораторной системе координат. Вообще же говоря, как будет показано в гл. 4, электрические поля, измеренные наблюдателями, движущимися относительно друг друга, не равны. Поэтому электрическое поле в системе координат, движущейся со средней массовой скоростью, обозначим символом  $\mathbf{E}'$ . Если  $C_e$  — компонента скорости электрона в направлении вектора  $\mathbf{E}'$ , то

$$m_e \frac{dC_e}{dt} = -eE' + F_e(t). \quad (13.1)$$

Здесь через  $F_e(t)$  обозначена сила, действующая на электрон при его столкновениях с другими частицами. Это сложная функция времени, которая почти всегда равна нулю и лишь в очень короткие промежутки времени, когда происходят столкновения, резко нарастает и убывает.

В среднем сила  $F_e(t)$  оказывает тормозящее действие на электрон, и это ее действие можно приближенно охарактеризовать средней скоростью, с которой электрон при столкновениях теряет свой импульс. На основании соотношения (7.16) для трехкомпонентного частично ионизованного газа напишем

$$\bar{F}_e = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} F_e(t) dt \approx -m_e \bar{v}_{eH} U_e + m_e \bar{v}_{ei} U_i + m_e \bar{v}_{en} U_n, \quad (13.2)$$

где

$$\bar{v}_{eH} \equiv \bar{v}_{ei} + \bar{v}_{en} \quad (13.3)$$

— средняя частота столкновений с передачей импульса электрона со всеми тяжелыми частицами, а  $\tau$  — промежуток времени, на много превышающий  $\bar{v}_{eH}^{-1}$ . Здесь учтено то обстоятельство, что изменение импульса электрона при столкновениях с другими электронами



практически равно нулю. Вторые два члена правой части уравнения (13.2) обычно малы по сравнению с первым членом, так что с хорошим приближением можно принять

$$\bar{F}_e \approx -m_e \bar{v}_{eH} U_e. \quad (13.4)$$

Убедитесь в том, что это равенство достаточно точное, мы можем, исходя из условия (6.7), накладываемого на диффузионные скорости. Действительно, в случае слабо ионизованного газа второй член мал, поскольку  $v_{ei} \ll v_{eH}$ , а третий член мал, так как  $U_n \rightarrow 0$ ; в пределе же полной ионизации второй член мал, поскольку

$$|U_i| \approx \frac{\rho_e}{\rho_i} |U_e| \ll |U_e|, \quad (13.5)$$

а третий член мал, поскольку  $\bar{v}_{en} \ll \bar{v}_{eH}$ . Более полный анализ, показывающий справедливость приближенного соотношения (13.4), приводится в конце данного параграфа.

Проведем теперь в уравнении (13.1) усреднение по многим столкновениям и воспользуемся соотношением (13.4). О стационарном макроскопическом дрейфе электронов можно говорить в том случае, если среднее ускорение электронов равно нулю. В соответствии с этим получим

$$U_e = -\frac{e}{m_e v_{eH}} E' = -\mu_e E', \quad (13.6a)$$

где величина

$$\mu_e = \frac{e}{m_e v_{eH}} \quad (13.6b)$$

так называемая подвижность электронов. Плотность электрического тока, определенная в соответствии с формулой (6.11) как средняя плотность потока электронного заряда, равна

$$J_e = -en_e U_e = \frac{n_e e^2 E'}{m_e v_{eH}} = \sigma_e E', \quad (13.7a)$$

где

$$\sigma_e = \frac{n_e e^2}{m_e v_{eH}} = en_e \mu_e \quad (13.7b)$$

— удельная электропроводность электронов.

Для газа, содержащего несколько сортов тяжелых частиц, вместо (13.3) имеем

$$\bar{v}_{eH} = \sum_i \bar{v}_{ei} h, \quad (13.8)$$

где  $\bar{v}_{ei} h$  — средняя частота столкновений с передачей импульса для электронов, сталкивающихся с тяжелыми частицами сорта  $h$ . Отсюда

следует правило смеси

$$\frac{1}{\sigma_e} = \sum_h \frac{1}{\sigma_{eh}}. \quad (13.9)$$

Типичные значения удельной электропроводности различных сред приведены в гл. 4, табл. 1.

Теперь вычислим скорость дрейфа ионов. Усредняя уравнение движения ионов, аналогичное уравнению (13.1), и используя равенство (7.16), получаем

$$m_e \bar{v}_{ie} U_e - (m_{in} \bar{v}_{in} + m_e \bar{v}_{ie}) U_i + m_{in} \bar{v}_{in} U_n = -eE'. \quad (13.10a)$$

Вместе с (полным) усредненным уравнением для электронов

$$m_e \bar{v}_{eH} U_e - m_e \bar{v}_{ei} U_i - m_e \bar{v}_{en} U_n = -eE' \quad (13.10b)$$

и уравнением (6.7) уравнение (13.10a) образует систему трех уравнений с тремя неизвестными  $U_e$ ,  $U_i$  и  $U_n$ . Решая эти уравнения, мы будем считать, что  $n_e = n_i$  (гл. 3, § 2) и что все сечения — одного порядка величины. Учитывая только старшие члены разложения по отношению масс частиц, можно показать, что детерминант системы уравнений равен

$$\rho m_e m_{in} \bar{v}_{eH} \bar{v}_{in}.$$

Решив систему уравнений относительно  $U_e$ , снова получим результат (13.6a). Остальные скорости дрейфа таковы:

$$U_i \approx \left( \frac{\rho_n \bar{v}_{en}}{\rho v_{eH}} \frac{e}{m_{in} \bar{v}_{in}} + \frac{\rho_i m_e}{\rho m_i m_e \bar{v}_{eH}} \right) E' = \mu_i E', \quad (13.11)$$

$$U_n \approx \left( -\frac{\rho_i}{\rho} \frac{\bar{v}_{en}}{v_{eH}} \frac{e}{m_{in} \bar{v}_{in}} + \frac{\rho_i m_e}{\rho m_i m_e \bar{v}_{eH}} \right) E' \approx \approx -\frac{\rho_i \bar{v}_{en}}{\rho v_{eH}} \frac{e}{m_{in} \bar{v}_{in}} E'. \quad (13.12)$$

В формуле (13.11) введена подвижность ионов

$$\mu_i = \frac{\rho_n \bar{v}_{en}}{\rho v_{eH}} \mu_{in} + \frac{\rho_i}{\rho} \mu_{ie}, \quad (13.13a)$$

причем

$$\mu_{in} = \frac{e}{m_{in} \bar{v}_{in}} \quad (13.13b)$$

и

$$\mu_{ie} = \frac{e}{m_i v_{eH}} \quad (13.13в)$$

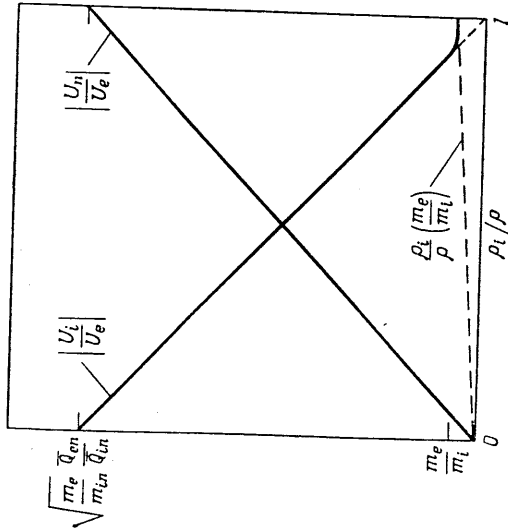
— подвижности ионов в пределах слабой и полной ионизации. На фиг. 19 представлена зависимость отношений

$$\left| \frac{U_i}{U_e} \right| = \left( 1 - \frac{\rho_i}{\rho} \right) \frac{\bar{v}_{en} m_e}{\bar{v}_{in} m_i} + \frac{\rho_i m_e}{\rho m_i}$$

и

$$\left| \frac{U_n}{U_e} \right| = \frac{\rho_i}{\rho} \frac{\bar{v}_{en} m_e}{\bar{v}_{in} m_i}$$

от доли ионной массы  $\rho_i/\rho$ , пропорциональной степени ионизации. Мы видим, что при всех значениях отношения  $\rho_i/\rho$ , за исключением



Фиг. 19. Отношение диффузионных скоростей ионов и нейтральных атомов к диффузионной скорости электронов как функция степени ионизации.

очень близких к единице, скорость дрейфа ионов с хорошим приближением дается первым членом уравнения (13.11). Кроме того, при любой степени ионизации выполняется соотношение

$$\left| \frac{U_i}{U_e} \right| \ll 1. \quad (13.14)$$

[Этот результат для полностью ионизованного газа непосредственно следует из уравнения (13.5).] Таким образом, в объеме частично ионизованного газа (вдали от граничных областей, где возможны большие градиенты и могут быть неодинаковыми плотности электронов и ионов) электрический ток, вызываемый внешним электрическим полем, всегда преобладает над ионным. В некоторых случаях при наличии магнитного поля соотношение может быть иным, как будет показано в гл. 4, § 3.

Полная плотность тока проводимости в соответствии с формулой (6.13) может быть записана как

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (13.15a)$$

где

$$\sigma = e (n_i \mu_i + n_e \mu_e) \quad (13.15b)$$

— удельная электропроводность газа как целого. Соотношение (13.15a) есть частный случай так называемого обобщенного закона Ома для частично ионизованного газа. Более полно этот вопрос рассматривается в гл. 4 и 8. Было показано, что в рассматриваемых условиях и при  $n_i \approx n_e$  (гл. 1) выполняется соотношение

$$\sigma \approx \sigma_e. \quad (13.16)$$

Формула (13.76) для  $\sigma_e$ , выведенная на основе представления о средней длине свободного пробега, справедливая с точностью до множителя порядка 2—3, но в некоторых случаях она может быть и более точной. О методах более точного вычисления электропроводности говорится в гл. 8. В общем случае частично ионизованного газа произвольного состава расчеты, основанные на точной теории, довольно сложны. Сравнительно простые точные формулы могут быть получены только в двух предельных случаях. Для слабо ионизованного газа мы имеем

$$\sigma_e = \frac{4\pi}{3} \frac{n_e e^2}{kT_e} \int_0^\infty \frac{C f_e^M(C)}{v_{en}^{(1)}(C)} dC. \quad (13.17)$$

Здесь  $f_e^M(C)$  — максвелловская функция распределения электронов по скоростям, а  $v_{en}^{(1)}(C) = \sum_n v_{en}^{(1)}(C)$  — зависящая от скорости частота столкновений (с передачей импульса) электронов со всеми нейтральными частицами. Для полностью ионизованного газа, состоящего из однозарядных ионов,

$$\sigma_e = 1,98 \frac{n_e e^2}{m_e v_{ei}} = 1,53 \cdot 10^{-2} \frac{T_e^{3/2}}{\ln \Lambda} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}. \quad (13.18)$$

Значения величины  $\ln \Lambda$  приведены в табл. 8. Формула (13.18) выведена при условии  $\ln \Lambda \gg 1$ , о котором речь шла в § 8. Результаты, которые могут быть получены при более слабом условии  $\Lambda \gg 1$ , приводятся в гл. 8, § 5. Удельные электропроводности, даваемые формулами (13.17) и (13.18), часто называют лоренцевской электропроводностью и электропроводностью Спитцера — Хэрма.

**Задача 13.1.** Вычислите удельную электропроводность при параметрах МГД-генератора, заданных в задаче 8.2. Сравните полученное значение с удельной электропроводностью хороших металлических проводников и хороших твердых диэлектриков.

**Задача 13.2.** Выведите формулы (13.6а), (13.11) и (13.12) для скоростей дрейфа  $U_e$ ,  $U_i$  и  $U_n$ , исходя из уравнений (13.10) и (6.7).

**Задача 13.3.** При температурах около 2500 К и несколько более высоких инертные газы (такие, как аргон) почти не ионизованы. Для повышения электропроводности в них вводят более легко ионизируемые добавки (такие, как цезий и калий). При температуре  $T$  концентрации электронов и нейтральных частиц присадки  $n_e$  и  $n_s$  связаны уравнением Саха  $n_e^2 = n_s K(T)$ , где  $K(T)$  — функция только температуры. Выведите простое выражение (содержащее только частоты столкновений) для количества присадки, при котором электропроводность смеси будет максимальной. Считайте плотность инертного газа  $n_n$  заданной.

**Задача 13.4.** Измеренное значение удельной электропроводности паров Cs при температуре 2000 К и давлении 133 Па равно  $10 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ . При добавлении некоторого количества  $\text{H}_2$  электропроводность смеси падает до  $2 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ . Каково (приблизительно) парциальное давление добавленного  $\text{H}_2$ ? (Считайте пары Cs слабо ионизованными, а диссоциацию  $\text{H}_2$  пренебрежимо малой.)

**Задача 13.5.** Сравните лоренцевскую удельную электропроводность с удельной электропроводностью, вычисленной в приближении средней длины свободного пробега, в случае, когда  $v_{eN}$  постоянна.

## § 14. ТИПИЧНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ О СЕЧЕНИЯХ

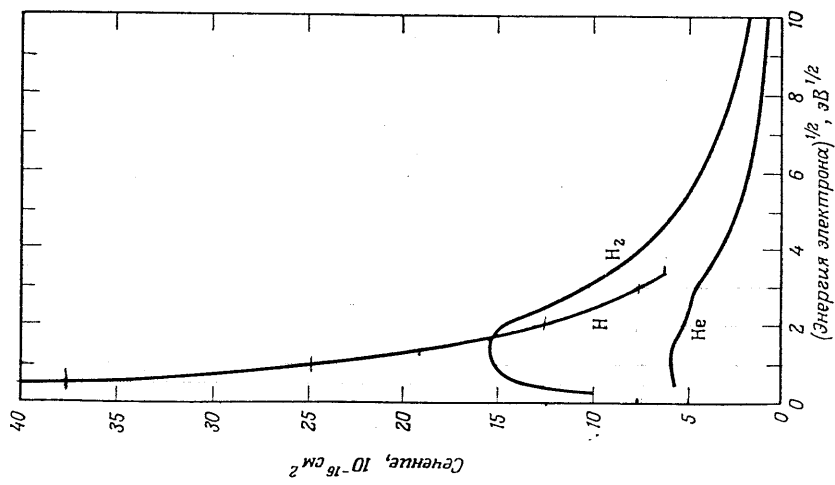
Большая часть данных о сечениях столкновений рассеяна по научной литературе. Имеется ряд книг [15, 16, 50—52, 55], посвященных специально экспериментальным данным такого рода, много данных приводится в монографиях Месси и Бархопа [60, 61], МакДаниэли [56], Хастеда [38] и Месси [59] (см. также § 4). Точность экспериментальных данных меняется в широких пределах. Об этом говорят хотя бы расхождения в данных разных авторов. По утверждению Кифера [52], ошибка измерения максимального сечения ионизации электронным ударом лежит в пределах от 15 до 200—300%, а ошибка измерения максимального сечения возбуждения электронным ударом — в пределах от 35 до 1000%. Что касается зависимости сечений от энергии, то здесь следует различать *грубую структуру*, проявляющуюся при изменении энергии на несколько электронвольт, и *тонкую структуру*, проявляющуюся при масштабах изменения энергии порядка 0,1 эВ. Последнее обстоятельство стало очевидным только приблизительно с 1963 г. в результате прогресса экспериментальной техники.

Для специалистов, занимающихся частично ионизованными газами, важно иметь общее представление о том, для каких процессов имеются данные о сечениях, о порядке величины этих сечений и о

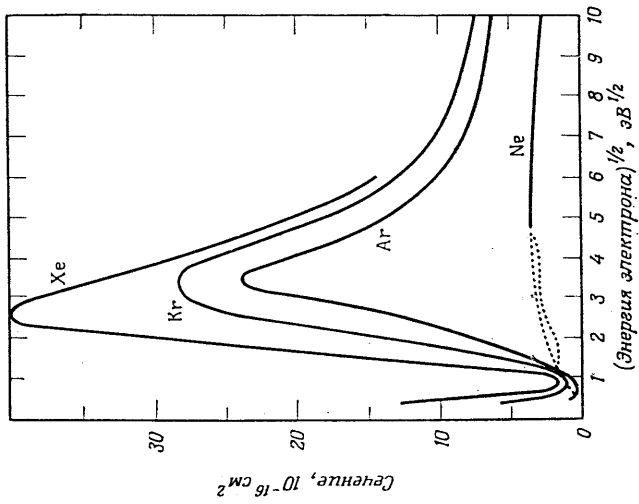
наблюдающихся закономерностях. Из этих соображений мы и выбрали данные о сечениях, приводимые ниже. Отметим, что это лишь очень небольшая выборка данных, имеющихся в настоящее время. Атомные системы, данные для которых мы приводим, можно считать первоначально находящимися в основном состоянии, а начальное состояние молекулярных систем — соответствующим равновесному состоянию газа при комнатной температуре. Приводятся данные только о грубой структуре. В качестве источников мы ссылаемся на те публикации, из которых были взяты данные, а это не во всех случаях оригинальные работы. Данные приводятся в порядке, соответствующем табл. 11.

Таблица 11

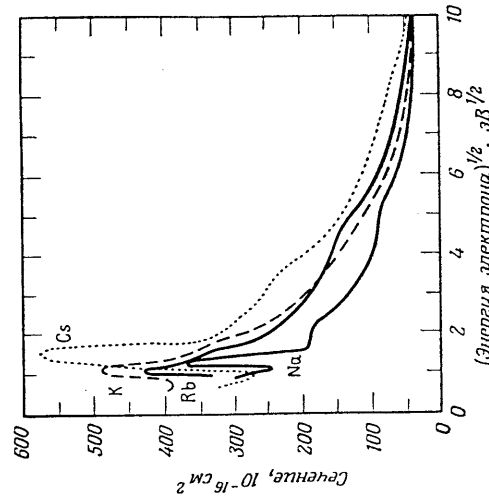
Порядок расположения данных о сечениях столкновений		Номера фигур
Упругие столкновения		
1. Полные сечения электрон-атомных столкновений		20—23
2. Сечения электрон-атомных столкновений с переносом энергии		24—25
3. Дифференциальные сечения электрон-атомных столкновений		26
4. Сечения электрон-молекулярных столкновений		27—28
5. Сечения столкновений, усредненные по энергиям		29
6. Сечения ион-атомных столкновений		30—31
7. Сечения ион-молекулярных столкновений		32
8. Сечения атом-атомных столкновений		Табл. 12
Неупругие столкновения		
1. Электрон-атомные процессы		33—35
1.1. Столкновительные процессы		36—39
1.1.1. Ионизация		
1.1.2. Возбуждение		
1.2. Излучательные процессы		40—41
1.2.1. Излучательная рекомбинация		42
1.2.2. Радиационный захват		
2. Электрон-молекулярные процессы		
2.1. Процессы, связанные с изменениями в электронных уровнях (аналогичные электрон-атомным процессам)		43
2.2. Возбуждение вращательных и колебательных уровней		
2.3. Диссоциация		
2.4. Диссоциативная ионизация		
2.5. Диссоциативная рекомбинация		44
2.6. Диссоциативный захват		
3. Ион-атомные и атом-атомные процессы		45
3.1. Перезарядка		46
3.2. Ионизация при атом-атомных столкновениях		



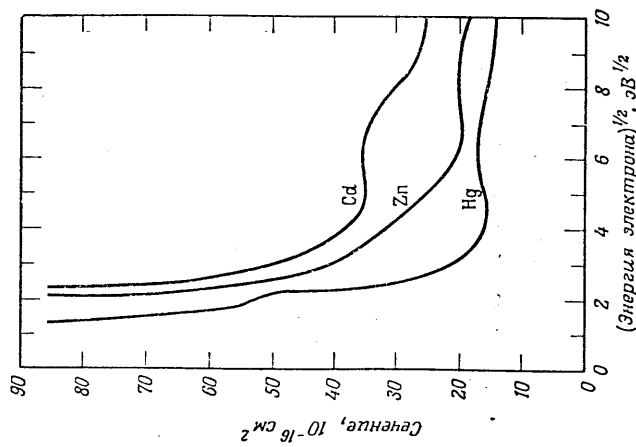
Фиг. 20. Полное сечение упругого столкновения электронов с атомами H, H<sub>2</sub> и He [11, 14].



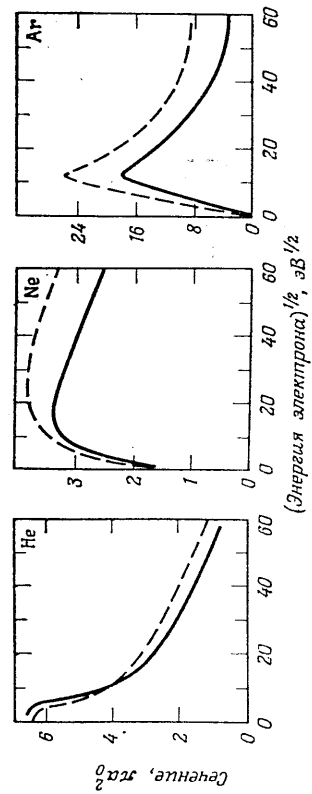
Фиг. 21. Полное сечение упругого столкновения электронов с атомами инертных газов Ne, Ar, Kr и Xe [14].



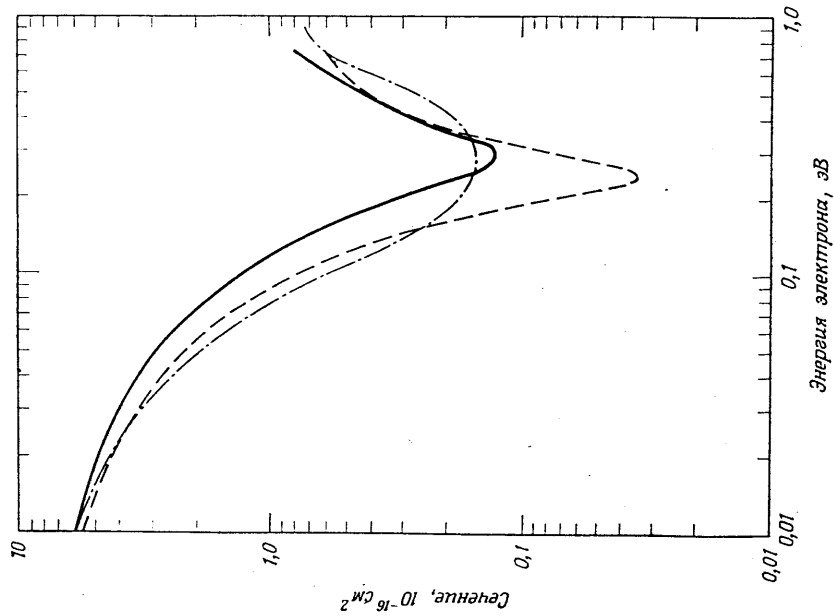
Фиг. 22. Полное сечение упругого столкновения электронов с атомами щелочных металлов Na, K, Rb и Cs [14].  
 Более новые данные см. в работе [80].



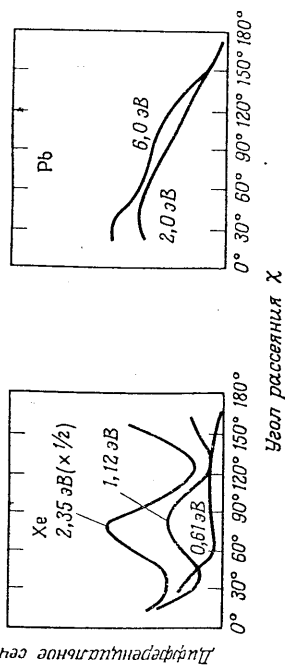
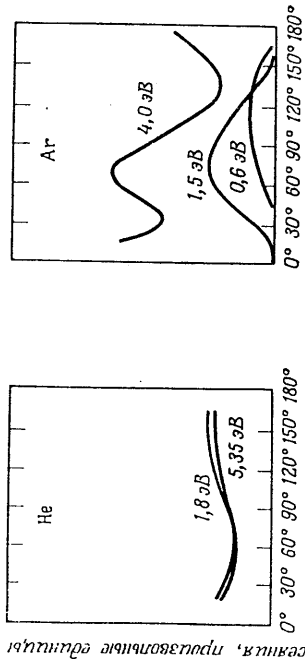
Фиг. 23. Полное сечение упругого столкновения электронов с атомами Cd, Zn и Hg [14].



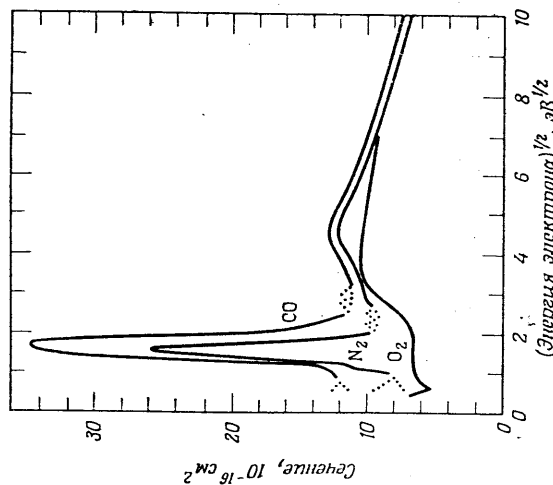
Фиг. 24. Сечение столкновения с передачей импульса (сплошные линии) и полное сечение упругого столкновения (штриховые линии) для столкновения электронов с атомами He, Ne и Ar [61, стр. 48].



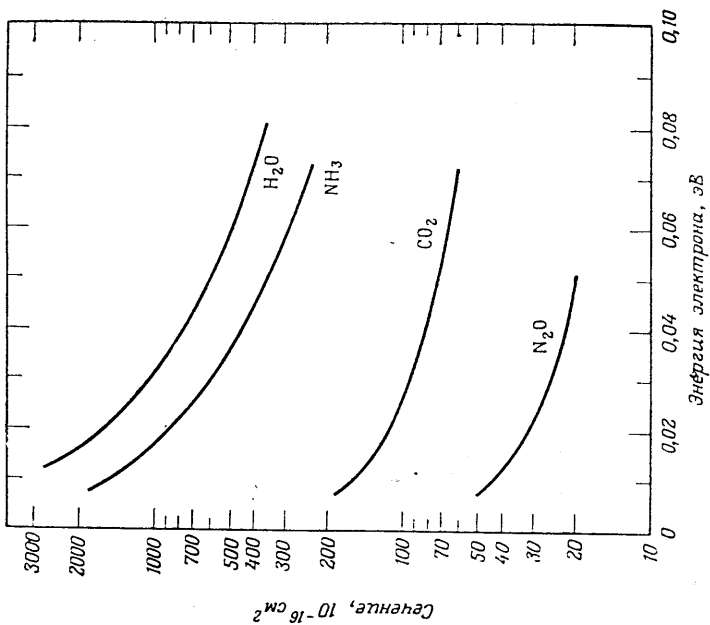
Фиг. 25. Сечение столкновения с передачей импульса при низких энергиях (штриховая и штрих-пунктирная линии) и полное сечение упругого столкновения для столкновения электронов с атомами аргона (сплошная линия). Штриховая линия — данные Гольдена [31]; штрих-пунктирная линия — данные Фроста и Фелпса [29]; сплошная линия — данные Гольдена и Ванделя [32].



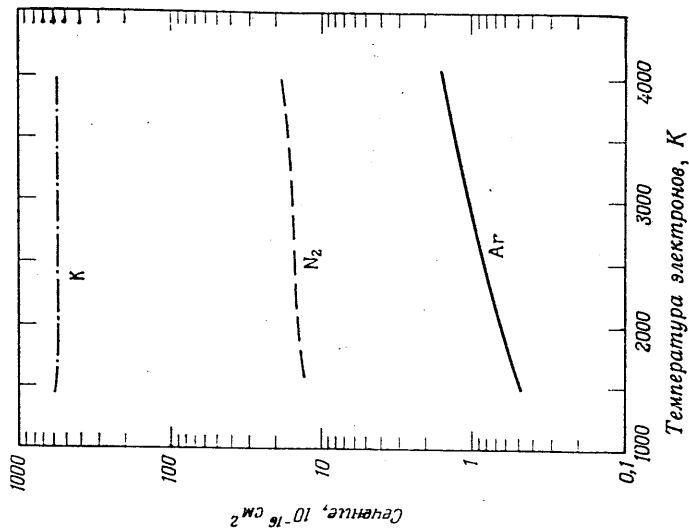
Фиг. 26. Дифференциальное сечение упругого рассеяния  $I(\chi)$  электронов в He, Ar, Xe и Hg [61, стр. 335].



Фиг. 27. Полное сечение упругого столкновения электронов в молекулярных газах  $O_2$ ,  $N_2$  и  $CO$  [14].

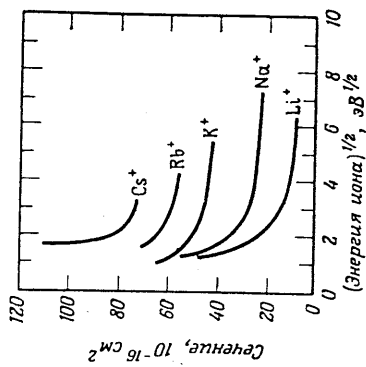


Фиг. 28. Полное сечение упругого столкновения с передатей импульса для электронов в полярных молекулярных газах  $H_2O$ ,  $NH_3$ ,  $N_2O$  и  $CO_2$  [19, стр. 90].

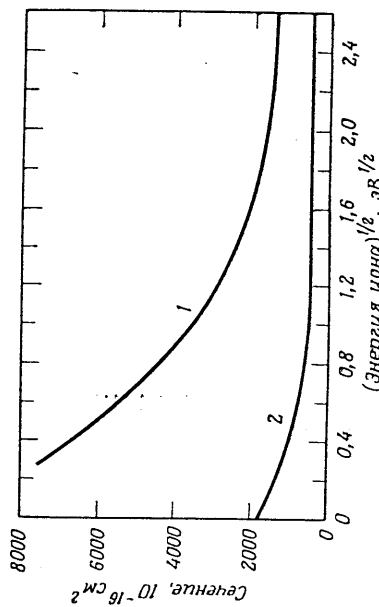


Фиг. 29. Усредненное по энергии сечение столкновения с передатей импульса для электронов в Ar,  $N_2$  и K.

Аргон — данные Гольдена [31]; для низких энергий и Фроста и Фелпса [29]; для высоких энергий (фиг. 29); азот — данные Энгельгарда, Фелпса и Риска [26] (фиг. 43); натрий — данные Броче [14] (фиг. 22).

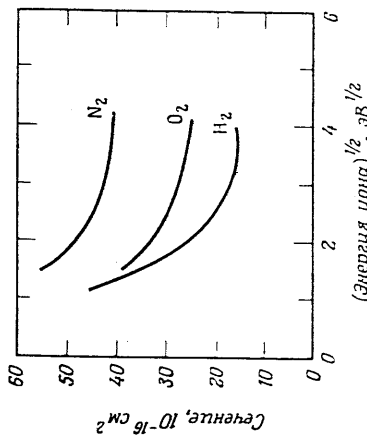


Фиг. 30. Полное сечение упругого столкновения для ионов Cs, Rb, K, Na и Li в аргоне [19, стр. 8].



Фиг. 31. Полное сечение упругого столкновения для ионов цезия в цезии [17, стр. 8].

1 — полное сечение; 2 — сечение поразрядки

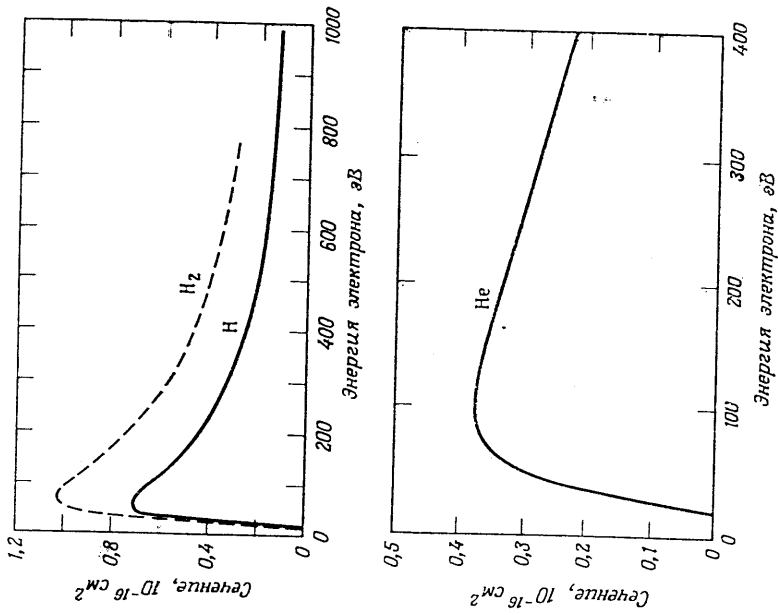


Фиг. 32. Полное сечение упругого столкновения для ионов натрия в молекулярных газах N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub> и H<sub>2</sub> [69].

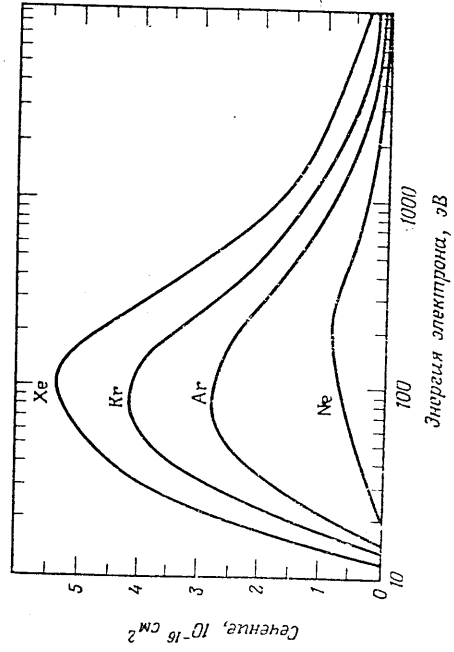
Таблица 12

Полное сечение упругого столкновения (в единицах 10<sup>-16</sup> см<sup>2</sup>) атомов щелочных металлов с атомами инертных газов при энергиях порядка 0,1 эВ [60, стр. 397]

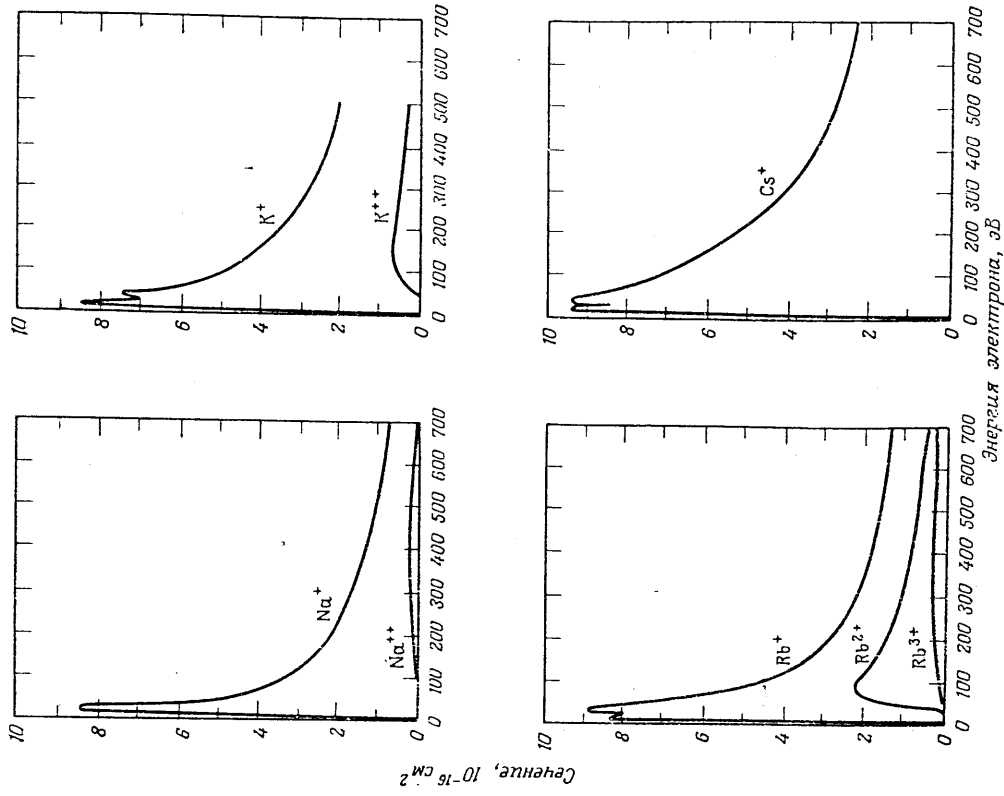
Рассеиваемый атом	Рассеивающие атомы		
	He	Ne	Ar
Li	106	120	303
Na	130	213	401
K	165	259	580
Rb	152	268	572
Cs	162	287	572



Фиг. 33. Сечение ионизации атомов H, H<sub>2</sub> и He электронным ударом [27, 74].

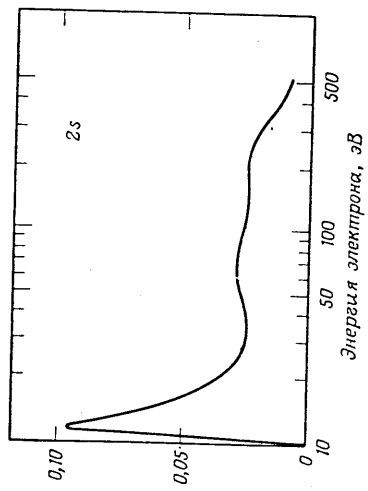
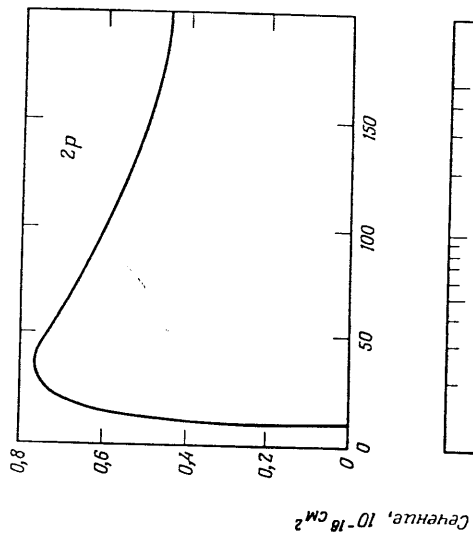


Фиг. 34. Полное сечение ионизации инертных газов Ne, Ar, Kr и Xe электронным ударом [49].

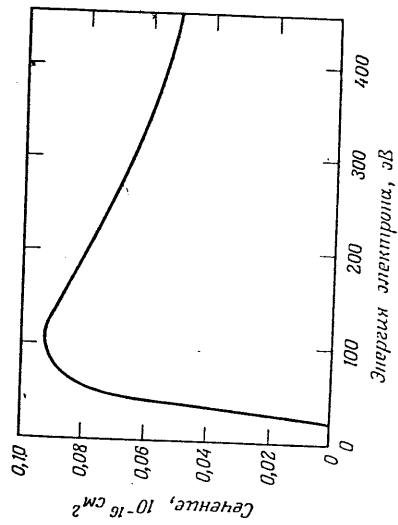


Фиг. 35. Сечение ионизации щелочных металлов Na, K, Rb и Cs [52].

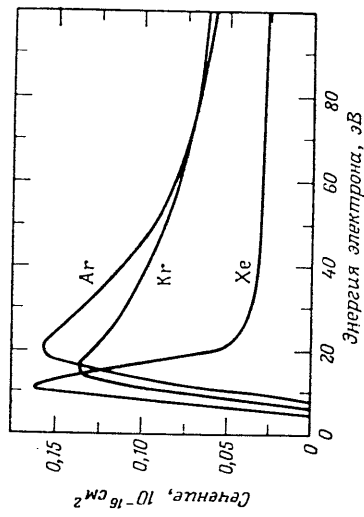




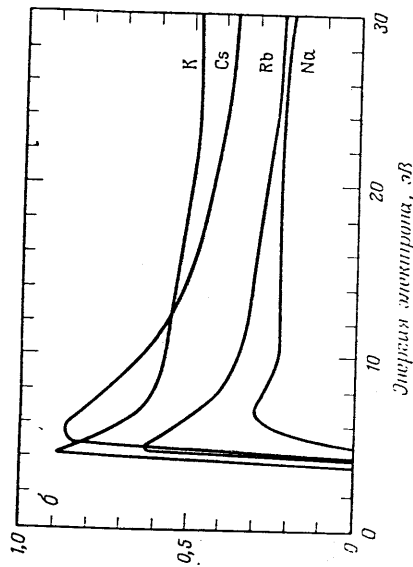
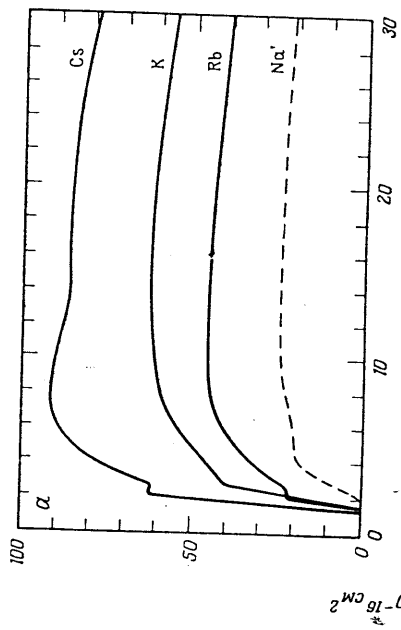
Фиг. 36. Сечение возбуждения первого возбужденного уровня атома водорода электронным ударом [28, 41].



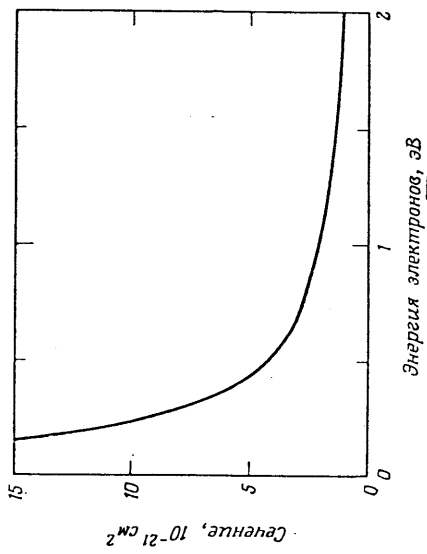
Фиг. 37. Сечение возбуждения уровня 2P атома Ne электронным ударом [49, стр. 5].



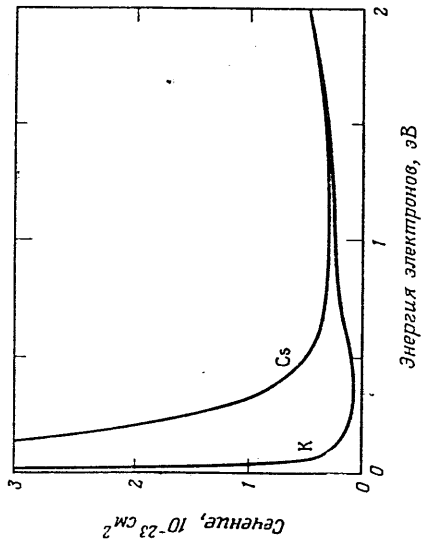
Фиг. 38. Сечение возбуждения уровней 2p<sub>8</sub> (серия Пашена) атомов Ar, Kr и Xe электронным ударом [84].



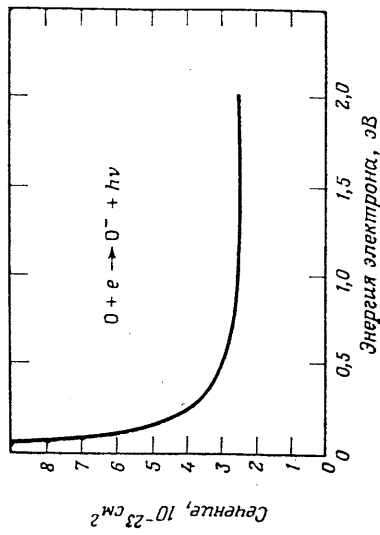
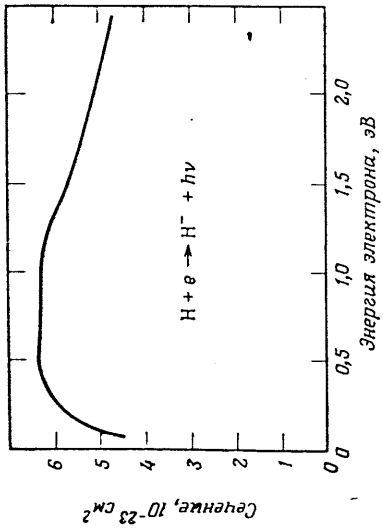
Фиг. 39. Сечение возбуждения атомов щелочных металлов Na, K, Rb и Cs [84].  
а — резонансные уровни; б — вторые возбужденные уровни 4s.



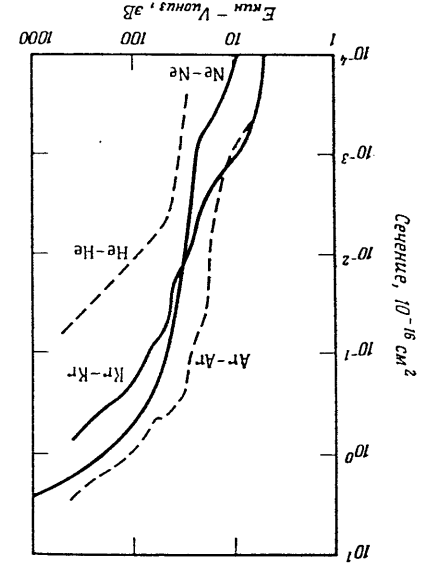
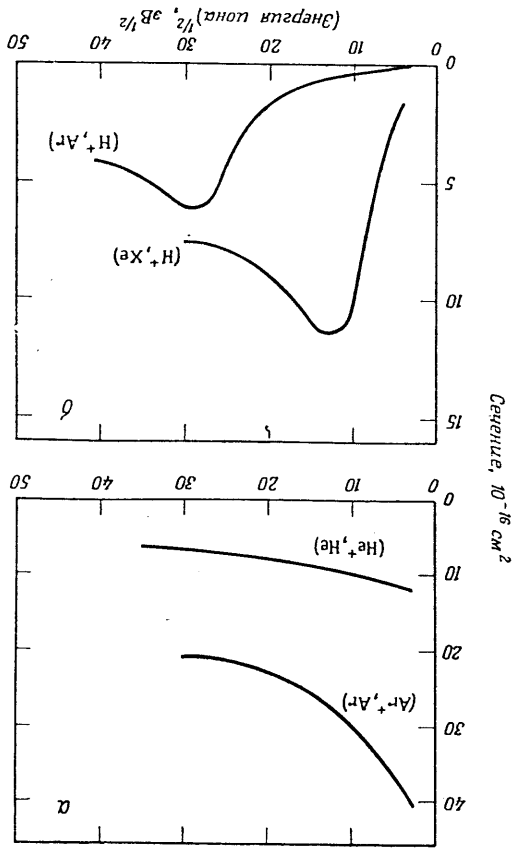
Фиг. 40. Сечение излучательной рекомбинации при захвате электрона на основной уровень атома Н [59].



Фиг. 41. Сечение излучательной рекомбинации при захвате электрона на основной уровень атома К и Cs, вычисленное по данным о фотоионизации [58, 59].

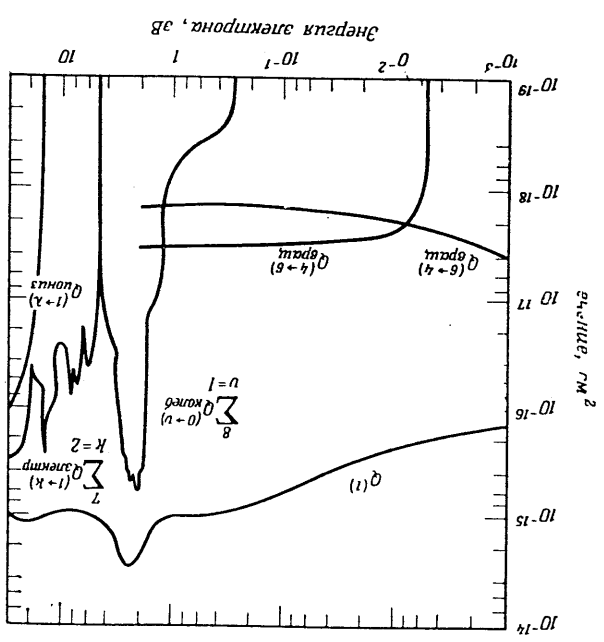


Фиг. 42. Сечение радиационного захвата электрона для  $H^-$  и  $O^-$  [12].

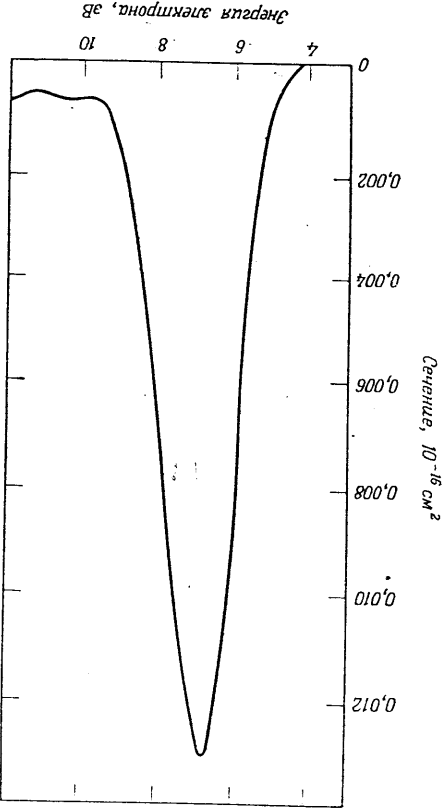


Фиг. 45. Сечение перезарядки [37; 60, стр. 529].  
 а — резонансная перезарядка ионов Ar<sup>+</sup> в аргоне и He<sup>+</sup> в гелии; б — нерезонансная перезарядка ионов H<sup>+</sup> в ксеноне и ионов H<sup>+</sup> в аргоне.  
 Фиг. 46. Сечение атом-атомной ионизации для инертных газов He и Ar [39] и Ne и Kr [3]. По оси абсцисс отложена относительная кинетическая энергия за вычетом потенциала ионизации.

Фиг. 43. Сечение вращательного, колебательного и электронного возбуждения, ионизации и передачи импульса при электронном ударе для N<sub>2</sub> [26].



Фиг. 44. Сечение диссоциативного захвата электрона для O<sub>2</sub> [9, стр. 126].



## Литература

1. *Aller L. H.*, Astrophysics, The Atmospheres of the Sun and Stars, Ronald Press, 1963 (имеется перевод: *Аллер Л. Х.*, Астрофизика, ИЛ, 1955).
2. *Андаритман В. А.*, Theoretical Astrophysics, Pergamon, 1958 (см. также *Амбарцумян В. А.*, *Муштейн Э. Р.*, *Северный А. Б.*, *Соболев В. В.*, Теоретическая астрофизика, М., 1952).
3. *Анне Р. С.*, *Нагсжаа Р. О.*, Phys. Rev., 177, 230 (1969). Ionization in Low-Energy Atomic Collisions of Neon with Neon and Krypton with Кrypton.
4. *Bates D. R.*, *Kingston A. E.*, *McWhirter R. W. P.*, Proc. Roy. Soc. (London), A-267, 297 (1962); A-270, 1341 (1962). Recombination Between Electrons and Atomic Ions.
5. *Bauer E.*, *Barth C. D.*, Journ. Chem. Phys., 43, 2466 (1965). Calculation of Inelastic Electron-Molecule Collision Cross Sections by Classical Methods.
6. *Bekefi G.*, Radiation Processes in Plasmas, Wiley, 1966.
7. *Bender D. J.*, *Mitchner M.*, *Kruger C. H.*, в книге Proc. of the Fifth International Conference on Magnetohydrodynamic Electrical Power Generation (Munich), vol. 2, 1971, p. 107. Thermodynamic Nonequilibrium in an Argon, Nitrogen, Alkali-Seeded Plasma.
8. *Berry R. S.*, Chem. Revs., 69, 533 (1969). Small Free Negative Ions.
9. *Biondi M. A.*, в книге Advances in Electronics and Electron Physics, vol. 18, Academic, 1963, p. 67. Atomic Collisions Involving Low Energy Electrons and Ions.
10. *Blatt J. M.*, *Weisskopf V. F.*, Theoretical Nuclear Physics, Wiley, 1952 (имеется перевод: *Блатт Дж.*, *Вайскопф В.*, Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954).
11. *Brackmann R. T.*, *File W. L.*, *Neuhaber R. H.*, Phys. Rev., 112, 1157 (1958). Collisions of Electrons with Hydrogen Atoms. III. Elastic Scattering.
12. *Branscomb L. M.*, в книге Atomic and Molecular Processes, ed. D.R. Bates, Academic, 1962 (имеется перевод: *Атомные и молекулярные процессы*, изд-во «Мир», 1964). Photodetachment.
13. *Branscomb L. M.*, Phys. Rev., 148, 11 (1966). Photodetachment Cross Section, Electron Affinity, and Structure of the Negative Hydroxyl Ion.
14. *Brode R. B.*, Rev. Mod. Phys., 5, 257 (1933). The Quantitative Study of the Collisions of Electrons with Atoms.
15. *Brown S. C.*, Basic Data of Plasma Physics, Technology Press of M.I.T. and Wiley, 1959.
16. *Brown S. C.*, Basic Data of Plasma Physics, 1966, M.I.T. Press, 1967.
17. *Bullis R. N.*, в книге Rept. on Thermionic Conversion Specialist Conf., Gatlinburg, Tenn., 1963, p. 1.
18. *Ch'en S.*, *Takeo M.*, Rev. Mod. Phys., 29, 20 (1957). Broadening and Shift of Spectral Lines Due to the Presence of Foreign Gases.
19. *Delcroix J. L.*, Introduction to the Theory of Ionized Gases, Interscience, 1960.
20. *Ditchburn R. W.*, Light, vol. 2, Interscience, 1963.
21. *Drawin H. W.*, Zs. f. Phys., 164, 513 (1961); (errata) 168, 238 (1962). Zur formelmässigen Darstellung der Ionisierungsquerschnitte gegenüber Elektronenstoss.
22. *Drawin H. W.*, Atomic Cross-Sections for Inelastic Electronic Collisions, Report EUR-CEA-FC 236 (1963).

23. *Drawin H. W.*, *Felenbok P.*, Data for Plasmas in Local Thermodynamic Equilibrium, Gauthier-Villars, 1965.
24. *Drellishak K. S.*, *Клопп С. Ф.*, *Самбел А. В.*, Phys. Fluids, 6, 1280 (1963). Partition Functions and Thermodynamic Properties of Argon Plasma.
25. *Drellishak K. S.*, *Aeschliman D. P.*, *Самбел А. В.*, Phys. Fluids, 8, 1590 (1965). Partition Functions and Thermodynamic Properties of Nitrogen and Oxygen Plasmas.
26. *Engelhardt A. G.*, *Pheleps A. V.*, *Risk C. G.*, Phys. Rev., 135, A1566 (1964). Determination of Momentum Transfer and Inelastic Collision Cross Sections for Electrons in Nitrogen Using Transport Coefficients.
27. *File W. L.*, *Brackmann R. T.*, Phys., Rev., 112, 1141 (1958). Collisions of Electrons with Hydrogen Atoms. I. Ionization.
28. *File W. L.*, *Stebbins R. F.*, *Brackmann R. T.*, Phys. Rev., 116, 356 (1959). Collisions of Electrons with Hydrogen Atoms. IV. Excitation of Lyman-Alpha Radiation near Threshold.
29. *Frost L. S.*, *Pheleps A. V.*, Phys. Rev., 136, A1538 (1964). Momentum Transfer Cross Sections for Slow Electrons in He, Ar, Kr, and Xe, from Transport Coefficients.
30. *Glennon B. M.*, *Wiase W. L.*, N.B.S. Monograph 50, 1962. Bibliography on Atomic Transition Probabilities.
31. *Golden D. E.*, Phys. Rev., 151, 48 (1966). Comparison of Low-Energy Total and Momentum-Transfer Scattering Cross Sections for Electrons on Helium and Argon.
32. *Golden D. E.*, *Bandel H. W.*, Phys. Rev., 149, 58 (1966). Low Energy Electron Argon Scattering Cross Sections: The Ramsauer-Townsend Effect.
33. *Green L. C.*, *Rush P. R.*, *Chandler C. D.*, Astrophys. Journ. Suppl., 3, 37 (1957). Oscillator Strengths and Matrix Elements for the Electric Dipole Moment for Hydrogen.
34. *Griem H. R.*, Plasma Spectroscopy, McGraw-Hill, 1964 (имеется перевод: *Грием Х. Р.*, Спектроскопия плазмы, М., 1969).
35. *Gryzinski M.*, Phys. Rev., 138, A336 (1965). Classical Theory of Atomic Collisions. I. Theory of Inelastic Collisions.
36. *Harris L. P.*, Journ. Appl. Phys., 36, 1543 (1965). Ionization and Recombination in Cesium-Seeded Plasmas near Thermal Equilibrium.
37. *Hasted J. B.*, Proc. Roy. Soc. (London), A205, 421 (1951). The Exchange of Charge Between Ions and Atoms.
38. *Hasted J. B.*, Physics of Atomic Collisions, Butterworths, 1964 (имеется перевод: *Хастед Дж.*, Физика атомных столкновений, изд-во «Мир», 1965).
39. *Hayden H. C.*, *Amme R. C.*, Phys. Rev., 141, 30 (1966). Low-Energy Ionization of Argon Atoms by Argon Atoms.
40. *Heitler W.*, The Quantum Theory of Radiation, Oxford University Press, 1954 (имеется перевод: *Гайтлер В.*, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956).
41. *Hils D.*, *Kleinpoppen H.*, *Koschmieder H.*, Proc. Phys. Soc., 89, 35 (1966). Remeasurement of the Total Cross Section for Excitation of the Hydrogen 2<sup>2</sup>S<sub>1/2</sub> State by Electron Impact.
42. *Hinnov E.*, *Kohn H.*, Journ. Opt. Soc. Am., 47, 156 (1957). Optical Cross Sections for Intensity-Density Measurements.
43. *Hinnov E.*, *Hirschberg J. G.*, Phys. Rev., 125, 795 (1962). Electron-Ion Recombination in Dense Plasmas.
44. *Hirschfelder J. O.*, *Curtiss C. F.*, *Bird R. B.*, Molecular Theory of Gases, and Liquids, Wiley, 1954.

45. Hofmann F. W., Kohn H., Journ. Opt. Soc. Am., 51, 512 (1961). Optical Cross Section of Resonance Lines Emitted by Flames under Conditions of Partial Thermal Ionization.
46. Karzas W. J., Latter R., Astrophys. Journ. Suppl., 6, 167, (1961). Electron Radiative Transitions in a Coulomb Field.
47. Kelly A. J., Journ. Chem. Phys., 45, 1723 (1966). Atom-Atom Ionization Cross Sections of the Noble Gases—Argon, Krypton, and Xenon.
48. Kennard E. H., Kinetic Theory of Gases, McGraw-Hill, 1938.
49. Kieffer L. J., Dunn G. H., Rev. Mod. Phys., 38, 1 (1966). Electron Impact Ionization Cross-Section Data for Atoms, Atomic Ions, and Diatomic Molecules: I. Experimental Data.
50. Kieffer L. J., Atomic Data, 1, 19 (1969). Low-Energy Electron-Collision Cross-Section Data Part I: Ionization, Dissociation, Vibrational Excitation.
51. Kieffer L. J., Atomic Data, 1, 121 (1969). Low-Energy Electron-Collision Cross-Section Data Part II: Electronic Excitation Cross Sections.
52. Kieffer L. J., Atomic Data, 2, 293 (1971). Low-Energy Electron-Collision Cross-Section Data Part III: Total Scattering; Differential Elastic Scattering.
53. Kihara T., Aono O., в книге Kinetic Equations, eds. R. L. Liboff, W. Rosloker, Gordon and Breach, 1963. A Review of the Unified Theory of Relaxations in Plasmas.
54. Kihara T., Aono O., Itikawa Y., Journ. Phys. Soc. Jap., 18, 1043 (1963). Unified Theory of Relaxation in Plasmas, II. Applications.
55. Laborte P., Rocard J.-M., Rees J. A., Electronic Cross-Sections and Macroscopic Coefficients. I — Hydrogen and Rare Gases, Dunod, 1968.
56. McDaniel E. W., Collisions Phenomena in Ionized Gases, Wiley, 1964 (имеется перевод: Мак-Даниэль И., Процессы столкновений в ионизированных газах, изд-во «Мир», 1967).
57. McFarland R. H., Kinney J. D., Phys. Rev., 137, A1058 (1965). Absolute Cross Sections of Lithium and Other Alkali Metal Atoms for Ionization by Electrons.
58. Marr G. V., Photoionization Processes in Gases, Academic, 1967.
59. Massey H. S. W., Electronic and Ionic Impact Phenomena II: Electron Collisions with Molecules and Photo-ionization, 2nd ed., Oxford, 1969.
60. Massey H. S. W., Burhop E. H. S., Electronic and Ionic Impact Phenomena, Oxford, 1952 (имеется перевод: Мессис Г., Бархон Е., Электронные и ионные столкновения, ИЛ, 1958).
61. Massey H. S. W., Burhop E. H. S., Electronic and Ionic Impact Phenomena I: Collision of Electrons with Atoms with Atoms, 2nd ed., Oxford, 1969.
62. Menzel D. H., Nat. Acad. Sci., 19, 40 (1933). A Simple Derivation of the Dissociation Formula.
63. Menzel D. H., Pekeris C. L., Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 96, 77 (1935). Absorption Coefficients and Hydrogen Line Intensities.
64. Mitchell A. C. G., Zemansky M. W., Resonance Radiation and Excited Atoms, Cambridge University Press, 1934, 1961.
65. Moissetta B. L., Smith S. J., Rev. Mod. Phys., 40, 238 (1968). Electron Impact Excitation of Atoms.
66. Moore C. E., Nat'l Bur. Standards Circ. 467, vol. I, 1949; vol. II, 1952; vol. III, 1958. Atomic Energy Levels.
67. Оккуп В. Н., Петрунькин А. М., Оптика и спектроскопия, 14, 457 (1963).

- О классическом расчете вероятности возбуждения и ионизации атомов электронным ударом.
68. Пресняков Л. П., Уланцев А. Д., Шелепин Л. А., Оптика и спектроскопия, 24, 363 (1968). Влияние испуртурих атомных стлкнулений на процессы релаксации в низкотемпературной плазме.
69. Ramsauer C., Beetz O., Ann. der Phys., 392, 1 (1928). Der Wirkungsquerschnitt von Gasmolekülen gegenüber Alkaliionen von 1—30 Volt Geschwindigkeit.
70. Rose D. J., Clark M., Jr., Plasmas and Controlled Fusion, M.I.T. Press and Wiley, 1961.
71. Ridge M. R. H., Rev. Mod. Phys., 40, 564 (1968). Theory of the Ionization of Atoms by Electron Impact.
72. Rastbrooke G. S., Introduction to Statistical Mechanics, Oxford University Press, 1949.
73. Seaton M. J., в книге Atomic and Molecular Processes, ed. D.R. Bates, Academic, 1962 (имеется перевод: Атомные и молекулярные процессы, изд-во «Мир», 1964). The Theory of Excitation and Ionization by Electron Impact.
74. Smith P. T., Phys. Rev., 36, 1293 (1930). The Ionization of Helium, Neon and Argon by Electron Impact.
75. Spitzer L., Physics of Fully Ionized Gases, Interscience, 1962.
76. Sulton G. W., Sherman A., Engineering Magneto-hydrodynamics, McGraw-Hill, 1965.
77. Thomson J. J., Phil. Mag., 23, 449 (1912). Ionization by Moving Electrified Particles.
78. Tolman R. C., The Principles of Statistical Mechanics, Oxford, University Press, 1938.
79. Vincenti W. G., Kruger C. H., Introduction to Physical Gas Dynamics, Wiley, 1965.
80. Visconti P. J., Stevin J. A., Rubin K., Phys. Rev., A3, 1310 (1971). Absolute Total Cross Sections for the Scattering of Low-Energy Electrons by Rubidium, Cesium and Potassium.
81. Wiese W. L., Smith M. W., Glennon B. M., National Standard Reference Data Series—NBS 4, 1966.
82. Wiese W. L., Smith M. W., Miles B. M., National Standard Reference Data Series—NBS 22 (1969). Atomic Transition Probabilities, II, Sodium Through Calcium.
83. Zapesochnyi I. P., Shimon L. L., в книге Proc. of the 14th International Conference on the Physics of Electronic and Atomic Collisions, Science Bookcrafters, Inc., 1965, p. 401. Запесочный И. П., Фельцман Л. Л., Оптика и спектроскопия, 20, 291 (1966). О сечениях возбуждения 2p-уровней аргона, криптона и ксенона.
85. Zeldovich Ya. B., Raizer Yu. P., Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena, vol. 1, Academic, 1966 (см. также Зельдович И. Б., Райзер Ю. П., Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, М., 1966).

## ПЛАЗМА

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

В гл. 2 мы говорили в основном о поведении и свойствах отдельных частиц в частично ионизованных газах. Теперь обратимся к изучению макроскопического поведения системы заряженных частиц. В этой главе будут введены два взаимосвязанных фундаментальных параметра, характеризующих электрические свойства частично ионизованного газа, а именно дебаевский радиус экранирования и плазменная частота. Как отмечалось в гл. 2, § 8, при вычислении сечения столкновения с передачей импульса в случае, когда сталкиваются две заряженные частицы, важную роль играет эффект коллективного взаимодействия соседних заряженных частиц. Понятие экранирования, которое вводится для учета этого эффекта, используется также при описании области ионизованного газа, находящейся в непосредственном контакте с твердой поверхностью и именуемой двойным слоем.

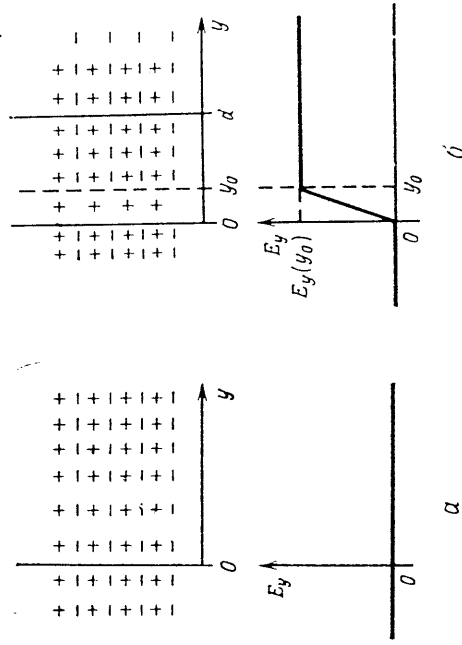
Последние три параграфа данной главы посвящены таким вопросам, при рассмотрении которых необходимы фундаментальные понятия, введенные в первых параграфах главы. Сначала излагается классическая теория электростатических зондов и их применения для измерений характеристик ионизованных газов низкого давления. Затем рассматриваются некоторые вопросы поведения столкновительных ионизованных газов на границе с твердой поверхностью. В заключение мы останавливаемся на элементарной теории распространения электромагнитного излучения в ионизованном газе и показываем, каким образом можно получить информацию об ионизованных газах из экспериментов с электромагнитными волнами.

## § 2. КВАЗИНЕЙТРАЛЬНОСТЬ И ДЕБАЕВСКИЙ РАДИУС

Основным свойством частично ионизованного газа является его стремление к установлению квазинейтральности. Даже ничтожные различия концентраций положительно и отрицательно заряженных частиц в макроскопическом объеме привело бы к появлению огром-

ных электростатических полей. Потенциальная энергия частиц в таких полях настолько превысила бы среднюю тепловую энергию частиц. Поэтому в отсутствие каких-либо особых механизмов, под-держивающих такие поля, заряженные частицы должны быстро сместиться, так чтобы уменьшилась разность потенциалов и восстановилось квазинейтральное состояние.

Для количественного определения масштабов расстояний, на которых возможно отклонение от квазинейтральности, рассмотрим



Фиг. 1. Работа, необходимая для создания области, в которой полный заряд положительный.

*a* — начальное положение; *b* — промежуточное положение.

следующую простую модель. Предположим, что газ первоначально электрически нейтрален и что электроны и ионы распределены в пространстве равномерно (фиг. 1, *a*). В начальный момент времени концентрации электронов и ионов равны:  $n = n_e = n_i$ . Определим, какую работу необходимо совершить для перемещения всех электронов вправо на расстояние *d*. Ясно, что она будет равна работе, необходимой для создания слоя положительного заряда  $\rho^c \cdot n_e$  между плоскостями  $y = 0$  и  $y = d$ .

Пусть  $y_0$  — некоторое промежуточное смещение электронов (фиг. 1, *b*). Напряженность электрического поля *E*, возникающего при наличии некоторого распределения заряда с плотностью  $\rho^c$ , в общем виде определяется уравнением Гаусса

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho^c}{\epsilon_0}. \quad (2.1)$$

В случае одномерного распределения, представленного на фиг. 1, б, имеем

$$y \leq 0, \quad \frac{dE_y}{dy} = 0 \Rightarrow E_y = 0, \quad (2.2a)$$

$$0 \leq y \leq y_0, \quad \frac{dE_y}{dy} = \frac{ne}{\epsilon_0} \Rightarrow E_y = \frac{ne}{\epsilon_0} y, \quad (2.2б)$$

$$y_0 \leq y, \quad \frac{dE_y}{dy} = 0 \Rightarrow E_y = E_y(y_0) = \frac{ne}{\epsilon_0} y_0. \quad (2.2в)$$

Здесь мы предполагаем, что электрическое поле до смещения равно нулю и что  $E_y$  — непрерывная функция.

В области плазмы справа от точки  $y_0$  электрическое поле, действующее на каждую частицу, составляет  $E_y(y_0)$ . Работа, необходимая для дополнительного перемещения каждого электрона на расстояние  $dy_0$ , равна

$$dW = eE_y(y_0) dy_0.$$

Поэтому полная работа, которую необходимо совершить, чтобы развести заряды на расстояние  $d$ , дается выражением

$$W = \int_0^d eE_y(y_0) dy_0 = \frac{ne^2}{\epsilon_0} \frac{d^2}{2}. \quad (2.3)$$

В частности, если энергия, затрачиваемая на разделение зарядов, равна средней энергии теплового движения в направлении  $y$ , а именно  $kT/2$ , то соответствующее ей смещение  $d = \lambda_D$  называется *дебаевским радиусом* экранирования и определяется соотношением

$$\frac{ne^2}{\epsilon_0} \frac{\lambda_D^2}{2} = \frac{kT}{2},$$

откуда

$$\lambda_D = \left( \frac{\epsilon_0 kT}{ne^2} \right)^{1/2}. \quad (2.4a)$$

В единицах СИ

$$\lambda_D = 69,0 \left( \frac{T}{n} \right)^{1/2} \text{ м}. \quad (2.4б)$$

Например, при типичных параметрах МГД-генератора  $T = 2500 \text{ К}$  и  $n = 10^{20} \text{ м}^{-3}$  мы имеем  $\lambda_D \approx 3,4 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ . Сравним это расстояние с длиной свободного пробега электрона, которая в условиях, заданных в задаче 8.2 к гл. 2, равна  $l_e \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ . Нетрудно видеть, что в этом случае дебаевский радиус экранирования приблизительно в 5 раз меньше длины свободного пробега электрона. Значения дебаевских радиусов экранирования для различных условий, представляющих интерес, приведены в гл. 2 (фиг. 12).

В 1929 г. Ленгмюр [7] ввел термин «плазма» для частицы ионизованного газа, дебаевский радиус экранирования  $\lambda_D$  которого мал по сравнению с другими характерными макроскопическими расстояниями (например, по сравнению с масштабом изменения электронной плотности). В этих условиях можно считать газ электрически нейтральным, т. е. полагать, что  $n_i \approx n_e$ . Термин «плазма» происходит от греческого глагола, обозначающего «разрыхляться», «расползаться», и возник, когда Ленгмюр наблюдал за поведением столба положительного заряда, стремящегося расплзтись по всей трубке, в которой зажжен разряд.

**Задача 2.1.** Дана нейтральная плазма с плотностью заряженных частиц  $n_e = n_i = 10^{14} \text{ см}^{-3}$  и температурой  $T = 2500 \text{ К}$ . Определите:

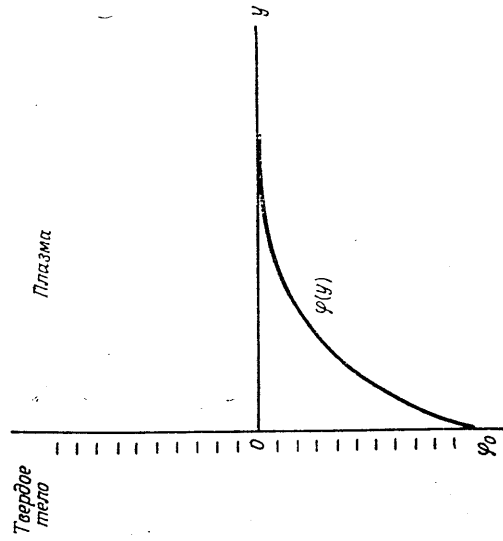
- 1) напряженность электрического поля (в вольтах на сантиметр), которая возникнет на поверхности сферы радиусом 1 мм, если из нее каким-либо способом мгновенно удалить все электроны;
- 2) разность потенциалов, необходимую для того, чтобы ускорить электрон до энергии, равной средней тепловой энергии электрона в плазме;
- 3) максимальную долю электронов, которые могут быть удалены из сферы при условии, что разность потенциалов между центром сферы и ее поверхностью не превысит разности потенциалов, численной в пункте 2 данной задачи;
- 4) дебаевский радиус экранирования для плазмы с указанными параметрами.

### § 3. ДВОЙНОЙ СЛОЙ

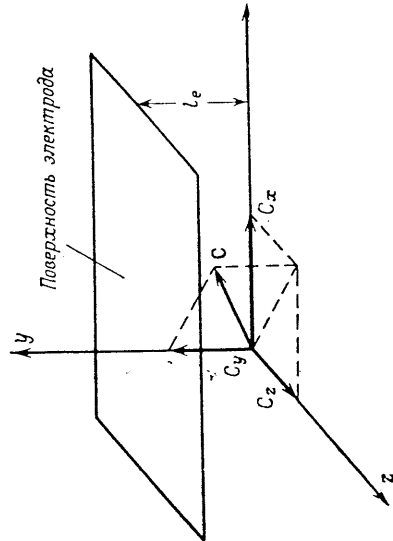
С одним из основных случаев нарушения квазинейтральности мы встречаемся в области частично ионизованного газа, непосредственно примыкающей к твердой поверхности. Такую область называют *двойным слоем*. Наиболее существенным макроскопическим параметром здесь является расстояние до поверхности. Можно заранее сказать, что условные квазинейтральности должно нарушаться на расстояниях порядка  $\lambda_D$ . Детальная структура двойного слоя может меняться в широких пределах в зависимости от ряда факторов. В данном параграфе будут рассмотрены только простейшие модели для того, чтобы наиболее быстрым способом выявить самые характерные свойства двойного слоя.

Одним из важнейших факторов в случае двойного слоя является состояние заряженных частиц после столкновения с твердой поверхностью. Если поверхность охлаждается, то в ряде случаев ее можно считать неэмитирующей и *каталитической*. Тогда заряженные частицы, ударяясь о поверхность, либо остаются на ней, либо рекомбинируют и возвращаются в газ в виде нейтральных частиц.

Рассмотрим особый случай, когда в стационарную плазму мгно-  
венно вводится плавающий<sup>1)</sup> электрод. Для простоты предположим,  
что температура электро-  
нов и тяжелых частиц  
одинакова и однородна.  
Вначале поток электро-  
нов на электрод суще-  
ственно превышает поток  
ионов, поскольку тепло-  
вые скорости электронов  
и ионов связаны соотно-  
шением  $\bar{C}_e \gg \bar{C}_i$ . Но в  
стационарном случае  
скорость накопления за-  
ряда на электроде дол-  
жна быть равна нулю.  
И действительно, элек-  
трод быстро приобретает  
такой отрицательный  
заряд, что поток элек-  
тронов уменьшается и  
полностью уравнивает-  
ся потоком ионов.  
Наибольший интерес в  
данном случае представ-  
ляют два основных па-  
раметра (фиг. 2): плава-  
ющий потенциал  $\varphi_0$  и  
протяженность области  
в двойном слое, где от-  
личен от нуля потенциал  
 $\varphi(y)$ . Ниже будут опре-  
делены оба эти парамет-  
ра.



Фиг. 2. Стационарное распределение потен-  
циала у плавающего электрода.  
 $n_e = n_i = n$  (при  $y \gg \lambda_D$ ).



Фиг. 3. Плотность потока электронов на  
поверхности электрода.

тывают последнее столкновение приблизительно на расстоянии  
одной средней длины свободного пробега  $l_e$  от поверхности элек-  
трода. Предположим, что распределение  $f_e(C)$  электронов в

<sup>1)</sup> «Плавающий» означает, что потенциал электрода не задан каким-  
либо внешним источником э. д. с. — Прим. ред.

приэлектродной области является максвелловским. Кроме того,  
для простоты будем считать, что толщина двойного слоя  
меньше длины свободного пробега электронов  $l_e$ . Последнее допу-  
щение позволяет считать, что внутри двойного слоя плазма является  
бесстолкновительной, а также означает, что  $n_e \approx n_i = n$  в области,  
где распределение частиц  $f_e(C)$  является максвелловским. В даль-  
нейшем мы увидим, что условие бесстолкновительного, или сво-  
бодного, падения на электрод в двойном слое эквивалентно требо-  
ванию  $\lambda_D < l_e$ .

Как видно из фиг. 3, на электрод попадут только те электроны,  
скорость которых направлена к поверхности электрода и энергия  
которых достаточна для преодоления потенциального барьера.  
Минимальная  $y$ -компонента скорости  $C_{y0}$ , отвечающая этому требо-  
ванию, дается соотношением

$$\frac{m_e C_{y0}^2}{2} = -e\varphi_0. \quad (3.1)$$

В соответствии с формулами (6.18а) и (6.20) из гл. 2 плотность пото-  
ка электронов в одном направлении дается соотношением

$$\Gamma_e^\dagger = n \int_{C_y > C_{y0}} f_e(C) C_y d^3C = n \left[ \left( \frac{m_e}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m_e C_x^2 / 2kT} dC_x \right] \times \\ \times \left[ \left( \frac{m_e}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_{C_{y0}}^{\infty} e^{-m_e C_y^2 / 2kT} C_y dC_y \right] \left[ \left( \frac{m_e}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m_e C_z^2 / 2kT} dC_z \right].$$

Заметив, что выражения в квадратных скобках, содержащие инте-  
гралы по  $dC_x$  и  $dC_z$ , равны единице, получим окончательно

$$\Gamma_e^\dagger = \frac{n \bar{C}_y}{4} e^{e\varphi_0 / kT}. \quad (3.2)$$

Здесь  $\bar{C}_y = (8kT/\pi m_e)^{1/2}$  — средняя тепловая скорость электронов  
[гл. 2, формула (6.34)]. Аналогично может быть вычислена плот-  
ность потока ионов на электрод  $\Gamma_i^\dagger$ , но, поскольку ионы не задер-  
живаются плавающим потенциалом, резульат будет несколько  
иными:

$$\Gamma_i^\dagger = \frac{n \bar{C}_i}{4}. \quad (3.3)$$

Плавающий потенциал можно определить из условия

$$\Gamma_i^\dagger = \Gamma_e^\dagger. \quad (3.4)$$

В случае равенства температур электронов и ионов условие (3.4)  
приводит к следующему значению плавающего потенциала:

$$-\varphi_0 = \frac{kT}{e} \ln \frac{\bar{C}_e}{\bar{C}_i} = \frac{kT}{e} \ln \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (3.5)$$



Как и следовало ожидать, величина  $\varphi_0$  пропорциональна температуре в экспоненциальных. По из-за малости множителя  $\ln(n_i/n_e)^{1/4}$ , минимальное значение которого равно 3,8 (для ионов водорода), зависимость  $\varphi_0$  от температуры оказывается довольно сильной. Более детальный анализ показывает, что соотношение (3.2) справедливо лишь для плоского бесконечного электрода, а соотношение (3.3) следует заменить более точным [2, стр. 116]:

$$\Gamma_i^{\dagger} \approx \frac{n_i \bar{c}_i}{2}. \quad (3.6)$$

Значительная часть электронов, находившихся на расстоянии одной средней длины свободного пробега от электрода, подойдя к нему, отражается потенциальным барьером и возвращается обратно. Поэтому функция распределения электронов в пространстве скоростей близка к изотропной и с большой точностью может считаться максвелловской, как и принимается при выводе соотношения (3.2). Ионы же, находившиеся в таких условиях, падая на электрод, захватываются им, и поэтому распределение ионов в пространстве скоростей сильно анизотропно. В случае ионов предположение о максвелловском распределении оказывается довольно грубым приближением.

Обратимся теперь к вопросу о пространственном распределении потенциала  $\varphi(y)$ . Отметим, что точный учет поведения ионов затруднен в связи со сказанным выше. Электроны же в двойном слое можно считать находящимися в состоянии термодинамического равновесия. Тогда в соответствии с выводами статистической механики [12, стр. 89] электроны подчиняются распределению Больцмана:

$$n_e(y) = n_e e^{-e\varphi(y)/kT}. \quad (3.7)$$

Здесь учитывалось, что потенциальная энергия электрона с координатой  $y$  равна  $-e\varphi(y)$ . [Этот результат можно также получить путем динамического анализа как следствие закона сохранения импульса: электрические силы уравновешиваются градиентом плотности потока импульса, формулы (7.4) и (7.6).] Если бы ионы тоже находились в состоянии термодинамического равновесия, то мы имели бы

$$n_i(y) = n_i e^{-e\varphi(y)/kT}. \quad (3.8)$$

Данное соотношение хорошо описывало бы распределение ионов в том случае, когда все ионы отражаются от электрода, но в случае каталитической поверхности оно оказывается довольно грубо приближенным. Для простоты мы все же будем пользоваться соотношением (3.8). Мы можем надеяться, что результаты получатся приблизительно верными, ибо соотношения (3.3) и (3.6) различаются лишь множителем 2. Более точные расчеты [11, стр. 29; 10, стр. 210] подтверждают это предположение.

Распределение потенциала в стационарном случае описывается уравнением Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho^c}{\epsilon_0}. \quad (3.9)$$

Электрическое поле выражается через потенциал следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (3.10)$$

Существование такого потенциала является следствием уравнения Фарадея для стационарного случая,  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  [гл. 6, формула (2.1в)]. Уравнение Пуассона получается в результате подстановки  $\mathbf{E}$  в уравнение Гаусса (2.1).

Подставив зависимости (3.7) и (3.8) в соотношение (3.9)  $= e(n_i - n_e)$ , получим следующее уравнение для  $\varphi(y)$ :

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} = -\frac{ne}{\epsilon_0} (e^{-e\varphi(y)/kT} - e^{e\varphi(y)/kT}). \quad (3.11)$$

У края двойного слоя, где  $|e\varphi/kT| \ll 1$ , можно использовать разложение экспоненты в ряд:

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} = -\frac{ne}{\epsilon_0} \left( 1 - \frac{e\varphi}{kT} - 1 + \frac{e\varphi}{kT} + \dots \right) \approx \frac{2ne^2}{\epsilon_0 kT} \varphi = \frac{2}{\lambda_D^2} \varphi,$$

откуда следует

$$\varphi(y) \sim e^{-\sqrt{2}y/\lambda_D}. \quad (3.12)$$

Точное интегрирование уравнения (3.11) при следующих граничных условиях:  $\varphi(0) = \varphi_0$ ,  $\varphi \rightarrow 0$  и  $d\varphi/dy \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow \infty$ , дает

$$\frac{e\varphi}{kT} = \ln \frac{1 - \text{th}(e\varphi_0/4kT) e^{-\sqrt{2}y/\lambda_D}}{1 + \text{th}(e\varphi_0/4kT) e^{-\sqrt{2}y/\lambda_D}}. \quad (3.13)$$

Численное сравнение формул (3.13) и (3.12) показывает, что при всех значениях  $y$  решение уравнения хорошо аппроксимируется выражением

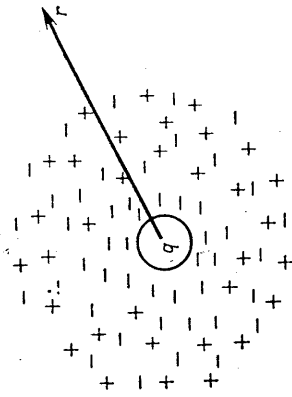
$$\varphi(y) = \varphi_0 e^{-\sqrt{2}y/\lambda_D}. \quad (3.14)$$

Главный вывод, следующий из полученного результата, заключается в том, что, как мы говорили ранее, размеры двойного слоя оказываются порядка дебаевского радиуса экранирования. Плазма как бы стремится создать вблизи электрода слой, препятствующий проникновению в нее электрических полей, и это одно из основных свойств всякой плазмы.

**Задача 3.1.** Определите толщину двойного слоя плазмы у поверхности диэлектрика. Считайте, что электроны и ионы плазмы находятся в состоянии теплового равновесия при разных температурах  $T_e$  и  $T_i$  и что толщина двойного слоя намного меньше длины свободного пробега.

#### § 4. ЭКРАНИРОВАННЫЙ КУЛОНОВСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ

Предположим, что мы поместили в плазму точечный заряд  $q > 0$  и нас интересует стационарное распределение зарядов, которое устанавливается около него. Как показано на фиг. 4, в непосредственной близости к заряду  $q$  плотность отрицательных зарядов превышает плотность положительных и этот избыток постепенно уменьшается по мере увеличения расстояния  $r$  от  $q$ . Такое распределение возникает вследствие того, что  $q$  одновременно притягивает отрицательные заряды и отталкивает положительные. На достаточно больших расстояниях  $r$  от заряда  $q$  плазма возвращается в состояние макроскопической квазинейтральности. В результате перераспределения зарядов плазмы вдали от заряда возникают электрические поля, которые полностью компенсируют электрическое поле, создаваемое зарядом  $q$ .



Фиг. 4. Экранирование заряда плазмой.

Экранированный кулоновский потенциал  $\varphi(r)$ , описывающий влияние заряда  $q$  и распределенного пространственного заряда плазмы, определяется уравнением Пуассона (3.9), записанным в следующем виде:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{e}{\epsilon_0} [n_i(r) - n_e(r)]. \quad (4.1)$$

Поскольку плазма вблизи заряда  $q$  находится в состоянии термодинамического равновесия, можно воспользоваться соотношениями (3.7) и (3.8), взяв за независимую переменную расстояние вдоль радиуса  $r$ . Тогда уравнение (4.1) перепишется следующим образом:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{ne}{\epsilon_0} [e^{-e\varphi(r)/kT} - e^{e\varphi(r)/kT}]. \quad (4.2)$$

При больших  $r$ , когда  $|e\varphi/kT| \ll 1$ , получаем, как и в § 3,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) \approx \frac{2}{\lambda_D^2} \varphi. \quad (4.3)$$

Чтобы решить уравнение (4.3), нужно произвести подстановку

$$\varphi = \frac{g(r)}{r},$$

после чего дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{d^2 g}{dr^2} = \frac{2}{\lambda_D^2} g;$$

поэтому при больших  $r$  получим

$$\varphi(r) \sim \frac{e^{-\sqrt{2}r/\lambda_D}}{r}. \quad (4.4)$$

При достаточно малых  $r$  эффект экранирования пренебрежимо мал, и заряду  $q$  должен соответствовать обычный кулоновский потенциал

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (4.5)$$

При любых значениях  $r$  в качестве приближенного решения уравнения (4.2) можно использовать выражение

$$\varphi(r) = \frac{qe^{-\sqrt{2}r/\lambda_D}}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (4.6)$$

так как эта величина ведет себя правильно в предельных случаях малых и больших значений  $r$ .

На основании выражения (4.6) можно заключить, что в плазме электрическое поле заряда  $q$  простирается лишь на расстояние, не превышающее  $\lambda_D$ . По этой причине величину  $\lambda_D$  и называют дебаевским радиусом экранирования<sup>1)</sup>. При рассмотрении столкновений заряженных частиц в гл. 2, § 8, отмечалось, что в случае взаимодействия, описываемого чисто кулоновским потенциалом, полное сечение столкновения с передачей импульса обращается в бесконечность. Соотношение (4.6) точнее характеризует взаимодействие между заряженными частицами в плазме и приводит к конечному значению [гл. 2, формула (8.4)] сечения столкновения заряженных частиц с передачей импульса.

Множитель  $\sqrt{2}$ , фигурирующий в формуле (4.6), часто включается в определение дебаевского радиуса экранирования, так что вместо соотношения (2.4а) берется следующее выражение для радиуса экранирования:

$$\lambda_D = \left[ \frac{\epsilon_0 kT}{(n_e + n_i) e^2} \right]^{1/2} = \left( \frac{\epsilon_0 kT}{2ne^2} \right)^{1/2}. \quad (4.7)$$

В случае постоянного и неподвижного заряда  $q$  электроны и ионы принимают одинаковое участие в экранировании и формула (4.7) для дебаевского радиуса экранирования должна хорошо выполняться. В нестационарных же процессах электроны и ионы, несомненно, в разной степени влияют на процесс экранирования. В частности, в случае быстрых флуктуаций ионы, обладающие большей массой, будут вносить очень малый вклад в экранирование. Для сколько-нибудь точного рассмотрения этого эффекта необходимо более детально

<sup>1)</sup> Сам Дебай ввел понятие радиуса экранирования, рассматривая ионы в жидких электролитах. — Прим. ред.

ный анализ. Мы же для простоты учитываем только вклад электронов, чтобы приближенно оценить дебаевский радиус экранирования.

**Задача 4.1.** Найдите распределение потенциала вблизи постоянного и неподвижного заряда в спокойной плазме. Плазма состоит из электронов, температура которых равна  $T_e$ , и ионов двух сортов, заряды которых равны  $Z_1e$  и  $Z_2e$ , а температура  $T$ . Если температура  $T_e$  равна температуре  $T$ , будет ли в этом случае дебаевский радиус экранирования меньше или больше, чем в случае, когда  $Z_1 = Z_2 = 1$ ?

### § 5. ВРЕМЯ ОТКЛИКА, ПЛАЗМЕННАЯ ЧАСТОТА

Коль скоро при малейшем отклонении плазмы от состояния квазинейтральности возникают большие силы, возвращающие ее

в это состояние, можно поставить вопрос о том, насколько быстро действуют эти возвращающие силы. Для простоты предположим, что масса ионов очень велика и за время порядка времени отклика они не успевают сдвинуться с места. Тогда можно считать, что ионы создают однородный фон плотности положительных зарядов  $ne$ . Рассмотрим слой плазмы и предположим, что каждый электрон, находившийся первоначально в некоторой точке  $y$  некой вырванной нами плоскости, смещен на расстояние  $\xi(y)$ . Посмотрим, что произойдет, если теперь электроны отпустить.

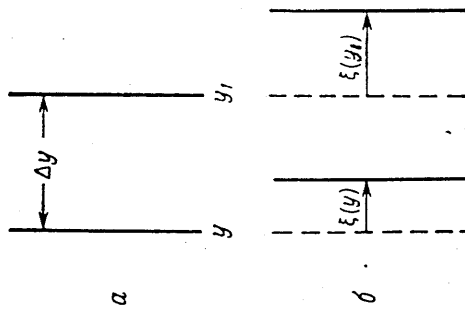
Вследствие смещения зарядов их плотность изменится следующим образом:

$$n_e(y) = n + \delta n(y). \quad (5.1)$$

Возникшее в результате этого пространственное распределение заряда  $-\delta n(y)$  создаст электрическое поле, которое в свою очередь будет взаимодействовать с электронами.

Чтобы снять,  $\delta n(y)$  и  $\xi(y)$ , рассмотрим усложненный вариант задачи. Первоначально заключенных в слое плазмы между плоскостями  $y$  и  $y_1 = y + \Delta y$  (фиг. 5). Тогда мы получим

$$\begin{aligned} n\Delta y &= (n + \delta n) \{ [y_1 + \xi(y_1)] - [y + \xi(y)] \} \approx \\ &\approx (n + \delta n) \left\{ [y_1 + \xi(y) + \Delta y \frac{d\xi}{dy}] - [y + \xi(y)] \right\} = \\ &= (n + \delta n) \left( 1 + \frac{d\xi}{dy} \right) \Delta y. \end{aligned}$$



Фиг. 5. Одномерное распределение зарядов, возникающее при смещении электронов.

$a$  — до смещения;  $b$  — после смещения.

Далее, полагая  $|d\xi/dy| \ll 1$ , имеем

$$\delta n = -\frac{n \frac{d\xi}{dy}}{1 + d\xi/dy} \approx -n \frac{d\xi}{dy}. \quad (5.2)$$

Соответствующее электрическое поле на расстоянии  $y$  определяется уравнением Гаусса

$$\frac{dE_y}{dy} = -\frac{\delta n}{\epsilon_0} = \frac{ne}{\epsilon_0} \frac{d\xi}{dy},$$

непосредственное интегрирование которого дает

$$E_y(y) = \frac{ne}{\epsilon_0} \xi(y). \quad (5.3)$$

И наконец, уравнение движения электрона, смещенного на расстояние  $\xi$ , имеет вид

$$m_e \frac{d^2\xi}{dt^2} = -eE_y(y + \xi) \approx -eE_y(y) = -\frac{ne^2}{\epsilon_0} \xi. \quad (5.4)$$

Согласно уравнению (5.4), если электроны отпустить, то они будут совершать простые гармонические колебания<sup>1)</sup> с характерной круговой плазменной частотой

$$\omega_p = \left( \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e} \right)^{1/2}. \quad (5.5a)$$

Соответствующая частота  $\nu_p$  в единицах СИ равна

$$\nu_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 8,97 n_e^{1/2} \text{ с}^{-1}. \quad (5.5b)$$

Время отклика плазмы равно обратной величине частоты  $\nu_p$ . Например, при  $n_e \approx 10^{20} \text{ м}^{-3}$  (плотность, характерная для МГД-генераторов) плазменная частота имеет значение  $\nu_p \approx 8,97 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ . Эта величина сравнима со средней частотой столкновений электронов  $\bar{\nu}_{en} \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$ .

Плазменная частота — это величина, которую можно определить для каждой точки плазмы независимо от случая плоской геометрии, в котором мы ввели эту величину. Предположим, что в плазме по тем или иным причинам возникла флуктуация плотности электронного заряда  $-\delta n$ . Тогда этот пространственный заряд создаст электрическое поле, определяемое уравнением

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\delta n}{\epsilon_0}. \quad (5.6)$$

<sup>1)</sup> Если мы напишем  $\xi(y) = \xi_0 \sin \omega_p t$ , где  $\xi_0$  — амплитуда колебаний, то полная энергия электрона составит  $m_e (\xi_0 \omega_p)^2 / 2$ . Предположив, что эта величина равна средней энергии теплового движения  $kT/2$ , т. е.  $m_e (\xi_0 \omega_p)^2 = kT$ , получим значение амплитуды осциллирующего  $\xi_0 = \lambda_D$ . Этот результат соответствует определению величины  $\lambda_D$ , данному нами в § 2.

Это электрическое поле вызовет в свою очередь ускорение всех электронов в соответствии с уравнением

$$\frac{d\mathbf{u}_e}{dt} = -\frac{e\mathbf{E}}{m_e}, \quad (5.7)$$

где  $\mathbf{u}_e$  — средняя скорость электронов, по предположению малая. Возникающее при этом перераспределение плотности электронов и их средней скорости должно быть совместным с требованием сохранения плотности электронов (уравнением непрерывности):

$$\frac{dn_e}{dt} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = 0, \quad (5.8)$$

которое после линеаризации примет вид

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \nabla \cdot (n_0 \mathbf{u}_e) = 0. \quad (5.9)$$

Дифференцируя уравнение (5.9) по времени и пользуясь уравнениями (5.6) и (5.7), получаем следующее уравнение для  $\delta n$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta n + \nabla \cdot \left( n_0 \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta n - \frac{ne^2}{m_e} \nabla \cdot \mathbf{E} = \\ = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta n + \left( \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e} \right) \delta n = 0. \quad (5.10)$$

Оно также показывает, что флуктуация плотности заряда осциллирует с частотой  $\omega_p$ .

На основании формул (2.4а) и (5.5а) получаем следующее соотношение между дебаевским радиусом экранирования и плазменной частотой:

$$\lambda_D \omega_p = \left( \frac{\epsilon_0 kT}{ne^2} \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e} \right)^{1/2} = \left( \frac{kT}{m_e} \right)^{1/2} \approx \bar{C}_e, \quad (5.11)$$

где  $\bar{C}_e$  — средняя тепловая скорость электронов. Сначала будем исходить из того, что величина  $\omega_p^{-1}$  есть локальное время отклика на флуктуацию заряда в плазме. Тогда на основании соотношения (5.11) можно интерпретировать  $\lambda_D$  следующим образом. Представим себе, что электроны движутся первоначально внутри некоторой области размером  $r$  таким образом, что если бы они продолжали свободно двигаться, то здесь скоро начали бы преобладать заряды одного знака. Временной интервал, необходимый для создания избытка заряда, равен  $r/\bar{C}_e$ . Но при этом возникают электрические поля, препятствующие нарастанию избытка заряда. Если время отклика электронов меньше времени, необходимого для создания избытка заряда, то флуктуации заряда будут предотвращены или ослаблены. Поэтому можно заключить, что флуктуации заряда ослабляются в области протяженностью  $r$ , удовлетворяющей неравенству

$$\omega_p^{-1} < \frac{r}{\bar{C}_e},$$

т. е. с учетом формулы (5.11)

$$r \gg \frac{\bar{C}_e}{\omega_p} \approx \lambda_D.$$

Из сказанного явствует, что интерпретация дебаевского радиуса экранирования как расстояния, в пределах которого может наблюдаться отклонение от квазинейтральности, носит общий характер и не зависит от конкретной модели, использованной для введения этого параметра в § 2.

Если же отталкиваться от величины  $\lambda_D$ , то на основании соотнесения (5.11) можно интерпретировать  $\omega_p$  следующим образом. Согласно формуле (5.11), электроны могут сместиться на расстояние  $\lambda_D$  за время  $\omega_p^{-1}$ . Поэтому на любое возмущение меньшей частоты плазма может реагировать достаточно быстро и, таким образом, сохранять квазинейтральность.

**Задача 5.1.** Предполагая, что двигаться могут и электроны, и ионы, вычислите частоту осцилляции электронов относительно ионов и сравните результат с формулой (5.5а).

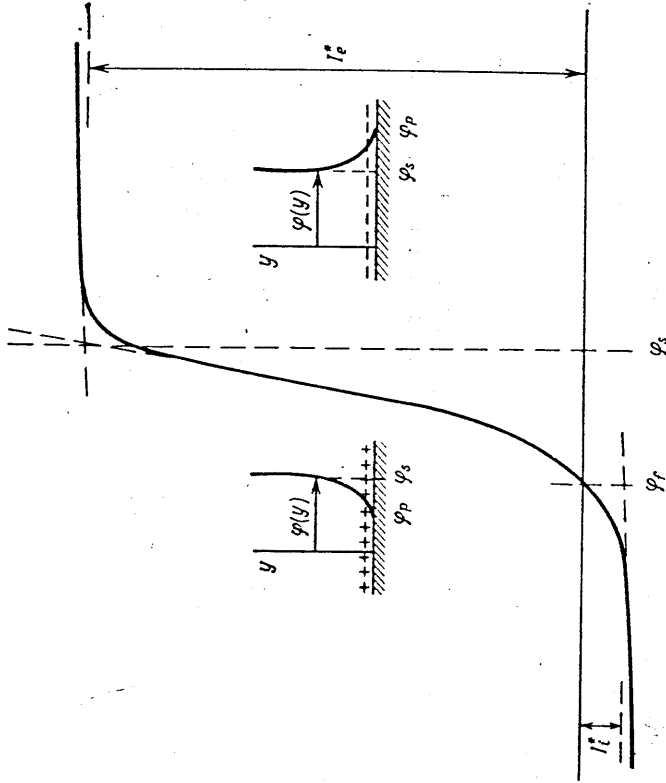
## § 6. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ЗОНДЫ

Один из самых старых методов исследования пространственных свойств плазмы был предложен Ленгмюром в 1924 г. Ленгмюровский зонд представляет собой небольшой электрод (обычно это просто частично оголенная изолированная проволочка), введенный в плазму. Зонд соединен с источником постоянного напряжения, позволяющим плавно регулировать потенциал зонда по отношению к плазме в широком интервале положительных и отрицательных значений. Измеряется зависимость тока на зонд от приложенного напряжения, что дает так называемую вольт-амперную характеристику, или  $I$  —  $\varphi$ -характеристику. По форме этой характеристики и судят о свойствах плазмы.

Несмотря на то что  $I$  —  $\varphi$ -характеристики довольно просто получить экспериментально, теория зонда разработана лишь для довольно специфических плазменных условий. Можно ли пользоваться электростатическими зондами как диагностическими приборами в других условиях, не ясно, и этот вопрос пока еще интенсивно исследуется. Теория и применению электростатических зондов посвящены работы обзорного характера [1—3].

В данном параграфе мы рассмотрим некоторые вопросы теории электростатического зонда, примененной к тем условиям, которые преобладают в разрядах низкого давления, изучавшихся Ленгмюром. Важной особенностью таких разрядов, когда речь идет о теории электростатических зондов, оказывается то, что плазма не подвижна, а зонд не эмиттирует. Кроме того, размеры зонда намного меньше средней длины свободного пробега частиц плазмы,

так что заряженные частицы, падающие на зонд, почти не испытывают столкновений, но значительно больше толщины двойного слоя, так что двойной слой можно считать плоским. Такой случай сравнительно прост, но позволяет проиллюстрировать многие общие закономерности процесса собирания носителей тока из плазмы. В следующем параграфе мы остановимся на некоторых вопросах, связанных с учетом влияния столкновений.



Фиг. 6. Типичная вольт-амперная характеристика зонда.

По оси ординат отложен полный электронный ток на зонд, а по оси абсцисс — потенциал зонда  $\varphi_p$ . В меньшем масштабе показано распределение потенциала в двойном слое в двух случаях:  $\varphi_p < \varphi_s$  и  $\varphi_p > \varphi_s$ .

Общий вид  $I - \varphi$ -характеристики показан на фиг. 6. Положительным принято считать ток, направленный от электрода к плазме, и, таким образом, ток  $I$  положителен, если он соответствует току электронов из плазмы на электрод. Потенциал  $\varphi_p$  — это напряжение на зонде относительно анода или катода в случае плазмы в разряде или относительно какой-нибудь детали оболочки, окружающей плазму. Полный ток на зонд равен нулю, когда потенциал зонда равен плавающему потенциалу  $\varphi_f$ . Как говорилось в § 3, при этом большая часть электронов, идущих из плазмы, отталкивается зон-

дом, так что электронный ток на зонд полностью уравновешивается ионным. Если потенциал  $\varphi_p$  меньше  $\varphi_f$ , то ионов, достигших зонда, будет больше, чем электронов, так что полный ток будет соответствовать движению электронов от зонда к плазме. Если потенциал  $\varphi_p$  отрицателен и достаточно велик, то все электроны будут отталкиваться зондом и ток на зонд достигнет почти постоянного значения, называемого *ионным током насыщения*.

Если потенциал зонда несколько превышает плавающий потенциал, то электронов на зонд попадает больше, чем ионов, и ток  $I$  положителен. При увеличении  $\varphi_p$  электронный ток нарастает до тех пор, пока потенциал зонда не сравняется с потенциалом плазмы или с пространственным потенциалом  $\varphi_s$ . В этих условиях хаотические токи электронов и ионов из плазмы беспрепятственно достигают зонда. При  $\varphi_p < \varphi_s$  зонд окружен слоем положительных зарядов, как показано на фиг. 6. При  $\varphi_p > \varphi_s$  некоторые ионы не могут попасть на зонд и поэтому полный электронный ток на зонд снова увеличивается, но теперь зонд окружен слоем отрицательных зарядов. Если потенциал  $\varphi_p$  положителен и достаточно велик, то все ионы отталкиваются зондом и электронный ток на зонд достигает насыщения. На самом деле при очень больших отрицательных и положительных потенциалах ток зонда не остается постоянным, а продолжает медленно расти. Обычно это объясняется увеличением толщины двойного слоя и соответствующим возрастанием эффективной площади токосъема зонда.

В дополнение к перечисленным выше условиям мы будем для простоты предполагать, что температура электронов и ионов одинакова. Исходя из соотношений (3.2) и (3.3) при  $\varphi_p \ll \varphi_s$ , получим

$$I = I_e^* \exp \left\{ - \frac{e(\varphi_s - \varphi_p)}{kT} \right\} - I_i^* \quad (6.1a)$$

При  $\varphi_p \gg \varphi_s$

$$I = I_e^* - I_i^* \exp \left\{ - \frac{e(\varphi_p - \varphi_s)}{kT} \right\}. \quad (6.1b)$$

Здесь

$$I_e^* = Aen \frac{\bar{C}_e}{4}, \quad (6.2a)$$

$$I_i^* = Aen \frac{\bar{C}_i}{4}, \quad (6.2b)$$

причем  $A$  — площадь токосъема зонда. Теоретическая вольт-амперная характеристика, даваемая уравнениями (6.1), согласуется с представленной на фиг. 6.

На основании изложенного можно следующим образом получить диагностическую информацию о состоянии плазмы. Подав большое отрицательное напряжение на зонд, можно сразу же измерить ионный ток насыщения  $I_i^*$ , затем можно определить элект-

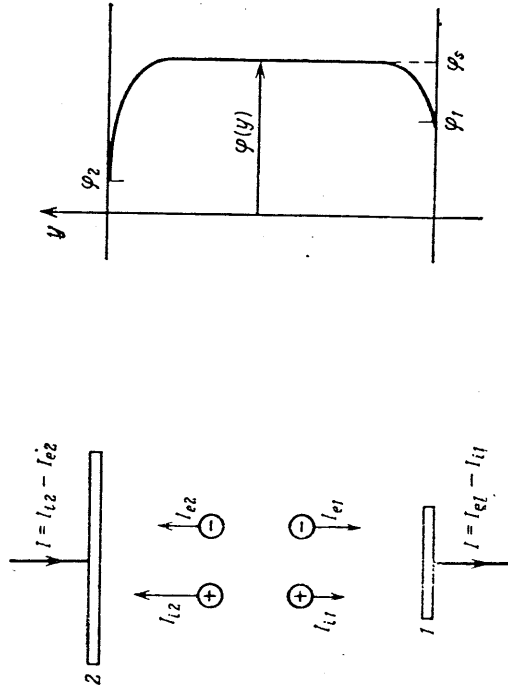
тропную температуру. Для этого нужно подогнать прямую линию к полулогарифмическому графику зависимости  $\ln(I - I_0^*)$  от  $\varphi_p$  в промежуточной области значений потенциалов зонда (т. е. при  $\varphi_p \approx \varphi_1$ ). Когда известна температура, по измеренному значению  $I_0^*$  можно вычислить плотность электронов.

В принципе соотношение

$$\frac{kT}{e} = I_0^* \left[ \frac{d\varphi_p}{dT} \right]_{I=0} \quad (6.3)$$

дает другой метод определения температуры.

Чтобы не нарушалось условие квазинейтральности, ионный ток из плазмы должен быть равным электронному току на зонд.



Фиг. 7. Распределение токов и потенциала в случае двойного зонда.

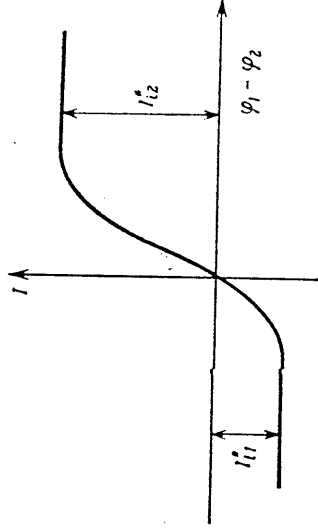
Роль второго электрода, замыкающего цепь тока зонда, обычно играют стенки камеры, содержащей плазму, или другая деталь, относительно которой измеряется напряжение на зонде. Если площадь такого «электрода» слишком мала, то ток насыщения зонда при больших положительных напряжениях не будет равен величине  $I_0^*$ , даваемой формулой (6.16). Действительно, рассмотрим двойной зонд, изображенный на фиг. 7 (это имеет отношение к другому зондовому методу, предложенному Джонсоном и Малтером [5]).

Параметры, относящиеся к разным электродам, будем различать индексами 1 и 2, и предположим, что  $A_2 \gg A_1$ . Будем считать, что электрод 1 — это однопольный зонд, рассмотренный выше. Если  $A_2$  не сильно превышает  $A_1$ , то при увеличении приложенного напряжения  $\varphi_1 - \varphi_2$  потенциал  $\varphi_1$  будет стремиться к постоянной

величине, а  $\varphi_2$  будет возрастать по величине, оставаясь отрицательным. Электронный ток на электрод 1 не может превышать максимальный ионный ток на электрод 2. При условии, что ионный ток насыщения электрода 2 удовлетворяет условию

$$I_{i2}^* < I_{e1}^* - I_{i1}^* \quad (6.4)$$

потенциал  $\varphi_1$  всегда будет меньше пространственного потенциала  $\varphi_s$ . Мы будем рассматривать только этот случай. Вольт-амперная характеристика для двойного зонда представлена в схематическом виде на фиг. 8.



Фиг. 8. Вольт-амперная характеристика для идеального двойного зонда при  $A_2 \gg A_1$ .

Чтобы получить теоретическое выражение для вольт-амперной характеристики, отметим, что при заданном значении полного электронного тока  $I$  на электрод 1 потенциал этого электрода  $\varphi_1$  определяется соотношением [формула (6.1a)]

$$I = I_{e1}^* \exp \left[ -\frac{e(\varphi_s - \varphi_1)}{kT} \right] - I_{i1}^* \quad (6.5)$$

Зная потенциал  $\varphi_1$ , мы можем выразить через него потенциал  $\varphi_2$  электрода 2. На основании уравнения непрерывности тока

$$I_{i2}^* - I_{e2}^* \exp \left[ -\frac{e(\varphi_s - \varphi_2)}{kT} \right] = I_{e1}^* \exp \left[ -\frac{e(\varphi_s - \varphi_1)}{kT} \right] = I_{i1}^* \quad (6.6)$$

Решив уравнение (6.6) относительно  $\varphi_2 - \varphi_s$ , получим, что приложенная разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  выражается через  $\varphi_1 - \varphi_s$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \exp \left[ \frac{e(\varphi_1 - \varphi_2)}{kT} \right] &= \exp \left[ \frac{e(\varphi_1 - \varphi_s)}{kT} \right] \exp \left[ \frac{e(\varphi_s - \varphi_2)}{kT} \right] = \\ &= \frac{\exp [e(\varphi_1 - \varphi_s)/kT]}{I_{e2}^* + I_{i2}^* - I_{e1}^* \exp \left[ \frac{e(\varphi_1 - \varphi_s)}{kT} \right]} \end{aligned}$$

Теперь мы можем выразить  $\varphi_1 - \varphi_*$  через  $\varphi_1 - \varphi_2$  и подставить результат в формулу (6.5). Тогда мы получим следующее выражение для вольт-амперной характеристики:

$$I = \frac{I_{12}^* (I_{e1}^*/I_{e2}^*) \exp [e (\varphi_1 - \varphi_2) / kT] - I_{11}^*}{(I_{e1}^*/I_{e2}^*) \exp [e (\varphi_1 - \varphi_2) / kT] + 1} \quad (6.7)$$

При  $(\varphi_1 - \varphi_2) \rightarrow -\infty$  формула (6.7) дает тот же результат, что и в случае одноэлектродного зонда, а именно, что  $I \rightarrow -I_{11}^*$ . Но при  $(\varphi_1 - \varphi_2) \rightarrow \infty$  из уравнения (6.7) следует, что  $I \rightarrow I_{12}^*$ , тогда как в случае одноэлектродного зонда мы имели  $I \rightarrow I_{e1}^*$ . Это говорит о том, что нужно осмотрительно подходить к интерпретации данных об электронном токе насыщения, получаемых при помощи одноэлектродного зонда.

В пределе при  $A_2 \gg A_1$  и при значениях тока  $I$ , соответствующих области ионного насыщения и промежуточной<sup>1)</sup> области для электрода 1, можно показать, что вольт-амперные характеристики двойного и одноэлектродного зондов совпадают. В указанных условиях ток на электрод 2 будет ничтожно малым по сравнению с током  $I_{12}^*$ , так что  $\varphi_2 \approx \varphi_1$  и

$$I_{12}^* \approx I_{e2}^* \exp [ - e (\varphi_3 - \varphi_1) / kT ] .$$

Подставив это выражение в формулу (6.7) и отбросив первый член в знаменателе, что допустимо, поскольку в рассматриваемых условиях  $e (\varphi_1 - \varphi_2) / kT \ll 1$ , получим

$$I \approx I_{e1}^* \exp [ - e (\varphi_3 - \varphi_1) / kT ] - I_{11}^* .$$

Сравнивая этот результат с формулой (6.1a) для одноэлектродного зонда, мы видим, что в рассматриваемых условиях характеристики действительно одинаковы.

Для диагностических применений можно вывести в случае двойного зонда формулу

$$\frac{kT}{e} = \frac{I_{11}^*}{1 + (A_1/A_2)} \left[ \frac{d(\varphi_1 - \varphi_2)}{dI} \right]_{I=0} , \quad (6.8)$$

аналогичную формуле (6.3) для одноэлектродного зонда. Обычно используют двойные зонды с  $A_2 = A_1$ , и в этом случае формула (6.7) принимает более простой вид:

$$I \rightarrow I_{11}^* \operatorname{th} [ e (\varphi_1 - \varphi_2) / 2kT ] .$$

В заключение данного параграфа отметим, что измеренное значение потенциала электрода отличается от эффективного потенциала его поверхности на величину так называемой *контактной разности потенциалов*, или *работы выхода*. Если контактная разность потенциалов однородна по всей поверхности зонда и не меняется со временем, то вид зондовых характеристик, описанных выше, остается

<sup>1)</sup> Между режимами ионного и электронного насыщения. — Прим. ред.

неизменным. В некоторых экспериментальных условиях вариации контактной разности потенциалов могут оказаться существенными, и тогда необходимо принимать меры для ослабления их влияния.

**Задача 6.1.** Выведите формулы (6.3) и (6.8).

**Задача 6.2.** Какова теоретическая характеристика двойного зонда в случае, когда условие (6.4) не выполняется?

### § 7. АМБИПОЛЯРНАЯ ДИФФУЗИЯ

Диффузия заряженных частиц в столкновительных частично ионизованных газах определяется не только электрическим полем, как указывалось в гл. 2, § 13, но также и градиентами параметров плазмы. Таким образом, вместо выражения (13.6a) из гл. 2 для скорости диффузии электронов можно написать

$$U_e = -\mu_e \left( E + \frac{\nabla p_e}{en_e} \right) . \quad (7.1a)$$

Здесь  $p_e = n_e kT_e$  — давление электронов, а  $\mu_e$  — их подвижность. Согласно формуле (13.6b) из гл. 2,  $\mu_e \approx e/m_e \nu_{ei}$ . (В данном параграфе мы будем полагать, что магнитное поле равно нулю и, следовательно,  $E' = E$ . О влиянии магнитного поля см. гл. 4, § 8.) Уравнение (7.1a) выведено в гл. 2, § 8, на основе уравнений сохранения для сплошной среды, а в гл. 8 оно выводится более строго в рамках кинетической теории. Условия, при которых справедливо уравнение (7.1a), подробно анализируются в гл. 8. В общем пользоваться уравнением (7.1a) можно тогда, когда незначительна термодиффузия и распределение электронов по скоростям приблизительно максвелловское. Выражение для  $U_e$  часто записывается в более общем виде

$$U_e = -\mu_e E - D_e \frac{\nabla p_e}{p_e} , \quad (7.1b)$$

где  $D_e$  — коэффициент диффузии электронов. В тех условиях, в которых применимо уравнение (7.1a), мы имеем

$$\frac{D_e}{\mu_e} = \frac{kT_e}{e} . \quad (7.2)$$

Это равенство называется соотношением Эйнштейна.

Скорость диффузии ионов в слабо ионизованном газе при приближении однородному полному давлению может быть записана следующим образом:

$$U_i = \mu_i \left( E - \frac{\nabla p_i}{en_i} \right) . \quad (7.3a)$$

Здесь  $p_i = n_i kT$  — давление ионной компоненты,  $T$  — температура тяжелых частиц,  $\mu_i$  — подвижность ионов. Для трехкомпонентного газа, согласно формуле (13.13) из гл. 2, имеем  $\mu_i \approx e/m_i \nu_{in}$ . Урав-

нение (7.3а) может быть выведено на основании уравнений сохранения для сплошной среды (гл. 4, задача 8.3), а подробнее о нем говорится в гл. 8 в рамках кинетической теории. По аналогии с уравнением (7.16) величину  $U_i$  также можно выразить в более общем виде

$$U_i = \mu_i E - D_i \frac{\nabla p_i}{p_i}, \quad (7.36)$$

где  $D_i$  — коэффициент диффузии ионов. Будем предполагать, что величины  $D_i$  и  $\mu_i$  удовлетворяют соотношению Эйнштейна  $D_i/\mu_i = kT/e$ .

Рассмотрим вначале газ в стационарном состоянии на границе с твердой поверхностью, когда ток к поверхности равен нулю, и предположим, что внешние электрические поля отсутствуют. Если поверхность является неземитирующей и каталитической, как говорилось в § 3, то она будет играть роль стока для заряженных частиц. Таким образом, в слое газа, граничащем с поверхностью, установится градиент концентраций  $n_e$  и  $n_i$ . Согласно формулам (7.1а) и (7.3а), эти градиенты вызовут диффузию электронов и ионов к стенке. Если полный ток из газа равен нулю, то нормальные компоненты скоростей диффузии электронов и ионов должны быть одинаковы. (Для простоты рассматривается случай одного сорта однозарядных ионов.) Но, поскольку  $\mu_e \gg \mu_i$ , должно возникнуть электрическое поле объемного заряда, которое будет препятствовать диффузии электронов. Приближенно это поле может быть получено из уравнения (7.1а) как

$$E \approx -\frac{\nabla p_e}{en_e}. \quad (7.4)$$

Соответствующая общая скорость диффузии заряженных частиц получается из уравнения (7.3а):

$$U_e = U_i \approx -\mu_i \left( \frac{\nabla p_e}{en_e} + \frac{\nabla p_i}{en_i} \right). \quad (7.5)$$

Если мы напишем  $E = -\nabla \varphi$  и предположим, что температура  $T_e$  однородна, то уравнение (7.4) можно будет проинтегрировать и в результате мы получим соотношение [формула (3.7)]

$$n_e \sim \exp \left\{ \frac{e\varphi}{kT_e} \right\}. \quad (7.6)$$

Эти результаты можно точнее вывести следующим образом. Исключив  $E$  из уравнений (7.1а) и (7.3а), получим

$$\mu_i U_e + \mu_e U_i = -\mu_e \mu_i \left( \frac{\nabla p_e}{en_e} + \frac{\nabla p_i}{en_i} \right).$$

В случае так называемой амбиполярной диффузии, когда  $U_e = U_i$ , имеем

$$U_e = U_i = -\frac{\mu_e \mu_i}{\mu_e + \mu_i} \left( \frac{\nabla p_e}{en_e} + \frac{\nabla p_i}{en_i} \right). \quad (7.7)$$

Подставив полученное выражение для скорости заряженных частиц (7.7) в соотношение (7.1а) или (7.3а), получим

$$E = -\frac{\mu_e}{\mu_e + \mu_i} \frac{\nabla p_e}{en_e} + \frac{\mu_i}{\mu_e + \mu_i} \frac{\nabla p_i}{en_i}. \quad (7.8)$$

При  $\mu_e \gg \mu_i$  формула (7.7) сводится к формуле (7.5), а формула (7.8) — к формуле (7.4). В области газа, лежащей за двойным слоем, мы имеем  $n_e \approx n_i$ , и поэтому уравнение (7.7) принято записывать в виде

$$U_e = U_i = -D_a \frac{\nabla (p_e + p_i)}{2p_i}, \quad (7.9)$$

где

$$D_a = \frac{2kT}{e} \frac{\mu_e \mu_i}{\mu_e + \mu_i} \approx 2D_i \quad (7.10)$$

— коэффициент амбиполярной диффузии.

Из уравнения (7.9) видно, что диффузию электронов и ионов на поверхность, не собирающую ток, можно рассматривать как диффузию нейтральных частиц (на которые электрическое поле  $E$  не оказывает воздействия) с коэффициентом диффузии, равным  $D_a$ .

В общем случае распределение концентраций  $n_e$  и  $n_i$  в неподвижном столкновительном газе определяется уравнениями сохранения числа частиц для каждой из компонент:

$$\nabla \cdot (n_e U_e) = \dot{n}_e \quad (7.11a)$$

и

$$\nabla \cdot (n_i U_i) = \dot{n}_i, \quad (7.11б)$$

где  $\dot{n}_e$  и  $\dot{n}_i$  — скорости образования электронов и ионов в единице объема. Для слабо ионизованного газа величины  $U_e$  и  $U_i$  даются формулами (7.1а) и (7.3а). Распределение потенциала подчиняется уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho^v}{\epsilon_0}. \quad (7.12)$$

Уравнения (7.11) и (7.12) составляют систему трех нелинейных уравнений для  $n_e$ ,  $n_i$  и  $\varphi$ . Электрическое поле определяется соотношением  $E = -\nabla \varphi$ .

Полная формулировка задачи в описанном выше виде в действительности нужна только в области двойного слоя и применима только в том случае, если газ в двойном слое является столкновительным. Вне двойного слоя можно написать  $n_e \approx n_i$ , и тогда для пол-



ного описания  $n_e$  и  $\rho$  оказываются достаточными уравнения (7.11), а именно

$$\nabla \cdot \left( -\mu_e n_e \mathbf{E} - \frac{\mu_e}{e} \nabla p_e \right) = \dot{n}_e, \quad (7.13a)$$

$$\nabla \cdot \left( \mu_i n_e \mathbf{E} - \frac{\mu_i}{e} \nabla p_i \right) = \dot{n}_e. \quad (7.13b)$$

Для простоты будем считать величины  $\mu_e$  и  $\mu_i$  постоянными. Тогда можно исключить  $\mathbf{E}$  из уравнений (7.13) и сразу получить результаты

$$\nabla \cdot \left[ -n_e D_a \frac{\nabla(p_e \pm p_i)}{2p_i} \right] = \dot{n}_e. \quad (7.14)$$

Уравнением (7.14) определяется распределение электронов в так называемой *амбиполярной области* (хотя здесь нет ограничения на значения  $\mathbf{U}_e$  и  $\mathbf{U}_i$ ). Найдя  $n_e$ , можно вернуться либо к уравнениям (7.13), либо к их комбинации, чтобы найти распределение потенциала. Для этого удобно вычесть уравнение (7.13a) из уравнения (7.13b), в результате чего получим  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  или, что эквивалентно,

$$\nabla \cdot (\sigma \mathbf{E} + \mu_e \nabla p_e - \mu_i \nabla p_i) = 0. \quad (7.15)$$

Здесь  $\sigma = en_e(\mu_e + \mu_i)$  — удельная электропроводность [гл. 2, формула (13.156)].

Для иллюстрации применения этих уравнений предположим, что температура однородна и  $T_e = T_i$ . Предположим также, что процессы ионизации и рекомбинации описываются трехчастичной реакцией  $e + A \rightarrow e + A^+ + e$ , для которой скорость генерации электронов определяется формулой (11.15) из гл. 2. Тогда уравнение (7.14) можно переписать в следующем виде:

$$l_R^2 \nabla^2 \left( \frac{n_e}{n_e^*} \right) = - \left( \frac{n_e}{n_e^*} \right) \left[ 1 - \left( \frac{n_e}{n_e^*} \right)^2 \right]. \quad (7.16)$$

Здесь  $n_e^*$  — равновесная плотность электронов, которая устанавливается в объеме плазмы на больших расстояниях от границ, где влиянием последних можно пренебречь. Величина  $l_R$  — это длина, определяющаяся соотношением

$$l_R^2 \equiv \frac{D_a}{n_e^* \alpha}. \quad (7.17)$$

Здесь  $\alpha = n_e^* \beta(T)$  — коэффициент рекомбинации, о котором говорилось в связи с формулой (11.13a) из гл. 2, вычисленный в равновесных условиях. Согласно формуле (5.3) из гл. 2, характерное время рекомбинации иона следующим образом выражается через  $\alpha$ :  $\tau(\text{рекомб}) = (n_e^* \alpha)^{-1}$ .

Чтобы выяснить физический смысл величины  $l_R$ , перепишем выражение (7.17) так:

$$l_R^2 \approx \frac{2\mu_i kT}{en_e^* \alpha} = \frac{2kT}{en_e^* \alpha} \frac{\tau(\text{рекомб})}{\bar{v}_{in}} = \frac{\pi}{4} \frac{\bar{g}_{in}^2}{\bar{v}_{in}^2} \frac{\tau(\text{рекомб})}{\bar{v}_{in}} \approx \left( \frac{\tau(\text{рекомб})}{\bar{v}_{in}} \right)^2 l_i^2. \quad (7.18)$$

Здесь  $l_i \approx (n_e \bar{Q}_{in})^{-1}$  — средняя длина свободного пробега иона [гл. 2, формула (5.8)]. Отношение  $\tau(\text{рекомб})/\bar{v}_{in}^2$  есть среднее число столкновений, которые испытывает ион до рекомбинации. Таким образом, в соответствии с формулой (5.9) из гл. 2 мы можем интерпретировать величину  $l_R$  как среднее расстояние, которое проходит ион, прежде чем он рекомбинирует. (Для аргона с примесью калия при атмосферном давлении  $l_R \approx 1$  мм [гл. 2, задача (5.4)].) В случае, когда имется характерный геометрический размер  $L$ , можно привести пространственные координаты к безразмерному виду, и тогда в левой части уравнения (7.16) появится множитель  $(l_R/L)^2$ . При  $(l_R/L) \ll 1$  левую часть уравнения (7.16) можно положить равной нулю, и мы получим решение для стационарного случая. При  $(l_R/L) \gg 1$  нулю можно приравнять правую часть уравнения (7.16), а решение полученного уравнения будет соответствовать другому предельному случаю, случаю «замороженной» рекомбинации.

В оставшейся части данного параграфа мы рассмотрим плазму, находящуюся в контакте с плоской бесконечной поверхностью. Если координату, нормальную к поверхности, обозначить через  $y$ , то уравнение (7.16) для плотности электронов в амбиполярной области можно записать в безразмерном виде следующим образом:

$$2 \frac{d^2 \bar{n}}{d\bar{y}^2} = -\bar{n} (1 - \bar{n}^2). \quad (7.19)$$

Здесь  $\bar{n} = n_e(y)/n_e^*$  и  $\bar{y} = \sqrt{2}y/l_R$ . Поскольку в данном случае какой-либо характерной геометрической длины нет, наличие поверхности приведет к возмущению в плазме, простирающемуся на расстояние порядка  $l_R$  от поверхности. Область применимости уравнения (7.19) будет такова:

$$y_b \leq y < \infty, \quad (7.20a)$$

где  $y_b$  — расстояние от поверхности до нижней границы амбиполярной области. Область двойного слоя определяется соотношением

$$0 \leq y \leq y_b. \quad (7.20b)$$

В действительности четкой границы между этими областями, разумеется, нет, так что наша модель является в этом отношении несколько искусственной. Можно провести более точное математическое рассмотрение этого вопроса, но и данное приближение позволяет достаточно точно выявить основные физические закономерности. (См., например, работу [6], где анализируются случаи, когда плазма и в амбиполярной области, и в области двойного слоя является столкновительной и может находиться в движении.)

Чтобы провести интегрирование в уравнении (7.19), напишем

$$2 \frac{d^2 \bar{n}}{dy^2} = \frac{d}{dn} \left( \frac{d\bar{n}}{dy} \right)^2.$$

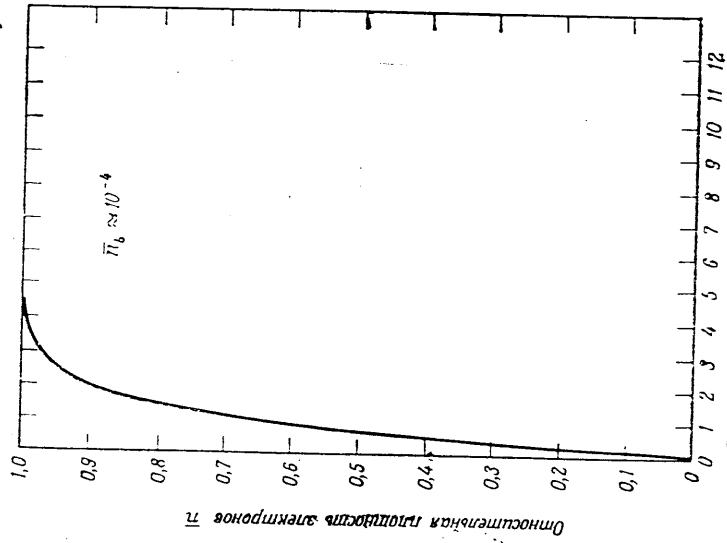
Используя граничное условие в виде  $d\bar{n}/dy \rightarrow 0$  при  $\bar{n} \rightarrow 1$ , а также условие  $d\bar{n}/dy \geq 0$ , получаем

$$\frac{d\bar{n}}{dy} = \frac{1 - \bar{n}^2}{2}. \quad (7.21)$$

При интегрировании воспользуемся формулой  $\int 2d\bar{n}/(1 - \bar{n}^2) = \ln |(1 + \bar{n})/(1 - \bar{n})|$ ; тогда нетрудно показать, что

$$\bar{n} = \frac{(1 + \bar{n}_b) - (1 - \bar{n}_b) \exp\{-\bar{y} - \bar{y}_b\}}{(1 + \bar{n}_b) + (1 - \bar{n}_b) \exp\{-\bar{y} - \bar{y}_b\}}. \quad (7.22)$$

Здесь  $\bar{n}_b$  — величина  $\bar{n}$ , взятая на границе между амбиполярной



Фиг. 9. Распределение плотности электронов при амбиполярной диффузии. Оптическое расстояние от стенки  $\bar{y}$

областью и поверхностью. На фиг. 9 представлена зависимость  $\bar{n}$  от  $\bar{y}$  при  $\bar{n}_b \approx 10^{-4}$ .

