

Основы теории автоматических систем. Я. З. Цыпкин. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1977, 560 стр.

Книга представляет собой курс лекций по теории автоматических систем. Она состоит из трех частей: основных сведений об автоматическом управлении, теории непрерывных автоматических систем и теории дискретных автоматических систем.

В книге излагаются основные идеи автоматического управления, а также закономерности, свойства, особенности и предельные возможности автоматических систем. Большинство глав сопровождается задачами, решение которых помогает усвоить глубже излагаемый материал. В приложениях приводятся основные сведения по преобразованиям Лапласа и Фурье и обобщенным функциям, которые используются в основном тексте.

Книга предназначена для студентов вузов, обучающихся по специальностям «Автоматика и телемеханика», «Техническая кибернетика», «Прикладная математика». Она может быть также использована инженерами и научными работниками, занимающимися автоматическими системами.

Табл. 16, илл. 470, библи. 79.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Традиционное изложение теории автоматического управления, характерное для учебников и учебных пособий, непомерно большое место отводит вспомогательному материалу по различным разделам математики, а также методам, способам и приемам расчета автоматических систем. Что же касается свойств самих автоматических систем, то им почти не уделяется внимание. Такое построение курса, возможно, удобное для вузов, готовящих инженеров-расчетчиков и конструкторов аппаратуры систем управления, не подходит для вузов, готовящих инженеров-исследователей и научных работников.

Настоящей книгой делается попытка заполнить этот пробел. Цель этой книги состоит в изложении основных идей автоматического управления и основанных на них принципов построения автоматических систем.

Книга состоит из трех частей. Первая часть содержит общие сведения об автоматических системах. Приводятся примеры автоматических систем в технике, живой природе и обществе. Формулируются задачи автоматического управления. Обсуждаются основные статические и динамические свойства автоматических систем. Устанавливается общая функциональная схема автоматических систем. Приводится классификация автоматических систем и формулируются основные задачи теории управления. Знакомство с первой частью позволяет сознательно подходить к формулировке и решению задач теории автоматических систем, изложенных во второй и третьей частях книги.

Вторая часть посвящена непрерывным автоматическим системам, а третья часть — дискретным автоматическим системам. В этих частях рассмотрено поведение автоматических систем как при детерминированных, так и при случайных воздействиях. Наряду с линейными системами достаточно подробно рассматриваются и нелинейные системы.

Для удобства читателя в приложениях приводятся справочные сведения по обычному и дискретному преобразованиям Лапласа и Фурье, а также импульсивным функциям, на которые опираются выводы ряда положений в основном тексте. Книга

снабжена списком работ, в которых читатель может найти дополнительные сведения по теории автоматических систем.

Книга написана на основе курсов лекций, которые автор многие годы читал студентам Московского энергетического института, Московского физико-технического института, инженерам — слушателям факультета усовершенствования Московского института радиотехники, электроники и автоматики, научным сотрудникам Института автоматики и телемеханики, а также ряда НИИ и КБ.

В подготовке первого варианта настоящей книги большая помощь автору была оказана сотрудниками кафедры автоматики и телемеханики МЭИ — В. И. Доценко, Г. В. Фатеевой и Л. П. Чхартишвили. Настоящий, *N*-й вариант не мог бы быть завершен без активного участия И. П. Девятерикова, П. В. Надеждина и А. С. Позняка. В уточнении ряда мест большую роль сыграли многочисленные и настойчивые вопросы А. М. Кербелева. Г. Н. Архипова неоднократно печатала и перепечатывала рукопись книги, проявив при этом невероятную способность преобразовывать отдельные заметки и черновые записи в нормальный текст. Автор выражает сердечную благодарность всем перечисленным лицам.

Автор также признателен зав. кафедрой «Техническая кибернетика» МИРЭА профессору Н. А. Бабакову и зав. кафедрой «Электротехника, электроника и вычислительная техника» МИТХТ им. М. В. Ломоносова профессору А. В. Нетушилу за рецензирование рукописи и полезные замечания, которые были учтены при окончательном редактировании.

Эта книга является итогом двадцатилетнего содружества автора и Главной редакции физико-математической литературы издательства «Наука». Автор глубоко благодарен коллективу Главной редакции за неизменное внимание и огромную помощь при подготовке рукописей книг к изданию.

Москва,
1965—1975 гг.

Я. Цыпкин

Часть первая

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОМАТИЧЕСКОМ УПРАВЛЕНИИ

Глава I

ЗАДАЧИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 1.1. Основные понятия

Нормальный ход различных технологических и производственных процессов может быть обеспечен лишь тогда, когда те или иные величины, которые характеризуют эти процессы, удовлетворяют определенным условиям

Так, например, при холодной прокатке металла толщина прокатываемой полосы должна находиться в заданных пределах. Производство химических продуктов требует постоянства количества и, например, концентрации их компонентов. При термической обработке изделий нужно, чтобы температура печи изменялась по определенному закону с течением времени, и т. п.

Необходимость поддержания постоянства той или иной величины или изменения ее в соответствии с каким-либо законом возникает в самых разнообразных отраслях техники. В энергосистемах должно поддерживаться постоянство напряжения и частоты, активной и реактивной мощности, в атомной энергетике — постоянство мощности энергетического ядерного реактора, в радиосвязи — постоянство усиления, частоты, напряжения, тока, в авиации и в мореплавании — изменение курса самолета либо корабля по заданному закону, в космонавтике необходимо обеспечение движения космического корабля в пространстве по заданной траектории и т. д. Сами по себе объекты, в которых протекают те или иные рабочие процессы, часто не обеспечивают их нормального хода, иначе, сами по себе объекты не могут устранить отклонения режима от заданного, вызываемого различными причинами. Поэтому такие объекты снабжаются *управляющим* или *регулирующим органом*, воздействием на который можно изменить режим их работы, а значит, нужным образом управлять процессом.

Создание условий, обеспечивающих требуемое протекание процесса, т. е. поддержание необходимого режима, называется *управлением*.

Управление может быть ручным или автоматическим. При ручном управлении воздействие на управляющий орган осуществляет человек, наблюдающий за ходом процесса или, точнее говоря, за отклонением процесса от требуемого и воздействующий в зависимости от этого отклонения на управляющий орган так, чтобы процесс удовлетворял заданным требованиям.

При автоматическом управлении воздействие на управляющий орган осуществляет специальное управляющее устройство. В частности, когда необходимый режим состоит в поддержании постоянства тех или иных величин, характеризующих рабочий процесс, то говорят о *регулировании*. В этом случае управляющее устройство называют *автоматическим регулятором*.

Приведем простые примеры объектов, иллюстрирующие необходимость в регулировании и управлении.

1. Напряжение на клеммах генератора, схема которого изображена на рис. 1.1, зависит от тока возбуждения и величины нагрузки. Если напряжение возбуждения и нагрузка остаются

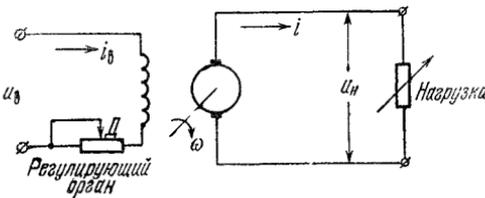


Рис. 1.1.

постоянными, то напряжение на генераторе также остается неизменным. При изменении нагрузки напряжение генератора u_n будет также изменяться. Для того чтобы напряжение u_n оставалось неизменным или менялось в

небольших пределах при различных постоянных значениях нагрузки, необходимо в соответствии с изменением напряжения изменять ток возбуждения генератора: увеличить ток возбуждения при уменьшении напряжения генератора и, наоборот, уменьшить ток возбуждения при увеличении напряжения генератора. Изменить ток возбуждения можно перемещением движка D реостата, включенного в цепь возбуждения, т. е. изменением сопротивления цепи возбуждения, либо изменением напряжения возбуждения посредством, например, усилителя, питающего цепь возбуждения. В первом случае управляющим или регулирующим органом является движок реостата. Во втором случае управляющий или регулирующий орган, такой, как механическое устройство, отсутствует; он совмещен с усилителем, питающим цепь возбуждения.

Допустим, что до момента t_1 (рис. 1.2, а) нагрузка оставалась постоянной, а затем скачком изменилась, например, увеличилась, что соответствует увеличению проводимости нагрузки. Напряжение u_n скачком измениться не может (рис. 1.2, б). После того, как переходный процесс заканчивается, при новом значении нагрузки устанавливается новое значение напряжения u'_n .

Если в момент времени t_2 восстановить прежнее значение нагрузки, то напряжение u_n по экспоненциальному закону придет к прежнему установившемуся значению.

Объекты, обладающие свойством возвращаться к своему прежнему состоянию после устранения причин, вызвавших изменение этого состояния, можно назвать *устойчивыми*. Устойчивые объекты принципиально могут работать без автоматических регуляторов. Однако, как будет выяснено далее, применение регуляторов позволяет существенно улучшить свойства таких объектов.

2. Рассмотрим движение корабля (рис. 1.3). Обозначим через φ курс корабля. Волны, ветер создают возмущающий момент относительно вертикальной оси, который изменяет курс корабля. Управляющим или регулирующим органом корабля является руль. Предположим, что до момента $t = t_1$ корабль шел по курсу $\varphi = \varphi_0$ (рис. 1.4). При $t \geq t_1$ к кораблю прикладывается постоянный момент (рис. 1.4, а). Вследствие этого корабль начнет изменять курс. Если бы момент инерции корабля был пренебрежительно мал, то это изменение курса происходило бы по линейному закону. При

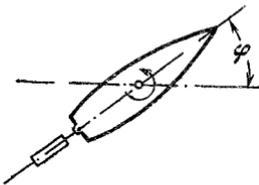
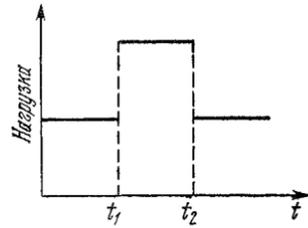
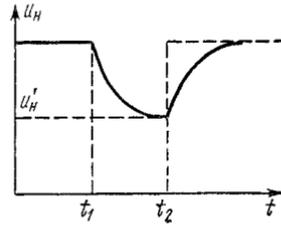


Рис. 1.3.

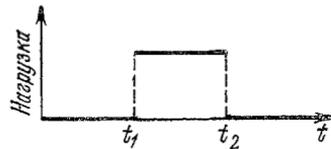


а)



б)

Рис. 1.2.



а)

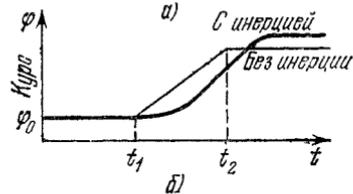


Рис. 1.4.

наличии инерции изменение курса происходит с некоторым запаздыванием (рис. 1.4, б). После устранения возмущающего момента курс корабля сразу или (при наличии инерции) постепенно перестает изменяться, и новое установившееся значение зависит от момента прекращения действия возмущающего воздействия. В этом случае объект можно назвать *нейтральным*. Нейтральный

объект уже не может обеспечить рабочий режим без регулятора или, в общем случае, управляющего устройства. Воздействуя на руль, можно управлять движением корабля так, чтобы он осуществлял те или иные маневры, которые определяются, например, условиями его маршрута.

В зависимости от того, какая из характеристик объекта важна для осуществления тех или иных процессов, объект может быть как нейтральным, так и устойчивым. В качестве примера такого объекта рассмотрим электродвигатель.

3. Принципиальная схема двигателя постоянного тока приведена на рис. 1.5. Скорость двигателя ω и угол поворота θ связаны между собой следующими соотношениями:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad \text{или} \quad \theta = \int_0^t \omega dt.$$

Управление двигателем можно осуществлять изменением напряжения $u_{\text{я}}$ либо тока $i_{\text{я}}$. Характер изменения скорости ω и угла поворота θ при изменении напряжения $u_{\text{я}}$ скачком показан

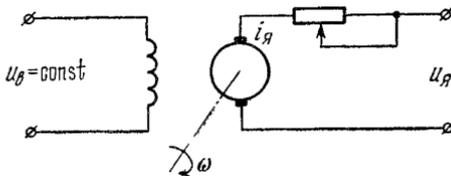


Рис. 1.5

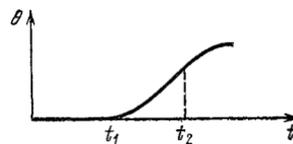
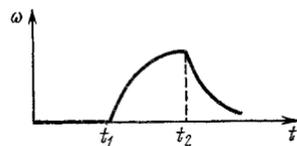
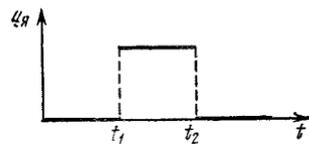


Рис. 1.6.

на рис. 1.6. Двигатель является устойчивым объектом по отношению к скорости ω и нейтральным по отношению к углу поворота θ .

Некоторые объекты, например генератор переменного тока, работающий на спадающей части статической характеристики, асинхронный двигатель при определенном режиме работы, ядерный реактор, самолет в режиме штопора, таковы, что изменения их выходных величин (напряжения, мощности, скорости) даже при устранении изменения нагрузки не остаются неизменными, а возрастают с течением времени. Эти объекты можно назвать *неустойчивыми*. Неустойчивые объекты принципиально не могут обеспечить нормальный рабочий режим без регулятора.

Таким образом, для того чтобы обеспечить нормальный рабочий режим, необходимо, в зависимости от отклонений рабочего режима от заданных условий, воздействовать на управляю-

щий или регулирующий орган так, чтобы устранить возникающие отклонения.

Объект, в котором осуществляется управление или регулирование, называется *управляемым* или *регулируемым объектом*, а величины, характеризующие процесс, протекающий в регулируемом объекте, которые необходимо поддерживать постоянными или изменять по заданному закону, называются *управляемыми* или *регулируемыми величинами*. Управляемый объект вместе с присоединенным к нему управляющим устройством образуют *автоматическую систему*. Управляющее устройство должно измерять управляемую величину и сравнивать ее с заданным значением. В зависимости от отклонения управляемой величины от заданного значения управляющее устройство должно так воздействовать на управляющий орган, чтобы управляемая величина удовлетворяла заданным условиям.

Схематически автоматическую систему можно изобразить, как показано на рис. 1.7.

Автоматическая система представляет собой систему с обратной связью, или замкнутую систему, в которой отклонения регулируемой величины преобразуются управляющим устройством в воздействия на управляющий орган. Наличие обратной связи, осуществляемой регулятором, существенно изменяет свойства автоматических систем по сравнению со свойствами самих объектов.



Рис. 1.7.

§ 1.2. Примеры простейших автоматических систем

Приведем примеры автоматических систем. Для наглядности начнем с простых электромеханических систем.

Система регулирования напряжения генератора. Принципиальная схема системы регулирования напряжения генератора изображена на рис. 1.8. Без регулятора напряжения величина u_n на генераторе изменялась бы пропорционально изменению нагрузки. Задача регулятора состоит в том, чтобы поддерживать напряжение u_n постоянным при изменении нагрузки в широких пределах. В этой системе автоматического регулирования регулятор состоит из соленоида и якоря, укрепленного на пружине, который измеряет отклонение напряжения генератора от заданного значения. Заданное значение устанавливается предварительным натяжением пружины, характеристика которой предпо-

лагается линейной. При уменьшении напряжения u_H положение якоря изменяется, изменяется положение движка, так что ток возбуждения i_b возрастает, а значит, и напряжение на генераторе увеличивается. Даже в такой простой системе имеются основные устройства, входящие в автоматическую систему: задающее (натяг пружины), измерительное (соленоид и якорь) и исполнительное (якорь).

Система регулирования напряжения генератора с электромашинным усилителем изображена на рис. 1.9. Напряжение, снимаемое с нагрузки генератора, в этом случае подается на управляющую обмотку электромашинного усилителя. Вторая, дополнительная обмотка включается на постоянное напряжение u_0 ,

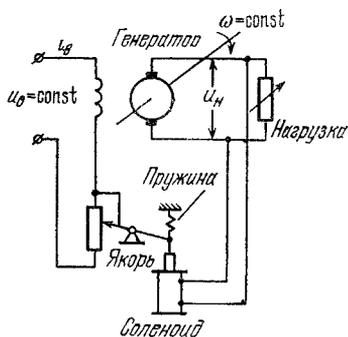


Рис. 1.8.

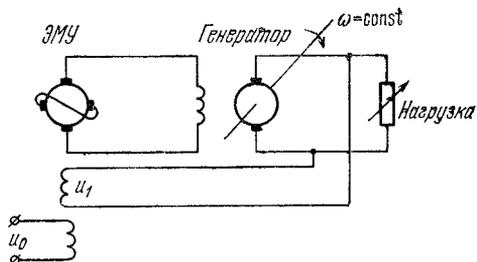


Рис. 1.9.

определяющее требуемое значение регулируемой величины. На электромашинный усилитель воздействует поток или намагничивающая сила, пропорциональная разности заданного и измеренного напряжений. Благодаря этому изменяется и напряжение электромашинного усилителя, питающее обмотку возбуждения генератора. Здесь электромашинный усилитель является регулятором.

В отличие от системы регулирования, изображенной на рис. 1.8, в этой системе регулирования имеется дополнительный источник энергии, который представляет собой не показанный на рисунке двигатель — привод, вращающий с постоянной скоростью ротор электромашинного усилителя.

Система регулирования числа оборотов двигателя. Принципиальная схема системы регулирования изображена на рис. 1.10. Задача регулятора состоит в том, чтобы поддерживать число оборотов двигателя в заданных пределах при изменении нагрузки. Нагрузкой двигателя является момент на его валу. Для измерения числа оборотов двигателя применяется тахогенератор, создающий напряжение u_T , пропорциональное числу оборо-

тов. Напряжение u_0 , соответствующее положению движка потенциометра (уставка), определяет заданное значение скорости двигателя. Напряжение и характеризует отклонение числа оборотов двигателя от заданного числа оборотов. Генератор, входящий в состав системы, представляет собой усилитель мощности. При неравновесии напряжений u_T и u_0 появляется напряжение, пропорциональное разности $u_0 - u_T$, изменяющее возбуждение генератора. В результате число оборотов двигателя изменяется так, чтобы u уменьшилось.

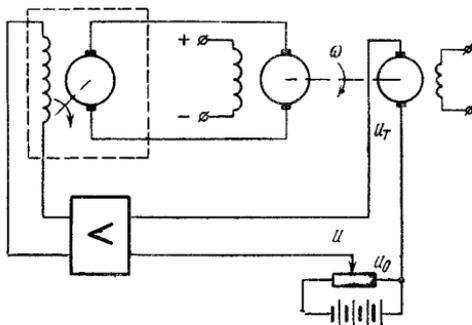


Рис. 1.10.

Система автоматического регулирования мощности энергетического ядерного реактора. Энергетический ядерный реактор представляет собой объект, в котором осуществляется выделение

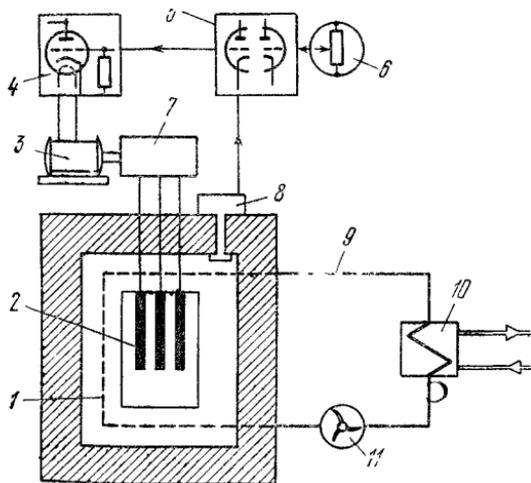


Рис. 1.11.

тепловой энергии, сопровождающей цепную реакцию деления ядерного горючего (рис. 1.11). Для концентрации выделяемой тепловой энергии в активную зону 1 реактора по системе трубопроводов 9 подается охлаждающий носитель, нагнетаемый насосом 11. В теплообменнике 10 происходит нагревание воды или образование пара в зависимости от назначения реактора. Количество тепловой энергии, выделяемой в активной зоне реактора, определяется количеством нейтронов.

Поэтому информация о плотности нейтронного потока, получаемая в ионизационной камере 8, служит характеристикой мощности реактора, которую следует поддерживать постоянной. Регулирование осуществляется изменением числа нейтронов в активной зоне. Последнее достигается введением в активную зону или удалением из нее стержней 2 из материала, поглощающего

нейтроны. Перемещение стержней осуществляется электродвигателем 3 через редуктор 7. Система регулирования включает усилитель 4, сравнивающее устройство 5 и задатчик 6. Информация о плотности нейтронов, получаемая в виде электрического напряжения в ионизационной камере 8, поступает в сравнивающее устройство 5, где вырабатывается сигнал ошибки между текущим и заданным значением плотности нейтронного потока. Сигнал ошибки усиливается в усилителе 4, который управляет двигателем 3. Если мощность реактора возрастает, возникает сигнал ошибки соответствующего знака и двигатель 3 через редуктор 7 перемещает стержни в активную зону. Наоборот, при падении мощности стержни выводятся из активной зоны.

§ 1.3. Задачи автоматического управления

Назначение рассмотренных выше автоматических систем регулирования напряжения генератора, числа оборотов двигателя, мощности энергетического ядерного реактора состоит в поддержании (с той или иной степенью точности) постоянства управляемой величины: напряжения, числа оборотов, мощности. Эти автоматические системы решают одну из задач автоматического управления, а именно задачу поддержания постоянства, или задачу *стабилизации*, управляемой величины. Наряду со стабилизацией управляемой величины часто возникает необходимость в ее изменении по заранее заданной программе либо по некоторому произвольному закону.

Приведем примеры автоматических систем, которые призваны решать все эти задачи.

1. Поддержание постоянства управляемой величины. Примерами таких автоматических систем могут служить системы регулирования напряжения генератора (рис. 1.8, 1.9), числа оборотов двигателя (рис. 1.10), мощности ядерного реактора (рис. 1.11), которые были рассмотрены в § 1.2. Автоматические системы, которые служат для поддержания постоянства управляемой или регулируемой величины, называются *системами собственно регулирования* или *системами стабилизации*.

2. Изменение управляемой величины по заранее заданному закону — программе. Программа, определенная заранее заданным законом, представляет собой функцию времени. Так, например, в прокатных системах необходимо, чтобы число оборотов двигателя, вращающего валки, изменялось по заранее заданному определенному закону. Для этих целей можно использовать рассмотренную выше систему регулирования скорости вращения, если положение движка потенциометра при помощи специального устройства менять по заданному закону. При закалке изделий в нагревательных печах нужно, чтобы тем-

пература печи с течением времени изменялась по заданной программе. Пример системы управления температурой печи изображен на рис. 1.12. Температура печи измеряется термометром сопротивления $ТС$, который является плечом мостика $М$. Заданное значение температуры печи определяется положением движка $Д$ потенциометра $П$. Предположим пока, что движок $Д$ неподвижен. Если температура печи соответствует заданной, то мост сбалансирован и напряжение на диагонали моста, питающее усилитель, равно нулю. В этом случае двигатель, перемещающий движок $Д_1$ автотрансформатора, который питает нагревательный элемент, будет неподвижен. При отклонении температуры печи от заданной сопротивление термометра-сопротивления, являющегося одним из плеч моста, изменится (увеличится при повышении температуры и уменьшится при понижении температуры). Мост разбалансируется и напряжение, снимаемое с диагонали моста, пропорциональное отклонению температуры от заданной, при помощи усилителя приведет во вращение двигатель, который изменит положение движка $Д$ автотрансформатора и, следовательно, подогрев печи. Для изменения температуры печи по программе необходимо в соответствии с этой программой изменять положение движка $Д$, которое определяет заданное значение температуры. Это достигается с помощью вспомогательного привода, вращающего фигурную шайбу $ФШ$, профиль которой соответствует программе. Мост будет сбалансирован лишь тогда, когда сопротивление термометра-сопротивления (а значит, и температура печи) будет соответствовать величине, определяемой текущим положением движка $Д$. Такие автоматические системы называются *системами программного управления*.

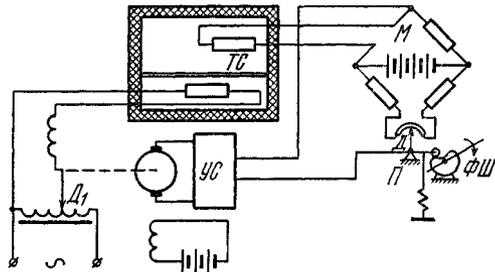


Рис. 1.12.

3. Изменение управляемой величины по произвольному закону. Большой класс автоматических систем образуют системы, в которых управляемая величина должна изменяться по произвольному закону или в зависимости от какой-либо иной физической величины. Такие автоматические системы можно назвать *системами зависящего управления*.

Если регулируемая величина характеризует собой положение (например, угол поворота), то такие системы обычно называют *слеящими системами*. Назначением слеящей системы является

следить за изменением управляемой величины и автоматически возвращать ее к заданному значению.

изменение положения нагрузки, например телескопа, радиолокационной антенны, зенитного орудия, турели самолетного пулемета и т. д., по произвольному закону, задаваемому специальным устройством — задатчиком.

Простейшая следящая система схематически изображена на рис. 1.13. При повороте задающей оси ZO на некоторый угол поворачивается движок $Д_1$ потенциометра $П_1$, связанный жестко с задающей осью. На усилитель подается напряжение, пропорциональное этому углу. Усилитель приводит в действие двигатель постоянного тока, который обрабатывает заданный угол,

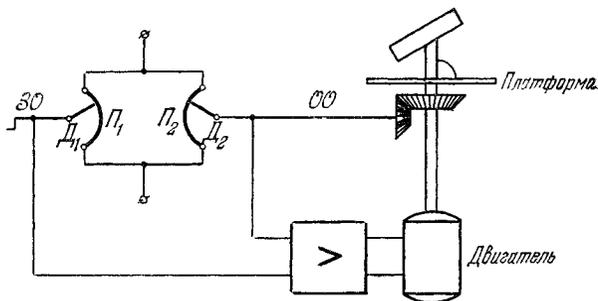


Рис. 1.13.

поворачивая платформу и ось обработки OO . При этом поворачивается и движок $Д_2$ потенциометра $П_2$. Система будет в состоянии равновесия, если угол обработки равен заданному, так как напряжение на входе усилителя при этом будет равно нулю. Часто в следящей системе вместо двигателя и усилителя постоянного тока используется двухфазный асинхронный двигатель и усилитель переменного тока, а вместо потенциометров используется сельсинная передача. Следящая система представляет собой усилитель мощности. Небольшое усилие, прикладываемое к задатчику, управляет источником энергии, который изменяет угловое положение нагрузки. Часто следящая система применяется как счетно-решающее устройство, производящее математические операции (умножение, деление).

В зависимости от выполнения задач автоматические системы можно подразделить на:

- 1) системы регулирования или системы стабилизации;
- 2) системы программного управления;
- 3) системы зависимого управления и следящие системы.

Все рассмотренные ранее автоматические системы характеризовались одной управляемой величиной (напряжение, число оборотов, мощность, температура, положение). Однако в современных управляемых объектах часто управляют не одной, а несколькими связанными между собой величинами. Так, напри-

мер, в энергосистеме необходимо поддерживать постоянство напряжения генераторов, их частоты и активной мощности, в паровом котле часто необходимо поддерживать постоянство уровня воды, температуры, давления пара, в самолете нужно управлять курсом, креном, тангажем и т. д. Такие автоматические системы называются *многосвязными*.

§ 1.4. Автоматические системы в живой природе и обществе

Живые системы — от простейших клеток до сложных организмов — поддерживают свою жизнеспособность благодаря наличию в них механизма управления. Это же относится к экономическим и общественным системам. Обладая своими специфическими особенностями, системы живой природы и общества тем не менее подчиняются общим закономерностям, лежащим в основе автоматических систем. Поэтому полезно будет познакомиться с некоторыми автоматическими системами живой природы. Разумеется, эти автоматические системы очень сложны и взаимосвязаны, и далее речь будет идти о более или менее правдоподобных моделях этих систем.

1. Система управления кровообращением. Система управления кровообращением или, как ее еще называют, система

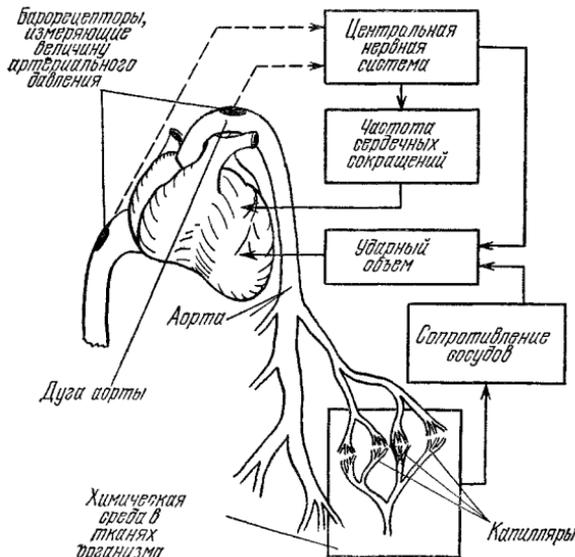


Рис 1.14.

регуляции кровообращения изображена схематически на рис. 1.14. Она состоит из двух контуров управления. Первый

контур управляет артериальным давлением крови. Измерение давления производится барорецепторами — чувствительными элементами, расположенными в дуге аорты и в сонных артериях. Информация о давлении поступает в центральную нервную систему, управляющую частотой сердечных сокращений и величиной ударного объема — количеством крови, выбрасываемой за одно сокращение сердца. Второй контур следит за постоянством химической среды в тканях организма. Изменение химического состава межклеточной жидкости приводит к изменению сопротивления сосудов, что непосредственно влияет на величину ударного объема сердца.

В рассмотренной системе явно выделяются две взаимодействующие автоматические системы.

2. Система управления величиной зрачка глаза. Глаз человека или животного является одним из основных чувствительных органов, с помощью которого они получают необходимую информацию об окружающей среде и на ее основе принимают соответствующие решения о своем поведении.

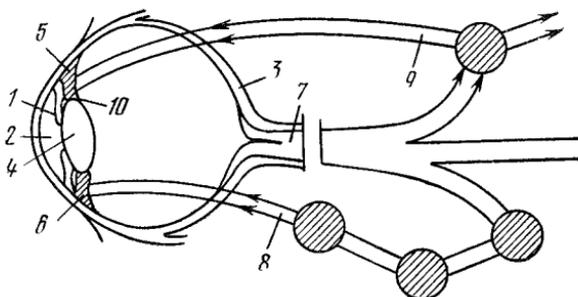


Рис. 1.15.

В радужной оболочке 1 глаза (рис. 1.15), непроницаемой для света, имеется отверстие 2, называемое зрачком. Через это отверстие в глаз поступает поток света. Система управления для нормального процесса видения обеспечивает правильную освещенность сетчатки 3 глаза в зависимости от различной освещенности рассматриваемых предметов. Кроме того, эта система обеспечивает четкое изображение близко расположенных предметов благодаря тому, что не пропускает лучи, которые проходят через периферию хрусталика 4, где оптическая аберрация максимальна. Величина зрачка изменяется с помощью двух мышц — антагонистов радужной оболочки глаза: радиальной 5, расширяющей зрачок, и кольцевой 6, сужающей его. Однако кольцевая мышца более развита и является управляющим органом зрачка

Схематично процесс управления можно представить следующим образом. Световой поток, проходя через зрачок 2 радуж-

ной оболочки 1 глаза, попадает на фоторецепторные элементы сетчатой оболочки 3 глаза. Возбуждаясь, последние передают сигналы по волокнам зрительного нерва 7, которые несут как зрительную информацию, так и информацию об управлении зрачком. В составе зрительного нерва 7 зрачковые волокна, несущие информацию о состоянии зрачка, соединяются с пучком нервных волокон 8, идущих к кольцевой мышце. Поступающие по этому каналу сигналы воздействуют на мышцы 5, 6, которые изменяют величину зрачка.

Зрачковый рефлекс может быть вызван либо изменением интенсивности раздражения частичной области сетчатой оболочки глаза (в этом случае изменяется частота импульсов в определенных нервных волокнах), либо увеличением возбуждения площади сетчатки (это приводит к возбуждению большего количества нервных волокон). Естественно, что чем больше света на сетчатке, тем больше фоторецепторы увеличивают интенсивность выходных нервных сигналов. Кроме основного контура управления зрачком, на его величину влияет контур аккомодации, изменяющий степень преломления хрусталика на коротких и длинных расстояниях с помощью ресничного нерва 9 и ресничной мышцы 10, а также различные связи, несущие информацию об эмоциональном состоянии организма человека или животного в целом.

3. Система управления основными фондами предприятия. В качестве примера экономической системы рассмотрим систему управления основными фондами предприятия.

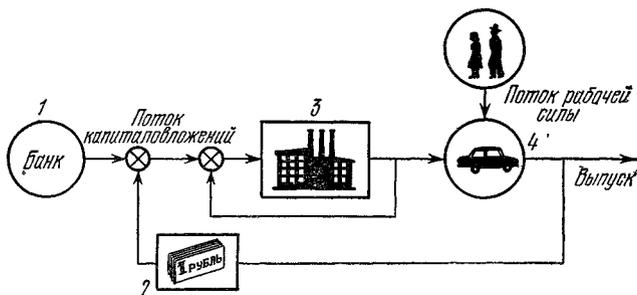


Рис 1.16.

Состояние предприятия можно отчасти характеризовать величиной выпуска продукции. Величина выпуска продукции зависит от ряда факторов. Главными из них являются основные фонды предприятия и рабочая сила. Связь между выпуском, основными фондами и рабочей силой характеризуется некоторой функцией, называемой производственной. Чаще всего

используется производственная функция, в которой выпуск определяется произведением основных фондов в степени s_{ϕ} на величину рабочей силы в степени s_c , причем $s_{\phi} + s_c = 1$. Допустим, что величина рабочей силы не меняется и изменение выпуска может достигаться за счет изменения основных фондов. Основные фонды предприятия на данном интервале времени складываются из фондов на предыдущем интервале времени, некоторой доли собственного выпуска и внешних капиталовложений. Модель изменения основных фондов предприятия показана на рис. 1.16. Поток капиталовложений, поступающий из банка 1, складывается с тем потоком капиталовложений, который образуется путем реализации части выпуска в блоке 2. Получившийся поток является стимулятором роста основных фондов. Процесс преобразования имитирует блок 3. Сам по себе он представляет замкнутую систему. Величина основных фондов и рабочей силы преобразуется в блоке 4 в выпуск готовой продукции. Таким образом, система управления основными фондами предприятия является замкнутой и аналогична по своей структуре системе автоматического управления техническими процессами.

Глава 2

СВОЙСТВА И ОСОБЕННОСТИ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 2.1. Статические свойства автоматических систем

Автоматические системы, состоящие из управляемого объекта и управляющего устройства, представляют собой *систему с обратной связью*, т. е. замкнутую систему, в которой управляемый объект воздействует на управляющее устройство, а управляющее устройство в зависимости от отклонения управляемой величины от предписанного значения в свою очередь воздействует на управляющий орган, а значит, и на объект так, чтобы режим последнего удовлетворял определенным условиям. Наличие обратной связи лежит в основе работы всякой автоматической системы, работающей, как говорят, по *принципу отклонения*. Выясним, исходя из принципа работы автоматических систем, некоторые их особенности.

Рассмотрим схему автоматической системы регулирования напряжения генератора. Она отличается отсутствием подвижных частей в регуляторе (рис. 2.1). Отклонение регулируемой величины через усилитель управляет возбуждением генератора. Если нагрузка на генератор увеличится по сравнению с номинальной, то напряжение на зажимах генератора упадет, и, чтобы повысить его, нужно увеличить возбуждение генератора, т. е. увеличить напряжение u . Напряжение u является разностью между заданным напряжением u_0 , которое остается постоянным и не зависит от нагрузки, и напряжением u_1 . Напряжение u может возрасти только в том случае, если напряжение u_1 понизится. Каждому значению нагрузки будет соответствовать свое установившееся значение напряжения генератора, которое будет тем меньше, чем больше увеличилась нагрузка. Зависимость установившегося значения регулируемой величины напряжения от нагрузки (например, тока в цепи нагрузочного сопротивления) изображена на рис. 2.2. Эта зависимость определяет собой так называемую *статическую характеристику автоматической системы*. При изменении нагрузки управляемая величина в установившемся режиме будет отличаться от заданного значения

тем больше, чем больше изменение нагрузки. Таким образом, в этой системе напряжение генератора u принципиально не может быть при любой нагрузке в точности равным заданному u_0 .

Системы, в которых регулируемая величина в установившемся режиме зависит от величины нагрузки, называются *статическими*, а отклонение регулируемой величины от заданной — *статической ошибкой*.

