

DIE MECHANISCHEN BEWEISE FÜR DIE BEWEGUNG DER ERDE

VON

R. GRAMMEL

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE
STUTTGART

MIT 25 TEXTABBILDUNGEN



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1922

ISBN-13:978-3-642-89771-9

e-ISBN-13:978-3-642-91628-1

DOI: 10.1007/978-3-642-91628-1

ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG
IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.

COPYRIGHT 1922 BY JULIUS SPRINGER IN BERLIN.
SOFTCOVER REPRINT OF THE HARDCOVER 1ST EDITION 1922

Vorwort.

Die folgende zusammenfassende Darstellung der mechanischen Beweise für die Bewegung der Erde ist ein etwas erweiterter Abdruck meines Aufsatzes in den Augustheften 1921 der „Naturwissenschaften“. Einer Anregung des Herausgebers dieser Zeitschrift, Herrn Dr. A. Berliner, gerne folgend, habe ich mich zu der vorliegenden umgearbeiteten Ausgabe namentlich deswegen entschlossen, weil ich den Aufsatz auch solchen Lesern zugänglich machen wollte, die nur über ganz elementare Kenntnisse in Mechanik und Mathematik verfügen. Diese Leser können die durch Kleindruck hervorgehobenen Teile ohne Beeinträchtigung des Verständnisses des Ganzen übergehen, vorausgesetzt, daß sie diejenigen Behauptungen, deren schärfere Begründung in den kleingedruckten Stellen nachgeholt ist, auf Treu und Glauben hinnehmen.

Stuttgart, im Dezember 1921.

R. Grammel.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	I
1. Begriffliche Grundlagen	I
2. Mechanische Grundlagen	9
I. Versuche auf Grund des Schwerpunktssatzes	17
A. Nachweis der Azimutaldrehung	17
3. Der wagerechte Wurf	17
4. Das ebene mathematische Pendel	18
5. Das mathematische Kegelpendel	26
B. Nachweis der Vertikaldrehung	28
6. Die Wage	28
7. Die Drehwage	30
8. Die gedrehte Wage	31
II. Versuche auf Grund des Flächensatzes	34
A. Nachweis der Azimutaldrehung	34
9. Der Isotomeograph	34
10. Ein hydraulischer Versuch	37
B. Nachweis der Vertikaldrehung	40
11. Der Wurf	40
12. Der freie Fall	44
13. Die Atwoodsche Fallmaschine	47
III. Versuche auf Grund des Schwungszes	50
A. Nachweis der Azimutaldrehung	50
14. Das materielle Pendel	50
15. Das Kreiselpendel	57
B. Nachweis der Gesamtdrehung	59
16. Das Gyroskop	59
17. Das Kreiselinklinatorium	61
18. Das Barygyroskop	63
19. Wägung des Kreiselmomentes	64
C. Nachweis der Vertikaldrehung	65
20. Das Kreiseldeklinatorium	65
Schlußbemerkungen	66
21. Die Revolution	66
22. Die Präzession und die Nutationen	69

Einleitung.

I. Begriffliche Grundlagen. Die schon seit dem griechischen Altertum gelegentlich auftauchende, aber erst von NIKOLAUS KOPERNIKUS zum Siege geführte und dann von JOHANNES KEPLER und ISAAC NEWTON auch kinematisch und dynamisch vollends geklärte *heliozentrische* Auffassung des astronomischen Weltbildes deutet die Bewegungserscheinungen am Himmelsgewölbe, wie jedem astronomisch einigermaßen Gebildeten heute unbezweifelbar geläufig ist, durch eine dreifache Eigenbewegung der Erde gegenüber der Sonne, nämlich durch eine tägliche Drehung der Erde um sich selbst (*Rotation*), durch einen jährlichen Umlauf um die Sonne (*Revolution*) und durch eine kegelige Bewegung der Rotationsachse (*Präzession*), welche äußerst langsam erfolgt und bei genauerem Zusehen von einer sehr verwickelten Reihe sehr kleiner Schwankungen (*Nutationen*) überlagert ist. Wir können uns heute kaum mehr vorstellen, was für ungeheure begriffliche Schwierigkeiten das Weltsystem des KOPERNIKUS dem Anschauungsvermögen seiner Zeitgenossen bereitet hat, aber wir verstehen das lebhafteste Interesse, welches bis in die neueste Zeit, geradezu begeistert in den Tagen des Foucaultschen Pendelversuches, allen unmittelbar überzeugenden Beweisen für die Bewegung der Erde entgegengebracht worden ist.

Nach Lord KELVIN hat man übrigens scharf zwischen *Beobachtungen* und *Versuchen* als Beweisgrundlagen zu

unterscheiden. Die gewichtigsten Gründe für das Kopernikanische System sind natürlich noch immer die astronomischen Beobachtungen (die scheinbare tägliche Drehung des Himmelsgewölbes zusammen mit den Fixsternparallaxen, der Aberration des Lichtes und der Präzession des Himmelspoles); dazu kommen als weitere Gründe zahlreiche geophysikalische Beobachtungen¹⁾ (die Erdabplattung, das Buys-Ballotsche Gesetz über die Ablenkung der Luft- und Meeresströmungen, das v. Baersche Gesetz über die stärkere Ausspülung der rechten Flußufer auf der nördlichen, der linken auf der südlichen Halbkugel, endlich die Tatsache des Erdmagnetismus, dessen Feld nach einer Vermutung von A. EINSTEIN²⁾ wesentlich als eine dynamische Folge des von der Erde bei ihrer Rotation mitgeführten Elektronenstromes zu erklären ist).

Am großen Maßstab dieser Beobachtungen gemessen, spielt der *Versuch* in unserem Falle nur eine bescheidene, aber doch insofern eindrucksvolle Rolle, als er ohne astronomische Hilfe Kunde von der Erdbewegung gibt und zu außergewöhnlich scharfsinnigen Anwendungen der Naturgesetze geführt hat. Die Zahl solcher Versuche ist weit größer, als gemeinhin angenommen wird, und es lohnt sich um so mehr, sie in ein geschlossenes System³⁾ zu bringen, als die berühmtesten keineswegs die besten, und die geistreichsten wohl die weniger bekannten sind. Außer den *mechanischen* Versuchen, auf die wir uns hier

¹⁾ Hierüber berichtet allgemeinverständlich das Büchlein von W. BRUNNER, *Dreht sich die Erde?* Math.-physikal. Bibliothek, Leipzig und Berlin, 1915, Band 17, S. 46ff.

²⁾ A. EINSTEIN und J. W. DE HAAS, *Verhandl. d. dtsh. phys. Ges.* 17, 156. 1915.

³⁾ Die beste zusammenfassende Darstellung verdankt man J. G. HAGEN, *La rotation de la terre, ses preuves mécaniques anciennes et nouvelles*, Pubblicazioni della Specola Astronomica Vaticana, 2. Reihe, 1. Rom 1912.

durchaus beschränken, gibt es noch einige *elektromagnetische*, deren wichtigster, der optische Interferenzversuch von A. MICHELSON zum Nachweis der Erdbewegung, dadurch seine ausgezeichnete Bedeutung erlangt hat, daß er negativ ausgefallen ist. Das negative Ergebnis der sämtlichen nicht mechanischen Versuche hat den Anstoß zur Aufstellung des Relativitätsprinzips gegeben. Es ist nach dessen großen Erfolgen nötig, sein Verhältnis auch zu den mechanischen Versuchen von vornherein klar zu legen.

Und hier ist nun zu sagen: wie durch die Kantische Erkenntniskritik den Gottesbeweisen, so wird durch das Einsteinsche Relativitätsprinzip (in seiner allgemeinen Fassung von 1915) *allen* Beweisen für die Bewegung der Erde, weil sie sich auf das Newtonsche Gespenst des absoluten Raumes stützen müssen, die *absolute* Beweiskraft entzogen. Wir wissen ja längst, daß das Kopernikanische System sich überhaupt nicht *beweisen*, sondern nur durch seine überragende Einfachheit, Klarheit und Widerspruchslosigkeit, und durch sonst nichts, *rechtfertigen* läßt. Aber während es früher nur nötig war, die anerkannten Grundgesetze der Mechanik und der Gravitation zuzugeben, um aus den Versuchen in zwingender Weise auf die Erdbewegung schließen zu können, so ist es nach dem Relativitätsprinzip grundsätzlich denkmöglich, jeden dieser Versuche widerspruchsfrei und ohne irgendwelche Abänderung der relativistischen Naturgesetze auch anders als durch die Erdbewegung zu deuten.

So kann man beispielsweise anstatt der Rotation der Erde die Einwirkung ungeheuer großer rotierender ferner Massen postulieren, wie schon E. MACH ¹⁾ vermutet

¹⁾ E. MACH, Die Mechanik in ihrer Entwicklung. 2. Kap. 6, 5 (4. Aufl., S. 242 f.).

und H. THIRRING¹⁾ neuerdings auch streng gezeigt hat. Folglich reicht die zwingende Kraft aller Beweise für die Rotation der Erde (und grundsätzlich liegen die erkenntnis-kritischen Umstände ähnlich auch bei der Revolution, der Präzession und den Nutationen) genau nur so weit wie die Sicherheit der subjektiven Überzeugung von dem Nichtvorhandensein jener rotierenden fernen Massen.

Nun ist freilich gegen deren Existenz an sich nichts einzuwenden — man kann sich darunter einfach die Gesamtheit der Fixsterne vorstellen —; die Schwierigkeit liegt lediglich in der ihnen zugeschriebenen ungeheuerlichen Rotation. Da an dieser Rotation alle Sterne bis in die unbegrenzteste Ferne des Raumes teilzunehmen hätten, so käme man zu Geschwindigkeiten, die schließlich alle Grenzen überschreiten müßten. Dieser Unmöglichkeit könnte man nur durch die Annahme entgehen, daß die Gesamtheit der Fixsterne bloß einen endlichen, abgeschlossenen Bezirk des unendlich ausgedehnten Welt-raumes erfüllen. Aber eine solche Annahme ist, wie EINSTEIN²⁾ gezeigt hat, physikalisch nicht haltbar.

Vom Standpunkt einer vernünftigen Wissenschaft besehen, fällt die Entscheidung also praktisch auch im Rahmen des Relativitätsprinzipes von 1915 unzweifelhaft zugunsten der Erdrotation aus. Nun hat aber EINSTEIN im Jahre 1917 erkannt, daß sowohl der Newtonschen, wie auch seiner eigenen (mit dem Relativitätsprinzip untrennbar verknüpften) Gravitationstheorie von 1915 eine grundsätzliche, schwerwiegende, aus dem

1) H. THIRRING, Phys. Zeitschr. 19, 33. 1918 und 22, 29. 1921, sowie A. KOPFF, ebenda 22, 24. 1921 und A. KOPFF, Naturwissenschaften 9, 9. 1921.

2) A. EINSTEIN, Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss. Berlin, 1917, S. 142.

räumlichen Unendlichkeit der Welt entspringende Unstimmigkeit anhaftet, welche sich, wie es scheint, auf gar keine andere Weise beheben läßt, als dadurch, daß an Stelle der unendlich ausgedehnten Welt eine zwar *unbegrenzte*, aber *endliche* Welt gesetzt wird. Diese kühne, jedoch erkenntnistheoretisch ganz einwandfreie und astronomisch kaum zu widerlegende Annahme bringt dann — wie hier im einzelnen nicht näher entwickelt werden kann ¹⁾ — eine Erweiterung der Einsteinschen Gravitationstheorie von 1915 mit sich und damit überhaupt erst die strengste und folgerichtigste Durchführung des Relativitätsprinzipes in dem Sinne, daß *alle* Bewegungen ohne Ausnahme nicht nur, wie bisher, *kinematisch*, sondern jetzt auch *dynamisch* als *relativ* angesehen werden *müssen*.

Auf unseren Fall der Erdrotation angewandt, soll das folgendes heißen: Die *kinematisch feststellbare* relative Drehung von Erde und Fixsternwelt gegeneinander kann nach der älteren Theorie von 1915 *dynamisch erklärt werden nur* als Erdrotation, nicht aber, wegen der ins Unbegrenzte wachsenden Geschwindigkeiten, als Fixsternrotation. Die neue Theorie von 1917 dagegen braucht sich vor den Geschwindigkeiten nicht mehr zu fürchten; denn ihre Welt ist endlich. Es macht jetzt auch dynamisch keine Schwierigkeiten mehr, zu beweisen, daß alle irdischen Erscheinungen, die wir auf die Erdrotation als Ursache zurückführen, auch dann genau ebenso verlaufen müßten, wenn die Erde stille stünde und die Fixsternwelt rotierte, oder mit anderen Worten, daß die Gravitationskräfte, welche eine rotierende *end-*

¹⁾ Vgl. etwa A. KOPFF, Grundzüge der Einsteinschen Relativitätstheorie. Leipzig 1921, S. 165 u. 186ff.

liche Fixsternwelt auf die stillstehende Erde ausübt, sich vollkommen mit den Trägheitserscheinungen decken, welche wir auf die Erdrotation zu verweisen seit KOPERNIKUS gewohnt sind. Das führt dann unausweichlich zu der Folgerung, daß alle Versuche, welche die Erdrotation dartun sollen, jetzt mit dem gleichen Recht als Beweise für die Fixsternrotation angesehen werden können. Die beiden *kinematisch* schon gleichwertigen Möglichkeiten — entweder Rotation der Erde gegen die Fixsterne oder Rotation der Fixsterne gegen die Erde — sind nun auch *dynamisch* gleichwertig geworden. *Damit sind sie aber überhaupt nicht mehr unterscheidbar und mithin erkenntnistheoretisch identisch.* Sie spielen jetzt nur noch die untergeordnete Rolle von zwei verschiedenen Arten der *Benennung* für die *eine* Erscheinung: *Relativrotation von Erde und Fixsternwelt gegeneinander.*

Man kann sie etwa vergleichen mit den Benennungen „unten“ und „oben“. Wie man sich bei der Vorstellung des Weltraumes aus rein physiologischen Gründen stets unwillkürlich ein Unten und Oben nach freiem Ermessen hinzudenkt, ohne je darüber zu streiten, was unten und was oben dabei heißen soll, so muß man auch bei der Beschreibung jener Relativrotation mit der einen oder der anderen absolutistischen Benennung auch die eine oder die andere absolutistische Vorstellung in Kauf nehmen; und zwar muß man dies offenbar aus psychologischen Gründen, weil unser Anschauungsvermögen schlechterdings nur Absolutbewegungen, nicht aber die Relativrotation derart zu begreifen geschult ist, daß, was wir als zwei sich ausschließende Möglichkeiten empfinden, anschaulich vollkommen zusammenfielen.

Vom Standpunkte der Gravitationstheorie von 1917 aus sind beide Behauptungen — „die Erde rotiert gegen

die ruhenden Fixsterne“ oder „die Fixsterne rotieren gegen die ruhende Erde“ — *gleich falsch*, und richtig nur die Aussage „Erde und Fixsternwelt rotieren gegeneinander“. Mehr beweisen zu wollen als die Relativrotation beider gegeneinander, ist gänzlich müßig, weil es begrifflich und tatsächlich überhaupt nichts weiter als diese Relativrotation gibt. Dagegen wird man auch von diesem äußersten Standpunkt aus nach wie vor keinen Augenblick im Zweifel darüber sein, welcher der beiden Benennungen — Erdrotation oder Fixsternrotation — man bei der *Beschreibung* der Erscheinung selbst den Vorzug geben soll, da man ohne eine absolutistische Benennung nun einmal nicht auskommen kann. Es ist allerdings nicht viel mehr als eine Frage des Geschmacks, wenn man sich die zwar endliche, doch immerhin recht große Fixsternwelt ruhend und die kleine Erde rotierend denkt. Aber ebenso wie man im Weltenraum das Unten gegen das Oben nicht nur vertauschen, sondern in beliebiger Weise drehen kann, so gibt es auch für die Benennung der Relativrotation nicht nur zwei, sondern unbegrenzt viele gleichberechtigte Möglichkeiten; und es wäre vielleicht am geschmackvollsten, wenn man die beiden ungleichen Teile, in die man die Welt bei der Behandlung der Relativrotation spaltet, nämlich die kleine Erde und den großen Rest, im umgekehrten Verhältnis ihrer Größe rotieren ließe, also die Fixsternwelt äußerst langsam von Ost nach West, die Erde aber nahezu mit ihrer siderischen Rotationsgeschwindigkeit von West nach Ost. Diese Benennung hielte die richtige Mitte zwischen der recht anmaßenden Vorstellung der Alten, wonach sich alles um die Erde drehte, und der unendlich bescheidenen Auffassung des KOPERNIKUS, wonach die Erde, gegen die übrige Welt gehalten, ein vollständiges

Nichts wäre, und sie würde zugleich sehr schön die Tatsache ausdrücken, daß nach der Einsteinschen Gravitationstheorie die gesamte übrige Welt ebenfalls die gravitierende Wirkung der Relativrotation zwischen ihr und der Erde unbestreitbar, wenn auch außerordentlich schwach, fühlen muß.

Wenn also die Vernunft zwar ihre Entscheidung *praktisch* jetzt noch ebenso sicher trifft, wie vor der Zeit des Relativitätsprinzips, so müssen wir uns heute doch mindestens vorsichtiger ausdrücken. Nehmen wir nämlich vorweg die Tatsache, daß die bisherigen mechanischen Versuche sich *nur* auf die *Rotation* der Erde bezogen haben, und lenken wir mithin unsere Aufmerksamkeit bis auf weiteres bloß noch auf die Rotation, so dürfen wir nach dem heutigen Stand der Naturerkenntnis lediglich sagen: *es kann einwandfrei erwiesen werden, daß die Bewegungserscheinungen der irdischen trägen Massen, beurteilt von einem mit der Erde fest verbundenen Bezugssystem aus, ein wenig anders verlaufen, als sie dies nach der gesicherten Form des Impulssatzes (Trägheitsgesetzes) unter dem Einfluß aller uns bekannten irdischen Kräfte tun sollten; oder anders ausgedrückt, daß jenes irdische Bezugssystem die Eigenschaften eines Inertialsystems (d. h. eines Systems, in welchem das Trägheitsgesetz gilt) nicht besitzt, sondern in ganz bestimmter Art davon abweicht. Die Abweichungen sind nach der relativistischen Mechanik erklärbar durch die Relativrotation zwischen Erde und übriger Welt, nach der vorrelativistischen Mechanik dagegen nur durch die Erdrotation.*

Trotz des grundsätzlichen Unterschiedes zwischen der relativistischen und der vorrelativistischen (klassischen) Mechanik bildet doch die letztere für alle irdischen Probleme zahlenmäßig eine so äußerst genaue Annäherung an die erstere,

daß wir uns nach Erledigung der erkenntnistheoretischen Frage weiterhin unbedenklich auf den Standpunkt der klassischen Mechanik stellen dürfen. In diesem Sinne ist es uns dann auch erlaubt, kurzweg von „Erdrotation“ zu sprechen.

2. Mechanische Grundlagen. Zur systematischen Ordnung der überaus großen Mannigfaltigkeit der Versuchsmöglichkeiten zum Nachweise der Erdrotation empfiehlt sich, bildlich gesprochen, ein dynamisches Fachwerk mit kinematischer Unterteilung.

Um zunächst zu dieser Unterteilung zu kommen, möge man die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation — die Ursache der gesuchten Abweichung des irdischen Bezugssystems von einem Inertialsystem — als Vektor ω darstellen, und zwar vom Erdmittelpunkt in der Erdachse nordwärts weisend (Abb. 1) und von der Länge

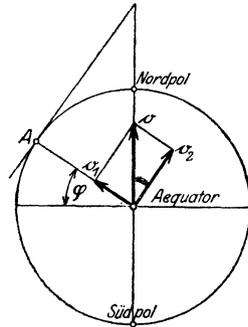


Abb. 1. Azimutal- und Vertikaldrehung.

$$\omega = \frac{2 \pi}{86164} \text{ sek}^{-1}$$

(im Zähler steht der in einem Sterntag überstrichene Winkel, gemessen auf einem Kreise vom Halbmesser 1, der Nenner gibt die Anzahl der Sekunden eines Sterntages).