Чтобы найти распределение потенциала, воспользуемся уравнением (7.15). В рассматриваемом случае из него следует, что комбинента плотности тока  $J$  по оси  $y$  постоянна. Первый интеграл уравнения (7.15) имеет вид

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{kT}{e} \left( \frac{\mu_e - \mu_i}{\mu_e + \mu_i} \right) \frac{d}{dy} \ln n_e - \frac{J}{\sigma}. \quad (7.23)$$

и, таким образом, распределение потенциала описывается соотношением

$$\varphi(y) - \varphi_b = \frac{kT}{e} \left( \frac{\mu_e - \mu_i}{\mu_e + \mu_i} \right) \ln \frac{n_e(y)}{n_{eb}} - J \int_{y_b}^y \frac{dy}{\sigma(y)}. \quad (7.24)$$

Второй член в правой части уравнения (7.24) дает обычную омическую разность потенциалов, обусловленную наличием тока в среде с сопротивлением. Первый член дает падение напряжения, связанное с амбиполярной диффузией; он отличен от нуля даже в отсутствие тока. Полное падение напряжения, связанное только с амбиполярной диффузией, равно

$$|\varphi_{\infty} - \varphi_b|_{\text{амб}} \approx \frac{kT}{e} \ln \frac{n_e^*}{n_{eb}} = -\frac{kT}{e} \ln l/b. \quad (7.25)$$

С учетом уравнения (7.21) омическую часть падения напряжения можно записать как

$$\begin{aligned} |\varphi(y) - \varphi_b|_{\text{ом}} &= -\sqrt{2} \frac{J}{\sigma^*} l_R \int_{\bar{n}_b}^{\bar{n}} \frac{d\bar{n}}{\bar{n}(1 - \bar{n}^2)} = \\ &= -\sqrt{2} \frac{J}{\sigma^*} l_R \left[ \ln \frac{\bar{n}}{\bar{n}_b} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 - \bar{n}^2}{1 - \bar{n}_b^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Пользуясь соотношениями (7.21) и (7.23), запишем скорости диффузии в виде

$$U_e = -\frac{\mu_e}{\mu_e + \mu_i} \frac{J}{en_e} - \frac{D_a}{n_e} \frac{dn_e}{dy}, \quad (7.27a)$$

$$U_i = \frac{\mu_i}{\mu_e + \mu_i} \frac{J}{en_e} - \frac{D_a}{n_e} \frac{dn_e}{dy}. \quad (7.27b)$$

Из этих выражений ясно виден переход от условия  $|U_e| \gg |U_i|$ , выполняющегося внутри плазмы, к условию, что  $|U_e|$  и  $|U_i|$  — величины одного порядка, выполняющемуся вблизи границы.

В заключение нужно определить еще плотность электронов  $n_{eb}$  на границе амбиполярной области. Она будет зависеть от структуры двойного слоя. Для простоты предположим, что в таком слое частицы свободно падают на поверхность, как это считалось в § 3 и 6. Это означает, что расстояние от амбиполярной области до по-

верхности  $n_b$  мы примем равным длине свободного пробега частицы  $l_p$ . (Будем считать, что  $l_e = l_p$ .)

В соответствии с уравнением (3.2) микроскопическую плотность потока электронов и ионов на поверхность можно записать как

$$\Gamma_e^\dagger = -\frac{n_e \bar{c}_e}{4} h_e \quad (7.28a)$$

и

$$\Gamma_i^\dagger = -\frac{n_e \bar{c}_i}{4} h_i. \quad (7.28b)$$

Появление знака минус здесь связано с тем, что мы условились считать положительным поток частиц от поверхности внутрь плазмы. Функции  $h_e$  и  $h_i$  [формула (6.1)] определяются следующим образом:

при  $\varphi_b - \varphi_p \geq 0$

$$h_e = \exp \left\{ -\frac{e(\varphi_b - \varphi_p)}{kT} \right\}, \quad h_i = 1. \quad (7.29a)$$

При  $\varphi_b - \varphi_p \leq 0$

$$h_e = \exp \left\{ -\frac{e(\varphi_p - \varphi_b)}{kT} \right\}, \quad h_i = 1. \quad (7.29b)$$

Из условия непрерывности следует, что значения плотности потока (7.1a) и (7.3a), вычисленные при  $y = y_b$ , должны быть равны соответствующим микроскопическим значениям, определяемым соотношениями (7.28). Таким образом,

$$-\frac{\bar{c}_e h_e}{4} = -\mu_e E_b - \frac{\mu_e kT}{en_e b} \left( \frac{dn_e}{dy} \right)_b \quad (7.30a)$$

$$-\frac{\bar{c}_i h_i}{4} = \mu_i E_b - \frac{\mu_i kT}{en_e b} \left( \frac{dn_e}{dy} \right)_b. \quad (7.30b)$$

Исключив  $E_b$  из уравнений (7.30), получим следующее граничное условие для  $n_e$ :

$$\left( \frac{dn_e}{dy} \right)_b = Q n_{eb}. \quad (7.31a)$$

Здесь

$$Q = \frac{c}{8kT} \left( \frac{\bar{c}_e}{\mu_e} h_e + \frac{\bar{c}_i}{\mu_i} h_i \right).$$

В безразмерном виде уравнение (7.31a) запишется следующим образом:

$$\left( \frac{dn}{dy} \right)_b = \bar{Q} n_b, \quad (7.31b)$$

где

$$\bar{Q} = \frac{l_p Q}{\sqrt{2}} = \frac{l_p c}{\sqrt{2} 8kT} \left( \frac{\bar{c}_e}{\mu_e} h_e + \frac{\bar{c}_i}{\mu_i} h_i \right). \quad (7.32)$$

С учетом уравнения (7.21) для  $\bar{n}_b$  получим

$$\bar{n}_b = -\bar{Q} + \sqrt{\bar{Q}^2 + 1}. \quad (7.33)$$

Чтобы оценить величину  $\bar{Q}$ , запишем ее в виде

$$\bar{Q} = \frac{l_R}{\sqrt{2} \pi} \left( \frac{h_e}{l_e} + \frac{m_{in} h_i}{m_i l_i} \right) \sim \frac{1}{\sqrt{2} \pi} \frac{l_R}{l_e}. \quad (7.34)$$

Отсюда видно, что величина  $\bar{Q}$  слабо зависит от разности потенциалов ( $\varphi_b - \varphi_p$ ) и одного порядка с отношением  $(l_R/l_e)$ , которое обычно велико. При  $\bar{Q} \gg 1$  мы имеем

$$\bar{n}_b \approx \frac{1}{2\bar{Q}} \sim \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{l_e}{l_R}, \quad (7.35)$$

и, значит, величина  $\bar{n}_b$  обычно мала. Тогда из соотношения (7.25) следует, что падение напряжения в амбиполярной области может быть большим по сравнению с  $(kT/e)$ .

Итак, подготовим процесс вычисления  $n_e(y)$  и  $\varphi(y)$ . Прежде всего задастся падение напряжения  $\varphi_b - \varphi_p$  на двойном слое. Тем самым однозначно определится величина  $n_{eb}$ , а амбиполярные уравнения дадут величину  $n_e(y)$ . Затем из уравнений свободного падения частиц в двойном слое [формула (6.1)] определится плотность тока, собираемого поверхностью:

$$J = \frac{en_{eb}}{4} (\bar{c}_e h_e - \bar{c}_i h_i). \quad (7.36)$$

Когда величина  $J$  известна, из амбиполярных уравнений найдут величину  $\varphi(y) - \varphi_b$ . Потенциал относительно поверхности определится сложением величин  $\varphi(y) - \varphi_b$  и  $\varphi_b - \varphi_p$ .

**Задача 7.1.** Пользуясь результатами, полученными при решении задачи 8.3 из гл. 4, покажите, что скорость амбиполярной диффузии для газа с произвольной степенью ионизации дается выражением

$$U_e = U_i \approx -\frac{\rho n}{\rho} \mu_i \left( \frac{V_{pe}}{en_e} + \frac{V_{pi}}{en_i} \right).$$

**Задача 7.2.** Определите, какова вольт-амперная характеристика для столкновительного газа, находящегося между двумя плоскими параллельными поверхностями. Предположите, что расстояние между поверхностями значительно больше длины рекомбинации ионов  $l_R$ . Начертите распределение потенциала между поверхностями. (Общий случай произвольного расстояния между плоскостями рассматривается в работе [8].)

### § 8. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Распространение электромагнитного излучения описывается уравнениями Максвелла (гл. 6, § 2). Как показано в гл. 6, § 4, фундаментальное решение уравнений Максвелла имеет вид плоских поперечных волн, способных переносить энергию. В данном параграфе мы покажем, как влияет на распространение таких волн плазма и какая диагностическая информация о плазме может быть при этом получена. Мы ограничим рассмотрение случаем однородной, бесконечной и неподвижной плазмы с плотностью электронов  $n_e$  и средней частотой столкновений  $\bar{\nu}_{en}$ . Мы будем также считать плазму несжимаемой. Для упрощения обозначений мы примем в данном параграфе  $\bar{\nu} \equiv \bar{\nu}_{en}$ .

Принято считать, что магнитная индукция  $\mathbf{B}$  и напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  в плазме связаны таким же соотношением  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  [гл. 6, формула (2.1e)], как и в вакууме. [См. текст перед формулой (2.12) в гл. 4.] Чтобы учесть поляризацию, обусловленную связанными электронами нейтральных частиц и ионов, вместо уравнения (2.1d) из гл. 6 следует пользоваться соотношением  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ . Дифференцируя по времени уравнение Максвелла — Ампера [гл. 6, формула (2.1г)] и пользуясь уравнением Фарадея [гл. 6, формула (2.1в)], получаем следующее уравнение для электрического поля:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \varepsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (8.1)$$

Поскольку плазма предполагается стационарной, полная плотность тока  $\mathbf{j}$  равна плотности тока проводимости  $\mathbf{J}$ . Ток  $\mathbf{J}$  связан с  $\mathbf{E}$  обобщенным законом Ома для частично ионизованного газа [гл. 4, формула (8.17)]. Мы будем предполагать, что внешнее поле  $\mathbf{B}$  равно нулю. Таким образом, эффект проскальзывания ионов отсутствует, и можно показать, что уравнение (8.17) из гл. 4 имеет в этом случае такой же вид, как и уравнение (8.9) из той же главы, выведенное для полностью ионизованного газа. Модуль вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  плоской поперечной волны в вакууме дается формулой (4.56) из гл. 6:  $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|/c$ , где  $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$  — скорость света в вакууме. Отношение силы, действующей на электрон со стороны поля  $\mathbf{B}$ , к силе, действующей со стороны поля  $\mathbf{E}$ , определяется соотношением (1.1) на гл. 4 и по порядку величины равно  $\omega/c$ , где  $\omega$  — скорость электрона. Поскольку мы рассматриваем лишь нерелятивистский случай, влиянием поля  $\mathbf{B}$  в законе Ома можно пренебречь. Учитывая все сделанные выше предположения, получаем

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \approx \sigma \mathbf{E} - \mathbf{J}. \quad (8.2)$$

Здесь  $\sigma = n_e e^2 / m_e \bar{\nu}$  — удельная электропроводность (для постоянного тока).

Уравнения (8.1) и (8.2) представляют собой систему уравнений с двумя неизвестными  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{J}$ . Будем искать решение в виде плоской волны, когда  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{J}$  описываются, например, действительными частями выражений

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \exp \{i(kx - \omega t)\}, \quad (8.3a)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 \exp \{i(kx - \omega t)\}, \quad (8.3b)$$

где  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{J}_1$  — постоянные векторы, перпендикулярные направлению распространения волны (которое взято за ось  $x$ ). Мы предполагаем, что частота  $\omega$  — действительная, а волновое число  $k$  может быть комплексным. Для того чтобы существовало такое решение, должны выполняться следующие условия, вытекающие из уравнений (8.1) и (8.2):

$$k^2 \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon \mu_0 \omega^2 \mathbf{E}, \quad (8.4a)$$

$$-i \frac{\omega}{\nu} \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} - \mathbf{J}. \quad (8.4b)$$

Найдя  $\mathbf{J}$  из уравнения (8.4b) и подставив полученное значение в уравнение (8.4a), получим следующее дисперсионное соотношение<sup>1)</sup>:

$$k^2 = \varepsilon \mu_0 \omega^2 + \frac{i\mu_0 \omega \sigma}{1 - i(\omega/\nu)}. \quad (8.5a)$$

Подставив сюда выражение для  $\sigma$  с учетом равенства  $\mu_0 = 1/\varepsilon_0 c^2$ , перепишем формулу (8.5a) в следующем виде:

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \left[ 1 + R - \frac{(\omega_p/\omega)^2}{1 + (\bar{\nu}/\omega)^2} \right] + i \left[ \frac{(\omega_p/\omega)^2 (\bar{\nu}/\omega)}{1 + (\bar{\nu}/\omega)^2} \right]. \quad (8.5b)$$

Здесь  $R = (\varepsilon - \varepsilon_0)/\varepsilon_0$  — вклад связанных электронов,  $\omega_p = (n_e e^2 / \varepsilon_0 m_e)^{1/2}$  — плазменная частота [формула (5.5a)]. Решением будут те плоские волны, зависимость волнового числа которых от частоты дается соотношениями (8.5).

Соотношение (8.5b) получено для комплексного волнового числа  $k = \beta + i\alpha$ . (8.6)

Подставив это выражение в формулу (8.3a), получим  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 e^{-\alpha x} e^{i(\beta x - \omega t)}$ . (8.7)

Величина  $\alpha$  называется постоянной затухания, а величина  $\beta$  — постоянной фазы (обе величины действительны). Длина волны

<sup>1)</sup> Более точные варианты уравнения (8.4b) получаются из кинетической теории и приведены в гл. 8 [формулы (2.26) и (4.38)]. Исходя из этих уравнений, можно вывести более точное дисперсионное соотношение.

определяется соотношением  $\beta = 2\pi/\lambda$ , а фазовая скорость волн равна  $v_{\text{фаз}} = \omega/\beta$ . По определению коэффициент преломления плазмы равен  $n = c/v_{\text{фаз}} = c/\omega$ . Если свободных электронов нет, то  $k$  — действительная величина и соотношение (8.5б) принимает вид  $n^2 = 1 - R$ . Величина  $R$  называется преломляющей способностью среды, ее можно вычислить по данным, имеющимся в обычном физическом справочнике. Для газов она намного меньше единицы. В плазме в различных условиях, представляющих для нас интерес,

$$R \ll \frac{(\omega_p/\omega)^2}{1 + (\bar{v}/\omega)^2} \quad (8.8)$$

и преломлением, вносимым связанными электронами, можно пренебречь. Чем выше частота волны, тем больше должна быть плотность электронов для того, чтобы выполнялось это условие. В дальнейшем величиной  $R$  мы будем пренебрегать.

Чтобы выявить основную закономерность, выражаемую соотношением (8.5б), рассмотрим предельный случай  $\bar{v} \ll \omega$ . В этом случае, когда число столкновений пренебрежимо мало, получим

$$\left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2. \quad (8.9)$$

Если

$$\omega > \omega_p, \quad (8.10)$$

то  $k$  — действительная величина и волны распространяются без затухания. Если же  $\omega < \omega_p$ , то  $k$  — чисто мнимая величина и решение принимает вид

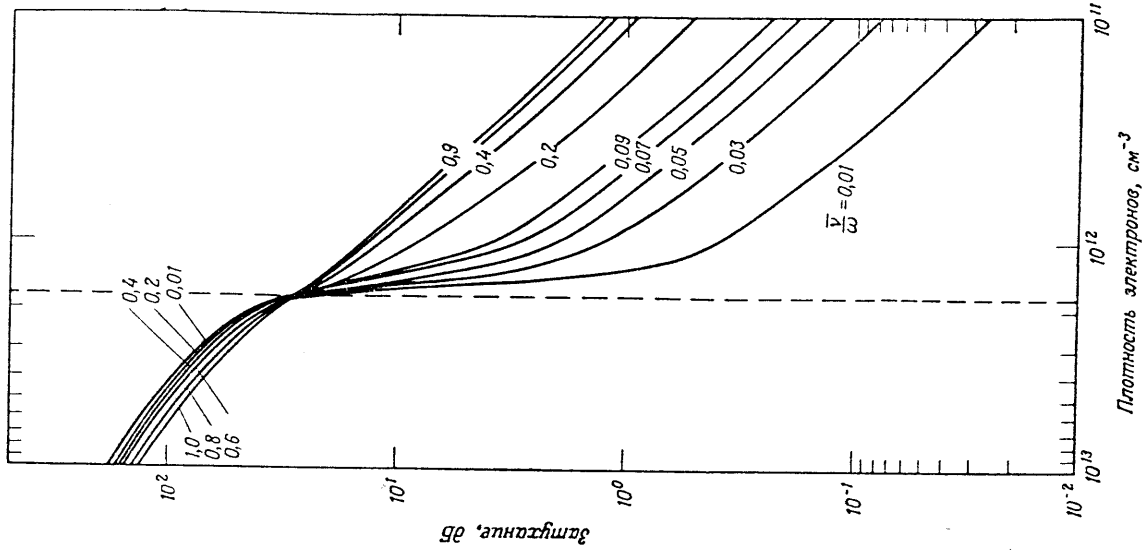
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 e^{-\alpha x} e^{-i\omega t}.$$

В этом случае решение уже не соответствует бегущей волне и в среднем волна не переносит энергии. Такая волна называется *затухающей*. Электромагнитные волны, частота которых ниже плазменной, отражаются от поверхности плазмы. С физической точки зрения это можно объяснить следующим образом. Если частота волны меньше  $\omega_p$ , то заряды плазмы успевают перестроиться так, чтобы экранировать плазму от электромагнитного поля.

Столкновения несколько изменяют эту ситуацию, но качественно она меняется не сильно. Для волны данной частоты  $\omega$  можно ввести *критическую плотность электронов*  $n_{cr}$ , согласно формуле

$$\omega^2 \equiv \frac{n_{cr} e^2}{\epsilon_0 m_e}. \quad (8.11)$$

В плазме с  $n_e < n_{cr}$  волны, раньше распространявшиеся свободно, при наличии столкновений затухают. В плазме же с  $n_e > n_{cr}$  волны, которые раньше отражались, теперь могут распространяться, но обычно они сильно затухают (фиг. 10).



Фиг. 10. Затухание волн СВЧ-диапазона в слое однородной плазмы.  $d = 3,82$  см,  $\omega = 7,1 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ ,  $n_{cr} = 1,6 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$ .

Чтобы количественно учесть влияние столкновений, нужно решить уравнения (8.5б) относительно  $\alpha$  и  $\beta$ . Заменим левую часть уравнения (8.5б) в виде <sup>1)</sup>

$$K = K_{\text{Re}} + iK_{\text{Im}}, \quad (8.12a)$$

где

$$K_{\text{Re}} = 1 - \frac{(\omega_p/\omega)^2}{1 + (\bar{\nu}/\omega)^2}, \quad (8.12б)$$

$$K_{\text{Im}} = \frac{(\omega_p/\omega)^2 (\bar{\nu}/\omega)}{1 + (\bar{\nu}/\omega)^2}; \quad (8.12в)$$

левую часть соотношения представим в виде  $ck/\omega = c\beta/\omega + i\alpha\omega = \mu + i\chi$ . Действительные величины  $\mu$  и  $\chi$  определяются соотношениями

$$\mu^2 - \chi^2 = K_{\text{Re}}, \quad (8.13a)$$

$$2\mu\chi = K_{\text{Im}}. \quad (8.13б)$$

Возводя обе части этих соотношений в квадрат, складывая их и извлекая затем из обеих частей квадратный корень, получаем

$$\mu^2 + \chi^2 = |K|, \quad (8.13в)$$

где

$$|K| = \sqrt{K_{\text{Re}}^2 + K_{\text{Im}}^2}. \quad (8.14)$$

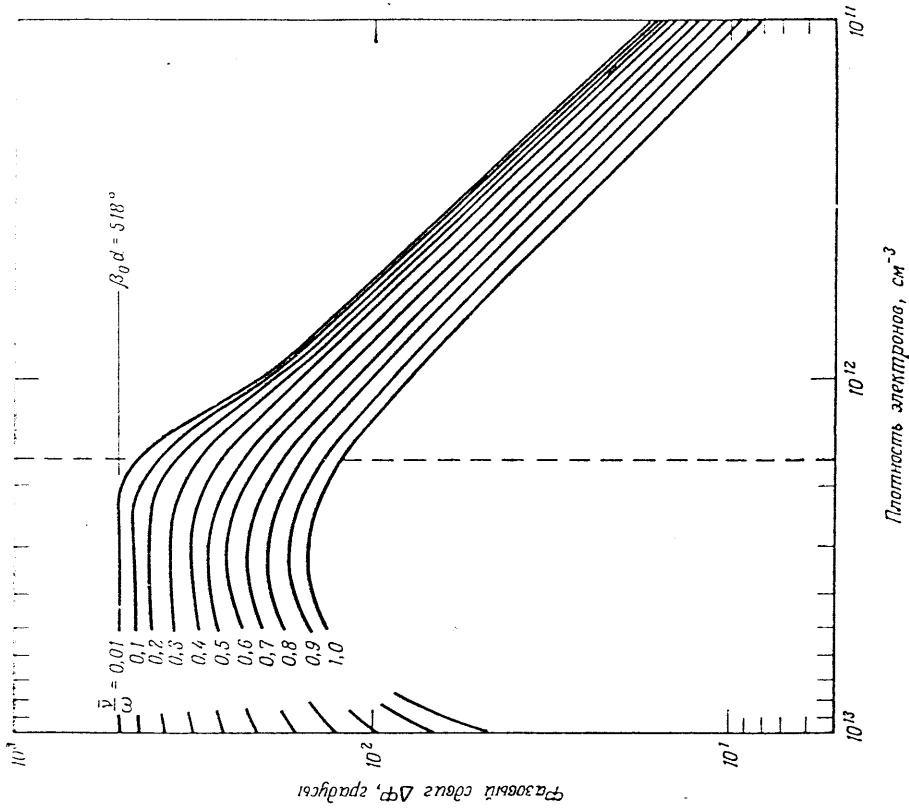
Тогда из соотношений (8.13a) и (8.13в) следует

$$\frac{c\alpha}{\omega} = \left( \frac{|K| - K_{\text{Re}}}{2} \right)^{1/2}, \quad (8.15a)$$

$$\frac{c\beta}{\omega} = \left( \frac{|K| + K_{\text{Re}}}{2} \right)^{1/2}. \quad (8.15б)$$

Правые части соотношений (8.15) зависят от параметров плазмы  $n_e$  и  $\nu$ . Таким образом, измерив затухание и фазовый сдвиг электромагнитной волны, проходящей через плазму, можно определить значения  $n_e$  и  $\nu$ . Для волны данной частоты  $\omega$  соотношения (8.10) и (8.8) накладывают приближенные верхний и нижний пределы на диапазон значений  $n_e$ , которые могут быть измерены подобным образом. Так, например, интерферометрический метод (при котором измеряется фазовый сдвиг) в видимой части спектра пригоден при  $n_e \lesssim 10^{16} \text{ см}^{-3}$ . СВЧ-метод пригоден для измерений  $n_e$  в интервале  $10^9 \text{ см}^{-3} \lesssim n_e \lesssim 10^{14} \text{ см}^{-3}$ . На фиг. 10 и 11 представлены кривые затухания и фазового сдвига для волны с частотой  $\omega = 7,1 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$  ( $\lambda \approx 2,7 \text{ см}$ ), прошедшей сквозь слой плазмы толщиной 3,82 см, рассчитанные по формулам (8.15). Затухание приведено в деци-

<sup>1)</sup> Величину  $K$  часто называют эффективной комплексной диэлектрической проницаемостью среды.



Фиг. 11. Фазовый сдвиг для волн СВЧ-диапазона в слое однородной плазмы.  $d = 3,82 \text{ см}$ ,  $\omega = 7,1 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ ,  $n_{e0} = 1,6 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ .

белах, согласно формуле

$$\text{затухание} = 10 \lg \frac{|E(x=0)|^2}{|E(x=d)|^2} = 0,868\alpha d.$$

Фазовый сдвиг дается выражением

$$\Delta\Phi = \beta d - \beta_0 d = \frac{2\pi d}{\lambda_0} (n - 1),$$

где  $\beta_0 = 2\pi/\lambda_0$  — волновое число волны в вакууме. Применению СВЧ-метода как метода диагностики плазмы уделяется большое внимание. Подробнее с этим вопросом можно ознакомиться по книге [4].

## Литература

1. *Chen F. F.*, в книге *Plasma Diagnostic Techniques*, eds. R. H. Huddlestone, S. L. Leonard, Academic, 1965. Electric Probes.
2. *Davison B.*, Neutron Transport Theory, Clarendon, 1957.
3. *De Leeuw J. H.*, в книге *Physico-Chemical Diagnostics of Plasmas*, eds. T. P. Anderson, R. W. Springer, R. C. Warder, Jr., Northwestern University Press, 1963. Electrostatic Plasma Probes.
4. *Heald M. A., Wharton C. B.*, Plasma Diagnostic with Microwaves, Wiley, 1965.
5. *Johnson E. O., Matter L.*, Phys. Rev., 80, 58 (1965). A Floating Double Probe Method for Measurements in Gas Discharges.
6. *Lam S. H.*, AIAA Journ., 2, 256 (1964). A General Theory for the Flow of Weakly Ionized Gases.
7. *Langmuir I.*, Phys. Rev., 33, 954 (1929); также в книге *Collected Works of Irving Langmuir*, vol. 5, ed. G. Smits, Macmillan (Pergamon), 1961.
8. *McKee H. B.*, Electrostatic Probe Theory and Application in a High-Temperature, Collision-Dominated, Potassium-Seeded Argon Plasma, диссертация, Стенфордский университет, 1967.
9. *Schoff L.*, в книге *Plasma Diagnostic*, ed. W. Lochte-Holtgreven, North Holland, 1968. Electrical Probes.
10. *Tanendbaum B. S.*, Plasma Physics, McGraw-Hill, 1967.
11. *Thompson W. B.*, An Introduction to Plasma Physics, Pergamon, 1962.
12. *Tolman R. C.*, The Principles of Statistical Mechanics, Oxford, 1938.

## МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

Перейдем теперь к вопросу о влиянии магнитного поля на поведение частично ионизованных газов. Мы будем исходить из фундаментального (нерелятивистского) выражения

$$\mathbf{F} = q [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{w} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] \quad (1.1)$$

для силы, с которой действуют на частицу с зарядом  $q$ , движущуюся со скоростью  $\mathbf{w} = d\mathbf{x}/dt$ , электрическое поле  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  и поле магнитной индукции  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ . Эта сила называется силой Лоренца. Равенство (1.1) установлено на основании опытных данных. Вначале мы остановимся на некоторых закономерностях движения отдельной частицы под действием силы (1.1). Затем мы рассмотрим различные столкновений, а также следствия равенства (1.1) на макроскопическом уровне.

Обобщив уравнения сплошной среды на случай столкновительных проводящих газов, можно получить полную систему уравнений, называемых магнитогидродинамическими (МГД) уравнениями. Мы покажем, как выводятся эти уравнения. Часто оказывается удобным рассматривать электроны как отдельную компоненту проводящей жидкости, сосуществующую с другой компонентой, состоящей из тяжелых частиц. В таких случаях обычные уравнения гидродинамики необходимо дополнить уравнениями энергии для электронов. Мы также рассмотрим соотношение, обычно называемое «обобщенным законом Ома», которое дает ток в газе при наличии электрических и магнитных полей. В качестве примера применения этих уравнений в конце главы рассматривается течение Гартмана, генерация МГД-энергии и двухтемпературная ионизационная неустойчивость.

Формула (1.1) дает силу, которая действует на заряженную частицу, движущуюся в любой инерциальной системе отсчета, и, в частности, применима в случае частицы, движущейся со скоростью  $\mathbf{w}$  относительно лабораторной системы отсчета  $S$ . Как показано на фиг. 1, в системе отсчета  $S'$ , движущейся относительно системы  $S$  со скоростью  $\mathbf{w}$ , частица покоится. Сила, действующая на частицу в движущейся системе отсчета  $S'$ , равна

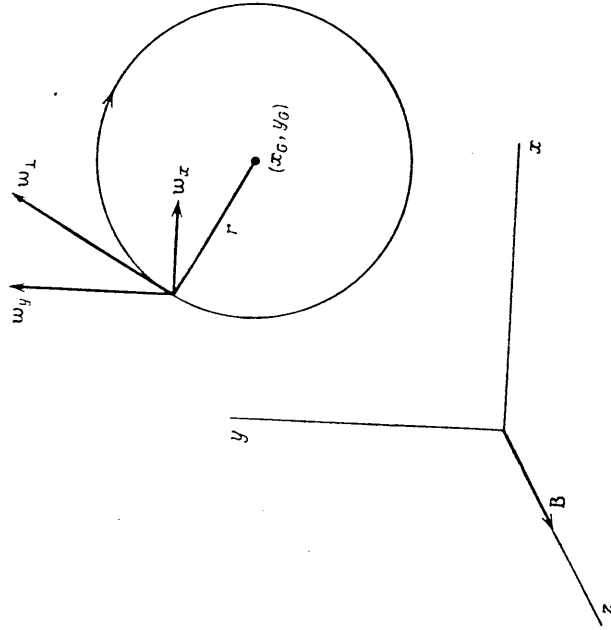
$$\mathbf{F}' = q' \mathbf{E}'. \quad (1.2)$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$\dot{x}_x = \omega_{\perp} \cos(\omega t + \alpha) \rightarrow \frac{dx}{dt}, \quad (2.6a)$$

$$\dot{y}_y = \mp \omega_{\perp} \sin(\omega t + \alpha) = \frac{dy}{dt}, \quad (2.6b)$$

где  $\alpha$  — фазовый сдвиг, определяемый начальными условиями,



Фиг. 2. Движение частицы в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{B}$ .

а  $\omega_{\perp}^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2$ . Верхний знак берется, когда  $q > 0$ , а нижний, когда  $q < 0$ . Величина

$$\omega \equiv \frac{|q|B}{m} \quad (2.7)$$

есть *циклотронная* (или ларморовская) частота. Интегрируя уравнения (2.6), получаем траекторию частицы в плоскости  $(x, y)$ :

$$(x - x_0) = r \sin(\omega t + \alpha), \quad (2.8a)$$

$$(y - y_0) = \pm r \cos(\omega t + \alpha). \quad (2.8b)$$

Таким образом, проекция траектории частицы на плоскость, перпендикулярную вектору  $\mathbf{B}$ , представляет собой окружность с центром в точке  $(x_0, y_0)$ , радиус которой (ларморовский радиус) дается

выразим

$$r = \frac{\omega_{\perp}}{\omega} \quad (2.9)$$

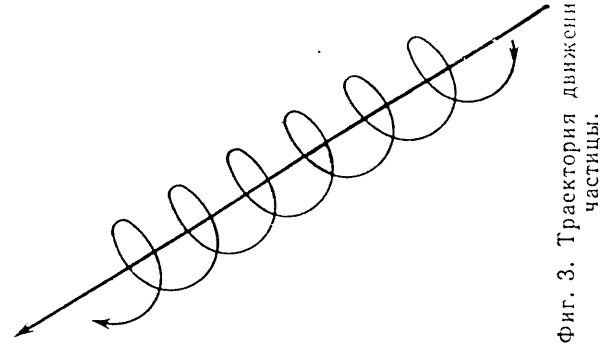
Положительный заряд (фиг. 2) движется по часовой стрелке, а отрицательный — против часовой стрелки. Поскольку *ведущий центр*  $(x_0, y_0)$  движется с постоянной скоростью  $|\mathbf{w}_{\parallel}| = \omega_z$  вдоль вектора  $\mathbf{B}$ , траектория частицы в пространстве представляет собой *спираль*, обвивающую магнитную силовую линию (фиг. 3).

Приведем численный пример. Если тепловая скорость  $\omega_{\perp}$  электрона, движущегося в магнитном поле  $1 \text{ Вб/м}^2$  ( $10\,000 \text{ Гс}$ ), равна  $\sim 10^6 \text{ м/с}$ , то  $\omega = \omega_c = 1,8 \cdot 10^{11} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$  и  $r = r_e = 5,7 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ . Эти величины — того же порядка, что и средняя частота столкновений с передачей импульса для электронов  $\bar{v}_{ei} = 2,6 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$ , и их средняя длина свободного пробега  $l_e = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}$  (гл. 2, задача 8.2) при условиях, типичных для МГД-генераторов. Поскольку в этих условиях  $\omega_e/\bar{v}_{ei} = 0,7$ , электрон успевает пройти значительную часть своей круговой орбиты, прежде чем испытает столкновение. Величина

$$\beta_e = \frac{\omega_e}{v_{ei}} \quad (2.10)$$

представляет собой очень важную характеристику плазмы, называемую *параметром Холла*<sup>1)</sup>; мы еще встретимся с ней в дальнейшем.

<sup>1)</sup> Столкновения с другими электронами также могут прерывать циклотронное вращение конкретного электрона, но по определению они не входят в эффективную частоту столкновений электрона с тяжелыми частицами  $\bar{v}_{ei}$  [гл. 2, формула (13.8)]. Однако  $v_{eH}$  учитывает электрон-ионные столкновения, частота  $v_{ei}$  которых либо равна (в случае, когда заряд иона  $Z$  равен единице) частоте электрон-электронных столкновений  $v_{ee}$ , либо больше нее [см. текст перед формулой (8.9) в гл. 2]. Таким образом, учет члена  $v_{ee}$  привел бы к появлению в определении (2.10) коэффициента, максимальное значение которого равно двум.



Фиг. 3. Траектория движения частицы.



Каждый тип заряженных частиц в плазме характеризуется, естественно, своим собственным значением величины  $\beta$ . Как и в предыдущем случае, параметр Холла для каждого типа частиц равен среднему числу оборотов, совершаемому частицей данного типа между двумя столкновениями.

Вращающаяся под действием внешнего магнитного поля заряженная частицу можно рассматривать как малый круговой ток. Направление тока относительно приложенного поля  $B$  определяется уравнением (2.8) и показано на фиг. 4. Этот круговой ток создает *индуцированное* поле  $B$ , приблизительно эквивалентное полю магнитного диполя. В общем случае можно показать [19], что момент магнитного диполя  $\mathbf{d}_m$ , эквивалентного круговому току, равен произведению тока  $I$  на площадь контура  $\Sigma$ . В данном случае  $I = |q| \omega / 2\pi$  и  $\Sigma = \pi r^2$ . Используя соотношения (2.7) и (2.9) и замечая, что поле индуцированного магнитного диполя направлено навстречу внешнему магнитному полю, получаем

$$\mathbf{d}_m = \frac{-(m\omega^2/2)}{B} \mathbf{b}, \quad (2.11)$$

где  $\mathbf{b} \equiv \mathbf{B}/B$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{B}$ . Вещества, для которых выполняется такое соотношение для направления момента индуцированного диполя, называются *диамагнетиками* (в отличие от парамагнетиков).

Можно показать [28], что при медленном изменении  $\mathbf{B}$  в просторанстве и времени диамагнитный момент  $\mathbf{d}_m$  заряженной частицы почти постоянен. Величина, обладающая таким свойством, называется *адиабатическим инвариантом*. Важным следствием инвариантности момента  $\mathbf{d}_m$  является то, что частица, входящая в область увеличения  $B$ , отражается обратно. В соответствии с уравнением (2.11) возрастание  $B$  приводит к увеличению кинетической энергии частицы в направлении, перпендикулярном вектору  $\mathbf{B}$ .

Увеличение поперечной кинетической энергии должно сопровождаться уменьшением кинетической энергии в направлении  $\mathbf{B}$ , поскольку полная кинетическая энергия сохраняется. Таким образом,  $\omega_{\perp}$  уменьшится до нуля, направление поступательного движения частицы изменится на противоположное, и она станет двигаться в сторону уменьшения  $B$ . Следовательно, такая область действует как *магнитное зеркало*. В магнитном поле Земли за пределами атмосферы этот механизм играет важную роль при удержании захваченных ионов в радиационных поясах Ван Аллена. При исследованиях в области управляемого термоядерного синтеза два направленных навстречу магнитных зеркала используются в некоторых установках для удержания высокотемпературной бесстолкновительной плазмы.

В случае твердых веществ полную плотность тока  $\mathbf{j}$ , фигурирующую в уравнении Ампера — Максвелла (гл. 6, § 2)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

обычно разделяют на две части. Одна из них  $\mathbf{j}_f$  связана со свободными заряженными частицами, другая  $\mathbf{j}_b$  — с круговыми токами или эквивалентными магнитными диполями связанных зарядов. Можно показать, что  $\mathbf{j}_b = \nabla \times \mathbf{M}$ , где  $\mathbf{M}$  — магнитный дипольный момент на единицу объема. При таком разделении уравнение Ампера — Максвелла запишется следующим образом:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

где  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля в веществе, определяющаяся соотношением  $\mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}$ , или, что то же, соотношением

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}).$$

Такое разбиение плотности тока общепринято и особенно удобно при рассмотрении веществ с идеальной магнитной проницаемостью, удовлетворяющих соотношению

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}.$$

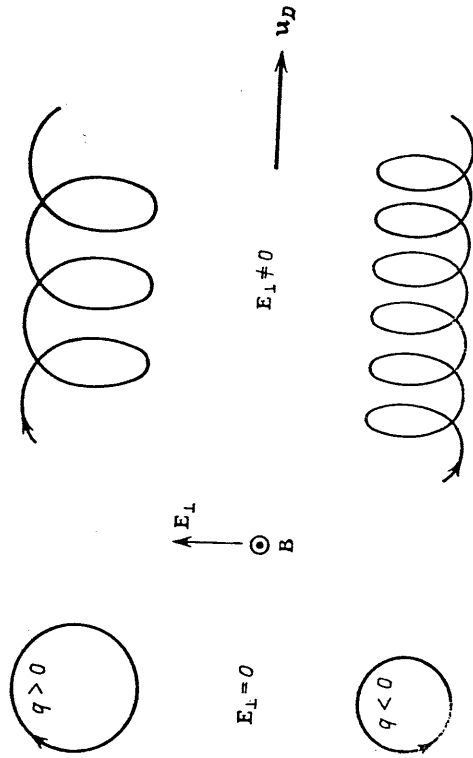
Здесь  $\chi_m$  — коэффициент пропорциональности, называемый магнитной восприимчивостью. С учетом этого соотношения можно написать  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , где  $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$  есть постоянная, так называемая абсолютная магнитная проницаемость вещества. Из уравнения (2.11) следует, что в плазме  $M \sim B^{-1}$ . По этой причине различие между свободными и связанными зарядами при рассмотрении плазмы оказывается несущественным. И в данном случае удобнее пользоваться полной плотностью тока  $\mathbf{j}$  и соотношением  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ .

Возвращаясь к вопросу о траекториях частиц, рассмотрим теперь движение частицы при одновременном воздействии двух однородных и постоянных полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . В этом случае упрощения движения имеют вид

$$\frac{dw_{\parallel}}{dt} = \frac{q}{m} E_{\parallel}, \quad (2.12a)$$

$$\frac{dw_{\perp}}{dt} = \frac{q}{m} (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{w}_{\perp} \times \mathbf{B}). \quad (2.12b)$$

В соответствии с уравнением (2.12a) заряженная частица имеет постоянное ускорение вдоль направления  $\mathbf{B}$ . Траектория частицы в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{B}$ , может быть найдена путем суперпозиции траекторий в полях  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}_{\perp}$ .



Фиг. 5. Траектории частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях.

Рассмотрим вначале случай положительно заряженной частицы. Как показано на фиг. 5, если поле  $\mathbf{B}$  направлено перпендикулярно плоскости чертежа, а  $E_{\perp} = 0$ , то частица движется по часовой стрелке. Если  $E_{\perp} \neq 0$ , она ускоряется в направлении  $\mathbf{E}_{\perp}$  и поэтoму в верхней части траектории скорость  $w_{\perp}$  будет больше, чем внизу. В соответствии с этим локальное значение ларморовского радиуса в верхней части орбиты будет больше, чем в нижней части, и в среднем положительная частица будет дрейфовать вправо. Отрицательно заряженная частица при  $E_{\perp} = 0$  движется против часовой стрелки. Если  $E_{\perp} \neq 0$ , то ее движение замедляется в направлении  $\mathbf{E}_{\perp}$  так, что локальное значение ларморовского радиуса в верхней части траектории будет меньше, чем в нижней. Но, поскольку начальное движение происходило против часовой стрел-

ки, отрицательно заряженная частица также дрейфует вправо (фиг. 5).

В силу сказанного нам нужно найти новую систему отсчета, которая двигалась бы с некой дрейфовой скоростью  $\mathbf{u}_D$  и по отношению к которой движение заряженных частиц описывалось бы более простыми уравнениями. Поскольку  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  есть вектор, по направлению совпадающий с вектором  $\mathbf{u}_D$ , напишем

$$\mathbf{u}_D = \alpha (\mathbf{E} \times \mathbf{B}),$$

где  $\alpha$  — константа, которая будет определена ниже. Если обозначить скорость заряженной частицы относительно новой системы отсчета через  $\mathbf{w}'_{\perp}$ , то

$$\mathbf{w}_{\perp} = \mathbf{w}'_{\perp} + \alpha \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (2.13)$$

Уравнение движения для  $\mathbf{w}'_{\perp}$  получим, подставив (2.13) в уравнение (2.12b):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{w}'_{\perp}}{dt} &= \frac{q}{m} [\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{w}'_{\perp} \times \mathbf{B} + \alpha (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] = \\ &= \frac{q}{m} [\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{w}'_{\perp} \times \mathbf{B} - \alpha (B^2 \mathbf{E} - B^2 \mathbf{E}_{\parallel})] = \\ &= \frac{q}{m} [(1 - \alpha B^2) \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{w}'_{\perp} \times \mathbf{B}]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Если выбрать  $\alpha = 1/B^2$ , то получим

$$\boxed{\mathbf{u}_D = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}} \quad (2.15)$$

и уравнение (2.14) становится по форме записи идентичным уравнению (2.46), которое, как было показано, описывает круговую траекторию. В соответствии с этим движение частицы по траектории, определяемой уравнением (2.12b), есть вращение вокруг центра, движущегося со скоростью  $\mathbf{u}_D$ . Траектория такого типа описывается, например, точкой на спице катящегося колеса, при этом точки, расположенные на разных расстояниях от оси, движутся по разным траекториям. Отметим, что скорость центра вращения не зависит от заряда и массы частицы.

<sup>1)</sup> При  $\beta \rightarrow 0$  величина  $|u_D|$  превышает скорость света и формула (2.15) неверна. Дело в том, что при  $\beta \rightarrow 0$  время, в течение которого электрическое поле ускоряет частицу, пока не изменится направление ее скорости по отношению к  $\mathbf{E}_{\perp}$ , все больше возрастает. Когда скорость частицы становится релятивистской, первоначальные уравнения движения оказываются непригодными [16]. В большинстве случаев, представляющих интерес для нас, условия, обеспечивающие нерелятивистские скорости  $|u_D|$ , не очень трудно выполнить. Например, при  $B = 1 \text{ Вб/м}^2$  уравнение (2.15) справедливо при  $E_{\perp} < 3 \cdot 10^8 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$ .

**Задача 2.1.** Вычислите параметр Холла и ларморовский радиус электронов при условиях, заданных в задаче 8.2 к гл. 2, и при  $B = 2,7 \text{ Вб/м}^2$ .

**Задача 2.2.** Подробно разберите все возможные траектории заряженной частицы в случае, когда  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  постоянны в пространстве и времени.

**Задача 2.3.** Во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях протон делает  $10^3$  оборотов при прохождении расстояния 1 см в направлении, перпендикулярном обоим полям. Найдите магнитную индукцию, если напряженность электрического поля равна  $10 \text{ В/см}$ .

**Задача 2.4.** В термоэлектронном преобразователе катод обычно нагревают электронной бомбардировкой. За катодом помещают нагреваемый электронный эмиттер, выпускаемые им электроны ускоряются внешним напряжением  $\varphi$  и бомбардируют катод. В промежутке между катодом и эмиттером поддерживается высокий вакуум, чтобы электроны не испытывали столкновений с атомами остаточных газов. Предположим теперь, что такое устройство работает в магнитном поле  $B$ , направленном параллельно поверхности катода. Какова максимальная величина  $B$ , при которой возможна бомбардировка? Считайте, что  $\varphi = 2000 \text{ В}$ , расстояние  $s$  между катодом и эмиттером равно  $1 \text{ мм}$  и что электроны выходят из эмиттера со скоростью, равной нулю.

**Задача 2.5.** Разберите качественно случай заряженной частицы во взаимно перпендикулярных магнитном и гравитационном полях, а затем выведите формулу для дрейфовой скорости частицы. Считайте, что поля однородны в пространстве и во времени. Какова плотность тока в бесстолкновительной плазме, находящейся в таких условиях?

### § 3. ВЛИЯНИЕ СТОЛКНОВЕНИЙ — ХОЛЛОВСКИЙ ТОК И ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕ ИОНОВ

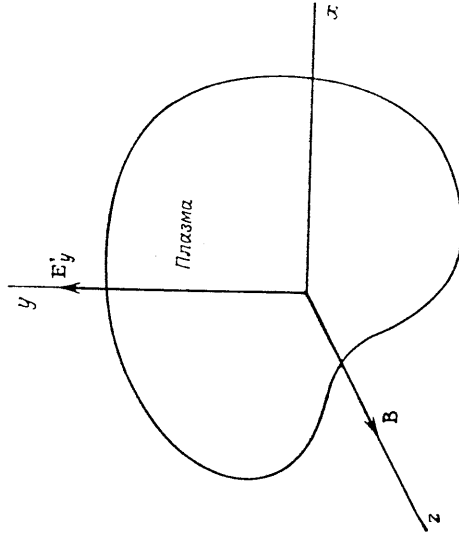
Если к плазме приложены электрическое и магнитное поля, в ней возникают электрические токи. В данном параграфе мы рассмотрим вопрос о том, как связаны между собой поля и токи. Отклик плазмы на действие электрического поля в отсутствие поля  $B$  рассматривался в гл. 2, § 13, и мы предполагаем, что читатель знаком с этим материалом.

Электрический ток в плазме прямо связан с диффузионными скоростями заряженных частиц различных сортов (гл. 2, § 6). В промежутках между столкновениями отдельные частицы дрейфуют со скоростью, пропорциональной  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , как говорилось

в предыдущем параграфе. Диффузионные скорости — это макроскопические характеристики такого движения частиц.

Мы рассмотрим качественно, а затем и количественно влияние магнитного поля  $B$  на диффузионные скорости заряженных частиц. Будем рассматривать плазму в системе отсчета, движущейся со средней массовой скоростью газа, поскольку в этой системе отсчета определялись диффузионные скорости.

Электрическое поле в этой системе отсчета равно  $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ , а магнитная индукция  $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$ . В соответствии с изложенным



Фиг. 6. Плазма в полях  $\mathbf{E}'_y$  и  $\mathbf{B}$ .

в гл. 3, § 2, будем считать плазму квазинейтральной. Для простоты будем полагать, что в состав плазмы входят только однозарядные ионы одного сорта.

В предыдущем параграфе было показано, что магнитное поле  $B$  не оказывает никакого влияния на компоненту скорости частиц в направлении вектора  $\mathbf{B}$ . Следовательно, эта компонента определяется только величиной  $\mathbf{E}'_{\parallel}$ , и в данном случае справедливо все сказанное в гл. 2, § 13. Так, например, диффузионная скорость электронов в направлении  $\mathbf{B}$  дается выражением

$$U_{\parallel}^e = -\mu_e E'_{\parallel}, \quad (3.1)$$

где  $\mu_e$  — подвижность электронов [гл. 2, формула (13.66)]. Поэтому мы здесь можем принять, что  $\mathbf{E}'_{\parallel} = 0$ .

Рассмотрим плазму, находящуюся в однородных и постоянных полях  $\mathbf{E}' = E'_y \mathbf{e}_y$  и  $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$  (фиг. 6). Если бы поля  $B$  не было, электроны и ионы двигались бы в поле  $\mathbf{E}'_y$  с разными, но постоянными средними скоростями в направлении оси  $y$ , так что отличной от нуля была бы лишь компонента тока  $J_y$ . Изменится ли ситуация

при наличии магнитного поля  $V$  зависит от того, в какой степени прямолнейные участки ломаной траектории заряженных частиц искривятся под действием поля  $B$ . В частности, число оборотов, делаемых частицей за время между двумя столкновениями, приближенно дается *параметром Холла*  $\beta = \omega/\nu$  [формула (2.10)]. В случае когда величина  $\beta$  мала и для электронов, и для ионов, влияние магнитного поля  $B$  также мало и им можно пренебречь. При равных температурах электронов и ионов имеем

$$\frac{\beta_i}{\beta_e} \sim \frac{\omega_i/\nu_i}{\omega_e/\nu_e} = \frac{m_e \nu_e}{m_i \nu_i} \sim O\left(\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\right) \ll 1. \quad (3.2)$$

Таким образом, в случае *сильно столкновительной* плазмы, когда  $\beta_e \ll 1$ ,

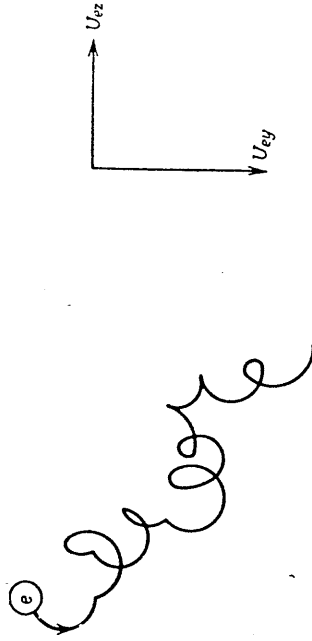
$$(3.3)$$

влиянием магнитного поля  $B$  можно пренебречь.

В другом крайнем случае — в случае *бесстолкновительной* плазмы, т. е. при

$$\beta_i \gg 1, \quad (3.4)$$

как электроны, так и ионы в среднем делают много оборотов между двумя столкновениями. Поэтому усредненное движение и элект-



Фиг. 7. Траектория электрона в скрещенных электрическом и магнитном полях при наличии столкновений.

ронов и ионов представляет собой дрейф со скоростью, пропорциональной  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . Отсюда следует, что в этом предельном случае  $J_y = 0$  и  $J_x = 0$ .

Неравенству (3.2) удовлетворяет *первый промежуточный* случай, когда

$$\beta_e \gg O(1), \quad (3.5)$$

$$\beta_i \ll 1,$$

т. е. когда ионный газ — сильно столкновительный, а электронный нет. Направление средней диффузионной скорости ионов по-преж-

нему будет совпадать с осью  $y$ , но из-за дрейфа со скоростью, пропорциональной  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , у средней диффузионной скорости электронов появится компонента в направлении оси  $x$ . Поскольку дивергенция прерывается столкновениями (фиг. 7), фактическая скорость будет составлять только часть полной дрейфовой скорости  $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})/B^2$ . При достаточно больших  $\beta_e$  на основании формулы (2.15) можно получить следующий приближенный результат:

$$J_{ex} \approx -en_e v_D = -\frac{en_e}{B} E_y = -\frac{n_e e^2}{m_e \omega_e} E_y = -\frac{\sigma_e}{\beta_e} E_y, \quad (3.6)$$

где  $\sigma_e$  — электронная электропроводность [гл. 2, формула (13.76)]. Поэтому электронные компоненты тока  $J_{ey}$  и  $J_{ex}$  должны зависеть от  $\beta_e$  так, как это показано на фиг. 8. Компонента тока  $J_{ex}$  в направлении, перпендикулярном электрическому полю и полю магнитной индукции, называется *холловским током* по имени Э. Холла, обнаружившего это явление в твердых проводниках в 1879 г.

Неравенство (3.2) выполняется также во *втором промежуточном* случае, когда

$$\beta_e \gg 1, \quad \beta_i \ll O(1), \quad (3.7)$$

Фиг. 8. Зависимость плотности тока электронов от параметра Холла электронов.

т. е. когда электронный газ почти бесстолкновительный, а ионный нет. Мы видим, что при таких условиях ионный ток  $J_{iy}$  может давать основной вклад в  $y$ -компоненту полного тока, поскольку  $J_{ey} \rightarrow 0$ . Это явление, называемое *проскальзыванием ионов*, полностью противоречит результату  $|J_{ey}| \gg |J_{iy}|$ , полученному в гл. 2, § 13 [гл. 2, формула (13.14)] для случая  $\mathbf{B} = 0$  (и произвольной степени ионизации). Проскальзывание ионов возможно только в частично ионизованных газах; в случае же полностью ионизованного газа в силу общего требования [гл. 2, формула (6.7)],

чтобы сумма плотностей потока диффундирующих компонент была равна нулю, величина  $|J_{ey}|$  всегда должна быть примерно больше  $|J_{iy}|$  независимо от механизмов, вызывающих движение.

Чтобы представить изложение выше в более строгой форме, рассмотрим уравнение движения электрона под действием полей  $E'_y$  и  $B$  с учетом влияния столкновений. Исходя из уравнения (2.126) в системе отсчета, движущейся со средней массовой скоростью газа, можно написать

$$m_e \frac{dW_{ey}}{dt} = -eW_{ey}B + F_{ex}(t), \quad (3.8a)$$

$$m_e \frac{dW_{iy}}{dt} = -e(E'_y - W_{ex}B) + F_{ey}(t). \quad (3.8b)$$

Здесь  $F_e(t)$  — сила трения, обусловленная столкновениями (гл. 2, § 13), а  $W = w - u$  — скорость электронов в системе отсчета, движущейся со средней массовой скоростью. Действуя так же, как в гл. 2, § 13, мы должны были бы усреднить эти уравнения по времени, взяв интервал усреднения, содержащий большое число столкновений, и положить при этом левые части уравнений (3.8) равными нулю в случае стационарной и однородной плазмы. Но здесь имеем то важное отличие, что при наличии поля  $B$  плазма с токами, вообще говоря, не может находиться в стационарном и однородном состоянии. Дело обстоит точно так же, как в случае проволки с током во внешнем поперечном поле  $B$ . В следующем параграфе будет показано, что на плазму как целое действует объемная сила, так же как и на проволоку с током. Эта сила либо ускоряет плазму, либо создает в ней градиенты давления, уравновешивающие силу (либо то и другое). Поэтому вычислить диффузионные скорости электронов и ионов в общем случае довольно сложно, и в данном параграфе мы ограничимся рассмотрением предельного случая лоренцевской, т. е. *очень слабо ионизованной*, плазмы.

В случае очень слабо ионизованного газа возможно стационарное состояние, в котором силы, возникающие в результате взаимодействия токов с магнитным полем  $B$ , уравновешиваются главным образом градиентами давления нейтральной компоненты. В этом предельном случае электронный и ионный газы приблизительно однородны и стационарны, и усредненные по времени левые части уравнений (3.8) можно считать равными нулю. Согласно формуле (13.4) из гл. 2, мы имеем  $\bar{F}_e \approx -m_e \bar{v}_{en} U_e$ , и после усреднения по многим столкновениям уравнения (3.8) принимают вид

$$0 = -eBU_{ey} - m_e \bar{v}_{en} U_{ex}, \quad (3.9a)$$

$$0 = -eE'_y + eBU_{ex} - m_e \bar{v}_{en} U_{ey}. \quad (3.9b)$$

Решая эти уравнения, получаем

$$U_{ey} = -\frac{\mu_e}{1 + \beta_e^2} E'_y, \quad (3.10a)$$

$$U_{ex} = \frac{\beta_e \mu_e}{1 + \beta_e^2} E'_y, \quad (3.10b)$$

где  $\mu_e = e/m_e \bar{v}_{en}$  — подвижность электронов (в пределе слабо ионизованного газа), даваемая формулой (13.66) из гл. 2, а

$$\beta_e = \frac{\omega_e}{v_{en}} = \mu_e B$$

— соответствующий электронный параметр Холла. Здесь  $\omega_e = eB/m_e$  — электронная циклотронная частота. В частном случае, когда  $\beta_e = 0$ , уравнения (3.10) приводятся к виду, полученному в гл. 2, § 13.

Если мы обозначим эффективную электропроводность в направлении оси  $y$  через  $(\sigma_e)_y$ , а в направлении оси  $x$  через  $(\sigma_e)_x$ , то можно написать

$$J_{ey} = -en_e U_{ey} = (\sigma_e)_y E'_y,$$

$$J_{ex} = -en_e U_{ex} = -(\sigma_e)_x E'_y,$$

где

$$(\sigma_e)_y = \frac{\sigma_e}{1 + \beta_e^2}, \quad (3.11a)$$

$$(\sigma_e)_x = \frac{\beta_e \sigma_e}{1 + \beta_e^2}, \quad (3.11b)$$

а  $\sigma_e$  — продольная составляющая электронной электропроводности, определяемая соотношением (13.76) из гл. 2. Эти результаты подтверждаются как ожидающиеся зависимость плотности электронного тока от  $\beta_e$ , приведенную на фиг. 8, так и формулу (3.6), полученную для частного случая.

Для ионов в пределе слабой ионизации, согласно формуле (13.10a) из гл. 2, мы имеем  $\bar{F}_i \approx -m_i \bar{v}_{in} U_i$ . Исходя из этого, можно показать по аналогии с формулами (3.10), что

$$U_{iy} = \frac{\mu_{in}}{1 + \beta_i^2} E'_y, \quad (3.12a)$$

$$U_{ix} = \frac{\mu_{in} \beta_i}{1 + \beta_i^2} E'_y, \quad (3.12b)$$

где  $\mu_{in} = e/m_i \bar{v}_{in}$  — подвижность ионов (в пределе слабой ионизации), даваемая формулой (13.136) из гл. 2, а

$$\beta_i = \frac{\omega_{in}}{v_{in}} = \mu_{in} B \quad (3.13)$$

— соответствующий параметр Холла для ионов. Здесь  $\omega_{in} = eV/m_{in}$  — циклотронная частота ионы с приведенной массой  $m_{in}$ . При  $\beta_i \neq 0$  эти результаты согласуются с соотношениями (3.11) из гл. 2. В гл. 2, § 13, было показано, что в отсутствие поля  $V$  (и вдали от границ) диффузионная скорость ионов при любых степенях ионизации намного меньше диффузионной скорости электронов. Но, как уже отмечалось, этот вывод неверен в случае слабо ионизованной плазмы, если  $\mathbf{V} \neq 0$ . Из соотношений (3.10a) и (3.12a) следует, что при достаточно больших полях  $V$

$$\left| \frac{U_{iy}}{U_{ey}} \right| \rightarrow \frac{\mu_{in}\beta_e^2}{\mu_e\beta_i^2} = \frac{\mu_e}{\mu_{in}} = \frac{m_{in}\bar{v}_{in}}{m_e\bar{v}_{en}} \sim O\left(\sqrt{\frac{m_{in}}{m_e}}\right) \gg 1, \quad (3.14a)$$

а из соотношений (3.10б) и (3.12б) при том же условии получаем

$$\left| \frac{U_{ix}}{U_{ex}} \right| \rightarrow \frac{\mu_{in}\beta_e}{\mu_e\beta_i} \sim O(1). \quad (3.14б)$$

Введем коэффициент проскальзывания ионов (в пределе слабо ионизованного газа)

$$s = \beta_e\beta_i = \mu_e\mu_{in}B^2. \quad (3.15)$$

Тогда из соотношений (3.10a) и (3.12a) следует, что условие  $|U_{iy}| = |U_{ey}|$  выполняется при  $s = 1$ .

В слабо ионизованном газе ионный ток  $J_{iy}$  будет меньше электронного  $J_{ey}$ , если коэффициент проскальзывания ионов  $s$  меньше единицы. Вводя параметр Холла для электронов, данное условие можно записать следующим образом:

$$\beta_e^2 < \frac{\beta_e}{\beta_i} = \frac{\mu_e}{\mu_{in}} = \frac{m_{in}\bar{v}_{in}}{m_e\bar{v}_{en}} \approx \sqrt{\frac{m_{in}\bar{Q}_{in}}{m_e\bar{Q}_{en}}}. \quad (3.16)$$

Отсюда следует, что для аргона с добавкой цезия, находящегося при температуре порядка 0,2 эВ, величина  $\beta_e \lesssim 200$ , а для ионизованного гедия  $\beta_e \lesssim 25$ . Как будет показано в § 8, при умеренной степени ионизации величину  $\bar{v}_{en}$ , которая входит в условие (3.16) [так же, как и в выражение (2.10) для  $\beta_e$ ], нужно заменить величиной  $\bar{v}_{en} = \bar{v}_{ei} + \bar{v}_{en}$ . Поскольку же при сравнительно низких температурах (гл. 2, § 8) величина  $\bar{Q}_{ei}$  обычно больше величины  $\bar{Q}_{en}$ , указанное требование к  $\beta_e$  может быть значительно смягчено в случае плазмы с малой, но конечной степенью ионизации.

Отметим, что условие  $s \ll 1$  гарантирует только то, что компонента плотности ионного тока, параллельная электрическому полю, меньше соответствующей компоненты плотности электронного тока. При наличии магнитного поля векторы  $\mathbf{J}_e$  и  $\mathbf{J}_i$  не обязательно коллинеарны, и, таким образом, в слабо ионизованной плазме могут существовать определенные направления, в которых плотность ионного тока превышает плотность электронного тока.

Теперь на основании полученных выше результатов мы можем вывести закон Ома для очень слабо ионизованной плазмы, находящейся в статических полях  $E'_y$  и  $B$ . В случае квазинейтральной плазмы формулы (3.10a) и (3.12a) дают

$$J_y = en_e(U_{iy} - U_{ey}) = \frac{en_e(\mu_e + \mu_{in})(1 + \beta_e\beta_i)}{(1 + \beta_e\beta_i)^2 + (\beta_e - \beta_i)^2} E'_y = \sigma_{\perp} E'_y,$$

где

$$\sigma_{\perp} \approx \frac{\sigma(1+s)}{(1+s)^2 + \beta_e^2}. \quad (3.17a)$$

При выводе этих выражений мы использовали соотношения (3.2), (3.11), (3.13), (3.15), а также формулу (3.15б) из гл. 2. Аналогичным образом, исходя из формул (3.10б) и (3.12б), можно получить

$$J_x = -\frac{en_e(\mu_e + \mu_{in})(\beta_e - \beta_i)}{(1 + \beta_e\beta_i)^2 + (\beta_e - \beta_i)^2} E'_y = -\sigma_{\parallel} E'_y,$$

где

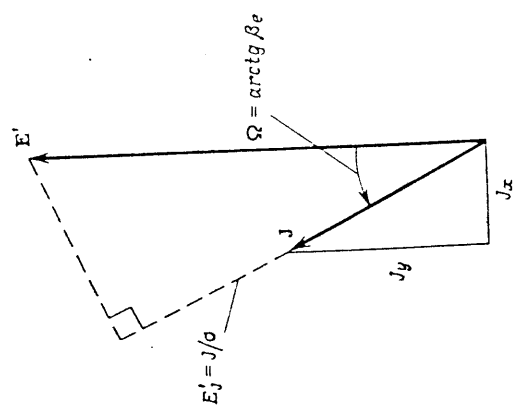
$$\sigma_{\parallel} \approx \frac{\beta_e\sigma}{(1+s)^2 + \beta_e^2}. \quad (3.17б)$$

При  $s \ll 1$  формулы (3.17) сводятся к выражениям (3.11) для электронной электропроводности (напомним, что  $\sigma \approx \sigma_e$ ). Отметим, что последнее выражение для электропроводности может быть использовано и в том случае, когда величина  $s$  не мала, но тогда  $\sigma_e$  следует интерпретировать как  $\sigma/(1+s)$ , а  $\beta_e$  — как  $\beta_e/(1+s)$ .

На фиг. 9 показано относительное расположение векторов плотности тока  $\mathbf{J}$  и электрического поля  $\mathbf{E}'$  в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{B}$ . Пренебрегая для простоты проскальзыванием ионов, получаем, что угол  $\Omega$  между векторами  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{E}'$  определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \Omega = \left| \frac{J_x}{J_y} \right| = \frac{\sigma_{\parallel}}{\sigma_{\perp}} = \beta_e. \quad (3.18)$$

Следовательно, параметр Холла для электронов можно интерпретировать как тангенс угла между векторами  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{E}'$  в плоскости,



Фиг. 9. Относительное расположение векторов электрического поля и плотности тока в плоскости, перпендикулярной магнитному полю  $\mathbf{B}$ .

перпендикулярной вектору  $\mathbf{V}$ . С учетом формул (3.17) величину  $\mathbf{J}$  можно представить в виде

$$\mathbf{J} = V \frac{\sigma_{\perp}^2 + \sigma_{\parallel}^2}{\sqrt{1 + \beta^2}} \mathbf{E}'_{\perp} + \sigma_{\parallel} \mathbf{E}'_{\parallel} = \sigma \mathbf{E}'_{\perp} \cos \Omega + \sigma \mathbf{E}'_{\parallel} \quad (3.19)$$

Таким образом, проекция  $\mathbf{E}'_{\perp}$  электрического поля на направление  $\mathbf{J}$  связана с плотностью тока так же, как и в случае, когда магнитное поле отсутствует.

Закон Ома, выведенный в данном параграфе и выраженный соотношениями (3.1) и (3.17), можно записать в компактном виде для произвольного направления  $\mathbf{E}'$ , если ввести *тензор удельной электропроводности*  $\sigma_{\alpha\beta}$ :

$$\mathbf{j}_{\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} \mathbf{E}'_{\beta}. \quad (3.20a)$$

(Здесь подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.) В декартовой системе координат, ось  $z$  которой направлена вдоль вектора  $\mathbf{V}$ , тензор  $\sigma_{\alpha\beta}$  имеет вид

$$\sigma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \sigma_{\perp} & -\sigma_{H} & 0 \\ \sigma_{H} & \sigma_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}. \quad (3.20b)$$

Закон Ома может быть записан также в векторной форме

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}'_{\parallel} + \sigma_{\perp} \mathbf{E}'_{\perp} + \sigma_{H} \mathbf{b} \times \mathbf{E}', \quad (3.21a)$$

не зависящей от системы отсчета. Здесь  $\mathbf{b} = \mathbf{V}/V$ ,  $\mathbf{E}'_{\parallel} = (\mathbf{E}' \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}$  и  $\mathbf{E}'_{\perp} = \mathbf{E}' - \mathbf{E}'_{\parallel}$ .

В формуле (3.21a) величина  $\mathbf{J}$  представлена в виде функции переменных  $\mathbf{E}'$ . Полезно также выразить  $\mathbf{E}'$  через  $\mathbf{J}$ . Для этого нужно представить  $\mathbf{E}'$  в виде суммы трех линейно независимых базисных векторов:

$$\mathbf{E}' = \rho \mathbf{J} + q (\mathbf{J} \times \mathbf{b}) + r \mathbf{b} \times (\mathbf{J} + \mathbf{b}),$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= (\mathbf{E}' \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b} = \rho \mathbf{J}_{\parallel} = \rho [\mathbf{J} - \mathbf{b} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{b})], \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \mathbf{E}' - \mathbf{E}'_{\parallel} = q (\mathbf{J} \times \mathbf{b}) + (r + \rho) [\mathbf{b} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{b})], \\ \mathbf{b} \times \mathbf{E}' &= -(r + \rho) (\mathbf{J} \times \mathbf{b}) + q \mathbf{b} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в уравнение (3.21a) и решив его относительно  $\rho$ ,  $q$  и  $r$ , получим

$$\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{J} + \beta_e \mathbf{J} \times \mathbf{b} + s \mathbf{b} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{b})}{\sigma}. \quad (3.21b)$$

Можно подумать, что закон Ома, выведенный в данном параграфе, применим только в случае очень слабо ионизованной плазмы.

На самом же деле, как будет показано в § 8, выражения (3.21) и (3.17) сохраняют свою форму и в случае плазмы с произвольной степенью ионизации, но в них делаются следующие изменения. Электрическое поле  $\mathbf{E}'$  заменяется «обобщенным электрическим полем»

$$\mathcal{E} = \mathbf{E}' + \frac{\nabla \rho_e}{en_e}, \quad (3.22)$$

где  $\rho_e = n_e k T_e$  — парциальное давление электронов; частота  $\bar{\nu}_{en}$  столкновений электронов с нейтральными частицами заменяется величиной

$$\bar{\nu}_{eH} = \bar{\nu}_{en} + \bar{\nu}_{ei},$$

а коэффициент проскальзывания ионов принимает вид

$$s = \left( \frac{\rho_n}{\rho} \right)^2 \beta_e \beta_i. \quad (3.23)$$

Появление квадрата отношения плотности нейтральных частиц к полной плотности плазмы ( $\rho_n/\rho$ ) в качестве множителя в выражении для  $s$  отражает тот факт, о котором уже говорилось ранее, что проскальзывание ионов в полностью ионизованной плазме невозможно.

#### § 4. ПРОВОДЯЩИЙ ГАЗ КАК СПЛОШНАЯ СРЕДА

Во многих случаях плазму можно рассматривать как сплошную среду, и это часто дает некоторые преимущества. В таком приближении пренебрегают тем, что плазма состоит из частиц, и принимают, что ее можно характеризовать сравнительно небольшим количеством величин, которые фактически соответствуют моментам низкого порядка функции распределения частиц по скоростям. Такой подход допустим в случае *столкнутой* плазмы. Под этим подразумеваются то, что средняя длина свободного пробега между столкновениями для всех компонент плазмы намного меньше характерного пространственного масштаба макроскопических изменений и что время между столкновениями частиц намного меньше характерного временного масштаба макроскопических изменений. Иногда модель сплошной среды оказывается достаточно точной даже в тех случаях, когда эти условия не выполняются. В данном параграфе мы выведем уравнения, которые описывают частично ионизованный газ как проводящую сплошную среду, опираясь преимущественно на макроскопические представления. Соответствующий вывод, основанный на кинетической теории, представлен в гл. 7, § 3.

Уравнения, выражающие законы сохранения массы, импульса и энергии для непроводящих сплошных сред, выведены на основе макроскопических представлений многими авторами (см.,

например, работу [7]), и в случае, когда внешние силы отсутствуют, они записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (4.1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla \cdot \mathbf{p}, \quad (4.1b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u}) = -\nabla \cdot \mathbf{q} - \mathbf{p} : \nabla \mathbf{u}. \quad (4.1v)$$

Здесь  $\rho$ ,  $\rho \mathbf{u}$  и  $\rho e$  — масса, импульс и полная внутренняя энергия единицы объема среды. Существует много различных форм записи этих уравнений. Например, уравнение (4.1a) может быть записано через дифференциальный оператор

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$$

следующим образом:

$$\frac{D \rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Это уравнение дает скорость изменения массовой плотности вдоль траектории частицы среды<sup>1)</sup>. Аналогичные преобразования и интерпретации возможны и для других уравнений сохранения.

В силу уравнений состояния среды из всех термодинамических переменных, таких, как плотность  $\rho$ , давление  $p$ , температура  $T$ , тепловая энергия на единицу массы  $e$ , и т. д., только две переменные являются независимыми. В частности, уравнение состояния идеального газа имеет вид

$$p = \rho R T, \quad e = c_v T, \quad (4.2a)$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная, а  $c_v$  — удельная теплосмкость при постоянном объеме. Тензор давления  $\mathbf{p} = p \delta_{ij}$  выражается через давление и тензор вязких напряжений  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{ij}$  соотношением

$$p_{ij} = p \delta_{ij} - \tau_{ij},$$

где  $\delta_{ij}$  — дельта-функция Кронекера. Для большинства газов и многих жидкостей  $\tau_{ij}$  и вектор потока тепла  $\mathbf{q}$  можно выразить через другие переменные следующим образом:

$$\tau_{ij} = \eta \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij} \right], \quad (4.2b)$$

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T. \quad (4.2v)$$

Здесь  $\eta$  — коэффициент вязкости, а  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности среды. В рамках макроскопического приближения можно

<sup>1)</sup> Лагранжева (или субстанциональная) производная. — Прим. перев.

считать, что соотношения (4.2) подтверждаются опытными данными. Они дают возможность рассматривать уравнения, выражающие общие законы сохранения, как систему пяти уравнений для трех компонент вектора скорости  $\mathbf{u}$  и для двух термодинамических переменных, например  $\rho$  и  $T$ .

В случае электропроводящей среды, находящейся в электрическом и магнитном полях, представленные выше уравнения гидродинамики необходимо модифицировать в двух основных направлениях. Во-первых, в уравнения, выражающие законы сохранения, нужно добавить член, учитывающий действие электромагнитного поля на среду, а также нужно ввести дополнительные уравнения, описывающие действие среды на электромагнитное поле. Во-вторых, нужно изменить соотношения, соответствующие уравнению (4.2), и в дополнение к  $\eta$  и  $\lambda$  ввести другие коэффициенты переноса. Этот довольно сложный вопрос рассматривается в гл. 8. В данном же параграфе мы будем в основном рассматривать первый вопрос.

Является ли среда проводящей или непроводящей — на закон сохранения массы это не влияет, а поэтому перейдем к закону сохранения импульса. Рассмотрим элемент объема среды  $\Delta V$ , содержащий много частиц, но небольшой по сравнению с пространственными масштабами макроскопических изменений. Согласно уравнению (1.1), электромагнитная сила, действующая со стороны электрического и магнитного полей на отдельную частицу  $k$  с зарядом  $q_k$ , находящуюся внутри объема  $\Delta V$ , равна  $\mathbf{F}_k = q_k (\mathbf{E} + \mathbf{w}_k \times \mathbf{B})$ , где  $\mathbf{w}_k$  — скорость частицы. Полная электромагнитная сила, действующая на элемент объема среды,  $\Delta F$  получается суммированием всех сил  $\mathbf{F}_k$ , действующих на все частицы в объеме  $\Delta V$ . Выраженная через хаотические скорости частиц  $\mathbf{W}_k = \mathbf{w}_k - \mathbf{u}$ , она дается следующим соотношением:

$$\Delta \mathbf{F} = \sum_{k \in \Delta V} q_k (\mathbf{E}' + \mathbf{W}_k \times \mathbf{B}),$$

где  $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$  — напряженность электрического поля в системе отсчета, движущейся со скоростью среды  $\mathbf{u}$ .

Первый член в правой части уравнения для  $\Delta \mathbf{F}$  равен  $(\rho^c \Delta V) \mathbf{E}'$ , где  $\rho^c$  — локальная плотность заряда среды, даваемая соотношением (6.14) из гл. 2. Для оценки второго члена предположим, что в среде имеется несколько типов заряженных частиц, заряд каждой из которых  $e_s$ . Если сгруппировать члены в сумме по типам заряженных частиц, то можно написать

$$\sum_{k \in \Delta V} q_k \mathbf{W}_k = \sum_s e_s \left( \sum_k^{(s)} \mathbf{W}_k \right),$$

где второе суммирование  $\sum_k^{(s)} \mathbf{W}_k$  должно проводиться по всем частицам типа  $s$  в  $\Delta V$ , а первое суммирование  $\sum_s$  — по всем типам



частич. В  $\Delta V$  содержится  $n_s \Delta V$  частиц типа  $s$ , и, поскольку ерудия относительная скорость каждой из них есть не что иное, как диффузионная скорость частиц типа  $U_s$ , мы имеем

$$\sum_{k \text{ в } \Delta V} q_k W_k = \sum_s e_s (U_s n_s \Delta V) = \mathbf{J} \Delta V, \quad (4.3)$$

где  $\mathbf{J} = \sum_s e_s n_s \mathbf{U}_s$  — плотность тока проводимости, определяемая соотношением (6.13) из гл. 2. Используя эти результаты, мы получаем полную силу, действующую на единицу объема среды со стороны электрического и магнитного полей:

$$\mathcal{F} \equiv \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V} = \rho^c \mathbf{E}' + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (4.4)$$

Этот член следует добавить в правую часть уравнения сохранения импульса (4.16).

Скорость изменения энергии  $k$ -й частицы под действием электрического и магнитного полей равна

$$P_k = \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{F}_k = q_k \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{E} = q_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{E} + q_k \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{E}.$$

Следовательно, скорость изменения энергии единицы объема среды  $\Delta V$  под действием электрического и магнитного полей составляет

$$\Delta P = \sum_{k \text{ в } \Delta V} (q_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{E} + q_k \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{E}) = (\rho^c \mathbf{u} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) \Delta V,$$

и, таким образом, энергия, передаваемая единице объема среды электрическим и магнитным полями, равна

$$\mathcal{P} \equiv \frac{\Delta P}{\Delta V} = \rho^c \mathbf{u} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \quad (4.5a)$$

Эта энергия идет на увеличение энергии поступательного движения и тепловой энергии среды. Поскольку скорость изменения энергии направленного движения единицы объема среды равна

$$\mathbf{u} \cdot \mathcal{F} = \rho^c \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}' + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = \rho^c \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}' + \mathbf{J} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}),$$

скорость нарастания тепловой энергии единицы объема среды за счет воздействия электрического и магнитного полей составит

$$\mathcal{P}_d \equiv \mathcal{P} - \mathbf{u} \cdot \mathcal{F} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}'. \quad (4.5b)$$

Этот член следует добавить в правую часть уравнения сохранения энергии (4.1в).

В случае проводящей сплошной среды нам пришлось ввести в основные уравнения сохранения четыре новые величины:  $\rho^c$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , и поэтому теперь необходимы дополнительные уравнения, чтобы получить полную систему уравнений. Плотность заряда  $\rho^c$  и плотность тока проводимости  $\mathbf{J}$  выражаются через концентрацию заряженных частиц  $n_s$  и их диффузионные скорости  $\mathbf{U}_s$  следующим

образом:

$$\rho^c = \sum_s e_s n_s, \quad (4.6a)$$

$$\mathbf{J} = \sum_s e_s n_s \mathbf{U}_s, \quad (4.6b)$$

где  $e_s$  — заряд частицы типа  $s$ , а суммирование проводится по всем типам частиц.

Диффузионные скорости зависят от различных факторов, которые могут вызывать диффузию, в том числе от полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , как говорилось ранее в § 3 данной главы и в гл. 2, § 13, а также от пространственных градиентов различных характеристик среды. Выражение для диффузионных скоростей, которое в символической форме имеет вид

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{U}_s [\mathbf{E}, \mathbf{B}, \nabla (\ )], \quad (4.7)$$

можно рассматривать как вытекающее из феноменологической или кинетической теории. (Выражение для  $\mathbf{U}_s$  при  $\mathbf{B} = 0$  дается в работе [9], а при  $\mathbf{B} \neq 0$  — в работе [6].) Концентрации компонент определяются уравнениями непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} n_s + \nabla \cdot n_s (\mathbf{u} + \mathbf{U}_s) = \dot{n}_s, \quad (4.8)$$

где  $\dot{n}_s$  — скорость образования частиц типа  $s$  в единице объема. Поскольку заряд сохраняется, мы имеем

$$\sum_s e_s \dot{n}_s = 0$$

и из уравнения (4.8) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho^c + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (4.9)$$

где  $\mathbf{j} = \rho^c \mathbf{u} + \mathbf{J}$  — полная плотность тока.

Плотность заряда и ток в среде играют роль источников электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{B}$  полей и определяют их поведение во времени в соответствии с уравнениями Ампера — Максвелла и Фарадея:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{j} \quad (4.10a)$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}. \quad (4.10b)$$

Электрическая индукция  $\mathbf{D}$  и напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$ , фигурирующие в уравнении (4.10a), в случае частично ионизован-

ных газов связаны с  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$  соотношениями

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (4.11a)$$

$$\mathbf{V} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (4.11b)$$

Здесь  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  — константы (гл. 6, § 2), которые называются диэлектрической проницаемостью и магнитной проницаемостью вакуума. Относительно аналогичных соотношений для других сред см. работу [10]. [Вообще говоря, соотношения (4.11) и выражение (4.7) можно рассматривать как вытекающие из феноменологической или микроскопической теории, и в этом смысле они аналогичны уравнениям (4.2).]

Взяв дивергенцию обеих частей уравнения (4.10a) и используя уравнение (4.9), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho^c) = 0.$$

Это уравнение означает, что если величины  $\mathbf{D}$  и  $\rho^c$  удовлетворяют условию

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho^c \quad (4.12a)$$

в некоторый начальный момент времени, то это условие будет выполняться всегда. Аналогично, взяв дивергенцию обеих частей уравнения (4.10b), мы получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0.$$

Это означает, что величина  $\mathbf{V}$  будет удовлетворять условию

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (4.12b)$$

всегда, если она удовлетворяла ему в некоторый начальный момент времени. Уравнения (4.10) и (4.12) содержат в себе уравнения Максвелла и являются основой электромагнитной теории. Вместе с уравнениями (4.6) — (4.9) и (4.11) и уравнениями сохранения для среды они образуют полную систему уравнений, описывающую взаимодействие проводящей среды с электрическим и магнитным полями.

## § 5. ДВУХТЕМПЕРАТУРНАЯ ПЛАЗМА

Во многих случаях температура электронного газа  $T_e$  отличается от температуры тяжелых частиц  $T$ . Удельная же электропроводность и другие коэффициенты в уравнениях движения зависят от  $T_e$ . Поэтому в таких случаях необходимо включить  $T_e$  в число переменных, характеризующих состояние газа, и рассмотреть еще одно уравнение, которым определяется температура электронов. В гл. 8, § 3 и 8, уравнение для энергии электронов выводится

на основе кинетической теории. В данном же параграфе мы выведем это уравнение эвристически, рассматривая газ как сплошную среду.

Каждую компоненту газовой смеси можно представить себе как отдельную среду, сосуществующую с другими компонентами. Каждая однокомпонентная среда будет описываться системой уравнений, выражающих законы сохранения для сплошных сред и по структуре аналогичных уравнениям сохранения (4.1), но содержащих добавочные члены, которые описывают взаимодействие между однокомпонентными средами.

Чтобы составить уравнение, выражающее закон сохранения энергии для электронного газа, можно начать с уравнения (4.1b). Для электронов имеем  $\rho = m_e n_e$  и  $e = 3kT_e/2m_e$ , так что левая часть уравнения (4.1b) запишется в виде

$$\frac{D}{Dt} \left( n_e \frac{3}{2} kT_e \right) + \left( n_e \frac{3}{2} kT_e \right) \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Первый член дает скорость изменения тепловой энергии электронов в единице объема. В правой части уравнения для энергии электронов будут следующие члены [уравнение (4.1b)]:

$$-\nabla \cdot \mathbf{q}_e - \rho_e \nabla \cdot \mathbf{u},$$

причем мы пренебрегли потерями на трение между электронами по сравнению с  $\rho_e$ . Здесь  $\mathbf{q}_e$  — поток тепла, переносимый электронами [он дается формулой (12.13a) из гл. 2 при  $\mathbf{V} = 0$  и формулами (4.12) или (4.14) из гл. 8 при  $\mathbf{V} \neq 0$ ]. В соответствии с уравнением (4.5b) в правую часть должен быть также включен член  $\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{E}$ , т. е. скорость увеличения тепловой энергии электронов в единице объема за счет электромагнитного поля.

Электронный газ может обмениваться энергией с другими компонентами газа за счет упругих и неупругих столкновений. Энергию, теряемую электронами в единице объема из-за упругих столкновений с тяжелыми частицами, можно найти, пользуясь формулой (7.11) из гл. 2; она равна

$$\sum_h \frac{2m_e}{m_h} \frac{3}{2} k (T_e - T) \bar{v}_{eh} n_{e,h}. \quad (5.1)$$

Здесь  $\bar{v}_{eh}$  — усредненная по энергии частота столкновений с передачей импульса между электроном и тяжелыми частицами типа  $h$  [формула (6.29) из гл. 2]. Если полную энергию, теряемую электронами (за единицу времени) в единице объема за счет неупругих процессов, обозначить через  $\dot{N}$ , то уравнение для энергии элект-

рошного газа можно записать, следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left( n_e \frac{3}{2} kT_e + \varepsilon_i \right) = & - \left( n_e \frac{5}{2} kT_e \right) \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q}_e + \\ & + \mathbf{J}_e \cdot \mathbf{E}' - \sum_h \frac{2m_e}{m_h} \bar{v}_{eh} n_e \frac{3}{2} k(T_e - T) - \dot{N}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Величина  $\dot{N}$  вычисляется в гл. 8, § 8, для случая неупругих столкновений, происходящих с атомами, которые имеют различные уровни электронного возбуждения и взаимодействуют энергетически только со свободными электронами, причем изменяют свою энергию только за счет испускания или поглощения фотона. В этом случае уравнение для энергии электронов примет вид

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left[ n_e \left( \frac{3}{2} kT_e + \varepsilon_i \right) \right] = & - n_e \left( \frac{5}{2} kT_e + \varepsilon_i \right) \nabla \cdot \mathbf{u} - \\ & - \nabla \cdot \left( \mathbf{q}_e - \frac{\varepsilon_i}{e} \mathbf{J}_e \right) + \mathbf{J}_e \cdot \mathbf{E}' - \sum_h \frac{2m_e}{m_h} \bar{v}_{eh} n_e \frac{3}{2} k(T_e - T) - \dot{R}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь  $\varepsilon_i$  — потенциал ионизации атома, а  $\dot{R}$  — локальная скорость потери энергии единицей объема плазмы за счет излучения. В случае когда относительное содержание многоатомных компонент в плазме велико, член  $\dot{N}$  в уравнении (5.2) должен быть очень большим, если  $T_e$  существенно отличается от  $T$ , и это позволяет судить о том, выполняется ли равенство  $T_e \approx T$ .

В случае однородной и стационарной плазмы уравнение (5.3) упрощается и принимает довольно обычный вид:

$$\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{E}' = \sum_h \frac{2m_e}{m_h} \bar{v}_{eh} n_e \frac{3}{2} k(T_e - T) + \dot{R}. \quad (5.4)$$

Это уравнение выражает то обстоятельство, что увеличение энергии электронов в единице объема, обусловленное действием электрического поля, уравновешивается потерей энергии за счет упругих столкновений с тяжелыми частицами и за счет испускания излучения.

### § 6. МГД-ПРИБЛИЖЕНИЕ

Выведенные выше уравнения движения для проводящих сплошных сред строго применимы во всех случаях, когда движение происходит с нерелятивистскими скоростями (т. е. при  $u^2 \ll c^2$ ), и, исходя из этих уравнений, отыскивают упрощения, возможные в том или ином частном случае. Очень часто можно, например пользоваться соотношением, которое связывает  $\mathbf{J}$  непосредственно с  $\mathbf{E}$  и другими полями, фактически миновать промежуточные ступени, соответствующие уравнениям (4.66) и (4.7). Такое соотношение называется

«обобщенным законом Ома», его можно рассмотреть как феноменологическую закономерность или как соотношение, выведенное на основании более элементарных соображений. Мы выведем этот закон для частично ионизованных газов в § 8. Сейчас же лишь отметим, что в некоторых простейших, но тем не менее весьма общих случаях закон Ома сводится к соотношению

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (6.1)$$

которое совпадает с уравнением (3.21a) при

$$\beta_e \ll 1. \quad (6.2)$$

Если предположить, что временной масштаб процессов образования заряженных частиц намного меньше временного масштаба макроскопических изменений, т. е. перейти к «пределу равновесности» [32], то уравнения непрерывности для компонент (4.8) сведутся к системе уравнений вида  $n_e = 0$ . В пределе равновесности плотности заряженных частиц зависят только от термодинамического состояния газа. Следовательно, удельная электропроводность также зависит только от термодинамических переменных, и в этом смысле закон Ома (6.1) применим не только к газам, но и к проводящим жидкостям. Если обозначить индексом с характерные значения всех величин, то для среды, подчиняющейся закону Ома (6.1), выполняется соотношение

$$E_c \sim u_c B_c. \quad (6.3)$$

Смысл этого соотношения в том, что электрические поля возникают в основном за счет индукции, т. е. из-за движения среды в поле  $\mathbf{B}$ . Из уравнений (1.4) и (6.3) следует, что магнитная индукция в системе координат, движущейся вместе со средой, связана с магнитной индукцией в лабораторной системе координат следующим преобразованием:

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}.$$

Мы уже говорили об одном ограничении, накладываемом на временной масштаб макроскопических изменений  $t_c$  для того, чтобы среда была в «химическом» равновесии. Как будет показано в § 8, для того чтобы обобщенный закон Ома для газа сводился к уравнению (6.1), величина  $t_c$  должна удовлетворять неравенству

$$t_c \gg \bar{v}_{eh} \tau, \quad (6.4)$$

где  $\bar{v}_{eh} \tau$  — средняя частота столкновений электронов с тяжелыми частицами. Наложим теперь другое ограничение на  $t_c$ , которое

<sup>1)</sup> Соотношение величин  $|\mathbf{E}|$  и  $|\mathbf{B}|$ , соответствующее формуле (6.3), иное, нежели в случае электромагнитного излучения, в котором (гл. 6, § 4) поля локально плоской волны связаны равенством  $|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$ , где  $c$  — скорость света.

фактически позволит нам пренебречь током смещения по сравнению с током проводимости в уравнении (4.10а). Поскольку

$$\frac{|\partial D/\partial t|}{|J|} \sim \frac{D_c}{t_c J_c} \sim \frac{\epsilon_0 E_c}{t_c \sigma_c E_c} = \frac{\epsilon_0}{t_c \sigma_c},$$

мы можем пренебречь током смещения в том случае, если ограничимся рассмотрением явлений, для которых

$$t_c \gg \frac{\epsilon_0}{\sigma_c}. \quad (6.5a)$$

Для газов  $\sigma_c \sim n_e e^2 / m_e \bar{v}_{eH}$  [формула (13.76) из гл. 2], и это условие может быть переписано следующим образом:

$$t_c \gg \frac{\bar{v}_{eH}}{\omega_p^2}, \quad (6.5b)$$

где  $\omega_p = (n_e e^2 / \epsilon_0 m_e)^{1/2}$  — плазменная частота [формула (5.5a) из гл. 3]. Объединив условия (6.4) и (6.5), получим

$$t_c \gg \omega_p^{-1}. \quad (6.6)$$

Из соотношений (6.5a) и (6.3) следуют два важных упрощения. Мы можем показать, во-первых, что токами смещения можно пренебречь по сравнению с токами проводимости и, во-вторых, что силой, действующей на среду вследствие того, что она имеет заряд, можно пренебречь по сравнению с силами, возникающими из-за токов [формула (4.4)]. Для доказательства второго утверждения оценим величину плотности заряда. На основании уравнения (4.12a) имеем

$$\rho^c \sim \frac{D_c}{u_c t_c} = \frac{\epsilon_0 E_c}{u_c t_c}. \quad (6.7)$$

Тогда

$$\frac{\rho^c |u|}{|J|} \sim \left( \frac{\epsilon_0 E_c}{u_c t_c} \right) \frac{u_c}{\sigma_c E_c} = \frac{\epsilon_0}{\sigma_c t_c} \ll 1 \quad (6.8)$$

и

$$\frac{\rho^c |E'|}{|J \times B|} \sim \left( \frac{\epsilon_0 E_c}{u_c t_c} \right) \frac{u_c B_c}{(\sigma_c E_c) B_c} = \frac{\epsilon_0}{\sigma_c t_c} \ll 1. \quad (6.9)$$

Изложенные выше предположения, взятые вместе, составляют, как говорят, магнитогидродинамическое (МГД) приближение. Суммируя наши результаты, мы получаем следующую полную систему уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \quad (6.10a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u u) = -\nabla \cdot p + J \times B, \quad (6.10b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u u) = -\nabla \cdot q - p; \quad \forall u + E' \cdot J, \quad (6.10u)$$

$$J = \sigma (E + u \times B), \quad (6.10r)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J, \quad (6.10d)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}. \quad (6.10e)$$

Следует помнить, что эти уравнения дополняются уравнениями для  $p$ ,  $q$ ,  $\epsilon$  и  $\sigma$  и что в качестве начального условия берется соотношение

$$\nabla \cdot B = 0. \quad (6.10ж)$$

Отметим, что плотность заряда  $\rho^c$  не входит в качестве переменной в уравнения (6.10). В то время как в уравнении электростатики (4.12a) электрическое поле определяется через плотность заряда, в МГД-уравнениях мы имеем обратное соотношение. Теперь считается, что электрическое поле определяется законом Ома (6.10r) и условием

$$\nabla \cdot J = 0, \quad (6.11)$$

которое следует из уравнения (6.10д). Если электрическое поле известно, то для вычисления  $\rho^c$  можно воспользоваться уравнением Максвелла (4.12a). Отметим также, что уравнением (6.10д) определяется только та часть  $B$ , которая индуцирована токами, существующими в самой среде; любое же внешнее поле  $B$  создается внешними по отношению к среде токами, и в среде оно соответствует решению однородного уравнения  $\nabla \cdot B = 0$ .

МГД-уравнения (6.10) — это в некотором смысле простейшая математическая модель проводящей среды, взаимодействующей с электромагнитным полем, и они легли в основу очень широкого круга исследований. Чтобы понять, какое огромное количество физических явлений объемлют эти уравнения, достаточно представить себе, что явления, наблюдающиеся в обычных газах и жидкостях, охватываются лишь сравнительно небольшой подсистемой полного набора решений уравнений (6.10). Подробное исследование известных решений этих уравнений не является нашей целью в данной книге. Этому вопросу посвящены, например, монографии [10, 11, 15] и др. В следующем параграфе мы рассмотрим одно из применений этих уравнений. В оставшейся же части данного параграфа мы проанализируем некоторые общие физические следствия, вытекающие из МГД-уравнений.

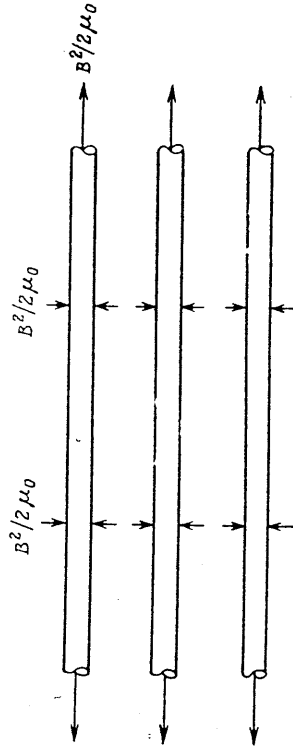
Рассмотрим сначала член, описывающий объемную электромагнитную силу, в уравнении для импульса среды. Выразив  $J$  из уравнения (6.10д) и взяв уравнение (6.10ж), можно показать, что

$$J \times B \equiv \nabla \cdot T, \quad (6.12a)$$

где  $T$  — это тензор  $T_{\beta\gamma}$  со следующими компонентами:

$$T_{\beta\gamma} = \frac{1}{2\mu_0} \delta_{\beta\gamma} + \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (6.126)$$

По аналогии со структурой члена тензора давления в уравнении для импульса среды объемную электромагнитную силу можно интерпретировать еще и как электромагнитное напряжение — так называемое максвелловское напряжение.



Фиг. 10. Линии магнитной индукции и максвелловские напряжения.

Приняв такую интерпретацию, возьмем систему отсчета, ось  $x$  которой параллельна силовой линии магнитной индукции; в этом случае имеем

$$T_{\beta\gamma} = \begin{pmatrix} B^2/2\mu_0 + B^2/\mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & -B^2/2\mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & -B^2/2\mu_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B^2/2\mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & -B^2/2\mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & -B^2/2\mu_0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, напряжения соответствуют натяжению  $B^2/2\mu_0$  вдоль силовых линий магнитной индукции и такому же по величине давлению, нормальному к силовым линиям  $B$  (фиг. 10). Согласно же первой форме записи матрицы  $T_{\beta\gamma}$ , можно сказать, что напряжения соответствуют однородному давлению  $B^2/2\mu_0$  и натяжению  $B^2/\mu_0$  вдоль силовых линий  $B$ . Поскольку часто бывает удобна аналогия между жидкостью и полями максвелловских напряжений, последняя интерпретация более предпочтительна. При таком подходе, например, кольцевые силовые линии магнитной индукции в плоскости, перпендикулярной длинной проволоке с током, можно рассматривать как «упругие обручи», которым градиент радиального магнитного давления не дает сжаться вокруг проволоки.

Рассмотрим теперь динамическое уравнение для магнитной индукции: уравнение (6.10e). Выразив  $\mathbf{E}$  из закона Ома (6.10г) и  $\mathbf{J}$  из уравнения (6.10e), получаем

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \times \left( \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{\mu_0 \sigma} \right), \quad (6.13)$$

Это уравнение описывает изменение магнитной индукции в пространстве и во времени. Чтобы выяснить смысл уравнения (6.13), предположим вначале, что среда неподвижна, т. е.  $\mathbf{u} = 0$ , и что электропроводность однородна. Пользуясь соотношением  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , приведем уравнение (6.13) к виду

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (6.14a)$$

Это уравнение имеет вид уравнения диффузии и показывает, что в неподвижном проводнике магнитная индукция проявляет тенденцию диффундировать в пространстве и затухать во времени.

Предположим теперь, что  $\mathbf{u} \neq 0$ , а электропроводность стремится к бесконечности. Тогда уравнение (6.13) сведется к следующему:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (6.14b)$$

Для интерпретации этого уравнения посмотрим, как поток магнитной индукции

$$\Phi(t) = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

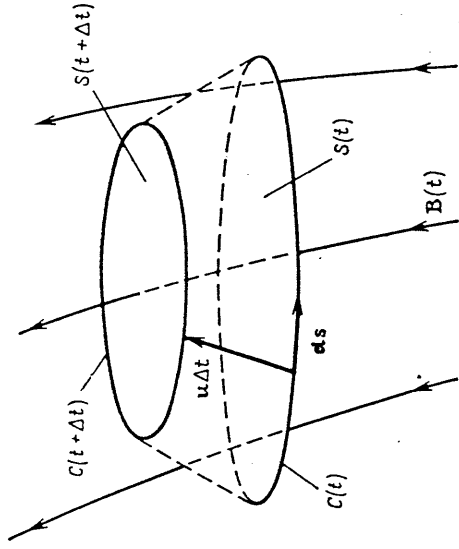
через площадку  $S$ , ограниченную замкнутой кривой  $C$ , связан с изменением потока среды во времени. Как схематически показано на фиг. 11, поток  $\Phi(t)$  изменяется по двум причинам; во-первых, поскольку изменяется  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$ , и, во-вторых, поскольку изменяется площадка  $S = S(t)$ , ограниченная кривой  $C = C(t)$ . В течение промежутка времени  $\Delta t$  каждая частица среды на кривой  $C(t)$  пройдет расстояние  $\mathbf{u} \Delta t$ , так что элемент длины  $d\mathbf{s}$  вдоль  $C(t)$  охватит векторный элемент площади  $[d\mathbf{s} \times (\mathbf{u} \Delta t)]$ . Следовательно, уменьшение потока, связанное с движением среды за время  $\Delta t$ , равно

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot [d\mathbf{s} \times (\mathbf{u} \Delta t)] = \Delta t \oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = \Delta t \iint_S [\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] \cdot d\mathbf{S},$$

а полная скорость изменения потока составляет

$$\frac{d\Phi}{dt} = \iint_S \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \right] \cdot d\mathbf{S}. \quad (6.15)$$

В применении к уравнению (6.146) результат (6.15) означает, что в бесконечно проводящей среде магнитные силовые трубки сжимаются вместе со средой. Этот важный вывод имеет следующий простой физический смысл. Поскольку электрическое поле, индуцируемое в идеальном проводнике, должно равняться нулю, проводник не должен пересекать силовые линии  $B$ , а поэтому они должны двигаться со средой.



Фиг. 11. Поток магнитной индукции через перемещающийся контур.

Эти два вывода, заключающиеся в том, что в бесконечно проводящей среде магнитные силовые трубки «вморожены» в среду и что они находятся под натяжением  $B^2/\mu_0$ , навели Альфвена [1]<sup>1)</sup> на мысль об аналогии с натянутыми струнами. По силовым линиям магнитной индукции в бесконечно проводящей среде, точно так же как и по натянутым струнам, бегут поперечные волны с альфвеновской скоростью

$$u_A \equiv \sqrt{\frac{B^2}{\mu_0 \rho}}, \quad (6.16)$$

которая полностью соответствует классической теории натянутой струны.

В общем случае нестационарной среды с конечной электропроводностью магнитная индукция будет изменяться как в результате конвекции вместе со средой, так и за счет диффузии через нее. Эти два механизма представлены двумя членами в правой части уравнения (6.13). Если  $L_c$  — характерный пространственный масштаб макроскопических изменений, то отношение эффектов в моро-

<sup>1)</sup> См. также [35].

женности к диффузионным характеризуется безразмерным параметром

$$R_m \equiv \frac{u_c L_c}{(\mu_0 \sigma_c)^{-1}} = u_c L_c \sigma_c \mu_0. \quad (6.17)$$

Величина  $R_m$  называется магнитным числом Рейнольдса по аналогии с обычным числом Рейнольдса из гидродинамики

$$R = \frac{u_c L_c}{\eta \rho^{-1}}.$$

[В классической гидродинамике ротор величины  $\nabla \times u$  для несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению, идентичному по форме уравнению (6.13), за исключением того, что вместо  $(\mu_0 \sigma_c)^{-1}$  в него входит кинематическая вязкость  $\eta \rho^{-1}$ . По аналогии с термином «кинематическая вязкость», употребляемым в применении к члену  $\eta \rho^{-1}$ , величину  $(\mu_0 \sigma_c)^{-1}$  иногда называют «магнитной вязкостью».] Характерная величина магнитной индукции, создаваемой токами в среде, может быть получена из уравнений (6.10д) и (6.10г):

$$B_c^{(\text{шд})} \sim L_c \mu_0 J_c = L_c \mu_0 \sigma_c u_c B_c.$$

Следовательно, магнитное число Рейнольдса можно интерпретировать так же, как меру отношения магнитной индукции, создаваемой токами в среде, к полной. В случае потоков с малыми  $R_m$  конвекционный перенос силовых линий  $B$  средой незначителен и магнитной индукцией, создаваемой токами в среде, можно пренебречь. Параллельно определению  $R_m$  как меры влияния потока на  $B$  мы можем со ссылкой на уравнение (6.10б) определить безразмерный параметр магнитного взаимодействия<sup>1)</sup>

$$S \equiv \frac{L_c \sigma_c B_c^2}{\rho_c u_c} \quad (6.18)$$

как меру влияния  $B$  на поток. Точнее говоря, параметр магнитного взаимодействия есть мера отношения пондеромоторной силы  $J \times B$  к инерционной силе. Значения  $R_m$  и  $S$  для ряда плазменных объектов приведены в табл. 1. В большинстве типов лабораторной плазмы величины  $R_m$  и  $S$  обычно меньше единицы, хотя и значения  $S$ , превышающие единицу, нередки.

Можно ввести и ряд других безразмерных параметров, но все они будут комбинациями чисел  $R_m$  и  $S$  и безразмерных параметров обычной гидродинамики. Например, число Гартмана

$$H \equiv L_c B_c \left( \frac{\sigma_c}{\eta_c} \right)^{1/2},$$

которое является мерой отношения пондеромоторной силы  $J \times B$  к силам вязкости, может быть записано как  $H = (SR)^{1/2}$ . Анало-

<sup>1)</sup> Число Стоурта. — Прим. перев.

глице число Альфранга

$$A \equiv \frac{u_c}{(u_A)_c}$$

может быть записано как  $A = (R_m S)^{1/2}$ . Число Лундквиста

$$L \equiv L_c \sigma_c B_c \left( \frac{\mu_0}{\rho_c} \right)^{1/2}$$

которое равно магнитному числу Рейнольдса при альфреновской скорости, записывается как  $L = (SR_m)^{1/2}$ .

**Задача 6.1.** Между двумя коаксиальными цилиндрами радиусами  $r_1$  и  $r_2$  приложена разность потенциалов  $\phi$ . Между цилиндрами находится плазма, вдоль оси системы приложено магнитное поле  $B$ . Вычислите угловую скорость вращения плазмы как функцию радиуса в стационарном состоянии, пренебрегая вязкостью и трением на стенках при  $r_1$  и  $r_2$ .

**Задача 6.2.** В открытый сосуд, содержащий жидкий сплав натрия с калием NaK, помещена вертикальная труба прямоугольного сечения с открытыми концами. Плотность NaK равна  $0,8 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ , а удельное сопротивление  $4 \cdot 10^{-7} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ . На дне и на поверхности жидкости напротив концов трубы имеются электроды длиной  $10 \text{ см}$ . Через жидкость между электродами пропускается ток, и имеется поле  $B$ , перпендикулярное направлению тока. Вычислите значения  $B$  и  $J$ , необходимые для того, чтобы вытолкнуть расплав NaK на высоту  $10 \text{ м}$ . Каким будет при этом расход электроэнергии на единицу объема?

**Задача 6.3.** Градиент давления, обусловленный трением, в случае стационарного потока плазмы через короткий отрезок трубы постоянного сечения составляет  $100 \text{ кПа} \cdot \text{м}^{-1}$ . В направлении перпендикулярном потоку, приложено поле магнитной индукции, равное  $2 \text{ Вб} \cdot \text{м}^{-2}$ . Какой должна быть плотность тока (в амперах на квадратный сантиметр) для поддержания постоянного потока через этот отрезок трубы? Считайте поток одномерным и адiabатическим и пренебрегите полем магнитной индукции, создаваемым током. Нарисуйте схему относительного расположения векторов скорости, плотности тока и магнитной индукции.

**Задача 6.4.** Покажите, что  $(\mathbf{J} \times \mathbf{V})_y = \partial T_{\beta y} / \partial x_{\beta}$ , где  $T_{\beta y} = -(B^2/2\mu_0) \delta_{\beta y} + V_{\beta} V_y / \mu_0$ .

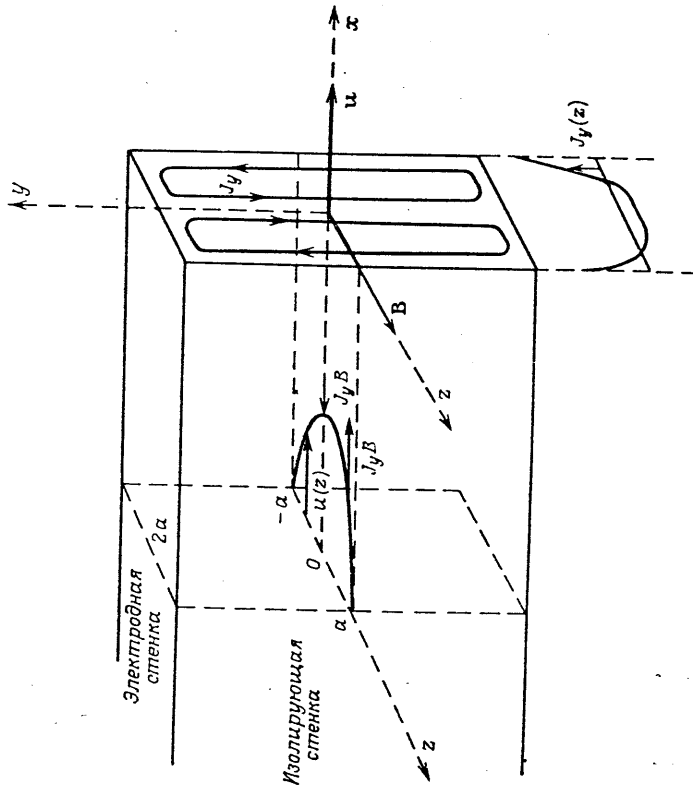
**Задача 6.5.** Исходя из классического выражения для скорости распространения поперечной волны по натянутой струне, выведите формулу для альфреновской скорости  $u_A = (B^2/\mu_0 \rho)^{1/2}$ .

Система	$\sigma_c, \text{ Ом} \cdot \text{м}^{-1}$	$\rho_c, \text{ кг/м}^3$	$B_c, \text{ Т}$	$L_c, \text{ м}$	$u_c, \text{ м/с}$	$R_m$	S
Лабораторные	10	$10^{-1}$	3	$10^{-1}$	$10^{-1}$	$10^3$	$10^{-1}$
МЛ-генератор (эксп.)	$5 \cdot 10^3$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^3$	$10^3$	$5 \cdot 10^{-2}$
Дуговой нагреватель	$5 \cdot 10^3$	$10^{-6}$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^3$	$10^3$	3
МЛ-двигатель	$10^2$	$10^{-4}$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^3$	$5 \cdot 10^4$	$10^{-3}$
Тлеющий разряд	$10^2$	$10^{-4}$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^3$	$10^3$	$10^{-3}$
Управляемые термоядерные реакции (эксп.)	$10^5$	$10^{-6}$	1	$10^{-1}$	$10^4$	$10^4$	$10^5$
$T_e = 10^6 \text{ К}$ , $n_e = 10^{21} \text{ м}^{-3}$	$9 \cdot 10^5$	$1,4 \cdot 10^4$	1	$10^{-2}$	$10^2$	$10^2$	$5 \cdot 10^{-3}$
Генератор на жиклом Na	$10^7$	$9,3 \cdot 10^2$	2	$10^{-2}$	$10^2$	$10^2$	4
Астрофизические	$10^5$	$10^4$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^3$
Ядро Земли	$10^5$	$10^4$	$3 \cdot 10^{-5}$	$10^{-4}$	$10^6$	$10^6$	10
Ионосфера	10	$10^{-9}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^3$	$10^3$	$10^3$
Солнечная атмосфера	$10^3$	$10^{-6}$	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^4$	$10^4$	$10^5$
Солнечная корона	$10^6$	$10^{-15}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^6$	$10^6$	$10^{15}$
Межпланетное пространство	$10^5$	$10^{-21}$	$10^{-9}$	$10^{-9}$	$10^5$	$10^5$	$10^{14}$
Межзвездное пространство	$10^3$	$10^{-21}$	$10^{-10}$	$10^{-10}$	$10^4$	$10^4$	$10^{21}$

Таблица 1. Типичные значения магнитного числа Рейнольдса  $R_m$  и параметра магнитного взаимодействия S

## § 7. ГАРТМАНОВСКОЕ ТЕЧЕНИЕ

В данном параграфе мы остановимся на одном типе МГД-потока, соответствующем обобщению плоского Пуазейлева течения в классической механике жидкостей. Мы будем рассматривать стационарный ламинарный поток проводящей жидкости в канале прямоугольного поперечного сечения с большим отношением сторон, находящийся в однородном постоянном поле магнитной индукции  $B$ ,



Фиг. 12. Гартмановский поток, разомкнутая цепь.

направленном перпендикулярно широким стенкам канала (фиг. 12). Широкие стенки будем называть изолирующими, а узкие — электродными. Расстояние между изолирующими стенками равно  $2a$ . Рассчитаем поток между изолирующими стенками в предельном случае, когда электродные стенки раздвинуты до бесконечности. МГД-поток такого типа впервые был рассмотрен Гартманом [7]. В отсутствие поля  $B$  и при условии, что скорость жидкости на изолирующих стенках равна нулю, получаемся хорошо известный результат, а именно, что профиль скорости есть парабола.

Расположим ось  $x$  вдоль направления течения, а ось  $z$  в направлении поля  $B$ . Можно заранее сказать, что скорость жидкости

будет иметь вид  $u = [u(z), 0, 0]$  и что все переменные, кроме давления, будут зависеть только от  $z$ . Движение проводящей жидкости поперек поля  $B$  приведет к появлению индуцированного электрического поля вдоль отрицательного направления оси  $y$ , т. е.  $-uB$ , и вызовет ток

$$J_y = \sigma (E_y - uB) \quad (7.1)$$

в соответствии с законом Ома (6.10г).

Из уравнения (6.10е) мы имеем  $\partial E_y / \partial z = 0$ , откуда следует, что электрическое поле  $E_y$  постоянно. Величина  $E_y$  зависит от граничных условий, задаваемых внешней цепью на электродных стенках. Энергия может либо подводиться к потоку жидкости, либо отводиться от него в зависимости от того, как соединены электроды — через внешнее сопротивление или через внешний источник напряжения. В первом случае система работает как генератор, а во втором — как насос или ускоритель. Хотя анализ этих случаев не представляет трудностей [29, стр. 341; 10, стр. 167], мы для простоты ограничимся случаем разомкнутой цепи, когда выполняется условие

$$\int_{-a}^a J_y(z) dz = 0. \quad (7.2)$$

Обозначая усреднение по  $z$  горизонтальной чертой, из уравнений (7.1) и (7.2) находим, что электрическое поле при разомкнутой цепи равно

$$E_y = \frac{u\sigma}{\sigma} B. \quad (7.3)$$

Вблизи центра канала, где скорость  $u(z)$  максимальна и  $uB$  превышает  $E_y$ , ток  $J_y$  будет отрицательным. Вблизи же изолирующих стенок  $u(z) \rightarrow 0$  и ток  $J_y$  будет положительным. В результате мы будем иметь ток в виде замкнутых петель (фиг. 12).

Влияние гартмановских токов на профиль скорости жидкости можно качественно объяснить, рассматривая ponderomotive силу  $(J \times B)_x = J_y B$ . В центральной части канала эта сила отрицательна и действует так, чтобы затормозить жидкость. Вблизи же изолирующих стенок она положительна и, следовательно, ускоряет жидкость. В результате профиль скорости оказывается более близким к прямоугольному, чем парабола: он плоский в центре сечения канала и быстро спадает вблизи изолирующих стенок (фиг. 13). При заданном массовом потоке вследствие большего напряжения трения у стенок в гартмановском потоке должны быть большие градиенты давления в направлении потока.

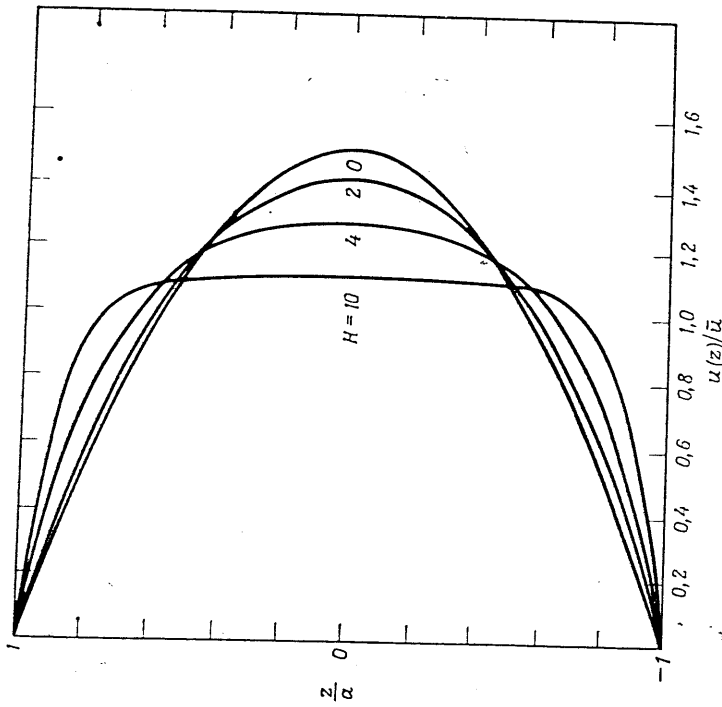
Ток  $J_y$  создает также индуцированное магнитное поле  $B_x$ , направленное вдоль оси  $x$ . Это поле можно найти, решив уравне-



ишс (6.10л)

$$\frac{dB_x}{dz} = \mu_0 j_y \quad (7.4)$$

совместно с условием симметрии, согласно которому в центре сечения канала  $B_x = 0$ . При малых магнитных числах Рейнольдса этим индуцированным полем обычно можно пренебречь.



Фиг. 13. Профили скорости гартмановского потока.

Если предположить, что поток несжимаемый, то уравнение (6.10а) автоматически будет выполняться, а из уравнения (6.10б) мы получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} = J_y B + \frac{d}{dz} \left( \eta \frac{du}{dz} \right), \quad (7.5а)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -J_y B_x. \quad (7.5б)$$

Поскольку правые части этих уравнений представляют собой функции координаты  $z$ , давление должно иметь вид

$$p = p_0 + p_x x + p'(z), \quad (7.6)$$

где  $p_0$  и  $p_x$  — константы. Член  $p_x x$  — это сила, движущая поток; член  $p'(z)$  — сила, уравновешивающая поперечную силу  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$  в направлении оси  $z$ , его можно найти из уравнения (7.5б). Комбинируя уравнения (7.1) и (7.5а), получаем уравнение профиля скорости

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{\sigma B^2}{\eta} u = - \frac{\sigma B E_y - p_x}{\eta}. \quad (7.7)$$

Чтобы найти полное решение, предположим, следуя Гартману, что электропроводность однородна. Тогда уравнение (7.7) станет линейным, но данное предположение, справедливое в случае жидких металлов, как мы увидим, не очень хорошо выполняется в случае плазмы. Общее решение уравнения (7.7) имеет вид

$$u(z) = C_1 \operatorname{ch} \frac{Hz}{a} + C_2 \operatorname{sh} \frac{Hz}{a} + \frac{\sigma B E_y - p_x}{\sigma B^2}.$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  — константы интегрирования, а величина

$$H \equiv aB \left( \frac{\sigma}{\eta} \right)^{1/2} \quad (7.8)$$

— число Гартмана для этого случая. Накладывая условие  $u(a) = u(-a) = 0$ , получаем для профиля скорости уравнение

$$u(z) = \frac{\sigma B E_y - p_x}{\sigma B^2} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch}(Hz/a)}{\operatorname{ch} H} \right). \quad (7.9а)$$

Его можно переписать в безразмерном виде:

$$\frac{u(z)}{u} = H \frac{\operatorname{ch} H - \operatorname{ch}(Hz/a)}{H \operatorname{ch} H - \operatorname{sh} H}, \quad (7.9б)$$

где

$$\bar{u} = \frac{\sigma B E_y - p_x}{\sigma B^2} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} H}{H \operatorname{ch} H} \right) \quad (7.10)$$

— средняя скорость, вычисленная прямо исходя из формулы (7.9а). Соответствующий профиль плотности тока может быть записан так:

$$\frac{J_y(z)}{\sigma \mu B} = 1 - \frac{u(z)}{u}. \quad (7.11)$$

Несколько профилей скорости, вычисленных по формуле (7.9б), представлены на фиг. 13. Как и предполагалось, при возрастании  $H$  профиль скорости становится более плоским.

При экспериментальном исследовании гартмановского течения чаще всего изучают зависимость напряжения трения  $\tau_w \equiv [\eta du/dz]_w$  на изолирующей стенке от поля  $B$ . Напряжение трения можно связать с градиентом давления, проинтегрировав уравнение (7.5а) в пределах от  $z = -a$  до  $z = a$ . В условиях разомкнутой цепи (7.2),

замечая, что функция  $J_y(z)$  симметрична относительно точки  $z = 0$ , получаем

$$\tau_{10} = -\alpha p_x. \quad (7.12)$$

В случае однородной электропроводности мы имеем  $E_y = \bar{u}B$ , и тогда из уравнения (7.10) следует, что

$$-p_x = \sigma \bar{u} B^2 \frac{\text{th } H}{H - \text{th } H}. \quad (7.13a)$$

В отсутствие поля  $B$ , разлагая правую часть равенства (7.13a) по степеням малого параметра  $H$ , получаем

$$-p_x (B=0) = \sigma \bar{u} B^2 \frac{3}{H^2} = \frac{3\bar{u}\eta}{a^2}. \quad (7.13b)$$

Следовательно, относительный прирост напряжения трения на стенке, обусловленный действием поля  $B$ , дается выражением

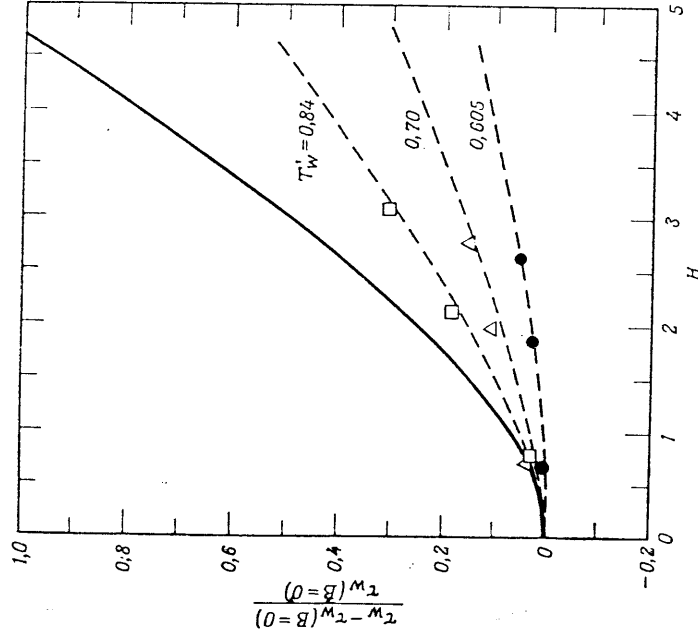
$$\frac{\tau_w - \tau_w(B=0)}{\tau_w(B=0)} = \frac{H^2 \text{th } H}{3(H - \text{th } H)} - 1. \quad (7.14)$$

Сплошной кривой на фиг. 14 показана теоретическая зависимость относительного прироста напряжения трения на стенке от числа Гартмана, соответствующая уравнению (7.14). Результаты измерений, проведенных на ламинарных потоках ртути (см. работу [8] и др.), хорошо согласуются с этой кривой. Штриховые кривые на фиг. 14 относятся к измерениям на ламинарных дозвуковых потоках плазмы продуктов сгорания с присадками натрия при атмосферном давлении [27]. Параметр  $T_w'$  — это отношение температуры стенки к средней температуре плазмы. При понижении температуры стенки влияние поля  $B$  на напряжение трения на стенке заметно уменьшается. Это объясняется тем, что вследствие уменьшения электропроводности плазмы, соприкасающейся с изолирующей стенкой, уменьшается сила вихревых гартмановских токов, а потому и ослабевает взаимодействие с полем  $B$ . Когда температура стенки меньше приблизительно половины средней температуры плазмы, влияние поля  $B$  на напряжение трения на стенке пренебрежимо мало.

Отметим, что в случае турбулентных потоков зависимость напряжения трения на стенке от поля  $B$  может оказаться совсем иной, нежели в случае ламинарных потоков. В турбулентных потоках при некоторых условиях напряжения трения на стенке фактически подымаются при средних значениях числа Гартмана. Объясняется это тем, что поле  $B$  стремится подавить турбулентное движение и в связи с этим может действовать так, чтобы уменьшить напряжение трения на стенке. Вихревые токи, наводимые в элементах объема турбулентной жидкости, пересекающих силовые линии магнитного поля  $B$ , взаимодействуют с полем  $B$  так, чтобы ослабить турбулентное движение. Следовательно, гартмановские

токи и турбулентные вихревые токи, взаимодействуя с полем  $B$ , дают противоположные вклады в напряжение трения на стенке.

При оценке влияния, оказываемого неоднородностью электропроводности на гартмановские токи в плазме, необходимо различ-



Фиг. 14. Относительное возрастание напряжения трения на стенке при увеличении числа Гартмана.

Сплошная кривая — теоретическая для ламинарного гартмановского потока. Штриховыми линиями обозначены результаты измерений [27], проведенных на плазме продуктов сгорания с присадками при разных отношениях температуры стенки к средней температуре смеси ( $T_w'$  — число Рейнольдса с учетом гидравлического диаметра канала) в экспериментальных точках равнялось 1200.

чать, находится ли газ в химическом равновесии или же присутствуют неравновесные условия. Плазма продуктов сгорания, исследованная в работе [27], может служить примером равновесной плазмы, электропроводность которой прямо связана с температурой тяжелых частиц. Понижение температуры стенок в этом случае приводит к уменьшению электропроводности, а это в свою очередь ведет к уменьшению гартмановского тока. В плазме же инертных газов температурой гартмановского тока. В плазме же инертных газов температурой тяжелых частиц. В работе [3] эти величины связаны в ламинарном граничном слое аргоновой плазмы с присадками калия при атмосферном давлении, текущей по охлаждаемой поверх-

ности. Измерения показали, что даже в отсутствие электрических токов температура и плотность электронов могут немного превышать равновесные значения. Джоулево тепло, выделяемое гартмановским током в граничном слое, должно вызывать дальнейшее возрастание этих величин, а следовательно, и электропроводности. В неравновесных условиях электропроводность в граничном слое вполне может превышать электропроводность в центральной части, даже если стенки охлаждаются. Таким образом, параметры, характеризующие гартмановское течение в неравновесной плазме, могут быть больше предсказываемых на основании предположения об однородной проводимости. Свидетельством тому являются большие скорости переноса тепла на изолирующую стенку, отмеченные в работах [4, 20].

В случае ламинарного гартмановского течения в жидкостях с постоянными характеристиками уравнения движения с учетом параметра Холла в законе Ома могут быть полностью решены [29, стр. 370]. Качественно влияние параметра Холла объяснить довольно просто. Поскольку поперечная проводимость, даваемая формулой (3.17а), уменьшается при учете параметра Холла, гартмановский ток в направлении оси  $y$  (см. ранее) понижается; поэтому профиль скорости  $u(z)$  приближается к паузейлеву профилю и напряжение трения на стенке уменьшается. Кроме того, теперь в направлении оси  $x$  может существовать холловский ток  $J_x(z)$ . Он взаимодействует с полем  $B$ , и в результате возникает поперечный поток жидкости  $v(z)$  в направлении оси  $y$ . Холловский ток создает также индуцированное магнитное поле  $B_y(z)$ , направленное вдоль оси  $y$ .

**Задача 7.1.** Найдите выражение для полного гартмановского тока в одном направлении в жидкости с однородной электропроводностью. Вычислите силу этого тока (в амперах) в случае, когда расстояние между стенками составляет 5 см, вязкость —  $7,6 \cdot 10^{-5}$  Па·с; удельная электропроводность —  $8 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ , магнитная индукция — 2,6 Т, средняя скорость —  $500 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ .

## § 8. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ОМА

Плотность тока  $\mathbf{J}$  в проводящей среде зависит, вообще говоря, не только от электрического поля  $\mathbf{E}'$ , как обычно бывает в случае твердых тел, но и от различных параметров среды. Уравнение, выражающее эту зависимость, называется «обобщенным законом Ома». Примером могут служить соотношения (3.21) для слабо ионизованной плазмы. В данном параграфе мы изложим более общий подход к выводу соотношений такого типа.

Мы будем считать среду сплошной, как говорилось в § 4. Каждую компоненту плазмы будем рассматривать как отдельную жидкость,

сосуществующую с жидкостями других компонент. Уравнения движения для каждой из жидкостей в приближении сплошной среды по своей структуре во всем аналогичны уравнениям движения (4.1), кроме дополнительных членов, учитывающих взаимодействия жидкостей при движении одной из них через другую. В § 4 нас интересовало уравнение для энергии, но теперь нас будет интересовать уравнение для импульса.

В соответствии с уравнением (4.16) уравнение для импульса, соответствующее компоненте  $s$ , может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s \mathbf{u}_s) + \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{u}_s \mathbf{u}_s) = -\nabla \cdot \mathbf{p}_s^* + e_s n_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) - \mathcal{M}_s. \quad (8.1)$$

Здесь  $\rho_s = m_s n_s$  — плотность компоненты  $s$ , а  $\mathbf{u}_s$  — ее скорость, даваемая формулой (6.2) из гл. 2. Величина  $e_s n_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B})$  есть объемная электромагнитная сила, получаемая усреднением выражения (1.1); ее нужно учитывать, если частицы компоненты  $s$  несут на себе заряд  $e_s$ . В кинетической теории (гл. 7) тензор давления  $\mathbf{p}_s^*$  компоненты  $s$  следующим образом выражается через среднюю скорость частиц:

$$\mathbf{p}_s^* \equiv \rho_s \int (\mathbf{c} - \mathbf{u}_s) f_s(\mathbf{c}) d^3c = \rho_s (\mathbf{c} - \mathbf{u}_s) (\mathbf{c} - \mathbf{u}_s)_s.$$

Для столкновительных газов вместо  $\mathbf{p}_s^*$  принято пользоваться величиной [формула (2.66) из гл. 7]

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_s &\equiv \rho_s (\mathbf{c} - \mathbf{u}) (\mathbf{c} - \mathbf{u})_s = \\ &= \rho_s (\mathbf{c} - \mathbf{u}_s + \mathbf{U}_s) (\mathbf{c} - \mathbf{u}_s + \mathbf{U}_s)_s = \mathbf{p}_s^* + \rho_s \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Здесь  $\mathbf{U}_s = \mathbf{u}_s - \mathbf{u}$  — диффузионная скорость компоненты  $s$ . В рамках приближений, которые будут сделаны ниже, различия между  $\mathbf{p}_s^*$  и  $\mathbf{p}_s$  нет. Тензор давления для газа как целого имеет вид

$$\mathbf{p} \equiv \sum_s \mathbf{p}_s. \quad (8.3)$$

Столкновительный член  $\mathcal{M}_s$  в уравнении (8.1) представляет собой среднюю скорость, с которой теряет импульс единица объема  $s$ -компоненты в результате столкновений ее частиц с частицами других компонент [ср. с формулой (3.106) из гл. 7]. Строго говоря, столкновительный член нужно вычислять на основе кинетической теории (гл. 7). Достаточно же удовлетворительные приближенные результаты можно получить более простым способом, исходя из выражения [формула (7.16) из гл. 2] для среднего импульса, теряемого при одном упругом столкновении частиц двух разных типов. Так, средняя скорость потери импульса частицей типа  $s$  на единицу объема в результате упругих столкновений с частицами типа  $r$  равна

$$\mathcal{M}_{sr} \approx n_s \bar{v}_{sr} m_{sr} (\mathbf{U}_s - \mathbf{U}_r). \quad (8.4)$$

Здесь,  $m_{sr} = m_e m_r / (m_e + m_r)$  — приведенная масса,  $n \vec{v}_{sr}$  —  $n n_r \vec{v}_{sr}$  — средняя частота столкновений с передачей импульса между частицами типа  $s$  и  $r$  [формула (6.29) из гл. 2].