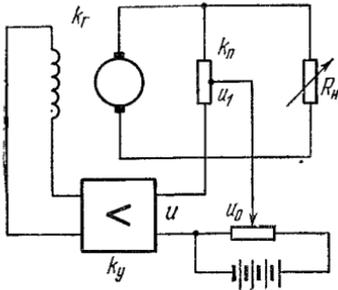


Рис. 2.1.

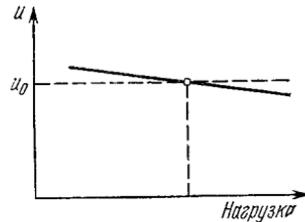


Рис. 2.2.

Найдем величину статической ошибки, которая пропорциональна углу наклона статической характеристики (рис. 2.2). Напряжение генератора u_1 пропорционально напряжению отклонения, или ошибке:

$$u_1 = ku, \quad (2.1)$$

где $k = k_n k_y k_r$ — коэффициент усиления, равный произведению коэффициентов усиления потенциометра, усилителя и генератора. Напряжение ошибки равно

$$u = u_0 - u_1. \quad (2.2)$$

Исключая из этих уравнений u_1 , находим напряжение ошибки:

$$u = \frac{1}{1+k} u_0. \quad (2.3)$$

Подставляя u из (2.3) в (2.1), получим выражение для напряжения генератора:

$$u_1 = \frac{k}{1+k} u_0. \quad (2.4)$$

Из сравнения уравнений (2.1) и (2.3) видно, что

статическая ошибка в замкнутой системе уменьшается в $(1+k)$ раз по сравнению с ошибкой в разомкнутой системе.

Отсюда следует, что для уменьшения статической ошибки нужно увеличивать общий коэффициент усиления k . Статиче-

ская ошибка может стать равной нулю только тогда, когда коэффициент усиления будет равен бесконечности.

Предположим теперь, что напряжение генератора приняло другое значение $u'_1 = \alpha u_1$ вследствие какой-либо причины (например, вследствие изменения скорости вращения ротора генератора в α раз). Так как угловая скорость вращения ротора генератора определяет его коэффициент усиления, то коэффициент усиления теперь станет равным αk , а новое значение напряжения u'_1 согласно (2.4) определится как

$$u'_1 = \frac{\alpha k}{1 + \alpha k} u_0. \quad (2.5)$$

Изменение напряжения при этом, определяемое разностью u_1 (2.4) и u'_1 (2.5), будет равно

$$\Delta u_1 = u_1 - u'_1 = u_1 \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha k}. \quad (2.6)$$

Если бы регулятор отсутствовал, то указанное изменение было бы равно

$$\Delta u_1 = u_1 - u'_1 = k(1 - \alpha)u_0 = u_1(1 - \alpha). \quad (2.7)$$

Из сравнения (2.6) и (2.7) следует, что

| наличие регулятора уменьшает ошибку в $(1 + \alpha k)$ раз.

Пусть, например, скорость вращения якоря генератора упала до 70% от своего рабочего значения. Это соответствует значению $\alpha = 0,7$. Тогда при отсутствии регулятора изменение напряжения генератора было бы равно

$$u_1 - u'_1 = 0,3u_1,$$

т. е. напряжение изменилось бы на столько, на сколько упала скорость вращения генератора, т. е. на 30%. Установившееся значение напряжения генератора будет составлять 70% от первоначального. Если коэффициент усиления системы $k = 20$, то при наличии регулятора изменение напряжения (2.6) будет равно

$$u_1 - u'_1 = u_1 \frac{1 - 0,7}{1 + 0,7 \cdot 20} = u_1 \frac{0,3}{15} = 0,02u_1.$$

Отсюда следует, что напряжение генератора при наличии регулятора изменится всего лишь на 2% и установившееся значение напряжения генератора будет составлять 98% от первоначального. Таким образом, наличие регулятора значительно уменьшает изменение регулируемой величины, вызываемое постоянными внешними воздействиями.

В рассматриваемой автоматической системе установившееся значение регулируемой величины не равно прежнему и зависит

от величины постоянного воздействия, а значит, и нагрузки. Причина того, что установившееся значение регулируемой величины зависит от нагрузки или другого внешнего воздействия, как это видно из приведенного выше рассмотрения, состоит в пропорциональности между регулирующим воздействием и отклонением регулируемой величины. Коэффициент этой пропорциональности тем меньше, чем больше коэффициент усиления k в установившемся режиме.

Возможны ли автоматические системы, которые бы имели в установившемся режиме ошибку, равную нулю? Разумеется, да. Но в них должна быть устранена пропорциональность между регулирующим воздействием и отклонением регулируемой величины. Этого можно достичь, очевидно, если включить в систему устройство, способное при нулевом входном воздействии выводить величину поддержания на любом уровне. Таким свойством обладает любое устройство, представляющее собой *интегратор*. Действительно, уравнение интегратора имеет вид

$$y = \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad (2.8)$$

или

$$\frac{dy}{dt} = u. \quad (2.9)$$

В качестве интегратора можно использовать маломощный двигатель, емкость, решающий усилитель. Условное обозначение интегратора показано на рис. 2.3.



Рис. 2.3.

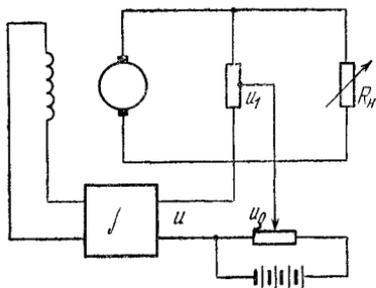


Рис. 2.4.

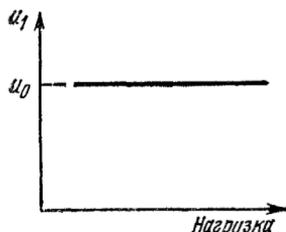


Рис. 2.5.

Если в системе регулирования напряжения (рис. 2.1) усилитель заменить интегратором, то такая система регулирования напряжения (рис. 2.4) будет в установившемся режиме всегда иметь ошибку, равную нулю. Выходная величина интегратора

будет изменяться до тех пор, пока в системе не наступит установившийся режим при $u_1 = u_0$, т. е. при ошибке u , равной 0. Введение интегратора позволяет «развязать» вход и выход управляющего устройства. В такой автоматической системе нагрузочная характеристика будет параллельна оси абсцисс (рис. 2.5). Системы, в которых установившееся значение управляемой величины постоянно и не зависит от величины нагрузки, называются *астатическими*.

§ 2.2. Устойчивость автоматических систем

Присоединение управляющего устройства к управляемому объекту уменьшает или совсем устраняет в установившемся режиме влияние постоянных возмущающих воздействий на управляемую величину. Это является характерным свойством так называемых замкнутых систем, или систем с отрицательной обратной связью. Выше предполагалось, что те установившиеся состояния, о которых шла речь, в действительности осуществляются, или, как говорят иначе, рассмотренные автоматические системы *устойчивы*. Однако, как хорошо известно из практики, присоединение управляющего устройства зачастую может привести к тому, что установившееся состояние будет достигнуто, а отклонение управляемой величины от заданного значения, т. е. ошибка, не только не будет стремиться к нулю или постоянной величине, а будет возрастать или испытывать колебания. В этом случае говорят, что автоматическая система *неустойчива*. Неустойчивая система, как правило, не может выполнить возлагаемых на нее задач и поэтому оказывается непригодной для эксплуатации.

Рассмотрим в общих чертах физические причины неустойчивости и выясним возможности устранения неустойчивости, или, как говорят, коррекции систем, на примере системы регулирования

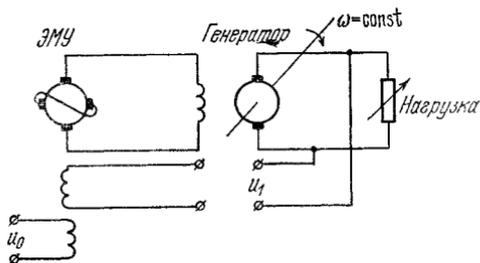


Рис. 2.6

напряжения, изображенной на рис. 2.6. Система регулирования состоит из генератора напряжения и электромашинного усилителя. Разомкнем систему на выходе электромашинного усилителя (рис. 2.6) и подадим на вход такой разомкнутой системы напряжение, изменяющееся скачком на величину u_0 . В такой разомкнутой системе возникает некий переходный процесс. С течением времени напряжение на нагрузке генератора

станет равным некоторому установившемуся значению

$$u_1 = k u_0, \quad (2.10)$$

где $k = k_{\Gamma} k_{\text{эму}}$ — коэффициент усиления разомкнутой системы, равный произведению коэффициентов усиления ее элементов. Как видно из (2.10), k представляет собой отношение напряжения u_1 на выходе системы к напряжению u_0 на входе системы в установившемся режиме. В замкнутой системе (рис. 2.6) на усилитель воздействует не u_0 , как это было в разомкнутой системе, а разность напряжений

$$u = u_0 - u_1,$$

представляющая собой отклонение регулируемой величины от заданной, или ошибку. При изменении u_0 скачком в замкнутой системе (рис. 2.6) напряжение u_1 , а значит, и напряжение на нагрузке в начальный промежуток времени после момента приложения напряжения u_0 в силу инерционности системы будут изменяться так же, как и в разомкнутой системе. Однако в последующие моменты времени характер изменения напряжения u_1 в замкнутой системе будет иным, так как в замкнутой системе на усилитель воздействует теперь не постоянное напряжение u_0 , а величина $u = u_0 - u_1$, зависящая от самого напряжения u_1 . При достаточно большом коэффициенте усиления k малые изменения u вызовут значительные изменения тока возбуждения генератора, а значит, и напряжения на нагрузке, что приведет к увеличению отклонения u . Это в свою очередь может еще более увеличить ток возбуждения генератора и т. д. Изменение напряжения u_1 во времени будет иметь характер, приведенный

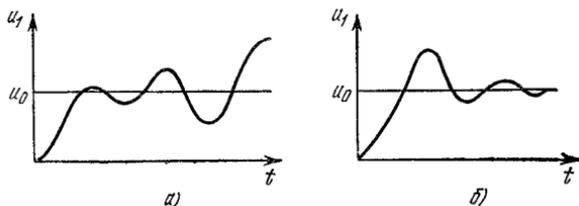


Рис. 2.7.

на рис. 2.7, а, т. е. напряжение на нагрузке не будет стремиться ни к какому установившемуся значению, что характеризует неустойчивость системы. Если же коэффициент усиления не столь велик, то отклонения напряжения u могут с течением времени уменьшаться и стремиться к установившемуся значению. При этом напряжение генератора u_1 , а значит, и напряжение на на-

грузке будет стремиться к постоянной величине (рис. 2.7, б), что соответствует устойчивости системы. Эти общие рассуждения имеют своей целью физически пояснить причины неустойчивости системы.

Из приведенных рассуждений следует, что для обеспечения устойчивой работы системы нужно уменьшить коэффициент усиления k . Но, с другой стороны, для уменьшения отклонения регулируемой величины от заданного значения в равновесном режиме, как это было показано выше, необходимо увеличить значение коэффициента усиления k . Это обстоятельство иллюстрирует характерное для статических систем «противоречие» между точностью и устойчивостью автоматической системы. Стремление к высокой точности требует увеличения k , а увеличение k приводит к неустойчивости. Изменяя параметры системы (постоянные времени, электромашинного усилителя, генератора), можно добиться того, что система станет устойчивой и при заданном коэффициенте усиления системы k . Следует отметить, однако, что практически мы часто ограничены в возможности изменения параметров систем в широких пределах.

Иногда может оказаться, что устойчивость системы недостижима ни при каком изменении параметров системы. В этом случае устойчивости можно добиться лишь при изменении структуры системы. Автоматические системы, в которых устойчивая работа системы не может быть достигнута никаким изменением параметров системы, называют *структурно неустойчивыми системами*.

Выясним причины структурной неустойчивости на примере системы автоматической стабилизации курса корабля. Устройством, задающим курс корабля, является гирокомпасный компас $ГК$ (рис. 2.8). Ось гирокомпаса направлена вдоль заданного курса. С осью гирокомпаса связан ползунок потенциометра $П_1$. При отклонении корабля от курса ось гирокомпаса, а значит и ползунок потенциометра $П_1$, сохраняет свое положение в пространстве, а потенциометр $П_2$, его ползунок и потенциометр $П_1$ вместе с корпусом корабля смещаются, в результате чего средняя точка потенциометра $П_1$ смещается относительно его ползунка. Появляется напряжение ошибки, которое снимается с движков потенциометров, включенных по мостовой схеме (рис. 2.8). Это напряжение усиливается и подается на двигатель $Дв$. Двигатель, вращаясь, поворачивает Руль корабля.

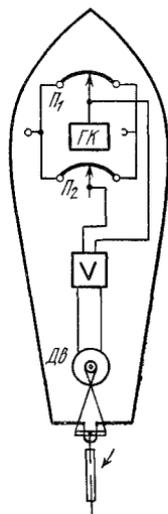


Рис. 2.8.

Казалось бы, что в этой системе (в равновесном состоянии) будет сохраняться неизменное положение курса вне зависимости от значений действующих на корабль постоянных моментов, так как двигатель может быть неподвижен только в том случае, когда напряжение, снимаемое с диагонали моста, будет равно нулю, т. е. когда корабль находится на курсе. Однако нетрудно видеть, что такая автоматическая система не будет в состоянии удерживать корабль на заданном курсе. Действительно, предположим, что корабль внезапно отклонился от заданного курса. Руль его совпадает с продольной осью корабля (рис. 2.9, а).

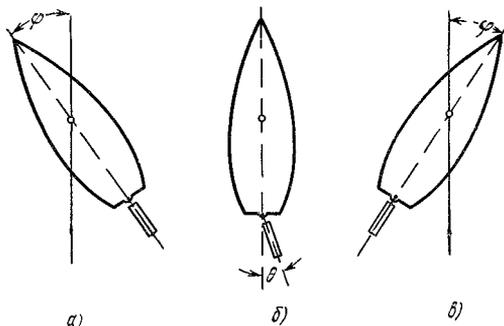


Рис. 2.9.

При этом мост разбалансируется и появляется напряжение, пропорциональное углу отклонения от курса. Двигатель придет во вращение и будет поворачивать руль против часовой стрелки. По мере перекадки руля угол θ увеличивается, корабль поворачивается и отклонение от курса будет уменьшаться. Когда продольная ось корабля совпадает с направлением, указываемым гироскопом, и ошибка будет равна нулю, двигатель остановится (рис. 2.9, б). Но поскольку положение руля смещено по отношению к продольной оси, то корабль будет продолжать поворачиваться. При этом знак ошибки изменяется, но по абсолютной величине ошибка будет возрастать и двигатель начнет поворачивать руль в обратном направлении. Корабль будет продолжать отклоняться от заданного курса до тех пор, пока положение руля не совпадет с продольной осью корабля (рис. 2.9, в). Дальнейшее поведение корабля будет такое же, что и выше, с той лишь разницей, что повороты корабля и перекадка руля будут происходить в направлениях, противоположных предыдущим. Таким образом, корабль будет совершать затухающие колебания (рис. 2.10, сплошная кривая).

В этих рассуждениях не учитывалась инерция корабля. При учете инерции корабль будет продолжать отклоняться от задан-

ного курса даже тогда, когда положение руля совпадает с продольной осью корабля, и только при дальнейшем повороте руля, когда угловая скорость поворота корабля станет равной нулю, начнется движение корабля в противоположную сторону. Влияние инерции корабля проявляется в том, что каждое последующее отклонение от курса будет больше по абсолютной величине предшествующего ему отклонения в противоположную сторону. Таким образом, в этом случае корабль будет совершать колебания с возрастающей амплитудой (рис. 2.10, пунктирная кривая).

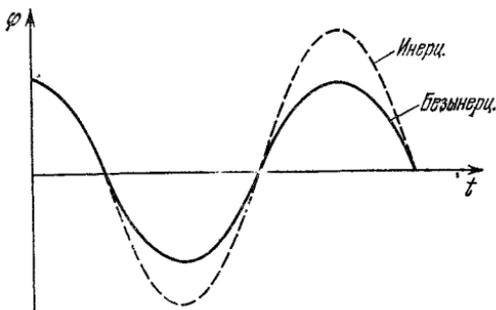


Рис. 2.10.

Рассмотренная автоматическая система управления курсом корабля структурно неустойчива, поэтому, естественно, она не может выполнять своего назначения.

§ 2.3. О стабилизации автоматических систем

Причиной возникновения неустойчивости в случае системы регулирования напряжения является инерционность системы и достаточно большой коэффициент усиления k . Уменьшение k позволяет стабилизировать систему, но при этом увеличивается статическая ошибка. Причиной колебаний с возрастающей амплитудой в системе управления курсом корабля является то обстоятельство, что при достижении кораблем заданного курса руль его отклонен на максимальный угол. Эти колебания невозможно устранить ни при каком выборе параметров системы, поскольку система управления курсом корабля структурно неустойчива.

Для устранения структурной неустойчивости системы управления курсом корабля необходимо каким-либо способом отключать двигатель до возвращения корабля на заданный курс, т. е. не дать возможности двигателю продолжать поворачивать руль корабля при возвращении корабля на курс. Это можно осуществить различными способами. Например, дополнить управляющее устройство таким устройством, которое отключало бы двигатель прежде, чем корабль достигнет заданного курса (как это показано на рис. 2.11). Двигатель, поворачивая руль корабля, одновременно перемещает движок погенциометра Π_2 в сторону, соответствующую отклонению руля. Благодаря

этому при возвращении корабля на курс двигатель будет остановлен ранее, чем это было прежде. Очевидно, что чем меньше отклонение корабля от заданного курса, тем меньше должен сместиться движок Π_2 , чтобы мост был сбалансирован, а следовательно, при этом меньше будет отклонен руль.

Таким образом, введение этого устройства, называемого жесткой внутренней связью, устанавливает пропорциональную связь между углом отклонения от курса φ и углом поворота руля θ , и, значит, при уменьшении отклонения корабля от курса φ угол поворота θ будет также уменьшаться, что при надлежащем выборе параметров регулятора приведет к затуханию колебаний корабля относительно курса. Так как мост сбалансирован при положениях движков, отклоненных от средних точек потенциометров, то курс корабля будет отличаться от заданного курса (рис. 2.12). Введение жесткой внутренней связи устраняет неустойчивость системы управления кораблем, но одновременно вводит, как говорят, *статизм* в систему, т. е. система автоматического управления курсом корабля становится статической системой.

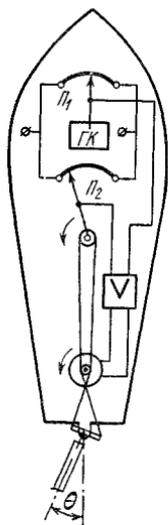


Рис. 2.11.

Можно, однако, осуществить стабилизацию системы управления курсом корабля иным способом, при котором статическая ошибка будет отсутствовать. Вместо введения жесткой внутренней связи введем дополнительный сигнал, управляющий двигателем, который бы при уходе корабля от курса добавлялся к сигналу, пропорциональному отклонению от курса, с тем, чтобы уменьшить этот уход, а при приближении к заданному курсу, наоборот, вычитался из сигнала, пропорционального отклонению, что будет приводить к уменьшению отклонения руля. Таким дополнительным сигналом может служить сигнал, пропорциональный производной от угла отклонения курса корабля, т. е.

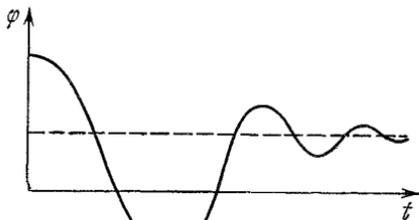


Рис. 2.12.

пропорциональный скорости поворота от курса. На рис. 2.13, а изображена одна полувопросная колебаний отклонения от курса. В точках t_1 и t_2 отклонения от курса одинаковы, и регулятор не будет чувствовать разницу между этими точками. С физической точки зрения эти два момента времени различны, поскольку

в точке t_1 мы отходим от курса, а в t_2 , наоборот, мы стремимся на курс. Эти точки можно отличить друг от друга знаком производной. В точке t_1 производная имеет положительный знак. В точке же t_2 производная отрицательна (рис. 2.13, б). Если образовать новый сигнал управления $\varphi + \alpha\dot{\varphi}$ (рис. 2.13, в), то при удалении от заданного курса двигатель будет вращаться

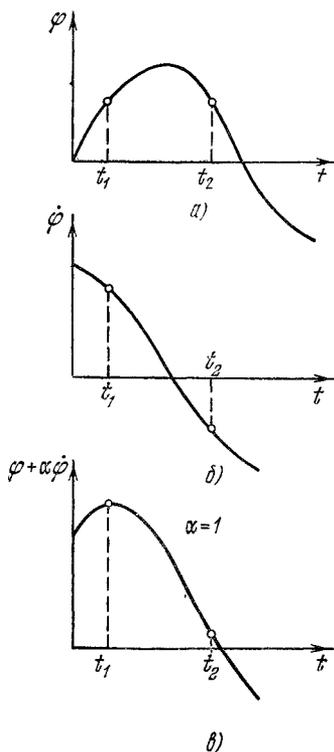


Рис. 2.13.

с большей скоростью. Это позволяет ускорить процесс возвращения корабля на заданный курс. При этом двигатель будет выключаться раньше прихода корабля на заданный курс. Установившийся режим здесь может наступить только в том случае, когда движки потенциометров и руль совпадут по напряжению с продольной осью корабля. Статическая ошибка будет равна нулю. Характер процесса теперь будет иметь вид, изображенный на рис. 2.14. Он отличается от рис. 2.12 отсутствием статической ошибки. Для образования производной существуют специальные устройства — указатели скорости, дифференциаторы.

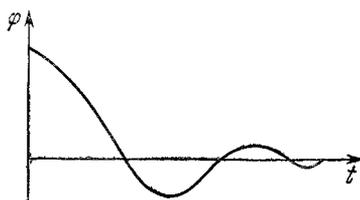


Рис. 2.14.

Иногда в автомат курса вводят сигналы, пропорциональные не только скорости отклонения $\dot{\varphi}$, но и ускорения $\ddot{\varphi}$. Эти сигналы могут быть получены, например, от так называемого демпфирующего гироскопа. Введение производных $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ позволяет придать системе устойчивость и в то же время не влияет на статические свойства системы, т. е. на свойства ее в установленном режиме. Устойчивость автоматической системы управления курсом может быть также достигнута с помощью соответствующей коммутации сигнала ошибки, например, путем скачкообразного изменения коэффициента усиления. Вместо

прежнего управляющего сигнала (рис. 2.15, а) подается новый управляющий сигнал (рис. 2.15, б). Теперь ошибка изменяет

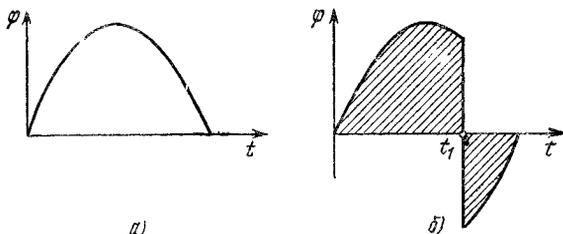


Рис. 2.15.

свой знак ранее, чем при отсутствии коммутации. Это достигается выбором коэффициента усиления, равного

$$k(t) = \begin{cases} k_1 & \text{при } 0 \leq t \leq t_1, \\ k_2 & \text{при } t > t_1. \end{cases}$$

Такая коммутация физически вводит тот же эффект, что и сигнал, пропорциональный отклонению и его производной.

Приведенные примеры иллюстрируют физический смысл некоторых способов коррекции или стабилизации автоматических систем.

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СХЕМА И ТИПЫ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 3.1. Функциональная схема

Автоматические системы отличаются друг от друга объектами, физической природой регулируемых или управляемых величин, конструкциями элементов управляющих устройств. Тем не менее вне зависимости от этих различий соответствующие элементы автоматических систем выполняют одинаковые функции. Для автоматических систем можно установить *функциональную схему*, характеризующую функции, выполняемые элементами системы. Такая функциональная схема изображена на рис. 3.1. Она состоит из:

- 1) управляемого или регулируемого объекта (*УО*),
- 2) измерительного устройства (*ИЗУ*),
- 3) задающего устройства (*ЗУ*),
- 4) сравнивающего устройства (*СУ*),
- 5) усилительного устройства (*УУ*),
- 6) исполнительного устройства (*ИУ*),
- 7) корректирующего устройства (*КУ*).

Элементы 2—7 образуют управляющее устройство или в простейшем случае — регулятор. В ряде управляющих устройств некоторые из этих элементов отсутствуют, а другие объединены.

Рассмотрим кратко назначение и свойства элементов функциональной схемы.

1. Управляемый объект. Вследствие большого разнообразия управляемых объектов физическая природа управляемых величин различна. Она может представлять собой напряжение, число оборотов, угловое положение, курс, мощность, как, например, для управляемых объектов, рассмотренных выше. Изменение режима объекта осуществляет управляющий орган, представляющий собой часть объекта (обмотки возбуждения генератора и двигателя, руль корабля, стержни ядерного реактора, вентиль в паросиловых установках и т. д.). Управляемые объекты по своим общим свойствам, как было указано выше, могут быть устойчивыми, нейтральными и неустойчивыми. В зависимости

от того, какая величина является управляемой, один и тот же объект может быть устойчивым или нейтральным. Некоторые объекты могут обладать так называемым *запаздыванием*. Запаздывание проявляется в том, что при изменении нагрузки или

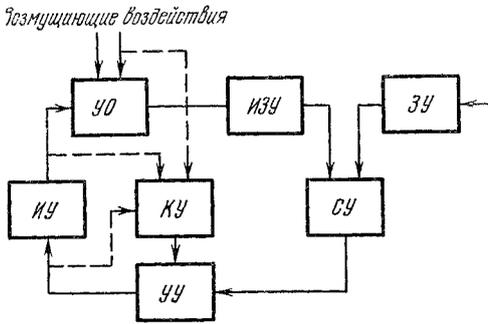


Рис. 3.1.

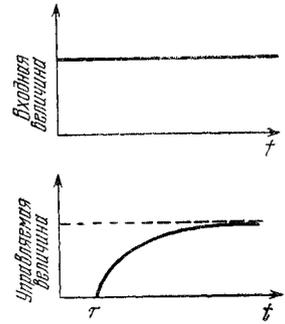


Рис. 3.2.

перемещении управляющего органа, например, скачком управляемая величина начинает изменяться не сразу, а спустя некоторый промежуток времени τ , называемый временем запаздывания (рис. 3.2). К такого рода объектам относятся объекты,

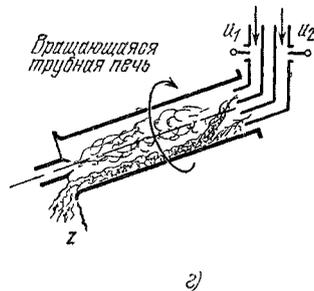
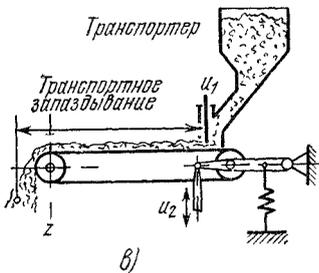
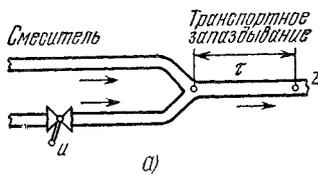


Рис. 3.3.

содержащие трубопроводы, длинные линии, транспортеры. Примеры объектов с запаздыванием приведены на рис. 3.3.

Для осуществления автоматического управления необходимо хорошо знать свойства и особенности объектов. Изучение кон-

сгрукций объектов и их свойств относится к специальным дисциплинам соответствующей отрасли техники (электротехники, энергетики, ядерной техники, авиации и т. п.).

2. Измерительное устройство. Назначением измерительного устройства является измерение действительного значения управляемой величины. В зависимости от природы управляемой величины измерительные устройства могут быть самыми разнообразными. В рассмотренных выше примерах были использованы измерительные устройства: гахометр (рис. 1.10), ионизационная камера (рис. 1.11), термометр сопротивления (рис. 1.12), курсовой гироскоп (рис. 2.8) и т. п. Всякое измерительное устройство является преобразователем управляемой величины в величину, вообще говоря, иной физической природы, удобную для дальнейшего использования. Характерным свойством измерительного устройства является весьма малое потребление энергии. Это значит, что измерительное устройство практически не оказывает влияния на состояние регулируемого объекта, т. е. на значение управляемой величины.

3. Задающее устройство. Предназначено для установления необходимого значения управляемой величины. Это значение может устанавливаться вручную постоянным, как в системах стабилизации. Оно может изменяться по какому-либо определенному закону при помощи кулачка, вращаемого приводом задающего устройства, или ленты с магнитной записью в системах программного регулирования. Либо, наконец, это значение может изменяться по произвольному закону, как в следящих системах. Усилие, необходимое для установки заданного значения или закона изменения регулируемой величины, как правило, весьма мало. В рассмотренных выше автоматических системах задающее устройство представляло собой пружину якоря соленоида (рис. 1.8), кулачок, изменяющий положение движка потенциометра (рис. 1.12), потенциометр следящей системы (рис. 1.13). Как и измерительное устройство, задающее устройство часто является преобразователем. Величина на выходе задающего устройства должна быть одинаковой природы с величиной на выходе измерительного устройства.

4. Сравнивающее устройство. Назначением сравнивающего устройства является сопоставление значения управляемой величины с ее заданным значением и, следовательно, выявление отклонения регулируемой величины от заданного значения. Сравнивающее устройство обычно осуществляет операцию вычитания двух величин.

В рассмотренных выше автоматических системах сравнивающее устройство совмещено с измерительным и задающим устройствами. В системе управления температурой (рис. 1.12), курсом корабля (рис. 2.8), в следящей системе (рис. 1.13)

сравнивающее устройство представляет собой мостик. Выходная величина сравнивающего устройства пропорциональна отклонению регулируемой величины от заданного значения. Поэтому иногда сравнивающее устройство называют также датчиком ошибки, отклонения или рассогласования.

5. Усилительное устройство. Предназначено для усиления мощности сигналов ошибки. Оно управляет энергией, поступающей от постороннего источника. В управляющих устройствах широко используются электронные, магнитные, гидравлические, пневматические усилители. В простейших автоматических системах, таких, как, например, система автоматического регулирования напряжения на рис. 1.8, усилительное устройство отсутствует. В системе автоматического регулирования напряжения на рис. 1.9 усилительное устройство представляет собой электромашинный усилитель, а в автоматической системе управления температурой (рис. 1.12) и в следящей системе (рис. 1.13) — электронный усилитель.

6. Исполнительное устройство. Назначением исполнительного устройства является воздействие на управляющий орган объекта. В системе автоматического регулирования напряжения (рис. 1.8) исполнительное устройство представляет собой рычаг (траверзу), связывающий измерительное устройство (точнее говоря, сравнивающее устройство) с управляющим органом. В автоматической системе управления курсом корабля (рис. 2.8), регулирования мощности энергетического ядерного реактора (рис. 1.11), следящей системе (рис. 1.13) исполнительным устройством является двигатель. В этих системах исполнительное устройство содержит исполнительный механизм (рычаг, передача). В ряде автоматических систем исполнительный механизм, как таковой, отсутствует и воздействие на объект осуществляется изменением состояния какой-либо величины (тока, напряжения) без помощи механических устройств. Мощность исполнительного устройства обычно велика.

7. Корректирующее устройство. Применяется для изменения свойств автоматических систем в нужном направлении. Так, например, введение корректирующего устройства в автоматическую систему управления курсом корабля позволило устранить незатухающие или возрастающие колебания управляемой величины курса. К этому же результату привело введение воздействия по производной от курса. Подобные корректирующие устройства образуют внутренние связи. Часто корректирующие устройства используются для формирования управляющих воздействий, зависящих от задающих или возмущающих воздействий, что позволяет существенно повысить динамические свойства автоматических систем.

Мы рассмотрели общую функциональную схему систем автоматического регулирования одной величины. Как мы видели, в ряде автоматических систем те или иные функциональные элементы могут быть совмещены друг с другом или отсутствовать вовсе.

§ 3.2. Особенности автоматических систем

Любая автоматическая система представляет собой замкнутую цепь, или, иначе, цепь с обратной связью. Каждый из элементов автоматической системы соединен с остальными элементами так, что выходная величина его является входной величиной следующего элемента. При наличии корректирующих устройств входная величина соответствующего элемента (например, управляющего устройства на рис. 2.11) является суммой или разностью выходных величин предшествующего элемента и корректирующих устройств. Элементы, входящие в эти системы, выполняя свои функции, связывают между собой иные элементы системы и, следовательно, являются преобразователями их входных величин в выходные.

Выходная величина элемента может отличаться от входной величины физической природой, формой, т. е. законом изменения во времени, уровнем энергии. Эти отличия и степень важности того или иного отличия зависят от назначения элемента. Так, например, для ряда измерительных устройств характерно преобразование измеряемой величины в величину иной физической природы (часто в электрическую величину). При этом закон изменения во времени выходной величины обычно стараются сохранить таким же, как и закон изменения входной величины. Энергетический уровень здесь не играет существенной роли и обычно невелик. В усилительном устройстве важное значение имеет уровень энергии.

Часть элементов автоматических систем обладает тем свойством, что они не оказывают обратной реакции на предшествующие им элементы. Это значит, что присоединение последующего элемента к предыдущему не изменяет состояния последнего. Такое свойство элементов называется *однонаправленностью*. Свойством однонаправленности, как правило, обладает измерительное устройство, потребляющее малую энергию по сравнению с энергией управляемого объекта. Управляемая величина (например, число оборотов двигателя) воздействует на измерительное устройство (тахометр). Однако обратное воздействие измерительного устройства на значение управляемой величины практически ничтожно и им можно пренебречь. Усилители, входящие в состав управляющего устройства, также обладают свойством однонаправленности. Наконец, этим свойством обладают часто и сами регулируемые объекты.

Наличие хотя бы одного однонаправленного элемента в автоматических системах приводит к тому, что воздействие, возникшее вследствие отклонения управляемой величины от заданного значения, «проходит» в одном направлении по замкнутой цепи. Свойство однонаправленности лежит в основе принципа их действия. Управляемая величина воздействует на измерительное устройство. Последнее вместе с задающим устройством воздействует на сравнивающее устройство. Сигнал сравнивающего устройства образует ошибку, воздействующую на управляющее устройство, которое в соответствии с законом регулирования управляет исполнительным устройством. Наконец, исполнительное устройство воздействует на управляющий орган. Таким образом,

автоматическая система представляет собой замкнутую динамическую систему, обладающую свойством однонаправленности и реагирующую в конечном итоге на отклонение управляемой величины

§ 3.3. Основные типы автоматических систем

Рассмотренная выше функциональная схема соответствует разнообразным автоматическим системам. Элементы этой функциональной схемы осуществляются в различных конструктивных формах. Однако общие динамические свойства автоматических систем определяются не столько конструкцией отдельных элементов или физической природой регулируемой величины,

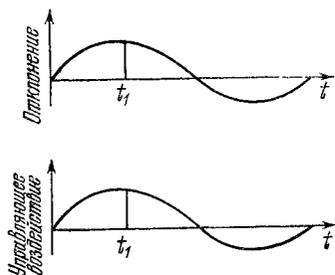


Рис. 3.4.

сколько динамическими свойствами элементов автоматической системы, способами их соединения, характером передачи сигналов. Эти общие динамические свойства автоматических систем, относящиеся в равной степени к системам различной физической природы и разнообразных конструкций, в значительной мере являются предметом изучения теории автоматических систем.

По способу формирования и передачи сигнала управления, характеризующего закон управления и преобразования его в управляющее воздействие, мы будем подразделять автоматические системы на *непрерывные* и *дискретные*. В непрерывных системах управляющее воздействие представляет собой непрерывную функцию, обычно пропорциональную сигналу ошибки (рис. 3.4). В дискретных системах управляющее воздействие зависит от отдельных дискретных значений сигнала ошибки. Эти

дискретные значения могут соответствовать: 1) произвольным значениям сигнала ошибки в фиксированные моменты времени (рис. 3.5, а), 2) фиксированным значениям в произвольные

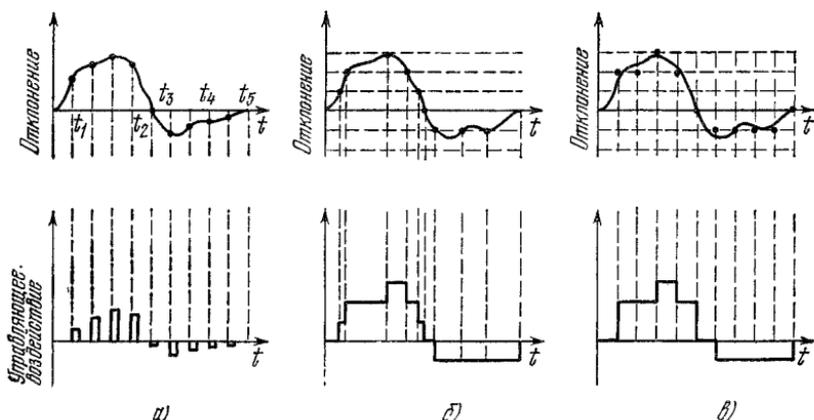


Рис 3.5.