Nach einer kinematischen Regel darf man die Drehung ω durch die übliche Vektorzerlegung zerspalten in zwei Komponenten ω_1 und ω_2 . Die erste stellt eine Drehung der Horizontalebene eines unter der geographischen Breite φ gelegenen Beobachtungsortes A um dessen Lotlinie vor; sie besitzt die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_1 = \omega \sin \varphi, \quad \dots \dots \dots (1)$$

und soll künftig die *Azimutaldrehung* genannt sein. Sie verschwindet nur für Beobachtungsorte am Äquator und stellt am Nord- oder Südpol die Gesamtdrehung dar. Die zweite Komponente dreht den Horizont um eine durch den Erdmittelpunkt parallel zur Nordlinie des Beobachtungsortes gezogene Achse mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_2 = \omega \cos \varphi \quad (2)$$

und heiße die *Vertikaldrehung*. Sie verschwindet nur an den beiden Polen und fällt am Äquator mit der Gesamtdrehung zusammen. Bei den meisten Versuchen handelt es sich um den Nachweis entweder der Azimutal- oder der Vertikaldrehung für sich allein, und hiernach ist schon eine kinematische Einteilung dieser Versuche gewonnen.

Sodann mag daran erinnert sein, daß das Grundgesetz der Dynamik, der Impulssatz (als Träger des viel engeren Trägheitsgesetzes), angewandt auf die Bewegung eines starren oder unstarren Körpers, in zwei Sätzen gipfelt, deren erster die *Fortschreitung* des Körpers beherrscht, während der zweite dessen *Drehung* regelt. Der erste, als sog. *Schwerpunktssatz*, sagt aus, daß in einem Inertialsystem der Massenmittelpunkt (praktisch dasselbe wie der Schwerpunkt) des Körpers sich so bewegt, als ob die ganze Masse punktförmig in ihm vereinigt wäre, und als ob außerdem alle Kräfte (und zwar soweit nötig, parallel mit sich verschoben) in ihm angriffen, wo sie dann eine mit ihrer Resultante richtungsgleiche Beschleunigung verursachen: *Die Kraftresultante ist vektorgleich der mit der Gesamtmasse multiplizierten Schwerpunktsbeschleunigung.*

Ist die Resultante null, so bewegt sich der Schwerpunkt geradlinig gleichförmig (eingeschlossen den Fall

der Ruhe); diese besondere Form des Schwerpunktssatzes ist der *Trägheitssatz* für die Fortschreitung des Körpers.

Über die Drehung des Körpers macht der Impulssatz nur dann eine ebenso einfache Aussage, wie bei der Fortschreitung, wenn die Drehung um eine Hauptträgheitsachse geschieht und die Kräfte insgesamt auch ihrerseits nur eine Drehtendenz um diese selbe Achse besitzen. Bei-

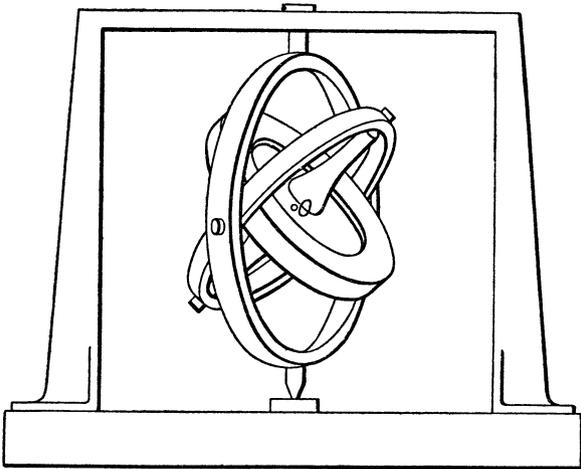


Abb. 2. Kardanisch aufgehängter Körper.

spielsweise ist dies der Fall, wenn außer den Kräften, welche die Achse stützen, nur noch eine zur Drehachse windschiefe Kraft wirkt, die auf der Drehachse senkrecht steht (Antrieb durch eine Kurbel). Die Drehung wird dann (positiv oder negativ) beschleunigt, derart, daß *das Moment dieser Kraft*, d. h. das Produkt aus der Stärke der Kraft in ihren Abstand von der Drehachse (Hebelarm) *gleich dem Produkt aus dem zugehörigen Trägheitsmoment des Körpers in die Winkelbeschleunigung* ist.

Im allgemeinen Falle, wo die Drehung, wie z. B. bei einem kardanisch aufgehängten Körper (Abb. 2) um jede beliebige Achse durch den Mittelpunkt O des Gehänges (den sog. Stützpunkt) erfolgen kann, zerspalte man (Abb. 3), die als Vektor aufgefaßte Winkelgeschwindigkeit \mathfrak{u} des Körpers in drei Komponenten $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3$ nach

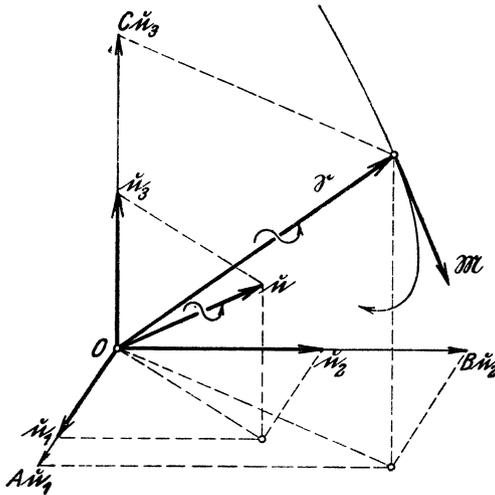


Abb. 3. Zusammenhang zwischen den Vektoren \mathfrak{u} , \mathfrak{S} und \mathfrak{M} bei der Drehung eines Körpers um einen Punkt O .

drei aufeinander senkrechten, im Körper festen, sich im Punkte O der Drehachse schneidenden Achsen, nämlich nach den drei Hauptträgheitsachsen des Körpers in bezug auf O .

Sind A, B, C die drei Trägheitsmomente des Körpers in bezug auf jene drei Achsen, so verlängere man die drei Komponenten $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2$ und \mathfrak{u}_3 der Reihe nach im Verhältnis $A:1, B:1$ und $C:1$ und setze die so erhaltenen Vektoren

Au_1, Bu_2, Cu_3 hernach wieder zu einer Resultante \mathfrak{S} zusammen, die wir den Vektor des *Schwunges* heißen; er hat im allgemeinen nicht ganz die gleiche Richtung wie der Vektor \mathfrak{u} , weil die Zahlen A, B und C nicht gleich zu sein brauchen. Dabei versteht sich, daß wir, wie schon beim Vektor \mathfrak{o} , auch bei \mathfrak{u} und überhaupt bei allen diesen Vektoren von *axialem* Charakter die Pfeilrichtung des Vektors dem durch ihn dargestellten Drehsinn unter dem Bild einer rechtsgängigen Schraube zuordnen. Insbesondere verwenden wir diese Zuordnung auch, wenn wir sodann noch die Momente der gegebenen Kräfte in bezug auf den Punkt O aufstellen. Legen wir (Abb. 4) durch O und den Vektor einer Kraft eine Ebene E , so deuten wir nämlich, wie die Kraft selbst, so auch ihr Moment durch einen Vektor, und zwar einen solchen, der auf

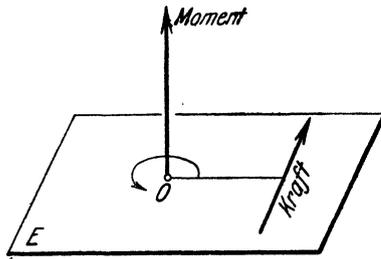


Abb. 4. Der Vektor des Momentes einer Kraft.

dieser Ebene in O derart senkrecht steht, daß seine Pfeilrichtung mit der Drehtendenz der Kraft eine Rechtschraube bildet; seine Länge machen wir natürlich gleich dem Produkt aus Kraft und Hebelarm. Die (durch gewöhnliche Vektoraddition zu erhaltende) Resultante \mathfrak{M} dieser Momentenvektoren regelt die Drehung \mathfrak{u} nun sehr übersichtlich in der Weise, daß *der Vektor \mathfrak{M} die Geschwindigkeit vorstellt, mit der sich der Endpunkt des Vektors \mathfrak{S} im Raume bewegt* (Abb. 3). Diese Aussage (deren Herleitung aus dem Impulsgesetze hier unterdrückt werden muß) möge der *Schwungssatz* heißen (auch Drehimpulssatz genannt.)

Einen wichtigen Sonderfall erhält man auch hier, wenn die Kräfte das Moment $\mathfrak{M} = 0$ besitzen; alsdann ist der Schwungvektor \mathfrak{S} nach Richtung und Größe unveränderlich. Man könnte diese engere Aussage den Trägheitssatz für die Drehbewegung des Körpers nennen, man heißt sie zufolge einer anschaulichen Deutung, die sie zuläßt, den *Flächensatz*. Die Bewegung selbst kann dabei immer noch sehr verwickelt sein ¹⁾. Sie wird aber wieder besonders einfach, wenn der Körper sich von Anfang an um eine Hauptträgheitsachse dreht. Mit $\mathfrak{M} = 0$ bleibt dann bei der ganzen Bewegung das Produkt aus Trägheitsmoment und Winkelgeschwindigkeit unverändert. Ist der Körper starr, so heißt das, daß er seine Drehgeschwindigkeit dauernd beibehält; ist er unstarr und sind seine Teile in ihm gegeneinander so verschiebbar, daß ohne Änderung des Charakters der Drehachse als einer Hauptträgheitsachse doch das Hauptträgheitsmoment bald kleiner, bald größer werden kann, so ändert sich die Winkelgeschwindigkeit im umgekehrten Maße.

Der Name Flächensatz rührt von dem einfachsten Falle her, daß ein Punkt von der Masse m — ein Planet — sich unter dem Einfluß einer nach einem festen Zentrum O — der Sonne — gerichteten Kraft bewegt. Sieht man von der Rotation ab, so besteht die Bewegung des Planeten in einer Revolution um die Sonne, und der Vektor u vom Betrag u dieser Drehbewegung steht, von der Sonne aus aufgetragen, senkrecht auf der Verbindungsgeraden Planet-Sonne. Ist r der Sonnenabstand des Planeten, mr^2 also sein Trägheitsmoment in bezug auf die Achse u , so ist der Schwungvektor \mathfrak{S} vom Betrag

$$S = mr^2 \cdot u \quad (3)$$

richtungsgleich mit u . Da die bewegende Kraft der Anziehung in bezug auf die Drehachse u kein Moment hat, so ist der Vektor \mathfrak{S} raumfest,

¹⁾ Man sehe etwa R. GRAMMEL, Der Kreisel. Braunschweig 1920. § 1 ff.

was einfach besagt, daß auch u raumfest bleibt, d. h. daß der Planet sich dauernd in einer Ebene bewegt. Schreibt man ferner statt (3)

$$\frac{1}{2} r^2 u = \frac{1}{2} \frac{S}{m},$$

so steht linkerhand die in der (hinreichend klein gedachten) Zeiteinheit vom Fahrstrahl r überstrichene Fläche. Weil mit $\mathfrak{M} = 0$ auch der Betrag S unveränderlich ist, so erfolgt die Bewegung des Planeten mit fester „Flächengeschwindigkeit“ $\frac{1}{2} r^2 u$ (2. Keplersches Gesetz).

Im allgemeineren Falle der Drehung um eine beliebige Achse, jedoch mit $\mathfrak{M} = 0$, gilt der Satz von der unveränderlichen Flächengeschwindigkeit für die Projektion der Bewegung auf jede beliebige raumfeste Ebene; und er gilt sogar auch dann noch, wenn der Vektor \mathfrak{M} zwar nicht Null, aber doch dauernd parallel zu einer raumfesten Ebene bleibt, für die Projektion der Bewegung auf diese Ebene.

Vom Besonderen zum Allgemeinen aufsteigend, bekommen wir also jetzt folgendes dynamische Fachwerk:

Trägheitssatz	Flächensatz
Schwerpunktssatz	Schwungssatz.

Schalten wir den Trägheitssatz (im engeren Sinne) aus, weil es praktisch unmöglich ist, einen Körper ganz dem Einfluß aller Kräfte zu entziehen, so bleiben uns für die Einordnung der Versuche die drei anderen Sätze. Und nun handelt es sich darum, die Unterschiede nachzuweisen, die entstehen, wenn man diese Sätze das eine Mal auf ein die Drehung nicht mitmachendes Inertialsystem anwendet — sie geben dann die tatsächlichen Bewegungen der Körper an —, das andere Mal auf das irdische Bezugssystem — sie sagen dann aus, welche Bewegungen man beobachten würde, wenn sich die Erde nicht drehte. Zum Nachweis dieser Unterschiede sind grundsätzlich nahezu *alle* mechanischen Vorgänge geeignet; ihre Auswahl hängt allein von der zu erreichenden Beobachtungsgenauigkeit ab, welche wegen der Kleinheit der Effekte recht groß sein muß.

Für die praktische Rechnung ist es meist bequemer, den Schwerpunkts- und Schwungszatz gleich in ihrer einmal integrierten Form zu verwenden, in der sie behaupten, daß die Zunahme der Bewegungsenergie (Wucht) gleich ist der von den Kräften geleisteten Arbeit (*Energiesatz*). Dabei ist die Wucht bei einem starren Körper zusammengesetzt aus der Fortschrittwucht $\frac{1}{2}mv_0^2$ (v_0 die Schwerpunkts-*geschwindigkeit*) und aus der Drehwucht $\frac{1}{2}(Au_1^2 + Bu_2^2 + Cu_3^2)$. Wenn es sich nur um die Schwere als bewegende Kraft handelt, so nennt man die von ihr geleistete Arbeit auch den Verlust an Energie der Lage (*Macht*), und dann heißt der *Energiesatz* kurz so: *die Summe von Wucht und Macht ist unveränderlich*.

I. Versuche auf Grund des Schwerpunktsatzes.

A. Nachweis der Azimutaldrehung.

3. Der wagerechte Wurf. Der Schwerpunktsatz bestimmt von sich allein aus die Bewegung eines Körpers nur dann vollständig, wenn dieser keine merkliche Ausdehnung hat und demgemäß keine Drehung in sich von nachweisbarem Schwung besitzt. In Wirklichkeit genügt es, möglichst kleine Körper von möglichst großem spezifischem Gewicht zu verwenden und jede Drehung des Körpers in sich auszuschließen. Wenn ein solcher „Massenpunkt“ vom Beobachtungspunkt A aus so geworfen wird, daß er nahezu in der Horizontalebene bleiben muß, ohne jedoch durch wagerechte Kräfte (Reibung usw.) mit dem irdischen Bezugssystem gekoppelt zu sein, so müßte seine Horizontalprojektion, falls das irdische System ein Inertialsystem wäre, eine gerade Linie beschreiben. Die Azimutaldrehung ω_1 des irdischen Bezugssystems gegen das Inertialsystem äußert sich demgemäß in einer scheinbaren Drehung — ω_1 des von A nach der augenblicklichen Horizontalprojektion des geworfenen Punktes gezogenen Fahrstrahls. Dies bedeutet auf der nördlichen Halbkugel eine Abweichung von der irdischen Schußbahn nach rechts, auf der südlichen eine solche nach links, und zwar um den sekundlichen Winkelbetrag $\omega_1 = \omega \sin \varphi$, unabhängig von der Himmelsrichtung des Abschusses. Die Abweichung muß in unseren Breiten

bei einem Geschoß von durchschnittlich 600 m/sek Fluggeschwindigkeit für ein Ziel in der Entfernung 5 km einen Zielfehler von über 2 m ausmachen.

Allgemein berechnet sich der Zielfehler z bei einer Horizontal-komponente der mittleren Fluggeschwindigkeit v des Geschosses für die Zielentfernung a zu

$$z = \frac{a^2}{v} \omega \sin \varphi.$$

Die vielfachen Versuche, diesen Zielfehler nachzuweisen, haben kein einwandfreies Ergebnis gezeitigt, weil die Abweichung von anderen Einflüssen stark übertönt wird ¹⁾. Diese Einflüsse rühren von dem mit der Geschwindigkeit rasch ansteigenden Luftwiderstand her. Um sie auszuschalten, muß man also zu möglichst langsamen Bewegungen herabsteigen.

4. Das ebene mathematische Pendel. Es gibt ein einfaches Mittel, solche langsamen, nahezu wagerechten Bewegungen sehr gesetzmäßig zu unterhalten: nämlich das mathematische Pendel von großer Pendellänge l und — im Vergleich damit — kleiner Amplitude α . Die Bewegung der Kugel eines derartigen Pendels würde sich, wenn sie aus ihrer Ruhelage A durch einen genau zentralen, wagerechten Stoß hinausgeworfen wäre, von derjenigen des Geschosses bei sehr viel kleinerer Geschwindigkeit nur dadurch unterscheiden, daß sie immer gegen ihren Ruhepunkt A mit einer Kraft hingezogen wird, die für kleine Amplituden dem Ausschlage proportional ist. Diese Kraft liegt allezeit in der Schwingungsebene; sie wirkt demnach nur so, daß sie die Bewegung immer wieder zur Umkehr bringt, ohne aber die räumliche Stellung der Schwingungsebene anzutasten. Da voraussetzungsgemäß die Elevationen, d. h. die Erhebungen der Pendelkugel aus

¹⁾ Vgl. C. CRANZ, Encykl. d. Math. Wiss., Band 4, Teilband 3, S. 224.

der Horizontalebene ganz gering sein sollen, so ist der Vorgang, wie eine strenge Überlegung zeigt, von der Vertikal-
drehung ω_2 nahezu vollkommen unabhängig, und mithin muß sich auch hier die Azimutaldrehung ω_1 der Horizontal-
ebene durch eine scheinbare Drehung $-\omega_1$ der Schwingungs-
ebene kundgeben. Die scheinbare Drehung geschieht auf
der nördlichen Halbkugel im Sinne NOSW, auf der süd-
lichen im umgekehrten Sinne
und ist am Äquator nicht vor-
handen (Abb. 5 u. 6).

Der Betrag der scheinbaren Dre-
hung, abgemessen auf dem Umfang eines
wagerechten Kreises K um A mit dem
Halbmesser a (Abb. 6), macht in
24 Stunden den Weg $2\pi a \sin \varphi$ aus,
und dies ist, wie man leicht nach-
rechnet, der Längenunterschied zweier
irdischer Parallelkreise, wovon der eine
durch den Mittelpunkt, der andere
durch den Nord- oder Südpunkt des
Kreises K geht.

Es ist nun aber praktisch
ganz unmöglich, den Anstoß
auf die Pendelkugel genau
genug zentral auszuführen. Des-
wegen läßt man, wenn man den
Versuch wirklich macht, die
Pendelkugel stets aus ihrer äußersten Lage B so los, daß
sie gegen die Erde keinerlei Anfangsgeschwindigkeit besitzt.
Man gibt dem Pendel also die ganze Drehgeschwindigkeit
der Erde mit, und es ist klar, daß seine Bewegung jetzt
grundsätzlich anders verlaufen muß als die Idealbewegung
bei zentralem Anstoß, und daß ohne die Abschätzung der
hierdurch verursachten Abweichung von jener Idealbewegung
die Versuche vollständig wertlos wären.

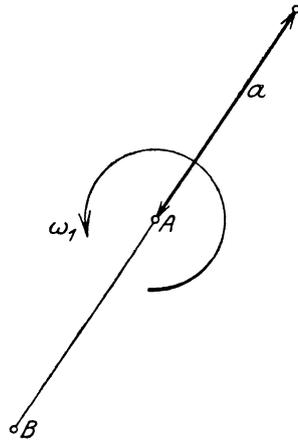


Abb. 5. Horizontalprojektion der
Bahn der Pendelkugel, wenn diese
zentral in A angestoßen wird,
gesehen vom Inertialsystem aus.