В дальнейшем мы будем для простоты рассматривать трехкомпонентную плазму, состоящую из электронов, однозарядных положительных ионов и нейтральных частиц. Используя предыдущие уравнения, запишем уравнения для импульсов этих трех компонент следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} m_e n_e \mathbf{u}_e + \nabla \cdot m_e n_e (\mathbf{u}_e \mathbf{u}_e - \mathbf{U}_e \mathbf{U}_e) &= \\ &= -en_e (\mathbf{E}' + \mathbf{U}_e \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \rho_e - n_e m_e \bar{v}_{ei} (\mathbf{U}_e - \mathbf{U}_i) - \\ &\quad - n_e m_e \bar{v}_{en} (\mathbf{U}_e - \mathbf{U}_n), \end{aligned} \quad (8.5a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} m_i n_i \mathbf{u}_i + \nabla \cdot m_i n_i (\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i - \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i) &= \\ &= en_i (\mathbf{E}' + \mathbf{U}_i \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \rho_i - n_i m_e \bar{v}_{ie} (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_e) - \\ &\quad - n_i m_i n_i \bar{v}_{in} (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_n), \end{aligned} \quad (8.5b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} m_n n_n \mathbf{u}_n + \nabla \cdot m_n n_n (\mathbf{u}_n \mathbf{u}_n - \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n) &= \\ &= -\nabla \cdot \rho_n - n_n m_e \bar{v}_{ne} (\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_e) - n_n m_n \bar{v}_{ni} (\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_i). \end{aligned} \quad (8.5в)$$

В такой форме эти уравнения не очень удобны, поскольку они содержат в явном виде плотности и диффузионные скорости заряженных частиц, а не плотности заряда и тока

$$\rho^c = e (n_i - n_e) \quad (8.6a)$$

$$\mathbf{J} = e (n_i \mathbf{U}_i - n_e \mathbf{U}_e), \quad (8.6б)$$

которые фигурируют в уравнениях электродинамики. Ниже мы покажем, каким образом из уравнений (8.5) можно получить более удобные соотношения. Вначале отметим, что если эти три уравнения сложить, то перекрестные члены, учитывающие взаимодействия, взаимно уничтожатся и мы получим обычное уравнение для импульса [ср. уравнения (4.16) и (4.4)]

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u + \nabla \cdot (\rho u u) = -\nabla \cdot \rho + \rho^c \mathbf{E}' + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (8.7)$$

Здесь мы воспользовались соотношениями

$$n_s \bar{v}_{sr} = n_r \bar{v}_{rs}, \quad \rho u = \sum_s \rho_s u_s, \quad \sum_s \rho_s u_s u_s = \rho u u + \sum_s \rho_s U_s U_s,$$

а также равенством [формула (6.7) из гл. 2]

$$\rho_e U_e + \rho_i U_i + \rho_n U_n = 0. \quad (8.8)$$

Рассмотрим вначале обобщенный закон Ома для *полюсности* *ионы* *ионного* газа, ибо в этом случае алгебраический вид уравнений несколько проще. Действительно, в этом случае последние члены в уравнениях (8.5a), (8.5б) и (8.8) равны нулю, а уравнение (8.5в) не нужно. Умножив обе части уравнения (8.5a) на  $-e/m_e$ , а уравнения (8.5б) на  $e/m_i$  и сложив результаты, после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{m_e m_i}{e^2 \rho} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho^c \mathbf{u} + \mathbf{J}) + \nabla \cdot (\rho^c \mathbf{u} \mathbf{u} + \mathbf{u} \mathbf{J} + \mathbf{J} \mathbf{u}) \right] &= \\ &= \mathbf{E}' - \frac{m_e \bar{v}_{ei}}{n_i e^2} \mathbf{J} - \frac{m_i - m_e}{e \rho} (\rho^c \mathbf{E}' + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) + \frac{\nabla \cdot (m_i \rho_e - m_e \rho_i)}{e \rho}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Уравнения (8.7) и (8.9) полностью эквивалентны уравнениям (8.5a) и (8.5б). В самом деле, мы лишь преобразовали уравнения для  $\mathbf{u}_e$  и  $\mathbf{u}_i$  в уравнения для  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{J}$ . Пользуясь формулой (8.6a) и определив  $\rho = m_e n_e + m_i n_i$ , мы можем выразить  $n_e$  и  $n_i$  через  $\rho$  и  $\rho^c$ , а из уравнений (8.6б) и (8.8) можно выразить  $\mathbf{U}_e$  и  $\mathbf{U}_i$  через  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{J}$ . Таким образом,

$$n_e = \frac{e \rho - m_i \rho^c}{e (m_e + m_i)}, \quad n_i = \frac{e \rho + m_e \rho^c}{e (m_e + m_i)}, \quad (8.10a)$$

$$\mathbf{U}_e = \frac{-m_i \mathbf{J}}{n_e e (m_e + m_i)}, \quad \mathbf{U}_i = \frac{m_e \mathbf{J}}{n_i e (m_e + m_i)}. \quad (8.10б)$$

Эти соотношения используются при выводе уравнения (8.9). В случае квазинейтральной, стационарной и однородной плазмы при  $B = 0$  уравнение (8.9) сводится к виду  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}'$ , где  $\sigma = n_e e^2 / m_e \bar{v}_{ei}$ . Именно по этой причине уравнение (8.9) и называется «обобщенным законом Ома».

Уравнение (8.9) можно записать в более простой форме, в которой оно применимо почти во всех случаях, представляющих интерес. Предположим вначале, что мы имеем дело с плазмой, которая удовлетворяет условию квазинейтральности

$$\frac{\rho^c}{en_e} \ll 1 \quad (8.11)$$

(и, следовательно,  $n_e \approx n_i$ ), а постоянная времени  $t_c$  макроскопических изменений достаточно велика, так что [ср. с формулой (6.5б)]

$$t_c \gg \frac{\bar{v}_{ei}}{\omega_p^2}. \quad (8.12)$$

Здесь  $\omega_p = (n_e e^2 / \epsilon_0 m_e)^{1/2}$  — плазменная частота. (В стационарном случае время  $t_c$  выражается через характерные расстояния  $L_c$  и скорость  $u_c$ , как  $t_c \sim L_c / u_c$ .) В соответствии с формулами (6.8) и (6.9) члены, содержащие множитель  $\rho^c$  в уравнении (8.9), могут быть опущены. Если предположить также, что

$$t_c \gg \frac{1}{\bar{v}_{ei}}, \quad (8.13)$$

то все члены в левой части уравнения (8.9), содержащие  $\mathbf{J}$ , будут малы по сравнению с членом  $\mathbf{J}/\sigma$  в правой части уравнения, и левую часть уравнения можно положить равной нулю.

Электронные и ионные вязкие напряжения можно оценить, пользуясь соотношениями, введенными в гл. 2, § 12. При этом оказывается, что

$$\frac{|\tau_e|}{\rho_e} \sim \frac{\bar{v}_{ei}^2}{t_c}, \quad (8.14a)$$

$$\frac{m_e |\tau_i|}{m_i \rho_e} \sim \left( \frac{m_e T}{m_i T_e} \right)^{1/2} \frac{\bar{v}_{ei}^2}{t_c}. \quad (8.14b)$$

Таким образом, при выполнении условий (8.11), (8.12) и (8.13) обобщенный закон Ома (8.9) для полностью ионизованной плазмы может быть записан в более простом виде [формулы (3.21)]:

$$\mathbf{E}' + \frac{\nabla \rho_e}{en_e} = \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{en_e} + \frac{\mathbf{J} \times \beta_e \times \mathbf{b}}{\sigma}. \quad (8.15)$$

Здесь  $\sigma = n_e e^2 / m_e \bar{v}_{ei}$ ,  $\beta_e = eV / m_e \bar{v}_{ei}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ .

Рассмотрим теперь полную систему уравнений (8.5) в общем случае произвольной степени ионизации. Вместо уравнений (8.10) мы теперь имеем

$$n_e = \frac{e(\rho_e + \rho_i) - m_i \rho^c}{e(m_e + m_i)}, \quad n_i = \frac{e(\rho_e + \rho_i) + m_e \rho^c}{e(m_e + m_i)}, \quad (8.16a)$$

$$\mathbf{U}_e = \frac{-m_i \mathbf{J} - e \rho_n \mathbf{U}_n}{en_e(m_e + m_i)}, \quad \mathbf{U}_i = \frac{m_e \mathbf{J} - e \rho_n \mathbf{U}_n}{en_i(m_e + m_i)}. \quad (8.16b)$$

Умножив обе части уравнения (8.5a) на  $-e/m_e$ , а уравнения (8.5b) на  $e/m_i$  и сложив результаты, получим вместо уравнения (8.9)

$$\begin{aligned} & \frac{m_e m_i}{e^2(\rho_e + \rho_i)} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho^c \mathbf{u} + \mathbf{J}) + \nabla \cdot (\rho^c \mathbf{u} \mathbf{u} + \mathbf{u} \mathbf{J} + \mathbf{J} \mathbf{u}) \right] = \\ & = \mathbf{E}' - \left[ \frac{m_e \bar{v}_{ei}}{n_i e^2} + \frac{m_i m_{ei}}{e^2(\rho_e + \rho_i)} (\bar{v}_{en} + \frac{m_e}{m_i} \frac{m_{in}}{m_i} \bar{v}_{in}) \right] \mathbf{J} - \\ & - \frac{m_i - m_e}{e(\rho_e + \rho_i)} (\rho^c \mathbf{E}' + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) + \frac{\nabla \cdot (m_i \rho_e - m_e \rho_i)}{e(\rho_e + \rho_i)} - \\ & - \rho^c \frac{m_i \bar{v}_{ei}}{n_i \rho^c} \frac{\rho_n \mathbf{U}_n}{\rho_w + \rho_i} - \frac{\rho_n}{\rho_w + \rho_i} \mathbf{U}_n \times \mathbf{B} - \frac{\rho}{\rho_e + \rho_i} \times \\ & \times \frac{m_{ei}}{e} \left[ \left( \bar{v}_{en} - \frac{m_{in}}{m_i} \bar{v}_{in} \right) - \frac{\rho^c m_i}{\rho_e} \left( \bar{v}_{en} + \frac{m_e}{m_i} \frac{m_{in}}{m_i} \bar{v}_{in} \right) \right] \mathbf{U}_n. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Предполагая, что плазма удовлетворяет условию квазинейтральности (8.11), и отмечаем, что  $m_e \ll m_i$ , преобразуем член, содержащий  $\mathbf{J}$ , в правой части уравнения (8.17) к виду  $\mathbf{J}/\sigma$ , где теперь  $\sigma = n_e e^2 / m_e \bar{v}_{ei}$ , причем  $\bar{v}_{ei} = \bar{v}_{ei} + \bar{v}_{en}$ . Если мы предположим в со-

ответствии с условием (8.12), что

$$t_c \gg \frac{\bar{v}_{eH}}{\omega_p^2}, \quad (8.18)$$

то члены, содержащие  $\rho^c$ , могут быть опущены и, если выполняется условие, аналогичное условию (8.13), а именно

$$t_c \gg \bar{v}_{ei} t, \quad (8.19)$$

то левую часть уравнения (8.17) можно положить равной нулю. Теперь мы имеем оценки, аналогичные оценкам (8.14), т. е.

$$\frac{|\tau_e|}{\rho_e} \sim \frac{\bar{v}_{eH}^2}{t_c} \quad (8.20a)$$

и

$$\frac{m_e |\tau_i|}{m_i \rho_e} \sim \frac{m_e T}{m_i T_e} \frac{(\bar{v}_{en} + \sqrt{m_e T / m_i T_e} \bar{v}_{ie})^{-1}}{t_c}. \quad (8.20b)$$

Таким образом, если правая часть соотношения (8.20b) мала и выполняются условия (8.11) (8.18) и (8.19), то уравнение (8.17) приводится к виду

$$\mathbf{E}' + \frac{\nabla \rho_e}{en_e} = \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{en_e} + \frac{m_e \bar{v}_{en}}{e} \frac{\rho \mathbf{U}_n}{\rho_i} - \mathbf{B} \times \frac{\rho_n \mathbf{U}_n}{\rho_i}. \quad (8.21)$$

Из четырех уравнений (8.5) и (8.7) три независимых. Следовательно, можно считать, что уравнения (8.17) [или (8.21)], (8.5b) и (8.7) дают три независимых соотношения, которые полностью эквивалентны уравнениям (8.5). Чтобы завершить вывод обобщенного закона Ома, найдем выражение для  $\mathbf{U}_n$  из двух уравнений (8.5b) и (8.7) и подставим его в уравнение (8.21). С учетом соотношений (8.16b) и предположений, сделанных при выводе уравнения (8.21), мы можем записать уравнение (8.5b) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho_n \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \left[ \frac{D}{Dt} (\rho_n \mathbf{U}_n) + \rho_n \mathbf{U}_n \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho_n \mathbf{U}_n \nabla \cdot \mathbf{u} \right] + \mathbf{u} \rho_n = \\ = -\nabla \cdot \rho_n - \rho \frac{m_{in}}{m_i} \bar{v}_{in} \mathbf{U}_n - \frac{m_e \bar{v}_{en}}{e} \mathbf{J}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Второй член в левой части этого уравнения порядка  $\rho_n \mathbf{U}_n / t_c$  и им можно пренебречь по сравнению со вторым членом в правой части, если

$$t_c \gg (\bar{v}_{in} + \bar{v}_{ni})^{-1}. \quad (8.23)$$

Член  $\mathbf{u} \rho_n = \mathbf{u} \partial \rho_n / \partial t + \nabla \cdot (\rho_n \mathbf{u}_n)$  можно интерпретировать как скорость, с которой импульс единицы объема нейтральной компоненты плазмы увеличивается в результате неупругих столкновений с другими компонентами. В приближенном выражении столкновительного члена в правой части уравнения (8.5b) мы учитывали

только неупругие столкновения, а поэтому, чтобы быть последовательными, мы должны и здесь пренебречь влиянием неупругих столкновений. Определяя  $Dn/Dt$  из уравнения для импульса (8.7) и подставляя полученное выражение в (8.22), получаем [ср. с уравнением (13.12) из гл. 2]

$$\frac{\rho_n U_n}{\rho_i} = \frac{-(\rho_n/\rho)^2}{m_{in} n_e v_{in}} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{\rho_n/\rho}{n_e m_{in} v_{in}} \times \left[ \frac{\rho_n}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{p} - \nabla \cdot \mathbf{p}_n \right] - \frac{\rho_n}{\rho} \frac{m_e \bar{v}_{en}}{m_{in} v_{in}} \frac{\mathbf{J}}{en_e}. \quad (8.24a)$$

Чтобы оценить второй член в правой части уравнения (8.24a), предположим, что нейтральную компоненту можно считать однородной, а тензор давления — изотропным. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\rho_n}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{p} - \nabla \cdot \mathbf{p}_n &\sim \nabla \left( \frac{\rho_n}{\rho} p - p_n \right) \sim \nabla \left[ \frac{\rho_n (2p_e + p_n) - (\rho_i + \rho_n) p_n}{\rho} \right] = \\ &= \nabla \frac{\rho_n}{\rho} \left( 2 - \frac{m_i}{m_n} \right) p_e \sim \frac{\rho_n}{\rho} \nabla p_e, \end{aligned}$$

и уравнение (8.24a) может быть записано в приближенном виде:

$$\frac{\rho_n U_n}{\rho_i} \approx - \frac{(\rho_n/\rho)^2}{m_{in} n_e v_{in}} (\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p_e) - \frac{\rho_n}{\rho} \sqrt{\frac{m_e}{m_{in}}} \frac{\mathbf{J}}{en_e}. \quad (8.24b)$$

На основании уравнения для импульса можно сказать, что величина  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$  порядка  $\nabla p$  и, следовательно, в пределе слабой ионизации можно пренебречь градиентом давления  $\nabla p_e$  по сравнению с пондеромоторной силой  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ . Чтобы упростить результаты, мы примем это приближение для всех степеней ионизации, учитывая, что в пределе полной ионизации  $(\rho_n/\rho)^2 \rightarrow 0$  и оба члена  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$  и  $\nabla p_e$  в правой части уравнения (8.24b) пренебрежимо малы.

Третий член в правой части уравнения (8.21) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{m_e \bar{v}_{en}}{e} \frac{\rho U_n}{\rho_i} \approx - \left( \frac{\rho_n}{\rho} \right) \sqrt{\frac{m_e}{m_{in}}} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{en_e} - \sqrt{\frac{m_e}{m_{in}}} \frac{\bar{v}_{en}}{v_{eH}} \frac{\mathbf{J}}{\sigma}.$$

Очевидно, что этим членом можно пренебречь по сравнению с первыми двумя. Для последнего члена в уравнении (8.21) получим

$$-\mathbf{B} \times \frac{\rho_n U_n}{\rho_i} \approx \frac{(\rho_n/\rho)^2}{n_e m_{in} v_{in}} \mathbf{B} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) - \frac{\rho_n}{\rho} \sqrt{\frac{m_e}{m_{in}}} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{en_e},$$

т. е. таким образом, единственный член, который нужно оставить, имеет вид

$$\frac{(\rho_n/\rho)^2 B^2}{n_e m_{in} v_{in}} \mathbf{b} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{b}) = \frac{(\rho_n/\rho)^2 \beta_e \beta_i}{\sigma} \mathbf{b} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{b}) = \frac{s}{\sigma} \mathbf{b} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{b}). \quad (8.25a)$$

Здесь  $\sigma = n_e e^2 / m_e \bar{v}_{eH}$ ,  $\beta_e = cB / m_e \bar{v}_{eH}$ ,  $\beta_i = cB / m_{in} \bar{v}_{in}$ , а величина  $s = \left( \frac{\rho_n}{\rho} \right)^2 \beta_e \beta_i$  (8.25b)

— коэффициент проскальзывания ионов [ср. с формулой (3.15)]. Таким образом, при условиях (8.11), (8.18), (8.19), (8.20b) и (8.23) обобщенный закон Ома для частично ионизованных газов примет вид

$$\mathbf{E}' + \frac{\nabla p_e}{en_e} = \frac{\mathbf{J} + \beta_e \mathbf{J} \times \mathbf{b} + s \mathbf{b} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{b})}{\sigma}. \quad (8.26)$$

В такой форме закон Ома применим в большинстве случаев столкнительной плазмы, представляющих интерес.

Вообще говоря, скорость диссипации электрической энергии в единице объема плазмы определяется уравнением (4.5b) как  $\mathcal{E}'_d \equiv \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}'$ . Для слабо ионизованной плазмы, подчиняющейся закону Ома (8.26) (где членом  $\nabla p_e$  можно пренебречь), мы получим

$$\mathcal{E}'_d = \frac{J^2}{\sigma} \left( 1 + s \frac{1}{J^2} \right). \quad (8.27)$$

Здесь  $J^2 = J^2 - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{b})^2$  — квадрат компоненты плотности тока, перпендикулярной вектору магнитной индукции  $\mathbf{B}$ . Таким образом, при заданной плотности тока энергия, диссипируемая локально в единице объема, не зависит от параметра Холла, но возрастает с увеличением коэффициента проскальзывания ионов.

**Задача 8.1.** Выведите соотношение (8.9).

**Задача 8.2.** Выведите соотношения (8.17) и (8.22).

**Задача 8.3.** На основе гидродинамической теории плазмы, изложенной в данном параграфе, можно вывести приближенные выражения для диффузионных скоростей частиц. Заменив условие квазинейтральности условием  $(m_e/m_{in})^{1/2} (n_e/n_i) \ll 1$ , но сохраняя другие условия, использованные в этом параграфе, покажите, что в случае, когда магнитное поле  $\mathbf{B}$  отсутствует,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_e &= -\mu_e \left[ \mathbf{E}' + \frac{\nabla p_e}{en_e} \right], \\ \mathbf{U}_i &= \frac{\rho_c}{\rho} \mu_e \left( \mathbf{E}' + \frac{\nabla p_e}{en_e} \right) + \frac{\rho_n}{\rho} \mu_{in} \times \\ &\quad \times \left[ \mathbf{E}' - \frac{\nabla p_i}{en_i} - \frac{\bar{v}_{ie}}{v_{eH}} \left( \mathbf{E}' + \frac{\nabla p_e}{en_e} \right) + \frac{\rho_i}{\rho} \frac{\nabla p_i}{en_i} \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $\mu_e = c/m_e \bar{v}_{eH}$  и  $\mu_{in} = c/m_{in} \bar{v}_{in}$  — подвижности электронов и ионов, определенные в гл. 2, § 13. Нужно иметь в виду, что в пределе слабой ионизации и при постоянном полном давлении  $\mathbf{U}_i =$

то  $\mu_r [E' - (\nabla r)_{\text{ст}}]$ . Поскольку диффузионные скорости членов приходится определять в условиях, когда  $n_e$  и  $n_i$  неодинаковы, вычисления удобнее проводить так, как это делалось в гл. 2, § 13, с использованием формул (8.5а), (8.5б), (8.7) и (8.8).]

**Задача 8.4.** Вычислите коэффициент проскальзывания ионов в условиях задачи 8.2 из гл. 2. Сечение столкновения ионов натрия с частицами продуктов сгорания газа примите равным  $10^{-14}$  см<sup>2</sup>, а поле  $B = 2,7$  Т. Какой должна быть плотность нейтральных частиц, чтобы коэффициент проскальзывания ионов был равен параметру Холла? Каким должен быть параметр Холла в этих условиях?

### § 9. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ (МГД) ГЕНЕРАТОРЫ

Если электрический проводник при своем движении пересекает силовые линии магнитного поля, то на заряженные частицы в проводнике действует сила, направленная перпендикулярно полю  $B$  и скорости проводника. При этом отрицательные заряды движутся в одном направлении, а положительные заряды — в противоположном. Явление индукции электрического поля или электродвижущей силы (э.д.с.) лежит в основе преобразования механической энергии в электрическую. В настоящее время почти во всех генераторах электроэнергии используется *твердый* проводник, который приводит во вращение между полюсами магнита. В случае гидротурбин, обеспечивается движением речной воды под действием сил земного тяготения. В турбогенераторах для этой цели обычно используется высокоскоростной поток пара или других газов. Тепло, необходимое для создания высокоскоростного потока газа, можно получить за счет сжигания минерального топлива или от ядерного реактора (либо за счет распада, либо за счет синтеза ядер).

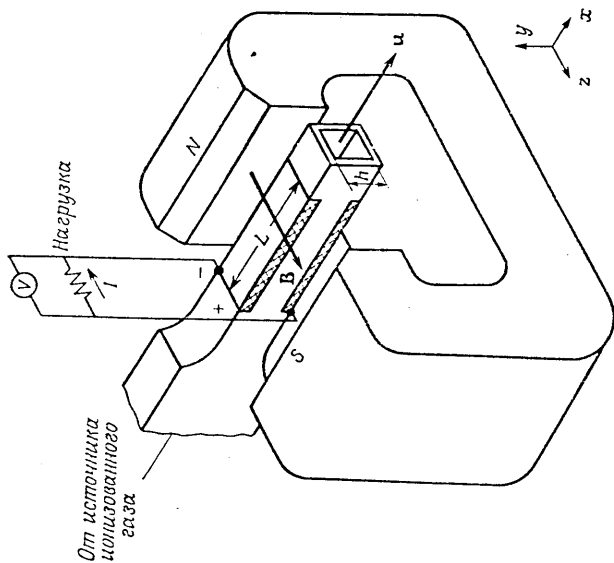
Фарадей еще в 1831 г. догадался, что в качестве рабочего тела в электрогенераторе можно использовать *жидкий* проводник. Чтобы проверить свою мысль, Фарадей опустил в воду у обоих концов моста Ватерлоо через Темзу в Лондоне электроды и соединил их на середине моста через гальванометр. Он рассудил, что электропроводящая вода реки при движении в магнитном поле Земли должна создавать поперечную э.д.с. Небольшие нерегулярные отклонения стрелки гальванометра действительно наблюдались. Электрогенераторы, в которых используется проводящая жидкая или газообразная среда, движущаяся в магнитном поле, называются магнитогидродинамическими (МГД) электрогенераторами. Одна из самых первых серьезных попыток создать экспериментальный МГД-генератор была предпринята на фирме «Вестингауз Лэборатрис» в период 1938—1944 гг. под руководством Карловича [12]. В этом генераторе (коаксиального холловского типа — фиг. 20) рабочим телом

служили продукты сгорания природного газа, а ионизация проводилась электронным пучком. Из-за низкой электропроводности газа и из-за того, что свойства плазмы были плохо изучены в то время, в эксперименте не был достигнут теоретический уровень мощности. Эксперимент, проведенный на той же фирме позже [34] с использованием минерального топлива, в котором было добавлено соединений натрия, оказался гораздо более успешным: достигнутый уровень мощности составлял свыше 10 кВт. Такой же уровень мощности был достигнут в лаборатории фирмы «Авко Эверетт» [22], где использовался нагретый в дуговом разряде аргон при температуре 3000 К с добавкой порошкообразного карбоната натрия. Небольшое количество натрия добавлялось в рабочий газ в этих экспериментах для того, чтобы обеспечить начальную плотность свободных электронов, соответствующую необходимой электропроводности. (Кроме натрия, для этой цели пригодны и другие материалы со сравнительно низким потенциалом ионизации — щелочные металлы цезий и рубидий.)

В течение десятилетия, начавшегося приблизительно в 1960 г., разрабатывались три основных типа МГД-генераторов, различающихся рабочей средой и предполагаемым источником тепла. Ближе всего к практической реализации МГД-генераторы *открытого цикла*, работающие на продуктах сгорания минерального топлива. В США в 1965 г. был пущен генератор на 32 МВт, использующий в качестве рабочей жидкости спирт, с ресурсом работы до 3 мин [18, 36]. В Советском Союзе в 1971 г. начались испытания экспериментальной установки мощностью 75 МВт (25 МВт от МГД и 50 МВт от пара), сжигающей природный газ. В качестве предполагаемого источника тепла для МГД-генераторов *закрытого цикла* обычно рассматривается ядерный реактор, хотя имеются также проекты с источниками тепла, использующими минеральное топливо. Рабочей средой в системах закрытого цикла могут быть инертные газы с добавками или жидкие металлы. Из-за температурных ограничений, накладываемых ядерным топливом, МГД-генераторы закрытого цикла, использующие в качестве рабочего тела газ, должны работать в неравновесном режиме. В дальнейшем мы остановимся подробнее на тех трудностях, которые связаны с работой в неравновесном режиме. Вопрос же о МГД-генераторах, работающих на жидких металлах, лежит за пределами нашей книги.

МГД-генератор, так же как и турбогенератор, представляет собой устройство, преобразующее энергию, и может работать с любым высокотемпературным источником тепла — химическим, ядерным, солнечным и т. д. Будущие потребности индустриальных стран в электроэнергии будут удовлетворять в основном тепловые системы, состоящие из источника тепла и преобразователя энергии. В соответствии с законами термодинамики максимальный коэффициент полезного действия таких систем (к.п.д. цикла Карно) определяется температурой источника тепла. Фактически же к.п.д.

системы будет определяться максимальной температурой в устройстве, преобразующем энергию. Чем ближе температура рабочей среды в устройстве, преобразующем энергию, к температуре источника тепла, тем выше максимально возможный к.п.д. всей системы. Температуры существующих в настоящее время источников тепла доходят до 3000 К. Но пока что подавляющая часть централизованного производства электроэнергии основана лишь на единственной



Фиг. 15. Упрощенная схема МГД-генератора.

схеме преобразования энергии — паровом турбогенераторе, который может экономично работать лишь при температурах, не превышающих 850 К. Поэтому полный к.п.д. существующих крупных энергоцентралей не превышает 42%, что значительно меньше максимально возможного к.п.д. Ясно, что в нашей технологии преобразования энергии имеется температурный пробел, который должен быть заполнен.

Поскольку в МГД-генераторах нет, как в турбинах, деталей из твердых материалов, движущихся в потоке газа, они могут работать при гораздо более высоких температурах. Расчеты показывают, что к.п.д. МГД-генераторов на минеральном топливе может составить от 50 до 60%. Повышенный к.п.д. работы позволил бы более экономно расходовать природные ресурсы, уменьшить тепловое загрязнение окружающей среды и снизить затраты на топливо. Проводимые в настоящее время исследования указывают также на

возможность, уменьшения загрязнения атмосферы. В данном параграфе мы изложим лишь элементы теории МГД-генераторов. Более полно этот вопрос рассматривается в книге [24].

Упрощенная схема МГД-генератора представлена на фиг. 15. Генератор такого типа называется фарадеевским генератором со сплошными электродами. Вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$  направлен поперек движения электропроводящего газа, текущего по изолированному каналу со скоростью  $\mathbf{u}$ . На заряженные частицы газа действует индуцированное электрическое поле  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ , которое вызывает электрический ток в направлении, перпендикулярном векторам  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{B}$ . Этот ток собирается парой электродов, расположенных на противоположных сторонах канала и находящихся в контакте с газом. Электроды замкнуты через внешнюю нагрузку. В прецедентном эффекте Холла плотность тока в слабо ионизованном газе дается обобщенным законом Ома (8.26) как

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (9.1a)$$

Электрическое поле  $\mathbf{E}$ , которое добавляется к индуцированному, возникает из-за разности потенциалов между электродами. Для простоты мы здесь будем предполагать, что  $\mathbf{u}$  и  $\sigma$  однородны.

В системе координат, изображенной на фиг. 15, имеем

$$J_y = \sigma (E_y - uB). \quad (9.1b)$$

При разомкнутой цепи  $J_y = 0$  и, таким образом, электрическое поле в этом случае равно  $uB$  [формула (7.3)]. В типичных условиях, когда  $u \sim 1000$  м.с<sup>-1</sup> и  $B \sim 2$ Г, электрическое поле при разомкнутой цепи равно  $uB \sim 2000$  В.м<sup>-1</sup>. При коротком замыкании цепи  $E_y = 0$ , а ток короткого замыкания равен  $J_y = -\sigma uB$ . В общем случае, когда во внешнюю цепь включена нагрузка, вводят параметр нагрузки

$$K \equiv \frac{E_y}{uB}, \quad (9.2)$$

где  $0 \leq K \leq 1$ , и тогда  $J_y = -\sigma uB (1 - K)$ . Знак минус показывает, что направление тока, которое принято считать положительным, совпадает с отрицательным направлением оси  $y$ . Поскольку электроны движутся в противоположном направлении, нижний электрод должен работать как электронный эмиттер, т. е. как катод, а верхний — как анод.

В соответствии с уравнением (4.5a) электрическая энергия, передаваемая нагрузке единицей объема газа МГД-генератора, равна

$$P = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \quad (9.3a)$$

Для генератора, изображенного на фиг. 15,

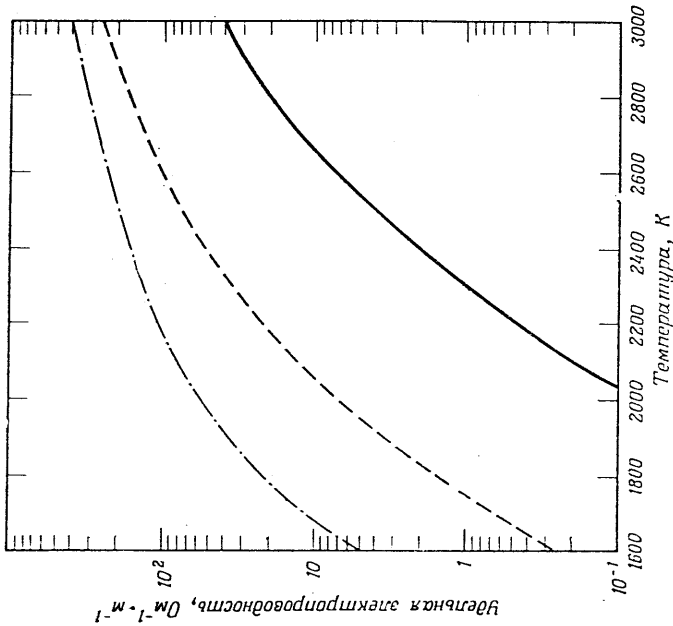
$$P = \sigma u^2 B^2 K (1 - K). \quad (9.3b)$$



Эта величина принимает максимальное значение

$$P_{\text{макс}} = \frac{\sigma u^2 \beta^2}{4} \quad (9.4)$$

при  $K = 1/2$ . В соответствии с уравнением (4.4) скорость (на единицу объема), с которой энергия направленного движения отбирается



Фиг. 16. Типичные значения удельной электропроводности плазмы МГД-генераторов при давлении 100 кПа.

Сплошная кривая — продукты сгорания  $C_2H_5OH + 3O_2$  с 0,5 массовой доли  $N_2/O_2$ ; присадка 0,01 массовой доли К; штриховая кривая — аргон с присадкой 0,004 мольной доли К; штрих-пунктирная кривая — аргон с присадкой 0,004 мольной доли Cs.

от газа электромагнитным полем, равна  $-\mathbf{u} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B})$ . Поэтому мы определим *электрический к.п.д.* МГД-генератора как

$$\eta_e = \frac{J \cdot E}{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B})} \quad (9.5a)$$

Для рассматриваемого генератора

$$\eta_e = K. \quad (9.5b)$$

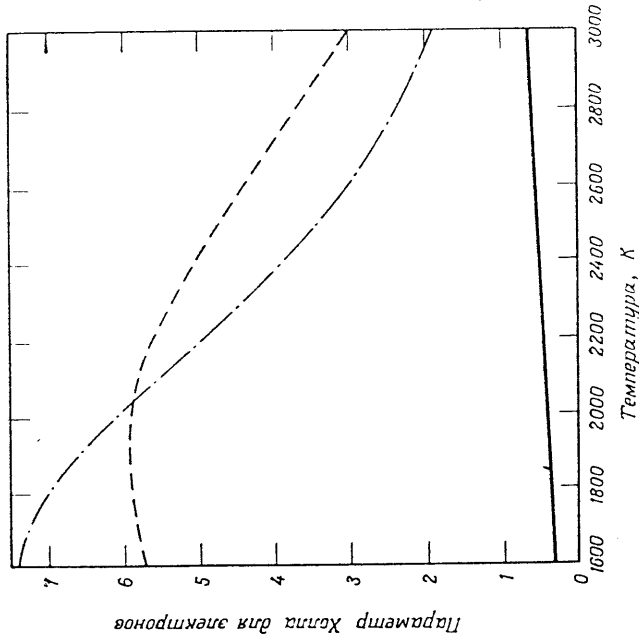
Таким образом, к.п.д. фарадеевского генератора тем выше, чем ближе его режим работы к режиму разомкнутой цепи.

Для того чтобы МГД-генератор имел приемлемые размеры, необходимо, чтобы он передавал во внешнюю цепь не менее  $\sim 10$  МВт

на 1 м<sup>3</sup> газа. При указанных выше типичных значениях  $u$  и  $B$  это означает, что электропроводность должна удовлетворять требованию

$$\sigma \gg \frac{4P_{\text{макс}}}{u^2 B^2} \sim 10^5 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}. \quad (9.6)$$

Тогда плотность тока будет порядка нескольких ампер на квадратный сантиметр или больше. На фиг. 16 представлена температурная зависимость равновесной электропроводности (при атмосферном



Фиг. 17. Типичные значения электронного параметра Холла плазмы МГД-генераторов при  $B = 1,0$  Т и давлении 100 кПа.

Сплошная кривая — продукты сгорания  $C_2H_5OH + 3O_2$  с 0,5 массовой доли  $N_2/O_2$ ; присадка 0,01 массовой доли К; штриховая кривая — аргон с присадкой 0,004 мольной доли К; штрих-пунктирная кривая — аргон с присадкой 0,004 мольной доли Cs.

давлению) плазмы продуктов сгорания с присадкой натрия и аргоновой плазмы с присадкой натрия и цезия. Температура газа, требуемая условием (9.6), может быть легко достигнута при использовании многих типов минерального топлива. Температура же газов на выходе имеющихся в настоящее время ядерных реакторов слишком низка, и приходится изыскивать возможности использования повышенных значений электропроводности в неравновесных условиях.

На фиг. 17 приведены значения параметров Холла при магнитной индукции 1 Т для тех же газов и при тех же условиях, что

и на фиг. 16 (приближенно можно считать, что параметр Холла меняется линейно с  $I$ ). Если, что параметр Холла может играть важную роль в работе МГД-генератора, и поэтому результаты проведенного ранее анализа необходимо пересмотреть. Из-за эффекта Холла ток, направленный вдоль  $y$ , может вызвать появление тока в направлении  $x$ . Вместо закона Ома в виде (9.1) мы теперь должны написать [формулы, (8.26), (3.21) и (3.11)]

$$J_y = \frac{\sigma}{1 + \beta^2} (E'_y + \beta E_x), \quad (9.7a)$$

$$J_x = \frac{\sigma}{1 + \beta^2} (E_x - \beta E'_y). \quad (9.7b)$$

Дальше мы будем обозначать величину  $\beta e$  просто через  $\beta$ . Поскольку электроды генератора, изображенного на фиг. 15, проходят по всей длине канала, они создают в газе эквипотенциальные поверхности, перпендикулярные направлению  $y$ . Для фарадеевского генератора со сплошными электродами

$$E_x = 0. \quad (9.8a)$$

Из уравнений (9.7) следует, что

$$J_y = \frac{\sigma}{1 + \beta^2} E'_y = - \frac{\sigma u B (1 - K)}{1 + \beta^2}, \quad (9.8b)$$

$$J_x = - \frac{\beta \sigma}{1 + \beta^2} E'_y = - \beta J_y, \quad (9.8b)$$

а из уравнения (9.3a) — что

$$P = \frac{\sigma u^2 B^2}{1 + \beta^2} K (1 - K). \quad (9.8r)$$

Эффект Холла уменьшает  $J_y$  и  $P$  в  $(1 + \beta^2)$  раз и приводит к появлению холловского тока, в газе направленного вниз, а вверх возвращающегося по электродам. Уменьшение  $J_y$  и  $P$  вызывается тем, что поле  $uB$  должно компенсировать не только поле  $E'_y$ , создаваемое электродами, но и э.д.с. Холла, обусловленную наличием тока в направлении оси  $x$ .

Чтобы уменьшить нежелательное воздействие эффекта Холла, электроды можно разделить на секции (фиг. 18, б) и замкнуть каждую пару противоположных электродов на отдельную нагрузку. В предельном случае, когда электроды состоят из бесконечно большого числа бесконечно тонких секций, вообще не может быть  $x$ -компоненты тока ни в электродах, ни в газе, так что для идеального фарадеевского генератора с *секционированными электродами* мы имеем

$$J_x = 0. \quad (9.9a)$$

Из уравнения (9.7b) видно, что при такой конфигурации электродов возникает электрическое поле, направленное вдоль оси  $x$ , так назы-

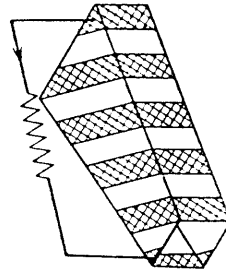
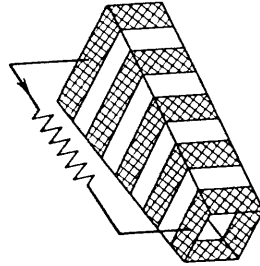
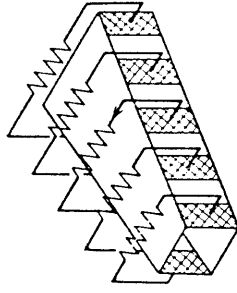
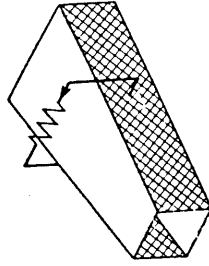
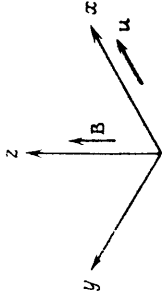
ваемом холловском поле

$$E_x = - \beta E'_y. \quad (9.9b)$$

Подставив это выражение для  $E_x$  в уравнение (9.7a), получим соотношение

$$J_y = \sigma E'_y, \quad (9.9b)$$

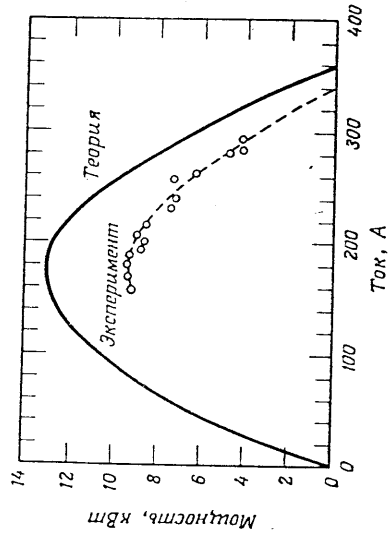
идентичное соотношению (9.1b), которое мы получили в пренебрежении эффектом Холла. Плотность энергии в этом случае будет такой



Фиг. 18. Способы соединения электродов в линейных МГД-генераторах. а — фарадеевский генератор со сплошными стенками; б — секционированный фарадеевский генератор; в — холловский генератор; г — генератор с диагональными проводящими стенками.

же, как и в отсутствие эффекта Холла [формула (9.3б)]. В реальных генераторах с электродами, разделенными на конечное число сек-

ций, эффект Холла приводит к увеличению плотности тока на входном (для потока газа) конце анода и на выходном конце катода [24, стр. 68]. Таким образом, холловский ток подавляется не полностью и реальные преимущества секционированных электродов оказываются не столь значительными, как можно было бы предположить на основании приведенных выше вычислений для идеального фарадеевского генератора, электроды которого состоят из бесконечного числа секций. На фиг. 19 представлена экспериментальная



Фиг. 19. Мощность экспериментального МГД-генератора, работающего на продуктах сгорания [34].

кривая зависимости мощности от тока МГД-генератора, работающего на продуктах сгорания [34], а также теоретическая кривая. Расхождение кривых частично объясняется токами утечки на стенке генератора.

Эффект Холла, вызывающий появление аксиального электрического поля, можно использовать, присоединив нагрузку к первой (относительно потока газа) и последней электродным секциям (фиг. 15). В соответствии с уравнением (9.96) аксиальное поле максимально, когда противоположные электроды соединены накоротко, т. е. когда

$$E_y = 0. \quad (9.10a)$$

Закоротка может быть не внешней, а внутренней (фиг. 18, в). Генератор с таким типом соединения называется *холловским генератором*. При условии (9.10a) уравнения (9.7), выражающие закон Ома, принимают вид

$$J_y = \frac{\sigma}{1+\beta^2} (-iB + \beta B_x), \quad (9.10б)$$

$$J_x = \frac{\sigma}{1+\beta^2} (E_x + \beta iB). \quad (9.10в)$$

Электрическое поле холловского генератора в режиме холостого хода в соответствии с уравнением (9.10в) равно  $-\beta iB$ . Следовательно, мы можем определить параметр нагрузки для холловского генератора как

$$K_H \equiv -\frac{E_x}{\beta iB} \quad (9.10г)$$

и переписать закон Ома в виде

$$J_y = -\sigma iB \frac{1+\beta^2 K_H}{1+\beta^2}, \quad (9.10д)$$

$$J_x = \sigma iB \frac{\beta}{1+\beta^2} (1-K_H). \quad (9.10е)$$

Для холловского генератора плотность энергии равна

$$P = -J_x E_x = \sigma i^2 B^2 \frac{\beta^2}{1+\beta^2} K_H (1-K_H), \quad (9.10ж)$$

а электрический к.п.д. составляет

$$\eta_e = \frac{J_x E_x}{J_y iB} = \frac{\beta^2}{1+\beta^2 K_H} K_H (1-K_H). \quad (9.10з)$$

При больших значениях параметра Холла плотность энергии холловского генератора приближается к плотности энергии секционированного фарадеевского генератора. Но холловский генератор обладает более высоким электрическим к.п.д. в режиме, близком к короткому замыканию (но не в самом режиме короткого замыкания), и он проще, так как представляет собой двухполосник.

Фарадеевский генератор со сплошными электродами и холловского генератора можно рассматривать как частные случаи двухполосного генератора, называемого *генератором с диагональными проводящими стенками*<sup>1)</sup>. Как показано на фиг. 18,  $\delta$ , диагональные проводники, образующие часть канала, находятся в контакте с плазмой и создают в ней диагональные эквипотенциальные поверхности. Таким образом, для генератора с диагональными проводящими стенками выполняется соотношение

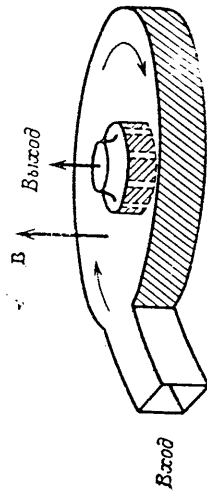
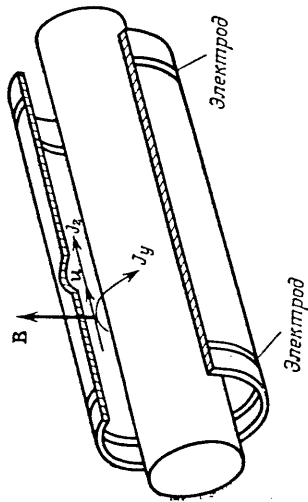
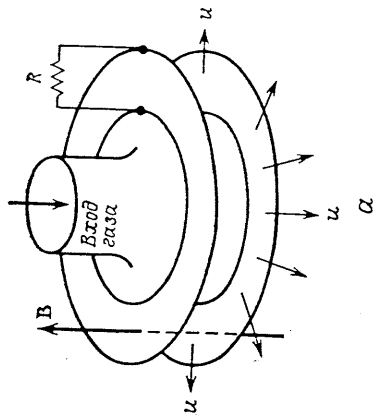
$$\frac{E_y}{E_x} = -\operatorname{tg} \alpha, \quad (9.11)$$

где  $\alpha$  — угол между плоскостью, проходящей через проводник, и плоскостью  $y-z$ . Для холловского генератора угол  $\alpha$  равен нулю, а для фарадеевского генератора со сплошными электродами  $\alpha = \pi/2$ . Подробнее такие генераторы рассматриваются в книге [24].

<sup>1)</sup> Генераторы такого типа в отечественной литературе принято называть *серпесными генераторами*. — Прим. перев.

Кроме МГД-генераторов с линейной геометрией и с электродами различной конфигурации, предлагались также МГД-генераторы с другой геометрией. В холловских генераторах дискообразной и коаксиальной формы, показанных на фиг. 20, ток, индуцируемый в направлении вектора  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ , замыкается внутри плазмы, так что нет необходимости в разделении электродов на секции. Генератор с «вихревой» геометрией аналогичен фарадеевскому генератору со сплошными электродами, поэтому требуется, чтобы параметр Холла был мал.

Роза [23] указал на то, что неоднородность свойств плазмы в устройствах с большим параметром Холла может привести к значительному ухудшению характеристик. Чтобы пояснить это, рассмотрим МГД-каналы со сплошными стенками, либо со стенками, разделенными на большое число секций, в котором  $\sigma$  и  $\beta$  зависят только от координаты  $y$ . Такая неоднородность может возникнуть, например, из-за охлаждения стенок, из-за недостаточного перемешивания присадки, из-за неравномерного старения или из-за эффектов неравновесности. Предложим, что существует стационарное решение уравнениями



Фиг. 20. Типы МГД-генераторов. а — дискообразный холловский генератор; б — коаксиальный холловский генератор; в — «вихревой» генератор.

положим, что существует стационарное решение уравнений, в котором  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{E}'$

координаты  $y$ . Тогда из уравнения  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  и  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  следует формулы (6.10а) и (6.10б) что

$$J_y = \text{const}, \quad E_x = \text{const}. \quad (9.12)$$

Общие характеристики устройства будут зависеть от величины  $J_x(y)$  и  $E'_y(y)$ , усредненных по протяженности канала вдоль оси  $y$ . Выражая эти величины из закона Ома (9.7) через  $J_y$  и  $E_x$ , получаем

$$\bar{E}'_y = \left( \frac{1+\beta^2}{\sigma} \right) J_y - \beta E_x, \quad (9.13а)$$

$$\bar{J}_x = \sigma E_x - \beta J_y. \quad (9.13б)$$

Если  $h$  — протяженность канала вдоль оси  $y$ , то при любом значении  $f(y)$  мы имеем  $\bar{I} \equiv h^{-1} \int_0^h f(y) dy$ . Уравнения (9.13) выражают усредненные характеристики поля через усредненные параметры плазмы. Столь простой результат мы получили потому, что считали неоднородность уравнения (9.13) к виду первоначального закона Ома:

$$\left( \frac{1+\beta^2}{\sigma} \right) J_y = \bar{E}'_y + \beta E_x, \quad (9.14а)$$

$$\left( \frac{1+\beta^2}{\sigma} \right) \bar{J}_x = G E_x - \beta \bar{E}'_y. \quad (9.14б)$$

Коэффициент неоднородности

$$G = \bar{\sigma} \left( \frac{1+\beta^2}{\sigma} \right) - \beta^2 \quad (9.15а)$$

учитывает совместное действие неоднородности и эффекта Холла и равен единице для однородного газа. Если параметр Холла однороден, то

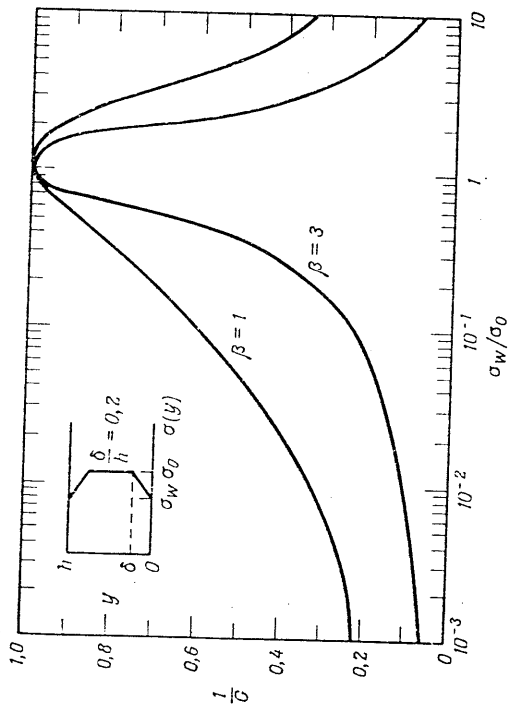
$$G = 1 + (1 + \beta^2) (\bar{\sigma} \sigma^{-1} - 1). \quad (9.15б)$$

Это выражение показывает, что эффект даже малого отклонения электропроводности от однородности усиливается при больших параметрах Холла. Для идеального секционированного фарадеевского генератора вместо уравнений (9.9б) и (9.3б) получим

$$E_x = \frac{\beta \bar{E}'_y}{G}, \quad (9.16а)$$

$$P = \frac{\bar{\sigma} \mu^2 B^2 K (1-K)}{G}, \quad (9.16б)$$

где  $\bar{K} = \bar{E}_p / (\bar{u}V)$ . Таким образом, холловское напряжение и плотность энергии уменьшаются в  $G$  раз. На фиг. 21 представлены зависимость величины  $1/G$  от  $\beta$  и от степени неоднородности при одном конкретном распределении  $\sigma(y)$ .

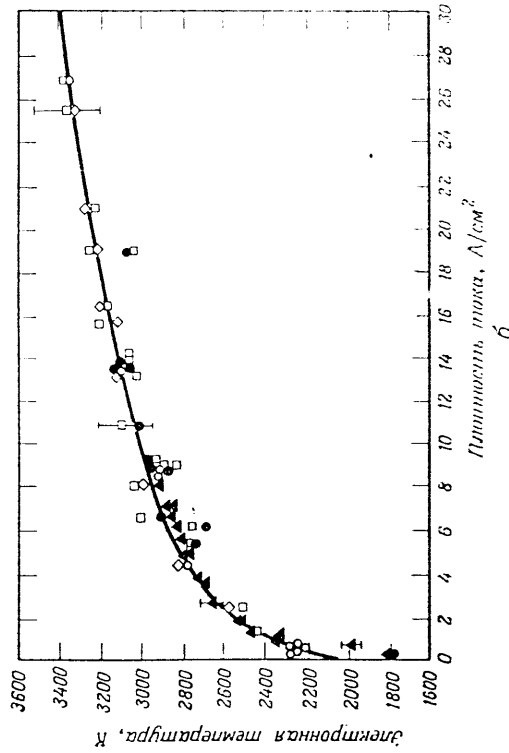
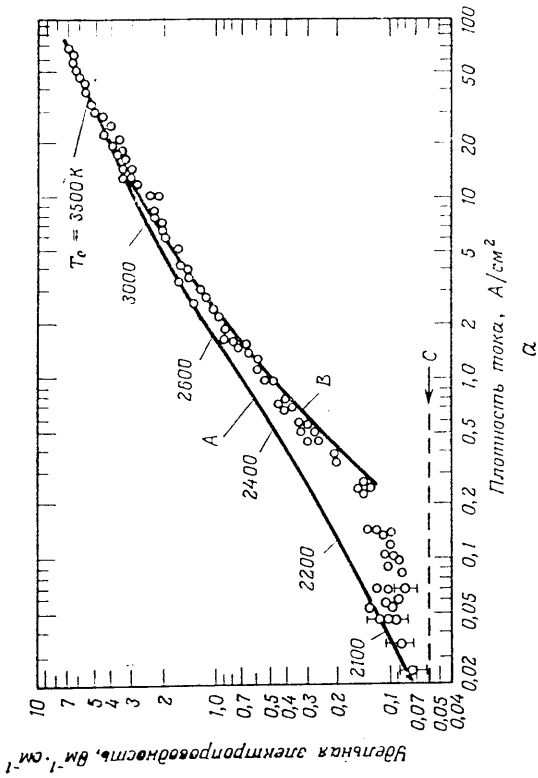


Фиг. 21. Влияние, оказываемое неоднородным распределением удельной электропроводности на плотность энергии секционированного фардеевского МГД-генератора.

Повышение температуры электронов в однородном и стационарном разряде в инертном газе с добавкой щелочного металла описывается уравнением для энергии электронов [формула (5.4)]

$$J \cdot E' = 3n_e k (T_e - T) \frac{m_e}{m_H} \bar{v}_{eH} + \dot{R}, \quad (9.17)$$

где  $m_H$  — средневзвешенная масса тяжелых частиц,  $T$  — температура газа тяжелых частиц, а  $\dot{R}$  — локальная скорость потери энергии на излучение из единицы объема. Здесь принято также, что  $J_e \approx J$ . Если разряд происходит во внешнем электрическом поле, а поле  $V$  отсутствует, то левую часть этого уравнения можно записать как  $J^2/\sigma$ . Предполагая, что  $n_e$  и  $T_e$  связаны уравнением Саха [формула (10.5) из гл. 2], и пользуясь соотношением  $\sigma = n_e^2/m_e \bar{v}_{eH}$ , можно на основании уравнения (9.17) вычислить теоретически зависимость  $\sigma$  от плотности тока  $J$ . Эксперименты по проверке таких расчетов при атмосферном давлении и высоких температурах газа были впервые предприняты в 1962 г. [13]. Некоторые типичные экспериментальные данные, полученные в работе [5], а также соответствующая теоретическая кривая представлены на фиг. 22 для



Фиг. 22. Неравновесная ионизация в аргоне с присадкой калия при атмосферном давлении [5].

$\alpha$  — электропроводность, теоретические и экспериментальные значения,  $T = 2000$  К,  $(n_K/n_{Ar}) = 0,004$ .  $A$  — теоретическая кривая, вычисленная с учетом потерь, обусловленных упругими столкновениями;  $B$  — теоретическая кривая, вычисленная с учетом потерь, обусловленных упругими столкновениями, и потерь на излучение;  $C$  — равновесное значение удельной электропроводности при  $T = 2000$  К.  
 $\delta$  — электронная температура; сплошная кривая — теоретическая зависимость при  $T = 2000$  К,  $n_K/n_{Ar} = 0,004$ .

аргона с присадкой натрия при атмосферном давлении. Интерпретировать данные при низких плотностях газа трудно из-за замороженности потока и других эффектов неравновесности, но при тех значениях плотности тока, которые представляют практический интерес, согласно теории с экспериментом вполне удовлетворительно. Таким образом, эксперименты показывают, что электропроводность может быть значительно увеличена за счет неравновесной ионизации.

В случае МГД-генератора левую часть уравнения (9.17) можно вычислить, исходя из закона Ома (9.7). Пренебрегая потерями на излучение, получаем

$$Z n_e k T \left( \frac{T_e}{T} - 1 \right) \frac{m_e}{m_H} \bar{v}_{eH} = \frac{\sigma E'^2}{1 + \beta^2}. \quad (9.18)$$

Величина  $E'^2$  зависит от типа рассматриваемого МГД-генератора.

198

Таблица 2

Индукционное магнитным полем увеличение температуры электронов в линейных МГД-генераторах открытого цикла

	Фарадеевский генератор		Холловский генератор
	со сплошными электродами	с секционированными электродами	
$E'_x$	0	$-(1-K)\beta uB$	$K_H \beta uB$
$E'_y$	$-(1-K)uB$	$-(1-K)uB$	$-uB$
$\frac{T_e}{T_0}$	$1 + \frac{\hat{\gamma}(1-K)^2}{3} \frac{\beta^2}{1+\beta^2} M^2$ $1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$	$1 + \frac{\hat{\gamma}(1-K)^2}{3} \frac{\beta^2}{1+\beta^2} M^2$ $1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$	$1 + \frac{\hat{\gamma}(1+\beta^2 K_H^2)}{3} \frac{\beta}{1+\beta^2} M^2$ $1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$
$M \gg 1$ $\gamma = \frac{5}{3}$	$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \frac{5}{3} \frac{\beta^2}{1+\beta^2}; K \rightarrow 0 \\ \rightarrow \frac{5}{3} \beta^2; K \rightarrow 0 \end{array} \right\}$	$\rightarrow \frac{5}{3} \beta^2; K \rightarrow 0$	$\rightarrow \frac{5}{3} \frac{\beta^2}{1+\beta^2} \beta^2; K_H \rightarrow 1$

В табл. 2 приведены выражения для отношения температуры электронов к установившейся температуре газа

$$T_0 = T \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]$$

для каждого из трех основных типов линейных МГД-генераторов, о которых говорилось выше. Здесь  $\gamma$  — отношение удельных теплотемкостей компонент газа,  $\hat{\gamma} = (R/m_H/k)\gamma \approx \gamma$ ,

$$M^2 = \frac{u^2}{\gamma RT}$$

... квадрат числа Маха. Чтобы сделать более очевидной зависимость от параметра Холла, в последней строке табл. 2 приведены предельные значения  $T_e/T_0$  при  $\hat{\gamma} = \gamma = 5/3$ , при больших числах Маха и при оптимальной нагрузке. Максимальное повышение температуры электронов в фарадеевском генераторе со сплошными электродами — порядка установившейся температуры газа. Но теоретически в фарадеевских генераторах с секционированными электродами и в холловских генераторах возможны гораздо большие электронные температуры при больших значениях параметра Холла.

Повышенная электропроводность, которая следует из изложенной выше теории, экспериментально не наблюдалась. Причины этого в настоящее время не совсем ясны, но принято считать, что основная причина заключается в том, что плазма становится неустойчивой и развиваются флуктуирующие неоднородности плазмы. О происхождении таких неустойчивостей будет сказано в следующем параграфе.

Солбс и Керреброк [26] предложили для фарадеевского генератора вместо выражения, приведенного в табл. 2, выражение

$$\frac{\bar{T}_e}{T} - 1 = \frac{\gamma}{3} M^2 (1-K)^2 \bar{\beta}^2 \frac{\sigma_{эфф}}{\sigma} \frac{1 + \beta_{маж}^2}{1 + \beta_{эфф}^2}. \quad (9.19)$$

Здесь черта обозначает усреднение по пространству,  $\beta_{эфф}$  — эффективный параметр Холла, определяемый как тангенс угла между векторами  $\bar{J}$  и  $\bar{E}'$  (фиг. 9),  $\sigma_{эфф}$  — эффективная электропроводность, определяемая соотношением  $\sigma_{эфф} \equiv \bar{J}/\bar{E}'$ , где  $\bar{E}'$  — усредненная проекция вектора  $E'$  на  $\bar{J}$ ,  $\beta_{маж}$  — кажущийся параметр Холла, определяемый соотношением  $\beta_{маж} \equiv \bar{E}_\perp / uB (1-K)$ . В случае однородной плазмы выражение (9.19) принимает более простой вид:

$$\frac{T_e}{T} - 1 = \frac{\gamma}{3} M^2 (1-K)^2 \beta^2 \frac{1 + \beta_{маж}^2}{1 + \beta^2},$$

откуда видно, что при больших  $\beta$  отношение  $T_e/T$  сильно зависит от восстановления холловского напряжения  $\beta_{маж}/\beta$ . Для неустойчивой плазмы величина  $\beta_{эфф}$  меньше, чем  $\bar{\beta}$ , и, по-видимому, достигает насыщения, стремясь к значению порядка единицы, при больших  $\beta$ , тогда как  $\sigma_{эфф}$  (в некоторых экспериментах), по-видимому, стремится к  $\beta_{эфф}/\beta$ . Таким образом, в неустойчивой плазме величина  $(T_e/T) - 1$  меняется как  $\bar{\beta}$  при больших  $\beta$ . В случае же устойчивой плазмы при больших  $\beta$  величина  $(T_e/T) - 1$  меняется как  $\beta^2$  в случае секционированных электродов и не зависит от  $\beta$  в случае сплошных электродов. На основании выражения (9.19) можно сделать вывод, что фарадеевский генератор должен работать в неравновесном режиме даже при наличии неустойчивостей и что уровень неравновесности должен возрастать с ростом магнитного поля, хотя

не так сильно, как предсказывается теоретически для идеальной секционированного фарадеевского генератора.

**Задача 9.1.** Покажите, что для холловского генератора параметр нагрузки, при котором максимален электрический к.п.д., равен  $K_H = (\sqrt{1 + \beta^2} - 1)/\beta^2$ , а максимальный электрический к.п.д. дается выражением  $\eta_c = 1 - 2(\sqrt{1 + \beta^2} - 1)/\beta^2$ .

**Задача 9.2.** Проанализируйте рабочие характеристики генератора с диагональными проводящими стенками.

**Задача 9.3.** Проанализируйте влияние одномерных неоднородностей на характеристики генератора Холла.

**Задача 9.4.** Сравните влияние, оказываемое проскальзыванием ионов на максимальную выходную мощность, при трех основных способах соединения электродов в МГД-генераторах.

## § 10. ДВУХТЕМПЕРАТУРНАЯ ИОНИЗАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

На возможность возникновения неустойчивости электронных характеристик двухтемпературной плазмы в скрещенных электрическом и магнитном полях впервые указали Велихов [30], Велихов и Дыхне [31] и независимо от них Керреброк [14]. Одно из самых первых экспериментальных подтверждений теории было получено Велиховом, Дыхне и Шипуком [32], и с тех пор о подтверждении теории экспериментом сообщили многие другие авторы. Неустойчивость проявляется как флуктуации электронной плотности и температуры, а также электрического поля и тока и называется ионизационной или перегревной неустойчивостью. Она возникает, когда локальная скорость нагрева электронов за счет джоулева тепла превысит скорость, с которой это тепло может отдаваться за счет столкновений, излучения или теплопроводности. Вопрос об ионизационной неустойчивости интересен сам по себе, а кроме того, здесь мы имеем пример применения уравнений для законов сохранения, выведенных выше.

Температура  $T_e$  определяется уравнением для энергии электронов (5.3), которое можно написать в виде

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} n_e \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \mathbf{u} - \frac{\mathbf{j}_c}{en_e} \right) \cdot \nabla \right] kT_n + \\ + \left( \frac{3}{2} kT_e + \varepsilon_i \right) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \mathbf{u} + \frac{kT_e}{3kT_e/2 + \varepsilon_i} \frac{\mathbf{j}_e}{en_e} \right) \cdot \nabla \right] n_e + \\ + n_e \left( \frac{5}{2} kT_e + \varepsilon_i \right) \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{j}_e \cdot \mathcal{E} - \dot{C} - \dot{L}. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Здесь  $\mathcal{E} = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} + (\nabla p_e)/en_e$  есть обобщенное электрическое поле, которое фигурирует в уравнении закона Ома (8.26),  $\dot{C}$  —

скорости, передачи энергии через столкновения от электроном вала-лым частицам на единицу объема и  $\dot{L}$  — скорость, с которой теряет энергию единица объема за счет излучения и теплопроводности. Величины  $\dot{C}$  и  $\dot{L}$  зависят от параметров электронного газа  $n_e$  и  $T_e$ , но не зависят от электромагнитного поля. Вклад энергии, связанный с диффузионной скоростью электронов [формула (4.14) из гл. 8], в электронный тепловой поток  $q_e$  введен в уравнение (10.1) в явном виде, а вклад, связанный с теплопроводностью и тепловой диффузией, содержится в члене  $\dot{L}$ . Мы будем считать, что в рассматриваемых условиях проскальзывание ионов несущественно, и, таким образом, отождествим  $\mathbf{j}_e$  с полной плотностью тока  $\mathbf{j}$ .

Плотность электронов  $n_e$  описывается уравнением непрерывности для электронов [формула (4.8)]

$$\frac{\partial}{\partial t} n_e + \nabla \cdot n_e \left( \mathbf{u} - \frac{\mathbf{j}}{en_e} \right) = \dot{n}_e, \quad (10.2)$$

где  $\dot{n}_e$  — скорость образования электронов в единице объема. При достаточно больших значениях  $n_e$  мы можем рассмотреть стационарный случай, т. е. в уравнении (10.2) положить  $\dot{n}_e = 0$ . В случае одной ионизируемой компоненты такое допущение, а также предположение о том, что  $n_e$  велико, означают, что  $n_e$  и  $T_e$  связаны уравнением Саха при электронной температуре [формула (10.56) из гл. 2]:

$$\frac{n_s}{n_s - n_e} = 2 \frac{Z_i}{Z} \left( \frac{2\pi n_e k T_e}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\varepsilon_i/kT_e}. \quad (10.3)$$

Здесь  $n_s$  — полная плотность нейтральных частиц и ионов ионизируемой присадки,  $Z$  и  $Z_i$  — соответствующие статистические веса, которые мы будем считать приблизительно постоянными. Переходить от уравнения (10.2) к уравнению (10.3) не обязательно, но это упростит дальнейший анализ, а кроме того, уравнение (10.3) приблизительно соответствует экспериментальным условиям, при которых наблюдалась ионизационная неустойчивость.

Уравнения для переменных, связанных с электрическим полем, имеют вид

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (10.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (10.5)$$

Будем считать, что внешнее магнитное поле  $B$  постоянно и однородно, а магнитное число Рейнольдса мало. В системе координат, где  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ , закон Ома, связывающий  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$ , может быть записан в матричной форме [формулы (8.26)]:

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \sigma \beta \begin{pmatrix} 1 - \beta & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{pmatrix}, \quad (10.6)$$

где  $\sigma_p = \sigma/(1 + \beta^2)$ . Электропроводность и параметр Холла следующим образом выражаются через подвижность электронов  $\mu = e/m_e \nu_{ei}$ :  $\sigma = en_e \mu$  и  $\beta = \mu B$ .

Приведенные выше уравнения описывают взаимодействие электронного газа с электромагнитным полем и составляют основу для анализа ионизационной неустойчивости. Эту систему уравнений можно свести к двум уравнениям, связывающим  $n_e$  с электромагнитным полем в явном виде. Если предположить, что средняя массовая скорость жидкости имеет вид  $\mathbf{u} = [u(y), 0, 0]$ , то из уравнений (10.3) и (10.5) будет следовать, что

$$\nabla \times \mathcal{E} = 0 \quad (10.7a)$$

$$\mathcal{E} = \nabla \psi, \quad (10.7b)$$

где  $\psi$  соответствует обобщенному потенциалу. Таким образом, с учетом уравнений (10.3) и (10.6) мы можем переписать уравнение (10.1) в виде

$$\left( \frac{3}{2} kT_e (1 + a) + \varepsilon_i \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \right) n_e = \mathbf{J} \cdot \mathcal{E} - \dot{C} - \dot{I}, \quad (10.8a)$$

где

$$a = a(n_e) \equiv \frac{d \ln T_e}{d \ln n_e} = \frac{2 - n_e/n_s}{\left(1 - \frac{n_e}{n_s}\right) \left(\frac{3}{2} + \frac{\varepsilon_i}{kT_e}\right)}, \quad (10.8b)$$

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} + \frac{kT_e \left(1 - \frac{3a}{2}\right)}{3kT_e (1 + a)/2 + \varepsilon_i} \frac{\mathbf{J}}{en_e}, \quad (10.8b)$$

$$\mathbf{J} \cdot \mathcal{E} = \sigma_p \left[ (\nabla \psi)^2 + \beta^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right]. \quad (10.8g)$$

Аналогично уравнение (10.4) можно записать в виде

$$\nabla^2 \psi + \beta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial n_e}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial n_e}{\partial x} \right) + 2\beta \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial n_e}{\partial z} \frac{d\beta}{dn_e} = - \frac{\mathbf{J} \cdot \nabla \sigma_p}{\sigma_p^2},$$

где

$$\frac{d\beta}{dn_e} = \frac{\partial \beta}{\partial n_e} + a \frac{T_e}{n_e} \frac{\partial \beta}{\partial T_e}. \quad (10.9b)$$

Уравнения (10.8) и (10.9) образуют систему уравнений для  $n_e$  и  $\psi$ . Стационарное решение этих уравнений существует там, где плотность электронов равна однородному значению  $n_{e0}$  и где обобщенный потенциал дается соотношением  $\psi_0(x, y) = xE_{x0} + yE_{y0}$ .

Электрическое поле в движущейся системе координат  $\mathbf{E}'_0$  однородно и удовлетворяет условию

$$0 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}'_0 - \dot{C}_0 - \dot{I}_0, \quad (10.10)$$

где  $J_{x0} = \sigma_{\beta 0} (E'_{x0} - \beta_0 E'_{y0})$ ,  $J_{y0} = \sigma_{\beta 0} (E'_{y0} + \beta_0 E'_{x0})$  и  $J_{z0} = 0$ . Для исследования этого стационарного решения на устойчивость будем искать другое решение в виде:

$$n_e = n_{e0} + n_{e1}(x, t), \quad (10.11a)$$

$$\psi = \psi_0 + \psi_1(x, t), \quad (10.11b)$$

где индексом 1 обозначены малые возмущения. Подставив выражения (10.11) и уравнения (10.8a) и (10.9a) и произведя линеаризацию, получим, что возмущения должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\left( \frac{3}{2} kT_{e0} (1 + a_0) + \varepsilon_i \right) \left( \frac{d}{dt} + \mathbf{u}_0^* \cdot \nabla \right) n_{e1} = (\mathbf{J} \cdot \mathcal{E})_1 - (\dot{C})_1 - (\dot{I})_1 \quad (10.12)$$

и

$$\nabla^2 \psi_1 + \beta_0^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = - \frac{\mathbf{J}_0 \cdot \nabla \sigma_{\beta 1}}{\sigma_{\beta 0}^2} - \left( E'_{x0} \frac{\partial n_{e1}}{\partial y} - E'_{y0} \frac{\partial n_{e1}}{\partial x} \right) \left( \frac{d\beta}{dn_e} \right)_0 = - \left[ 1 - \frac{b_0 (1 - \beta_0^2)}{1 + \beta_0^2} \right] \frac{\mathbf{J}_0 \cdot \nabla n_{e1}}{\sigma_{\beta 0} n_{e0}} + \frac{b_0 \beta_0}{n_{e0}} (\mathbf{E}'_0 \times \nabla n_{e1})_z, \quad (10.13)$$

где

$$b_0 \equiv \left( \frac{d \ln \bar{n}_e H}{\partial \ln n_e} \right)_0. \quad (10.14)$$

Возмущение члена, характеризующего нагрев за счет джоулева тепла, можно записать так:

$$\begin{aligned} (\mathbf{J} \cdot \mathcal{E})_1 &= 2\sigma_{\beta 0} \mathbf{E}'_0 \cdot \nabla \psi_1 + \sigma_{\beta 1} E_0'^2 = \\ &= 2\sigma_{\beta 0} \mathbf{E}'_0 \cdot \nabla \psi_1 + \sigma_{\beta 0} E_0'^2 \left[ 1 - b_0 \frac{1 - \beta_0^2}{1 + \beta_0^2} \right] \frac{n_{e1}}{n_{e0}}. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Теперь мы можем искать решение для возмущений в виде плоских волн

$$n_{e1}(x, t) = \bar{n}_{e1} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (10.16a)$$

$$\psi_1(x, t) = \bar{\psi}_1 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (10.16b)$$

где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор, а  $\omega$  — частота волны. Из уравнения (10.13) получим

$$\psi_1 = \frac{i}{k^2 + \beta_0^2 k_z^2} \left\{ \left[ 1 - \frac{b_0 (1 - \beta_0^2)}{1 + \beta_0^2} \right] \frac{\mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{k}}{\sigma_{\beta 0}} - b_0 \beta_0 (\mathbf{E}'_0 \times \mathbf{k})_z \right\} \frac{n_{e1}}{n_{e0}}. \quad (10.17)$$



Окончательное выражение для возмущения члена, учитывающего нагрев за счет джоулева тепла, имеет вид

$$(\mathbf{J} \cdot \mathcal{E})_1 = \sigma_{\beta_0} \left\{ - \left[ 1 - \frac{b_0(1-\beta_0^2)}{1+\beta_0^2} \right] \frac{2(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k})(\mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{k})}{\sigma_{\beta_0}(k^2 + \beta_0^2 k_z^2)} + \right. \\ \left. + 2b_0\beta_0 \frac{(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k})(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{k})_z}{k^2 + \beta_0^2 k_z^2} + \left[ 1 - \frac{b_0(1-\beta_0^2)}{1+\beta_0^2} \right] E_0^2 \right\} \frac{n_{e1}}{n_{e0}}. \quad (10.18)$$

Неустойчивость, в принципе, может возникнуть, когда множитель, заключенный в фигурные скобки, положительен. Возникнет ли она действительно, зависит от того, будет ли возмущение скорости джоулева нагрева  $(\mathbf{J} \cdot \mathcal{E})_1$  больше возмущения члена, связанного с потерями  $(\mathcal{C})_1 + (L)_1$ .

Ввиду сложности алгебраических выкладок, необходимых для анализа уравнения (10.18) в общем случае, прибегнем к упрощениям, возможным в определенных предельных случаях. Для слабо ионизованного газа  $n_e/n_s \ll 1$ ,  $\bar{v}_{ei}/\bar{v}_{en} \ll 1$ ; тогда из уравнения (10.86), предполагая, что  $T_{e0}$  не слишком велико, получим

$$a_0 \approx \frac{2kT_{e0}}{v_i} \ll 1. \quad (10.19)$$

Чтобы оценить параметр  $b_0$ , можно написать

$$\bar{v}_{en} = \bar{C}_e [n_e(\bar{Q}_{ei} - \bar{Q}_{es}) + n_N \bar{Q}_{eN}], \quad (10.20a)$$

где  $\bar{C}_e = (8kT_e/\pi m_e)^{1/2}$  — средняя скорость электронов,  $\bar{Q}_{ei} = (e^4 \ln \Lambda / 24 \pi \epsilon_0^2) (kT_e)^{-2}$  — среднее сечение столкновения с передачей импульса между электронами и ионами,  $n_N = \sum_n n_n$  — полная плотность нейтральных частиц (включая  $n_s$ ),  $\bar{Q}_{es}$  — среднее сечение столкновения с передачей импульса между электронами и атомами присадки и  $\bar{Q}_{eN} = \sum_n (n_n/n_N) \bar{Q}_{en}$  — средневзвешенное сечение столкновений с передачей импульса между электронами и нейтральными частицами. Считая величину  $\bar{Q}_{eN}$  приблизительно постоянной, получим

$$b_0 \approx \left[ \frac{\bar{v}_{ei}}{\bar{v}_{en}} \left( 1 - \frac{\bar{Q}_{es}}{\bar{Q}_{ei}} \right) + \frac{a}{2} \left( 1 - 4 \frac{\bar{v}_{ei}}{\bar{v}_{en}} \right) \right]_0. \quad (10.20b)$$

Таким образом, в пределе слабой ионизации мы имеем

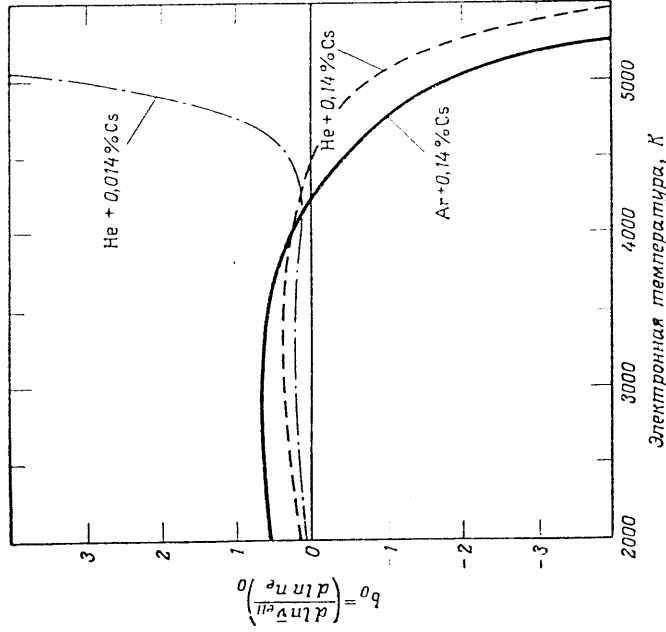
$$b_0 \ll 1. \quad (10.21)$$

В случае когда присадка почти полностью ионизована,  $a_0 \rightarrow \infty$  и  $b_0 \rightarrow \pm \infty$ . В случае же умеренной ионизации можно по-прежнему использовать условие (10.19), но  $b_0 \sim 1$ . На фиг. 23 представлена зависимость  $b_0$  от температуры электронов  $T_{e0}$  для некоторых типичных газовых смесей.

С учетом условия (10.21), примененного в пределе слабой ионизации, можно переписать уравнение (10.18) в более простом виде:

$$(\mathbf{J} \cdot \mathcal{E})_1 \approx \left\{ - \frac{2(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k})(\mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{k})}{(k^2 + \beta_0^2 k_z^2)} + \sigma_{\beta_0} E_0^2 \right\} \frac{n_{e1}}{n_{e0}}. \quad (10.22)$$

Очевидно, что волны возмущения, фронт которых лежит в пределах угла  $\Omega = \arctg \beta_0$ , определяемого векторами  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{J}_0$  (фиг. 24),



фиг. 23. Зависимость параметра ионизационной неустойчивости  $b_0$  от электронной температуры и при температуре газа 2000 К.

потенциально неустойчивы. Пусть  $\alpha$  — угол, который фронт волны составляет с вектором  $\mathbf{J}_0$  (отсчитываемый по часовой стрелке). Тогда возмущение скорости джоулева нагрева максимально при  $k_z = 0$  и  $\alpha = \alpha^* = \Omega/2$ , т. е. при

$$\operatorname{tg} \alpha^* = \frac{\sqrt{1 + \beta_0^2} - 1}{\beta_0}. \quad (10.23)$$

Соответствующее максимальное значение скорости джоулева нагрева таково:

$$(\mathbf{J} \cdot \mathcal{E})_1 \uparrow_{\text{макс}} = \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{E}_0 \sqrt{1 + \beta_0^2} \frac{n_{e1}}{n_{e0}}. \quad (10.24)$$

Член, описывающий скорость потери энергии в уравнении (10.1), можно записать в следующем виде [формула (5.3)]:

$$\dot{C} = 3n_e k \frac{m_e}{m_H} \bar{v}_{eH} (T_e - T), \quad (10.25)$$

где  $m_H^{\pm} = \sum_k (\bar{v}_{eH} \sqrt{v_{eH}}) m_H^{\pm}$ . Тогда возмущенный член в уравнении (10.12), связанный с  $\dot{C}$ , будет равен

$$(\dot{C})_1 = \dot{C}_0 \left\{ 1 + b'_0 + a_0 \frac{T_{e0}}{T_{e0} - T} \right\} \frac{n_{e1}}{n_{e0}}, \quad (10.26)$$

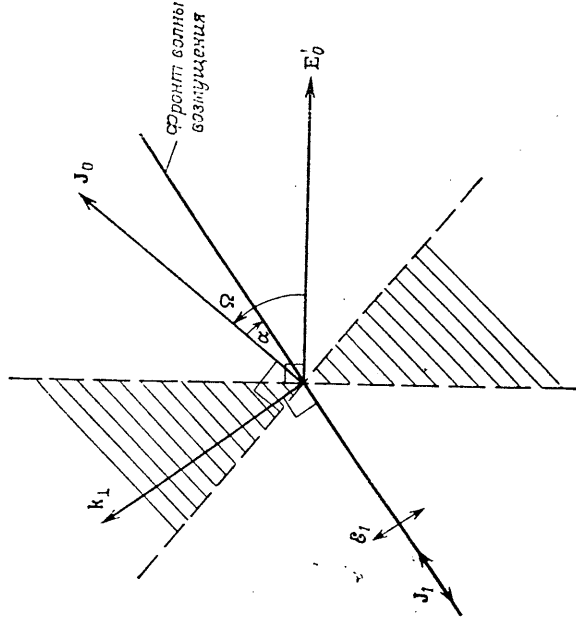
где

$$b'_0 \equiv \left[ \frac{d \ln (\bar{v}_{eH} / m_H)}{d \ln n_e} \right]_0. \quad (10.27)$$

Предположим, что основное значение имеют потери за счет столкновений. Тогда в пределе слабой ионизации имеем:

$$(J \cdot \mathcal{E})_{1, \text{ макс}} - (\dot{C})_1 \approx J_0 \cdot E'_0 \left\{ \sqrt{1 + \beta_0^2} - 1 - a_0 \frac{T_{e0}}{T_{e0} - T} \right\} \frac{n_{e1}}{n_{e0}}. \quad (10.28)$$

Поскольку мы пренебрегли членами порядка  $a_0$  и  $b_0$  (и считали  $b'_0 \approx b_0$ ), этот результат строго применим только в случае  $T_{e0} / (T_{e0} - T) \gg 1$ , но он может быть использован для иллюстрации основного вывода, заключающегося в том, что плазма будет неустойчива при достаточно больших значениях параметра Холла  $\beta_0$ . Для существо-



Фиг. 24. Ориентация фронта волны ионизационного возмущения, которые соответствуют возможной неустойчивости.

$-T) \gg 1$ , но он может быть использован для иллюстрации основного вывода, заключающегося в том, что плазма будет неустойчива при достаточно больших значениях параметра Холла  $\beta_0$ . Для существо-

вания ионизационной неустойчивости необходимыми для условия, в частности: плазма должна быть неравновесной (т. е.  $T_{e0} \neq T$ ) а магнитное поле должно быть отличным от нуля (т. е.  $\beta_0 \neq 0$ ).

Возвращаясь теперь к общему случаю произвольной степени ионизации, перепишем уравнение (10.18) в следующем виде:

$$(J \cdot \mathcal{E})_1 = J_0 \cdot E'_0 \frac{k_{\perp}^2}{k^2 + \beta_0^2 k_{\perp}^2} \left\{ [(1 - b_0)^2 + \beta_0^2]^{1/2} \cos 2(\alpha^* - \alpha) + [1 + \beta_0^2 - b_0(1 - \beta_0^2)] \left( \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \right) \right\} \frac{n_{e1}}{n_{e0}}. \quad (10.29)$$

Здесь  $k_{\perp} = \sqrt{k^2 - k_z^2}$  — проекция волнового вектора на плоскость, определяемую векторами  $E'_0$  и  $J_0$ , а  $\alpha$  — угол, который след фронта волны возмущения в этой плоскости составляет с вектором  $J_0$ . Член, учитывающий джоулев нагрев, максимален при таком значении угла  $\alpha = \alpha^*$ , при котором

$$\operatorname{tg} 2\alpha^* = \frac{\operatorname{tg} \Omega}{1 - b_0}. \quad (10.30)$$

В ходе вывода мы использовали следующие преобразования:  $E'_0 \cdot k = E'_0 k_{\perp} \cos(\pi/2 + \Omega - \alpha)$ ,  $(E'_0 \times k)_z = E'_0 k_{\perp} \sin(\pi/2 + \Omega - \alpha)$ ,  $J_0 \cdot k = J_0 k_{\perp} \cos(\pi/2 - \alpha)$ , и выразили (10.18) как функцию  $\alpha$  в виде  $A \cos 2\alpha + B \sin 2\alpha + C$ , где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — функции других переменных. Были использованы также следующие соотношения:  $J_0 \cdot E'_0 = \sigma_{\beta 0} E_0^2$ ,  $J_0 = \sigma_{\beta 0} E_0 \cos \Omega$  и  $\operatorname{tg} \Omega = \beta_0$ . Уравнение (10.30) показывает, что при  $0 < b_0 < 1$  фронт волны, создающей максимальное возмущение, лежит ближе к  $E'_0$ , чем в пределе слабой ионизации.

Фазовая скорость и инкремент волны, создающей максимальное возмущение скорости джоулева нагрева, получаются при подстановке уравнения (10.16a) в уравнение (10.12). Представив частоту волны в виде  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ , для возмущения концентрации получим

$$n_{e1}(x, t) = \bar{n}_{e1} e^{\omega_i t} e^{i(k \cdot x - \omega_r t)}.$$

Фазовая скорость равна

$$u_p^* \equiv \frac{\omega_r}{x} = u_0^* \cdot \frac{k}{k}, \quad (10.31a)$$

где  $u^*$  дается уравнением (10.8в). В пределе слабой ионизации

$$u_p^* \approx u \cdot \frac{k}{k} + \left( \frac{k T_{e0}}{v_l} \right) \frac{J_0}{v_l} \cdot \frac{k}{k}, \quad (10.31б)$$

а в пределе полной ионизации

$$u_p^* \approx u \cdot \frac{k}{k} - \frac{J_0}{en_{e0}} \cdot \frac{k}{k}. \quad (10.31в)$$

Таким образом, в системе отсчета, где  $u = 0$ , возмущения в этих двух предельных случаях движутся в противоположных направлениях.

Запишем максимальное значение правой части соотношения (10.12) как

$$(\mathbf{J} \cdot \mathcal{E})_{1, \text{ макс}} = (\dot{C})_1 - (\dot{L})_1 = \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{E}_0 \Psi \frac{n_{e1}}{n_{e0}}.$$

Тогда инкремент волны, нарастающей с наибольшей скоростью, дается выражением

$$\tau^{-1} = \omega_i = \frac{\mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{E}_0}{n_{e0} [3kT_{e0} (1 + a_0)/2 + \varepsilon_i]} \Psi, \quad (10.32)$$

Плазма будет устойчивой при  $\Psi < 0$  и неустойчивой при  $\Psi > 0$ . Можно показать, что правая часть соотношения (10.29) максимальна при  $k_z = 0$ . Таким образом, в случае, когда преобладают потери за счет столкновений,

$$\Psi = [(1 - b_0)^2 + \beta_0^2]^{1/2} - [1 + b'_0 + 2c_1], \quad (10.33)$$

где

$$c_1 = \frac{a_0 T_{e0}}{2(T_{e0} - T)}. \quad (10.34)$$

Поэтому плазма будет неустойчива при значениях параметра Холла  $\beta_0 > \beta_{\text{крит}}$ , где

$$\beta_{\text{крит}} = 2 \sqrt{(b_0 + c)(1 + c)}. \quad (10.35)$$

Здесь  $c$  определяется соотношением

$$c = c_1 + \frac{b'_0 - b_0}{2}. \quad (10.36)$$

При условиях, типичных для МГД-генераторов закрытого цикла,  $\beta_{\text{крит}} \sim 1 \div 2$

и характерное время развития неустойчивости составляет

$$\tau \approx \frac{n_{e0} \sigma_0 \varepsilon_i}{J_0^2} \approx \frac{(10^{20} \text{ м}^{-3}) (20 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}) (4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж})}{(2 \cdot 10^4 \text{ А} \cdot \text{м}^{-2})^2} \approx 10^{-6} \text{ с},$$

а фазовая скорость волны с максимальным инкрементом (при  $\mathbf{u} = 0$  и  $\beta_0 \gg 1$ ) будет равна

$$u_p^* \approx \frac{kT_{e0}}{v_i} \frac{J_0}{n_{e0}} \frac{1}{V^2} \approx \frac{1}{20} \frac{2 \cdot 10^4 \text{ А} \cdot \text{м}^{-2}}{(1,6 \cdot 10^{10} \text{ Кл}) (10^{20} \text{ м}^{-3})} \sqrt{2} \approx 40 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Многие закономерности установления ионизационной неустойчивости, предсказанные линейной теорией, были подтверждены экспериментально. На фотографиях, сделанных при помощи электронно-оптического преобразователя [21], видны стрелы плоской волны, причем угол, под которым они расположены по отношению к полному току, согласуется с теорией. Фазовая скорость и углы этих

стрел, измеренные при помощи зондов [2], также согласуются с теорией. Одновременные измерения флуктуаций электрического поля, температуры и плотности электронов при повышении величины магнитного поля, проведенные в работе [21], показывают, что большие коррелированные флуктуации всех этих трех величин появляются при значении параметра Холла порядка единицы при плотности тока выше  $0,5 \text{ А} \cdot \text{см}^{-2}$ . Результаты исследования зависимости структуры и фазовой скорости стрел и величины  $\beta_{\text{крит}}$  от параметров плазмы [25] также согласуются с теорией.

**Задача 10.1.** Покажите, что независимо от степени ионизации инкремент ионизационной неустойчивости максимален для возмущений в виде плоских волн, распространяющихся в направлении, перпендикулярном магнитному полю.

**Задача 10.2.** В полностью ионизованной или замороженной плазме могут наблюдаться только флуктуации температуры электронов (если речь идет об ионизационной неустойчивости). Разберитесь в вопросе об устойчивости такой плазмы, применив теорию, изложенную в данном параграфе, к случаю  $a_0 \gg 1$ .

**Задача 10.3.** Начертите примерный график зависимости  $\beta_{\text{крит}}$  от  $T_e$  для одной из смесей, приведенных на фиг. 23.

## Литература

1. *Alfvén H.*, Arkiv. f. mat., astr. o. fys., 29B, № 2 (1942).  
On the Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves.
2. *Bredelow G., Hodgson R. T.*, AIAA Journ., 6, 1277 (1968).  
Electrical Conductivity in Seeded Noble Gas Plasmas in Crossed Electric and Magnetic Fields.
3. *Brown R. T., Mitchner M.*, Phys. Fluids, 14, 933 (1971).  
Measurements in a Nonequilibrium Plasma Boundary Layer.
4. *Carlson G. A.*, NASA, TN D-5244 (1969).
5. *Circulating Currents in Linear Crossed-Field Generators and Accelerators.*  
*Cool T. A., Zukoski E. E.*, Phys. Fluids, 9, 780 (1966).
6. *Recombination, Ionization and Nonequilibrium Electrical Conductivity in Seeded Plasmas.*  
*Devoto R. S.*, Zs. f. Naturforsch., 24a, 967 (1969).  
Heat and Diffusion Fluxes in a Multicomponent Ionized Gas in a Magnetic Field. I. General Expressions.
7. *Hartmann J.*, Danske Videnskab. Selskab, Mat.-fys. Medd., 15, № 6 (1937).  
Hydrodynamics I: Theory of the Laminar Flow of an Electrically Conductive Liquid in a Homogeneous Magnetic Field.
8. *Hartmann J., Lazarus F.*, Danske Videnskab. Selskab, Mat.-fys. Medd., 15, № 7 (1937).  
Hydrodynamics II: Experimental Investigations on the Flow of Mercury in a Homogeneous Magnetic Field.
9. *Hirschfelder J. O., Curtiss C. F., Bird R. B.*, Molecular Theory of Gases and Liquids, Wiley, 1954.
10. *Hughes W. F., Young F. J.*, The Electromagnetodynamics of Fluids, Wiley, 1966.

11. *Kalkhman L. E.*, Elements of Magnetohydrodynamics, Saunders, 1967.
12. *Karlovitz H., Haines D.*, в книге Proc. 3rd Symp. Engin. Aspects of MHD, eds. N. W. Mather, G. W. Sutton, Gordon and Breach, 1964.  
History of K and H Generator and Conclusions Drawn from the Experimental Results.
13. *Kerrebrock J. L.*, в книге Proc. 2nd Symp. Engin. Aspects of MHD, eds. C. Munnal, N. W. Mather, Columbia, University Press, 1962.  
Conduction in Gases with Elevated Electron Temperatures.
14. *Kerrebrock J. L.*, AIAA Journ., 2, 1072 (1964).
15. Nonequilibrium Ionization Due to Electron Heating I: Theory. *Kutikovskiy A. G., Lyubimov G. A.*, Magneto-hydrodynamics, Addison-Wesley, 1965 (см. также: *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.*, Магнитная гидродинамика, М., 1962).
16. *Ландау Л. Д., Лишиц Е. М.*, Теория поля, М., 1973.
17. *Liermann H. W., Rosiko A.*, Elements of Gasdynamics, Wiley, 1957.
18. *Mattsson A. C. J., et al.*, AVCO Research Rept. № 238 (1965).  
Performance of a Self-excited MHD Generator.
19. *Ranofsky W. K. H., Phillips M.*, Classical Electricity and Magnetism, Addison-Wesley, 1955.
20. *Reilly J. P., Oates G. C.*, AIAA Preprint № 67-717 (1967).  
Insulator Boundary Layers in a Supersonic Magnetogasdynamic Channel.
21. *Riedmiller W.*, в книге Proc. of the Fourth Int. Symp. on Magneto-hydrodynamic Electrical Power Generation, vol. 1, Warsaw, 1968, p. 519.  
Experimental Investigation of Instabilities in a Potassium-Seeded Argon Plasma in Crossed Electric and Magnetic Fields.
22. *Rosa R. J.*, Phys. Fluids, 4, 812 (1961).  
Physical Principles of Magneto-hydrodynamic Power Generation.
23. *Rosa R. J.*, Phys. Fluids, 5, 1081 (1962).
24. *Rosa R. J.*, Magneto-hydrodynamic Energy Conversion, McGraw-Hill, 1968 (имеется перевод: *Роза Р.*, Магнито-гидродинамическое преобразование энергии, изд-во «Мир», 1970).
25. *Шпук И. Я., Папкин С. В.*, ДАН СССР, сер. физ., 176, 1278 (1968).  
Ионизационная неустойчивость в скрещенных полях.
26. *Soltes A., Kerrebrock J. L.*, в книге Proc. of the 9th Symp. Engin. Aspects of MHD, 1968.  
Effect of Nonuniformities on the Performance of Nonequilibrium MHD Generators.
27. *Sonju O. K., Kruger C. H.*, Phys. Fluids, 12, 2548 (1969).  
Experiments on Hartmann Channel Flow in Plasmas.
28. *Spitzer L.*, Physics of Fully Ionized Gases, Interscience, 1962.
29. *Sutton G. W., Sherman A.*, Engineering Magneto-hydrodynamics, McGraw-Hill, 1965.
30. *Velikhov Ye. P.*, в книге Proc. of the First Int. Symp. on Magnetoplasma-dynamics Electrical Power Generation, Newcastle-upon-Tyne, 1962.  
Hall Instability of Current Carrying Slightly Ionized Plasmas.
31. *Velikhov Ye. P., Dykhne A. M.*, в книге Proc. of the Sixth Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Paris, 1963, p. 511.  
Plasma Turbulence due to the Ionisation Instability in a Strong Magnetic Field.
32. *Velikhov Ye. P., Dykhne A. M., Shipuk I. Ya.*, в книге Proc. of the Seventh Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Belgrade, 1965.  
Ionization Instability of a Plasma with Hot Electrons.
33. *Vincenti W. G., Kruger C. H., Jr.*, Introduction to Physical Gas Dynamics, Wiley, 1965.
34. *Way S., et al.*, Journ. of Engin. for Power, 83A, 397 (1961).
35. *Ajfaén H.*, Nature, 150, 405 (1942).
36. *Mattsson A. C. J., et al.*, Mech. Eng., 88, 38 (1966).

## ТЕОРИЯ СТОЛКНОВЕНИЙ

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

Количественно столкновительные процессы характеризуются эффективными сечениями столкновений. Понятие эффективного сечения было введено в гл. 2, § 3. В гл. 2, § 4, были изложены общие соображения о порядке величины эффективных сечений, а в § 14 той же главы приведены типичные экспериментальные данные об эффективных сечениях для различных процессов. Как отмечалось в гл. 2, § 2, столкновения могут быть упругими и неупругими в зависимости от того, сохраняются или не сохраняются при столкновении импульс и энергия поступательного движения.

В данной главе мы хотим изложить некоторые предварительные сведения о теоретическом вычислении эффективных сечений. Большая часть главы будет посвящена классической теории сечений упругих столкновений. Эта теория является строгой в том смысле, что она полностью выводится из законов ньютоновской механики. Мы покажем, что результаты вычисления сечений упругих столкновений на основе классической теории справедливы при весьма разнообразных условиях и согласуются с результатами квантовомеханических расчетов. Поскольку же структура атомов подчиняется законам квантовой механики, мы не можем ожидать, что классическая механика окажется строго применимой и при вычислении эффективных сечений неупругих процессов. Для некоторых неупругих процессов были предложены квазиклассические теории эвристического характера, которые в ряде случаев дают хорошие результаты. При мером может служить томсоновское сечение ионизации, о котором говорилось в конце § 8 гл. 2. Другой пример будет приведен в § 8 и 9 данной главы.

## § 2. ДИНАМИКА УПРУГОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ЧАСТИЦ

Рассмотрим две частицы с массами  $m_1$  и  $m_2$ , положение которых в лабораторной системе координат определяется векторами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  (фиг. 1). (Чтобы увязать дальнейшее изложение с тем, что говорилось в гл. 2, § 6, введенную здесь лабораторную систему отсчета будем рассматривать как систему отсчета, движущуюся со средней массовой скоростью среды.) Если частицы упруго взаимодействуют друг с другом, то сила, с которой одна частица действует на другую,

может быть представлена как градиент некоего потенциала. Будем предполагать, что потенциальная энергия системы

$$\varphi \equiv \varphi(r) \quad (2.1)$$

зависит только от расстояния между частицами

$$r \equiv |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|. \quad (2.2)$$

Тогда силы, действующие на частицы, удовлетворяют соотношению

$$\mathbf{F}_1 \equiv -\nabla_1 \varphi = -\frac{d\varphi}{dr} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \nabla_2 \varphi = -\mathbf{F}_2 \quad (2.3)$$

и называются центральными силами, поскольку они действуют вдоль линии, связывающей центры частиц. Символом  $\nabla_1 \equiv \partial/\partial \mathbf{r}_1$  мы обозначаем градиент, взятый по координатам первой частицы  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ , и то же самое относится к символу  $\nabla_2$ .

Классическая задача о взаимодействии двух частиц состоит в нахождении траекторий этих частиц  $\mathbf{r}_1(t)$  и  $\mathbf{r}_2(t)$ , т. е. зависимости их координат от времени  $t$ . Траектории определяются уравнениями Ньютона

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\nabla_1 \varphi, \quad (2.4a)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\nabla_2 \varphi. \quad (2.4b)$$

Фиг. 1.

Здесь точками над буквами обозначено дифференцирование по времени. Поскольку это дифференциальные уравнения второго порядка, чтобы найти траектории частиц, нужно задать координаты и скорости каждой частицы в момент времени  $t = 0$  или систему эквивалентных начальных условий (всего 12).

Чтобы решить задачу, перейдем к координатам центра масс и относительным координатам [формула (6.22) из гл. 2]:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (2.5b)$$

Динамические уравнения для этих координат можно получить, дважды продифференцировав уравнения (2.5) по времени и используя уравнения (2.4). Для координаты центра масс имеем

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2} = \frac{-\nabla_1 \varphi - \nabla_2 \varphi}{m_1 + m_2} = 0.$$

Отсюда следует, что скорость центра масс

$$\mathbf{G} \equiv \dot{\mathbf{R}} \quad (2.6)$$

является интегралом движения (т. е. не зависит от скорости и, следовательно, определяется начальными условиями). Для относительной координаты имеем

$$\ddot{\mathbf{r}} \equiv \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{-\nabla_1 \varphi}{m_1} + \frac{\nabla_2 \varphi}{m_2} = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \nabla_1 \varphi,$$

что можно переписать в виде

$$m_{12} \ddot{\mathbf{r}} = -\nabla \varphi = -\frac{d\varphi}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (2.7)$$

Символом  $\nabla \equiv \partial/\partial \mathbf{r}$  обозначена операция градиента по координатам вектора относительно положения частиц, а величина

$$m_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.8)$$

называется *приведенной* массой [формула (6.24) из гл. 2].

Мы видим, что после преобразования (2.5) задача о взаимодействии двух частиц [уравнения (2.4)] свелась к эквивалентной одной частицной задаче [уравнение (2.7)]. Это задача о движении частицы с массой  $m_{12}$  под действием силы, которая зависит только от расстояния между частицей и началом координат. Мы будем называть систему отсчета, в которой эта гипотетическая частица описывает траекторию  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , *относительной системой отсчета*. На самом деле  $\mathbf{r}(t)$  есть траектория частицы 1 в системе отсчета, связанной с частицей 2.

Прямоуго преобразованию (2.5) соответствует обратное преобразование

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_{12}}{m_1} \mathbf{r}, \quad (2.9a)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_{12}}{m_2} \mathbf{r}, \quad (2.9b)$$

и поэтому координаты частиц по отношению к системе центра масс имеют вид

$$\mathbf{r}'_1 \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} = \frac{m_{12}}{m_1} \mathbf{r}, \quad (2.10a)$$

$$\mathbf{r}'_2 \equiv \mathbf{r}_2 - \mathbf{R} = -\frac{m_{12}}{m_2} \mathbf{r}. \quad (2.10b)$$

Очевидно, что в системе центра масс полный импульс поступательного движения системы равен нулю, т. е.

$$\mathbf{p} \equiv m_1 \dot{\mathbf{r}}'_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}'_2 = 0, \quad (2.11)$$

Полный момент импульса в системе центра масс

$$\mathbf{L} \equiv m_1 \mathbf{r}'_1 \times \dot{\mathbf{r}}'_1 + m_2 \mathbf{r}'_2 \times \dot{\mathbf{r}}'_2 = m_{12} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (2.12)$$

есть не что иное, как момент импульса гипотетической частицы с приведенной массой в относительной системе отсчета. Полная энергия системы в системе отсчета, связанной с центром масс,

$$E = \frac{m_1 (\dot{r}_1)^2}{2} + \frac{m_2 (\dot{r}_2)^2}{2} + \varphi(r) = \frac{m_{12} \dot{r}^2}{2} + \varphi(r), \quad (2.13)$$

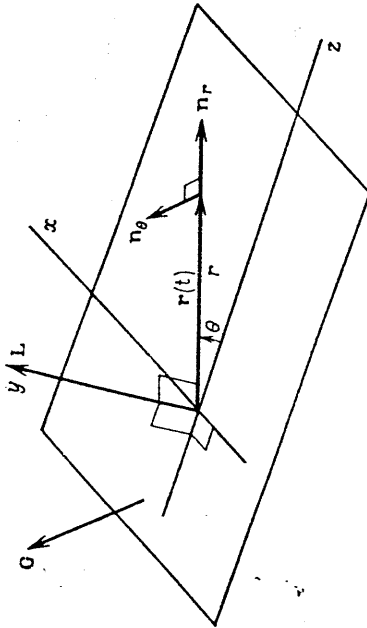
также есть не что иное, как полная энергия гипотетической частицы с приведенной массой в относительной системе отсчета. Дифференцируя по времени величины  $L$  и  $E$  и используя уравнение (2.7), можно непосредственно показать, что  $L$  и  $E$  также являются интегралами движения, т. е.

$$\frac{dL}{dt} = 0, \quad \frac{dE}{dt} = 0. \quad (2.14)$$

Поскольку

$$r(t) \cdot L = 0, \quad (2.15)$$

а величина  $L$  постоянна во времени, мы приходим к важному выводу о том, что траектория частицы с приведенной массой (а также и траектория каждой реальной частицы) лежит в плоскости, перпендикулярной вектору  $L$ . Мы будем называть эту плоскость плоскостью



Фиг. 2.

движения. Предположим, что ось  $y$  относительной системы отсчета направлена вдоль вектора  $L$ , как показано на фиг. 2. Тогда траекторию (частицы) в плоскости  $z-x$  удобно задавать в полярных координатах  $(r, \theta)$ . Вводя единичные векторы  $n_r$  и  $n_\theta$ , направленные параллельно и перпендикулярно вектору  $r$ , имеем

$$r = r n_r, \quad (2.16a)$$

$$\dot{r} = \dot{r} n_r + r \dot{n}_r = \dot{r} n_r + r \dot{\theta} n_\theta. \quad (2.16b)$$

Подставив эти соотношения в уравнения (2.12) и (2.13), получим уравнение движения для частицы с приведенной массой в виде

$$|L| \equiv l \equiv m_{12} r^2 |\dot{\theta}|, \quad (2.17)$$

$$E = \frac{m_{12}}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \varphi(r) = \frac{m_{12} \dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2m_{12} r^2} + \varphi(r). \quad (2.18)$$

Величина  $l$  в уравнении (2.17) есть модуль вектора момента импульса  $L$ .

Таким образом, динамическая задача сводится к решению двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. В принципе уравнение (2.18) дает нам  $r(t)$ , а проинтегрировав уравнение (2.17), можно найти  $\theta(t)$ . При данной постановке задачи в качестве двенадцати начальных условий можно задать величины  $R(0)$ ,  $G$  и  $L/l$ , которыми определяются положение и ориентация плоскости движения, и величины  $l$ ,  $E$  и  $r(0)$  и  $\theta(0)$ , которыми определяется траектория частицы в плоскости движения.

### § 3. КЛАССИФИКАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ

Запишем уравнение (2.18) в виде

$$E = \frac{m_{12} \dot{r}^2}{2} + \varphi^*(r), \quad (3.1)$$

где

$$\varphi^*(r) = \varphi(r) + \frac{l^2}{2m_{12} r^2}. \quad (3.2)$$

Тогда можно считать, что уравнение (3.1) описывает одномерное движение частицы с массой  $m_{12}$  в поле фиктивного потенциала  $\varphi^*(r)$ . Выражение (3.1) дает интеграл энергии для частицы, уравнение движения которой имеет вид

$$m_{12} \frac{d^2 r}{dt^2} = F^*(r),$$

где

$$F^*(r) = -\frac{d\varphi^*}{dr} = -\frac{d\varphi}{dr} + \frac{l^2}{m_{12} r^3} = F(r) + \frac{m_{12} (r\dot{\theta})^2}{r}. \quad (3.3)$$

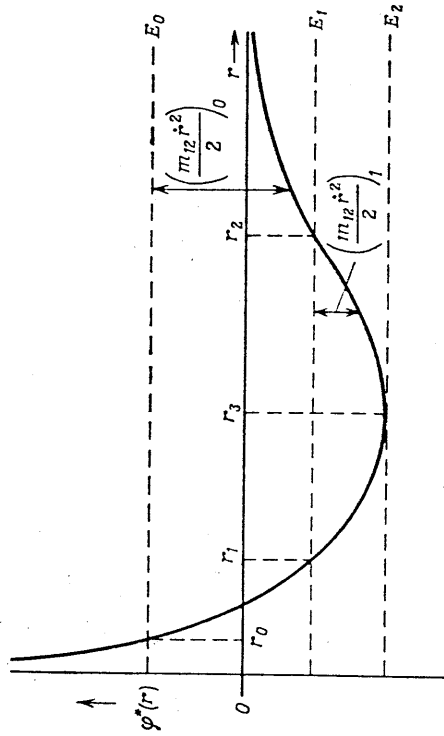
Мы видим, что второй член в выражении для фиктивной силы  $F^*$  соответствует обычной центростремительной силе. Поскольку радиальная координата рассматривается отдельно, получается, что на частицу действует не только сила  $F(r)$ , но также и центростремительная сила.

В применении к одномерной задаче уравнение (3.1) весьма удобно, так как позволяет легко получить качественную картину

возможных траекторий, соответствующих любому заданному потенциалу. В качестве примера рассмотрим потенциал

$$\varphi(r) = -\frac{A}{r}, \quad (3.4)$$

где  $A$  — положительная константа. Это потенциал кулоновского электростатического притяжения между частицами с зарядом разного знака (или гравитационного притяжения между телами); ему



Фиг. 3. Фиктивный потенциал для кулоновского взаимодействия.

соответствует известный закон, согласно которому сила обратно пропорциональна квадрату расстояния. Кривая фиктивного потенциала  $\varphi^*(r)$  представлена на фиг. 3. На графике отмечены три возможных значения полной энергии  $E$ , и мы рассмотрим отдельно траектории в каждом из этих случаев.

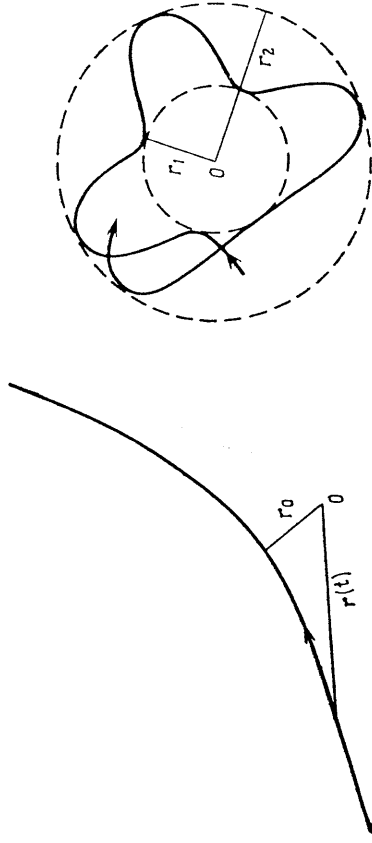
1. *Случай*  $E = E_0 \geq 0$ . В соответствии с кривой, представленной на фиг. 3, и выражением (3.1) радиальная кинетическая энергия дается формулой

$$\left(\frac{m_{12} \dot{r}}{2}\right)_0 = E_0 - \varphi^*(r).$$

Поскольку эта величина должна быть положительной, возможны только те траектории, для которых  $E_0 \geq \varphi^*(r)$ . Следовательно, частица должна двигаться в области, где  $r \geq r_0$ . Величина  $r_0$  — это *расстояние максимального сближения*. Поскольку верхней границы для  $r$  в этом случае нет, траектория является *инфинитной*. Как показано на фиг. 4, частица приближается из бесконечности до точки поворота при  $r_0$ , где вся ее кинетическая энергия переходит в энергию вращательного движения, и затем возвращается

в бесконечность. Траектория такого типа соответствует упругому столкновению и будет основным предметом дальнейшего исследования в данной главе.

2. *Случай*  $E_2 \leq E = E_1 \leq 0$ . Из фиг. 3 видно, что в этом случае имеются две точки поворота. Частица вынуждена двигаться в границах  $r_1 \leq r \leq r_2$  (фиг. 5), и поэтому ее траектория называется



Фиг. 4. Инфинитная траектория.

Фиг. 5. Финитная траектория.

*финитной*. Такие траектории являются классическим аналогом атомных орбит. Предельному случаю  $E = E_2$  соответствует круговая орбита радиусом  $r_3$ . Поскольку  $\dot{r} = 0$ , из уравнения (3.3) получаем соотношение

$$\frac{m_{12} (r_3 \dot{\theta})^2}{r_3} = \frac{A}{r_3^2},$$

тождественное соотношению (4.2) из гл. 2, которое мы ввели, когда речь шла о боровской модели атома водорода.

3. *Случай*  $E < E_2$ . При этом условии решение, имеющее физический смысл, отсутствует, так как величина  $r$  получается мнимой. Понятие финитной и инфинитной траекторий мы ввели на конкретном примере. Однако из дальнейшего будет видно, что это общее понятие и оно сохраняет свой смысл при любых потенциалах  $\varphi(r)$ .

**Задача 3.1.** Пользуясь методом эквивалентного одномерного потенциала, проанализируйте качественно характер движения частиц в поле следующих центральных потенциалов:

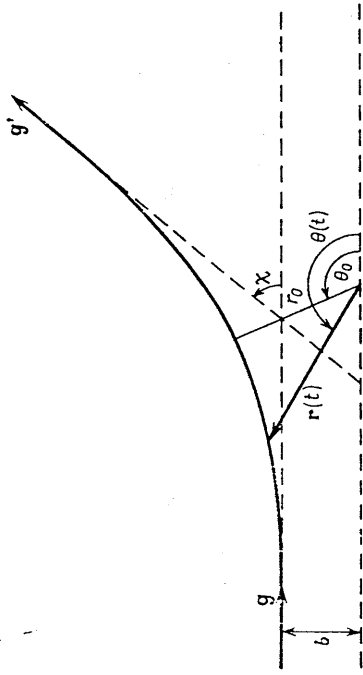
- 1)  $\varphi(r) = -a/r^3, \quad a > 0;$
- 2)  $\varphi(r) = br^2, \quad b > 0.$

#### § 4. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ

Иследуем теперь траектории, соответствующие столкновениям. Мы будем рассматривать лишь такие потенциалы, которые удовлетворяют условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = 0, \quad (4.1)$$

с тем, чтобы частицы, удаленные на большое расстояние, можно было считать свободными. Предположим, что первоначально частицы



Фиг. 6. Траектория частицы при столкновении в плоскости движения в относительной системе координат.

бесконечно удалены и приближаются друг к другу с начальной скоростью  $g$ . Тогда из уравнений (4.1) и (2.18) следует, что

$$E \equiv \frac{m_{12}}{2} g^2, \quad (4.2)$$

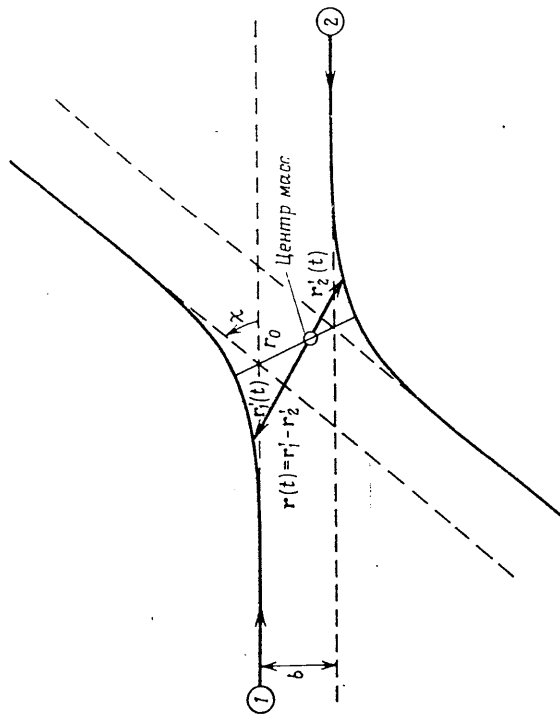
где  $g = |g|$ . Типичная траектория частицы для этого случая в плоскости движения в относительной системе отсчета показана на фиг. 6, а в системе центра масс — на фиг. 7.

Расстояние максимального сближения в гипотетическом случае, когда  $\varphi(r) = 0$ , называется прицельным расстоянием. Как показано на фиг. 7, прицельное расстояние есть расстояние между продолжениями прямых начальных первоначальных траекторий сближающихся частиц. На фиг. 6 показано прицельное расстояние в относительной системе отсчета. Задание прицельного расстояния эквивалентно заданию момента импульса, поскольку

$$l = m_{12} g b. \quad (4.3)$$

Следовательно, начальные условия, которыми полностью определяются траектории частиц при столкновении в плоскости движения, таковы:  $b, g, r = \infty$  и  $\theta = \pi$ . Угол  $\theta(t)$  отсчитывается относительно направления вектора  $g$  против часовой стрелки (фиг. 6). Угол  $\chi$

между конечной  $g'$  и начальной  $g$  относительными скоростями называется *углом рассеяния* в относительной системе отсчета. Углом, что поскольку угол рассеяния есть характеристика траектории, он зависит только от двух начальных значений  $b$  и  $g$ , т. е.  $\chi = \chi(b, g)$ . Так как угол  $\chi$  — дополнительный для угла между начальным



Фиг. 7. Траектории частиц при столкновении в плоскости движения в системе координат, движущейся со скоростью центра масс.

и конечным направлением вектора  $g(t)$ , он, очевидно, одинаков и в относительной системе отсчета, и в системе центра масс (фиг. 6 и 7).

Для определения  $\chi = \chi(b, g)$  у нас имеются первые интегралы уравнений движения (2.18) и (2.17). Пользуясь соотношениями (4.2) и (4.3), эти уравнения можно переписать в виде

$$\frac{dr}{dt} = \mp g \left[ 1 - \left( \frac{b}{r} \right)^2 - \frac{\varphi(r)}{E} \right]^{1/2}, \quad (4.4)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{gb}{r^2}. \quad (4.5)$$

Дифференциальное уравнение для траектории в относительной системе отсчета получается непосредственно из уравнений (4.4) и (4.5) и имеет вид

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \frac{r^2}{b} \left[ 1 - \left( \frac{b}{r} \right)^2 - \frac{\varphi(r)}{E} \right]^{1/2}. \quad (4.6)$$

Верхний знак в уравнениях (4.4) и (4.6) соответствует фазе сближения частиц, нижний знак — фазе удаления частиц после столкнове-



ния. Расстояние максимального сближения  $r = r_0$  соответствует условию  $dr/d\theta = 0$  и определяется уравнением<sup>1)</sup>

$$\left(\frac{r_0}{b}\right)^2 \left[1 - \frac{\varphi(r_0)}{E}\right] - 1 = 0. \quad (4.7)$$

Величина  $\theta = \theta_0$ , соответствующая значению  $r = r_0$ , может быть найдена из соотношения

$$\int_{\pi}^{\theta_0} d\theta = \int_{r_0}^{\infty} \frac{b dr}{r^2 [1 - (b/r)^2 - \varphi(r)/E]^{1/2}},$$

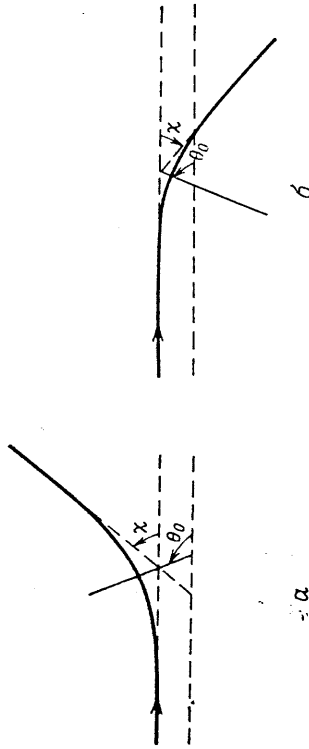
а именно

$$\theta_0 = \pi - \int_{r_0}^{\infty} \frac{b dr}{r^2 [1 - (b/r)^2 - \varphi(r)/E]^{1/2}} = \pi - \mathcal{J}(b, g), \quad (4.8a)$$

где

$$\mathcal{J}(b, g) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{b dr}{r^2 [1 - (b/r)^2 - \varphi(r)/E]^{1/2}}. \quad (4.8b)$$

Из фиг. 6, иллюстрирующей случай взаимодействия частиц при



Фиг. 6. Углы рассеяния при взаимном отталкивании и притяжении. а — отталкивание; б — притяжение.

наличии только силы отталкивания, видно, что  $\theta_0$  и  $\chi$  связаны соотношением

$$\chi = 2\theta_0 - \pi.$$

<sup>1)</sup> Вообще говоря, потенциалы могут быть смешанными в том смысле, что при одних значениях  $r$  они являются отталкивающими, а при других значениях — притягивающими. Решение уравнения (4.7) всегда существует в случае чисто отталкивающих потенциалов. Для некоторых притягивающих потенциалов имеются значения  $b$  и  $g$ , при которых действительного решения нет. Реальные потенциалы всегда являются отталкивающими при достаточно малых  $r$ , и для них решение (4.7) всегда существует. Подробнее см. [9, стр. 66].

В случае же, когда действуют только силы притяжения (фиг. 8), мы имеем

$$\chi = \pi - 2\theta_0.$$

Следовательно, в общем случае можно написать

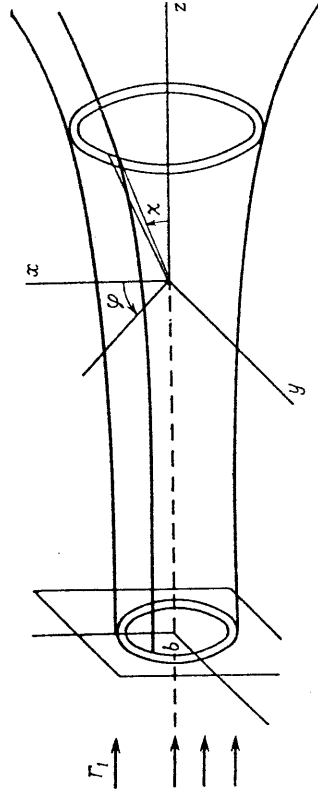
$$\chi(b, g) = \pm [\pi - 2\mathcal{J}(b, g)], \quad (4.9a)$$

где верхний знак соответствует отталкиванию, а нижний — притяжению. Произведя в уравнении (4.8b) замену переменной интегрирования  $u = r_0/r$ , можно записать интеграл  $\mathcal{J}$  в другом виде:

$$\mathcal{J}(b, g) = \int_0^1 \frac{du}{\left[ \left(\frac{r_0}{b}\right)^2 - \frac{\varphi(r_0/u)}{E} - \left(\frac{r_0}{b}\right)^2 - u^2 \right]^{1/2}}, \quad (4.9b)$$

что будет нам полезно в дальнейшем.

Чтобы закончить изложение общей теории упругого рассеяния, остается только связать полученные выше результаты с дифференциальным сечением рассеяния. В соответствии с данным в гл. 2, § 3,



Фиг. 9. Соотношение между углом рассеяния и притцельным расстоянием. определением дифференциального сечения столкновения рассмотрим пучок частиц (плотность потока которых равна  $\Gamma_1 = n_1 g$ ), падающий на частицу-мишень, находящуюся в начале относительной системы координат.

Как видно из фиг. 9, все частицы, прошедшие сквозь кольцевой слой радиусом  $b$  и толщиной  $db$ , рассеиваются в соответствующий телесный угол  $d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi$ .

Вводя дифференциальное сечение упругого взаимодействия  $I$ , получаем

$$\Gamma_1 (2\pi b db) = -\Gamma_1 I(\chi, g) (2\pi \sin \chi d\chi),$$

откуда

$$I(\chi, g) = \frac{-b}{\sin \chi} \frac{\partial b}{\partial \chi}. \quad (4.10)$$

В уравнении (4.10) взят знак минус, поскольку при увеличении  $b$  величина  $\chi$  уменьшается; символ частной производной говорит о том, что модуль скорости  $g$  фиксирован. (Для простоты в данной главе мы будем вместо  $I^{(e)}$  писать просто  $I$ .)

Итак, классическая теория упругого рассеяния сводится к уравнению (4.7), (4.9) и (4.10). При заданном потенциале  $\varphi(r)$  следует сначала, пользуясь уравнением (4.7), определить расстояние наибольшего сближения, а затем вычислить интеграл  $\mathcal{J}$  по формуле (4.96). После этого из уравнения (4.9а) можно найти соотношение  $b = b(\chi, g)$ , которое используется в формуле (4.10) для вычисления  $I(\chi, g)$ .

**Задача 4.1.** Покажите, что из общей формулы для классического сечения столкновения в случае столкновения двух твердых шаров следует выражение  $Q(r) = \pi r_0^2$ , в котором расстояние максимального сближения  $r_0$  равно полусумме диаметров падающей частицы и частицы-мишени. В случае твердых шаров потенциал  $\varphi(r)$  равен нулю при  $r > r_0$ . [Соотношение  $b = b(\chi, g)$  выведите из геометрических соображений.]

**Задача 4.2.** Разберите случай, когда потенциал взаимодействия частиц имеет вид  $\varphi(r) = A/r^2$  ( $A > 0$ ):

1. Проанализируйте возможные траектории.
2. Найдите зависимость угла рассеяния  $\chi$  от прицельного расстояния  $b$  и начальной относительной скорости  $g$ .
3. Найдите зависимость дифференциального сечения рассеяния от  $\chi$  и  $g$ .

**Задача 4.3.** Частица с массой  $m_1$  и скоростью  $C_0$  налетает на покоящуюся частицу с массой  $m_2$ .

1. Покажите, что угол рассеяния  $\chi$  в системе центра масс связан с углом рассеяния в лабораторной системе координат  $\theta$  соотношением

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \chi}{\cos \chi - m_1/m_2}.$$

(Указание. Нарисуйте векторную диаграмму для  $C' = C - G$ , где  $C'$  — скорость частицы  $1$  в системе центра масс после столкновения.)

2. Покажите, что отношение скорости  $C$  частицы  $1$  после столкновения к ее скорости  $C_0$  до столкновения удовлетворяет

<sup>1)</sup> Для некоторых конкретных потенциалов  $\varphi(r)$ , которые здесь рассматриваться не будут, величина  $b$  не является однозначной функцией  $\chi$ , и в этом случае соотношение (4.10) должно быть переформулировано.

уравнению

$$\left(\frac{C}{C_0}\right)^2 - \frac{2m_{12}}{m_2} \left(\frac{C}{C_0}\right) \cos \theta - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} = 0.$$

Исходя из этого, покажите, что при  $m_1 \ll m_2$  усредненная (по углу) доля энергии, теряемая падающей частицей, равна

$$\frac{\overline{\Delta \epsilon}}{\epsilon_0} \approx \frac{2m_1 Q^{(1)}}{m_2 Q^{(e)}},$$

где  $Q^{(e)}$  — полное сечение упругого столкновения, а  $Q^{(1)}$  — сечение столкновения с передачей импульса.

## § 5. РАССЕЯНИЕ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

В этом параграфе мы применим основные результаты, полученные в § 4, к важному случаю электростатического взаимодействия, когда потенциал имеет вид

$$\varphi(r) = \pm \frac{A}{r}, \quad (5.1)$$

где  $A$  — положительная константа (знак плюс соответствует притяжению, а минус — отталкиванию). В частном случае взаимодействия электрона (заряд  $e$ ) с ионом (заряд  $Ze$ ) этот потенциал является притягивающим и имеет вид

$$A = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (5.2)$$

Подставив (5.1) в уравнение (4.7), получим уравнение для расстояния максимального сближения

$$\left(\frac{r_0}{b}\right)^2 \mp 2 \frac{r_0}{b} \frac{A}{2bE} - 1 = 0. \quad (5.3)$$

Если ввести величину

$$b_0 = \frac{A}{2E} = \frac{A}{m_{12}g^2} \quad (5.4)$$

с размерностью длины, то уравнение (5.3) можно переписать в виде

$$\left(\frac{r_0}{b}\right)^2 \mp 2 \frac{r_0}{b} \frac{b_0}{b} - 1 = 0. \quad (5.5)$$

Физический смысл имеет одно решение этого уравнения:

$$\frac{r_0}{b} = \pm \frac{b_0}{b} + \sqrt{\left(\frac{b_0}{b}\right)^2 + 1}. \quad (5.6)$$

Вычислим теперь интеграл (4.96). Представим знаменатель в виде произведения двух сомножителей. При  $u = 1$  знаменатель в соответствии с уравнением (5.5) обращается в нуль, а поэтому

можно написать

$$\left(\frac{r_0}{b}\right)^2 \mp 2 \frac{r_0}{b} \frac{b_0}{b} u - u^2 \equiv (u + u_1)(1 - u).$$

Приравнявая свободные члены, получаем корень

$$u_1 = \left(\frac{r_0}{b}\right)^2 \equiv 1 \pm 2 \frac{r_0}{b} \frac{b_0}{b}. \quad (5.7)$$

Тогда интеграл  $\mathcal{J}$  будет равен

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_0^1 \frac{du}{[(u + u_1)(1 - u)]^{1/2}} = \left[ 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{u + u_1}{1 - u}} \right]_0^1 = \\ &= 2 \left[ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{|u_1|} \right] = \pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{r_0}{b}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Затем, подставив (5.8) в формулу (4.9а), получим соотношение между углом рассеяния и причесельным расстоянием:

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi \pm \chi}{4} \right) = \frac{r_0}{b}. \quad (5.9)$$

Это соотношение можно упростить, пользуясь тригонометрической формулой

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

в которой  $\alpha = (\pi \pm \chi)/4$ . Поскольку

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi \pm \chi}{2} \right) = \mp \operatorname{ctg} \left( \frac{\chi}{2} \right),$$

пользуясь уравнением (5.7) мы можем написать

$$\mp \operatorname{ctg} \frac{\chi}{2} = \frac{2 \left( \frac{r_0}{b} \right)}{1 - \left( \frac{r_0}{b} \right)^2} = \mp \frac{b}{b_0}$$

или, в окончательном виде,

$$\operatorname{tg} \frac{\chi}{2} = \frac{b_0}{b}. \quad (5.10)$$

При заданных величинах  $b$  и  $g$  угол рассеяния не зависит от того, каким является взаимодействие — отталкивающим или притягивающим. Величина  $b_0$  есть причесельное расстояние, соответствующее рассеянию на угол  $90^\circ$ . Она может служить мерой, позволяющей провести различие между столкновениями с рассеянием на большие и малые углы.

Теперь нам осталось по формуле (4.10) вычислить дифференциальное сечение рассеяния.

Из равенств (5.10) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{b}{\sin \chi} &= \frac{b_0 / \operatorname{tg} (\chi/2)}{2 \sin (\chi/2) \cos (\chi/2)} = \frac{b_0/2}{\sin^2 (\chi/2)}, \\ \frac{\partial b}{\partial \chi} &= \frac{b_0}{\operatorname{tg}^2 (\chi/2)} \frac{\sec^2 (\chi/2)}{2} = \frac{b_0/2}{\sin^2 (\chi/2)}, \end{aligned}$$

так что

$$I(\chi, g) = \frac{(b_0/2)^2}{\sin^4 (\chi/2)}. \quad (5.11)$$

Эту формулу часто называют формулой Резерфорда для дифференциального сечения рассеяния. Такой же результат дают квантово-механические расчеты. В § 7 мы увидим, почему это так. Формула (5.11) была использована Резерфордом в 1911 г. при анализе его экспериментов, в которых впервые было показано, что положительный заряд атома заключен в ядре, имеющем размеры намного меньше размеров атома.

В соответствии с уравнением (3.7) из гл. 2 сечение столкновения с передачей импульса определяется интегралом

$$Q^{(1)}(g) = 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos \chi) I(\chi, g) \sin \chi \, d\chi. \quad (5.12)$$

Если для дифференциального сечения столкновения взять формулу Резерфорда, то при малых значениях  $\chi$  подынтегральное выражение будет изменяться, как  $\chi^{-4}$ , и, следовательно, на нижнем пределе интеграл будет расходиться. Такая ситуация, связанная с тем, что в основном происходит рассеяние вперед [формула (5.11)], является следствием дальнедействующего характера кулоновского взаимодействия. Общий вопрос о том, каким должен быть потенциал для того, чтобы сечение столкновения было конечным, рассматривается в § 6.

При столкновении двух заряженных частиц в плазме соседние частицы перестраиваются таким образом, что взаимодействие частиц в среднем происходит в соответствии с экранированным кулоновским потенциалом [формула (4.6) из гл. 3]. Задача вычисления дифференциального сечения для упругих столкновений в поле этого потенциала методом, изложенным в § 4, решена в работе [6], но вычисления в этом случае довольно сложны. Мы получим тот же результат, взяв вместо потенциала, даваемого формулой (4.6) из гл. 3, обрезанный кулоновский потенциал

$$\varphi(r) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{при } r < \lambda_D, \quad (5.13a)$$

$$\varphi(r) = 0 \quad \text{при } r > \lambda_D. \quad (5.13b)$$

Здесь  $\lambda_D$  — дебаевский радиус экранирования [гл. 3, формула (2.4a)].

Мы будем предполагать, что для столкновений с прицельным расстоянием  $b \ll b_m = \lambda_D$  дифференциальное сечение рассеяния дается формулой (5.11), а для столкновений с прицельным расстоянием  $b > b_m$  рассеяния нет. Минимальный угол рассеяния  $\chi_m$ , соответствующий максимальному значению прицельного расстояния  $b_m$ , определяется формулой (5.10)

$$\operatorname{tg} \frac{\chi_m}{2} = \frac{b_0}{b_m}. \quad (5.14)$$

Очевидно, что наше приближение справедливо лишь при условии, что величина  $\chi_m$  мала, т. е. что  $(b_0/b_m) \ll 1$ . Как показывают формулы (8.3) и (8.76) из гл. 2, это условие автоматически выполняется, если велико число электронов в дебаевской сфере. Это и понятно, ибо нужно, чтобы имелось достаточное количество электронов, которые могли бы принять участие в процессе экранирования во время столкновения.