моменты времени (рис. 3.5, б), 3) фиксированным значениям, ближайшим к произвольным значениям сигнала ошибки в фиксированные моменты времени (рис. 3.5, в).

Первый случай имеет место в импульсных автоматических системах. В этих системах управляющее воздействие представляет собой последовательность импульсов, параметры которых, например амплитуда (рис. 3.6, а), ширина (рис. 3.6, б), пропорциональны значениям сигнала управления в фиксированные дискретные моменты времени.

Второй случай имеет место в релейных автоматических системах. В этих системах управляющее воздействие представляет собой ступенчатую функцию, высоты ступенек которой пропорциональны фиксированным значениям сигнала управления в произвольные моменты времени (рис. 3.5, б).

Наконец, третий случай имеет место в цифровых автоматических системах. В этих системах управляющее воздействие представляет собой последовательность импульсов или ступенчатую

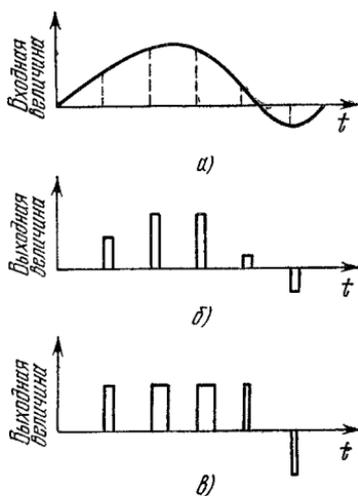


Рис. 3.6.

функцию. Амплитуды импульсов или высоты ступенек равны фиксированным значениям, ближайшим к произвольным значениям управляющего сигнала в дискретные фиксированные моменты времени (рис. 3.6, в).

В импульсных системах весьма просто осуществляется усиление маломощного сигнала, пропорционального отклонению регулируемой величины в некую пропорциональную величину, а также так называемое многоточечное или многоканальное регулирование. К импульсным автоматическим системам относятся следящие системы, применяемые в телеуправлении и радиолокации, где используются импульсные методы измерения, передачи, преобразования и обработки информации.

Релейные системы просты по конструкции, они позволяют получить также весьма большое усиление маломощного сигнала, однако без соблюдения пропорциональности.

К цифровым автоматическим системам относятся системы, содержащие цифровые вычислительные устройства. Цифровое вычислительное устройство обычно выполняет функции задающего, сравнивающего и управляющего устройства. К цифровым автоматическим системам относятся, например, копировальные станки с программным управлением, цифровые системы управления полетом.

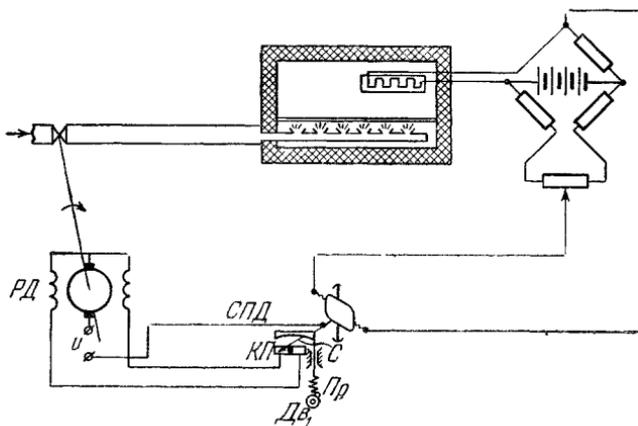


Рис. 3.7.

Приведем примеры импульсных, релейных и цифровых автоматических систем регулирования.

На рис. 3.7 приведена схема импульсной автоматической системы управления температурой печи, отапливаемой газом. В отличие от автоматической системы управления температурой, рассмотренной выше, в этой системе усилительное устрой-

ство представляет собой стрелку гальванометра с падающей дужкой. Падающая дужка приводится в периодическое движение вверх и вниз от синхронного двигателя $Dв_1$ через редуктор и кулачок. Если температура печи равна заданной, то стрелка C контактного гальванометра, включенного в диагональ мостика, будет находиться посередине контактных пластин $KП$ и скошенная падающая дужка $СПД$ будет свободно проходить от крайнего верхнего до крайнего нижнего положения. Если температура печи отклонится от заданной, то мостик разбалансируется и стрелка гальванометра отклонится от среднего положения (например, влево, как показано на рис. 3.7). При спуске $СПД$ прижимает стрелку к контактной пластине и останавливается, замыкая цепь реверсивного двигателя $РД$, действующего на регулирующий орган — клапан. При этом пружина $Пр$ растягивается, затем сжимается до тех пор, пока $СПД$ не начнет подниматься, размыкая цепь реверсивного двигателя $РД$. Чем больше отклонение стрелки контактного гальванометра, т. е. чем больше отклонение температуры, тем раньше прижмет стрелку $СПД$ и, следовательно, тем больше будет длительность замыкания цепи двигателя. При отклонении стрелки контактного гальванометра в другую сторону будет замыкаться другая цепь двигателя и двигатель будет вращаться в обратную сторону. В этой системе управление двигателем (исполнительным устройством) происходит не непрерывно, а периодически, через равные (или примерно равные) интервалы времени. Импульсные усилительные устройства воздействуют на исполнительное устройство периодически, через равные промежутки времени. Такое усилительное устройство позволяет весьма просто осуществить усиление маломощного сигнала, пропорционального отклонению управляемой величины. Такие автоматические системы являются импульсными системами. Усилительное устройство импульсных автоматических систем обладает тем свойством, что выходная величина его представляет последовательность импульсов, длительность которых пропорциональна управляющему сигналу (рис. 3.6), т. е. отклонению регулируемой величины в моменты, когда падающая дужка прижимает стрелку, или, как говорят обычно, длительность импульсов пропорциональна значению управляющего сигнала в отдельные дискретные моменты времени, как это показано на рис. 3.6, а. Возможны и такие устройства прерывистого действия, выходной величиной которых также являются импульсы, но постоянной длительности и переменной высоты (рис. 3.6, б).

На рис. 3.8 приведена схема релейной (контактной) следящей системы. Она отличается от схем следящих систем, описанных выше, тем, что потенциометр заменен контактными пластинами. При расхождении угловых положений задающей и

отрабатывающей осей возникает напряжение, которое заставляет сработать поляризованное реле. Это реле включает цепь двигателя, который изменяет угловое положение нагрузки так, чтобы привести его к заданному. Напряжение, питающее двигатель, постоянно и не зависит от отклонения регулируемой величины,

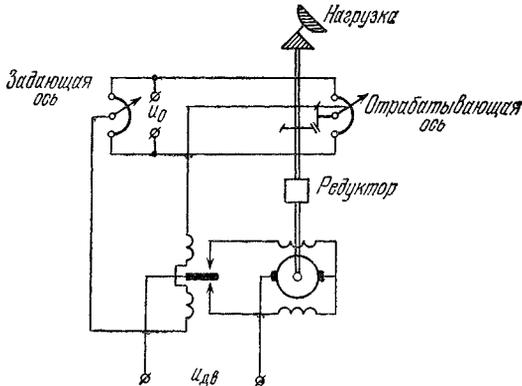


Рис. 3.8

следовательно, и скорость вращения его постоянна. Знак (полярность) этого напряжения зависит от знака отклонения управляемой величины (рис. 3.9). Такие автоматические системы

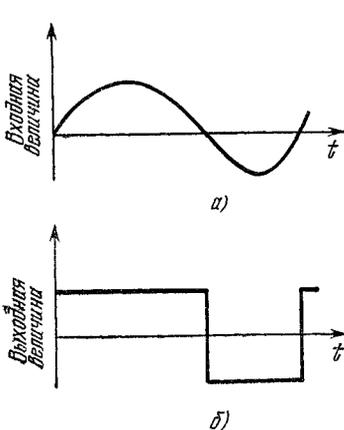


Рис. 3.9.

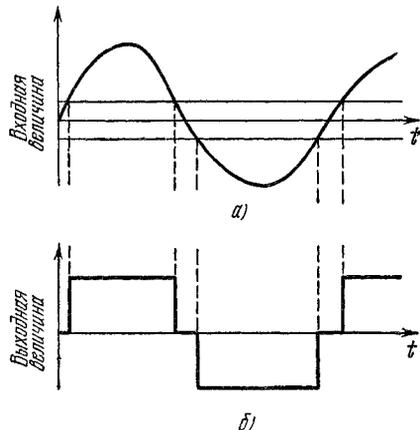


Рис. 3.10.

являются релейными. В релейных автоматических системах выходная величина управляющих устройств представ-

ляет собой последовательность прямоугольных импульсов, длительность которых и знак зависят только от знака входной величины относительно нулевого значения (рис. 3.9). При наличии зоны нечувствительности релейный элемент срабатывает при прохождении входной величиной некоторого постоянного значения (рис. 3.10). В релейных системах управляющие устройства реализуются в виде реле с контактами, золотника с малым отверстием и т. п.

В качестве современной автоматической системы, использующей цифровую вычислительную машину, рассмотрим систему управления американской орбитальной станции «Скайлэб». Орбитальная станция «Скайлэб» предназначена для длительного пребывания космонавтов, и поэтому ко всем ее системам предъявляются весьма высокие требования по надежности, точности, помехоустойчивости и т. д. Для улучшения динамических характеристик систем регулирования используется бортовая ЦВМ. Одной из таких систем является система управления ориентацией станции в пространстве. На рис. 3.11 показан один из каналов этой системы, а именно канал регулирования углового положения около вертикальной оси Oz . Истинное положение станции измеряется гироскопом 1, установленным на стабили-

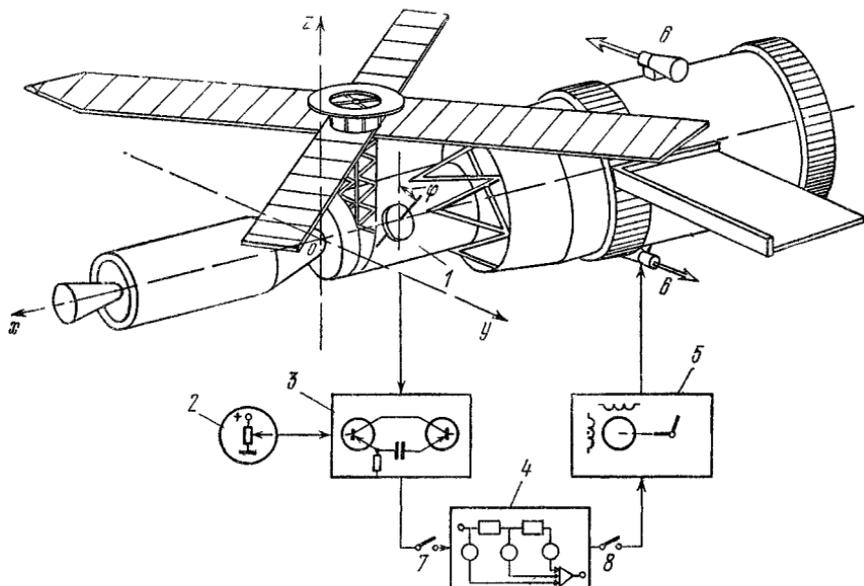


Рис 3.11.

рованной в пространстве платформе. Сигнал, пропорциональный отклонению от вертикальной оси, сравнивается в устройстве 3

с заданным значением, поступающим из задатчика 2. Закон управления формируется цифровым фильтром 4, вход и выход которого коммутируются ключами 7, 8. Цифровой фильтр 4 выполнен как блок управляющей ЦВМ, что позволяет осуществить такой закон управления, который обеспечивает высокое качество стабилизации. Сигнал с выхода цифрового фильтра поступает на исполнительное устройство 5, которое управляет двигателями ориентации 6. Момент, создаваемый при работе двигателей, компенсирует отклонение угла φ от заданного значения.

Выше речь шла об автоматических системах управления одной величиной. В ряде случаев возникает необходимость управления несколькими величинами. Так, например, в паровом котле необходимо поддерживать постоянство уровня воды, давления пара и температуры перегрева пара. Для самолета, кроме управления курсом, необходимо управлять креном и тангажем и т. д. В этих случаях один объект снабжается несколькими управляющими устройствами, которые могут быть связаны между собой. Функциональная схема автоматической системы управления несколькими величинами более сложна. В ней присутствуют несколько управляющих устройств, выполняющих одни и те же функции.

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 4.1. Виды воздействий

Всякое воздействие на автоматическую систему вызывает изменение управляемой величины. Это изменение управляемой величины вызывает отклонение ее от заданного значения и порождает поэтому некий процесс управления. Характер процесса управления зависит как от самой автоматической системы (ее структуры, параметров), так и от места приложения и вида внешних воздействий.

Внешние воздействия можно разделить на два класса — *задающие* воздействия и *возмущающие* воздействия.

Задающие воздействия определяются тем законом, по которому должна изменяться управляемая величина. В системах стабилизации задающее воздействие, определяемое настройкой регулятора, постоянно (рис. 4.1). В системах программного управления задающее воздействие является заранее заданной функцией времени. В системах зависимо-го управления, в следящих системах задающее воздействие является произвольной функцией времени. Задающее воздействие устанавливается или вырабатывается задающим устройством. Вид задающего воздействия в системах программного и зависимо-го управления может быть самым различным. Этот вид определяется условиями работы систем. При слежении радиолокационной антенной за равномерно движущимся самолетом задающее воздействие следящей системы, перемещающей антенну, может быть линейной функцией времени: at (рис. 4.2, а). Если самолет движется равноускоренно, то задающее воздействие может изменяться по квадратичному закону: at^2 (рис. 4.2, б). При слежении за равномерно движущимся самолетом изменение азимута оси

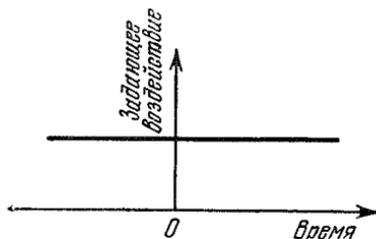


Рис. 4.1.

радиолокационной антенны, а значит, и задающего воздействия следящей системы должно происходить по арктангенсоиде: $\text{arctg } at$ (рис. 4.2, а). В ряде случаев, например при стабилизации

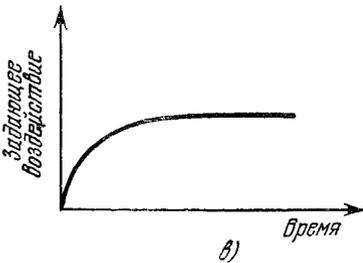
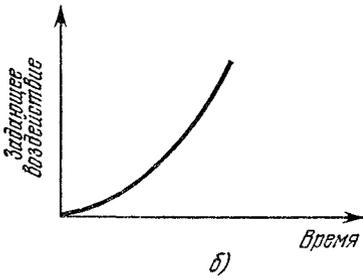
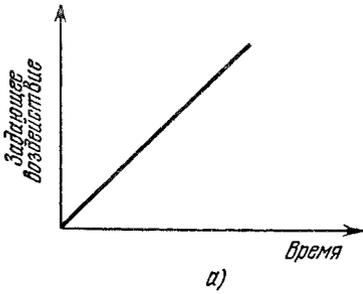


Рис 4.2.

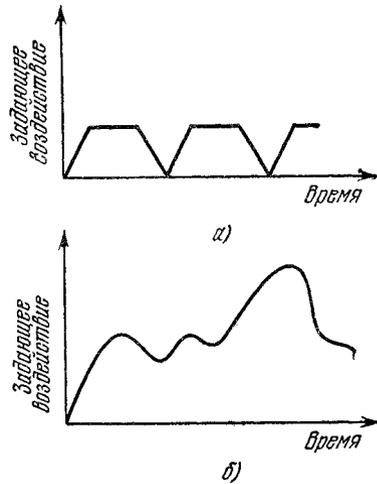
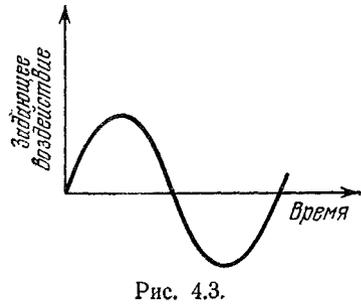


Рис. 4.4.

платформы орудия или той же радиолокационной антенны на корабле во время качки, задающее воздействие следящей системы представляет синусоидальную функцию времени: $a \sin(\omega t + \varphi)$ (рис. 4.3). В системах программного управления, например температурой, задающее воздействие может быть периодической функцией времени, например такой, как показано на рис. 4.4, а, или непериодической функцией времени (рис. 4.4, б). Управляемая величина должна изменяться по закону, определяемому задающим воздействием.

Возмущающее воздействие вызывается изменением нагрузки или иными причинами, вследствие которых регулируемая величина отклоняется от заданного значения. Возмущающие воздействия могут быть самыми разнообразными. Часто характерным является скачкообразное изменение возмущающего воздействия (1) или уменьшению (2) нагрузки. Возмущающее воздействие (например, нагрузка) может изменяться по вполне определенным законам, подобным тем, о которых говорилось выше, а может изменяться случайно (рис. 4.6). В первом случае говорят,

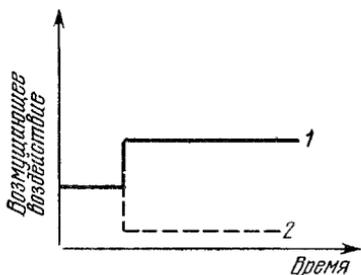


Рис. 4.5.

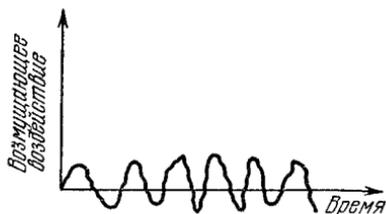


Рис. 4.6

что закон изменения возмущающего воздействия *детерминированный*, т. е. задан в виде определенной функции времени. Такое возмущающее воздействие характерно тем, что знание его в начальный момент времени определяет значения его во все последующие моменты времени. Во втором случае, когда возмущающее воздействие изменяется случайно, говорят, что закон изменения возмущающего воздействия является *стохастическим*. Знание этого закона в начальный момент времени позволяет определить лишь вероятность того или иного значения воздействия в последующие моменты времени.

Случайные возмущающие воздействия представляют собой непрерывно продолжающиеся воздействия. Обычно случайными возмущающими воздействиями являются непрерывные и довольно частые изменения нагрузки. В высококачественных следящих системах источником случайных возмущающих воздействий являются внутренние шумы электронных усилителей. В радиолокационных системах, системах телеуправления случайными возмущающими воздействиями являются помехи, возникающие в каналах связи, и г. д. В противоположность случайным возмущающим воздействиям, при детерминированных возмущающих воздействиях предполагается, что до момента приложения этих воздействий система находилась в покое.

Для систем стабилизации основным является возмущающее воздействие (изменение нагрузки). Для следящих систем обычно преобладающим является задающее воздействие (изменение задания или настройки). В программных системах часто важно наряду с задающим воздействием учитывать и возмущающее воздействие.

Задачей автоматического управления является устранение или уменьшение до необходимых пределов отклонения управляемой величины от заданного значения, вызванного возмущающим воздействием. Принципиально невозможно сделать управляемую величину независимой от всех возмущающих воздействий, ибо по самому принципу работы автоматической системы управляющее устройство может прийти в действие лишь тогда, когда появится отклонение регулируемой величины от заданного значения. Даже при отсутствии возмущающих воздействий регулируемая величина не может во все моменты времени точно изменяться в соответствии с переменным задающим воздействием. Это связано с тем, что в любой системе невозможно внезапное изменение энергии, накопленной в элементах системы. Всякое изменение состояния системы будет вызывать перераспределение этой энергии и в связи с этим изменение управляемой величины.

§ 4.2. Характер процессов управления

Изменение состояния автоматической системы, вызванное возмущающим воздействием, приводит к отклонению управляемой величины от ее предшествующего значения, как это было выяснено ранее в примерах. Это отклонение может с течением времени возрастать, что соответствует неустойчивости системы. Очевидно, неустойчивая система, как правило, не сможет выполнить возложенных на нее функций. По своей природе автоматические системы, представляющие собой системы с обратной связью, склонны к неустойчивости. Поэтому одним из важнейших требований, предъявляемых к автоматической системе, является требование устойчивости. В устойчивой системе отклонение регулируемой величины с течением времени не должно возрастать. Устойчивость системы, как мы уже выяснили, может быть обеспечена соответствующим выбором значений параметров системы или изменением ее структуры путем введения дополнительных стабилизирующих элементов.

Однако устойчивость автоматической системы является лишь необходимым, но далеко не достаточным условием ее нормальной работы. Во всякой устойчивой системе отклонение управляемой величины не может быть равным нулю во все моменты времени при наличии возмущений. Чем меньше это отклонение (с той

или иной точки зрения), тем точнее и, вообще говоря, лучше система выполняет свое назначение.

На рис. 4.7 приведен примерный характер изменения управляемой величины в устойчивой непрерывной системе стабилизации при скачкообразном изменении нагрузки (рис. 4.7, а). Отклонение управляемой величины от заданного значения может

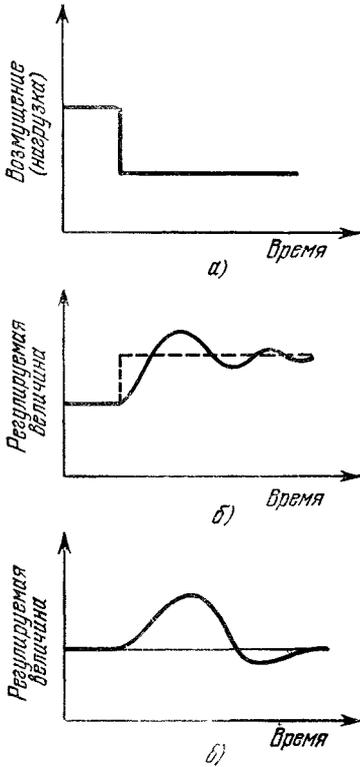


Рис. 4.7.

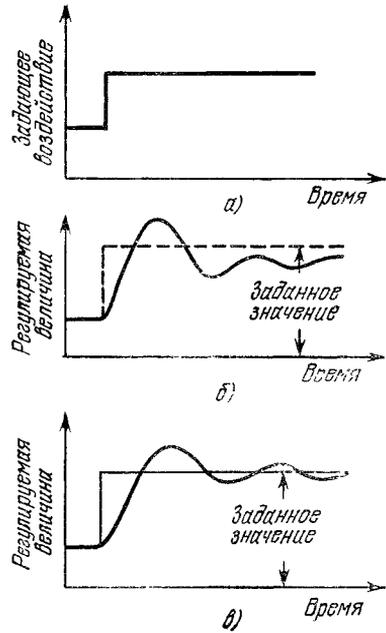
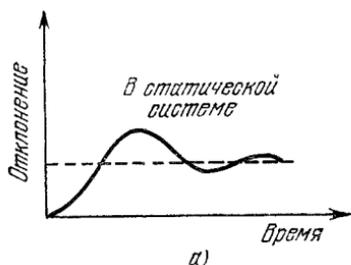


Рис. 4.8.

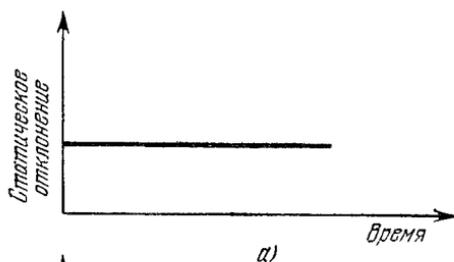
с течением времени стремиться к постоянному значению (рис. 4.7, б) в статических системах или к нулю (рис. 4.7, в) в астатических системах. Если скачком изменяется не нагрузка (возмущающее воздействие), а настройка (задающее воздействие) (рис. 4.8, а), то характер изменения управляемой величины в статической и астатической системах может иметь вид, приведенный на рис. 4.8, б и 4.8, в соответственно.

На рис. 4.9 изображены изменения отклонения от заданного значения управляемой величины для статической (а) и астатической (б) автоматических систем, которое для краткости будем

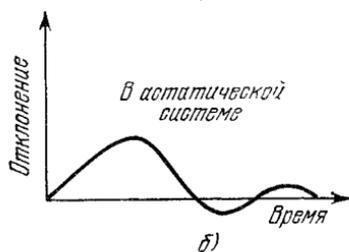
называть просто отклонением. Оно соответствует скачкообразному изменению возмущающего воздействия (нагрузки). Отклонение в рассмотренном случае можно представить в виде суммы



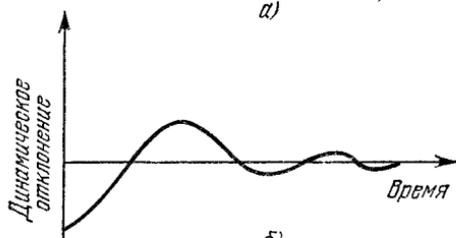
а)



а)



б)

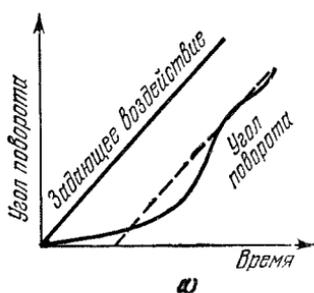


б)

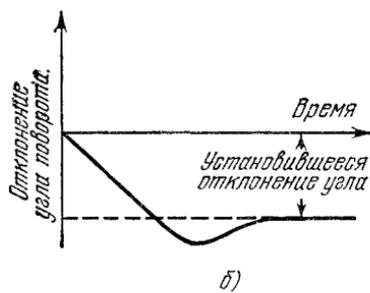
Рис. 4.9.

Рис. 4.10

двух отклонений: статического отклонения, представляющего собой постоянную величину (рис. 4.10, а), и динамического отклонения (рис. 4.10, б), представляющего собой разность статического отклонения и отклонения регулируемой величины от



а)



б)

Рис. 4.11.

заданного значения. В случае (рис. 4.9, б) астатической системы статическое отклонение, разумеется, равно нулю.

На рис. 4.11, а приведена качественная картина изменения управляемой величины — угла поворота следящей системы — при линейном задающем воздействии. Здесь же изображено и

отклонение (рис. 4.11, б), т. е. разность между изменениями задающего воздействия и управляемой величины. Как и ранее, отклонение управляемой величины можно представить в виде двух отклонений — установившегося, или вынужденного отклонения и динамического отклонения. При установившемся отклонении скорости изменения задающего воздействия и регулируемой величины постоянны. На рис. 4.12, а качественно изображены изменения управляемой величины — угла поворота следящей системы — при гармоническом задающем воздействии. Здесь же изображено и отклонение (рис. 4.12, б). В этом случае

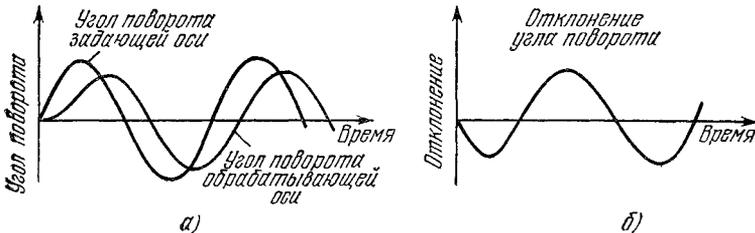


Рис. 4.12.

отклонение с течением времени стремится не к постоянной величине или нулю, а к гармонической функции времени, которая и является установившимся отклонением. Таким образом, в общем случае отклонение управляемой величины может быть функцией времени.

В устойчивых автоматических системах при постоянных или монотонно изменяющихся воздействиях динамическое отклонение с течением времени стремится к нулю, а следовательно, само отклонение стремится к статическому, или установившемуся, отклонению, если такое существует.

Помимо устойчивости, в автоматической системе предъявляют требования к характеру отклонений управляемой величины, т. е. к динамическому и статическому, или установившемуся, отклонениям, характеризующим процесс управления. В связи с тем, что отклонение управляемой величины существенно зависит от вида воздействий, места их приложения, которые могут быть различными, то обычно при рассмотрении конкретных автоматических систем приходится задаваться типовыми, наиболее характерными для данной системы воздействиями. Обычно в качестве такого типового возмущающего воздействия принимают воздействие вида скачка, являющегося во многих случаях наиболее неблагоприятным. Если в этом случае отклонение удовлетворяет определенным условиям, то часто можно считать, что оно тем более будет удовлетворять им и при иных

характерных воздействиях. Для следящих систем в качестве задающего воздействия принимают воздействие, изменяющееся по линейному закону (рис. 4.11, а).

Для характеристики качества работы автоматических систем малое значение имеют детали формы процесса управления. Поэтому требования, предъявляемые к процессу управления, относятся к основным, характерным чертам его, которые назы-

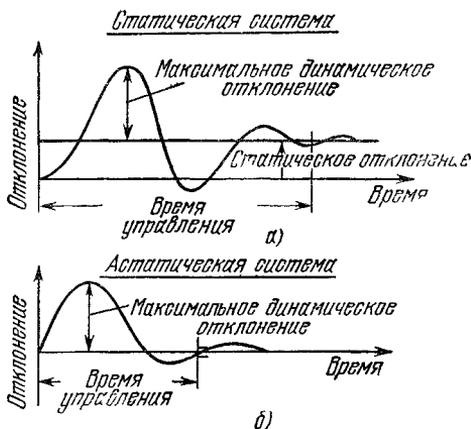


Рис. 4.13

3. *Длительность динамического отклонения, или время управления*, которое определяет время, по истечении которого динамическое отклонение становится и далее остается меньше некоторой заданной малой величины. Часто говорят, что время управления характеризует быстрдействие автоматической системы: чем меньше длительность, тем более быстрдействующей является система.

Перечисленные показатели процесса являются основными, и обычно требования к процессу управления формулируются в виде наибольших допустимых для тех или иных задач значений этих показателей. В ряде случаев предъявляют дополнительные требования к форме процесса, например, требуют обеспечить заданное число колебаний в интервале времени, равном времени управления, отсутствие перерегулирования или монотонность процесса. Все эти требования диктуются техническими соображениями, связанными с применением автоматических систем в каждом конкретном случае. Если воздействие гармоническое, то важными показателями установившегося отклонения являются его амплитуда и фаза.

Все сказанное относится и к дискретным автоматическим системам: импульсным, релейным и цифровым, с той лишь разли-

ваются показателями процесса управления. К показателям процесса относятся (рис. 4.13):

1. *Статическое отклонение* (если таковое имеется), или, в общем случае, установившееся отклонение.

2. *Максимальное динамическое отклонение*, равное разности между максимальным отклонением и статическим отклонением и характеризующее собой величину так называемого перерегулирования.

цей, что в этом случае процессы регулирования могут иметь и не столь плавный характер.

Наличие зазоров, сухого трения в механических элементах систем, ограниченная мощность источников энергии управляющего устройства приводят к тому, что линейная зависимость между входными и выходными величинами нарушается и системы становятся нелинейными. В нелинейных автоматических системах мы сталкиваемся с рядом новых явлений, не присущих рассмотренным выше линейным системам. В частности, в этих системах могут возникать *автоколебания*, т. е. колебания неизменной амплитуды и частоты, зависящие от параметров системы. Автоколебания поддерживаются не внешними периодическими силами, а внутренними силами системы. Требования, предъявляемые к нелинейным автоматическим системам, помимо некоторых из отмеченных выше, сводятся к устранению этих автоколебаний или уменьшению их «амплитуды» до допустимой величины, увеличению частоты. В ряде случаев, наоборот, эти автоколебания используются для уменьшения трения, люфтов и т. п. в автоматических системах.

Кроме этих требований, относящихся к динамике, к автоматическим системам предъявляются требования технологического и конструктивного характера, относящиеся, например, к мощностям элементов и их физической природе, эксплуатационным характеристикам. Эти вопросы, очень важные при проектировании систем, относятся к специальным курсам и здесь не рассматриваются.

§ 4.3. Задачи теории автоматического управления

Теория автоматического управления изучает общие принципы построения автоматических систем, методы их исследования независимо от физической природы процессов, протекающих в этих системах. Теория автоматического управления является теоретической базой создания автоматических систем в различных отраслях техники, экономики и изучения систем в живой природе и обществе.

Основными задачами теории автоматического управления являются исследования статических (или в общем случае установившихся) и динамических свойств автоматических систем и разработка систем, удовлетворяющих заданным техническим требованиям.

Исследование процесса работы некоторой автоматической системы, заданной своей структурой и элементами, при различных параметрах этих элементов и различных воздействиях составляет *задачу анализа*. В задачу анализа, таким образом, входит

исследование устойчивости систем, исследование динамического и статического (или установившегося) отклонений, т. е. процессов управления.

Задача синтеза, несравненно более сложная, чем задача анализа, охватывает само построение автоматических систем управления: выбор схемы управляющего устройства, его отдельных элементов и параметров, обеспечивающих выполнение требований, предъявляемых к автоматическим системам. Тесно связанной с задачей синтеза является задача оптимизации, т. е. задача синтеза оптимальной, в том или ином смысле, автоматической системы. Методы решения задач оптимизации зависят от полноты априорной информации, т. е. предварительных сведений об управляемом объекте и внешних воздействиях. При детерминированной априорной информации относительно объекта используются детерминированные методы. При стохастической априорной информации, например при случайных внешних воздействиях, применяются стохастические методы.

Задачи анализа и синтеза линейных автоматических систем к настоящему времени в значительной степени решены. Много сделано и в решении задачи оптимизации. Что же касается решения этих задач для нелинейных автоматических систем, то пока оно далеко от завершения. Тем не менее результаты, полученные в теории автоматических систем, к настоящему времени дают возможность сознательно, научно подходить к анализу и синтезу современных сложных автоматических систем.

Теория автоматического управления в общих чертах может быть разделена на два больших раздела. Первый раздел охватывает теорию *непрерывных автоматических систем* регулирования. Второй раздел посвящен теории *дискретных автоматических систем* регулирования. Теория этих систем включает исследование установившихся режимов, их устойчивости, анализ процессов, синтез оптимальных систем как при детерминированных, так и при случайных воздействиях.

Теория автоматического управления тесно связана с рядом смежных технических и научных дисциплин, результаты которых она использует для решения своих задач. Особенно здесь следует указать на теорию колебаний, теорию переходных процессов, теорию цепей, теорию случайных процессов, математическое программирование. Круг вопросов, затрагиваемых теорией автоматического управления, исключительно широк. Велико также разнообразие автоматических систем. Поэтому изучение курса теории автоматических систем должно идти не только и не столько по пути знакомства с отдельными схемами систем, сколько по пути изучения принципов построения и знакомства с общими свойствами, особенностями и возможностями этих систем.

Часть вторая

НЕПРЕРЫВНЫЕ АВТОМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

А. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Глава 5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 5.1. Понятие о линейных системах

Автоматические системы представляют собой динамические системы, в которых соединения отдельных элементов образуют, как правило, *контур с обратной связью*. Характерная особенность таких систем состоит в том, что каждый предыдущий элемент воздействует на последующий, а влияние последующего элемента на состояние предыдущего весьма мало. Иными словами, элементы автоматической системы обладают *однонаправленным действием*.

Элементы, образующие автоматическую систему, представляют собой *преобразователи* входной величины в выходную величину, вообще говоря, иной формы и, возможно, иной природы. Так, например, входная и выходная величины усилителя представляют собой напряжения различного уровня и мощности. Для генератора входная величина — напряжение (напряжение возбуждения), а выходная величина — также напряжение, снимаемое с якорной обмотки. Форма этого напряжения в силу инерционности, вызванной наличием индуктивности цепи возбуждения, отличается от формы напряжения возбуждения. Для электродвигателя входной величиной является напряжение, приложенное к якорной цепи, а выходной величиной — переменная совсем иной физической природы, каковой является скорость вращения или угол поворота вала двигателя.

Если реакция элемента на линейную комбинацию воздействий равна той же линейной комбинации реакций элемента на каждое воздействие в отдельности, то такой элемент называется *линейным*. Это определяющее свойство линейных элементов выражает собой *принцип суперпозиции*. Поэтому линейный элемент можно определить как такой элемент, для которого справедлив принцип суперпозиции. Если для элемента принцип суперпозиции несправедлив, то такой элемент будем называть *нелинейным*.