Insofern die Vertikaldrehung ω_2 bei den kleinen Amplituden, auf die wir uns beschränken wollten, gar nicht in Frage kommt, können wir als Inertialsystem vorläufig eine in A mit der Erde befestigte Horizontalebene ansehen, welche die Azimutaldrehung ω_1 nicht mitmacht (wir haben diese Auffassung stillschweigend schon der Abb. 5 zugrunde

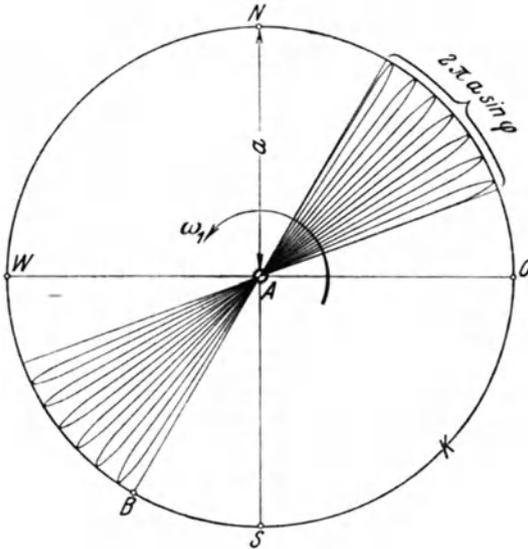


Abb. 6. Dieselbe Horizontalprojektion, gesehen vom irdischen System aus.

gelegt). In diesem Inertialsystem besitzt die Pendelkugel beim Loslassen eine Geschwindigkeit

$$v_0 = a \omega_1 \dots \dots \dots (4)$$

tangential zum Kreise K im Sinne von ω_1 . Man hat es also, beurteilt vom Inertialsystem aus, überhaupt nicht mehr mit einem ebenen, sondern mit einem sog. sphärischen Pendel zu tun, d. h. mit einem solchen, dessen Pendelmasse nicht mehr in einer Ebene schwingt, sondern be-

liebig auf der um den Aufhängepunkt geschlagenen Kugel vom Halbmesser l wandern kann.

An Hand eines leicht zu improvisierenden Fadenpendels kann man sich davon überzeugen, daß die Horizontalprojektion der schwingenden Pendelkugel im Inertialsystem sich jetzt nicht mehr als eine gerade Strecke

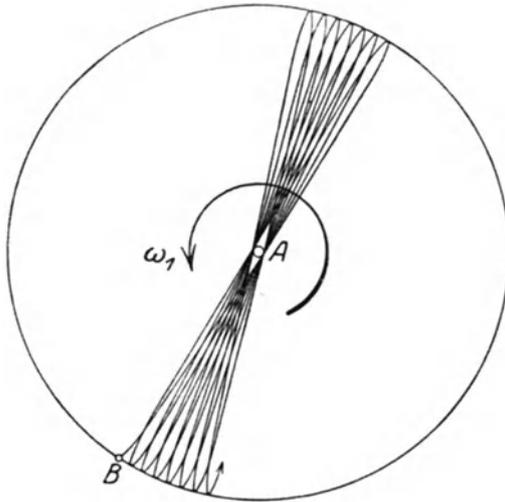


Abb. 7. Horizontalprojektion der Bahn der Pendelkugel, wenn diese in B relativ zur Erde ruhend losgelassen wird, gesehen vom Inertialsystem aus.

(wie in Abb. 5), sondern als eine Ellipse darstellt, welche sich bei genauerem Zusehen überdies langsam im Sinne des Anstoßes dreht (Abb. 7), und zwar zeigt die Theorie, daß die Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega' = \frac{1}{3} \omega_1 \left(\frac{a}{l} \right)^2 \dots \dots \dots (5)$$

im Sinne von ω_1 erfolgt, so daß die scheinbare Drehung

der Schwingungsbahn, gesehen von der Erde aus (Abb. 8), jetzt nicht mehr einfach den Betrag $-\omega_1$, sondern $-\omega_1 + \omega'$ oder zufolge (1) und (5)

$$-\omega \sin \varphi \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right] \dots \dots \dots (6)$$

aufweist.

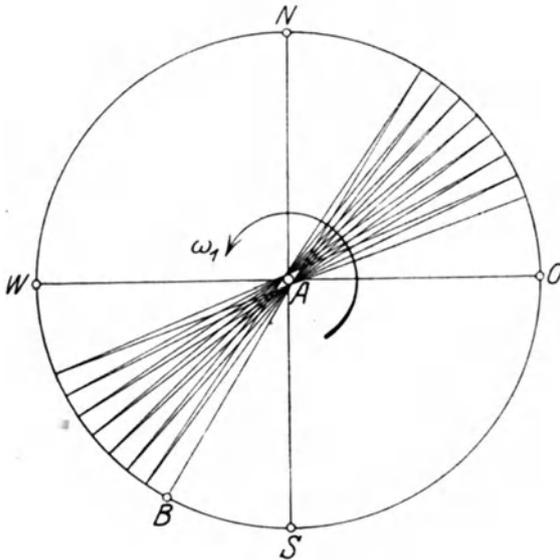


Abb. 8. Dieselbe Horizontalprojektion, gesehen vom irdischen System aus.

Das Korrektionsglied $\frac{1}{3} \left(\frac{a}{l} \right)^2$ muß bei allen quantitativen Versuchen berücksichtigt werden. Um es möglichst zu verkleinern, wird man entweder, wie die meisten Experimentatoren, die Pendellänge l sehr groß oder, wie H. KAMERLINGH-ONNES, die Amplitude a sehr klein wählen (vgl. Abschn. 14).

Bei der Ausrechnung des Korrektionsgliedes dürfen wir ohne Bedenken einen Näherungsweg einschlagen. Wir bezeichnen zu dem Zweck die Lage der Pendelkugel im Inertialsystem durch Kugelkoordinaten ϑ, ψ , indem wir (Abb. 9) ϑ die Elongation der Pendelstange und ψ das Azimut ihrer Horizontalprojektion gegenüber der Anfangslage AB , positiv gerechnet im Drehsinn der Erde, nennen. Dann setzt sich die Geschwindigkeit der Pendelkugel zusammen aus einem radialen Bestandteil $l\dot{\vartheta}$ — übergesetzte Punkte bedeuten Ableitungen nach der Zeit — und aus einem azimutalen $l \sin \vartheta \cdot \dot{\psi}$; der erste gibt das Ausschlagen des Pendels an, der zweite den Ellipsenumlauf und die Drehung der Ellipse. In der Lage ϑ besitzt die Pendelkugel gegenüber ihrer Ruhelage die Macht $mgl(1 - \cos \vartheta)$, und mithin lautet der Energiesatz, wenn wir ihn gleich noch mit $\frac{1}{2}ml^2$ dividieren und die Abkürzung

$$c^2 = \frac{g}{l} \quad \dots \quad (7)$$

einführen

$$\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\psi}^2 + 2c^2(1 - \cos \vartheta) = h, \quad \dots \quad (8)$$

unter h eine Konstante verstanden, die wir später bestimmen.

Ferner hat die Horizontalprojektion von l die Flächengeschwindigkeit $\frac{1}{2}l^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\psi}$, und somit gilt der Flächensatz

$$\sin^2 \vartheta \cdot \dot{\psi} = k, \quad \dots \quad (9)$$

wo k ebenfalls eine Konstante ist.

Indem wir $\dot{\psi}$ mit Hilfe von (9) aus (8) entfernen und dann gleich in erster Näherung $\sin \vartheta$ durch ϑ und $1 - \cos \vartheta$ durch $\frac{1}{2}\vartheta^2$ ersetzen, nimmt der Energiesatz die Form an

$$\dot{\vartheta}^2 + \frac{k^2}{\vartheta^2} + c^2 \vartheta^2 = h \quad \dots \quad (10)$$

Wir sehen jetzt als bekannt die (bereits in Abb. 7, S. 21 dargestellte) Tatsache an, daß das Pendel zwischen einer kleinen *äußersten* Winkelamplitude $\vartheta_1 = a/l$ und einer noch viel kleineren *innersten* $\vartheta_2 = b/l$ hin- und herschwankt, unter b den Radius des kleinen Kreisens verstanden, welchen die Horizontalprojektion in der Nähe des Ruhepunktes A

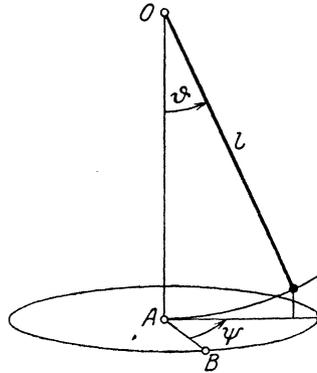


Abb. 9. Sphärisches Pendel.

berührt. Weil in der äußersten und in der innersten Pendelstellung die Ausschlaggeschwindigkeit $\dot{\vartheta}$ verschwindet, so gilt dort nach (10)

$$\frac{k^2}{\vartheta_1^2} + c^2 \vartheta_1^2 = h,$$

$$\frac{k^2}{\vartheta_2^2} + c^2 \vartheta_2^2 = h,$$

woraus sich h und k^2 , in ϑ_1 und ϑ_2 ausgedrückt, berechnen zu

$$h = c^2 (\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2), \quad k = \pm c \vartheta_1 \vartheta_2.$$

Mit diesen Werten lautet der Energiesatz (10), wenn man noch eine Quadratwurzel zieht,

$$\dot{\vartheta} = \pm \frac{c}{\vartheta} \sqrt{(\vartheta_1^2 - \vartheta^2)(\vartheta^2 - \vartheta_2^2)}; \quad \dots \quad (11)$$

dabei ist das positive oder negative Vorzeichen zu nehmen, je nachdem ϑ von ϑ_2 nach ϑ_1 aufsteigt oder von ϑ_1 nach ϑ_2 absinkt.

Wir kehren noch einmal zum Flächensatz (9) zurück. Wenn wir dort den Wert von k ebenfalls einsetzen — das Vorzeichen wählen wir so, daß $\dot{\psi}$ positiv wird — und uns an Stelle von $\sin^2 \vartheta$ mit der Näherung $\vartheta^2 - \frac{\vartheta^4}{3}$ begnügen, so lautet er

$$\vartheta^2 \left(1 - \frac{\vartheta^2}{3} \right) \cdot \dot{\psi} = c \vartheta_1 \vartheta_2 \quad \dots \quad (12)$$

Und nun folgt durch Division der Gleichungen (11) und (12), indem man noch die Verwandlung

$$\frac{1}{\vartheta \left(1 - \frac{\vartheta^2}{3} \right)} \simeq \frac{1}{\vartheta} \left(1 + \frac{\vartheta^2}{3} \right) = \frac{1}{\vartheta} + \frac{\vartheta}{3}$$

vornimmt,

$$d\psi = \pm \vartheta_1 \vartheta_2 \left(\frac{1}{\vartheta} + \frac{\vartheta}{3} \right) \frac{d\vartheta}{\sqrt{(\vartheta_1^2 - \vartheta^2)(\vartheta^2 - \vartheta_2^2)}}.$$

Integriert man dies über ϑ von ϑ_2 bis ϑ_1 , so steht links der vierte Teil des Vollazimutes Ψ einer ganzen Schwingung, während die rechte Seite sich berechnet zu

$$\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\vartheta_1 \vartheta_2}{3} \right).$$

Somit wird

$$\Psi = 2 \pi \left(1 + \frac{\vartheta_1 \vartheta_2}{3} \right).$$

Offenbar gibt der Überschuß der Größe Ψ über 2π die Drehung $\Delta\Psi$ der Ellipse im Laufe einer ganzen Schwingung an. Ist also t_0 die Schwingungsdauer, so wird die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die Ellipse langsam dreht,

$$\omega' = \frac{\Delta\Psi}{t_0} = \frac{2\pi\vartheta_1\vartheta_2}{3t_0} = \frac{2\pi ab}{3t_0l^2} \dots \dots \dots (13)$$

Um die Übereinstimmung dieses Wertes mit (5), S. 21, vollends nachzuweisen, müssen wir uns daran erinnern, daß die kleine Amplitude b der Ellipsenschwingung von der Geschwindigkeit v_0 herrührt, die laut (4), S. 20, von der Erddrehung ω_1 auf das Pendel beim Anstoß übertragen worden ist. Beobachtet man aber in Richtung der großen Halbachse a der Ellipse die Schwingung, so scheint das Pendel einfach wie ein ebenes Pendel mit der Amplitude b und der Maximalgeschwindigkeit v_0 quer zur großen Ellipsenachse zu schwingen. Dabei hängen die Größen b und v_0 mit der Schwingungsdauer t_0 — wie bei jeder harmonischen Schwingung — zusammen durch die Beziehung

$$v_0 t_0 = 2\pi b.$$

Diese geht vermöge (4) über in

$$\frac{2\pi b}{t_0} = \omega_1 a,$$

und damit wird in der Tat aus (13) genau ¹⁾ unsere gesuchte Gleichung (5).

Was die Geschichte des Versuches anlangt, so ist allgemein bekannt, daß ihn L. FOUCAULT²⁾ im Januar 1851 nach langwierigen Vorbereitungen mit vollem Erfolg im Pantheon zu Paris an einem 67 m langen Pendel mit 16 sek Schwingungsdauer ausgeführt hat, sowie daß er dann fast in Jahresfrist seinen Siegeszug über die ganze Erde vollendete, wobei sich die Erddrehung teilweise bis auf einen Fehler von $\frac{1}{2}\%$ (die Tageslänge also bis auf etwa 7 min genau), bei einem in Köln angestellten

¹⁾ Je nach dem Genauigkeitsgrad der Näherungsrechnung findet man in der Literatur statt des Faktors $\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ auch die Faktoren $\frac{1}{4}$ und $\frac{9}{24}$; vgl. auch TISSERAND, Bull. Sciences Math. 1881.

²⁾ L. FOUCAULT, Recueil des travaux scientifiques, herausgegeben von C. M. GABRIEL und J. BERTRAND, Paris 1878, S. 378 (Comptes rendus **32**, 135. 1851.

Versuch¹⁾ angeblich sogar bis auf $\frac{1}{6}\%$ ergab. Weniger bekannt ist die Tatsache, daß der Versuch mit qualitativ befriedigendem Ergebnisse nachgewiesenermaßen²⁾ schon 1661 von V. VIVIANI in Florenz und 1833 von BARTOLINI in Rimini angestellt worden ist, wovon FOUCAULT allerdings keine Kenntnis hatte. Als Kuriosum mag noch erwähnt sein, daß KALISCH in Barmen eine gewöhnliche Pendeluhr drehbar zwischen lotrechten Stahlspitzen lagerte und eine scheinbare Drehung des ganzen Uhrgehäuses deutlich, wenn auch quantitativ mit einem Fehler von 10% , beobachten konnte.

5. Das mathematische Kegelpendel. Die Beweiskraft des Foucaultschen Versuches wird trotz seiner Berühmtheit dadurch beeinträchtigt, daß ihm die Eigenschaft der Umkehrbarkeit mangelt, die allein eine wirklich zuverlässige Ausmittelung aller systematischen Fehler ermöglicht, — d. h. daß es unmöglich ist, ihn so umzukehren, daß auch alle systematischen Fehler sich umkehren müssen. Es scheint, daß diesen Mangel zuerst A. BRAVAIS³⁾ empfunden hat. Kurz nach FOUCAULT, bereits im Mai 1851, nahm BRAVAIS einen neuartigen, gut gelingenden Versuch vor, indem er das Pendel nicht ebene, sondern kegelige Schwingungen ausführen ließ, derart, daß die Pendelmasse je einen wagerechten Kreis, und zwar einmal im einen und bei einem zweiten Versuche im andern Sinne beschreiben mußte. Je nach dem Drehsinn ergaben sich dabei verschiedene Umlaufsdauern. Ist nämlich ε_0 die wahre Winkelgeschwindigkeit des Kegelpendels, gemessen in einem Inertialsystem, ε_1 seine scheinbare, gemessen im irdischen System, für den

¹⁾ C. GARTHE, Foucaults Versuch usw., Köln 1852.

²⁾ Vgl. J. G. HAGEN, a. a. O., S. 8.

³⁾ A. BRAVAIS, Comptes rendus **32**, 166. 1851 und **33**, 195, 1851.

Drehsinn NOSW, ε_2 seine scheinbare für den Drehsinn NWSO, so gilt

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_0 + \omega_1 \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_0 - \omega_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

und also nach (I), S. 9,

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 2 \omega_1 = 2 \omega \sin \varphi \dots \dots \dots (15)$$

Die linke Differenz ermittelte BRAVAIS, indem er das 10 m lange Pendel durch einen wagerecht sich drehenden Hebel zu einer möglichst genau kreisförmigen Bewegung antrieb und durch Anvisieren des Pendelfadens in einer durch die Ruhelage gehenden erdfesten Richtung die relativen Umlaufsdauern für den einen und andern Drehsinn bestimmte.

Für noch genauere Messungen verwandte BRAVAIS zwei in der Visierichtung hintereinander hängende Pendel, die sich um $\frac{1}{100}$ in der Länge und also um $\frac{1}{200}$ in der Umlaufsdauer unterschieden. Für das kürzere gilt in leichtverständlicher Bezeichnung

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1' &= \varepsilon_0' + \omega_1 \\ \varepsilon_2' &= \varepsilon_0' - \omega_1 \end{aligned} \right\}, \dots \dots \dots (16)$$

und aus (14) und (16) folgt

$$(\varepsilon_1' - \varepsilon_2) - (\varepsilon_2' - \varepsilon_1) = 4 \omega_1 = 4 \omega \sin \varphi \dots (17)$$

Ein erster Versuch, bei dem das kürzere Pendel im Sinne NOSW, das längere im Sinne NWSO umlief, gab durch Beobachtung der Koinzidenzzeiten beider Pendel und durch Abzählen der Schwingungen zwischen zwei Koinzidenzen die erste der linken Differenzen in (17), ein zweiter Versuch mit umgekehrten Umlaufssinnen die zweite.

Indem BRAVAIS auch noch die Korrekturen berücksichtigte, die durch die Abweichungen von der genauen Kreisform der Bahn der Pendelkugel bedingt sind —

diese Form wurde dauernd festgestellt —, fand er den Wert von ω mit *einem* Pendel auf 3,8% genau, mit *zwei* Pendeln fast auf 1% genau. Wenn trotzdem sein Versuch im Gegensatz zum Foucaultschen viel weniger bekannt und niemals mehr wiederholt worden ist, so mag dies darauf zurückzuführen sein, daß die Beobachtung der *Zeit*differenzen am Bravaischen Pendel weniger eindrucksvoll ist als die von *Raum*differenzen am Foucaultschen, und daß überhaupt der Foucaultsche Versuch wenigstens auf den Laien wohl viel unmittelbarer und überzeugender wirkt als der wissenschaftlich ebenso wertvolle Bravaissche. Man bemerkt übrigens, daß die Versuche von FOUCAULT und BRAVAIS lediglich die beiden Endglieder einer ganzen Reihe von Versuchsmöglichkeiten darstellen, nämlich der allgemeinen Schwingungen des sphärischen mathematischen Pendels (vgl. Abschn. 14).

B. Nachweis der Vertikaldrehung.

6. Die Wage. Der vollgültige Nachweis der Erdrotation ω ohne astronomische Beobachtungen (wie sie noch zur Angabe der geographischen Breite φ nötig wären) erfordert, streng genommen, auch die Ermittlung der Vertikaldrehung $\omega_2 = \omega \cos \varphi$ des Beobachtungsortes. Es ist wiederholt versucht worden, hierzu diejenige Trägheitserscheinung eines umlaufenden Körpers zu verwenden, die man gemeinhin unter dem Namen der Fliehkraft zusammenfaßt. Alle irdischen Körper sind der von der Erddrehung ω herrührenden Fliehkraft unterworfen. Die Vertikaldrehung ω_2 insbesondere hat zur Folge, daß das Gewicht eines auf der Erdoberfläche ruhenden Körpers etwas leichter ist, als der Erdanziehung allein entspräche. Man könnte sofort auf die Größe der Vertikaldrehung

ω_2 schließen, wenn man Erdanziehung und Fliehkraft zu trennen vermöchte. Dies ist jedoch mit der Wage, die immer nur die Differenz beider Kräfte angibt, unmittelbar nicht möglich.

Geht man jedoch mit dem Körper in die Höhe h über die Erdoberfläche, so ändern sich sowohl die Fliehkraft wie auch die Erdanziehung, und *da sie dies nach verschiedenen Gesetzen tun*, so wird durch eine neue Wägung die erforderliche Trennung beider Bestandteile des Gewichts möglich, und man kann dann den Wert von ω_2 leicht berechnen. Es versteht sich von selbst, daß bei beiden Wägungen die Gewichtsstücke ihre Höhenlage nicht ändern dürfen: man hat daher die Wage in der Höhe h aufzustellen und den Körper einmal auf der Wagschale selbst, das andere Mal an die Wagschale vermittels eines zu tavierenden Fadens von der Länge h angehängt abzuwägen.