В случае потенциала (5.13) сечение столкновения с передачей импульса равно

$$Q^{(1)}(g) = 2\pi \int_{\chi_m}^{\pi} (1 - \cos \chi) \frac{(b_0/2)^2}{\sin^4(\chi/2)} \sin \chi \, d\chi. \quad (5.15a)$$

Произведя замену переменных  $\chi = \pi - 2\theta$ , получаем

$$Q^{(1)}(g) = 4\pi b_0^2 \int_0^{\theta_m} \frac{\sin \theta \, d\theta}{\cos \theta} = -4\pi b_0^2 \ln(\cos \theta_m), \quad (5.15b)$$

где

$$\operatorname{ctg} \theta_m = \frac{b_0}{b_m}.$$

Тогда

$$\cos \theta_m = \frac{b_0}{(b_0^2 + b_m^2)^{1/2}} = \left[ 1 + \left( \frac{b_m}{b_0} \right)^2 \right]^{-1/2} = \left[ 1 + \left( \frac{\lambda_D}{b_0} \right)^2 \right]^{-1/2},$$

и, следовательно,

$$Q^{(1)}(g) = 4\pi b_0^2 \ln \left[ 1 + \left( \frac{\lambda_D}{b_0} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (5.16)$$

Полученный результат позволяет следующим образом интерпретировать параметр  $\Lambda = \lambda_D/b_0$ , введенный в гл. 2, § 8. Относительный вклад в сечение  $Q^{(1)}$  от столкновений с рассеянием на большие углы, вносимый частицами со «средними» скоростями, порядка  $1/\ln \Lambda$ . Таким образом, в условиях, когда выполняется неравенство  $\Lambda \gg 1$  [формула (8.7) из гл. 2], при столкновениях заряженных частиц основной вклад в сечение столкновения дают столкновения с рассеянием на меньшие углы.

**Задача 5.1.** Взаимодействие заряженных частиц при прицельном расстоянии, меньшем расстояния между частицами  $n^{-1/3}$  ( $n$  — концентрация электронов или ионов), называется двойным столкновением. Взаимодействие же, характеризующееся прицельным расстоянием, лежащим в интервале между  $n^{-1/3}$  и  $\lambda_D$  (дебаевский радиус экранирования), называется коллективным столкновением. Вычислите отдельные вклады коллективных столкновений в «среднее» сечение электрон-ионных столкновений с передачей импульса и покажите, что их отношение (коллективных к двойным) всегда меньше  $1/2$ . Считайте, что  $b_0 \ll n^{-1/3} \ll \lambda_D$ .

**Задача 5.2.** При столкновении двух электронов с прицельным расстоянием  $10^{-8}$  см они рассеиваются на угол  $60^\circ$  в системе центра масс. Определите, какой была скорость электронов до столкновения.

**Задача 5.3.** Найдите разность расстояний наибольшего сближения для столкновения между двумя электронами и для столкновения электрона с ионом. Считайте, что прицельное расстояние и относительная кинетическая энергия одинаковы в обоих случаях и что  $Z = 1$ . Как изменится эта величина, если прицельное расстояние увеличить вдвое?

## § 6. РАССЕЙНИЕ НА МАЛЫЕ УГЛЫ

Если в ходе всего процесса столкновения выполняется неравенство

$$\frac{\varphi(r)}{E} \ll 1, \quad (6.1)$$

то такое столкновение приводит к рассеянию на малые углы. В данном параграфе мы будем рассматривать только такие столкновения, ибо для них можно сделать определенные общие выводы.

Пользуясь формулой (4.7), соотношение для расстояния максимального сближения можно представить в следующем приближенном виде:

$$\left( \frac{r_0}{b} \right)^2 = \frac{1}{1 - \varphi(r_0)/E} \approx 1 + \frac{\varphi(r_0)}{E} + \dots \quad (6.2)$$

Подставив эту величину в уравнение (4.9б), получим

$$\begin{aligned} \gamma &\approx \int_0^1 \frac{du}{[1 + \varphi(r_0)/E] (1 - \varphi(r_0 u)/E - u^2)^{1/2}} \approx \\ &\approx \int_0^1 \frac{du}{(1 - u^2)^{1/2} \{1 + [\varphi(r_0) - \varphi(r_0 u)]/E (1 - u^2)\}^{1/2}} \approx \end{aligned}$$

$$\approx \int_0^1 \frac{1}{(1-u^2)^{1/2}} \left[ 1 - \frac{\varphi(r_0) - \varphi(r_0/u)}{2E(1-u^2)} - \dots \right] du =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2E} \int_0^1 \frac{\varphi(r_0) - \varphi(r_0/u)}{(1-u^2)^{3/2}} du. \quad (6.3)$$

Тогда по формуле (4.9а) находим

$$\chi = \pm \frac{1}{E} \int_0^1 \frac{\varphi(r_0) - \varphi(r_0/u)}{(1-u^2)^{3/2}} du. \quad (6.4)$$

Мы ограничимся рассмотрением потенциалов вида

$$\varphi(r) = \pm \frac{A}{r^\alpha}, \quad (6.5)$$

где  $A$  — положительная константа и  $\alpha > 0$ . Тогда из соотношений (6.4) и (6.2) получим

$$\chi = \frac{Ah(\alpha)}{Er_0^\alpha} \approx \frac{Ah(\alpha)}{E\beta^\alpha}, \quad (6.6)$$

где

$$h(\alpha) = \int_0^1 \frac{(1-u^\alpha)}{(1-u^2)^{3/2}} du \quad (6.7)$$

— безразмерная величина порядка единицы. Можно показать [5, стр. 119], что в случае, когда величина  $\alpha = m$  есть целое число <sup>1)</sup>,

$$h(m) = m \int_0^{\pi/2} \sin^m \zeta d\zeta. \quad (6.8)$$

Из соотношения (6.6) следует, что  $b = (Ah/E)^{1/\alpha} \chi^{-1/\alpha}$ , и поэтому, используя уравнение (4.10), получаем при малых  $\chi$

$$I(\chi, g) \approx \frac{1}{\alpha} \left( \frac{Ah(\alpha)}{E} \right)^{2/\alpha} \frac{1}{\chi^{2+2/\alpha}}. \quad (6.9)$$

<sup>1)</sup> При выводе выражения (6.3) мы предполагали, что  $\frac{\varphi(r_0) - \varphi(r_0/u)}{2E(1-u^2)} \ll 1$ .

В случае потенциалов вида (6.5) и при целочисленных  $\alpha = m$  это условие выполняется, поскольку

$$\frac{\varphi(r_0) - \varphi(r_0/u)}{2E(1-u^2)} = \frac{\varphi(r_0)}{2E} \left( \frac{1-u^m}{1-u^2} \right)$$

и при  $0 \leq u \leq 1$

$$\frac{1-u^m}{1-u^2} = \frac{(1-u)(1+u+u^2+\dots+u^{m-1})}{1-u^2} = \frac{1+u+u^2+\dots+u^{m-1}}{1+u} \sim O(m).$$

Вклад в полное сечение упругих столкновений от столкновений с рассеянием на углы, лежащие в интервале  $\chi_1 \leq \chi \leq \chi_2 \leq 1$ , равен

$$[\delta Q]_{\chi_1}^{\chi_2} = 2\pi \int_{\chi_1}^{\chi_2} I(\chi, g) \sin \chi d\chi \approx \frac{2\pi}{\alpha} \left( \frac{Ah}{E} \right)^{2/\alpha} \int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{d\chi}{\chi^{1+2/\alpha}} =$$

$$= \frac{2\pi}{\alpha} \left( \frac{Ah}{E} \right)^{2/\alpha} \left[ \frac{\alpha}{2\chi^{2/\alpha}} \right]_{\chi_1}^{\chi_2} \xrightarrow{\chi_1 \rightarrow 0} \infty.$$

Отсюда видно, что при  $\chi_1 \rightarrow 0$  сечение  $Q$  будет бесконечно большим при всех конечных  $\alpha$ . (Соответствующие квантовомеханические расчеты показывают, что  $Q$  конечно при  $\alpha > 2$  [11, стр. 9].)

Для сечения же с передачей импульса мы имеем

$$[\delta Q^{(1)}]_{\chi_1}^{\chi_2} = 2\pi \int_{\chi_1}^{\chi_2} I(\chi, g) (1 - \cos \chi) \sin \chi d\chi =$$

$$= 2\pi \int_{\chi_1}^{\chi_2} I(\chi, g) 2 \sin^2 \left( \frac{\chi}{2} \right) \sin \chi d\chi \approx$$

$$= \frac{\pi}{\alpha} \left( \frac{Ah}{E} \right)^{2/\alpha} \int_{\chi_1}^{\chi_2} \chi^{1-2/\alpha} d\chi = \frac{\pi}{2} \left( \frac{Ah}{E} \right) \left[ \frac{\chi^{2-2/\alpha}}{2-2/\alpha} \right]_{\chi_1}^{\chi_2}.$$

Из данного выражения видно, что в пределе при  $\chi_1 \rightarrow 0$  эта величина конечна при всех  $\alpha > 1$ . В силу этого, а также на основании физических соображений, излагающихся выше, величиной  $Q^{(1)}$  пользуются для вычисления частот столкновений и средних длин свободного пробега.

В частном случае кулоновского потенциала мы имеем  $\alpha = 1$  и

$$[\delta Q^{(1)}]_{\chi_1}^{\chi_2} = \pi \left( \frac{Ah}{E} \right)^2 \ln \frac{\chi_2}{\chi_1} \xrightarrow{\chi_1 \rightarrow 0} \infty.$$

Таким образом, при  $\chi_1 \rightarrow 0$  величина  $Q^{(1)}$  логарифмически расходится, и это согласуется с тем, что говорилось по поводу формулы (5.12). Такую же зависимость  $Q^{(1)}$  от  $\chi$  дают и квантовомеханические расчеты.

Пользуясь соотношением (6.9), мы можем также определить, как сечение столкновения зависит от скорости. Поскольку  $E = m_1 g^2/2$ , при малых углах рассеяния получим

$$I(\chi, g) \sim g^{-4/\alpha}. \quad (6.10)$$

Методом анализа размерностей можно показать [10, стр. 9; 9, стр. 78], что этот результат в действительности справедлив для всех углов рассеяния. Следовательно, при  $\alpha > 1$

$$Q^{(1)} \sim g^{-4/\alpha}. \quad (6.11)$$

Согласно квантово-механическим расчетам [9], полное сечение столкновения в случае отталкивающих потенциалов с  $\alpha \gg 3$  зависит от скорости следующим образом:

$$Q \sim g^{-2/(\alpha-1)}. \quad (6.12)$$

Полученные выше результаты сведены в табл. 1.

Таблица 1  
Закон изменения эффективных сечений, даваемых классической и квантовой теорией

	Классическая механика	Квантовая механика
$Q(g)$	1. Бесконечно при всех $\alpha$	1. Конечно при $\alpha > 2$ 2. $\sim g^{-2/\alpha-1}$ при $\alpha > 3$ и в случае притяжения
$Q^{(1)}(g)$	1. Конечно при $\alpha = 1$ 2. Бесконечно при $\alpha = 1$ (случай кулоновского потенциала) 3. $\sim g^{-4/\alpha}$ при $\alpha > 1$	1. Конечно при $\alpha > 1$ 2. Бесконечно при $\alpha = 1$ (случай кулоновского потенциала)

Модель упругих шаров при описании столкновений частиц соответствует пределу  $\alpha \rightarrow \infty$ . В этом случае  $Q^{(1)} = \text{const}$ . Другой интересный случай — рассеяние заряженных частиц на нейтральных частицах. При таких столкновениях заряженные частицы создают в области нейтральной частицы электрическое поле, пропорциональное  $1/r^2$ , в котором заряды нейтральной частицы поляризуются с образованием дипольного момента. Поскольку же потенциал электрического диполя пропорционален  $1/r^3$ , такое взаимодействие на больших расстояниях описывается потенциалом  $\varphi(r) \sim r^{-4}$ , для которого

$$Q^{(1)} \sim g^{-1} \quad (6.13)$$

При больших энергиях экспериментальные значения сечения рассеяния для упругих столкновений электрона с атомом согласуются с этим результатом для большого числа атомов (например,  $\text{H}_2$  и  $\text{He}$  — гл. 2, фиг. 20).

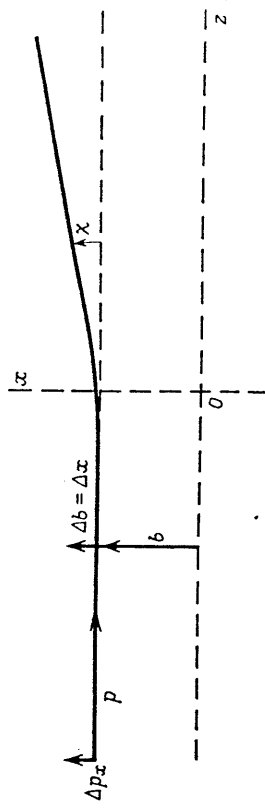
В случае взаимодействия такого типа частота столкновений с передачей импульса  $\nu^{(1)} \sim gQ^{(1)}$  есть величина постоянная. Для частиц, характеризующихся постоянной частотой столкновений с передачей импульса, точная кинетическая теория особенно проста. Такие частицы называют *максвелловскими*.

## § 7. ОБЛАСТЬ ПРИМЕНИМОСТИ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Согласно принципу неопределенности Гейзенберга, координату и импульс частицы одновременно можно измерить лишь с точностью, определяемой соотношением неопределенностей

$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim \hbar. \quad (7.1)$$

Здесь  $\Delta x$  — неопределенность координаты,  $\Delta p_x$  — неопределенность импульса, а  $\hbar = 2\pi\hbar$  — постоянная Планка. Поскольку



Фиг. 10. Условия, при которых допустимо представление о классической траектории.

само понятие классической траектории предполагает как раз обратное, классическое описание столкновений находится в прямом противоречии с квантовой механикой. Но указанный принцип позволяет определить, когда классическая механика обеспечивает хорошее приближение, т. е. когда можно говорить о приближенной траектории в пределах тех ограничений, которые накладываются соотношением (7.1).

Для того чтобы при наличии указанной неопределенности классическое описание столкновения, основанное на представлении о траектории, имело смысл, должны выполняться два условия. Во-первых, как показано, неопределенность начального направления движения частицы (фиг. 10) должна быть мала по сравнению с углом рассеяния, т. е. должно выполняться соотношение

$$\frac{\Delta p_x}{p} \ll \chi, \quad (7.2)$$

где  $p = m_{12}g$  — импульс частицы в ее первоначальном направлении. Во-вторых, неопределенность прицельного расстояния  $\Delta b = \Delta x$  должна быть мала по сравнению с самим прицельным расстоянием, т. е. должно выполняться неравенство

$$\Delta b \ll b. \quad (7.3)$$

С учетом неравенств (7.2) и (7.3) из соотношения (7.1) получаем

$$pb\chi \gg \Delta x \Delta p_x \gtrsim \hbar,$$

откуда

$$b\chi \gg \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{m_{12}g} \quad (7.4)$$

Применим этот критерий к результатам, полученным в предыдущей главе для рассеяния на малые углы в поле с потенциалом  $\phi(r) = \pm A/r^\alpha$  ( $\alpha > 1$ ). Пользуясь формулой (6.6), получаем, что результаты классического расчета применим, если выполняется неравенство

$$\frac{2Ah(\alpha)}{g^2 b^{\alpha-1}} \gg \hbar. \quad (7.5)$$

Это условие всегда нарушается при больших прицельных расстояниях. Поэтому можно сделать вывод, что в случае такого потенциала классическая теория столкновений не дает удовлетворительного описания столкновений с рассеянием на очень малые углы.

Рассмотрим теперь случай рассеяния в поле кулоновского потенциала. При малых углах рассеяния из соотношения (5.10) получим

$$\chi \approx \frac{2b_0}{b},$$

и, следовательно, критерий применимости классической теории имеет вид неравенства

$$2b_0 \gg \frac{\hbar}{m_{12}g}. \quad (7.6)$$

Но из соотношений (5.4) и (5.2) следует, что

$$b_0 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_{12}g^2}. \quad (7.7)$$

Подставляя это выражение для  $b_0$  в формулу (7.6) и вводя скорость света  $c$ , можно заключить, что классическая формула Резерфорда для дифференциального сечения рассеяния справедлива лишь при условии

$$\frac{g}{c} \ll 2Z \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right) = \frac{2Z}{137}. \quad (7.8)$$

(Величина, заключенная в скобки в соотношении (7.8), есть *попоянная тонкой структуры* [формула (4.6) из гл. 2].) Итак, данное условие приблизительно эквивалентно требованию, чтобы относительное движение было нерелятивистским.

Мы видим, что сечение столкновения с передачей импульса не дает вклада в рассеяние на малые углы. Поэтому при вычислении  $Q^{(1)}$  нарушение применимости классической теории при рассеянии на малые углы не очень важно, и оказывается удобным выразить условие (7.4) в другом виде. В случае когда прицельное расстояние

приближительно равно расстоянию взаимодействия  $b \approx a \approx \sqrt{Q^{(1)}}$ , угол рассеяния порядка единицы и условие (7.4) можно переписать в виде

$$\sqrt{Q^{(1)}} \gg \frac{\hbar}{m_{12}g}. \quad (7.9)$$

В правой части уравнения стоит длина волны де Бройля для частицы с приведенной массой (деленная на 2л). С волновой точки зрения это условие означает, что должны быть малы эффекты дифракции. Это условие обычно выполняется в случае столкновений тяжелых частиц, но может не выполняться при столкновениях, в которых участвуют электроны. Справедливость этого вывода подтверждается данными о сечениях упругих столкновений, приведенными в гл. 2, § 14.

**Задача 7.1.** Вычислите длину волны де Бройля для тех частиц и при тех условиях, которые указаны в задаче 6.6 к гл. 2. Выполняется ли в этих случаях условие (7.9)?

## § 8. ТОМСОНОВСКАЯ ТЕОРИЯ ТРЕХЧАСТИЧНОЙ РЕКОМБИНАЦИИ

Во многих случаях, представляющих тот или иной интерес, результаты строгой классической теории упругого рассеяния согласуются с квантовой теорией. Классические расчеты проводились и для неупругих процессов [гл. 2, § 4 и 8], но они основывались на специальных предположениях, справедливость которых априори не очевидна. Строгие расчеты сечений неупругих столкновений должны проводиться в рамках квантовой механики. Такие вычисления обычно весьма сложны, а точность полученных результатов неопределенна.

В данном параграфе мы изложим довольно простую классическую теорию трехчастичной рекомбинации, предложенную Дж. Дж. Томсоном в 1924 г. [8, стр. 623]. Эта теория первоначально разрабатывалась в приложении к ион-ионной рекомбинации, описываемой уравнением

$$A_1^+ + A_2^+ + X \rightarrow (A_1 A_2) + X, \quad (8.1)$$

а позднее была обобщена на случай электрон-ионной рекомбинации. Примечательно, что эта теория хорошо согласуется как с экспериментом, так и с более точными теориями.

В основе томсоновской теории лежат следующие представления. В отсутствие столкновений полная относительная энергия ионной пары, определяемая соотношением (2.13), положительна и постоянна, а поэтому траектории ионов являются инфинитными. Когда ионы сближаются, их относительная кинетическая энергия увеличивается

за счет потенциальной энергии. Если один из ионов испытывает «термализующее» столкновение с третьей частицей вблизи второго иона, то относительная кинетическая энергия уменьшается. Если такое термализующее столкновение происходит, когда расстояние между ионами меньше определенного минимального расстояния  $r_0$ , то полная относительная энергия ионной пары может стать отрицательной. Тогда ионы начинают двигаться по финишным траекториям один возле другого, и в результате происходит рекомбинация.

До момента рекомбинации, когда расстояние между ионами равно  $r$ , а их относительная скорость равна  $g$ , полная относительная энергия дается выражением

$$E = \frac{m_{12}g^2}{2} - \frac{e^2/4\pi\epsilon_0}{r}.$$

Фиг. 11. Ионная пара до рекомбинации.

Полную относительную энергию «типичной» пары можно вычислить, перейдя к пределу при  $r \rightarrow \infty$ ; в этом случае имеем  $E = m_{12} g^2/2 = 3kT/2 > 0$ . В отсутствие столкновений с другими частицами эта величина  $E$  остается неизменной в процессе взаимодействия ионов  $A_1^-$  и  $A_2^+$ . При некотором конечном расстоянии между частицами (фиг. 11) относительная кинетическая энергия  $m_{12}g^2/2$   $3kT/2$ . Предположим, что в такой ситуации один из ионов испытывает с третьим телом  $X$  термализующее столкновение, приводящее к изменению относительной кинетической энергии от  $m_{12} g^2/2$  до  $3kT/2$ . После столкновения полная относительная энергия ионной пары станет

$$E' = \frac{3kT}{2} - \frac{e^2/4\pi\epsilon_0}{r}. \quad (8.2)$$

Новые траектории ионов будут ограниченными, если

$$E' < 0. \quad (8.3)$$

Это условие выполняется, если в момент столкновения с частицей  $X$  расстояние между ионами  $r$  удовлетворяет соотношению

$$r < r_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2/4\pi\epsilon_0}{kT}. \quad (8.4)$$

Для того чтобы произошла рекомбинация, эти два условия должны выполняться одновременно. Во-первых, расстояние между ионами должно быть меньше критического расстояния  $r_0$ , и, во-вторых, один из ионов в это время должен испытать термализующее столкновение с третьим телом. Частота, с которой один ион  $A_1^-$  про-

ходит на расстоянии  $r \leq r_0$  от иона  $A_2^+$ , равна

$$\bar{v}_{12} = n_2 \bar{g}_{12} (\pi r_0^2),$$

где  $n_2$  — концентрация ионов  $A_2^+$ , а величина

$$\bar{g}_{12} = \left( \frac{8kT}{\pi m_{12}} \right)^{1/2}.$$

Следовательно, полное число процессов (в единице объема за единицу времени), которые потенциально могут привести к рекомбинации, равно

$$R_{12}^{(пот)} = n_1 n_2 \bar{g}_{12} \pi r_0^2. \quad (8.5)$$

Введем теперь вероятность  $s_1$  того, что между ионом  $A_1^-$  и частицей  $X$  произойдет термализующее столкновение в пределах расстояния между ионом  $A_1^-$  и ионом  $A_2^+$ , меньшем  $r_0$ , и аналогичную величину  $s_2$ . Тогда вероятность рекомбинации, соответствующей любому из указанных выше процессов, будет равна <sup>1)</sup>  $(s_1 + s_2)$ , а полное число актов рекомбинации в единице объема за единицу времени будет равно

$$R_{12}^{(рекомб)} = n_1 n_2 \bar{g}_{12} \pi r_0^2 (s_1 + s_2). \quad (8.6)$$

Коэффициент рекомбинации определяется соотношением

$$\frac{dn_1}{dt} = -R_{12}^{(рекомб)} = -\alpha_{12} n_1 n_2;$$

следовательно,

$$\alpha_{12} = \bar{g}_{12} \pi r_0^2 (s_1 + s_2) \quad (8.7)$$

и

$$Q_{12}^{(рекомб)} = \pi r_0^2 (s_1 + s_2). \quad (8.8)$$

Чтобы вычислить вероятность  $s_1$ , предположим, что ион  $A_1^-$  налетает на ион  $A_2^+$  с прицельным расстоянием  $b$  (фиг. 12). Предположим, что ион  $A_1^-$  не испытывает заметного отклонения; тогда он пройдет расстояние  $d = \sqrt{r_0^2 - b^2}$  в пределах сферы радиусом  $r_0$ , очерченной вокруг иона  $A_2^+$ . Если через  $l_1$  обозначить среднюю длину пробега иона  $A_1^-$  относительно термализующего столкновения с частицей  $X$ , то вероятность того, что термализующее столкновение произойдет, пока  $A_1^-$  находится внутри сферы влияния иона  $A_2^+$ , равна  $\exp\{-d/l_1\}$ . Поскольку вероятность того, что прицельное расстояние лежит в пределах от  $b$  до  $b + db$ , равна  $2b db/\pi r_0^2$ ,

<sup>1)</sup> Точнее говоря, эта вероятность равна  $(s_1 + s_2 - s_1 s_2)$ , поскольку случай, когда оба иона испытывают термализующее столкновение, находясь на расстоянии, меньшем  $r_0$ , друг от друга, включен как в  $s_1$ , так и в  $s_2$ . Мы опустили член  $s_1 s_2$ , учитывая, что будем рассматривать условия, при которых  $s_1$  и  $s_2$  малы.



получим

$$s_1 = 1 - \left[ \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} b e^{-2\sqrt{r_0^2 - b^2}/l_1} db \right] = 1 + 2 \left[ \frac{e^{-\beta_1}}{\beta_1^2} + \frac{e^{-\beta_1}}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_1^2} \right], \quad (8.9)$$

где

$$\beta_1 = \frac{2r_0}{l_1}. \quad (8.10)$$

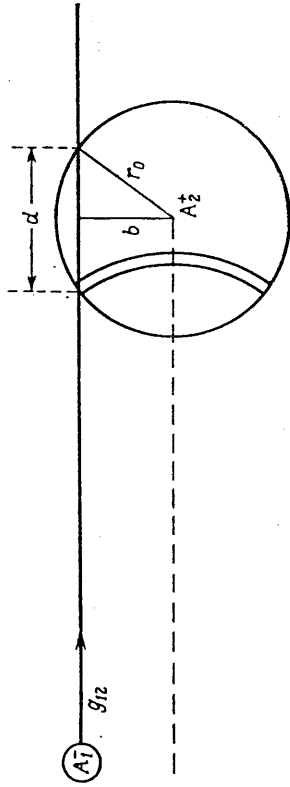
Нас будет интересовать случай достаточно низких давлений<sup>1)</sup>, когда выполняется условие

$$\beta_1 = \frac{2r_0}{l_1} \ll 1. \quad (8.11)$$

Такое условие соответствует давлениям порядка 100 кПа и ниже. В этом случае соотношение (8.9) упрощается и принимает вид

$$s_1 \approx \frac{4r_0}{3l_1}. \quad (8.12)$$

Этот результат имеет простой физический смысл: вероятность одного термализующего столкновения внутри сферы радиусом  $r_0$  пропорцио-



Фиг. 12. Вероятность термализующего столкновения.

нальна отношению  $r_0$  к средней длине пробега иона относительно термализации. Подставив  $s_1$  и  $s_2$  в соотношение (8.7), получим формулу Томсона

$$\alpha_{12} = \bar{g}_{12} \frac{4\pi r_0^3}{3} \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right). \quad (8.13)$$

Когда массы частицы X и ионов сравнимы (формула (6.33) из гл. 2), имеем

$$l_1 \approx \frac{1}{n_X Q_{1X}} \quad (8.14)$$

<sup>1)</sup> При высоких давлениях  $s_1 = s_2 = 1$  и  $\alpha_{12} = \bar{g}_{12} \pi r_0^3$ . Но теория Томсона неверна при больших давлениях, поскольку в этом случае в пределах сферы радиусом  $r_0$  может происходить больше чем одно столкновение, в результате чего ионы могут сохранить часть своей первоначальной кинетической энергии [9, стр. 571].

и логично для  $l_a$ . Было показано [9, стр. 671], что экспериментальные данные по нон-ионной рекомбинации хорошо согласуются с теорией Томсона.

### § 9. ЭЛЕКТРОН-ИОННАЯ ТРЕХЧАСТИЧНАЯ РЕКОМБИНАЦИЯ

Применим теперь томсоновскую теорию нон-ионной рекомбинации к случаю электрон-ионной рекомбинации, когда третьей частицей является электрон, т. е. к процессу

$$e + A^* + e \rightarrow A + e. \quad (9.1)$$

В этом случае  $m_1 = m_e \ll m_2 = m_i$  и, следовательно,  $m_{12} \approx m_e$ . Поскольку скорость иона  $A^* \equiv A_2^+$  мала по сравнению со скоростью электрона  $e \equiv A_1^+$ , относительная кинетическая энергия электронной пары равна

$$\epsilon_{ei} = \frac{m_{12} g^2}{2} \approx \frac{m_e g^2}{2} \approx \frac{m_e C_e^2}{2} = \epsilon_{e-1} \quad (9.2)$$

Поэтому кинетическую энергию электрон-ионной пары можно принять равной кинетической энергии электрона. Термализующее столкновение с третьей частицей  $X \equiv e$  должен испытать электрон  $e \equiv A_1^+$ , поскольку термализация иона  $A^+$  не может привести к уменьшению энергии  $\epsilon_{12}$ , достаточному для того, чтобы произошла рекомбинация. Это означает, что в соотношении (8.13) мы должны пренебречь вкладом от  $s_2$ . Тогда имеем

$$\alpha_{ei} \approx \bar{C}_e \frac{4\pi r_0^3}{3} \frac{1}{l_e}. \quad (9.3)$$

В термализующем столкновении в ходе процесса (9.1) участвуют оба электрона, а поэтому в качестве  $l_e$  мы можем взять среднюю длину пробега электрона относительно столкновений с передачей импульса, происходящих с другими электронами, т. е.

$$l_e \approx \frac{1}{n_e Q_{ee}}. \quad (9.4)$$

В соответствии с результатами гл. 2, § 8, среднее сечение столкновения двух электронов с передачей импульса равно

$$\bar{Q}_{ee} \approx \frac{3\pi}{2} r_0^2 \ln \Lambda, \quad (9.5)$$

где  $\ln \Lambda$  — величина, лежащая в пределах от 4 до 20. Подставляя (9.4) и (9.5) в (9.3), получаем для процесса (9.1)

$$\alpha_{ei} = 2\pi^2 \bar{C}_e r_0^5 n_e \ln \Lambda, \quad (9.6a)$$

т. е.

$$\alpha_{ei} = 2,13 \cdot 10^{-20} \frac{n_e}{T^{3/2}} \ln \Lambda \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-1}. \quad (9.6b)$$

Сравним значения коэффициентов рекомбинации, даваемые формулами (9.6), с результатами более строгой теории. В работах [3—5] приведены следующие формулы для коэффициентов рекомбинации:

$$\alpha_{ei} = 1,09 \cdot 10^{-20} n_e T^{-9/2} [5], \quad (9.7)$$

$$\alpha_{ei} = 1,71 \cdot 10^{-20} n_e T^{-9/2} \ln \Lambda [3, 4]. \quad (9.8)$$

Эти результаты удовлетворительно согласуются с численными расчетами, проведенными в работе [1]. Отметим, что формула (9.7) относится к температурам, не превышающим 0,25 эВ; в этой области температур она хорошо согласуется с экспериментами. В интервале же температур от 0,25 до 1 эВ эта формула дает завышенное значение  $\alpha_{ei}$ , но отличающееся от реального не более чем в 10 раз. Удивительно, что при всей ее простоте обобщенная теория Томсона дает результат (9.6), так близко совпадающий с результатами более сложных вычислений.

Теперь скажем несколько слов о попытках применить теорию Томсона к случаю электрон-электронной рекомбинации, в котором третьей частицей является атом или молекула, т. е. к процессу



Все сказанное при выводе соотношения (9.3) можно повторить и в этом случае. Но теперь нужно обратить особое внимание на величину  $l_e$ , которая в случае процесса (9.9) представляет собой среднюю длину свободного пробега электрона относительно термализующих столкновений с тяжелыми частицами X. Поскольку средняя доля энергии, теряемой электроном при его столкновении с атомом газа, масса которого равна  $m_x$ , составляет лишь  $2m_e/m_x$  его полной энергии, Месси и Бархоп [8] предложили следующее выражение для  $l_e$ :

$$l_e \approx \left( \frac{m_x}{2m_e \delta x} \right) \frac{1}{n_x \bar{Q}_{ex}}. \quad (9.10)$$

Здесь  $\delta x$  — коэффициент энергетических потерь, введенный в соотношении (7.12) из гл. 2 для учета потерь энергии в неупругих процессах при столкновениях электронов с молекулами. В таком случае мы получим следующую формулу для коэффициента рекомбинации для процесса (9.9):

$$\alpha_{ei} = \frac{4\pi}{3} \frac{2m_e \delta x}{m_x} \bar{C}_e n_e^2 \bar{Q}_{ex} n_x. \quad (9.11)$$

Как указали авторы работы [2], справедливость утверждения, что вероятность рекомбинации дается соотношениями (8.12) и (9.10) далеко не очевидна. Действительно, поскольку средний электрон движется по зигзагообразной траектории, проходя до термализации много отрезков ломаной, можно доказать [формула (5.9) из гл. 2],

что выражения (9.10) нужно заменить выражением

$$l_e = \sqrt{\frac{m_x}{2m_e \delta x}} \frac{1}{n_x \bar{Q}_{ex}}.$$

Но тогда мы получим больший коэффициент рекомбинации, чем дается формулой (9.11), что, вообще говоря, не противоречит ряду других теорий. Однако, как было показано в гл. 2, § 5, имеющийся небольшой экспериментальный материал, по-видимому, лучше согласуется с формулой (9.11).

**Задача 9.1.** Исходя из принципа детального равновесия и томсоновской теории рекомбинации, выведите формулу для скорости атом-атомной ионизации.

### Литература

1. Bates D. K., Kingston A. E., McWhirter R. W. P., Proc. Roy. Soc. (London), A267, 297 (1962); A270, 155 (1962).
2. Bates D. R., Khare S. P., Proc. Phys. Soc., 85, 231 (1965).
3. Гуревич А. В., Пятаевский Л. П., ЖЭТФ, 46, 1281 (1964).
4. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П., Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, М., 1966.
5. Hinnoe E., Hirschberg J. G., Phys. Rev., 125, 795 (1962).
6. Kennard E. H., Kinetic Theory of Gases, McGraw-Hill, 1938.
7. Liboff R. L., Phys. Fluids, 2, 40 (1959).
8. Massey H. S. W., Burhop E. H. S., Electronic and Ionic Impact Phenomena, Oxford, 1952.
9. McDaniel E. W., Collision Phenomena in Ionized Gases, Wiley, 1964 (исеется перевод: И. Мак-Даниель, Процессы столкновений в ионизованных газах, изд-во «Мир», 1967).
10. Rose D. J., Clark M., Jr., Plasmas and Controlled Fusion, Wiley, 1961.
11. Wu T., Ohmura T., Quantum Theory of Scattering, Prentice-Hall, 1962.

## ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

Строгая теория излучательных процессов, представляющих интерес в физике частично ионизованных газов, должна исходить из уравнений квантовой механики (некоторые из таких процессов были рассмотрены в гл. 2, в частности в § 9). Но теоретические представления о многих излучательных процессах зиждутся на классических понятиях, и часто путем сравнительно простых полуклассических расчетов можно получить приближенные количественные оценки. Таким расчетам и будет в основном посвящена данная глава.

Классическая теория излучения исходит из уравнений Максвелла для электромагнитного поля. Мы сначала выведем из этих уравнений важнейшее классическое положение о том, что при ускорении заряженных частиц возникает излучение. Затем мы в свете этого положения рассмотрим классические процессы, сопровождающиеся непрерывным и линейчатым излучением. После этого мы остановимся на классической модели линейчатого поглощения, а затем с учетом всего ранее изложенного скажем несколько слов об излучении абсолютно черного тела.

## § 2. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ВОПРОСЫ

В данной главе мы будем исходить из системы уравнений, введенных Максвеллом в 1865 г. и лежащих в основе классической теории электромагнитных явлений:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho^e, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.1v)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (2.1r)$$

Здесь  $\mathbf{D}$  — электрическая индукция,  $\mathbf{B}$  — магнитная индукция,  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля и  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля. В этих уравнениях мы будем плотность заряда  $\rho^e$  и плотность тока  $\mathbf{j}$  считать величинами, обусловленными движени-

ем микроскопических точечных зарядов. Для микроскопических полей, создаваемых этими зарядами, выполняются соотношения

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (2.1d)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (2.1c)$$

в которых  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} = 10^{-7}/4\pi \text{ с}^2 \text{ Кл}^2 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^{-3}$  — диэлектрическая проницаемость вакуума,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{Кл}^{-2}$  — магнитная проницаемость вакуума и  $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$  — скорость света в вакууме.

Первое уравнение эквивалентно закону Кулона для взаимодействий между зарядами. Второе уравнение означает отсутствие свободных магнитных зарядов. Третье уравнение выражает закон индукции Фарадея. Четвертое уравнение — это закон Ампера, обобщенный Максвеллом, который включил в него ток смещения. Предполагается, что читатель знаком с физической основой перечисленных уравнений на уровне, примерно соответствующем учебнику [13]. На более высоком уровне сложности эти явления рассматриваются в монографиях [6, 11].

Если заданы законы движения носителей заряда, то из уравнений Максвелла можно определить возникающие при этом электромагнитные поля. Электромагнитные поля в свою очередь влияют на движение носителей заряда в соответствии с уравнением (1.1) из гл. 4. О таком взаимном влиянии, а также о выводе полной системы уравнений для электромагнитных полей и вещества говорилось в гл. 4, § 4—6. В гл. 4, § 4, показано, что из уравнения сохранения вещества и уравнения сохранения заряда следует уравнение

$$\frac{\partial \rho^e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (2.2)$$

которое вместе с уравнениями (2.1v) и (2.1r) позволяет рассматривать уравнения (2.1a) и (2.1b) как начальные условия. В ряде случаев это дает некоторые преимущества.

В гл. 4, § 4, показано, что сила, с которой электромагнитное поле действует на единицу объема вещества, равна

$$\rho^e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (2.3a)$$

а скорость притока энергии электромагнитного поля в единицу объема составляет

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}. \quad (2.3b)$$

Оба эти выражения пригодны для дальнейшего исследования свойств электромагнитного поля. Если выразить  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$  с помощью уравнения (2.1r) через электрическое и магнитное поля и воспользоваться векторным равенством  $\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \equiv \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ ,

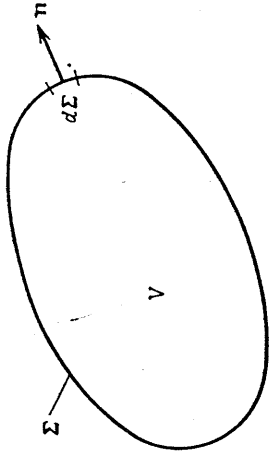
а также уравнениями (2.1в), (2.1д) и (2.1е), то получим

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right). \quad (2.4)$$

Поясним смысл членов, стоящих в правой части уравнения (2.4), заметив, что оно является выражением закона сохранения энергии.

Из электростатики известно, что величина  $\epsilon_0 E^2/2$  представляет собой плотность энергии электрического поля, а величина  $\mu_0 H^2/2$  — плотность энергии магнитного поля. Поэтому величину

$$q_{\text{эл.-магн.}} \equiv \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \quad (2.5)$$



можно интерпретировать как плотность полной энергии электромагнитного поля.

Чтобы выяснить физический смысл оставшегося члена, проинтегрируем уравнение (2.4) по произвольному объему  $V$ , ограниченному неподвижной поверхностью  $\Sigma$ ,

внешнюю нормаль к которой обозначим через  $\mathbf{n}$  (фиг. 1). Преобразуем интеграл, содержащий дивергенцию, на основании теоремы Гаусса в интеграл по поверхности, получим

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V q_{\text{эл.-магн.}} d^3x = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} d^3x + \int_{\Sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} d^2x. \quad (2.6)$$

Это уравнение носит название *теоремы Пойнтинга* (1884). Согласно этой теореме, скорость уменьшения электромагнитной энергии, содержащейся в объеме  $V$ , равна скорости передачи энергии электромагнитного поля веществу, содержащемуся в объеме, плюс скорость, с которой электромагнитная энергия вытекает через поверхность, ограничивающую этот объем. Таким образом, величину

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{E} \times \mathbf{H},$$

называемую *вектором Пойнтинга*, можно рассматривать как плотность потока электромагнитной энергии.

В отношении этой величины необходимо отметить, что плотность: физический смысл имеет лишь интеграл по замкнутой поверхности от  $\mathbf{S}$  [уравнение (2.6)] или, что эквивалентно, величина  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{S}$  [уравнение (2.4)]. Например, величина  $\mathbf{S}$  может быть отличной от нуля в области статического поля, тогда как величина  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{S}$  будет везде равна нулю и, следовательно, поток электромагнитной энергии из такой области будет равен нулю. Величина  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{S}$  не изменяет-

ся при добавлении к  $\mathbf{S}$  ротора любого векторного поля, т. е. вектор Пойнтинга определен неоднозначно. По такой добавочной член часто не имеет физического смысла, и поэтому определение  $\mathbf{S}$  в виде (2.7) общепринято.

Исходя из выражения (2.3а) для силы, с которой электромагнитное поле действует на единицу объема вещества, можно совершенно аналогичным образом исследовать уравнение, выражающее закон сохранения импульса. Мы представим читателю в качестве упражнения показать, что при этом появляется величина

$$\mathcal{G}_{\text{эл.-магн.}} \equiv \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (2.8)$$

которая имеет смысл плотности электромагнитного количества движения.

**Задача 2.1.** Рассматривая скорость, с которой электромагнитное поле увеличивает импульс единицы объема заряженного вещества, покажите, что плотность электромагнитного количества движения дается выражением  $\mathcal{G} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S}$ , где  $\mathbf{S}$  — вектор Пойнтинга, характеризующий плотность потока энергии [6, стр. 191].

### § 3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Теперь мы покажем, как преобразовать уравнение Максвелла к виду, более удобному для решения относительно полей. Прежде всего отметим, что уравнение (2.1б) тождественно удовлетворяется при,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (3.1a)$$

где  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  — любое векторное поле. Подставив это выражение для  $\mathbf{B}$  в уравнение (2.1в), получим

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Это уравнение выполняется тождественно, если

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (3.1б)$$

где  $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$  — любое скалярное поле. Величина  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  называется *скалярным электромагнитным потенциалом*, а величина  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  — *векторным электромагнитным потенциалом*.

Поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  характеризуют силы, действующие на заряженное тело, и, следовательно, являются физически наблюдаемыми величинами. Введенные же выше потенциалы сами по себе не могут быть непосредственно измерены, и введены они главным образом для удобства в математическом отношении. Действительно, из уравнения (3.1а) мы видим, что преобразование вида

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi \quad (3.2a)$$

не приводит к изменению величины  $\mathbf{B}$ , если  $\chi = \chi(x, t)$  — произвольное скалярное поле. Из уравнения (3.1б) следует, что это преобразование не изменит также и величину  $\mathbf{E}$  при условии, что потенциал  $\varphi$  будет одновременно преобразован согласно равенству

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (3.2б)$$

Выбор величины  $\chi(x, t)$  называется *калибровкой*, а преобразования (3.2) называются калибровочными преобразованиями. Говорят, что поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  инвариантны относительно преобразования типа (3.2), т. е. они калибровочно-инвариантны<sup>1)</sup>.

Чтобы получить уравнения, которые должны удовлетворять потенциалы, нужно подставить соотношения (3.1) в уравнения (2.1а) и (2.1г). С учетом соотношений (2.1д) и (2.1е) имеем

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho^c}{\epsilon_0}, \quad (3.3а)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (3.3б)$$

Поскольку поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  калибровочно-инвариантны, уравнения (3.3), в которых первоначально фигурировали эти поля, также будут инвариантными относительно калибровочных преобразований. Уравнения (3.3) имеют бесконечное число решений  $(\varphi, \mathbf{A})$ , связанных между собой калибровочными преобразованиями (3.2).

Уравнения (3.3) можно упростить, пользуясь той степенью свободы, которая обеспечивается калибровкой. Так, можно, например, принять, что  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  удовлетворяют *условию Лоренца*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (3.4)$$

Тогда уравнения для потенциалов примут вид

$$\left( \nabla^2 - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = -\frac{\rho^c}{\epsilon_0}, \quad (3.5а)$$

$$\left( \nabla^2 - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (3.5б)$$

То, что такое преобразование не приводит к потере общности, ясно из следующего уравнения, полученного с помощью уравнений (3.2):

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{A}' + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - \left( \nabla^2 - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi. \quad (3.6)$$

Если обнаружится, что какое-либо конкретное решение  $(\varphi', \mathbf{A}')$  уравнения (3.3) не удовлетворяет условию Лоренца, то с помощью уравнения (3.6) можно произвести соответствующую калибровку, которая даст эквивалентное решение  $(\varphi, \mathbf{A})$ , удовлетворяющее

<sup>1)</sup> Такую инвариантность называют также градиентной. — *Прим. ред.*

условию (3.4). Произвол в выборе потенциалов  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$ , определяемых уравнениями (3.4) и (3.5), также еще не полностью устранен, поскольку эти уравнения не меняются при калибровочных преобразованиях (3.2), если величина  $\chi$  удовлетворяет условию

$$\left( \nabla^2 - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi = 0.$$

Мы будем далее пользоваться лоренцевской калибровкой, но для других целей иногда более удобны другие типы калибровки, например *кулоновская* (или *поперечная*) калибровка, при которой принимается, что

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

В этом случае скалярный потенциал формально удовлетворяет тому же уравнению, что и электростатический потенциал, т. е. уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho^c}{\epsilon_0},$$

а уравнение для векторного потенциала имеет более сложный вид:

$$\left( \nabla^2 - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Подробнее о кулоновской калибровке см. [6], стр. 181.

#### § 4. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В ВАКУУМЕ

Простое решение уравнений Максвелла, выявляющее многие свойства полей электромагнитного излучения, о которых будет идти речь в § 6, можно получить следующим образом. Мы ищем решение уравнений (3.4) и (3.5) в вакууме в том случае, когда потенциалы зависят только от одной пространственной координаты, например от координаты  $x$ . Тогда потенциалы должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (4.1)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = 0, \quad (4.2а)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = 0. \quad (4.2б)$$

Выполнение условия Лоренца проще обеспечить, выбрав  $A_x(x, t) = \varphi(x, t) = 0$ .

$$(4.3а)$$

Нетрудно видеть, что компоненты вектора  $\mathbf{A}$  по осям  $y$  и  $z$  удовлетворяют одномерному волновому уравнению, имеющему следующее общее решение:

$$\mathbf{A}(x, t) = \mathbf{A}_1(x - ct) + \mathbf{A}_2(x + ct). \quad (4.3б)$$

Здесь  $A_1$  и  $A_2$  — произвольные векторы, перпендикулярные оси  $x$  и соответствующие полям, бегущим со скоростью  $c = (v_0/v_0)^{1/2}$  одна в положительном, а другая в отрицательном направлении.

Мы должны еще с помощью уравнения (3.1) определить электромагнитные поля. Рассмотрим для простоты поля, соответствующие только потенциалу  $A_1$ , и обозначим символом  $\mathbf{n} \equiv \nabla(x - ct)$  единичный вектор в положительном направлении оси  $x$ . Тогда для электрического поля получим

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} A_1(x - ct) = cA_1' \quad (4.4a)$$

Фиг. 2. Ориентация векторов поля относительно направления распространения плоской поперечной электромагнитной волны.

Здесь штрихом обозначена производная от  $A$  по всему аргументу этой функции. Из уравнения (4.3a) следует

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (4.4b)$$

(В качестве упражнения покажите, что этот результат не зависит от выбранного нами способа обеспечения выполнения условия Лоренца.) Для магнитной индукции получим<sup>1)</sup>

$$\mathbf{B} = \nabla \times A_1(x - ct) = \nabla(x - ct) \times A_1' = \mathbf{n} \times A_1' = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{E}}{c}. \quad (4.4b)$$

Из этого примера мы видим, что уравнения Максвелла допускают решения в виде плоских поперечных волн, в которых векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  и направление распространения волн  $\mathbf{n}$  взаимно перпендикулярны (фиг. 2). Скорость распространения этих волн такова:

$$c = (e_0\mu_0)^{-1/2}. \quad (4.5a)$$

В соответствии с уравнением (4.4b) соотношение между величинами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  имеет вид

$$|\mathbf{B}| = \frac{|\mathbf{E}|}{c}. \quad (4.5b)$$

<sup>1)</sup> Для векторного поля  $\mathbf{V} = \nabla(f)$ , зависящего от координаты только через скалярную функцию  $f = f(x)$ , имеем тождество  $\nabla \times \mathbf{V} \equiv \nabla f \times \mathbf{V}$ . В этом можно убедиться, проведя вычисления для каждой компоненты:

$$(\nabla \times \mathbf{V})_x = \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = (\nabla f \times \mathbf{V})_x,$$

и аналогично для других компонент.

Из уравнения (2.5) следует, что плотность электромагнитной энергии, связанной с магнитным полем  $\mathbf{B}$ , есть

$$\frac{\mu_0 H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2c^2\mu_0} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2},$$

т. е. равна вкладу электрического поля  $\mathbf{E}$ . Таким образом, полная плотность электромагнитной энергии определяется соотношением (4.5в)

$$\mathcal{U}_{\text{эл.-магн}} = \epsilon_0 E^2.$$

Из уравнения (2.7) следует, что плотность потока электромагнитной энергии равна

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{\mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E})}{\mu_0 c} = c\epsilon_0 E^2 \mathbf{n} = c\mathcal{U}_{\text{эл.-магн}} \mathbf{n} \quad (4.5г)$$

и соответствует энергии, содержащейся в объеме с единичным поперечным сечением и длиной, равной  $c$ . Из уравнения (2.8) следует, что импульс единицы объема электромагнитного поля равен

$$\mathcal{G}_{\text{эл.-магн}} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S} = \frac{\mathcal{U}_{\text{эл.-магн}}}{c} \mathbf{n}. \quad (4.5д)$$

Эти соотношения аналогичны соотношениям для энергии и импульса фотона (формулы (9.1) и (9.2) из гл. 2).

**Задача 4.1.** Покажите, что вывод о том, что плоская электромагнитная волна является поперечной и характеризуется взаимно перпендикулярными векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , справедлив даже в том случае, когда  $A_x$  и  $\phi$  выбраны не равными нулю.

**Задача 4.2.** Плоская волна падает перпендикулярно на абсолютно поглощающий плоский экран.

1. Исходя из закона сохранения количества движения, покажите, что давление, оказываемое волной на экран (так называемое давление излучения), равно энергии поля волны в единице объема.

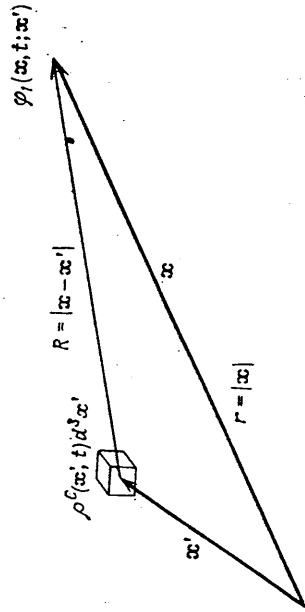
2. Вблизи Земли поток электромагнитной энергии Солнца равен приблизительно  $0,14 \text{ Вт/см}^2$ . Если поверхностная плотность паруса межпланетного «парусного корабля» составляет  $10^{-4} \text{ г/см}^2$ , а оставшая масса корабля можно пренебречь, то каким будет максимальное ускорение (в  $\text{см/с}^2$ ), вызванное давлением солнечного излучения? Сравните это ускорение с ускорением под действием солнечного «встра» (поток протонов с плотностью  $10 \text{ см}^{-3}$ , движущихся со скоростью  $500 \text{ км/с}$ ).

## § 5. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотренный выше пример познакомил нас с важными свойствами электромагнитного поля, но он не позволяет сказать что-либо о том, как возникают электромагнитные волны. Чтобы ответить на этот вопрос, нужно прежде всего решить неоднородные волновые

уравнения (3.5). В данном параграфе мы изложим эвристический метод решения этой задачи. Результат, который при этом будет получен, сам по себе является точным, его более строгий вывод представлен в работе [6], стр. 183.

Поскольку уравнения для  $\Phi$  и  $A$  идентичны по своей структуре, достаточно рассмотреть уравнение (3.5a). Общее решение будет состоять из суммы решения соответствующего однородного уравнения и частного интеграла неоднородного уравнения. Если предположить, что границы отсутствуют, то причиной возникновения потенциалов могут быть лишь заряды и мы можем рассмотреть только



Фиг. 3. Потенциал в точке  $x$ , создаваемый элементом заряда, находящимся в точке  $x'$ .

частное решение. Чтобы найти частный интеграл, предположим, что область заряда разделена на бесконечно малые элементы объема. Если мы найдем потенциал, создаваемый зарядом, содержащимся в одном из этих элементов объема, то затем, пользуясь линейностью уравнения (3.5a), сможем найти полный потенциал в виде суммы по всем элементам объема.

Заряд, содержащийся в элементе объема  $d^3x'$ , локализованном в точке  $x'$ , будет изменяться со временем и может быть записан следующим образом:  $\delta q(x', t) = \rho^e(x', t)d^3x'$ . Обозначим потенциал, создаваемый этим зарядом в точке  $x$  в момент времени  $t$ , через  $\Phi_1(x, t; x')$  (фиг. 3). Поскольку мы сейчас рассматриваем поле, создаваемое зарядом одного элемента объема, поместим начало координат внутри его, т. е. положим  $x' = 0$ . В этой системе координат потенциал, создаваемый зарядом  $\delta q(0, t)$ , будет сферически-симметричным и может быть записан в виде  $\Phi_1(r, t) = \Phi_1(x, t; 0)$ , где  $r = |x|$ . Поскольку заряд  $\delta q$  равен нулю всюду, кроме начала координат, при  $r \neq 0$  потенциал  $\Phi_1(r, t)$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} = 0.$$

Чтобы решить это уравнение, произведем подстановку:

$$\Phi_1(r, t) = \frac{\Phi(r, t)}{r}.$$

Величина  $\Phi$  удовлетворяет одномерному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\Phi(r, t) = \Phi_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + \Phi_2\left(t + \frac{r}{c}\right),$$

где снова  $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ . Поскольку  $\Phi_2$  есть сферическая волна, сходящаяся к началу координат, эту часть решения можно отбросить на основании принципа причинности, т. е. на том основании, что в данном случае нет источников, которые могли бы вызвать появление такой волны. Таким образом, в области, удаленной от начала координат, мы имеем

$$\Phi_1(r, t) = \frac{\Phi_1(t - r/c)}{r}. \quad (5.1)$$

Произвольную функцию  $\Phi_1$  нужно выбрать так, чтобы в электростатическом пределе мы получили кулоновский потенциал. К такому пределу мы можем перейти при  $r \rightarrow 0$ , поскольку в этом случае сигналы от элемента заряда будут достигать наблюдателя мгновенно. Мы потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Phi_1(r, t) = \frac{\delta q(0, t)}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Но  $\lim_{r \rightarrow 0} \Phi_1(r, t) = \Phi_1(t)/r$ , так что

$$\Phi_1(t) = \frac{\delta q(0, t)}{4\pi\epsilon_0}.$$

Тем самым мы нашли вид функции  $\Phi_1$ . Из формулы (5.1) при произвольных  $r$  следует, что

$$\Phi_1(r, t) = \frac{\delta q(0, t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (5.2a)$$

Таким образом, потенциал в точке  $r = |x|$  в момент времени  $t$  определяется величиной заряда в более ранний момент времени  $t - r/c$ ; запаздывание связано с тем, что сигналу, распространяющемуся со скоростью  $c$ , требуется конечное время для того, чтобы прийти в рассматриваемую точку пространства.

В произвольной системе отсчета выражение (5.2a) будет иметь вид

$$\Phi_1(x, t; x') = \frac{\delta q(x', t - |x - x'|/c)}{4\pi\epsilon_0 |x - x'|}, \quad (5.2b)$$

где теперь вместо  $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  стоит  $r = |\mathbf{x}|$ . Выражая  $dq$  через плотность зарядов  $\rho^0$  и проведя суммирование по всем элементам объема, получаем решение уравнения (3.5а) для скалярного потенциала:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho^0(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (5.3а)$$

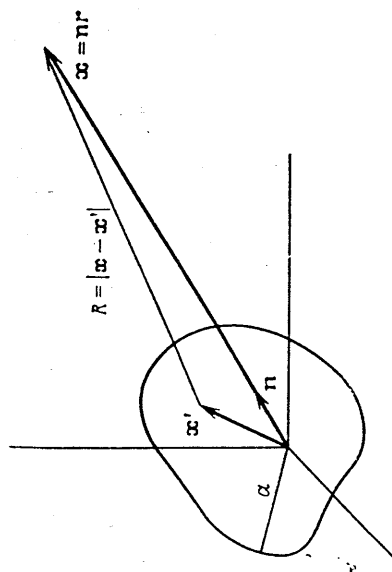
Решение уравнения (3.5б) для векторного потенциала имеет аналогичный вид:

$$A(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\mu_0 j(x', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (5.3б)$$

Учитывая, что  $\rho^0$  и  $j$  связаны уравнением непрерывности (2.2), можно показать, что эти решения также удовлетворяют условию Лоренца [15, стр. 428].

### § 6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Чтобы пояснить физический смысл выражений (5.3), мы рассмотрим в этом параграфе систему зарядов, движущихся в пределах



Фиг. 4. К вычислению полей излучения.

области с характерным размером  $a$ , и исследуем электромагнитные поля, создаваемые ими вне данной области. Поместим центр системы координат внутри этой области (фиг. 4) и обозначим через  $r = |\mathbf{x}|$  расстояние от центра системы координат до той точки, в которой мы хотим вычислить поле. Единичный вектор направления от центра координат к этой точке обозначим через  $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$ . Мы будем рассматривать поле на расстояниях от области заряда, больших по сравнению с характерным размером самой области заряда, т. е. при

$$r \gg a. \quad (6.1)$$

Подынтегральные выражения в формулах (5.3) будут не равны нулю при тех значениях  $x'$ , при которых выполняется соотношение  $|\mathbf{x}'| \ll a \ll r$ . Следовательно, мы можем величину  $R \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$ , стоящую под интегралом, разложить в ряд Тейлора. Считая  $x'$  малой величиной, имеем

$$R(x - x', y - y', z - z') = R(x, y, z) - x' \frac{\partial R}{\partial x} \Big|_{x'=0} - y' \frac{\partial R}{\partial y} \Big|_{x'=0} - z' \frac{\partial R}{\partial z} \Big|_{x'=0} + \dots = r - x' \cdot \nabla r + \dots = r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}' + \dots$$

так что векторный потенциал можно представить в виде

$$A(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \frac{j(x', t - r/c + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'/c + \dots)}{1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'/r + \dots} d^3x'. \quad (6.2)$$

Скалярный потенциал мы можем не рассматривать в данном параграфе.

Чтобы разложить величину  $A(\mathbf{x}, t)$  в ряд, мы можем принять члены  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'/r + \dots$  в знаменателе малыми по сравнению с единицей, но при определении малых членов в числителе нужно быть осторожным. Например, членами  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'/c + \dots$  в аргументе функции  $j$  можно пренебречь не в том случае, когда они малы по сравнению с  $(t - r/c)$ , а лишь тогда, когда величина  $j$  не меняется сколько-нибудь заметно за время порядка  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'/c + \dots) \sim a/c$ . Таким образом, для простоты вычислений мы должны ввести второе предположение, а именно что

$$\frac{a}{c} \ll \tau, \quad (6.3а)$$

где  $\tau$  — характерное время изменения рассматриваемой системы движущихся зарядов. Это условие может быть записано в эквивалентной форме:

$$a \ll \lambda, \quad (6.3б)$$

где  $\lambda \sim c\tau$  — характерная длина волны полей, создаваемых системой<sup>1)</sup>. Неравенство (6.3а) означает, что время прохождения электромагнитной волны через систему намного меньше времени, в течение которого распределение зарядов в системе меняется заметным образом. Таким образом, это условие позволяет пренебречь тем, что время запаздывания излучения, приходящего из разных частей системы, неодинаково.

Используя оба условия (6.1) и (6.3), можно провести последовательное разложение векторного потенциала (6.2) по моментам [6, гл. 16]. Оставив лишь первый член разложения, получим следующую

<sup>1)</sup> Если  $\omega$  — характерная скорость заряженных частиц рассматриваемой системы, то  $\tau \sim a/\omega$ . Тогда условие (6.3) эквивалентно требованию  $\omega/c \ll 1$ , т. е. частицы должны быть нерелятивистскими. Это ограничение можно снять, оставив член  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'/c$  в аргументе величины  $j$  [10].



щее приближенное выражение для  $\Lambda$ :

$$\Lambda(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c}) d^3x'. \quad (6.4)$$

Это выражение позволяет найти поля в *приближении дипольного момента*, которое будет главной темой данного параграфа. Оставив в разложении члены более высокого порядка по  $a/r$ , получим магнитно-дипольное и квадрупольное приближения, которые могут быть существенны в тех случаях, когда члены, соответствующие дипольному моменту, не дают вклада в величины полей.

Рассматриваемая система движущихся зарядов полностью характеризуется массой  $m_k$ , зарядом  $q_k$  и траекторией  $\mathbf{x}_k(t)$  каждой частицы  $k$ . Можно преобразовать соотношение (6.4), введя в него параметры, характеризующие свойства частиц, с помощью соотношения

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}', t) d^3x' = \sum_k q_k \dot{\mathbf{x}}_k(t), \quad (6.5)$$

полностью аналогичного соотношению (4.3) из гл. 4. Здесь  $\dot{\mathbf{x}}_k(t) = d\mathbf{x}_k(t)/dt$  — скорость  $k$ -й частицы; точкой обозначена полная производная от  $\mathbf{x}_k$ . Подставляя (6.5) в соотношение (6.4), получаем

$$\Lambda(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\mathbf{d}}\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad (6.6)$$

где

$$\mathbf{d}\left(t - \frac{r}{c}\right) \equiv \sum_k q_k \mathbf{x}_k\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (6.7)$$

— *дипольный момент* системы с учетом запаздывания, а суммирование производится по всем заряженным частицам<sup>1)</sup>.

Магнитную индукцию можно найти сразу же [формула (3.1a)]:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{\dot{\mathbf{d}}(t - r/c)}{r}. \quad (6.8a)$$

Электрическое поле можно было бы в принципе вычислить по формуле (3.1б), но для этого потребовалось бы найти скалярный потенциал в дипольном приближении. (Предоставим читателю проделать это самому в качестве упражнения.) В данном параграфе нам достаточно будет воспользоваться косвенным методом определения величины  $\mathbf{E}$ . Подставим соотношение (6.8a) в уравнение (2.1г). Поскольку в точке, в которой вычисляются поля,  $\mathbf{j} = 0$ , получим

$$4\pi\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \nabla \times \frac{\dot{\mathbf{d}}(t - r/c)}{r}.$$

<sup>1)</sup> В случае когда система состоит из двух частиц с противоположными зарядами, соотношение (6.7) упрощается и принимает более привычный вид. Так, если  $q_1 = -q_2 = q$ , то из соотношения (6.7) следует  $\mathbf{d} = q(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = q\mathbf{x}_{12}$ , где  $\mathbf{x}_{12}$  — вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному.

Интегрируя это уравнение по времени, находим

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \nabla \times \frac{\dot{\mathbf{d}}(t - r/c)}{r}. \quad (6.8б)$$

(Можно показать, что опущенная нами постоянная интегрирования, представляющая собой электростатическую часть поля  $\mathbf{E}$ .) Выражения (6.8) дают поле излучения в дипольном приближении.

Проводя в уравнении (6.8a) дифференцирование, получаем (с учетом примечания, сделанного на стр. 282)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{cr} + \frac{\dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{r^2} \right].$$

Отношение второго члена к первому по порядку величины составляет

$$\left| \frac{\dot{\mathbf{d}}/r}{\ddot{\mathbf{d}}/c} \right| \sim \frac{cr}{r} \sim \frac{\lambda}{r}$$

и в рамках сделанных предположений может быть любым. Поэтому можно рассматривать поля как в пределе  $\lambda \gg r$ , т. е. в *ближней зоне*, так и в пределе  $\lambda \ll r$ , т. е. в *дальней зоне*. Для нас здесь наибольший интерес представляет дальняя зона. В этом предельном случае

$$\nabla \times \nabla \times \frac{\dot{\mathbf{d}}(t - r/c)}{r} \approx \nabla \times \left( \frac{\dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}/c}{r} \right) \approx \frac{(\dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}/c) \times \mathbf{n}}{r}.$$

Таким образом, для полей в дальней зоне получим

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi cr} \ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}, \quad (6.9a)$$

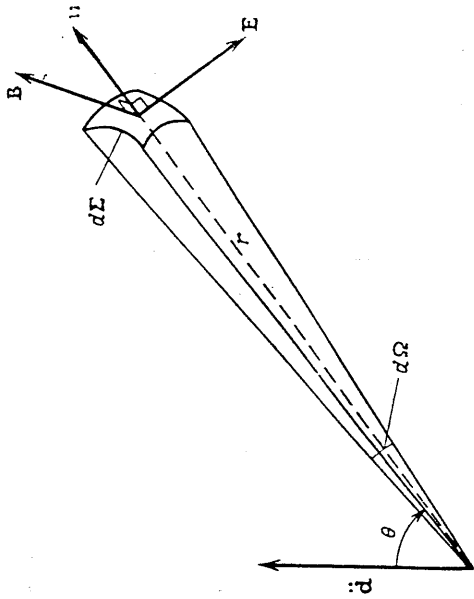
$$\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{n}. \quad (6.9б)$$

Самый важный вывод, который следует из этих соотношений, это то, что амплитуды полей уменьшаются с расстоянием пропорционально лишь  $r^{-1}$ . Такой закон изменения полей сильно отличается от закона изменения статических полей, уменьшающихся с расстоянием, как  $r^{-2}$ . Главным образом по этой причине такие поля и считают полями электромагнитного *излучения*. Относительно расположения векторов электрического и магнитного поля показано на фиг. 5. Из уравнений (6.9) и фиг. 5 мы видим, что электромагнитное поле в дальней зоне локально идентично плоским поперечным волнам, о которых говорилось в § 4.

Мощность излучения, генерируемого системой и проходящего через элемент площади  $d\Sigma$  (фиг. 5), выражается через вектор Пойнтинга:

$$dP = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = r^2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} d\Omega,$$

где  $d\Omega$  — телесный угол, под которым элемент  $d\Sigma$  виден из начала координат. Из соотношений, выведенных ранее для плоской волны,



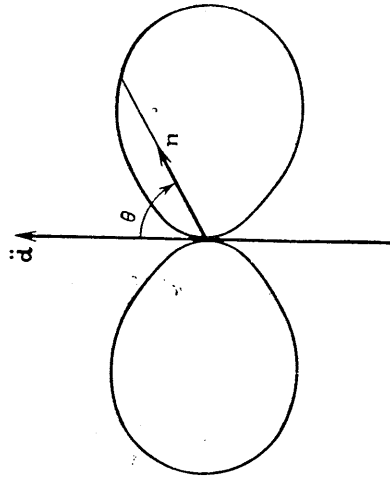
Фиг. 5. Поле диполя в дальней зоне. Вектор напряженности электрического поля  $E$  лежит в плоскости векторов  $n$  и  $d$ .

следует, что  $S \cdot n = c\epsilon_0 E^2 = c^3\epsilon_0 B^2$ . На основании формулы (6.9a) мощность излучения рассматриваемой системы зарядов, отнесенную к единице телесного угла, можно записать как

$$\frac{dP(\theta)}{d\Omega} = \frac{|\ddot{d}(\theta)|^2 \sin^2 \theta}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3}, \quad (6.10)$$

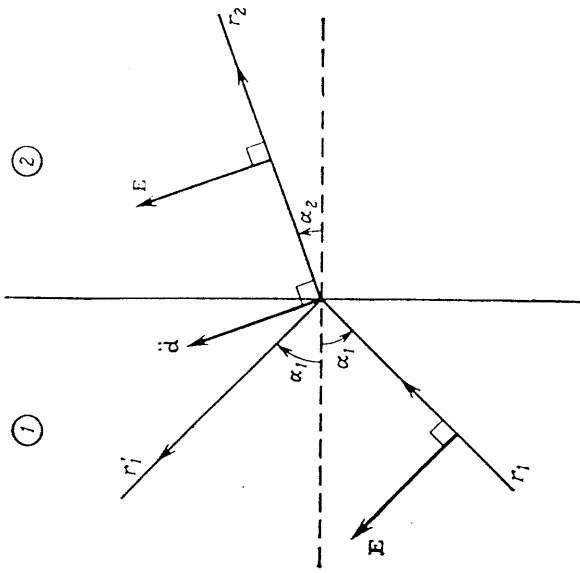
где  $\theta$  — угол между векторами  $\ddot{d}$  и  $n$ . Из этого соотношения видно, что интенсивность излучения системы не уменьшается с расстоянием и, таким образом, термин «излучение» полностью оправдывается. Временная зависимость интенсивности излучения в формуле (6.10) связана с источником, поскольку другой причины для этого в данном случае нет.

Угловое распределение мощности излучения электрического диполя. Распределение симметрично относительно направления вектора  $\ddot{d}$ .



Угловое распределение интенсивности излучения показано на фиг. 6. Расстояние по прямой от центра координат до контура кривой

углового распределения интенсивности излучения пропорционально интенсивности излучения в этом направлении. Максимальная интенсивность излучения наблюдается в направлении, перпендикулярном вектору  $\ddot{d}$ , а интенсивность излучения в направлении вектора  $\ddot{d}$  равна нулю. Этим можно воспользоваться для уменьшения потерь на отражение при переходе плоскополяризованного света через границу раздела двух сред с разными коэффициентами преломления  $n_1$  и  $n_2$ . На фиг. 7 показан луч света  $r_1$  с углом падения  $\alpha_1$ ,



Фиг. 7. Отраженный и преломленный лучи плоскополяризованного света при переходе из среды 1 в среду 2.

преломленный луч  $r_2$ , распространяющийся под углом  $\alpha_2$  к нормали, и преломленный луч  $r_1'$  с углом преломления  $\alpha_1$ . Можно считать, что источником отраженного луча являются микроскопические носители зарядов на поверхности раздела, приведенные в движение электрическим полем преломленного луча. Следовательно, вектор  $\ddot{d}$ , вызывающий появление отраженного луча, совпадает по направлению с электрическим вектором  $E$  преломленного луча. Если угол падения выбран так, это отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны, то вектор  $\ddot{d}$  будет параллелен направлению отраженного луча и излучения в этом направлении не будет. Согласно закону Снелла,  $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$ . В условиях, когда отражение отсутствует, т.е. когда  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2$ , получим соотношение, которым определяется так называемый угол Брюстера:  $\text{tg} \alpha_1 = n_2/n_1$ .

Это соотношение часто используется для достижения условий, обеспечивающих наименьшие потери в лазерах.

Полная интенсивность излучения рассматриваемой системы движущихся зарядов дается выражением

$$P = \frac{|\dot{\mathbf{d}}|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (6.11)$$

Чтобы получить этот результат, мы проинтегрировали выражение (6.10) по всему телесному углу и воспользовались формулой

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{8\pi}{3}.$$

В частном случае, когда у нас всего лишь одна частица с зарядом  $q$ , полная интенсивность излучения равна

$$P = \frac{q^2 |\dot{\mathbf{x}}|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}, \quad (6.12)$$

где  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  — ускорение частицы. Этот результат, известный под названием формулы Лармора, позволяет сделать важнейший вывод о том, что в классической механике излучение без ускорения невозможно.

**Задача 6.1.** Исходя из общего выражения для скалярного потенциала в лоренцевской калибровке, вычислите в дипольном приближении величину

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left[ \frac{\mathbf{d}(t-r/c)}{r} \right] + \dots,$$

где  $q = \int_{-\infty}^{\infty} \rho^e(\mathbf{x}', t-r/c) dx'$  — константа (полный заряд системы).

После этого с учетом выражения  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \dot{\mathbf{d}}(t-r/c)/4\pi r$  выведите приведенное в данном параграфе выражение для  $\mathbf{E}$ , но с дополнительным членом, соответствующим электростатическому потенциалу.

**Задача 6.2.** Вычислите, за какое время электрон, движущийся первоначально по классической траектории, соответствующей первой борновской орбите, теряет всю свою кинетическую энергию за счет излучения.

**Задача 6.3.** В термоэлектронном преобразователе энергии катод обычно нагревается электронной бомбардировкой. Позади катода помещают нагреваемый электронный эмиттер, и испускаемые им электроны бомбардируют катод, ускоряясь под действием внешнего

напряжения  $\varphi$ . В области между электронным эмиттером и катодом поддерживается высокий вакуум для того, чтобы исключить возможность столкновений электронов с атомами остаточного газа. Пусть  $\varphi = 2000$  В, ток  $I = 1$  А, а расстояние между электронным эмиттером и катодом  $s = 1$  мм. Скорость электронов, выходящих из эмиттера, можно считать равной нулю.

1. Вычислите мощность электромагнитного излучения (в ваттах), испускаемого электронами до их падения на катод.

2. Предполагая, что упавшие на катод электроны тормозятся в нем на расстоянии, равном радиусу первой борновской орбиты  $a_0$ , определите мощность электромагнитного излучения, связанного с торможением электронов.

**Задача 6.4.** Если перпендикулярно направлению движения электрона с зарядом  $-e$  и массой  $m_e$  приложить магнитную индукцию  $B$ , то электрон будет вращаться с частотой  $\omega = eB/m_e$ . Вычислите в классическом приближении мощность излучения (в ваттах) такого электрона, предполагая, что его скорость равна тепловой скорости электрона при температуре  $10^4$  К (т. е.  $m_e \omega^2 = 3kT$ , где  $k$  — постоянная Больцмана), а  $B = 1$  Вб/м<sup>2</sup>.

## § 7. ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Посмотрим теперь, каким образом основные положения электромагнитной теории могут быть использованы для объяснения радиационных процессов, представляющих интерес в физике частично ионизованных газов. В гл. 2, § 9, мы говорили о радиационных процессах, соответствующих связанно-связанному, связанно-свободным и свободно-свободным переходам, с точки зрения поглощения излучения. В этом и следующих трех параграфах мы исследуем, в какой степени классические или полуклассические понятия могут служить основой при приближенном количественном анализе испускания излучения при таких переходах. Испускание излучения, конечно, связано с поглощением принципом детального равновесия (гл. 2, § 11).

Порядок рассмотрения процессов будет обратным тому, который был принят в гл. 2, § 9, т. е. мы начнем с процессов, которые в наименьшей степени зависят от внутренней структуры частиц.

Каждое упругое столкновение <sup>1)</sup> двух частиц в газе приводит к изменению дипольного момента  $\mathbf{p}$ , следовательно, в соответствии с соотношением (6.11) — к испусканию излучения. Излучение,

<sup>1)</sup> Здесь слово «упругое» означает, что внутренняя энергия двух частиц не меняется в процессе столкновения. Энергия излучения черпается из кинетической энергии относительного движения. В квантовой механике такое столкновение считается неупругим в соответствии с определением, приведенным в гл. 2, § 2.

возникающее в ходе такого процесса, называется *тормозным*<sup>1)</sup>, поскольку такое излучение впервые наблюдалось при торможении электронов с высокой энергией, сталкивающихся с толстой металлической мишенью. В газе *тормозное* излучение может возникнуть при столкновении двух нейтральных или нейтральной и заряженной частиц вследствие искажения распределения зарядов вокруг ядра нейтральной частицы. Такие процессы мы рассматривать не будем и ограничимся рассмотрением столкновений между заряженными частицами. *Тормозное* излучение оказывается существенным только при достаточно высоких температурах, когда преобладают столкновения между заряженными частицами.

Пусть  $e_1, m_1$  и  $x_1(t)$  — заряд, масса и координата одной из частиц, участвующих в столкновении. Соответствующие параметры второй частицы обозначим индексом 2. Дипольный момент двух частиц с одинаковым отношением заряда к массе  $e_1/m_1 = e_2/m_2$  равен

$$d = e_1 x_1 + e_2 x_2 = \frac{e_1}{m_1} (m_1 x_1 + m_2 x_2) = \frac{e_1 (m_1 + m_2)}{m_1} R,$$

где  $R = (m_1 x_1 + m_2 x_2)/(m_1 + m_2)$  — координата центра масс системы. Поскольку сила, действующая на центр масс, равна нулю, мы имеем  $\ddot{d} \sim \ddot{R} = 0$ ; следовательно, при столкновении таких частиц дипольное излучение отсутствует<sup>2)</sup>. Поэтому, в частности, излучением, возникающим при столкновениях одинаковых ионов, можно пренебречь и ограничиться рассмотрением столкновения электрона (заряд  $-e$ ) с ионом (заряд  $Ze$ ).

Поскольку масса иона значительно больше массы электрона, ускорением иона можно пренебречь по сравнению с ускорением электрона. На основании формулы (6.11) получим, что интенсивность излучения в некоторый момент  $t$  процесса столкновения равна

$$P(t) = \frac{2(e^2/4\pi\epsilon_0)}{3c^3} |\ddot{x}(t)|^2, \quad (7.1)$$

где  $\ddot{x}(t)$  — мгновенное ускорение электрона<sup>3)</sup>. В гл. 5 рассмотрелись траектории электрона  $x(t)$  без учета потерь энергии на излучение. Такие траектории представляют собой семейство гипербол, зависящих от прицельного расстояния  $b$  и начальной кинетической энергии электрона  $m_e C^2/2$  (или, точнее, от кинетической энергии относительного движения). Полная энергия, излучаемая

<sup>1)</sup> В английском языке тормозное излучение называется немецким словом «Bremsstrahlung». — Прим. ред.

<sup>2)</sup> Это справедливо для системы, состоящей из любого числа частиц с одинаковым отношением заряда к массе. — Прим. ред.

<sup>3)</sup> Интенсивность излучения положительна как при положительном, так и при отрицательном ускорении. В классической механике нет механизма поглощения излучения, который можно было бы назвать *тормозным поглощением*.

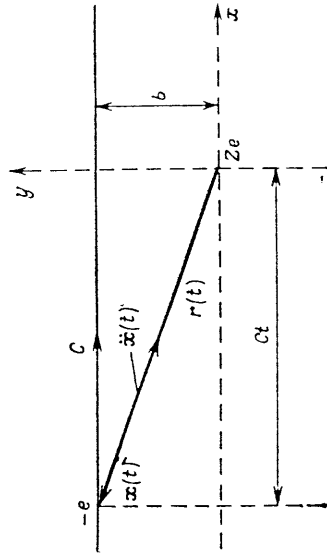
в процессе одного столкновения, равна

$$W(b, C) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) dt = \frac{2(e^2/4\pi\epsilon_0)}{3c^3} \int_{-\infty}^{\infty} |\ddot{x}(t)|^2 dt. \quad (7.2)$$

Ускорение электрона определяется законом Кулона:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{Ze^2/4\pi\epsilon_0}{m_e |r(t)|^3} x \quad (7.3)$$

где  $x(t)$  — координата электрона в системе отсчета, центр которой совпадает с положением иона, а  $r(t) = |x(t)|$ .



Фиг. 8. Прямая линия, заменяющая истинную траекторию электрона, становится кривой, при приближенных вычислениях.

При столкновениях с прицельным расстоянием  $b$ , значительно превышающим прицельное расстояние  $b_0$  для отклонения на угол  $90^\circ$ , равное  $Z(e^2/4\pi\epsilon_0)/m_e C^2$ , траектория электрона представляет собой почти прямую линию (фиг. 8). Для такой прямой траектории мы можем написать

$$r(t) = (b^2 + C^2 t^2)^{1/2}. \quad (7.4)$$

Здесь мы полагаем, что в момент времени  $t=0$  электрон находится в точке с координатами  $(0, b)$ . Подставив величины (7.3) и (7.4) в формулу (7.2), получим

$$W(b, C) = \frac{\pi Z^2 (e^2/4\pi\epsilon_0)^2}{3m_e^2 C^3 b^3}. \quad (7.5)$$

[При выводе этого выражения интеграл в формуле (7.2) нужно привести к безразмерному виду и воспользоваться формулой  $2 \int_0^\infty (1 + \xi^2)^{-2} d\xi = \pi/2$ ]. Формула (7.5) строго выполняется только при  $b \gg b_0$ . Но мы можем использовать ее для приближенной оценки

полной энергии излучения, возникающего при столкновении, при любых значениях  $b$ .

В газе электроны движутся к иону со всех сторон. Чтобы найти мощность тормозного излучения  $\mathcal{P}^{II}$  в единице объема газа, необходимо провести интегрирование по всем столкновениям с разными  $b$  и  $C$ . Согласно формуле (6.186) из гл. 2, дифференциальная плотность потока электронов со скоростью  $C$  (т. е. число электронов, пересекающих в единицу времени единичную площадку, перпендикулярную  $C$ ) относительно покоящегося иона равно  $[n_e f_e(C) d^3 C]$ , где  $f_e(C)$  — функция распределения электронов по скоростям (гл. 2, § 6). Следовательно, число сталкивающихся в единицу времени с одним ионом электронов, скорости которых лежат в интервале от  $C$  до  $C + dC$ , а прицельные расстояния — в интервале от  $b$  до  $b + db$ , равно

$$[n_e f_e(C) d^3 C] C 2\pi b db. \quad (7.6)$$

Поскольку мощность излучения, возникающего при каждом таком столкновении, равна  $W(b, C)$ , а в единице объема содержится  $n_i$  ионов, плотность тормозного излучения такова:

$$\mathcal{P}^{II} = 2\pi n_e n_i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{b_{\text{мин}}}^{\infty} C f_e(C) W(b, C) b db d^3 C. \quad (7.7)$$

Ненулевой нижний предел  $b_{\text{мин}}$  для возможных значений прицельного расстояния введен из квантовомеханических соображений, аналогичных изложенным в гл. 2, § 7. Дело в том, что приближенное описание движения электрона классическими траекториями имеет смысл лишь при условии, что неопределенности прицельного расстояния  $\Delta b$  и компоненты импульса электрона  $\Delta p_b$ , перпендикулярной направлению вектора  $C$ , одновременно удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} \Delta b &\ll b, \\ \Delta p_b &\ll m_e C. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Согласно принципу неопределенности Гейзенберга, мы имеем  $\Delta b \Delta p_b \gtrsim \hbar$ , где  $\hbar = 2\pi\hbar$  — постоянная Планка, так что

$$b \gg \frac{\hbar}{m_e C} \equiv b_{\text{мин}}.$$

$C$  достаточно до множителя  $2\pi$  величина  $b_{\text{мин}}$  равна длине волны де Бройля.

Пользуясь соотношением (7.5), проведем интегрирование по прицельному расстоянию в уравнении (7.7). В результате получим

$$\int_{b_{\text{мин}}}^{\infty} W(b, C) b db = \frac{\pi Z^2 (e^2/4\pi\epsilon_0)^3}{3m_e^3 C b_{\text{мин}}} = \frac{\pi Z^2 (e^2/4\pi\epsilon_0)^3}{3m_e^3 \hbar}.$$

Поскольку сюда скорость электрона не входит, после интегрирования в формуле (7.7) по скоростям получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C f_e(C) d^3 C = \bar{C}_e,$$

где  $\bar{C}_e$  — средняя скорость электрона. Если распределение электронов по скоростям является максвелловским, то  $\bar{C}_e = (8kT_e/m_e)^{1/2}$  в соответствии с соотношением (6.34) из гл. 2. С учетом этих промежуточных результатов окончательно получаем

$$\mathcal{P}^{II} \approx \left[ \frac{4\pi^3}{3} \left( \frac{8k}{\pi m_e} \right)^{1/2} \frac{(e^2/4\pi\epsilon_0)^3}{m_e^3 \epsilon^3 \hbar} \right] Z^2 n_e n_i T_e^{1/2}. \quad (7.9)$$

С квантовомеханической точки зрения тормозное излучение возникает при переходах внутри континуума энергий электронно-ионной системы. Квантовомеханические расчеты дают результат, отличающийся от (7.9) множителем  $4\bar{g}_{if}/\sqrt{3}\pi$ . Таким образом, плотность тормозного излучения выражается формулой [1, стр. 94]

$$\mathcal{P}^{II} = 1,43 \cdot 10^{-40} Z^2 n_e n_i T_e^{1/2} \bar{g}_{if} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-3}. \quad (7.10)$$

Усредненный множитель Гаунта  $\bar{g}_{if}$  для свободно-свободных переходов — порядка единицы. Он вычислен в работе [5] для широкого интервала значений  $n_i$  и  $T_e$ . В отличие от того, что мы имеем в классической теории, в квантовой теории представляется о поглощении при свободно-свободных переходах оказывается совершенно естественным (гл. 2, § 9).

Спектральное распределение тормозного излучения из газа в классическом приближении может быть найдено путем фурье-анализа движения электрона. Метод вычисления изложен в следующем параграфе, где он используется, правда, для иных целей. Очень приближенно можно сказать, что спектр тормозного излучения имеет вид  $\exp(-\hbar\nu/kT_e)$ , где  $\nu$  — частота. При частотах порядка плазменной частоты и меньших в спектре обнаруживаются некоторые характерные закономерности, что можно было бы предсказать заранее. Этот и связанные с ним вопросы рассматриваются в работах [1, 3].

Приведем численный пример. В условиях, типичных для МГК-генератора, а именно при  $Z = 1$ ,  $n_e = n_i \approx 10^{14} \text{ см}^{-3}$  и  $T_e \approx 2500 \text{ К}$ , мы имеем  $\mathcal{P}^{II} \approx 70 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-3} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-3}$ . Хотя излучение такой мощности в принципе может быть обнаружено, в суммарное излучение дают больший вклад другие механизмы и тормозным излучением в этих условиях можно пренебречь. При гораздо более высоких температурах, характерных для термоядерных установок, тормозное излучение становится одним из главных механизмов потерь энергии.

**Задача 7.1.** Температура, при которой энергия, выделяемая в результате термоядерного синтеза, равна потерям на тормозное излучение, называется температурой поджига термоядерной реакции. Для дейтериево-тригвиевой плазмы плотность энергии, выделяемой в ходе термоядерной реакции, равна [12]

$$4 \cdot 10^{-28} \frac{n_D^2}{T^{2/3}} e^{-4,24 \cdot 10^3 T^{-1/3}} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-3},$$

где  $n_D$  — плотность дейтерия (в единицах  $\text{м}^{-3}$ ), а  $T$  — его температура (в кельвинах). Предполагая, что  $T_e = T$ , вычислите температуру поджига термоядерной реакции в электронвольтах.

**Задача 7.2.** Выведите выражение для плотности тормозного излучения, исходя из результата задачи 11.2 к гл. 2 и формулы (9.23) из гл. 2.

## § 8. ИЗЛУЧАТЕЛЬНЫЙ ЗАХВАТ

Излучение при свободно-связанных переходах возникает в том случае, когда при столкновении свободного электрона с ионом электрон захватывается и образуется новый возбужденный ион (заряд которого на единицу меньше) или нейтральная частица. Обозначим потенциал ионизации образовавшейся частицы через  $\epsilon_k$ . Тогда частота испускаемого излучения будет определяться соотношением

$$h\nu = \frac{m_e c^2}{2} + \epsilon_k. \quad (8.1)$$

При выводе в предыдущем параграфе классического выражения для плотности излучения при свободно-связанных переходах рассуждения были довольно простыми и во всем последовательными, кроме того, что нам пришлось ввести принцип неопределенности для вычисления минимального прицельного расстояния. В случае же излучения при свободно-связанных переходах нам при классическом подходе к решению задачи потребовалось ввести гораздо больше элементов квантовой механики, поскольку в данном случае очень существенна квантовая структура образующейся частицы. Это накладывает на вычисления отпечаток некоторой искусственности, но тем не менее имеет смысл их проделать. Сечение столкновения с излучением при свободно-связанных переходах для ионов водорода впервые было вычислено Крамерсом [9], и мы будем пользоваться его методом.

Прежде всего нам нужно вывести классическое выражение для спектрального распределения излучения при одном столкновении, приводящем к свободно-свободному переходу. На основании теоре-

мы Парселля<sup>1)</sup> мы можем написать соотношение (7.2) для полной энергии излучения при таком столкновении следующим образом:

$$W(b, C) = \frac{2(e^2/4\pi\epsilon_0)}{3c^3} \int_{-\infty}^{\infty} |\ddot{x}(t)|^2 dt = \\ = \frac{2(e^2/4\pi\epsilon_0)}{3c^3} 4\pi \int_0^{\infty} |\dot{x}_\omega|^2 d\omega = \int_0^{\infty} W_\omega(b, C) d\omega, \quad (8.2)$$

где

$$\dot{x}_\omega(b, C) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t) e^{i\omega t} dt \quad (8.3)$$

— интегральный фурье-образ величины  $\dot{x}(t)$ , а

$$W_\omega(b, C) d\omega \equiv \frac{8\pi(e^2/4\pi\epsilon_0)}{3c^3} |\dot{x}_\omega|^2 d\omega \quad (8.4)$$

— энергия излучения, испускаемого в интервале частот  $d\omega$ . Поскольку  $\omega = 2\pi\nu$ , мы имеем  $W_\omega d\omega = 2\pi W_\nu d\nu = W_\nu d\nu$  и, таким образом, величина  $W_\nu \equiv 2\pi W_\omega$  есть энергия излучения в единичном интервале частот (спектральная плотность излучения).

В газе число электронов, которые пройдут мимо иона в единицу времени со скоростями в интервале от  $C + db$  и прицельными расстояниями в интервале от  $b$  до  $b + db$ , определяется соотношением (7.6). Тогда энергия излучения, испускаемого этими электро-

<sup>1)</sup> В силу интегральной теоремы Фурье для любой достаточно «хорошей» действительной функции  $f(t)$ , можно написать  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega \exp\{-i\omega t\} d\omega$ ,

где  $f_\omega = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp\{i\omega t\} dt$ . Поскольку функция  $f(t)$  является действительной, для комплексно сопряженной функции мы имеем  $f_\omega^* = f_{-\omega}$ . Если  $g(t)$  — другая действительная функция, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} g_\omega e^{-i\omega t} d\omega dt = \int_{-\infty}^{\infty} g_\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt d\omega = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} g_\omega 2\pi f_{-\omega} d\omega = 2\pi \int_0^{\infty} (f_\omega g_\omega^* + f_\omega^* g_\omega) d\omega.$$

Если  $g(t) \equiv f(t)$ , то  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt = 4\pi \int_0^{\infty} |f_\omega|^2 d\omega$ , где  $|f_\omega|^2 \equiv f_\omega f_\omega^*$ .

нами в диапазоне частот между  $\nu$  и  $\nu + d\nu$  в единицу времени, составит

$$[n_e f_e(C) d^3C] C 2\pi b db W_\nu d\nu.$$

В квантовой механике такое излучение представляет собой поток фотонов с энергией  $h\nu$ . Поэтому можно сказать, что полное число свободно-свободных переходов в единицу времени, происходящих при столкновении с ионом пучка электронов с дифференциальной плотностью  $[n_e f_e(C) d^3C]$  и приводящих к излучению на частоте  $\nu$ , равно

$$[n_e f_e(C) d^3C] C \left\{ \int_{b_{\text{мин}}}^{\infty} \frac{W_\nu d\nu}{h\nu} 2\pi b db \right\}.$$

Вспоминная определенное сечения столкновения [формула (3.2) из гл. 2 и соотношение, которое следует за формулой (6.18) из гл. 2], мы можем рассматривать множитель в фигурных скобках

$$dQ^{(\lambda \rightarrow \lambda^*)}(C) = d\nu \int_{b_{\text{мин}}}^{\infty} \frac{W_\nu(b, C)}{h\nu} 2\pi b db \quad (8.5)$$

как сечение столкновения, сопровождающегося излучением в частотном интервале  $d\nu$  за счет свободно-свободного перехода (т. е. как сечение столкновения с переходом между свободными состояниями  $\lambda$  и  $\lambda^*$ ).

Теперь, пользуясь формулой (8.5), оценим сечение столкновения, при котором электрон, имеющий определенную скорость, излучает столь большое количество энергии, что в результате оказывается захваченным на связанный уровень  $k$ . Строго говоря, как явствует из соотношения (8.1), этому процессу нельзя приписать какой-либо частотный интервал. Но мы, следуя Крамерсу [9], будем считать, что «процессу, в котором электрон захватывается в определенное стационарное состояние, в классической теории соответствует определенный частотный интервал излучения». Если рассматривать  $\epsilon_{k\lambda}$  как непрерывную функцию квантового числа энергетического уровня, то интервал частот  $\Delta\nu$ , соответствующий переходам в интервале квантовых чисел  $\Delta k$ , будет равен

$$h\Delta\nu \approx \left| \frac{d\epsilon_{k\lambda}}{dk} \right| \Delta k = |\epsilon'_{k\lambda}| \Delta k.$$

Для того чтобы интервалы квантовых чисел  $\Delta k$ , соответствующие различным энергетическим уровням, не перекрывались, в соответствии с предположением Крамерса логично взять  $\Delta k = 1$ . Заменяя  $d\nu$  в соотношении (8.5) величиной  $\Delta\nu$ , получим следующее выражение

для сечения излучательной рекомбинации:

$$Q^{(\lambda \rightarrow b)}(C) \approx \frac{|\epsilon'_{k\lambda}|}{h} \int_0^{\infty} \frac{W_\nu(b, C)}{h\nu} 2\pi b db. \quad (8.6)$$

(Нижний предел интеграла взят равным нулю, поскольку, как нетрудно показать, интеграл сходится при  $b \rightarrow 0$ , а интервал от 0 до  $b_{\text{мин}}$  даст ничтожно малый вклад в полную величину интеграла.)

Сечение излучательного захвата электрона ионом водорода можно вычислить полностью, исходя из энергетических уровней модели Бора и гиперболических траекторий электрона для кулоновского взаимодействия. Пользуясь соотношением (4.8) из гл. 2, для процесса рекомбинации на уровень с главным квантовым числом  $n$  получаем

$$|\epsilon'_{mn}| = \frac{4\pi^2 Z^2 (e^2/4\pi\epsilon_0)^2 n_e}{h^2 m^3}. \quad (8.7)$$

О фурье-преобразовании гиперболических орбит и вычислении интеграла, входящего в формулу (8.6), см. книгу Ландау и Лифшица [10, стр. 197]. Вычисления оказываются довольно сложными. Мы покажем лишь, как проводятся вычисления, на примере прямой линейной траектории (фиг. 8), а затем приведем более общие результаты.

Если обозначить компоненты вектора  $\dot{x}_\omega$  в плоскости движения через  $\dot{x}_\omega$ ,  $\dot{y}_\omega$ , то из выражения (7.3), пользуясь формулами (7.4) и (8.3), получим

$$\dot{x}_\omega = -\frac{Z(e^2/4\pi\epsilon_0)}{2\pi m_e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Cte^{i\omega t}}{(b^2 + C^2 t^2)^{3/2}} dt = -\frac{Z(e^2/4\pi\epsilon_0)\omega}{2m_e C^2} H_0^{(1)}(i\gamma), \quad (8.8a)$$

$$\dot{y}_\omega = -\frac{Z(e^2/4\pi\epsilon_0)}{2\pi m_e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{be^{i\omega t}}{(b^2 + C^2 t^2)^{3/2}} dt = -\frac{Z(e^2/4\pi\epsilon_0)\omega}{2m_e C^2} H_0^{(1)'}(i\gamma), \quad (8.8b)$$

где

$$\gamma = \frac{\omega b}{C}.$$

Здесь

$$H_0^{(1)}(i\gamma) = -\frac{2i}{\pi\gamma} \int_0^{\infty} \frac{\xi \sin \gamma \xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}} d\xi = -\frac{2i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \gamma \xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}} d\xi$$

— функция Ханкеля первого рода нулевого порядка [7, стр. 133], и

$$H_0^{(1)'}(i\gamma) = \frac{2}{\pi\gamma} \int_0^{\infty} \frac{\cos \gamma \xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}} d\xi = \frac{d}{d\gamma} H_0^{(1)}(i\gamma).$$

В большинстве случаев, представляющих интерес, величина  $K_{\text{об}}$  очень близка к единице [8, стр. 197; 2].

Интересно сравнить плотность излучения при свободно-связанных и свободно-свободных переходах. Для излучения при свободно-связанных переходах на  $m$ -й уровень имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_m^{fb} &= n_e n_i \int_{-\infty}^{\infty} h\nu Q^{(n \rightarrow m)}(C) C f_e(C) d^3C = \\ &= n_e n_i \frac{64\pi^2 Z^2 (e^2/4\pi\epsilon_0)^3 \epsilon_{m\eta} g_{bf}}{3\sqrt{3} m_e^3 c^3 h (\pi k T_e / m_e)^{1/2} m}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

При выводе этой формулы мы воспользовались тем, что для максвелловской функции распределения (задача 6.5 к гл. 2) выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_e(C) d^3C}{C} = \left( \frac{2m_e}{\pi k T_e} \right)^{1/2}.$$

Пользуясь соотношениями (7.9) и (8.14) и считая, что множитель Гаунта равен единице, получаем

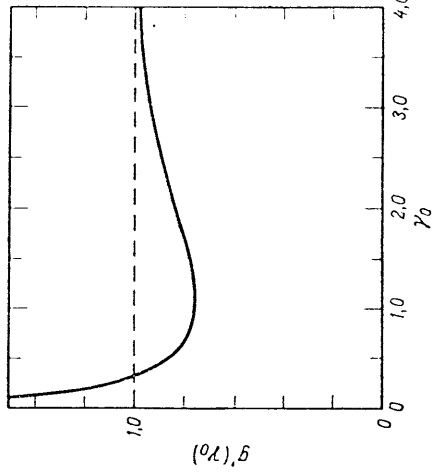
$$\frac{\mathcal{P}_m^{fb}}{\mathcal{P}^{ff}} \approx \frac{2\epsilon_{m\eta}/m}{kT_e}. \quad (8.15)$$

Отсюда следует, что при низких температурах излучение, возникающее в результате свободно-связанных переходов, преобладает над непрерывным излучением свободных электронов.

Задача 8.1. Исходя из принципа детального равновесия, выведите выражение (9.21) из гл. 2 для сечения фотоионизации.

§ 9. ЛИНЕЙЧАТОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ (ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ СВЯЗАННО-СВЯЗАННЫХ ПЕРЕХОДАХ)

Боровская интерпретация структуры линейчатых спектров на основе представления о переходах между дискретными энергетическими уровнями в атомах (гл. 2, § 4) явилась вехой в развитии современной квантовой теории. В том, что атомная система излучает энергию только на строго определенных частотах, проявляется квантово-механическая сущность процессов, а поэтому можно, заране



Фиг. 9. График функции  $g'(\gamma_0)$ , фигурирующей в формуле (8.12).

Грубо говоря, функция  $\gamma H_0^{(1)'}(i\gamma)$  ведет себя, как  $\exp(-\gamma)$ , и она больше функции  $\gamma H_0^{(1)}(i\gamma)$ . Таким образом, в случае примодифицированной траектории спектральная плотность излучения при одном столкновении имеет вид

$$W_\nu(b, C) \approx \frac{4\pi^2 Z^2 (e^2/4\pi\epsilon_0)^3}{3m_e^2 C^2} \left( \frac{\omega}{C} \right)^2 F(\gamma), \quad (8.9)$$

где

$$F(\gamma) \equiv |H_0^{(1)}(i\gamma)|^2 + |H_0^{(1)'}(i\gamma)|^2. \quad (8.10a)$$

В более общем случае гиперболической траектории функцию  $F(\gamma)$  следует заменить функцией

$$F(\gamma_0 e; \gamma_0) \equiv \frac{e^2 - 1}{e^2} |H_{i\gamma_0}^{(1)}(i\gamma_0 e)|^2 + |H_{i\gamma_0}^{(1)'}(i\gamma_0 e)|^2, \quad (8.10b)$$

где  $e^2 = 1 + (b/b_0)^2$  и

$$\gamma_0 = \frac{\omega b_0}{C}. \quad (8.11)$$

При  $b \gg b_0$  мы имеем  $F(\gamma_0 e; \gamma_0) \rightarrow F(\gamma; 0) = F(\gamma)$ .<sup>1)</sup>

Теперь, подставив величину (8.7) и обобщенное выражение (8.9) в формулу (8.6), можно получить полуклассическое выражение для сечения  $Q^{(n \rightarrow m)}(C)$  излучательного захвата на водородный уровень с главным квантовым числом  $m$ . Результаты таковы:

$$Q^{(n \rightarrow m)}(C) = \frac{128\pi^4 Z^4 (e^2/4\pi\epsilon_0)^5}{3\sqrt{3} m_e^3 h^4 C^2 m^3 \nu} g'(\gamma_0). \quad (8.12a)$$

Функция  $g'(\gamma_0)$  определяется соотношением

$$\frac{4}{\pi\sqrt{3}} g'(\gamma_0) = \int_0^\infty F(\xi; \gamma_0) \xi d\xi = i\gamma_0 H_{i\gamma_0}^{(1)}(i\gamma_0) H_{i\gamma_0}^{(1)'}(i\gamma_0), \quad (8.12b)$$

ее график представлен на фиг. 9. При  $\gamma_0 > 0,2$  величина  $g'$  отличается от единицы меньше чем на 20%, но при  $\gamma_0 \rightarrow 0$  логарифмически расходуется<sup>1)</sup>.

Формула для сечения излучательного захвата электрона ионом водорода, полученная на основе квантовой теории, имеет такой же вид, как и формула (8.12a), но в ней множитель  $g'(\gamma_0)$  заменяется множителем Гаунта для связанно-свободных переходов  $g_{bf}$ . В единицах СИ эта формула имеет вид

$$Q^{(n \rightarrow m)}(C) = 1,01 \cdot 10^{-13} \frac{Z^4 g_{bf}}{C^2 m (1 + m_e C^2 / 2\epsilon_{m\eta})}. \quad (8.13)$$

<sup>1)</sup> Излучение с низкими частотами соответствует столкновениям с большими прицельными расстояниями. В плазме же вследствие экранирования (гл. 2, § 8) прицельное расстояние не может быть больше дебаевского радиуса экранирования  $\lambda_D$ , а поэтому излучение будет обрезано на частоте порядка  $\omega_{\text{мин}} \sim C/\lambda_D$  со стороны нижних частот. Соответствующий нижний предел для  $\gamma_0$  равен  $b_0/\lambda_D$ .



сказать, что классические методы пригодны в лучшем случае лишь для конечного исследования таких процессов. Исходя из представлений классической механики, мы должны связать появление излучения на дискретных частотах с гармониками колебательной системы. Если период колебаний системы  $\tau = 2\pi\omega_0^{-1}$ , то средняя энергия, излучаемая за период, дается выражением

$$\bar{P} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} P(t) dt = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} |\dot{\mathbf{d}}(t)|^2 dt, \quad (9.1)$$

где  $P(t)$  — мгновенная мощность излучения, определяемая соотношением (6.11). Затем нам нужно установить, как это излучение распределено по гармоникам системы.

Дипольный момент периодической системы можно разложить в ряд Фурье:

$$\mathbf{d}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{d}_l e^{-i\omega_l t}, \quad (9.2)$$

и, следовательно,

$$\dot{\mathbf{d}}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} -i\omega_l \mathbf{d}_l e^{-i\omega_l t}, \quad (9.3)$$

где  $\omega_l = l\omega_0$  — частота  $l$ -й гармоники. Поскольку  $\mathbf{d}(t)$  — величина действительная, для коэффициентов  $\mathbf{d}_l$  фурье-разложения справедливо соотношение  $\mathbf{d}_l^* = \mathbf{d}_{-l}$ , где звездочкой обозначена комплексно сопряженная величина. Умножив соотношение (9.3) само на себя, получим двойной ряд

$$|\dot{\mathbf{d}}(t)|^2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \omega_l^2 \omega_h^2 \mathbf{d}_l \cdot \mathbf{d}_h e^{-i\omega_l(t+h)t}.$$

С учетом формулы <sup>1)</sup>

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} e^{-i\omega_0(l+h)t} dt = \delta_{h, -l}$$

получим

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} |\dot{\mathbf{d}}(t)|^2 dt = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \omega_l^2 \omega_{-l}^2 \mathbf{d}_l \cdot \mathbf{d}_{-l} = 2 \sum_{l=1}^{\infty} \omega_l^4 |\mathbf{d}_l|^2.$$

Следовательно, соотношение (9.1) можно переписать в виде

$$\bar{P} = \sum_{l=1}^{\infty} P_l. \quad (9.4)$$

<sup>1)</sup> Величина  $\delta_{h, -l}$  называется дельта-символом Кронекера. Она равна единице при  $h = -l$  и нулю при всех других значениях  $h$ .

В соответствии с классической теорией мы приходим к выводу, что величина

$$P_l \equiv \frac{\omega_l^4 |\mathbf{d}_l|^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{16\pi^3 \nu_l^7 |\mathbf{d}_l|^2}{3\epsilon_0 c^3} \quad (9.5)$$

есть спектральная плотность излучения.

Согласно квантовой теории, линейчатое излучение появляется в том случае, когда электрон в атоме спонтанно переходит с энергетического уровня  $\epsilon_l$  на более низкий уровень  $\epsilon_k$ . Частота излучения при этом составляет  $\nu_{lk} = (\epsilon_l - \epsilon_k)/h$ . Процесс излучения по своей природе является статистическим и характеризуется коэффициентом Эйнштейна  $A_{lk}$ , определяемым таким образом, что величина

$$A_{lk} dt \quad (9.6)$$

есть вероятность спонтанного перехода электрона с уровня  $l$  на уровень  $k$  за время  $dt$  [формула (9.15в) из гл. 2]. Средняя энергия, излучаемая за время  $dt$ , равна  $h\nu_{lk} A_{lk} dt$ , а поэтому квантовая теория дает для спектральной плотности излучения выражение

$$P^{(l \rightarrow k)} = h\nu_{lk} A_{lk}. \quad (9.7)$$

Оценим приближенно величину  $A_{lk}$ , приравняв выражения (9.5) и (9.7). Ясно, что при этом величину  $\nu_l$  в формуле (9.5) следует заменить величиной  $\nu_{lk}$ , а величину  $\mathbf{d}_l$  величиной  $\mathbf{d}_{lk}$ , зависящей от уровней, между которыми происходит переход. На основании всего изложенного мы не можем определить точного вида величины  $\mathbf{d}_{lk}$ , но для электрона в атоме логично принять, что

$$|\mathbf{d}_{lk}| \sim ea_0, \quad (9.8)$$

где  $a_0$  — радиус первой боровской орбиты [формула (4.7) из гл. 2]. Таким образом, из выражений (9.5) и (9.7) следует, что

$$A_{lk} \sim \frac{16\pi^3 \nu_{lk}^3 |\mathbf{d}_{lk}|^2}{3\epsilon_0 c^3 h}. \quad (9.9)$$

С учетом соотношения (9.8) получаем

$$A_{lk} \sim \frac{32\pi^3 e^2 / 4\pi\epsilon_0}{3} \left(\frac{a_0}{c}\right)^2 \nu_{lk}^3 \sim 7,50 \cdot 10^{-38} \nu_{lk}^3 \text{ с}^{-1}. \quad (9.10)$$

В оптическом диапазоне частот, например при  $\nu_{lk} \sim 0,6 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ , мы имеем

$$A_{lk} \sim 2 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}. \quad (9.11)$$

Точно величину  $\mathbf{d}_{lk}$ , входящую в формулу (9.9), можно вычислять методами квантовой теории. Но оказывается, что квантовая теория дает для коэффициента Эйнштейна выражение, идентичное соотношению (9.9). Величину  $\mathbf{d}_{lk}$  можно представить в виде  $e\mathbf{x}_{lk}$ ,

где  $\chi_n$  — матричный элемент перехода, который определяется интегралом, содержащим полные функции урнней  $l$  и  $k$ .

**Задача 9.1.** Выведите соотношение, связывающее частоту электромагнитного излучения, возникающего при переходе между двумя соседними уровнями боровского атома, с орбитальной частотой электрона на одном из этих уровней. Исследуйте это соотношение в предельном случае больших квантовых чисел и сравните полученный результат с выводами классической теории.

**Задача 9.2.** Найдите отношение мощности излучения, возникающего при переходе между соседними высоколежащими уровнями боровского атома, к мощности классического излучения электрона на орбите, соответствующей одному из этих уровней. Ответ выразите в наиболее простой форме. (*Указание.* Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи и задачи 9.2 из гл. 2.)

**Задача 9.3.** Измеренное значение отношения интенсивностей излучения двух линий серии Бальмера для водорода (переходы на уровень с главным квантовым числом 2), соответствующих переходам с уровней с главными квантовыми числами 5 и 3, равно 0,088. Определите температуру газа, предполагая, что газ является оптически тонким для излучения, соответствующего этим переходам, и находится в состоянии термодинамического равновесия.

**Задача 9.4.** Имеется плазма с присадкой калия при 2500 К, в которой плотность возбужденных атомов калия составляет  $10^{17}$  см $^{-3}$ . Коэффициент Эйнштейна  $A$  для спонтанного перехода с уровня  $3D_{3/2}$  на уровень  $4P_{1/2}$  равен  $2,1 \cdot 10^7$  с $^{-1}$ . Предполагая, что поглощение и индуцированное излучение пренебрежимо малы, а газ находится в состоянии термодинамического равновесия, вычислите мощность линейчатого излучения, связанного с этим переходом, из объема 1 см $^3$ . Для вычисления могут понадобиться следующие дополнительные сведения: энергия уровней  $3D_{3/2}$  и  $4P_{1/2}$  по отношению к основному уровню ( $4S_{1/2}$ ) составляет 2,68 и 1,61 эВ. Статистический вес для уровней  $3D_{3/2}$ ,  $4P_{1/2}$  и  $4S_{1/2}$  равен 4, 2 и 2.

## § 10. ФОРМА ЛИНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

При помощи оптических приборов с высокой разрешающей способностью установлено, что линейчатое излучение не является строго монохроматическим, а представляет собой излучение, интенсивность которого как-то изменяется в сравнительно узком интервале частоты. Механизмы, которыми определяется эта зависимость от частоты (т. е. механизмы, которыми определяется форма линии излучения), рассматривались в гл. 2, § 9. Правда, там речь шла о поглощении, но все сказанное там относится и к процессам излучения. В данном параграфе мы изложим классическую теорию

одного из этих механизмов, а именно механизма, лежащего в основе *естественного* уширения. Здесь мы будем говорить и об unsuccessful и о поглощении излучения. Отметим, что в большинстве случаев естественное уширение в газах перекрывается другими видами уширения. Естественное уширение мы рассматриваем здесь главным образом в иллюстративных целях. Исследование же других механизмов уширения у вело бы нас слишком далеко. Читателям, интересующимся этими вопросами, мы рекомендуем обратиться к литературе, указанной в гл. 2, § 9.

Простейшей классической системы с дискретным значением частоты является гармонический осциллятор, т. е. система, движение которой определяется законом Гука. В классическом приближении электрон атома можно рассматривать как простой гармонический осциллятор, огибающая частоту линии с собственной частотой осциллятора  $\omega_0$ . Уравнение движения линейного электронного осциллятора, совершающего колебания вдоль оси  $y$ , в нулевом приближении записывается следующим образом:

$$m_e \ddot{y} = -m_e \omega_0^2 y. \quad (10.1a)$$

Здесь  $y$  — смещение электрона из его равновесного положения, а  $-m_e \omega_0^2 y$  — возвращающая сила. Решение этого уравнения при  $t \geq 0$  имеет вид

$$y(t) = Y_0 \cos \omega_0 t. \quad (10.1b)$$

Начальная амплитуда колебаний  $Y_0$  связана с полной начальной энергией осциллятора  $W_0 = [m_e \dot{y}^2/2]_{\text{max}}$  соотношением

$$W_0 = m_e \omega_0^2 \frac{Y_0^2}{2}. \quad (10.1в)$$

Мы будем полагать, что  $y = 0$  при  $t < 0$ . Уравнение движения осциллятора, полученное в нулевом приближении, следует изменить так, чтобы учитывались потери энергии на излучение. Предполагая, что время, в течение которого вся начальная энергия осциллятора перейдет в излучение, намного больше периода колебаний осциллятора  $2\pi/\omega_0$ , мы можем написать

$$y(t) \approx Y(t) \cos \omega_0 t. \quad (10.2)$$

Здесь амплитуда  $Y(t)$  — медленно меняющаяся (за период  $2\pi/\omega_0$ ) функция времени, связанная с меняющейся во времени полной энергией осциллятора  $W(t)$  соотношением

$$W(t) = m_e \omega_0^2 \frac{Y(t)^2}{2}. \quad (10.3)$$

Поскольку амплитуда  $Y(t)$  остается почти постоянной на протяжении одного периода колебаний, мгновенная мощность излучения

осциллятора дается выражением

$$P(t) = \frac{e^2 \dot{y}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \approx \frac{e^2 \omega_0^2 \dot{y}(t)^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{e^2 \omega_0^4 Y(t)^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \cos^2 \omega_0 t. \quad (10.4)$$

Мощность излучения, усредненная по периоду колебаний осциллятора, равна

$$\bar{P}(t) \approx \frac{e^2 \omega_0^4 Y^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \gamma W(t), \quad (10.5a)$$

где

$$\gamma \equiv \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 m_e c^3}. \quad (10.5b)$$

Средняя скорость уменьшения энергии осциллятора за счет излучения может быть записана как

$$\frac{dW}{dt} = -\bar{P} = -\gamma W. \quad (10.6)$$

Следовательно, при  $t \geq 0$  среднее уменьшение полной энергии осциллятора описывается соотношением

$$W(t) = W_0 e^{-\gamma t}, \quad (10.7)$$

а смещение электрона дается выражением

$$y(t) = Y_0 e^{-(\gamma/2)t} \cos \omega_0 t. \quad (10.8)$$

Как и раньше, мы будем предполагать, что  $y = 0$  при  $t < 0$ .

Величина  $\gamma^{-1}$  есть *собственное время жизни осциллятора*. Таким образом, наше основное предположение о том, что процесс затухания колебаний является медленным, можно выразить неравенством

$$\gamma^{-1} \gg \omega_0^{-1}. \quad (10.9)$$

Из этого неравенства вытекает условие для длины волн  $\lambda_0 \gg 10^{-4}$  Å, которое легко выполняется в видимой области спектра. Влияние потерь на излучение можно также интерпретировать как силу торможения, пропорциональную скорости осциллятора, поскольку выражение (10.7) является приближенным решением уравнения движения

$$m_e \ddot{y} = -m_e \omega_0^2 y - m_e \gamma \dot{y}. \quad (10.10)$$

Собственное время жизни электрона осциллятора — это классический аналог собственного времени жизни возбужденного уровня в квантовой механике. Частицы, находящиеся на возбужденном уровне  $l$ , спонтанно переходят на более низкий уровень  $k$  с вероятностью в единицу времени, даваемой коэффициентом Эйнштейна  $A_{lk}$ . Если плотность частиц на уровне  $l$  составляет  $n_l$ , то

$$\frac{dn_l}{dt} = -n_l \sum_{k < l} A_{lk} = -n_l \gamma_l,$$

где

$$\gamma_l \equiv \sum_{k < l} A_{lk}. \quad (10.11)$$

Интегрируя, получаем выражение

$$n_l(t) = n_l(0) e^{-\gamma_l t},$$

аналогичное выражению (10.6). Можно интерпретировать  $\gamma_l^{-1}$  как среднее собственное время жизни частицы на возбужденном уровне  $l$ . Пользуясь соотношениями (9.19), а также формулами (4.7) и (4.9) из гл. 2, можно показать, что для атома водорода

$$A_{lm} \sim \frac{e^2 \omega_{lm}^2}{6\pi\epsilon_0 m_e c^3} Z^2 \left( \frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_m^2} \right).$$

Следовательно, классическое собственное время жизни — того же порядка, что и соответствующая величина  $\gamma_l \sim A_{lk}$  в квантовой теории (см. также задачу 11.2).

Спектральное распределение энергии излучения, которое следует из классической модели гармонического осциллятора с затуханием при выполнении условия (10.8), на основании теоремы Парсевеля (см. примечание на стр. 293) записывается в следующем виде:

$$W_\omega = 4\pi \frac{e^2 \omega^4 |y_\omega|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = 4\pi m_e \frac{\omega^4}{\omega_0^2} \gamma |y_\omega|^2.$$

Фурье-образ величины  $y(t)$ , даваемый выражением (10.7), имеет вид

$$y_\omega = \frac{Y_0}{2\pi} \int_0^\infty e^{-(\gamma/2)t + i\omega t} \left[ \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} \right] dt = \\ = \frac{Y_0}{4\pi} \left[ \frac{1}{(\gamma/2) - i(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{(\gamma/2) - i(\omega + \omega_0)} \right]. \quad (10.12)$$

Поскольку частота  $\omega$  положительна, а  $\gamma \ll \omega_0$ , величина  $y_\omega$  имеет острый максимум при  $\omega \approx \omega_0$  и вторым членом в формуле (10.11) можно пренебречь. Таким образом, для линий излучения мы получаем хорошо известный лоренцевский контур

$$\frac{W_\omega}{W_0} = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma/2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2}, \quad (10.13)$$

показанный на фиг. 10. Спектр представляет собой линию с центром на частоте  $\omega_0$ , ширина которой на половине интенсивности  $\Delta\omega = \gamma$ . Таким образом, время жизни осциллятора и полуширина линии прямо связаны между собой. Естественная полуширина линии, выраженная в длинах волн, составляет  $\Delta\lambda = (c/v_0^2)\Delta\omega = e^2/3\epsilon_0 m_e c^2 = 1,18 \cdot 10^{-4}$  Å. С квантовомеханической точки зрения естественное уширение можно рассматривать как следствие при-

ром за время импульса внешнего излучения, равна

$$\begin{aligned} W_{\omega}^{\text{полл}} &= \int_{-\infty}^{\infty} -eE_y(t) \dot{y}_1(t) dt = \\ &= -2\pi e \int_0^{\infty} [\dot{y}(\omega) E_y(\omega)^* + \dot{y}(\omega) E_y(\omega)] d\omega = \int_0^{\infty} W_{\omega}^{\text{полл}} d\omega. \end{aligned} \quad (10.15a)$$

Здесь  $W_{\omega}^{\text{полл}}$  — энергия внешнего импульса, поглощенная в частотном интервале  $d\omega$ , а  $\dot{y}(\omega) = -i\omega y(\omega)$  — фурье-образ величины  $y_1(t)$ . Пользуясь соотношением (10.14), получаем

$$\begin{aligned} W_{\omega}^{\text{полл}} &= \frac{-2\pi e^2}{m_e} |E_y(\omega)|^2 \left[ \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} - \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \right] \\ &= \frac{4\pi e^2}{m_e} \frac{\omega^2\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} |E_y(\omega)|^2. \end{aligned}$$

Величина  $W_{\omega}^{\text{полл}}$  есть функция частоты  $\omega$ , имеющая острый максимум при  $\omega = \omega_0$ . Следовательно, вблизи максимума мы можем написать  $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega(\omega_0 - \omega)$ . Тогда предыдущее соотношение примет вид

$$W_{\omega}^{\text{полл}} = \frac{2\pi e^2}{m_e} \frac{(\gamma/2)}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2} |E_y(\omega)|^2. \quad (10.15b)$$

Множитель  $|E_y(\omega)|^2$  пропорционален спектральной плотности энергии в падающем импульсе. Выражение для полной энергии импульса, приходящейся на единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения излучения, можно найти, пользуясь соотношением (4.5г) для потока вектора Пойнтинга плоской волны:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(t) dt = c\epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} E_y(t)^2 dt = 4\pi c\epsilon_0 \int_0^{\infty} |E_y(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} S_{\omega} d\omega. \quad (10.16a)$$

Здесь

$$S_{\omega} d\omega = 4\pi c\epsilon_0 |E_y(\omega)|^2 d\omega \quad (10.16b)$$

— полная энергия импульса в частотном интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , приходящаяся на единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения излучения.

Заменив множитель  $|E_y(\omega)|^2$  в формуле (10.15b) величиной  $S_{\omega}$ , получим

$$W_{\omega}^{\text{полл}} = Q_{\omega}^{\text{полл}} S_{\omega}. \quad (10.17)$$

Величину

$$Q_{\omega}^{\text{полл}} = \frac{e^2}{2\epsilon_0 m_e c} \frac{\gamma/2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2} \quad (10.18)$$

можно интерпретировать как *классическое сечение поглощения* импульса с частотой  $\omega$  осциллятором с собственной частотой  $\omega_0$ . Форма линии поглощения, соответствующая выражению (10.18), идентична форме линии излучения, соответствующей формуле (10.12). Для частоты  $\nu$  соотношение (10.17) принимает вид  $W_{\nu}^{\text{полл}} = Q_{\nu}^{\text{полл}} S_{\nu}$ , где  $Q_{\nu}^{\text{полл}}$  — величина, даваемая формулой (10.18), в которой частота  $\omega$  заменена величиной  $2\pi\nu$ . Таким образом,

$$Q_{\nu}^{\text{полл}} \equiv \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} \varphi(\nu), \quad (10.19a)$$

где

$$\varphi(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma/4\pi}{(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2} \quad (10.19b)$$

— функция формы линии.

Чтобы найти соответствующее квантовомеханическое выражение для сечения поглощения при переходах  $k \rightarrow l$ , следовало бы заменить  $\nu_0$  на  $\nu_{kl}$  и  $\gamma$  на  $\gamma_{lk}$ . Полученные нами выражения (10.19) совершенно аналогичны квантовомеханическим выражениям (9.8) и (9.16б) из гл. 2, но только в формуле (10.19b) не хватает множителя  $f_{kl}$ , т. е. «силы осциллятора». Квантовая теория дает следующий результат:

$$Q_{\nu}^{(k \rightarrow l)} = \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} f_{kl} \varphi(\nu). \quad (10.20)$$

Таким образом, можно сказать, что каждой частоте перехода кваантовой частицы соответствует некоторая доля классического осциллятора. Это интересное соответствие подтверждается и правилом суммирования Томаса — Куна, которое для атома с одним оптическим электроном имеет вид

$$\sum_l f_{kl} = 1. \quad (10.21)$$

В табл. 10 из гл. 2 показано, как это правило применяется к атому водорода. Вид соотношения (10.20) остается неизменным даже при наличии других механизмов уширения; функция формы линии изменится, но по-прежнему удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^{\infty} \varphi(\nu) d\nu = 1.$$

В качестве подготовки к следующему параграфу вернемся теперь к соотношению (10.15a) и закончим вычисление энергии, поглощаемой осциллятором с собственной частотой  $\omega_0$  при воздействии на него импульса электромагнитного излучения. Пользуясь соотношениями (10.17) и (10.18) и предполагая, что  $S_{\omega}$  мало меняется в пре-

делах ширины линии, получаем

$$W^{\text{полл}} = \frac{e^2}{2\epsilon_0 m_e c} S_{\omega_0} \int_0^{\gamma/2} \frac{\gamma/2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2} d\omega.$$

Вычислим этот интеграл, введя новую переменную  $\xi = (\omega - \omega_0)/(\gamma/2)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{1 + \xi^2} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{1 + \xi^2} = \pi. \quad (10.22)$$

Нижний предел в интеграле заменен на  $-\infty$  на основании условия (10.8). Используя соотношение (10.16б), получаем окончательно

$$W^{\text{полл}} = \frac{2\pi^2 e^2}{m_e} |E_{ij}(\omega_0)|^2. \quad (10.23)$$

**Задача 10.1.** Исходя из значения силы осциллятора, соответствующего переходу  $n = 2 \rightarrow n = 1$ , найдите максимальное среднее время жизни  $\tau$  атома водорода в возбужденном состоянии с  $n = 2$  (используйте соотношение  $\tau = A_{21}^{-1}$  и формулы из гл. 2, § 9 и 11). Почему в результате вычисления получается максимальное значение величины  $\tau$ ? Пользуясь борвской моделью атома, определите, сколько оборотов вокруг ядра в среднем делает электрон, находящийся в возбужденном состоянии с  $n = 2$ , прежде чем перейти в основное состояние. Интересно сравнить этот результат с числом оборотов Земли вокруг Солнца (такую систему мы считаем очень устойчивой), которое по оценкам равно  $10^9$ .

**Задача 10.2.** Ширину линии поглощения, соответствующей переходу с уровня  $n = 1$  на уровень  $n = 2$  в атоме водорода, можно считать равной  $\gamma_{12} \sim \Delta E_2/\hbar \approx A_{21}$ . Найдите толщину слоя водорода, находящегося при комнатной температуре и давлении  $10^{-3}$  Па, при которой этот слой станет оптически «толстым» для излучения на частоте, соответствующей центру линии [формула (9.26) из гл. 2]. Проведите такие же вычисления для поглощения на частоте, соответствующей центру линии для перехода с  $n = 2$  на  $n = 3$  [считайте  $\gamma_{23} \approx (\Delta E_3 + \Delta E_2)/\hbar \approx A_{21} + A_{32} + A_{31}$ ]. Кратность вырождения  $n$ -го уровня есть  $g_n = 2n^2$ .

**Задача 10.3.** Покажите, что энергия произвольного импульса электрического поля  $E(t)$ , поглощаемая связанным электроном, который ведет себя как гармонический осциллятор, способный колебаться в любом направлении, составляет  $(2\pi^2 e^2/m_e) |E(\omega_0)|^2$ , где  $E(\omega_0)$  — фурье-образ величины  $E(t)$ , вычисленный на собственной частоте колебаний  $\omega_0$  связанного электрона. На основании полученного результата покажите, что свободный электрон, движущийся со скоростью  $C$  относительно связанного электрона по прямой линейной траектории с постоянным расстоянием  $b$ , передает свя-

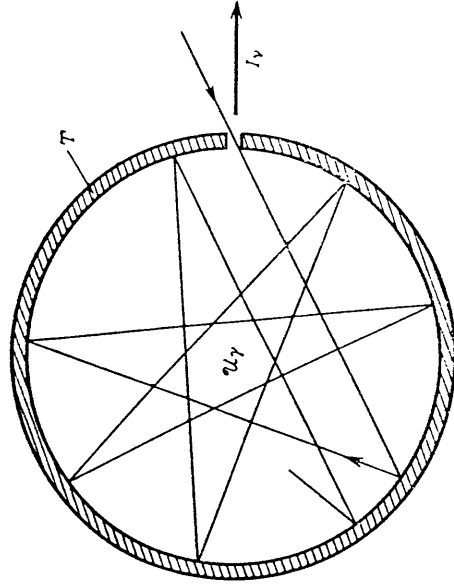
занному электрону энергию

$$\frac{\pi^2 (e^2/4\pi\epsilon_0)^2}{2m_e C^2 b^2} \hat{\gamma}^2 F(\hat{\gamma}),$$

где  $\hat{\gamma} = \omega_0 b/C$ , а  $F(\hat{\gamma})$  — величина, даваемая формулой (8.10а). (Это выражение, если в него ввести в качестве дополнительного множителя поглотительную силу осциллятора, будет идентично квантовомеханическому выражению, полученному Ситонем [14] для средней энергии, передаваемой электроном атому при столкновении, приводящем к переходу  $k \rightarrow l$  с  $\omega_{kl} = \omega_0$ . Как показал Ситон [14], исходя из этого результата, можно вывести формулу для сечения возбуждения при столкновении электрона с атомом.)

## § 11. ИЗЛУЧЕНИЕ АБСОЛЮТНО ЧЕРНОГО ТЕЛА

*Абсолютно черным телом* называется тело, которое полностью поглощает падающее на него излучение. На практике абсолютно



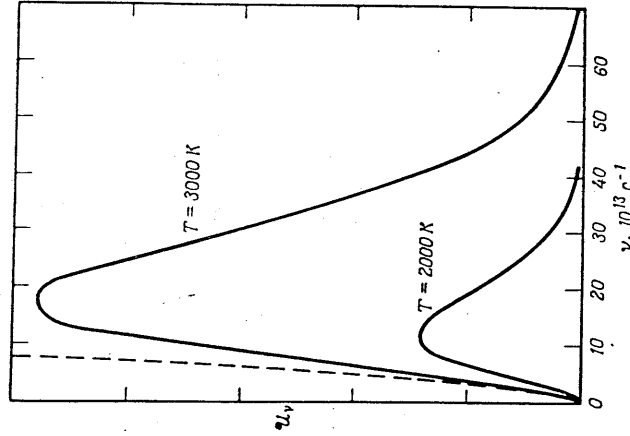
Фиг. 12. Приближенная модель абсолютно черного тела.

черное тело с любой степенью точности можно смоделировать, сделав небольшое отверстие в стенке большого, полого внутри, объема, стенки которого поддерживаются при постоянной температуре  $T$  (фиг. 12). Луч, попавший в отверстие, и прежде чем он выйдет через то же внутреннее отверстие, почти вся его энергия будет поглощена. В конце XIX в. было экспериментально установлено, что спектр излучения абсолютно черного тела является универсальной функцией одной только температуры и не зависит от материала, из которого сделаны стенки. Энергетический спектр излучения абсолютно черного тела пред-

ставлен на фиг. 13 ( $\mathcal{U}_\nu$  — спектральная плотность излучения внутри полости, изображенной на фиг. 12).

Трудности, на которые натолкнулась классическая теория при попытках объяснить излучение абсолютно черного тела, послужили одним из первых толчков, которые привели в дальнейшем к развитию квантовой теории. Прежде чем рассматривать свойства излучения черного тела с квантовых позиций, выведем классическую формулу, которая, как можно было сказать заранее, справедлива в определенных пределах. Поскольку экспериментально доказано, что спектр излучения не зависит от материала стенки, мы будем предполагать, что стенки состоят из гармонических осцилляторов. Результат вычислений не должен зависеть от параметров модели, и в этом мы убедимся после. Мы будем исходить из того, что в равновесном состоянии скорость, с которой стенки поглощают энергию излучения, равна скорости, с которой стенки излучают энергию. В случае линейных гармонических осцилляторов эти два процесса описываются соотношениями (10.23) и (10.5). Выражение (10.23) дает полную энергию излучения длительностью  $\tau$ , поглощаемую линейным гармоническим осциллятором с собственной частотой  $\omega_0$ . Поэтому предположим, что поле излучения внутри полости существует просто приемом, позволяющим использовать интегральную теорему Фурье, не вдаваясь в вопросы сходимости; конечный физический результат не будет зависеть от  $\tau$ . Теперь мы можем связать множитель, описывающий электрическое поле  $|E_y(\omega)|^2$  в выражении (10.23), с плотностью энергии излучения внутри полости следующим образом.

Поле излучения можно представить как суперпозицию плоских волн, распространяющихся в трех взаимно перпендикулярных направлениях  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Пользуясь соотношением (4.5с) для плотности энергии плоской волны, можно записать плотность энергии



Фиг. 13. Спектр излучения абсолютно черного тела. Штриховая кривая соответствует классической теории.

Выражение (10.23) дает полную энергию излучения длительностью  $\tau$ , поглощаемую линейным гармоническим осциллятором с собственной частотой  $\omega_0$ . Поэтому предположим, что поле излучения внутри полости существует просто приемом, позволяющим использовать интегральную теорему Фурье, не вдаваясь в вопросы сходимости; конечный физический результат не будет зависеть от  $\tau$ . Теперь мы можем связать множитель, описывающий электрическое поле  $|E_y(\omega)|^2$  в выражении (10.23), с плотностью энергии излучения внутри полости следующим образом.

Поле излучения можно представить как суперпозицию плоских волн, распространяющихся в трех взаимно перпендикулярных направлениях  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Пользуясь соотношением (4.5с) для плотности энергии плоской волны, можно записать плотность энергии

поля излучения в любой заданной точке в некоторый момент  $t$  следующим образом:

$$\mathcal{U}(t) = \epsilon_0 [E_x(t)^2 + E_y(t)^2 + E_z(t)^2].$$

Плотность энергии излучения в этой точке, усредненная по всему промежутку времени  $\tau$ , равна

$$\overline{\mathcal{U}} = \epsilon_0 (\overline{E_x^2} + \overline{E_y^2} + \overline{E_z^2}).$$

Логично предположить, что усредненное по времени поле излучения является изотропным и однородным, и, следовательно, во всех точках полости

$$\overline{E_x^2} = \overline{E_y^2} = \overline{E_z^2}.$$

Тогда на основании теоремы Парсевала (см. примечание на стр. 293) мы можем написать

$$\overline{\mathcal{U}} = 3\epsilon_0 \overline{E_y^2} = \frac{3\epsilon_0}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} E_y(t)^2 dt = \frac{12\pi\epsilon_0}{\tau} \int_0^{\infty} |E_y(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} \mathcal{U}_\omega d\omega,$$

где

$$\mathcal{U}_\omega = \frac{16\pi\epsilon_0 |E_y(\omega)|^2}{\tau} \quad (11.1)$$

— плотность энергии излучения в единичном интервале частоты  $\omega$ . Пользуясь соотношениями (11.1) и (10.23), получаем

$$\frac{W_{\text{полн}}}{\tau} = \frac{e^2}{12\epsilon_0 m_e} \mathcal{U}_\nu. \quad (11.2)$$

При выводе этого выражения мы опустили нулевой индекс у собственной частоты осциллятора и воспользовались соотношением  $\mathcal{U}_\nu = 2\pi\mathcal{U}_\omega$  для плотности энергии в единичном интервале частоты  $\nu$ . Формула (11.2) дает среднюю скорость, с которой электронный осциллятор с собственной частотой  $\nu$  поглощает энергию поля излучения. Отметим, что эта скорость не зависит от полной энергии (или амплитуды) осциллятора.