Факт линейности или нелинейности того или иного элемента может быть установлен либо экспериментальным путем, либо по уравнениям, описывающим процессы, происходящие в рассматриваемом элементе.

В качестве примера рассмотрим соединение усилителя с простейшим инерционным элементом, представляющим собой RC -цепь (рис. 5.1). Уравнение усилителя:

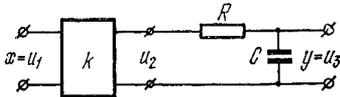


Рис. 5.1.

$$u_2(t) = ku_1(t). \quad (5.1)$$

Уравнение RC -цепи:

$$T \frac{du_3(t)}{dt} + u_3(t) = u_2(t), \quad (5.2)$$

где $T = RC$ — постоянная времени.

Исключая из (5.1) и (5.2) $u_2(t)$ и используя обозначения $x(t) = u_1(t)$ и $y(t) = u_3(t)$, получим

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t). \quad (5.3)$$

Если параметры элемента — коэффициент усиления k и постоянная времени T — неизменны, то для рассматриваемого элемента будет справедлив принцип суперпозиции. Действительно, в этом случае из уравнения

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k(x_1(t) + x_2(t)) \quad (5.4)$$

следует, что

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t), \quad (5.5)$$

где $y_1(t)$ и $y_2(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$T \frac{dy_1(t)}{dt} + y_1(t) = kx_1(t) \quad (5.6)$$

и

$$T \frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t) = kx_2(t). \quad (5.7)$$

Принцип суперпозиции будет также соблюдаться и для RC -цепи с переменными параметрами, когда коэффициент усиления k_{Π} и постоянная времени T_{Π} будут произвольными функциями времени. В этом случае уравнение с постоянными коэффициентами (5.3) заменяется уравнением с переменными коэффициентами

$$T_{\Pi}(t) \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_{\Pi}(t) x(t). \quad (5.8)$$

Принцип суперпозиции, как это следует из (5.4)—(5.7), после замены T на $T_{\Pi}(t)$ и k на $k_{\Pi}(t)$ остается по-прежнему справедливым.

Предположим теперь, что параметры элемента R , C и коэффициент усиления k_{Π} зависят от входной и (или) выходной величин. В этом случае постоянная времени T_{Π} также будет зависеть от входного воздействия x и (или) выходной величины y . Уравнение такого элемента может быть записано в виде

$$T_{\Pi}(x(t), y(t)) \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_{\Pi}(x(t), y(t)) x(t). \quad (5.9)$$

Теперь принцип суперпозиции несправедлив, поскольку

$$\begin{aligned} k_{\Pi}(x_1(t) + x_2(t), y_1(t) + y_2(t)) (x_1(t) + x_2(t)) &\neq \\ &\neq k_{\Pi}(x_1(t), y_1(t)) x_1(t) + k_{\Pi}(x_2(t), y_2(t)) x_2(t) \end{aligned} \quad (5.10)$$

и

$$\begin{aligned} T_{\Pi}(x_1(t) + x_2(t), y_1(t) + y_2(t)) \frac{d(y_1(t) + y_2(t))}{dt} &\neq \\ &\neq T_{\Pi}(x_1(t), y_1(t)) \frac{dy_1(t)}{dt} + T_{\Pi}(x_2(t), y_2(t)) \frac{dy_2(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Такие элементы относятся к нелинейным элементам.

Если все элементы, входящие в систему, линейны, то и система будет линейна. Если хотя бы один из элементов представляет собой нелинейный элемент, то вся система будет нелинейной.

Принцип суперпозиции, справедливый для линейных систем, существенно облегчает как описание систем, так и исследование их динамических свойств.

§ 5.2. Уравнения, блок-схемы и графы автоматических систем

Уравнения автоматической системы представляют собой совокупность уравнений элементов, входящих в систему. Эти элементы могут быть различной физической природы: механические, электрические, электромеханические, гидравлические, тепловые и т. д. Поэтому для составления уравнений элементов используются фундаментальные законы природы, выражаемые уравнениями Ньютона, Лагранжа, Кирхгоффа и т. п. Методика составления уравнений детально разработана в таких дисциплинах, как механика, электротехника, электромеханика, термодинамика, теплотехника и др., и с этой методикой, при необходимости, можно познакомиться по соответствующим руководствам.

Уравнения автоматической системы, как уже отмечалось, составляются по уравнениям ее элементов. Для конкретности

рассмотрим систему регулирования числа оборотов $n(t)$ электродвигателя (рис. 5.2), для измерения скорости вращения которого используется тахогенератор. Напряжение тахогенератора $u_{ТГ}(t)$, пропорциональное скорости вращения, сравнивается с напряжением задающего устройства $u_0(t)$, и разность $u(t) = u_0(t) - u_{ТГ}(t)$ подается на вход усилителя $УС$, выходная величина которого питает обмотку возбуждения электромашиного усилителя $ЭМУ$.

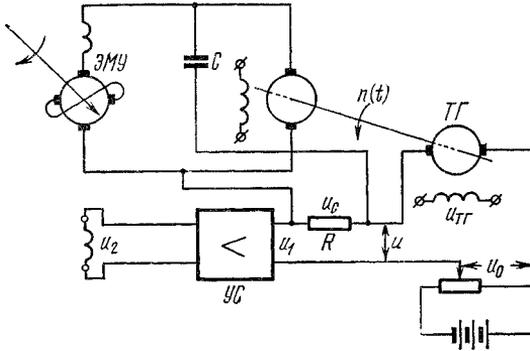


Рис. 5.2.

В свою очередь выходное напряжение электромашиного усилителя подается на якорь электродвигателя. Система работает следующим образом. Если нагрузка на валу двигателя увеличилась, то скорость в первый момент уменьшится, напряжение тахогенератора упадет, а напряжение на входе усилителя возрастет, что приведет к увеличению напряжения электромашиного усилителя и, значит, к увеличению скорости вращения электродвигателя. Внутренняя обратная связь служит для стабилизации системы. Это гибкая, или упругая, обратная связь. Она действует только во время переходного режима, поскольку в установившемся режиме емкость C разрывает цепь внутренней обратной связи. Для составления уравнения системы разобьем ее на элементы и составим уравнения каждого элемента. Совокупность этих уравнений и уравнений связи описывает автоматическую систему.

1. Уравнение электродвигателя:

$$T_d \frac{dn(t)}{dt} + n(t) = k_d e_a(t), \quad (5.11)$$

где T_d — постоянная времени двигателя, k_d — коэффициент усиления двигателя, $e_a(t)$ — э. д. с., питающая якорную цепь.

2. Уравнение электромашиного усилителя. Электромашиный усилитель представляет собой комбинацию

на одном валу двух генераторов, соединенных последовательно. Компенсационная обмотка (к. о.) предназначена для устранения реакции якоря. Уравнение цепи управления — первого каскада:

$$T_y \frac{de_b(t)}{dt} + e_b(t) = k_y u_2(t). \quad (5.12)$$

Уравнение поперечной цепи — второго каскада:

$$T_n \frac{de_n(t)}{dt} + e_n(t) = k_n e_b(t), \quad (5.13)$$

где T_y — постоянная времени цепи управления электромашинного усилителя, k_y — коэффициент усиления первого каскада, T_n — постоянная времени цепи поперечной цепи, k_n — коэффициент усиления второго каскада, $e_b(t)$ — э. д. с. питания обмотки возбуждения второго каскада, $u_2(t)$ — входное напряжение электромашинного усилителя.

3. Уравнение электронного усилителя:

$$u_2(t) = k_a u_1(t), \quad (5.14)$$

где k_a — коэффициент усиления.

4. Уравнение внутренней обратной связи:

$$u_1(t) = u(t) - u_c(t), \quad (5.15)$$

$$T_c \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = k_c \frac{de'_n(t)}{dt}, \quad (5.16)$$

где k_c — коэффициент усиления или, точнее, «ослабления», T_c — постоянная времени. Далее для простоты предполагается, что $e'_n(t) \approx e_n(t)$.

5. Уравнение отклонения (уравнение ошибки):

$$u(t) = u_0(t) - u_{тг}(t). \quad (5.17)$$

6. Уравнение тахогенератора:

$$u_{тг}(t) = k_{тг} n(t); \quad (5.18)$$

$k_{тг}$ — коэффициент преобразования числа оборотов вала в напряжение.

Система уравнений (5.11) — (5.18) описывает процессы в автоматической системе — системе регулирования числа оборотов двигателя. Исключая из полученных уравнений промежуточные величины, можно найти уравнения относительно интересующих нас величин. Но, как правило, эти операции очень трудоемки и громоздки. Поэтому возникает потребность как-то упростить эти промежуточные операции. Это может быть достигнуто, если вместо рассмотрения величин, характеризующих состояние системы во времени — оригиналов, — рассматривать соответствующие им

изображения, получаемые на основе *преобразования Лапласа*. Применение преобразования Лапласа позволяет заменить операции дифференцирования, интегрирования более простыми операциями умножения и деления, тем самым существенно упростить составление и исследование уравнений автоматических систем.

Преобразование Лапласа определяется соотношением

$$X(p) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t) dt \quad (5.19)$$

между оригиналом $x(t)$ и его изображением $X(p)$. Основные сведения по теории преобразования Лапласа приведены в приложении 1.

Рассмотрим в качестве примера простейшее линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t), \quad (5.20)$$

которое описывает многие элементы автоматических систем и, в частности, некоторые элементы системы регулирования числа оборотов электродвигателя (рис. 5.2). Подвергая это уравнение преобразованию Лапласа, получим

$$L\left\{T \frac{dy(t)}{dt} + y(t)\right\} = L\{kx(t)\}, \quad (5.21)$$

или, на основании теоремы линейности (теорема 1, приложение 1),

$$TL\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + L\{y(t)\} = kL\{x(t)\}. \quad (5.22)$$

Замечая теперь, что на основании теоремы дифференцирования (теорема 2, приложение 1)

$$L\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = pL\{y(t)\} - y(0), \quad (5.23)$$

где $y(0)$ — начальное значение $y(t)$ при $t = 0$, и принимая во внимание обозначение (5.19), запишем (5.22) в виде

$$T(pY(p) - y(0)) + Y(p) = kX(p), \quad (5.24)$$

или

$$(Tp + 1)Y(p) = kX(p) + Ty(0). \quad (5.25)$$

Это линейное алгебраическое уравнение. Решая его относительно $Y(p)$, находим

$$Y(p) = \frac{k}{Tp + 1} \left(X(p) + \frac{T}{k} y(0) \right). \quad (5.26)$$

Обозначим

$$K(p) = \frac{k}{Tp + 1} \quad (5.27)$$

и

$$X_n(p) = \frac{T}{k} y(0). \quad (5.28)$$

Тогда уравнение элемента относительно изображений (5.26) можно записать в такой форме:

$$Y(p) = K(p)(X(p) + X_n(p)). \quad (5.29)$$

В том частном, но часто встречающемся случае, когда начальное значение $y(0)$ равно нулю, из (5.28) следует, что $X_n(p) \equiv 0$, и уравнение (5.29) принимает простой вид:

$$Y(p) = K(p)X(p). \quad (5.30)$$

Функция $K(p)$, зависящая исключительно от параметров элемента и определяющая связь между изображениями выходной и входной величин, называется *передаточной функцией* элемента. В рассмотренном частном случае она определяется выражением (5.27).

Формально передаточная функция получается из дифференциального уравнения после замены в нем символа кратного дифференцирования на соответствующую степень p и деления образованного таким образом многочлена правой части уравнения на многочлен левой части уравнения.

Для элементов с сосредоточенными параметрами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, передаточные функции представляют собой дробно-рациональные функции p . Каждый элемент автоматической системы может описываться либо дифференциальным уравнением, либо соответствующей передаточной функцией.

Для системы регулирования числа оборотов электродвигателя уравнения относительно изображений будут иметь следующий вид.

1. Уравнение электродвигателя:

$$N(p) = \frac{k_d}{T_d p + 1} E_d(p). \quad (5.11')$$

2. Уравнение электромашиного усилителя:

$$E_B(p) = \frac{k_y}{T_y p + 1} U_2(p), \quad (5.12')$$

$$E_d(p) = \frac{k_n}{T_n p + 1} E_B(p). \quad (5.13')$$

3. Уравнение электронного усилителя:

$$U_2(p) = k_3 U_1(p). \quad (5.14')$$

4. Уравнение внутренней обратной связи:

$$U_1(p) = U(p) - U_c(p), \quad (5.15')$$

$$U_c(p) = \frac{k_c p}{T_c p + 1} E_a(p). \quad (5.16')$$

5. Уравнение отклонения:

$$U(p) = U_0(p) - U_{\text{ТР}}(p). \quad (5.17')$$

6. Уравнение тахогенератора:

$$U_{\text{ТР}}(p) = k_{\text{ТР}} N(p). \quad (5.18')$$

Система уравнений относительно изображений (5.11')—(5.18') также описывает замкнутую систему регулирования числа

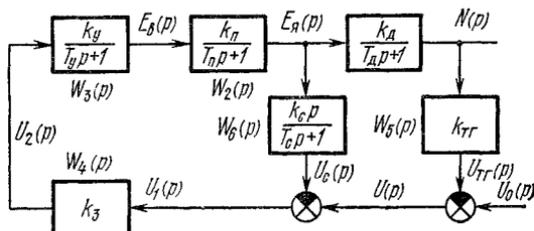


Рис. 5.3.

оборотов. В отличие от системы дифференциальных уравнений (5.11)—(5.18), теперь система (5.11')—(5.18') является системой алгебраических уравнений относительно изображений.

Блок-схема системы регулирования числа оборотов двигателя изображена на рис. 5.3. Она определяет тип элементов, характеризуемый передаточной функцией, и связи между элементами.

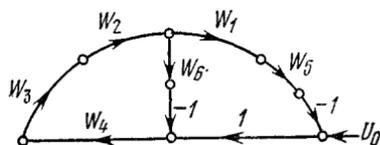


Рис. 5.4

Наряду с блок-схемой удобно использовать граф — диаграмму прохождения сигналов. Граф системы регулирования числа оборотов двигателя приведен на рис. 5.4. Ветви графа соответствуют передаточным функциям элементов, а узлы графа — соединениям — связям элементов.

§ 5.3. Алгебра передаточных функций

Для определения передаточных функций автоматических систем по их блок-схемам или графам необходимо уметь определять передаточные функции соединений элементов по передаточным функциям отдельных элементов. При рассмотрении блок-схемы или графа нетрудно выделить три характерных соединения: последовательное, параллельное и обратное. Правила, позволяющие определять передаточные функции системы в целом по передаточным функциям отдельных элементов, и составляют алгебру передаточных функций.

1. Последовательное соединение. *Последовательным соединением* элементов называется такое соединение, при котором выходная величина предшествующего элемента является входной величиной последующего (рис. 5.5).

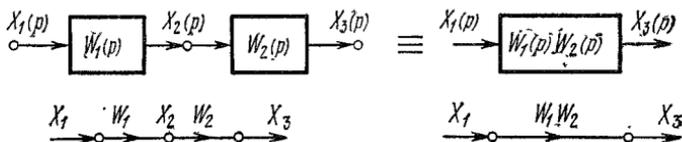


Рис. 5.5

Для последовательного соединения имеем

$$X_2(p) = W_1(p) X_1(p) \quad (5.31)$$

и

$$X_3(p) = W_2(p) X_2(p), \quad (5.32)$$

откуда после исключения $X_2(p)$ получаем

$$X_3(p) = W_1(p) W_2(p) X_1(p) = W(p) X_1(p) \quad (5.33)$$

и, значит,

$$W(p) = W_1(p) W_2(p). \quad (5.34)$$

В общем случае при последовательном соединении n элементов

$$W(p) = W_1(p) W_2(p) \dots W_n(p). \quad (5.35)$$

Передаточная функция последовательного соединения элементов равна произведению передаточных функций отдельных элементов.

Пример. Последовательное соединение RC-цепей (рис. 5.6). Передаточные функции RC-цепей имеют вид

$$W_1(p) = \frac{1}{T_1 p + 1}, \quad T_1 = R_1 C_1 \quad (5.36)$$

и

$$W_2(p) = \frac{k}{T_2 p + 1}, \quad T_2 = R_2 C_2, \quad (5.37)$$

k — коэффициент усиления усилителя, включенного между RC -цепями. Передаточная функция такого последовательного соединения будет равна

$$W(p) = W_1(p) W_2(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}. \quad (5.38)$$

При отсутствии «развязывающего» усилителя передаточная функция последовательного соединения RC -цепей (рис 5.7) уже не определяется выражением (5.38), поскольку подсоединение второй RC -цепи «нагружает» первую и,

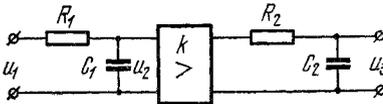


Рис 5.6.

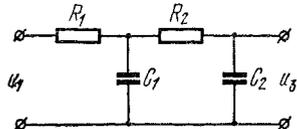


Рис 5.7.

следовательно, напряжение на выходе первой цепи изменяется. Только при достаточно большом входном сопротивлении второй RC -цепи последовательное соединение (рис. 5.7) приближенно определяется выражением (5.38).

2. Параллельное соединение. *Параллельным соединением* элементов называется такое соединение, при котором входная

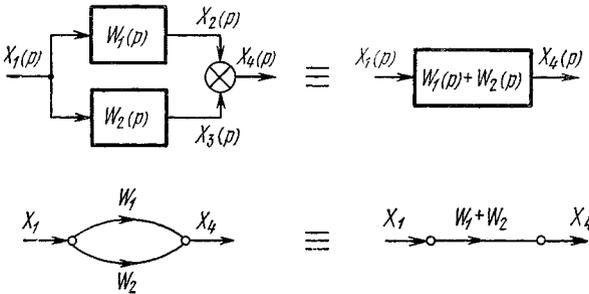


Рис 5.8.

величина одна и та же для всех элементов, а выходные величины их суммируются (рис. 5.8).

Для параллельного соединения имеем

$$X_2(p) = W_1(p) X_1(p) \quad (5.39)$$

и

$$X_3(p) = W_2(p) X_1(p) \quad (5.40)$$

и, кроме того,

$$X_4(p) = X_2(p) + X_3(p). \quad (5.41)$$

Подставляя в (5.41) $X_2(p)$ и $X_3(p)$ из (5.39) и (5.40), получаем

$$X_4(p) = (W_1(p) + W_2(p)) X_1(p) = W(p) X_1(p) \quad (5.42)$$

и, значит,

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p). \quad (5.43)$$

В общем случае при параллельном соединении n элементов

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p) + \dots + W_n(p). \quad (5.44)$$

Передаточная функция параллельного соединения равна сумме передаточных функций отдельных звеньев.

Пример. Соединение малоинерционной и инерционной терморпар (рис. 5.9).

Обозначим через k_1 и k_2 коэффициенты передачи терморпар $\left[\frac{\text{градус}}{\text{вольт}} \right]$, а через T_1 и T_2 — их постоянные времени, причем $T_1 \ll T_2$. Передаточные функции терморпар имеют вид

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}, \quad W_2(p) = \frac{k_2}{T_2 p + 1}. \quad (5.45)$$

Э. д. с. терморпар алгебраически складываются, поэтому

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p) = \frac{(k_1 T_2 - k_2 T_1) p + k_1 - k_2}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}. \quad (5.46)$$

В частном случае, при $k_1 = k_2 = k$,

$$W(p) = \frac{k(T_2 - T_1) p}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}. \quad (5.47)$$

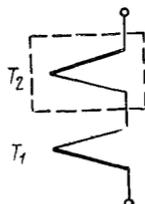


Рис. 5.9.

Такое соединение терморпар приобретает новые свойства, а именно свойства дифференцирующего устройства.

3. Обратное соединение. Обратным соединением двух элементов или соединением обратной связи называется такое

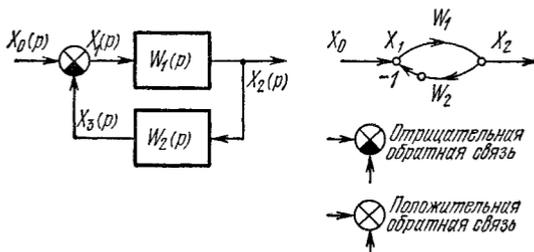


Рис. 5.10.

соединение, при котором выход каждого из элементов соединяется со входом другого элемента (рис. 5.10).

Для обратного соединения имеем

$$X_2(p) = W_1(p) X_1(p), \quad (5.48)$$

$$X_3(p) = W_2(p) X_2(p) \quad (5.49)$$

и

$$X_1(p) = X_0(p) \mp X_3(p). \quad (5.50)$$

Знак минус в (5.50) соответствует *отрицательной обратной связи*, а знак плюс — *положительной обратной связи*. Из уравнений (5.48) и (5.49), соответствующих последовательному соединению элементов, следует

$$X_3(p) = W_1(p) W_2(p) X(p). \quad (5.51)$$

Заменяя $X_3(p)$ в (5.50) его значением из (5.51), получим

$$X_1(p) = \frac{1}{1 \pm W_1(p) W_2(p)} X_0(p). \quad (5.52)$$

Подставляя это значение в (5.48), будем иметь

$$X_2(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p) W_2(p)} X_0(p) = W_{oc}(p) X_0(p). \quad (5.53)$$

Отсюда находим передаточную функцию обратного соединения:

$$W_{oc}(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p) W_2(p)}. \quad (5.54)$$

Элемент, характеризуемый передаточной функцией $W_1(p)$, назовем *прямой частью* замкнутой системы, а элемент, характеризуемый передаточной функцией $W_2(p)$, — *обратной связью*.

Передаточная функция обратного соединения, или соединения обратной связи, равна дроби, числитель которой представляет собой передаточную функцию прямой части, а знаменатель — передаточную функцию разомкнутой системы со знаком плюс, если обратная связь отрицательна, или со знаком минус, если обратная связь положительна, увеличенную на единицу.

Для обратной передаточной функции обратного соединения получаем

$$W_{oc}^{-1}(p) = W_1^{-1}(p) \pm W_2(p). \quad (5.55)$$

Обратная передаточная функция обратного соединения равна алгебраической сумме обратной передаточной функции прямой части и передаточной функции элемента обратной связи.

Пример. Рассмотрим обратное соединение RC-цепи и усилителя (рис. 5.11). Таким образом осуществляется так называемая жесткая обратная связь. Передаточные функции RC-цепи и усилителя равны

$$W_1(p) = \frac{1}{Tp + 1}, \quad T = RC \quad (5.56)$$

и

$$W_2(p) = k. \quad (5.57)$$

Передаточная функция обратного соединения равна

$$W_{oc}(p) = \frac{1}{\frac{Tp+1}{1 \pm \frac{k}{Tp+1}}} = \frac{1}{Tp+1 \pm k}, \quad (5.58)$$

или, вводя обозначения эквивалентных коэффициентов усиления и постоянной времени

$$k_{эк} = \frac{1}{1 \pm k}, \quad T_{эк} = \frac{T}{1 \pm k}, \quad (5.59)$$

получаем

$$W_{oc}(p) = \frac{k_{эк}}{T_{эк}p + 1}. \quad (5.60)$$

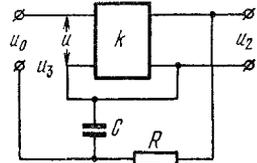


Рис 5.11.

Введение жесткой обратной связи изменяет параметры RC -цепи. При отрицательной обратной связи (знак $+$) $k_{эк}$ и $T_{эк}$ уменьшаются в $(1+k)$ раз.

При положительной обратной связи (знак $-$) $k_{эк}$ и $T_{эк}$ увеличиваются в $(1-k)$ раз при $k < 1$. Если же $k = 1$, то, как следует из (5.59),

$$W_{oc}(p) = \frac{1}{Tp}, \quad (5.61)$$

что соответствует интегратору. Из этого примера видно, что обратное соединение позволяет качественно изменять свойства элементов.

При преобразовании блок-схем или графов, помимо указанных выше правил определения передаточных функций соединений, полезно использовать правила переноса точки съема и точки суммирования.

4. Правило переноса точки съема.

Если точка съема переносится против направления прохождения сигнала, то в переносимую ветвь нужно включить элементы с передаточными функциями всех элементов, встречающихся на пути между прежней и новой точками съема (рис. 5.12).

Если точка съема переносится по направлению прохождения сигнала, то в переносимую ветвь нужно включить элементы с обратными передаточными функциями всех элементов, встречающихся на пути между новой и прежней точками съема (рис. 5.13).

5. Правило переноса точки суммирования.

Если точка суммирования переносится по направлению прохождения сигнала, то в переносимую ветвь нужно включить элементы с передаточными функциями всех элементов, встречающихся на пути между прежней и новой точками суммирования (рис. 5.14),

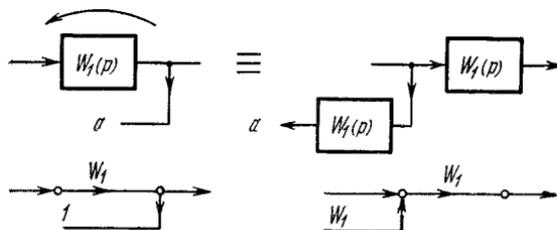


Рис. 5.12

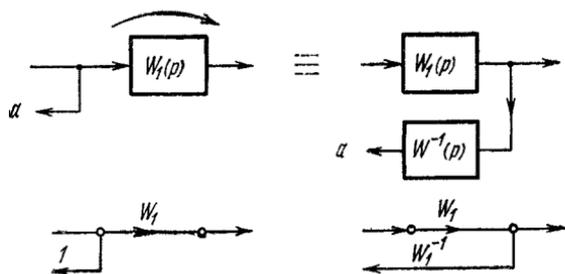


Рис. 5.13.

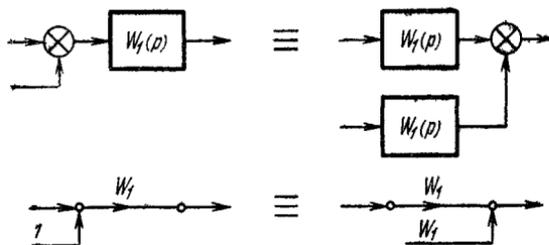


Рис. 5.14.

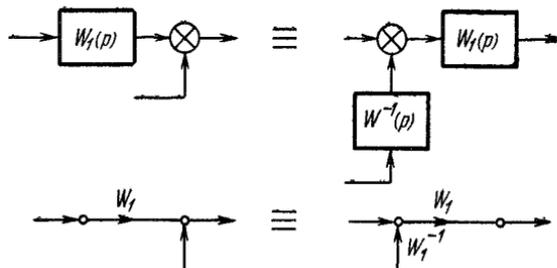


Рис. 5.15.

Если точка суммирования переносится против направления прохождения сигнала, то в переносимую ветвь нужно включить элементы с передаточными функциями всех элементов, встречающихся между новой и прежней точками суммирования (рис. 5.15).

§ 5.4. Передаточные функции и уравнения замкнутых систем

Общая методика определения передаточных функций замкнутых систем состоит в следующем:

1. Переносим точки съема на основании правила 4 так, чтобы образовались выделяемые последовательное, параллельное соединения и соединение с обратной связью.

2. Заменяем параллельно соединенные элементы и внутренние обратные соединения на основании правил 1, 2, 3 эквивалентными элементами.

3. Выписываем передаточную функцию замкнутой системы на основании правила 3 и по этой передаточной функции составляем уравнение замкнутой системы.

Рассмотрим в качестве примера систему автоматического регулирования числа оборотов электродвигателя. Поскольку в ней все типы соединений (последовательное и обратное) выделены, то нет необходимости в первом этапе. Второй этап — замена внутреннего обратного соединения — сводится к введению вместо обратного соединения эквивалентного элемента с передаточной функцией

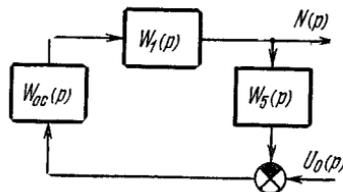


Рис. 5.16.

$$W_{0c}(p) = \frac{W_2(p) W_3(p) W_4(p)}{1 + W_2(p) W_3(p) W_4(p) W_6(p)}, \quad (5.62)$$

и блок-схема примет более простой вид (рис. 5.16). Прямая часть системы включает элементы с передаточными функциями $W_{0c}(p)$ и $W_1(p)$, а в обратную связь входит элемент с передаточной функцией $W_5(p)$. Передаточная функция замкнутой системы будет равна

$$K(p) = \frac{W_1(p) W_{0c}(p)}{1 + W_{0c}(p) W_1(p) W_5(p)}, \quad (5.63)$$

или, в развернутой форме, после подстановки $W_{0c}(p)$ из (5.62),

$$K(p) = \frac{W_1(p) W_2(p) W_3(p) W_4(p)}{1 + W_2(p) W_3(p) W_4(p) W_6(p) + W_1(p) W_2(p) W_3(p) W_4(p) W_5(p)}. \quad (5.64)$$

Уравнение замкнутой системы регулирования числа оборотов двигателя, таким образом, представится в виде

$$N(p) = K(p) U_0(p). \quad (5.65)$$

В качестве другого примера, в котором необходимо использовать все этапы методики определения передаточной функции,

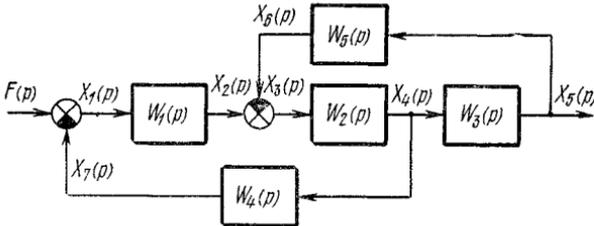


Рис. 5.17

рассмотрим блок-схему, изображенную на рис. 5.17. Соответствующий этой блок-схеме граф приведен на рис. 5.18, а. В отличие от предыдущего примера, все этапы будем проводить с

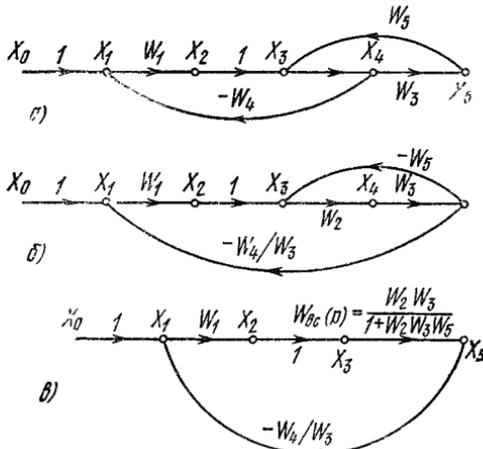


Рис 5.18

помощью преобразований графа. Рис. 5.18, б соответствует переносу точки съема для образования выделяемого соединения внутренней обратной связи. Рис. 5.18, в соответствует замене внутренней обратной связи эквивалентным элементом. Непосредственно по преобразованному таким образом графу (рис. 5.18, в)

выписываем передаточную функцию замкнутой системы:

$$K(p) = \frac{W_1(p) W_{вс}(p)}{1 + W_1(p) W_{вс}(p) W_4(p) / W_3(p)}, \quad (5.66)$$

где

$$W_{вс}(p) = \frac{W_2(p) W_3(p)}{1 + W_2(p) W_3(p) W_5(p)}. \quad (5.67)$$

Подставляя (5.67) в (5.66), находим

$$K(p) = \frac{W_1(p) W_2(p) W_3(p)}{1 + W_2(p) W_3(p) W_5(p) + W_1(p) W_2(p) W_4(p)}, \quad (5.68)$$

и, следовательно, уравнение замкнутой системы запишется в виде

$$X_3(p) = K(p) F(p).$$

При наличии нескольких воздействий (рис. 5.19) на основании принципа суперпозиции находятся передаточные функции замкнутой системы относительно каждого воздействия порознь. Затем они умножаются на изображение соответствующих воздействий и складываются. Так, для блок-схемы рис. 5.19 передаточная функция по задающему воздействию $F_3(p)$ равна

$$K_3(p) = \frac{W_1(p) W_2(p)}{1 + W_1(p) W_2(p) W_3(p)}, \quad (5.69)$$

а передаточная функция по возмущающему воздействию $F_B(p)$ равна

$$K_B(p) = \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p) W_2(p) W_3(p)}. \quad (5.70)$$

Уравнение системы, следовательно, будет иметь вид

$$Z(p) = K_3(p) F_3(p) + K_B(p) F_B(p). \quad (5.71)$$

Рассмотрим общую блок-схему автоматической системы (рис. 5.20). Обозначим через $W_3(p)$ передаточную функцию соединения элементов между точкой приложения задающего воздействия $f_3(t)$ и выходной величиной $z(t)$, а через $W_B(p)$ — передаточную функцию соединения элементов между точкой приложения возмущающего воздействия $f_B(t)$ и выходной величиной $z(t)$. Наконец, через $W(p)$ будем обозначать передаточную

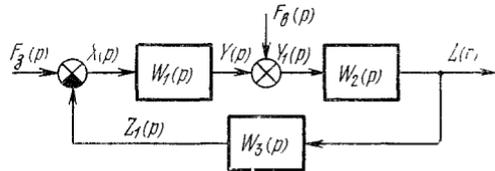


Рис 5.19

функцию элемента между задающим и возмущающим воздействиями. Тогда передаточные функции замкнутой системы по задающему и возмущающему воздействиям будут равны соответственно

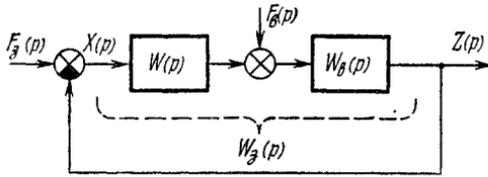


Рис 5.20.

$$K_3(p) = \frac{W_3(p)}{1 + W_3(p)} \quad (5.72)$$

и

$$K_b(p) = \frac{W_b(p)}{1 + W_b(p) W(p)}. \quad (5.73)$$

Уравнение замкнутой системы относительно выходной величины будет иметь вид

$$Z(p) = K_3(p) F_3(p) + K_b(p) F_b(p). \quad (5.74)$$

Изображение ошибки $X(p)$ связано с изображениями задающего воздействия $F_3(p)$ и выходной величины $Z(p)$ простым соотношением:

$$X(p) = F_3(p) - Z(p), \quad (5.75)$$

выражающим условие замыкания системы. Подставляя в (5.75) $Z(p)$ из (5.74), получим уравнение относительно ошибки:

$$X(p) = (1 - K_3(p)) F_3(p) - K_b(p) F_b(p). \quad (5.76)$$

При наличии дополнительных воздействий, приложенных к различным точкам системы, следует определить соответствующие передаточные функции по этим воздействиям и добавить в уравнение (5.74) слагаемые, равные произведению этих передаточных функций на изображения соответствующих воздействий. Если начальные значения для некоторых элементов отличны от нуля, то их можно рассматривать как дополнительные воздействия, приложенные ко входу этих элементов. Так, для элементов, обладающих передаточными функциями вида (5.27), изображения этих дополнительных воздействий определяются согласно (5.28) как

$$X_n(p) = \frac{T}{k} y(0), \quad (5.77)$$

что соответствует воздействию вида δ -функции

$$x_n(t) = \frac{T}{k} y(0) \delta(t) \quad (5.78)$$

(см. приложения 1 и 2). Заметим, что это воздействие $x_n(t)$ существенно зависит от параметров элемента.

Иногда целесообразно привести возмущающее воздействие к точке приложения задающего воздействия. Такой пересчет иллюстрируется рис. 5.21. Изображение внешнего воздействия, приведенного к выходу системы (рис. 5.21, а), равно $W_B(p)F_B(p)$. Перенося это воздействие за точку съема и на вход замкнутой системы, окончательно получаем, что структура системы при наличии задающего и возмущающего воздействий (рис. 5.20)

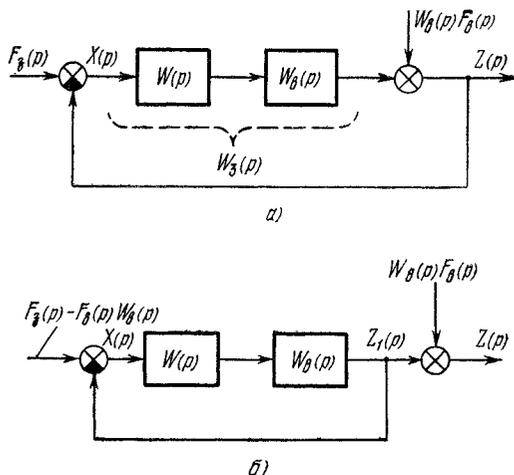


Рис. 5.21.