Ist m die Masse des Körpers, g die Schwerebeschleunigung an der Erdoberfläche und R der Erdhalbmesser, so hat die Fliehkraft (genauer ihre lotrechte Komponente) an der Erdoberfläche den Betrag $m R \omega_2^2$. Das wägbare Gewicht wird mithin

$$G = mg - m R \omega_2^2.$$

In der Höhe h über der Erdoberfläche wird das wägbare Gewicht, wenn man die Abnahme der Schwere mit dem Quadrat der Entfernung von der Erdmitte und die Zunahme der Fliehkraft mit dieser Entfernung selbst beachtet,

$$G' = m g \frac{R^2}{(R + h)^2} - m (R + h) \omega_2^2.$$

Setzt man hierin genau genug

$$\frac{R^2}{(R + h)^2} \simeq 1 - \frac{2h}{R},$$

so kommt durch Subtraktion

$$G - G' = \frac{2mg h}{R} + m h \omega_2^2$$

und sodann

$$\frac{G - G'}{G} = \frac{h}{R} \cdot \frac{2g + R \omega_2^2}{g - R \omega_2^2} \dots \dots \dots (18)$$

Ist durch die Wägungen der Ausdruck

$$\frac{R}{h} \cdot \frac{G - G'}{G} = A$$

ermittelt, so wird aus (18)

$$\omega_2^2 = \frac{g}{R} \cdot \frac{A - 2}{A + 1} \dots \dots \dots (19)$$

Es ist freilich trotz mancher Bemühungen bisher nicht gelungen, die Wägungen mit solcher Genauigkeit durchzuführen, daß wenigstens der qualitative Nachweis für

die Vertikaldrehung ω_2 auf diesem Wege als erbracht anzusehen wäre.

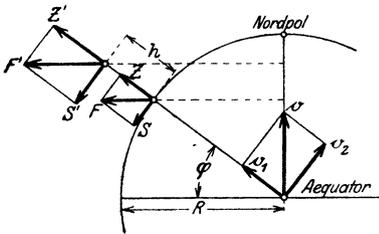


Abb. 10. Die Vertikal- und Horizontal-
komponenten der irdischen Fliehkraft in
verschiedenen Höhen.

7. Die Drehwage.

Etwas mehr Aussicht auf Erfolg verspricht eine Abänderung des Versuches in dem Sinne, daß an Stelle der gewöhnlichen Wage eine Drehwage benutzt

wird. Die Verwendung der Drehwage beruht, abgesehen von ihrer außerordentlichen Empfindlichkeit darauf, daß infolge des Hinzutretens der Azimutaldrehung ω_1 die Richtung der Fliehkraft in Wirklichkeit nicht lotrecht auf der Erdoberfläche steht, sondern parallel zur Ebene des Erdäquators weist (Abb. 10). Von den zugehörigen lotrechten Komponenten Z und Z' ist soeben die Rede gewesen; daneben sind aber noch die südlichen Komponenten S und S' vorhanden, deren Differenz ΔS als wagerechte Kraft sich zur Ermittlung durch die Drehwage gut eignen sollte.

Die Fliehkraft besitzt an der Erdoberfläche den Betrag

$$F = m R \cos \varphi \cdot \omega^2,$$

in der Höhe h darüber

$$F' = m (R + h) \cos \varphi \cdot \omega^2.$$

Ihre südlichen Komponenten

$$S = m R \omega^2 \cos \varphi \sin \varphi = m R \omega_1 \omega_2,$$

$$S' = m (R + h) \omega^2 \cos \varphi \sin \varphi = m (R + h) \omega_1 \omega_2$$

haben die Differenz

$$\Delta S = m h \omega^2 \cos \varphi \sin \varphi = m h \omega_1 \omega_2 \dots (20)$$

Ein diesbezüglicher Versuch scheint schon 1832 von HENGLER¹⁾ ausgeführt worden zu sein; er wurde 1910 von J. G. HAGEN²⁾ mit besserem Erfolge wiederholt, ohne daß jedoch eine befriedigende Genauigkeit erreicht worden wäre. Aber es war wenigstens der Sinn des zu erwartenden Ausschlags der Drehwage einwandfrei nachzuweisen. Wenn die Wage, die bei HAGEN in einer bifilar aufgehängten Rolle mit wagerechter Achse bestand, von Ost nach West (Rollachse von Süd nach Nord) orientiert ist, und wenn die östliche Masse zuerst tiefer als die westliche hängt, so muß ein Ausschlag der Wage im Drehsinne NOSW entstehen, sobald die westliche Masse nach unten gelassen, die östliche aber emporgezogen wird.

8. Die gedrehte Wage. Die Versuche sowohl mit der gewöhnlichen (6.) wie mit der Drehwage (7.) sind außerordentlich erschwert durch den Umstand, daß beidesmal Effekte von der Größenordnung ω^2 gemessen werden müssen. Dies rührt davon her, daß in dem für die Fliehkraft maßgebenden Produkte $R \omega^2$ bisher nur der *erste* Faktor variiert worden ist. Es liegt aber nahe, statt dessen den ersten Faktor festzuhalten und dafür den *zweiten* zu ändern, und zwar einfach dadurch, daß man dem Versuchskörper eine wagerechte Geschwindigkeit v ostwärts oder westwärts erteilt. Im ersten Fall vergrößert man sozusagen die Vertikalgeschwindigkeit ω_2 , im zweiten

¹⁾ HENGLER, Dingers polyt. Journ. 43, 81. 1832.

²⁾ J. G. HAGEN, a. a. O., S. 151.

verkleinert man sie um ebensoviel, so daß die Masse m des Versuchskörpers im ersten Fall einer vergrößerten, im zweiten einer verkleinerten Fliehkraft unterliegt, also an Gewicht verliert bzw. gewinnt.

Die lotrechte Komponente der Fliehkraft wird nämlich während der Bewegung

$$m R \left(\omega_2 \pm \frac{v}{R} \right)^2.$$

Entwickelt man die Klammer und läßt dabei v^2 als klein gegen $R^2 \omega_2^2$ (Quadrat der Umfangsgeschwindigkeit der Erddrehung) für nicht zu hohe geographische Breiten unbedenklich fort, so kommt ein Gewichtsverlust bzw. -gewinn von der Größe

$$\Delta G = \mp 2 m v \omega_2 = \mp 2 m v \omega \cos \varphi, \dots (21)$$

der für einen 1 kg schweren Körper bei 1 m/sek Geschwindigkeit in unseren Breiten immerhin schon etwa ∓ 10 mg ausmacht.

Auf diese Gewichtsunterschiede hat R. EÖTVÖS hingewiesen anlässlich der von HECKER bei Fahrten auf hoher See gemachten Schweremessungen (1901—1908). Nach dem Vorschlage von EÖTVÖS¹⁾ führt man den Versuch im Laboratorium am besten mit Hilfe eines Wagebalkens aus, der an seinen Enden gleich große Massen trägt und in gewöhnlicher Art um eine wagerechte Achse schwingen kann. Setzt man das Stativ des Wagebalkens auf eine Drehscheibe (Abb. 11) und läßt diese gleichmäßig um die lotrechte Achse umlaufen, so bewegen sich die Massen abwechslungsweise nach Osten und nach Westen; ihre Gewichte pulsieren im Rhythmus der Drehung und veranlassen den Wagebalken zu Schwingungen um seine wagerechte Achse. Diese sind am größten und dann vorzüglich zu beobachten, wenn sie in Resonanz mit den Eigenschwingungen des Wagebalkens gesetzt werden. EÖTVÖS, der einen Vorlesungsversuch dieser Art 1917

¹⁾ R. EÖTVÖS, Ann. d. Physik (4) 59, 743. 1919. Vgl. auch D. PEKÁR, Naturwissenschaften 7, 389. 1919.

vorführte, gab auch an, wie man dabei mit verhältnismäßig einfachen Mitteln wohl bis zu Präzisionsmessungen von wahrscheinlich hoher Genauigkeit gelangen könnte.

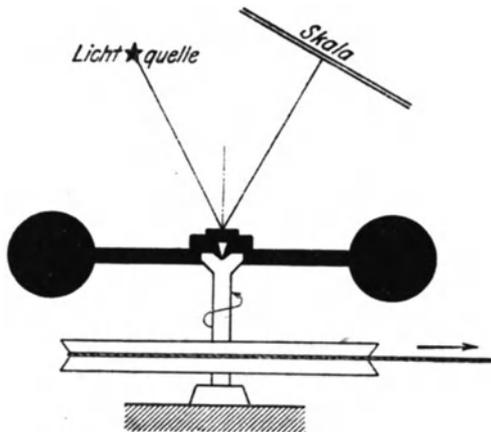


Abb. 11. EÖTVÖS' Versuchsanordnung.

Übrigens bemerkt man, daß die sämtlichen Versuche dieser Gruppe (6., 7. und 8.) die Eigenschaft der Umkehrbarkeit besitzen.

II. Versuche auf Grund des Flächensatzes.

A. Nachweis der Azimutaldrehung.

9. Der Isotomeograph. Das Jahr 1851 ist nicht nur durch die Pendelversuche von **FOUCAULT** und von **BRAVAIS** ausgezeichnet. In diesem gleichen Jahre machte **L. POINSON** ¹⁾ auch den Vorschlag, den Flächensatz zum Nachweis der Azimutaldrehung zu verwenden. **POINSON** geht davon aus, daß ein im irdischen System ruhender Körper mit einer lotrechten Hauptträgheitsachse und dem zugehörigen Hauptträgheitsmoment A zufolge der Azimutaldrehung ω_1 einen Schwung mitbekommen hat, der (vgl. Einl. S. 13) den Betrag $A\omega_1$ besitzt, und dessen lotrechter Vektor weder seine Größe noch — im irdischen Bezugssystem — seine Richtung ändert, wenn kein Drehmoment \mathfrak{M} um seine lotrechte Achse an ihm angreift. Um ein solches Moment \mathfrak{M} zu verhüten, genügt es, den Körper reibungs- und torsionsfrei aufzuhängen. Wenn jetzt durch *innere* Kräfte allein im Körper Massenverschiebungen ausgeführt werden, so daß das Trägheitsmoment einen neuen Wert A' annimmt, dann muß auch die Drehgeschwindigkeit sich in ω_1' so ändern, daß nach wie vor der Schwung den Betrag

$$A' \omega_1' = A \omega_1$$

besitzt. Denn innere Kräfte heben sich nach dem Wechsel-

¹⁾ **L. POINSON**, Comptes rendus **32**, 206. 1851; vgl. auch **TESSAN**, ebenda S. 504.

wirkungsgesetz paarweise auf und haben demnach sicherlich kein resultierendes Moment \mathfrak{M} . Nach der Massenverlagerung zeigt sich mithin eine Verkleinerung bzw. Vergrößerung der tatsächlichen Winkelgeschwindigkeit in demselben Maße, als sich dabei das Trägheitsmoment vergrößert bzw. verkleinert hat, und somit entsteht eine scheinbare Azimutaldrehung des Körpers gegen-

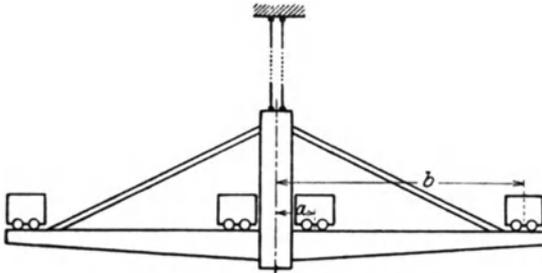


Abb. 12. Hagenschers Isotomeograph.

über dem irdischen System, und zwar mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\varepsilon \equiv \omega_1' - \omega_1 = \omega_1 \left(\frac{A}{A'} - 1 \right), \dots \dots (22)$$

positiv gerechnet im Sinne NWSO.

Der Versuch ist mit großem Erfolg in den Jahren 1910 und 1911 und mit zehnfach gesteigerter Genauigkeit 1919 von J. G. HAGEN¹⁾ durchgeführt worden, und zwar in der Weise, daß ein wagerechter Balken (Abb. 12) bifilar aufgehängt und mit beweglichen Zusatzmassen versehen wurde, die sich vollkommen symmetrisch von der Mitte des Balkens nach seinen beiden Enden und wieder zurück bewegen konnten.

¹⁾ J. G. HAGEN, a. a. O., S. 135, sowie 2. Anhang S. 9, und Zeitschr. f. Instr.-Kunde 40, 65. 1920.

Ist mit m die Summe dieser Zusatzmassen bezeichnet, mit a ihr Abstand von der lotrechten Mittelachse des Balkens in ihrer innersten Lage, mit b ihr Abstand davon in der äußersten Lage, und ruht der Balken anfänglich gegen die Erde, wenn die Zusatzmassen innen sitzen, so ist mit dem Trägheitsmoment A_0 des leeren Balkens:

$$A = A_0 + a^2 m, \quad A' = A_0 + b^2 m,$$

und demnach muß gemäß (22) nach der Verschiebung der Massen in ihre äußerste Lage im ersten Augenblick eine scheinbare Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\varepsilon_1 = \frac{(b^2 - a^2) m}{A_0 + b^2 m} \omega_1 \dots \dots \dots (23)$$

im Sinne NOSW wahrzunehmen sein. Diese Drehung wird allerdings sofort von dem rücktreibenden Momente der Aufhängevorrichtung beeinflusst und gibt zu horizontalen Drehschwingungen des Balkens Veranlassung, und die Anfangsgeschwindigkeit ε_1 ist dann aus Amplitude, Schwingungsdauer und logarithmischem Dekrement in bekannter Weise zu ermitteln. Ebenso muß, wenn der Balken mit den Massen in ihrer äußersten Lage in scheinbare Ruhe gebracht war, die Verschiebung der Massen nach innen eine scheinbare Drehung

$$\varepsilon_2 = \frac{(b^2 - a^2) m}{A_0 + a^2 m} \omega_1 \dots \dots \dots (24)$$

im Sinne NWSO erzeugen, die übrigens wegen $a < b$ stärker ausfallen wird als ε_1 .

HAGEN hat den Apparat, den er nach einem Vorschlage von C. STEPHANOS Isotomeograph nannte (von *ἴσος* = gleich und *τομεύς* = Sektorfläche, vgl. 2. Keplersches Gesetz S. 15), auch noch dahin abgeändert (Abb. 13), daß er den Balken durch einen lotrecht hängenden Bügel (b) ersetzte, in welchem sich drei Vierecke (v) aus Aluminiumröhren um eine wagerechte Achse (a) drehen konnten (in der Vorderansicht überdecken sich die drei hintereinanderliegenden Vierecke, in der Seitenansicht liegen sie nebeneinander). Die Zusatzmassen (m) verteilten sich auf zwei gegenüberliegende Ecken jedes Vierecks, so daß je auf das vordere und hintere Viereck $\frac{1}{4} m$, auf das mittlere $\frac{1}{2} m$ entfiel. Das vordere und hintere Viereck drehten

sich gemeinsam im einen Sinne um 90^0 , das mittlere im andern um ebenfalls 90^0 , und zwar so, daß vor der Drehung die sämtlichen Massen entweder auf der Lotachse des Apparats oder auf seiner wagerechten Querachse lagen.

Die große Genauigkeit, die HAGEN schließlich erreichen konnte — ω_1 ergab sich bis auf die dritte Stelle —, beruhte ganz wesentlich darauf, daß auch diesen Versuchen die

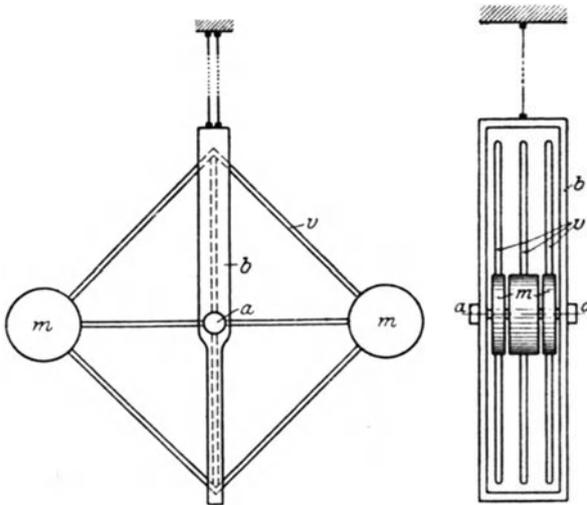


Abb. 13. Zweite Form des Hagenschen Isotomeographen in Vorder- und Seitenansicht.

wertvolle Eigenschaft der Umkehrbarkeit zukam, wie sie durch die beiden Formeln (23) und (24) ausgedrückt ist.

10. Ein hydraulischer Versuch. Wenn man den Flächensatz auf Flüssigkeitsströme anwendet, wie dies zuerst PERROT¹⁾ und COMBES²⁾ im Jahre 1859 getan

¹⁾ PERROT, Comptes rendus 49, 637. 1859.

²⁾ COMBES, ebenda S. 775.

haben, so muß sich eine bemerkenswerte Abänderung des soeben behandelten Versuchs ergeben. Diese wurde 1908 mit wenigstens qualitativem Erfolge von O. TUM-LIRZ¹⁾ in der Weise ausgeführt, daß Wasser zwischen zwei wagerechte kreisförmige Glasplatten von allen Seiten genau radial einströmte und im Mittelpunkt abfloß.

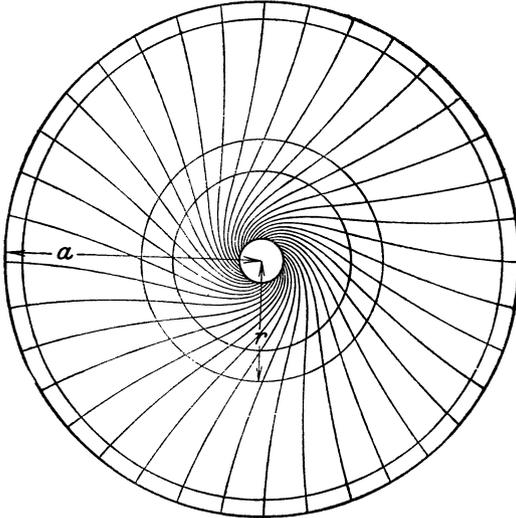


Abb. 14. Wagerechte Radialströmung unter dem Einflusse der Erdrotation.

Wenn die Flüssigkeitsfäden, in geeigneter Weise gefärbt, sichtbar gemacht wurden, so zeigten sie eine deutlich spiralförmige Struktur (Abb. 14), statt der rein radialen, die sie in einem Inertialsystem zeigen müßten.

In der Tat besitzt jeder Flüssigkeitsring in dem Augenblick, wo alle seine Teilchen gleichzeitig von außen her

¹⁾ O. TUM-LIRZ, Sitzungsber. Wien 117. 1908; Math.-Naturw. Kl., 2. Abt., S. 819.

in den Bereich der Scheiben eintreten, zufolge der Azimutaldrehung ω_1 , welche er mitbekommt, einen gewissen Schwung, den er unverändert beizubehalten strebt. In demselben Maße, als sich der Ring zusammenzieht und dadurch sein Trägheitsmoment verkleinert, muß seine Drehgeschwindigkeit im Sinne von ω_1 zunehmen, woraus der spiralgige Verlauf der gefärbten Flüssigkeitsfäden ohne weiteres folgt.

Auch die Gestalt der Spiralkurven läßt sich leicht ermitteln. Ist nämlich a der Halbmesser der Scheiben, so braucht man nur einen Flüssigkeitsring von der Masse dm zu verfolgen von dem Augenblicke an, wo er mit dem Trägheitsmoment $a^2 dm$ in den Bereich der Platten mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 einströmt, bis zu dem Augenblicke, wo er sich auf den Halbmesser r zusammengezogen hat und das Trägheitsmoment $r^2 dm$ sowie die Winkelgeschwindigkeit ω_1' besitzt. Seine scheinbare Drehgeschwindigkeit ϵ gegen das irdische Bezugssystem möge mit $d\chi/dt$ bezeichnet sein, so ist nach (22), S. 35,

$$\frac{d\chi}{dt} = \omega_1 \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) (25)$$

Nimmt man die Überlegung hinzu, daß mit der Radialgeschwindigkeit dr/dt die Flüssigkeitsmenge, die in der Zeiteinheit durch einen zu den Platten koaxialen Zylinder vom Halbmesser r eintritt, sich bei einem Plattenabstand b zu

$$2\pi r b \frac{dr}{dt}$$

berechnet und für alle Werte von r aus Gründen der Kontinuität dieselbe sein muß, so kann man

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c}{r} (26)$$

setzen, unter c eine leicht zu ermittelnde Konstante verstanden. Indem man die Gleichungen (25) und (26) durcheinander teilt, so kommt

$$\frac{d\chi}{dr} = \frac{\omega_1}{c} \left(\frac{a^2}{r} - r \right)$$

als Differentialgleichung der Stromlinien, deren Integral

$$\chi - \chi_0 = \frac{\omega_1}{c} \left(a^2 \ln r - \frac{r^2}{2} \right) (27)$$

in der Tat dem Aussehen nach die von **TUMLIRZ** beobachtete Schar von Spiralkurven in Polarkoordinaten (r, χ) ergibt (χ_0 ist als Parameter der einzelnen Individuen der Schar anzusprechen).