Усредненная по периоду скорость излучения энергии осциллятором, полная энергия которого равна  $W$ , а собственная частота  $\nu$  дается формулой (10.5), равна

$$\bar{\nu} = \frac{2\pi c^2 \nu^2}{3\epsilon_0 m_e c^3} W. \quad (11.3)$$

Полные энергии осцилляторов, из которых состоят стенки объема, лежат в широком интервале значений  $W$ . Если мы обозначим среднюю энергию осциллятора через  $\langle W \rangle$ , то средняя скорость, с которой осциллятор с частотой  $\nu$  излучает энергию, будет иметь вид

$$\langle \bar{\nu} \rangle = \frac{2\pi e^2 \nu^2}{3\epsilon_0 m_e c^3} \langle W \rangle. \quad (11.4)$$

Для того чтобы существовало равновесие между стенками и полем излучения, должно выполняться равенство

$$\frac{W_{\text{полгл}}}{\tau} = \langle \dot{P} \rangle. \quad (11.5)$$

Пользуясь этим условием, получаем

$$\mathcal{U}_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \langle W \rangle. \quad (11.6)$$

В классической статистической механике средняя энергия, приходящая на одну степень свободы для системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия при температуре  $T$ , равна  $kT/2$ , где  $k$  — постоянная Больцмана [16, стр. 11]. Поскольку линейный гармонический осциллятор имеет две степени свободы,

$$\langle W \rangle = kT. \quad (11.7)$$

Из соотношения (11.6) получаем условие равновесия поля излучения со стенками полости:

$$\mathcal{U}_\nu = \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^3}. \quad (11.8)$$

Эта классическая формула для излучения абсолютно черного тела, которая может быть выведена и другими способами, была впервые получена в 1900 г. и называется формулой Релея — Джинса. Как и предполагалось, в нее не входят параметры модели, но из фиг. 13 видно, что она дает бесконечность при больших значениях частоты. Планк в 1901 г. показал, что можно добиться прекрасного согласия с экспериментом, если в формулу (11.6) вместо средней энергии осциллятора в виде (11.7) поставить выражение

$$\langle W \rangle = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (11.9)$$

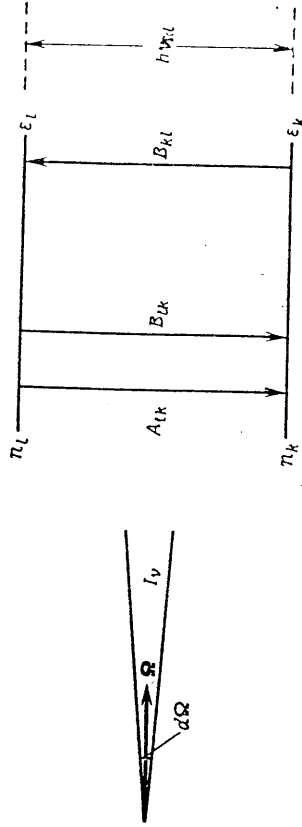
Константа  $h$  определяется путем подгонки выражения для  $\mathcal{U}_\nu$  к соответствующим экспериментальным значениям. Планк показал, что средняя энергия осциллятора  $\langle W \rangle$  будет описываться выражением (11.9), если предположить, что возможны не все значения  $W$ , как в случае классического осциллятора, а только  $W = n h\nu$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$  [4, стр. 63]. Отметим, что если энергетическое состояние  $h\nu$  между разрешенными уровнями намного меньше тепловой энергии  $kT$ , то из соотношения (11.9) получается классический результат (11.7).

В 1916 г. Эйнштейн предложил свой вывод точного выражения для спектрального распределения излучения черного тела. Этот вывод остается справедливым и в рамках современной квантовой теории. Рассмотрим систему атомов, находящихся в поле излучения с удельной интенсивностью  $I_\nu$ , которая дается формулой (9.6)

из гл. 2 и связана со спектральной плотностью излучения соотношением (см. задачу 9.1 из гл. 2)

$$\mathcal{U}_\nu = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I_\nu(\Omega) d\Omega, \quad (11.10)$$

где  $d\Omega$  — элемент телесного угла в направлении  $\Omega$ . Рассмотрим некоторую, характерную для этих атомов частоту  $\nu = \nu_{kl} \equiv$



Фиг. 14. Модель Эйнштейна для вывода спектра излучения абсолютно черного тела.

$\equiv (\epsilon_l - \epsilon_k)/h$ , соответствующую, как это следует из постулата Бора, переходу между двумя энергетическими уровнями  $\epsilon_l$  и  $\epsilon_k$  (фиг. 14).

Для описания взаимодействия излучения с веществом Эйнштейн ввел три атомные константы. Из выражения (9.6) следует, что вероятность спонтанного излучения в единицу времени (в телесный угол  $d\Omega$  вдоль направления  $\Omega$ ), соответствующего переходу с уровня  $l$  на уровень  $k$ , равна

$$\frac{A_{lk}}{4\pi} d\Omega. \quad (11.11a)$$

Вероятность индуцированного излучения в единицу времени (в телесный угол  $d\Omega$ ), соответствующего переходу  $l \rightarrow k$ , составляет

$$B_{lk} I_{\nu_{kl}} d\Omega. \quad (11.11b)$$

Аналогично вероятность поглощения излучения, распространяющегося в телесном углу  $d\Omega$  вдоль направления  $\Omega$  и вызывающего переходы  $k \rightarrow l$  в единицу времени, равна

$$B_{kl} I_{\nu_{kl}} d\Omega. \quad (11.11b)$$

Если на уровнях  $l$  и  $k$  находится  $n_l$  и  $n_k$  атомов, то условие стационарного состояния примет вид

$$n_l \left( \frac{A_{lk}}{4\pi} + B_{lk} I_{\nu_{kl}} \right) = n_k B_{kl} I_{\nu_{kl}}. \quad (11.12)$$

Это уравнение — квантовый аналог классического соотношения (11.5). Решая уравнение (11.12) относительно  $I_{\nu_{kl}}$ , получаем

$$I_{\nu_{kl}} = \frac{A_{lk}/4\pi B_{lk}}{(B_{kl}/B_{lk}) \exp(h\nu_{kl}/kT) - 1}.$$

Предположим теперь, что рассматриваемая система частиц находится в состоянии термодинамического равновесия. Тогда мы можем взять распределение Больцмана [формула (10.1) из гл. 2] для отношения  $n_k/n_l$  и написать условие равновесия поля излучения с веществом следующим образом:

$$I_{\nu_{kl}} = \frac{A_{lk}/4\pi B_{lk}}{(g_k B_{kl}/g_l B_{lk}) \exp(h\nu_{kl}/kT) - 1}. \quad (11.13)$$

В предельном случае, когда энергетическое расстояние между уровнями  $l$  и  $k$  намного меньше тепловой энергии  $kT$ , величина  $I_{\nu_{kl}}$  точно дается классической формулой. Для изотропного поля излучения

$$I_{\nu_{kl}} = \frac{c}{4\pi} \mathcal{U}_{\nu_{kl}}, \quad (11.14)$$

так что при  $h\nu_{kl}/kT \ll 1$  с учетом соотношений (11.8) и (11.13) получим

$$\frac{2\nu_{kl}^2}{c^2} kT = \frac{A_{lk}/4\pi B_{lk}}{(g_k B_{kl}/g_l B_{lk}) (1 + h\nu_{kl}/kT) - 1}.$$

Для того чтобы это уравнение было справедливым при всех  $kT$ , удовлетворяющих приведенному неравенству, должны выполняться соотношения

$$g_k B_{kl} = g_l B_{lk}, \quad (11.15a)$$

$$\frac{A_{lk}}{B_{lk}} = \frac{8\pi h\nu_{kl}^3}{c^2}. \quad (11.15b)$$

Подставив эти выражения в формулу (11.13) и отбросив индексы у величин  $\nu_{kl}$ , получим *равновесное* спектральное распределение удельной интенсивности  $B_\nu$  для любой температуры:

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (11.16)$$

Предложенный Эйнштейном вывод<sup>1)</sup> дает не только спектр излучения абсолютно черного тела, но также и важные соотношения (11.15) между коэффициентами  $A$  и  $B$ , показывающие, что только один из этих коэффициентов является независимым.

<sup>1)</sup> Вывод формул (11.7) из гл. 2, основанный на принципе детального равновесия, почти эквивалентен выводу Эйнштейна.

Силу осциллятора также можно связать с коэффициентами Эйнштейна, поскольку оба соотношения — (11.11в) и (10.20) — относятся к процессу поглощения. Из выражения (11.11в) следует, что энергия излучения, распространяющегося в телесном угле  $d\Omega$  в направлении  $\Omega$ , поглощаемая за счет всех *переходов*  $k \rightarrow l$  в единицу времени, составляет

$$h\nu_{kl} B_{kl} I_{\nu_{kl}} d\Omega. \quad (11.17a)$$

В то же время из соотношения (10.20) эта величина определяется как

$$\int_L (I_\nu d\Omega) Q_\nu^{(k \rightarrow l)} d\nu,$$

где интеграл берется по контуру  $L$  линии поглощения. Считая  $I_\nu$  слабо меняющейся по ширине линии функцией частоты, предыдущее выражение можно переписать в виде

$$(I_{\nu_{kl}} d\Omega) \int_L Q_\nu^{(k \rightarrow l)} d\nu = \frac{e^2 f_{kl}}{4\epsilon_0 m_e c} I_{\nu_{kl}} d\Omega. \quad (11.17b)$$

Таким образом, получаем

$$B_{kl} = \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c h \nu_{kl}} f_{kl}. \quad (11.18)$$

**Задача 11.1** Определите, при какой приблизительно температуре плотность энергии равновесного поля излучения равна тепловой энергии газа нормальной плотности.

**Задача 11.2** Выведите соотношение  $A_{lk} = 3\nu (g_k/g_l) f_{kl}$ , где  $\nu^{-1}$  — собственное время жизни классического электронного осциллятора.

**Задача 11.3** Исходя из соотношения (11.17b), найдите полную скорость поглощения энергии излучения при атомном переходе, если излучение распространяется во всех направлениях. Сравните этот результат с классическим выражением (11.2) для скорости поглощения энергии классическим линейным гармоническим осциллятором. Объясните имеющиеся различия.

## Литература

1. *Behefi G.*, Radiation Processes in Plasmas, Wiley, 1966.
2. *Burgess A.*, в книге *Mem. of the Roy. Astron. Soc.*, vol. 69, London 1961, Part 1. Tables of Hydrogenic Photoionization Cross-Sections and Recombination Coefficients.
3. *Dawson J. M.*, в книге *Advances in Plasmas Physics*, vol. 1, eds. A. Simon, W. B. Thompson, Interscience, 1968. Radiation from Plasma.



4. *Eisberg R. M.*, Fundamentals of Modern Physics, Wiley, 1961.
5. *Green J.*, Astrophys. Journ., 130, 693 (1959).  
Bremsstrahlung from a Maxwellian Gas.
6. *Jackson J. D.*, Classical Electrodynamics, Wiley, 1962 (имеется перевод: Дж. Джексон, Классическая электродинамика, изд-во «Мир», 1965).
7. *Jahnke E., Emde F.*, Tables of Functions, 4th ed., Dover Publications, 1945 (имеется перевод издания 1938 г.: Е. Янке, Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, М.-Л., 1949).
8. *Karzas W. J., Latter R.*, Astrophys. Journ. Suppl., 6, 167 (1961).  
Electron Radiative Transitions in a Coulomb Field.
9. *Kramers H. A.*, Phil. Mag., 46, 836 (1923).  
On the Theory of X-Ray Absorption and of the Continuous X-Ray Spectrum.
10. *Landau L. D., Lifshitz E. M.*, The Classical Theory of Field. Addison-Wesley, 1959 (см. также: Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., 1973).
11. *Panofsky W. K. H., Phillips M.*, Classical Electricity and Magnetism, Addison-Wesley, 1955.
12. *Post R. F.*, Proc. of the IRE, 45, 134 (1957).  
Controlled Fusion Research—An Application of the Physics of High Temperature Plasmas.
13. *Purcell E. M.*, Electricity and Magnetism, Berkeley Physics Course, vol. 2, McGraw-Hill, 1963.
14. *Seaton M. J.*, Proc. Phys. Soc., 79, 1105 (1962).  
The Impact Parameter Method for Electron Excitation of Optically Allowed Atomic Transitions.
15. *Stratton J. A.*, Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, 1941 (имеется перевод: Дж. Страттон, Теория электромагнетизма, М.-Л., 1948).
16. *Vincenti W. G., Kruger C. H.*, Introduction to Physical Gasdynamics, Wiley, 1965.

## КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

В данной главе мы перейдем к кинетической теории частично ионизованной плазмы. Изложение кинетической теории может проводиться с двух разных позиций. С одной стороны, плазму можно представлять себе как газовую смесь, подчиняющуюся гидродинамическим уравнениям и характеризующуюся коэффициентами переноса, которые вычисляются хорошо известными методами, основанными на представлении о двойных столкновениях между частицами. При таком подходе электроны и ионы рассматриваются на более или менее равной основе с нейтральными частицами газовой смеси. С другой стороны, при рассмотрении сильно ионизованной плазмы низкого давления упор обычно делается на особые свойства заряженных частиц, а также на коллективный и статистический характер кулоновского взаимодействия между этими частицами.

Мы будем рассматривать частично ионизованную столкновительную плазму, которая, как в первом из указанных подходов, удовлетворительно описывается гидродинамическими уравнениями при (явном) учете только двойных столкновений. Но наш подход будет иным, нежели при исследовании смесей нейтральных газов, поскольку мы используем упрощения, связанные с малостью массы электрона и с особым характером столкновений заряженных частиц.

Главным содержанием данной главы является вывод формул кинетической теории, относящихся к частично ионизованной плазме. Эти формулы будут применены в следующей главе для вычисления коэффициентов переноса плазмы. В § 2 мы рассмотрим главный вопрос теории явлений переноса, а именно соотношения между функцией распределения и потоками массы, импульса и энергии. В § 3 мы выведем сначала уравнение Больцмана для функции распределения, а затем уравнения сохранения (для отдельных компонентов и общие) через моменты уравнения Больцмана. В § 4 излагается теория столкновений между заряженными частицами по Фокуеру — Планку. В двух последних параграфах упор делается на особую роль электронов в кинетической теории плазмы. При анализе столкновений между электронами и тяжелыми частицами, который проводится в § 5, используются упрощения, связанные с малостью электронной массы. Пользуясь результатами предыдущих параграфов,

рафов, в § 6 мы осуществляем разложение электронной функции распределения по декартовым тензорам. На основе этого разложения в гл. 8 вычисляются коэффициенты переноса электронов.

## § 2. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОТОКИ ЧАСТИЦ

Поступательное движение различных компонент  $s$  частиц ионов названного газа, в том числе электронов и ионов, характеризуется функциями распределения разных компонент по скоростям  $f_s$ . Как указывалось в гл. 2, § 6, функции распределения по скоростям определяются таким образом, что число частиц данной компоненты в единице объема со скоростями в интервале от  $c$  до  $c + d^3c$ , находящихся в некоторой точке  $x$ , в момент времени  $t$  равно

$$n_s f_s(c, x, t) d^3c,$$

где  $n_s$  — полное число частиц рассматриваемой компоненты в единице объема. Функции распределения, определенные таким образом, удовлетворяют условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_s d^3c = 1. \quad (2.1)$$

Символ  $\int_{-\infty}^{\infty} ( ) d^3c$  в соотношении (2.1) и ниже обозначает интегрирование по всему пространству скоростей частиц, так что, вводя декартовы компоненты скоростей  $c_1, c_2, c_3$ , можно написать

$$\int_{-\infty}^{\infty} ( ) d^3c \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ( ) dc_1 dc_2 dc_3.$$

Каждый сорт частиц газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия и в среднем неподвижного, описывается максвелловской функцией распределения, которая выражается следующим образом через скорость частицы  $C$ :

$$f_s \equiv f_M = \left( \frac{m_s}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_s C^2 / 2kT}. \quad (2.2)$$

Функцией такого вида можно описать также и движущийся газ, находящийся в *квазиравновесном* состоянии, если под  $C$  понимать собственную скорость частицы:

$$C \equiv c - u. \quad (2.3)$$

Здесь  $c$  — скорость частицы в лабораторной системе координат, а  $u$  — массовая скорость, выражающаяся, как и в гл. 2, § 6, через

средние скорости  $u_s$  и плотность  $\rho_s$  частиц разных сортов следующим образом:

$$u \equiv \frac{1}{\rho} \sum_s \rho_s u_s. \quad (2.4)$$

Если функция распределения является максвелловской, то вектор потока тепла  $q$ , тензор вязких напряжений  $\tau$  и диффузионные скорости частиц  $U_s$  равны нулю, что соответствует определению квазиравновесия. Это нетрудно показать, подставив в определения этих величин функцию (2.2). В данном параграфе мы остановимся на этих и других величинах, которые будут нам нужны в дальнейшем, и познакомим читателя с соответствующими обозначениями.

Величины  $q$ ,  $\tau$  и  $U_s$  — это потоки энергии, импульса и частиц в системе координат, движущейся со средней массовой скоростью  $u$ . В лабораторной системе координат *дифференциальный поток* частиц сорта  $s$  со скоростями в интервале от  $c$  до  $c + d^3c$  через площадку, перпендикулярную, например, оси  $x_1$ , равен [формула (6.18a) из гл. 2]

$$c_1 n_s f_s d^3c.$$

Соответствующее выражение для дифференциального потока частиц через площадку, движущуюся с массовой скоростью  $u$ , имеет вид

$$C_1 n_s f_s d^3c.$$

Поскольку нормаль к поверхности есть вектор, в общем виде дифференциальный поток частиц можно записать как

$$C n_s f_s d^3c. \quad (2.5)$$

Интегральный поток (т. е. полное количество, проходящее через единицу площади в единицу времени) поступательной энергии, импульса и частиц компоненты  $s$  в системе отсчета, движущейся со средней массовой скоростью, можно получить, умножив дифференциальный поток (2.5) соответственно на  $m_s C^2/2$ ,  $m_s C$  и 1 и затем проинтегрировав по всем скоростям частиц. Тогда мы получим

$$q_s \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} n_s m_s C^2 C f_s d^3c = \frac{1}{2} \rho_s (\overline{C^2 C})_s, \quad (2.6a)$$

$$P_s \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n_s m_s C C f_s d^3c = \rho_s (\overline{C C})_s, \quad (2.6b)$$

$$n_s U_s \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n_s C f_s d^3c = n_s (\overline{C})_s. \quad (2.6v)$$

Здесь  $q_s$  — вектор потока тепла для данной компоненты,  $P_s$  — тензор потока импульса, или тензор давления,  $U_s$  — диффузионная

скорость. Величина  $p_s$  связана с тензором вязких напряжений соотношением (2.12a), приведенным ниже. Вектор потока тепла  $q$  и тензор потока импульса  $p$  газа как целого даются формулами

$$q = \sum_s q_s, \quad (2.7a)$$

$$p = \sum_s p_s. \quad (2.7b)$$

В формулах (2.6) черта над любой величиной, скажем  $\Phi$ , являющейся функцией скорости, означает, что берется среднее значение этой величины. Для конкретной компоненты имеем

$$\overline{(\Phi)}_s \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Phi f_s d^3c, \quad (2.8a)$$

а средняя величина  $\overline{\Phi}$  для газа как целого равна

$$\overline{\Phi} = \frac{1}{n} \sum_s n_s \overline{(\Phi)}_s. \quad (2.8b)$$

Таким образом, средняя  $u_s$  и диффузионная  $U_s$  скорости компоненты  $s$  даются соотношениями

$$u_s \equiv \overline{c}_s = \int_{-\infty}^{\infty} c f_s d^3c \quad (2.9a)$$

и

$$U_s \equiv \overline{C}_s = \int_{-\infty}^{\infty} C f_s d^3c = u_s - u. \quad (2.9b)$$

Из соотношений (2.9b) и (2.4) следует, что

$$\sum_s \rho_s U_s = 0. \quad (2.9в)$$

В приведенных выше соотношениях вместо интегрирования по  $C$  можно проводить интегрирование по  $c$ , поскольку, согласно определению (2.4), скорость  $u$  является функцией только координаты и времени и, следовательно, не зависит от переменной интегрирования ( $c$  или  $C$ ).

Температура данной компоненты  $T_s$  и ее скалярное давление  $p_s$  определяются соотношениями

$$\frac{3}{2} k T_s \equiv \frac{1}{2} m_s \overline{C^2}_s = \frac{1}{2} m_s \int_{-\infty}^{\infty} C^2 f_s d^3c, \quad (2.10a)$$

$$p_s = n_s k T_s, \quad (2.10b)$$

а давление газа как целого равно

$$p = \sum_s p_s. \quad (2.10в)$$

При таком определении температуры компоненты газа  $T_s$  не имеет значения, находится ли газ в равновесии или нет, а также одинаковы ли температуры  $T_s$  отдельных компонент или нет. В состоянии равновесия все температуры  $T_s$  имеют одно и то же значение  $T$ , фигурирующее в формуле (2.2).

Вектор потока тепла  $q_s$  и тензор потока импульса  $p_s$  в уравнениях (2.6) можно записать в компактном виде:

$$q_s = q_{s\alpha} = \frac{1}{2} \overleftarrow{p}_s (\overline{C_\alpha C^2})_s, \quad (2.11a)$$

$$p_s = p_{s\alpha\beta} = \rho_s (\overline{C_\alpha C_\beta})_s, \quad (2.11b)$$

где нижние индексы  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$  обозначают оси декартовой системы координат. Такая сокращенная форма записи с помощью нижних индексов удобна для представления тензорных величин, которые нам встретятся в дальнейшем, поскольку с ее помощью гораздо проще производить запись и умножение тензоров. Мы будем пользоваться и индексным ( $q_{s\alpha}, p_{s\alpha\beta}$ ), и векторным или тензорным ( $q_s, p_s$ ) способами записи в зависимости от того, что будет удобнее в каждом конкретном случае.

Из соотношений (2.10a), (2.10b) и (2.11b) нетрудно видеть, что скалярное давление  $p_s$  равно среднему значению диагональных компонент тензора потока импульса, т. е.  $p_s = \frac{1}{3} (p_{s11} + p_{s22} + p_{s33})$ . Тензор вязких напряжений  $\tau_s = \tau_{s\alpha\beta}$  определяется как взятый со знаком минус тензор потока импульса, из каждой диагональной компоненты которого вычитается скалярное давление. Таким образом, мы имеем

$$\tau_{s\alpha\beta} \equiv - (p_{s\alpha\beta} - p_s \delta_{\alpha\beta}) = - \left[ \rho_s (\overline{C_\alpha C_\beta})_s - \frac{1}{3} \rho_s (\overline{C^2})_s \delta_{\alpha\beta} \right], \quad (2.12a)$$

где  $\delta_{\alpha\beta}$  — символ Кронекера, определенный следующим образом:

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{при } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Аналогично тензор вязких напряжений  $\tau = \tau_{\alpha\beta}$  газа как целого равен

$$\tau_{\alpha\beta} = \sum_s \tau_{s\alpha\beta} = - (p_{\alpha\beta} - p \delta_{\alpha\beta}). \quad (2.12b)$$

Равенство нулю величин  $q_s, \tau_s$  и  $U_s$ , а следовательно, и величин  $q$  и  $\tau$  в случае максвелловской функции распределения является следствием того обстоятельства, что максвелловская функция есть

Как и в § 2, дифференциальный поток частиц через поверхность, перпендикулярную оси  $x_1$ , равен  $c_1 n_s f_s d^3x$ . Поток рассматриваемых частиц, поступающих в единицу времени внутрь объема  $d^3x$  через две поверхности, перпендикулярные оси  $x_1$ , равен

$$c_1 n_s f_s d^3x dx_2 dx_3 - \left[ c_1 n_s f_s d^3x dx_2 dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_1} (c_1 n_s f_s d^3x dx_2 dx_3 dx_1) \right] = - \frac{\partial}{\partial x_1} (c_1 n_s f_s) d^3x dx_2 dx_3.$$

Проводя суммирование по всем шести поверхностям объема  $d^3x$ , находим скорость увеличения числа частиц из-за конвекции:

$$- \left[ \frac{\partial}{\partial x_\beta} (c_\beta n_s f_s) \right] d^3x dx_1 dx_2 dx_3 = - [\nabla \cdot (c n_s f_s)] d^3x dx_1 dx_2 dx_3.$$

В левой части этого равенства производится суммирование по повторяющимся индексам  $\beta$ , при этом  $\beta = 1, 2, 3$  в соответствии с векторным выражением, стоящим в правой части.

Аналогичные рассуждения можно провести, рассматривая ускорение частиц под действием внешних сил  $F_s$ . Именно, рассмотрим потоки частиц в *пространстве скоростей* через поверхности элемента объема в пространстве скоростей  $d^3c = dc_1 dc_2 dc_3$ . «Плотность» в пространстве скоростей равна  $n_s f_s d^3x$ , а дифференциальный поток, обусловленный ускорением  $F_s/m_s$ , равен  $(F_s/m_s) n_s f_s d^3x$ . Таким образом, скорость увеличения числа частиц рассматриваемого класса под действием внешних сил равна

$$- \left[ \frac{\partial}{\partial c_\beta} \left( \frac{F_{s\beta}}{m_s} n_s f_s \right) \right] d^3x dx^3 c = - \left[ \nabla_c \cdot \left( \frac{F_s}{m_s} n_s f_s \right) \right] d^3x dx^3 c,$$

где  $\nabla_c$  — дивергенция, выраженная в декартовой системе пространства скоростей.

Обозначим скорость изменения числа частиц рассматриваемого класса в результате столкновений между частицами типа  $s$  и  $r$  через  $C_{sr}$ . Собирая теперь все полученные выражения и приравнивая их скорости изменения числа частиц рассматриваемого класса  $[\partial (n_s f_s) / \partial t] d^3x dx_1 dx_2 dx_3$ , получаем уравнение Больцмана

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_s f_s) + \nabla \cdot c n_s f_s + \nabla_c \cdot \frac{F_s}{m_s} n_s f_s = \sum_r C_{sr}. \quad (3.1)$$

Здесь дифференциалы  $d^3c$ ,  $d^3x$  опущены, а суммирование по  $r$  означает суммирование по всем компонентам, включая компоненты  $s$ .

Поскольку скорость частиц с независит от пространственных координат, второй член в левой части уравнения (3.1) может быть записан в виде  $c \cdot \nabla n_s f_s$ . Кроме того, в третьем члене левой части уравнения нас будут интересовать только те силы  $F_s$ , которые либо не

21\*

изотропная функция собственной скорости  $C$ , т. е. зависит только от величины скорости  $C$  и не зависит от ее направления. В дальнейшем мы используем то обстоятельство, что величины  $q_s$ ,  $\tau_s$  и  $U_s$  равны нулю для любого распределения, являющегося изотропной функцией скорости  $C$ .

**Задача 2.1.** Покажите, что величины  $q_s$ ,  $\tau_s$  и  $U_s$  равны нулю для любой изотропной функции распределения  $f_s(C)$ . *Указание.* Запишите  $d^3c = d^3C$  в сферических координатах пространства скоростей.

**Задача 2.2.** Найдите выражение: а) для потока массы компоненты (вектор), б) для потока импульса (тензор) и в) для потока поступательной энергии (вектор) компоненты газа через поверхность, неподвижную в лабораторной системе координат. (В лабораторной системе координат импульс отдельной частицы равен  $m_s c$ , а ее энергия равна  $1/2 m_s c^2$ .) Конечные результаты выразите через средние величины, такие, как  $u_s$ ,  $u$ ,  $\tau_s$ ,  $q_s$  и  $T_s$ , определения которых даны в этом параграфе. Найдите выражения для этих величин в частном случае квазиравновесности, т. е. при  $f_s = f_m$ .

### § 3. УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

В условиях неравновесности, обусловленной поступательным движением, пространственная и временная зависимости параметров, а также действия силовых полей приводят к появлению потока тепла, вязких напряжений и диффузионных скоростей, которые в общем случае не равны нулю и зависят от функций распределения компонент  $f_s(c, x, t)$ . Эти функции в свою очередь описываются уравнениями Больцмана для компонент. Ниже в данном параграфе на основании уравнения Больцмана будут выведены уравнения сохранения в частично ионизованной плазме, а в следующей главе — выражения для коэффициентов переноса в плазме.

Поскольку, умножив функцию распределения  $f_s$  на  $n_s d^3c$ , мы получим число частиц данной компоненты в единице объема, скорости которых лежат в интервале от  $c$  до  $c + dc$ , уравнение Больцмана можно рассматривать как уравнение непрерывности для частиц данной компоненты со скоростями, лежащими в указанном интервале скоростей. Рассмотрим частицы данной компоненты фиксированного класса скоростей в фиксированном элементе объема  $d^3x$ . Тогда уравнение Больцмана можно получить, считая, что скорость изменения во времени числа таких частиц  $n_s f_s d^3c d^3x$  определяется тремя эффектами — конвекцией, ускорением частиц силовыми полями и столкновениями этих частиц с частицами того же типа и с частицами других типов.

Скорость изменения числа рассматриваемых частиц в результате конвекции можно найти, рассмотрим потоки таких частиц через шесть поверхностей прямоугольного элемента объема  $d^3x = dx_1 dx_2 dx_3$ .

зависят от скорости частиц, как сила электрического поля, либо действуют в направлении, перпендикулярном скорости  $\mathbf{c}$ , как сила магнитного поля. При таких ограничениях любая компонента силы  $\mathbf{F}_s$  не зависит от компоненты скорости  $\mathbf{c}$ , имеющей то же направление, а поэтому

$$\frac{\partial}{\partial c_\beta} (F_{s\beta}) = \nabla_c \cdot \mathbf{F}_s = 0.$$

Таким образом, член, описывающий ускорение частиц, можно записать как  $(\mathbf{F}_s/m_s) \cdot n_s \nabla_c f_s$ . Тогда уравнение Больцмана примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_s f_s) + \mathbf{c} \cdot \nabla n_s f_s + \frac{\mathbf{F}_s \cdot n_s \nabla_c f_s}{m_s} = \sum_r C_{sr}. \quad (3.2)$$

Отметим, что левая часть уравнения Больцмана представляет собой субстанциональную производную величины  $n_s f_s$  в шестимерном пространстве координат  $x_1, x_2, x_3$  и скоростей  $c_1, c_2, c_3$  и ее можно было бы сразу написать в такой форме.

Рассмотрим теперь столкновительный член в правой части уравнения Больцмана. В случае упругих столкновений между нейтральными частицами или между нейтральными и заряженными частицами вычислить столкновительный член довольно просто, поскольку в условиях, представляющих для нас интерес, достаточно учесть только двойные столкновения. Это следует из того, что при концентрации частиц порядка «нормальной» концентрации ( $2,7 \times 10^{19} \text{ см}^{-3}$ ) или меньшей радиус действия сил межчастичного взаимодействия («диаметр» частицы) намного меньше среднего расстояния между частицами, которое в свою очередь намного меньше средней длины свободного пробега частиц между столкновениями. Последнее условие позволяет считать движение частиц хаотическим, что означает отсутствие корреляции между начальными скоростями частиц, участвующих в двойном столкновении.

При столкновениях заряженных частиц, взаимодействие между которыми описывается далекодействующим кулоновским потенциалом, указанные выше условия не выполняются, и в этом случае столкновительный член должен быть модифицирован. Подробный анализ этого вопроса в настоящее время является предметом исследований, которые основаны главным образом на уравнениях Боголюбова, Борна, Грина, Кирквуда и Ивона, полученных из уравнения Лиувилля. Эта задача может иметь важное значение при изучении полностью ионизованной плазмы низкого давления, но она выходит за рамки данной книги. Читателям, интересующимся этим вопросом, можно рекомендовать книгу Монтгомери и Тидмана [5] <sup>1)</sup>. Во всяком случае, эта теория подтверждает, что взаимодействие

<sup>1)</sup> См. также: Климонтович Ю. Л., Статистическая теория неравновесных процессов в плазме, М., 1964. — *Прим. перев.*

зарядов можно рассматривать как двойное столкновение, если считать, что кулоновский потенциал экранируется, или «обрезается», на дебаевском радиусе экранирования. Как показано в гл. 2, § 8, такое приближение применимо при больших значениях кулоновского логарифма  $\ln \Lambda$ , где  $\Lambda$  — отношение дебаевского радиуса экранирования  $\lambda_D$  к прицельному расстоянию  $b_0$  для рассеяния на угол, равный  $90^\circ$ .

Таким образом, мы можем вычислять столкновительный член в уравнении Больцмана (3.2), учитывая только двойные столкновения. Для этого рассмотрим столкновения частиц типа  $r$  с частицами произвольного типа  $s$  и вычислим отдельно скорости, которые характеризуют уменьшение или увеличение числа частиц данного класса в результате столкновений. Мы полагаем, что читатель знаком с понятием дифференциального сечения столкновения (гл. 2, § 3) и с динамикой упругих столкновений (гл. 5).

Скорости двух частиц до упругого столкновения ( $\tilde{\mathbf{c}}$  и  $\tilde{\mathbf{w}}$ ) и после него ( $\tilde{\mathbf{c}}'$  и  $\tilde{\mathbf{w}}'$ ) в системе отсчета, движущейся со скоростью центра масс (фиг. 1,  $a$ ), лежат в одной плоскости. Эта плоскость (плоскость движения) определяется начальной относительной скоростью  $\mathbf{g} = \mathbf{c} - \mathbf{w} = \tilde{\mathbf{c}} - \tilde{\mathbf{w}}$  и углом  $\phi$ , фиксирующим положение плоскости по отношению к произвольной плоскости, проходящей через вектор  $\mathbf{g}$ . Здесь тильдой отмечены скорости, измеренные по отношению к скорости центра масс  $\mathbf{G}_u = (m_s \tilde{\mathbf{c}} + m_r \tilde{\mathbf{w}})/(m_s + m_r)$ , на которую столкновения не влияют. Эти скорости равны

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} - \mathbf{G}_u = \frac{m_r}{m_s + m_r} \mathbf{g},$$

$$\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w} - \mathbf{G}_u = -\frac{m_s}{m_s + m_r} \mathbf{g},$$

$$\tilde{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}' - \mathbf{G}_u = \frac{m_r}{m_s + m_r} \mathbf{g}',$$

$$\tilde{\mathbf{w}}' = \mathbf{w}' - \mathbf{G}_u = -\frac{m_s}{m_s + m_r} \mathbf{g}',$$

где

$$\mathbf{g}' \equiv \mathbf{c}' - \mathbf{w}' = \tilde{\mathbf{c}}' - \tilde{\mathbf{w}}'$$

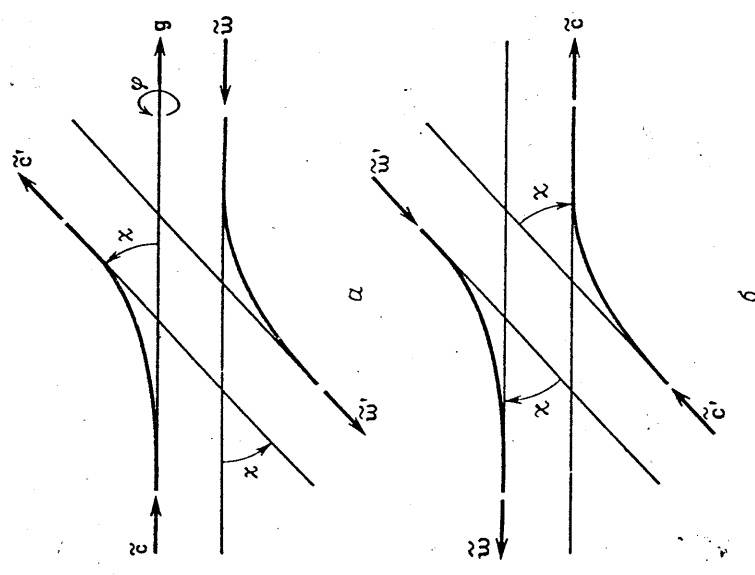
— относительная скорость после столкновения.

Число столкновений в единицу времени, приводящих к уменьшению числа частиц, дается непосредственно частотой столкновений частиц данного класса скоростей с частицами типа  $r$ . Число таких столкновений в единицу времени в единице объема, выраженное через дифференциальное сечение столкновения  $I_{sr}(g, \chi) d\Omega$  для отклонения (рассеяния) частицы с относительной скоростью  $g$  на угол  $\chi$  в пределах телесного угла  $d\Omega = \sin \chi d\chi d\phi$  (фиг. 2), равно

[формулы (3.4) и (6.17) из гл. 2]

$$n_s n_r f_s(c) f_r(w) g I_{sr}(g, \chi) d\Omega d^3 w d^3 c.$$

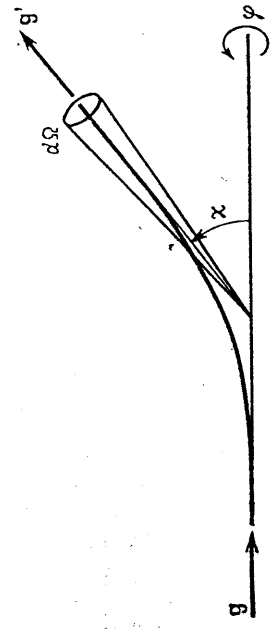
Столкновения, в результате которых происходит увеличение числа частиц данного класса скоростей, удобнее всего рассматривать, вводя понятие об обратных столкновениях. Обратное столкновение



Фиг. 1. Прямое столкновение, приводящее к уменьшению числа частиц данного класса скоростей, и обратное столкновение, увеличивающее число таких частиц, в системе отсчета центра масс. а — прямое столкновение; б — обратное столкновение.

определяется через параметры, связанные со столкновением, приводящим к уходу частиц, таким образом, что скорости двух частиц до обратного, увеличивающего число частиц столкновения равны скоростям, приобретаемым частицами после исходного, уменьшающего число частиц столкновения. Кроме того, обратное столкновение происходит в той же плоскости, что и прямое, и угол отклонения берется равным углу отклонения  $\chi$  при прямом столкновении (фиг. 1, б). При этих условиях скорости после обратного столкновения равны скоростям до прямого столкновения. То, что это спра-

ведливо для системы, движущейся со скоростью центра масс, следует из геометрических соображений и из того обстоятельства, что, поскольку относительная скорость не меняется в процессе столкновения ( $g' = g$ , см. задачу 6.2 к гл. 2), относительные скорости после обратного столкновения и до него равны между собой. Поскольку скорость  $G$  центра масс не изменяется при столкновении,



Фиг. 2. Телесный угол  $d\Omega$ .

скорости в лабораторной системе координат также равны. Тогда число столкновений в единицу времени в единице объема, приводящих к увеличению числа частиц данного класса скоростей, можно выразить через число обратных столкновений, равное

$$n_s n_r f_s(c') f_r(w') g I_{sr}(g, \chi) d\Omega d^3 w' d^3 c'.$$

Здесь было использовано равенство  $g' = g$ . Поскольку скорости  $c'$  и  $w'$  являются функциями величин  $c, w, \chi$  и  $\phi$ , для проведения интегрирования этого выражения по всем скоростям  $w$  частиц типа  $r$  необходимо перейти от переменных  $w', c'$  к переменным  $w, c$ . Известно [2, § 3.52], что якобиан соответствующего преобразования равен единице.

Скомбинируем выражения для скоростей процессов, приводящих к уменьшению и увеличению числа частиц, следующим образом:

$$n_s n_r [f_s(c) f_r(w) - f_s(c') f_r(w')] g I_{sr} d\Omega d^3 w d^3 c.$$

При написании этого выражения мы предположили, что в рассматриваемых условиях функции распределения  $f_s$  и  $f_r$  не меняются сколько-нибудь заметно на расстояниях порядка  $\sqrt{I_{sr}}$  или за время порядка времени столкновения, так что можно считать, что функции  $f_s(c), f_r(w), f_s(c')$  и  $f_r(w')$  определяются одними и теми же координатами и моментом времени. Чтобы получить столкновительный член уравнения Больцмана (3.2), следует провести интегрирование в этом выражении по  $\Omega$  и  $w$  и тем самым учесть все направления рассеяния и все скорости частиц типа  $r$ . Исключая множитель  $d^3 c$

в соответствии с определением столкновительного члена, имеем

$$C_{sr} = n_s n_r \int_{-\infty}^{\infty} [f_s(c') f_r(w') - f_s(c) f_r(w)] g I_{sr} d\Omega d^3w. \quad (3.4)$$

Здесь интегрирование по  $\Omega$  проводится в пределах всего телесного угла  $4\pi$  с учетом того обстоятельства, что при столкновениях заряженных частиц наличие дебаевского экранирования накладывает нижний предел  $\chi_{\text{мин}}$  на угол отклонения  $\chi$ .

При выводе уравнения Больцмана мы считали функцию распределения зависящей от скорости и координаты частицы и времени (переменные  $c, x$  и  $t$ ), т.е.  $f_s = f_s(c, x, t)$ . Для дальнейшего изложения удобно вместо скорости в лабораторной системе координат  $c$  ввести в уравнении Больцмана собственную скорость частиц  $C \equiv c - u$ . Для этого частные производные в левой части уравнения Больцмана (3.2) следует преобразовать с учетом того, что  $u = u(x, t)$ . Для простоты обозначим величины  $n_s f_s(c, x, t)$  и  $n_s f_s(C, x, t)$ , являющиеся функциями системы независимых переменных, через  $F_c$  и  $F_C$ . Здесь  $f_s(C, x, t)$  — новая функция, полученная из функции  $f_s(c, x, t)$  заменой  $c$  на  $C + u$ . Интересующие нас производные преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_c}{\partial t} &= \frac{\partial F_C}{\partial t} + \frac{\partial F_C}{\partial C_\beta} \frac{\partial C_\beta}{\partial t} = \frac{\partial F_C}{\partial t} - \frac{\partial F_C}{\partial C_\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial t}, \\ \frac{\partial F_c}{\partial x_\alpha} &= \frac{\partial F_C}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_C}{\partial C_\beta} \frac{\partial C_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial F_C}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial F_C}{\partial C_\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}, \\ \frac{\partial F_c}{\partial c_\alpha} &= \frac{\partial F_C}{\partial c_\alpha}. \end{aligned}$$

Здесь проводится суммирование по повторяющимся индексам. Подставив выражения для производных в уравнение Больцмана (3.2), после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (n_s f_s) + (u_\beta + C_\beta) \frac{\partial}{\partial x_\beta} (n_s f_s) + \left( \frac{F_{s\beta}}{m_s} - \frac{D u_\beta}{Dt} \right) n_s \frac{\partial f_s}{\partial C_\beta} - \\ - C_{\beta\gamma} n_s \frac{\partial f_s}{\partial C_\gamma} \frac{d u_\gamma}{d x_\beta} = \sum_r C_{sr}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta}.$$

Следует помнить, что здесь функция распределения зависит уже от переменных  $C, x$  и  $t$ . В уравнении (3.5) суммирование по повторяющимся индексам производится отдельно в каждом члене уравнения. В последнем слагаемом левой части уравнения суммирование проводится как по  $\beta$ , так и по  $\gamma$ , так что это слагаемое есть сумма девяти членов.

Интеграл столкновений  $C_{sr}$  в правой части уравнения (3.5) содержит только интегрирование и не изменится, если выражение (3.4) переписать через собственные скорости частиц. Это означает, что в выражении (3.4) можно просто заменить  $f_s(c)$  на  $f_s(C)$ . Аналогично  $d^3w$  заменяется на  $d^3W$ , где  $W \equiv w - u$ , так что теперь  $g = |C + u| - (W + u) = |C - W|$ . Таким образом, мы имеем

$$C_{sr} = n_s n_r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f_s(C') f_r(W') - f_s(C) f_r(W)] g I_{sr} d\Omega d^3W. \quad (3.6)$$

В заключение данного параграфа рассмотрим уравнения сохранения массы, импульса и плотности, которые можно получить с помощью момента уравнения Больцмана. Последние получатся путем умножения уравнения Больцмана для отдельной компоненты на некоторую функцию скорости частиц  $\Phi$  с последующим интегрированием по всему пространству скоростей. Если в качестве функции  $\Phi$  взять массу, импульс или энергию частицы, то моменты уравнения Больцмана будут представлять собой соответствующие уравнения сохранения. Существуют два эквивалентных способа вывода этих уравнений. Если уравнение Больцмана записано через скорости частицы в лабораторной системе координат  $c$ , а функция  $\Phi$  берется равной  $m_s, m_s c$  и  $1/2 m_s c^2$ , то мы получим уравнения сохранения, относящиеся также к лабораторной системе координат. Эти уравнения приводятся, например, в книге Винченги и Кругера [7, гл. 9, § 10]. Но в дальнейшем нам понадобятся уравнения сохранения, выраженные через скорость  $u$ . Поэтому мы воспользуемся уравнением Больцмана в виде (3.5), а функцию  $\Phi$  будем считать равной  $m_s, m_s C$  и  $1/2 m_s C^2$ . Момент уравнения Больцмана для произвольной функции  $\Phi(C)$  в общем виде таков:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \left[ \frac{\partial}{\partial t} (n_s f_s) + (u_\beta + C_\beta) \frac{\partial}{\partial x_\beta} (n_s f_s) + \left( \frac{F_{s\beta}}{m_s} - \frac{D u_\beta}{Dt} \right) n_s \frac{\partial f_s}{\partial C_\beta} - \right. \\ \left. - C_{\beta\gamma} n_s \frac{\partial f_s}{\partial C_\gamma} \frac{d u_\gamma}{d x_\beta} \right] d^3C = \sum_r \Delta_{sr} [\Phi], \end{aligned} \quad (3.7a)$$

где

$$\Delta_{sr} [\Phi] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi C_{sr} d^3C. \quad (3.7b)$$

Физический смысл столкновительного интеграла (3.7b) проще всего можно уяснить себе, если соотношение (3.7b), в котором  $C_{sr}$  — величина, даваемая выражением (3.6), переписать в следующем

виде:

$$\Delta_{sr}[\Phi] = n_s n_r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(C') - \Phi(C)] f_s(C) f_r(W) g l_{sr} d\Omega d^3 W d^3 C \quad (3.8)$$

Сравнивая соотношение (3.8) с формулами (3.7б) и (3.6), мы видим, что выражение (3.8) есть следствие равенства

$$\begin{aligned} n_s n_r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(C') f_s(C) f_r(W) g l_{sr} d\Omega d^3 W d^3 C = \\ = n_s n_r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(C) f_s(C') f_r(W) g l_{sr} d\Omega d^3 W d^3 C. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Величина, стоящая в левой части равенства (3.9), является интегралом по всем столкновениям от функции  $\Phi$ , значения которой берутся после каждого столкновения для частиц типа  $s$ . Далее, поскольку после каждого столкновения можно считать обратным некоторому другому столкновению, интеграл по всем обратным столкновениям эквивалентен интегралу по всем прямым столкновениям. Поскольку  $g' = g$  и  $d^3 W' d^3 C' = d^3 W d^3 C$ , а величина  $\Phi(C)$  равна  $\Phi$  после обратного столкновения, интеграл в правой части равенства (3.9) эквивалентен интегралу в левой части. [Это не означает, что столкновительный интеграл (3.6) в уравнении Больцмана равен нулю, ибо соответствующее выражение не интегрируется по  $C$ .] Из выражения (3.8) следует, что столкновительный интеграл в уравнении (3.7а) дает скорость изменения на единицу объема величины  $\Phi$  для компоненты  $s$  в результате всех столкновений между частицами типа  $s$  и  $r$ .

Подставив в уравнение (3.7а) выражения для функций  $\Phi = m_s, m_s C$  и  $1/2 m_s C^2$ , получим уравнения сохранения для компонент. Они имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} [\rho_s (u_\beta + U_{s\beta})] = \sum_r \Delta_{sr} [n_s] = 0, \quad (3.10a)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (\rho_s U_{s\alpha}) + \frac{\partial p_{s\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - n_s (\bar{F}_{s\alpha} - m_s \frac{Du_\alpha}{Dt}) + \\ + \rho_s \left( U_{s\alpha} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta} + U_{s\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) = \sum_r \Delta_{sr} [m_s C_\alpha] = \sum_{r \neq s} \Delta_{sr} [m_s C_\alpha] \end{aligned} \quad (3.10b)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (\rho_s e_s) + \frac{\partial q_{s\beta}}{\partial x_\beta} - n_s (\bar{C}_\beta \bar{F}_\beta)_s + \rho_s U_{s\beta} \frac{Du_\beta}{Dt} + \\ + \rho_s e_s \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta} + p_{s\beta\gamma} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma} = \sum_r \Delta_{sr} \left[ \frac{1}{2} m_s C^2 \right] = \sum_{r \neq s} \Delta_{sr} \left[ \frac{1}{2} m_s C^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.10в)$$

Здесь  $e_s$  — энергия теплового движения на единицу массы компоненты  $s$ . Когда частицы обладают только энергией поступательного движения, как это молчаливо предполагалось при нашем рассмотрении, величина  $e_s$  определяется соотношением

$$e_{s \text{ пост}} = \frac{1}{2} (\bar{C}^2)_s = \frac{3}{2} \frac{k}{m_s} T_s.$$

Если же, кроме этого, частицы обладают внутренней энергией на единицу массы соответствующей компоненты, связанную с ее внутренней структурой, то величина  $e_s$ , фигурирующая в уравнении сохранения энергии (3.10в), равна

$$e_s = e_{s \text{ пост}} + e_{s \text{ внутр}}.$$

При выводе уравнений (3.10) мы провели интегрирование по частям, а также использовали соотношение  $\partial F_{\alpha\beta} / \partial C_\beta = 0$  и то обстоятельство, что в уравнении (3.7а) величина  $C$  должна считаться постоянной при дифференцировании по  $x$  и  $t$ . Например, при  $\Phi = m_s$  имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} m_s \frac{\partial}{\partial t} (n_s f_s) d^3 C = \frac{\partial}{\partial t} \left( m_s n_s \int_{-\infty}^{\infty} f_s d^3 C \right) = \frac{\partial \rho_s}{\partial t}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} m_s (u_\beta + C_\beta) \frac{\partial}{\partial x_\beta} (n_s f_s) d^3 C = u_\beta \frac{\partial \rho_s}{\partial x_\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \rho_s \int_{-\infty}^{\infty} C_\beta f_\beta d^3 C \right) = \\ = u_\beta \frac{\partial \rho_s}{\partial x_\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho_s U_{s\beta}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_s \left( \frac{F_{s\beta}}{m_s} - \frac{Du_\beta}{Dt} \right) n_s \frac{\partial f_s}{\partial C_\beta} d^3 C =$$

$$= - \frac{Du_\beta}{Dt} \rho_s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_s}{\partial C_\beta} d^3 C + n_s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial C_\beta} (F_{s\beta} f_s) d^3 C = 0$$

и

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^{\infty} m_s C_\beta n_s \frac{\partial f_s}{\partial C_\gamma} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta} d^3 C = - \rho_s \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial C_\gamma} (C_\beta f_s) d^3 C + \\ + \rho_s \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial C_\beta}{\partial C_\gamma} f_s d^3 C = 0 + \rho_s \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\beta\gamma} f_s d^3 C = \rho_s \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta}. \end{aligned}$$



В третьем и четвертом уравнениях предполагалось, что производные функции распределения на внешнюю силу или на степень любой компоненты скорости стремятся к нулю при больших  $C$ , так что, например,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial C_1} (C \alpha f_s) d^3 C = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{ (C \alpha f_s) |_{C_1=\infty} - |_{C_1=-\infty} \} dC_2 dC_3 = 0.$$

Из уравнений (3.11) можно получить уравнение непрерывности (3.10а). Уравнения для импульса и энергии (3.10б), (3.10в) получаются путем несложных вычислений. Тот же самый результат в случае уравнения непрерывности может быть получен непосредственно, если в качестве исходного использовать уравнение Больцмана в форме (3.2).

Записывая столкновительный член в уравнениях (3.10), мы отметили, что при упругих столкновениях частиц типа  $s$  не может происходить обмен массой с частицами других типов, так же как и не может в общем случае происходить обмен импульсом или энергией при столкновениях частиц одного типа. Поэтому все столкновительные члены в уравнении непрерывности для данной компоненты (3.10а) и столкновительные члены для  $r = s$  в уравнениях сохранения импульса и энергии (3.10б), (3.10в) равны нулю. Это же можно установить и формально, исходя из уравнения (3.8), путем рассуждений, аналогичных тем, которые проводились при выводе соотношения (3.9).

Для учета неупругих столкновений мы должны добавить в правую часть уравнений (3.10) дополнительный член, дающий отнесенную к единице объема скорость изменения массы, импульса и энергии частиц типа  $s$  в результате такого рода столкновений.

Полные уравнения сохранения для газа как целого получаются суммированием уравнений (3.10) по всем компонентам газа. Поскольку импульс и энергия газа не меняются при столкновениях, сумма всех столкновительных членов будет равна нулю. При этом получатся следующие уравнения сохранения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho u_\beta) = 0, \quad (3.12а)$$

$$\rho \frac{D u_\alpha}{D t} = - \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \sum_s n_s \bar{F}_{s\alpha}, \quad (3.12б)$$

$$\frac{D e}{D t} + (\rho e + p) \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_\beta} = - \frac{\partial q_\beta}{\partial x_\beta} + \tau_{\beta\gamma} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma} + \sum_s n_s (\overline{C_\beta F_\beta})_s, \quad (3.12в)$$

где  $e = \sum_s \rho_s e_s / \rho$  — полная энергия теплового движения единицы массы газа. Здесь мы заменили тензор давления тензором вязких

напряжений в форме (2.12), а также воспользовались соотношением  $\sum_s \rho_s U_s = 0$  [формула (2.9в)]. Комбинируя по-разному уравнения (3.12), можно получить другие формы записи уравнений сохранения импульса и энергии (3.12б) и (3.12в). В частности, в литературе можно встретить несколько форм записи уравнения сохранения энергии.

Из внешних сил, фигурирующих в уравнениях сохранения для частично ионизованных газов, основной интерес представляют электромагнитные силы

$$\mathbf{F}_s = e_s (\mathbf{E} + \mathbf{c} \times \mathbf{B}) = e_s (\mathbf{E}' + \mathbf{c} \times \mathbf{B}). \quad (3.13)$$

Здесь

$$\mathbf{E}' \equiv \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (3.14)$$

— электрическое поле в системе отсчета, движущейся со скоростью  $\mathbf{u}$ , а  $e_s$  — заряд частицы типа  $s$  [но не энергии на единицу массы, как в формуле (3.10в)]. Например, для электронов  $e_s = -e$ . В данном случае «внешняя сила» — это сила, внешняя по отношению к рассматриваемому явлению, а не по отношению к плазме как целому. Этот термин используется здесь для того, чтобы подчеркнуть различие между внешними силами и силами, действующими во время столкновения. Мы здесь можем считать, что электрическое поле  $\mathbf{E}$  представляет собой некоторую среднюю величину, получаемую путем усреднения флуктуирующих полей по интервалу времени, большому по сравнению с длительностью столкновения, но малому по сравнению с масштабом времени макроскопических изменений. Для нейтральной плазмы имеем

$$\sum_s n_s e_s = 0.$$

Член, соответствующий внешним силам в уравнении (3.12б), на основании соотношения (3.13) можно записать следующим образом:

$$\sum_s n_s \bar{\mathbf{F}}_s = \sum_s n_s e_s \mathbf{U}_s \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (3.15)$$

где  $\mathbf{J}$  — плотность тока проводимости, равная [формула (6.11) из гл. 2]

$$\mathbf{J} \equiv \sum_s e_s n_s \mathbf{U}_s. \quad (3.16)$$

Аналогично запишем член, содержащийся в уравнении сохранения энергии (3.12в):

$$\sum_s n_s (\overline{C_\beta F_\beta})_s = J_\beta E'_\beta = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}'. \quad (3.17)$$

Если плазма не является нейтральной, то к внешней силе (3.15) нужно добавить член вида  $(\sum_s e_s n_s) \mathbf{E}'$ . Подставив выражения (3.15)

и (3.17), согласующиеся с полученными ранее результатами (4.4) и (4.5б) из гл. 4, в уравнения (3.12), получим общие уравнения сохранения для частично ионизованной плазмы.

В данном параграфе мы совершенно не заостряли внимания на специфических свойствах плазмы, если не считать того, что в качестве внешних мы рассматривали электромагнитные силы. Поэтому полученные соотношения фактически идентичны тем, которые используются для описания смеси нейтральных газов. Частично ионизованные газы будут специально рассмотрены в следующих параграфах. В частности, будут рассмотрены два приближения к уравнению Больцмана для электронов, которые понадобятся нам в дальнейшем при изучении свойств переноса плазмы.

**Задача 3.1.** Покажите, что больцмановский столкновительный интеграл (3.6) равен нулю, если функции распределения  $f_s$  и  $f_r$  являются максвелловскими функциями (2.2) с одинаковой температурой.

**Задача 3.2.** Выведите уравнения сохранения импульса и энергии (3.10б) и (3.10в) из уравнения (3.7а).

**Задача 3.3.** Выведите уравнения сохранения не из уравнения Больцмана, а путем рассмотрения баланса массы, импульса и энергии данной компоненты в элементе объема  $d^3x$ :

а) в случае, когда  $d^3x$  покоится в лабораторной системе отсчета (см. задачу 2.2);

б) в случае, когда  $d^3x$  движется с массовой скоростью  $u$ . (Здесь рассмотрите только частный случай, когда скорость  $u$  постоянна и не зависит от координат и времени.) Сравните результаты с уравнениями (3.10).

#### § 4. СТОЛКНОВИТЕЛЬНЫЙ ЧЛЕН ФОККЕРА — ПЛАНКА

Интеграл упругих столкновений в уравнении Больцмана для электронов учитывает столкновения электронов как с заряженными, так и с нейтральными частицами. В гл. 5, § 5, было показано, что эффекты, связанные со столкновениями заряженных частиц, определяются главным образом такими столкновениями, при которых отклонения частиц, а следовательно, и изменения скорости малы. При столкновениях между электронами и нейтральными частицами из-за сильного различия масс изменение энергии электронов мало. В этом и следующем параграфах мы покажем, каким образом на основании указанных физических эффектов можно упростить интегралы упругих столкновений электронов.

Столкновительный член Фоккера — Планка учитывает то обстоятельство, что при столкновении заряженных частиц они отклоняются преимущественно на малые углы. Столкновительный член такого

вида будет использоваться нами в основном в частном случае электрон-электронных столкновений. Электрон-ионные столкновения, как будет видно из дальнейшего, проще рассматривать на основании упрощений, связанных с малостью электронной массы. Однако, поскольку это не вызовет больших дополнительных сложностей, мы выведем столкновительный член Фоккера — Планка из больцмановского интеграла столкновений для частиц произвольного заряда и массы. Отметим, что, хотя было бы полезно изложить теорию столкновений заряженных частиц по Фоккеру — Планку, это все же не является необходимым для дальнейшего вычисления свойств переноса и вывести столкновительный член Фоккера — Планка можно и иначе — из больцмановского интеграла для столкновений между заряженными частицами.

Больцмановский интеграл столкновений (3.6) для заряженных частиц, выраженный для удобства в дальнейшем через собственные скорости, имеет вид

$$C_{sr} = n_s n_r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f_s(C') f_r(W') - f_s(C) f_r(W)] g I_{sr} d\Omega d^3W, \quad (4.1)$$

где  $I_{sr}$  — резерфордское сечение, которое, согласно формулам (5.4) и (5.11) из гл. 5, дается выражением

$$I_{sr} = \frac{1}{4} \left( \frac{e_s e_r}{4\pi\epsilon_0 m_{sr}} \right)^2 \frac{1}{g^4 \sin^4 \chi/2}, \quad (4.2)$$

а величина

$$m_{sr} = \frac{m_s m_r}{m_s + m_r}$$

есть приведенная масса. При интегрировании по  $\Omega$  будет использовано «обрезание» потенциала (гл. 5, § 5), т. е.

$$\int_{\Delta\Omega} (\ ) d\Omega = \int_0^{\pi} \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} (\ ) \sin \chi d\chi d\varphi.$$

Угол отклонения  $\chi_{\min}$ , который соответствует прицельному расстоянию, равному дебаевскому радиусу экранирования

$$\lambda_D = \left( \frac{\epsilon_0 k T_e}{e^2 n_e} \right)^{1/2},$$

определяется соотношением

$$\sin^2 \chi_{\min} = \frac{1}{1 + \lambda_D^2 (4\pi\epsilon_0 m_{sr} g^2 / e_s e_r)^2} = \frac{1}{1 + (\lambda_D^2 / b_0^2)}, \quad (4.3)$$

в котором

$$b_0 = \frac{|e_s e_r|}{4\pi\epsilon_0 m_{sr} g^2}$$

— прицельное расстояние для отклонения на угол  $\chi = \pi/2$ . В дальнейшем мы воспользуемся тем, что в уравнении (4.3) величину  $b_0$  можно заменить ее средним значением (см. задачу 4.1)

$$\bar{b}_0 = \frac{|e_s e_r|}{4\pi e_0^2 k T_e} \quad (4.4)$$

Соотношение (4.3) при этом примет вид

$$\sin^2 \frac{\chi_{\text{мин}}}{2} \approx \frac{1}{1 + \Lambda^2} \quad (4.5)$$

Здесь, как и в формуле (8.7a) из гл. 2,

$$\Lambda \equiv \frac{\lambda_D}{b_0} = 12\pi n_e \lambda_D^3 \left| \frac{e^2}{e_s e_r} \right|$$

есть отношение дебаевского радиуса экранирования к величине  $\bar{b}_0$ . Как видно из предыдущего выражения, величина  $\Lambda$  пропорциональна числу электронов в дебаевской сфере (т. е. в сфере радиусом  $\lambda_D$ ). Мы выразили дебаевский радиус экранирования  $\lambda_D$  через  $T_e$  и  $n_e$ , поскольку в динамическом случае экранирование обеспечивается главным образом электронами. Кроме того, в выражении (4.4) для  $\bar{b}_0$  фигурирует электронная температура как отражение того обстоятельства, что в большинстве случаев, представляющих для нас интерес, относительная скорость также определяется электронами. Однако в случае ион-ионных столкновений величину  $T_e$  в соотношении (4.4) для  $\bar{b}_0$  следует заменить температурой ионов  $T_i$ .

Поскольку при столкновениях заряженных частиц основной эффект дают столкновения, при которых изменение скоростей частиц мало, функции  $f_s(\mathbf{C}')$  и  $f_r(\mathbf{W}')$  в интеграле столкновений (4.1) можно разложить в ряд Тейлора следующим образом:

$$f_s(\mathbf{C}') = f_s(\mathbf{C}) + \frac{\partial f_s}{\partial C_\beta} (C_\beta - C_\beta) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_s}{\partial C_\beta \partial C_\gamma} (C_\beta - C_\beta)(C_\gamma - C_\gamma) + \dots \quad (4.6)$$

$$f_r(\mathbf{W}') = f_r(\mathbf{W}) + \frac{\partial f_r}{\partial W_\beta} (W_\beta - W_\beta) + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_r}{\partial W_\beta \partial W_\gamma} (W_\beta - W_\beta)(W_\gamma - W_\gamma) + \dots$$

Учитывая закон сохранения импульса  $m_s(C'_\alpha - C_\alpha) = -m_r(W'_\alpha - W_\alpha)$  и оставляя члены, содержащие изменение скорости не выше второго порядка, напомним

$$f_s(C'_\alpha) f_r(W'_\alpha) - f_s(C_\alpha) f_r(W_\alpha) = \left( -\frac{m_s}{m_r} f_s \frac{\partial f_r}{\partial W_\beta} + f_r \frac{\partial f_s}{\partial C_\beta} \right) \delta C_\beta + \\ + \left[ -\frac{m_s}{m_r} \frac{\partial f_s}{\partial C_\beta} \frac{\partial f_r}{\partial W_\gamma} + \frac{1}{2} \left( \frac{m_s^2}{m_r^2} f_s \frac{\partial^2 f_r}{\partial W_\beta \partial W_\gamma} + \right. \right. \\ \left. \left. + f_r \frac{\partial^2 f_s}{\partial C_\beta \partial C_\gamma} \right) \right] \delta C_\beta \delta C_\gamma \quad (4.7)$$

причем

$$\delta \mathbf{C} \equiv \mathbf{C}' - \mathbf{C}.$$

Отметим, что в правой части уравнения (4.7) и в последующих уравнениях функция  $f_s$  и ее производные зависят от  $\mathbf{C}$ , а функция  $f_r$  и ее производные — от  $\mathbf{W}$ .

Вычислим теперь интеграл

$$\int_{d\Omega} g(\delta \mathbf{C}) I_{sr} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_{\chi_{\text{мин}}}^{\pi} g(\delta \mathbf{C}) I_{sr} \sin \chi d\chi d\varphi,$$

появляющийся при подстановке выражения (4.7) в интеграл столкновений (4.1).

Как видно из фиг. 1, вектор  $\delta \mathbf{C}$  можно представить как сумму двух векторов, один из которых параллелен, а другой перпендикулярен вектору  $\mathbf{g}$ . При интегрировании по азимутальному углу  $\varphi$  вклад второго вектора будет равен нулю. Составляющая вектора  $\delta \mathbf{C}$ , параллельная вектору  $\mathbf{g}$ , с учетом соотношения (3.3) и того, что  $\mathbf{g}' = \mathbf{g}$ , равна

$$(\tilde{c}' \cos \chi - \tilde{c}) \frac{\mathbf{g}}{g} = \tilde{c} (\cos \chi - 1) \frac{\mathbf{g}}{g} = -\frac{m_{sr}}{m_s} (\cos \chi - 1) \mathbf{g}.$$

Здесь учтено также равенство

$$\mathbf{C}' - \mathbf{C} = \mathbf{c}' - \mathbf{c} = \tilde{c}' - \tilde{c},$$

справедливое в силу того, что и средняя массовая скорость  $\mathbf{u}$ , и скорость центра масс  $\mathbf{G}$  при столкновении не изменяются. Таким образом, получаем

$$\int_{d\Omega} g(\delta \mathbf{C}) I_{sr} d\Omega = \frac{m_{sr}}{m_s} g g \int_{d\Omega} (\cos \chi - 1) I_{sr} d\Omega = -\frac{m_{sr}}{m_s} g g Q_{sr}^{(1)}, \quad (4.8)$$

где  $Q_{sr}^{(1)}$  — сечение столкновения с передачей импульса, определенное соотношением

$$Q_{sr}^{(1)} \equiv \int_{d\Omega} (1 - \cos \chi) I_{sr} d\Omega = \int_{d\Omega} 2 \sin^2 \left( \frac{\chi}{2} \right) I_{sr} d\Omega. \quad (4.9)$$

Вычислив это сечение для заряженных частиц с учетом дебаевского экранирования и воспользовавшись соотношениями (4.2), (4.3) и (4.5), получим формулу (5.16) из гл. 5)

$$Q_{sr}^{(1)} = 2\pi b_0^2 \ln \left( 1 + \frac{\lambda_D^2}{b_0^2} \right) \approx 4\pi b_0^2 \ln \Lambda = 4\pi \left( \frac{e_s e_r}{4\pi e_0 m_s g^2} \right)^2 \ln \Lambda. \quad (4.10)$$

Хотя при интегрировании по  $\chi$  в качестве верхнего предела формально взята величина  $\pi$ , вклад в сечение  $Q_{sr}^{(1)}$  от столкновений с отклонением на большие углы пренебрежимо мал, если параметр  $\ln \Lambda$  велик (см. задачу 4.2).

Интеграл, соответствующий квадратичному члену в уравнении (4.7), вычисляется аналогичным образом, но выкладки более громоздки. Конечный результат [5, § 2.1] имеет вид

$$\int \delta C_{\alpha} \delta C_{\beta} g_{sr} d\Omega = - \left( \frac{m_{sr}}{m_s} \right)^2 g (g_{\alpha} g_{\beta} - g^2 \delta_{\alpha\beta}) Q_{sr}^{(1)} + \frac{3}{2} \left( \frac{m_{sr}}{m_s} \right)^2 g \left( g_{\alpha} g_{\beta} - \frac{1}{3} g^2 \delta_{\alpha\beta} \right) Q_{sr}^{(1)} \frac{1 + \cos \chi_{\text{мин}}}{\ln(1 + \lambda_{\beta}^2/b_{\beta}^2)}. \quad (4.11)$$

В соответствии с условиями дебаевского экранирования мы предполагаем, что параметр  $\ln(1 + \lambda_{\beta}^2/b_{\beta}^2) \approx 2 \ln \Lambda$  велик по сравнению с единицей. Поэтому вторым членом в соотношении (4.11) можно пренебречь.

Комбинируя соотношения (4.7), (4.8) и (4.11), интеграл столкновений (4.1) можно записать в следующем виде:

$$C_{sr} = n_s n_r \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{m_s}{m_r} f_s \frac{\partial f_r}{\partial W_{\beta}} - f_r \frac{\partial f_s}{\partial C_{\beta}} \right] \frac{m_{sr}}{m_s} g g_{\beta} + \left[ \frac{m_s}{m_r} \frac{\partial f_s}{\partial C_{\beta}} \frac{\partial f_r}{\partial W_{\gamma}} - \frac{1}{2} \left( \frac{m_s^2}{m_r^2} f_s \frac{\partial^2 f_r}{\partial W_{\beta} \partial W_{\gamma}} + f_r \frac{\partial^2 f_s}{\partial C_{\beta} \partial C_{\gamma}} \right) \right] \times \left( \frac{m_{sr}}{m_s} \right)^2 g (g_{\beta} g_{\gamma} - g^2 \delta_{\beta\gamma}) \right\} Q_{sr}^{(1)} d^3 W. \quad (4.12)$$

Отметим, что здесь неявная зависимость (через скорости  $C'$  и  $W'$ ) столкновительного члена от динамики столкновения исключена. Именно в этом смысле мы считаем анализ, проведенный в данном параграфе, упрощенным [несмотря на то что получившиеся уравнения имеют более сложный вид, чем исходный больцмановский интеграл столкновений (3.6)].

Выражение (4.12) можно привести к стандартному виду, взяв интеграл по частям. Пользуясь соотношениями

$$\frac{g_{\alpha} g_{\beta} - g^2 \delta_{\alpha\beta}}{g^3} = - \frac{\partial^2 g}{\partial C_{\alpha} \partial C_{\beta}}, \quad \frac{\partial}{\partial C_{\beta}} \left( \frac{g_{\alpha} g_{\beta} - g^2 \delta_{\alpha\beta}}{g^3} \right) = \frac{2g_{\alpha}}{g^3}, \quad \frac{\partial^2}{\partial C_{\beta} \partial C_{\gamma}} \left( \frac{g_{\beta} g_{\gamma} - g^2 \delta_{\beta\gamma}}{g^3} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial C_{\beta}} \left( \frac{g_{\beta}}{g^3} \right) \quad (4.13)$$

(см. задачу 4.3), можно после некоторых преобразований привести выражение (4.12) к виду

$$C_{sr} = n_s n_r \Gamma_{sr} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left( - \frac{m_s}{m_{sr}} f_r \frac{\partial f_s}{\partial C_{\beta}} + \frac{m_s^2}{m_r m_{sr}} f_s f_r \frac{\partial}{\partial C_{\beta}} \right) \frac{g_{\beta}}{g^3} - \frac{m_s^2 - m_r^2}{m_r^2} f_s f_r \frac{\partial}{\partial C_{\beta}} \left( \frac{g_{\beta}}{g^3} \right) + \frac{2m_s}{m_{sr}} f_r \frac{\partial f_s}{\partial C_{\beta}} \frac{g_{\beta}}{g^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial C_{\beta} \partial C_{\gamma}} \left[ f_s \frac{\partial^2}{\partial C_{\beta} \partial C_{\gamma}} (g f_r) \right] \right\} d^3 W,$$

$$\Gamma_{sr} \equiv \frac{m_{sr}^2}{m_s^2} g^4 Q_{sr}^{(1)}. \quad (4.14)$$

Отметим, что  $\Gamma_{sr}$  не зависит от  $g$ . Наконец, этот результат можно выразить в более компактной форме:

$$C_{sr} = n_s n_r \Gamma_{sr} \left\{ - \frac{\partial}{\partial C_{\beta}} \left( f_s \frac{\partial H}{\partial C_{\beta}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial C_{\beta} \partial C_{\gamma}} \left( f_s \frac{\partial^2 G}{\partial C_{\beta} \partial C_{\gamma}} \right) \right\}, \quad (4.15)$$

где  $H$  и  $G$  — так называемые потенциалы Розенблюта, имеющие вид

$$H \equiv \frac{m_s}{m_{sr}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_r}{g} d^3 W, \quad (4.16a)$$

$$G \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g f_r d^3 W. \quad (4.16b)$$

Выражение (4.15) и есть столкновительный член Фоккера — Планка. Хотя при выводе этого выражения мы исходили из больцмановского интеграла столкновений, он может быть также получен как частный случай более общего уравнения Фоккера — Планка [5, § 22]. При этом важно отметить влияние отклонений, связанных с кулоновским взаимодействием, на функцию распределения. Если расчет этих отклонений производить на основании определенных предположений, фактически эквивалентных использованию вавашемуса нами приближенно двойных столкновений при наличии дебаевского экранирования, то мы снова получим выражение (4.15).

Таким образом, мы упростили столкновительный член для случая столкновений между заряженными частицами и привели его к виду, не имеющему явной зависимости от динамики столкновений. С той же целью мы перейдем теперь к столкновениям между электронами и тяжелыми частицами.

**Задача 4.1.** Покажите, что среднее значение величины  $m_{sr} g^2$

$$m_{sr} \overline{g^2} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} m_{sr} g^2 f_s(C) f_r(W) d^3 W d^3 C$$

[формула (2.8a)] равно  $3kT_e$  для электрон-электронных столкновений и  $3kT_i$  для ион-ионных столкновений. Учтите, что  $g^2 = g \cdot g = C^2 - 2C \cdot W + W^2$ , и предположите, что диффузионная скорость  $U$  мала по сравнению со скоростями электронов и ионов  $\sqrt{C^2}$ . При электрон-ионных столкновениях относительная скорость очень

близка к скорости электронов  $C$ . Каково в этом случае среднее значение  $m_s v^2$ ?

**Задача 4.2.** Выделим три интервала значений прицельного расстояния  $b$ :

- I.  $0 < b < b_0$ ,
- II.  $b_0 < b < n_e^{-1/3}$ ,
- III.  $n_e^{-1/3} < b < \lambda_D$ .

Для электрон-электронных столкновений при  $\ln \Lambda = 5$  и при  $\ln \Lambda \rightarrow \infty$  вычислите относительный вклад в сечение столкновения с передачей импульса  $Q_{ee}^{(1)}$  а) от столкновений при прицельных расстояниях в интервале I, соответствующем отклонению на большие углы, и б) от столкновений при прицельных расстояниях в интервалах II и III, которые соответствуют (приблизительно) двойным столкновениям. Выразите ваши результаты численно, сделав соответствующие упрощения.

**Задача 4.3.** 1. Выведите соотношения (4.13). (Первое из этих соотношений можно получить, проведя прямое дифференцирование его правой части.)

2. Проведите выкладки, опущенные при переходе от соотношения (4.12) к соотношению (4.15).

## § 5. РАЗЛОЖЕНИЕ, ОСНОВАННОЕ НА МАЛОСТИ ЭЛЕКТРОННОЙ МАССЫ

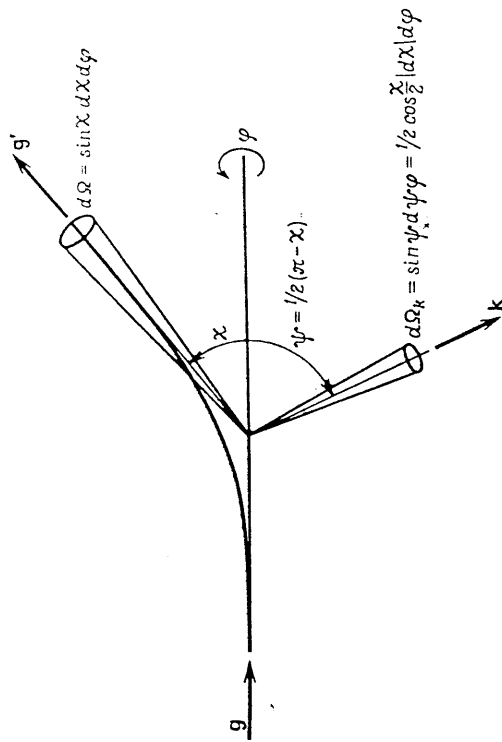
При упругом столкновении между электроном и тяжелой частицей из-за большой разницы масс энергия электрона и скорость тяжелой частицы мало изменяются. Кроме того, поскольку скорость электрона обычно намного больше скорости тяжелой частицы, относительная скорость  $g$  почти равна скорости электрона  $C$ . В данном параграфе мы рассмотрим математические упрощения, которые можно ввести на этом основании в интеграле столкновений (3.6) в случае столкновений между электроном и тяжелой частицей. Результаты анализа будут справедливы для столкновений между электронами и нейтральными частицами или ионами. В последнем случае, как и ранее, учитывается дебаевское экранирование кулоновского потенциала.

Скорости двух частиц после столкновения, выраженные через собственные скорости, равны [формулы (7.7) из гл. 9]

$$C' = C - \frac{2m_h}{m_h + m_e} (g \cdot k) k = C - \frac{2}{1 + m_e/m_h} (g \cdot k) k, \quad (5.1)$$

$$W' = W + \frac{2m_e}{m_h + m_e} (g \cdot k) k = W + \frac{2m_e/m_h}{1 + m_e/m_h} (g \cdot k) k,$$

где индекс  $h$  относится к тяжелой частице. Вектор  $k$  есть единичный вектор, направленный вдоль внешней биссектрисы угла между относительными скоростями  $g$  и  $g'$  до и после столкновения (фиг. 3).



Фиг. 3. Вектор  $k$  и дифференциал телесного угла  $d\Omega_k$ .

Поскольку отношение  $m_e/m_h$  есть малый параметр, в соотношениях (5.1) можно произвести разложение в биномиальный ряд следующим образом:

$$C' = C - 2 (g \cdot k) k + 2 \frac{m_e}{m_h} (g \cdot k) k + \dots, \quad (5.2)$$

$$W' = W + 2 \frac{m_e}{m_h} (g \cdot k) k - \dots$$

Кроме того, поскольку

$$\frac{W}{C} \sim \left( \frac{m_e T_h}{m_h T_e} \right)^{1/2},$$

а отношение  $T_h/T_e$  в большинстве случаев порядка единицы и даже меньше, можно считать, что отношение скорости тяжелой частицы  $W$  к скорости электрона  $C$  есть величина порядка  $(m_e/m_h)^{1/2}$ . Следовательно, относительная скорость  $g = C - W$  почти равна  $C$ . На этом основании мы можем провести разложение в тех членах соотношений (5.2), в которых содержится относительная скорость, в результате чего с точностью до членов порядка  $m_e/m_h$  получим

$$C' = C - 2 (C \cdot k) k + 2 (W \cdot k) k + 2 \frac{m_e}{m_h} (C \cdot k) k + \dots = \\ = V + 2 (W \cdot k) k + 2 \frac{m_e}{m_h} (C \cdot k) k + \dots \quad (5.3a)$$

$$\mathbf{W}' = \mathbf{W} + 2 \frac{m_e}{m_h} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} - 2 \frac{m_e}{m_h} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} + \dots, \quad (5.36)$$

и

$$\mathbf{V} \equiv \mathbf{C} - 2 (\mathbf{c} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}. \quad (5.4)$$

Нетрудно убедиться, что модуль вектора  $\mathbf{V}$  равен модулю вектора  $\mathbf{C}$ . Действительно, поскольку  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ , имеем

$$V^2 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} - 2\mathbf{C} \cdot [2 (\mathbf{C} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}] + 4 (\mathbf{C} \cdot \mathbf{k})^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = C^2. \quad (5.5)$$

Относительная скорость входит в столкновительный интеграл  $\mathbf{C}_{eh}$  также и через множитель  $g \hat{I}_{eh}(g, \chi)$ . Поэтому следует написать разложение и для этого члена. Но прежде чем это делать, выразим дифференциальное сечение столкновения  $\hat{I}_{eh}(g, \mathbf{g} \cdot \mathbf{k}) d\Omega_k$  через дифференциал телесного угла  $d\Omega_k$  (фиг. 3). Телесный угол  $d\Omega_k$  соответствует изменению направления вектора  $\mathbf{k}$ , которое связано с изменением  $\mathbf{g}'$  в пределах угла  $d\Omega$ . Связь между сечениями столкновения  $\hat{I}_{eh}(g, \mathbf{g} \cdot \mathbf{k})$  и  $I_{eh}(g, \chi)$  дается соотношением

$$\hat{I}_{eh}(g, \mathbf{g} \cdot \mathbf{k}) d\Omega_k = I_{eh}(g, \chi) d\Omega. \quad (5.6)$$

Смысл этого преобразования заключается в том, что оказывается удобным считать вектор  $\mathbf{k}$  совершенно независимой геометрической переменной и через эту переменную выразить сечение столкновения. При таком подходе считается, что величина  $\mathbf{g}'$  зависит только от независимых переменных  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{k}$ . Как видно из фиг. 3, полный диапазон изменения телесного угла  $d\Omega$ , равный  $4\pi$ , соответствует лишь  $2\pi$  для  $d\Omega_k$ . Однако удобнее считать, что диапазон изменения  $d\Omega_k$  также равен  $4\pi$ , но что величина  $\hat{I}_{eh}$  равна нулю, когда произведение  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}$  отрицательно ( $\psi > \pi/2$ ). В случае столкновений между заряженными частицами мы полагаем  $\hat{I}_{eh} = 0$  при  $\chi < \chi_{\min}$  [ $\psi > (\pi - \chi_{\min})/2$ ]. В следующем параграфе станет ясно, как преобразование (5.6) используется в наших конкретных вычислениях.

По-прежнему считая, что отношение  $W/C$  есть величина порядка  $(m_e/m_h)^{1/2}$ , разложим величину  $g \hat{I}_{eh}(g, \mathbf{g} \cdot \mathbf{k})$  в ряд Тейлора по малому параметру, которым в данном случае является разность между  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{C}$ :

$$\begin{aligned} g \hat{I}_{eh}(g, \mathbf{g} \cdot \mathbf{k}) &= g \hat{I}_{eh}(g, \mathbf{g} \cdot \mathbf{k}) \Big|_{\mathbf{g}=\mathbf{C}} + \frac{\partial [g \hat{I}_{eh}(g, \mathbf{g} \cdot \mathbf{k})]}{\partial g_\beta} \Big|_{\mathbf{g}=\mathbf{C}} (g_\beta - C_\beta) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g \hat{I}_{eh}(g, \mathbf{g} \cdot \mathbf{k})}{\partial g_\beta \partial g_\gamma} \Big|_{\mathbf{g}=\mathbf{C}} (g_\beta - C_\beta)(g_\gamma - C_\gamma) + \dots = \\ &= \hat{C} I_{eh}(C, \mathbf{C} \cdot \mathbf{k}) - W_\beta \frac{\partial}{\partial C_\beta} [\hat{C} I_{eh}(C, \mathbf{C} \cdot \mathbf{k})] + \\ &+ \frac{1}{2} W_\beta W_\gamma \frac{\partial^2}{\partial C_\beta \partial C_\gamma} [\hat{C} I_{eh}(C, \mathbf{C} \cdot \mathbf{k})] + \dots \end{aligned} \quad (5.7)$$

Рассмотрим теперь интеграл столкновений в случае столкновения электрона с тяжелой частицей, который, согласно формуле (3.6), имеет вид

$$\mathbf{C}_{eh} = n_e n_h \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega' [f_e(\mathbf{C}') f_h(\mathbf{W}') - f_e(\mathbf{C}) f_h(\mathbf{W})] g \hat{I}_{eh}(g, \chi) d^3 W. \quad (5.8)$$

Как видно из предыдущих соотношений, относительную скорость  $g$  с точностью до членов нулевого порядка по  $m_e/m_h$  можно заменить скоростью электрона  $\mathbf{C}$ , скорость тяжелой частицы  $\mathbf{W}$  не меняется при столкновении, а электрон при столкновении не теряет энергии и его скорость  $\mathbf{C}$  в результате рассеяния становится равной  $\mathbf{V}$ . В таком приближении, соответствующем бесконечно большой массе тяжелых частиц, интеграл столкновений (5.8) примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{eh} &\approx n_e n_h \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega' \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega_h [f_e(\mathbf{V}) - f_e(\mathbf{C})] f_h(\mathbf{W}) \hat{C} I_{eh}(C, \mathbf{C} \cdot \mathbf{k}) d\Omega_h d^3 W = \\ &= n_e n_h \int_{d\Omega_h} [f_e(\mathbf{V}) - f_e(\mathbf{C})] \hat{C} I_{eh} d\Omega_h. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Здесь использовано соотношение (5.6) и равенство  $\int_{-\infty}^{\infty} f_h(\mathbf{W}) d^3 W = 1$ . Однако это приближение в интеграле столкновения недостаточно для наших дальнейших целей, поскольку в определенных случаях вклад этого члена обращается в нуль. Поэтому мы вычленим члены более высокого порядка в разложении величины  $\mathbf{C}_{eh}$  по малому параметру  $m_e/m_h$ .

Скорости  $\mathbf{C}'$  и  $\mathbf{W}'$  входят в интеграл столкновений через функции  $f_e(\mathbf{C}')$  и  $f_h(\mathbf{W}')$ . Чтобы воспользоваться разложениями величин  $\mathbf{C}'$  и  $\mathbf{W}'$  по параметру  $m_e/m_h$  вида (5.3), разложим функции  $f_e(\mathbf{C}')$  и  $f_h(\mathbf{W}')$  в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} f_e(\mathbf{C}') &= f_e(\mathbf{V}) + (2\mathbf{W} \cdot \mathbf{k} k_\beta + 2 \frac{m_e}{m_h} \mathbf{C} \cdot \mathbf{k} k_\beta) \frac{\partial}{\partial V_\beta} [f_e(\mathbf{V})] + \\ &+ \frac{1}{2} (2\mathbf{W} \cdot \mathbf{k})^2 k_\beta k_\gamma \frac{\partial^2}{\partial V_\beta \partial V_\gamma} [f_e(\mathbf{V})] + \dots, \quad (5.10) \\ f_h(\mathbf{W}') &= f_h(\mathbf{W}) + (2 \frac{m_e}{m_h} \mathbf{C} \cdot \mathbf{k} k_\beta - 2 \frac{m_e}{m_h} \mathbf{W} \cdot \mathbf{k} k_\beta) \frac{\partial}{\partial W_\beta} [f_h(\mathbf{W})] + \\ &+ \frac{1}{2} (2 \frac{m_e}{m_h} \mathbf{C} \cdot \mathbf{k})^2 k_\beta k_\gamma \frac{\partial^2}{\partial W_\beta \partial W_\gamma} [f_h(\mathbf{W})] + \dots \end{aligned}$$

Подставим теперь разложения функций  $f_e(\mathbf{C}')$  и  $f_h(\mathbf{W}')$  в виде (5.10) и разложим величины  $g \hat{I}_{eh}$  в виде (5.7) в подынтегральное выражение интеграла столкновений (5.8), удерживая лишь члены

порядка  $m_e/m_h$ . В результате получим

$$\begin{aligned}
 n_e n_h [f_e(\mathbf{C}') f_h(\mathbf{W}') - f_e(\mathbf{C}) f_h(\mathbf{W})] g\hat{\Gamma}(\mathbf{g}, \mathbf{g}, \mathbf{k}) = \\
 = n_e [f_e(\mathbf{V}) - f_e(\mathbf{C})] f_h(\mathbf{W}) \left( \hat{v}_{eh} - W_\beta \frac{\partial \hat{v}_{eh}}{\partial C_\beta} + \frac{1}{2} W_\beta W_\gamma \frac{\partial^2 \hat{v}_{eh}}{\partial C_\beta \partial C_\gamma} \right) + \\
 + n_e \left[ 2\mathbf{W} \cdot \mathbf{k} k_\beta \frac{\partial f_e(\mathbf{V})}{\partial V_\beta} f_h(\mathbf{W}) + 2 \frac{m_e}{m_h} \mathbf{C} \cdot \mathbf{k} k_\beta \frac{\partial f_h(\mathbf{W})}{\partial W_\beta} f_e(\mathbf{V}) \right] \times \\
 \times \left( \hat{v}_{eh} - W_\gamma \frac{\partial \hat{v}_{eh}}{\partial C_\gamma} \right) + n_e \left\{ 2\mathbf{W} \cdot \mathbf{k} k_\beta \frac{\partial f_e(\mathbf{V})}{\partial V_\beta} 2 \frac{m_e}{m_h} \mathbf{C} \cdot \mathbf{k} k_\gamma \frac{\partial f_h(\mathbf{W})}{\partial W_\gamma} + \right. \\
 \left. + \left[ -2 \frac{m_e}{m_h} \mathbf{W} \cdot \mathbf{k} k_\beta \frac{\partial f_h(\mathbf{W})}{\partial W_\beta} + \frac{1}{2} (2\mathbf{W} \cdot \mathbf{k})^2 k_\beta k_\gamma \frac{\partial^2}{\partial V_\beta \partial V_\gamma} [f_e(\mathbf{V})] \right] f_h(\mathbf{W}) + \right. \\
 \left. + \left[ -2 \frac{m_e}{m_h} \mathbf{W} \cdot \mathbf{k} k_\beta \frac{\partial f_h(\mathbf{W})}{\partial W_\beta} + \frac{1}{2} \left( 2 \frac{m_e}{m_h} \mathbf{C} \cdot \mathbf{k} \right)^2 \times \right. \right. \\
 \left. \left. \times k_\beta k_\gamma \frac{\partial^2}{\partial W_\beta \partial W_\gamma} [f_h(\mathbf{W})] \right] f_e(\mathbf{V}) \right\} \hat{v}_{eh}. \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

Здесь введена зависящая от скорости частота столкновений

$$\hat{v}_{eh} \equiv n_h C \hat{\Gamma}_{eh}(\mathbf{C}, \mathbf{C}, \mathbf{k}). \quad (5.12)$$

Чтобы получить интеграл столкновений  $C_{eh}$ , нужно проинтегрировать уравнение (5.11) по телесному углу  $\Omega_h$  и по скорости тяжелой частицы  $\mathbf{W}$ . Интегрирование по  $\mathbf{W}$  можно упростить путем интегрирования по частям с учетом того, что величины  $W_\alpha f_h(\mathbf{W})$  и  $\partial f_h(\mathbf{W})/\partial W_\alpha$  стремятся к нулю при больших скоростях. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_h(\mathbf{W})}{\partial W_\alpha} d^3W = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial W_\alpha \partial W_\beta} [f_h(\mathbf{W})] d^3W = 0, \\
 \int_{-\infty}^{\infty} W_\alpha \frac{\partial f_h(\mathbf{W})}{\partial W_\beta} d^3W = -\delta_{\alpha\beta}.
 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Интегралы по  $\mathbf{W}$  можно затем выразить через диффузионную скорость тяжелой частицы  $U_h = (\mathbf{W})_h$  и тензор давления тяжелых частиц  $P_{h\alpha\beta} = n_h m_h (W_\alpha W_\beta)_h$ . Затем мы воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned}
 k_\beta \frac{\partial f_e(\mathbf{V})}{\partial C_\beta} = k_\beta \frac{\partial f_e(\mathbf{V})}{\partial V_\gamma} \frac{\partial V_\gamma}{\partial C_\beta} = \\
 = k_\beta \frac{\partial f_e(\mathbf{V})}{\partial V_\gamma} [\delta_{\beta\gamma} - 2k_\beta k_\gamma] = -k_\gamma \frac{\partial f_e(\mathbf{V})}{\partial V_\gamma} = -k_\beta \frac{\partial f_e(\mathbf{V})}{\partial V_\beta}, \\
 k_\beta k_\gamma \frac{\partial^2}{\partial C_\beta \partial C_\gamma} [f_e(\mathbf{V})] = k_\beta k_\gamma \frac{\partial^2}{\partial V_\beta \partial V_\gamma} [f_e(\mathbf{V})], \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

основанными на определении (5.4) скорости  $\mathbf{V}$  и на равенстве  $k_\beta k_\beta = 1$ , справедливым, поскольку  $\mathbf{k}$  есть единичный вектор. Тогда, проводя интегрирование в уравнении (5.11), получим для интеграла столкновений (5.8) выражение

$$\begin{aligned}
 C_{eh} = n_e \int_{d\Omega_h} \left\{ [f_e(\mathbf{V}) - f_e(\mathbf{C})] \left( \hat{v}_{eh} - U_{h\beta} \frac{\partial \hat{v}_{eh}}{\partial C_\beta} + \frac{1}{2} \frac{P_{h\beta\gamma}}{m_h m_h} \frac{\partial^2 \hat{v}_{eh}}{\partial C_\beta \partial C_\gamma} \right) + \right. \\
 \left. + 2k_\beta \frac{\partial f_e(\mathbf{V})}{\partial C_\beta} \left( -U_h \cdot \mathbf{k} \hat{v}_{eh} + \frac{P_{h\gamma\delta}}{n_h m_h} k_\delta \frac{\partial \hat{v}_{eh}}{\partial C_\gamma} \right) + \right. \\
 \left. + 2 \frac{m_e}{m_h} \mathbf{C} \cdot \mathbf{k} k_\beta f_e(\mathbf{V}) \frac{\partial \hat{v}_{eh}}{\partial C_\beta} + 2 \frac{m_e}{m_h} \mathbf{C} \cdot \mathbf{k} k_\beta \frac{\partial f_e(\mathbf{V})}{\partial C_\beta} \hat{v}_{eh} + \right. \\
 \left. + 2 \frac{P_{h\beta\gamma}}{n_h m_h} k_\beta k_\gamma k_\delta k_\epsilon \frac{\partial^2}{\partial C_\delta \partial C_\epsilon} [f_e(\mathbf{V})] \cdot \hat{v}_{eh} + 2 \frac{m_e}{m_h} f_e(\mathbf{V}) \hat{v}_{eh} \right\} d\Omega_h. \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

Этот результат можно представить в более компактной форме:

$$\begin{aligned}
 C_{eh} = n_e \int_{d\Omega_h} \left\{ [f_e(\mathbf{V}) - f_e(\mathbf{C})] \left( \hat{v}_{eh} - U_{h\beta} \frac{\partial \hat{v}_{eh}}{\partial C_\beta} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{P_{h\beta\gamma}}{n_h m_h} \frac{\partial^2 \hat{v}_{eh}}{\partial C_\beta \partial C_\gamma} \right) + \right. \\
 \left. + 2k_\beta \frac{\partial f_e(\mathbf{V})}{\partial C_\beta} \left( -U_h \cdot \mathbf{k} \hat{v}_{eh} + \frac{P_{h\gamma\delta}}{n_h m_h} k_\delta \frac{\partial \hat{v}_{eh}}{\partial C_\gamma} \right) + \right. \\
 \left. + 2 \frac{P_{h\beta\gamma}}{n_h m_h} k_\beta k_\gamma k_\delta k_\epsilon \frac{\partial^2}{\partial C_\delta \partial C_\epsilon} [f_e(\mathbf{V})] \hat{v}_{eh} + \right. \\
 \left. + 2 \frac{m_e}{m_h} \frac{\partial}{\partial C_\beta} [\mathbf{C} \cdot \mathbf{k} k_\beta f_e(\mathbf{V}) \hat{v}_{eh}] \right\} d\Omega_h. \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

Мы видим, что, как и в предыдущем параграфе, из выражения для интеграла столкновений исключена явная зависимость от динамики процесса столкновения.

При разложении по малому параметру  $m_e/m_h$  мы фактически считали члены, содержащие  $U_h$ , в формуле (5.16) по порядку величины равными  $(m_e/m_h)^{1/2}$ , а члены, содержащие  $P_{h\alpha\beta}$ , порядка  $m_e/m_h$  по сравнению с главным членом. Но, поскольку в столкновительной плазме диффузионная скорость  $U_h$  обычно мала по сравнению с тепловой скоростью  $\bar{W}_h = \bar{C}_h$ , мы должны считать все члены, кроме главных, величинами одного порядка. Кроме того, в случае столкновительной плазмы, для которой  $|T_{h\alpha\beta}| \ll P_h$ , величину  $P_{h\alpha\beta}$  в соотношении (5.16) можно заменить величиной  $P_h \delta_{\alpha\beta} = n_h k T_h \delta_{\alpha\beta}$ . Потеря точности при этом будет величиной незначительной. (Кажущееся ограничение здесь является фактически необязательным, поскольку член, связанный с вязкостью, в инте-

зоре давления, в любом случае не внес бы вклада в конечные уравнения, приведенные в следующем параграфе. См. задачу 6.3.)  
Учитывая перечисленные упрощения, запишем величину  $C_{eh}$  в окончательном виде:

$$C_{eh} = n_e \int_{d\Omega_h} [f_e(V) - f_e(C)] \left[ \hat{v}_{eh} - U_{h\beta} \frac{\partial \hat{v}_{eh}}{\partial C_\beta} + \frac{1}{2} \frac{kT_h}{m_h} \frac{\partial^2 \hat{v}_{eh}}{\partial C_\beta \partial C_\beta} \right] d\Omega_h - \\ - 2n_e \int_{d\Omega_h} k_\beta \frac{\partial f_e(V)}{\partial C_\beta} U_h \cdot k \hat{v}_{eh} d\Omega_h + \\ + 2n_e \frac{m_e}{m_h} \frac{\partial}{\partial C_\beta} \left\{ \int_{d\Omega_h} k_\beta k_\gamma \left[ C_\gamma f_e(V) + \frac{kT_h}{m_e} \frac{\partial f_e(V)}{\partial C_\gamma} \right] \hat{v}_{eh} d\Omega_h \right\}. \quad (5.17)$$

Первое слагаемое первого члена в выражении (5.17) учитывает, как видно из соотношения (5.9), влияние, оказываемое рассеянием на частицах с бесконечно большой массой на функцию  $f_e$ . Слагаемые же, содержащие  $kT_h$  и  $U_h$ , учитывают эффект теплового и диффузионного движения тяжелых частиц. Первое слагаемое последнего члена описывает эффект отдачи тяжелых частиц, связанный с конечностью их массы. При использовании полученного результата в следующем параграфе некоторые члены соотношения (5.17) окажутся несущественными, так что на самом деле интеграл столкновений  $C_{eh}$  будет не таким сложным, как в формуле (5.17). В частности, производные от величины  $\hat{v}_{eh}$ , содержащиеся в первом члене, не входят в выражения, которые будут использоваться при вычислении коэффициентов переноса.

**Задача 5.1.** В формуле (5.4) вектор  $V$  выражен через  $C$  и  $k$ . Выразите  $C$  через  $V$  и  $k$ .

**Задача 5.2.** Какой будет в нулевом приближении (5.9) величина  $C_{eh}$ , если  $f_e(C)$  есть изотропная функция  $f_e(C)$  скорости электрона?

**Задача 5.3.** Упростите формулу (5.16) для интеграла столкновений  $C_{eh}$  в случае, когда можно пренебречь производными величин  $\hat{v}_{eh}$  и вязкими напряжениями для тяжелых частиц.

**Задача 5.4.** Докажите равенства

$$2 \int_{d\Omega} k(g \cdot k) g I(g, \chi) d\Omega = gg Q_{eh}^{(1)}(g), \\ 2 \int_{d\Omega_h} k(C \cdot k) C \hat{I}(C, C \cdot k) d\Omega_h = CC Q_{eh}^{(1)}(C),$$

которые будут использованы в следующем параграфе. Здесь  $Q_{eh}^{(1)}$  — сечение столкновения с передачей импульса, даваемое формулой (4.9).

## § 6. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ДЕКАРТОВЫМ ТЕНЗОРАМ

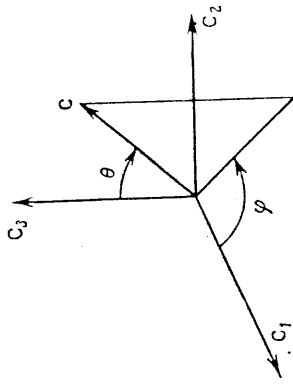
В двух предыдущих параграфах мы рассматривали упрощения столкновительного интеграла, основанные на общих физических представлениях, а именно на малости углов отклонения при столкновениях заряженных частиц и на малости массы электрона. Рассмотрим теперь специальную форму записи уравнения Больцмана для электронов, которая может быть применена к широкому кругу физических явлений в столкновительной плазме. Выводы, сделанные в этом параграфе, будут использоваться в следующей главе при вычислении коэффициентов переноса частично ионизованной плазмы. Упрощенное определенным образом уравнение Больцмана для электронов играет важную роль при изучении этих явлений.

В столкновительной плазме функция распределения электронов  $f_e(C)$  обычно очень мало отличается от *изотропной* функции распределения  $f_e^0(C)$ , зависящей только от модуля скорости  $C$ . Поэтому зависимость функции  $f_e(C)$  от скорости  $C$  можно представить в виде разложения в ряд. Эта ситуация в чем-то аналогична той, которая возникает в смеси нейтральных газов при наличии столкновений, когда изотропные функции распределения являются максвелловскими. Однако в плазме, где взаимодействие между электронами и тяжелыми частицами довольно слабое, изотропная функция  $f_e^0(C)$  не обязательно является равновесной.

Угловая зависимость функции  $f_e(C)$  в пространстве скоростей может быть выражена двумя эквивалентными разложениями. Разложение по сферическим гармоникам, которое использовалось Эллисом [1] и другими авторами [5, § 3.1], записывается следующим образом:

$$f_e(C) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm}(C) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (6.1)$$

где  $C$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  — сферические координаты в пространстве скоростей (фиг. 4), а  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  — сферические гармонические функции [4, § 3.4]. Коэффициенты разложения  $f_{lm}$  являются в общем случае комплексными функциями скорости электронов  $C$ , координаты иррени. Поскольку  $f_e(C)$  — действительная функция, берется действительная часть разложения (6.1), а коэффициенты  $f_{l,-m}$  выражаются через комплексно сопряженные им величины  $f_{l,m}^*$  следующим образом:



фиг. 4. Сферические координаты в пространстве скоростей.



щим образом:

$$f_{l, -m} = (-1)^m f_{lm}^* \quad (6.2)$$

Первые несколько членов разложения (6.1) имеют вид

$$f_e(C) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} f_{00}(C) - \sqrt{\frac{3}{8\pi}} 2 \operatorname{Re} [f_{11}(C)] \sin \theta \cos \varphi + \\ + \sqrt{\frac{3}{8\pi}} 2 \operatorname{Im} [f_{11}(C)] \sin \theta \sin \varphi + \sqrt{\frac{3}{4\pi}} f_{10}(C) \cos \theta + \dots, \quad (6.3)$$

где символами  $\operatorname{Re}$  и  $\operatorname{Im}$  обозначены действительная и мнимая части. Как видно из фиг. 4,

$$\sin \theta \cos \varphi = \frac{C_1}{C}, \\ \sin \theta \sin \varphi = \frac{C_2}{C}, \\ \cos \theta = \frac{C_3}{C}.$$

Следовательно, выражение (6.3) можно переписать в виде

$$f_e(C) = f^0(C) + f^1(C) \cdot \frac{C}{C} + \dots, \quad (6.4)$$

где

$$f^0(C) \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi}} f_{00}(C), \\ f^1(C) \equiv \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} 2 \operatorname{Re} [f_{11}(C)] \\ \sqrt{\frac{3}{8\pi}} 2 \operatorname{Im} [f_{11}(C)] \\ \sqrt{\frac{3}{4\pi}} f_{10}(C) \end{array} \right\}.$$

Все эти рассуждения мы провели для того, чтобы, не вдаваясь в подробности разложения по сферическим функциям, сказать, что разложению вида (6.1) эквивалентно разложение по *декартовым тензорам*

$$f_e(C) = f^0(C) + f^1(C) \frac{C_\beta}{C} + f^2(C) \frac{C_\beta C_\gamma}{C^2} + \\ + f^3_{\beta\gamma\delta}(C) \frac{C_\beta C_\gamma C_\delta}{C^3} + \dots, \quad (6.5)$$

первый член которого фигурирует в соотношении (6.4). Коэффициенты разложения  $f^0, f^1_\alpha, f^2_{\alpha\beta}, f^3_{\alpha\beta\gamma}, \dots$  в выражении (6.5) — это действительные тензоры, расположенные в порядке возрастания ранга ( $f^0$  — скаляр,  $f^1_\alpha$  — вектор,  $f^2_{\alpha\beta}$  — тензор второго ранга и т. д.),

зависящие от скорости электрона  $v$ , вообще говоря, от координаты и времени. Например, в некоторых случаях вектор  $f^1$  выражается через вектор напряженности электрического поля  $E$  следующим образом:  $f^1 = a(C)E$ , где  $a(C)$  — скалярная функция скорости  $C$ . Хотя ортогональность сферических функций, может существовать облегчить проведение соответствующих вычислений, мы не будем останавливаться на математической стороне вопроса. Поскольку уравнение Больцмана для электронов (3.5) и соотношения, которые мы собираемся получить в данном параграфе, записываются через декартовы тензоры, мы можем использовать разложение по декартовым тензорам вида (6.5). Отметим, что разложение вида (6.5) содержит как частный случай разложение Чепмена — Энскога (2.3) для функции распределения электронов. Это будет показано в следующей главе, где речь пойдет о коэффициенте переноса.

Можно показать, что для функций  $f^2_{\alpha\beta}, f^3_{\alpha\beta\gamma}, \dots$  в разложении (6.5) достаточно рассматривать только тензоры, инвариантные относительно перестановки двух любых индексов. Такие тензоры называются *симметричными неприводимыми тензорами*. Тогда мы имеем, например,

$$f^2_{\alpha\beta} = f^2_{\beta\alpha}, \\ f^3_{\beta\beta} = f^3_{11} + f^3_{22} + f^3_{33} = 0, \\ f^3_{\alpha\beta\gamma} = f^3_{\alpha\gamma\beta} = f^3_{\beta\alpha\gamma} = f^3_{\beta\gamma\alpha} = f^3_{\gamma\alpha\beta} = f^3_{\gamma\beta\alpha}, \\ f^3_{\alpha\beta\beta} = f^3_{\beta\alpha\beta} = f^3_{\beta\beta\alpha} = 0. \quad (6.6)$$

Справедливость этих соотношений подтверждается при рассмотрении членов второго порядка в разложении (6.5). Ясно, что, поскольку, например,  $C_1 C_2 = C_2 C_1$ , два члена  $f^2_{12} C_1 C_2 / C^2$  и  $f^2_{21} C_2 C_1 / C^2$  не являются независимыми и могут быть записаны как один член. Отсюда следует равенство  $f^2_{12} = f^2_{21}$ , выраженное первым из соотношений (6.6). Кроме того, поскольку  $C_1^2 / C^2 + C_2^2 / C^2 + C_3^2 / C^2 = 1$ , членами  $f^0, f^1_\alpha C_\alpha / C^2, f^2_{\alpha\beta} C_\alpha C_\beta / C^2$  не являются линейно независимыми и фактически должны быть оставлены только три из этих членов. Это в свою очередь приводит ко второму из равенств (6.6). Таким образом, пользуясь условием  $f^3_{\beta\beta} = 0$ , интересующие нас члены можно записать в виде трех линейно независимых членов, например, следующим образом:

$$f^0 + f^1_\alpha \frac{C_\alpha}{C} + f^2_{12} \frac{C_1^2}{C^2} + (-f^2_{11} - f^2_{22}) \left(1 - \frac{C_1^2}{C^2} - \frac{C_2^2}{C^2}\right) = \\ = (f^0 - f^2_{11} - f^2_{22}) + (2f^2_{11} + f^2_{22}) \frac{C_1^2}{C^2} + (2f^2_{22} + f^2_{11}) \frac{C_2^2}{C^2}.$$

Можно показать [4, § 3.4], что при выполнении условий (6.6) и (6.2) число (5) независимых коэффициентов второго порядка  $f^2_{\alpha\beta}$  в разложении по декартовым тензорам (6.5) равно числу незави-

симых действительных и мнимых частей соответствующих коэффициентов  $f_{2m}$  в разложении по сферическим функциям (6.1). Рассуждения, аналогичные проведенным выше, применимы также к условию (6.6) для коэффициентов разложения более высокого порядка, таких, как  $f_{\alpha\beta}^3$ . Но нас не будут подробно интересовать эти члены, поскольку они не дают вклада в окончательные соотношения, которые мы хотим получить. Фактически все результаты следующей главы могут быть получены при использовании разложения вида (6.4), содержащего только члены с  $f^0$  и  $f^1$ .

В принципе разложение по декартовым тензорам (6.5) справедливо для любых достаточно хороших функций скорости электронов. Практическая же применимость этого разложения основывается на условии, что отклонения функции  $f_e(\mathbf{C})$  от изотропного распределения  $f^0(\mathbf{C})$  малы, т. е.

$$f^0 \gg |f_{\alpha}^1|, |f_{\alpha\beta}^2|, |f_{\alpha\beta\gamma}^3|, \dots \quad (6.7)$$

Пределы применимости условия (6.7) можно оценить, исходя из введенных в § 2 величин средней и диффузионной скоростей электронов, потока тепла и тензоров давления и вязких напряжений. Если в определениях этих величин воспользоваться разложением вида (6.5) для функции  $f_e(\mathbf{C})$ , то можно показать [см. ниже формулы (6.19) и задачу 6.2], что

$$\begin{aligned} \bar{C}_e &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} C f_e d^3C = 4\pi \int_0^{\infty} C^3 f^0 dC, \\ U_{e\alpha} &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} C_{\alpha} f_e d^3C = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\infty} C^3 f_{\alpha}^1 dC, \\ q_{e\alpha} &\equiv \frac{1}{2} n_e m_e \int_{-\infty}^{\infty} C_{\alpha} C^2 f_e d^3C = \frac{2\pi}{3} n_e m_e \int_0^{\infty} C^5 f_{\alpha}^1 dC, \\ p_e &\equiv \frac{1}{3} n_e m_e \int_{-\infty}^{\infty} C^2 f_e d^3C = \frac{4\pi}{3} n_e m_e \int_0^{\infty} C^4 f^0 dC, \\ \tau_{e\alpha\beta} &\equiv - \left( n_e m_e \int_{-\infty}^{\infty} C_{\alpha} C_{\beta} f_e d^3C - p_e \delta_{\alpha\beta} \right) = \\ &= - \frac{8\pi}{15} n_e m_e \int_0^{\infty} C^4 f_{\alpha\beta}^2 dC. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Отсюда следуют оценки

$$\begin{aligned} \frac{f^1}{f^0} &\sim \max \left\{ \frac{U_e}{\bar{C}_e}, \frac{q_e}{C_e p_e} \right\}, \\ \frac{f^2}{f^0} &\sim \frac{\tau_e}{p_e}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где  $f^1 \equiv |f_{\alpha}^1|$ ,  $\tau_e \equiv |\tau_{e\alpha\beta}| = (\tau_{e\beta\gamma} \tau_{e\beta\gamma})^{1/2}$  и т. д.

Следовательно, для столкновительной плазмы, в которой выполняются соотношения

$$\frac{U_e}{\bar{C}_e} \ll 1, \quad (6.10a)$$

$$\frac{q_e}{C_e p_e} \ll 1, \quad (6.10b)$$

$$\frac{\tau_e}{p_e} \ll 1, \quad (6.10в)$$

можно искать решение уравнения Больцмана для электронов, удовлетворяющее условию (6.7).

Функции  $f^0$ ,  $f_{\alpha}^1$ ,  $f_{\alpha\beta}^2$ , ... можно найти из уравнений, получающихся при постановке разложения вида (6.5) в уравнение Больцмана для электронов с последующим интегрированием этого уравнения по телесному углу в пространстве скоростей с весами  $1$ ,  $C_{\alpha}/C$ ,  $C_{\alpha} C_{\beta}/C^2$ , ... Нас будут особенно интересовать функции  $f^0$  и  $f^1$ , которые при определенных условиях могут быть получены из первых двух таких уравнений. На основании соотношения (3.5) уравнение Больцмана для электронов можно записать символически в виде

$$-\frac{\mathcal{D}f_e}{\mathcal{D}t} = \sum_h C_{eh} + C_{ee}, \quad (6.11a)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}f_e}{\mathcal{D}t} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} (n_e f_e) + (u_{\beta} + C_{\beta}) \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (n_e f_e) + \\ &+ \left( \frac{F_{e\beta}}{m_e} - \frac{D u_{\beta}}{Dt} \right) n_e \frac{\partial f_e}{\partial C_{\beta}} - C_{\beta} \frac{\partial u_{\gamma}}{\partial x_{\beta}} n_e \frac{\partial f_e}{\partial C_{\gamma}}. \end{aligned} \quad (6.11b)$$

Столкновительные члены  $C_{eh}$  и  $C_{ee}$ , описывающие столкновения электронов с тяжелыми частицами и столкновения электронов между собой, даются соотношениями (5.17) и (4.15). Первые два уравнения, вытекающие из уравнения Больцмана для электронов при

использовании разложения по декартовым тензорам, имеют вид

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \frac{\mathcal{D}f_e}{\mathcal{D}t} d\Omega_C = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \left( \sum_h C_{eh} + C_{ee} \right) d\Omega_C, \quad (6.12)$$

$$\frac{3}{4\pi} \int_0^{4\pi} \frac{C}{C} \frac{\mathcal{D}f_e}{\mathcal{D}t} d\Omega_C = \frac{3}{4\pi} \int_0^{4\pi} \frac{C}{C} \left( \sum_h C_{eh} + C_{ee} \right) d\Omega_C, \quad (6.13)$$

где  $d\Omega_C$  — дифференциал телесного угла в пространстве скоростей. Множители  $1/4\pi$  и  $3/4\pi$  введены здесь для удобства в дальнейшем. Столбчатые члены в уравнениях (6.12) и (6.13) можно записать в более компактном виде, если ввести обозначения

$$C_{eh}^0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} C_{eh} d\Omega_C, \quad (6.14a)$$

$$C_{ee}^0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} C_{ee} d\Omega_C, \quad (6.14b)$$

$$C_{eh}^1 = \frac{3}{4\pi} \int_0^{4\pi} \frac{C}{C} C_{eh} d\Omega_C, \quad (6.14в)$$

$$C_{ee}^1 = \frac{3}{4\pi} \int_0^{4\pi} \frac{C}{C} C_{ee} d\Omega_C. \quad (6.14г)$$

Вспомогательные рассуждения относительно моментов уравнения Больцмана (§ 3), нетрудно видеть, что, умножив уравнения (6.12) и (6.13) соответственно на  $1/2 m_e C^2 \cdot 4\pi C^2 dC$  и  $m_e C \times (4\pi/3) C^2 dC$  и проинтегрировав их по  $C$ , мы получим уравнения для энергии и импульса электронов. До интегрирования по  $C$  составленные указанные образам уравнения фактически представляют собой зависящие от скорости уравнения энергии и импульса для электронов, т. е. выражают баланс энергии и импульса электронов в интервале скоростей от  $C$  до  $C + dC$ .

В оставшейся части параграфа мы рассмотрим уравнения (6.12) и (6.13) в случае, когда функция  $f_e(C)$  разложена по декартовым тензорам [формула (6.5)]. При проведении вычислений мы будем считать, что внешняя сила  $F_e$ , действующая на электроны, дает соотношения (3.13), т. е.

$$F_e = -e(E' + C \times B),$$

где

$$E' \equiv E + u \times B.$$

Поскольку оба члена вида  $F_e/m_e$  и  $Du/Dt$  входят в левую часть уравнения Больцмана (6.11б), удобно ввести вектор ускорения  $a'$ , определенный следующим образом:

$$a' \equiv - \left( \frac{eE'}{m_e} + \frac{Du}{Dt} \right). \quad (6.15)$$

Тогда мы имеем

$$\frac{F_e}{m_e} - \frac{Du}{Dt} = a' - \frac{e}{m_e} C \times B. \quad (6.16)$$

Рассмотрим теперь выражение (6.12). Из выражения (6.11б) для  $\mathcal{D}f_e/\mathcal{D}t$  и формул (6.19), которые приведены ниже, следует, что члены в левой части уравнений (6.12) имеют вид

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[ n_e \left( f^0 + \frac{C_\beta}{C} f_\beta^1 + \dots \right) \right] d\Omega_C = \frac{\partial}{\partial t} (n_e f^0),$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} u_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[ n_e \left( f^0 + \frac{C_\gamma}{C} f_\gamma^1 + \dots \right) \right] d\Omega_C = u_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} (n_e f^0),$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} C_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[ n_e \left( f^0 + \frac{C_\gamma}{C} f_\gamma^1 + \dots \right) \right] d\Omega_C = \frac{1}{3} C \frac{\partial}{\partial x_\beta} (n_e f_\beta^1), \quad (6.17)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \left( \frac{F_{e\beta}}{m_e} - \frac{Du_\beta}{Du} \right) n_e \frac{\partial}{\partial C_\beta} \left( f^0 + \frac{C_\gamma}{C} f_\gamma^1 + \dots \right) d\Omega_C =$$

$$= \frac{1}{3} a_\beta n_e \frac{1}{C^2} \frac{\partial}{\partial C} (C^2 f_\beta^1),$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta} n_e \frac{\partial}{\partial C_\gamma} \left( f^0 + \frac{C_\delta}{C} f_\delta^1 + \dots \right) d\Omega_C =$$

$$= - \frac{1}{3} C \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta} n_e \frac{\partial f^0}{\partial C} - \frac{2}{15} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta} n_e \frac{\partial}{\partial C} (C^2 f_{\beta\gamma}^2).$$

Здесь использованы следующие формулы, выведенные для любой скалярной функции  $\Phi(C)$ :

$$\int_0^{4\pi} \Phi d\Omega_C = 4\pi\Phi,$$

(6.18)

$$\int_0^{4\pi} C\Phi d\Omega_C = 0,$$

$$\int_0^{4\pi} C_1^2 \Phi d\Omega_C = \int_0^{4\pi} C_2^2 \Phi d\Omega_C = \int_0^{4\pi} C_3^2 \Phi d\Omega_C = \frac{4\pi}{3} C^2 \Phi, \quad (6.18)$$

$$\int_0^{4\pi} C_\alpha C_\beta \Phi d\Omega_C = \frac{4\pi C^2}{3} (\delta_{\alpha\beta}),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_\alpha} = \frac{C_\alpha}{C} \frac{\partial \Phi}{\partial C}.$$

[Эти формулы легко получить, если ввести сферические координаты (фиг. 4), в которых  $d\Omega_C = \sin \theta d\theta d\phi$ ,  $C_1 = C \sin \theta \cos \phi$ ,  $C_2 = C \sin \theta \sin \phi$  и  $C_3 = C \cos \theta$ .] Из соотношений (6.18) и аналогичных соотношений для тензоров более высокого ранга с учетом свойств симметричных неприводимых тензоров [формула (6.6)] следует:

$$\int_0^{4\pi} \Phi f_e d\Omega_C = 4\pi \Phi f^0, \quad (6.19)$$

$$\int_0^{4\pi} C \Phi f_e d\Omega_C = \frac{4\pi}{3} C \Phi f^1,$$

$$\int_0^{4\pi} \frac{\partial}{\partial C_\alpha} (\Phi f_e) d\Omega_C = \frac{4\pi}{3} \frac{1}{C^2} (\Phi f^0) \delta_{\alpha\beta} + \frac{8\pi}{15} \frac{1}{C^2} \frac{\partial}{\partial C} (C^3 \Phi f_{\alpha\beta}^2),$$

$$\int_0^{4\pi} C_\alpha \frac{\partial}{\partial C_\beta} (\Phi f_e) d\Omega_C = \frac{4\pi}{3} C \frac{\partial}{\partial C} (\Phi f^0) \delta_{\alpha\beta} + \frac{8\pi}{15} \frac{1}{C^2} \frac{\partial}{\partial C} (C^3 \Phi f_{\alpha\beta}^2),$$

$$\int_0^{4\pi} C_\alpha C_\beta (\Phi f_e) d\Omega_C = \frac{4\pi}{3} C^2 (\Phi f^0) \delta_{\alpha\beta} + \frac{8\pi}{15} C^2 \Phi f_{\alpha\beta}^2.$$

Соотношения (6.17) и (6.8) могут быть непосредственно получены из соотношений (6.19).

Пользуясь соотношениями (6.17), для первого уравнения, получающегося из уравнения Больцмана при использовании разложения по декартовым тензорам [формула (6.12)], находим

$$\frac{D}{Dt} (n_e f^0) + \frac{C}{3} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (n_e f_\beta^1) + \frac{a_\beta^1 n_e}{3C^2} \frac{\partial}{\partial C} (C^2 f_\beta^1) - \frac{C}{3} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta} n_e \frac{\partial f^0}{\partial C} - \frac{2}{15} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta} \frac{n_e}{C^2} \frac{\partial}{\partial C} (C^3 f_{\beta\gamma}^2) = \sum_h C_{eh}^0 + C_{ee}^0, \quad (6.20)$$

где  $C_{eh}^0$  и  $C_{ee}^0$  — величины, определяющиеся формулами (6.14).

Рассмотрим теперь столкновительный член

$$C_{eh}^0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} C_{eh} d\Omega_C.$$

Величина  $C_{eh}$ , определяемая соотношением (5.17), при разложении, основанном на малости электронной массы (см. задачу 6.3), имеет вид

$$C_{eh} = n_e \int_{d\Omega_h} [f_e(V) - f_e(C)] \hat{v}_{eh} d\Omega_h +$$

$$+ n_e \int_{d\Omega_h} [f_e(V) - f_e(C)] \left[ -U_{h\beta} \frac{\partial \hat{v}_{eh}}{\partial C_\beta} + \frac{1}{2} \frac{kT_h}{m_h} \frac{\partial^2 \hat{v}_{eh}}{\partial C_\beta \partial C_\beta} \right] d\Omega_h -$$

$$- 2n_e \int_{d\Omega_h} k_\beta \frac{\partial f_e(V)}{\partial C_\beta} U_h \cdot \hat{k} \hat{v}_{eh} d\Omega_h +$$

$$+ 2n_e \frac{m_e}{m_h} \frac{\partial}{\partial C_\beta} \left\{ \int_{d\Omega_h} k_\beta k_\gamma [C_\gamma f_e(V) + \frac{kT_h}{m_e} \frac{\partial f_e(V)}{\partial C_\gamma}] \hat{v}_{eh} d\Omega_h \right\}. \quad (6.21)$$

Можно показать, что вклад в  $C_{eh}^0$  от первого члена правой части соотношения (6.21) равен нулю. Математически это следует из равенств  $V = C$  [формула (5.5)] и  $d\Omega_C = d\Omega_V$ , или, что то же самое, — из свойств коэффициентов разложения  $f^0, f^1, \dots$ . Физически величина  $C_{eh}^0$  пропорциональна столкновительному члену, соответствующему столкновениям электронов с тяжелыми частицами, в зависимости от скорости уравнения для энергии электронов. Поскольку первый член в соотношении (6.21) соответствует рассеянию электронов на частице с бесконечно большой массой, происходящему без потери энергии, этот член не вносит вклада в уравнение для энергии электрона.

Следовательно, мы должны учесть члены более высокого порядка в соотношении (6.21). Так как мы предполагаем, что  $f^0 \gg f^1, f^2, \dots$  [условие (6.7)], в этих членах достаточно учесть только вклад от  $f^0$ . Тогда, поскольку  $f^0(V) = f^0(C)$ , второй интеграл в соотношении (6.21) сразу обращается в нуль, третий интеграл обращается в нуль при интегрировании по  $d\Omega_C$ , что следует из соотношений (6.18) и (6.24) (см. ниже). Из последнего интеграла (6.21) получим

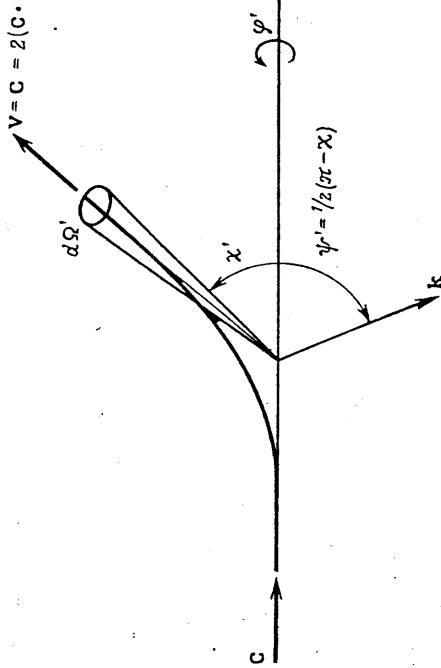
$$C_{eh}^0 = \frac{1}{4\pi} n_e \frac{m_e}{m_h} \int_0^{4\pi} \frac{\partial}{\partial C_\beta} \left\{ [C_\gamma f^0(C) + \frac{kT_h}{m_e} \frac{C_\gamma}{C} \frac{\partial f^0(C)}{\partial C}] \times \right.$$

$$\left. \times 2 \int_{d\Omega_h} k_\beta k_\gamma \hat{v}_{eh} d\Omega_h \right\} d\Omega_C. \quad (6.22)$$

Для вычисления величины (6.22) рассмотрим вначале интеграл

$$2 \int_{d\Omega_h} k_\alpha k_\beta C_\beta \hat{v}_{eh} d\Omega_h. \quad (6.23)$$

Единичный вектор  $\mathbf{k}$  (фиг. 5) можно представить в виде суммы двух векторов, один из которых  $\mathbf{k}^{\parallel} = C \cos \psi' / C$  параллелен, а другой ( $\mathbf{k}^{\perp}$ ) перпендикулярен вектору  $\mathbf{C}$ . При интегрировании в вы-



Фиг. 5. Соотношение между векторами  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{k}$ . Согласно определению вектора  $\mathbf{V}$ , единичный вектор  $\mathbf{k}$  направлен по внешней бисектрисе угла между векторами  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{V}$ .

ражении (6.23) по азимутальному углу  $\varphi'$  вклад от  $k_\alpha^{\perp}$  равен нулю. Поскольку скалярное произведение  $k_\beta C_\beta$  равно  $C \cos \psi'$ , выражение (6.23) примет вид

$$\begin{aligned} & 2 \int_{d\Omega_h} k_\alpha k_\beta C_\beta \hat{v}_{eh} d\Omega_h = 2 \int_{d\Omega_h} k_\alpha^{\parallel} C \cos \psi' \hat{v}_{eh} d\Omega_h = \\ & = 2C_\alpha \int_{d\Omega_h} \cos^2 \psi' \hat{v}_{eh} d\Omega_h = C_\alpha \int_{d\Omega_h} (1 - \cos^2 \chi') \hat{v}_{eh} d\Omega_h = C_\alpha v_{eh}^{(1)}(C). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Здесь частота столкновений с передачей импульса  $v_{eh}^{(1)}(C)$ , определяемая соотношениями (5.6) и (5.12), дается выражением

$$\begin{aligned} v_{eh}^{(1)}(C) & \equiv \int_{d\Omega_h} (1 - \cos \chi') \hat{v}_{eh} d\Omega_h = \\ & = n_h \int_{d\Omega_h} (1 - \cos \chi') C \hat{I}_{eh}(C, \mathbf{C} \cdot \mathbf{k}) d\Omega_h = \\ & = n_h \int_{d\Omega'} (1 - \cos \chi') C I_{eh}(C, \chi') d\Omega'. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Следовательно, частота  $v_{eh}^{(1)}(C)$  есть та же самая функция, что и частота столкновений  $v_{eh}^{(1)}(g) \equiv n_h Q_{eh}^{(1)}(g)$ , где  $Q_{eh}^{(1)}(g)$  — величина, определяемая формулой (3.7) из гл. 2 и формулой (4.9) (§ 5, фиг. 3). С учетом формулы (6.24) выражение (6.22) для  $C_{eh}^0$  примет вид

$$\begin{aligned} C_{eh}^0 & = \frac{1}{4\pi} n_e \frac{m_e}{m_h} \int_0^{4\pi} \frac{\partial}{\partial C_\beta} \left[ C_\beta \left( f^0 + \frac{kT_h}{m_e} \frac{1}{C} \frac{\partial f^0}{\partial C} \right) v_{eh}^{(1)} \right] d\Omega_C = \\ & = n_e \frac{m_e}{m_h} \frac{1}{C^2} \frac{\partial}{\partial C} \left[ C^3 \left( f^0 + \frac{kT_h}{m_e} \frac{1}{C} \frac{\partial f^0}{\partial C} \right) v_{eh}^{(1)} \right]. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Учитывая, что этот результат будет использован в дальнейшем, и в соответствии со сказанным в § 7 гл. 2, отметим, что в том случае, когда функция  $f^0$  является максвелловской с температурой электронов  $T_e$ , мы имеем

$$\frac{1}{C} \frac{\partial f^0}{\partial C} = -\frac{m_e}{kT_e} f^0,$$

так что величина (6.26) пропорциональна коэффициенту энергетических потерь для электрона ( $m_e/m_h$ ) ( $T_e - T_h$ ).

При вычислении столкновительного члена  $C_{eh}^0$  для электрон-электронных столкновений из соотношения Фоккера — Планка (4.15) в разложении для функции  $f_e(C)$  вида (6.5) достаточно учесть только вклад от  $f_e^0(C)$ , поскольку  $f_e^0 \gg f_e^1, f_e^2, \dots$ . При этом условии получим

$$\begin{aligned} C_{ee}^0 & = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} C_{ee} d\Omega_C = n_e^2 \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \left[ -\frac{\partial}{\partial C_\beta} \left( f_e^0 \frac{\partial f_e^0}{\partial C_\beta} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial C_\beta \partial C_\gamma} \right. \\ & \quad \left. \times \left( f_e^0 \frac{\partial C^0}{\partial C_\beta \partial C_\gamma} \right) \right] d\Omega_C, \end{aligned} \quad (6.27)$$

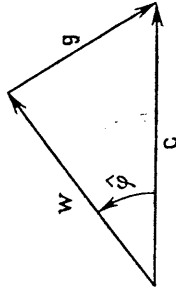
где

$$\Gamma_{ee} = 4\pi \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \right)^2 \ln \Lambda, \quad (6.28)$$

$$H^0(C) \equiv 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_e^0(W)}{g} d^3W, \quad (6.29a)$$

$$G^0(C) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g f^0(W) d^3W. \quad (6.296)$$

В определениях (6.29) величин  $H^0$  и  $G^0$  вспомогательная переменная  $W$  есть скорость второго электрона, участвующего в столкновении. При вычислении этих величин будем считать скорость первого электрона  $C$  фиксированной и введем угол  $\hat{\varphi}$  между векторами  $C$  и  $W$  (фиг. 6). Тогда можно написать



$$g^2 = W^2 + C^2 - 2WC \cos \hat{\varphi},$$

$$d^3W = d\Omega_W W^2 dW = 2\pi \sin \hat{\varphi} d\hat{\varphi} W^2 dW. \quad (6.30)$$

Фиг. 6. Угол  $\hat{\varphi}$ .