эквивалентна структуре системы, изображенной на рис. 5.21, б. На вход этой системы приложено эквивалентное воздействие $f_{\text{эк}}(t)$, изображение которого равно

$$F_{\text{эк}}(p) = F_B(p) - W_B(p)F_B(p), \quad (5.79)$$

а изображение истинной выходной величины равно

$$Z(p) = Z_1(p) + W_B(p)F_B(p), \quad (5.80)$$

где $Z_1(p)$ — изображение выходной величины эквивалентной системы:

$$Z_1(p) = K_3(p)F_{\text{эк}}(p). \quad (5.81)$$

Уравнение эквивалентной системы относительно ошибки

$$X(p) = F_{\text{эк}}(p) - Z_1(p) \quad (5.82)$$

получится после подстановки (5.81) в (5.82):

$$X(p) = (1 - K_3(p))F_{\text{эк}}(p). \quad (5.83)$$

Уравнения (5.76) или (5.80) и (5.81), (5.83) лежат в основе анализа и синтеза линейных автоматических систем.

Задачи

5.1. Показать, что передаточная функция цепи (рис. 5.22) имеет вид

$$W(p) = \frac{1}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_{12} + T_2) p + 1},$$

где $T_1 = R_1 C_1$, $T_2 = R_2 C_2$, $T_{12} = R_1 C_2$

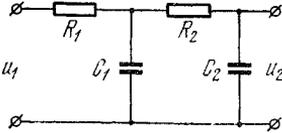


Рис. 5.22.

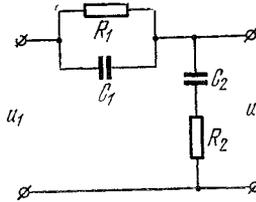


Рис. 5.23

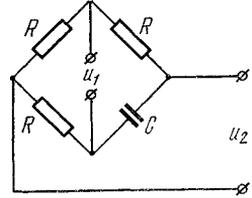


Рис. 5.24.

5.2. Показать, что передаточная функция цепи (рис. 5.23) имеет вид

$$W(p) = \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_{12} + T_2 p) + 1},$$

где $T_1 = R_1 C_1$, $T_2 = R_2 C_2$, $T_{12} = R_1 C_2$.

5.3. Показать, что передаточная функция молотковой цепи (рис. 5.24) имеет вид

$$W(p) = \frac{1 - T_1 p}{1 + T_1 p}, \quad T_1 = RC.$$

СТРУКТУРЫ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 6.1. Обычная система

Блок-схема и граф обычной автоматической системы изображены на рис. 6.1. Примем следующие обозначения: $F_3(p)$ — изображение задающего воздействия, $F_B(p)$ — изображение возмущающего воздействия (помехи, изменение нагрузки), $Z(p)$ — изображение выходной величины, $X(p)$ — изображение ошибки.

Управляемый объект характеризуется передаточной функцией $W_{об}(p)$, а управляющее устройство — передаточной функцией $W_y(p)$. Основное назначение автоматической системы состоит в том, чтобы выходная величина $z(t)$ с течением времени изменялась в соответствии с изменением задающего воздействия $f_3(t)$ и мало зависела от изменения возмущающего воздействия $f_B(t)$. Уравнение относительно изображения выходной величины $Z(p)$ состоит из двух частей. Каждая из этих частей представляет собой произведение соответствующей передаточной функции на свое воздействие. В рассматриваемом случае

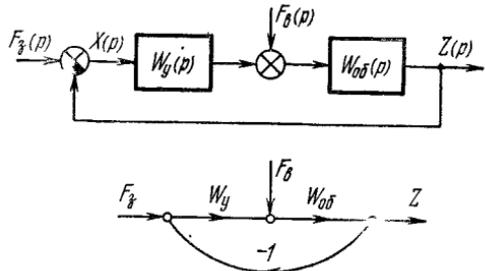


Рис. 6.1

$$Z(p) = K_3(p) F_3(p) + K_B(p) F_B(p), \quad (6.1)$$

где

$$K_3(p) = \frac{W_y(p) W_{об}(p)}{1 + W_y(p) W_{об}(p)} \quad (6.2)$$

— передаточная функция по задающему воздействию и

$$K_B(p) = \frac{W_{об}(p)}{1 + W_y(p) W_{об}(p)} \quad (6.3)$$

— передаточная функция по возмущающему воздействию. Поскольку изображение ошибки $X(p)$ равно

$$X(p) = F_s(p) - Z(p), \quad (6.4)$$

то, подставляя $Z(p)$ из (6.1) в (6.4), получим уравнение относительно изображения ошибки:

$$X(p) = (1 - K_s(p)) F_s(p) - K_b(p) F_b(p). \quad (6.5)$$

Передаточная функция ошибки по задающему воздействию равна

$$1 - K_s(p) = \frac{1}{1 + W_y(p) W_{об}(p)}, \quad (6.6)$$

а передаточная функция ошибки по возмущению отличается лишь знаком от $K_b(p)$ (6.3). Уравнения (6.1) и (6.5) являются частными случаями уравнений (5.74) и (5.76) при

$$W_s(p) = W_y(p) W_{об}(p), \quad W_b(p) = W_{об}(p).$$

Степень влияния на изображение выходной величины $Z(p)$ или изображение ошибки $X(p)$ изображений задающего и возмущающего воздействий определяется соответствующими передаточными функциями. Для уменьшения влияния возмущающего воздействия на выходную величину и ошибку следует уменьшать передаточную функцию $K_b(p)$. Говоря об уменьшении или увеличении передаточной функции, мы всегда будем подразумевать уменьшение или увеличение ее модуля. Для того, чтобы выходная величина лучше воспроизводила задающее воздействие, или, что эквивалентно, для того, чтобы ошибка была близка к нулю, следует $K_s(p)$ приближать к единице.

Поскольку управляемый объект задан, то его передаточную функцию $W_{об}(p)$ невозможно изменять по своему усмотрению. Мы можем изменять лишь параметры элементов управляющего устройства, т. е. коэффициенты передаточной функции $W_y(p)$. Будем изменять передаточную функцию управляющего устройства. При увеличении $W_y(p)$, как следует из выражений (6.2) и (6.3), передаточная функция $K_b(p)$ будет уменьшаться, стремясь к 0, а передаточная функция $K_s(p)$ будет возрастать, стремясь к 1. Следовательно, в пределе при бесконечно большом коэффициенте усиления управляющего устройства

$$1 - K_s(p) \equiv 0, \quad K_b(p) \equiv 0. \quad (6.7)$$

Условия (6.7) означают, что передаточные функции ошибки по задающему и возмущающему воздействиям равны нулю при всех значениях p , т. е. тождественно равны нулю. При выполнении

этих условий из (6.2) и (6.5) получаем

$$Z(p) = F_3(p) \quad (6.8)$$

и

$$X(p) \equiv 0, \quad (6.9)$$

что соответствует идеальной системе с нулевой ошибкой.

При неограниченном увеличении усиления управляющего устройства, расположенного в прямой части системы, между точками приложения задающего и возмущающего воздействий, ошибка системы стремится к нулю.

Это значит, что выходная величина системы перестает зависеть от возмущающего воздействия и начинает точно воспроизводить задающее воздействие.

Рассмотрим еще блок-схему обычной автоматической системы, отличающуюся наличием в цепи обратной связи элемента с передаточной функцией $W_{\Pi}(p)$ (рис. 6.2). Уравнение этой системы имеет вид, аналогичный (6.2), т. е.

$$Z(p) = K_3(p) F_3(p) + K_B(p) F_B(p), \quad (6.10)$$

только теперь

$$K_3(p) = \frac{W_y(p) W_{об}(p)}{1 + W_y(p) W_{об}(p) W_{\Pi}(p)} \quad (6.11)$$

и

$$K_B(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_y(p) W_{об}(p) W_{\Pi}(p)}. \quad (6.12)$$

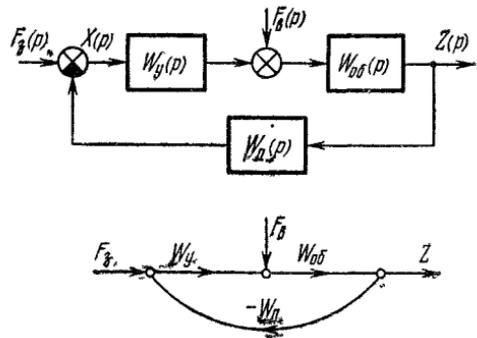


Рис. 6.2

При неограниченном возрастании усиления управляющего устройства с передаточной функцией $W_y(p)$, как и ранее, $K_B(p)$ стремится к 0, а $K_3(p)$ стремится к $W_{\Pi}^{-1}(p)$, и, значит, из (6.10) в пределе,

$$Z(p) = W_{\Pi}^{-1}(p) F_3(p). \quad (6.13)$$

При неограниченном увеличении усиления управляющего устройства, расположенного в прямой части системы, между точками приложения задающего и возмущающего воздействий, выходная величина замкнутой системы перестает зависеть от возмущающего воздействия и определяется только произведением обратной передаточной функции в цепи обратной связи и задающего воздействия.

Если $W_n(p) \equiv 1$, то мы приходим к рассмотренному выше случаю (6.8). При $W_n(p) = \frac{1}{p}$, что соответствует интегрирующей обратной связи, из (6.13) получаем

$$Z(p) = pF_s(p). \quad (6.14)$$

В этом случае выходная величина изменяется по закону производной задающего воздействия.

При $W_n(p) = p$, что соответствует дифференцирующей обратной связи, из (6.13) получаем

$$Z(p) = \frac{1}{p} F_s(p). \quad (6.15)$$

В этом случае выходная величина изменяется по закону интеграла от задающего воздействия.

Подчеркнем, что в предельном случае $Z(p)$ не зависит ни от изображений возмущающих воздействий, ни от передаточных функций объекта $W_{об}(p)$ и управляющего устройства $W_y(p)$, она полностью определяется изображением задающего воздействия и передаточной функцией цепи обратной связи.

§ 6.2. Система с внутренней положительной обратной связью

Структурная схема системы с *внутренней положительной обратной связью* и граф изображены на рис. 6.3. Заменяя

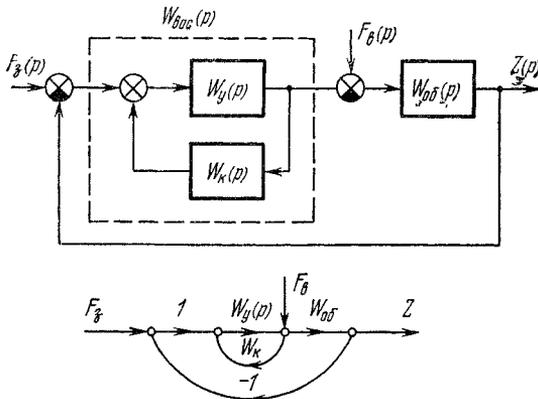


Рис. 6.3.

обратное соединение эквивалентным элементом с передаточной функцией, получим

$$W_{вос}(p) = \frac{W_y(p)}{1 - W_y(p)W_k(p)}. \quad (6.16)$$

Знак минус в знаменателе этой передаточной функции соответствует положительной обратной связи. Уравнение системы с внутренней положительной обратной связью относительно выходной величины запишется в виде, аналогичном (6.10):

$$Z(p) = K_3(p) F_3(p) + K_B(p) F_B(p). \quad (6.17)$$

Теперь передаточная функция по задающему воздействию равна

$$K_3(p) = \frac{W_{\text{вос}}(p) W_{\text{об}}(p)}{1 + W_{\text{вос}}(p) W_{\text{об}}(p)},$$

или, после подстановки $W_{\text{вос}}(p)$ из (6.16),

$$K_3(p) = \frac{W_Y(p) W_{\text{об}}(p)}{1 - W_Y(p) W_K(p) + W_Y(p) W_{\text{об}}(p)}. \quad (6.18)$$

Передаточная функция по возмущающему воздействию имеет вид

$$K_B(p) = \frac{W_{\text{об}}(p)}{1 + W_{\text{вос}}(p) W_{\text{об}}(p)},$$

или, после подстановки $W_{\text{вос}}(p)$ из (6.16),

$$K_B(p) = \frac{(1 - W_Y(p) W_K(p)) W_{\text{об}}(p)}{1 - W_Y(p) W_K(p) + W_Y(p) W_{\text{об}}(p)}. \quad (6.19)$$

Подставляя $Z(p)$ из (6.17) в выражение ошибки

$$X(p) = F_3(p) - Z(p),$$

получаем, по аналогии с (6.5),

$$X(p) = (1 - K_3(p)) F_3(p) - K_B(p) F_B(p).$$

При выборе передаточной функции $W_K(p)$ из условия

$$W_Y(p) W_K(p) = 1, \quad (6.20)$$

т. е. при

$$W_K(p) = W_Y^{-1}(p), \quad (6.21)$$

получаем из (6.18) и (6.19)

$$K_3(p) \equiv 1, \quad K_B(p) \equiv 0, \quad (6.22)$$

что означает тождественное обращение в нуль передаточных функций ошибки по задающему и возмущающему воздействиям. При этом из (6.5) получаем

$$X(p) \equiv 0. \quad (6.23)$$

Если передаточная функция внутренней обратной связи $W_K(p)$ равна обратной передаточной функции управляющего устройства $W_Y^{-1}(p)$, то ошибка системы с положительной внутренней обратной связью тождественно равна нулю.

То есть мы приходим к тому же результату, что и в обычной системе при неограниченном увеличении усиления элемента прямой части системы между задающим и возмущающим воздействиями. Однако теперь это является следствием введения внутренней положительной обратной связи. Нетрудно видеть, что

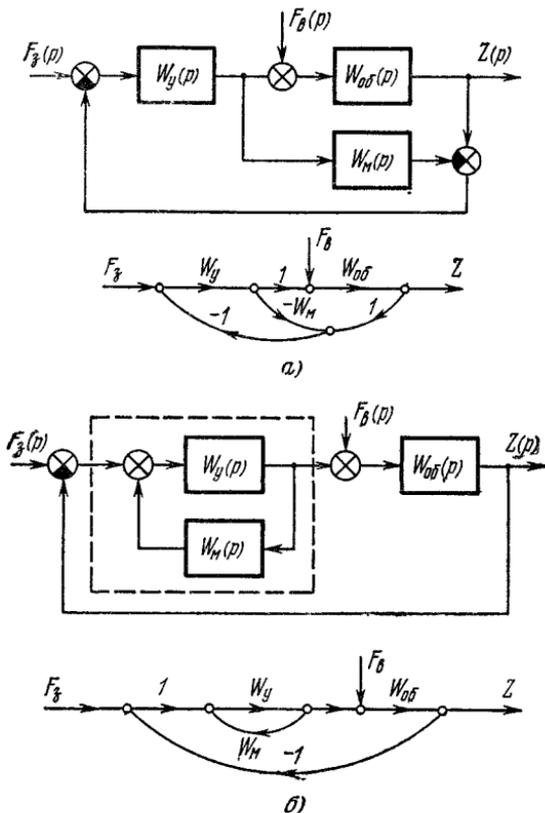


Рис. 6.4.

при выполнении условия (6.21) передаточная функция обратного соединения $W_{\text{вос}}(p)$ (6.16) равна бесконечности. Таким образом, и в этом случае достигается неограниченно большое усиление, но не непосредственно за счет увеличения коэффициента усиления, а за счет внутренней положительной обратной связи.

Система с внутренней положительной обратной связью, так же как и обычная система с неограниченно возрастающим усилением, являются идеализированными системами. В них ошибка равна тождественно нулю вне зависимости от изменений задающего и возмущающего воздействий.

К системе с внутренней положительной связью сводится система с *моделью объекта* (рис. 6.4, *a*). Она содержит элемент, передаточная функция которого $W_M(p)$ близка к передаточной функции объекта. На основании правила 5 о переносе точки суммирования по направлению прохождения сигнала преобразуем блок-схему рис. 6.4, *a* к блок-схеме рис. 6.4, *b*. Эта последняя блок-схема совпадает с блок-схемой системы с внутренней положительной обратной связью, если в последней произвести замену

$$W_K(p) = W_M(p). \quad (6.24)$$

При выборе

$$W_M(p) = W_Y^{-1}(p) \quad (6.25)$$

получаем, как и для системы с внутренней положительной обратной связью,

$$K_S(p) \equiv 1, \quad K_B(p) \equiv 0. \quad (6.26)$$

Таким образом, снова мы приходим к тому, что

$$X(p) \equiv 0. \quad (6.27)$$

В этих системах при выполнении определенных условий ошибка тождественно равна нулю при любых задающих и возмущающих воздействиях.

§ 6.3. Комбинированная система

В *комбинированной* системе, блок-схема и граф которой изображены на рис. 6.5, измеряется возмущающее воздействие и через элемент с передаточной функцией $W_K(p)$ алгебраически суммируется с задающим воздействием. Комбинированная система отличается от обычной системы наличием дополнительного внешнего воздействия $W_K(p)F_B(p)$, поэтому ее уравнение, по сравнению с (6.1), будет содержать слагаемое, вызванное этим дополнительным внешним воздействием:

$$Z(p) = K_S(p)F_S(p) + K_B(p)F_B(p) + K_S(p)W_K(p)F_B(p), \quad (6.28)$$

или

$$Z(p) = K_S(p)F_S(p) + (K_B(p) + K_S(p)W_K(p))F_B(p). \quad (6.29)$$

Уравнение относительно ошибки

$$X(p) = F_S(p) - Z(p)$$

получается после подстановки $Z(p)$ из (6.29):

$$X(p) = (1 - K_S(p))F_S(p) - (K_B(p) + K_S(p)W_K(p))F_B(p). \quad (6.30)$$

Если выбрать $W_K(p)$ так, чтобы обратилась тождественно в нуль передаточная функция ошибки по возмущающему воздействию, т. е. из условия

$$K_B(p) = -K_3(p) W_K(p), \quad (6.31)$$

то из (6.29) и (6.30) получим

$$Z(p) = K_3(p) F_3(p) \quad (6.32)$$

и

$$X(p) = (1 - K_3(p)) F_3(p). \quad (6.33)$$

В этом случае выходная величина и, следовательно, ошибка не зависят от возмущающего воздействия. Однако ошибка зависит от

задающего воздействия. Условие (6.31) можно назвать *условием компенсации возмущающего воздействия*. Принимая во внимание выражения передаточных функций (6.2) и (6.3), запишем условие компенсации в виде

$$W_K(p) = \frac{K_B(p)}{K_3(p)} = W_Y^{-1}(p). \quad (6.34)$$

При передаточной функции корректирующего элемента $W_K(p)$, равной обратной передаточной функции прямой части системы между точками приложения задающего и возмущающего воздействий, т. е. обратной передаточной функции управляющего устройства, влияние возмущающего воздействия на ошибку устраняется.

Условие компенсации приводит к образованию дополнительного, компенсирующего канала, передаточная функция которого

$$W_Y(p) W_K(p) = W_Y(p) W_Y^{-1}(p) = 1 \quad (6.35)$$

постоянна и равна единице.

§ 6.4. Разомкнуто-замкнутая система

В некотором смысле к комбинированной системе, описанной в § 6.3, близка *разомкнуто-замкнутая* система, блок-схема и граф которой изображены на рис. 6.6. В этой системе измеряется задающее воздействие, которое после преобразования корректирующим элементом с передаточной функцией $W_K(p)$, суммируется с выходной величиной управляющего устройства. Уравнение разомкнуто-замкнутой системы отличается от уравнения обычной системы (6.1) тем, что теперь внешнее воздействие

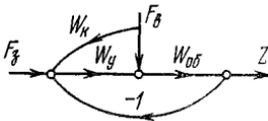
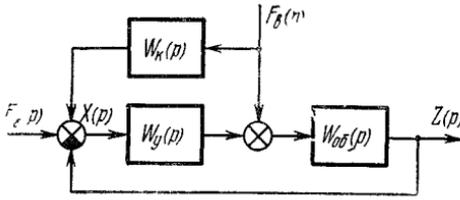


Рис. 6.5

равно не просто возмущающему воздействию $F_B(p)$, а $F_B(p) + W_K(p)F_3(p)$. Поэтому

$$Z(p) = K_3(p)F_3(p) + K_B(p)(F_B(p) + W_K(p)F_3(p)), \quad (6.36)$$

или

$$Z(p) = (K_3(p) + K_B(p)W_K(p))F_3(p) + K_B(p)F_B(p). \quad (6.37)$$

Подставляя $Z(p)$ из (6.37) в уравнение ошибки

$$X(p) = F_3(p) - Z(p),$$

получим

$$X(p) = [1 - (K_3(p) + K_B(p)W_K(p))]F_3(p) - K_B(p)F_B(p). \quad (6.38)$$

Выберем $W_K(p)$ так, чтобы соблюдалось равенство

$$K_3(p) + K_B(p)W_K(p) = 1. \quad (6.39)$$

Тогда из (6.38) получаем

$$X(p) = -K_B(p)F_B(p). \quad (6.40)$$

Ошибка не зависит от задающего воздействия, однако она зависит от возмущающего воздействия. Условие (6.39) можно назвать *условием воспроизведения задающего воздействия*.

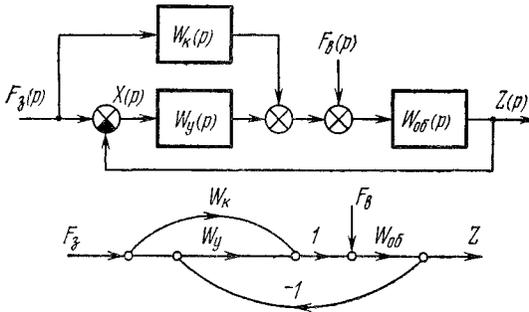


Рис. 6.6.

Для выяснения смысла этого условия подставим в (6.39) значения $K_3(p)$, $K_B(p)$ из (6.2), (6.3) и, разрешая полученное выражение относительно $W_K(p)$, находим

$$W_K(p) = W_{об}^{-1}(p). \quad (6.41)$$

При передаточной функции корректирующего элемента $W_K(p)$, равной обратной передаточной функции прямой части системы между точкой приложения возмущающего воздействия и выходом, т. е. обратной передаточной функции управляемого объекта, влияние задающего воздействия на ошибку устраняется.

Условие воспроизведения приводит к образованию дополнительного канала, передаточная функция которого

$$W_{\kappa}(p) W_{об}(p) = W_{об}^{-1}(p) W_{об}(p) = 1 \quad (6.42)$$

постоянна. Благодаря этому $Z(p)$ становится равным $F_{з}(p)$, и, значит, $X(p) \equiv 0$. В этом случае система работает как разомкнутая. Роль обратной связи здесь сводится к уменьшению всех дополнительных изменений в системе. Отсюда и название системы: разомкнутый цикл — преобразование задающего воздействия, замкнутый цикл — уменьшение влияния различных дополнительных изменений в системе.

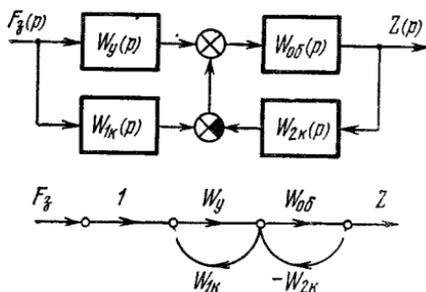


Рис. 6.7

К разомкнуто-замкнутой системе близка так называемая система с *условной обратной связью*, блок-схема и граф которой приведены на рис. 6.7. Действительно, если в графе разомкнуто-замкнутой системы рис. 6.6 (при $F_{в} \equiv 0$) перенести точку обратной связи со входа управляющего устройства на его выход, то мы получим граф, изображенный на рис. 6.8, который эквивалентен графу системы с условной обратной связью, если положить в нем



Рис. 6.8.

$$W_{1к}(p) = W_{\kappa}(p), \quad W_{2к}(p) = -W_{y}(p). \quad (6.43)$$

При выборе в системе с условной обратной связью

$$W_{1к}(p) = W_{y}(p) W_{об}(p) W_{2к}(p) \quad (6.44)$$

находим, что ее передаточная функция по задающему воздействию равна

$$K_{с}(p) = W_{y}(p) W_{об}(p). \quad (6.45)$$

Отсюда следует, что в этом случае система с условной обратной связью по задающему воздействию функционирует как разомкнутая.

§ 6.5. Комбинированная разомкнуто-замкнутая система

Комбинированная разомкнуто-замкнутая система, блок-схема которой изображены на рис. 6.9, представляет собой совмещение комбинированной системы и разомкнуто-замкнутой системы. Она отличается от обычной системы наличием двух дополнительных возмущающих воздействий $F_1(p) = W_{1к}(p)F_B(p)$

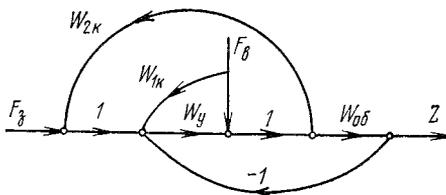
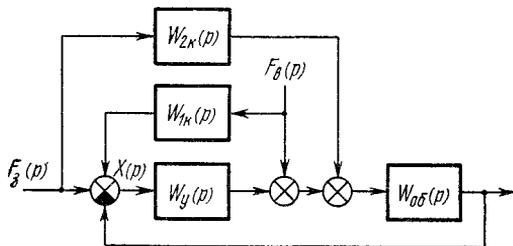


Рис. 6.9.

и $F_2(p) = W_{2к}(p)F_3(p)$. Поэтому уравнение такой системы запишется в виде

$$Z(p) = (K_s(p) + K_v(p)W_{2к}(p))F_3(p) + (K_v(p) + K_s(p)W_{1к}(p))F_B(p). \quad (6.46)$$

Это уравнение, как частный случай, охватывает уравнение только комбинированной системы (6.29) при $W_{2к}(p) \equiv 0$ и уравнение только разомкнуто-замкнутой системы (6.37) при $W_{1к}(p) \equiv 0$. Подставляя $Z(p)$ из (6.46) в уравнение ошибки

$$X(p) = F_3(p) - Z(p),$$

находим

$$X(p) = [1 - (K_s(p) + K_v(p)W_{2к}(p))]F_3(p) - (K_v(p) + K_s(p)W_{1к}(p))F_B(p). \quad (6.47)$$

При выполнении условий компенсации (6.31)

$$K_v(p) = -K_s(p)W_{1к}(p) \quad (6.48)$$

и воспроизведения (6.43)

$$K_3(p) + K_B(p) W_{2K}(p) = 1 \quad (6.49)$$

или, как было показано в §§ 6.3 и 6.4, (6.34), (6.41), если

$$W_{1K}(p) = W_Y^{-1}(p) \quad (6.50)$$

и

$$W_{2K}(p) = W_{00}^{-1}(p), \quad (6.51)$$

ошибка становится тождественно равной нулю,

$$X(p) = 0, \quad (6.52)$$

при любых задающих и возмущающих воздействиях.

§ 6.6. Общие уравнения автоматических систем

Рассмотренные выше автоматические системы могут быть описаны общими уравнениями относительно изображений. Обозначим через

$$K_3^0(p) = K_3(p) + K_B(p) W_{2K}(p) \quad (6.53)$$

и

$$K_B^0(p) = K_B(p) + K_3(p) W_{1K}(p) \quad (6.54)$$

общие передаточные функции по задающему и возмущающему воздействиям. В частных случаях при $W_{1K}(p) \equiv 0$ либо $W_{2K}(p) \equiv 0$ мы получаем передаточные функции разомкнуто-замкнутой либо комбинированной системы, а при $W_{1K}(p) = W_{2K}(p) \equiv 0$ — передаточную функцию системы с внутренней положительной обратной связью и обычной системы. Поэтому общее уравнение автоматических систем относительно изображения выходной величины можно записать в виде

$$Z(p) = K_3^0(p) F_3(p) + K_B^0(p) F_B(p), \quad (6.55)$$

а общее уравнение автоматических систем относительно изображения ошибки — в виде

$$X(p) = (1 - K_3^0(p)) F_3(p) - K_B^0(p) F_B(p). \quad (6.56)$$

Здесь

$$1 - K_3^0(p) = 1 - K_3(p) - K_B(p) W_{2K}(p) \quad (6.57)$$

и

$$K_B^0(p) = K_B(p) + K_3(p) W_{1K}(p) \quad (6.58)$$

— передаточные функции ошибки по задающему и возмущающему воздействиям.

Автоматические системы называются *инвариантными*, если их ошибка тождественно равна нулю при любых задающих и возмущающих воздействиях.

Как видно из общего уравнения (6.56),

условием инвариантности автоматической системы является тождественное равенство нулю передаточных функций ошибки по задающему и возмущающему воздействиям:

$$1 - K_3^0(p) \equiv 0, \quad (6.59)$$

$$K_B^0(p) \equiv 0. \quad (6.60)$$

В §§ 6.1, 6.2 были приведены частные случаи условий инвариантности для обычной системы (6.7), системы с внутренней положительной обратной связью (6.20) или (6.21), системы с моделью объекта (6.25). Общие условия инвариантности (6.59), (6.60) представляют собой не что иное, как условия инвариантности комбинированной разомкнуто-замкнутой системы (6.48), (6.49) или (6.50), (6.51). Условия инвариантности (6.60), (6.59) состоят из *условия компенсации* — тождественного обращения в нуль передаточной функции ошибки по возмущающему воздействию и *условия воспроизведения* — тождественного обращения в нуль передаточной функции ошибки по задающему воздействию. Если в автоматической системе выполняется какое-либо одно из этих условий, то систему можно назвать *частично инвариантной*. Примерами частично инвариантных систем являются комбинированная система — при выполнении условия компенсации (6.34) — и разомкнуто-замкнутая система — при выполнении условия воспроизведения (6.39) или (6.42).

Инвариантные и частично инвариантные системы представляют собой идеальные системы.

По причинам, которые мы выясним далее, эти системы, как правило, физически нереализуемы. Однако знакомство с такими идеальными системами весьма важно, так как они определяют тот предел, к которому следует приближаться при желании синтезировать высококачественные системы с учетом реальных возможностей и ограничений.

Задачи

6.1. Показать, что передаточные функции замкнутой системы (рис. 6.10) по отношению к задающему $f_1(t)$ и возмущающему $f_2(t)$ воздействиям равны соответственно

$$K_1(p) = \frac{W_1(p) W_2(p) W_3(p)}{1 + W_3(p) W_4(p) + W_2(p) W_6(p) + W_1(p) W_2(p) W_3(p) W_5(p)},$$

$$K_2(p) = \frac{W_3(p) (1 + W_2(p) W_6(p))}{1 + W_3(p) W_4(p) + W_2(p) W_6(p) + W_1(p) W_2(p) W_3(p) W_5(p)}.$$

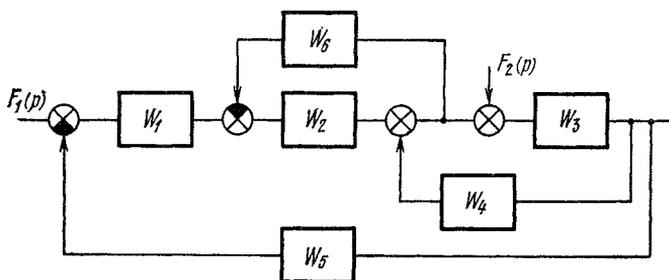


Рис. 6.10.

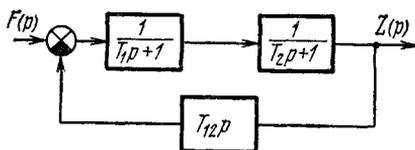
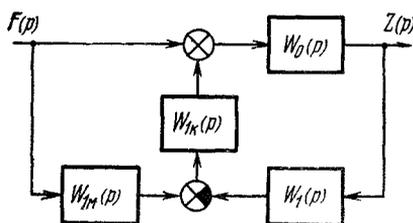
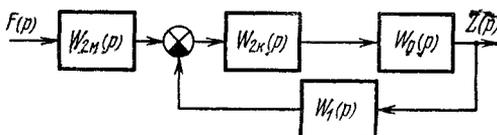


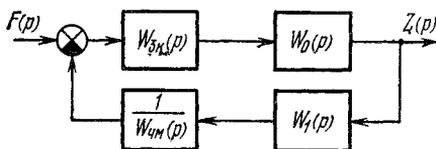
Рис. 6.11.



а)



б)



в)

Рис. 6.12.

6.2. Показать, что система с обратной связью на рис. 6.11 эквивалентна электрической цепи на рис. 5.22.

6.3. Показать, что структурные схемы на рис. 6.12, а, б, в эквивалентны, если

$$1 + W_{1M}(p) W_{1K}(p) = W_{2M}(p) W_{2K}(p),$$
$$W_{1K}(p) = W_{2K}(p) = \frac{W_{3K}(p)}{W_{4M}(p)}.$$

6.4. Показать для этих же структурных схем, что если элементы с передаточными функциями $W_{1K}(p)$, $W_{2K}(p)$ и $W_{3K}(p)$ имеют достаточно большие коэффициенты усиления и $W_{1M}(p) \equiv 1$, то для рис. 6.12, а $K(p) \approx W_{1M}(p)$, для рис. 6.12, б $K(p) \approx W_{2M}(p)$ и для рис. 6.12, в $K(p) \approx W_{4M}(p)$.

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 7.1. Понятие чувствительности

Чувствительность автоматических систем характеризует влияние изменений параметров элементов на их свойства. Вариация элемента автоматической системы приводит к изменению его передаточной функции, а это в свою очередь вызывает изменение передаточной функции всей замкнутой автоматической системы, а значит, в конечном итоге, и изменение величин, характеризующих ее состояние. Для количественного учета всех этих изменений служат функции чувствительности

$$V_{W_\delta}^K(p) = \frac{dK(p)}{dW_\delta(p)}. \quad (7.1)$$

Часто удобнее рассматривать *логарифмическую функцию чувствительности*, или просто чувствительность $S_{W_\delta}^K(p)$ передаточной функции замкнутой системы $K(p)$ по передаточной функции варьируемого элемента $W_\delta(p)$, определяемую как

$$S_{W_\delta}^K(p) = \frac{d \ln K(p)}{d \ln W_\delta(p)}. \quad (7.2)$$

Чувствительность $S_{W_\delta}^K(p)$ представляет собой отношение относительных изменений передаточной функции замкнутой системы и передаточной функции изменяемого элемента, т. е.

$$S_{W_\delta}^K(p) = \frac{dK(p)/K(p)}{dW_\delta(p)/W_\delta(p)}. \quad (7.3)$$

Очевидно, что чувствительность $S_{W_\delta}^K(p)$ (7.3) связана с функцией чувствительности $V_{W_\delta}^K(p)$ (7.1) соотношением

$$S_{W_\delta}^K(p) = V_{W_\delta}^K(p) \frac{W_\delta(p)}{K(p)}. \quad (7.4)$$

Чем меньше чувствительность $S_{W_\delta}^K(p)$ или функция чувствительности $V_{W_\delta}^K(p)$, тем меньше влияние передаточной функции $W_\delta(p)$

рассматриваемого элемента на свойства автоматической системы. Говоря об уменьшении или увеличении чувствительности, мы всегда будем подразумевать уменьшение или увеличение ее модуля. Естественно, что

чем меньше чувствительность автоматической системы, тем система более высококачественна.

Поэтому большой интерес представляют такие структуры автоматических систем, которые обладают малой чувствительностью.

§ 7.2. Общая формула чувствительности

Для вывода общей формулы чувствительности $S_{W_\delta}^K(p)$, выражающей влияние изменения передаточной функции какого-либо элемента $W_\delta(p)$ на передаточную функцию автоматической системы $K(p)$, рассмотрим общий граф системы, в котором выделена ветвь W_δ , соответствующая варьируемому элементу (рис. 7.1). Этот общий граф полностью определяется:

ветвью cb , соответствующей соединению элементов, охватывающих варьируемый элемент отрицательной обратной связью и характеризующейся передаточной функцией $W_I(p)$;

ветвями ab и cd , соответствующими соединениям элементов на входе и на выходе варьируемого элемента и характеризующимися передаточными функциями $W_{II}(p)$ и $W_{III}(p)$;

наконец, ветвью ad , соответствующей соединению элементов, связывающих вход и выход системы при отсутствии варьируемого элемента, т. е. при $W_\delta(p) \equiv 0$, и характеризующейся передаточной функцией $K_c(p)$.

Для краткости будем называть $K_c(p)$ *сквозной передаточной функцией*, $W_{II}(p)$ и $W_{III}(p)$ — *входной* и соответственно *выходной передаточными функциями*, а $W_\delta(p) W_I(p)$, представляющую собой передаточную функцию разомкнутого контура обратной связи, — *контурной передаточной функцией*.