Eine auch quantitativ befriedigende Durchführung des Versuches ist bis jetzt noch nicht ganz gelungen, ebensowenig die Umkehrung: radiale Strömung von der Mitte nach außen mit entgegengesetztem, doch kleinerem Effekte.

B. Nachweis der Vertikaldrehung.

11. **Der Wurf.** Um die Vertikaldrehung ω_2 mit Hilfe des Flächensatzes nachzuweisen, wird man in erster Linie Bewegungen in der auf dem Vektor \mathbf{v}_2 (vgl. Abb. 1, S. 9)

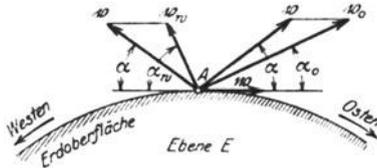


Abb. 15. Scheinbare und wahre Abschußvektoren bei östlichem und westlichem Schuß.

senkrechten Ostwestebene E des Beobachtungsortes A benützen. Denken wir uns beispielsweise zwei Körper im luftleeren Raum mit gleichen Anfangsgeschwindigkeiten v und mit gleichen Elevationswinkeln α geworfen, den einen nach Osten, den andern nach Westen (Abb. 15), so ist zu den Vektoren \mathbf{v} der östlich gerichtete Vektor \mathbf{w} der Geschwindigkeit des Beobachtungsorts nach der Parallelogrammregel (Vektoradditionsregel) hinzuzufügen. Der absolute Betrag von \mathbf{w} ist

$$w = R \omega_2 = R \omega \cos \varphi,$$

wo R wieder den Erdhalbmesser bedeutet. Wenn α von Null verschieden gewählt wird, ist die wahre Elevation α_0

des östlich geworfenen Körpers offenbar kleiner als diejenige a_w des westlich geworfenen; dafür wird die wahre Anfangsgeschwindigkeit v_o des östlichen größer als diejenige v_w des westlichen. Die Körper beschreiben Bögen von Keplerellipsen, deren einer Brennpunkt die Erdmitte O ist (Abb. 16 als Erweiterung von Abb. 15 mit gleicher Zeichenebene E). Man sieht deutlich, daß diese Ellipsen stark verschieden sein müssen, daß sie insbesondere verschiedene kleinste Abstände von der Erdmitte haben. Demnach verlaufen beide Bewegungen auch für einen irdischen Beobachter ein wenig verschieden. Eine genaue Rechnung¹⁾ würde ergeben, daß für große Elevationen α die Wurfweite x_o des östlich geworfenen Körpers etwas kleiner ist als diejenige x_w des westlichgeworfenen, und daß es bei kleinen Elevationen gerade umgekehrt ist. Die Unterschiede sind allerdings

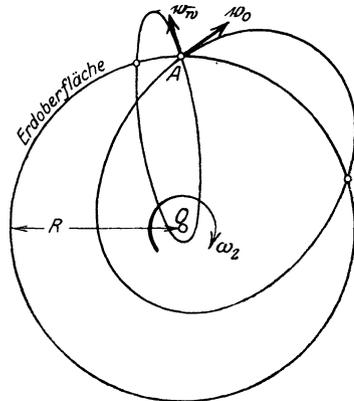


Abb. 16. Bahnen beim Schuß nach Osten und Westen.

so ungeheuer klein, daß sie in Wirklichkeit von den Unregelmäßigkeiten des Luftwiderstandes und des Abschusses vollkommen verwischt werden müssen. Wenigstens haben wiederholt angestellte Schießversuche, meist mit der Elevation 90° nicht den mindesten Effekt gezeigt. Es ist aber wohl denkbar und gar nicht einmal unwahrscheinlich, daß man den Effekt fände, wenn man auch hier (vgl. Abschn. 3 und 4) mit ganz kleinen Geschwindigkeiten

¹⁾ Vgl. S. D. POISSON, Journ. de l'Ecole Polyt. 16. 1838. Heft 26.

arbeiten würde. Eine Versuchsanordnung, die das leisten kann, ist indessen bis jetzt nicht ausgedacht worden.

Obwohl der Luftwiderstand, wie schon gesagt, die Wurfbahn stark beeinflusst, so möge die Wurfweite wenigstens für die beiden Grenzfälle — wagerechter Wurf nach Osten oder Westen, und senkrechter Wurf nach oben — ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand berechnet werden. Das Ergebnis kann freilich höchstens eine qualitative Bedeutung beanspruchen.

Es werde also erstens in der Höhe h über dem Erdboden ein Körper mit der Geschwindigkeit v wagerecht östlich bzw. westlich geworfen. Dann ist seine wahre Geschwindigkeit in einem im Erdmittelpunkt ruhenden Inertialsystem

$$\left. \begin{aligned} v_o &= v + w = v + (R + h) \omega_2 \\ \text{bzw. } v_w &= v - w = v - (R + h) \omega_2 \end{aligned} \right\}, \dots \dots (28)$$

positiv nach Osten bzw. Westen gerechnet.

Die doppelte Flächengeschwindigkeit des vom Erdmittelpunkt nach dem östlich geworfenen Körper gezogenen Fahrstrahls hat zu Beginn den Wert $(R + h)v_o$; sie beträgt später, nachdem der Körper bis auf die Höhe z gefallen ist, $(R + z)^2 \dot{\psi}$, wenn ψ den Winkel zwischen dem ursprünglichen Fahrstrahl und demjenigen für die Höhe z mißt. Der Flächensatz, d. h. das 2. Keplersche Gesetz (3), S. 15, verlangt daher

$$(R + h) v_o = (R + z)^2 \dot{\psi}.$$

Beachtet man, daß h sowohl wie z äußerst klein gegen R sein werden, so daß man ihre Quadrate und ihr Produkt gegen R^2 und um so mehr die höheren Potenzen entsprechend streichen kann, so erhält man hieraus

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= v_o \frac{R + h}{(R + z)^2} \simeq \frac{v_o}{R} \left(1 + \frac{h}{R} \right) \left(1 - \frac{2z}{R} \right) \\ &\simeq \frac{v_o}{R} \left(1 + \frac{h}{R} - \frac{2z}{R} \right) \end{aligned}$$

oder nach einer Integration über die ganze Falldauer t_o den vom Fahrstrahl im Ganzen überstrichenen Winkel

$$\psi_o = \frac{v_o t_o}{R} \left(1 + \frac{h}{R} \right) - \frac{2 v_o}{R^2} \int_0^{t_o} z dt.$$

Innerhalb der Annäherung, mit der wir hier rechnen, ist es erlaubt, für die lotrechte Fallkomponente die gewöhnlichen Formeln des freien Falles, also ohne Luftwiderstand

$$z = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$$h = \frac{1}{2} g t_0^2$$

zu benützen, so daß das Integral

$$\int_0^{t_0} z \, dt = h t_0 - \frac{1}{6} g t_0^3 = \frac{2}{3} h t_0$$

wird. Damit erhält man

$$\psi_0 = \frac{v_0 t_0}{R} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{h}{R} \right)$$

oder wegen (28)

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \frac{v t_0}{R} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{h}{R} \right) + \omega_2 t_0 \left(1 + \frac{h}{R} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \frac{h}{R} \right) \\ &\simeq \frac{v t_0}{R} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{h}{R} \right) + \omega_2 t_0 \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h}{R} \right), \end{aligned}$$

und ebenso für den westlich geworfenen Körper mit der in erster Annäherung gleichen Fallzeit $t_w = t_0$

$$\psi_w \simeq \frac{v t_0}{R} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{h}{R} \right) - \omega_2 t_0 \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h}{R} \right).$$

Schließlich kommt für die östliche bzw. westliche Wurfweite, wenn man berücksichtigt, daß inzwischen auch der Lotpunkt der Abwurfstelle infolge der Erddrehung um die Strecke $R \omega_2 t_0$ nach Osten geeilt ist,

$$\begin{aligned} x_o &= R \psi_0 - R \omega_2 t_0 = v t_0 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{h}{R} \right) + \frac{2}{3} \omega_2 h t_0 \\ x_w &= R \psi_0 + R \omega_2 t_0 = v t_0 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{h}{R} \right) - \frac{2}{3} \omega_2 h t_0 \end{aligned} \quad (29)$$

Die östliche Wurfweite ist also in der Tat für die Elevation α bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit etwas größer als die westliche.

Sodann werde zweitens ein Körper lotrecht nach oben geschleudert. Jetzt lautet der Flächensatz

$$R^2 \omega_2 = (R + z)^2 \dot{\psi}_1$$

woraus sich

$$\dot{\psi}_1 = \omega_2 \frac{R^2}{(R + z)^2} \simeq \omega_2 \left(1 - \frac{2z}{R} \right)$$

und mithin der während der ganzen Wurfdauer t_1 bis zur Rückkehr auf den Boden überstrichene Winkel

$$\psi_1 = \omega_2 t_1 - \frac{2\omega_2}{R} \int_0^{t_1} z dt$$

berechnet.

Auch hier gelten in genügender Annäherung die Wurfformeln mit der Anfangsgeschwindigkeit v_1

$$z = v_1 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

$$t_1 = \frac{2v_1}{g},$$

$$h = \frac{1}{8} g t_1^2,$$

so daß nach kurzer Rechnung

$$\psi_1 = \omega_2 t_1 - \frac{4}{3} \frac{\omega_2 h t_1}{R}$$

wird. Daraus folgt ein *westliches* Zurückbleiben des Aufschlagpunktes hinter der Abschußstelle um

$$x_1 = R \omega_2 t_1 - R \psi_1 = \frac{4}{3} \omega_2 h t_1 \dots \dots \dots (30)$$

12. Der freie Fall. Im Gegensatz zum senkrechten Wurf nach oben zeigt der freie Fall nach unten eine *östliche* Ablenkung, auf die schon NEWTON hingewiesen hat, und die bei gleicher Fallhöhe ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes viermal kleiner ist als die von der Theorie geforderte (und soeben berechnete) *westliche* Ablenkung beim senkrechten Wurf nach oben.

Die östliche Abweichung vom Lotpunkt folgt aus der ersten Formel (29), wenn man dort die Anfangsgeschwindigkeit $v = 0$ nimmt, nämlich

$$x_0 = \frac{2}{3} \omega_2 h t_0, \dots \dots \dots (31)$$

wie schon LAPLACE¹⁾ gefunden hat. Diese Abweichung ist in der Tat

wegen $t_0 = \frac{1}{2} t_1$ gleich dem vierten Teil von x_1 (30).

¹⁾ P. S. DE LAPLACE, Mécanique Céleste 1805, S. 300.

Die östliche Ablenkung wächst bei fester Fallhöhe unmittelbar mit der Falldauer, so daß sie also durch den Luftwiderstand, der doch die Falldauer verlängern muß, vergrößert werden wird. Es bereitet der Theorie keine wesentlichen Schwierigkeiten, den Einfluß des Luftwiderstandes abzuschätzen. Aber die zahlreichen bisher angestellten Versuche lohnen die genauere Berechnung nicht. Denn bei ihnen allen betrug die Streuung ein Vielfaches der erwarteten Ablenkung, und zwar nach allen Himmelsrichtungen hin; lediglich der Mittelwert pflegte dem Sinne und ungefähr der Größe nach dem theoretischen Werte zu entsprechen. Wir nennen die Versuche ¹⁾ von GUGLIELMINI in Bologna (1790/92), von BENZENBERG in Hamburg (1802) und Schlebusch (1804), von REICH in Freiberg (1831), von HALL in Cambridge (Mass.) (1902) und von FLAMMARION in Paris (1903). Wenn man die Aufschlagpunkte bei jeder Versuchsreihe auf einen Karton aufzeichnet, so sehen die Bilder (vgl. Abb. 17, S. 46), wie J. G. HAGEN treffend bemerkt hat, einer Zielscheibe ähnlich, auf welche sehr ungleichwertige Schützen geschossen haben. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die einzelne Kugel überhaupt wenigstens östlich vom Lotpunkt auftrifft, verhält sich zur Gewißheit selbst bei den besten Versuchen nur wie 2:3. Unter solchen Umständen aber wird man kaum davon reden dürfen, daß die freien Fallversuche den Nachweis von der Erdrotation einwandfrei erbrächten.

Die experimentellen Schwierigkeiten ²⁾ (Bestimmung des genauen Lotpunktes, störungsfreie Auslösung des fallenden Körpers) sind viel zu groß, als daß an eine genaue

¹⁾ Über die Literatur zu diesen Versuchen vgl. Encykl. d. Math. Wiss. 4. Nr. 1 II. Heft 1: PH. FURTWÄNGLER, Die Mechanik der einfachsten physikalischen Apparate, S. 6 und 50.

²⁾ Vgl. darüber das schon genannte Büchlein von W. BRUNNER, S. 18 ff.

quantitative Bestimmung der Ablenkung — sie beträgt für 80 m Fallhöhe erst rund 1 cm — zu denken wäre. Übrigens deutet der Vergleich der Versuche von HALL (23 m Fallhöhe, mittlerer Fehler 3,3%) und von FLAM-

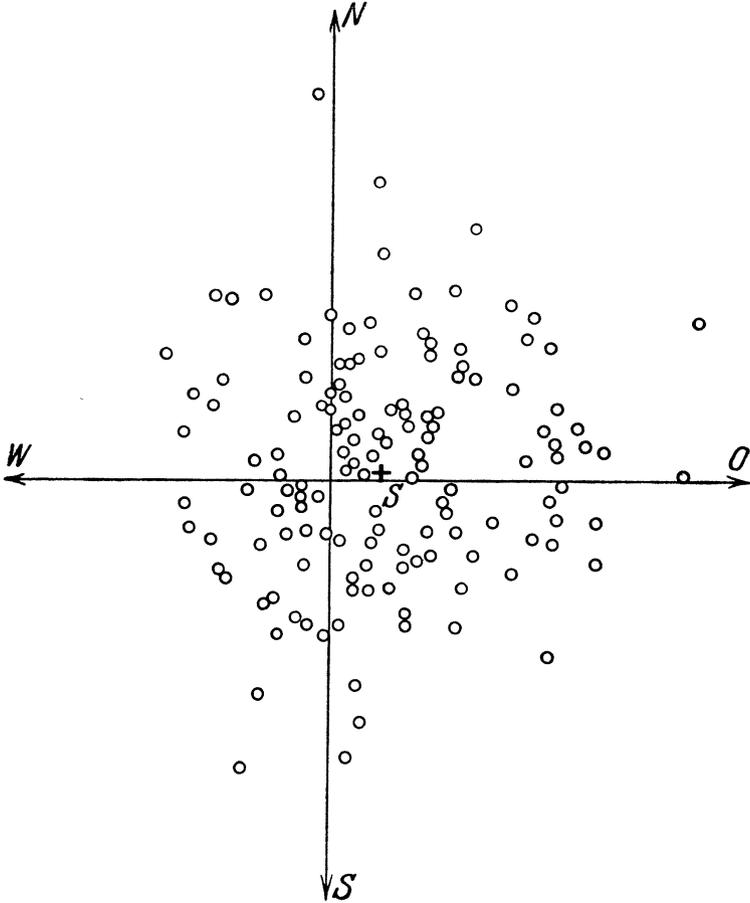


Abb. 17. Die Aufschlagpunkte beim Versuch von FLAMMARION samt ihrem Schwerpunkt *S* in natürlicher Größe.

MARION (68 m Fallhöhe, mittlerer Fehler 22⁰/₀) darauf hin, daß nur mit *kleinen* Fallhöhen bessere Ergebnisse erzielt werden können.

13. Die Atwoodsche Fallmaschine. Will man trotz verkleinerter Fallhöhe einen gut meßbaren Effekt bekommen, so muß man, da der Theorie nach die östliche Ablenkung proportional dem Produkt aus Fallhöhe und Falldauer ist (vgl. Formel (31), S. 44), die Falldauer vergrößern. Dies hat J. G. HAGEN¹⁾ auf den außerordentlich glücklichen Gedanken gebracht, die Atwoodsche Maschine zu verwenden, welche, wie bekannt, die Beschleunigung des Falles von $g = 9,81 \text{ m/sek}^2$ auf einen beliebigen kleineren Wert g' herabzuzwingen gestattet. Die Masse fällt hierbei an einem Faden hängend nieder; dieser läuft über eine Rolle und ist auf der anderen Seite durch ein Gegengewicht belastet, welches eben die Fallverzögerung verursacht. Die Hagenschen Versuche wurden 1912 im Vatikan gemacht; sie ergaben bei 23 m Fallhöhe und einer Fallbeschleunigung etwa gleich dem fünfundzwanzigsten Teil von g eine östliche Ablenkung von rund 0,9 mm in Übereinstimmung mit der Theorie bis auf einen Fehler von nur noch 1⁰/₀. Damit dürften die *freien* Fallversuche wohl endgültig überwunden sein.

Zur Berechnung der östlichen Ablenkung denken wir uns zuerst, der Körper falle *frei* herab. Behalten wir die früheren Bezeichnungen (S. 42) bei, jedoch mit dem Unterschiede, daß jetzt z nicht den Abstand vom Boden, sondern die durchfallene Höhe bedeuten soll, so lautet der Flächensatz

$$(R + h)^2 \omega_2 = (R + h - z)^2 \dot{\psi}_1$$

¹⁾ J. G. HAGEN, a. a. O., 2. Anhang S. 29, sowie gekürzt in den Verhandl. d. Ges. dtsh. Naturforsch. u. Ärzte, 83. Vers. zu Münster 1912. 2. Teil. 1. Hälfte. S. 37.

woraus folgt

$$\dot{\psi} = \omega_2 \frac{(R+h)^2}{(R+h-z)^2} \simeq \omega_2 \left(1 + \frac{2z}{R+h} \right) \\ \simeq \omega_2 \left(1 + \frac{2z}{R} \right),$$

und damit ergäbe sich die östliche Beschleunigung genau genug zu

$$R \ddot{\psi} = 2 \omega_2 \dot{z} \dots \dots \dots (32)$$

Um diese Formel auf den *gebundenen* Fall an der Fallmaschine anzuwenden, müssen wir erstens natürlich für die Fallgeschwindigkeit \dot{z} nicht ihren Wert beim freien Fall gt , sondern $g't$ einführen, und zweitens eine Ergänzung zufügen, welche die Tatsache berücksichtigt, daß die Fadenspannung infolge des östlichen Auspendelns des Fadens eine nach Westen gerichtete Komponente besitzt. Dieser Komponente entspricht nach dem Grundgesetz der Dynamik auch eine ebensolche Beschleunigungskomponente, die wir zu berechnen und dann von der rechten Seite in (32) abzuziehen haben.

Nennen wir aber x die östliche Ablenkung der Masse m , nachdem sie die Höhe z durchfallen hat, ϑ den östlichen Ausschlag des Fadens in diesem Augenblick und S die Fadenspannung, so ist jene Zusatzkomponente der Beschleunigung

$$\frac{S}{m} \sin \vartheta$$

Hier dürfen wir zunächst in Anbetracht der Kleinheit des Winkels ϑ ohne weiteres

$$\sin \vartheta \simeq \frac{x}{z}$$

setzen. Ferner ist die Fadenspannung

$$S = m(g - g');$$

denn das Gewicht mg der fallenden Masse, vermindert um die Fadenspannung S muß gleich der effektiven Fallkraft mg' sein.