С учетом выражения (6.30) для  $g$  прямое интегрирование дает

$$\int_0^\pi \frac{\sin \hat{\varphi}}{g} d\hat{\varphi} = \frac{1}{WC} [(W+C) \pm (W-C)],$$

$$\int_0^\pi g \sin \hat{\varphi} d\hat{\varphi} = \frac{1}{3WC} [(W+C)^3 \pm (W-C)^3].$$

Здесь знак плюс берется при  $W < C$ , а знак минус — при  $W > C$ . Комбинируя эти выражения, получаем

$$H^0 = 8\pi \left( \frac{1}{C} \int_0^C W^2 f^0(W) dW + \int_C^\infty W f^0(W) dW \right), \quad (6.31)$$

$$G^0 = 4\pi \left( \frac{1}{3C} \int_0^C W^4 f^0(W) dW + C \int_0^C W^2 f^0(W) dW + \right.$$

$$\left. + \int_C^\infty W^3 f^0(W) dW + \frac{C^2}{3} \int_C^\infty W f^0(W) dW \right).$$

Подставим выражения (6.31) для  $H^0$  и  $G^0$  в формулу (6.27) для  $C_{ee}^0$ . Полученное соотношение можно упростить, учитывая, что величины  $H^0$  и  $G^0$  зависят только от модуля  $C$ , и пользуясь соотношением

$$\frac{\partial^2 H^0}{\partial C_\beta \partial C_\beta} = \frac{\partial^2 G^0}{\partial C_\beta \partial C_\beta} = -8\pi f^0(C),$$

в справедливости которого можно убедиться прямым вычислением. После некоторых преобразований величина  $C_{ee}^0$  может быть представлена в виде

$$C_{ee}^0 = n_e^2 \Gamma_{ee} \frac{1}{C^2} \frac{\partial}{\partial C} \left[ I_0^0 f^0 + (I_2^0 + J_2^0) \frac{C}{3} \frac{\partial f^0}{\partial C} \right], \quad (6.32)$$

где

$$I_p^0 \equiv \frac{4\pi}{C^p} \int_0^C C^{2+p} f^0 dC, \quad (6.33)$$

$$J_p^0 \equiv \frac{4\pi}{C^p} \int_C^\infty C^{2+p} f^0 dC.$$

(Эти соотношения записаны через скорости  $C$ , так как здесь уже нет необходимости во вспомогательной переменной  $W$ .) Теперь полученные соотношения (6.20), (6.26) и (6.32) можно собрать, и это даст нам первое уравнение (6.12), полученное на основании разложения по декартовым тензорам.

Второе необходимое нам уравнение (6.13) получено умножением уравнения Больцмана на  $3C/4\pi C$  с последующим интегрированием по телесному углу в пространстве скоростей. Рассуждая так же, как и ранее, получим [6, § 3.7]

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (n_e f^1) + C \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (n_e f^0) + a_\alpha n_e \frac{\partial f^0}{\partial C} - \frac{e}{m_e} \mathbf{B} \times n_e \mathbf{f}^1 + \\ + \frac{2}{5} C \frac{\partial}{\partial x_\beta} n_e f_{\alpha\beta}^2 + \frac{2}{5C^3} \frac{\partial}{\partial C} (C^3 a_\beta n_e f_{\alpha\beta}^2) - \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} n_e f_\beta^1 - \\ - \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) \frac{C^2 n_e}{5} \frac{\partial}{\partial C} \left( \frac{f_\beta^1}{C} \right) - \\ - \frac{6}{35} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma} \frac{n_e}{C^3} \frac{\partial}{\partial C} (C^4 f_{\alpha\beta\gamma}^3) = \sum_h C_{eh\alpha}^1 + C_{ee\alpha}^1. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Вывод столкновительного члена, описывающего столкновения между электроном и тяжелой частицей,

$$C_{eh}^1 \equiv \frac{3}{4\pi} \int_0^{4\pi} \frac{C}{C} C_{eh} d\Omega_C$$

[соотношение (6.14в)] аналогичен выводу члена  $C_{eh}^0$ . Как и прежде, в силу условия  $V = C$  функция  $f^0$  не вносит вклада в первый интеграл выражения (6.21) для  $C_{eh}$ . Ненулевой вклад дает только член этого интеграла, содержащий функцию  $f^1$ . При  $\Gamma^1(V) \equiv \Gamma^1(C)$  этот член имеет вид [фиг. 5 и формулы (6.25) и (6.18)]

$$\begin{aligned} \frac{3n_e}{4\pi} \int_0^{4\pi} \int_0^{4\pi} \frac{C_\alpha}{C} \left[ \frac{V_\beta}{V} f_\beta^1(V) - \frac{C_\beta}{C} f_\beta^1(C) \right] \hat{v}_{eh} d\Omega_h d\Omega_C = \\ = \frac{3n_e}{4\pi} \int_0^{4\pi} \int_0^{4\pi} \frac{C_\alpha}{C} (V_\beta - C_\beta) \frac{f_\beta^1(C)}{C} \hat{v}_{eh} d\Omega_h d\Omega_C = \\ = \frac{3n_e}{4\pi} \int_0^{4\pi} \int_0^{4\pi} \left[ \frac{C_\alpha C_\beta f_\beta^1}{C^2} \int (\cos \chi' - 1) \hat{v}_{eh} d\Omega_h \right] d\Omega_C = -n_e v_{eh}^{(1)} f_\alpha^1. \end{aligned}$$

В остальных интегралах соотношения (6.21) нужно учитывать только вклад функции  $f^0$ . Первый из этих интегралов при  $f_e = f^0$  сразу обращается в нуль, а второй обращается в нуль после умножения на  $3C/4\pi C$  и интегрирования по  $\Omega_c$  [формула (6.26) и вторая из формул (6.18)]. На основании соотношений (6.24) и (6.18) для третьего члена выражения (6.21) получим

$$\begin{aligned} & -\frac{3}{4\pi} 2n_e \int_0^{4\pi} \frac{C_\alpha}{C} \int \frac{\partial f^0}{\partial C_\beta} U_{h,\gamma} k_\gamma \hat{v}_{eh} d\Omega_h d\Omega_c = \\ & = -\frac{3}{4\pi} n_e \int_0^{4\pi} \frac{C_\alpha}{C} U_{h,\gamma} \int \frac{\partial f^0}{\partial C} 2k_\gamma k_\beta \frac{C_\beta}{C} \hat{v}_{eh} d\Omega_h d\Omega_c = \\ & = -\frac{3}{4\pi} n_e \int_0^{4\pi} \frac{C_\alpha}{C} U_{h,\gamma} \frac{C_\gamma}{C} \frac{\partial f^0}{\partial C} \hat{v}_{eh}^{\langle 1 \rangle} d\Omega_c = \\ & = -n_e U_{h,\gamma} \hat{v}_{eh}^{\langle 1 \rangle} \delta_{\alpha\gamma} \frac{\partial f^0}{\partial C} = -n_e U_{h,\alpha} \hat{v}_{eh}^{\langle 1 \rangle} \frac{\partial f^0}{\partial C}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Комбинируя полученные результаты, имеем

$$C_{eh}^1 = -n_e \hat{v}_{eh}^{\langle 1 \rangle} f^1 - n_e \hat{v}_{eh}^{\langle 1 \rangle} U_h \frac{\partial f^0}{\partial C}. \quad (6.35)$$

Столкновительный член, описывающий столкновения между электронами, имеет вид [6, § 7.6]

$$\begin{aligned} C_{ee}^1 = n_e^2 \Gamma_{ee} & \left[ 8\pi f^0 f^1 + \frac{1}{15C^2} (-3I_3^1 + 2J_{-2}^1 + 2J_{-2}^0) \frac{\partial f^0}{\partial C} + \right. \\ & + \frac{1}{5C} (I_3^1 + J_{-2}^1) \frac{\partial^2 f^0}{\partial C^2} + \\ & + \frac{1}{3C^2} (-I_2^1 + 3I_0^1 + 2J_1^0) \left( -\frac{f^1}{C} + \frac{\partial f^1}{\partial C} \right) + \\ & \left. + \frac{1}{3C} (J_2^0 + J_{-1}^0) \frac{\partial^2 f^1}{\partial C^2} \right], \end{aligned} \quad (6.36)$$

где

$$I_p^1 \equiv \frac{4\pi}{C^p} \int_0^{4\pi} C^{p+2} f^1 dC,$$

$$J_p^1 \equiv \frac{4\pi}{C^p} \int_0^{4\pi} C^{p+2} f^1 dC.$$

Выше отмечалось (§ 4), что мы рассматриваем электрон-ионные столкновения как частный случай столкновений электронов с тяжелыми частицами. Вклад электрон-ионных столкновений в уравнения (6.20) и (6.34) дается выражениями (6.26) и (6.35) для членов

$C_{eh}^0$  и  $C_{eh}^1$ , в которых величина  $\hat{v}_{eh}^{\langle 1 \rangle}$  берется равной частоте столкновений с передачей импульса между электроном и ионом [формула (4.10)]:

$$\hat{v}_{eh}^{\langle 1 \rangle} = n_i C Q_{ei}^{\langle 1 \rangle} (C) = \frac{4\pi n_i}{C^3} \left( \frac{Ze^2}{4\pi \epsilon_0 m_e} \right)^2 \ln \Lambda, \quad (6.37)$$

где  $Ze$  — заряд иона. Тот же результат, но не столь прямым путем, можно получить с помощью разложения столкновительного члена Фоккера — Планка (4.15) для электрон-ионных столкновений по декартовым тензорам при использовании упрощений, вытекающих из малости отношения  $m_e/m_i \ll 1$  (задача 6.6).

Вывод уравнений (6.20) и (6.34) был несколько непоследовательным в том смысле, что мы требовали выполнения условия  $f^0 \gg f^1, f^2, \dots$  лишь для столкновительных членов. Если теперь потребовать выполнения этого условия и для левых частей уравнений (6.20) и (6.34), то эти уравнения можно упростить. Кроме того, предположим также, что средняя массовая скорость  $u$  не превышает тепловую скорость электронов  $\bar{C}_e$ , т. е.

$$u \ll \bar{C}_e. \quad (6.38)$$

Это неравенство накладывает слабое ограничение на число Маха ( $M$ ) для потока. При  $M \sim u/\bar{C}_h \sim (u/\bar{C}_e) (\bar{m}_h T_e/m_e T_h)^{1/2}$  мы имеем  $M \ll (\bar{m}_h T_e/m_e T_h)^{1/2}$ , где  $m_h$  — соответствующее среднее значение массы тяжелых частиц. При этих условиях определенные члены в левых частях уравнений (6.20) и (6.34) малы по сравнению с другими членами и их можно опустить; тогда эти уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (n_e f^0) + \frac{C}{3} \nabla \cdot (n_e f^1) - \frac{en_e}{3m_e C^2} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial C} (C^2 f^1) - \frac{C}{3} \nabla \cdot u n_e \frac{\partial f^0}{\partial C} = \\ = n_e \sum_h \frac{m_e}{m_h} \frac{1}{C^2} \frac{\partial}{\partial C} \left[ C^3 \left( f^0 + \frac{kT_h}{m_e} \frac{1}{C} \frac{\partial f^0}{\partial C} \right) \hat{v}_{eh}^{\langle 1 \rangle} \right] + C_{ee}^0, \end{aligned} \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (n_e f^1) + C \nabla (n_e f^0) + a' n_e \frac{\partial f^0}{\partial C} - \frac{e}{m_e} \mathbf{B} \times n_e f^1 = \\ = -n_e \sum_h \hat{v}_{eh}^{\langle 1 \rangle} \left( f^1 + U_h \frac{\partial f^0}{\partial C} \right) + C_{ee}^1. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Здесь,  $C_{ee}^0$  и  $C_{ee}^1$  — величины, даваемые формулами (6.32) и (6.36). Нетрудно видеть, что уравнения (6.39) и (6.40) — это два уравнения с двумя неизвестными  $f^0$  и  $f^1$ . Хотя уравнения связаны между собой, оказывается удобным, как мы увидим в следующей главе, считать, что уравнением для энергии (6.39) определяется изотропная часть функции распределения  $f^0$ , а уравнением для импульса (6.40) — функция распределения  $f^1$ .

Несмотря на сложный вид некоторых уравнений, приведенных в данном параграфе, при таком их представлении сильно упрощается вычисление коэффициентов переноса для электронов в частично ионизованной плазме. Этим вычислениям посвящается гл. 8.

**Задача 6.1.** Исходя из соотношений (6.6), покажите, что коэффициент  $f_{\alpha\beta}^2$  имеет 5, а коэффициент  $f_{\alpha\beta}^3$  — 7 независимых компонент.

**Задача 6.2.** Исходя из соотношений (6.19), выведите формулы (6.8).

**Задача 6.3.** Покажите, что тензор вязких напряжений  $\tau_{\alpha\beta}^h$ , которым мы пренебрегли при выводе формулы (5.17) для  $C_{eh}$  из выражения (5.16), не вносит никакого вклада и в выражения (6.26) и (6.35) для  $C_{eh}^0$  и  $C_{eh}^1$ .

**Задача 6.4.** Покажите, что в том случае, когда функция  $f^0$  является максвелловской,  $C_{ee}^0 = 0$ .

**Задача 6.5. 1.** Пользуясь результатами данного параграфа, выведите уравнения для энергии и импульса в случае, когда функция  $f^0$  является максвелловской (2.2) и когда  $U_h = 0$ . Проверьте правильность полученного вами уравнения для энергии по уравнению (3.16) из следующей главы.

2. Упростите уравнение для импульса в случае, когда величина  $v_{eh}^{(1)}$  не зависит от скорости электронов (случай  $v_{eh}^{(1)} \neq v_{eh}^{(1)}(C)$  соответствует так называемым максвелловским молекулам). Сравните ваш результат с законом Ома, полученным на основе представления о средней длине свободного пробега [формула (3.176) из гл. 2].

**Задача 6.6.** Выведите формулу (6.35) для электрон-ионного столкновительного члена  $C_{ei}^A$ , исходя из выражения (4.15) для столкновительного члена Фоккера — Планка, в случае, когда  $U_i = 0$ . Так же, как сделано нами при выводе формулы (6.35), вы можете упростить вычисления, рассматривая только приближение нулевого порядка по параметру  $m_e/m_i \ll 1$  (при этом  $g \approx C$ ) и оставляя в разложении (6.5) по декартовым тензорам только те члены, которые содержат  $f^0$  и  $f^1$ .

### Литература

1. *Allis W. P.*, в книге *Handbuch der Physik*, Bd. XXI, Springer-Verlag, 1956. *Motion of Electrons and Ions.*
2. *Chapman S., Cowling T. G.*, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, 2nd ed., Cambridge, 1952 (имеется перевод: С. Чепмен, Т. Коулинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1960).
3. *Hirschfelder J. O., Curtiss C. F., Bird R. B.*, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, corrected printing, Wiley, 1964.
4. *Jackson J. D.*, *Classical Electrodynamics*, Wiley, 1962 (имеется перевод: Дж. Джексон, Классическая электродинамика, изд-во «Мир», 1965).
5. *Montgomery D. C., Tidman D. A.*, *Plasma Kinetic Theory*, McGraw-Hill, 1964.
6. *Sitarofsky I. P., Johnston T. W.*, *Brachynski M. P.*, *The Particle Kinetics of Plasmas*, Addison-Wesley, 1966.
7. *Vincenti W. G., Kruger C. H.*, *Introduction to Physical Gas Dynamics*, Wiley, 1965.



**Задача 6.1.** Исходя из соотношений (6.6), покажите, что коэффициент  $f_{\alpha\beta}^2$  имеет 5, а коэффициент  $f_{\alpha\beta}^3$  — 7 независимых компонент.

**Задача 6.2.** Исходя из соотношений (6.19), выведите формулы (6.8).

**Задача 6.3.** Покажите, что тензор вязких напряжений  $\tau_{h,\alpha\beta}$ , которым мы пренебрегли при выводе формулы (5.17) для  $C_{eh}$  из выражения (5.16), не вносит никакого вклада и в выражения (6.26) и (6.35) для  $C_{eh}^0$  и  $C_{eh}^1$ .

**Задача 6.4.** Покажите, что в том случае, когда функция  $f^0$  является максвелловской,  $C_{ee}^0 = 0$ .

**Задача 6.5. 1.** Пользуясь результатами данного параграфа, выведите уравнения для энергии и импульса в случае, когда функция  $f^0$  является максвелловской (2.2) и когда  $U_h = 0$ . Проверьте правильность полученного вами уравнения для энергии по уравнению (3.16) из следующей главы.

**2.** Упростите уравнение для импульса в случае, когда величина  $v_{th}^{\alpha\beta}$  не зависит от скорости электронов [случай  $v_{th}^{\alpha\beta} \neq v_{th}^{\alpha\beta}(C)$  соответствует так называемым максвелловским молекулам]. Сравните ваш результат с законом Ома, полученным на основе представления о средней длине свободного пробега [формула (3.176) из гл. 2].

**Задача 6.6.** Выведите формулу (6.35) для электрон-ионного столкновительного члена  $C_{ei}^1$ , исходя из выражения (4.15) для столкновительного члена Фоккера — Планка, в случае, когда  $U_i = 0$ . Так же, как сделано нами при выводе формулы (6.35), вы можете упростить вычисления, рассматривая только приближение нулевого порядка по параметру  $m_e/m_i \ll 1$  (при этом  $g \approx C$ ) и оставив в разложении (6.5) по декартовым тензорам только те члены, которые содержат  $f^0$  и  $f^1$ .

### Литература

1. *Allis W. P.*, в книге *Handbuch der Physik*, Bd. XXI, Springer-Verlag, 1956. *Motion of Electrons and Ions.*
2. *Chapman S., Cowling T. G.*, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, 2nd ed., Cambridge, 1952 (имеется перевод: С. Чермен, Т. Каулинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1960).
3. *Hirschfelder J. O., Curtiss C. F., Bird R. B.*, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, corrected printing, Wiley, 1964.
4. *Jackson J. D.*, *Classical Electrodynamics*, Wiley, 1962 (имеется перевод: Дж. Джексон, Классическая электродинамика, изд-во «Мир», 1965).
5. *Montgomery D. C., Tidman D. A.*, *Plasma Kinetic Theory*, McGraw-Hill, 1964.
6. *Shtarkofsky I. P., Johnston T. W.*, *Brachynski M. P.*, *The Particle Kinetics of Plasmas*, Addison-Wesley, 1966.
7. *Vincenti W. G., Kruger C. H.*, *Introduction to Physical Gas Dynamics*, Wiley, 1965.

## ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

### § 1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе полученное в гл. 7 разложение по декартовым тензорам будет использоваться для вычисления коэффициентов переноса. Мы подробно рассмотрим коэффициенты переноса, связывающие плотность электронного тока и потока тепла с электрическими и магнитными полями и пространственными градиентами. Вклад электронов в суммарное вязкое напряжение рассматриваться не будет, так как он почти всегда мал. Особое внимание к электронным коэффициентам переноса обуславливается важной ролью электронов в явлениях переноса в плазме, а также тем, что при вычислении электронных коэффициентов переноса возникают специфические упрощения.

Явления переноса, связанные с тяжелыми частицами, в большинстве случаев удовлетворительно описываются теорией Чепмена — Энскога, развитой для смеси нейтральных газов, а соответствующие коэффициенты переноса можно вычислить классическими методами [10]. Хотя те же самые методы могут быть использованы и для вычисления некоторых электронных коэффициентов переноса, вычисления в этом случае слишком сложны. Кроме того, мы хотим учесть влияние магнитных и высокочастотных электрических полей на электронные коэффициенты переноса и изложить строгую теорию, применимую в том случае, когда температура электронов и тяжелых частиц неодинакова.

Вначале, в § 2, мы рассмотрим электронные коэффициенты переноса в слабо ионизованной плазме. В этом случае электронные электронными столкновениями можно пренебречь и вычисления оказываются самыми простыми. Но качественно окончательные выражения для плотности электронного тока и потока тепла согласуются с выражениями, относящимися к частично ионизованной плазме. В § 3 анализируются условия, при которых изотропная часть функции распределения имеет максвелловский вид. Затем в § 4 выводятся соотношения для электронных коэффициентов переноса частично ионизованной плазмы. О коэффициентах переноса для полностью ионизованной плазмы и о коэффициентах переноса для тяжелых частиц кратко говорится в § 5 и 6. В § 7 рассматриваются различные правила смеси, которые используются для приближенного вычисления электронных коэффициентов пере-

носа, и оценивается точность этих формул по сравнению с результатами точной теории (§ 4). Наконец, в § 8 рассматривается влияние неупругих столкновений.

## § 2. СЛАБО ИОНИЗОВАННАЯ ПЛАЗМА

В случае достаточно низкой степени ионизации плазмы в уравнении Больцмана для электронов и в уравнениях, использующих разложение по декартовым тензорам (гл. 7, § 6), можно пренебречь электрон-электронным столкновительным членом. Этот случай соответствует так называемому *лоренцевскому пределу*. В этом параграфе мы выведем соотношения для электронных коэффициентов переноса в такой слабо ионизованной плазме. Ясно, что пренебрежение электрон-электронным столкновительным членом приводит к значительному упрощению вычислений коэффициентов переноса. Кроме того, при рассмотрении лоренцевского предела можно получить выражение для плотности тока электронов и потока тепла, которые останутся справедливыми при произвольных степенях ионизации, так что анализ, проводимый в данном параграфе, явится как бы введением в общую теорию коэффициентов переноса. Действительно, с учетом электрон-ионных столкновений выражения, получаемые в лоренцевском пределе, дают приемлемые значения ряда коэффициентов переноса частично и полностью ионизованной плазмы. Так, например, в случае полностью ионизованной плазмы электропроводность в отсутствие магнитного поля, полученная в лоренцевском пределе, отличается от точного значения лишь множителем  $\sim 2$ .

Из соотношений (6.8) гл. 7 видно, что диффузионная скорость электронов, а следовательно, и плотность тока электронов и электронный поток тепла зависят от анизотропной части  $\mathbf{f}^1$  электронной функции распределения в разложении по декартовым тензорам. Поскольку величина  $\mathbf{f}^1$  определяется вторым из уравнений, полученных с использованием разложения по декартовым тензорам, а именно уравнением для импульса (6.40) из гл. 7, мы рассмотрим вначале решение этого уравнения, считая пока изотропную часть функции распределения  $f^0$  произвольной.

Условия применимости лоренцевского приближения к уравнению (6.40) из гл. 7 можно оценить, пользуясь соотношениями (6.35) и (6.36) из гл. 7 для столкновительных членов  $C_{eh}^1$  и  $C_{ee}^1$ . Из этих соотношений следует, что отношение  $|C_{ee}^1|/|C_{eh}^1|$  по порядку величины таково:

$$\frac{|C_{ee}^1|}{|C_{eh}^1|} \sim \frac{n_e \Gamma_{ee} \delta \pi f^0 f^1}{v_{eh}^{(1) f^1} + v_{eh}^{(1) f^0} U_{eh} \partial^0 / \partial C}. \quad (2.1)$$

Здесь для оценки  $|C_{ee}^1|$  использован первый член соотношения (6.36) из гл. 7, поскольку все члены этого соотношения одного

порядка. Нам требуется только достаточное условие того, что отношение (2.1) мало, а поэтому мы можем для простоты опустить также второй член в знаменателе. Об относительной величине этого члена мы скажем ниже. Поскольку коэффициенты переноса определяются электронами, обладающими тепловой энергией, т. е. электронами, для которых  $\frac{1}{2} m_e C^2 \sim \frac{3}{2} k T_e$ , следует вычислить некоторое среднее значение отношения (2.1) для тепловых электронов. Исходя из условия нормировки

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_e dC = 4\pi \int_0^{\infty} f^0 C^2 dC,$$

для тепловых электронов можно написать

$$f^0 \sim \frac{1}{C^3} i.$$

С учетом выражения для частоты электрон-электронных столкновений с передачей импульса [формула (4.14) из гл. 7]

$$v_{ee}^{(1)} = \frac{4n_e \Gamma_{ee}}{C^3} \sim \frac{4n_e \Gamma_{ee}}{C_e^3}$$

отношение (2.1) можно переписать следующим образом:

$$\frac{|C_{ee}^1|}{|C_{eh}^1|} \sim \frac{v_{ee}^{(1)}}{v_{eh}^{(1)}} \sim \frac{\bar{v}_{ee}}{v_{eh}}.$$

Здесь для большей определенности мы ввели взвешенную по энергии среднюю частоту столкновений, даваемую формулой, следующей за формулой (6.32) из гл. 2. Для  $\bar{v}_{eh}$  с точностью до членов самого низкого порядка по  $m_e/m_h$  имеем

$$\bar{v}_{eh} = \int_0^{\infty} \frac{1/2 m_e C^2}{3/2 k T_e} v_{eh}^{(1)}(C) f^0 4\pi C^2 dC. \quad (2.2a)$$

На основании соотношения (4.10) из гл. 7 величина  $\bar{v}_{ee}$  записывается как

$$\bar{v}_{ee} = n_e \frac{8\sqrt{\pi}}{3} \left( \frac{m_e}{kT_e} \right)^{3/2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \right)^2 \ln \Lambda, \quad (2.2b)$$

если в качестве  $f^0$  взять максвелловскую функцию распределения (3.3). Из предыдущего следует, что электрон-электронным столкновительным членом  $C_{ee}^1$  в уравнении (6.40) из гл. 7 для  $\mathbf{f}^1$  можно пренебречь, когда

$$\bar{v}_{ee} \ll \sum_h \bar{v}_{eh}. \quad (2.3)$$

Если условие (2.3) выполнено, то уравнение (6.40) из гл. 7 принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_e \mathbf{f}^1) + \text{C}\nabla (n_e f^0) + \mathbf{a}' n_e \frac{\partial f^0}{\partial C} - \frac{e}{m_e} \mathbf{B} \times n_e \mathbf{f}^1 = -n_e \sum_h \left[ v_{eh}^{(1)} (\mathbf{f}^1 + \mathbf{U}_h \frac{\partial f^0}{\partial C}) \right]. \quad (2.4)$$

Чтобы вычислить коэффициенты переноса для лоренцевской плазмы, нам нужно прежде всего решить уравнение (2.4) для  $\mathbf{f}^1$  и затем подставить полученный результат в формулы (6.8) из гл. 7 для диффузионной скорости электронов и потока тепла. [Поскольку вклад электронов в вязкость плазмы как целого почти всегда мал, мы не будем рассматривать коэффициент вязкости для электронов, зависящий, как это показывают соотношения (6.8) из гл. 7, от  $f_{eh}^2$ .]

Вначале мы вычислим электропроводность однородной стационарной плазмы при наличии постоянных электрического и магнитного полей. Поскольку в однородной слабо ионизованной плазме диффузионная скорость нейтральных частиц и вклад ионов в сумму, стоящую в правой части уравнения (2.4), пренебрежимо малы, мы можем опустить часть столкновительного члена в уравнении (2.4), содержащую  $\mathbf{U}_h$ . При этих условиях  $\mathbf{a}' = -e\mathbf{E}'/m_e$  [формула (6.15) из гл. 7], и уравнение (2.4) принимает вид

$$\frac{e}{m_e} \mathbf{E}' \frac{\partial f^0}{\partial C} + \frac{e}{m_e} \mathbf{B} \times \mathbf{f}^1 = \mathbf{f}^1 \sum_h v_{eh}^{(1)}. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) позволяет непосредственно выразить  $\mathbf{f}^1$  через  $f^0$ . Для этого введем «естественную» систему координат, определяющуюся тремя ортогональными векторами

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &\equiv (\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}, \\ \mathbf{E}'_{\perp} &\equiv \mathbf{E}' - \mathbf{E}'_{\parallel}, \\ \mathbf{b} \times \mathbf{E}' &. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь

$$\mathbf{b} \equiv \frac{\mathbf{B}}{B} \quad (2.7)$$

— единичный вектор в направлении магнитного поля. Тогда вектор  $\mathbf{f}^1$  можно записать через его компоненты по этим направлениям в виде

$$\mathbf{f}^1 = [f'_{\parallel} \mathbf{E}'_{\parallel} + f'_{\perp} \mathbf{E}'_{\perp} + f'_r (\mathbf{b} \times \mathbf{E}')] \frac{e}{m_e}; \quad (2.8)$$

введение здесь множителя  $e/m_e$  окажется удобным в дальнейшем. Нижние индексы  $\parallel$ ,  $\perp$  и  $r$  обозначают направления, параллельное и перпендикулярное магнитному полю, и «холловское» направле-

ние, перпендикулярное векторам  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}'$ . Коэффициенты  $f'_{\parallel}$ ,  $f'_{\perp}$  и  $f'_r$  можно найти, подставив выражение для  $\mathbf{f}^1$  в виде (2.8) в уравнение (2.5). Результат подстановки, умноженный на  $e/m_e$ , имеет вид

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp}) \frac{\partial f^0}{\partial C} + (\omega_e f'_{\perp} \mathbf{b} \times \mathbf{E}' - \omega_e f'_r \mathbf{E}'_{\perp}) &= \\ &= v_{eH} (f'_{\parallel} \mathbf{E}'_{\parallel} + f'_{\perp} \mathbf{E}'_{\perp} + f'_r \mathbf{b} \times \mathbf{E}'), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $\omega_e$  — электронная циклотронная частота, равная

$$\omega_e = \frac{eB}{m_e}, \quad (2.9)$$

$$v_{eH} = \sum_h v_{eh}^{(1)}. \quad (2.10)$$

Приравняв коэффициенты при трех ортогональных векторах, получим

$$\begin{aligned} f'_{\parallel} &= \frac{1}{v_{eH}} \frac{\partial f^0}{\partial C}, \\ v_{eH} f'_{\perp} + \omega_e f'_r &= \frac{\partial f^0}{\partial C}, \\ v_{eH} f'_r &= \omega_e f'_{\perp}. \end{aligned} \quad (2.11a)$$

Из последних двух соотношений следует, что величины  $f'_{\perp}$  и  $f'_r$  таковы:

$$\begin{aligned} f'_{\perp} &= \frac{v_{eH}}{v_{eH}^2 + \omega_e^2} \frac{\partial f^0}{\partial C}, \\ f'_r &= \frac{\omega_e}{v_{eH}^2 + \omega_e^2} \frac{\partial f^0}{\partial C}. \end{aligned} \quad (2.11b)$$

Пользуясь этими выражениями, а также формулой (6.8) из гл. 7 для диффузионной скорости электронов  $\mathbf{U}_e$ , мы можем теперь вычислить вклад электронов  $\mathbf{J}_e$  в вектор плотности тока  $\mathbf{J}$ . Таким образом, имеем

$$\mathbf{J}_e \equiv -en_e \mathbf{U}_e = -en_e \frac{4\pi}{3} \int_0^{\infty} C^3 \mathbf{f}^1 dC. \quad (2.12)$$

Как показано в гл. 4, § 3, ионная плотность тока всегда, кроме случая проскальзывания ионов в сильных магнитных полях, значительно меньше электронной, так что  $\mathbf{J} \approx \mathbf{J}_e$ . [Ионная плотность тока может также оказаться значительной в области неоднородности плазмы вблизи поверхности (гл. 3, § 6 и 7).] Таким образом, в широком диапазоне условий для вычисления полной электропроводности слабо ионизованной плазмы нужно рассматривать только при-

веденное выше решение уравнения Больцмана для электронов, которое математически не связано с уравнениями Больцмана для других компонент плазмы. Результаты подстановки выражений (2.8) и (2.11) в формулу (2.12) для  $\mathbf{J}_e$  можно представить в форме закона Ома [ср. с формулой (3.21а) из гл. 4]

$$\mathbf{J}_e = \sigma_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel} + \sigma_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \sigma_H \mathbf{b} \times \mathbf{E}. \quad (2.13)$$

Здесь  $\sigma_{\parallel}$ ,  $\sigma_{\perp}$  и  $\sigma_H$  — компоненты так называемого тензора электропроводности, которые даны выражениями

$$\sigma_{\parallel} = \frac{4\pi}{3} \frac{n_e e^2}{m_e} \int_0^{\infty} \frac{C^3}{v_{eH}} \left( -\frac{\partial f^0}{\partial C} \right) dC, \quad (2.14a)$$

$$\sigma_{\perp} = \frac{4\pi}{3} \frac{n_e e^2}{m_e} \int_0^{\infty} \frac{C^3 v_{eH}}{v_{eH}^2 + \omega_e^2} \left( -\frac{\partial f^0}{\partial C} \right) dC, \quad (2.14б)$$

$$\sigma_H = \frac{4\pi}{3} \frac{n_e e^2}{m_e} \int_0^{\infty} \frac{C^3 \omega_e}{v_{eH}^2 + \omega_e^2} \left( -\frac{\partial f^0}{\partial C} \right) dC. \quad (2.14в)$$

В отсутствие магнитного поля  $\omega_e = 0$  и компоненты электропроводности в продольном и поперечном направлениях  $\sigma_{\perp}$  и  $\sigma_{\parallel}$  равны. В этом случае плотность тока дается формулой

$$\mathbf{J}_e = \sigma_{\parallel} \mathbf{E}.$$

Таким образом, скалярная электропроводность совпадает с величиной  $\sigma_{\parallel}$  и в лоренцевском пределе имеет вид (2.14а).

При вычислении лоренцевской электропроводности по формулам (2.14) необходимо знать изотропную часть  $f^0$  функции распределения. Поскольку в формулах (2.11) функция  $\mathbf{f}^1$  теперь выражена через  $f^0$ , последнюю можно найти, пользуясь первым из уравнений, полученных с помощью разложения по декартовым тензорам [формула (6.39) из гл. 7]. В случае слабо ионизованной плазмы это уравнение принимает вид

$$-\frac{e}{3m_e} \mathbf{E}' \frac{d}{dC} (C^2 \mathbf{f}^1) = \sum_h \frac{m_e}{m_h} \frac{d}{dC} \left[ C^3 \left( f^0 + \frac{kT_h}{m_e} \frac{1}{C} \frac{df^0}{dC} \right) v_{eh}^{(1)} \right]. \quad (2.15)$$

Здесь мы опустили электрон-электронный столкновительный член  $C_e^h$ ,  $C_e^e$  как малый по сравнению со столкновительным членом  $C_e^h$ , учитываемым столкновения электронов с тяжелыми частицами. Аналогично тому как оценивается отношение (2.2) величин  $C_e^e$  и  $C_e^h$  [формула (3.6) следующего параграфа], получим, что величин  $C_e^e$  в уравнении (2.15) можно пренебречь при условии

$$\bar{v}_{ee} \ll \sum_h \frac{m_e}{m_h} \bar{v}_{eh}. \quad (2.16)$$

Ясно, что это условие является гораздо более строгим, чем условие (2.3) допустимости лоренцевского приближения при вычислении  $\mathbf{f}^1$ .

Чтобы решить уравнение (2.15) относительно  $f^0$ , нужно вначале найти величину  $\mathbf{E}' \cdot \mathbf{f}^1$ . Из соотношений (2.8) и (2.11) имеем

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{f}^1 = \frac{e}{m_e} (f_{\parallel}^1 E_{\parallel} + f_{\perp}^1 \mathbf{E}_{\perp}) = \frac{e}{m_e} \left( E_{\parallel}^2 + \frac{v_{eH}^2}{v_{eH}^2 + \omega_e^2} E_{\perp}^2 \right) \frac{1}{v_{eH}} \frac{df^0}{dC}.$$

Проводя с учетом этого результата интегрирование в уравнении (2.15) по  $C$ , получаем

$$\frac{df^0}{dC} = \sum_h \frac{(kT_h/m_h) v_{eh}^{(1)}}{(kT_h/m_h) v_{eh}^{(1)} + 1/3 (e^2/m_e^2) |E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2 v_{eH}^2 / (v_{eH}^2 + \omega_e^2)|} \frac{1}{v_{eH}} - \sum_h (m_e/m_h) v_{eh}^{(1)} C f^0, \quad (2.17)$$

где постоянная интегрирования взята равной нулю на том основании, что функция  $f^0$  и ее производная  $df^0/dC$  стремятся к нулю при  $C \rightarrow \infty$ . Формальное интегрирование выражения (2.17) приводит к следующему результату (в случае, когда температура одинакова для всех тяжелых частиц):

$$f^0(C) = f^0(0) \exp \left\{ - \int_0^C \frac{m_e C dC}{kT_h + 1/3 (e^2/m_e^2) v_{eH} [E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2 v_{eH}^2 / (v_{eH}^2 + \omega_e^2)]} \frac{1}{v_{eh}^{(1)} m_h} \right\}. \quad (2.18)$$

Постоянную интегрирования  $f^0(0)$  можно найти из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_e(C) d^3C = 4\pi \int_0^{\infty} f^0(C) C^2 dC = 1.$$

[Вклад в интеграл дают только те члены первой формулы (6.19) из гл. 7, которые содержат  $f^0$ .]

Если поле  $\mathbf{E}'$  достаточно слабое, то вторым членом в знаменателе выражения (2.18) для функции  $f^0$  можно пренебречь. В этом случае функция  $f^0$  представляет собой максвелловскую функцию с температурой электронов, равной температуре тяжелых частиц. В сильных полях электронная температура больше  $T_h$  и функция  $f^0$  не является в общем случае максвелловской.

Для точного вычисления лоренцевского распределения (2.18) и выражения для электропроводности (2.14) следует взять конкретное выражение для  $v_{eh}^{(1)}$  (см., напримр, [3, § 18.71 и 18.73]).

Вернемся теперь к уравнению (2.4) для  $\mathbf{f}^1$  и рассмотрим отдельно влияние диффузионной скорости тяжелых частиц, высокочастотных

электрических полей и пространственных градиентов на решения этого уравнения.

В случае однородной стационарной плазмы, сохранив ту часть столкновительного члена в уравнении (2.4), которая учитывает диффузионные скорости  $U_h$  тяжелых частиц, мы получим добавочный член вида

$$\sum_h v_{eh}^{(1)} U_h \frac{\partial f_0}{\partial C} \quad (2.19)$$

в правой части уравнения (2.5). Поскольку это уравнение линейно по  $f^1$ , его решение может быть записано в виде суммы полученных выше решений [(2.8) и (2.11)], зависящих от электрического поля, и решения уравнения

$$-\sum_n v_{eh}^{(1)} U_h \frac{\partial f_0}{\partial C} + \frac{e}{m_e} \mathbf{B} \times \mathbf{f}^1 = \mathbf{f}^1 \sum_h v_{eh}^{(1)}.$$

Проводя анализ так же, как в случае соотношений (2.8) и (2.11), получаем решение в виде

$$\mathbf{f}^1 = -\sum_h v_{eh}^{(1)} [f_1^1 (U_h)_\parallel + f_\perp^1 (U_h)_\perp + f_{\perp h}^1 \mathbf{b} \times U_h], \quad (2.20)$$

где

$$\begin{aligned} (U_h)_\parallel &\equiv (U_h \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}, \\ (U_h)_\perp &\equiv U_h - (U_h)_\parallel, \end{aligned}$$

а  $f_\parallel^1$ ,  $f_\perp^1$  и  $f_{\perp h}^1$  — величины, даваемые соотношениями (2.11). На основании этого результата и соотношения (2.12) для диффузионной скорости  $U_e$  электронов можно определить вклад в величину  $U_e$ , который возникает, если оставить  $U_h$  в столкновительном члене уравнения (2.4). Для конкретных компонент тяжелых частиц этот вклад по порядку величины равен

$$\begin{aligned} (U_e)_\parallel &\sim \frac{v_{eh}^{(1)}}{v_{eH}} (U_h)_\parallel, \\ (U_e)_\perp &\sim \frac{1}{1 + \beta_e^2} \frac{v_{eh}^{(1)}}{v_{eH}} (U_h)_\perp, \\ (U_e)_H &\sim \frac{\beta_e}{1 + \beta_e^2} \frac{v_{eh}^{(1)}}{v_{eH}} \mathbf{b} \times U_h, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где

$$\beta_e \sim \frac{\omega_e}{v_{eH}} \frac{v_{eh}^{(1)}}{v_{eH}}.$$

Пока диффузионные скорости тяжелых частиц малы, их влиянием можно пренебречь. Соответственно этому в наших дальнейших

вычисления мы должны опустить те части столкновительного члена  $C_{eh}$ , которые содержат  $U_h$ .

Рассмотрим теперь важный с технической точки зрения вопрос об отклике однородной слабо ионизованной плазмы на воздействие высокочастотного электрического поля (гл. 3, § 8). При этом мы исследуем также влияние постоянного магнитного поля. В случае когда высокочастотными изменениями плотности электронов можно пренебречь, уравнение (2.4) для  $f^1$  имеет вид

$$\frac{\partial f^1}{\partial t} - \frac{e}{m_e} \mathbf{E}' \frac{\partial f_0}{\partial C} - \frac{e}{m_e} \mathbf{B} \times \mathbf{f}^1 = -\mathbf{f}^1 \sum_h v_{eh}^{(1)}. \quad (2.22)$$

Электрическое поле теперь представляется в виде

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}' \operatorname{Re} e^{-i\omega t},$$

где  $f^2 = -1$ ,  $\mathbf{E}^0$  — постоянное поле,  $\mathbf{E}^1$  — (действительная) амплитуда компоненты электрического поля, осциллирующего с частотой  $\omega$ . В соответствии с нашим предыдущим решением (2.18) для  $f^0$  в уравнении (2.22) можно пренебречь изменением функции  $f^0$  во времени, если  $\mathbf{E}^1$  достаточно мало. Тогда полученные нами выше решения (2.8) и (2.11) применимы к той части величины  $\mathbf{f}^1$ , которая связана с постоянным полем  $\mathbf{E}^0$ , и соответствующая плотность тока дается, как и ранее, соотношениями (2.13) и (2.14). Дополнительный эффект высокочастотного поля можно получить из решения уравнения (2.22), если заменить в нем  $\mathbf{E}'$  величиной

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}^1 \operatorname{Re} e^{-i\omega t}. \quad (2.23)$$

Найденную таким образом высокочастотную часть  $f^1$  запишем в виде

$$\mathbf{f}^1 = \operatorname{Re} \{ (\tilde{f}_\parallel \mathbf{E}_\parallel + \tilde{f}_\perp \mathbf{E}_\perp + \tilde{f}_{\perp h} \mathbf{b} \times \mathbf{E}^1) \} \frac{e^{-i\omega t}}{m_e}, \quad (2.24)$$

где  $\mathbf{E}_\parallel \equiv (\mathbf{E}^1 \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}$  и  $\mathbf{E}_\perp \equiv \mathbf{E}^1 - \mathbf{E}_\parallel$ . Комплексные коэффициенты  $\tilde{f}_\parallel$ ,  $\tilde{f}_\perp$  и  $\tilde{f}_{\perp h}$  могут быть найдены путем подстановки соотношений (2.23) и (2.24) в уравнение (2.22). Приравняв коэффициенты перед тремя ортогональными векторами  $\mathbf{E}_\parallel$ ,  $\mathbf{E}_\perp$  и  $\mathbf{b} \times \mathbf{E}^1$ , получаем

$$\begin{aligned} (-i\omega + v_{eH}) \tilde{f}_\parallel &= \frac{\partial f_0}{\partial C}, \\ (-i\omega + v_{eH}) \tilde{f}_\perp + \omega_e \tilde{f}_\perp &= \frac{\partial f_0}{\partial C}, \\ (-i\omega + v_{eH}) \tilde{f}_{\perp h} &= \omega_e \tilde{f}_{\perp h}. \end{aligned}$$

Здесь снова введена полная частота столкновений  $v_{eH} \equiv \sum_h v_{eh}^{(1)}$ . Решения предыдущих уравнений для трех компонент функции  $f^1$

могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\parallel} &= \frac{v_{eH} + i\omega}{v_{eH}^2 + \omega^2} \frac{\partial f_0^0}{\partial C}, \\ \tilde{f}_{\perp} &= \frac{\omega_e}{(v_{eH} - i\omega)^2 + \omega_e^2} \frac{\partial f_0^0}{\partial C} = \\ &= \frac{-i}{2} \left[ \frac{1}{v_{eH} - i(\omega + \omega_e)} - \frac{1}{v_{eH} - i(\omega - \omega_e)} \right] \frac{\partial f_0^0}{\partial C} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(\omega + \omega_e) - iv_{eH}}{v_{eH}^2 + (\omega + \omega_e)^2} - \frac{(\omega - \omega_e) - iv_{eH}}{v_{eH}^2 + (\omega - \omega_e)^2} \right] \frac{\partial f_0^0}{\partial C}, \quad (2.25) \\ \tilde{f}_{\perp} &= \frac{v_{eH} - i\omega}{\omega_e} \tilde{f}_{\parallel} = \frac{1}{2} \left[ \frac{v_{eH} + i(\omega + \omega_e)}{v_{eH}^2 + (\omega + \omega_e)^2} + \frac{v_{eH} + i(\omega - \omega_e)}{v_{eH}^2 + (\omega - \omega_e)^2} \right] \frac{\partial f_0^0}{\partial C}. \end{aligned}$$

По причинам, которые будут вскоре ясны, окончательные выражения для  $\tilde{f}_{\perp}$  и  $\tilde{f}_{\parallel}$  записаны в форме выражений (2.11).

На основании соотношения (2.12) для  $\mathbf{J}_e$  плотность тока, связанную с высокочастотным полем, можно выразить через компоненты комплексной электропроводности  $\tilde{\sigma}_{\parallel}$ ,  $\sigma_{\perp}$  и  $\tilde{\sigma}_{\perp}$ :

$$\mathbf{J}_e = \text{Re} \{ (\tilde{\sigma}_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel} + \tilde{\sigma}_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \tilde{\sigma}_{\perp} \mathbf{b} \times \mathbf{E}_{\perp}) e^{-i\omega t} \}. \quad (2.26)$$

Так, например, действительной частью величины  $\tilde{\sigma}_{\parallel}$  определяется компонента плотности тока, находящаяся в фазе с электрическим полем, а мнимой частью — компонента, находящаяся с ним в противофазе. Вообще говоря, полная плотность тока равна сумме плотностей тока, даваемых формулами (2.26) и (2.13).

Из сравнения соотношений (2.25) и (2.11) следует, что компоненты комплексной электропроводности можно записать через компоненты электропроводности на постоянном токе (2.14) следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\parallel} &= \sigma_{\perp}(\omega) + i\sigma_{\parallel}(\omega), \\ \tilde{\sigma}_{\perp} &= \frac{1}{2} \{ \sigma_{\perp}(\omega + \omega_e) + \sigma_{\perp}(\omega - \omega_e) + i [ \sigma_{\parallel}(\omega + \omega_e) + \sigma_{\parallel}(\omega - \omega_e) ] \}, \quad (2.27) \\ \tilde{\sigma}_{\parallel} &= \frac{1}{2} \{ \sigma_{\parallel}(\omega + \omega_e) - \sigma_{\parallel}(\omega - \omega_e) - i [ \sigma_{\perp}(\omega + \omega_e) - \sigma_{\perp}(\omega - \omega_e) ] \}. \end{aligned}$$

Здесь, например,  $\sigma_{\perp}(\omega + \omega_e)$  есть величина  $\sigma_{\perp}$ , даваемая формулой (2.146), в которой частота  $\omega_e$  заменена частотой  $\omega + \omega_e$ . Аналогичный смысл имеют и другие члены соотношений (2.27). Следовательно, чтобы найти плотность тока при одновременном воздействии постоянного и высокочастотного электрических полей и в присутствии постоянного магнитного поля, необходимо только вычислить зависимость  $\sigma_{\perp}$  и  $\sigma_{\parallel}$  от величины  $\omega_e$  по формулам (2.146) и (2.14в). (Как мы уже видели, величина  $\sigma_{\parallel}$  равна величине  $\sigma_{\perp}$  при  $\omega_e = 0$ .)

В действительности оказывается, что когда нужно учитывать электрон-электронные столкновения, то и для частично ионизованной и для полностью ионизованной плазмы справедливы полученные результаты вида (2.27), хотя величины  $\sigma_{\perp}$  и  $\sigma_{\parallel}$  должны быть изменены по сравнению с теми, которые дают соотношения (2.14). Для получения более точного вида дисперсионного соотношения (8.5а) из гл. 3, описывающего распространение электромагнитных волн, вместо соотношения (8.4б) из гл. 3 можно взять выражение (2.2б) в пределе  $\mathbf{V} = 0$ , а именно

$$\mathbf{J}_e = \text{Re} \tilde{\sigma}_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel} e^{-i\omega t}.$$

Рассмотрим теперь вышеприведенные пространственных градиентов. Как и раньше, проведем анализ этих эффектов отдельно, для чего запишем уравнение (2.4) для  $\mathbf{f}^1$  в виде

$$-\mathbf{C} \nabla (n_e f^0) + \frac{e}{m_e} \mathbf{V} \times n_e \mathbf{f}^1 = n_e v_{eH} \mathbf{f}^1. \quad (2.28)$$

По аналогии с предыдущими результатами [см., например, формулы (2.8) и (2.11)] решение уравнения (2.28) имеет вид

$$\mathbf{f}^1 = f_{\parallel} \nabla_{\parallel} \ln (n_e f^0) + f_{\perp} \nabla_{\perp} \ln (n_e f^0) + f_{\perp}^{\perp} \mathbf{b} \times \nabla \ln (n_e f^0), \quad (2.29)$$

где

$$\begin{aligned} f_{\parallel} &= -\frac{1}{v_{eH}} C f^0, \\ f_{\perp} &= -\frac{v_{eH}}{v_{eH}^2 + \omega_e^2} C f^0, \\ f_{\perp}^{\perp} &= -\frac{\omega_e}{v_{eH}^2 + \omega_e^2} C f^0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

В уравнение (2.28) входит пока что не определенный нами вектор

$$\nabla \ln (n_e f^0) = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \ln (n_e f^0),$$

который можно рассматривать как «движущую силу», аналогичную электрическому полю в предыдущих вычислениях. Параллельная и перпендикулярная магнитному полю компоненты этого вектора обозначены в соотношениях (2.29) и (2.30) символами  $\nabla_{\parallel}$  и  $\nabla_{\perp}$ .

С помощью решений (2.29) и (2.30) мы можем теперь вычислить электронный поток тепла, обусловленный пространственным градиентом  $\nabla \ln (n_e f^0)$ . Вектор потока тепла выражается через  $\mathbf{f}^1$  соотношением [формула (6.8) из гл. 7]

$$\mathbf{q}_e = \frac{2\pi}{3} n_e n_e \int_0^{\infty} C^5 \mathbf{f}^{(1)} dC. \quad (2.31)$$

Хотя было бы нетрудно выразить вектор  $\mathbf{q}_e$  через  $\nabla \ln (n_e f^0)$ , мы рассмотрим только частный случай, когда функция  $f^0$  является

максвелловской с температурой электронов  $T_e$ . Продифференцировав функцию  $f_M$ , даваемую формулой (2.2) из гл. 7, получим

$$\begin{aligned} \nabla \ln (n_e f^0) &= \nabla \ln (n_e f_M) = \nabla \ln p_e - \nabla \ln T_e + \nabla \ln f_M = \\ &= \nabla \ln p_e + \left( \frac{m_e C^2}{2kT_e} - \frac{5}{2} \right) \nabla \ln T_e. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Здесь мы ввели давление электронов  $p_e = n_e k T_e$ , так что наш результат представлен в общепринятой форме.

Теперь подставим функцию  $f^1$ , даваемую выражениями (2.29), (2.30) и (2.32), в формулу (2.31) и найдем выражение для вектора  $\mathbf{q}_e$ . Пока что мы будем рассматривать только влияние температурных градиентов и опустим член  $\nabla \ln p_e$  в соотношении (2.32). Тогда рассматриваемую часть электронного потока тепла можно представить в виде

$$\mathbf{q}_e = -\hat{\lambda}_{\parallel} \nabla_{\parallel} T_e - \hat{\lambda}_{\perp} \nabla_{\perp} T_e - \hat{\lambda}_{\perp} \mathbf{b} \times \nabla T_e, \quad (2.33)$$

где коэффициенты электронной теплопроводности даются выражениями

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{\parallel} &= \frac{2\pi}{3} \frac{n_e m_e}{T_e} \int_0^{\infty} \frac{1}{v_{eH}} \left( \frac{m_e C^2}{2kT_e} - \frac{5}{2} \right) C^0 f_M dC, \\ \hat{\lambda}_{\perp} &= \frac{2\pi}{3} \frac{n_e m_e}{T_e} \int_0^{\infty} \frac{v_{eH}}{v_{eH}^2 + \omega_e^2} \left( \frac{m_e C^2}{2kT_e} - \frac{5}{2} \right) C^0 f_M dC, \\ \hat{\lambda}_H &= \frac{2\pi}{3} \frac{n_e m_e}{T_e} \int_0^{\infty} \frac{\omega_e}{v_{eH}^2 + \omega_e^2} \left( \frac{m_e C^2}{2kT_e} - \frac{5}{2} \right) C^0 f_M dC. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Из полученных результатов видно, что, как и в случае электропроводности, магнитное поле уменьшает поперечную теплопроводность.

Выше мы рассмотрели отдельно диффузию, а следовательно, и ток, обусловленные электрическим полем, и поток тепла, обусловленный температурным градиентом. Поскольку уравнение (2.4) линейно относительно  $f^1$ , то, как уже отмечалось, действие различных движущих сил аддитивно. Кроме того, поскольку плотность тока  $\mathbf{J}_e$  и вектор потока тепла  $\mathbf{q}_e$  зависят от одной и той же функции  $f^1$ , сами вынуждающие силы тоже аддитивны. Согласно формуле (2.31), это означает, что часть (2.8) функции  $f^1$ , связанная с электрическим полем, вносит вклад и в поток тепла. Аналогично из соотношения (2.12) следует, что часть (2.29) функции  $f^1$ , связанная с градиентом температуры, вносит вклад также и в диффузию. Такое явление, которое трудно объяснить на основе представления о средней длине свободного пробега, называется термодиффузией.

Все сказанное нетрудно обобщить так, чтобы учесть одновременное действие полей, пространственных градиентов и термодиффузии. Мы будем предполагать, что функция  $f^0$  — максвелловская [формула (2.2) из гл. 7] с температурой  $T_e$ , так что в соотношениях (2.11) и (2.14) при дифференцировании будем иметь  $-\partial^{(0)}/\partial C = m_e C^0 f_M / k T_e$ . Это условие позволит нам прямо применить наши результаты к частично ионизованной плазме (§ 4).

Если не учитывать здесь влияние высокочастотных полей [и влияния части столкновительного члена в уравнении (2.4), содержащего  $\mathbf{U}_H$ ], то соответствующее решение уравнения (2.4) может быть записано в виде (см. задачу 2.3)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= C f_M \left[ A_1 \nabla_{\parallel} \ln T_e + A_2 \nabla_{\perp} \ln T_e + A_3 \mathbf{b} \times \nabla \ln T_e - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e}{kT_e} (D_1 \mathcal{E}_{\parallel} + D_2 \mathcal{E}_{\perp} + D_3 \mathbf{b} \times \mathcal{E}) \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Здесь  $\mathcal{E}$  — обобщенное электрическое поле:

$$\mathcal{E} \equiv \mathbf{E}' + \frac{\nabla p_e}{en_e} + \frac{m_e}{e} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \approx \mathbf{E}' + \frac{\nabla p_e}{en_e}, \quad (2.36)$$

в которое входит член  $\nabla p_e$  уравнения (2.32) и член  $D\mathbf{u}/Dt$  ускорения  $\mathbf{a}'$  в формуле (2.4) [формула (6.15) из гл. 7]. Приближенное равенство в формуле (2.36) следует из того, что последний член в выражении для  $\mathcal{E}$  почти всегда пренебрежимо мал.

Коэффициенты  $A_1, A_2, A_3$  и  $D_1, D_2, D_3$  в формуле (2.35) даются выражениями [формулы (2.11) и (2.30)]

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{v_{eH}} \left( \frac{m_e C^2}{2kT_e} - \frac{5}{2} \right), \\ A_2 &= -\frac{v_{eH}}{v_{eH}^2 + \omega_e^2} \left( \frac{m_e C^2}{2kT_e} - \frac{5}{2} \right), \\ A_3 &= -\frac{\omega_e}{v_{eH}^2 + \omega_e^2} \left( \frac{m_e C^2}{2kT_e} - \frac{5}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$D_1 = \frac{1}{v_{eH}},$$

$$D_2 = \frac{v_{eH}}{v_{eH}^2 + \omega_e^2},$$

$$D_3 = \frac{\omega_e}{v_{eH}^2 + \omega_e^2}.$$

Подставляя выражение (2.35) для  $f^1$  с коэффициентами (2.37) в формулы (2.31) и (2.12) для  $\mathbf{q}_e$  и  $\mathbf{J}_e$ , получаем следующие выражения

для векторов электронного потока тепла и плотности тока:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_e = & -\hat{\lambda}_{\parallel} \nabla_{\parallel} T_e - \hat{\lambda}_{\perp} \nabla_{\perp} T_e - \hat{\lambda}_H \mathbf{b} \times \nabla T_e - \\ & - T_e \left( \varphi_{\parallel} + \frac{5}{2} \frac{k}{e} \sigma_{\parallel} \right) \mathcal{E}_{\parallel} - T_e \left( \varphi_{\perp} + \frac{5}{2} \frac{k}{e} \sigma_{\perp} \right) \mathcal{E}_{\perp} - \\ & - T_e \left( \varphi_H + \frac{5}{2} \frac{k}{e} \sigma_H \right) \mathbf{b} \times \mathcal{E}, \quad (2.38) \end{aligned}$$

$$\mathbf{J}_e = \sigma_{\parallel} \mathcal{E}_{\parallel} + \sigma_{\perp} \mathcal{E}_{\perp} + \sigma_H \mathbf{b} \times \mathcal{E} + \varphi_{\parallel} \nabla_{\parallel} T_e + \varphi_{\perp} \nabla_{\perp} T_e + \varphi_H \mathbf{b} \times \nabla T_e.$$

Коэффициенты теплопроводности и электропроводности электронов  $\hat{\lambda}$  и  $\sigma$  в соотношениях (2.38) даются, как и раньше, соотношениями (2.34) и (2.14) с той лишь разницей, что в соотношениях (2.14) производная  $-\partial^n/\partial C$  должна быть теперь заменена величиной  $m_e C f_M / k T_e$ . Коэффициенты термодиффузии  $\varphi_{\parallel}$ ,  $\varphi_{\perp}$ ,  $\varphi_H$  равны

$$\begin{aligned} \varphi_{\parallel} = & \frac{4\pi}{3} \frac{en_e}{T_e} \int_0^{\infty} \frac{1}{v_{eH}} \left( \frac{m_e C^0}{2kT_e} - \frac{5}{2} \right) C^* f_M dC, \\ \varphi_{\perp} = & \frac{4\pi}{3} \frac{en_e}{T_e} \int_0^{\infty} \frac{v_{eH}}{v_{eH}^2 + \omega_e^2} \left( \frac{m_e C^2}{2kT_e} - \frac{5}{2} \right) C^* f_M dC, \\ \varphi_H = & \frac{4\pi}{3} \frac{en_e}{T_e} \int_0^{\infty} \frac{\omega_e}{v_{eH}^2 + \omega_e^2} \left( \frac{m_e C^2}{2kT_e} - \frac{5}{2} \right) C^* f_M dC. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Как нетрудно видеть, коэффициенты термодиффузии обращаются в нуль, если частота  $v_{eH}$  не зависит от  $C$ . Если же частота  $v_{eH}$  монотонно увеличивается с ростом  $C$ , то коэффициенты  $\varphi_{\parallel}$  и  $\varphi_H$  отрицательны, а если она монотонно уменьшается с ростом  $C$ , то они положительны. Если частота  $v_{eH}$  монотонно меняется при изменении  $C$ , то в слабых магнитных полях коэффициент  $\varphi_{\perp}$  ведет себя так же, как  $\varphi_{\parallel}$  и  $\varphi_H$ . Но в достаточно сильных магнитных полях знак коэффициента  $\varphi_{\perp}$  будет противоположным знаку двух других коэффициентов.

Может показаться, что для учета термодиффузии необходимы два новых набора коэффициентов: один, связывающий величины  $\mathbf{q}_e$  и  $\mathcal{E}$ , другой — величины  $\mathbf{J}_e$  и  $\nabla T_e$ . Однако прямое вычисление величин  $\mathbf{q}_e$  и  $\mathbf{J}_e$  из соотношений (2.35) и (2.37) показывает, что оказывается достаточно одного набора коэффициентов термодиффузии (2.39). Отметим, что мы обозначаем коэффициент термодиффузии символом  $\hat{\lambda}$ , а не просто  $\lambda$ , чтобы отличать используемую нами величину  $\mathbf{q}_e$ , выраженную через  $\nabla T_e$  и  $\mathcal{E}$ , от обычного ее представления через величины  $\nabla T_e$  и  $\mathbf{J}_e$ . Об этом различии подробнее будет сказано в § 4.

Мы записываем величины  $\mathbf{q}_e$  и  $\mathbf{J}_e$  в виде суммы векторов со скалярными коэффициентами, такими, как  $\sigma_{\parallel}$ ,  $\sigma_{\perp}$  и  $\sigma_H$ . Но можно вве-

сти тензорные коэффициенты, и тогда величины  $\mathbf{q}_e$  и  $\mathbf{J}_e$  запишутся в более компактной форме, а именно

$$\begin{aligned} q_{e\alpha} = & -\hat{\lambda}_{\alpha\beta} \frac{\partial T_e}{\partial X_{\beta}} - T_e \left( \varphi_{\alpha\beta} + \frac{5}{2} \frac{k}{e} \sigma_{\alpha\beta} \right) \mathcal{E}_{\beta}, \\ J_{e\alpha} = & \sigma_{\alpha\beta} \mathcal{E}_{\beta} + \varphi_{\alpha\beta} \frac{\partial T_e}{\partial X_{\beta}}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Если выбрать систему координат (фиг. 1), ось  $x_3$  которой параллельна вектору  $\mathbf{b}$  (направление вектора  $\mathcal{E}$  произвольно), то тензор  $\sigma_{\alpha\beta}$  можно представить в виде матрицы

$$\{\sigma_{\alpha\beta}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{\perp} & -\sigma_H & 0 \\ \sigma_H & \sigma_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\parallel} \end{Bmatrix}. \quad (2.41)$$

Здесь индекс  $\alpha$  — номер строки матрицы, а индекс  $\beta$  — номер столбца. Аналогичные соотношения могут быть написаны для  $\hat{\lambda}_{\alpha\beta}$  и  $\varphi_{\alpha\beta}$  (см. задачу 2.4).

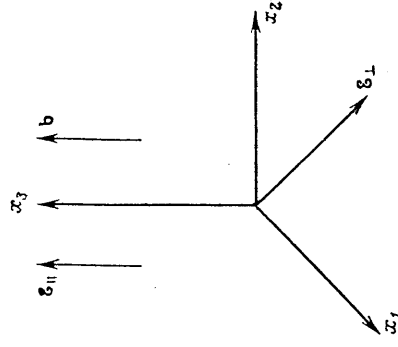
Как отмечалось выше, результаты, полученные в данном параграфе, ценны не только потому, что они прямо применимы к слабо ионизованной плазме, но и потому, что они качественно справедливы и в случае частично ионизованной плазмы. Прежде чем перейти к изложению теории частично ионизованной плазмы, мы вначале найдем условия, при которых функция  $f^0$  является максвелловской.

**Задача 2.1.** Найдите упрощенные выражения для различных коэффициентов переноса (2.14), (2.34) и (2.39) в случае, когда величина  $v_{eH}^0$  не зависит от  $C$ . Сравните ваши результаты с величинами  $\sigma$ , полученными методом среднего свободного пробега [формулы (13.76) из гл. 2 и (3.11) из гл. 11].

**Задача 2.2.** 1. Исходя из выражения (2.20), найдите зависимость функции  $f^1$  от диффузионных скоростей тяжелых частиц.

2. Пользуясь этим результатом, выразите соответствующий вклад в скорость  $U_e$  через интегралы, аналогичные по форме интегралам (2.14).

3. Упростите результаты, полученные в п. 2, применительно к случаю, когда каждая из частот  $v_{eH}^0$  не зависит от  $C$ . Взяв интегралы по частям, вы должны получить соотношения (2.21).



Фиг. 1. Система координат для тензора электропроводности  $\sigma_{\alpha\beta}$ .



**Задача 2.3.** Проведите промежуточные выкладки, опущенные при вычислении [формулы (2.35) — (2.39)] величин  $\mathbf{q}_e$ ,  $\mathbf{J}_e$  и различных коэффициентов переноса. Покажите, что достаточно ввести только один набор коэффициентов термодиффузии, а именно набор (2.39).

**Задача 2.4.** Выведите соотношения, аналогичные соотношению (2.41), для тензорных коэффициентов теплопроводности и термодиффузии  $\lambda_{\alpha\beta}$  и  $\Phi_{\alpha\beta}$ , определяемых соотношением (2.40).

### § 3. УСЛОВИЯ, ПРИ КОТОРЫХ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЯВЛЯЕТСЯ МАКСВЕЛЛОВСКОЙ

В данном параграфе мы рассмотрим случай, когда электрон-ионный столкновительный член  $S_{ee}^0$  является доминирующим членом в первом из уравнений, полученных разложением по декартовым тензорам, а именно в уравнении (6.39) из гл. 7, представляющем собой зависящее от скорости уравнение для энергии

$$\frac{D}{Dt} (n_e f^0) + \frac{C}{3} \nabla (n_e \mathbf{f}^1) - \frac{eh_e}{3m_e C^2} \mathbf{E}' \times \times \frac{\partial}{\partial C} (C^2 \mathbf{f}^1) - \frac{C}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} n_e \frac{\partial f^0}{\partial C} = \sum_h C_{eh}^0 + C_{ee}^0. \quad (3.1)$$

В этом случае уравнение (3.1), в котором величина  $C_{ee}^0$  дается выражением (6.32) из гл. 7, удовлетворяется при

$$C_{ee}^0 = n_e^2 \Gamma_{ee} \frac{1}{C^2} \left[ f^0 + \frac{C}{3} \frac{\partial f^0}{\partial C} (I_2^0 + J_2^0) \right] = 0, \quad (3.2)$$

где  $I_p^0$  и  $J_p^0$  — интегралы, даваемые формулами (6.33) из гл. 7. Это означает, что если все другие члены уравнения (3.1) малы по сравнению с отдельными частями члена  $C_{ee}^0$  [такими, как  $(n_e^2 \Gamma_{ee} / C^2) \partial(f^0) / \partial C$ ], то уравнение (3.1) удовлетворяется только в том случае, если сам столкновительный член  $C_{ee}^0$  равен нулю.

Как нетрудно убедиться прямой постановкой, решением уравнения (3.2) является максвелловская функция

$$f^0 = f_M = \left( \frac{m_e}{2\pi k T_e} \right)^{3/2} e^{-m_e C^2 / 2k T_e}. \quad (3.3)$$

Здесь  $T_e$  — электронная температура, определяющаяся проинтегрированным по скорости уравнением энергии для электронов, которое будет рассмотрено ниже в данном параграфе.

Чтобы установить условия применимости максвелловского распределения (3.3), мы выясним вначале, когда столкновительный член  $C_{ee}^0$  преобладает над другими столкновительными членами в уравнении (3.1). Поскольку мы будем использовать функцию распределения вида (3.3) для вычисления коэффициентов переноса,

оценим, как и в предыдущем параграфе, порядок величины столкновительных членов для тепловых электронов. Из соотношений (3.2) и (6.33) гл. 7 следует, что каждое излагаемых столкновительного члена  $C_{ee}^0$  по порядку величины равно

$$C_{ee}^0 \sim n_e^2 \Gamma_{ee} (f^0)^2 \sim n_e v_{ee}^{(1)} f^0. \quad (3.4)$$

Здесь, как и в § 2, для тепловых электронов мы использовали соотношения  $f^0 \sim 1/C_e^3$  и  $v_{ee}^{(1)} \sim n_e \Gamma_{ee} / \sqrt{C_e^3}$ . Если температура тяжелых частиц  $T_h$  не слишком превышает  $T_e$ , то член

$$C_{eh}^0 = n_e \frac{m_e}{m_h} \frac{1}{C^2} \frac{\partial}{\partial C} \left[ C^3 \left( f^0 + \frac{k T_h}{m_e} \frac{1}{C} \frac{\partial f^0}{\partial C} \right) v_{eh}^{(1)} \right], \quad (3.5)$$

согласно формуле (6.26) из гл. 7, по порядку величины составляет

$$C_{eh}^0 \sim n_e \frac{m_e}{m_h} v_{eh}^{(1)} f^0. \quad (3.6)$$

Тогда для тепловых электронов имеем

$$\frac{C_{eh}^0}{C_{ee}^0} \sim \frac{m_e}{m_h} \frac{v_{eh}^{(1)}}{v_{ee}^{(1)}} \sim \frac{m_e}{m_h} \frac{\bar{v}_{eh}}{v_{ee}}; \quad (3.7)$$

здесь мы снова ввели средние частоты столкновений (2.2). [В данном случае в формулах (2.2) нужно положить  $f^0 = f_M$ .] Таким образом, если

$$\sum_h \frac{m_e}{m_h} \frac{\bar{v}_{eh}}{v_{ee}} \ll 1, \quad (3.8)$$

то в уравнении (3.1) можно пренебречь членом  $C_{eh}^0$  по сравнению с членом  $C_{ee}^0$ .

Поскольку частота электрон-ионных столкновений  $\bar{v}_{ei}$  того же порядка, что и  $v_{ee}$ , неравенство (3.8) для ионов всегда выполняется. Применительно к нейтральным частицам это неравенство можно считать условием, определяющим степень ионизации плазмы. Кроме того, поскольку отношение  $m_e/m_h$  мало, условие (3.8) будет выполняться только для умеренно ионизованной плазмы (индексом  $i$  обозначена нейтральная компонента). Для облегчения численных оценок, связанных с проверкой выполнения условия (3.8) в случае столкновений электронов с нейтральными частицами, удобны следующие приближенные формулы [формула (2.26)]:

$$\bar{v}_{ee} \approx 5 n_e T_e^{-3/2} \ln \Lambda \quad (\text{с}^{-1}),$$

$$\frac{m_e}{m_h} \frac{\bar{v}_{eh}}{v_{ee}} \approx \frac{8 \bar{Q}_{eh} T_e^2}{W_n \ln \Lambda} \frac{n_h}{n_e}. \quad (3.9)$$

Здесь  $\bar{Q}_{eh}$  — среднее сечение столкновения электрона с нейтральным атомом (в  $\text{см}^2$ ),  $W_n$  — молекулярный вес нейтральной компоненты,  $n_e$  — в  $\text{см}^{-3}$ ,  $T_e$  — в кельвинах.

Для оценки членов в левой части уравнения (3.1) определим точнее, какую плазму мы считаем *столкновительной*. Если  $\tau$  и  $L$  — характерные временной и пространственной масштабы, то мы будем считать плазму столкновительной в том случае, когда для электроного газа выполняются соотношения

$$\frac{1}{v_{ee}\tau} \ll 1, \quad (3.10a)$$

$$\frac{\bar{C}_e}{v_{ee}L} \ll 1. \quad (3.10b)$$

Если неравенства (3.10) выполнены, то с помощью соотношения (3.4) и условий  $f^1 \ll f^0$  и  $u \ll \bar{C}_e$  [формулы (6.7) и (6.38) из гл. 7] можно показать, что все члены в левой части уравнения (3.1) будут малы по сравнению с  $C_{ee}^0$ , за исключением, пожалуй, третьего члена, содержащего электрическое поле  $E'$ . Для оценки величины этого члена можно воспользоваться формулами (6.8) из гл. 7, и тогда мы получим, что

$$\frac{f^1}{f^0} \sim \frac{U_e}{\bar{C}_e}. \quad (3.11)$$

Следовательно, рассматриваемый член будет мал по сравнению с  $C_{ee}^0$ , если

$$\frac{e|U_e \cdot E'|}{m_e \bar{C}_e^2 v_{ee}} = \frac{|J_e \cdot E'|}{n_e m_e \bar{C}_e^2 v_{ee}} \ll 1. \quad (3.12)$$

С помощью неравенств (3.10) и приближенных соотношений между  $J_e$ ,  $\mathcal{E}$  и  $\nabla T_e$ , совпадающих по форме с результатами предыдущего параграфа, можно показать, что неравенство (3.12) выполняется в случае, когда

$$\left(\frac{U_e}{\bar{C}_e}\right)^2 \frac{\bar{v}_{eH}}{v_{ee}} \ll 1. \quad (3.13)$$

Из условий  $f^1 \ll f^0$  и (3.8) следует, что неравенство (3.12) выполняется при условии

$$\frac{e|E'|}{m_e \bar{C}_e v_{ee}} \ll 1,$$

а неравенство (3.13) — при условии

$$\left(\frac{U_e}{\bar{C}_e}\right)^2 \ll \left(\frac{m_e}{m_h}\right),$$

где  $(m_e/m_h)$  — среднее значение отношения масс. Правда, эти условия могут оказаться излишне жесткими.

Когда джоулево тепло, связанное с током электронов,  $J_e \cdot E'$  уравновешивается в проинтегрированном по скорости уравнении

энергии [формула (3.16)] главным образом потерями на упругие столкновения, для выполнения неравенства (3.12) достаточно лишь условия (3.8) (см. задачу 3.1). Отметим также, что неравенство (3.10a), в которое входит характерное время, не исключает из рассмотрения высокочастотных электрических полей. Но джоулево тепло, связанное с этими полями, должно удовлетворять неравенству (3.12). Условия (3.8) и (3.10) из гл. 8, (6.7) из гл. 7 и (3.12) или (3.13) из гл. 8 [и (6.38) из гл. 7] являются достаточными для того, чтобы член  $C_{ee}^0$  был доминирующим в уравнении (3.1) и, следовательно, чтобы функция  $f^0$  была максвелловской. В случае однородной плазмы в сильном электрическом поле этот вывод был численно проверен Виегасом и Кругером [26], которые изучали переход от лоренцевской функции распределения (§ 2) к максвелловской функции (3.3) при увеличении плотности электронов.

Когда функция  $f^0$  является максвелловской, температуру электронов можно определить из уравнения для энергии электронов. Уравнение же для энергии можно получить, взяв соответствующий момент [формула (3.10в) из гл. 7] уравнения Больцмана или, что эквивалентно, умножив уравнение (3.1), полученное разложением по декартовым тензорам, на  $\frac{1}{2} m_e C^2 4\pi C^2$  и проинтегрировав его по всем скоростям  $C$ . При таких вычислениях, в которых член  $C_{eh}^0$  берется в виде (3.5), используются упрощения столкновительных членов, связанные с малостью электронной массы. При этом член, описывающий столкновения с тяжелыми частицами, в уравнении для энергии при  $f^0 = f_M$  равен

$$\sum_h \int_0^\infty \frac{1}{2} m_e C^2 4\pi C^2 C_{eh}^0 dC = -n_e \sum_h \frac{3}{2} k (T_e - T_h) 2 \frac{m_e}{m_h} \bar{v}_{eh}, \quad (3.14)$$

где  $\bar{v}_{eh}$  — частота столкновений, даваемая выражением

$$\bar{v}_{eh} = \frac{2}{3} \int_0^\infty \frac{m_e C^2}{2kT_e} f_M v_{eh}^{(1)} 4\pi C^2 dC \quad (3.15)$$

[формула (2.2)]. Нетрудно видеть, что средняя энергия, теряемая электронами при одном столкновении с тяжелыми частицами, равна удвоенному произведению отношения масс  $m_e/m_h$  на разность средних энергий электронов и тяжелых частиц. Поэтому обмен энергией между электронами и тяжелыми частицами является слабым. Электрон-электронный столкновительный член в проинтегрированном по скоростям уравнении энергии обращается в нуль в соответствии с физическим требованием, чтобы полный обмен энергией внутри электронного газа в результате столкновений был равен нулю. Таким образом, хотя столкновительный член  $C_{ee}^0$  является доминирующим в уравнении (3.1) для фиксированной скорости  $C$ , в проинтегрированном по скоростям уравнении энергии вклад от

$\sigma_{\parallel e}$  равен нулю (при любых функциях  $f^0$ ), а другие члены должны быть оставлены.

Левая часть уравнения энергии дается формулой (3.10в) из гл. 7 в согласии с результатом, полученным из уравнения (3.1). Тогда уравнение для энергии электронов имеет вид

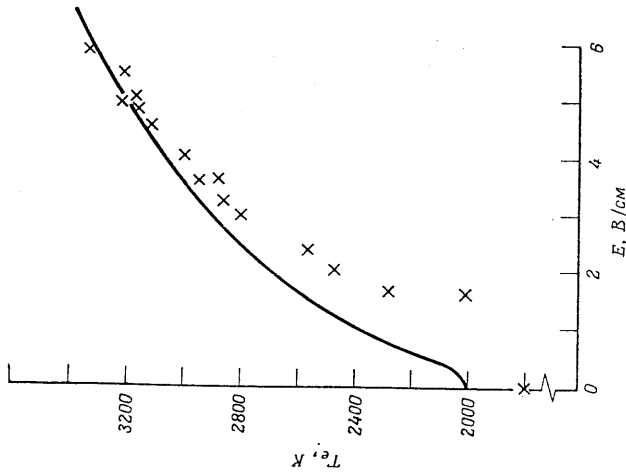
$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left( n_e \frac{3}{2} k T_e \right) + n_e \frac{5}{2} k T_e \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{q}_e - \mathbf{J}_e \cdot \mathbf{E}' = \\ = n_e \sum_h \frac{3}{2} k (T_h - T_e) 2 \frac{m_e}{m_h} \bar{v}_{eh}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где мы пренебрегли малым членом  $-m_e \mathbf{J}_e \cdot D\mathbf{u}/Dt$  и электронной вязкостью  $\tau_e$  по сравнению с  $p_e$ .

Кул и Зукоски [4] по данным спектроскопических измерений определили температуру однородной стационарной плазмы при различных значениях внешних электрических полей. В этом случае, когда магнитное поле отсутствует, уравнение (3.16) сводится к виду

$$\begin{aligned} n_e \sum_h \frac{3}{2} k (T_e - T_h) 2 \frac{m_e}{m_h} \bar{v}_{eh} = \\ = \mathbf{J}_e \cdot \mathbf{E} = \sigma_{\parallel} E^2, \end{aligned} \quad (3.17)$$

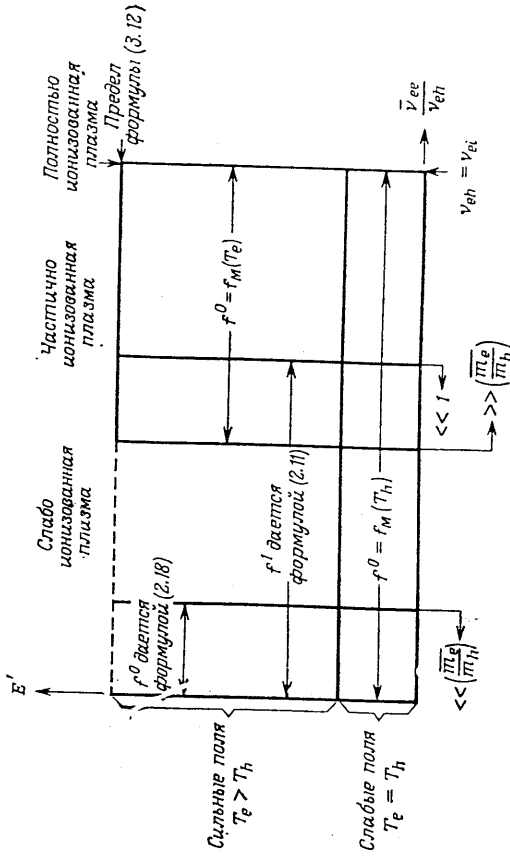
где для  $\mathbf{J}_e$  подставлено выражение  $\mathbf{J}_e = \sigma_{\parallel} \mathbf{E}$ . На фиг. 2 представлены измеренные значения  $T_e$  и теоретическая кривая, построенная по формуле (3.17), причем отношение  $\sigma_{\parallel}/n_e$  было вычислено по формуле Фроста (§ 7). Из графика видно, что при напряженностях электрического поля выше 3 В/см теория хорошо согласуется с экспериментом. При более же слабых полях потери на излучение из плазмы превышают джоулево тепло  $\sigma_{\parallel} E^2$ . Потери на излучение электронов за счет неупругих столкновений электронов и приводят к снижению температуры



Фиг. 2. Теоретическая кривая температуры электронов, вычисленная по формуле (3.17), и экспериментальные данные Кула и Зукоски [4] для аргона с присадкой калия при атмосферном давлении ( $n_K/n_{Ar} = 0,004$ ;  $T_{Ar} = 2000$  K).

столкновений электронов и приводят к снижению температуры

электронов  $T_e$  по сравнению со значением, даваемым формулой (3.17). В то же время потери на излучение приводят к тому, что величина  $T_e$ , измеренная спектроскопическим методом, оказывается заниженной. Выше мы не учитывали влияния неупругих столкновений. В § 8 показывается, что при наличии таких столкновений требуется дополнительное условие для того, чтобы выполнялось равенство  $f^0 = f_M$ , и что в этом случае в уравнение энергии (3.16) следует добавить дополнительный столкновительный член, учитывающий неупругие столкновения.



Фиг. 3. Условия, при которых функция распределения электронов является максвелловской [26].

В данном параграфе, имея в виду неравновесные условия, аналогичные рассматриваемым Кулом и Зукоски [4], мы подчеркивали роль электрон-электронных столкновений в установлении максвелловской функции распределения  $f^0$  с электронной температурой. Отметим, что в случае небольших отклонений от равновесия за счет столкновений электронов с тяжелыми частицами устанавливается максвелловское распределение с температурой  $T_e = T_h$ . Таким образом, даже при низких степенях ионизации, при которых условие (3.8)  $[\sum_h n_e \bar{v}_{eh}/m_h \bar{v}_{ee} \ll 1]$  не выполняется, функция  $f^0$  может быть все же максвелловской с температурой  $T_h$ , что следует из выражения (2.18) при малых значениях  $E'$ .

Основные выводы, полученные для однородной стационарной плазмы, роль движущей силы в которой играет электрическое поле, в неравновесном случае представлены в виде диаграммы на фиг. 3.

Здесь приблизительно показаны области применимости тех или иных результатов этого и предыдущего параграфов на графике, где по оси ординат откладывается  $\bar{v}_e/\bar{v}_{eh}$ , равное степени ионизации. Приближительная граница по оси ординат между областями слабых и сильных полей может быть найдена с помощью соотношения (3.17). Классическая теория коэффициентов переноса Чепмена — Энскога строго применима только в области слабых полей, где  $T_e = T_h$  и  $f^0 = f_M(T_h)$ . Но, как мы увидим в следующем параграфе, с помощью разложения по декартовым тензорам можно распространить строгую теорию коэффициентов переноса на всю область, где функция  $f^0$  является максвелловской.

**Задача 3.1.** Покажите, что условие (3.8) обеспечивает выполнение условия (3.12) во всех случаях, когда уравнение для энергии имеет вид (3.17).

**Задача 3.2.** Исходя из соотношения (3.5), вычислите столкновительный член (3.14) уравнения для энергии электронов и покажите, что уравнение (3.16) следует из уравнения (3.10в) из гл. 7.

**Задача 3.3.** На основании уравнения Саха [формула (10.5б) из гл. 2] определите приближительную область температур и давлений, в которой в случае равновесного частично ионизованного аргона выполняется неравенство (3.8).

#### § 4. ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННАЯ ПЛАЗМА

Теория коэффициентов переноса Чепмена — Энскога для смесей газов излагается в книгах [3, 10]. В этой теории предполагается, что в основе трансляционной неравновесности газа лежат такие механизмы, при которых отклонения распределения различных компонент от максвелловского малы. Это то условие, выдвигаемое на микроскопическом уровне, при котором неравновесные процессы вязкости, теплопроводности и диффузии можно характеризовать коэффициентами переноса. Следствием этого условия в классической теории оказывается, что температуры разных компонент в условиях неравновесности одинаковы. В предыдущем параграфе мы видели, что аналогичные ограничения должны быть наложены на степень неравновесности [формулы (3.10) и (3.12)] для того, чтобы изотропная часть функции распределения электронов в плазме была максвелловской. Но из-за малости электронной массы температура электронов, определяемая уравнением для энергии электронов, может сильно отличаться от температуры тяжелых частиц.

В данном параграфе мы рассмотрим неравновесный случай, к которому применимы условия, изложенные в § 3, и остановимся на решении для анизотропной части  $f^1$  функции распределения

электронов. Это решение позволяет выразить плотность тока электронов и вектор потока тепла при наличии магнитного поля через коэффициенты переноса. Последние можно вычислить теоретически с различной степенью приближения. Исходя из представления о средней длине свободного пробега, можно установить, что отношение коэффициента вязкости электронов  $\eta_e$ , зависящего от  $f^0$ , к коэффициенту вязкости тяжелых частиц  $\eta_h$  по порядку величины составляет

$$\frac{\eta_e}{\eta_h} \sim \frac{n_e}{n_h} \left( \frac{m_e T_e}{m_h T_h} \right)^{1/2}.$$

Отсюда следует, что вклад электронов в вязкость почти всегда пренебрежимо мал, а поэтому мы не будем вычислять величину  $\eta_e$ .

Как мы уже указывали, наш интерес к свойствам переноса электронов обуславливается особой ролью электронов в явлениях переноса в плазме (в частности, в присутствии магнитного поля) и специфическими упрощениями, которые оказываются возможными при изучении этих свойств. Например, во многих случаях ток в плазме переносится почти исключительно электронами. Кроме того, как мы видели в гл. 7, уравнение Больцмана для электронов может быть разделено с уравнениями Больцмана для тяжелых частиц, так что решение для электронных коэффициентов переноса может рассматриваться отдельно. О том, к чему приводит такое расщепление при вычислении коэффициентов переноса тяжелых частиц, будет кратко сказано в § 6.

Когда условия, приведенные в § 3, выполняются, изотропная часть  $f^0$  электронной функции распределения является максвелловской и функция  $f^1$  подчиняется уравнению (6.40) из гл. 7. Сейчас мы не будем рассматривать высокочастотные электрические поля и на основании условия  $U_h \ll U_e$  (§ 2) пренебрежем той частью столкновительного члена в уравнении (6.40) из гл. 7, которая содержит  $U_h$ . Тогда уравнение (6.40) из гл. 7 с опущенной производной по времени примет вид

$$f_M C \left[ \left( \frac{5}{2} - \mathcal{E}^2 \right) \nabla \ln T_e - \frac{e}{kT_e} \mathcal{E} \right] = -\omega_e \times f^1 + \nu_{eH} f^1 - \frac{1}{n_e} C_{ie}^1, \quad (4.1)$$

где  $C_{ie}^1$  теперь величина, даваемая формулой (6.36) из гл. 7 при  $f^0 = f_M$ . При записи уравнения (4.1) мы использовали соотношение [формула (2.32)]

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_e} \nabla n_e f_M &= C f_M \left[ \nabla \ln n_e + \left( \frac{m_e C^2}{2kT_e} - \frac{3}{2} \right) \nabla \ln T_e \right] = \\ &= C f_M \left[ \nabla \ln n_e + \left( \frac{m_e C^2}{2kT_e} - \frac{5}{2} \right) \nabla \ln T_e \right] \end{aligned}$$

и следующие обозначения:

$$\mathcal{E}^2 = \frac{m_e C^2}{2kT_e}, \quad (4.2)$$

$$\omega_e \equiv \frac{eB}{m_e}.$$

Кроме того, как и ранее,

$$\mathcal{E} = \mathbf{E}' + \frac{\nabla p_e}{en_e} + \frac{m_e}{e} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \approx \mathbf{E}' + \frac{\nabla p_e}{en_e}. \quad (4.3)$$

Как и в § 2, обобщенное электрическое поле  $\mathcal{E}$  содержит в члене  $\nabla p_e/en_e$  часть члена  $\nabla n_e f_M$ . Здесь тоже последним членом в выражении для  $\mathcal{E}$  можно пренебречь почти во всех случаях, представляющих практический интерес.

Уравнение (4.1) линейно относительно  $f^1$ , поскольку член  $C_{ee}^1$  — линейная функция величины  $f^1$ . Кроме того, члены, описывающие движущие силы  $\nabla \ln T_e$  и  $\mathcal{E}$ , в случае трансляционной неравновесности оказываются линейными и взаимно независимыми. В соответствии с этим решение уравнения (4.1) может быть записано в виде [формула (2.35)]

$$f^1 = f_M C \left[ A_1 \nabla_{\parallel} \ln T_e + A_2 \nabla_{\perp} \ln T_e + A_3 \mathbf{b} \times \nabla \ln T_e - \frac{e}{kT_e} (D_1 \mathcal{E}_{\parallel} + D_2 \mathcal{E}_{\perp} + D_3 \mathbf{b} \times \mathcal{E}) \right], \quad (4.4)$$

где для удобства в дальнейшем введен множитель  $-e/kT_e$ . Как и в § 2, индексами  $\parallel$  и  $\perp$  обозначены компоненты, параллельная и перпендикулярная магнитному полю. Уравнение для неизвестных скалярных функций скорости электронов  $A_1, A_2, A_3, D_1, D_2$  и  $D_3$  получается подстановкой выражения (4.4) в уравнение (4.1) и приравниванием коэффициентов при трех взаимно перпендикулярных компонентах  $(\ )_{\parallel}, (\ )_{\perp}$  и  $\mathbf{b} \times (\ )$  величин  $\nabla \ln T_e$  и  $\mathcal{E}$ . Пользуясь тем, что  $C_{ee}^1$  является линейной функцией  $f^1$ , получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} f_M C \left( \frac{5}{2} - \mathcal{E} \right)^2 &= + v_{eH} f_M C A_1 - C_{ee}^1 [f_M C A_1] \frac{1}{n_e}, \\ f_M C \left( \frac{5}{2} - \mathcal{E} \right)^2 &= \omega_e f_M C A_3 + v_{eH} f_M C A_2 - C_{ee}^1 [f_M C A_2] \frac{1}{n_e}, \\ 0 &= -\omega_e f_M C A_2 + v_{eH} f_M C A_3 - C_{ee}^1 [f_M C A_3] \frac{1}{n_e}, \\ f_M C &= + v_{eH} f_M C D_1 - C_{ee}^1 [f_M C D_1] \frac{1}{n_e}, \\ f_M C &= \omega_e f_M C D_3 + v_{eH} f_M C D_2 - C_{ee}^1 [f_M C D_2] \frac{1}{n_e}, \\ 0 &= -\omega_e f_M C D_2 + v_{eH} f_M C D_3 - C_{ee}^1 [f_M C D_3] \frac{1}{n_e}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь  $C_{ee}^1[\varphi]$  — линейная скалярная функция переменной  $\varphi$ , которая дается формулой (6.36) из гл. 7 для  $C_{ee}^1$  при замене функции  $f^0$  на  $f_M$  и функции  $f^1$  на  $\varphi$ . Именно:

$$\begin{aligned} C_{ee}^1[\varphi] &= n_e^2 \Gamma_{ee} \left[ 8\pi f_M \varphi + \frac{1}{15C^2} \frac{\partial f_M}{\partial C} (-3I_3^0 + 5I_1^0 + 2I_{-2}^0) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{5C} \frac{\partial^2 f_M}{\partial C^2} (I_3^0 + J_{-2}^0) + \frac{1}{3C^2} (-I_2^M + 3I_0^M + 2J_{-1}^M) \left( -\frac{\varphi}{C} + \frac{\partial \varphi}{\partial C} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{3C} (I_2^M + J_{-1}^M) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial C^2} \right], \quad (4.6) \end{aligned}$$

где

$$I_p^0 = \frac{4\pi}{C^p} \int_0^C C^{p+2} \varphi dC,$$

$$J_p^0 = \frac{4\pi}{C^p} \int_C^{\infty} C^{p+2} \varphi dC,$$

$$I_p^M = \frac{4\pi}{C^p} \int_0^C C^{p+2} f_M dC,$$

$$J_p^M = \frac{4\pi}{C^p} \int_C^{\infty} C^{p+2} f_M dC.$$

Нетрудно видеть [уравнения (4.5)], что в уравнениях для  $A_1$  и  $D_1$  не входит частота  $\omega_e$ , или, что то же, поле  $B$ , и что уравнения для  $A_2$  и  $D_2$  сводятся к уравнениям для  $A_1$  и  $D_1$  в случае, когда  $B = 0$ . Следовательно,  $A_1 = A_2$  ( $B = 0$ ) и  $D_1 = D_2$  ( $B = 0$ ). Поэтому можно отбрасывать лишь решения для  $A_2, A_3, D_2$  и  $D_3$ , а затем получить  $A_1$  и  $D_1$ , положив  $B = 0$  в решениях для  $A_2$  и  $D_2$ . Решение для указанных величин удобнее всего получить, введя комплексные переменные  $A$  и  $D$ :

$$\begin{aligned} A &\equiv A_2 + iA_3, \\ D &\equiv D_2 + iD_3, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где  $i^2 = -1$ . Тогда уравнения (4.5) принимают вид

$$f_M \mathcal{E} \left( \frac{5}{2} - \mathcal{E}^2 \right) = (v_{eH} - i\omega_e) f_M \mathcal{E} A - C_{ee}^1 [f_M \mathcal{E} A] \frac{1}{n_e}, \quad (4.8)$$

$$f_M \mathcal{E} = (v_{eH} - i\omega_e) f_M \mathcal{E} D - C_{ee}^1 [f_M \mathcal{E} D] \frac{1}{n_e}. \quad (4.9)$$

Решение, найденное в § 2 для лоренцевской плазмы, при  $f^0 = f_M$  может быть прямо получено из уравнений (4.8) и (4.9) приравниванием в них величины  $C_{ee}^1$  нулю.

Прежде чем переходить к отысканию решения уравнений (4.8) и (4.9) для  $A$  и  $D$ , посмотрим, к каким следствиям приведет использование соотношения вида (4.4) для  $\mathbf{f}^1$  в выражениях (2.12) и (2.31) для плотности тока электронов  $\mathbf{J}_e$  и потока тепла  $\mathbf{q}_e$ . Эти выражения имеют вид

$$\mathbf{J}_e = -en_e \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty C^3 \mathbf{f}^1 dC, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{q} = n_e m_e \frac{2\pi}{3} \int_0^\infty C^5 \mathbf{f}^1 dC = -\frac{5}{2} \frac{kT_e}{e} \mathbf{J}_e + n_e m_e \frac{2\pi}{3} \int_0^\infty \left( C^2 - \frac{5kT_e}{m_e} \right) C^3 \mathbf{f}^1 dC,$$

причем второе выражение для  $\mathbf{q}_e$  написано для упрощения дальнейших вычислений. На основании формулы (4.4) для  $\mathbf{f}^1$  можно выразить величины  $\mathbf{J}_e$  и  $\mathbf{q}_e$  прямо через коэффициенты переноса:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_e &= \sigma_{\parallel} \mathcal{E}_{\parallel} + \sigma_{\perp} \mathcal{E}_{\perp} + \sigma_H \mathbf{b} \times \mathcal{E} + \varphi_{\parallel} \nabla_{\parallel} T_e + \varphi_{\perp} \nabla_{\perp} T_e + \varphi_H \mathbf{b} \times \nabla T_e, \quad (4.11) \\ \mathbf{q}_e &= -\frac{5}{2} \frac{kT_e}{e} \mathbf{J}_e - \lambda_{\parallel} \nabla_{\parallel} T_e - \lambda_{\perp} \nabla_{\perp} T_e - \lambda_H \mathbf{b} \times \nabla T_e - \\ &\quad - T_e \varphi_{\parallel} \mathcal{E}_{\parallel} - T_e \varphi_{\perp} \mathcal{E}_{\perp} - T_e \varphi_H \mathbf{b} \times \mathcal{E}. \quad (4.12) \end{aligned}$$

Коэффициенты электропроводности  $\sigma$ , теплопроводности  $\lambda'$  и термодиффузии  $\varphi$  и  $\varphi'$  даются выражениями

$$\begin{aligned} \sigma_{\parallel} &= \frac{n_e e^2}{kT_e} \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty C^4 D_{1M} dC = \frac{n_e e^2}{m_e} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathcal{E}^4 D_{1e} \mathcal{E}^2 d\mathcal{E}, \\ \sigma_{\perp} &= \frac{n_e e^2}{m_e} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathcal{E}^4 D_{2e} \mathcal{E}^2 d\mathcal{E}, \\ \sigma_H &= \frac{n_e e^2}{m_e} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathcal{E}^4 D_{3e} \mathcal{E}^2 d\mathcal{E}, \\ \varphi_{\parallel} &= -\frac{n_e e k}{m_e} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathcal{E}^4 A_{1e} \mathcal{E}^2 d\mathcal{E}, \quad (4.13) \\ \varphi_{\perp} &= -\frac{n_e e k}{m_e} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathcal{E}^4 A_{2e} \mathcal{E}^2 d\mathcal{E}, \\ \varphi_H &= -\frac{n_e e k}{m_e} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathcal{E}^4 A_{3e} \mathcal{E}^2 d\mathcal{E}, \\ \lambda'_{\parallel} &= -\frac{n_e k^2 T_e}{m_e} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left( \mathcal{E}^2 - \frac{5}{2} \right) \mathcal{E}^4 A_{1e} \mathcal{E}^2 d\mathcal{E}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda'_{\perp} &= -\frac{n_e k^2 T_e}{m_e} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left( \mathcal{E}^2 - \frac{5}{2} \right) \mathcal{E}^4 A_{2e} \mathcal{E}^2 d\mathcal{E}, \\ \lambda'_{H} &= -\frac{n_e k^2 T_e}{m_e} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left( \mathcal{E}^2 - \frac{5}{2} \right) \mathcal{E}^4 A_{3e} \mathcal{E}^2 d\mathcal{E}, \\ \varphi'_{\parallel} &= \frac{n_e e k}{m_e} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left( \mathcal{E}^2 - \frac{5}{2} \right) \mathcal{E}^4 D_{1e} \mathcal{E}^2 d\mathcal{E}, \quad (4.13) \\ \varphi'_{\perp} &= \frac{n_e e k}{m_e} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left( \mathcal{E}^2 - \frac{5}{2} \right) \mathcal{E}^4 D_{2e} \mathcal{E}^2 d\mathcal{E}, \\ \varphi'_{H} &= \frac{n_e e k}{m_e} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left( \mathcal{E}^2 - \frac{5}{2} \right) \mathcal{E}^4 D_{3e} \mathcal{E}^2 d\mathcal{E}. \end{aligned}$$

Хотя выражения (4.13), все вместе взятые, сложны по форме, они просто получаются из уравнений (4.4) и (4.10). Как и в § 2, индекс  $H$  обозначает холловское направление, которое перпендикулярно магнитному полю и «движущей силе»  $\mathcal{E}$  или  $\nabla T_e$ . В дальнейшем будет показано, что коэффициенты термодиффузии  $\varphi$  и  $\varphi'$  идентичны, т. е.

$$\begin{aligned} \varphi_{\parallel} &= \varphi'_{\parallel}, \\ \varphi_{\perp} &= \varphi'_{\perp}, \\ \varphi_H &= \varphi'_H. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $\lambda'$  отличаются от обычных коэффициентов теплопроводности  $\lambda$ . Коэффициенты  $\lambda$  определяются так, что поток тепла пропорционален  $\lambda$ , когда плотность тока равна нулю. Через коэффициент  $\lambda$  уравнение (4.12) для потока тепла можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_e &= -\lambda_{\parallel} \nabla_{\parallel} T_e - \lambda_{\perp} \nabla_{\perp} T_e - \lambda_H \mathbf{b} \times \nabla T_e + \psi_{\parallel} \mathbf{J}_{e\parallel} + \\ &\quad + \psi_{\perp} \mathbf{J}_{e\perp} + \psi_H \mathbf{b} \times \mathbf{J}_e, \quad (4.14) \end{aligned}$$

где  $\psi$  — новые коэффициенты.

Коэффициенты  $\lambda$  и  $\psi$  можно найти с помощью соотношения (4.11). Они имеют вид [19]

$$\begin{aligned} \lambda_{\parallel} &= \lambda'_{\parallel} - T_e \varphi_{\parallel} / \sigma_{\parallel}, \\ \lambda_{\perp} &= \lambda'_{\perp} - T_e \frac{\sigma_{\perp} (\varphi_{\perp}^2 - \varphi_H^2) + 2\sigma_H \varphi_{\perp} \varphi_H}{\sigma_{\perp}^2 + \sigma_H^2}, \quad (4.15) \\ \lambda_H &= \lambda'_H - T_e \frac{\sigma_H (\varphi_H^2 - \varphi_{\perp}^2) + 2\sigma_{\perp} \varphi_{\perp} \varphi_H}{\sigma_{\perp}^2 + \sigma_H^2}, \end{aligned}$$

$$\psi_{\parallel} = -\frac{5}{2} \frac{kT_e}{e} T_e - \frac{\varphi_{\parallel}}{\sigma_{\parallel}},$$

$$\psi_{\perp} = -\frac{5}{2} \frac{kT_e}{e} T_e - \frac{\sigma_{\perp} \varphi_{\perp} + \sigma_H \varphi_H}{\sigma_{\perp}^2 + \sigma_H^2}, \quad (4.15)$$

$$\psi_H = -T_e \frac{\sigma_{\perp} \varphi_H - \sigma_H \varphi_{\perp}}{\sigma_{\perp}^2 + \sigma_H^2}.$$

Здесь использовано упоминавшееся выше равенство  $\varphi' = \varphi$ .

Можно также выразить поток тепла  $q_e$  прямо через  $\nabla T_e$  и  $\mathcal{E}$ , исключив  $J_e$  из выражения (4.12) с помощью соотношения (4.11). Таким выражением для  $q_e$  мы пользовались в § 2; коэффициенты при величине  $\nabla T_e$  в том выражении обозначены через  $\hat{\lambda}$  [формула (2.38)]. Выбор выражения для  $q_e$  в виде (4.12) объясняется тем, что для частично ионизованной плазмы легче всего вычислить коэффициенты  $\sigma$ ,  $\lambda'$  и  $\varphi$ , а когда известны эти величины, коэффициенты  $\lambda$  и  $\psi$  можно получить с помощью соотношений (4.15). В случае когда магнитное поле отсутствует, приведенные выражения для величин  $J_e$  и  $q_e$  упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} J_e &= \sigma_{\parallel} \mathcal{E} + \varphi_{\parallel} \nabla T_e, \\ q_e &= -\frac{5}{2} \frac{kT_e}{e} J_e - \lambda'_{\parallel} \nabla T_e - T_e \varphi_{\parallel} \mathcal{E} = \\ &= -\left( \lambda'_{\parallel} + \frac{5}{2} \frac{kT_e}{e} \varphi_{\parallel} \right) \nabla T_e - T_e \left( \varphi_{\parallel} + \frac{5}{2} \frac{k}{e} \sigma_{\parallel} \right) \mathcal{E}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

или

$$q_e = -\lambda_{\parallel} \nabla T_e + \psi_{\parallel} \mathcal{E}.$$

Итак, мы установили функциональную зависимость величин  $J_e$  и  $q_e$  от «движущих сил»  $\mathcal{E}$  и  $\nabla T_e$ . Вычислим теперь сами коэффициенты переноса. Хотя, как и в кинетической теории газовых смесей, решение для этих коэффициентов в замкнутом виде получить невозможно, можно получить приближенное решение с помощью разложения по полиномам Сонина. Полиномы Сонина  $S_m^{(n)}$  определяются следующим образом:

$$S_m^{(n)}[x] = \sum_{p=0, 1, 2, \dots}^n \frac{m!(m+n)!}{(m+p)! p! (n-p)!} (-x)^p. \quad (4.17a)$$

Например, в частных случаях  $n = 0$  и  $n = 1$  имеем

$$S_m^{(0)}[x] = 1, \quad (4.17b)$$

$$S_m^{(1)}[x] = m + 1 - x. \quad (4.17в)$$

Полиномы Сонина обладают свойством ортогональности

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-x} S_m^{(n)}[x] S_m^{(q)}[x] dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq q, \\ \frac{(m+n)!}{n!} & \text{при } n = q. \end{cases} \quad (4.18)$$

В этом соотношении под факториалом нецелого числа следует понимать  $\Gamma$ -функцию. В частности, если  $q$  — целое число, имеем

$$\left(\frac{q}{2}\right)! = \left(\frac{q}{2}\right) \left(\frac{q}{2} - 1\right) \dots \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}. \quad (4.19)$$

Чтобы найти приближенные решения уравнений (4.8) и (4.9) для величин  $A$  и  $D$ , напишем

$$A \approx A^{(\xi)} \equiv \sum_{r=1}^{\xi} \alpha_r^{(\xi)} S_{r/2}^{(\xi-1)} [\mathcal{E}^2], \quad (4.20)$$

$$D \approx D^{(\xi)} \equiv \sum_{r=1}^{\xi} \delta_r^{(\xi)} S_{r/2}^{(\xi-1)} [\mathcal{E}^2]. \quad (4.21)$$

Коэффициенты разложения  $\alpha_r^{(\xi)}$  и  $\delta_r^{(\xi)}$  зависят от порядка приближения  $\xi$ . Поскольку  $A$  и  $D$  — комплексные величины [формула (4.7)], коэффициенты  $\alpha_r^{(\xi)}$  и  $\delta_r^{(\xi)}$  также комплексны. Коэффициенты переноса  $\sigma$ ,  $\lambda'$  и  $\varphi$  можно выразить через коэффициенты разложения  $\alpha_r^{(\xi)}$  и  $\delta_r^{(\xi)}$ , подставив разложения (4.20) и (4.21) в соотношения (4.13). Пользуясь свойством ортогональности (4.18) и формулами (4.17), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\perp}^{(\xi)} + i\sigma_H^{(\xi)} &= \frac{n_e e^2}{m_e} \delta_1^{(\xi)}, \\ \varphi_{\perp}^{(\xi)} + i\varphi_H^{(\xi)} &= -\frac{n_e e k}{m_e} \alpha_1^{(\xi)}, \\ \lambda'_{\perp}^{(\xi)} + i\lambda'_H{}^{(\xi)} &= \frac{5n_e k^2 T_e}{2m_e} \alpha_2^{(\xi)}, \\ \varphi'_{\perp}^{(\xi)} + i\varphi'_H{}^{(\xi)} &= -\frac{5}{2} \frac{n_e e k}{m_e} \delta_2^{(\xi)}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

(Доказательство равенства  $\varphi' = \varphi$  основывается на этих соотношениях.) Поскольку  $A = A_2$  ( $B = 0$ ) и  $D_1 = D_2$  ( $B = 0$ ), мы также имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\parallel}^{(\xi)} &= \sigma_{\perp}^{(\xi)} \quad (B = 0), \\ \varphi_{\parallel}^{(\xi)} &= \varphi_{\perp}^{(\xi)} \quad (B = 0), \\ \lambda'_{\parallel}{}^{(\xi)} &= \lambda'_{\perp}{}^{(\xi)} \quad (B = 0), \\ \varphi'_{\parallel}{}^{(\xi)} &= \varphi'_{\perp}{}^{(\xi)} \quad (B = 0). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Коэффициенты разложения находятся из уравнений (4.8) и (4.9) для величин  $A$  и  $D$ . С помощью полиномов Сонина эти уравнения можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\frac{m_e}{2\pi k T_e}\right)^{3/2} e^{-\mathcal{E}^2} \mathcal{E} S_{3/2}^{(1)}[\mathcal{E}^2] &= (v_{eH} - i\omega_e) \mathcal{E} f_M A - C_{ee}^{-1} [\mathcal{E} f_M A] \frac{1}{n_e}, \\ \left(\frac{m_e}{2\pi k T_e}\right)^{3/2} e^{-\mathcal{E}^2} \mathcal{E} S_{3/2}^{(0)}[\mathcal{E}^2] &= (v_{eH} - i\omega_e) \mathcal{E} f_M D - C_{ee}^{-1} [\mathcal{E} f_M D] \frac{1}{n_e}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Приближенные решения уравнений (4.24) находятся из моментов этих уравнений, которые получаются подстановкой в эти уравнения разложений (4.20) и (4.21) для  $A$  и  $D$ , умножением на  $\mathcal{E}S_{3/2}^{(s-1)} [\mathcal{E}^2] 4\pi C^2 dC$  ( $s = 1, 2, 3, \dots, \xi$ ) и интегрированием по  $C$ . Интегрирование легко выполняется с учетом свойства ортогональности (4.18) и приводит к следующей системе алгебраических уравнений для коэффициентов разложения  $\alpha_r^{(\xi)}$  и  $\delta_r^{(\xi)}$ :

$$\sum_{r=1}^{\xi} \alpha_r^{(\xi)} a_{rs} = \begin{cases} \frac{15}{4} & \text{при } s = 2, \\ 0 & \text{при } s \neq 2, \end{cases} \quad (4.25)$$

$$\sum_{r=1}^{\xi} \delta_r^{(\xi)} a_{rs} = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{при } s = 1, \\ 0 & \text{при } s \neq 1. \end{cases} \quad (4.26)$$

Поскольку  $s = 1, 2, 3, \dots, \xi$ , уравнения (4.25) и (4.26) представляют собой фактически  $\xi$  уравнений для каждого из  $\xi$  неизвестных коэффициентов  $\alpha_r^{(\xi)}$  и  $\delta_r^{(\xi)}$ . Величины  $a_{rs}$  даются выражениями

$$a_{rs} \equiv -i\omega_e \frac{2 \left(r + \frac{1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi} (r-1)!} \delta_{rs} + a_{rs}^{(e)}, \quad (4.27)$$

$$a_{rs}^{(h)} \equiv \int_0^{\infty} \mathcal{E}^2 S_{3/2}^{(r-1)} [\mathcal{E}^2] S_{3/2}^{(s-1)} [\mathcal{E}^2] v_{eH} f_M 4\pi C^2 dC, \quad (4.28)$$

$$a_{rs}^{(e)} \equiv -\frac{1}{n_e} \int_0^{\infty} S_{3/2}^{(s-1)} [\mathcal{E}^2] \mathcal{E} C_{ee}^1 [f_M \mathcal{E} S_{3/2}^{(r-1)} [\mathcal{E}^2]] 4\pi C^2 dC, \quad (4.29)$$

где  $\delta_{rs}$  — дельта-функция Кронекера.

Определенные интегралы (4.29) для  $a_{rs}^{(e)}$  содержат только частоту электрон-электронных столкновений и, следовательно, могут быть сразу вычислены. Соответствующие вычисления были проведены несколькими авторами (см., например, [16]). Результаты вычисления можно представить в виде

$$a_{rs}^{(e)} = \frac{3\sqrt{2}}{4} v_{ee} a_{rs}^{(e)}, \quad (4.30)$$

где  $v_{ee}$  — средняя частота электрон-электронных столкновений, равная [формула (2.26)]

$$v_{ee} = n_e \frac{8\sqrt{\pi}}{3} \left(\frac{m_e}{kT_e}\right)^{3/2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e}\right)^2 \ln \Lambda. \quad (4.31)$$

Показано, что для величин  $a_{rs}^{(e)}$  выполняется тождество

$$-\sum_{r,s} \zeta^{r-1} \eta^{s-1} a_{rs} \equiv \frac{\zeta \eta}{(1-\zeta \eta)^2 (2-\zeta-\eta)^{3/2}}. \quad (4.32)$$

Это означает, что величины  $a_{rs}^{(e)}$  представляют собой коэффициенты разложения в ряд выражения, стоящего в правой части тождества

(4.32). В работе [5] эти величины вычислены до  $r = s = 12$ . Значения нескольких первых величин  $a_{rs}^{(e)}$  таковы:

$$a_{rs}^{(e)} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,75000 & 0,46875 \\ 0 & 0,75000 & 2,8125 & 2,41406 \\ 0 & 0,46875 & 2,41406 & 5,52441 \\ 0 & 0,27344 & 1,72852 & 4,96802 \\ & & & 9,13995 \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Эти величины вычислены на основе «обрезанного» кулоновского потенциала и поэтому применимы, когда  $\ln \Lambda \gg 1$  (гл. 7, § 4). При меньших значениях  $\ln \Lambda$  в работах [5, 6] даются поправки, основанные на унифицированной теории Кихара и Аона [13]. Но на практике поправки при меньших значениях  $\ln \Lambda$  гораздо проще найти, пользуясь правилом смеси Фроста (§ 7).

Коэффициенты разложения  $a_{rs}$  зависят от частоты столкновений  $v_{eH} = \sum_h v_{eh}^{(1)}$ , и их следует вычислять для конкретных плазменных

условий. Выражения для вкладов различных компонент в величину  $a_{rs}^{(h)}$ , отнесенные к концентрации  $n_h$ , идентичны более общим выражениям для коэффициентов разложения в приближении малости электронной массы, фигурирующих в теории Чепмена — Энского. Однако в данном случае динамика столкновения уже учтена в величине  $a_{rs}^{(h)}$ . Следовательно, вычисление интегралов в формуле (4.28) для  $a_{rs}^{(h)}$  при данном сечении столкновения сводится к квадратурам.

Когда величины  $a_{rs}$  вычислены, коэффициенты переноса  $\sigma$ ,  $\lambda'$  и  $\varphi$  можно найти из решений уравнений (4.25) и (4.26) для  $\delta_r^{(\xi)}$ ,  $\alpha_r^{(\xi)}$ ,  $\alpha_3^{(\xi)}$  и  $\delta_3^{(\xi)}$  с помощью формул (4.22) и (4.23). Решения уравнений (4.25) и (4.26) можно выразить через детерминанты по правилу Крамера. Коэффициенты переноса, полученные таким образом, будут зависеть от порядка  $\xi$  приближения и будут соответствовать  $\xi$ -му приближению классической теории Чепмена — Энского. Из соотношений (4.22) и (4.23) и уравнений (4.25) и (4.26) следует, что нулевые значения коэффициента  $\sigma$  получаются при  $\xi \gg 1$ , тогда как для вычисления коэффициентов  $\lambda'$  и  $\varphi$  требуется более высокий порядок разложения  $\xi \gg 2$ .

Чтобы доказать, что оба коэффициента термодиффузии  $\varphi'$  и  $\varphi$  действительно совпадают, выразим решения уравнений (4.25) и (4.26) через детерминанты:

$$\alpha_r^{(\xi)} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & \dots & a_{\xi 1} \\ \frac{15}{4} & a_{22} & \dots & a_{\xi 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2\xi} & \dots & a_{\xi \xi} \end{vmatrix} = -\frac{15}{4\Delta} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} & \dots & a_{\xi 1} \\ a_{23} & a_{33} & \dots & a_{\xi 3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2\xi} & \dots & \dots & a_{\xi \xi} \end{vmatrix},$$



$$\delta_2^{(\xi)} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & a_{\xi 1} \\ a_{12} & a_{32} & a_{\xi 2} \\ a_{1\xi} & a_{3\xi} & a_{\xi\xi} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2\Delta} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} & a_{\xi 2} \\ a_{13} & a_{33} & a_{\xi 3} \\ a_{1\xi} & a_{3\xi} & a_{\xi\xi} \end{vmatrix},$$

где  $\Delta$  — детерминант коэффициентов:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{\xi 1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{\xi 2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1\xi} & \dots & \dots & a_{\xi\xi} \end{vmatrix}.$$

Поскольку  $a_{rs} = a_{sr}$ , а величина детерминанта не меняется при перемене мест строк и столбцов, равенство

$$\frac{5}{2} \delta_2^{(\xi)} = \alpha_1^{(\xi)} \quad (4.34)$$

выполняется в любом порядке приближения §. Таким образом, из соотношений (4.22) и (4.23) следует, что для каждой из компонент  $\varphi' = \varphi$ , как и указывалось ранее.

Изложенная выше теория электронных явлений переноса в частично ионизованной плазме применима независимо от того, равна ли температура электронов  $T_e$  температуре тяжелых частиц  $T_h$  или нет, если при этом выполняются условия, указанные в § 3. Полученные нами результаты согласуются с результатами, которые дает теория Чепмена — Энскога при формальной замене температуры газа электронной температурой. Но наши формулы гораздо проще, так как они выведены с учетом упрощений, связанных с малостью электронной массы. Соответственно этому они пригодны для упрощенного вычисления вклада электронов в коэффициенты переноса как при  $T_e = T_h$ , так и при  $T_e \neq T_h$ .

При практическом вычислении коэффициентов переноса с помощью приведенных выше соотношений необходимо знать соответствующие частоты столкновений с передачей импульса  $\nu_{eh}^{(1)}$  и, следовательно, сечения столкновений  $Q_{eh}^{(1)}$  для компонент рассматриваемой плазмы. Эти сечения можно найти в различных работах. Некоторые типичные данные по сечениям столкновений можно найти в гл. 2, § 14. Большое количество такого рода данных собрано в работе [2].

Проведенный выше анализ можно распространить на вычисление высокочастотной электропроводности частично ионизованной плазмы точно так же, как в § 2. Именно, мы напишем [формулы (2.24)

и (4.4)]

$$\mathbf{f}^1 = \text{Re} \left[ -\frac{e}{kT_e} f_M C (\tilde{D}_1 \mathbf{E}_{\parallel} + \tilde{D}_2 \mathbf{E}_{\perp} + \tilde{D}_3 \mathbf{b} \times \mathbf{E}) e^{-i\omega t} \right] \quad (4.35)$$

для той части функции распределения  $\mathbf{f}^1$ , которая связана с высокочастотным полем

$$\mathbf{E}^1 \text{Re} e^{-i\omega t}. \quad (4.36)$$

Из уравнения (4.1) с оставленным в левой части членом  $-\partial \mathbf{f}^1 / \partial t$  следует, что комплексные коэффициенты  $\tilde{D}_1$ ,  $\tilde{D}_2$  и  $\tilde{D}_3$  должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} f_M C &= +(-i\omega + \nu_{eH}) f_M C \tilde{D}_1 - C_{ee}^1 [f_M C \tilde{D}_1] \frac{1}{n_e}, \\ f_M C &= \omega_e f_M C \tilde{D}_3 + (-i\omega + \nu_{eH}) f_M C \tilde{D}_2 - C_{ee}^1 [f_M C \tilde{D}_2] \frac{1}{n_e}, \\ 0 &= -\omega_e f_M C \tilde{D}_2 + (-i\omega + \nu_{eH}) f_M C \tilde{D}_3 - C_{ee}^1 [f_M C \tilde{D}_3] \frac{1}{n_e}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

На основании алгебры комплексных чисел, исходя из этих уравнений, можно показать (см. задачу 4.5), что выводы, сделанные в § 2 относительно высокочастотной электропроводности, остаются справедливыми. В результате воздействия высокочастотного поля (4.36) к стационарной плотности тока (4.11) добавляется величина

$$\mathbf{J}_e = \text{Re} [(\tilde{\sigma}_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel} + \tilde{\sigma}_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \tilde{\sigma}_H \mathbf{b} \times \mathbf{E}) e^{-i\omega t}], \quad (4.38)$$

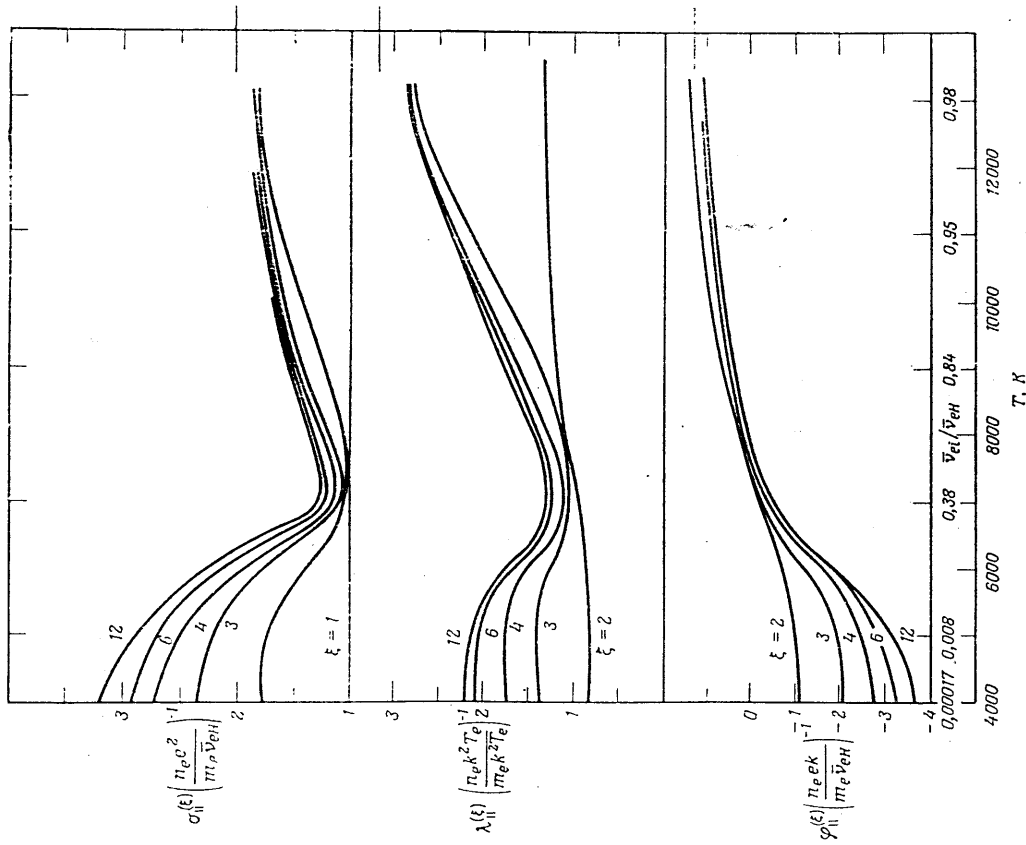
где  $\tilde{\sigma}$  — комплексная электропроводность, удовлетворяющая соотношениям (2.27), т. е.

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\parallel} &= \sigma_{\perp}(\omega) + i\sigma_H(\omega), \\ \tilde{\sigma}_{\perp} &= \frac{1}{2} \{ \sigma_{\perp}(\omega + \omega_e) + \sigma_{\perp}(\omega - \omega_e) + i[\sigma_H(\omega + \omega_e) + \sigma_H(\omega - \omega_e)] \}, \\ \tilde{\sigma}_H &= \frac{1}{2} \{ \sigma_H(\omega + \omega_e) - \sigma_H(\omega - \omega_e) - i[\sigma_{\perp}(\omega + \omega_e) - \sigma_{\perp}(\omega - \omega_e)] \}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Теперь, пользуясь методами, изложенными в данном параграфе, нужно вычислить содержащиеся в выражениях (4.39) коэффициенты электропроводности для частично ионизованной плазмы  $\sigma_{\perp}$  и  $\sigma_H$ .

При вычислении коэффициентов смеси нейтральных газов на основе теории Чепмена — Энскога оказывается, что в большинстве случаев разложение по полиномам Сонина обладает быстрой сходимостью. Чтобы получить точные значения различных коэффициентов переноса в разложенных видах (4.20) и (4.21), обычно достаточно сохранить только несколько первых членов. Но сходимость таких разложений в случае частично ионизованной плазмы может быть значительно хуже, главным образом из-за соответствующего пове-

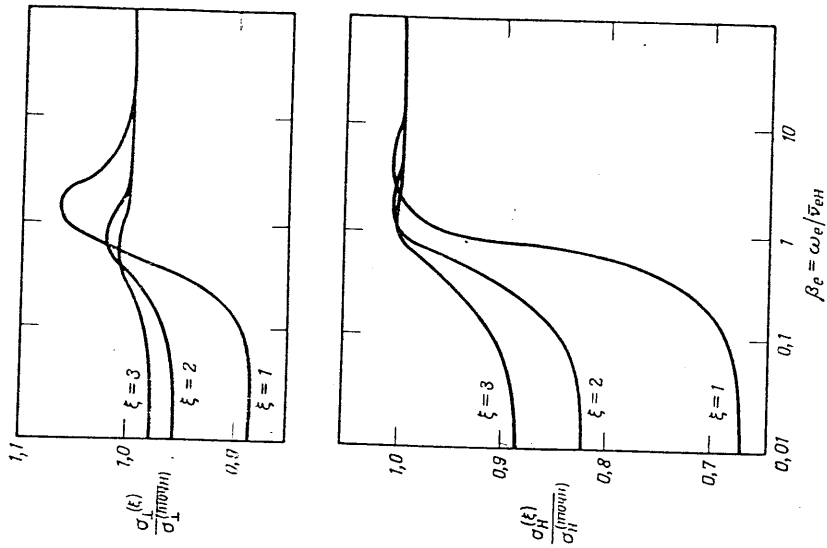
двенадцатого порядка, можно считать точными во всех случаях, кроме случая самых низких степеней ионизации (ср. с фиг. 4).



Фиг. 5. Сходимость последовательных приближений для величин  $\sigma_{\parallel}$ ,  $\lambda_{\perp}$  и  $\varphi_{\perp}$  в случае аргона при атмосферном давлении. Горизонтальными штрихами на шкале справа отмечены соответствующие значения для полностью ионизованной плазмы.

Сходимость последовательных приближений для коэффициентов теплопроводности  $\lambda_{\parallel}$  и термодиффузии  $\varphi_{\parallel}$  аналогична сходимости

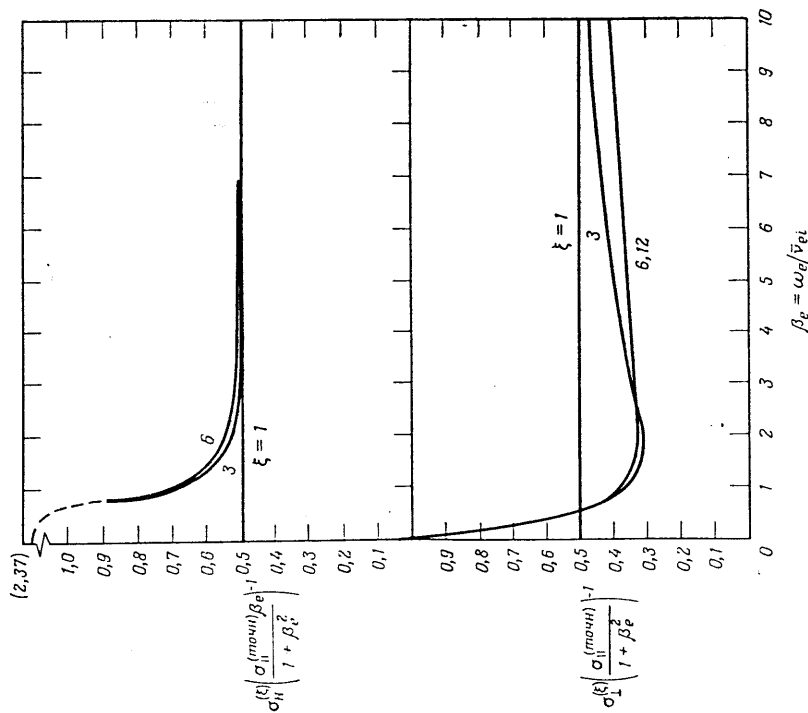
для коэффициента  $\sigma_{\parallel}$ . Изменение знака коэффициента  $\varphi_{\parallel}$  при увеличении степени ионизации характерно для реальной плазмы. Справа на фиг. 5 указаны значения коэффициентов переноса полностью ионизованной плазмы. Например, для полностью ионизованной плазмы  $\sigma_{\parallel}^{(p)} = 0,978 \sigma_{\parallel}^{(точн)}$ . (О вычислении точного значения говорится в следующем параграфе.)



Фиг. 6. Сходимость зависимости  $\sigma_{\perp}$  и  $\sigma_{\parallel}$  в лоренцевском пределе от магнитного поля в случае постоянных сечений столкновения, когда  $v_{eH} \sim C$ .

Сходимость перпендикулярной и холловской компонент коэффициента электропроводности показана на фиг. 6. Здесь также удобно рассмотреть лоренцевский предел (§ 2), в котором легко вычисляются точные значения. На этих графиках представлена зависимость отношений  $\sigma_{\perp}^{(p)}/\sigma_{\perp}^{(точн)}$  и  $\sigma_{\parallel}^{(p)}/\sigma_{\parallel}^{(точн)}$  от величины  $\beta_e = \omega_e/\sqrt{N}v_{eH}$ , пропорциональной магнитному полю, для случая

постоянного сечения столкновения, когда  $v_{eH} \sim C$ . Поскольку  $\sigma_{\perp} (B=0) = \sigma_{\parallel}$ , сходимость величины  $\sigma_{\perp}$  при малых  $\beta$  такая же, как и на фиг. 4 при  $m = 1/2$ . В отличие от результатов для  $\sigma_{\parallel}$ , пред-



Фиг. 7. Сходимость зависимости  $\sigma_{\perp}$  и  $\sigma_H$  от магнитного поля для полностью ионизованной плазмы.

ставленных на фиг. 4 и 5, сходимость при некоторых значениях магнитных полей не является равномерной. (В данном примере это относится только к величине  $\sigma_{\perp}$ , но для других сечений столкновений в некоторых полях наблюдается и неравномерная сходимость величины  $\sigma_H$ .) Отметим (для дальнейшего), что кривые  $\sigma_{\perp}^{(1)}$  и  $\sigma_H^{(1)}$  свидетельствуют о точности формул для перпендикулярной и холловской электропроводностей, полученных методом среднего сво-

бодного пробега, ибо, как нетрудно показать,

$$\sigma_{\perp}^{(1)} = \frac{n_e e^2 / m_e \bar{v}_{eH}}{1 + \beta_e^2}, \tag{4.41}$$

$$\sigma_H^{(1)} = \frac{(n_e e^2 / m_e \bar{v}_{eH}) \beta_e}{1 + \beta_e^2},$$

где  $\beta_e = \omega_e / \bar{v}_{eH}$ . Эти выражения справедливы при произвольной степени ионизации (см. задачу 4.3).

Сходимость величин  $\sigma_{\perp}$  и  $\sigma_H$  в другом предельном случае, а именно в случае полностью ионизованной плазмы, показана (для однозарядных ионов) на фиг. 7. Здесь удобно использовать для нормировки величину  $\beta_e = \omega_e / \bar{v}_{ei}$  и точное значение  $\sigma_{\parallel}$  для полностью ионизованной плазмы, которое приводится в следующем параграфе. Характер сходимости перпендикулярной и холловской компонент различных коэффициентов переноса в присутствии магнитного поля на фиг. 6 и 7 можно считать типичным во всем, кроме несколько сложного поведения знака коэффициента термодиффузии, которое отмечалось в § 2 (см. также фиг. 9 в следующем параграфе). Сравнительно медленная сходимость (фиг. 4) в случае сечений столкновений, возрастающих с увеличением энергии электронов, имеет место при низких значениях  $\beta_e$  также и для поперечной и холловской компонент. При больших значениях  $\beta_e$  сходимость более быстрая в соответствии с результатами, представленными на фиг. 6 и 7.

**Задача 4.1.** В выражении для потока тепла  $q_e$  запишите коэффициенты при  $\nabla T_e$  и  $\mathcal{E}$  через продольную, поперечную и холловскую компоненты  $\sigma$ ,  $\lambda'$  и  $\varphi$ .

**Задача 4.2.** Выведите: 1) формулу  $\lambda_{\parallel} = \lambda_{\parallel} - T_e \varphi_{\parallel} (5k/2e + \varphi_{\parallel}/\sigma_{\parallel})$ ; 2) интегральное выражение для лоренцевского значения  $\lambda'_{\parallel}$  [формула (7.5a)].