Передаточная функция графа $K(p)$ (рис. 7.2), очевидно, равна

$$K(p) = K_c(p) + \frac{W_{II}(p) W_\delta(p) W_{III}(p)}{1 + W_\delta(p) W_I(p)}. \quad (7.5)$$

Найдем вначале функцию чувствительности $V_{W_\delta}^K(p)$. По определению (7.1) имеем

$$V_{W_\delta}^K(p) = \frac{dK(p)}{dW_\delta(p)} = \frac{W_{II}(p) W_{III}(p)}{[1 + W_\delta(p) W_I(p)]^2}. \quad (7.6)$$

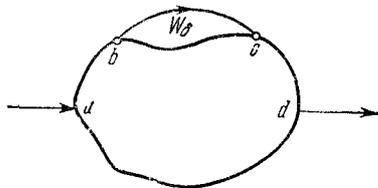


Рис. 7.1.

Подставляя $V_{W_\delta}^K(p)$ (7.6) в формулу для чувствительности (7.4), получим

$$S_{W_\delta}^K(p) = \frac{W_I(p) W_{III}(p)}{[1 + W_\delta(p) W_I(p)]^2} \frac{W_\delta(p)}{K(p)}. \quad (7.7)$$

Но из выражения передаточной функции (7.5) следует

$$\frac{W_{II}(p) W_\delta(p) W_{III}(p)}{1 + W_\delta(p) W_I(p)} = K(p) - K_c(p). \quad (7.8)$$

Поэтому окончательно общую формулу чувствительности (7.7) можно представить в виде

$$S_{W_\delta}^K(p) = \frac{1 - \frac{K_c(p)}{K(p)}}{1 + W_\delta(p) W_I(p)}. \quad (7.9)$$

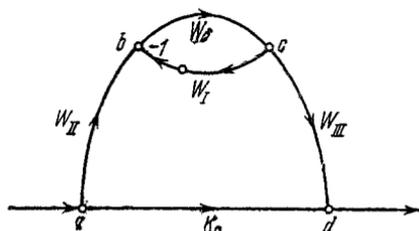


Рис. 7.2

Эта формула лежит в основе исследования чувствительности автоматических систем. Методика исследования чувствительности сводится к выделе-

нию варьируемого элемента, контура обратной связи и определению передаточной функции всей системы $K(p)$, сквозной передаточной функции $K_c(p)$ и контурной передаточной функции $W_\delta(p) W_I(p)$.

§ 7.3. Чувствительность соединений элементов

Прежде чем перейти к исследованию чувствительности основных структур автоматических систем, определим чувствительность соединений элементов.

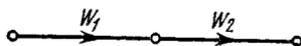


Рис. 7.3.



Рис. 7.4

1. Последовательное соединение (рис. 7.3). Согласно (5.34)

$$W(p) = W_1(p) W_2(p). \quad (7.10)$$

Пусть

$$W_\delta(p) = W_1(p). \quad (7.11)$$

Обозначим

$$K(p) = W(p).$$

Для последовательного соединения

$$K_c(p) \equiv 0 \quad \text{и} \quad W_1(p) \equiv 0. \quad (7.12)$$

Поэтому из общей формулы чувствительности (7.9) получаем

$$S_{W_\delta}^K(p) = S_{W_1}^W(p) = 1. \quad (7.13)$$

Чувствительность последовательного соединения равна единице.

2. Параллельное соединение (рис. 7.4). Согласно (5.43)

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p). \quad (7.14)$$

Пусть

$$W_\delta(p) = W_1(p). \quad (7.15)$$

Обозначим $K(p) = W(p)$. Для параллельного соединения (рис. 7.4)

$$K_c(p) = W_2(p), \quad W_1(p) \equiv 0. \quad (7.16)$$

Поэтому из общей формулы чувствительности (7.9) следует

$$S_{W_\delta}^K(p) = S_{W_1}^W(p) = 1 - \frac{W_2(p)}{W(p)} = 1 - \frac{W_2(p)}{W_1(p) + W_2(p)}, \quad (7.17)$$

или

$$S_{W_1}^W(p) = \frac{W_1'(p)}{W_1(p) + W_2(p)} = \frac{W_1'(p)}{W(p)}. \quad (7.18)$$

Чувствительность параллельного соединения равна отношению передаточной функции варьируемого элемента к передаточной функции соединения.

При увеличении усиления неварьируемого элемента, т. е. элемента, обладающего передаточной функцией $W_2(p)$, чувствительность параллельного соединения уменьшается, а при увеличении усиления варьируемого элемента, т. е. элемента, обладающего передаточной функцией $W_1(p)$, чувствительность параллельного соединения увеличивается, стремясь к единице. Таким образом, в отличие от последовательного соединения, при параллельном соединении чувствительность может быть уменьшена за счет увеличения усиления неварьируемого элемента.

3. Обратное соединение, или соединение обратной связью (рис. 7.5). Согласно (5.54)

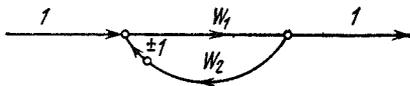


Рис. 7.5.

$$W_{oc}(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p) W_2(p)}, \quad (7.19)$$

где знак плюс соответствует отрицательной обратной связи, а знак минус соответствует положительной обратной связи. Обозначим

$$K(p) = W_{oc}(p) \quad (7.20)$$

и положим вначале

$$W_{\delta}(p) = W_1(p). \quad (7.21)$$

Это означает, что варьируется элемент в прямой части системы. Поскольку для обратного соединения

$$K_c(p) \equiv 0, \quad W_1(p) = W_2(p), \quad (7.22)$$

то из общей формулы чувствительности (7.9) получаем

$$S_{W_{\delta}}^K(p) = S_{W_1}^K(p) = \frac{1}{1 \pm W_1(p) W_2(p)}, \quad (7.23)$$

или, учитывая (7.19),

$$S_{W_1}^K(p) = \frac{W_{oc}(p)}{W_1(p)}.$$

Чувствительность обратного соединения по отношению к элементу прямой части равна отношению передаточной функции соединения к передаточной функции варьируемого элемента в прямой части.

Введение обратной связи изменяет чувствительность по сравнению с последовательным соединением. Отрицательная обратная связь (ей соответствует знак плюс в (7.23)) уменьшает чувствительность соединения, а положительная обратная связь (ей соответствует знак минус в (7.23)) увеличивает чувствительность.

При увеличении усиления любого из элементов соединения отрицательной обратной связью чувствительность обратного соединения по элементу прямой части уменьшается.

Примем теперь, что

$$W_{\delta}(p) = W_2(p), \quad (7.24)$$

что соответствует вариации элемента в обратной связи. Тогда вместо (7.22) будем иметь

$$K_c(p) = W_1(p), \quad W_1(p) = W_1(p), \quad (7.25)$$

и тогда из общей формулы чувствительности (7.9) получим

$$S_{W_{\delta}}^K(p) = S_{W_2}^K(p) = \frac{1}{1 \pm W_1(p) W_2(p)} \left[1 - \frac{W_1(p)}{W_1(p)/(1 \pm W_1(p) W_2(p))} \right], \quad (7.26)$$

или, после упрощений,

$$S_{W_2}^K(p) = \frac{\mp W_1(p) W_2(p)}{1 \pm W_1(p) W_2(p)}. \quad (7.27)$$

Учитывая (7.19), представим $S_{W_1}^K(p)$ в виде

$$S_{W_2}^K(p) = \mp W_{oc}(p) W_2(p). \quad (7.28)$$

Чувствительность обратного соединения по отношению к элементу обратной связи равна произведению передаточных функций соединения и варьируемого элемента (со знаком минус для отрицательной обратной связи и знаком плюс для положительной обратной связи).

Отрицательная обратная связь (ей соответствует знак плюс в знаменателе (7.27)) уменьшает чувствительность обратного соединения, а положительная обратная связь (ей соответствует знак минус в знаменателе (7.27)) увеличивает чувствительность обратного соединения.

При увеличении усиления любого из элементов соединения с отрицательной обратной связью чувствительность обратного соединения по элементу обратной связи увеличивается, стремясь к единице.

Из выражений чувствительностей $S_{W_1}^K(p)$ (7.23) и $S_{W_2}^K(p)$ (7.27) следует, что

$$S_{W_1}^K(p) - S_{W_2}^K(p) = 1. \quad (7.29)$$

Разность чувствительностей обратного соединения по отношению к элементам прямой части и обратной связи равна единице.

§ 7.4. Чувствительность основных структур автоматических систем

Как правило, в автоматических системах варьируемым элементом является управляемый объект. Наряду с решением той или иной задачи автоматического управления следует уменьшать чувствительность автоматической системы по отношению к возможным, непредвиденным изменениям параметров управляемого объекта. Однако, помимо этого, нас будет интересовать и чувствительность автоматической системы к изменениям управляющего устройства и других дополнительных корректирующих устройств.

Для определения чувствительности основных структур автоматических систем воспользуемся общей формулой чувствительности (7.9):

$$S_{W_{\delta}}^K(p) = \frac{1 - \frac{K_c(p)}{K(p)}}{1 + W_{\delta}(p) W_I(p)}.$$

В частности, при

$$K_c(p) \equiv 0 \quad (7.30)$$

из (7.9) получаем

$$S_{W_{\delta}}^K(p) = \frac{1}{1 + W_{\delta}(p) W_I(p)}. \quad (7.31)$$

Если сквозная передаточная функция равна нулю, то чувствительность автоматической системы полностью определяется контурной передаточной функцией $W_{\delta}(p) W_I(p)$.

Этот вывод существенно упрощает нахождение чувствительности автоматической системы. Действительно, рассмотрим любую из типовых структур автоматических систем, приведенных в гл. 6.

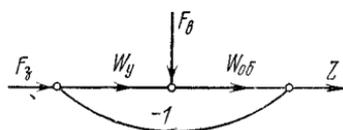


Рис. 7.6.

Предположим, что в основной структуре (рис. 7.6) варьируемым элементом является управляемый объект. Тогда легко видеть, что для задающего и возмущающего воздействий и выходной величины z сквозная передаточная функция $K_c(p)$ равна нулю. Следовательно,

чувствительность любой типовой структуры по отношению к управляемому объекту полностью определяется только контурной передаточной функцией,

$$S_{W_{\text{об}}}^{K_z}(p) = S_{W_{\text{об}}}^{K_B}(p) = \frac{1}{1 + W_{\text{об}}(p) W_y(p)}. \quad (7.32)$$

Введение дополнительных корректирующих элементов $W_{\text{ик}}(p)$, $W_{\text{зк}}(p)$, например, как это имеет место в разомкнуто-замкнутых и комбинированных системах, не влияет на чувствительность. Введение же дополнительных элементов в замкнутый контур, например, как это имеет место в основной структуре (рис. 7.7) и в системе с внутренней положительной обратной связью (рис. 7.8), изменяет контурную передаточную функцию, а значит, и чувствительность. Так, для основной структуры (рис. 7.7)

$$S_{W_{\text{об}}}^{K_z}(p) = S_{W_{\text{об}}}^{K_B}(p) = \frac{1}{1 + W_{\text{об}}(p) W_y(p) W_{\text{п}}(p)}, \quad (7.33)$$

а для системы с внутренней положительной обратной связью

$$S_{W_{об}}^{K_3}(p) = S_{W_{об}}^{K_B}(p) = \frac{1}{1 + W_{об}(p) W_I(p)} = \frac{1 - W_Y(p) W_K(p)}{1 - W_Y(p) W_K(p) + W_{об}(p) W_Y(p)}. \quad (7.34)$$

Как видно из приведенных выше выражений для чувствительности, наличие обратной связи может понижать чувствительность

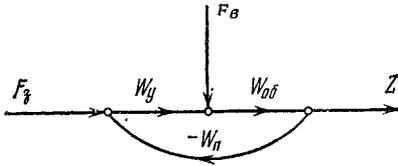


Рис. 7.7

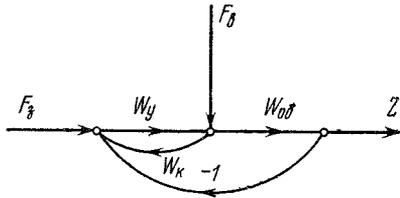


Рис. 7.8

по сравнению с разомкнутой системой, для которой чувствительность равна единице. Сопоставляя выражение чувствительности (7.32) с выражением передаточной функции ошибки по задающему воздействию (6.2), заключаем, что для обычной системы, системы с внутренней положительной обратной связью и разомкнуто-замкнутой системы

$$S_{W_{об}}^{K_3}(p) = S_{W_{об}}^{K_B}(p) = 1 - K_3(p). \quad (7.35)$$

Чувствительность обычной системы, системы с внутренней положительной обратной связью, разомкнуто-замкнутой системы по отношению к управляемому объекту равна передаточной функции ошибки по задающему воздействию.

Пользуясь общей формулой чувствительности (7.9), можно определить чувствительность различных структур автоматических систем по отношению к управляемому и корректирующим устройствам. Рассмотрим в качестве примера наиболее общую комбинированную разомкнуто-замкнутую систему, граф которой изображен на рис. 7.9. Передаточные функции по задающему и по возмущающим воздействиям равны соответственно

$$K_3^0(p) = K_3(p) + K_B(p) W_{2к}(p) = \frac{W_{об}(p) [W_Y(p) + W_{2к}(p)]}{1 + W_Y(p) W_{об}(p)} \quad (7.36)$$

и

$$K_B^0(p) = K_B(p) + K_3(p) W_{1к}(p) = \frac{W_{об}(p) [1 + W_Y(p) W_{1к}(p)]}{1 + W_Y(p) W_{об}(p)}. \quad (7.37)$$

Если варьируемый элемент не входит в контур обратной связи, как, например, корректирующие элементы $W_{1к}(p)$ и $W_{2к}(p)$, то,

как видно из рис. 7.2, в общей формуле чувствительности (7.9) следует положить $W_I(p) \equiv 0$, и тогда

$$S_{W_\delta}^K(p) = 1 - \frac{K_c(p)}{K(p)}. \quad (7.38)$$

Поскольку сквозные передаточные функции соответственно равны (рис. 7.9)

$$(K_3^0)_c(p) = \frac{W_y(p) W_{об}(p)}{1 + W_y(p) W_{об}(p)} = K_3(p) \quad (7.39)$$

и

$$(K_B^0)_c(p) = \frac{W_{об}(p)}{1 + W_y(p) W_{об}(p)} = K_B(p), \quad (7.40)$$

то по формуле (7.38) получаем

$$S_{W_{1K}}^{K_3^0}(p) = \frac{W_{2K}(p)}{W_y(p) + W_{2K}(p)} \quad (7.41)$$

и

$$S_{W_{2K}}^{K_B^0}(p) = \frac{W_y(p) W_{1K}(p)}{1 + W_y(p) W_{1K}(p)}. \quad (7.42)$$

В этом случае чувствительность не зависит от управляемого объекта. При увеличении усиления управляющего устройства чув-

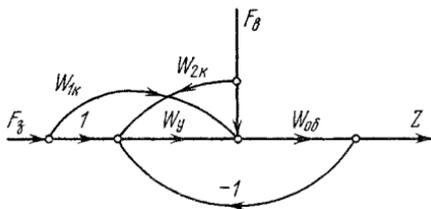


Рис. 7.9.

ствительность $S_{W_{1K}}^{K_3^0}(p)$ уменьшается, а чувствительность $S_{W_{2K}}^{K_B^0}(p)$ увеличивается, стремясь к единице.

Чувствительность по управляющему устройству находится по общей формуле (7.9). Принимая во внимание,

что сквозные передаточные функции соответственно равны (рис. 7.9)

$$(K_3^0)_c(p) = W_{1K}(p) W_{об}(p) \quad (7.43)$$

и

$$(K_B^0)_c(p) = W_{об}(p), \quad (7.44)$$

а контурная передаточная функция имеет вид $W_y(p) W_{об}(p)$, получим по формуле (7.9)

$$S_{W_y}^{K_3^0}(p) = \frac{[1 - W_{об}(p) W_{1K}(p)] W_y(p) + W_{2K}(p) - W_{1K}(p)}{[1 + W_y(p) W_{об}(p)] [W_y(p) + W_{2K}(p)]} \quad (7.45)$$

и

$$S_{W_y}^{K_B^0}(p) = \frac{[W_{1K}(p) - W_{об}(p)] W_y(p)}{[1 + W_y(p) W_{об}(p)] [1 + W_y(p) W_{1K}(p)]}. \quad (7.46)$$

При $W_{2к}(p) \equiv 0$, что соответствует разомкнуто-замкнутой системе, $S_{W_y}^{K_0^B}(p)$ (7.46) остается без изменений, а из (7.45) получаем

$$S_{W_y}^{K_0^3}(p) = \frac{1}{1 + W_y(p) W_{об}(p)} - \frac{W_{1к}(p)}{W_y(p)}. \quad (7.47)$$

При $W_{1к}(p) \equiv 0$, что соответствует комбинированной системе, из (7.45) и (7.46) получаем

$$S_{W_y}^{K_0^3}(p) = \frac{1}{1 + W_y(p) W_{об}(p)}, \quad S_{W_y}^{K_0^B}(p) = - \frac{W_y(p) W_{об}(p)}{1 + W_y(p) W_{об}(p)}. \quad (7.48)$$

Наконец, при $W_{1к}(p) = W_{2к}(p) \equiv 0$, что соответствует обычной структуре автоматической системы, чувствительности по отношению к управляющему устройству определяются формулами (7.48). При увеличении усиления управляющего устройства $S_{W_y}^{K_0^3}(p)$ уменьшается, стремясь к нулю, а $S_{W_y}^{K_0^B}(p)$ увеличивается, стремясь к единице.

§ 7.5. Системы нулевой чувствительности

Из основной формулы чувствительности

$$S_{W_0}^K(p) = \frac{1 - \frac{K_c(p)}{K(p)}}{1 + W_{об}(p) W_1(p)}$$

можно установить два пути уменьшения чувствительности автоматических систем.

Первый путь состоит в таком изменении передаточной функции замкнутой системы $K(p)$, при котором она приближалась бы к передаточной функции части системы, не зависящей от варьируемого элемента. По существу, этот путь связан с *компенсацией* изменений варьируемого элемента, т. е. с измерением эффекта, вызываемого вариацией элемента, и созданием соответствующего компенсирующего воздействия. Классическим примером реализации этого пути является известная мостиковая схема компенсации. Этот путь, по существу, используется в разомкнуто-замкнутой системе.

Второй путь состоит в увеличении усиления элементов контура обратной связи. При стремлении усиления к бесконечности, как следует из (7.32), (7.33), чувствительность по отношению к управляемому объекту будет стремиться к нулю. Поскольку для обычной системы, системы с внутренней обратной связью и комбинированной системы чувствительность по отношению к

управляемому объекту равна передаточной функции по ошибке:

$$S_{W_{об}}^{K_B}(p) = S_{W_{об}}^{K_B}(p) = 1 - K_3(p),$$

то системы с нулевой чувствительностью соответствуют системам с нулевой ошибкой, т. е. инвариантным системам, о которых шла речь в гл. 6.

В обычной и комбинированной системах нулевая чувствительность достигается при бесконечном увеличении коэффициента усиления управляющего устройства.

В системе с внутренней положительной обратной связью, как видно из (7.34) или условий инвариантности (6.34), нулевая чувствительность соответствует условию

$$W_K(p) = W_Y^{-1}(p). \quad (7.49)$$

Система с внутренней положительной обратной связью обладает нулевой чувствительностью при равенстве передаточной функции элемента обратной связи обратной передаточной функции охватываемого управляющего устройства, т. е. при равенстве произведения этих передаточных функций единице.

§ 7.6. О реализуемости систем нулевой чувствительности

Анализ формул чувствительности позволяет найти условия нулевой чувствительности для любых структур автоматических систем. Однако мы этим заниматься не будем. Дело в том, что системы нулевой чувствительности или, что эквивалентно, системы с нулевой ошибкой представляют собой идеальные системы, и если бы можно было бы их осуществить, то многие проблемы теории автоматических систем были бы решены либо отпали за ненадобностью. К сожалению, однако, на пути осуществления таких идеальных систем возникает множество препятствий и далеко не все они могут быть преодолены. Поэтому эти идеальные системы могут служить лишь ориентиром, к которому следует стремиться настолько, насколько позволяют нам законы природы и различного рода ограничения, которые вызваны ограниченностью энергетических ресурсов, ограниченным диапазоном изменений величин, характеризующих состояние системы, и т. д. Условия нулевой чувствительности и нулевой ошибки требуют неограниченного увеличения усиления элементов прямой части системы, расположенных между точками приложения задающего и возмущающего воздействий. Удовлетворение этого требования можно себе представить как непосредственное неограниченное увеличение коэффициента усиления одного из элементов (как в

обычной системе, см. § 6.1) либо, что физически эквивалентно, как создание контура внутренней положительной обратной связи путем введения дополнительного элемента с передаточной функцией $W_k(p)$, равной $W_k(p) = W_y^{-1}(p)$ (как в системе с внутренней положительной обратной связью, см. § 6.2). Действительно при этом условии, как видно из (6.16),

$$W_{\text{вос}}(p) = \frac{W_y(p)}{1 - W_k(p) W_y(p)} = \infty.$$

Если отвлечься от трудностей получения неограниченных усилений хотя бы по причине наличия ограничений на величину управляющего воздействия, то при желании получить идеальные системы мы сталкиваемся с невозможностью точной реализации обратных передаточных функций (7.49) и с возникновением неустойчивости по мере увеличения коэффициента усиления (см. § 6.2) либо вариаций параметров. Эти обстоятельства не позволяют осуществить идеальные системы нулевой чувствительности или нулевой ошибки. Условия нулевой чувствительности требуют введения в систему элемента, передаточная функция которого $W_k(p)$ равна обратной передаточной функции управляющего устройства $W_y(p)$. Аналогично этому, условия воспроизведения (для разомкнуто-замкнутых систем, см. § 6.4) и условия компенсации (для комбинированных систем, см. § 6.5) требуют введения в систему корректирующих элементов, передаточные функции которых равны обратной передаточной функции управляемого объекта, т. е.

$$W_k(p) = W_{\text{об}}^{-1}(p). \quad (7.50)$$

Так, например, если

$$W_{\text{об}}(p) = \frac{k_0}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2 + T_3^3 p^3}, \quad (7.51)$$

то согласно (7.50) получаем

$$W_k(p) = \frac{1}{k_0} + \frac{T_1}{k_0} p + \frac{T_2^2}{k_0} p^2 + \frac{T_3^3}{k_0} p^3. \quad (7.52)$$

Это значит, что корректирующий элемент, вводимый в систему, помимо безыскаженной передачи входного сигнала, должен осуществлять идеальные операции дифференцирования первого, второго и третьего порядков, что на практике точно осуществить невозможно. Условия типа (7.50) эквивалентны условию

$W_K(p)W_{об}(p) = 1$, которое означает, что от вводимого в систему элемента с передаточной функцией $W_K(p)$ требуется, чтобы, будучи последовательно соединенным с управляемым объектом, обладающим передаточной функцией $W_{об}(p)$, он полностью компенсировал бы инерционные свойства последнего. Невыполнимость этого требования особенно наглядно видна, если допустить, что управляемый объект имеет запаздывание в реакции выходной величины на входное воздействие, т. е.

$$W_{об}(p) = k_0 e^{-p\tau}, \quad (7.53)$$

где τ — время запаздывания. В этом случае вводимый в систему элемент или, если угодно, управляющее устройство должно обладать передаточной функцией вида

$$W_K(p) = \frac{1}{k_0} e^{p\tau}, \quad (7.54)$$

т. е. это устройство должно быть наделено свойством предсказания, упреждения, что физически невозможно. Поэтому условия вида (7.49), (7.50) в сколько-нибудь реальной ситуации точно выполнить невозможно.

Таким образом,

системы с нулевой чувствительностью, как и инвариантные системы, являются идеальными системами.

Идеальные системы не могут быть физически реализованы, и задача обычно состоит в том, чтобы реальные автоматические системы приблизить, насколько это возможно, к идеальным системам. На этом пути возникает много трудностей, таких, как наличие помех в элементах системы, дополнительные возмущающие воздействия и т. п. Несмотря на невозможность реализации идеальных систем, мы им уделили большое внимание потому, что они указывают нам те предельные возможности, к которым следует стремиться при создании автоматических систем с учетом реальных условий.

Задачи

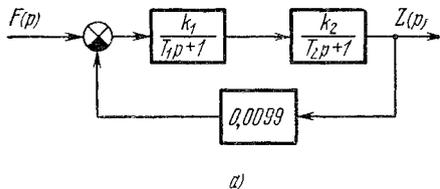
7.1. Показать, что чувствительность передаточной функции

$$K(p) = \frac{A_1(p) + \alpha A_2(p)}{A_3(p) + \alpha A_4(p)}$$

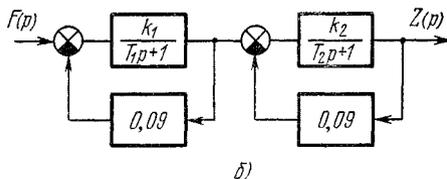
по параметру α равна

$$S_{\alpha}^K(p) = \frac{dK(p)}{d\alpha} \frac{\alpha}{K(p)} = \frac{\alpha (A_2(p) A_3(p) - A_1(p) A_4(p))}{(A_3(p) + \alpha A_4(p)) (A_1(p) + \alpha A_2(p))}.$$

7.2. Показать, что из двух систем (рис 7.10, а, б), имеющих одинаковые передаточные функции при $k_1 = k_2 = 100$ и $T_1 = T_2 = 0$, чувствительность

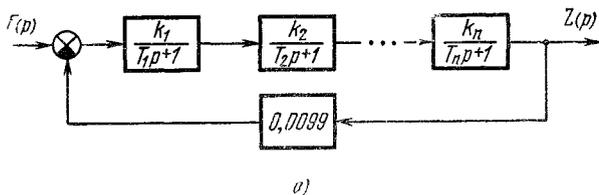


а)

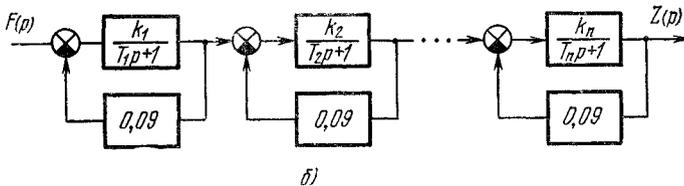


б)

Рис. 7.10



а)



б)

Рис. 7.11

второй системы относительно k_1 меньше чувствительности первой системы. Определить чувствительность этих систем при $T_1 > 0$ и $T_2 > 0$.

7.3. Обобщить результат задачи 7.2 на более общий случай рис. 7.11, а, б.

ХАРАКТЕРИСТИКИ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 8.1. Законы управления

Рассмотрим типовую блок-схему обычной автоматической системы, изображенной на рис. 8.1, а. Соответствующий ей граф приведен на рис. 8.1, б. Уравнение замкнутой системы относительно изображения выходной величины запишется в виде

$$Z(p) = K_z(p) F_z(p) + K_v(p) F_v(p), \quad (8.1)$$

где $K_z(p)$ и $K_v(p)$ — передаточные функции по задающему и возмущающему воздействиям. Для обычной системы они определяются выражениями (6.2),

(6.3), а для системы с

внутренней положительной

обратной связью —

выражениями (6.18),

(6.19). Для более сложных систем, таких, как

комбинированная, разомкнуто-замкнутая, комби-

нированная разомкнуто-

замкнутая, передаточные

функции по задающему и

возмущающему воздей-

ствиям представляют собой линейную комбинацию $K_z(p)$ и $K_v(p)$,

речь о которых шла выше. Передаточные функции по задающему

и возмущающему воздействиям определяются по передаточным

функциям управляемого объекта $W_{об}(p)$, управляющего устрой-

ства $W_y(p)$ и, возможно, корректирующего устройства $W_k(p)$.

Передаточные функции типовых управляемых объектов различ-

ной физической природы приведены в табл. 8.1. Разумеется,

эти передаточные функции соответствуют предельно упрощенно-

му описанию управляемых объектов.

Поскольку при создании конкретной автоматической системы

управляемый объект задан заранее, то передаточная функция

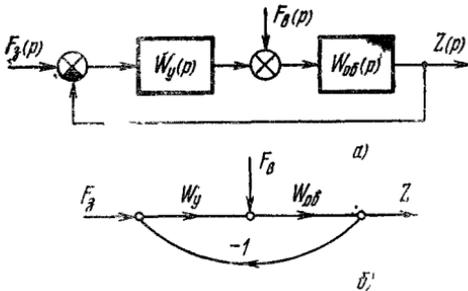


Рис. 8.1.

его $W_{об}(p)$ имеет вполне определенную неизменяемую форму. Для придания всей автоматической системе тех или иных свойств мы можем выбирать надлежащим образом передаточные функции управляющего устройства $W_y(p)$. Рассмотрим типовые управляющие устройства. В зависимости от вида преобразования ошибки идеальные управляющие устройства можно подразделять на пропорциональные, интегральные, пропорционально-интегральные, пропорционально-интегрально-дифференциальные и т. п. Передаточные функции таких идеальных управляющих устройств имеют следующий вид.

Пропорциональные управляющие устройства (П-управление):

$$W_y(p) = k_0. \quad (8.2)$$

В них управляющее воздействие пропорционально ошибке.

Интегральные управляющие устройства (И-управление):

$$W_y(p) = \frac{k_{-1}}{p}. \quad (8.3)$$

В них управляющее воздействие пропорционально интегралу от ошибки.

Пропорционально-интегральные управляющие устройства (ПИ-управление):

$$W_y(p) = k_0 + \frac{k_{-1}}{p}. \quad (8.4)$$

В них управляющее воздействие пропорционально ошибке и интегралу от ошибки.

Пропорционально-дифференциальные управляющие устройства (ПД-управление):

$$W_y(p) = k_0 + k_1 p. \quad (8.5)$$

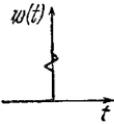
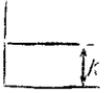
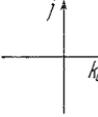
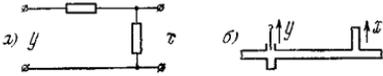
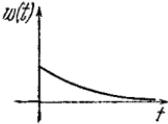
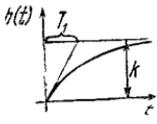
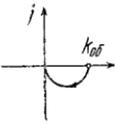
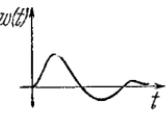
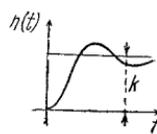
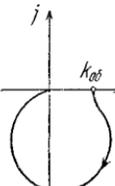
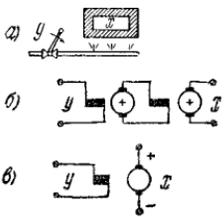
В них управляющее воздействие пропорционально ошибке и производной от ошибки.

Пропорционально-интегрально-дифференциальные управляющие устройства (ПИД-управление):

$$W_y(p) = k_0 + \frac{k_{-1}}{p} + k_1 p. \quad (8.6)$$

В них управляющее воздействие пропорционально ошибке, интегралу и производной от ошибки.

Вводя кратное интегрирование и дифференцирование ошибки, можно получить более сложные виды управлений, осуществляемые идеальными управляющими устройствами. Однако вряд ли имеет смысл идти на такое обобщение, поскольку идеальные ПД-, ПИД-управления нереализуемы из-за невозможности осуществить точное дифференцирование.

Передаточная функция $W(p)$	Временная характеристика $w(t)$	Переходная характеристика $h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau$	Частотная характеристика $W(j\omega)$	Примеры
$k_{об}$				 <p>а) Ток и напряжение в электрической цепи. б) Давление и поток жидкости в трубопроводе</p>
$\frac{k_{об}}{1 + T_1 p}$				 <p>а) Давление и поток в газопроводе. б) Число оборотов двигателя. в) Уровень жидкости в резервуаре</p>
$\frac{k_{об}}{1 + T_1 p + T_2 p^2}$				 <p>Апериодические процессы: а) температура печи; б) напряжение генератора; в) число оборотов электродвигателя.</p>

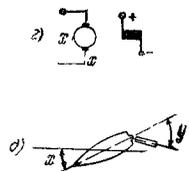
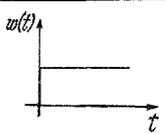
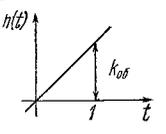
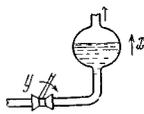
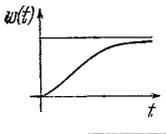
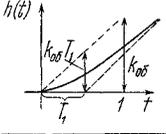
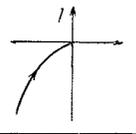
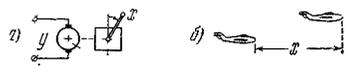
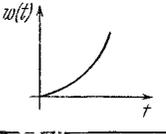
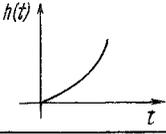
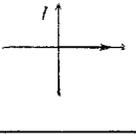
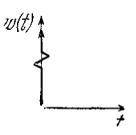
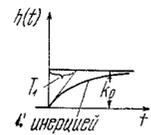
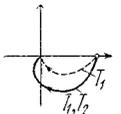
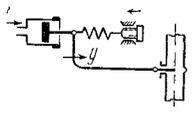
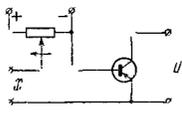
				 <p>а) колебательные процессы; б) число оборотов крупного электродвигателя; в) курс корабля.</p>
$\frac{k_{об}}{p}$				 <p>Уровень жидкости в котле.</p>
$\frac{k_{об}}{p(1+T_1p)}$				 <p>а) Угол поворота электропривода. б) Взаимное расположение самолетов.</p>
$\frac{k_{об}}{p^2}$				 <p>Траектория ракеты, спутника.</p>

Таблица 8.2

Тип регулятора	Передающая функция $W(p)$	Временная характеристика $w(t)$	Переходная характеристика $h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau$	Частотная характеристика $W(j\omega)$	Примеры	
					механические	электрические
II	k_0					

Продолжение табл. 8.2

Тип регулятора	Передающая функция $W(p)$	Временная характеристика $w(t)$	Переходная характеристика $h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau$	Частотная характеристика $W(j\omega)$	Примеры	
					механические	электрические
И	$\frac{k-1}{p}$					
ПИ	$k_0 + \frac{k-1}{p} = k_0 \left(1 + \frac{1}{T_{ИП}} \right)$					—
ПД	$k_0 + k_1 p = k_0 (1 + T_{ДП})$					
ПИД	$k_0 + \frac{k-1}{p} + k_1 p = k_0 \left(1 + \frac{1}{T_{ИП}} + T_{ДП} p \right)$					—

Передаточная функция реального управляющего устройства, из которой в качестве частных случаев вытекают рассмотренные выше передаточные функции идеальных управляющих устройств, имеет вид

$$W_y(p) = \left(k_0 + \frac{k_{-1}}{p} + k_1 p \right) \frac{1}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2 + T_3^3 p^3 + \dots} \quad (8.7)$$

Второй множитель в (8.7) характеризует инерционность неидеального управляющего устройства. Передаточные функции и другие характеристики типовых управляющих устройств, а также их примеры приведены в табл. 8.2.

§ 8.2. Показатели передаточных функций

Передаточные функции замкнутых систем определяются по передаточным функциям прямых частей $W_z(p)$ или $W_b(p)$ и по передаточной функции разомкнутой системы

$$W(p) = W_y(p) W_{об}(p). \quad (8.8)$$

Все эти передаточные функции можно характеризовать некоторым набором показателей. Для определения показателей любой передаточной функции и, в частности, передаточной функции разомкнутой системы (8.8) представим $W(p)$ в виде дроби

$$W(p) = W_y(p) W_{об}(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}, \quad (8.9)$$

где $P(p)$ и $Q(p)$ — многочлены по p степени m и n соответственно. Далее предполагается, что многочлены $P(p)$ и $Q(p)$ не содержат общих множителей.

Для физически осуществимых систем степень числителя передаточной функции не может быть больше степени знаменателя:

$$m \leq n. \quad (8.10)$$

Значения p , при которых передаточная функция обращается в нуль, называются *нулями* передаточной функции. Нули являются корнями уравнения

$$P(p) = 0. \quad (8.11)$$

Значения p , при которых передаточная функция обращается в бесконечность, называются *полюсами* передаточной функции. Полюсы являются корнями уравнения

$$Q(p) = 0. \quad (8.12)$$

Передаточная функция $W(p)$ (8.9), таким образом, имеет m нулей и n полюсов.

Будем называть нули и полюсы *левыми* (*правыми*), если они расположены в левой (*правой*) части комплексной плоскости (рис. 8.2, а) и *нейтральными* или *нулевыми*, если они лежат на мнимой оси или, соответственно, в начале координат (рис. 8.2, б). Передаточную функцию часто удобно представить в такой форме:

$$W(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{k_{s_a}}{p^{s_a}} \frac{\bar{P}(p)}{\bar{Q}_{s_a}(p)}, \quad (8.13)$$

где $\bar{P}(p)$, $\bar{Q}_{s_a}(p)$ — нормированные многочлены, обладающие тем свойством, что

$$\bar{P}(0) = \bar{Q}_{s_a}(0) = 1, \quad (8.14)$$

а k_{s_a} — постоянная, определяющая коэффициент усиления разомкнутой системы.