Mithin ist die gesuchte westliche Beschleunigungskomponente

$$(g - g') \frac{x}{z}.$$

Ziehen wir diese von der rechten Seite in (32) ab, führen dann noch

$$z = \frac{1}{2} g' t^2$$

ein und bezeichnen die hiernach gefundene wirkliche östliche Beschleunigung nicht mehr mit $R\ddot{\psi}$, sondern mit \ddot{x} , so haben wir statt (32)

$$\ddot{x} = 2 \omega_2 g' t - 2 \frac{g - g'}{g'} \frac{x}{t^2}.$$

Diese Differentialgleichung der gebundenen Fallbewegung läßt sich leicht integrieren. Ihr die Anfangsbedingungen erfüllendes Integral — es muß für $t = 0$ zugleich $x = 0$ und $\dot{x} = 0$ sein — lautet, wie man durch nachträgliches Einsetzen bestätigt,

$$x = \frac{g'^2}{2g' + g} \omega_2 t^2.$$

Die ganze Auslenkung nach Osten ist mithin

$$x_0 = \frac{g'^2 t_0^2}{2g' + g} \omega_2.$$

Man kann hierfür wegen

$$h = \frac{1}{2} g' t_0^2$$

auch schreiben

$$x_0 = \frac{2g'}{2g' + g} \omega_2 h t_0 \dots \dots \dots (33)$$

und das Ergebnis dann bequem mit der entsprechenden Auslenkung (31) beim freien Fall, in welche es mit $g' = g$ wieder übergehen muß, vergleichen.

Es wäre noch hinzuzufügen, daß die genaue Theorie auch eine südliche Ablenkung beim fallenden Körper ergibt; sie ist aber von der Größenordnung ω^2 und also viel zu klein, als daß Aussicht bestünde, sie nachzuweisen.

Der Versuch mit der Atwoodschen Fallmaschine läßt eine Abänderung zu in ähnlicher Art, wie sie vom Isotomeographen zu dem Versuch von TUMLIRZ (vgl. Abschn. 10) führte. Füllt man eine lotrechte Röhre mit Flüssigkeit, setzt einen Schwimmer genau in die Mitte des Flüssigkeitsspiegels und öffnet sodann einen feinen Hahn im Boden der Röhre, so fällt der Schwimmer mit dem Flüssigkeitsspiegel langsam herab, und es ist zu erwarten, daß der Schwimmer nach Osten gedrängt wird. Der Versuch ist von MAILLARD¹⁾ im Jahre 1908 mit allerdings sehr fraglichem Erfolg gemacht worden.

¹⁾ L. MAILLARD, Comptes rendus 147, 524. 1908.

III. Versuche auf Grund des Schwungsatzes.

A. Nachweis der Azimutaldrehung.

14. Das materielle Pendel. In einem Briefe an A. v. HUMBOLDT hat im Jahre 1853 C. F. GAUSS¹⁾ darauf hingewiesen, daß der Foucaultsche Pendelversuch auch mit einem materiellen Pendel von verhältnismäßig kleinen Ausdehnungen durchführbar sein müßte. GAUSS dachte sich das Pendel kardanisch so aufgehängt, daß es nach allen Seiten schwingen kann. Seine Trägheitsmomente um alle wagerechten Achsen durch den Stützpunkt (Mittelpunkt des Kardangehänges) sollen den gleichen Wert B besitzen, dasjenige um die Lotachse den Wert A . Bei der Beurteilung des Foucaultschen Pendels war es ohne weiteres erlaubt, die Größe A gegen B vollständig zu vernachlässigen, bei einem materiellen Pendel, wie es GAUSS in Betracht zog, ist dies nicht mehr statthaft. Zufolge der Azimutaldrehung ω_1 wird dem Pendel ein kleiner Zusatzschwung $A\omega_1$ mitgegeben, dessen Vektor in der Verlängerung der Pendelachse aufwärts zeigt. Die Wirkung eines solchen Zusatzschwunges läßt sich sehr deutlich an einem Kreiselpendel beobachten, d. h. an einem materiellen Pendel, dessen Pendelkugel durch einen Schwungring ersetzt ist, dem eine Eigendrehung um die Pendelachse erteilt werden kann (Abb. 18). Man

¹⁾ Briefe zwischen A. v. HUMBOLDT und C. F. GAUSS, Leipzig 1877, S. 66.

sieht bei einem solchen Kreiselpendel sehr schön, wie die Schwingungsebene nicht mehr, wie bei einem mathematischen Pendel, im Raum stillsteht, sondern sofort anfängt, sich lebhaft um die Lotlinie zu drehen, sobald der Schwungring eine merkliche Eigendrehung besitzt. Dieser Eigendrehung entspricht der genannte Zusatzschwung.

Die nicht ganz elementare Theorie auf Grund des Schwungsatzes zeigt, daß — was übrigens auch ziemlich unmittelbar einleuchtet — die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die Schwingungsebene dreht, proportional mit dem Zusatzschwung $A\omega_1$ und umgekehrt proportional mit B wird und genau den Wert $A\omega_1/2B$ besitzt, so daß die scheinbare Drehung, wie sie durch die Formel (6), S. 22, gegeben war, noch mit einer theoretischen Verbesserung zu versehen ist, die durch den in Wirklichkeit sehr

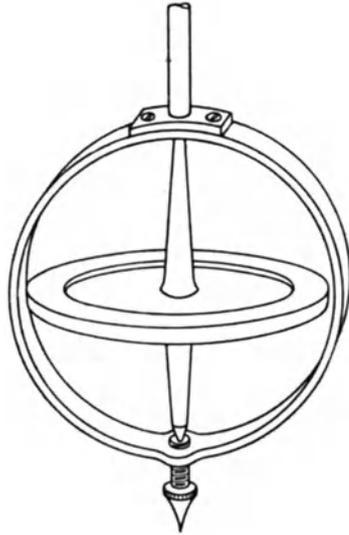


Abb. 18. Kreiselpendel.

kleinen Bruchteil $A/2B$ gemessen wird. Mit anderen Worten, die scheinbare Drehung der Pendelebene besitzt nicht einfach die Winkelgeschwindigkeit $-\omega_1$, sondern (indem wir noch den Quotienten $\frac{\alpha}{l}$, die sog. Winkelamplitude, mit ϑ_1 bezeichnen)

$$-\omega_1 \left[1 - \frac{1}{3} \vartheta_1^2 - \frac{A}{2B} \right]. \quad \dots \quad (34)$$

Die beiden letzten Glieder in der Klammer stellen die endgültigen Korrekturen dar, nämlich erstens den Einfluß der dem Pendel beim Bewegungsbeginn mitgegebenen Erddrehung (vgl. S. 19) und zweitens den Einfluß seiner Massenträgheit um die Pendelachse.

Um das letzte Korrektionsglied zu berechnen, denken wir uns mit dem Pendel (Abb. 19) eine Ebene E fest und derart verbunden, daß sie senkrecht steht auf der sog. Figurenachse des Pendels, d. h. der Geraden,

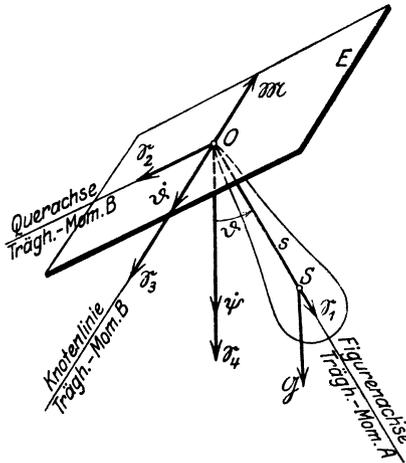


Abb. 19. Zur Theorie des Gaußschen Pendels.

welche durch den Stützpunkt O und den Pendelschwerpunkt S hindurchgeht. Die Gerade stärksten Falles in der Ebene E heißen wir die Querachse, die wagerechte Gerade in E die Knotenlinie (eine Bezeichnung, die der Astronomie entlehnt ist). Die Auslenkung des Pendels aus seiner Ruhelage werde durch den Winkel ϑ gemessen; die Geschwindigkeit $\dot{\vartheta}$ ist dann ein Vektor in der Knotenlinie. Wenn, wie uns bereits bekannt, das Pendel keine ebenen Schwingungen ausführt, sondern seine Schwingungsbahn langsam um die Lotachse dreht, so dreht sich auch die Ebene E mit, und wir wollen die Drehung der dabei wagerecht umlaufenden Knotenlinie durch den Winkel ψ messen, ihre Geschwindigkeit $\dot{\psi}$ also durch einen Vektor darstellen, der in die Lotachse fällt und positiv

abwärts gerechnet werden mag, also im Drehsinne NOSW. Die Versuchseinrichtung ist, wie wir wissen, so getroffen, daß das Pendel in seiner äußersten Lage ϑ_1 mit der Azimutalgeschwindigkeit ω_1 der Erde losgelassen wird, die nach unserer jetzigen Vorzeichenfestsetzung negativ zu zählen ist.

Diese Anfangsgeschwindigkeit ω_1 wirft in die Figurenachse die Komponente $\omega_1 \cos \vartheta_1$, in die Querachse die Komponente $\omega_1 \sin \vartheta_1$ und in die Knotenlinie die Komponente Null. Alle drei Achsen sind unserer Voraussetzung gemäß Hauptträgheitsachsen, und mithin erhalten wir die zugehörigen Schwungkomponenten aus den angegebenen Drehkomponenten einfach durch Multiplikation mit dem zugehörigen Hauptträgheitsmoment (vgl. S. 12 u. 13). Die Anfangskomponenten des dem Pendel mitgegebenen Schwunges sind mithin (vgl. Abb. 19)

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1^0 &= A \omega_1 \cos \vartheta_1, \\ \mathfrak{S}_2^0 &= B \omega_1 \sin \vartheta_1, \\ \mathfrak{S}_3^0 &= 0 \end{aligned}$$

und demzufolge die Anfangskomponente des Schwunges in der Lotlinie

$$\mathfrak{S}_4^0 = \mathfrak{S}_1^0 \cos \vartheta_1 + \mathfrak{S}_2^0 \sin \vartheta_1 = \omega_1 (A \cos^2 \vartheta_1 + B \sin^2 \vartheta_1).$$

Das Moment \mathfrak{M} der Schwere \mathfrak{G} ist ein Vektor, der in der Knotenlinie liegt, also immer wagerecht und zugleich zur Figurenachse senkrecht bleibt. Weil nach dem Schwungssatz (vgl. S. 13) der Vektor \mathfrak{M} die Richtung angibt, in welcher der Endpunkt des Schwungvektors wandert, so läuft in unserem Falle dieser Endpunkt immer wagerecht und zugleich zur Figurenachse senkrecht. Das heißt aber: die Komponenten \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_4 des Schwungvektors in der Figuren- und Lotachse ändern sich während der ganzen Bewegung überhaupt nicht, es ist dauernd

$$\mathfrak{S}_1 = A \omega_1 \cos \vartheta_1, \dots \dots \dots (35)$$

$$\mathfrak{S}_4 = \omega_1 (A \cos^2 \vartheta_1 + B \sin^2 \vartheta_1), \dots \dots \dots (36)$$

auch wenn der Ausschlag von ϑ_1 auf einen beliebigen anderen Wert ϑ gesunken ist. Wohl aber kann sich die Komponente \mathfrak{S}_2 des Schwungvektors in der Querachse ändern. Es ist nämlich allgemein (Abb. 19)

$$\mathfrak{S}_4 = \mathfrak{S}_1 \cos \vartheta + \mathfrak{S}_2 \sin \vartheta,$$

woraus in Verbindung mit (35) und (36) folgt

$$\mathfrak{S}_2 = \omega_1 \frac{A \cos \vartheta_1 (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta) + B \sin^2 \vartheta_1}{\sin \vartheta} \dots \dots (37)$$

Die Bewegung des Pendels setzt sich zusammen erstens aus der Schwingungsbewegung $\dot{\vartheta}$, welche keine Komponente in die Querachse wirft, zweitens aus der Drehung $\dot{\psi}$, welche in der Querachse die Kompo-

nente $\psi \sin \vartheta$ besitzt, und drittens aus einer möglicherweise noch hinzukommenden Eigendrehung des Pendelkörpers um seine Figurenachs, jedoch ebenfalls ohne Komponente in der darauf senkrechten Querachs. Folglich können wir die Schwungkompone in der Querachs noch auf eine zweite Art ausdrücken:

$$\mathfrak{E}_2 = B \psi \sin \vartheta \dots \dots \dots (38)$$

Die Vereinigung von (37) und (38) liefert

$$B \dot{\psi} = \omega_1 \frac{A \cos \vartheta_1 (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta) + B \sin^2 \vartheta_1}{\sin^2 \vartheta} \dots \dots (39)$$

Von jetzt ab wollen wir nur noch mit einer für kleine Ausschläge gültigen Annäherung weiterrechnen, indem wir statt:

$$\begin{array}{cccc} \cos \vartheta_1 & : & \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta & \sin^2 \vartheta_1 & \sin^2 \vartheta \\ \text{der Reihe nach setzen:} & & & & \\ \mathbf{1} & : & \frac{1}{2} (\vartheta^2 - \vartheta_1^2) & \vartheta_1^2 & \vartheta^2. \end{array}$$

Führen wir dann noch zur Abkürzung die praktisch stets positive große Zahl

$$k = \frac{2B - A}{A} \dots \dots \dots (40)$$

ein, so wird aus (39) unsere erste Hauptgleichung

$$B \dot{\psi} = \frac{A \omega_1 \vartheta^2 + k \vartheta_1^2}{2 \vartheta^2} \dots \dots \dots (41)$$

Wir nehmen hinzu den Energiesatz. Ist s der Abstand des Pendelschwerpunkts vom Stützpunkt, so ist die Macht des Pendels, gerechnet von der Ruhelage ($\vartheta = 0$) aus, in der beliebigen Lage ϑ gleich $sG(1 - \cos \vartheta)$, in der obersten Lage gleich $sG(1 - \cos \vartheta_1)$. Die Wucht andererseits setzt sich aus drei Teilen additiv zusammen, die wir leicht berechnen können. Zu dem Zwecke stellen wir in einer Tafel zuerst die Komponenten der Drehvektoren in den drei Achsen zusammen, wobei wir nur bedenken müssen, daß, da die Schwungkompone \mathfrak{E}_1 sich als unveränderlich erwies, auch die zugehörige Drehkomponente (in Wirklichkeit die Summe der oben genannten Eigendrehung und der Komponente $\dot{\psi} \cos \vartheta$, welche der Drehvektor $\dot{\psi}$ in der Lotachs nach der Figurenachs wirft) immer den Anfangswert $\omega_1 \cos \vartheta_1$ beibehält.

Drehkomponente in	für beliebiges ϑ	für $\vartheta = \vartheta_1$
Figurenachs	$\omega_1 \cos \vartheta_1$	$\omega_1 \cos \vartheta_1$
Querachs	$\psi \sin \vartheta$	$\omega_1 \sin \vartheta_1$
Knotenlinie	$\dot{\vartheta}$	0

Daraus folgen die zugehörigen Teile der Wucht durch Quadrieren und Multiplizieren mit dem zugehörigen halben Trägheitsmoment (vgl. Einl. S. 16). Und mithin lautet der Energiesatz als Ausdruck der Tatsache, daß die (doppelte) Summe von Wucht und Macht in einer beliebigen Lage gleich ihrer (doppelten) Summe in der Höchstlage sein muß:

$$B \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + B \dot{\vartheta}^2 + 2 s G (1 - \cos \vartheta) = B \omega_1^2 \sin^2 \vartheta_1 + 2 s G (1 - \cos \vartheta_1).$$

Diese Gleichung formen wir in mehrfacher Weise um. Erstens führen wir für die Winkelfunktionen jetzt wieder ihre Annäherungen ein, und zweitens ersetzen wir $B \dot{\psi}$ durch die rechte Seite von (41):

$$B^2 \dot{\vartheta}^2 = \frac{\omega_1^2}{4 \vartheta^2} [4 B^2 - 2 A^2 k] \vartheta_1^2 \vartheta^2 - A^2 (\vartheta^4 + k^2 \vartheta_1^4)] + s G B (\vartheta_1^2 - \vartheta^2)$$

oder nach kurzer Zwischenrechnung, bei der wir auf die Bedeutung der Abkürzung k (40) achten,

$$B^2 \dot{\vartheta}^2 = \frac{\omega_1^2 A^2}{4 \vartheta^2} (\vartheta_1^2 - \vartheta^2) (\vartheta^2 - k^2 \vartheta_1^2) + s G B (\vartheta_1^2 - \vartheta^2)$$

oder endlich mit einer zweiten Abkürzung

$$\frac{\omega_1 A}{2 \sqrt{s G B}} = \varepsilon, \dots \dots \dots (42)$$

welche wegen des Faktors ω_1 sicher ein außerordentlich kleiner Bruch sein wird,

$$B^2 \dot{\vartheta}^2 = \frac{s G B}{\vartheta^2} (\vartheta_1^2 - \vartheta^2) [\vartheta^2 (1 + \varepsilon^2) - \varepsilon^2 k^2 \vartheta_1^2].$$

Wir machen uns keines wesentlichen Fehlers schuldig, wenn wir hierin noch $1 + \varepsilon^2$ kurzerhand durch 1 ersetzen, und haben mithin als zweite Hauptgleichung

$$B \dot{\vartheta} = \pm \frac{\sqrt{s G B}}{\vartheta} \sqrt{(\vartheta_1^2 - \vartheta^2) (\vartheta^2 - \varepsilon^2 k^2 \vartheta_1^2)} \dots \dots (43)$$

(Über die Vorzeichenfestsetzung gilt ähnliches wie in Abschn. 4, S. 24.) Wie die Realitätsverhältnisse der rechten Seite zeigen, kann der Ausschlag ϑ nur zwischen dem Höchstwert ϑ_1 und einem Mindestwert $\varepsilon k \vartheta_1$, den wir früher (Abschn. 4) mit ϑ_2 bezeichnet hatten, hin- und herschwanken.

Wir teilen jetzt die beiden Hauptgleichungen (41) und (43) durcheinander und erhalten

$$\frac{d\psi}{d\vartheta} = \pm \frac{\varepsilon}{\vartheta} \frac{\vartheta^2 + k \vartheta_1^2}{\sqrt{(\vartheta_1^2 - \vartheta^2) (\vartheta^2 - \varepsilon^2 k^2 \vartheta_1^2)}}$$

Wenn wir die rechte Seite (mit positivem Zeichen) über ϑ integrieren, und zwar von dem Kleinstwert $\varepsilon k \vartheta_1$ bis zum Höchstwert ϑ_1 , so erhalten

wir die Zahl $\frac{\pi}{2} (1 + \epsilon)$. Auf der linken Seite erscheint dabei der vierte Teil der ganzen Azimutänderung Ψ , welche die Knotenlinie bei einer Vollschwingung erleidet; also ist

$$\Psi = 2 \pi (1 + \epsilon).$$

Würde sich die Schwingungsbahn nicht drehen, so müßte dieser Wert genau gleich 2π sein. Folglich gibt der Überschuß

$$\Delta \Psi = 2 \pi \epsilon$$

die Drehung der Schwingungsebene an; sie erfolgt, da ϵ sich dem Vorzeichen nach wie ω_1 verhält, also negativ ist, im Drehsinne NWSO der irdischen Azimutaldrehung. Ihre Winkelgeschwindigkeit

$$\omega'' = \frac{\Delta \Psi}{t_0},$$

wo t_0 die Schwingungsdauer ist, muß also von dem Werte der Azimutaldrehung abgezogen werden, wenn man nach der scheinbaren Drehung des Pendels im irdischen Bezugssystem fragt. Wegen der bekanntermaßen durch

$$t_0 = 2 \pi \sqrt{\frac{B}{sG}}$$

dargestellten Schwingungsdauer des materiellen Pendels wird gemäß (42)

$$\omega'' = \frac{A \omega_1}{2B}, \dots \dots \dots (44)$$

womit das letzte Korrektionsglied in der Formel (34) gefunden ist.

Die Versuche mit einem Gaußschen Pendel von 1,2 m Länge hat in mustergültiger Weise, unter genauester Abschätzung aller unvermeidlichen Fehler, im Jahre 1879 H. KAMERLINGH-ONNES¹⁾ im luftleeren Raum durchgeführt, wobei sich ihm Gelegenheit bot, nicht nur die Foucaultschen Schwingungen, sondern auch die Bravaischen sowie die ganze Reihe der dazwischen liegenden sphärischen Pendelbewegungen sehr genau zu unter-

¹⁾ H. KAMERLINGH-ONNES, Nieuwe bewijzen usw. Diss. Groningen 1879, sowie Over de betrekkelijke beweging, Nieuw Arch. voor Wiskunde 5, 58 und 135. 1879; sowie ebenda 6, 173. 1880; vgl. auch J. G. HAGEN, a. a. O., I. Anhang von J. STEIN (Les preuves de M. KAMERLINGH-ONNES).

suchen, und 'zwar' sowohl hinsichtlich ihrer scheinbaren Drehung gegen die Erde, wie auch in bezug auf ihre kinematische Gestalt im einzelnen. Insbesondere wurden auch noch die Lissajousschen Schwingungen beobachtet, die das Pendel ausführt, sobald die Trägheitsmomente B um die wagerechten Achsen unter sich verschieden gewählt werden. Der Mittelwert von ω_1 , den KAMERLINGH-ONNES fand, deckt sich mit dem astronomischen Wert von ω_1 bis auf die dritte Stelle.