**Задача 4.3.** Найдите выражения для продольной, поперечной и холловской компонент  $\sigma$ ,  $\lambda'$ ,  $\lambda$  и  $\varphi$  в первом ненулевом приближении. Выразите  $\sigma_{\perp}^{(1)}$ ,  $\sigma_{\perp}^{(2)}$  и  $\sigma_H^{(1)}$  через  $\bar{v}_{ei}$  и сравните ваше выражение для  $\lambda_{\parallel}$  с формулой, полученной методом среднего свободного пробега [формула (12.19) из гл. 2].

**Задача 4.4.** Вычислив приближенно удельную электропроводность и коэффициент термодиффузии, покажите, что термодиффузионный ток, обусловленный градиентом температуры, и ток, создаваемый электрическим полем, одного порядка, если градиент температуры  $\nabla kT_e/e$ , выраженный в эВ/см, сравним с напряженностью электрического поля, выраженной в В/см ( $1 \text{ эВ} \approx 11600 \text{ К}$ ). Для простоты считайте, что  $B = 0$ . Таким же способом найдите условия, при которых в уравнении (4.16) для потока тепла будут существенны другие члены, не содержащие  $\nabla T_e$ .

**Задача 4.5.** Докажите справедливость соотношений (4.39) для компонент комплексной электропроводности  $\sigma_{||}$ ,  $\sigma_{\perp}$  и  $\tilde{\sigma}_{\perp}$ .

### § 5. ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННАЯ ПЛАЗМА

Полностью ионизованная плазма описывается уравнениями предыдущего параграфа как частный случай. Поскольку в полностью ионизованной плазме концентрация нейтральных частиц равна нулю, частота столкновений электронов с тяжелыми частицами оказывается равной  $\sum_i \nu_{ei} = \sum_i n_i C Q_{ei}^{(1)}$ , где  $Q_{ei}^{(1)}$  — величина, даваемая формулой (4.10) из гл. 7. Здесь знак суммы выражает то обстоятельство, что, вообще говоря, в плазме может быть несколько ионных компонент. С учетом этого анизотропная часть  $f^1$  электронной функции распределения определяется, как и раньше, формулами (4.4), (4.8) и (4.9).

В случае когда магнитное поле равно нулю, интегрированные уравнения (4.8) и (4.9) были решены для полностью ионизованной плазмы методом численного интегрирования [24]. При этом в случае однозарядных ионов были получены следующие выражения для электронных коэффициентов переноса:

$$\sigma_{||} = 0,582 \cdot \frac{32 \sqrt{\pi} e_0^2 (2kT_e)^{3/2}}{e^2 \sqrt{m_e} \ln \Lambda} = 1,975 \frac{n_e e^2}{m_e \bar{\nu}_{ei}}, \quad (5.1a)$$

$$\lambda_{||} = 0,236 \cdot \frac{64 \sqrt{\pi} e_0^2 k (2kT)^{3/2}}{e^4 \sqrt{m_e} \ln \Lambda} = 3,203 \frac{n_e k^2 T_e}{m_e \bar{\nu}_{ei}}, \quad (5.1b)$$

$$\varphi_{||} = 0,273 \cdot \frac{48 \sqrt{\pi} e_0^2 k (2kT_e)^{3/2}}{e^3 \sqrt{m_e} \ln \Lambda} = 1,389 \frac{n_e e k}{m_e \bar{\nu}_{ei}}, \quad (5.1b)$$

$$\Psi_{||} = -3,203 \frac{kT_e}{e},$$

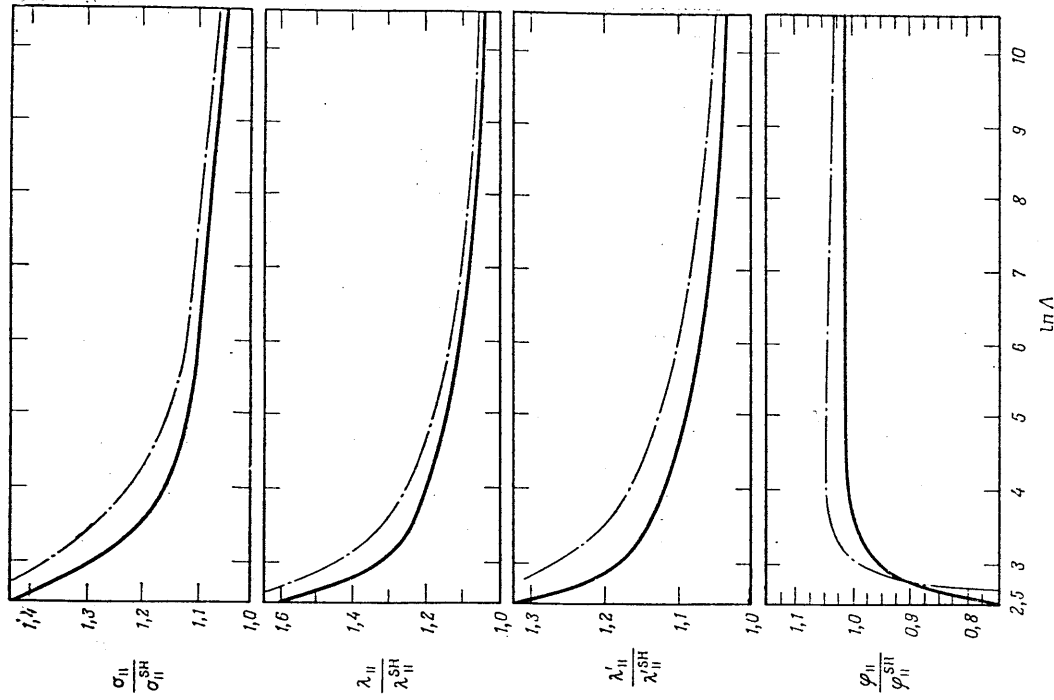
$$\text{где } \bar{\nu}_{ei} = n_i \frac{4 \sqrt{2\pi}}{3} \left( \frac{m_{ie}}{kT_e} \right)^{3/2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \right)^2 \ln \Lambda. \quad (5.1г)$$

Если величина  $T_e$  выражена в кельвинах, то численно удельная электропроводность дается формулой

$$\sigma_{||} = 1,53 \cdot 10^{-2} \frac{T_e^{3/2}}{\ln \Lambda} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}, \quad (5.2)$$

которая приводилась в гл. 2, § 13. Коэффициенты переноса для случая многозарядных ионов можно найти в работе [23].

Анализ, проведенный в работе [24], основан на использовании столкновительного члена Фоккера — Плана для электрон-электронных столкновений, приведенного в предыдущем параграфе. Такие же результаты были получены в работах [16, 19] и других на основе разложения Чепмена — Энскога [3] с использованием интеграла столкновений Больцмана и разложения по полиномам



Фиг. 8. Поправки для электронных коэффициентов переноса полностью ионизованной плазмы, вычисленные на основе унифицированной теории Кихара и Лоно (сплошные линии) и на основе экранированного кулоновского потенциала (штрих-пунктирные линии).

Сонина. Расчеты Спитгера — Хэрма [24] и Ландсхофа [16] эквивалентны приведенному в предыдущем параграфе разложению по полиномам Сонина, основанному на столкновительном члене Фоккера — Плана, поскольку в них тоже предполагалось обрезание кулоновского потенциала на дебаевском радиусе экранирования. На фиг. 8 приведены поправки к величинам  $\sigma_{\parallel}$ ,  $\lambda_{\parallel}$  и  $\varphi_{\parallel}$ , необходимые при малых значениях  $\ln \Lambda$ , вычисленные на основе общей теории Кихара и Аоно [13, 14] и приближенного экранированного потенциала [формула (4.6) из гл. 2], использовавшегося Либфом [18]. На графиках фиг. 8 индексом SH обозначены величины, найденные по формулам Спитгера — Хэрма (5.1). Эти поправки вычислены в работе [5] с учетом третьего члена в разложении по полиномам Сонина (см. также [6]). Из графиков видно, что использование экранированного потенциала приближенного вида дает результаты, хорошо согласующиеся с результатами общей теории.

Таблица 1

Коэффициенты переноса для полностью ионизованной плазмы, вычисленные на основе разложения по полиномам Сонина и лоренцевского приближения, и их точные значения, рассчитанные численными методами в работе [24] для однозарядных ионов

	$\frac{\sigma_{\parallel}}{\sigma_{\parallel}^{\text{(точн.)}}}$	$\frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\parallel}^{\text{(точн.)}}}$	$\frac{\varphi_{\parallel}}{\varphi_{\parallel}^{\text{(точн.)}}}$
$\xi = 1$	0,506	—	—
$\xi = 2$	0,978	0,418	1,12
$\xi = 3$	0,987	0,9875	1,00
Лоренцевское значение	1,72	4,24	3,67

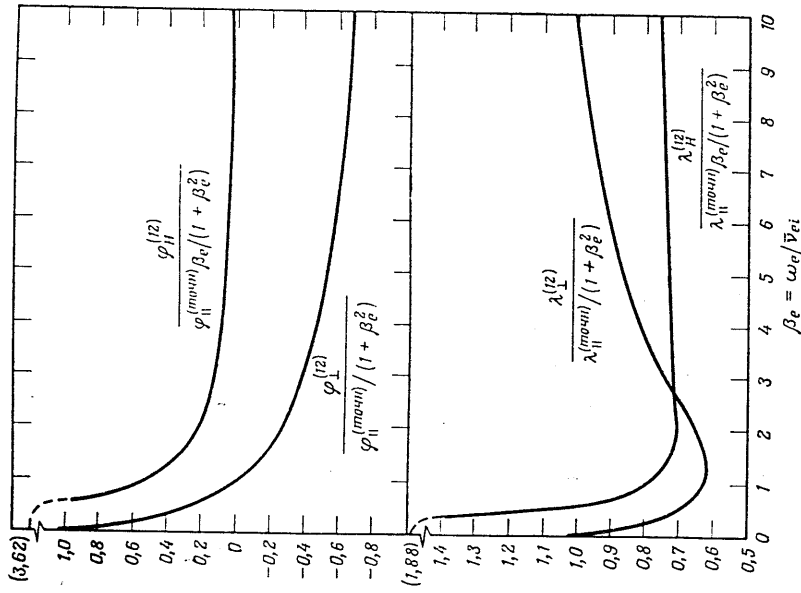
Быстрая сходимость разложения по полиномам Сонина в случае полностью ионизованной плазмы с однозарядными ионами уже отмечалась в предыдущем параграфе (фиг. 5 и 7). Интересно также сравнить точные результаты с результатами, получающимися при использовании соотношения  $v_{eH} = v_{ei}$  в лоренцевских формулах § 2. Численные значения, даваемые разными приближениями, представлены в табл. 1. Лоренцевское значение величины  $\lambda_{\parallel}$  здесь тоже вычислено на основании результатов § 2 и формулы

$$\lambda_{\parallel} = \hat{\lambda}_{\parallel} - T_e \varphi_{\parallel} \left( \frac{5k}{2e} + \frac{\varphi_{\parallel}}{\sigma_{\parallel}} \right)$$

(см. задачу 4.2).

При наличии магнитного поля разложение по полиномам Сонина (§ 4) может быть использовано для вычисления точных значений поперечной и холловской компонент различных электронных коэф-

фициентов переноса. Эти компоненты электропроводности приведены на фиг. 7 предыдущего параграфа. Для полноты изложения на фиг. 9 приведены коэффициенты теплопроводности и термодиффузии для случая однозарядных ионов, вычисленные в двенадцатом



Фиг. 9. Поперечная и холловская компоненты теплопроводности и термодиффузии для полностью ионизованной плазмы.

приближении. Отметим, что использование для нормировки величины  $1 + \beta_e^2$  в случае поперечной компоненты коэффициента термодиффузии теряет смысл, поскольку величина  $\varphi_{\perp}$  меняет знак при увеличении магнитного поля.

Кроме приведенных выше электронных коэффициентов переноса, целесообразно рассмотреть явление переноса, связанное с ионами. В частности, вязкость почти полностью обуславливается переносом импульса ионами и, следовательно, может быть связана с ионным

коэффициентом вязкости [формула (6.1)]

$$\eta_i = \frac{0,406 (4\pi e_0)^2 \sqrt{m_i} (kT_i)^{5/2}}{Z^2 e^4 \ln \Lambda}, \quad (5.3)$$

где  $Ze$  — заряд иона. Этот результат, который основан на вычислениях, проведенных в § 8.8 работы [22], применим в обычном случае, когда отношение ионной циклотронной частоты к частоте столкновений ионов мало.

В соответствии с условием

$$\sum_i \rho_i \mathbf{U}_i + \rho_e \mathbf{U}_e = 0, \quad (5.4)$$

которое следует из определения диффузионных скоростей по отношению к массовой скорости  $\mathbf{u}$  [формула (2.9б) из гл. 7], диффузионные скорости ионов в полностью ионизованном газе всегда малы, и учитывать их не нужно. Таким образом, независимо от наличия магнитного поля вклад ионов в любую компоненту плотности тока проводимости пренебрежимо мал. В отсутствие магнитного поля электронные коэффициенты теплопроводности и термодиффузии значительно больше, чем ионные коэффициенты, и, следовательно, потоком тепла, связанным с ионами, также можно пренебречь. Однако, как видно из фиг. 9, электронный поток тепла поперек магнитного поля будет мал, если отношение  $\omega_e \sqrt{v_{ei}}$  велико. В этом случае следует рассматривать поперечный поток тепла, связанный с ионами. Соответствующие коэффициенты переноса были вычислены несколькими авторами и рассматриваются в работе [22, § 8.7]. (Отметим, что в работе [19] допущена ошибка при вычислении поперечной компоненты теплопроводности, исправленная в работе [25].)

Роль явлений переноса, связанных с тяжелыми частицами, в более общем случае частично ионизованной плазмы рассматривается в следующем параграфе.

**Задача 5.1.** Исходя из представлений о средней длине свободного пробега, покажите, что в случае полностью ионизованной плазмы при  $B = 0$  вкладом электронов в вязкость и вкладом ионов в теплопроводность можно пренебречь. Сравните ваши оценки величин  $\eta_i$  и  $\lambda_{ii}$  с точными результатами.

**Задача 5.2.** Получите приближенные выражения для  $\sigma_{\parallel}$  и  $\lambda_{\parallel}$  путем формального применения лоренцевского приближения (§ 2) к полностью ионизованной плазме. Ваши результаты должны согласоваться с результатами, приведенными в табл. 1.

**Задача 5.3.** Вычислите  $\sigma_{\parallel}^{(0)}$  для полностью ионизованной плазмы.

## § 6. КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ

В предыдущих параграфах мы занимались вычислением почти исключительно электронных коэффициентов переноса. Но для полноты анализа явлений переноса в столкнотельной плазме необходимо рассмотреть и коэффициенты переноса тяжелых частиц. Так, например, вязкие напряжения зависят от коэффициента вязкости тяжелых частиц, а полный поток тепла в частично ионизованной плазме зависит и от электронной теплопроводности, и от теплопроводности, связанной с тяжелыми частицами.

В случае когда магнитное поле отсутствует, коэффициенты переноса тяжелых частиц строго вычислены на основе классической теории Чепмена — Энскога для смесей газов в работе Хиршфельдера, Кергисса и Берда [10; гл. 7]. В этой работе показано, что полный тензор вязких напряжений  $\tau_{\alpha\beta}$ , вектор потока тепла  $\mathbf{q}$  и диффузионные скорости компонент  $\mathbf{U}_s$  следующим образом связаны с градиентами и силами:

$$\tau_{\alpha\beta} = \eta \left[ \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{\alpha\beta} \right], \quad (6.1)$$

$$\mathbf{q} = \frac{5}{2} kT \sum_s n_s \mathbf{U}_s - \lambda' \nabla T - n k T \sum_s \frac{D_s^T}{\rho_s} \mathbf{d}_s, \quad (6.2)$$

$$\mathbf{U}_s = - \frac{n^2}{n_s \rho} \sum_r m_r D_{sr} \mathbf{d}_r - \frac{1}{\rho_s} D_s^T \nabla \ln T. \quad (6.3)$$

Эффективные движущие силы  $\mathbf{d}_s$  для диффузии определяются соотношением

$$\mathbf{d}_s \equiv \nabla \left( \frac{n_s}{n} \right) + \left( \frac{n_s - \rho_s}{n} \right) \nabla \ln \rho - \frac{\rho_s}{\rho \rho} \left( \mathbf{F}_s - \sum_r n_r \mathbf{F}_r \right), \quad (6.4)$$

Здесь  $\eta$  — полный коэффициент вязкости,  $\lambda'$  — полный коэффициент теплопроводности, а  $D_{sr}$  и  $D_s^T$  — коэффициенты диффузии и термодиффузии для компонент. Остальные обозначения в формулах (6.1) — (6.4) такие же, как и в гл. 7, § 2 и 3. Как и в § 4, коэффициент теплопроводности  $\lambda'$  отличается от обычного коэффициента  $\lambda$ , который связывает поток тепла и градиент температуры в случае, когда диффузионные скорости равны нулю. Отметим, что, поскольку классическая теория Чепмена — Энскога применима в квазиравновесном случае, когда температуры разных компонент плазмы одинаковы, в этих формулах фигурирует только одна температура.

Хиршфельдер, Кергисс и Берд показали, что различные коэффициенты переноса в формулах (6.1) — (6.4) можно, пользуясь раз-

ложением по полиномам Сонина, выразить через решения линейных алгебраических уравнений. Как и в § 4, эти решения можно представить в виде отношений детерминантов интегралов столкновений. Порядок этих детерминантов равен произведению числа компонент на порядок приближения в разложении по полиному Сонина; очевидно, что такое представление является весьма сложным. Для прямого применения этой теории к плазме электроны и ионы следует рассматривать на равных основаниях с другими компонентами газовой смеси. Однако эту теорию можно использовать и для отдельного вычисления различных коэффициентов диффузии и термодиффузии тяжелых частиц и вклада тяжелых частиц в коэффициенты вязкости и теплопроводности  $\lambda$ . Но во всех этих вычислениях все же требуются интегралы столкновений для электронов.

При прямом применении теории Хиршфельдера, Кертисса и Берда для вычисления коэффициентов переноса тяжелых частиц в частице по ионизованной плазме мы наталкиваемся на трудности двойного рода. Во-первых, эта теория применима к квазиравновесной плазме при одинаковой температуре всех компонент, и, во-вторых, в ней не учитываются упрощения, связанные с малостью электронной массы, а следовательно, они сложнее, чем необходимо. В работе [5] данный вопрос исследован с точки зрения, принятой в гл. 7, § 5, где рассматривается разложение столкновительных членов, основанное на малости электронной массы. В этой работе показано, что единственное существенное изменение функций распределения тяжелых частиц в столкновительной плазме, обусловленное столкновениями последних с электронами, связано с передачей импульса в столкновениях, обусловленных диффузией электронов. Это объясняется тем, что электроны не влияют сколько-нибудь заметно на коэффициенты вязкости тяжелых частиц и что коэффициенты диффузии, термодиффузии и теплопроводности определяются уравнениями (4.1), которые можно рассматривать как зависящие от скорости. Влияние столкновений с электронами может быть представлено в каждом из этих уравнений скоростью передачи импульса от электронов тяжелым частицам для каждой из рассматриваемых компонент.

Скорость передачи импульса от электронов тяжелым частицам можно с достаточной степенью точности вычислить, рассматривая только члены нулевого порядка в разложениях гл. 7, § 5, по  $m_e/m_h$ . Тогда, поскольку в таком приближении тяжелые частицы рассматриваются как неподвижные, дифференциальная скорость передачи импульса, рассчитанная на одну тяжелую частицу, проинтегрированная по азимутальному углу  $\varphi$ , равна

$$n_e m_e C (1 - \cos \chi) f_e(C) C I_{eh}^-(C, \chi) 2\pi \sin \chi d\chi d^3C.$$

Проинтегрировав это выражение по всем углам отклонения и скоростям электронов, получим искомую скорость передачи импульса при столкновениях:

$$n_e m_e \int_{-\infty}^{\infty} C C Q_{eh}^{(h)}(C) f_e(C) d^3C = n_e m_e C C Q_{eh}^{(h)} e. \quad (6.5)$$

Здесь  $Q_{eh}^{(h)}$  — сечение столкновения с передачей импульса, даваемое формулой (4.9) из гл. 7. Отличительной особенностью полученного результата (6.5) является то, что в этом приближении скорость передачи импульса не зависит от скорости тяжелой частицы  $h$ , следовательно, эффект, связанный с учетом этого члена, аналогичен эффекту действия внешних сил. В соответствии с этим в работе [5] показано, что при вычислении коэффициентов переноса тяжелых частиц электронные столкновительные члены в уравнениях Больцмана для тяжелых частиц можно опустить, если вместе них в левой части каждого уравнения Больцмана ввести эффективную силу (6.5). Отметим, что умножив величину (6.5) на концентрацию  $n_h$ , мы получим в точности полную скорость *потери* импульса электронами, которую можно найти, умножив член  $v_{eh} f_e^{(h)}$  в уравнении (4.1) на  $n_e m_e C^{(h/3)} \pi C^2 dC$  и проинтегрировав по  $C$  (второе уравнение (6.19) из гл. 7).

На основании изложенного выше Дейбелдж дает следующую упрощенную схему вычисления свойств переноса тяжелых частиц в частично ионизованной плазме. Уравнения (6.1) — (6.4) могут быть использованы для вычисления полной вязкости, связанной с *тяжелыми частицами* потока тепла, который следует добавить к электронному потоку тепла (4.12) или (4.14), и диффузионных скоростей тяжелых частиц с точностью до членов порядка  $\sqrt{m_e/m_h}$ . Коэффициенты переноса, фигурирующие в этих выражениях, следует вычислять методом Хиршфельдера, Кертисса и Берда. Их формулы, однако, следует применять к гипотетической газовой смеси, состоящей только из нейтральных частиц и ионов при одинаковой температуре  $T$ , которая может отличаться от температуры электронов  $T_e$ . При вычислении коэффициентов переноса тяжелых частиц нужно полностью пренебречь электронами и исключить их из суммирования в уравнениях (6.2) и (6.3). В уравнении (6.4) в качестве движущей силы  $d_s$  следует ввести эффективную силу (6.5), которая добавляется к внешней силе  $F_s$ ; при вычислении  $n$ ,  $\rho$  и при проведении окончательного суммирования нужно учесть электроны. На основании сказанного выше можно вычислить коэффициенты переноса тяжелых частиц, ограничившись членами низкого порядка в разложении по полиномам Сонина, которое, как показано Хиршфельдером, Кертиссом и Бердом, обычно является достаточно точным, и одновременно методами, изложенными в § 4, рассчитать

электронные коэффициенты переноса с высоким, если это необходимо, порядком приближения.

У осведомленного читателя может возникнуть возражение против такой схемы расчета, поскольку при использовании результатов Хиршфельдера, Кертисса и Берда для гипотетической смеси нейтральных частиц и ионов должно, очевидно, выполняться условие  $\sum_n \rho_n U_n + \rho_i U_i = 0$ , тогда как для реальной плазмы условие, накладываемое на диффузионные скорости, имеет вид  $\sum_n \rho_n U_n + \rho_i U_i + \rho_e U_e = 0$  [формула (2.9в) из гл. 7]. Однако Дейбелдж [5] показал, что данное обстоятельство в действительности не вносит никаких осложнений и при вычислении коэффициентов переноса тяжелых частиц по этой схеме ошибка по порядку величины не превышает отношения  $\sqrt{m_e/m_h}$ .

Для подробного проведения этих упрощений нужно вычислить эффективные силы (6.5), действующие на тяжелые частицы. Поскольку анализ электронной функции распределения (§ 4) не связан с вычислением функций распределения тяжелых частиц, эти эффективные силы можно найти независимо из соотношения [формула (6.19) из гл. 7]

$$n_e m_e \overline{CCQ_{eh}^{(1)}}_e = n_e m_e \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty C^4 Q_{eh}^{(1)} I^1 dC. \quad (6.6)$$

С помощью уравнения (4.4) и последующих формул § 4 функция  $I^1$  может быть выражена через коэффициенты разложения по полиномам Сонина, которые можно найти, решив уравнения (4.25) и (4.26). Поэтому интеграл в правой части равенства (6.6), как подробно показал Дейбелдж, можно взять прямым путем. Правда, если диффузионные скорости тяжелых частиц не малы по сравнению с диффузионной скоростью электронов, то схема вычисления должна быть пересмотрена. В этом случае уравнение (6.6) уже не дает точной скорости передачи импульса от электронов тяжелым частицам, выражаемой членом  $-n_e v_{eh}^{(1)} U_h \partial^{(0)}/\partial C$  в уравнении (6.40) из гл. 7 для электронов. Но это обстоятельство не играет особой роли при вычислении свойств переноса тяжелых частиц, поскольку при  $U_h \gg \gg (m_e/m_h)^{1/2} U_e$  передача импульса мала и член (6.6) в уравнении для тяжелых частиц можно опустить. При вычислении же электронных коэффициентов переноса теория, изложенная в § 4, должна быть обобщена так, чтобы она учитывала влияние диффузионных скоростей тяжелых частиц на электроны.

Практически во многих случаях вычисление интеграла в уравнении (6.6) не является необходимым. Этот член не влияет на результаты вычисления вязкости и теплопроводности  $\lambda'$  тяжелых частиц, а только учитывается при вычислении диффузионных скоростей тяжелых частиц и входит в член, описывающий термодиффузию

в выражении (6.2) для потока тепла, связанного с тяжелыми частицами. Это подтверждается численными расчетами [8], в которых вначале с помощью полной теории Хиршфельдера, Кертисса и Берда вычислялись величины  $\eta$  и  $\lambda$  для частично ионизованного аргона при атмосферном давлении, а затем в полном пренебрежении электронами [включая член (6.6)] вычислялись величины  $\mu$  и вклад тяжелых частиц в теплопроводность  $\lambda$ . В интервале температур от 5000 до 20 000 К изменения обоих коэффициентов не превышали 1% при использовании одного и того же порядка приближения в разложении по полиномам Сонина в обоих методах вычисления.

Сказанное выше номинально относится лишь к случаю, когда магнитное поле равно нулю. Обобщение теории Чемпена — Энского для многокомпонентной плазмы на случай, когда магнитное поле отлочно от нуля, проведено в работах [1, 8] (см. также [12]). Хотя эта теория уже частично учитывает малость электронной массы, полученные результаты, как показал Дейбелдж [5], можно еще упростить точно таким же образом, как это делалось в случае нулевого магнитного поля. Но если не считать случаев очень сильного магнитного поля и низких плотностей, то отношение ноной циклотронной частоты  $eB/m_i$  к частоте столкновений ионов будет мало. В этом случае упрощенные уравнения, описывающие свойства переноса тяжелых частиц, сводятся к уравнениям без магнитного поля. Тогда справедливо все сказанное ранее относительно использования результатов Хиршфельдера, Кертисса и Берда, и магнитное поле учитывается только при вычислении свойств переноса электронов (§ 4) и, следовательно, при вычислении эффективных сил (6.6). Установив способы вычисления коэффициентов переноса тяжелых частиц, мы в следующем параграфе вернемся к рассмотрению коэффициентов переноса электронов. В частности, пользуясь результатами § 4, мы проверим точность различных приближенных формул для этих коэффициентов.

## § 7. ПРАВИЛА СМЕСИ

На основании теории, изложенной в § 4, электронные коэффициенты переноса можно вычислить с любой требуемой точностью, пользуясь разложением по полиномам Сонина. Благодаря упрощениям, связанным с малостью электронной массы, такие вычисления менее сложны, чем соответствующие классические вычисления для газовых смесей. Но во многих практических случаях требуется быстро оценивать коэффициенты переноса по приближенным формулам. В данном параграфе мы рассмотрим такие формулы, называемые правилами смеси, и оценим их точность по сравнению с формулами, следующими из строгой теории (§ 4). Мы будем рассматривать только электронные коэффициенты переноса.

Вначале мы изложим способ приближенного вычисления удельной электропроводности  $\sigma_{II}$ , который дает либо полную электро-



проводность (в отсутствие магнитного поля), либо (если магнитное поле отлично от нуля) продольную компоненту электропроводности. Простейшая формула для  $\sigma_{||}$  выводится на основе представления о средней длине свободного пробега и имеет вид

$$\sigma_{||} \approx \frac{n_e e^2}{m_e \bar{v}_{ei}} \quad (7.1)$$

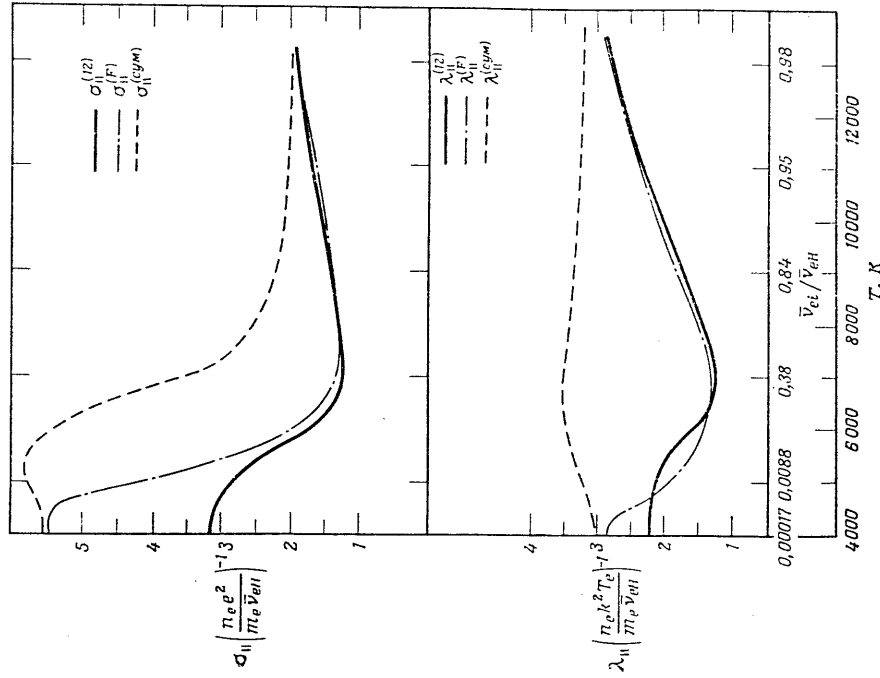
Частоту столкновений в формуле (7.1) вычисляют разными методами (гл. 2, § 6). Различия в выражениях для частоты столкновений можно связать с различными способами усреднения зависящего от скорости сечения столкновения  $Q_{eh}^{(1)}$ . Если, как в формуле (7.1), для частоты столкновений используется выражение (3.15), в котором  $\bar{v}_{ei} = \sum_h \bar{v}_{eh}$ , то формула (7.1) будет идентична первому приближению  $\sigma_{||}^{(1)}$  в разложении по полиномам Сонина (§ 4). Следовательно, для оценки точности формулы (7.1) можно использовать результаты, приведенные на фиг. 4 и 5, где показана сходимость этой величины, вычисляемой с помощью разложения по полиномам Сонина, в зависимости от порядка приближения. Результат вычисления по формуле (7.1), полученной методом среднего свободного пробега, отличается от точного значения множителем  $\sim 2$  в случае полностью ионизованной плазмы, а при некоторых значениях сечений столкновения электрон — нейтральный атом различие в случае слабо ионизованной плазмы может быть еще большим. Эту погрешность можно избежать, если ввести электропроводность  $\sigma_{||}^{сум}$ , которая определяется соотношением

$$\frac{1}{\sigma_{||}^{сум}} = \frac{1}{\sigma_{en}} + \frac{1}{\sigma_{ei}} \quad (7.2)$$

Соотношение (7.2) основывается на предположении Лина, Резлера и Кантровица [17] о том, что удельные сопротивления, связанные с нейтральными частицами и ионами, должны складываться. Если при вычислении величины  $\sigma_{en}$  для нейтральной компоненты используется лоренцевское выражение (2.14а) с  $f^0 = f_m$ , а для  $\sigma_{ei}$  — выражение Спитцера — Хэрма (5.1а), то значение электропроводности  $\sigma_{||}^{сум}$  обязательно будет точным в пределах как слабо, так и полностью ионизованной плазмы. Хотя формула (7.2) в силу сказанного более предпочтительна, нежели формула (7.1), величина  $\sigma_{||}^{сум}$ , как видно из фиг. 10, может все же отличаться от точного значения примерно на 200% при промежуточных степенях ионизации.

Существует еще одно правило смеси, которое дает точные значения  $\sigma_{||}$  во всем диапазоне степеней ионизации. В этой формуле, предложенной Фростом [9], используется лоренцевское выражение для электропроводности (2.14а) с частотой электрон-ионных столкновений, модифицированной таким образом, что окончательная

формула в пределе полностью ионизованной плазмы сводится в случае однозарядных ионов к точному выражению Спитцера — Хэрма



Фиг. 10. Фростовские значения  $\sigma_{||}^{(F)}$  и  $\lambda_{||}^{(F)}$ , значения  $\sigma_{||}^{(сум)}$  и  $\lambda_{||}^{(сум)}$ , полученные методом среднего свободного пробега, а также значения  $\sigma_{||}^{(1,2)}$  и  $\lambda_{||}^{(1,2)}$ , полученные с учетом 12-го порядка приближения в разложении по полиномам Сонина, для аргона при атмосферном давлении.

(5.1а). Согласно Фросту, электропроводность  $\sigma_{||}^{(F)}$  дается выражением

$$\sigma_{||}^{(F)} = \frac{4\pi n_e e^2}{3kT_e} \int_0^\infty \frac{C^2 f_M}{v^{(F)}} dC, \quad (7.3a)$$

в котором

$$\nu_0^{(F)} = \sum_n \nu_{en}^{(1)} + 0,476 \frac{8\pi n_1}{C^2} \left( \frac{m_e}{2kT_e} \right)^{1/2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \right)^2 \ln \Lambda. \quad (7.36)$$

Сравнив вклад ионов в частоту столкновений (7.36) с величиной  $\nu_{ei}^{(1)}$  даваемой формулой (6.37) из гл. 7, мы видим, что здесь не только другой численный множитель, но и иная зависимость величины  $\nu_{ei}^{(1)}$  от скорости: ранее она была пропорциональна  $C^{-3}$ , а теперь она пропорциональна  $C^{-2}$  ( $m_e/2kT_e$ )<sup>1/2</sup>. Хотя это изменение зависимости величины  $\nu_{ei}^{(1)}$  от скорости базируется на определенных вычислениях [11], для формулы Фроста (7.3) нет строгого обоснования. Тем не менее, как показали Швейцер и Митчнер [21], в случае частично ионизованного аргона (фиг. 10) формула Фроста дает удивительно точные результаты. В самом деле, при низких степенях ионизации, показанных на фиг. 10, формула Фроста, сводящаяся к точному значению в лоренцевском пределе, дает, по-видимому, более точное значение для электропроводности, чем приближение двенадцатого порядка при разложении по полиномам Сонина. Это объясняется плохой сходимостью разложения по полиномам Сонина в пределе слабо ионизованной плазмы в наиболее неблагоприятном случае аргона (§ 4, фиг. 4). При более высоких степенях ионизации, когда  $\sigma_{||}^{(F)}$  и  $\sigma_{||}^{(2)}$  совпадают, разложение по полиномам Сонина сходится быстрее (фиг. 5) и значения  $\sigma_{||}^{(2)}$  можно считать точными.

Правила смеси для приближенного вычисления коэффициентов теплопроводности и термодиффузии  $\lambda_{||}^{(F)}$ ,  $\lambda_{||}$  и  $\Phi_{||}$  разработаны не так хорошо, как для  $\sigma_{||}$ . При вычислении этих коэффициентов использовать приближение наиболее низкого порядка в разложении по полиномам Сонина сложнее, так как теперь минимальный порядок разложения равен 2. Точность этого приближения иллюстрируют фиг. 4 и 5 из § 4. Исходя же из представлений о средней длине свободного пробега, можно заключить, что коэффициент теплопроводности  $\lambda_{||}$  с точностью до численного коэффициента должен выражаться формулой

$$\lambda_{||} \approx \frac{n_e k^2 T_e}{m_e \nu_{en}}. \quad (7.4)$$

Нормировка, использованная при построении графиков на фиг. 4 и 10, показывает, что для аргона формула (7.4) дает величину  $\lambda_{||}$  с точностью до множителя, равного трем. В связи с тем, что при увеличении степени ионизации коэффициент термодиффузии меняет знак (фиг. 5), для него нет простой формулы типа (7.4). Но можно сказать, что по абсолютной величине коэффициент  $\Phi_{||}$ , как видно из фиг. 5, ненамного больше чем  $n_e k^2 T_e / m_e \nu_{en}$ .

Кругер, Митчнер и Дейбелдж [15] предложили правила смеси для величин  $\lambda_{||}$  и  $\Phi_{||}$ , аналогичные формуле Фроста (7.3) для элект-

тропроводности. Эти коэффициенты обозначаются символами  $\lambda_{||}^{(F)}$  и  $\Phi_{||}^{(F)}$  и даются следующими формулами:

$$\lambda_{||}^{(F)} = \frac{4\pi}{3} n_e k \int_0^\infty \frac{1}{\nu_{\lambda}^{(F)}} \left( \frac{m_e C^2}{2kT_e} - \frac{5}{2} \right)^2 C^4 f_M dC, \quad (7.5a)$$

где

$$\nu_{\lambda}^{(F)} = \sum_n \nu_{en}^{(1)} + 1,012 \frac{8\pi n_1}{C^2} \left( \frac{m_e}{2kT_e} \right)^{1/2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \right)^2 \ln \Lambda, \quad (7.5b)$$

и

$$\Phi_{||}^{(F)} = \frac{4\pi}{3} \frac{en_e}{T_e} \int_0^\infty \frac{1}{\nu_{\Phi}^{(F)}} \left( \frac{m_e C^2}{2kT_e} - \frac{5}{2} \right) C^4 f_M dC, \quad (7.6a)$$

где

$$\nu_{\Phi}^{(F)} = \sum_n \nu_{en}^{(1)} + 0,6776 \frac{8\pi n_1}{C^2} \left( \frac{m_e}{2kT_e} \right)^{1/2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \right)^2 \ln \Lambda. \quad (7.6b)$$

Пользуясь этими формулами, можно вычислить «фростовское» значение обычной теплопроводности по формуле [формулы (4.15)]

$$\lambda_{||}^{(F)} = \lambda_{||}^{(F)} - \frac{T_e (\Phi_{||}^{(F)})^2}{\sigma_{||}^{(F)}}. \quad (7.7)$$

Как и в случае электропроводности, показано, что «фростовские» значения коэффициентов теплопроводности и термодиффузии, вычисленные по формулам (7.5) — (7.7), хорошо согласуются с точными значениями. Для коэффициентов теплопроводности это можно видеть из фиг. 10. Как и прежде, при низких степенях ионизации значения  $\lambda_{||}^{(F)}$ , по-видимому, более точны, чем значения, полученные в приближении двенадцатого порядка при разложении по полиномам Сонина, что объясняется плохой сходимостью этого разложения для слабо ионизованного аргона.

На основании сказанного выше можно заключить, что правила смеси «фростовского» типа, будучи точными и достаточно простыми, оказываются более подходящими для практического вычисления коэффициентов переноса в случае, когда магнитное поле отсутствует. Действительно, коль скоро точность этих формул установлена, значительные вычислительные сложности, связанные с использованием высоких порядков приближения в разложении по полиномам Сонина, представляются мало оправданными, особенно если учесть неизбежные неточности в определении поперечных сечений. Поправки при малых значениях  $\ln \Lambda$  вводятся, согласно Дейбелджу [15], делением вторых членов в формулах (7.3b), (7.5b)

и (7.66) на отношения  $\sigma_{\parallel}/\sigma_{\perp}$ ,  $\lambda_{\parallel}/\lambda_{\perp}$  и  $\varphi_{\parallel}/\varphi_{\perp}$ , определенные по графикам, представленным на фиг. 8 в § 5. При наличии магнитного поля положение с правилами смеси значительно сложнее, и картина оказывается менее удовлетворительной из-за появления еще одного параметра (напряженности магнитного поля) и из-за увеличения числа коэффициентов переноса. Как и раньше, если достаточно небольшая степень точности, то можно пользоваться формулами, полученными на основе представления о средней длине свободного пробега, и формулами, полученными на основе приближений низкого порядка в разложении по полиномам Сонина. При использовании формул первого типа, чтобы получить поперечную и холловскую компоненты коэффициентов переноса, нужно продольную компоненту умножить на  $(1 + \beta_e^2)^{-1}$  и на  $\beta_e(1 + \beta_e^2)^{-1}$ . Хотя в этих выражениях величину  $\beta_e$  можно вычислять по-разному, для определенности мы исходим из соотношения  $\beta_e = \omega_e/\bar{v}_{eH}$ , основанного на равенстве  $\bar{v}_{eH} = \sum_h \bar{v}_{eh}$  и на определении (3.15)

величины  $\bar{v}_{eh}$ . Согласно данным, представленным на фиг. 6, 7 и 9, эти формулы дают значения коэффициентов, на 200—300% отличающиеся от действительных. Формула, полученная методом средней длины свободного пробега, для коэффициента поперечной термодиффузии малопригодна ввиду того, что знак этой величины изменяется как при возрастании степени ионизации, так и при увеличении параметра  $\beta_e$ . Заметим, что, согласно уравнениям (4.41), простым выражениям для поперечной и холловской компонент электропроводности

$$\sigma_{\perp} \approx \frac{n_e e^2 / m_e \bar{v}_{eH}}{1 + \beta_e^2},$$

$$\sigma_{\parallel} \approx \frac{(n_e e^2 / m_e \bar{v}_{eH}) \beta_e}{1 + \beta_e^2},$$

которые можно вывести, исходя из представления о средней длине свободного пробега, соответствуют на фиг. 6 кривые  $\sigma_{\perp}^1$  и  $\sigma_{\parallel}^1$ .

Для более точного вычисления электропроводности при наличии магнитного поля имеются по крайней мере два дополнительных метода. Во-первых, в тех случаях, когда зависимость частоты столкновений электронов с нейтральными атомами от скорости допустимо считать степенной (в наших обозначениях  $\sum_n \bar{v}_{en} \sim C^{3m}$ ), можно прямо получить четвертое приближение в разложении по полиномам Сонина при вычислении  $\sigma_{\perp}$  и  $\sigma_{\parallel}$ , пользуясь результатами Шкарофского, Джонстона и Брахинского [22, § 8.5]. Поскольку в большинстве случаев четвертое приближение само по себе является достаточно точным, погрешность этого метода в основном связана с представлением зависимости частоты столкновений элект-

трои — нейтральный атом от скорости в виде степенной функции. Второй метод, предложенный Швейцером и Митчером [21], заключается в распротранении правила смесей Фроста на величины  $\sigma_{\perp}$  и  $\sigma_{\parallel}$ . В этом методе используются лоренцевские выражения (2.146) и (2.14в) для  $\sigma_{\perp}$  и  $\sigma_{\parallel}$ , включающие такие значения эффективных частот электрон-ионных столкновений, что в пределе полностью ионизованной плазмы для  $\sigma_{\perp}$  и  $\sigma_{\parallel}$  получаются известные значения. Эти эффективные частоты столкновений зависят от напряженности магнитного поля, а также от порядка приближения в разложении по полиномам Сонина, используемого для вычисления величин  $\sigma_{\perp}$  и  $\sigma_{\parallel}$  в пределе полной ионизации. Кривые для этих частот столкновения, приведенные Швейцером и Митчером [21], отчасти основаны на третьем приближении в разложении по полиномам Сонина. Несколькo более точные значения, которые включают одиннадцатый порядок приближения, приводятся в работе [15]. Там же даны аналогичные формулы для  $\lambda_{\perp}^1$ ,  $\lambda_{\parallel}^1$ ,  $\varphi_{\perp}^1$  и  $\varphi_{\parallel}^1$ . Результаты, полученные этим методом, хорошо согласуются с точными значениями.

В связи с вопросом о точности приближенных формул для электропроводности полезно также проверить некоторые следствия закона Ома в его обычной форме, соответствующей представлению о средней длине свободного пробега, а именно

$$\mathbf{J}_e \approx \sigma_{\parallel} \mathbf{E} - \beta_e \mathbf{J}_e \times \mathbf{b}, \quad (7.8)$$

где  $\mathbf{b} = \mathbf{V}/B$ . Согласно данному соотношению, угол между  $(\mathbf{J}_e)_{\perp}$  и обобщенным электрическим полем  $\mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{V}_{\perp} \rho_e / e n_e$  в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, равен  $\arctg \beta_e$ . Кроме того, поперечная компонента плотности тока  $(\mathbf{J}_e)_{\perp}$  равна произведению «скалярной» электропроводности (в наших обозначениях  $\sigma_{\parallel}$ ) на компоненту поля  $\mathbf{E}_{\perp}$  в направлении тока. Такое приближение часто используется при рассмотрении электрических характеристик систем со скрещенными полями, таких, как МГД-генераторы и ускорители. Если же пренебречь эффектами термодиффузии, то точное выражение (4.11) для плотности тока примет вид

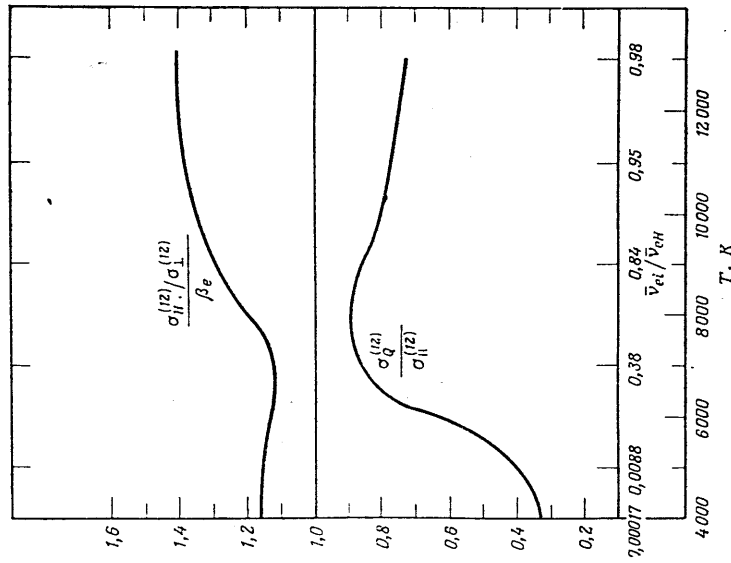
$$\mathbf{J}_e = \sigma_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel} + \sigma_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \sigma_H \mathbf{b} \times \mathbf{E}. \quad (7.9)$$

Для сравнения с уравнением (7.8) последнее уравнение удобно переписать в виде (см. задачу 7.2)

$$\mathbf{J}_e = \sigma_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel} + \left( \frac{\sigma_{\perp}^2 + \sigma_H^2}{\sigma_{\perp}} \right) \mathbf{E}_{\perp} - \frac{\sigma_H}{\sigma_{\perp}} \mathbf{J}_e \times \mathbf{b}. \quad (7.10)$$

Следовательно, угол между  $(\mathbf{J}_e)_{\perp}$  и  $\mathbf{E}_{\perp}$  равен не  $\arctg \beta_e$ , а  $\arctg(\sigma_H/\sigma_{\perp})$ , а электропроводность в направлении  $(\mathbf{J}_e)_{\perp}$  равна не  $\sigma_{\parallel}$ , а  $(\sigma_{\perp}^2 + \sigma_H^2)/\sigma_{\perp}$ . Эта величина называется «квазискалярной» электропроводностью и обозначается через  $\sigma_Q$ . На фиг. 11 проведено сравнение величин  $\sigma_H/\sigma_{\perp}$  и  $\beta_e = \omega_e/\bar{v}_{eH}$ , а также  $(\sigma_{\perp}^2 + \sigma_H^2)/\sigma_{\perp}$  и  $\sigma_{\parallel}$

для аргона при атмосферном давлении в условиях равновесия и при  $\beta_e = 5$ . Нетрудно видеть, что использование метода среднего свободного пробега для определения рассматриваемых нами величин может привести к значительным ошибкам.



Фиг. 11. Величина  $(\sigma_H^{(12)}/\sigma_{\perp}^{(12)})/\beta_e$ , вычисленная по точным формулам для  $\sigma_H/\sigma_{\perp}$  и по формулам для  $\beta_e$ , полученным методом среднего свободного пробега, а также квазиэкалярная электропроводность  $\sigma_Q = (\sigma_{\perp}^2 + \sigma_H^2)/\sigma_{\perp}$  для аргона при атмосферном давлении и при  $\beta_e = \omega_e/v_{Th} = 5$ .

Согласно формуле (7.8), введенной методом среднего свободного пробега, оба отношения, представленные кривыми на графиках, должны быть всюду равны единице.

**Задача 7.1.** Покажите, что формулы Фроста (7.3), (7.5) и (7.6) для разных коэффициентов переноса сводятся к тонким выражениям в пределах слабо и полностью ионизованной плазмы.

**Задача 7.2.** Покажите, что уравнение (7.10) следует из уравнения (7.9). [Указание. Вначале вычислите  $\mathbf{J}_e \times \mathbf{b}$  на основании уравнения (7.9).]

**Задача 7.3.** Пользуясь результатами, приведенными на фиг. 7, представьте графически зависимость величин  $(\sigma_H/\sigma_{\perp})/\beta_e$  и  $\sigma_Q/\sigma_{\perp}$  от  $\beta_e$  для полностью ионизованной плазмы.

## § 8. НЕУПРУГИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ

Выше при вычислении электронных коэффициентов переноса мы не рассматривали неупругие столкновения. Но они играют важную роль в динамике частично ионизованных газов. Например, как будет показано в следующей главе, неупругие столкновения являются определяющими в уравнении непрерывности для электронов. Поэтому уместно задать вопрос, как неупругие столкновения входят в наши уравнения, и в частности найти дополнительные ограничения, которые при этом нужно учитывать при вычислении электронных коэффициентов переноса методом, изложенным в § 4.

Уравнения (6.39) и (6.40) из гл. 7 для  $f^0$  и  $\mathbf{r}^1$ , полученные разложением по декартовым тензорам, будучи умножены первое на  $1/2 m_e C^2 4\pi^2 dC$ , а второе на  $m_e C^4 / 3\pi^2 dC$ , дают уравнения для энергии и импульса электронов со скоростями в интервале  $dC$ . В соответствии с этим вклад неупругих столкновений в эти уравнения можно вычислить, добавив из физических соотношений в правые части этих уравнений члены, учитывающие изменения энергии и импульса электронов со скоростями в интервале  $dC$  в единичном объеме за счет неупругих столкновений (деленные на приведенные выше множители). Полученные таким образом члены согласуются с теми, которые получаются, если в уравнении Больцмана с самого начала учесть неупругие столкновения [26].

На основании сказанного выше член, учитывающий неупругие потери в уравнении (6.39) из гл. 7, для  $f^0$  равен  $-n_e f^0 \nu_{NE}$ , где  $\nu_{NE}$  — полная частота неупругих столкновений для электронов с рассматриваемым значением скорости (или, что эквивалентно, энергии), получающаяся суммированием по всем неупругим процессам. Таким образом, величина  $\nu_{NE}$  есть функция энергии электронов и, например, заселенности возбужденных атомных состояний. Член, учитывающий увеличение энергии в результате неупругих столкновений, более сложен, поскольку он включает в себя интегралы от функции  $f^0$ . Но, согласно принципу детального равновесия, член, учитывающий увеличение энергии, того же порядка, что и член, учитывающий потерю энергии, в случае если плазма не слишком сильно отличается от равновесной. Следовательно, оценить, насколько существенно неупругие столкновения в уравнении (6.39) из гл. 7, можно на основании одного только члена потерь энергии. В соответствии с этим условием [формула (3.8)]

$$\bar{\nu}_{ee} \gg \sum_h \frac{m_e \nu_{eh}}{h},$$

обеспечивающее максвелловский вид функции  $f^0$ , нужно дополнить еще одним условием

$$\bar{v}_{ee} \gg \bar{v}_{NE}, \quad (8.1)$$

для электронов с тепловыми энергиями.

Даже в том случае, когда неравенство (8.1) выполняется и функция  $f^0$  является максвелловской, неупругие столкновения все же следует учитывать при вычислении  $f^0$  с помощью проинтегрированного уравнения для энергии, определяющего электронную температуру. При выводе уравнения для энергии из уравнения (6.39) из гл. 7 член, содержащий  $v_{ee}$ , при интегрировании дает нуль, а поэтому член, содержащий  $v_{NE}$ , должен быть оставлен, даже если  $\bar{v}_{ee} \gg \bar{v}_{NE}$ . Последний член, учитывающий увеличение энергии электронов в единицу времени за счет неупругих столкновений, следует добавить в правую часть уравнения для энергии электронов (3.16).

Если неупругие столкновения происходят с атомами, которые имеют различные уровни электронного возбуждения и изменяют свою энергию только за счет взаимодействия со свободными электронами, а также за счет испускания и поглощения излучения, то скорость  $\dot{N}$  неупругой потери энергии свободными электронами, отнесенную к единице объема, можно найти, рассмотрев баланс энергии для возбужденных атомов. При таком подходе ион можно считать атомом, энергия возбуждения которого равна потенциалу ионизации  $\epsilon_i$ . Для простоты будем рассматривать однозарядные ионы только одного типа. Обозначив локальную скорость потери энергии на излучение из плазмы, отнесенную к единице объема, через  $\dot{R}$ , а скорость увеличения энергии возбужденных атомов через  $\dot{U}$ , имеем

$$\dot{U} = \dot{N} - \dot{R}.$$

Величину  $\dot{U}$  можно выразить через скорость  $\dot{n}_k$  образования возбужденных атомов в единице объема:

$$\dot{U} = \sum_k \epsilon_k \dot{n}_k,$$

где  $\epsilon_k$  — энергия  $k$ -го уровня, измеренная от основного уровня. Запишем теперь уравнение непрерывности для возбужденных атомов:

$$\dot{n}_k = \frac{\partial n_k}{\partial t} + \nabla \cdot [n_k (\mathbf{u} + \mathbf{U}_k)]. \quad (8.2)$$

Комбинируя эти выражения, получаем для скорости неупругих потерь энергии

$$\dot{N} = \dot{R} + \frac{\partial}{\partial t} \sum_k \epsilon_k n_k + \nabla \cdot \sum_k \epsilon_k (\mathbf{u} + \mathbf{U}_k). \quad (8.3)$$

В большинстве случаев, представляющих для нас интерес, основной вклад в суммы в уравнении (8.3) дают ионы. Тогда уравнение (8.3) принимает вид

$$\dot{N} \approx \dot{R} + e_i \frac{\partial n_i}{\partial t} + e_i \nabla \cdot [n_i (\mathbf{u} + \mathbf{U}_i)]. \quad (8.4)$$

Чтобы получить уравнение для энергии электронов, учитывая неупругие столкновения, к правой части уравнения (3.16) нужно добавить величину  $-\dot{N}$ . Вместе с уравнением (8.4) для  $\dot{N}$  удобно использовать уравнения непрерывности для электронов и ионов

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot [n_i (\mathbf{u} + \mathbf{U}_i)] = \dot{n}_i,$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot [n_e (\mathbf{u} + \mathbf{U}_e)] = \dot{n}_e$$

и, пользуясь условием сохранения заряда

$$\dot{n}_e = \dot{n}_i,$$

выразить  $\dot{N}$  через  $n_e$  и  $-\mathbf{J}_e/e = n_e \mathbf{U}_e$ . [Эти уравнения эквивалентны более привычному уравнению  $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t$ , где  $\mathbf{j} = e(n_i - n_e)\mathbf{u} + \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_e$  — полная плотность тока, а  $\rho = e(n_i - n_e)$  — плотность заряда.] При наличии неупругих столкновений уравнение для энергии (3.16) заменяется уравнением

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left[ n_e \left( \frac{3}{2} k T_e + \epsilon_i \right) \right] + n_e \left( \frac{5}{2} k T_e + \epsilon_i \right) \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (q_e - \epsilon_i \mathbf{J}_e / e) - \\ - \mathbf{J}_e \cdot \mathbf{E}' = n_e \sum_h \frac{3}{2} k (T_h - T_e) 2 \frac{n_{ie}}{n_h} \bar{v}_{eh} - \dot{R}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Рассмотрим теперь возможное влияние неупругих столкновений на электронные коэффициенты переноса при  $f^0 = f_M$ . В уравнениях (6.40) из гл. 7 и в уравнении (4.1) для функции  $f^1$  член неупругих потерь равен  $-n_e f^1 v_{NE}$ . Поскольку сечения неупругих столкновений можно считать изотропными функциями направления рассеяния, член, учитывающий увеличение энергии в результате неупругих столкновений, равен нулю. Поэтому анализ коэффициентов переноса можно проводить так же, как и раньше, заменив только частоту упругих столкновений с передачей импульса суммой  $v_{eH} + v_{NE}$ .

14. *Kihara T., Aono O.*, в книге Kinetic Equations, eds. R. L. Liboff, N. Ros-  
toki, Gordon and Breach, 1971.  
A Review of the Unified Theory of Relaxations in Plasma.  
15. *Kruger C. H., Mitchner M., Daybelge V.*, AIAA Journ., 6, 1712 (1968).  
Transport Properties of MHD Generator Plasmas.  
16. *Landshoff R.*, Phys. Rev., 76, 904 (1949).  
Transport Phenomena in a Completely Ionized Gas in Presence of a Mag-  
netic Field.  
17. *Lin S. C., Resler E. L., Kantrowitz A.*, Journ. Appl. Phys., 26, 95 (1955).  
Electrical Conductivity of Highly Ionized Argon.  
18. *Liboff R. L.*, Phys. Fluids, 2, 40 (1959).  
Transport Coefficients Determined Using the Shielded Coulomb Potential.  
19. *Marshall W.*, Atomic Energy Research Establishment (Harwell, England)  
AERE T/R 2419 T/R 2352, 1960.  
Kinetic Theory of An Ionized Gas, parts II, III.  
20. *Schweitzer S., Mittner M.*, AIAA Journ., 4, 1012 (1966).  
Electrical Conductivity of Partially Ionized Gases.  
21. *Schweitzer S., Mittner M.*, Phys. Fluids, 10, 799 (1967).  
Electrical Conductivity of Partially Ionized Gases in a Magnetic Field.  
22. *Sikarofsky I. P., Johnston T. W., Brachynski M. P.*, The Particle Kinetics  
of Plasmas, Addison-Wesley, 1966.  
23. *Spitzer L.*, Physics of Fully Ionized Gases, Wiley, 1962.  
24. *Spitzer L., Harm R.*, Phys. Rev., 89, 977 (1953).  
Transport Phenomena in a Completely Ionized Gas.  
25. *Vaughan-Williams R. W., Haas F. A.*, Phys. Rev. Lett., 6, 165 (1961).  
An Error in the Thermal Conductivity for a Fully Ionized Gas.  
26. *Viegas J. R., Kruger C. H.*, Phys. Fluids, 12, 2050 (1969).  
Electron Distribution Function for a Nonequilibrium Plasma in a Strong  
Electric Field.

W569: —  
Vol. 41. с. 2130. 19 702

G1  
6062  
и н 533. 7  
1468

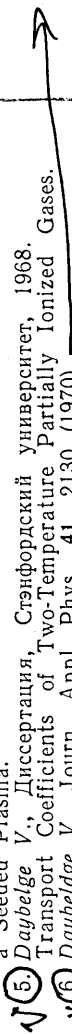
Но если выполняется условие (8.1), то вклад величины  $\nu_{ne}$  в сумму будет пренебрежимо мал, поскольку благодаря наличию ионного члена величина  $\nu_{ei}$  по крайней мере не меньше  $\nu_{ee}$ . Если слова предположить, что член, учитывающий увеличение энергии за счет неупругих столкновений, не превышает члена неупругих потерь энергии, то этот вывод справедлив даже в том случае, когда сечение неупругих столкновений не изотропно. Таким образом, если выполняется условие (8.1), то, несмотря на то что неупругие столкновения существенно входят в уравнения непрерывности и энергии, ход вычисления электронных коэффициентов переноса (§ 4) остается без изменения.

В следующей главе мы более обстоятельно рассмотрим эффекты неупругих столкновений. Особое внимание будет уделено отклонениям от уравнения Саха и скоростям ионизации и рекомбинации.

**Задача 8.1.** Обобщите уравнение энергии для электронов (8.5) таким образом, чтобы член неупругих потерь (8.4) учитывал несколько сортов однозарядных ионов с разными потенциалами ионизации.

**Литература**

1) *Бисноватый-Козан Г. С.*, Журн. прикл. мех. и техн. физ., 3, 43 (1964).  
Перенос тепла и диффузия в частично ионизованной двухтемпературной плазме.  
2. *Brown S. C.*, Basic Data of Plasma Physics, M.I.T. Press, 1967.  
3) *Chapman S., Cowling T. G.*, The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, 2nd Edition, Cambridge, 1952 (имеется перевод: С. Чельмен, Т. Каулине, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1960).  
4. *Cool T. A., Zukoski E. E.*, в книге Proc. Sixth Symp. Engin. Aspects of MHD, Univ. of Pittsburgh, 1965; Phys. Fluids, 9, 780 (1966).  
Recombination Rates and Nonequilibrium Electrical Conductivity in a Seeded Plasma.  
5) *Daybelge V.*, Диссертация, Стэнфордский университет, 1968.  
Transport Coefficients of Two-Temperature Partially Ionized Gases.  
6) *Daybelge V.*, Journ. Appl. Phys., 41, 2130 (1970).  
Unified Theory of Partially Ionized Nonisothermal Plasmas.  
7. *Devoto R. S.*, Phys. Fluids, 10, 2105 (1967).  
Simplified Expressions for the Transport Properties of Ionized Monatomic Gases.  
8. *Devoto R. S.*, Zs. Naturforsch., 24a, 967 (1969).  
Heat and Diffusion in a Multicomponent Ionized Gas in a Magnetic Field I. General Expressions.  
9. *Frost L. S.*, Journ. Appl. Phys., 32, 2029 (1961).  
Conductivity of Seeded Atmospheric Pressure Plasmas.  
10) *Hirschfelder J. O., Curtiss C. F., Bird R. B.*, Molecular Theory of Gases and Liquids, corrected printing, Wiley, 1964.  
11. *Hwa R. C.*, Phys. Rev., 110, 307 (1957).  
Effects of Electron-Electron Interactions on Cyclotron Resonances in Gaseous Plasmas.  
12. *Калишман Л. Е.*, Элементы магнитной газодинамики, М., 1964.)  
13. *Kihara T., Aono O.*, Journ. Phys. Soc. Japan, 18, 837 (1963).  
Unified Theory of Relaxations in Plasmas, part I: Basic Theorem.



## ИОНИЗАЦИОННАЯ НЕРАВНОВЕСНОСТЬ

### § 1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей главе мы рассматривали явления переноса, связанные с неравновесностью частично ионизованной плазмы в отношении поступательных степеней свободы. При этом подразумевалось, что концентрация электронов известна или может быть вычислена независимым способом, как, например, в случае, когда  $n_e$  можно выразить через температуру  $T_e$  на основании уравнения Саха. Кроме того, было показано, что в широком диапазоне условий учет неупругих столкновений не оказывает прямого влияния на результаты вычисления коэффициентов переноса. В соответствии с этим в предыдущей главе основное внимание уделялось влиянию неупругих столкновений.

В данной же главе мы обратимся к рассмотрению некоторых термодинамических свойств частично ионизованной плазмы. В частности, мы будем делать упор на соотношение между неупругими электрон-атомными и электрон-ионными столкновениями и радиационными процессами, от которого зависит степень ионизации в плазме и заселенность возбужденных уровней атомов. Нашей целью здесь будет лишь познакомить читателя с некоторыми важнейшими сообщениями, связанными с решением этих вопросов, а не излагать полную и общую теорию и не выводить численные формулы для различных практических случаев. В отличие от того, с чем мы встретились при вычислении коэффициентов переноса, из-за сложности явления ионизационной неравновесности и его зависимости от целого ряда сечений неупругих процессов в рассматриваемой плазме простые рабочие формулы типа правила смеси (гл. 8, § 7) в данном случае получить гораздо труднее. Поэтому подход к вычислению (в том числе необходимые приближения и соответствующие сечения столкновений) будет здесь зависеть от конкретных условий, существующих в плазме. Тем не менее мы сможем указать, по крайней мере качественно, каких эффектов можно ожидать, и рассмотрим конкретные результаты, такие, например, как приведенные в работе [5] и широко используемая приближенная формула Хиннова и Хиршберга [17] для скорости рекомбинации.

В соответствии с указанной выше целью мы ограничим наше рассмотрение процессами ионизации и возбуждения связанных электронных уровней отдельных атомов в условиях, когда эти про-

цессы вызваны либо неупругими столкновениями атомов со свободными электронами плазмы, либо испусканием или поглощением излучения. Это означает, что мы не будем рассматривать возбуждение и ионизацию молекул и эффекты, связанные с неупругими атом-атомными столкновениями. В плазме, содержащей атомы лишь одного сорта, вклад атом-атомных столкновений в рассматриваемые процессы во всех случаях, представляющих для нас интерес (кроме случая малой плотности электронов), действительно мал. В плазме же, в которой имеются молекулярные компоненты, обмен энергией между внутренними степенями свободы молекул (в особенности между колебательными и электронными возбуждениями и ионизацией) может быть весьма значительным. Однако общий подход к исследованию этой ситуации и качественный характер наблюдаемых эффектов аналогичны тем, которые мы будем рассматривать для случая плазмы, состоящей из атомов одного сорта.

Кроме того, мы почти везде в данной главе будем предполагать, что благодаря наличию электрон-электронных столкновений функция распределения свободных электронов близка к максвелловской, и не только для электронов с тепловой энергией, как в гл. 8, § 3, но также и для электронов с большей энергией, которые участвуют в столкновениях, приводящих к возбуждению и ионизации. Без этого предположения потребовалось бы гораздо более сложные предварительные рассуждения. Более общий случай, когда уравнение Больцмана для электронной функции распределения связано с рассматриваемыми в данной главе уравнениями для скоростей процессов, пока что является предметом исследований. Несколько слов о таком подходе мы скажем в § 5.

В § 2 выводятся уравнения непрерывности, определяющие концентрацию электронов, и уравнения для скоростей процессов, определяющие заселенность разных возбужденных уровней. Уравнения для скоростей процессов используются в § 3 для анализа стационарной плазмы, в которой отсутствуют эффекты конвекции. Затрагивается также вопрос о влиянии «хода» излучения на заселенность уровней и на отклонения от уравнения Саха. Затем в § 4 рассматриваются коэффициенты ионизации и рекомбинации в стационарной и движущейся плазме. В этих двух случаях зависящие от времени или конвективные члены в уравнениях непрерывности для электронов и возбужденных атомов могут быть заменены соответствующими скоростными процессами, полученными в § 2. В первых четырех параграфах функция распределения свободных электронов предполагается максвелловской, так что проводимое в них рассмотрение не связано с решением уравнения Больцмана для электронов. В § 5 рассматривается случай, требующий решения уравнения Больцмана, и показано, к каким изменениям приводит немаквелловский вид функции распределения при низких концентрациях электронов. В последнем параграфе теории, рассмотренная в § 4,

наковой энергией, практически уравнения непрерывности и скоростей процессом часто применяются и к группам таких уровней с приблизительно одинаковой энергией. В таком случае « $k$ -й уровень» это несколько реальных уровней, взятых вместе. Такая группировка уровней возможна благодаря установлению равновесия между соседними уровнями за счет столкновений.

Прежде чем вывести общие уравнения для скоростей процессов, рассмотрим упрощенный вариант уравнения для скоростей процессов, связанных с первым возбужденным уровнем.

Во многих случаях заселенность  $n_2$  этого уровня определяется главным образом скоростями столкновительного и излучательного переходов только с основного уровня ( $k = 1$ ) и на него. Как указывалось раньше, мы будем рассматривать только те случаи, когда столкновительные возбуждения и потеря возбуждения происходят за счет электрон-атомных столкновений. Число *неупругих возбуждающих столкновений* (в единице объема и в единицу времени) типа  $e + A_1 \rightarrow e + A_2$  ( $A_1$  и  $A_2$  — это атомы на первом и втором уровнях) пропорционально произведению  $n_e n_1$  и может быть записано как

$$n_e n_1 I S^2.$$

В условиях, когда отклонение электронной функции распределения от изотропной функции  $f^0(C)$  мало, *скоростной интеграл*  $I S^2$  следующим образом выражается через сечение возбуждения  $Q^{1 \rightarrow 2}$ :

$$I S^2 = \int_0^{\infty} \frac{f^0(C) C Q^{1 \rightarrow 2}(C) 4\pi C^2 dC}{\sqrt{2\epsilon_{12}/m_e}}$$

Здесь  $\epsilon_{12}$  — энергия возбуждения, измеряемая от основного уровня, а  $Q^{1 \rightarrow 2}$  — полное сечение столкновения, проинтегрированное по всем углам отклонения. Мы учли малость электронной массы, приняв относительную скорость  $g$  равной  $C$ , а сечение  $Q^{1 \rightarrow 2}(g)$  равным  $Q^{1 \rightarrow 2}(C)$ , и провели интегрирование по скоростям электронов. Выбор нижнего предела интегрирования объясняется тем, что для возбуждения кинетическая энергия  $1/2 m_e C^2$  должна превышать  $\epsilon_{12}$ . О сечении столкновения  $Q^{1 \rightarrow 2}$  и других сечениях упомянутых столкновений, которые нам встретятся, говорится в гл. 2, где приведены их типичные значения (§ 14).

Величину для  $I S^2$  принято выражать через энергию электронов  $e = 1/2 m_e C^2$ . Если предположить, что функция распределения электронов является максвелловской, т. е.

$$f^0 = f_M(e) = \left( \frac{m_e}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-e/kT},$$

используется для исследования ионизационной неравновесности в движущейся плазме.

## § 2. УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ И УРАВНЕНИЯ СКОРОСТЕЙ ПРОЦЕССОВ

В однородной плазме уравнение непрерывности для заселенности, т. е. для концентрации атомов, находящихся на данном возбужденном уровне, связывает скорость процессов столкновительного и радиационного возбуждения и потери возбуждения со скоростью изменения концентрации атомов на данном возбужденном уровне. Аналогично уравнение непрерывности для концентрации свободных электронов включает скорости ионизации и рекомбинации. В неравновесной плазме, кроме этих уравнений, нужно рассматривать эффекты конвекции и диффузии. Если, как и в гл. 8, § 8, концентрацию атомов на  $k$ -м возбужденном уровне обозначить через  $n_k$ , а соответствующую скорость образования таких атомов в результате неупругих столкновений и радиационных процессов, отнесенную к единице объема, обозначить через  $n_k$ , то уравнение непрерывности для  $k$ -го уровня записывается следующим образом:

$$\frac{dn_k}{dt} + \nabla \cdot [n_k (\mathbf{u} + \mathbf{U}_k)] = \dot{n}_k. \quad (2.1)$$

Здесь, как и раньше,  $\mathbf{u}$  — массовая скорость плазмы как целого,  $\mathbf{U}_k$  — диффузионная скорость атомов на  $k$ -м уровне. Соответствующее уравнение непрерывности для электронов имеет вид

$$\frac{dn_e}{dt} + \nabla \cdot [n_e (\mathbf{u} + \mathbf{U}_e)] = \dot{n}_e. \quad (2.2)$$

Аналогичное уравнение записывается для ионов. Можно считать, что эти уравнения непосредственно следуют из физического требования непрерывности величин  $n_k$  и  $n_e$ ; кроме того, их можно получить путем интегрирования по скоростям уравнений Больцмана для возбужденных атомов и электронов. Во втором случае члены с  $n_k$  и  $n_e$  представляют собой интегралы по скоростям от членов, описывающих неупругие столкновения.

В данном параграфе мы выведем выражения для  $n_k$  и  $n_e$ . Уравнения для этих величин называются *уравнениями скоростей процессов*. Ради ясности и простоты мы ограничимся рассмотрением квазинейтральной плазмы с одной ионизируемой компонентой, так что  $k$ -й уровень будет уровнем электронного возбуждения этой компоненты. Кроме того, мы пренебрежем многократной ионизацией и будем считать, что число ионов, возбужденных выше своего основного уровня, пренебрежимо мало. Хотя мы под уровнем понимаем набор выроджденных и неразличимых квантовых состояний с оди-



Если это отношение мало, то радиационными процессами можно пренебречь.

Все сказанное выше нетрудно обобщить так, чтобы получить общие уравнения скоростей процессов для  $n_k$  и  $n_e$ . Но в общем случае мы должны также учесть скорости ионизации и рекомбинации для рассматриваемого уровня. Отнесенные к единице объема скорости столкновительной ионизации и трехчастичной рекомбинации, опираясь на уравнение  $e + A_k \rightleftharpoons e + e + A^+$ , даются выражениями

$$n_e n_k S^{\lambda}$$

и

$$n_e^2 n_i S_k = n_e^3 S_k^{\lambda},$$

где символ  $\lambda$  обозначает состояния, лежащие в континууме и отвечающие свободным электронам. Вводя сечение ионизации  $Q^{\lambda \rightarrow k}$ , имеем

$${}_k S^{\lambda} = \int_{\epsilon_{k\lambda}}^{\infty} f_M(\epsilon) Q^{\lambda \rightarrow k} \frac{8\pi}{m_e^2} \epsilon \, d\epsilon, \quad (2.9)$$

где  $\epsilon_{k\lambda}$  — потенциал ионизации  $k$ -го уровня. Соответствующее соотношение для величины  ${}_k S_k^{\lambda}$ , выраженное через сечение  $q^{\lambda \rightarrow k}$  трехчастичной рекомбинации, имеет вид (гл. 2, задача 11.4)

$${}_k S_k^{\lambda} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_M(\epsilon) f_M(\epsilon') g^{\lambda \rightarrow k}(\epsilon, \epsilon') \frac{32 \sqrt{2} \pi^2}{m_e^{7/2}} \epsilon \sqrt{\epsilon'} \, d\epsilon' \, d\epsilon, \quad (2.10)$$

где  $\epsilon$  — энергия второго электрона, участвующего в столкновении. Особенностью этого процесса является то, что сечение  $q^{\lambda \rightarrow k}$  (в том виде, в котором оно используется здесь) измеряется в  $\text{см}^6$ , а не в  $\text{см}^2$ . Но в случае максвелловской функции распределения не обязательно пользоваться уравнением (2.10), поскольку из принципа детального равновесия прямо следует соотношение (гл. 2, задача 11.6)

$$\frac{{}_k S_k^{\lambda}}{\lambda S_k} = \left( \frac{n_e^2}{n_k} \right)^* = \left( \frac{2\pi m_e k T e}{h^2} \right)^{3/2} \frac{2g_i}{g_k} e^{-\epsilon_{k\lambda}/kT e}, \quad (2.11)$$

где  $g_i$  — кратность вырождения основного уровня иона, причем величина  $(n_e^2/n_k)^*$  выражена через  $T_e$  на основании уравнения Саха для  $k$ -го атомного уровня.

Теперь мы можем записать вклад столкновительных процессов в величину  $n_k$  как

$$n_{k, \text{столкн}} = n_e \left[ \sum_{j < k} n_j S^k + \sum_{l > k} n_l S_k^l + n_e^2 S_k - n_k \left( \sum_{j < k} n_j S^j + \sum_{l > k} n_l S^l + {}_k S^{\lambda} \right) \right] \quad (2.12a)$$

или, иначе,

$$n_{k, \text{столкн}} = n_e \left\{ \sum_{j < k} n_j S^k \left[ 1 - \frac{n_k/n_j}{(n_k/n_j)^*} \right] + n_k \sum_{l > k} S^l \left[ \frac{n_l/n_k}{(n_l/n_k)^*} - 1 \right] + n_k S^{\lambda} \left[ \frac{n_e^2/n_k}{(n_e^2/n_k)^*} - 1 \right] \right\}. \quad (2.12b)$$

В уравнении (2.12a) первые три члена, стоящие в квадратных скобках, учитывают столкновительное возбуждение на  $k$ -й уровень в результате неупругих переходов с нижних уровней, сверхуруригных переходов с верхних уровней и трехчастичной рекомбинации. Последние же три члена учитывают потерю возбуждения в столкновительных процессах: сверхуруригные переходы с  $k$ -го на нижние уровни, неупругие переходы с  $k$ -го на верхние уровни и столкновительную ионизацию с  $k$ -го уровня. Уравнение (2.12b) выражает принцип детального равновесия для скоростных интегралов и показывает, что  $n_{k, \text{столкн}} = 0$  при равновесном значении отношения концентрации. Скоростные интегралы  ${}_j S^k$  и  ${}_k S_j$  в уравнении (2.12) выражаются через соответствующие сечения соотношениями

$${}_j S^k = \int_{\epsilon_{jk}}^{\infty} f_M(\epsilon) Q^{j \rightarrow k}(\epsilon) \frac{8\pi}{m_e^2} \epsilon \, d\epsilon, \quad (2.13)$$

$${}_k S_j = \int_0^{\infty} f_M(\epsilon) Q^{k \rightarrow j} \frac{8\pi}{m_e^2} \epsilon \, d\epsilon, \quad (2.14)$$

аналогичными соотношениям (2.3) и (2.4) для переходов  $l \rightleftharpoons 2$ . Принцип детального равновесия для величин  ${}_j S^k$  и  ${}_k S_j$ , который, как и раньше, выполняется только при  $f^0 = f_M$ , имеет вид (формула (2.6))

$$\frac{{}_j S^k}{{}_k S_j} = \left( \frac{n_k}{n_j} \right)^* = \frac{g_k}{g_j} e^{-\epsilon_{jk}/kT e}. \quad (2.15)$$

Соотношения (2.13) — (2.15) выполняются также для скоростных интегралов  ${}_k S^l$  и  ${}_l S_k$  при соответствующей замене верхних и нижних индексов.

Чтобы закончить вывод уравнения скорости процесса для  $n_k$ , нам нужно еще учесть, как и в уравнении (2.5), радиационные процессы. Отнесенная к единице объема скорость уменьшения заселенности  $k$ -го уровня в результате спонтанного излучения при переходах типа  $A_k \rightarrow A_j + h\nu$  равна

$$n_k A_{kj}, \quad (2.16)$$

где  $A_{kj}$  — коэффициент Эйнштейна для этого перехода. Соответствующая скорость роста заселенности  $k$ -го уровня в результате

Поскольку удельная интенсивность излучения  $I_\nu$  зависит от испускания и поглощения излучения во всей плазме, при вычислении выражения (2.18) нужно учитывать перенос излучения. Чтобы избежать этого осложнения (или, скорее, чтобы сделать его менее явным), введем параметр локального «ухода» излучения  $\beta_{kj}$  в соответствии с соотношением

$$(1 - \beta_{kj}) n_k A_{kj} = \left( n_j - \frac{g_j}{g_k} n_k \right) B_{jk} \int_0^{4\pi} \varphi_{jk}(\nu) I_\nu d\Omega d\nu. \quad (2.19)$$

Вклад, вносимый в величину  $n_k$  процессами испускания и поглощения излучения при переходах  $j \rightleftharpoons k$ , на основании выражений (2.16) и (2.18) и равенства (2.19) можно написать равным

$$-n_k A_{kj} \beta_{kj}. \quad (2.20)$$

В условиях, когда  $\beta_{kj} \approx 0$  (например, в случае оптически толстой плазмы), между испусканием и поглощением существует локальное равновесие. В частности, такое равновесие существует для локальных квазиравновесных величин  $n_k/h_j$  и  $I_\nu$ . Для большинства типов лабораторной плазмы излучение, связанное с переходами при  $j > 1$ , уходит из плазмы, и в этом случае  $\beta_{kj} \approx 1$ . Переходы же, для которых  $j = 1$ , заканчиваются на основном уровне. Излучение, соответствующее таким переходам, — резонансное. Поскольку концентрация поглощающих атомов, находящихся в основном состоянии, сравнительно велика, параметр ухода излучения  $\beta_{k1}$  для резонансного излучения часто оказывается малым. Тем не менее, поскольку величина  $A_{k1}$  обычно велика, произведение  $A_{k1}\beta_{k1}$  может не быть пренебрежительно малым по сравнению с соответствующей скоростью столкновительных процессов  $n_e S_1$ , особенно при низких значениях  $n_e$ . Параметры  $\beta_{k1}$  (а также  $\beta_{kj}$ ), если не известно, что они равны приблизительно единице, нужно вычислять в каждом конкретном случае на основе теории переноса излучения.

Теперь мы рассмотрим так называемые свободно-связанные излучательные переходы, соответствующие процессам фотонизации и двухчастичной рекомбинации, которые описываются уравнением  $h\nu + A_k \rightleftharpoons c + A^+$ . Отнесенная к единице объема скорость  $n_e n_i A_{lk}$  процесса двухчастичной рекомбинации выражается через соответствующие сечения  $Q^{\lambda \rightarrow h}(\epsilon)$  следующим образом (гл. 2, § 11 и задача 11.5):

$$n_e n_i A_{lk} = n_e n_i \int_0^\infty f_M(\epsilon) Q^{\lambda \rightarrow h}(\epsilon) \frac{8\pi}{m_e^2} \epsilon d\epsilon. \quad (2.21)$$

Поглощение излучения при переходах, соответствующих процессу фотоионизации  $h\nu + A_k \rightarrow c + A^+$ , мы учитываем параметром ухода излучения  $\beta_{lk}$ , таким, что величина  $(1 - \beta_{lk})$  есть отношение

поглощения излучения в обратном процессе  $A_j + h\nu \rightarrow A_k$  равна

$$n_j B_{jk} \int_0^{4\pi} \varphi_{jk}(\nu) I_\nu d\Omega d\nu. \quad (2.17)$$

Здесь  $B_{jk}$  — коэффициент Эйнштейна (гл. 2, § 9 и 11), который связан с  $A_{kj}$  соотношением  $A_{kj}/4\pi B_{jk} = 2g_k \epsilon_{jk}^3 / g_j h^2 c^2$  ( $h$  — постоянная Планка,  $c$  — скорость света). Величина  $\int_0^{4\pi} I_\nu d\Omega$  есть удельная интенсивность излучения, проинтегрированная по всему телесному углу. Она пропорциональна спектральной плотности излучения. Функция формы линии  $\varphi_{jk}(\nu)$  введена для учета того обстоятельства, что в результате уширения линии частота излучения для рассматриваемого перехода не является строго фиксированной, а меняется в узком диапазоне. Функция  $\varphi_{jk}(\nu)$  отвечает условию нормировки, а именно  $\int_0^{4\pi} \varphi_{jk}(\nu) d\nu = 1$ , где интегрирование проводится по всем частотам данной линии. Строго говоря, такая нормировка величины  $\varphi_{jk}$  допустима постольку, поскольку равновесное значение  $I_\nu$  определяется функцией Планка  $B_\nu$ , почти не зависит от  $\nu$  по всей эффективной ширине линии. Более точное соотношение, обеспечивающее детальное равновесие в равновесных условиях, имеет вид  $\int_0^{4\pi} \varphi_{jk}(\nu) B_\nu(\nu) d\nu = B_\nu(h\nu = \epsilon_{jk})$ , где величина  $\epsilon_{jk}$  фиксирована. (См. задачу 2.4.)

Кроме переходов, связанных с поглощением и спонтанным излучением, мы должны в общем случае учесть явление вынужденного излучения, при котором переходы вниз ( $k \rightarrow j$ ) стимулируются имеющимися подем излучения. Скорость таких переходов пропорциональна  $n_k$  и удельной интенсивности излучения  $I_\nu$ . Если предположить, что функция формы линии для вынужденного излучения такая же, как и для поглощения, то эта скорость дается выражением (2.17), где величину  $n_j$  нужно заменить величиной  $n_k g_j / g_k$ . Суммарный эффект поглощения и вынужденного излучения дается скоростью процесса

$$\left( n_j - \frac{g_j}{g_k} n_k \right) B_{jk} \int_0^{4\pi} \varphi_{jk}(\nu) I_\nu d\Omega d\nu. \quad (2.18)$$

Попутно заметим, что если в неравновесном случае имеется инверсная заселенность, так что  $n_k g_j / g_k > n_j$ , то удельная интенсивность увеличивается из-за преобладания индуцированного излучения над поглощением и поле излучения отбирает энергию из плазмы. В соответствующих условиях это может привести к эффекту, используемому в лазерах. [Более подходящее для этого случая выражение можно получить, опустив оба интегрирования в выражении (2.18)].

скорости процесса ионизации к скорости двухчастичной рекомбинации. Вклад этих процессов в величину  $n_k$  равен

$$+ n_e^2 A_{\lambda k} \beta_{\lambda k}, \quad (2.22)$$

где величина  $n_e$  поставлена вместо произведения  $n_e n_i$ . С учетом выражений (2.20) и (2.22), проводя суммирование по всем относящимся к данному случаю переходам, получаем полный вклад радиационных процессов в величину  $n_k$ :

$$n_{k, \text{изл}} = -n_k \sum_{j < k} A_{kj} \beta_{kj} + \sum_{l > k} n_l A_{lk} \beta_{lk} + n_e^2 A_{\lambda k} \beta_{\lambda k}. \quad (2.23)$$

Здесь второй и третий члены учитывают переходы вниз, заканчивающиеся на  $k$ -м уровне.

Теперь на основании уравнений (2.12а) и (2.23) мы можем получить выражение для скорости изменения величины  $n_k$  в результате столкновительных и радиационных процессов, а именно

$$n_k = n_e \sum_{j < k} n_j S^j - n_k \left[ \sum_{j < k} (n_e S_j + A_{kj} B_{kj}) + n_e \left( \sum_{l > k} S^l + k S^{\lambda} \right) \right] + \sum_{l > k} n_l (n_e l S_k + A_{lk} \beta_{lk}) + n_e^2 (n_e^{\lambda} S_k + A_{\lambda k} \beta_{\lambda k}). \quad (2.24)$$

Здесь члены сгруппированы по их зависимости от  $n_j$ ,  $n_k$ ,  $n_l$  и  $n_e^{\lambda}$ . Отметим, что коэффициенты  ${}^k S_j$ ,  ${}^l S_k$  и  ${}^{\lambda} S_k$  можно выразить через  ${}^j S^k$ ,  ${}^k S^l$  и  ${}^k S^{\lambda}$  в силу соотношений (2.11) и (2.15).

Путем аналогичных рассуждений можно получить соответствующее выражение и для  $n_e$ . Действительно, мы уже рассмотрели все процессы, которые вносят вклад в  $n_e$ , поскольку эти процессы связаны с переходами на связанные уровни и с них. После этого в вычислении  $n_e$  осталась только техническая сторона вопроса. Результат имеет вид

$$n_e = \sum_k [n_e n_k k S^{\lambda} - n_e^2 (n_e^{\lambda} S_k + A_{\lambda k} \beta_{\lambda k})]. \quad (2.25)$$

Как нетрудно убедиться, из уравнений (2.24) и (2.25) следует равенство

$$n_e + \sum_k n_k = 0. \quad (2.26)$$

Это согласуется с тем, что при вычислении величины  $n_k$ , как мы видели, рассматривались те же процессы, которые вносят вклад в величину  $n_e$ . В уравнении (2.26) находит выражение то обстоятельство, что в рассматриваемом случае, когда  $n_e = n_i$ , полная плотность тяжелых частиц (атомы плюс ионы) данной компоненты не меняется за счет неупругих столкновений и радиационных про-

цессов. Наличие уравнения (2.26) свидетельствует о том, что система уравнений скоростей процессов для  $n_k$  и  $n_e$  неопределена, т. е. одно уравнение является лишним.

Получив выражения для  $n_k$  и  $n_e$ , мы перейдем теперь к исследованию вопроса о влиянии ухода излучения на отклонение заселенности различных уровней и степени ионизации от их равновесных значений.

**Задача 2.1.** Найдите из уравнений (2.7) выражение для  $n_2/n_1$  в случае однородной стационарной плазмы, для которой, согласно уравнению (2.1),  $n_2 = 0$ .

**Задача 2.2.** Рассмотрим нестационарную плазму, в которой пространственные градиенты отсутствуют, а величины  $n_e$ ,  $n_1$  и  $T_e$  постоянны. Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  величина  $n_2$  больше своего равновесного значения. Пользуясь приближенным уравнением (2.7) для  $n_2$ , найдите зависимость  $n_2$  от времени. Каково время релаксации этого процесса? Как изменятся результаты, если в начальный момент времени величина  $n_2$  меньше своего равновесного значения?

**Задача 2.3.** Напишите «реакции» типа  $e + A_j \rightarrow e + A_k$  для каждого перехода, входящего в уравнения скоростей процессов (2.12а), (2.24) и (2.25).

**Задача 2.4.** Покажите, что в равновесном случае выполняется равенство  $\beta_{kj} = 0$ , если  $n_k/n_j = (n_k/n_j)^*$  и удельная интенсивность излучения дается формулой Планка

$$B_{\nu} = \frac{2h\nu^3/c^2}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

**Задача 2.5.** Найдите выражения для отношений, аналогичных отношению (2.8), малость которых позволяет пренебречь радиационными процессами в уравнениях (2.24) и (2.25).

### § 3. ОТКЛОНЕНИЯ ОТ УРАВНЕНИЯ САХА

В данном параграфе мы рассмотрим уравнения для заселенности уровней  $n_k$  и плотности электронов  $n_e$  в однородной стационарной плазме. Вначале может показаться, что в таких условиях величины  $n_k$  и  $n_e$  всегда равны их равновесным значениям. Но из-за ухода излучения возможна неравновесная ситуация, такая, что отношения  $n_k/n_1$  не равны значению  $(n_k/n_1)^*$ , даваемому формулой (2.15), а отношение  $n_e^2/n_1$  не равно значению  $(n_e^2/n_1)^*$ , даваемому уравнением Саха (2.11).

Прежде чем переходить к общему уравнению для скорости процесса применительно к однородной стационарной плазме, рассмотрим

рим простую приближенную модель двухуровневой системы. В этой модели считается, что атомы пониженных компонент имеют только два уровня — основной и первый возбужденный. Тогда, согласно уравнениям (2.24) и (2.25), соответствующие уравнения скоростей процессов для  $n_2$  и  $n_e$  имеют вид

$$n_2 = 0 = n_e n_1 S^{\lambda} - n_2 (n_e {}^{\lambda} S_1 + A_{21} \beta_{21} + n_e {}_2 S^{\lambda}) + n_e^2 (n_e {}^{\lambda} S_2 + A_{\lambda 2} \beta_{\lambda 2}), \quad (3.1)$$

$$n_e = 0 = n_e (n_1 S^{\lambda} + n_2 {}_2 S^{\lambda}) - n_e^2 (n_e {}^{\lambda} S_1 + A_{\lambda 1} \beta_{\lambda 1} + n_e {}^{\lambda} S_2 + A_{\lambda 2} \beta_{\lambda 2}). \quad (3.2)$$

Здесь величины  $n_2$  и  $n_e$  положены равными нулю, поскольку мы имеем дело с однородной и стационарной плазмой. Хотя двухуровневая модель не может точно описывать реальную систему, она пригодна для качественной демонстрации основных эффектов, которых мы хотим коснуться в данном параграфе. Возбужденный уровень в этой модели можно трактовать либо как реальный первый возбужденный уровень рассматриваемой ионизуемой компоненты, либо как многократно вырожденный «обобщенный» уровень, выбранный таким образом, чтобы приближенно учесть влияние нескольких лежащих ниже уровней.

В качестве следующего приближения удобно пренебречь в уравнении скорости процесса (3.1) для  $n_2$  всеми переходами между возбужденным уровнем и континуумом. Такое упрощение, приводящее к уравнениям скоростей процессов (2.5) и (2.7) предыдущей главы, допустимо в случае, когда скорости увеличения и уменьшения заселенности  $n_2$  некоторого уровня, связанные с переходами в континуум и из континуума, малы по сравнению с соответствующими скоростями, связанными с переходами на основной уровень и с него. Анализ уравнения (3.1) показывает, что это условие выполняется при

$${}_2 S^{\lambda} \ll {}_2 S_1 \quad (3.3a)$$

и

$$n_e^2 {}^{\lambda} S_2 + n_e A_{\lambda 2} \beta_{\lambda 2} \ll n_1 S^{\lambda}. \quad (3.3b)$$

Из физических соображений можно сказать, что условие (3.3a) должно, как правило, выполняться, поскольку в случае, когда потенциал ионизации  $e_2 \lambda$  велик по сравнению с энергией теплового движения электрона  $3/2 k T_e$ , столкновение между электроном и возбужденным атомом с большей вероятностью будет приводить к сверхупругому переходу вниз ( $2 \rightarrow 1$ ), чем к переходу, соответствующему ионизации ( $2 \rightarrow \lambda$ ). Этот вывод подтверждается значениями

отношения  ${}_2 S^{\lambda} / {}_2 S_1$ , вычисленными на основании данных, приведенных в табл. 1 (зидичи 3.2). Когда условие (3.3a) выполняется, первый член в левой части неравенства (3.3b) намного меньше члена в правой части, поскольку, согласно соотношениям (2.6) и (2.11),

$$\frac{{}^{\lambda} S_2}{{}_1 S^2} = \left( \frac{n_1}{n_e} \right) * \frac{{}_2 S^{\lambda}}{{}_2 S_1}$$

и, как будет показано ниже, в данном случае

$$\frac{n_e^2}{n_1} \ll \left( \frac{n_2}{n_1} \right) *.$$

Кроме того, второй член в левой части неравенства (3.3b) будет также намного меньше члена в правой части, если, как это часто бывает, скорость двухчастичной рекомбинации, изменяющей заселенность  $n_2$ , меньше скорости трехчастичной рекомбинации при равновесном значении  $n_e$  (задачи 3.1 и 3.2).

При этих условиях уравнение (3.1) скорости процесса для  $n_2$  можно заменить уравнением [формула (2.5)]

$$n_2 = 0 = n_e n_1 {}_1 S^2 - n_2 (n_e {}_2 S_1 + A_{21} \beta_{21}). \quad (3.4)$$

На основании принципа детального равновесия (2.6) решение уравнения (3.4) можно записать в виде

$$\frac{n_2/n_1}{(n_2/n_1)*} = \frac{1}{1 + R_2}, \quad (3.5)$$

где  $R_2$  — величина, даваемая выражением

$$R_2 = \frac{A_{21} \beta_{21}}{n_e {}_2 S_1}. \quad (3.6)$$

Из соотношения (3.5) видно, что величина  $R_2$  характеризует степень уменьшения величины  $n_2/n_1$  (по сравнению с ее равновесным значением) из-за ухода излучения. При очень малых значениях  $\beta_{21}$  или больших значениях  $n_e$  величина  $R_2$  мала и отношение  $(n_2/n_1)$  приближается к  $(n_2/n_1)*$ . В предельном случае больших  $R_2$ , который на практике реализуется только при сравнительно малых  $n_e$ , отношение  $n_2/n_1$  приближается к значению

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{n_e (n_2/n_1)* {}_2 S_1}{A_{21} \beta_{21}} = \frac{n_e {}_1 S^2}{A_{21} \beta_{21}}. \quad (3.7)$$

В этом случае, например в солнечной короне, возбуждение на расматриваемый уровень происходит за счет переходов с основного уровня, а потеря возбуждения — за счет излучения. Следовательно, в этом случае радиационная потеря возбуждения преобладает над столкновительной в противоположность равновесной ситуации. Соотношение (3.5), используемое ниже при анализе отклонений от уравнения Саха, оказывается также весьма полезным при интер-

Приближенные значения величин, встречающихся в уравнениях скоростей процессов в двухуровневой модели для нескольких компонент плазмы

Приближенные значения скорости $v_e$	Приближенные значения величин, встречающихся в уравнениях скоростей процессов в двухуровневой модели для нескольких компонент плазмы																	
	$\epsilon_{12}$ , эВ	$\epsilon_{21}$ , эВ	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\epsilon_1$	$A_{21}$ , с <sup>-1</sup>	$A_{11}$ , см <sup>3</sup> /с	$A_{12}$ , см <sup>3</sup> /с	$2S_1$ , см <sup>3</sup> /с	$2S_1$ , см <sup>3</sup> /с	$(n_2^0/n_1)^*$ , см <sup>3</sup>	$A_{21}^{1/2}S_1 = n_e R_2^{1/2} \beta_{21}$ , см <sup>-3</sup>	$\lambda S_1$ , см <sup>6</sup> /с	$\lambda S_2$ , см <sup>6</sup> /с	$\lambda S_2/\lambda S_1$	$\frac{A_{11} + A_{12}}{\lambda S_1 + \lambda S_2} \equiv n_e R_2^{1/2} \beta_{21}$ , см <sup>-3</sup>		
Н	10,196	3,399	2	6	1	4,70·10 <sup>8</sup>	1,04·10 <sup>-15</sup>	3,04·10 <sup>-15</sup>	3,09·10 <sup>-9</sup>	8,91·10 <sup>-9</sup>	5,27·10 <sup>16</sup>	5,27·10 <sup>16</sup>	3,24·10 <sup>14</sup>	3,35·10 <sup>-29</sup>	4,91·10 <sup>-28</sup>	1,75·10 <sup>-28</sup>	95,8	1,29·10 <sup>15</sup>
Ar	11,650	4,105	1	12	6	2,50·10 <sup>8</sup>	1,04·10 <sup>-15</sup>	3,04·10 <sup>-15</sup>	3,09·10 <sup>-9</sup>	8,91·10 <sup>-9</sup>	8,10·10 <sup>16</sup>	8,10·10 <sup>16</sup>	3,24·10 <sup>14</sup>	3,35·10 <sup>-29</sup>	4,91·10 <sup>-28</sup>	1,75·10 <sup>-28</sup>	14,68	7,75·10 <sup>12</sup>
Na	2,104	3,031	2	6	1	4,14·10 <sup>7</sup>	8,52·10 <sup>-15</sup>	1,16·10 <sup>-14</sup>	7,91·10 <sup>-8</sup>	5,22·10 <sup>14</sup>	5,22·10 <sup>14</sup>	1,33·10 <sup>10</sup>	1,33·10 <sup>10</sup>	1,45·10 <sup>-27</sup>	4,56·10 <sup>-27</sup>	3,15	3,15	3,34·10 <sup>12</sup>
К	1,615	2,725	2	6	1	5,72·10 <sup>7</sup>	6,60·10 <sup>-15</sup>	9,94·10 <sup>-15</sup>	2,42·10 <sup>-7</sup>	2,36·10 <sup>14</sup>	2,36·10 <sup>14</sup>	5,10·10 <sup>11</sup>	5,10·10 <sup>11</sup>	1,46·10 <sup>-27</sup>	4,61·10 <sup>-27</sup>	3,16	3,16	2,72·10 <sup>12</sup>
Сs	1,432	2,462	2	6	1	5,07·10 <sup>7</sup>	5,65·10 <sup>-15</sup>	8,53·10 <sup>-15</sup>	7,20·10 <sup>-7</sup>	7,05·10 <sup>13</sup>	7,05·10 <sup>13</sup>	4,17·10 <sup>12</sup>	4,17·10 <sup>12</sup>	1,48·10 <sup>-27</sup>	4,70·10 <sup>-27</sup>	3,18	3,18	2,29·10 <sup>12</sup>

прецедии результатов некоторых спектроскопических измерений, связанных с величиной  $n_2$ . Например, по спектральному образцу D-линии натрия (5890 Å) [15, § 13.5] измеряется температура заселенности уровней  $T_{p2}$ , которая следующим образом связана с отношением  $n_2/n_1$ :

$$\frac{n_2}{n_1} \equiv \frac{g_2}{g_1} e^{-\epsilon_{12}/kT_{p2}} \quad (3.8)$$

Таким образом,  $T_{p2}$  — это температура, при которой распределение Больцмана (3.8) дает реальное значение отношения  $n_2/n_1$ . Из соотношений (3.5) и (2.6) следует, что температура заселенности уровней связана с температурой электронов соотношением

$$\frac{\epsilon_{12}}{k} \left( \frac{1}{T_{p2}} - \frac{1}{T_e} \right) = \ln(1 + R_2) \quad (3.9)$$

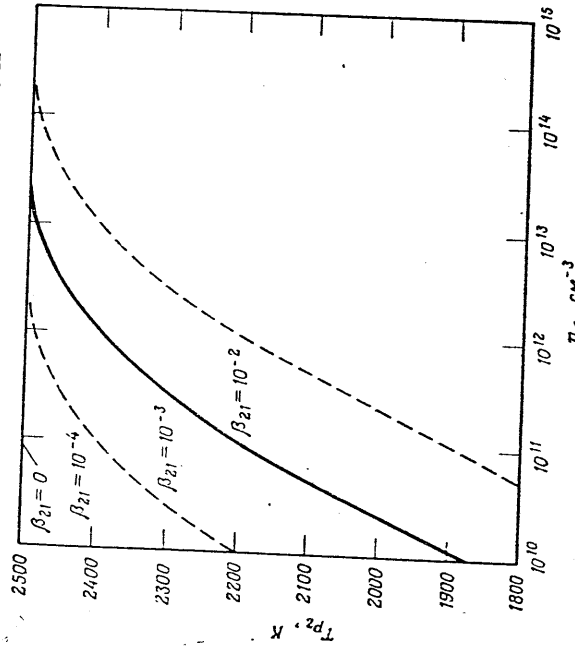
Отметим, что соотношения (3.9) и (3.5) применимы независимо от того, является ли рассматриваемая компонента (в данном случае натрия) основным источником электронов плазмы или нет. На практике при измерении обращения линии в частично ионизованную плазму добавляется небольшое количество натрия.

Согласно данным табл. 1, величины, входящие в уравнение (3.9), таковы:  $\epsilon_{12} = 2,1$  эВ,  $A_{21} = 4,14 \cdot 10^7$  с<sup>-1</sup>, и, например, при  $T_e = 2500$  К мы имеем  ${}^2S_1 = 7,91 \cdot 10^{-8}$  см<sup>3</sup>/с. Чтобы при таких условиях найти с помощью соотношения (3.9) разницу между  $T_{p2}$  и  $T_e$ , необходимо также знать параметр ухода излучения  $\beta_{21}$ , который входит в величину  $R_2$  [формула (3.6)]. Для плоского слоя однородной плазмы толщиной  $L$  решение уравнения переноса излучения [18] в случае резонансного излучения имеет следующий вид:

$$\beta_{21} = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha_{12}^0 x}} + \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha_{12}^0(L-x)}} \right], \quad (3.10)$$

где  $\alpha_{12}^0$  — коэффициент поглощения для центра резонансной линии, а  $x$  — расстояние от границы плазмы до рассматриваемой точки. [С учетом обозначений, введенных в § 2, коэффициент поглощения  $\alpha_{12}$  записывается как  $\alpha_{12} = n_1 V_{12} \nu \phi_{12}(\nu)$ ; поскольку обычно  $g_1^0 n_2 / g_2^0 n_1 \ll 1$ , эффектом, связанным с индуцированным излучением, в выражении (2.18) можно пренебречь. Выражение (3.10) применимо в том случае, когда предполагается, что фактор формы линии  $\phi_{12}(\nu)$  определяется уширением за счет столкновений. Для лабораторной плазмы толщиной  $L = 10$  см при температуре 2500 К и с относительной концентрацией натрия  $n_{Na}/n = 10^{-3}$  величина  $\beta_{21}$ , вычисленная по формуле (3.10) при  $x = L/2$ , порядка  $10^{-3}$ . Это значение определяется уширением линии за счет столкновений между атомами аргона и натрия, но не очень чувствительно к возмущающей компоненте (аргон). При заданной относительной концентрации натрия эта величина не зависит от давления до тех

пор, пока унитарие за счет столкновений является преобладающим. На фиг. 1 представлены кривые отклонения температуры исследований  $T_p$  от  $T_e$ , рассчитанные по формуле (3.9). Кривые соответствуют разным значениям  $\beta_{21}$ . Мы видим, что при  $\beta_{21} = 10^{-3}$  и при



Фиг. 1. Зависимость температуры заселенности калия  $T_{p2}$  при  $T_e = 2500$  К от плотности электронов при нескольких различных значениях параметра ухода излучения  $\beta_{21}$ .

плотности электронов ниже  $n_e = 10^{13}$  см<sup>-3</sup> температура заселенности уровней уже не дает точного значения электронной температуры. Следовательно, даже при малых значениях  $\beta_{21}$ , обусловленных большим коэффициентом поглощения для резонансного излучения, уход излучения может приводить к значительному отклонению отношения  $n_2/n_1$  от его равновесного значения.

Теперь мы вернемся к связанным уравнениям скоростей процессов в двухуровневой модели и последуем влиянию скорости ухода излучения на отклонение плотности электронов от равновесного значения, определяемого уравнением Саха. Решение уравнения (3.2) для скорости процесса  $\dot{n}_e$  имеет вид

$$\frac{\dot{n}_e}{n_1} (1 + R_\lambda) = \frac{1S^\lambda + (2S^\lambda) n_2/n_1}{\lambda S_1 + \lambda S_2}. \quad (3.11)$$

Величина  $R_\lambda$ , определяемая выражением

$$R_\lambda \equiv \frac{\lambda_{\lambda 1} \beta_{\lambda 1} + \lambda_{\lambda 2} \beta_{\lambda 2}}{n_e (\lambda S_1 + \lambda S_2)}, \quad (3.12)$$

есть мера относительного вклада радиационных и столкновительных процессов в изменение концентрации  $n_e$ . С учетом решения уравнения (3.5) скорости процесса для  $\dot{n}_e$  и принципа детального равновесия решение (3.11) для отношения  $n_2/n_1$  можно записать в виде

$$\frac{n_2/n_1}{(n_e/n_1)^*} = \frac{1}{1 + R_\lambda} \frac{1 + (\lambda S_2/\lambda S_1) (n_2/n_1) / (n_2/n_1)^*}{1 + (\lambda S_2/\lambda S_1)}, \quad (3.13)$$

где

$$\frac{n_2/n_1}{(n_2/n_1)^*} = \frac{1}{1 + R_\lambda}.$$

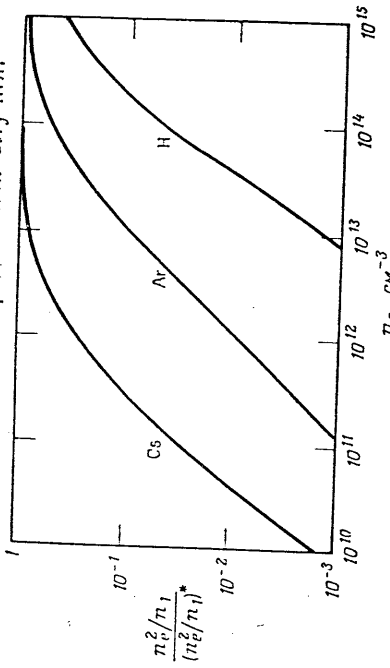
Из уравнения (3.13) видно, что, согласно двухуровневовой модели, уменьшение отношения  $n_2/n_1$  по сравнению с его равновесным значением определяется двумя множителями. Один из них,  $(1 + R_\lambda)^{-1}$ , показывает, в какой мере двухчастичная рекомбинация преобладает над фотоионизацией, а другой — через величину  $R_\lambda$  связан с уходом резонансного излучения, а также с отношением  $\lambda S_2/\lambda S_1$ . В табл. 1 представлены различные величины, входящие в уравнение (3.13), для нескольких компонент плазмы. Они вычислены исходя из фактических значений энергии первого возбужденного уровня рассматриваемых компонент. Поскольку в большинстве случаев лабораторная плазма является оптически тонкой для излучения, возникающего при рекомбинации, величины  $\beta_{\lambda 1}$  и  $\beta_{\lambda 2}$ , как правило, близки к единице, так что в уравнении (3.13) вместо  $R_\lambda$  можно использовать величину  $R_\lambda^0$ , приведенную в последней строке таблицы. Мы видим, что при условиях, указанных в табл. 1, отношение  $\lambda S_2/\lambda S_1$  больше единицы. Следовательно, уравнение (3.13) можно переписать в виде

$$\frac{1 + (\lambda S_2/\lambda S_1) (n_2/n_1) / (n_2/n_1)^*}{1 + (\lambda S_2/\lambda S_1)} \approx \frac{n_2/n_1}{(n_2/n_1)^*} + \frac{\lambda S_1}{\lambda S_2}.$$

Таким образом, отношение  $n_2/n_1$  будет приблизительно пропорционально  $n_2/n_1$  и потому будет зависеть от ухода резонансного излучения в такой же мере, как и  $n_2/n_1$ , до тех пор, пока  $\lambda S_1/\lambda S_2 < (n_2/n_1)/(n_2/n_1)^*$ .

Зная величины, приведенные в табл. 1, можно с помощью уравнения (3.13) найти отклонение степени ионизации, даваемой отношением  $n_e/n_1$ , от ее равновесного значения как функцию плотности электронов и параметров ухода излучения  $\beta_{21}$ ,  $\beta_{\lambda 1}$  и  $\beta_{\lambda 2}$ . На фиг. 2 представлены кривые такой зависимости, рассчитанные при условиях, указанных в табл. 1, и при  $\beta_{21} = 10^{-3}$  и  $\beta_{\lambda 1} = \beta_{\lambda 2} = 1$ . Как мы заранее предупредили, эти результаты, основанные на двухуровневой модели, хотя и дают правильную качественную зависимость, не могут считаться точными в количественном отношении.

Как и в случае отношения  $n_2/n_1$  [формулы (3.5) и (3.7)], в уравнении (3.13) можно выделить два предельных случая,



Фиг. 2. Отклонение величины  $n_e^2/n_1$  от ее равновесного значения в соответствии с двухуровневой моделью для Cs при  $T_e = 2500$  К и для Ar и H при 10 000 К.

Кривые построены на основании данных, приведенных в табл. 1, при  $\beta_{\lambda 1} = 10^{-3}$  и  $\beta_{\lambda 2} = 1$ .

В равновесном пределе больших  $n_e$  столкновительные процессы преобладают над радиационными и  $n_e^2/n_1 = (n_e^2/n_1)^*$ . При сравнительно же малых  $n_e$  (солнечная корона) величины  $n_2$  и  $n_e$  уменьшаются в основном за счет радиационных процессов. В этом предельном случае, когда  $R_{\lambda}$  и  $R_2$  велики, уравнение (3.13) сводится к виду

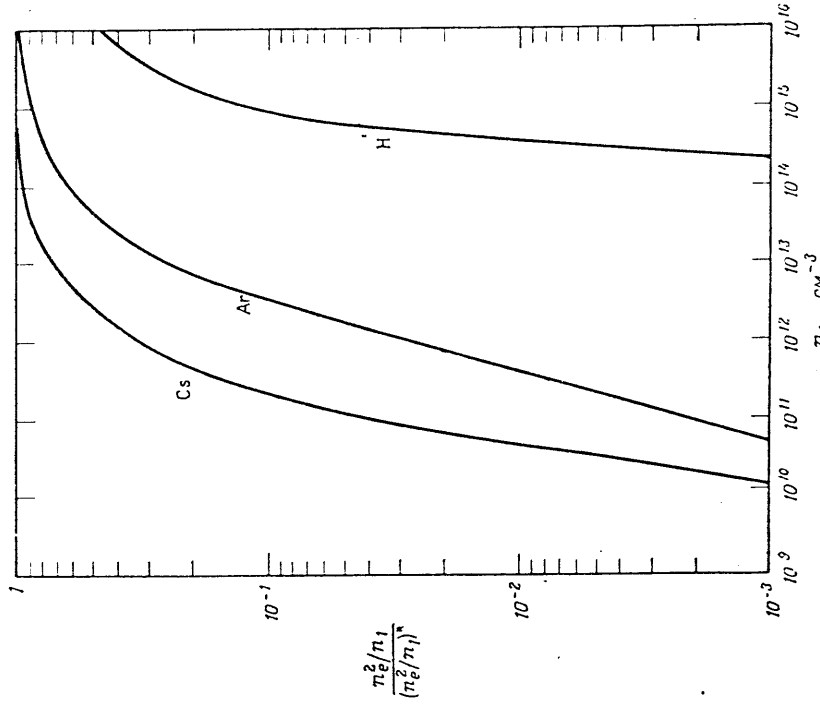
$$\frac{n_e^2}{n_1} = \frac{(n_e^2/n_1)^* n_e^{\lambda} S_1}{A_{\lambda 1} \beta_{\lambda 1} + A_{\lambda 2} \beta_{\lambda 2}} = \frac{n_e^{\lambda} S_1}{A_{\lambda 1} \beta_{\lambda 1} + A_{\lambda 2} \beta_{\lambda 2}}. \quad (3.14)$$

Так же, как и соответствующее уравнение (3.7) для  $n_2/n_1$ , уравнение (3.14) описывает баланс между столкновительной ионизацией с основного уровня и излучательной двухчастичной рекомбинацией. На фиг. 2 этот предельный случай соответствует прямолинейным участкам кривых при низких плотностях  $n_e$ .

Когда известны величины  $n_e$ ,  $T_e$  и параметры ухода излучения  $\beta_{\lambda 2}$  и т. д., а требуется найти отклонение степени ионизации от ее равновесного значения, можно прямо воспользоваться уравнением (3.13) и кривыми фиг. 2. Если же известна плотность  $n_1$  частиц на основном уровне, а нужно найти плотность электронов, то приходится решать кубическое уравнение для  $n_e$ , что является из исходных уравнений (3.4) и (3.2) для скоростей процессов. В этом случае решение можно найти разными способами, например методом итераций. Результаты таких вычислений, проведенных при условиях, соответствующих фиг. 2, представлены на фиг. 3.

Если зависимости типа приведенных на фиг. 2 известны, то вычисления, необходимые для построения графиков фиг. 3, провести

просто. Качественные зависимости, выражаемые уравнением (3.13) и приведенные кривыми на фиг. 2, отражены также на фиг. 3. Но теперь равновесный случай плотной плазмы соответствует большим значениям плотности частиц в основном состоянии  $n_1$ , а случай разреженной плазмы (солнечной короны) — малым значениям  $n_1$ .



Фиг. 3. Отклонение величины  $n_e^2/n_1$  от ее равновесного значения при условиях фиг. 2 как функция плотности частиц  $n_1$  в основном состоянии.

Выше мы исходили из двухуровневой модели, которая позволяет довольно просто проиллюстрировать основные закономерности процессов в рассматриваемом случае. Для точного же учета влияния ухода излучения на отклонения от уравнения Саха необходимо рассмотреть более полные уравнения скоростей. Для одномерной и стационарной плазмы уравнения непрерывности (2.1) и (2.2) для  $n_h$  и  $n_e$ , в которых для  $n_h$  и  $n_e$  взяты выражения (2.24) и (2.25),

имеют вид

$$n_k = 0 = n_e \sum_{j < k} n_j S_j^h - n_k \left[ \sum_{j < k} (n_e^h S_j^h + A_{jk} \beta_{jk}) + n_e \left( \sum_{l > k} n_l S_l^h + S_k^h \right) \right] + \sum_{l > k} n_l (n_e^l S_k^h + A_{lk} \beta_{lk}) + n_e^k (n_e^k S_k^h + A_{kk} \beta_{kk}), \quad (3.15)$$

$$n_e = 0 = \sum_k [n_e n_k S_k^h - n_e^k (n_e^k S_k^h + A_{kk} \beta_{kk})], \quad (3.16)$$

а из соотношений (2.15) и (2.11), выражающих принцип детального равновесия, мы имеем

$$\frac{j S_j^h}{k S_k^h} = \left( \frac{n_l}{n_j} \right)^* \cdot \frac{l S_l^h}{i S_i^h} = \left( \frac{n_l}{n_k} \right)^* \cdot \frac{k S_k^h}{\lambda S_\lambda^h} = \left( \frac{n_e^k}{n_k} \right)^*. \quad (3.17)$$

Как и в двухуровневой модели, уравнения (3.15) и (3.16) легко решить в двух предельных случаях, различающихся соотношением вкладов столкновительных и радиационных процессов. В квазиравновесном пределе, когда доминирующую роль играют столкновительные процессы, пользуясь соотношениями (3.17), легко показать, что решения уравнений (3.15) и (3.16) имеют вид [формула (2.126)]

$$\left( \frac{n_h}{n_j} \right) = \left( \frac{n_h}{n_j} \right)^*, \quad (3.18)$$

$$\frac{n_e^k}{n_k} = \left( \frac{n_e^k}{n_k} \right)^* \quad \text{при всех } k \text{ и } j.$$

В частности, мы имеем

$$\frac{n_h}{n_1} = \left( \frac{n_h}{n_1} \right)^*, \quad (3.19)$$

$$\frac{n_e^k}{n_1} = \left( \frac{n_e^k}{n_1} \right)^*.$$

Нетрудно видеть, что достаточным условием правильности решения (3.18) является выполнение при всех  $k$  и  $j$  неравенств

$$\frac{A_{kj} \beta_{kj}}{n_e^k S_j} \ll 1, \quad (3.20)$$

$$\frac{A_{kk} \beta_{kk}}{n_e^k S_k} \ll 1.$$

Эти неравенства, выполняющиеся при больших плотностях электронов и малых значениях параметров ухода излучения  $\beta_{kj}$  и  $\beta_{kk}$ , соответствуют условиям  $R_2 \ll 1$  и  $R_k \ll 1$  для двухуровневой модели [формулы (3.5) и (3.11)]. Следовательно, если столкновительные процессы преобладают над радиационными, то существует квазиравновесная ситуация, когда плотность электронов дается

уравнением Саха. Отметим, что для рассматриваемой модели и уравнение Саха в этих условиях нужно подставить температуру электронов  $T_e$  независимо от того, равна ли температура  $T_e$  температуре, характеризующей тепловое движение тяжелых частиц, или нет. Это объясняется тем, что в рассматриваемые столкновительные процессы входит тепловая энергия только свободных электронов.

Второй предельный случай (предел солнечной короны) мы имеем, когда плотность электронов мала, а параметры ухода излучения не малы. В пределе очень низкой плотности электронов уменьшение концентраций  $n_h$  и  $n_e$  обусловлено в основном излучательными переходами вниз и оказывается, что величины  $n_h$  и  $n_e$  определяются балансом между столкновительным заселением с основного уровня и излучением. Таким образом, в пределе солнечной короны

$$\frac{n_h}{n_1} = \frac{n_e^l S_k^h}{\sum_{j < h} A_{hj} \beta_{hj}}, \quad (3.21a)$$

$$\frac{n_e}{n_1} = \frac{S_k^h}{\sum_{k \geq 1} A_{kk} \beta_{kk}}. \quad (3.21b)$$

Как и соответствующие соотношения (3.7) и (3.14) для двухуровневой модели, соотношения (3.21) заметно отличаются от равновесных соотношений (2.14) и (2.19). В них, в частности, входят константы скоростей столкновительных и радиационных процессов. Правда, уравнения (3.21) для предела солнечной короны следует рассматривать лишь как формальные или иллюстративные. В реальных случаях, особенно для лабораторной плазмы, при низкой плотности электронов начинают играть важную роль эффекты, не учитываемые нашей моделью, такие, как возбуждение в результате атом-атомных столкновений и отклонения от максвелловского распределения, и в соответствии с этим уравнения (3.21) должны быть изменены. Кроме того, для высоколежащих уровней скорости столкновительного уменьшения заселенности остаются большими по сравнению со скоростями радиационных процессов даже при сравнительно низких плотностях электронов, так что уравнение (3.21a) к таким уровням неприменимо. На этом вопросе мы остановимся более подробно несколько ниже.

В условиях, промежуточных между пределом равновесия и пределом солнечной короны, заселенности уровней и плотности электронов сложнее вычислить. В принципе эти вычисления могут быть проведены следующим образом. При данном значении электронной температуры и при известных величинах констант скоростей столкновительных и радиационных процессов (включая пара-



метры уходя излучения) уравнения (3.15) и (3.16) представляют собой систему  $q+1$  уравнений для  $q+1$  значений плотности,  $n_k$  ( $k=1, 2, \dots, q$ ) и  $n_e$ . Каким образом определяется число уровней  $q$  при вычислениях, будет сказано ниже в данном параграфе. Поскольку полное число возбужденных атомов и ионов сохраняется, мы имеем  $\sum_k n_k + n_e = 0$ , так что одно из указанных  $q+1$  уравнений оказывается лишним. Соответственно этому в каждом реальном случае должно быть определено либо полное число атомов и ионов, либо число атомов в основном состоянии, либо какое-нибудь другое соотношение между плотностями. Поскольку уравнения (3.15) и (3.16) являются линейными относительно  $n_k$ , но кубическими относительно  $n_e$ , при вычислениях удобно считать величину  $n_e$  заданной. Если, например, мы опустим уравнение  $n_1 = 0$ , то получим  $q$  линейных неоднородных алгебраических уравнений  $|n_k = 0$  ( $2 \leq k \leq q$ ) и  $n_e = 0$  для  $q$  переменных  $n_k$  ( $1 \leq k \leq q$ ), зависящих от  $n_e$  и  $T_e$ . Эти уравнения можно решить, пользуясь правилом Крамера, и, если необходимо, методом итераций можно добиться, чтобы решение удовлетворяло заданным физическим условиям.

На практике при вычислениях почти всегда прибегают к различному упрощениям. Например, в некоторых случаях вместо реального числа возбужденных уровней  $q$  электронную структуру атома аппроксимируют меньшим числом уровней (как в двухуровневой модели). Можно выбрать эти уровни так, чтобы они соответствовали нижним уровням, и пренебречь высокими уровнями или представить их одним или несколькими уровнями, которым приписана фиктивная высокая степень вырождения [7, 14, 21]. Кроме того, с учетом относительной величины констант скорости различных столкновительных и радиационных процессов можно опустить некоторые члены в уравнениях (3.15) и (3.16) и тем самым упростить последние. Так, Зельдович и Райзер [22, § VI.18] показали, что при определенных условиях, по крайней мере для высоколежащих уровней, можно пренебречь всеми столкновительными процессами, кроме тех, которые приводят к переходам между соседними уровнями. Мы не будем углубляться в такие теории. Но возможно одно специфическое упрощение уравнений скоростей процессов, которое имеет важные физические следствия, и его мы рассмотрим более обстоятельно.

Экспериментально установлено, что в широком диапазоне условий высоколежащие возбужденные уровни атомов находятся в описываемом уравнении Саха равновесии со свободными электронами [17]. Это означает, что даже в неравновесном случае концентрация возбужденных уровней, лежащих выше некоторого, скажем  $p$ -го, связана с концентрацией электронов уравнением Саха вида

формула (2.11)

$$\frac{n_e}{n_{h \geq p}} = \left( \frac{2m_e h^3 T_e}{h^2} \right)^{3/2} \frac{u_{h, \lambda}^{p, T_e}}{g_h} \quad (3.22)$$

Это объясняется тем, что для высоколежащих уровней, для которых энергетическое расстояние между близкими уровнями становится малым, отношение скорости столкновительных процессов к скорости радиационных процессов возрастает.

Чтобы показать, что заселенность высоких уровней находится в описываемом уравнении Саха равновесии со свободными электронами, оценим приблизительно относительные скорости столкновительных и излучательных процессов, которыми определяется заселенность этих уровней. До тех пор пока столкновительные переходы между высокими уровнями и континуумом будут доминировать в этом отношении, указанные уровни будут находиться в столкновительном равновесии между собой и со свободными электронами и тогда уравнение (3.22) применимо. Исходя из полуэмпирической формулы Аллена [2, § 18], для сечения возбуждения  $Q^{h-l}$ , которое связано с коэффициентом Эйнштейна  $A_{hl}$ , по крайней мере для высоколежащих уровней можно написать (см. также [15, § 6.7] и гл. 2, § 4 и 8)

$$\frac{n_e S^l}{A_{hl}} \sim n_e \frac{e^{-\epsilon_{hl}/kT_e}}{\epsilon_{hl}^3} \quad (3.23a)$$

В силу принципа детального равновесия (2.15) имеем

$$\frac{n_e S^h}{A_{lh}} \sim \frac{n_e}{e^{h/l}} \quad (3.23b)$$

Хотя точный вид полученного результата зависит от выражения, принятого для сечения возбуждения, основной вывод о том, что отношение (3.23b) увеличивается с уменьшением  $\epsilon_{hl}$ , остается справедливым при всех приемлемых выражениях для сечений столкновений. Таким образом, выше определенного уровня (зависящего от  $n_e$ ), для которого разность  $\epsilon_{h+1} - \epsilon_h$  достаточно мала, столкновительные процессы начинают преобладать над радиационными в отношении переходов между близкими уровнями. Кроме того, согласно соотношениям (3.23), скорости столкновительных процессов больше для переходов между соседними уровнями. Следовательно, если скорость столкновительного заселения  $p$ -го уровня намного больше скорости радиационного уменьшения заселенности этого уровня, т. е. если

$$\frac{n_p + n_e^{p+1} S_p}{n_p \sum_{j < p} A_{pj}} \sim \frac{n_e S^{p+1}}{\sum_{j < p} A_{pj}} \gg 1, \quad (3.24)$$

то рассматриваемый уровень будет находиться в столкновительном равновесии с близкими уровнями. Более того, поскольку величина  $\sum_{j < k} A_{kj}$  уменьшается при больших  $k$ , а  $S^{k+1}$  возрастает [15, § 6.7], все уровни, для которых  $k \gg p$ , будут также находиться в столкновительном равновесии. Наконец, путем аналогичных рассуждений можно показать, что такие уровни будут через столкновения тесно взаимодействовать со свободными электронами, так что заселенность  $n_k$  уровней, для которых  $k \gg p$ , будет определяться уравнением Саха (3.22). Отметим, что из уравнения (3.22) следует соотношение для таких уровней

$$\frac{n_h}{n_j} = \frac{g_h}{g_j} e^{-\epsilon_{jh}/kT_e} \quad (k, j \gg p). \quad (3.25)$$

Эти выводы подкрепляются подробными расчетами Бейтса и Кингстона [3], о которых речь будет идти в следующем параграфе.

Предположим теперь, что в данной ситуации для определенного уровня, например  $p$ -го, и для всех уровней, расположенных выше, выполняется равенство (3.24) и, следовательно, для этих уровней справедливо уравнение Саха. Зададимся теперь вопросом, каким образом при этом изменятся уравнения для скоростей процессов (2.24) и (2.25). Поскольку тогда, согласно уравнению (3.22), при  $k \gg p$  мы будем иметь  $n_k \sim n_e^2$ , мы можем опустить уравнения для скоростей процессов (2.24) при  $k \gg p$ , а в оставшихся уравнениях сгруппировать члены, содержащие эти состояния, с членами, которые описывают состояния, лежащие в континууме. Введем следующие обозначения:

$${}_h S^{\lambda'} \equiv {}_h S^{\lambda} + \sum_{l \geq p} {}_h S^l, \quad (3.26)$$

$${}^{\lambda'} S_h \equiv {}^{\lambda} S_h + \sum_{l \geq p} \left(\frac{n_l}{n_e^2}\right)^* {}^l S_h = \left(\frac{n_k}{n_e^2}\right)^* {}_k S^{\lambda'},$$

$$A_{\lambda, h} \beta_{\lambda, h} \equiv A_{\lambda, k} \beta_{\lambda, h} + \sum_{l \geq p} \left(\frac{n_l}{n_e^2}\right)^* A_{l, h} \beta_{l, h}.$$

Тогда с помощью уравнения (3.22) уравнение (2.24) при  $k < p$  можно привести к виду

$${}^{\lambda'} n_h = n_e \sum_{j < k} n_j S^{jh} - n_h \left[ \sum_{j < k} (n_e {}^h S_j + A_{h, j} \beta_{h, j}) + n_e \left( \sum_{p > h} {}_h S^l + {}_h S^{\lambda'} \right) \right] + \sum_{p > h} n_l (n_e {}^l S_h + A_{l, h} \beta_{l, h}) + n_e^2 (n_e {}^{\lambda'} S_h + A_{\lambda, h} \beta_{\lambda, h}) \quad (k < p). \quad (3.27)$$

Что касается уравнения (2.25) для  $n_e$ , то можно было бы прямо использовать уравнение (3.22) и принцип детального равновесия (2.11) и опустить члены, содержащие  $n_k \gg p$  (задача 3.5). Но нам удобнее вместо этого, пользуясь уравнениями (2.24), (2.25), (3.22)

и (3.26), написать

$${}^{\lambda'} n_e + \sum_{l \geq p} {}^{\lambda'} n_l = \sum_{k < p} [n_e {}^l n_k S^{k\lambda'} - n_e^2 (n_e {}^{\lambda'} S_k + A_{\lambda, k} \beta_{\lambda, k})]. \quad (3.28a)$$

Дифференцируя уравнение (3.22), получаем

$${}^{\lambda'} n_e + \sum_{l \geq p} {}^{\lambda'} n_l = {}^{\lambda'} n_e + \sum_{l \geq p} \left(\frac{n_l}{n_e^2}\right)^* 2 n_e {}^{\lambda'} n_e = \left[1 + 2 \sum_{l \geq p} \left(\frac{n_l}{n_e}\right)\right] {}^{\lambda'} n_e. \quad (3.28b)$$

Поскольку во многих случаях

$$\sum_{l \geq p} \frac{n_l}{n_e} \ll 1,$$

мы имеем окончательно

$${}^{\lambda'} n_e \approx \sum_{k < p} [n_e n_k S^{k\lambda'} - n_e^2 (n_e {}^{\lambda'} S_k + A_{\lambda, k} \beta_{\lambda, k})]. \quad (3.29)$$

Уравнения (3.27) и (3.28) или (3.29) представляют собой систему  $p$  уравнений для  $p$  плотностей  $n_1, n_2, \dots, n_{p-1}$  и  $n_e$ . Как и раньше, одно из этих уравнений является лишним и одна из плотностей считается известной. Физически все сказанное выше означает, что переходы с нижнего уровня на  $p$ -й или более высокие уровни эквивалентны переходам с нижнего уровня в континуум. Это нетрудно видеть из сравнения уравнения (3.29) с предыдущим уравнением (2.25). Для однородной стационарной плазмы решение уравнений (3.27) и (3.28) или (3.29) относительно  $n_{k < p}$  и  $n_e$  при  $n_h = 0$  и  $n_e = 0$  находится так же, как изложено раньше. Но теперь число уровней, которые следует рассматривать (а раньше оно оставалось неопределенным), определяется условием (3.24).

В следующем параграфе, опираясь на уравнения (3.27) и (3.29), мы рассмотрим вопрос о скоростях ионизации и рекомбинации в нестационарной плазме.

**Задача 3.1.** Покажите, что если в условиях, рассматривавшихся в данном параграфе, выполняется неравенство (3.3а) и равенство

$$A_{\lambda, 2} \beta_{\lambda, 2} \ll \left[\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^* n_1\right]^{1/2} \lambda S_2,$$

то мы имеем

$$n_e A_{\lambda, 2} \beta_{\lambda, 2} \ll n_1 S_2,$$

так что условие (3.3б) тоже выполняется. Последнее неравенство фактически заменяет условие (3.3б), если при равновесном значении  $n_e$  скорость двухчастичной рекомбинации, изменяющей заселенность  $n_2$ , меньше скорости трехчастичной рекомбинации.

**Задача 3.2.** Пользуясь значениями, приведенными в табл. 3.1, соотношениями детального равновесия и результатом задачи 3.1,

найдите для компонент, перечисленных в табл. 1, значения  $n_k$  при которых при указанных в таблице температурах выполняются неравенства (3.3а) и (3.3б).

**Задача 3.3.** Для цезия при 2500 К и водорода при 10 000 К постройте графики типа фиг. 1, которые на основании двухуровневой модели показывали бы влияние, оказываемое уходом излучения на зависимость температуры заселенностей уровней от концентрации  $n_e$ .