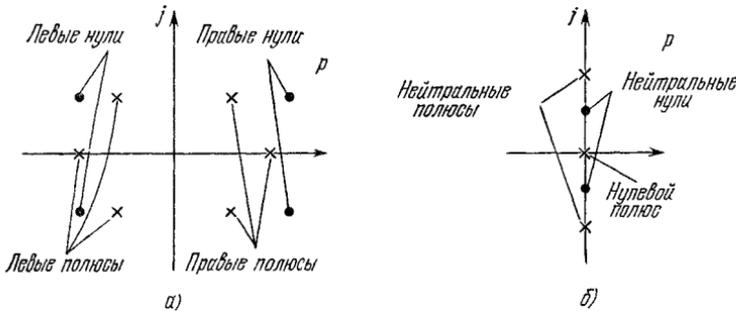


Рис. 8.2.

Введем следующие показатели передаточной функции $W(p)$:

1) *порядок* n , равный степени знаменателя передаточной функции $W(p)$;

2) *степень* $r_c = n - m$, равная разности степеней знаменателя и числителя передаточной функции $W(p)$;

3) *индекс аperiodической нейтральности* s_a , равный числу нулевых полюсов передаточной функции $W(p)$;

4) *индекс колебательной нейтральности* s_k , равный числу мнимых полюсов передаточной функции $W(p)$;

5) *индекс неустойчивости* s_n , равный числу правых полюсов передаточной функции $W(p)$;

6) *индекс неминимально-фазовости* $s_{нф}$, равный числу правых нулей передаточной функции $W(p)$.

Задание этих показателей и коэффициента усиления k_{s_a} отражает существенные черты передаточной функции $W(p)$, и ими

можно характеризовать те или иные свойства системы, определяемой этой передаточной функцией.

Так, для передаточной функции электродвигателя относительно угла поворота

$$W(p) = \frac{k_d}{T_d p^2 + p} \quad (8.15)$$

показатели равны: порядок $n = 2$, степень $r_c = n - m = 2$, индекс аperiodической нейтральности $s_a = 1$, индекс колебательной нейтральности $s_k = 0$, индекс неминимально-фазовости $s_{нф} = 0$, коэффициент усиления $k_1 = k_d$.

Для передаточной функции мостиковой цепи (рис. 8.3)

$$W(p) = \frac{1}{2} \frac{1 - Tp}{1 + Tp}, \quad T = RC \quad (8.16)$$

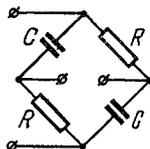


Рис. 8.3.

показатели таковы: порядок $n = 1$, степень $r_c = n - m = 1 - 1 = 0$, индекс аperiodической нейтральности $s_a = 0$, индекс колебательной нейтральности $s_k = 0$, индекс неустойчивости $s_{н} = 0$, индекс неминимально-фазовости $s_{нф} = 1$, коэффициент усиления $k_0 = \frac{1}{2}$.

§ 8.3. Понятия о процессах в автоматических системах

Уравнение обычной автоматической системы, а также автоматической системы с положительной внутренней обратной связью имеет вид (8.1):

$$Z(p) = K_3(p) F_3(p) + K_B(p) F_B(p).$$

Изображениям и передаточным функциям в этом уравнении соответствуют оригиналы — функции времени. По определению преобразования Лапласа

$$Z(p) = L\{z(t)\}, \quad X_0(p) = L\{x_0(t)\}, \quad F(p) = L\{f(t)\} \quad (8.17)$$

и

$$K_3(p) = L\{k_3(t)\}, \quad K_B(p) = L\{k_B(t)\}, \quad (8.18)$$

где

$$Y(p) = L\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt. \quad (8.19)$$

Переходя от изображения (8.1) к оригиналам, что осуществляется с помощью теоремы свертывания (теорема 6 приложения 1), получаем

$$z(t) = \int_0^t k_3(\tau) f_3(t - \tau) d\tau + \int_0^t k_B(\tau) f_B(t - \tau) d\tau \quad (8.20)$$

или, что эквивалентно,

$$z(t) = \int_0^t k_3(t-\tau) f_3(\tau) d\tau + \int_0^t k_B(t-\tau) f_B(\tau) d\tau. \quad (8.21)$$

Уравнения (8.20) и (8.21) описывают процессы изменения выходной величины $z(t)$, вызванные задающим $f_3(t)$ и возмущающим $f_B(t)$ воздействиями, приложенными к замкнутой системе. Эти процессы существенно зависят от функций времени $k_3(t)$ и $k_B(t)$ — оригиналов, соответствующих передаточным функциям $K_3(p)$ и $K_B(p)$. Функции $k_3(t)$ и $k_B(t)$ определяют собой *временные характеристики* автоматической системы.

Уравнения (8.20), (8.21) определяют процессы в автоматической системе, вызванные задающим $f_3(t)$ и возмущающим $f_B(t)$ воздействиями, приложенными к ней в один и тот же момент времени $t = 0$. В общем же случае эти воздействия могут быть приложены в различные моменты времени t_3 и t_B . Так, в системах регулирования $t_3 < t_B$, а в следящих системах $t_3 > t_B$. Поэтому для общего случая уравнение (8.21) заменяется уравнением

$$z(t) = \int_{t_3}^t k_3(t-\tau) f_3(\tau) d\tau + \int_{t_B}^t k_B(t-\tau) f_B(\tau) d\tau. \quad (8.22)$$

Назовем процесс *вынужденным*, если промежуток времени между моментами приложения внешних воздействий t_3 , t_B и моментом наблюдения равен бесконечности. Полагая в (8.22) $t_3 = t_B = -\infty$, что соответствует прошествию бесконечно большого промежутка времени после моментов приложения внешних воздействий, и обозначая вынужденный процесс через $z^B(t)$, получим

$$z^B(t) = \int_{-\infty}^t k_3(t-\tau) f_3(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^t k_B(t-\tau) f_B(\tau) d\tau \quad (8.23)$$

или, после замены переменной $t - \tau$ на τ и, значит, $-d\tau$ на $d\tau$,

$$z^B(t) = \int_0^{\infty} k_3(\tau) f_3(t-\tau) d\tau + \int_0^{\infty} k_B(\tau) f_B(t-\tau) d\tau. \quad (8.24)$$

Отсюда видно, что вынужденный процесс получается из уравнения (8.20) при замене верхнего предела t на ∞ . Разность между общим процессом $z(t)$ (8.20) и вынужденным процессом $z^B(t)$ (8.24) определяет *свободный*, или *собственный*, процесс, который мы обозначим через $z^c(t)$, так что

$$z^c(t) = z(t) - z^B(t) \quad (8.25)$$

или, после подстановки (8.20) и (8.24) в (8.25,

$$z^c(t) = - \int_t^{\infty} k_3(\tau) f_3(t - \tau) d\tau - \int_t^{\infty} k_B(\tau) f_B(t - \tau) d\tau. \quad (8.26)$$

Общий, или полный, процесс $z(t)$ в автоматической системе представляет собой сумму вынужденного $z^B(t)$ (8.24) и собственного $z^c(t)$ (8.26) процессов.

Для более сложных видов автоматических систем, как, например, комбинированной разомкнуто-замкнутой системы, выражения для вынужденного и свободного процессов можно также привести к виду, аналогичному (8.24) и (8.26):

$$z^B(t) = \int_0^{\infty} k_3^0(\tau) f_3(t - \tau) d\tau + \int_0^{\infty} k_B^0(\tau) f_B(t - \tau) d\tau \quad (8.27)$$

и

$$z^c(t) = - \int_t^{\infty} k_3^0(\tau) f_3(t - \tau) d\tau - \int_t^{\infty} k_B^0(\tau) f_B(t - \tau) d\tau. \quad (8.28)$$

Но теперь временные характеристики $k_B^0(t)$ и $k_3^0(t)$ определяются из более сложных изображений, а именно:

$$L\{k_3^0(t)\} = K_3^0(p) = K_3(p) + K_B(p) W_{2к}(p), \quad (8.29)$$

$$L\{k_B^0(t)\} = K_B^0(p) = K_B(p) + K_3(p) W_{1к}(p). \quad (8.30)$$

§ 8.4. Характеристики автоматических систем

Как видно из уравнений (8.21), (8.22), процессы в линейных автоматических системах представляют собой сумму процессов, вызываемых порознь каждым воздействием. Поэтому при изучении свойств системы можно ограничиться изучением ее поведения в ответ на одно из этих воздействий. Следовательно, вместо уравнения (8.21) можно рассматривать уравнение

$$z(t) = \int_0^t k(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (8.31)$$

или

$$z(t) = \int_0^t k(\tau) f(t - \tau) d\tau, \quad (8.32)$$

где $f(t)$ представляет собой либо задающее $f_3(t)$, либо возмущающее $f_B(t)$ воздействие и, следовательно, $k(t)$ равно $k_3(t)$,

либо $k_B(t)$ соответственно. Предположим, что внешнее воздействие $f(t)$ представляет собой кратковременное воздействие, площадь которого равна единице. Такое импульсное воздействие можно рассматривать как δ -функцию $\delta(t)$, равную нулю при $t \neq 0$, а при $t = 0$ обращающуюся в бесконечность, так что площадь ее равна единице (см. приложение 2). Полагая в (8.31)

$$\tilde{f}(\tau) = \delta(\tau) \quad (8.33)$$

и учитывая свойство δ -функции (свойство 2 приложения 2), получим

$$z(t) = \int_0^t k(t - \tau) \delta(\tau) d\tau = k(t). \quad (8.34)$$

Отсюда следует, что

временная характеристика $k(t)$ представляет собой реакцию замкнутой системы на импульсное воздействие.

Временную характеристику $k(t)$ часто называют также *импульсной характеристикой*.

Знание временной характеристики позволяет по уравнению (8.31) определить процесс при любом внешнем воздействии $\tilde{f}(t)$. Нетрудно понять физический смысл уравнения (8.31). Оно определяет процесс в замкнутой системе как сумму реакций системы на последовательность импульсных воздействий, интенсивности которых пропорциональны величине внешнего воздействия. Вынужденный процесс получается из (8.32) при замене верхнего предела t на ∞ , т. е.

$$z^B(t) = \int_0^{\infty} k(\tau) \tilde{f}(t - \tau) d\tau.$$

Предположим, что $\tilde{f}(t)$ — гармоническое воздействие. В комплексной форме оно может быть представлено в виде

$$\tilde{f}(t) = B e^{j(\omega t + \psi)}, \quad (8.35)$$

где B — амплитуда, ω — угловая частота, ψ — начальная фаза. При комплексном входном воздействии комплексной будет и выходная величина, поэтому

$$\tilde{z}^B(t) = \int_0^{\infty} k(\tau) B e^{j[\omega(t - \tau) + \psi]} d\tau, \quad (8.36)$$

или

$$\tilde{z}^B(t) = \left[\int_0^{\infty} k(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] B e^{j(\omega t + \psi)}. \quad (8.37)$$

Но поскольку согласно (8.18)

$$K(p) = L\{k(t)\} = \int_0^{\infty} k(\tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad (8.38)$$

то, полагая в (8.38)

$$p = j\omega, \quad (8.39)$$

получим

$$K(j\omega) = \int_0^{\infty} k(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (8.40)$$

Следовательно, учитывая (8.35) и (8.40), запишем выражение (8.37) так:

$$\vec{z}^B(t) = K(j\omega) \vec{f}(t). \quad (8.41)$$

Величина $K(j\omega)$, показывающая, как преобразуется системой гармоническое воздействие, называется *частотной характеристикой*. Таким образом, замкнутая система полностью определяется:

- 1) передаточной функцией $K(p)$,
- 2) временной характеристикой $k(t)$,
- 3) частотной характеристикой $K(j\omega)$.

Передаточная функция представляет собой, по существу, сокращенную запись дифференциального уравнения системы.

Временная характеристика определяет поведение системы во времени при кратковременном воздействии, т. е. временные свойства системы.

Частотная характеристика определяет поведение системы при гармоническом воздействии различных частот, т. е. частотные свойства системы.

Все эти характеристики тесно связаны друг с другом. Связь частотной характеристики и передаточной функции особенно проста:

$$K(j\omega) = [K(p)]_{p=j\omega}. \quad (8.42)$$

$K(j\omega)$ соответствует частным значениям аргумента $p = j\omega$, а именно тем значениям p , которые расположены на мнимой оси плоскости p (рис. 8.2, б).

Связь передаточной функции $K(p)$ с временной характеристикой $k(t)$ определяется преобразованием Лапласа

$$K(p) = \int_0^{\infty} k(t) e^{-pt} dt, \quad (8.43)$$

Связь же частотной характеристики $K(j\omega)$ с временной характеристикой определяется преобразованием Фурье

$$K(j\omega) = \int_0^{\infty} k(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (8.44)$$

Связь временной характеристики с передаточной функцией и частотной характеристикой в общем случае определяется обратным преобразованием Лапласа и обратным преобразованием Фурье (см. приложение 1), которые мы сейчас использовать не будем.

Приведем лишь *формулу разложения*, которая определяет временную характеристику по передаточной функции. Рассмотрим передаточные функции замкнутой системы по задающему воздействию

$$K_3(p) = \frac{W_y(p) W_{об}(p)}{1 + W_y(p) W_{об}(p)} \quad (8.45)$$

и по возмущающему воздействию

$$K_в(p) = \frac{W_y(p)}{1 + W_y(p) W_{об}(p)}. \quad (8.46)$$

Пусть

$$W_y(p) = \frac{P_y(p)}{Q_y(p)}, \quad W_{об}(p) = \frac{P_{об}(p)}{Q_{об}(p)}, \quad (8.47)$$

где $P_y(p)$, $P_{об}(p)$, $Q_y(p)$, $Q_{об}(p)$ — полиномы. Передаточная функция разомкнутой системы будет равна

$$W(p) = W_y(p) W_{об}(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}, \quad (8.48)$$

где

$$P(p) = P_y(p) P_{об}(p), \quad Q(p) = Q_y(p) Q_{об}(p). \quad (8.49)$$

Подставляя (8.48) и (8.49) в (8.45) и (8.46), получим

$$K_3(p) = \frac{P_y(p) P_{об}(p)}{Q(p) + P(p)} = \frac{H_3(p)}{G(p)} \quad (8.50)$$

и

$$K_в(p) = \frac{P_y(p) Q_{об}(p)}{Q(p) + P(p)} = \frac{H_в(p)}{G(p)}. \quad (8.51)$$

Из выражений (8.50) и (8.51) видно, что передаточные функции замкнутой системы $K_3(p)$ и $K_в(p)$ отличаются только числителями. Знаменатели же их совпадают и определяют собой *характеристический многочлен*

$$G(p) = P(p) + Q(p). \quad (8.52)$$

Приравнивая этот характеристический многочлен нулю, получаем *характеристическое уравнение*

$$G(p) = P(p) + Q(p) = 0. \quad (8.53)$$

Пусть степень характеристического уравнения (8.53) равна n и оно имеет простые корни p_1, p_2, \dots, p_n . Эти корни являются полюсами передаточной функции

$$K(p) = \frac{H(p)}{G(p)}, \quad (8.54)$$

где $H(p)$ равно, например, $H_3(p)$ или $H_B(p)$. Пользуясь формулой разложения (см. приложение 1), находим временную характеристику в виде

$$k(t) = \sum_{\nu=1}^n \frac{H(p_\nu)}{G'(p_\nu)} e^{p_\nu t}. \quad (8.55)$$

Разумеется, каждый элемент линейной системы может быть также охарактеризован своей передаточной функцией, частотной или временной характеристиками. Для определения частотной характеристики всей системы в целом по частотным характеристикам ее элементов справедлива алгебра частотных характеристик, которая следует из описанной ранее алгебры передаточных функций при $p = j\omega$. Значительно сложнее определить временную характеристику всей системы в целом по временным характеристикам ее элементов, так как это требует многократного применения операции свертывания, что приводит к громоздким вычислениям. Знание передаточной функции либо частотной или, наконец, временной характеристики дает возможность определить динамические свойства автоматических систем.

Задачи

8.1. Показать, что передаточная функция, частотная и временная характеристики неминимально-фазовой цепи (рис. 8.4) равны соответственно

$$W(p) = \frac{1 - T_1 p}{1 + T_2 p},$$

$$T_1 = (R_2 - R_1) C, \quad T_2 = (R_1 + R_2) C,$$

$$W(j\omega) = \frac{1 - jT_1\omega}{1 + jT_2\omega},$$

$$\omega(t) = -\frac{T_1}{T_2} \delta(t) + \left(1 + \frac{T_1}{T_2}\right) e^{-\frac{t}{T_2}}.$$

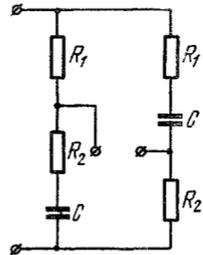


Рис. 8.4.

8.2. Показать, что системе с передаточной функцией $W(p) = e^{-\sqrt{pT}}$ соответствуют частотная и временная характеристики видов

$$W(j\omega) = e^{-\sqrt{j\omega T}} = e^{-\sqrt{\frac{\omega T}{2}}} e^{-j\sqrt{\frac{\omega T}{2}}},$$

$$\omega(t) = 0,5 \sqrt{\frac{T}{(\pi t)^3}} e^{-\frac{T}{4t}}.$$

8.3. Показать путем разложения в ряд по степени p , что передаточная функция e^{-pT} с достаточной степенью точности может быть аппроксимиро-

вана передаточной функцией $\frac{1 - \frac{T}{2} p}{1 + \frac{T}{2} p}$. Сравнить соответствующие частотные

характеристики.

8.4. Какая из передаточных функций

$$\frac{1 - Tp}{1 + Tp} e^{pT}, \quad e^{-pT}, \quad \frac{1 + Tp}{1 - Tp}$$

Физически реализуема?

Глава 9

ВЫНУЖДЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ

§ 9.1. Общее описание вынужденных процессов

Вынужденные процессы в автоматических системах определяются в общем случае уравнением (8.27):

$$z^B(t) = \int_0^{\infty} k_3^0(\tau) f_3(t - \tau) d\tau + \int_0^{\infty} k_B^0(\tau) f_B(t - \tau) d\tau. \quad (9.1)$$

Пусть существует разложение внешнего воздействия $f(t - \tau)$ в ряд Тейлора относительно точки t . Тогда

$$f(t - \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(t) (-1)^k \frac{\tau^k}{k!}, \quad (9.2)$$

где

$$f^{(k)}(t) = \frac{d^k f(t)}{dt^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9.3)$$

Подставляя (9.2) при $f(t) = f_3(t)$ и $f(t) = f_B(t)$ в (9.1), получим

$$\begin{aligned} z^B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} k_3^0(\tau) \tau^k d\tau \right\} (-1)^k \frac{f_3^{(k)}(t)}{k!} + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} k_B^0(\tau) \tau^k d\tau \right\} (-1)^k \frac{f_B^{(k)}(t)}{k!}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Величины

$$d(k) = (-1)^k \int_0^{\infty} k^0(\tau) \tau^k d\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.5)$$

представляют собой *моменты k -го порядка* временной характеристики $k^0(t)$. Пользуясь (9.5), запишем (9.4) окончательно в

виде

$$z^B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[d_3(k) \frac{f_3^{(k)}(t)}{k!} + d_B(k) \frac{f_B^{(k)}(t)}{k!} \right]. \quad (9.6)$$

Таким образом,

вынужденный процесс в линейной системе полностью определяется моментами временных характеристик и производными внешних воздействий.

Моменты $d(k)$ (9.5) можно определить и по передаточным функциям замкнутой системы. Для этого воспользуемся основным соотношением преобразования Лапласа

$$K^0(p) = \int_0^{\infty} k^0(\tau) e^{-p\tau} d\tau. \quad (9.7)$$

Дифференцируя соотношение (9.7) k раз по p , получим

$$\frac{d^k K^0(p)}{dp^k} = (-1)^k \int_0^{\infty} k^0(\tau) \tau^k e^{-p\tau} d\tau. \quad (9.8)$$

Устремляя p к нулю и подставляя полученный результат в (9.5), найдем, что

$$d(k) = \left[\frac{d^k K^0(p)}{dp^k} \right]_{p=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9.9)$$

Отсюда видно, что k -й момент $d(k)$ временной характеристики равен k -й производной передаточной функции $K^0(p)$ по p при $p = 0$. Если разложить $K(p)$ в ряд по степеням p , то мы получим

$$K^0(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{d^k K^0(p)}{dp^k} \right]_{p=0} p^k, \quad (9.10)$$

и, значит, согласно (9.9)

$$K^0(p) = \sum_{k=0}^{\infty} d(k) p^k. \quad (9.11)$$

Моменты $d(k)$ временной характеристики представляют собой коэффициенты разложения передаточной функции $K(p)$ в ряд по степеням p .

Это обстоятельство позволяет определять $d(k)$ для дробно-рациональных передаточных функций линейных систем простым

делением многочлена числителя передаточной функции на многочлен знаменателя, т. е. на характеристический полином. Выражение вынужденного процесса (9.6) особенно удобно в тех случаях, когда правая часть этого выражения представляет собой конечные суммы или сходящиеся ряды. Первое имеет место для полиномиальных воздействий, а второе — для экспоненциальных воздействий и, в частности, гармонических воздействий. Но, как мы уже видели в § 8.4, при гармонических воздействиях вынужденный процесс находится весьма просто с помощью частотной характеристики. Поэтому далее в этой главе мы будем использовать выражение вынужденного процесса только для степенных воздействий.

§ 9.2. Коэффициенты ошибок по вынужденному процессу $z^B(t)$

Легко найти выражение для вынужденной ошибки $x^B(t)$ в линейной системе

$$x^B(t) = \dot{f}_3(t) - z^B(t). \quad (9.12)$$

Подставляя в (9.12) $z^B(t)$ из (9.6), получим

$$x^B(t) = [1 - d_3(0)] \dot{f}_3(t) - \sum_{k=1}^{\infty} d_3(k) \frac{\dot{f}_3^{(k)}(t)}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} d_B(k) \frac{\dot{f}_B^{(k)}(t)}{k!}. \quad (9.13)$$

Вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} c_3(0) &= 1 - d_3(0), \\ c_B(0) &= -d_B(0), \\ c_3(k) &= -d_3(k), \\ c_B(k) &= -d_B(k), \end{aligned} \right\} \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (9.14)$$

запишем (9.13) в компактной форме:

$$x^B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_3(k) \frac{\dot{f}_3^{(k)}(t)}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} c_B(k) \frac{\dot{f}_B^{(k)}(t)}{k!}. \quad (9.15)$$

Коэффициенты $c_3(k)$ и $c_B(k)$ называются *коэффициентами ошибок*, и на основе определения $d(k)$ (9.9) и (9.14) они могут быть записаны в виде

$$c_3(k) = \left[\frac{d^k}{dp^k} (1 - K_3^0(p)) \right]_{p=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.16)$$

$$c_B(k) = - \left[\frac{d^k}{dp^k} K_B^0(p) \right]_{p=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9.17)$$

Вспоминая, что $1 - K_3^0(p)$ и $-K_B^0(p)$ представляют собой передаточные функции ошибки системы по задающему и возмущающему воздействиям, заключаем, что

коэффициенты ошибок $c_3(k)$ и $c_B(k)$ равны k -м производным соответствующих передаточных функций ошибки при $p = 0$.

В общем случае для комбинированной разомкнуто-замкнутой системы согласно (8.29), (8.30) (рис. 7.9)

$$K_3^0(p) = K_3(p) + K_B(p) W_{1K}(p), \quad (9.18)$$

$$K_B^0(p) = K_B(p) + K_3(p) W_{2K}(p). \quad (9.19)$$

Подставляя значения $K_3^0(p)$ в (9.16) и $K_B^0(p)$ в (9.17), получим

$$c_3(k) = \frac{d^k}{dp^k} [1 - K_3(p) - K_B(p) W_{1K}(p)]_{p=0}, \quad (9.20)$$

$$c_B(k) = - \frac{d^k}{dp^k} [K_B(p) + K_3(p) W_{2K}(p)]_{p=0}. \quad (9.21)$$

Полагая в (9.20), (9.21)

$$W_{1K}(p) \equiv W_K(p), \quad W_{2K}(p) \equiv 0, \quad (9.22)$$

найдем выражения коэффициентов ошибок для разомкнуто-замкнутой системы:

$$c_3(k) = \frac{d^k}{dp^k} [1 - K_3(p) - K_B(p) W_{1K}(p)]_{p=0}, \quad (9.23)$$

$$c_B(k) = - \left[\frac{d^k}{dp^k} K_B(p) \right]_{p=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.24)$$

а при

$$W_{1K}(p) \equiv 0, \quad W_{2K}(p) \equiv W_K(p) \quad (9.25)$$

из (9.20) и (9.21) получим выражения коэффициентов ошибок для комбинированной системы:

$$c_3(k) = \frac{d^k}{dp^k} [1 - K_3(p)]_{p=0}, \quad (9.26)$$

$$c_B(k) = - \frac{d^k}{dp^k} [K_B(p) + K_3(p) W_K(p)]_{p=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9.27)$$

Наконец, при

$$W_K(p) \equiv 0$$

из (9.23), (9.24) или (9.26), (9.27) получаем выражения коэффициентов ошибок для обычной системы (рис. 6.2) и системы с

внутренней положительной обратной связью (рис. 6.3):

$$c_3(k) = \frac{d^k}{dp^k} [1 - K_3(p)] \Big|_{p=0}, \quad (9.28)$$

$$c_B(k) = - \frac{d^k K_B(p)}{dp^k} \Big|_{p=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9.29)$$

Поскольку $K_3(p)$ и $K_B(p)$ для обычной системы (6.11), (6.12) и для системы с внутренней положительной обратной связью (6.18), (6.19) выражаются различным образом, то и конкретные значения коэффициентов ошибок для этих систем будут, естественно, различны.

Коэффициенты ошибок полностью определяют зависимость вынужденной ошибки от структуры автоматической системы и ее параметров. Поэтому исследование коэффициентов ошибок позволяет наметить пути уменьшения или полного устранения вынужденной ошибки.

§ 9.3. Статическая ошибка

Пусть задающее $f_3(t)$ и возмущающее $f_B(t)$ воздействия постоянны, т. е.

$$f_3^{(0)}(t) \equiv A_3, \quad f_B^{(0)}(t) \equiv A_B. \quad (9.30)$$

Это значит, что

$$f_3^{(k)}(t) = f_B^{(k)}(t) \equiv 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (9.31)$$

Принимая во внимание (9.30) и (9.31), находим из выражения вынужденной ошибки (9.15)

$$x^B(t) = x^B = c_3(0) A_3 + c_B(0) A_B. \quad (9.32)$$

При постоянных воздействиях вынужденная ошибка также постоянна.

Назовем такую постоянную ошибку *статической ошибкой*.

Статическая ошибка пропорциональна величине постоянного внешнего воздействия.

Коэффициенты пропорциональности равны начальным коэффициентам ошибки $c_3(0)$ и $c_B(0)$.

При $k = 0$ из (9.16) и (9.17) получаем

$$c_3(0) = 1 - K_3^0(0), \quad c_B(0) = -K_B^0(0), \quad (9.33)$$

и, значит, согласно (9.32)

$$x^B = (1 - K_3^0(0)) A_3 - K_B^0(0) A_B. \quad (9.34)$$

Для обычной системы $K_3^0(0) = K_3(0)$, $K_B^0(0) = K_B(0)$, т. е.

$$x^B = (1 - K_3(0)) A_3 - K_B(0) A_B, \quad (9.35)$$

и, как следует из (6.11) и (6.12), при $p=0$

$$c_3(0) = 1 - K_3(0) = \frac{1}{1 + W_y(0) W_{об}(0)}, \quad (9.36)$$

$$c_B(0) = -K_B(0) = -\frac{W_{об}(0)}{1 + W_y(0) W_{об}(0)}. \quad (9.37)$$

Если

$$W_y(0) = k_y \quad \text{и} \quad W_{об}(0) = k_{об}, \quad (9.38)$$

то

$$1 - K_3(0) = \frac{1}{1 + k_y k_{об}} \quad (9.39)$$

и

$$K_B(0) = \frac{k_y}{1 + k_y k_{об}}. \quad (9.40)$$

И, значит, из (9.35) получаем

$$x^B = \frac{1}{1 + k_y k_{об}} A_3 - \frac{k_y}{1 + k_y k_{об}} A_B. \quad (9.41)$$

Влияние интенсивностей A_3 и A_B постоянных внешних воздействий на статическую ошибку x^B тем меньше, чем больше коэффициент усиления объекта $k_{об}$.

При увеличении коэффициента усиления управляющего устройства k_y составляющая статической ошибки, вызванная постоянным задающим воздействием A_3 , будет уменьшаться. Что же касается составляющей статической ошибки, вызванной постоянным возмущающим воздействием A_B , то она по абсолютной величине будет увеличиваться с ростом k_y .

Автоматические системы, в которых имеет место статическая ошибка, называются *статическими*.

Для комбинированной разомкнуто-замкнутой системы коэффициенты ошибок согласно (9.23), (9.24) при $k=0$ равны

$$\begin{aligned} c_3(0) &= 1 - K_3(0) - W_{2z}(0) K_B(0), \\ c_B(0) &= -K_B(0) - W_{1к}(0) K_3(0). \end{aligned} \quad (9.42)$$

Подставляя их в (9.32), получим

$$\begin{aligned} x^B &= (1 - K_3(0) - W_{2к}(0) K_B(0)) A_3 - \\ &\quad - (K_B(0) + W_{1к}(0) K_3(0)) A_B, \end{aligned} \quad (9.43)$$

где по-прежнему $1 - K_s(0)$ и $K_b(0)$ определяются выражениями (9.39) и (9.40) и, как легко видеть из (9.36),

$$K_s(0) = \frac{W_y(0) W_{об}(0)}{1 + W_y(0) W_{об}(0)}. \quad (9.44)$$

В этом случае уменьшение статической ошибки может быть достигнуто и надлежащим выбором $W_{1к}(0)$ и $W_{2к}(0)$. При отсутствии корректирующих устройств,

$$W_{1к}(p) = W_{2к}(p) \equiv 0, \quad (9.45)$$

из (9.43) мы получаем уже знакомое уравнение (9.41). Для произвольных фиксированных корректирующих устройств, характеризуемых $W_{1к}(p)$ и $W_{2к}(p)$, наши прежние выводы о влиянии $k_{об}$ и k_y на статическую ошибку остаются в силе.

§ 9.4. Условия отсутствия статической ошибки

Выясним условия, при которых статическая ошибка равна нулю, т. е.

$$x^b(t) = x^b \equiv 0. \quad (9.46)$$

Из выражения статической ошибки (9.32) следует, что статическая ошибка будет равна нулю, если равны нулю начальные коэффициенты ошибки:

$$c_s(0) \equiv 0, \quad c_b(0) \equiv 0. \quad (9.47)$$

Но начальные коэффициенты ошибки равны значениям передаточных функций ошибки по задающему и по возмущающему воздействиям при $p = 0$. Следовательно,

статическая ошибка автоматической системы будет равна нулю, если равны нулю передаточные функции ошибки по задающему и возмущающему воздействиям при $p = 0$.

Но эти условия являются частным случаем условий инвариантности, установленных в главе 6, если в них положить $p = 0$. Таким образом,

условия отсутствия статической ошибки представляют собой условия инвариантности при $p = 0$.

Так, для обычной системы из условий инвариантности (6.59) и (6.60) при $p = 0$, или, что то же, условий отсутствия статической ошибки, согласно (9.47) из (9.16) и (9.17) при $k = 0$ получаем

$$1 - K_s(0) = \frac{1}{1 + W_y(0) W_{об}(0)} = 0, \quad (9.48)$$

$$K_b(0) = \frac{W_{об}(0)}{1 + W_y(0) W_{об}(0)} = 0. \quad (9.49)$$

Если $W_y(p)$ обладает индексом аperiodической нейтральности, отличным от нуля, т. е. $s_a > 0$, что соответствует наличию в законе управления интегральной компоненты, то

$$W_y(0) = \infty \quad (9.50)$$

и условия (9.48), (9.49) заведомо удовлетворяются, а значит, выполняются равенства (9.47). Заметим, что если управляемый объект таков, что индекс аperiodической нейтральности его также отличен от нуля, $s_a^{об} > 0$, а индекс аperiodической нейтральности управляющего устройства равен нулю, т. е. $s_a^y = 0$, то

$$W_{об}(0) = \infty, \quad (9.51)$$

а

$$W_y(0) = k_y = \text{const.} \quad (9.52)$$

Тогда условие (9.48) будет по-прежнему выполняться, а условие (9.49) не будет выполняться, так как

$$K_s(0) = \frac{1}{W_y(0)} = \frac{1}{k_y} \neq 0, \quad (9.53)$$

и, следовательно, из (9.35),

$$x^B = -\frac{A_B}{k_y} \neq 0. \quad (9.54)$$

В этом случае статическая ошибка полностью не устраняется.

Для системы с положительной внутренней обратной связью (рис. 6.3) условие нулевой статической ошибки, как следует из условий инвариантности (6.20), (6.22), при $p = 0$ принимает вид, аналогичный (9.48) и (9.49), но теперь

$$1 - K_s(0) = \frac{1}{1 + W_{вос}(0) W_{об}(0)} = 0, \quad (9.55)$$

$$K_B(0) = \frac{W_{об}(0)}{1 + W_{вос}(0) W_{об}(0)} = 0, \quad (9.56)$$

где, как следует из (6.16), при $p = 0$

$$W_{вос}(0) = \frac{W_y(0)}{1 - W_y(0) W_K(0)}. \quad (9.57)$$

Условие инвариантности (6.24) при $p = 0$ имеет вид

$$W_K(0) = W_y^{-1}(0). \quad (9.58)$$

Если $W_K(0) = k_K$, а $W_y(0) = k_y$, то условие (9.58) принимает простой вид:

$$k_K = \frac{1}{k_y}. \quad (9.59)$$

Это условие и обеспечивает нулевую статическую ошибку. Легко понять физический смысл этого результата. При выполнении условия (9.58) или (9.59) передаточная функция

$$W_{\text{вос}}(0) = \infty. \quad (9.60)$$

Предположим для простоты, что

$$W_y(p) = \frac{k_y}{1 + T_1 p} \quad \text{и} \quad W_k(p) = k_k. \quad (9.61)$$

Подставляя эти значения в (6.16), получим при учете (9.59)

$$W_{\text{вос}}(p) = \frac{k_y}{1 + T_1 p - k_y k_y} = \frac{k_y}{T_1 p}, \quad (9.62)$$

что соответствует введению в закон управления интегральной компоненты. Таким образом,

при введении положительной обратной связи и выполнении условия нулевой ошибки при $p = 0$ элемент, передаточная функция которого имела индекс аperiodической нейтральности $s_a = 0$, заменяется элементом, передаточная функция которого имеет индекс аperiodической нейтральности $s_a = 1$.

Следует, однако, отметить, что неточное выполнение соотношений (9.59) приводит к тому, что элемент передаточной функции, обладающей нулевым индексом нейтральности, нулевым индексом неустойчивости, может заменяться элементом с передаточной функцией, обладающим положительным индексом неустойчивости.

Устранение статической ошибки может быть достигнуто и в системах с отрицательной внутренней обратной связью (рис. 6.2). В этом случае вместо (6.16) $W_{\text{вос}}(p)$ будет определяться выражением

$$W_{\text{вос}}(p) = \frac{W_y(p)}{1 + W_k(p) W_y(p)}. \quad (9.63)$$

Пусть по-прежнему $W_y(p)$ определяется выражением (9.61), а $W_k(p)$ выберем равным

$$W_k(p) = \frac{T_p}{1 + T_p}. \quad (9.64)$$

Подставляя значения $W_y(p)$ (9.61) и $W_k(p)$ (9.64) в (9.63), получим

$$W_{\text{вос}}(p) = \frac{k_y(1 + T_p)}{(1 + T_1 p)(1 + T_p) + k_y T_p}. \quad (9.65)$$

При достаточно большом значении k_y , что соответствует глубокой отрицательной внутренней обратной связи,

$$W_{\text{вос}}(p) \approx \frac{1 + T_p}{T_p} = 1 + \frac{1}{T_p}, \quad (9.66)$$

и мы снова получаем элемент, обладающий положительным индексом нейтральности. Подчеркнем, что $W_{\text{вос}}(p)$ (9.65) при достаточно большом коэффициенте усиления k_y , как видно из (9.66), практически не зависит от значения коэффициента усиления. Таким образом,

при введении глубокой отрицательной внутренней обратной связи элемент, передаточная функция которого (9.63) имела индекс аperiodической нейтральности $s_a = 0$, заменяется элементом, передаточная функция которого имеет индекс аperiodической нейтральности $s_a = 1$ (9.66).