15. Das Kreiselpendel. Das vorhin nur zur Veranschaulichung erwähnte Kreiselpendel möchte, wie wir zeigen wollen, hervorragend geeignet zum Nachweise der Azimutaldrehung sein. An Stelle jenes kleinen Zusatzschwunges $A\omega_1$ soll ihm jetzt durch raschen Antrieb des Schwungrings um die Pendelachse ein ungeheuer großer Eigenschwung mitgegeben werden, groß genug, um alle anderen, in der Pendelbewegung steckenden Schwungskomponenten vollkommen zu übertönen. Ein solcher Schwungring heißt ein *schneller* Kreisel; seine Eigendrehachse (in unserem Fall die im Ruhezustand frei herabhängende Pendelachse) kann ohne merklichen Fehler als Träger des Schwungvektors \mathcal{S} angesehen werden, und dessen Betrag berechnet sich aus dem axialen Trägheitsmoment A und der Winkelgeschwindigkeit ν der Eigendrehung sehr genau zu

$$S = A \nu .$$

(Wir verwechseln also grundsätzlich den Eigenschwung mit dem Gesamtschwung.) Nun läßt sich leicht zeigen, daß innerhalb der Genauigkeit, mit der wir rechnen, die Pendelachse, wenn sie, aus der Ruhelage ausgelenkt, sich selbst überlassen wird, nicht einfach wie ein gewöhnliches Pendel anfängt zu schwingen, sondern einen

Kreisegel um die Lotlinie mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\mu = \frac{sG}{S} \dots \dots \dots (45)$$

beschreibt, unter G das Pendelgewicht, unter s den Abstand zwischen dem Aufhängepunkt und dem auf der Pendelachse liegenden Schwerpunkt verstanden. Wenn die Eigendrehung ν von oben gesehen im Uhrzeigersinne erfolgt, so läuft die sog. Präzessionsdrehung μ im Gegenzeigersinne und umgekehrt.

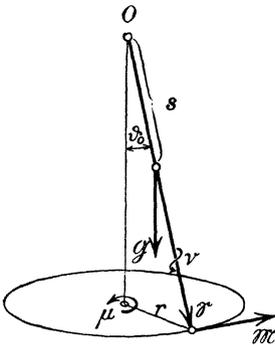


Abb. 20. Präzession des schnellen Kreisels.

In der Tat, ist ϑ_0 der Auslenkungswinkel der Pendelachse aus der Lotlinie (Abb. 20), so erzeugt das Pendelgewicht in bezug auf den Aufhängepunkt O ein Moment $sG \sin \vartheta_0$, dessen Vektor \mathcal{M} wagrecht ist und auf derjenigen lotrechten Ebene, welche den augenblicklichen Schwungvektor und also auch die Pendelachse enthält, senkrecht steht. Nach dem Schwungsatz (Einl., S. 13) bewegt sich also der Endpunkt von \mathcal{S} immer wagrecht weiter, und zwar senkrecht zu der soeben genannten Ebene, die sich ihrerseits mit \mathcal{S}

weiter dreht, und zudem mit konstanter Geschwindigkeit \mathcal{M} . Der Endpunkt von \mathcal{S} beschreibt also notwendig einen Kreis. Dessen Halbmesser wird $r = S \sin \vartheta_0$, und mithin hängen die Umfangsgeschwindigkeit \mathcal{M} und die Winkelgeschwindigkeit μ zusammen durch die Beziehung $|\mathcal{M}| = r \mu$, welche mit (45) identisch ist.

Man kann mit modernen Hilfsmitteln, indem man den Kreisel als Drehstrommotor antreibt, eine Eigendrehung $\nu = 1000 \pi \text{ sek}^{-1}$ (entsprechend 500 Umläufen in der Sekunde) bei einem Gewicht von 5 kg und einem Trägheitsmoment von $0,076 \text{ kg cm sek}^2$ erzeugen¹⁾. Bei

¹⁾ Vgl. R. GRAMMEL, Der Kreisel. Braunschweig 1920, S. 257, 271 u. 282.

sorgfältiger Lagerung darf man mit s bis zu etwa 2,5 mm hinabsteigen, und so läßt sich μ auf etwa $0,0052 \text{ sek}^{-1}$ verkleinern. Dies gibt eine Präzession von 20 Minuten Umdangsdauer. Läuft der Kreisel das eine Mal im einen Sinn, das andere Mal mit genau gleicher Tourenzahl im andern Sinn, so müssen sich die beiden Präzessionsdauern, beobachtet vom irdischen System aus, in unseren Breiten um etwa 26 Sekunden unterscheiden.

Allgemein ist der Unterschied in den Präzessionsdauern

$$\Delta T = 2 \cdot \frac{2\pi}{\mu} \cdot \frac{\omega_1}{\mu} = \frac{4\pi S_1^2}{s^2 G^2} \omega \sin \varphi;$$

er nimmt also quadratisch mit dem Schwung S zu.

Der bis jetzt nicht ausgeführte Versuch verspräche, die Bravais'schen Ergebnisse wesentlich zu verbessern.

B. Nachweis der Gesamtdrehung.

16. Das Gyroskop. Der Gedanke, den Kreisel zum Nachweise der Erddrehung zu verwenden — freilich auf ganz andere Weise, als soeben besprochen —, rührt von PERSON¹⁾ her und ist von FOUCAULT²⁾ ein starkes Jahr nach seinem berühmten Pendelversuch verwirklicht worden. Stünde ein Körper zur Verfügung, der vollkommen reibungsfrei und astatisch allseitig drehbar in einem Kardangehänge säße (also so, daß sein Schwerpunkt geometrisch genau mit dem Gehängemittelpunkt zusammenfiel), so würde dieser, ursprünglich gegen die Erde in Ruhe gebracht, in einem Inertialsystem eine ziemlich verwickelte, von L. POINSOT genau geschilderte Bewegung³⁾ vollziehen, die jedoch allenthalben nur von

¹⁾ C.-C. PERSON, Comptes rendus **35**, 417 u. 549. 1852.

²⁾ L. FOUCAULT, a. a. O. S. 401—420 und 576.

³⁾ Siehe Fußnote 1 auf S. 14.

der Größenordnung ω bliebe. Besitzt der Körper eine Symmetrieachse, die dann zugleich eine Hauptträgheitsachse ist, und in bezug auf welche er das Trägheitsmoment A haben mag, so erteile man ihm um diese Achse — seine *Figurenachse* — eine Eigendrehung ν , die sehr groß

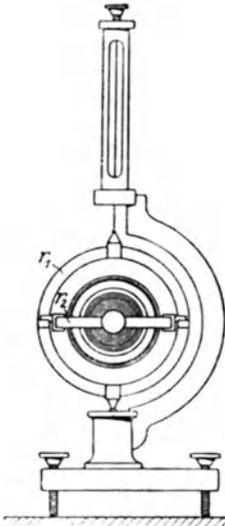


Abb. 21. Foucaultsches Gyroskop.

gegen ω ist. So ist ein schneller Kreisel geschaffen, dessen Eigenschwingung $A\nu$ den ursprünglichen, von der Erdrotation ω herstammenden Schwung derart übertönt, daß von nun an der Schwungvektor \mathfrak{S} und die Figurenachse als zusammenfallend angesehen werden dürfen. Weil voraussetzungsgemäß ein Moment \mathfrak{M} auf den Kreisel weder durch die Reibung noch durch die Schwere soll übertragen werden können, so behält der Vektor \mathfrak{S} und mit ihm auch die Figurenachse im Inertialsystem ihre Richtung dauernd bei. Wenn sie also nicht zufällig parallel zur Erdachse steht, so muß sich die Drehung ω der Erde in einer scheinbaren Drehung $-\omega$ der Figurenachse gegen die Erde bekunden.

FOUCAULT hat diesen Nachweis mit Hilfe eines Kreisels versucht, den er *Gyroskop* nannte (von $\gamma\upsilon\omicron\sigma\varsigma$ = Kreis), und dessen Kardangehänge an einem möglichst torsionsfreien Faden hing (Abb. 21). Ein befriedigendes Ergebnis wollte sich freilich nicht zeigen. Denn weder gelang es, die Reibung völlig auszuschalten, noch war es möglich, den Schwerpunkt so genau in den Gehängemittelpunkt zu bringen, daß nicht eine mit jeder Schwerpunktsexzen-

trizität ε (in ähnlicher Weise wie beim Kreiselpendel) notwendig verbundene Präzessionsdrehung sich störend bemerkbar machte.

17. Das Kreiselinklinatorium. Nachdem **FOUCAULT** die Ursachen für das Versagen seines Gyroskops erkannt hatte, schlug er einen neuen Weg ein. Anstatt die Erddrehung *unmittelbar kinematisch* zu zeigen, suchte er sie noch im gleichen Jahre wenigstens *mittelbar dynamisch* durch ihre Einwirkung auf einen Kreisel zu fassen, dessen Figurenachse an der Erddrehung teilzunehmen gezwungen war. Wenn **FOUCAULT** den äußeren Kardanring r_1 seines Gyroskopes am Gestell festklemmte, dem inneren Ring r_2 aber seine Drehfreiheit um seine von Osten nach Westen gestellte Achse beließ, so konnte sich die Figurenachse (\mathfrak{S} in Abb. 22) in der Meridianebene beliebig hin und her drehen. Die Meridianebene ihrerseits muß die Erdrotation ω mitmachen; ihre Drehung kann man durch den Vektor \mathfrak{v} darstellen, der vom Kardanmittelpunkt O nach dem Himmelspol zeigt und die Länge ω besitzt.

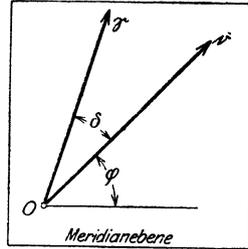


Abb. 22. Zur Theorie des Kreiselinklinatoriums.

FOUCAULT erkannte nun, daß auf Grund des Schwunggesetzes in einem solchen Kreisel, wenn man ihn zu einer erzwungenen Drehung \mathfrak{v} veranlaßt, durch die Trägheit eine Kraft geweckt wird — man nennt sie seine Deviationskraft oder besser sein *Kreiselmoment* —, welche den Schwungvektor \mathfrak{S} (und damit auch die Figurenachse) mit dem Vektor der Zwangsdrehung \mathfrak{v} der Richtung nach zur Deckung zu bringen sucht. Er nannte dieses Bestreben die *Regel vom gleichstimmigen Parallelismus der Drehachsen* (nämlich der Eigendrehachse \mathfrak{S} und der Zwangsdrehachse \mathfrak{v}).

Gesetzt nämlich, der Schwungvektor (die Figurenaxe) \mathfrak{S} bilde mit ν den Winkel δ , so wird durch die Drehung der Meridianebene dem Endpunkte von \mathfrak{S} eine Geschwindigkeit ν um die Achse ν erteilt, deren Vektor die Länge $S \sin \delta \cdot \omega$ besitzt — insofern doch $S \sin \delta$ der Abstand der Drehachse vom Endpunkt des Vektors \mathfrak{S} ist — und auf der Meridianebene so senkrecht steht (im Falle der Abb. 22 auf den Beschauer zu), daß sein Pfeil mit dem Drehsinn, der ν auf kürzestem Wege in die Richtung \mathfrak{S} bringen würde, eine Rechtsschraube bildet. Nach dem Schwungssatz kann mithin die Drehung ν , welcher die Figurenaxe zwangsweise unterworfen ist, nur durch ein Moment $\mathfrak{M} \equiv \nu$ unterhalten werden. Der Betrag dieses Momentes ist wegen $S = A \nu$

$$M = A \nu \omega \sin \delta; \quad \dots \dots \dots (46)$$

sein Drehsinn sucht den Winkel δ zu vergrößern. Dieses Moment ist von außen her — etwa durch eine Festklemmvorrichtung — dem Kreisel aufzuzwingen, wenn seine Figurenaxe zusammen mit der Meridianebene im Sinne ν umläuft, ohne daß sich der Winkel δ ändern soll. Nach dem Wechselwirkungsgesetz äußert der Kreisel ein genau gleiches Gegenmoment, eben das sog. Kreiselmoment $\mathfrak{R} = -\mathfrak{M}$.

Es wird gut sein zu bemerken, daß die Momente \mathfrak{M} und \mathfrak{R} sich so zueinander verhalten, wie die Zentripetalkraft \mathfrak{Z} und die Zentrifugalkraft \mathfrak{F} bei einem an einem Faden im Kreise geschwungenen Stein. Läßt man mit der Fadenspannung \mathfrak{Z} ein wenig nach, so entfernt sich der Stein nach außen gerade so, wie wenn er gar nicht im Kreise geschwungen, sondern nur durch eine wirkliche Kraft \mathfrak{F} auswärts gezogen würde. In gleicher Weise wird auch die Figurenaxe, wenn man das Moment \mathfrak{M} schwinden läßt, sich so gegen den Vektor ν hinwenden, als ob sie durch ein wirkliches Moment \mathfrak{R} dorthingedreht würde, und erst im Vektor ν (nach dem Abklingen etwaiger Schwingungen) zur Ruhe kommen, da mit $\delta = 0$ auch \mathfrak{M} und somit \mathfrak{R} verschwindet.

FOUCAULT verglich sein Instrument mit einem magnetischen *Inklinatorium*, weil die Figurenaxe sich in die Richtung der Erdachse hätte einstellen und so die geographische „Inklination“ φ (vgl. Abb. 22) hätte anzeigen müssen, wenn nicht eben wieder die Reibung sowohl wie auch die unvermeidlichen Mängel der Astasierung störende Momente hervorgerufen hätten, die gegen die den Parallelismus der Drehachsen erzwingende Kraft [nämlich gegen

das kleine Kreismoment (46)] keineswegs zu vernachlässigen waren. Die Anzeige blieb daher recht ungenau.

18. Das Barygyroskop. Erst Ph. GILBERT¹⁾ gelang es im Jahre 1882 durch einen einfachen Kunstgriff, die Hauptschwierigkeit, nämlich die Mängel der Astasierung zu überwinden. Er belastete (Abb. 23) die Figurenachse mit einem Übergewichtchen (g), dessen Moment groß gegen die mögliche Ungenauigkeit der Schwerpunktslage ist, ohne deswegen doch das Kreismoment ganz wir-

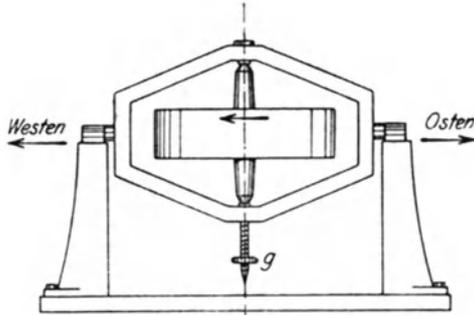


Abb. 23. Gilbertsches Barygyroskop.

kungslos werden zu lassen. Versieht man den Schwungring mit einem aufwärts gerichteten Schwung \mathcal{S} , so stellt sich die ursprünglich lotrechte Figurenachse (\mathcal{S} in Abb. 24, S. 64) nach dem Abklingen etwaiger Schwingungen schließlich in eine neue, *schiefe* Gleichgewichtslage ein; und zwar ist dann die Figurenachse mit ihrem oberen Ende ein wenig nach Norden geneigt. Eine noch wesentlich größere Neigung nach Süden zeigt sich, wenn man den Schwungring umkehrt, den Kreis also ebenso rasch im anderen Sinne antreibt (wie in Abb. 23).

¹⁾ PH. GILBERT, Journ. de Phys. Paris 2, 106. 1883.

Diese Neigungen konnte GILBERT, der auch ein ähnlich wirkendes Instrument mit zwei Kreiseln baute, einwandfrei feststellen. Der Apparat hat den Namen *Barygyroskop* erhalten.

In der Gleichgewichtslage muß das Moment der Schwere $s G \cos(\delta + \varphi)$ (vgl. Abb. 24) gleich dem Kreismoment (46) sein

$$s G \cos(\delta + \varphi) = A \nu \omega \sin \delta.$$

Führt man hier durch

$$\vartheta = 90^\circ - (\delta + \varphi)$$

die Neigung der Figurenachse gegen die Lotlinie ein, so hat man

$$s G \sin \vartheta = A \nu \omega \cos(\vartheta + \varphi),$$

woraus folgt:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{A \nu \omega \cos \varphi}{A \nu \omega \sin \varphi + s G}. \quad (47)$$

und ebenso für den Winkel ϑ' , um den sich das untere Ende der Figurenachse gegen Norden hebt, wenn der Kiesel umgekehrt angetrieben worden ist:

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{A \nu \omega \cos \varphi}{A \nu \omega \sin \varphi - s G}. \quad (48)$$

Der Ausschlag ϑ' ist, wie man sieht, unter gleichen Verhältnissen wesentlich größer als der Ausschlag ϑ , das Instrument im zweiten Falle empfindlicher als im ersten.

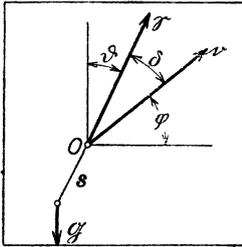


Abb. 24. Zur Theorie des Barygyroskops.

19. Wägung des Kreismoments. Hier liegt übrigens der Hinweis nahe, daß das Kreismoment ganz leicht auch mit der *Wage* gemessen werden kann. Wenn die Figurenachse, genauer gesagt der Vektor \mathfrak{S} wagerecht von Süden nach Norden weist, so sucht das Kreismoment [es hat nach (46) den Betrag $S \omega \sin \varphi$] die Nordspitze der Figurenachse zu heben, die Südspitze zu senken. Verwendet man einen Kiesel der in Abschn. 15 erwähnten Bauart, legt die beiden Lager der wagerechten Figurenachse auf zwei an den Wagschalen haftende Schneiden und variiert die Lagerdrücke des noch nicht laufenden

Kreisels aus, so müssen, sobald der Kreisel seine volle Tourenzahl hat, die Lagerdrücke auf beiden Wagschalen einen Unterschied zeigen, der sich bei 10 cm Schneidenabstand zu etwa 2,7 g berechnet und schon mit einer Wage von der Empfindlichkeit 1:10 000 gut sichtbar gemacht werden kann.

C. Nachweis der Vertikaldrehung.

20. Das Kreiseldeklinatorium. Wenn **FOUCAULT** den äußeren Ring r_1 des Kardangehänges seines Gyroskops (Abb. 21, S. 60) wieder freigab, dagegen den inneren r_2 gegen den äußeren festklemmte, so konnte sich die Figurenachse nur noch in der Horizontalebene bewegen, ähnlich wie die Nadel eines Magnetkompasses. Sie war jetzt zwar an die Azimutaldrehung ω_1 nicht mehr gebunden, aber gezwungen, zusammen mit der Horizontalebene deren Vertikaldrehung ω_2 mitzumachen. Man kann diese Drehung durch einen nordwärts weisenden Vektor \mathfrak{d}_2 darstellen, und die Regel vom Bestreben zum gleichstimmigen Parallelismus (S. 61) ergibt ohne weiteres, daß das positive Ende des Schwungvektors und mit ihm die Figurenachse sich nach Norden einzustellen suchen, und zwar geographisch genauer als die Nadel eines magnetischen Deklinatoriums. **FOUCAULT** ist sich vollkommen bewußt gewesen, daß er hiermit das Prinzip des Kreiselskompasses entdeckt hatte, wenngleich auch dieser Versuch stark durch die Torsionssteifigkeit des Aufhängefadens beeinträchtigt wurde.

Die quantitative Durchführung gelang erst 52 Jahre später **A. FÖPPL**¹⁾, der den Kreisel trifilar aufhängte,

¹⁾ **A. FÖPPL**, Münchener Berichte **34**, 5. 1904, sowie Phys. Zeitschr. **5**, 416. 1904.

elektrisch bis auf etwa 2400 Umläufe in der Minute antrieb und die auftretenden Azimutalschwingungen gut abdämpfte. FÖPPL fand so eine Übereinstimmung der Größe ω mit ihrem astronomischen Werte bis auf 2⁰/₁₀.