**Задача 3.4.** На основании графиков, приведенных на фиг. 3, найдите давление Cs при 2500 К и Ag и H при 10 000 К, ниже которого (в соответствии с двухуровневой моделью) величина  $n_e$  будет меньше половины своего равновесного значения, предполагая, что  $\beta_{\lambda_1} = 10^{-3}$  и  $\beta_{\lambda_2} = 1$ . [Поскольку в общем случае плазма может содержать также и другие (нейонизованные) компоненты, это давление представляет собой парциальное давление рассматриваемых ионизованных компонент.]

**Задача 3.5.** Рассмотрите случай, когда  $p$ -й и все более высокие уровни находятся (приближенно) в равновесии со свободными электронами так, что для этих уровней приближенно выполняется уравнение Саха (3.22). Пользуясь уравнениями (3.22) и (2.11), исключите члены, содержащие  $n_{k>p}$  в уравнении (2.25) скорости процесса для  $n_e$ , и сравните ваш результат с уравнениями (3.28) и (3.29). Можете ли вы объяснить физически расхождение этих результатов, а также сказать, почему более предпочтительны уравнения (3.28) и (3.29)? Укажите для этого случая двухуровневую модель [уравнения (2.5) и (3.2)]. При каких условиях  $n_2/n_e^2 \approx (n_2/n_e^2)^*$ ?

#### § 4. СКОРОСТИ ИОНИЗАЦИИ И РЕКОМБИНАЦИИ

Когда условия в плазме быстро меняются, как, например, в расширяющейся во времени неподвижной плазме или при быстром расширении плазмы через сопло, отклонения от уравнения Саха могут возникнуть из-за того, что скорости ионизации и рекомбинации конечны. В данном параграфе мы остановимся на вопросе о применимости уравнений для  $n_k$  и  $n_e$  при исследовании этих скоростей.

В общем случае ионизация и рекомбинация описываются уравнениями непрерывности (2.1) и (2.2) для  $n_k$  и  $n_e$ , в которых величины  $n_k$  и  $n_e$  даются уравнениями скоростей процессов (2.24) и (2.25). Для исследования рассматриваемой ситуации введем в эти уравнения два упрощения. Во-первых, будем, как и в § 3, считать, что  $p$ -й и все лежащие выше него уровни находятся в равновесии со свободными электронами и, следовательно, для этих

уровней справедливы уравнения Саха (3.22). Тогда уравнения скоростей процессов (2.24) и (2.25) для  $n_k$  и  $n_e$  заменятся уравнениями (3.27) и (3.28) или (3.29). Соответствующее данной ситуации значение  $p$  можно найти приближенно из неравенства (3.24) или апостериори из решения уравнения скорости процесса для  $n_k$ . В последнем случае сначала выбирают значение  $p$ , затем решают уравнения скоростей процессов для  $n_k$ , а после этого проверяют, стремятся ли значения  $n_k$  к равновесным значениям, определяемым уравнением Саха, при приближении к уровню  $p$  снизу.

Второе упрощение основано на том, что время установления, или релаксации, заселенности возбужденных уровней ( $k > 1$ ) во многих случаях намного больше времени ионизации и рекомбинации. В соответствии с этим значения  $n_k$  при  $k > 1$  находятся в равновесии с мгновенными значениями  $n_e$  и  $n_1$ , и можно считать, что

$$n_k \approx 0, \quad k > 1. \quad (4.1)$$

Чтобы убедиться в справедливости этого приближенного равенства, можно на основании уравнений (3.27) и (3.29) оценить порядок величины характерных времен  $\tau_e$  и  $\tau_k$  установления концентраций  $n_e$  и  $n_k$  в разных конкретных случаях. Например, если  $n_e$  и  $n_k$  устанавливаются главным образом за счет столкновительных процессов, то, исходя из скоростей заселения, мы имеем

$$\tau_e \sim \left( \frac{n_e}{n_e} \right)^{-1} \sim \sum_{l < p} \frac{1}{n_l S_l'}$$

$$\tau_k \sim \left( \frac{n_k}{n_k} \right)^{-1} \sim \frac{n_k}{n_e \left( \sum_{j < k} n_j S_j^k + \sum_{p > l > k} n_l S_k + n_e^2 \lambda' S_k \right)}$$

Тогда отношение характерных времен дается выражением

$$\frac{\tau_k}{\tau_e} \sim \frac{n_k}{n_e} \left[ \frac{\sum_{l < p} n_l S_l'}{\sum_{j < k} n_j S_j^k + \sum_{p > l > k} n_l S_k + n_e^2 \lambda' S_k} \right]. \quad (4.2)$$

В большинстве случаев множитель, заключенный в скобки в соотношении (4.2), меньше единицы. То, что это верно с физической точки зрения, можно показать путем следующих рассуждений. В числителе и знаменателе этого множителя входят величины, пропорциональные каждой из плотностей  $n_l$  при  $1 \leq l < p$  (в знаменателе также имеется дополнительный член, пропорциональный  $n_e^2$ ). Если коэффициенты каждого из этих членов в знаменателе по крайней мере равны коэффициентам соответствующих членов в числи-

теле, то рассмотрим отношение меньше единицы. Это справедливо в случае, когда  $jS^k \gg jS^{\lambda'}$  и  $jS_k \gg jS^{\lambda'}$ . Из физических же соображений ясно, что эти неравенства должны, как правило, выполняться, поскольку при столкновениях между электронами и возбужденным атомом с  $l < p$  вероятность того, что произойдет возбуждение на более высокий уровень или потеря возбуждения с переходом на более низкий уровень, обычно больше, чем вероятность ионизации атома. Тогда из соотношения (4.2) получаем

$$\tau_k \ll \tau_e, \text{ если } n_k \ll n_e, \quad (4.3)$$

что обычно выполняется при  $k > 1$ .

Введя указанные упрощения, мы можем воспользоваться уравнением (3.29) для  $n_k$  после чего уравнение, относящееся к данному случаю, примет вид

$$\frac{dn_k}{dt} + \nabla \cdot [n_e(u + U)] = \dot{n}_e, \quad (4.4)$$

где

$$\dot{n}_e = \sum_{k < p} [n_e n_k S^{\lambda'} - n_e^2 (n_e^{\lambda'} S_k + A_{lk} \beta_{\lambda' k})], \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{n}_k = 0 = n_e \sum_{j < k} n_j S^k - \\ - n_k \left[ \sum_{j < k} (n_e S_j + A_{kj} \beta_{kj}) + n_e \left( \sum_{p > l > k} S^l + S^{\lambda'} \right) \right] + \\ + \sum_{p > l > k} n_l (n_e S_k + A_{lk} \beta_{lk}) + \\ + n_e^2 (n_e^{\lambda'} S_k + A_{lk} \beta_{\lambda' k}) \quad (1 < k < p). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Как и в уравнении (3.26), символ  $\lambda'$  означает, что данная плотность равна сумме всех плотностей  $p$ -го уровня и всех более высоких уровней и континуума, т. е. уровней, находящихся в описываемом уравнении Саха равновесии со свободными электронами. Принцип детального равновесия для констант скоростей процессов в соответствии с соотношениями (2.15) и (3.26) можно записать в виде

$$\frac{jS^k}{kS_j} = \left( \frac{n_k}{n_j} \right)^*, \quad (4.7a)$$

$$\frac{jS^{\lambda'}}{k'S_h} = \left( \frac{n_j^2}{n_l} \right)^*. \quad (4.7b)$$

Как и раньше, уравнение для  $n_1$  будем считать лишним. Отметим, однако, что из соотношения  $n_k = 0$  ( $k > 1$ ) следует равенство

$n_1 = n_e$ , так что с тем же успехом можно было бы опустить уравнение (4.5) для  $n_e$  и оставить уравнение для  $n_1$ .

Общее решение приведенных выше уравнений можно найти следующим образом. Предполагая, что коэффициенты  $A_{kj} \beta_{kj}$ ,  $jS^k(T_e)$  и  $jS^{\lambda'}(T_e)$  известны, из системы однородных алгебраических уравнений (4.6) можно найти все величины  $n_k$  ( $1 < k < p$ ) как функции переменных  $n_e$ ,  $n_1$  и  $T_e$ . Когда эти величины определены, уравнение (4.5) дает нам соотношение  $n_e = n_e(n_e, n_1, T_e)$ . Этим соотношением совместно с уравнением (4.4) и описываются процессы ионизации и рекомбинации.

Как и в § 3, рассмотрим теперь выражения для  $n_e$  в пределах высокой и низкой плотности электронов. В пределе низкой плотности электронов (предел солнечной короны) уменьшение заселенности разных уровней, а также уменьшение концентрации  $n_e$  происходят главным образом за счет радиационных, а не столкновительных процессов. Поэтому до тех пор, пока  $n_e$  устанавливается за счет баланса между столкновительной ионизацией с основного уровня и радиационной двухчастичной рекомбинацией [формула (3.21б)], мы непосредственно имеем

$$\dot{n}_e = n_e n_1 S^{\lambda'} - n_e^2 \sum_{k < p} A_{k1} \beta_{\lambda' k}. \quad (4.8)$$

Этот результат не зависит от решения уравнения (4.6) для  $n_k$ , которое, как и раньше, дается соотношением (3.21а). Но мы снова должны подчеркнуть, что результаты, полученные в пределе низких плотностей, могут оказаться неточными применительно к реальной плазме, поскольку при низких плотностях электронов существуют некоторые дополнительные дополнителные эффекты и отклонения, как возбуждение при атом-атомных столкновениях и отклонение распределения свободных электронов от максвелловского. Более того, независимо от этих эффектов, как показали Бейтс и Кингстон [4], для того чтобы скорость рекомбинации приблизилась к значению, соответствующему чисто радиационной рекомбинации, необходимы очень низкие плотности электронов. Так, например, в подородной плазме при  $T_e = 250$  К столкновительные эффекты повышают скорость рекомбинации более чем в 2 раза при значениях  $n_e$ , превышающих приблизительно  $2 \cdot 10^6$  см $^{-3}$ .

В пределе высокой концентрации электронов столкновительные процессы преобладают над радиационными, и механизмом рекомбинации является только трехчастичная рекомбинация. В этом предельном случае в соответствии с равенством (3.20) радиационные члены в уравнениях (4.5) и (4.6) можно опустить, и тогда они

примут вид

$$n_0 = \sum_{k < p} (n_e n_{1k} S_k^{h'} - n_e^{h'} S_{1k}), \quad (4.9)$$

$$\sum_{1 < j < k} n_j S^k - n_k \left( \sum_{j < k} S_j^k + \sum_{p > j > k} S^k + S^k \right) + \sum_{p > j > k} n_j S_k =$$

$$= - (n_1 S^h + n_e^{h'} S_h) \quad (k > 1). \quad (4.10)$$

С помощью уравнений (4.10) можно найти плотности  $n_h$  при  $1 < k < p$  как функции переменных  $n_e$ ,  $n_1$  и  $T_e$ . Мы выискали члены, содержащие  $n_1$  и  $n_e$ , в правую часть уравнения (4.10) для того, чтобы подчеркнуть, что  $n_1$  и  $n_e$  рассматриваются здесь как параметры. Используя правило Крамера и свойства детерминантов, нетрудно показать, что решение уравнений (4.10) должно иметь следующий вид:

$$n_h = a'_k n_1 + a_n n_e^{h'}. \quad (4.11)$$

Величины  $a'_k$  и  $a_n$  зависят через константы скоростей  $j S^k$  и  $n S^k$  от электронной температуры, но не от плотностей, и их можно представить как отношения детерминантов. Кроме того, поскольку в ходе вычислений радиационными процессами мы пренебрегали, при  $n_e^2/n_1 = (n_e^2/n_1)^*$  мы должны иметь  $n_h/n_1 = (n_h/n_1)^*$  [уравнение (2.126)]. Следовательно,

$$a'_k = \left( \frac{n_{hk}}{n_1} \right)^* - a_k \left( \frac{n_e^2}{n_1} \right)^*.$$

Тогда соотношение (4.11) принимает вид

$$\frac{n_h}{n_1} = \left( \frac{n_{hk}}{n_1} \right)^* + a_k \left[ \left( \frac{n_e^2}{n_1} \right) - \left( \frac{n_e^2}{n_1} \right)^* \right]. \quad (4.12)$$

Подставив этот результат в уравнение (4.9), получим следующее выражение для  $n_e$ :

$$n_e = n_e n_1 \sum_{k < p} \left[ \left( \frac{n_{hk}}{n_1} \right)^* - a_k \left( \frac{n_e^2}{n_1} \right)^* \right]_k S^k - n_e^3 \sum_{k < p} (S^k - a_k n S^k).$$

Пользуясь соотношением (4.76), напомним окончательно

$$n_e = \alpha \left[ n_1 \left( \frac{n_e^2}{n_1} \right)^* - n_e^2 \right], \quad (4.13)$$

где  $\alpha$  — полный коэффициент рекомбинации, следующим образом выражаемый через величины  $a_k$ , фигурирующие в соотношении (4.12):

$$\alpha = n_e \sum_{k < p} \left[ \left( \frac{n_{hk}}{n_e} \right)^* - [a_k] \right] S^k = n_e \sum_{k < p} (S^k - a_k n S^k). \quad (4.14)$$

Нетрудно видеть, что в согласии с макроскопическими рассуждениями в выражении (4.13) для  $n_e$  имеются два члена, один из которых пропорционален  $n_e n_1$ , а другой пропорционален  $-n_e^3$ . Кроме того, уравнение (4.13) имеет стационарное решение  $n_e^2/n_1 = (n_e^2/n_1)^*$  при  $n_e = 0$ . Тот факт, что в стационарном случае мы получили равновесие Саха, есть следствие того, что мы опустили радиационные члены. Отметим, что в данном случае, когда преобладают столкновительные процессы, линейная зависимость величины  $\alpha$  от  $n_e$ , которая следует из соотношения (4.14), может быть явным образом введена в уравнение (4.13), если ввести новый коэффициент  $\alpha/n_e$ . Но в представленном виде уравнение (4.13) согласуется с общепринятым определением коэффициента рекомбинации.

Хотя вычисление коэффициента рекомбинации по формуле (4.14) и решение уравнений (4.10) относительно  $a_k$  не представляют принципиальных трудностей, для практических целей желательнее было бы, очевидно, иметь более простой подход к вычислению трехчастичной рекомбинации. Такой подход предложили Хиннов и Хиршберг [17]. Они приняли, что существует некоторый «критический» уровень, например  $q$ -й, для которого вероятность того, что захваченный при рекомбинации на более высокий уровень электрон затем перейдет на основной уровень, равна вероятности того, что электрон, захваченный при рекомбинации на более низкий уровень, снова будет оторван. То есть, поскольку  $-n_e = n_1$ , Хиннов и Хиршберг заостряют внимание на том, будет ли электрон, захваченный при рекомбинации на какой-либо уровень, снова оторван раньше, чем он перейдет с возбужденного на основной уровень. Свойства  $q$ -го уровня таковы, что уменьшение скорости рекомбинации электронов, захваченных при рекомбинации на низкие уровни, за счет того, что они снова отрываются раньше, чем достигнут основного уровня, в точности компенсируется электронами, которые попадают на основной уровень после рекомбинации на верхние уровни. Тогда скорость рекомбинации равна скорости, с которой электроны рекомбинируют на  $q$ -й и все лежащие ниже него уровни, т. е.

$$n_e^2 \alpha = n_e^2 \sum_{1 \leq k \leq q} S_k. \quad (4.15)$$

Отметим, что такой же результат следует и из выражений, полученных ранее [формула (4.14)], если мы примем

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{при } 1 \leq k \leq q, \\ \left( \frac{n_{hk}}{n_e} \right)^* & \text{при } k > q \end{cases}$$

и заменим  $\lambda'$  на  $\lambda$ . Подставив эти значения  $a_h$  в соотношение (4.12), получим

$$\frac{n_h}{n_1} = \left(\frac{n_h}{n_1}\right)^* \quad \text{при } l \leq k \leq q, \quad (4.16)$$

$$\frac{n_h}{n_2} = \left(\frac{n_h}{n_2}\right)^* \quad \text{при } k > q.$$

Таким образом, коэффициент рекомбинации в уравнении (4.13) совпадал бы с коэффициентом рекомбинации, полученным Хинновом и Хиршбергом, если бы  $q$ -й и все расположенные ниже него уровни находились в точном равновесии с основным уровнем, а все более высокие уровни находились бы в (точном) равновесии со свободными электронами (задача 4.3). Отметим, однако, что это лишь достаточное условие для такого совпадения и что физический смысл соотношений (4.16) несколько отличается от физической основы рассуждений Хиннова и Хиршберга.

Хиннов и Хиршберг выбирают  $q$ -й уровень на основании критерия

$$qS_{q-1} = q_{-1}S^q \approx qS^{q+1},$$

в котором приближенное равенство относится к высоколежащим уровням. Как видно из соотношения (4.7a) или (2.15), равенство  $qS_{q-1} = q_{-1}S^q$  выполняется, когда

$$\frac{g_q}{g_{q-1}} e^{-\varepsilon_q} q^{-1/l} T_e = 1. \quad (4.17)$$

Таким образом,  $q$ -й уровень — это такой уровень, для которого скорость столкновительных переходов вверх  $n_e n_q q S^{q+1}$  приблизительно равна скорости переходов вниз  $n_e n_q q S_{q-1}$ . При  $k < q$  скорость переходов вниз больше, а при  $k > q$  больше скорость переходов вверх. Предположим, что высокие уровни возбужденного атома имеют водородоподобную структуру [формулы (4.8) из гл. 2]; тогда уравнение (4.17) принимает вид

$$\frac{(2N_q)^2}{12(N_q - 1)^2} \exp \left\{ -\frac{13,6}{kT_e} \left[ \frac{1}{(N_q - 1)^2} - \frac{1}{N_q^2} \right] \right\} = 1,$$

где  $N_q$  — главное квантовое число  $q$ -го уровня, а величина  $kT_e$  выражена в электронвольтах. При  $N_q \gg 1$  получим (задача 4.2)

$$N_q^2 \approx \frac{13,6}{kT_e}$$

и, следовательно,

$$\varepsilon_{q\lambda} = \frac{13,6}{N_q^2} \approx kT_e. \quad (4.18)$$

Определив  $q$ -й уровень, Хиннов и Хиршберг вычисляют  $nS^\lambda$ , подставляя в соотношение (2.9) томсоновское сечение ионизации

(гл. 5, § 8)

$$Q^{h+\lambda} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{n}{e} \left(\frac{1}{v_{h\lambda}} - \frac{1}{e}\right). \quad (4.19)$$

Интегралы  $\lambda S_{h\lambda}$ , входящие в формулу (4.15) для коэффициента рекомбинации  $\alpha$ , можно выразить через величины  $hS^\lambda$ , пользуясь принципом детального равновесия  $\lambda S_{h\lambda} S^\lambda = (n_h/n_e)^*$ . На основе определенных численных приближений, связанных с условием  $N_q \gg 1$ , и в предположении о водородоподобной структуре возбужденного атома Хиннов и Хиршберг затем вычисляют из соотношения (4.15) коэффициент рекомбинации  $\alpha$ , фигурирующий в уравнении (4.13). Они показали, что при  $T_e \approx 3000$  К коэффициент рекомбинации дается формулой

$$\alpha \approx 5,6 \cdot 10^{-27} n_e (kT_e)^{-9/2} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}, \quad (4.20a)$$

в которой величина  $kT_e$  выражена в электронвольтах, а  $n_e$  — в  $\text{см}^{-3}$ . Если температуру  $T$  выразить в кельвинах, то формула (4.20a) принимает вид

$$\alpha \approx 3,4 \cdot 10^{-22} n_e \left(\frac{T_e}{1000}\right)^{-9/2} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}. \quad (4.20b)$$

Подставив это выражение для  $\alpha$  в уравнение (4.13), мы получим простую, хотя и приближенную, формулу для члена  $n_e$  в уравнении непрерывности для электронов (4.4).

В вычислениях Хиннова и Хиршберга основной вклад в сумму (4.15) вносят уровни, находящиеся вблизи  $q$ -го уровня. Это означает, что введение ранее ограничения (3.20) на относительные величины радиационных и столкновительных процессов, а также соотношения о справедливости предположения о водородоподобной структуре должны относиться только к высоколежащим уровням, находящимся вблизи  $q$ -го уровня. Таким образом, должны существовать относительно небольшая группа уровней, переходы между которыми ограничивают скорость процесса рекомбинации. Вычисления, основанные на таком предположении об ограничении скорости рекомбинации, были проведены, например, в работах [9, 10, 13].

Ситуация становится более сложной, когда одинаково существенны и радиационные, и столкновительные процессы рекомбинации. Ясно, что, когда уход излучения приводит к отклонению от уравнения Саха в стационарном состоянии (т. е. при  $n_e \neq 0$ ), микроскопический принцип детального равновесия неприменим по отношению к величине  $n_e$ . В соответствии с этим выражение для  $n_e$  в предельном случае стационарного состояния должно быть модифицировано по сравнению с выражением (4.13). В этом случае, когда радиационные и столкновительные процессы взаимосвязаны,

величину  $n_e$  можно вычислить из уравнений (4.5) и (4.6). Подробные вычисления, основанные на такой постановке задачи, были проведены Бейтсом, Кингстоном и Маквиртером [5]. Ниже мы кратко изложим некоторые результаты этих вычислений.

Бейтс, Кингстон и Маквиртер [5] численно решили уравнения скоростей процессов для  $n_e$  и  $n_k$  в случае плазмы, состоящей из электронов и ионов водорода. Хотя эти авторы допускают существование в плазме многозарядных ионов, мы, как и ранее, для простоты ограничимся случаем, когда заряд ионов равен единице. В работе [5] рассмотрены два случая: случай оптически тонкой плазмы, из которой все излучение уходит (коэффициенты  $\beta_{kj}$  и  $\beta_{\lambda k}$  равны единице), и случай оптически толстой плазмы для излучения серии Лаймана, т. е. для резонансных переходов, заканчивающихся на основном уровне, так что  $\beta_{k1} = 0$ . Во втором случае были рассмотрены следующие четыре варианта других радиационных процессов: 1)  $\beta_{\lambda k} = 1$ ,  $\beta_{kj} = 1$ ; 2)  $\beta_{kj} = 1$ ,  $\beta_{\lambda 1} = 0$ ,  $\beta_{\lambda j} = 1$ ; 3)  $\beta_{kj} = 0$ ,  $\beta_{\lambda k} = 1$  и 4)  $\beta_{kj} = 0$ ,  $\beta_{\lambda 1} = 0$ ,  $\beta_{\lambda j} = 1$  (здесь  $j > 1$ ,  $k \geq 1$ ).

Как мы уже отметили, подходу Бейтса, Кингстона и Маквиртера соответствуют наши уравнения (4.5) и (4.6) для  $n_e$  и  $n_{k>1} = 0$ .

Но вместо уравнения для скорости процесса  $n_e$  названные авторы выбрали уравнение для  $n_1$ . Поскольку при  $n_{k>1} = 0$  выполняется равенство  $\dot{n}_1 = -n_e$ , уравнение для  $n_1$  можно получить из уравнений (4.5) и (4.6). Таким образом, имеем (задача 4.4)

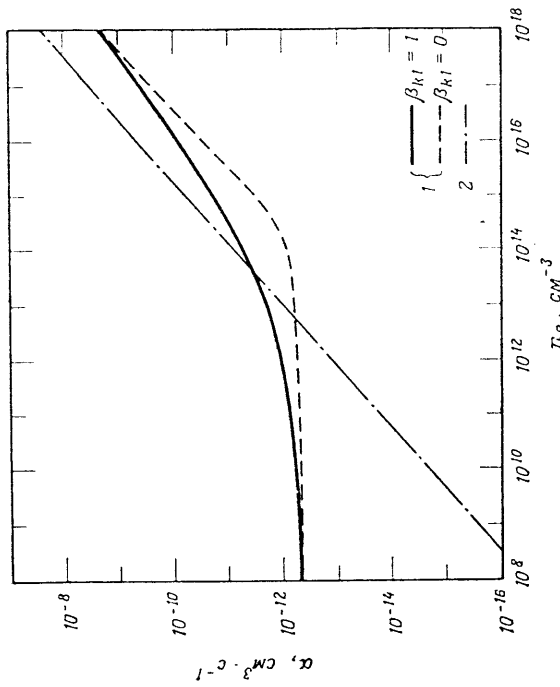
$$\begin{aligned} \dot{n}_1 = -\dot{n}_e = & -n_1 n_e \left( \sum_{1 < l < p} S^l + S^{\lambda'} \right) + \sum_{1 < l < p} n_l (n_e S_1 + A_{1l} \beta_{\lambda 1}) + \\ & + n_e^2 (n_e S_1 + A_{\lambda 1} \beta_{\lambda 1}). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Так как уравнения (4.6) и (4.21) линейны относительно плотности электронов на основном уровне  $n_1$ , решение этих уравнений можно записать в виде

$$\dot{n}_1 = -\dot{n}_e = n_e^2 \gamma = n_e^2 \left( \alpha - \frac{S n_1}{n_e} \right). \quad (4.22)$$

Здесь  $\gamma$ ,  $\alpha$  и  $S$  — величины, которые определяются самими этими соотношениями; они обозначены теми же символами, что и в работе Бейтса и др. Величины  $\alpha$  и  $S$  зависят от  $n_e$  и  $T_e$  и не зависят от  $n_1$ . Важно отметить, что степени величины  $n_e$ , фигурирующие в явном виде в соотношении (4.22), чисто условны, поскольку коэффициенты  $\gamma$ ,  $\alpha$  и  $S$  являются функциями величины  $n_e$ . В частности, на основании уравнения (4.22) нельзя делать вывода о том, что двухчастичная рекомбинация преобладает над другими процессами.

Бейтс, Кингстон и Маквиртер численно решили уравнения (4.6) и (4.21) и нашли коэффициенты  $\alpha$  и  $S$  в уравнении (4.22) в отмеченном выше случае ухода излучения из плазмы для широкого интервала значений  $n_e$  и  $T_e$ . При этом интегралы  $n_e S^l$  и  $n_e S^{\lambda'}$  они вычисляли, исходя из полуклассических формул столкновения Гризинского [16] для сечений столкновения (гл. 2, § 4). Хотя точность этих формул остается под вопросом, проведем сравнение с эксне-

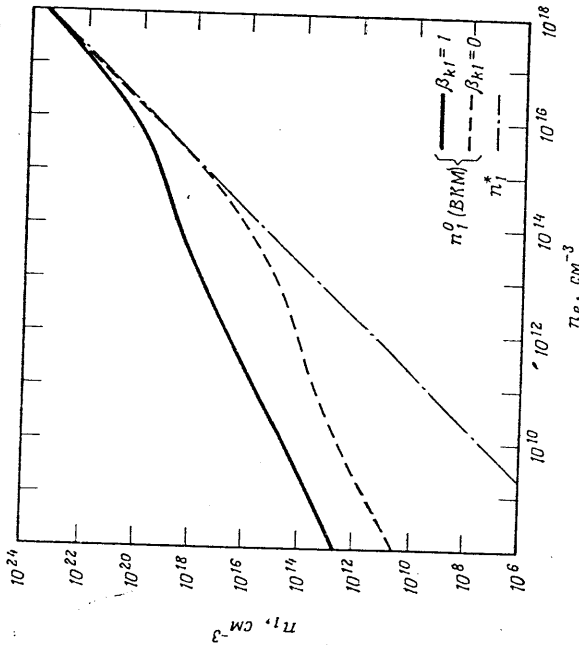


Фиг. 4. Коэффициент рекомбинации  $\alpha$  для водородной плазмы при  $T_e = 8000$  К.  $1$  — кривые, рассчитанные на основе решения автором работы [5];  $2$  — кривая, рассчитанная по формуле (4.22).

риментальными значениями, Бейтс, Кингстон и Маквиртер заключили, что интегралы, вычисленные на основании этих формул, можно считать правильными с точностью до множителя, не превышающего трех.

В качестве примера, иллюстрирующего результаты этих вычислений, на фиг. 4 представлена зависимость коэффициента рекомбинации от плотности электронов для водородной плазмы при  $T_e = 8000$  К. Приведены кривые для двух случаев: 1) когда излучение уходит из плазмы (все коэффициенты  $\beta$  равны единице) и 2) когда излучение серии Лаймана полностью поглощается, т. е.  $\beta_{k1} = 0$ , но все остальное излучение уходит, так что все другие  $\beta$  равны единице. Интервал изменения плотности электронов на графике охватывает два крайних случая — когда рекомбинация происходит в основном за счет столкновительных процессов и когда

рекомбинация носит в основном радиационный характер. Первый из этих случаев мы имеем при больших, а второй — при малых  $n_e^0$ . В первом случае коэффициент  $\alpha$  прямо пропорционален  $n_e^0$ , а во втором он не зависит от  $n_e^0$ . На фиг. 4 приведена также кривая коэффициента рекомбинации, рассчитанная из уравнения Хиннова и Хиршберга [формула (4.22)]. Отметим, однако, что график фиг. 4 построен при  $T_e = 8000$  К, а предполагаемый предел применимости



Фиг. 5. Стационарная ( $n_1^0$ ) и равновесная ( $n_1^*$ ) плотности частиц в основном состоянии для водородной плазмы при  $T_e = 8000$  К.

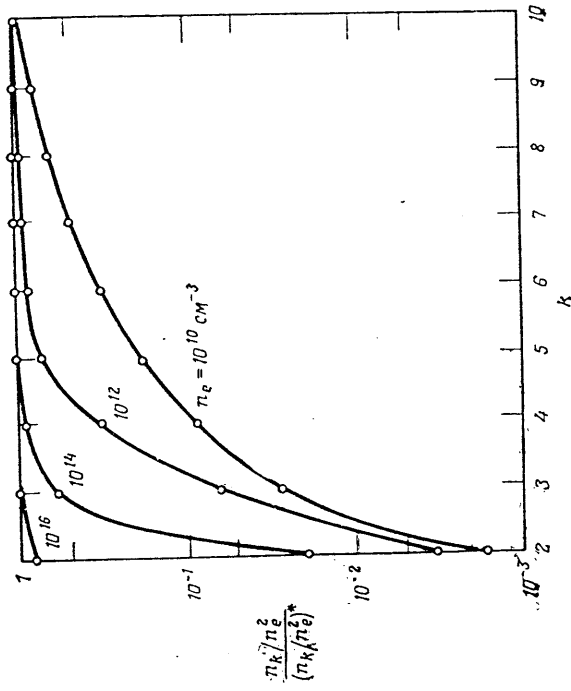
формулы Хиннова и Хиршберга равен 3000 К. На фиг. 5 представлены кривые плотности электронов на основном уровне  $n_1^0$  в стационарном состоянии для двух случаев, показанных на фиг. 4, и кривая равновесной плотности электронов на основном уровне  $n_1^* = (n_1/n_e)^* n_e^2$ . Коэффициент ионизации  $S$  в уравнении (4.22) можно следующим образом выразить через  $\alpha$  и  $n_1^0$ :

$$S = \frac{n_e}{n_1^0} \alpha. \quad (4.23)$$

Графики, приведенные на фиг. 4 и 5, иллюстрируют не только влияние различной степени ухода излучения на коэффициент рекомбинации и точность формулы Хиннова и Хиршберга в сравнении с более точными вычислениями Бейтса и др., но также влияние ухода излучения на плотности в стационарном состоянии. Отметим, что в рассматриваемом случае большие значения  $n_1^0$  при данном значении  $n_e$  эквивалентны меньшим значениям  $n_e$  при данном зна-

чени  $n_1$  в стационарном состоянии. Таким образом, поскольку  $n_1^0 \gg n_1^*$ , в стационарном состоянии мы имеем  $n_e^2/n_1 < (n_e^2/n_1)^*$ , как и говорилось в предыдущем параграфе.

Интересно также найти заселенности  $n_k$  различных уровней, которые вычисляются из уравнения (4.6) и нужны для того, чтобы, пользуясь уравнениями (4.21) и (4.22), построить кривые типа представленных на фиг. 4 и 5. На фиг. 6 приведены кривые  $n_k$



Фиг. 6. Отношение заселенностей  $n_k$  различных возбужденных уровней к их значениям  $n_k^*$  в условиях равновесия со свободными электронами в случае оптически тонкой водородной плазмы при  $T_e = 8000$  К и при  $n_e^2/n_1 \gg (n_e^2/n_1)^*$ .

при  $T_e = 8000$  К для нескольких значений плотности электронов (взяты из работы [3]), соответствующие случаю полного ухода излучения. Для простоты приведены величины, относящиеся к случаю, когда  $n_e^2/n_1 \gg (n_e^2/n_1)^*$ , что справедливо для рекомбинирующей плазмы. Кривые показывают, что предположение о равновесии высоколежащих уровней со свободными электронами оказывается верным.

В случае когда излучение полностью уходит из плазмы, результаты Бейтса и др., представленные на фиг. 4, 5 и 6, полностью согласуются с тем, что говорилось выше в данном параграфе. В случае же когда излучение серии Лаймана поглощается, они в своих расчетах допускали возможность того, что  $n_2 \neq 0$ . Но их расчеты показывают, что в большинстве случаев  $n_2$  убывает до нуля



хождения со значениями для «псевдощелочной» плазмы, приведенными в табл. 4А части I работы [5]. Нужно иметь в виду, что, хотя расчеты проводились для водородоподобных атомов, приведенные экспериментальные результаты относятся к плазме щелочных металлов. Учитывая различия в структуре щелочных металлов и водорода, а также различие между двумя наборами данных, согласие можно считать удовлетворительным.

В данном параграфе мы основывались на предположении, что функцию распределения свободных электронов можно считать максвелловской. В следующем параграфе мы рассмотрим более общий случай, когда будут исследоваться одновременно уравнение Больцмана и уравнения для скоростей процессов.

**Задача 4.1.** Найдите выражение для  $n_e$ , которое можно было бы использовать в уравнении непрерывности для электронов (4.4), соответствующем двухуровневой модели, рассмотренной в предыдущем параграфе. Выразите величину  $n_e$  только через следующие параметры:  $n_e$ ,  $n_1$ , интегралы типа  $1S^{\lambda}$ , которые зависят от  $T_e$ , — и параметры ухода излучения. Покажите, что в случае, когда радиационными процессами можно пренебречь, полученный вами результат можно записать в виде формулы (4.13), так что  $(n_e^2/n_1) = (n_e^2/n_1)^*$  при  $\dot{n}_e = 0$ .

**Задача 4.2.** Выведите уравнение (4.18); полученное Хинновом и Хиршбергом, путем численных приближений, удовлетворяющих неравенству  $N_q \gg 1$ . Покажите, что такие приближения справедливы при  $T_e \ll 3000$  К.

**Задача 4.3.** Покажите, что, несмотря на соотношения (4.16), уравнение (4.15) нельзя получить, положив  $p = q + 1$  в уравнении (4.9), если не заменить  $\lambda$  на  $\lambda$ . Объясните кажущееся противоречие, основываясь на решении задачи 3.5 и двухуровневой модели.

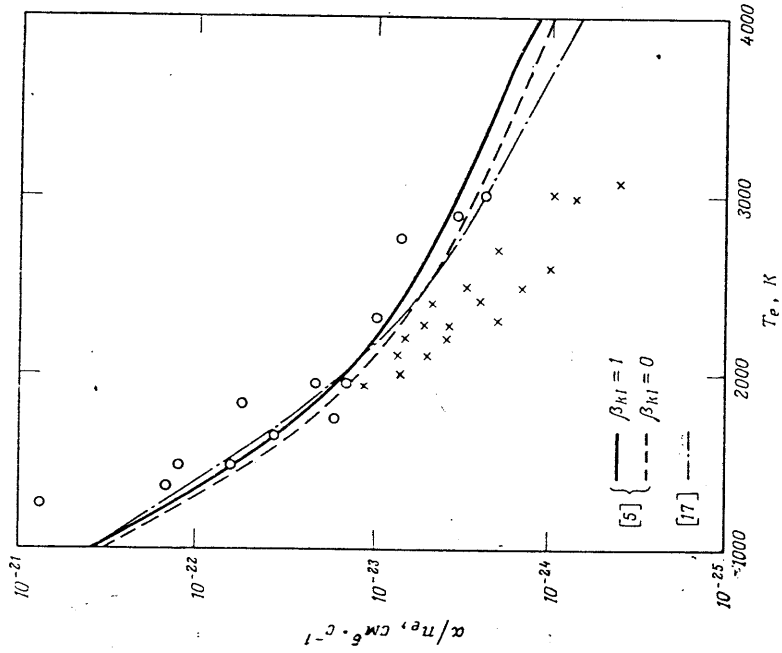
**Задача 4.4.** а) Напишите уравнение (4.21) для  $\dot{n}_1$  непосредственно из физических соображений; б) выведите его из уравнений (4.5) и (4.6) для  $n_e$  и  $n_k > 1$ .

## § 5. ЭФФЕКТЫ, СВЯЗАННЫЕ С НЕМАКСВЕЛЛОВСКИМ ВИДОМ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Выше при исследовании ионизационной неравновесности мы предполагали, что благодаря электрон-электронным столкновениям функция распределения свободных электронов очень мало отличается от локальной изотропной максвелловской функции. Поэтому мы вывели уравнения для скоростей процессов  $n_e$  и  $n_k$  независимо

за время, гораздо меньшее того, которое необходимо, чтобы величина  $n_e$  уменьшилась до нуля.

При таких условиях их результаты, и в частности те, которые показаны на фиг. 4, сводятся к результатам, которые были бы получены, если бы величина  $\dot{n}_2$  с самого начала считалась равной нулю.



Фиг. 7. Теоретические кривые коэффициента рекомбинации  $\alpha/n_e$ , рассчитанные в работах [5, 17], и соответствующие экспериментальные данные [1, 12].

Мы закончим данный параграф сравнением коэффициентов рекомбинации, вычисленных Бейтсом и др. и Хинновом и Хиршбергом, с экспериментальными данными Алесковского [11] и Кула и Зукоски [12] для цезевой и натриевой плазмы (фиг. 7). (Значения коэффициента рекомбинации по Бейтсу и др. вычислены при  $n_e = 10^{13}$  см<sup>-3</sup>, что приблизительно соответствует наблюдавшимся экспериментальным значениям  $n_e$ . Вычисленные значения  $\alpha/n_e$  слабо зависят от  $n_e$ , особенно при  $T_e \ll 2000$  К; не наблюдается также заметного рас-

от уравнения Больцмана для  $f^0$ . Функция распределения электронов в столкновительной плазме будет микселовской, если условия, указанные в гл. 8, § 3, выполняются не только для тепловых электронов, а и для электронов, которые участвуют в столкновениях, приводящих к возбуждению и ионизации. Ниже мы по-прежнему будем предполагать, что такого рода условия, относящиеся к собственным градиентам, изменениям во времени, электрическим полям и к соотношению частот упругих столкновений электрон — электрон и электрон — тяжелая частица [т. е. неравенство  $\bar{v}_{ee} \gg \sum (m_e/m_h) \bar{v}_{eh}$ ], выполняются. Но теперь мы ослабим ограничение  $\bar{v}_{ee} \gg \bar{v}_{he}$ , налагавшееся ранее на частоту неупругих столкновений. При таких условиях отклонение функции  $f_e$  от изотропной функции  $f^0$  будет все же малым, а функция  $f^0$  будет определяться соотношением между электрон-электронными упругими столкновениями и неупругими столкновениями электронов с тяжелыми частицами. Следовательно, мы должны теперь решать единую систему уравнений, в которую входят уравнение Больцмана для  $f^0$  в форме записи, соответствующей рассматриваемому случаю, и уравнения для скоростей процессов  $l_e$  и  $n_h$ . Функция распределения  $f^0$ , удовлетворяющая такой системе уравнений, не является максвелловской. В данном параграфе мы рассмотрим влияние этого обстоятельства на отклонения от уравнения Саха и на заселенность возбужденных уровней в стационарном состоянии, а также на скорости ионизации и рекомбинации. Поскольку такое влияние более существенно при сравнительно низких плотностях электронов, особый интерес представляет то значение плотности электронов, выше которого функция  $f^0$  остается максвелловской и можно пользоваться результатами § 3 и 4. В своем изложении мы будем следовать работе Шоу, Митчнера и Кругера [21].

При условиях, указанных в предыдущем параграфе, функция распределения  $f^0$  определяется первым из уравнений, полученных разложением по декартовым тензорам [уравнение (6.40) из гл. 7], в котором все члены, кроме  $S_{ee}^0$ , опущены ввиду их относительной малости [как в уравнении (3.2) из гл. 8] и добавлен соответствующий член неупругих столкновений. Если последний обозначить через  $S_{he}^0$ , то уравнение для функции  $f^0$  можно символически записать в виде

$$S_{ee}^0 + S_{he}^0 = 0, \quad (5.1)$$

где  $S_{ee}^0$  — величина, даваемая формулой (6.32) из гл. 7. В общем выражении для  $S_{he}^0$  проводится сложное суммирование по различным процессам неупругих столкновений, о которых говорилось в § 2. Но если средняя тепловая энергия электронов  $3/2 kT_e$  намного меньше энергии возбуждения первого уровня  $\epsilon_{12}$ , то, как показано в работе [21], для многих типов плазмы в величине  $S_{he}^0$  преоблада-

ющее значение имеет вклад столкновительного возбуждения и потери возбуждения, связанные с переходами между основным и первым возбужденным уровнями. Для простоты мы будем считать, что дело обстоит именно так, поскольку при таком подходе мы сможем хорошо проиллюстрировать рассматриваемые эффекты.

Выражения для члена  $S_{he}^0$  в уравнении (5.1) проще всего написать (гл. 8, § 8), исходя из того, что уравнение (6.39) из гл. 7 и уравнение (5.1) — это зависящие от скорости уравнения для энергии свободных электронов. Иначе говоря, величина  $S_{he}^0(C)$ , умноженная на  $1/2 m_e C^2 4\pi C^2 dC = \epsilon (4\pi/m_e) \sqrt{2\epsilon/m_e} d\epsilon$ , есть скорость изменения энергии в единице объема в результате неупругих столкновений, испытываемых электронами со скоростями в интервале от  $C$  до  $C + dC$ . Следовательно, для электронов с энергией  $\epsilon = 1/2 m_e C^2$ , большей, чем  $\epsilon_{12}$ , вклад неупругих столкновений типа  $e + A_1 \rightleftharpoons e + A_2$  в член  $S_{he}^0$  дается выражением

$$S_{he}^0 \epsilon \int \frac{4\pi}{m_e} \sqrt{\frac{2\epsilon}{m_e}} d\epsilon = -n_e n_1 f^0(\epsilon) \int \frac{2\epsilon}{m_e} Q^{1+2}(\epsilon) \epsilon \frac{4\pi}{m_e} \sqrt{\frac{2\epsilon}{m_e}} d\epsilon + \\ + n_e n_2 f^0(\epsilon - \epsilon_{12}) \int \frac{2}{m_e} (\epsilon - \epsilon_{12}) Q^{2+1}(\epsilon - \epsilon_{12}) \epsilon \frac{4\pi}{m_e} \times \\ \times \int \frac{2}{m_e} (\epsilon - \epsilon_{12}) d(\epsilon - \epsilon_{12}). \quad (5.2)$$

Здесь, как и в уравнениях (2.3) и (2.4), относительная скорость в выражении для частоты неупругих столкновений записана как  $\sqrt{2\epsilon/m_e}$ , а дифференциальный элемент объема в пространстве скоростей  $4\pi C^2 dC$  — как  $(4\pi/m) \sqrt{2\epsilon/m_e} d\epsilon$ . Первый член правой части равенства (5.2) соответствует неупругим столкновениям типа  $e + A_1 \rightarrow e + A_2$ , в результате которых атом возбуждается, а электрон с энергией от  $\epsilon$  до  $\epsilon + d\epsilon$  теряет энергию  $\epsilon_{12}$ . Второй член соответствует обратным, сверхупругим столкновениям типа  $e + A_1 \rightarrow e + A_2$ , в результате которых атом теряет возбуждение, а электрон с энергией в пределах  $d\epsilon$  получает энергию  $\epsilon_{12}$ . В обратных столкновениях энергия электрона до столкновения равна  $\epsilon - \epsilon_{12}$ , а после столкновения  $\epsilon$ . В силу принципа детального равновесия сечения неупругих столкновений  $Q^{1+2}(\epsilon)$  и  $Q^{2+1}(\epsilon)$  связаны между собой соотношением

$$f_M(\epsilon) \int \frac{2\epsilon}{m_e} Q^{1+2}(\epsilon) \frac{4\pi}{m_e} \sqrt{\frac{2\epsilon}{m_e}} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^* f_M(\epsilon - \epsilon_{12}) \times \\ \times \int \frac{2}{m_e} (\epsilon - \epsilon_{12}) Q^{2+1}(\epsilon - \epsilon_{12}) \frac{4\pi}{m_e} \sqrt{\frac{2}{m_e}} (\epsilon - \epsilon_{12}). \quad (5.3)$$

Подставив в соотношения (5.2) и (5.3) выражение (2.6) для волни-  
цны  $(n_2/n_1)^*$  и выражение

$$f_M(\varepsilon) = \left( \frac{n_2}{2\pi k T_e} \right)^{3/2} e^{-\varepsilon/kT_e} \quad (5.4)$$

для максвелловской функции распределения, получим следующее  
выражение для члена неупругих столкновений:

$$C_{N2}^{\text{неуп}} = n_2 \left[ -n_1 f^0(\varepsilon) + \frac{g_1}{g_2} n_2 f^0(\varepsilon - \varepsilon_{12}) \right] \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m_e}} Q^{1+2}(\varepsilon), \quad (5.5)$$

где  $g_1$  и  $g_2$  — кратности вырождения двух уровней.

Отметим, что в выражении (5.5) учитывается только влияние  
неупругих столкновений типа  $e + A_1 \rightleftharpoons e + A_2$  на электроны  
с энергией, большей  $\varepsilon_{12}$ . Точнее, мы рассматривали только элек-  
трон до неупругого столкновения типа  $e + A_1 \rightarrow e + A_2$  и электрон  
после неупругого столкновения типа  $e + A_2 \rightarrow e + A_1$ , причем  
каждый из этих электронов должен иметь энергию, большую  $\varepsilon_{12}$ .  
Вообще говоря, после неупругого столкновения и с электронами  
до неупругого столкновения, которые могут обладать любой  
энергией. Но в основном энергия таких электронов будет порядка  
тепловой. Для тепловых же электронов, для которых (в условиях,  
представляющих интерес в данном случае)  $kT_e \ll \varepsilon_{12}$ , неупругими  
столкновениями можно обычно пренебречь по сравнению с упру-  
гими электрон-электронными столкновениями. Поэтому эти эффек-  
ты мы не будем включать в нашу модель, за тем исключением,  
которое оговаривается в связи с уравнениями (5.13).

Теперь мы можем написать полное уравнение Больцмана (5.1)  
для  $f^0$ , пользуясь соотношением (6.32) из гл. 7 для  $C_e^0$  и соотно-  
шением (5.5) для  $C_{N2}^{\text{неуп}}$ . Выражая  $C_e^0$  через  $\varepsilon$  и перегруппировывая  
члены, получаем

$$\varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \varepsilon a(\varepsilon) \frac{df^0}{d\varepsilon}(\varepsilon) + b(\varepsilon) f^0(\varepsilon) \right] = \\ = c(\varepsilon) \left[ f^0(\varepsilon) - \frac{g_1 n_2}{g_2 n_1} f^0(\varepsilon - \varepsilon_{12}) \right], \quad (5.6)$$

где  $a(\varepsilon)$ ,  $b(\varepsilon)$  и  $c(\varepsilon)$  — безразмерные величины, даваемые выра-  
жениями

$$a(\varepsilon) \equiv \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{\infty} \varepsilon' f^0 \frac{4\pi}{m_e} \sqrt{\frac{2\varepsilon'}{m_e}} d\varepsilon' + \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m_e}} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'}} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \frac{4\pi}{m_e} \sqrt{\frac{2\varepsilon'}{m_e}} d\varepsilon' \right], \quad (5.7a)$$

$$b(\varepsilon) \equiv \int_0^{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon'} \frac{4\pi}{m_e} \sqrt{\frac{2\varepsilon'}{m_e}} d\varepsilon', \quad (5.7b)$$

$$c(\varepsilon) \equiv \varepsilon^2 \frac{n_1 Q^{1+2}(\varepsilon)}{n_e m_e^2 \Gamma_{ee}}. \quad (5.7в)$$

Поскольку величина  $\Gamma_{ee}$ , согласно формуле (4.14) из гл. 7, равна  
(5.8)

$$\Gamma_{ee} = \frac{k^4}{4} Q_{ee}^{(1)},$$

мы видим, что величина  $c(\varepsilon)$  представляет собой отношение частоты  
неупругих столкновений электронов, приводящих к возбуждению,  
к частоте упругих электрон-электронных столкновений.

Уравнение (5.6) для  $f^0$  совместно с уравнениями для скоростей  
процессов  $n_2$  и  $n_e$  было решено численными методами [21]. Прежде  
чем говорить о результатах этих вычислений, мы рассмотрим при-  
ближенное решение уравнения (5.6), которое позволит нам выяс-  
нить качественно влияние неупругих столкновений на функцию  
распределения. Вначале отметим, что, поскольку сечение неупру-  
гих столкновений  $Q^{1+2}(\varepsilon)$  равно нулю при  $\varepsilon < \varepsilon_{12}$ , величина  $c(\varepsilon)$   
обращается в нуль при энергиях ниже пороговой  $\varepsilon_{12}$ . Следова-  
тельно, при  $\varepsilon < \varepsilon_{12}$  правая часть уравнения (5.6) равна нулю и само  
уравнение принимает вид

$$C_e^0 = 0 \quad (\varepsilon \leq \varepsilon_{12}). \quad (5.9)$$

В соответствии с этим, как и в гл. 8, § 3, функция распределения  
электронов с энергией, меньшей пороговой, будет близка к макс-  
велловской. Исследуем теперь выражения (5.7a) и (5.7b) для  $a(\varepsilon)$   
и  $b(\varepsilon)$ . Поскольку мы предположили, что  $kT_e \ll \varepsilon_{12}$ , при энергиях,  
превышающих  $\varepsilon_{12}$ , вклад второго интеграла в выражение (5.7a)  
для  $a(\varepsilon)$  будет малым, а в оставшийся интеграл и в выражение для  
 $b(\varepsilon)$  основной вклад дадут электроны с такими энергиями, что  
для них  $f^0 \approx f_M$  по крайней мере в том случае, когда функция  
 $f^0(\varepsilon \geq \varepsilon_{12})$  незначительно больше, чем  $f_M(\varepsilon \geq \varepsilon_{12})$ . Следовательно,  
верхний предел в первом интеграле выражения (5.7a) и в интеграле  
выражения (5.7b) можно приближенно заметить на  $\infty$ , и тогда  
при  $\varepsilon \geq \varepsilon_{12}$  мы получим

$$a(\varepsilon) \approx \frac{2/3}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \varepsilon' f^0 \frac{4\pi}{m_e} \sqrt{\frac{2\varepsilon'}{m_e}} d\varepsilon' = \frac{2/3}{\varepsilon} \bar{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} kT_e, \quad (5.10)$$

$$b(\varepsilon) \approx \int_0^{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon'} \frac{4\pi}{m_e} \sqrt{\frac{2\varepsilon'}{m_e}} d\varepsilon' d\varepsilon = 1.$$

С учетом этих выражений преобразуем уравнение (5.6) к виду

$$\varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} \left[ kT_e \frac{df^0(\varepsilon)}{d\varepsilon} + f^0(\varepsilon) \right] = \\ = c(\varepsilon) \left[ f(\varepsilon) - \frac{g_1 n_2}{g_2 n_1} f^0(\varepsilon - \varepsilon_{12}) \right] \quad (\varepsilon \geq \varepsilon_{12}). \quad (5.11)$$

Хотя наш вывод приближенных выражений (5.10) для  $a(\varepsilon)$   
и  $b(\varepsilon)$  справедлив только для электронов с большой энергией

( $\varepsilon \gg \varepsilon_{12}$ ), нетрудно видеть, что максвелловское распределение удовлетворяет уравнению (5.11) также и при тепловой энергии, когда  $\varepsilon < \varepsilon_{12}$  и  $c(\varepsilon) = 0$ .

Уравнениями (5.9) и (5.11) с хорошим приближением можно заменить уравнение Больцмана (5.6) для  $f^0$ . Шоу, Митчнер и Кругер получили аналитические решения этих уравнений, аппроксимировав  $c(\varepsilon)$  различными приближенными выражениями. Уравнение (5.11) было решено методом преобразования Лапласа; здесь при решении нужна осторожность по отношению к граничным условиям и экспоненциально нарастающим решениям. Простейшее решение в этом случае получается, если величина  $c(\varepsilon)/\varepsilon$  считается при  $\varepsilon \gg \varepsilon_{12}$  постоянной и равной, например,  $c_0/kT_e$ , т. е.

$$\frac{c(\varepsilon)}{\varepsilon} = \begin{cases} 0 & \text{при } \varepsilon < \varepsilon_{12}, \\ \frac{c_0}{kT_e} & \text{при } \varepsilon \geq \varepsilon_{12}. \end{cases} \quad (5.12)$$

Из сравнения с соотношением (5.7b) видно, что зависимость (5.12) соответствует случаю, когда сечение возбуждения  $Q_{1 \rightarrow 2}(\varepsilon)$  уменьшается как  $1/\varepsilon$  от своего значения при пороговой энергии. Хотя такая аппроксимация зависимости реального сечения столкновения от энергии не очень хороша, получаемые при этом результаты качественно согласуются с точными численными решениями, а выбрав соответствующую константу  $c_0$ , можно добиться удовлетворительного количественного согласия.

Если для величины  $c(\varepsilon)$  принять выражение (5.12), то решение уравнений (5.9) и (5.11) для  $f^0$  будет иметь вид

$$f^0(\varepsilon) = \left(\frac{m_e}{2\pi kT_e}\right)^{3/2} [e^{-\varepsilon/kT_e} - (1 - P_2)(1 - \alpha_1)e^{-\varepsilon_{12}/kT_e}] \quad \text{при } \varepsilon \leq \varepsilon_{12}, \quad (5.13a)$$

$$f^0(\varepsilon) = \left(\frac{m_e}{2\pi kT_e}\right)^{3/2} e^{-\varepsilon_{12}/kT_e} \left\{ P_2 e^{-(\varepsilon - \varepsilon_{12})/kT_e} + \right. \\ \left. + \alpha_1(1 - P_2) e^{-(\varepsilon - \varepsilon_{12})/\alpha_1 kT_e} + P_2(1 - P_2) e^{-\varepsilon_{12}/kT_e} \times \right. \\ \left. \times \left[ (\alpha_1 - 1) + \left( \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1 + \alpha_2} - P_2(1 - \alpha_1) \right) e^{(\varepsilon - 2\varepsilon_{12})/\alpha_2 kT_e} \right] \right\}$$

Здесь  $P_2$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — параметры, которые определяются следующим образом:

$$P_2 \equiv \frac{n_2/n_1}{(n_2/n_1)^*}, \\ \frac{1}{\alpha_1} \equiv \sqrt{c_0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}, \\ \frac{1}{\alpha_2} \equiv \sqrt{c_0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}}. \quad (5.13b)$$

Выражение, аналогичное выражению (5.13b), но более сложное по форме, получается при энергиях в диапазоне  $2\varepsilon_{12} \leq \varepsilon < 3\varepsilon_{12}$  и даже при более высоких энергиях.

Как мы уже указывали выше, решение (5.13a) при  $\varepsilon \leq \varepsilon_{12}$  очень близко к максвелловскому распределению. Второй член в квадратных скобках в формуле (5.13a) есть константа, которую обычно полагают равной нулю, поскольку  $f^0(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Этот член выражает связь между двумя решениями при  $\varepsilon = \varepsilon_{12}$  и необходим для того, чтобы обеспечить непрерывность функции  $f^0$  и производной  $d^j f^0/d\varepsilon$  в этой точке. Решение (5.13a) уравнения (5.9) и проведено путем рассуждений, аналогичных тем, которые проводились при выводе уравнения (5.11). Но оно может иметь особую точность при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Данный вопрос рассматривается в работе Шоу, Митчнера и Кругера [21, часть I] в связи с вопросом о влиянии неупругих столкновений на тепловые электроны, обладающие низкой энергией.

Наличие в решении (5.13) нормировочного множителя  $(m_e/2\pi kT_e)^{3/2}$  и множителя  $1/kT_e$  в показателях экспонент согласуется с нашим предположением о том, что  $kT_e \ll \varepsilon_{12}$ . Когда это условие выполняется, основной вклад в интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^0 d^3C = 1$$

и

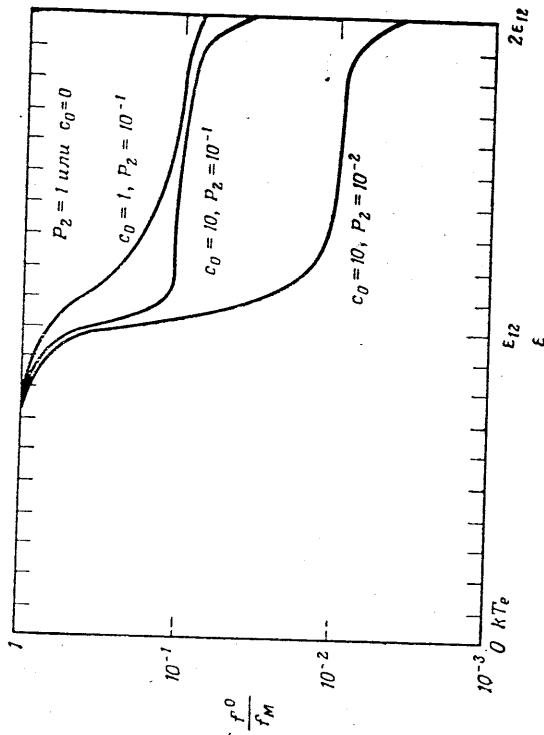
$$\frac{3}{2} kT_e \equiv \frac{1}{2} m_e \bar{C}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m_e C^2 f^0 d^3C$$

дает первый член в квадратных скобках в части (5.13a) решения.

График функции  $f^0$ , даваемой приближенным решением (5.13) при нескольких значениях параметров  $P_2$  и  $c_0$  и при  $kT_e = 0,1\varepsilon_{12}$ , представлен на фиг. 8. Если  $n_2/n_1 = (n_2/n_1)^*$ , то  $P_2 = 1$  и функция распределения является максвелловской независимо от величины  $c_0$ . При  $n_2/n_1 < (n_2/n_1)^*$  (т. е. при  $P_2 < 1$ ) высокоэнергетичный «хвост» функции распределения спадает с энергией гораздо быстрее, чем для максвелловской функции. Это убывание становится более резким с возрастанием величины  $c_0$  и, поскольку  $c_0 \sim n_1^{-1}$ , тем более существенно, чем меньше плотность электронов. С физической точки зрения уменьшение величины  $f^0$  на «хвосте» при  $P_2 < 1$  объясняется тем, что, поскольку  $(n_2/n_1) < (n_2/n_1)^*$ , потеря энергии электронами в неупругих столкновениях типа  $e + A_1 \rightarrow e + A_2$  уже не уравновешивается увеличением энергии этих электронов при сферических столкновениях типа  $e + A_2 \rightarrow e + A_1$ .

Чтобы выяснить следствия, которые вытекают из решения (5.13), представленного на фиг. 8, его нужно исследовать совместно с урав-

нениями скоростей процессов (§ 2) в соответствующей форме записи. Для иллюстрации предположим на некоторое время, что мы можем использовать приближенную форму (3.4) уравнения скорости процесса для  $n_2$ . Это соответствует предположению, что заселенность



Фиг. 8. Кривые, соответствующие приближенному выражению (5.13) для электронной функции распределения при  $kT_e = 0,1\epsilon_{12}$ .

$n_2$  первого возбужденного уровня определяется соотношением между скоростью столкновительного возбуждения с основного уровня и скоростью столкновительной и радиационной потерь возбуждения с возвращением на основной уровень. Решение соответствующего уравнения скорости процесса (3.4) можно записать в виде

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{1S_2^2 S_1}{1 + R_2}, \quad (5.14)$$

где, как и раньше, безразмерный параметр

$$R_2 \equiv \frac{A_{21} \beta_{21}}{n_n {}^2 S_1} \quad (5.15)$$

является мерой ухода излучения. В § 3, где функция распределения предполагалась максвелловской, принцип детального равновесия (2.6) позволял заменить отношение  $1S_2^2 S_1$  величиной  $(n_2/n_1)^*$ . Теперь же, когда функция распределения может быть немаквелловской, принцип детального равновесия можно применять, как в соотношении (5.3), только к связи между сечениями столкновения  $Q^{1 \rightarrow 2}$  и  $Q^{2 \rightarrow 1}$ , но не к соотношению между интегралами  $1S_2^2$  и  $2S_1$ .

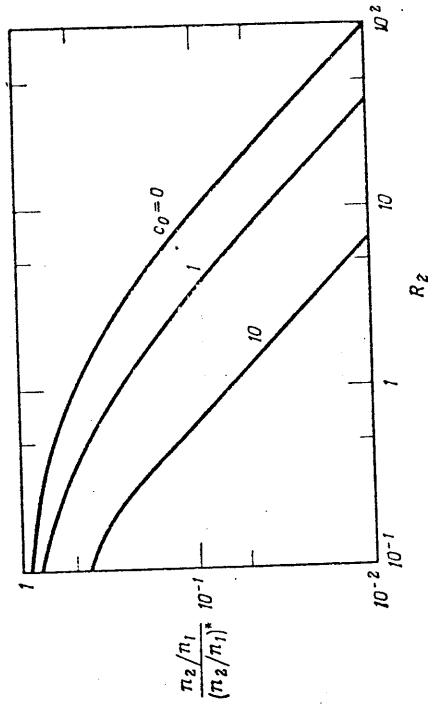
В то же время отметим, что распределение (5.13) является почти максвелловским для электронов с малой энергией, участвующих в столкновениях с потерей возбуждения типа  $e + A_2 \rightarrow e + A_1$ , и, следовательно, мы можем считать, что немаквелловский вид функции распределения не влияет на  $2S_1$ . Если обозначить интегралы (2.3) и (2.4), получающиеся при  $f^0 = f_M$ , через  $(1S_2^2)_M$  и  $(2S_1)_M$ , то получим

$$2S_1 \approx (2S_1)_M, \\ \frac{(1S_2^2)_M}{2S_1} \approx \frac{(1S_2^2)_M}{(2S_1)_M} = \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^*.$$

Тогда соотношение (5.14) для  $1S_2^2/(1S_2^2)_M$  можно переписать в виде

$$\frac{n_2/n_1}{(n_2/n_1)^*} = \frac{1S_2^2/(1S_2^2)_M}{1 + R_2}. \quad (5.16)$$

Величину  $1S_2^2/(1S_2^2)_M$  в соотношении (5.16) можно вычислить, если в формуле (2.3) вместо функции  $f_M$  взять немаквелловскую



Фиг. 9. Влияние немаквелловского вида функции распределения на заселенность первого возбужденного уровня при  $kT_e = 0,1\epsilon_{12}$ . Кривые построены на основании двухуровневой модели и приближенного выражения (5.13) для  $f^0$ . Параметр  $R_2$  характеризует степень ухода излучения, а параметр  $c_0$  — относительную роль неупругих столкновений.

функцию вида (5.136). В данном случае, когда величина  $c(\epsilon)/\epsilon$  считается постоянной и равной  $c_0/kT_e$ , так что  $Q^{1 \rightarrow 2} \sim 1/\epsilon$  при  $\epsilon \gg \epsilon_{12}$  [формулы (5.7b) и (5.12)], в результате интегрирования получим

$$\frac{1S_2^2}{(1S_2^2)_M} = P_2 + (1 - P_2) \alpha_1^2 \frac{(e_{12}/kT_e) + \alpha_1}{(e_{12}/kT_e) + 1} + O(e^{-e_{12}/kT_e}), \quad (5.17)$$

где, как и раньше,  $P_2 = (n_2/n_1)/(n_2/n_1)^*$  и  $\alpha_1^{-1} = (c_0 + 1/4)^{1/2} + 1/2$ .

Подставив выражение (5.17) в (5.16), получим одно уравнение для  $(n_2/n_1)/(n_2/n_1)^*$ , решение которого при  $kT_e \ll \epsilon_0, 1e_{12}$  представлено графически на фиг. 9. Это решение показывает, как ухудшение, характерный параметром  $R_2$  [формула (5.15)], влияет на заселенность первого возбужденного уровня. Относительная роль неупругих столкновений и, следовательно, отклонение функции распределения от максвелловской определяются параметром  $\epsilon_0$ , который является мерой отношения частоты неупругих столкновений, приводящих к возбуждению, к частоте упругих электрон-электронных столкновений. При  $\epsilon_0 = 0$  эффекты, связанные с неупругими столкновениями, отсутствуют и решение выражается соотношением (3.5) и зависимостями, представленными на фиг. 1 в § 3. Чтобы результаты, приведенные на фиг. 9, можно было связать с реальной плазмой, мы приводим в табл. 2 прибли-

Таблица 2

Приближенные значения параметра неупругих столкновений  $\epsilon_0$ , определяемого формулами (5.7в) и (5.12)

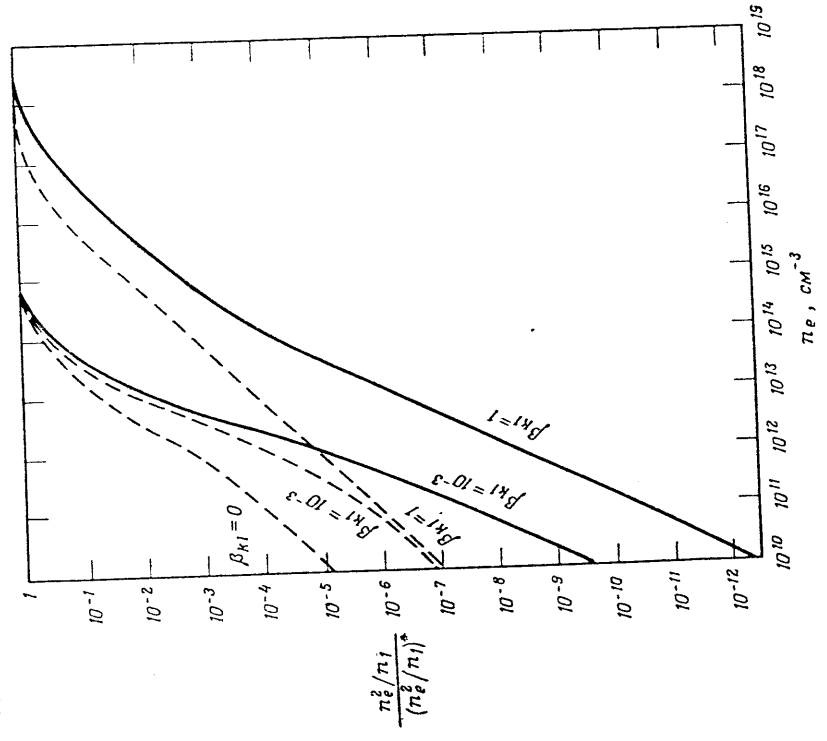
	АТОМ			
	Cs	K	Na	H
$T_{e1}, K$	2500	2500	2500	10 000
$n_e kT_e \epsilon_0 / n_1$	$3,92 \cdot 10^{-3}$	$1,32 \cdot 10^{-3}$	$4,40 \cdot 10^{-4}$	$2,24 \cdot 10^{-4}$

женные значения величины  $n_e kT_e \epsilon_0 / n_1$  при условиях, соответствующих табл. 1 из § 3. Здесь величина  $\epsilon_0$ , соответствующая приближенной модели сечения столкновения  $Q^{1 \rightarrow 2}$ , вычислялась на основе реальных значений  $Q^{1 \rightarrow 2}$  для разных компонент путем приравнивания модельного значения  $Q^{1 \rightarrow 2}(\epsilon)$  реальному значению  $Q^{1 \rightarrow 2}(\epsilon)$  при  $\epsilon = \epsilon_{12} + kT_e$ .

Решение приближенного уравнения Больцмана (5.11) качественно показывает влияние неупругих столкновений на функцию распределения. Кроме того, при разумном выборе аналитической модели для параметра неупругих столкновений  $s(\epsilon)$  на основе этого уравнения можно получить приемлемые количественные результаты. Это подтверждается сравнением полученных таким образом результатов с решением уравнения Больцмана в более точной форме (5.6). Уравнение (5.6) было решено численным методом в работе Шоу, Митчнера и Кругера для водородной плазмы и плазмы щелочных металлов.

Особый интерес представляет исследование влияния немаксвелловской функции распределения на результаты Бейтса, Кингстона и Маквиртера (БКМ) [5], о которых говорилось в предыдущем параграфе. Шоу, Митчнер и Кругер решили уравнение Больцмана

(5.6) совместно с уравнениями (4.21) и (4.6) скоростей процессов для  $n_e$  и  $n_h$  для водородной плазмы при тех же сечениях столкновений, которые использовались БКМ. Взяв в качестве  $f^0$  максвелловскую функцию распределения и рассматривая уровень атома водорода от 16-го до 21-го, они воспроизвели результаты БКМ с точностью



Фиг. 10. Влияние немаксвелловского вида функции распределения на отклонения от уравнения Саха в стационарном случае для водорода при 8000 К [21].

Сплошные кривые рассчитаны на основе функции  $f^0$ , даваемой уравнением (5.6); штриховые кривые рассчитаны на основе  $f^0 \approx f^0/M$ .

до нескольких процентов. Если же функцию  $f^0$  определить численно из решения уравнения Больцмана, то при низких плотностях электронов наблюдается заметное отклонение от предыдущего результата. При этих вычислениях выражения (5.7а) и (5.7б) для коэффициентов  $a(\epsilon)$  и  $b(\epsilon)$  в уравнении (5.6) были модифицированы таким образом, чтобы включить в рассмотрение упругие столкновения электронов с атомами (задача 5.1). На фиг. 10 пока-

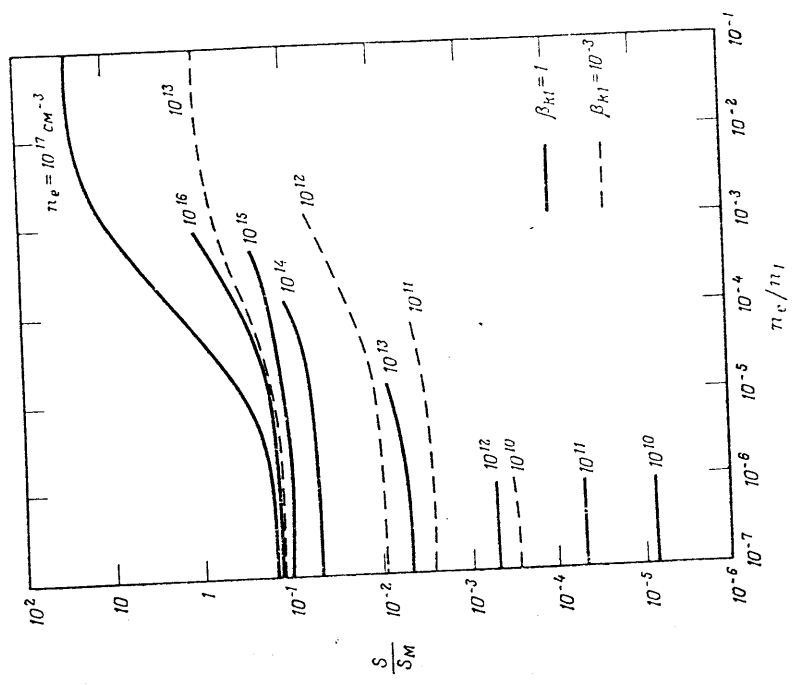
зано влияние немаксвелловского распределения на зависимость стационарных ( $n_e = 0$ ) значений отношения  $(n_e^2/n_1)/(n_e^2/n_1)^*$  от плотности электронов  $n_e$  для водорода при  $T_e = 8000$  К. При этих вычислениях считалось, что все нерезонансное излучение уходит из плазмы ( $\beta_{\lambda,h} = 1$ ), а коэффициент ухода резонансного излучения  $\beta_{h1}$  рассматривался как параметр. Мы видим, что при малых значениях величины  $n_1$ , а следовательно, и  $n_e$  отклонения от уравнения Саха, найденные Шоу и др. [ $n_e^2/n_1 = (n_e^2/n_1)^*$ ], гораздо больше, чем предсказываемые на основании предположения о максвелловском виде функции распределения. По этой причине эффекты возбуждения при атом-атомных столкновениях, которые не учитывались в этих вычислениях, могут оказывать существенными при низких плотностях электронов.

Немаксвелловский вид функции распределения не только влияет на стационарные значения отношения  $n_e^2/n_1$ , но и приводит к изменению величины  $n_e$  в нестационарной плазме. Бейтс, Кингстон и Маквиртер представляют  $n_e$  в виде

$$n_e = n_e^* \left( -\alpha + \frac{Sn_1}{n_e} \right), \quad (5.18)$$

где  $\alpha$  и  $S$  — функции величин  $n_e$  и  $T_e$ , не зависящие от  $n_1$ . Шоу и др. показали, что коэффициент рекомбинации  $\alpha$ , зависящий только от той части функции  $f^0$ , которая соответствует малым (тепловым) энергиям, практически не изменяется при  $f^0 \neq f_M$ , поскольку функция  $f^0$  в любом случае близка к максвелловской при  $\epsilon < \epsilon_{12}$ . Действительно, для водородной плазмы энергия возбуждения на первый уровень  $\epsilon_{12} = 10,2$  эВ составляет столь большую долю потенциала ионизации  $\epsilon_{1\lambda} = 13,6$  эВ, что немаксвелловский вид функции распределения ( $f^0 \neq f_M$ ) оказывает влияние только на интегралы скоростей процессов для переходов вверх с основного уровня. Однако коэффициент ионизации  $S$  зависит от вида функции распределения. На фиг. 11 представлена зависимость отношения  $S/S_M$  коэффициентов ионизации при  $f^0 \neq f_M$  и при  $f^0 = f_M$  от отношения  $n_e/n_1$  при нескольких значениях  $n_e$ . Здесь для случаев полного ухода резонансного излучения ( $\beta_{h1} = 1$ ) взяты значения  $S_M$ , вычисленные БКМ при  $f^0 = f_M$ . Поскольку БКМ не приводят результаты для случая частичного ухода излучения, при  $\beta_{h1} = 10^{-3}$  использованы значения  $S_M$ , полученные Шоу и др. при  $f^0 = f_M$ . Аналогично были получены кривые, соответствующие значению  $\beta_{h1} = 10^{-4}$ , на фиг. 10. Оказывается, что, когда резонансное излучение полностью поглощается ( $\beta_{h1} = 0$ ), результаты Шоу и др. не отличаются сколько-нибудь значительно от результатов БКМ при  $f^0 = f_M$ , так что в этом случае  $S/S_M \approx 1$ . В вычислениях  $S$  величина  $S$  не зависит от  $n_1$ . Но, когда  $f^0 \neq f_M$ , величина  $S$  является функцией  $n_1$  из-за той роли, которую играет параметр

неупругих столкновений  $s(\epsilon)$  в решении для  $f^0$  [формула (5.7b)]. В ионизационной области (сравнительно малые значения  $n_e/n_1$ ) влияние немаксвелловского вида функции распределения выражается в понижении коэффициента ионизации  $S$  по сравнению с его величиной, вычисленной при  $f^0 = f_M$ . Это происходит из-за того, что высокоэнергетичный «хвост» функции распределения



Фиг. 11. Влияние немаксвелловского вида функции распределения на коэффициент ионизации  $S$ , входящий в формулу (5.18), для водорода при 8000 К.

понижается по сравнению с максвелловским значением. В рекомбинационной же области (сравнительно большие значения  $n_e/n_1$ ) отношение  $S/S_M$  может превышать единицу. В таких случаях избыток заселенности  $n_2$  [ $n_2/n_1 > (n_2/n_1)^*$ ], связанный с процессами рекомбинации, приводит к тому, что функция  $f^0$  действительно больше, чем  $f_M$  при  $\epsilon > \epsilon_{12}$ . Это в свою очередь приводит к увеличению коэффициента  $S$ .

**Задача 5.1.** Найдите выражения для коэффициентов  $a$  ( $\nu$ ) и  $b$  ( $\nu$ ) в уравнении (5.6), в которых учитывалось бы влияние электронных упругих столкновений [формула (6.26) из гл. 7].

**Задача 5.2.** Исходя из принципа детального равновесия (5.3) для сечений  $Q^{1 \rightarrow 2}(e)$  и  $Q^{2 \rightarrow 1}(e - \epsilon_{12})$ , выведите соотношение (2.6) между интегралами  $\int S^2$  и  $\int {}^2S_1$  в случае, когда  $f^0 = f_M$ .

**Задача 5.3.** Выведите уравнение (5.6) в модифицированном виде, учитывая неупругие эффекты при низких энергиях, которыми обладают электроны после неупругого столкновения ( $e + A_1 \rightarrow e + A_2$ ) и электроны перед сверхупругим столкновением ( $e + A_2 \rightarrow e + A_1$ ). Можете ли вы путем оценок порядка величины найти условия, при которых этими эффектами можно пренебречь?

**Задача 5.4.** Покажите, что функция  $f^0$ , даваемая решением (5.13) приближенного уравнения Больцмана (5.11), больше функции  $f_M$  для высокоэнергетичных электронов, если  $n_2/n_1 > (n_2/n_1)^*$ . Объясните на основе приближенной двухуровневой модели [формула (3.1)], каким образом такая ситуация может реализоваться в рекомбинирующей плазме.

**Задача 5.5.** Покажите, что в случае немаксвелловской функции распределения (5.13) интеграл  $\int S^2$  определяется соотношением (5.17).

**Задача 5.6.** Пользуясь результатами, приведенными в данном и предыдущем параграфах, постройте график зависимости отношения  $n_e/n_e$  (равного характерному времени ионизационной релаксации) от величины  $n_e$  для водорода при 8000 К. В качестве параметра возьмите  $n_1 = 10^{14}$ ,  $10^{16}$  и  $10^{18}$  см $^{-3}$ . Для случаев, когда  $\beta_{n_1} = 0$  и  $\beta_{n_1} = 1$ , нарисуйте кривые, основанные а) на предположении о том, что  $f^0 = f_M$ , и б) на решениях Шоу и др., в которых такое предположение не делается.

## § 6. ИОНИЗАЦИОННАЯ НЕРАВНОВЕСНОСТЬ В ДВИЖУЩЕЙСЯ ПЛАЗМЕ

В данном параграфе мы на основе теории, изложенной в этой главе, рассмотрим вопрос об ионизационной неравновесности в движущейся плазме. Такое неравновесное состояние возникает в связи с тем, что для установления ионизационного равновесия между уровнями в плазме требуется некоторое конечное время. В движущейся плазме это — время, измеряемое наблюдателем, который движется с локальной скоростью потока. Рассматриваемый тип ионизационной неравновесности может возникнуть при быстром изменении электрического поля или быстром расширении плазмы через сверхзвуковое сопло. Такой случай отличен от случая иони-

зационной неравновесности в стационарном состоянии, связанной с уходом излучения (§ 3). По эффект ухода излучения может быть существенным и в движущейся плазме, и, как мы видели в § 4, он может влиять на скорость рекомбинации и ионизации, а также на локальное «стационарное» значение степени ионизации. Ионизационная неравновесность, возникающая из-за быстрых изменений в потоке, аналогична колебательной и химической неравновесности в высокотемпературном газе. В соответствии с этим значительная часть результатов, полученных для таких газовых потоков Винченги и Кругером [23, гл. 8] и Кларком и Макчесни [11, гл. 6], имеет более или менее близкие аналоги в проблеме ионизационной неравновесности. В то же время имеются и важные различия, в особенности касающиеся тесной связи уравнения энергии электронов и скоростей рекомбинации и ионизации.

В данном параграфе мы рассмотрим ионизационные процессы в стационарном потоке частично ионизованной плазмы, проходящем по какому-то каналу. Здесь под «стационарным потоком» мы понимаем поток, который локально не зависит от времени ( $\partial/\partial t = 0$ ) в каждой своей точке, и, как подробнее будет объяснено ниже, здесь слово «стационарный» употребляется в ином смысле, нежели тогда, когда речь идет о состоянии. Канал может быть реальной физической границей потока или математической поверхностью, параллельной в каждой точке вектору средней скорости и, следовательно, ограничивающей «трубку тока».

Для простоты мы будем исходить из квазистационарного приближения газовой динамики [20, гл. 4; 19, гл. 2]. Это означает, что если ось  $x$  проходит по оси канала, то мы будем считать, что  $n_e$ ,  $T_e$  и другие величины, представляющие интерес, постоянны в любой плоскости, перпендикулярной оси  $x$ , и, следовательно, являются функциями только координаты  $x$ . Кроме того, мы будем рассматривать только тот случай, когда плотность электронного тока и, следовательно, диффузионная скорость электронов равны нулю. Удобную форму уравнения непрерывности для электронов (4.4) в случае квазистационарного потока можно получить, рассматривая «фиксированный объем» с площадью основания, равной сечению канала  $A$  ( $x$ ), и длиной  $dx$  в направлении потока (фиг. 12). Скорость, с которой электроны вносятся потоком в этот объем, равна

$$n_e u A, \quad (6.1a)$$

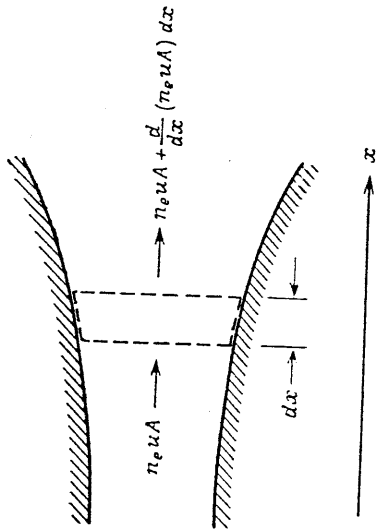
а скорость, с которой они выносятся из него, равна

$$n_e u A + \frac{d}{dx}(n_e u A) dx. \quad (6.1b)$$

Здесь через  $u$  обозначена компонента вектора массовой скорости и в направлении  $x$ . В одномерной задаче для потока, направленного вдоль оси  $x$ , величину  $u(x)$  можно считать единственной ненулевой



компонентой вектора  $u$ . Но поскольку площадь сечения  $A$  меняется и зависимость от  $x$ , то по чисто геометрическим соображениям это утверждение не может быть совершенно точным. Тем не менее скорость потока через плоское сечение, перпендикулярное оси  $x$ , зависит только от  $u$ , и поэтому выражения (6.1) должны быть точными, если  $n_e u A$  заменить величиной  $\int n_e u dA$ . Так как, по нашему предположению, величина  $J_e$  равна нулю, поток электронов на



Фиг. 12. К выводу одномерного уравнения непрерывности для электронов методом «фиксированного объема».

стенки канала также равен нулю. В стационарном потоке разность чисел электронов, входящих в объем и выходящих из него, должна быть равна произведению объема  $A dx$  на отнесенную к единице объема скорость образования электронов  $\dot{n}_e$ . Таким образом, одномерное уравнение непрерывности для электронов имеет вид

$$\frac{d}{dx} (n_e u A) = \dot{n}_e A. \quad (6.2)$$

Такой же результат можно было бы получить, проинтегрировав уравнение непрерывности (4.4) по «фиксированному объему» (фиг. 12), с учетом теоремы Стокса и условий  $\partial/\partial t = U_e = 0$ ,  $n_e = n_e(x)$ ,  $u = u(x)$  и  $\dot{n}_e = \dot{n}_e(x)$ . О фигурирующей в уравнении (6.2) скорости образования электронов  $\dot{n}_e$  говорилось в § 4 и 5. Для максимального упрощения изложения в дальнейшем будем предполагать, что плотность электронов достаточно велика и что функция распределения электронов является максвелловской. Следовательно, мы можем прямо использовать результаты анализа, проведенного в § 4.

Поскольку скорость образования электронов  $\dot{n}_e$  зависит и от  $n_e$  и от температуры электронов, следует рассмотреть также уравнение

для энергии электронов. Чтобы получить подходящую форму этого уравнения, лучше всего проинтегрировать уравнение (8.5) из гл. 8 по «фиксированному объему» (фиг. 12). Если предположить, что при наших условиях электронным потоком тепла  $Q_e$  можно пренебречь, то на основании теоремы Стокса, а также соотношений  $\partial/\partial t = J_e = 0$  и  $p_e = p_e(x)$  [задача (6.1)] получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \frac{d}{dx} \left[ n_e u A \left( \frac{5}{2} k T_e + \varepsilon_i \right) \right] - u \frac{d}{dx} (n_e k T_e) &= \\ = n_e \frac{3}{2} k (T_h - T_e) \sum_h \frac{m_e}{m_h} \bar{v}_{eh} - \dot{R}. \end{aligned} \quad (6.3a)$$

Здесь, как и в формуле (8.4) из гл. 8, отнесена к единице объема скорость  $\dot{R}$  потерь энергии свободными электронами в процессе неупругих столкновений выражается следующим образом:

$$\dot{R} \approx \dot{R} + \varepsilon_i \dot{n}_e = \dot{R} + \frac{v_i}{A} \frac{d}{dx} (n_e u A), \quad (6.3b)$$

где  $\dot{R}$  — отнесенная к единице объема локальная скорость потери энергии на излучение, а  $\varepsilon_i$  — потенциал ионизации с основного уровня. В уравнении (6.3a) мы предполагаем, что температура  $T_h$  одинакова для всех тяжелых частиц, и вынесли множитель  $(T_h - T_e)$ , за знак суммирования.

Читатель, знакомый с уравнениями газовой динамики для фиксированного объема, узнает в члене  $n_e u (\frac{5}{2}) k T_e$  уравнения (6.3a) поток энергии, связанный с энтропией электронов  $h_e$ . Однако он может посчитать член  $-u d(n_e k T_e)/dx$  «лишним», а также задать вопрос, почему в правой части уравнения отсутствует член  $-\varepsilon_i u \cdot E$ , учитывающий работу, совершаемую при движении электронов в поле. (Хотя, по нашему предположению,  $J_e = 0$ , из этого не обязательно следует, что  $E = 0$ .) Это объясняется следующим образом. Уравнение для энергии (6.3) относится к стационарному объему (фиг. 12). Исходное же уравнение (8.5) из гл. 8, из которого выведено уравнение (6.3), основывается на уравнении Больцмана [формула (3.5) из гл. 7], написанном через скорость электронов  $C$ , измеряемую относительно  $u$ . Таким образом, все эти уравнения верны, но первый член в правой части уравнения (6.3) не есть скорость набора энергии электронами при упругих столкновениях в неподвижной системе координат. В обозначениях, принятых при написании уравнения (3.76) из гл. 7, эта величина равна  $\sum_h \Delta_{eh} [1/2 m_e C^2]$ . Вместо этого в уравнении (6.3) имеется член  $\sum_h \Delta_{eh} [1/2 m_e C^2]$ , описывающий увеличение энергии в движущейся системе координат. Нетрудно показать, что

$$\Delta_{eh} \left[ \frac{1}{2} m_e C^2 \right] = \Delta_{eh} \left[ \frac{1}{2} m_e C^2 \right] + u \cdot \Delta_{eh} [m_e C]. \quad (6.4)$$

В рассматриваемых условиях уравнение для импульса электронов, согласующееся со сделанными предположениями, имеет вид

$$\nabla p_e + en_e E' = \sum_h \Delta_{eh} [m_e C] \quad (6.5)$$

[см. уравнение (3.106)] из гл. 7, в котором мы пренебрегаем членом  $\rho_e Du/Dt$  и, следовательно, предполагаем ниже в уравнении (6.7), что  $\frac{1}{2} k T_e \gg m_e c^2/2$ . Комбинируя уравнения (6.4) и (6.5), имеем

$$\sum_h \Delta_{eh} \left[ \frac{1}{2} m_e c^2 \right] - \sum_h \Delta_{eh} \left[ \frac{1}{2} m_e c^2 \right] = -\mathbf{u} \cdot \nabla p_e - en_e \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}'. \quad (6.6)$$

Таким образом, «лишний» и «недостающий» члены в уравнении (6.3) учитывают различие в увеличении энергии за счет упругих столкновений в двух системах отсчета. На основании уравнения (6.6) и соотношения  $\rho_e = n_e k T_e$  уравнение для энергии (6.3) можно записать в виде

$$\frac{1}{A} \frac{d}{dx} \left[ n_e u A \left( \frac{5}{2} k T_e + \varepsilon_i \right) \right] = -en_e \mathbf{u} \cdot \mathbf{E} + \sum_h \Delta_{eh} \left[ \frac{1}{2} m_e c^2 \right] - \dot{R}. \quad (6.7)$$

Хотя такое уравнение легче интерпретировать с физической точки зрения, рассматривая стационарный «фиксированный объем» (фиг. 12), из-за наличия в нем члена  $\Delta_{eh} [1/2 m_e c^2]$  оно неудобно для анализа.

Уравнения (6.2) и (6.3) описывают изменение величин  $n_e$  и  $T_e$  в движущейся плазме. Прежде чем исследовать эти уравнения, следует выбрать подходящую форму записи для величин  $n_e$  и  $\dot{R}$ . Для простоты мы будем предполагать, что членом  $\dot{R}$ , учитывающим уход излучения, в уравнении (6.3) для энергии электронов можно пренебречь и что скорость образования электронов  $n_e$  в уравнении непрерывности для электронов (6.2) дается формулой Хиннова — Хиршберга (4.20)

$$n_e = \alpha \left[ n_1 \left( \frac{n_e^0}{n_1} \right)^* - n_e^0 \right], \quad (6.8a)$$

где

$$\alpha = 3,4 \cdot 10^{-22} \left( \frac{T_e}{1000} \right)^{-9/2} n_s \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}. \quad (6.8b)$$

Здесь температура  $T_e$  выражена в кельвинах. Кроме того, мы предположим, что зависимость величин  $n_e$ ,  $T_h$  и  $n_1$  от координаты  $x$  известна из решения уравнений сохранения для газа как целого.

Вообще говоря, это решение связано с решением уравнения для энергии электронов, поскольку первый член в правой части уравнения (6.3) учитывает обмен энергией между электронами и тяжелыми частицами. Но в некоторых случаях, когда степень ионизации газа как целого не слишком велика, этим членом в уравнении для

энергии газа можно пренебречь. Тогда параметры, характеризующие состояние тяжелых частиц, можно найти классическими методами [19, 20]. В этом случае тяжелые частицы можно представить себе как «тепловой резервуар» с известными параметрами, в который погружены электроны.

Чтобы пояснить основную идею вывода, рассмотрим вначале случай, когда величины  $A$ ,  $u$ ,  $T_h$  и  $n_1$  постоянны. Будем считать, что в некоторой точке потока, например в точке  $x = 0$ , плотность электронов  $n_e^0 = n_e(x=0)$  связана с их температурой  $T_e^0 = T_e(x=0)$  уравнением Саха и что  $T_e^0 > T_h$ . Такая ситуация, когда температура  $T_e^0$  превышает  $T_h$  и плотность  $n_e^0$  дается уравнением Саха при температуре  $T_e^0$ , может возникнуть из-за нагревания электронов джоулевым теплом  $\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{E}$  в разряде в области  $x < 0$  (см., например, фиг. 2 в гл. 8, § 3). Зададимся теперь вопросом, каким образом в ходе процесса рекомбинации в области  $x > 0$ , где  $\mathbf{J}_e = 0$ , величины  $T_e$  и  $n_e$  приходят к их конечным неравновесным значениям  $T_e^0 = T_h$  и  $n_e^0 = n_e^*(T_e^0 = T_h)$ . В этом случае уравнение непрерывности (6.2) и уравнение (6.3) для энергии электронов в отсутствие ухода излучения сводятся к виду

$$u \frac{dn_e}{dx} = \alpha \left[ n_s \left( \frac{n_e^0}{n_1} \right)^* - n_e^0 \right] \quad (6.9)$$

и

$$u \frac{d}{dx} \left[ n_e \left( \frac{3}{2} k T_e + \varepsilon_i \right) \right] = -n_e \frac{3}{2} k (T_e - T_h) \sum_h 2 \frac{n_e}{n_h} \bar{v}_{eh}, \quad (6.10)$$

где  $\alpha$  — величина, связанная с  $T_e$  формулой (6.8b). Начальные условия имеют вид

$$\text{при } x = 0 \quad \begin{cases} T_e = T_e^0 > T_h, \\ n_e = n_e^0 = [n_1 (n_e^0/n_1)^* (T_e = T_e^0)]^{1/2}. \end{cases} \quad (6.11)$$

Уравнения (6.9) — (6.11) описывают две связанные формы неравновесности: превышение температуры  $T_e$  над  $T_h$  и превышение плотности  $n_e$  над конечной величиной  $n_e^0$ , определяющейся уравнением Саха. Обе формы неравновесности возникают из-за того, что для перехода рекомбинирующей плазмы от начальных условий  $T_e^0$ ,  $n_e^0$  к конечным  $T_e^0$ ,  $n_e^0$  требуется конечное время, измеряемое здесь величиной  $x/u$ . Эта ситуация эквивалентна аналогичному процессу установления рекомбинационного равновесия в стационарной плазме, для которой в момент времени  $t = 0$  выполняются условия  $T_e = T_e^0$  и  $n_e = n_e^0$ . Уравнения для этого случая можно получить из уравнений (6.9) и (6.10), подставив в них  $t = x/u$ .

При заданных значениях параметров нетрудно решить численно систему уравнений (6.10) и (6.11) относительно  $T_e(x)$  и  $n_e(x)$ . Мы рассмотрим два частных случая. Во-первых, предположим, что

скорость рекомбинации, даваемая формулами (6.8), так велика по сравнению со скоростью установившейся температуры  $T_e$ , что в каждой точке  $x$  величина  $n_e$  описывается уравнением Саха при локальном значении  $T_e$ . Тогда в каждой точке мы имеем

$$n_e^2 \approx (n_e^*)^2 = n_1 \left( \frac{2\pi m_e k T_e}{h^2} \right)^{3/2} \frac{2g_l}{g_1} e^{-e_i/kT_e}. \quad (6.12)$$

Если подставить это выражение для  $n_e$  в уравнение для энергии (6.10) и пренебречь членом порядка  $kT_e/e_i$ , то мы получим

$$\frac{1}{2} \left( \frac{e_i}{kT_e} \right)^2 u \frac{dT_e}{dx} = -\frac{3}{2} (T_e - T_h) \sum_h 2 \frac{m_e}{m_h} \bar{v}_{eh}. \quad (6.13)$$

Хотя в данном примере мы предполагали, что из-за большой скорости рекомбинации величина  $n_e$  почти равна  $n_e^*$  [формула (6.12)], это не означает, что уравнение непрерывности (6.9) сводится к виду

$$u \frac{dn_e}{dx} = 0.$$

Этот вид уравнения непрерывности при постоянных  $u$  и  $A$  применим только в противоположном предельном случае *замороженного* потока, соответствующем медленной рекомбинации, когда  $\alpha \rightarrow 0$ . В рассматриваемом же *квазиравновесном* предельном случае коэффициент рекомбинации  $\alpha$  считается большим, так что уравнение непрерывности (6.9) удовлетворяется при  $\alpha \rightarrow \infty$  и  $n_e^2 \rightarrow n_e^{*2}$ . При этом

$$u \frac{dn_e}{dx} \rightarrow u \frac{dn_e^*}{dx}.$$

До тех пор пока величину  $\bar{v}_{eh}$  можно считать приблизительно постоянной и не зависящей от  $T_e$ , решение уравнения (6.13) с начальными условиями (6.1) имеет вид

$$\frac{T_e - T_h}{T_e^0 - T_h} \exp \left\{ \frac{T_h - T_h}{T_e} \right\} = \exp \left[ -\frac{x/u}{\tau_T'} \right]. \quad (6.14)$$

Здесь  $\tau_T'$  — характерное для рассматриваемого случая время релаксации электронной температуры, даваемое формулой

$$\tau_T' = \frac{(e_i/kT_h)^2}{6 \sum_h (m_e/m_h) \bar{v}_{eh}}. \quad (6.15)$$

Из-за наличия множителя  $T_e^2$  в левой части уравнения (6.13) решение (6.14) имеет сложный вид, но качественно оно показывает, что релаксация происходит по экспоненциальному закону с постоянной времени  $\tau_T'$  [во всяком случае, до тех пор, пока отношение  $T_e^2/T_h$  не слишком велико (задача 6.5)].

Рассмотрим теперь противоположный случай, когда время релаксации температуры  $T_e$  мало по сравнению с временем релак-

сации  $n_e$ . В соответствии с этим предположим, что величина  $T_e$  равна своему локальному «стационарному» значению, которое определяется балансом между скоростью наращания энергии  $e_i |n_e|$  в результате неупругих столкновений в ходе процесса рекомбинации и скоростью потери энергии при упругих столкновениях. В этом случае величину  $T_e$  можно выразить через  $n_e$ , пользуясь соотношением

$$-e_i n_e = e_i \alpha \left[ n_e^2 - n_1 \left( \frac{n_e^2}{n_1} \right)^* \right] = n_e \frac{3}{2} k (T_e - T_h) \sum_h 2 \frac{m_e}{m_h} \bar{v}_{eh}. \quad (6.16)$$

Здесь, как и раньше, слово «стационарный» означает, что имеется локальный баланс между механизмами набора и потери энергии. Такой случай, конечно, отличается от случая стационарного потока ( $\partial/\partial t = 0$ ). Кроме того, локальное стационарное состояние не обязательно является равновесным или конечным состоянием. При отыскании локального стационарного решения уравнения типа (6.16) и в исходном уравнении пренебрегают членами, содержащими конвективные пространственные производные и (в общем случае) производную по времени. Это не означает, что пространственные изменения не принимаются во внимание, но доминирующими в этом уравнении считаются другие члены. Таким образом, уравнение (6.16) получается из уравнений (6.9) и (6.10), если в уравнении (6.10) пренебречь членом  $u (n_e^3/kT_e)/dx$  по сравнению с другими членами. Отметим, что в данном случае мы не можем пренебречь членом  $u e_i dn_e/dx$  в уравнении (6.10), поскольку физически этот член учитывает скорость увеличения энергии за счет неупругих столкновений. Зная неявную зависимость  $T_e$  от  $n_e$ , выражаемую уравнением (6.16), можно численно проинтегрировать уравнение непрерывности для электронов (6.9) и найти  $n_e(x)$ . Для большей простоты будем искать решение в случае, когда величины  $T_e$  и, следовательно,  $(n_e^2/n_1)^*$  и  $\alpha/n_e$  постоянны. Физически это соответствует ситуации, когда превышение температуры  $T_e$  над  $T_h$ , описываемое уравнением (6.16), всюду мало. Тогда решение уравнения (6.9) имеет вид

$$\frac{1 - (n_e^2/n_e)^2}{1 - (n_e^2/n_e^0)^2} = e^{-(2x/u)/\tau_n}, \quad (6.17)$$

где

$$(\tau_n')^2 = n_1 \left( \frac{n_e^2}{n_1} \right)^*,$$

а  $\tau_n$  — постоянная времени рекомбинации, даваемая формулой

$$\tau_n = \frac{1}{(n_e^2/n_e^0) \alpha/n_e}. \quad (6.18)$$

Поскольку, согласно соотношению (6.86), величина  $\alpha/n_e$  не зависит от  $n_e$ , постоянная времени  $\tau_n$  является функцией только электронной температуры  $T_e$ . [Мы предполагаем, что  $n_1 \gg n_e$  и, следовательно,  $n_1 \neq n_1(n_e)$ .] Для процесса, который мы только что рассмотрели, мы предполагали, что в определенном смысле релаксация электронной температуры протекает намного быстрее, чем релаксация плотности  $n_e$ .

Можно было бы подумать, что так обстоит дело, если величина  $\tau'_T$ , даваемая выражением (6.15), намного меньше величины  $\tau_n$ , даваемой выражением (6.18). Но это не так. На самом деле должно выполняться равенство

$$\tau'_T \ll \tau_n,$$

$$\tau_T = \sum_n 2 \frac{(m_e/m_h)^{1/2}}{v_{eh}}. \quad (6.19)$$

Действительно, в сечении  $x = 0$ , где  $T_e = T_e^0$  и  $n_e = n_e^0 = n_e^*(T_e^0)$ , из уравнения непрерывности (6.9) имеем  $dn_e/dx = 0$ . Поэтому из уравнения (6.10) для энергии при  $x = 0$  следует равенство

$$\frac{u dT_e}{dx} = -\frac{(T_e^0 - T_h)}{\tau_T},$$

так что по крайней мере в начальной точке характерное время равно  $\tau_T$ . Кроме того, если предположить, что  $T_e$  релаксирует на расстоянии  $0 > x > x'$ , где величина  $n_e$  приблизительно постоянна, а  $n_e^*$  заметно падает из-за уменьшения  $T_e$ , то в указанном интервале изменения  $x$  исходное уравнение энергии (6.10) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} u \frac{d}{dx} \left( \frac{3}{2} kT_e \right) &= -\frac{3/2k(T_e - T_h)}{\tau_T} - \left( \frac{3}{2} kT_e + \varepsilon_i \right) \frac{n_e}{n_e} \approx \\ &\approx -\frac{3/2k(T_e - T_h)}{\tau_T} + \varepsilon_i \frac{\alpha}{n_e} (n_e^2 - n_e^{*2}) \ll \\ &\ll -\frac{3/2k(T_e - T_h)}{\tau_T} + \left[ \frac{\varepsilon_i \alpha}{n_e} (n_e^2 - n_e^{*2}) \right]_{x=x'}, \end{aligned}$$

где  $n_e^{*2} \equiv n_1 (n_e^0/n_1)^*$ . Обозначив теперь величину  $T_e$  при  $x = x'$  [где выполняется уравнение (6.16)] через  $T_e'$ , перепишем последнее неравенство в виде

$$u \frac{d}{dx} \left( \frac{3}{2} kT_e \right) \ll -\frac{3/2k(T_e - T_h)}{\tau_T},$$

откуда следует, что

$$\frac{T_e - T_e'}{T_e^0 - T_e^0} \ll \exp \left[ -\frac{x/\mu}{\tau_T} \right].$$

Таким образом, в рассматриваемом случае сравнительно медленного изменения плотности  $n_e$  начальная релаксация температуры  $T_e$  к ее значению, даваемому уравнением (6.16), происходит с постоянной времени, по крайней мере столь же малой, как и  $\tau_T$ .

Появление двух разных времен релаксации  $\tau_T$  и  $\tau'_T$  в двух рассмотренных примерах может показаться читателю большим удивлением. Но эти примеры иллюстрируют одно важное положение относительно оценки времен релаксации: такую оценку надежнее всего проводить отдельно для каждого случая, исходя непосредственно из основных уравнений. Установлено, что в плазме во многих случаях время релаксации  $\tau_T$  температуры  $T_e$  меньше времени релаксации  $\tau_n$  плотности электронов  $n_e$ , так что величина  $T_e$  приходит в соответствие с локальными условиями гораздо быстрее, чем  $n_e$  (задача 6.6).

Рассмотрим теперь более сложную задачу о расширении частиц но ионизованной плазмы через сверхзвуковое сопло. Предположим, что до входа в сопло, где скорость мала, плазма находится в равновесном состоянии, так что если уход излучения отсутствует, то температура электронов и тяжелых частиц в этой области одинакова, а плотность электронов определяется уравнением Саха. В процессе расширения температура тяжелых частиц будет падать из-за превращения энергии теплого движения в энергию направленного движения. Упругие же столкновения между электронами и ионами будут приводить к уменьшению температуры электронов, что в свою очередь приведет к комбинации плазмы. Изменение поперечного сечения потока и уменьшение плотности частиц на основном уровне будут также приводить (хотя и в меньшей степени) к уменьшению плотности электронов. На достаточном расстоянии от выхода из сопла в сверхзвуковой зоне будет достигнуто новое равновесное состояние при более низкой плотности электронов, чем на входе сопла.

В промежутке между начальным и конечным состояниями температура и плотность электронов могут отличаться от своих равновесных значений. Поскольку скорость, с которой набирают энергию свободные электроны в процессе комбинации, равна  $-e/n_e$ , температура электронов будет выше температуры тяжелых частиц. Таким образом, даже если градиенты, возникающие при расширении, достаточно малы и выполняются условия локальной «стационарности», величина  $(T_e - T_h)$  должна по-прежнему удовлетворять уравнению (6.16). Кроме того, при типичных условиях эксперимента постоянная времени изменений, происходящих в потоке  $[\sim (u/dx)^{-1}]$ , в определенных зонах области расширения будет меньше времен релаксации величин  $T_e$  и  $n_e$ . В зависимости от конкретных условий эти времена релаксации можно оценить по формулам (6.18), (6.19) или (6.15). В частности, скорость реком-

бнации, которая пропорциональна  $n_e^2$ , будет мала на выходе из сопла в сверхзвуковой зоне, где плотность  $n_e$  чрезвычайно мала [формула (6.8)]. Поэтому плотность электронов в данной зоне не может упасть значительно ниже величины  $n_e'$ , для которой время рекомбинации  $(n_e/\alpha)(n_e')^{-2}$  равно времени протекания струи. Само собой разумеется, что время, необходимое для того, чтобы газ достиг точки, весьма удаленной от выхода сопла, достаточно велико, так что в конце концов величина  $n_e$  уменьшится до своего конечного равновесного значения.

Неравновесное расширение через сопло для одномерного потока в случае, когда плотность тока и поток тепла электронов равны нулю, описывается уравнениями непрерывности (6.2) и энергии (6.3). В этих уравнениях величина  $A(x)$  предполагается известной, и, если в уравнении для энергии тяжелых частиц можно пренебречь передачей энергии от электронов при упругих столкновениях, то скорость и другие свойства тяжелой компоненты можно вычислить отдельно из уравнений сохранения для газа как целого. При  $kT_e \ll \ll \epsilon_i$  с хорошей степенью точности можно считать, что плотность частиц на основном уровне  $n_1$ , которая входит в выражение для  $n_e$  [формула (6.8a)], не зависит от степени ионизации и также может быть вычислена отдельно.

Поскольку в общем виде уравнения (6.2) и (6.3) трудно решить, желательно найти более простое приближенное решение. Один из возможных подходов основан на принципе «мгновенного замораживания»<sup>1)</sup>, предложенном для проблем химической неравновесности Брэем [8]. При таком подходе [в нашем случае применительно к уравнению непрерывности (6.2)] принимают, что в начальной части сопла, где «кинетическая» скорость рекомбинации  $\alpha^* n_e^2 A$  велика по сравнению со скоростью рекомбинации  $-d(n_e^* u A)/dx$ , «требуемой» потоком, величина  $n_e$  принимает равновесное значение, определяющееся уравнением Саха

$$n_e^*(T_e) = \left[ n_1 \left( \frac{n_e^*}{n_1} \right)^* \right]^{1/2}. \quad (6.20)$$

Далее той точки, где

$$-\frac{d}{dx}(n_e^* u A) = \alpha^* n_e^* A, \quad (6.21)$$

плотность электронов считается «замороженной», и в остальной части сопла величина  $n_e$  в уравнении (6.2) берется равной нулю, что дает

$$\frac{d}{dx}(n_e u A) \approx 0. \quad (6.22)$$

1) Или «закалки». — Прим. перев.

В таком замороженном потоке величина  $n_e$  будет изменяться из-за того, что произведение  $nA$  изменяется с расстоянием  $x$ . По оптической концентрации электронов  $n_e/n_1$  будет постоянной (если нет химических реакций между тяжелыми частицами; вообще же говоря, постоянной будет величина  $\rho_e/\rho$ ).

В качестве некоего обобщения метода «мгновенного замораживания» можно записать уравнение непрерывности для электронов за точкой, где выполняется условие (6.21), не в виде (6.22), а следующим образом:

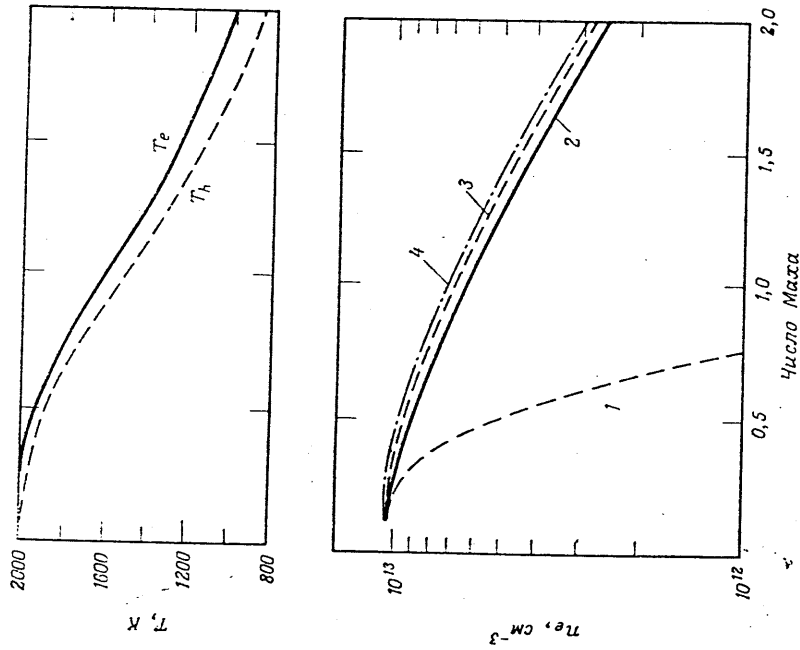
$$\frac{d}{dx}(n_e u A) \approx -\alpha n_e^2 A. \quad (6.23)$$

Это возможно ввиду того, что за точкой, определяющейся равенством (6.21), из-за уменьшения  $T_e$  скорость ионизации  $\alpha n_1 (n_e^*/n_1)^* A$  становится меньше скорости рекомбинации  $\alpha n_e^2 A$ . В соответствии с этим ионизационный член в приближенном уравнении непрерывности (6.23) опущен. Скорость рекомбинации, вычисленная на основании этой модели, для рекомбинирующей плазмы будет несколько выше скорости, определяемой полными уравнениями, так что локальное значение величины  $n_e$  будет меньше, а величины  $T_e$  — больше точного значения.

Вычисления, основанные на изложенном выше принципе, были проведены Бензе [6], который исследовал расширение аргона с добавкой 0,25 мол. % цезия и калия через сверхзвуковое сопло длиной 15 см при начальной равновесной температуре 2000 К и давлении 500 кПа. В области до той точки, в которой выполняется равенство (6.21), величина  $n_e$  полагалась равной  $n_e^*(T_e)$  в соответствии с уравнением (6.20), а величина  $T_e(x)$  вычислялась из уравнения для энергии электронов [формула (6.13)]. За точкой, определяемой равенством (6.21), величины  $T_e(x)$  и  $n_e(x)$  определялись путем совместного решения уравнения энергии и приближенного уравнения непрерывности (6.23). При вычислениях использовалось уравнение для энергии в виде (6.3), где пренебрегается уходом излучения и опущен член  $-ud(n_e kT_e)/dx$ . В рассматриваемых при этом случаях пренебрежение указанными членами, вероятно, не сильно сказывается на результатах. Для величины  $n_e$  использовалась формула Хиншоу и Хиршберга, а расширение тяжелых частиц предполагалось не зависящим от процесса рекомбинации.

Результаты вычислений Бензе для аргона с добавкой калия представлены на фиг. 13. Наряду с точными теоретическими кривыми  $n_e$  и  $T_e$  приведены кривые  $n_e$  для случаев полной заморозки и полного равновесия. В первом случае величина  $n_e$  везде равна нулю и, поскольку при этом величина  $n_e u A$  постоянна,  $n_e$  уменьшается только из-за увеличения произведения  $nA$ . Случай

полного равновесия соответствует равновесию, описываемому уравнением Саха при локальной температуре тяжелых ионов. Кроме того, на графиках приведена кривая  $n_e$ , соответствующая случаю мгновенного замораживания [см. уравнение (6.22)]. Точка, в которой выполняется условие (6.21), соответствует абсциссе 0,25.



Фиг. 13. Результаты вычислений [6] для потока аргона с добавкой калия через сопло.  
1 — полное равновесие; 2 — тонкая кривая; 3 — мгновенное замораживание; 4 — полное замораживание.

**Задача 6.1.** Выведите уравнение непрерывности (6.2) и уравнение для энергии (6.3) путем интегрирования соответствующих уравнений в частных производных [формула (4.4) из гл. 9 и формула (8.5) из гл. 8] по фиксированному объему (фиг. 12).

**Задача 6.2.** Покажите, что приближенное уравнение (6.36) эквивалентно приближенному уравнению (4.1) из § 4, т. е. равенству  $n_{h>1} = 0$ .

**Задача 6.3.** Дайте физическую интерпретацию членов уравнения для энергии электронов (6.7).

**Задача 6.4.** Выведите уравнение энергии для электронов в форме (6.13) для случая потока с постоянным сечением, когда  $n_e = n_e^*(T_e)$ .

**Задача 6.5.** На основе решения (6.14) уравнения для энергии электронов постройте график зависимости отношения  $(T_e - T_h) / (T_e^0 - T_h^0)$  от  $x/\tau t$  в случае, когда  $T_e^0/T_h^0 = 2$ .

**Задача 6.6.** Вычислите по формулам (6.18), (6.19) и (6.15) времена релаксации  $\tau_n$ ,  $\tau_T$  и  $\tau_T'$  для чистого аргона и для аргона с добавкой 0,25 мол. % калия при разных значениях  $T_e$  (включая те значения  $T_e$ , которые приведены в табл. 1 из § 3). Для простоты возьмите приближенные постоянные значения сечений столкновений  $Q_{eA} \sim 10^{-16} \text{ см}^2$  и  $Q_{eK} \sim 4 \cdot 10^{-14} \text{ см}^2$  и вычислите  $\tau_n = 1/\alpha n_e$ , исходя из уравнения Саха. Тогда  $\tau_T/\tau_n$  и  $\tau_T'/\tau_n$  при данной температуре  $T_e$  практически не будут зависеть от давления плазмы. При каких условиях время релаксации температуры  $T_e$  будет меньше времени релаксации плотности  $n_e$ ?

### Литература

1. Алексовский Ю. М., ЖЭТФ, 17, 570 (1963). Исследование объемной рекомбинации в цезиевой плазме.
2. Allen C. W., Astrophysical Quantities, Athlone Press, 1963.
3. Bates D. R., Kingston A. E., Planet. Space Sci., 11, 1 (1963). Properties of a Decaying Plasma.
4. Bates D. R., Kingston A. E., Proc. Phys. Soc., 83, 43 (1963). Collisional-Radiative Recombination at Low Temperatures and Den- sities.
5. Bates D. R., Kingston A. E., McWhirter R. W. P., Proc. Roy. Soc., A 267, 297 (1962); Proc. Roy. Soc., A 270, 155 (1962).
6. Verze D. P., диссертация, Массачусетский технологический институт, 1965. Effect of Electronic Relaxation on MGD Channel Flows.
7. Bendaniel D. J., Tamor S., General Electric Research Lab. Rep. № 62-RL-(2922E), 1962.
8. Bray K. C. N., Journ. Fluid Mech., 6 (1), 1 (1959). Atomic Recombination in Hypersonic Wind-Tunnel Nozzle.
9. Byron S., Borzi P. I., Russel G., в книге Proc. 4-th Symp. on Engin. Aspects of MHD, 1963. Electron-Ion Reaction Rate Theory: Determination of the Properties of Nonequilibrium Monatomic Plasmas in MHD Generations and Accelerators and in Shock Tubes.
10. Byron S., Stabler R. C., Borzi P., Phys. Rev. Lett., 8, 376 (1962). Electron-Ion Recombination by Collisional and Radiative Processes.
11. Clarke J. F., McChesney M., The Dynamics of Real Gases, Butterworths, 1964.

12. Cool T. A., Zukoski E. E., Phys. Fluids, 9, 780 (1966).  
Recombination, Ionization and Nonequilibrium Electrical Conductivity in Seeded Plasmas.
13. Dugan J. V., NASA TN D-2004, 1964.  
Three-Body Collisional Recombination of Cesium Seeded Ions and Electrons in High-Density Plasmas with Argon Carrier Gas.
14. Dugan J. V., Lyman F. A., Albers L. U., в книге Int. Symp. on MHD Power Generation (Salzburg, 1966), Paper SM-74/191.  
Solution of the Boltzmann and State Populations in Nonequilibrium MHD Plasmas.
15. Griem H. R., Plasma Spectroscopy, McGraw-Hill, 1964 (имеется перевод: Х. Р. Грим, Спектроскопия плазмы, М., 1969).
16. Gryzinski M., Phys. Rev., 115, 374 (1959).
17. Hinnov E., Hirschberg J. G., Phys. Rev., 125, 795 (1962).  
Electron-Ion Recombination in Dense Plasmas.
18. Holstein T., Phys. Rev., 83, 1159 (1951).  
Imprisonment of Resonance Radiation in Gases.
19. Liepmann H. W., Rosikó A., Elements of Gasdynamics, Wiley, 1957.
20. Shapiro A. H., The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow, vol. 1, Ronald Press, 1953.
21. Shaw J. F., Michtner M., Kruger C. H., Phys. Fluids, 13, 325, 339 (1970).  
Effects of Nonelastic Collisions in Partially Ionized Gases, parts I, II.
22. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П., Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, М., 1966.
23. Vincenti W. G., Kruger C. H., Introduction to Physical Gasdynamics, Wiley, 1965.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адиабатический инвариант 170  
 Альфвеновская скорость 196, 199  
 Амбиполярная область 152
- Бесстолкновительная плазма 176  
 Больцмана распределение 314, 439  
 — уравнение 317, 322, 323, 385
- Вектор Пойнтинга 272, 273  
 Вероятность индуцированного излучения 313  
 — спонтанного излучения 313  
 — столкновения 33  
 Возбуждение двухэлектронное 20  
 Волна ионизации 39  
 Вращательные состояния 20  
 Высота атмосферы 31
- Генератор серпесный 223  
 — с вихревой геометрией 224  
 — с диагональными проводящими стенками 223  
 — фарадеевский с секционированными электродами 220  
 — со сплошными электродами 220  
 — холловский 222  
 Горючий электрон 62, 63  
 Граница континуума 18  
 — спектральной серии 18
- Двойной слой 133, 137, 151  
 — зонд 146  
 Двухуровневая модель 441, 444, 446, 450, 463  
 Двухчастичная рекомбинация 449, 458  
 Двухэлектронное возбуждение 20  
 Дебаевская сфера 336  
 Дебаевский радиус экранирования 64, 132, 139  
 Дебаевское экранирование кулоновского потенциала 340  
 Диссоциативная фотоионизация 22
- Дифференциальное сечение рассеяния 27  
 Диэлектрическая проницаемость среды 162  
 Длина волны де Бройля 263  
 — энергетической релаксации электрона 62  
 — свободного пробега средняя 31, 43, 97  
 Доплеровское уширение 79  
 Доплеровская форма линии 78
- Естественная полуширина линии 303
- Закон Гука 88  
 — Дальтона 88  
 — Ома обобщенный 165, 206, 209, 217  
 Замороженный поток 482, 487  
 Зонд двойной 146  
 — ленточный 143  
 — одноэлектродный 146, 148
- Излучение индуцированное 73  
 — тормозное 95, 288  
 Инкремент 237, 238  
 Интеграл Фурье 38  
 — столкновений 335, 344  
 Инфинитная (траектория) 246  
 Ионный ток насыщения 145  
 Ионизационная неравновесность 426  
 — неустойчивость 165, 230
- Калибровка 274  
 — кулоновская 275  
 — лоренцевская 275  
 Коллекторные состояния 20  
 Коллекторное столкновение 257  
 Контактная разность потенциалов 148  
 Континуум 18, 449  
 Константа ионизации 95  
 — термодиффузии 376, 388  
 Коэффициент вязкости 97, 99, 184  
 — диффузии ионов 150  
 — электронов 149

Работа выхода 148  
 Работоспособность 70  
 Радиационные пояса Ван Аллена 171  
 Разложение векторного потенциала по моментам 281  
 Распределение Больцмана 84, 136, 314  
 Рассеяние комбинационное 83  
 — резонансное 83  
 — релеевское (когерентное) 83  
 — томсоновское 83  
 Расстояние максимального (наибольшего) сближения 246, 248, 252  
 Рекомбинация двухэлектронная 45  
 — диссоциативная 44  
 — излучательная 44  
 — трехчастичная 40, 44, 45  
 Сверхупругое столкновение 40, 89, 428  
 Сечение возбуждения для оптически разрешенного перехода 37  
 — соответствующее оптически запрещенным переходам 37  
 — рассеяния дифференциальное 28, 251, 254  
 — излучательной рекомбинации 56, 93  
 — ионизации 96  
 — томсоновское 35  
 — неупругих столкновений 34  
 — оптическое 78  
 — передачи импульса 30  
 — поглощения при свободно-свободных переходах 81, 82  
 — — связанно-свободных переходов 82  
 — — связанных-связанных переходов 82  
 — радиационного захвата 93, 94  
 — рекомбинации 56  
 — столкновения полное 27  
 — упругих столкновений 34  
 — фотоионизации 94, 96  
 Сила осциллятора 74  
 — — поглощательная 309  
 — — Стоксовская плазма 176  
 Скорости атомных процессов 42  
 Скорости газа средняя массовая 48  
 — диффузионная 49, 180  
 — хаотическая 49, 185  
 Собственное время жизни осциллятора 302  
 Солнечный «ветер» 277

Обобщенный закон Ома 209, 210  
 Обрезание потенциала 335  
 Обратный процесс 80  
 Оптически тонкий газ (плазма) 83, 458  
 — толстый газ (плазма) 82, 458  
 Оптический электрон 20  
 Отрицательный ион 21  
 Параметр нагрузки 217  
 — «ухода» излучения 428, 433  
 — Холла 169, 170, 176, 219, 220  
 Перегревная неустойчивость (см. также ионизационная неустойчивость) 230  
 Плавающий электрод 134  
 — потенциал 135  
 Плазма 133  
 — бесстолкновительная 176  
 — лоренцевская 178  
 — сильно столкновительная 176  
 — столкновительная 380  
 Плотность энергии магнитного поля 272  
 — — электрического поля 272  
 — — электромагнитного поля 272  
 Площадь токосъема зонда 145  
 Подвижность непрерывное 79  
 Подвижность ионов 105, 149, 179  
 — электронов 104, 179  
 Полиномы Сонина 390, 395, 404, 414  
 Полное сечение столкновения 27  
 Пороговая энергия 27, 40, 60  
 Постоянная затухания 159  
 — тонкой структуры 32, 262  
 Постулаты Бора 33  
 Потенциал ионизации 18  
 Правильно смеси 99, 105, 411  
 — суммирования Томаса — Куна 307  
 Предельная ионизация 68, 237  
 — слабой ионизации 68, 236, 237  
 — солнечной короны 445  
 — Фурье 38  
 Приближение дипольного момента 284  
 — Ципмена — Энского 54  
 Принцип неопределенности Гейзенберга 261, 304  
 — причинности 279  
 Присадка 227, 234  
 Прицельное расстояние 248, 254, 256, 289  
 Проскальзывание ионов 177  
 Процесс перезарядки 22

Коэффициент поглощения при свободно-свободных переходах 81  
 — предельные значения 160  
 — прискальзывания ионов 180, 183, 213  
 — рекомбинации 44, 95  
 — теплопроводности 97, 101, 184, 374, 388  
 — и термодиффузии (фростонские значения) 415  
 — термодиффузии 376, 388  
 Эйнштейна для индуцированного излучения 76  
 — — поглощения 76  
 — — спонтанного излучения 76  
 Кратность вырождения 18, 19, 33  
 Критическая плотность электронов 160  
 Кулоновский потенциал 63, 259  
 — — экранированный (см. также обрезанный кулоновский потенциал) 138  
 — — обрезанный 255  
 Ленгмюровский зонд 143  
 Линейчатая флуоресценция 22  
 Локальное термодинамическое равновесие 88  
 Лоренцевская форма линии 77  
 — электропроводность 107  
 Лоренцевский предел 364, 396, 397  
 Лоренцевское (или вандерваальсовское) уширение 77  
 Магнитная вязкость 197  
 Магнитное зеркало 171  
 — число Рейнольдса 197  
 Максвелловское напряжение 194  
 Магричный элемент перехода МГД-генератор 215, 216  
 МГД-генераторы закрытого цикла 215  
 — — открытого цикла 215  
 — — с линейной геометрии 224  
 — уравнения 193  
 Мгновенное замораживание (калка) 486  
 Метастабильные состояния 20  
 Метод случайных блужданий 43  
 — среднего свободного пробега 377, 401  
 Множитель Гаунта 79, 296, 297  
 Модель двухгрупповой системы 436  
 Моменты уравнения Больцмана 329



- Фойгтовская форма линии 79  
 Формула Гризинского 70  
 — Длрморл 286  
 — Планка 88, 435  
 Резерфорда для дифференциального сечения рассеяния 255, 262  
 — Релея — Джинса 312  
 Фотоионизация атома или молекулы 22  
 Функция формы линии 74, 77, 307  
 Хаотизация импульса 99  
 Холловский генератор 222  
 — — дискообразной формы 224  
 — — коаксиальной формы 224  
 Холловское напряжение 166  
 Хольцмановское уширение (самоуширение) 77  
 Частично ионизованные газы 97  
 Частота столкновений оптическая 78  
 — — полная 43

- Частота столкновений с передачей импульса 103, 54, 66  
 — — с хаотизацией импульса 99  
 Число Альфрейна 199  
 — Гаргмана 197  
 — Лунквиста 199  
 — Маха 62, 229  
 — Праудтля 102  
 — Рейнольдса 197  
 — — магнитное 197, 199  
 — Стюарта 197

## Штарковское уширение 77

- Электрический к.п.д. МГД-генератора 218  
 Электропроводность Слитцера — Хэрма 107  
 Эффект Доплера 78  
 — Штарка 78  
 — Холла 166, 220, 221

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Предисловие . . . . .	7
Глава 1. Введение . . . . .	9
§ 1. Частично ионизованные газы . . . . .	9
§ 2. Теория сплошных сред . . . . .	10
§ 3. Содержание книги . . . . .	12
§ 4. Единицы измерения . . . . .	15
Глава 2. Столкновительные и излучательные процессы . . . . .	16
§ 1. Введение . . . . .	16
§ 2. Частицы и столкновения в частично ионизованных газах . . . . .	17
§ 3. Сечения столкновений . . . . .	26
§ 4. Величины сечений столкновений . . . . .	31
§ 5. Скорость процесса, частота столкновений, средняя длина свободного пробега . . . . .	41
§ 6. Функция распределения частиц по скоростям и средние значения величин . . . . .	47
§ 7. Передача энергии и импульса при упругом столкновении . . . . .	57
§ 8. Столкновения заряженных частиц . . . . .	63
§ 9. Процессы излучения . . . . .	71
§ 10. Равновесные соотношения . . . . .	84
§ 11. Принцип детального равновесия . . . . .	89
§ 12. Явления переноса — вязкость и теплопроводность . . . . .	97
§ 13. Электропроводность . . . . .	103
§ 14. Типичные экспериментальные данные о сечениях . . . . .	108
Литература . . . . .	126
Глава 3. Плазма . . . . .	130
§ 1. Введение . . . . .	130
§ 2. Квазинейтральность и дебаевский радиус . . . . .	130
§ 3. Двойной слой . . . . .	133
§ 4. Экранированный кулоновский потенциал . . . . .	138
§ 5. Время отклика, плазменная частота . . . . .	140
§ 6. Электростатические зонды . . . . .	143
§ 7. Амбиполярная диффузия . . . . .	149
§ 8. Распространение электромагнитных волн . . . . .	158
Литература . . . . .	164
Глава 4. Магнитная гидродинамика . . . . .	165
§ 1. Введение . . . . .	165
§ 2. Движение частиц в однородных и постоянных полях . . . . .	167
§ 3. Влияние столкновений — холловский ток и проскальзывание ионов . . . . .	174
§ 4. Проводящий газ как сплошная среда . . . . .	183
§ 5. Двухтемпературная плазма . . . . .	188
§ 6. МГД-приближение . . . . .	190
§ 7. Гартмановское течение . . . . .	200
§ 8. Обобщенный закон Ома . . . . .	206
§ 9. Магнитогидродинамические (МГД) генераторы . . . . .	214
§ 10. Двухтемпературная ионизационная неустойчивость . . . . .	230
Литература . . . . .	239
Глава 5. Теория столкновений . . . . .	241
§ 1. Введение . . . . .	241
§ 2. Динамика упругого взаимодействия двух частиц . . . . .	241

3. Классификация траекторий . . . . .	245
4. Классическая теория упругого рассеяния . . . . .	248
а. Рассеяние в кулоновском поле . . . . .	253
б. Рассеяние на малые углы . . . . .	257
6. Рассеяние на малые углы . . . . .	261
7. Область применимости классической теории . . . . .	263
8. Томсоновская теория трехчастичной рекомбинации . . . . .	267
9. Электрон-ионная трехчастичная рекомбинация . . . . .	269
Литература . . . . .	270
Глава 6. Теория излучения . . . . .	270
§ 1. Введение . . . . .	270
§ 2. Уравнения Максвелла и связанные с ними вопросы . . . . .	273
§ 3. Электромагнитные потенциалы . . . . .	275
§ 4. Плоские волны в вакууме . . . . .	277
§ 5. Решение для потенциалов в неограниченной области . . . . .	280
§ 6. Электромагнитное излучение . . . . .	287
§ 7. Тормозное излучение . . . . .	292
§ 8. Излучательный захват . . . . .	297
§ 9. Линейчатое излучение (излучение при связанно-связанных переходах) . . . . .	300
§ 10. Форма линии излучения . . . . .	309
§ 11. Излучение абсолютно черного тела . . . . .	315
Литература . . . . .	317
Глава 7. Кинетическая теория . . . . .	317
§ 1. Введение . . . . .	318
§ 2. Функции распределения и законы сохранения . . . . .	322
§ 3. Уравнение Больцмана и законы сохранения . . . . .	334
§ 4. Столкновительный член Фоккера — Планка . . . . .	340
§ 5. Разложение, основанное на малости электронной массы . . . . .	347
§ 6. Разложение по декартовым тензорам . . . . .	362
Литература . . . . .	363
Глава 8. Явления переноса . . . . .	363
§ 1. Введение . . . . .	363
§ 2. Слабо ионизованная плазма . . . . .	364
§ 3. Условия, при которых функция распределения является максвелловской . . . . .	378
§ 4. Частично ионизованная плазма . . . . .	384
§ 5. Полностью ионизованная плазма . . . . .	402
§ 6. Коэффициенты переноса тяжелых частиц . . . . .	407
§ 7. Правила смеси . . . . .	411
§ 8. Неупругие столкновения . . . . .	419
Литература . . . . .	422
Глава 9. Ионизационная неравновесность . . . . .	424
§ 1. Введение . . . . .	424
§ 2. Уравнение непрерывности и уравнения скоростей процессов . . . . .	426
§ 3. Отклонения от уравнения Саха . . . . .	435
§ 4. Скорости ионизации и рекомбинации . . . . .	450
§ 5. Эффекты, связанные с немасвелловским видом функции распределения . . . . .	463
§ 6. Ионизационная неравновесность в движущейся плазме . . . . .	476
Литература . . . . .	489
Предметный указатель . . . . .	491