Als wesentlicher Fortschritt ist schließlich noch der Vorschlag von Lord KELVIN¹⁾ zu erwähnen, den Kreisel auf Quecksilber schwimmen zu lassen. Von hier aus entwickelte sich die Foucaultsche Idee zum modernen Kreiselkompaß²⁾, der in der Ausführung von ANSCHÜTZ & Co. wohl seine beste Form erhalten hat und hier lediglich insofern zu nennen ist, als er zufolge seiner hohen technischen Durchbildung das *zurzeit vollkommenste Kreiselinstrument* vorstellt, welches *zum quantitativ genauen Nachweise der Erddrehung* verwendet werden kann. Nach Versuchen, welche M. SCHULER gegenwärtig im Laboratorium von Anschütz & Co. ausführt, gibt der Kreiselkompaß, erschütterungsfrei aufgestellt, die Nordrichtung, d. h. die Horizontalprojektion der Erdachse bis auf 20'' sicher an³⁾; mit welcher Genauigkeit sich die Größe von ω durch den Kreiselkompaß ermitteln läßt, ist noch nicht abgeschätzt worden, doch dürfte sie sämtliche anderen nichtastronomischen Bestimmungen weit übertreffen.

Schlußbemerkungen.

21. Die Revolution. Der erkenntnistheoretische Wert der nichtastronomischen Beweise für die Rotation hat sich im Laufe der Zeit stark verschoben. Er bestand,

¹⁾ W. THOMSON, Nature **30**, 524. 1884.

²⁾ Näheres vgl. R. GRAMMEL, Der Kreisel. Braunschweig 1920, § 19.

³⁾ Nach brieflicher Mitteilung von Herrn Dr. SCHULER.

historisch betrachtet, ursprünglich zweifellos darin, daß die heliozentrische Deutung der astronomischen Beobachtungen in sinnfälliger Weise gestützt wurde. Einer solchen Stütze bedarf es längst nicht mehr. Trotzdem haben die mechanischen Versuche nichts an Wert verloren, wenigstens soweit sie quantitativ Ansprüche auf Präzisionsmessungen machen können. Einerseits nämlich zählen sie dann zu den allerbesten Bestätigungen der kinetischen Grundgesetze der Mechanik überhaupt. Andererseits zeigen sie — was sich mit der Tatsache der Erddrehung begrifflich keineswegs vollkommen deckt, — daß ein Bezugssystem, gegen welches die uns bekannte Welt der Fixsterne *im Mittel* ruht, die Eigenschaften eines Inertialsystems praktisch vollkommen besitzt.

Diese Aussage ist jedoch noch nicht genau genug. Darauf deuten die jährlichen Fixsternparallaxen hin. In der Tat war bei den bisher genannten Versuchen immer nur von der *Rotation* der Erde die Rede, nicht aber von ihrer *Revolution* um die Sonne, geschweige denn von *Präzession* und *Nutation* der Erdachse. Und so tritt ergänzend die Frage hinzu, ob es möglich oder wenigstens denkbar ist, durch den Versuch nachzuweisen, daß das irdische Bezugssystem auch infolge der Revolution sowie der Präzession und Nutation von einem Inertialsystem abweicht. Man möchte nicht daran zweifeln, daß diese Frage zu bejahen ist; aber die Antwort führt hinsichtlich der *Revolution* auf ein Ergebnis, das vom Standpunkt der vorrelativistischen Mechanik überrascht.

Es wäre nämlich ganz aussichtslos, die Revolution durch den Nachweis der bei ihr auftretenden Fliehkräfte sichtbar zu machen. Denn man könnte die Fliehkräfte nur relativ zu einem irdischen Beobachtungsort messen; dieser ist aber der genau gleichen Fliehkraft selbst unter-

worfen. Nach dem Relativitätsprinzip müssen sich alle irdischen Vorgänge gleich abspielen, ob nun die Erde ihre Revolution um die Sonne oder die Sonne eine Revolution um die Erde vollzieht¹⁾. Eine absolute Entscheidung zwischen beiden Möglichkeiten ist ausgeschlossen.

Und doch zeigt jedes irdische Bezugssystem, wenn man alle *irdischen* Kräfte sowie die Rotation berücksichtigt, einen deutlichen Unterschied von einem Inertialsystem, der *am einfachsten* durch die Revolution der Erde erklärt wird. Dieser Unterschied ist das Gravitationsfeld der Sonne im Bereiche der Erde. Jeder Versuch, der dieses Gravitationsfeld nachweist, kann vernünftigerweise angesehen werden als Beweis für die Revolution der Erde. Vom relativistischen Standpunkt aus kann mehr als die Existenz dieses Gravitationsfeldes überhaupt nicht bewiesen werden. Die negativen optischen Versuche, welche die Erdbewegung durch den „ruhenden Äther“ vergeblich aufzufinden strebten, sind nach unserer jetzigen Anschauung vollwertig positiv ersetzt durch die einzige Beobachtung, daß die Lichtstrahlen durch das Gravitationsfeld der Sonne abgelenkt werden. Ein irdischer, mechanischer Versuch zum Nachweis des Gravitationsfeldes ist noch nicht erdacht worden. Er ist aber grundsätzlich möglich, wie aus der Erscheinung der Ebbe und Flut hervorgeht. Deren Sonnenanteil beruht ja einfach auf der Inhomogenität des Gravitationsfeldes der Sonne im Gesamtbereich der Erde. Es genügt mithin, künstlich die Bedingungen für ebbe- und flut-ähnliche Erscheinungen zu schaffen. Möglichkeiten gibt es hier viele (außer hydraulischen wird man an elasto-

¹⁾ Dies ist sehr klar auseinandergesetzt in der kürzlich erschienenen Schrift von G. MIE, Die Einsteinsche Gravitationstheorie. Leipzig 1921 S. 47ff.

statische denken: ein Stab von endlicher Länge hat je nach seiner Lage zum Gravitationsfeldvektor verschiedene innere Spannungen), aber die Aussichten dafür, ein einwandfreies Ergebnis zu erzielen, sind infolge der beschränkten Abmessungen, die uns im Laboratorium zur Verfügung stehen, hoffnungslos gering.

22. Die Präzession und die Nutationen. Noch schlechter steht es um die Möglichkeit, auf mechanischem Wege die *Präzession* der Erdachse, genauer gesagt, die durch sie bedingte Verzerrung des Inertialsystems sichtbar zu machen — ganz zu schweigen von den *Nutationen* als kleinen Abweichungen zweiter Ordnung. Die Präzession besteht darin, daß die Erdachse, beurteilt von einem im Erdmittelpunkte befestigten, die Rotation nicht mitmachenden System aus, einen Kreiskegel mit einem Öffnungswinkel von 47° in 26 000 Jahren beschreibt. Der Vektor ϵ der Winkelgeschwindigkeit dieser Bewegung, vom Erdmittelpunkt aus aufgetragen (Abb. 25, S. 70), steht auf der Ekliptikebene senkrecht, weist nach deren Südseite und hat eine Länge ϵ gleich dem 26 000 · 366ten Teil des Rotationsvektors σ . Setzt man beide Vektoren nach der Parallelogrammregel zusammen, so entsteht ein resultierender Drehvektor u , der ziemlich genau die Länge von σ hat, aber gegen σ um einen kleinen Winkel δ vom Lot der Ekliptikebene *weg* geneigt ist.

Der Vektor u bleibt, abgesehen von der Revolution, raumfest und beschreibt folglich in der Erde um die geographische Achse einen engen Kreiskegel vom Öffnungswinkel 2δ in einem Tag. Er tritt überdies bei allen Versuchen zum Nachweise der Rotation an die Stelle von σ , und es handelt sich also lediglich darum, die quantitative Genauigkeit dieser Versuche so weit zu steigern, daß sie Kunde geben von jener täglichen relativen Schwankung

des „effektiven“ Drehvektors u . Diese hat zur Folge, daß die „effektive“ irdische Nordrichtung (d. h. die Horizontalprojektion des Vektors u) im Laufe eines Tages um einen kleinen Winkel ψ nach Osten und Westen ausschwingt, welcher für unsere Breiten zahlenmäßig rund $\frac{1}{75}$ Bogensekunde, für höhere Breiten mehr beträgt. (Übrigens dürfen diese Schwankungen nicht ver-

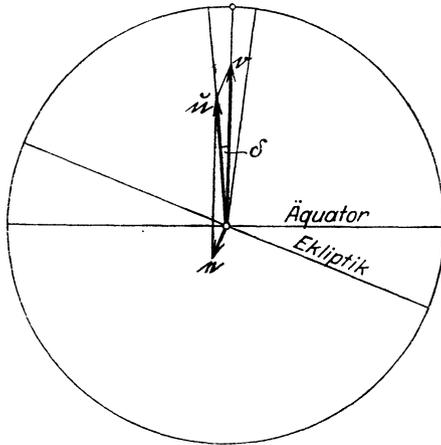


Abb. 25. Tägliche Polschwankung infolge der Präzession der Erdatse.

wechselt werden mit den etwa zwölfmal stärkeren EULER-CHANDLERSchen Polschwankungen von 12- und 14-monatiger Periode.)

Man findet nach Abb. 25 den Winkel δ zu

$$\delta \simeq \sin \delta = \frac{e}{\omega} \sin 23,5^\circ.$$

Ferner gilt in dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck, dessen eine Kathete vom Beobachtungsort bis zum nächstgelegenen Pole sich erstreckt, und dessen andere Kathete, im Pole anschließend, die Bogenlänge δ besitzt,

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos \varphi}$$

oder für nicht zu hohe geographische Breiten, also kleine Winkel ψ

$$\psi \simeq \frac{\delta}{\cos \varphi} \simeq \frac{\varepsilon \sin 23,5^\circ}{\omega \cos \varphi}$$

oder in Zahlen

$$\psi = \frac{0,0086''}{\cos \varphi} \dots \dots \dots (49)$$

Ein Kreiselkompaß mit mehr als tausendfach vergrößerter Empfindlichkeit wäre wohl imstande, die täglichen Schwankungen der „effektiven“ Nordrichtung infolge der Präzession gerade noch anzuzeigen. Es besteht aber kaum eine Möglichkeit, die jetzt bereits bis an ihre äußerste Grenze gesteigerte Empfindlichkeit des Apparates zu vertausendfachen. Und selbst wenn dies geschehen wäre, so wissen wir nicht, ob nicht vielleicht die täglichen Bewegungen des Erdbodens doch wieder den zu messenden Effekt weit übertönen würden. Man könnte auch daran denken, die Beobachtungen in höheren geographischen Breiten vorzunehmen, da die Amplitude ψ der Schwankungen bei Annäherung an einen der beiden Pole stark anwächst. Aber leider nimmt die nordweisende Richtkraft des Kreiselkompasses und damit seine Empfindlichkeit beim Ansteigen in höhere geographische Breiten im selben Maße ab, wie der Winkel ψ zunimmt. Und damit versinkt jede Hoffnung, die Präzession der Erdachse auf mechanischem Wege sichtbar zu machen.

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

Das Problem der Entwicklung unseres Planetensystems.

Eine kritische Studie. Von Dr. **Friedrich Nölke**. Zweite, völlig umgearbeitete Auflage. Mit einem Geleitwort von Dr. **H. Jung**, o. Professor der Mathematik an der Universität Kiel. Mit 16 Textfiguren. 1919. Preis M. 28.—

Mondphasen, Osterrechnung und Ewiger Kalender. Von

Prof. Dr. **W. Jacobsthal**. 1917. Preis M. 2.—

Tafeln und Formeln aus Astronomie und Geodäsie

für die Hand des Forschungsreisenden, Geographen, Astronomen und Geodäten. Von Dr. **Carl Wirtz**, Universitätsprofessor in Straßburg i. E. 1918. Gebunden Preis M. 18.—

Die Relativitätstheorie Einsteins und ihre physikalischen Grundlagen. Elementar dargestellt von **Max Born**.

Zweite, umgearbeitete Auflage. Mit 133 Textabbildungen. („Naturwissenschaftliche Monographien und Lehrbücher“ herausgegeben von der Schriftleitung der „Naturwissenschaften“, Band III). 1921. Preis M. 39.—; gebunden M. 52.—
Vorzugspreis für die Bezieher der „Naturwissenschaften“
M. 35.—; gebunden M. 48.—

Geometrie und Erfahrung. Von **Albert Einstein**. Erweiterte

Fassung des Festvortrages, gehalten an der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 27. Januar 1921. Mit 2 Textabbildungen. 1921. Preis M. 6.80

B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Neu herausgegeben und erläutert von

H. Weyl in Zürich. Zweite Auflage. 1921. Preis M. 12.—

Die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie.

Von **Erwin Freundlich**. Mit einem Vorwort von **Albert Einstein**. Vierte, erweiterte und verbesserte Auflage. 1920. Preis M. 10.—

Zu den angegebenen Preisen der angezeigten älteren Bücher treten Verlags-
steuerungszuschläge, über die die Buchhandlungen und der Verlag
gern Auskunft erteilen.

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

Äther und Relativitätstheorie. Rede, gehalten an der Reichs-Universität zu Leiden. Von **Albert Einstein**. 1920. Preis M. 2.80

Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori. Von **Hans Reichenbach**. 1920. Preis M. 14.—

Die Idee der Relativitätstheorie. Von **Dr. H. Thirring**, a. o. Professor der theoretischen Physik an der Universität Wien. Mit 7 Textabbildungen. 1921. Preis M. 24.—

Das Raum-Zeit-Problem bei Kant und Einstein. Von **Dr. Ilse Schneider**. 1921. Preis M. 12.—

Raum—Zeit—Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie. Von **Hermann Weyl**. Vierte, erweiterte Auflage. Mit 15 Textfiguren. 1921. Preis M. 48.—

Die Grundlagen der Relativitätstheorie. Populärwissenschaftlich dargestellt von **Dr. Rudolf Lämmel**, Zürich-Meilen. Mit 32 Textfiguren. 1921. Preis M. 14.—

Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik. Zur Einführung in das Verständnis der Relativitäts- und Gravitationstheorie. Von **Moritz Schlick**. Vierte, neubearbeitete Auflage. Erscheint im Frühjahr 1922

Raum und Zeit im Lichte der speziellen Relativitätstheorie. Versuch eines synthetischen Aufbaus der speziellen Relativitätstheorie. Von **Dr. Clemens von Horvath**, Privatdozent für Physik an der Universität Kasan. Mit 8 Textabbildungen und einem Bildnis. Preis M. 12.—

Zu den angegebenen Preisen der angezeigten älteren Bücher treten Verlags-
teuerungszuschläge, über die die Buchhandlungen und der Verlag
gern Auskunft erteilen.

Der Aufbau der Materie. Drei Aufsätze über moderne Atomistik und Elektronentheorie. Von **Max Born**. Zweite Auflage. Mit 37 Textabbildungen. Unter der Presse

Die radioaktive Strahlung als Gegenstand wahrscheinlichkeitstheoretischer Untersuchungen. Von Professor **L.v. Bortkiewicz**, Berlin. Mit 5 Textfiguren. 1913. Preis M. 4.—

Valenzkräfte und Röntgenspektren. Zwei Aufsätze über das Elektronengebäude des Atoms. Von Dr. **W. Kossel**, o. Professor an der Universität Kiel. Mit 11 Abbildungen. 1921. Preis M. 12.—

Das Wesen des Lichts. Vortrag, gehalten in der Hauptversammlung der Kaiser Wilhelm-Gesellschaft am 28. Oktober 1919. Von Dr. **Max Planck**, Professor der theoretischen Physik an der Universität Berlin. Zweite, unveränderte Auflage. 1920. Preis M. 3.60

Die Atomionen chemischer Elemente und ihre Kanalstrahlenspektren. Von Dr. **J. Stark**, Professor der Physik an der Technischen Hochschule Aachen. Mit 11 Figuren im Text und auf einer Tafel. 1913. Preis M. 1.60

Fluoreszenz und Phosphoreszenz im Lichte der neueren Atomtheorie. Von **Peter Pringsheim**. Mit 32 Textfiguren. 1921. Preis M. 48.—

Hermann v. Helmholtz, Schriften zur Erkenntnistheorie. Herausgegeben und erläutert von **Paul Hertz** in Göttingen und **Moritz Schlick** in Rostock. 1921. Preis M. 45.—; in Ganzleinen gebunden M. 54.—

Allgemeine Erkenntnislehre. Von **Moritz Schlick**, Rostock. („Naturwissenschaftliche Monographien und Lehrbücher“, herausgegeben von der Schriftleitung der „Naturwissenschaften“ Band I). 1918. Preis M. 18.—; gebunden M. 20.40
Vorzugspreis für die Bezieher der „Naturwissenschaften“
M. 14.40; gebunden M. 16.80

Zu den angegebenen Preisen der angezeigten älteren Bücher treten Verlags-
teuerungszuschläge, über die die Buchhandlungen und der Verlag
gern Auskunft erteilen.

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

Die Naturwissenschaften

Wochenschrift für die Fortschritte der Naturwissenschaft,
der Medizin und der Technik

herausgegeben von

Arnold Berliner

Unter besonderer Mitwirkung von **H. Braus** in Würzburg

Jährlich 52 Nummern Preis vierteljährlich M. 40.—

„Die Naturwissenschaften“ berichten über die Fortschritte der reinen und der angewandten Naturwissenschaften, und zwar nur durch zuständige, auf dem jeweiligen Gebiete selber schöpferische Mitarbeiter. Die Verfasser wenden sich durch die Form ihrer Darstellung nicht wie z. B. die Mitarbeiter der Zentralblätter in erster Linie an die eigenen Fachgenossen, sondern vor allem an die auf den Nachbargebieten Tätigen, um ihnen den Überblick über den Zusammenhang ihres eigenen Faches mit den angrenzenden Fächern zu vermitteln. Die dauernd fortschreitende Teilung der wissenschaftlichen Arbeit hat den Begriff des Grenzgebietes völlig verändert. Sie hat das Arbeitsfeld des einzelnen so eingeengt und die Grenzgebiete so vermehrt, daß für jeden die Notwendigkeit vorliegt, ihre Entwicklung zu verfolgen. — Von den Fortschritten der Mathematik bespricht die Zeitschrift die der angewandten, sofern sie, auf die Naturwissenschaften angewandt, Fortschritte in der mathematischen Behandlung der Naturwissenschaften bedeuten. Die Philosophie behandelt sie, soweit sie eine Anwendung naturwissenschaftlicher Entdeckungen oder soweit sie eine Verschärfung oder eine Erweiterung naturwissenschaftlicher Grundbegriffe darstellt.

Prospekte über „die Naturwissenschaften“ und der aus besonderen Anlässen veröffentlichten Hefte stehen auf Wunsch gern zur Verfügung.

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

Äther und Relativitätstheorie. Rede, gehalten an der Reichs-Universität zu Leiden. Von **Albert Einstein**. 1920
Preis M. 2.80

Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori. Von **Hans Reichenbach**. 1920.
Preis M. 14.—

Die Idee der Relativitätstheorie. Von Dr. **H. Thirring**,
a. o. Professor der theoretischen Physik an der Universität
Wien. Mit 7 Textabbildungen. 1921. Preis M. 24.—

Das Raum-Zeit-Problem bei Kant und Einstein. Von
Dr. **Ilse Schneider**. 1921. Preis M. 12.—

Raum—Zeit—Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie. Von **Hermann Weyl**. Vierte, erweiterte Auflage. Mit 15 Textfiguren. 1921. Preis M. 48.—

Die Grundlagen der Relativitätstheorie. Populärwissenschaftlich dargestellt von Dr. **Rudolf Lämmel**, Zürich-Meilen. Mit 32 Textfiguren. 1921. Preis M. 14.—

Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik. Zur Einführung in das Verständnis der Relativitäts- und Gravitationstheorie. Von **Moritz Schlick**. Vierte, neubearbeitete Auflage. Erscheint im Frühjahr 1922

Raum und Zeit im Lichte der speziellen Relativitätstheorie. Versuch eines synthetischen Aufbaus der speziellen Relativitätstheorie. Von Dr. **Clemens von Horvath**, Privatdozent für Physik an der Universität Kasan. Mit 8 Textabbildungen und einem Bildnis. Preis M. 12.—

Zu den angegebenen Preisen der angezeigten älteren Bücher treten Verlags-
teuerungszuschläge, über die die Buchhandlungen und der Verlag
gern Auskunft erteilen.