Введение надлежащей положительной или отрицательной внутренней связи приводит к тому, что в закон управления вводится интегральная компонента, которая и обеспечивает устранение вынужденного значения ошибки.

В системах с И-, ПИ-, ПИД-управлением статическая ошибка равна нулю.

Физический смысл этого вывода довольно прост. Наличие интегратора в управляющем устройстве приводит к тому, что управляющее воздействие может быть любым постоянным воздействием при нулевом сигнале ошибки. Такие автоматические системы называются *астатическими*.

В системах с П-, ПД-управлением управляющее воздействие всегда пропорционально сигналу ошибки.

Рассмотрим комбинированную разомкнуто-замкнутую систему. Условие отсутствия статической ошибки получается из общих условий инвариантности, т. е. компенсации (6.48) и воспроизведения (6.49) при $p = 0$. Эти условия имеют вид

$$K_B(0) = -W_{1к}(0)K_S(0) \quad (9.67)$$

и

$$K_S(0) + W_{2к}(0)K_B(0) = 1 \quad (9.68)$$

или, на основании (6.50) и (6.51),

$$W_{1к}(0) = W_y^{-1}(0) \quad (9.69)$$

и

$$W_{2к}(0) = W_{ос}^{-1}(0), \quad (9.70)$$

Так, например, если

$$W_y(p) = \frac{k_y}{1 + T_p}, \quad (9.71)$$

а

$$W_{об}(p) = \frac{k_{об}}{1 + T_{01}p + T_{02}^2 p^2 + \dots} \quad (9.72)$$

и

$$W_{1к}(p) = \frac{k_{1к} (1 + \tau_{11}p + \tau_{12}^2 p^2 + \dots)}{1 + T_{11}p + T_{12}^2 p^2 + \dots}, \quad (9.73)$$

а

$$W_{2к}(p) = \frac{k_{2к} (1 + \tau_{21}p + \tau_{22}^2 p^2 + \dots)}{1 + T_{21}p + T_{22}^2 p^2 + \dots}, \quad (9.74)$$

то статическая ошибка будет равна нулю, если, как это следует из (9.69) и (9.70), выбрать коэффициенты усиления дополнительных корректирующих элементов равными

$$\left. \begin{aligned} k_{1к} &= \frac{1}{k_y}, \\ k_{2к} &= \frac{1}{k_{об}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.75)$$

В этом случае статическая ошибка в системе уничтожается за счет компенсации постоянного возмущающего воздействия и идеального воспроизведения постоянного задающего воздействия.

§ 9.5. Условия астатизма l -го порядка

Будем говорить, что автоматическая система обладает астатизмом l -го порядка, если при полиномиальных воздействиях вида

$$f_3(t) = A_{3,0} + A_{3,1}t + \dots + A_{3,l-1}t^{l-1} \quad (9.76)$$

и

$$f_в(t) = A_{в,0} + A_{в,1}t + \dots + A_{в,l+1}t^{l+1} \quad (9.77)$$

вынужденный процесс изменения ошибки отсутствует, т. е.

$$x^в(t) \equiv 0. \quad (9.78)$$

Как видно из выражения вынужденной ошибки (9.15), условием астатизма l -го порядка автоматической системы является

равенство нулю l первых коэффициентов ошибок по задающему и возмущающему воздействиям, т. е.

$$c_3(k) = 0, \quad c_B(k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, l-1. \quad (9.79)$$

Действительно, замечая, что для $f_3(t)$ (9.76) и $f_B(t)$ (9.77)

$$f_3^{(k)}(t) = f_B^{(k)}(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad k \geq l, \quad (9.80)$$

и учитывая (9.79), получаем из выражения ошибки (9.15) тождество (9.78).

Астатизм l -го порядка может быть достигнут таким изменением закона управления, при котором передаточная функция управляющего устройства приобретает индекс аperiodической нейтральности $s_a = l$, что достигается введением в управляющее устройство l последовательно соединенных интеграторов. В комбинированных разомкнуто-замкнутых системах астатизм l -го порядка может быть достигнут надлежащим выбором передаточных функций корректирующих звеньев.

При $l = 1$ мы приходим к астатизму 1-го порядка, соответствующему нулевой статической ошибке, о которой шла речь в § 9.3.

Задачи

9.1. Показать, что коэффициенты ошибок системы, обладающей передаточной функцией

$$K(p) = \frac{b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \dots + b_n}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n},$$

равны соответственно $c(0) = 1 - \frac{b_n}{a_n}$, $c(1) = \frac{a_{n-1}b_n - a_n b_{n-1}}{a_n^2}$, $c(2) = \frac{a_{n-2}b_n - a_n b_{n-2} + a_{n-1}b_{n-1}}{a_n^2} - \frac{a_{n-1}^2 b_n}{a_n^3}$.

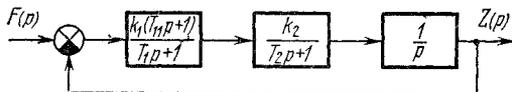


Рис. 9.1.

9.2. Показать, что для системы на рис. 9.1 коэффициенты ошибок равны $c(0) = 0$, $c(1) = \frac{1}{k_1 k_2}$, $c(2) = \frac{1}{k_1 k_2} \left[T_1 + T_2 - \frac{1}{k_1 k_2} \right] - T_{11}$.

9.3. Показать, что при $k_1 = \frac{1}{k_2}$ коэффициент ошибки $c(1)$ системы, изображенной на рис. 9.2, обращается в нуль.

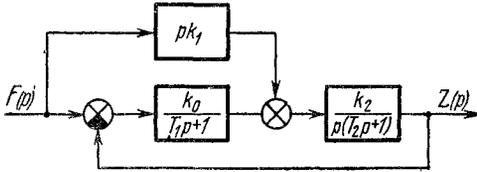


Рис. 9.2.

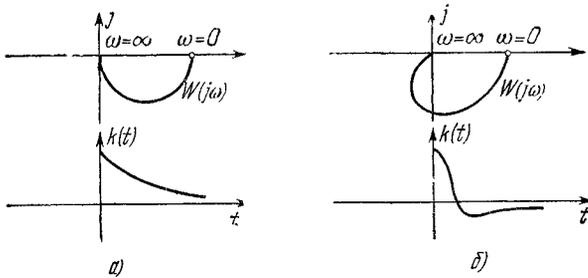


Рис. 9.3.

9.4. Убедиться в том, что для систем с передаточными функциями

$$\frac{1}{1 + T_1 p} \quad \text{и} \quad \frac{1}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2} \quad (T_1 < 2T_2)$$

частотные и временные характеристики имеют вид, изображенный на рис. 9.3, а, б.

УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 10.1. Условия устойчивости

Устойчивость является одним из необходимых условий, обеспечивающих нормальное функционирование линейных автоматических систем. Будем говорить, что линейная автоматическая система *устойчива*, если ее реакция на любое ограниченное воздействие также ограничена, и *неустойчива*, если реакция на ограниченные воздействия не ограничена.

Появление неустойчивости часто ограничивает наши возможности в создании высококачественных автоматических систем. Поэтому чрезвычайно важно определить условия, обеспечивающие их устойчивость. Для установления условий устойчивости линейных систем в силу принципа суперпозиции можно ограничиться рассмотрением реакции системы на какое-либо одно воздействие — задающее или любое из возмущающих. Реакция системы на совокупность воздействий будет равна совокупности реакций на каждое из этих воздействий. Уравнения относительно изображения и оригинала реакции линейной системы имеют вид

$$Z(p) = K(p) F(p) \quad (10.1)$$

и

$$z(t) = \int_0^t k(\tau) f(t - \tau) d\tau, \quad (10.2)$$

где $F(p)$ и $f(t)$ — изображение и оригинал внешнего воздействия, а $K(p)$ и $k(t)$ — соответствующие этому воздействию передаточная функция и временная характеристика. Предположим, что внешнее воздействие ограничено, т. е.

$$|f(t)| \leq M_0 < \infty \quad \text{при любом } t, \quad (10.3)$$

а значит, и

$$|f(t - \tau)| \leq M_0 \quad \text{при любом } t \geq \tau. \quad (10.4)$$

Оценим абсолютную величину реакции системы $z(t)$. Поскольку абсолютная величина интеграла не превышает интеграла от абсолютной величины, то

$$|z(t)| \leq \int_0^t |k(\tau)| |f(t-\tau)| d\tau. \quad (10.5)$$

Учитывая (10.4) и увеличивая предел t до ∞ , мы несколько усилим неравенство (10.5) и, значит,

$$|z(t)| \leq M_0 \int_0^{\infty} |k(\tau)| d\tau. \quad (10.6)$$

Реакция системы $z(t)$ будет ограничена, если интеграл от абсолютного значения временной характеристики конечен, т. е. если

$$\int_0^{\infty} |k(\tau)| d\tau < \infty. \quad (10.7)$$

Отсюда заключаем, что

для того, чтобы реакция системы $z(t)$ была ограниченной, достаточно, чтобы временная характеристика была абсолютно интегрируемой.

Покажем, что условие (10.7) является также и необходимым. Для этого предположим, что условие (10.7) не соблюдается. Это значит, что

$$\int_0^{\infty} |k(\tau)| d\tau = \infty. \quad (10.8)$$

Тогда, выбирая при фиксированном $t = t_0$ воздействие вида

$$f(t_0 - \tau) = \text{sign } k(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } k(\tau) > 0, \\ 0 & \text{при } k(\tau) = 0, \\ -1 & \text{при } k(\tau) < 0, \end{cases} \quad (10.9)$$

получим из (10.2) выражение для отклонения $z(t_0)$:

$$z(t_0) = \int_0^{t_0} k(\tau) \text{sign } k(\tau) d\tau = \int_0^{t_0} |k(\tau)| d\tau. \quad (10.10)$$

Это равенство справедливо при любом t_0 , в том числе и при достаточно больших t_0 . Но с ростом t_0 , как следует из (10.8) и

(10.10), реакция системы будет неограниченно возрастать:

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} z(t_0) = \int_0^{\infty} |k(\tau)| d\tau = \infty, \quad (10.11)$$

т. е. при невыполнении условия (10.7) автоматическая система неустойчива. Таким образом,

для того чтобы автоматическая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы ее временная характеристика $k(t)$ была абсолютно интегрируемой.

Вспоминая, что свободный процесс $z^c(t)$ определяется выражением

$$z^c(t) = - \int_t^{\infty} k(\tau) f(t - \tau) d\tau, \quad (10.12)$$

закключаем, что при ограниченном воздействии (10.4)

$$|z^c(t)| \leq M_0 \int_t^{\infty} |k(\tau)| d\tau \quad (10.13)$$

и если временная характеристика абсолютно интегрируема, то

$$\int_t^{\infty} |k(\tau)| d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (10.14)$$

а значит, и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z^c(t) = 0. \quad (10.15)$$

Отсюда следует, что

в устойчивой системе свободный процесс с течением времени стремится к нулю.

Поскольку реакция системы $z(t)$ представляет собой сумму вынужденного $z^b(t)$ и свободного $z^c(t)$ процессов (8.25), то в устойчивой системе с течением времени устанавливается вынужденный процесс, т. е.

$$z(t) \rightarrow z^b(t). \quad (10.16)$$

Абсолютная интегрируемость временной характеристики $k(t)$ накладывает определенные условия на передаточную функцию $K(p)$. Из определения передаточной функции

$$K(p) = \int_0^{\infty} k(\tau) e^{-p\tau} d\tau \quad (10.17)$$

следует очевидное неравенство

$$|K(p)| \leq \int_0^{\infty} |k(\tau)| e^{-p\tau} d\tau. \quad (10.18)$$

В правой части комплексной плоскости p (рис. 10.1), включая мнимую ось

$$\operatorname{Re} p \geq 0, \quad (10.19)$$

имеет место неравенство

$$|e^{-p\tau}| \leq 1. \quad (10.20)$$

И следовательно, из (10.18) с учетом (10.7) получаем

$$|K(p)| \leq \int_0^{\infty} |k(\tau)| d\tau < \infty, \quad \operatorname{Re} p \geq 0. \quad (10.21)$$

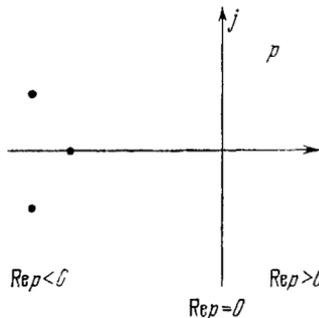


Рис. 10.1

Это неравенство может быть выполнено, только если передаточная функция замкнутой системы $K(p)$ в правой полуплоскости, включая мнимую ось, ограничена, т. е. если передаточная функция системы не имеет полюсов в правой части плоскости p и на мнимой оси (рис. 10.1). Таким образом,

для того чтобы система автоматического регулирования была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все полюсы передаточной функции замкнутой системы имели бы отрицательные действительные части, т. е. были бы левыми

Но, как было показано в § 8.4, полюсы передаточных функций

$$K(p) = \frac{H(p)}{G(p)} \quad (10.22)$$

представляют собой корни характеристического уравнения

$$G(p) = Q(p) + P(p) = 0, \quad (10.23)$$

получаемого приравниванием знаменателя передаточной функции $K(p)$ нулю. Поскольку передаточные функции замкнутой системы по отношению к любым воздействиям содержат в знаменателе один и тот же характеристический многочлен $G(p)$, то сделанный выше вывод не зависит ни от точки приложения внешнего воздействия, ни от точки, в которой рассматривается величина, характеризующая состояние системы.

Подводя итог сказанному, приходим к следующей формулировке условий устойчивости.

Для того чтобы система автоматического регулирования была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения были бы левыми.

Подчеркнем, что для суждения об устойчивости систем автоматического регулирования нет необходимости в вычислении корней характеристического уравнения. Достаточно лишь установить их расположение на комплексной плоскости. Правила, позволяющие это сделать, минуя вычисление самих корней, называются *критериями устойчивости*.

Критерии устойчивости подразделяются на *алгебраические* и *частотные*. Алгебраические критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости автоматических систем по коэффициентам характеристического уравнения. Частотные критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости автоматических систем по частотным характеристикам их элементов, которые могут быть получены как аналитическим путем, так и экспериментально.

§ 10.2. Алгебраические критерии устойчивости

Рассмотрим характеристическое уравнение системы $G(p) = 0$. Оно может быть записано в виде

$$G(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0 \quad (a_0 > 0). \quad (10.24)$$

Составим таблицу, называемую *таблицей Рауса* (табл. 10.1). В первой и второй строках таблицы Рауса, начиная со второго столбца, выписываются соответственно коэффициенты с четными и нечетными индексами. Из чисел верхней строки вычитаются числа нижней строки, предварительно помноженные на такое число ρ_v ($v = 1, 2, 3, \dots$) (оно выписывается в первом столбце), чтобы первая разность обратилась в нуль. Отбрасывая эту нулевую разность, остальные разности выписываются в третьей строке, начиная со второго столбца.

Для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты первого столбца таблицы Рауса были положительны, т. е.

$$\rho_v > 0, \quad v = 1, 2, \dots, n-1, \quad (10.25)$$

или, что эквивалентно,

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad c_{13} > 0, \quad c_{14} > 0, \dots, c_{1, n+1} > 0. \quad (10.26)$$

Если хотя бы один из коэффициентов характеристического уравнения (10.24) отрицателен, то система неустойчива.

Таблица 10.1

Коэффициенты с четными индексами	a_0	a_2	a_4	...
Коэффициенты с нечетными индексами	a_1	a_3	a_5	...
$\rho_1 = \frac{a_0}{a_1}$	$c_{13} = a_2 - \rho_1 a_3$	$c_{23} = a_4 - \rho_1 a_5$	$c_{33} = a_6 - \rho_1 a_7$...
$\rho_2 = \frac{a_1}{c_{13}}$	$c_{14} = a_3 - \rho_2 c_{23}$	$c_{24} = a_5 - \rho_2 c_{33}$	$c_{34} = a_7 - \rho_2 c_{43}$...
$\rho_3 = \frac{c_{13}}{c_{14}}$	$c_{15} = c_{23} - \rho_3 c_{24}$	$c_{25} = c_{33} - \rho_3 c_{34}$	$c_{35} = c_{43} - \rho_3 c_{44}$...
...

При составлении таблицы Рауса для численно заданных коэффициентов уравнения можно в целях упрощения вычислений умножать или делить элементы строк таблицы на положительную величину. Это не изменяет результата.

Критерий устойчивости Рауса, представляющий собой рекуррентное правило, очень удобен в тех случаях, когда коэффициенты характеристического уравнения заданы численно.

Пример. Определить устойчивость системы, характеристическое уравнение которой имеет вид

$$G(p) = p^5 + 5p^4 + 9p^3 + 10p^2 + 6p + 2 = 0.$$

Составим таблицу Рауса для этого уравнения (табл. 10.1а). Все коэффициенты ρ_v ($v = 1, 2, \dots, 4$) и a_0 положительны. Следовательно, замкнутая система, которой соответствует рассматриваемое характеристическое уравнение, устойчива.

Разумеется, если какой-либо коэффициент таблицы Рауса отрицателен, то дальнейшие вычисления нет необходимости проводить — система будет заведомо неустойчива. Отметим, что число перемен знака у коэффициентов первого столбца равно числу правых корней характеристического уравнения.

Иная форма алгебраического критерия, довольно популярная в технической литературе, называется критерием Гурвица. Критерий Гурвица легко получить из критерия Рауса. Выразим

Таблица 10.1а

Коэффициенты с четными индексами	$a_1 = 1$	$a_2 = 9$	$a_4 = 6$	Примечание
Коэффициенты с нечетными индексами	$a_1 = 5$	$a_3 = 10$	$a_5 = 2$	
$\rho_1 = \frac{a_0}{a_1} = \frac{1}{5}$	$c_{13} = a_2 - \rho_1 a_3 = 9 - \frac{10}{5} = 7$	$c_{23} = a_4 - \rho_1 a_5 = 6 - \frac{2}{5} = \frac{28}{5}$	$c_{33} = a_3 - \rho_1 a_7 = 0$	Делим строку на 7
$\rho_2 = \frac{a_1}{c_{13}} = 5$	$c_{14} = a_3 - \rho_2 c_{23} = 10 - 5 \cdot \frac{28}{5} = 6$	$c_{24} = a_5 - \rho_2 c_{33} = 2 - 5 \cdot 0 = 2$	0	Делим строку на 2
$\rho_3 = \frac{c_{13}}{c_{14}} = \frac{1}{3}$	$c_{15} = c_{23} - \rho_3 c_{24} = \frac{28}{5} - \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{7}{15}$	$c_{25} = c_{33} - \rho_3 c_{34} = 0$	0	
$\rho_4 = \frac{c_{14}}{c_{15}} = \frac{45}{7}$	$c_{16} = c_{24} - \rho_4 c_{25} = 2 - \frac{45}{7} \cdot 0 = 2$	0	0	

коэффициенты c_{1v} ($v = 3, 4, \dots$) через коэффициенты a_v характеристического уравнения (10.24) в виде определителей. Обозначим

$$a_1 = \Delta_1. \quad (10.27)$$

Тогда, как легко видеть из таблицы Рауса,

$$c_{13} = a_2 - \rho_1 a_3 = a_2 - \frac{a_0}{a_1} a_3, \quad (10.28)$$

или

$$c_{13} = \frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}. \quad (10.29)$$

Аналогично

$$c_{14} = a_3 - \rho_2 c_{23} = a_3 - \frac{a_1}{\Delta_2} \left(a_4 - \frac{a_0}{a_1} a_5 \right), \quad (10.30)$$

или

$$c_{14} = \frac{1}{\Delta_2} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}. \quad (10.31)$$

Продолжая подобные вычисления далее, получим

$$c_{1\nu} = \frac{\Delta_{\nu-1}}{\Delta_{\nu-2}}, \quad (10.32)$$

где Δ_{ν} ($\nu = 1, 2, \dots, n$) — диагональные определители, получаемые из матрицы Гурвица

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots \end{vmatrix}. \quad (10.33)$$

Матрица Гурвица составляется по простому правилу: первая строка заполняется коэффициентами с нечетными индексами, а вторая — коэффициентами с четными индексами. Дальнейшие пары строк отличаются от первой пары смещением вправо на один, два, три и т. д. столбцов. Все коэффициенты с индексами, большими степени, заменяются нулями.

Критерий устойчивости Гурвица можно сформулировать следующим образом.

Для того чтобы замкнутая система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы при $a_0 > 0$ все определители Гурвица, составленные из коэффициентов характеристического уравнения замкнутой системы, были бы положительными,

т. е. чтобы

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \\ \Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0. \quad (10.34)$$

Примечание. Условия устойчивости Гурвица остаются справедливыми и для характеристического уравнения, записанного в виде

$$G_1(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0, \quad (10.35)$$

поскольку корни этого уравнения будут взаимно обратны корням уравнения (10.24), а это не изменяет знака их действительных частей.

Таблица 10.2

$G(p)=0$	Условия устойчивости
$a_0p + a_1 = 0$	$a_0 > 0, a_1 > 0$
$a_0p^2 + a_1p + a_2 = 0$	$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$
$a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 = 0$	$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0,$ $\Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 > 0$
$a_0p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4 = 0$	$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0,$ $\Delta_3 = a_1a_2a_3 - a_0a_2^2 - a_1^2a_4 > 0$

Условия устойчивости для характеристических уравнений при $n = 1, 2, 3, 4$, вытекающие из (10.34), сведены в табл. 10.2. Из этой таблицы следует, что

необходимым и достаточным условием устойчивости системы, характеристическое уравнение которой первой или второй степени, является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения.

Для систем, характеристические уравнения которых выше второй степени, помимо положительности коэффициентов должны соблюдаться дополнительные условия, которые ограничивают величину коэффициентов.

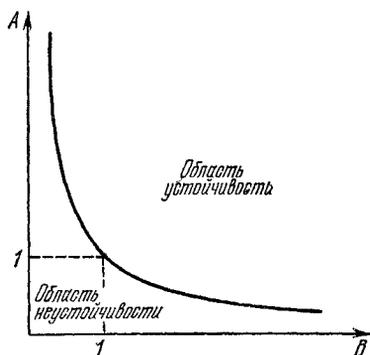


Рис. 10.2.

Пример. Рассмотрим характеристическое уравнение третьей степени $G(p) = a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 = 0$. Произведем замену переменной $p = \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}} \bar{p}$, тогда получим $\bar{p}^3 + A\bar{p}^2 + B\bar{p} + 1 = 0$, где

$$A = \frac{a_1}{a_3} \sqrt[3]{\left(\frac{a_3}{a_0}\right)^2}, \quad B = \frac{a_2}{a_3} \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}.$$

Условия устойчивости, согласно неравенствам табл. 10.2, имеют вид

$$A > 0, \quad B > 0, \quad AB > 1. \quad (10.36)$$

В системе координат A, B область устойчивости располагается выше гиперболы $AB = 1$, носящей название гиперболы Вышнеградского (рис. 10.2).

§ 10.3. Частотные критерии устойчивости

Рассмотрим передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}, \tag{10.37}$$

или

$$W(p) = k \frac{\bar{P}(p)}{Q(p)} = k \bar{W}(p), \tag{10.38}$$

где k — коэффициент усиления, а $\bar{W}(p)$ — нормированная передаточная функция разомкнутой системы. Введение нормированной передаточной функции позволяет представить разомкнутую передаточную функцию в виде последовательного соединения усилителя с коэффициентом усиления k и линейной динамической системы с передаточной функцией $\bar{W}(p)$. Характеристическое уравнение замкнутой системы $G(p) = 0$ (10.23) получается приравниванием суммы полиномов числителя и знаменателя передаточной функции $W(p)$ нулю, т. е.

$$G(p) = k\bar{P}(p) + Q(p) = 0. \tag{10.39}$$

При $k = 0$ из (10.39) получаем характеристическое уравнение разомкнутой системы:

$$Q(p) = 0. \tag{10.40}$$

При изменении коэффициента усиления разомкнутой системы

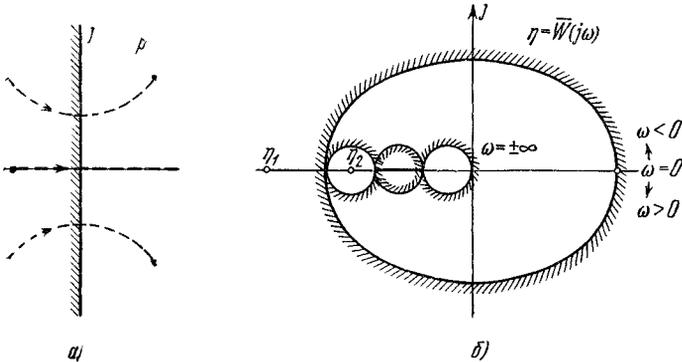


Рис. 10.3.

корни характеристического уравнения (10.39) будут также изменяться. Геометрически это означает, что изменение коэффициента k вызывает перемещение корней в комплексной плоскости p (рис. 10.3, а). Переход корней из одной полуплоскости в другую неизбежно связан с пересечением их траектории с мнимой осью. Для таких нейтральных корней, лежащих на мнимой оси,

справедливо равенство

$$G(j\omega) = k\bar{P}(j\omega) + Q(j\omega) = 0, \quad (10.41)$$

или

$$-\frac{1}{k} = \frac{\bar{P}(j\omega)}{Q(j\omega)} = \bar{W}(j\omega). \quad (10.42)$$

Нормированная частотная характеристика

$$\eta = \bar{W}(j\omega) \quad (10.43)$$

при $-\infty \leq \omega \leq \infty$ является отображением на плоскость η мнимой оси $j\omega$ плоскости переменной p (рис. 10.3, б). При таком отображении точки p левой полуплоскости преобразуются в точки η , лежащие слева от кривой нормированной частотной характеристики $\bar{W}(j\omega)$, а точки p правой полуплоскости — в точки η , лежащие справа от кривой нормированной частотной характеристики $\bar{W}(j\omega)$. Заштрихуем мнимую ось и нормированную кривую частотной характеристики так, чтобы при возрастании частоты от $-\infty$ до ∞ эта штриховка была слева (рис. 10.3, б). Предположим, что при каком-либо конкретном вещественном значении $\eta = \eta_1 = \frac{1}{k_1}$ уравнение $G(p_1) = 0$ имеет s_n правых корней;

тогда для любого η , отличного от η_1 , число правых корней сохранится, если переход от η к η_1 происходит без пересечения нормированной частотной характеристики. Если же при переходе от η к η_1 нормированная частотная характеристика пересекается с незаштрихованной (с заштрихованной) стороной, то число правых корней уменьшается (увеличивается) на число пересечений с незаштрихованной (с заштрихованной) стороной.

Предположим, что разомкнутая система устойчива. Это значит, что все корни характеристического уравнения (10.40) — левые и, следовательно, число правых корней равно нулю. Характеристическое уравнение разомкнутой системы (10.40) получается из характеристического уравнения замкнутой системы (10.39) при $k = 0$, т. е. при $\eta = -\frac{1}{k} = -\infty$. Будем увеличивать k от 0, а значит, и $-\frac{1}{k}$ от $-\infty$. Замкнутая система при этом остается устойчивой до тех пор, пока точка $-\frac{1}{k}$ не пересечет нормированную частотную характеристику $\bar{W}(j\omega)$ (рис. 10.3). Всякое пересечение $\bar{W}(j\omega)$ с заштрихованной стороны приводит к появлению у характеристического уравнения $G(p) = 0$ правого корня, а пересечение $\bar{W}(j\omega)$ с незаштрихованной стороны — к устранению правого корня. Число появляющихся и исчезающих правых корней равно числу пересекаемых штриховок. Отсюда следует, что замкнутая система будет устойчивой при заданном значении $k = k_0$, если при возрастании $-\frac{1}{k}$ от $-\infty$ до $-\frac{1}{k_0}$ разность

числа пересечений $\bar{W}(j\omega)$ с заштрихованной и незаштрихованной стороны будет равна нулю. Поскольку $\bar{W}(j\omega)$ при $\omega < 0$ представляет собой зеркальное отображение нормированной частотной характеристики $\bar{W}(j\omega)$ при $\omega > 0$, то нетрудно заключить, что замкнутая система будет устойчива при $k = k_0$, если нормированная частотная характеристика $\bar{W}(j\omega)$ с ростом ω либо не будет пересекать интервал $(-\infty, -\frac{1}{k_0})$, либо будет пересекать его снизу вверх и сверху вниз одинаковое число раз. Назовем пересечения $\bar{W}(j\omega)$ с ростом ω снизу вверх подъемом, а сверху вниз — спуском (рис. 10.4). Тогда замкнутая система будет устойчива, если при возрастании ω на интервале $(-\infty, -\frac{1}{k_0})$ число подъ-

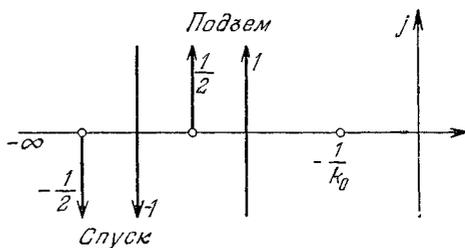


Рис 10.4.

емов $\bar{W}(j\omega)$ будет равно числу спусков и, в частности, эти числа будут равны нулю. Очевидно, что это будет иметь место тогда и только тогда, когда нормированная частотная характеристика не будет охватывать точки $-\frac{1}{k_0}$. Поэтому частотный критерий устойчивости можно сформулировать следующим образом.

Частотный критерий I (точечный критерий). Если разомкнутая система устойчива, то для того, чтобы замкнутая система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы нормированная частотная характеристика $\bar{W}(j\omega)$ не охватывала точку $(-\frac{1}{k_0}, j0)$.

Именно в такой форме частотный критерий устойчивости был сформулирован Г. Найквистом. Поэтому частотный критерий устойчивости обычно называется критерием устойчивости Найквиста.

Если нас интересует устойчивость замкнутой системы при значениях коэффициента, принадлежащих интервалу (r, k_0) , т. е. $r < k < k_0$, то в этом случае частотный критерий устойчивости удобно сформулировать в следующей форме.

Частотный критерий II (отрезковый критерий). Если разомкнутая система устойчива, то для того, чтобы замкнутая система была также устойчивой при $r < k < k_0$, необходимо и достаточно, чтобы нормированная частотная характеристика $\bar{W}(j\omega)$ не охватывала отрезок вещественной оси $(-\frac{1}{r}, -\frac{1}{k_0})$, не пересекая его.

Нормированная частотная характеристика $\bar{W}(j\omega)$, соответствующая устойчивой замкнутой системе при $r < k < k_0$, изображена на рис. 10.5. Сформулированный частотный критерий устойчивости II — отрезковый критерий — остается справедливым и для систем, передаточная функция $W(p)$ которых обладает ненулевым индексом аperiodической нейтральности, т. е. когда передаточная функция разомкнутой системы представима в виде

$$W(p) = \frac{k_{s_a} \bar{P}(p)}{p^{s_a} Q_{n-s_a}(p)}, \quad (10.44)$$

где s_a — индекс аperiodической нейтральности. Как и ранее, корни уравнения

$Q_{n-s_a}(p) = 0$ предполагаются левыми. Нормированная частотная характеристика, получаемая из (10.44) делением на k_{s_a} и заменой p на $j\omega$, имеет вид

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{\bar{P}(j\omega)}{(j\omega)^{s_a} Q_{n-s_a}(j\omega)} \quad (10.45)$$

и обращается в бесконечность при $\omega = 0$, что затрудняет непосредственное установление факта «неохвата» отрезка $\left(-\frac{1}{r}, -\frac{1}{k_0}\right)$. Для устранения этого затруднения при малых ω , а значит, и при малых $|p|$ будем полагать

$$p = \varepsilon e^{j\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (10.46)$$

где ε достаточно мало. При малых $|p|$ имеем

$$\frac{\bar{P}(p)}{Q_{n-s_a}(p)} \approx \frac{\bar{P}(0)}{Q_{n-s_a}(0)} = 1 \quad (10.47)$$

и

$$\bar{W}(p) \approx \frac{1}{p^{s_a}} = \frac{1}{\varepsilon^{s_a}} e^{-j s_a \varphi}. \quad (10.48)$$

Отсюда следует, что при малых $|p|$, т. е. при малых ω , нормированную частотную характеристику $\bar{W}(j\omega)$ следует дополнить дугами достаточно большого радиуса, начинающимися на положительной действительной оси, соответствующими углу $s_a \frac{\pi}{2}$. Для

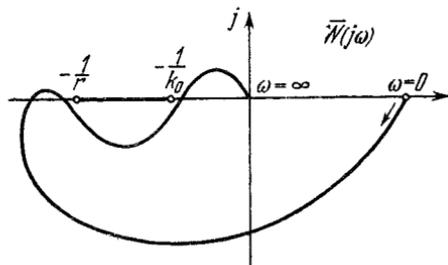


Рис. 10.5.

нормированной частотной характеристики разомкнутой системы $\bar{W}(j\omega)$, дополненной дугами достаточно большого радиуса, справедливы приведенные выше формулировки частотных критериев устойчивости, если в них заменить k_0 на k_{s_a} . Примеры нормированных частотных характеристик $\bar{W}(j\omega)$, соответствующих устойчивым замкнутым системам при $r < k < k_0$, приведены на рис. 10.6, а, б.

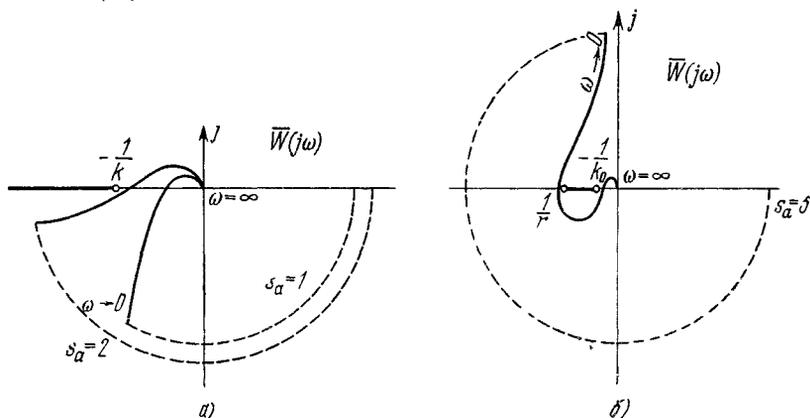


Рис. 10.6.

Аналогичным образом рассматривается случай систем, передаточная функция $W(p)$ которых обладает ненулевым индексом колебательной нейтральности, например, $s_k = 2$, т. е.

$$W(p) = \frac{P(j\omega)}{(p^2 + \omega_0^2) Q_{n-2}(p)}. \quad (10.49)$$

Теперь нормированная частотная характеристика равна

$$W(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{(-\omega^2 + \omega_0^2) Q_{n-2}(j\omega)} \quad (10.50)$$

и обращается в бесконечность при $\omega = \omega_0$. Дополнив при ω , близких к ω_0 , частотную характеристику дугой, соответствующей

углу $s_k \frac{\pi}{2} = \pi$, можно использовать обычные формулировки частотных критериев (рис. 10.7).

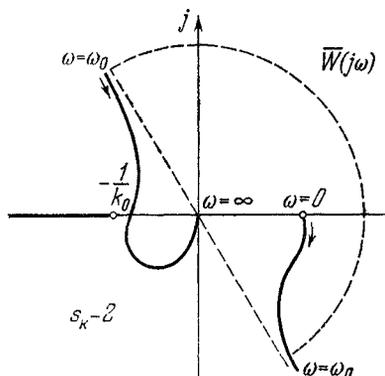


Рис. 10.7.

Предположим теперь, что разомкнутая система неустойчива. Это значит, что ее передаточная функция $W(p)$ имеет правые

полюсы, число которых $s_H > 0$ определяет индекс неустойчивости. В этом случае характеристическое уравнение разомкнутой системы $Q(p) = 0$ имеет s_H правых корней. Для того чтобы замкнутая система при заданном значении $k = k_0$ была устойчива, необходимо, чтобы при возрастании $-\frac{1}{k}$ от $-\infty$ до $-\frac{1}{k_0}$ разность числа пересечений $\bar{W}(j\omega)$ ($-\infty \leq \omega \leq \infty$) с заштрихованной и незаштрихованной стороны была бы равна индексу неустойчивости s_H . Если рассматривать $\bar{W}(j\omega)$ для $\omega > 0$, то это

условие будет выполнено, если при возрастании ω разность числа подъемов и спусков $\bar{W}(j\omega)$ на интервале $(-\infty, -\frac{1}{k_0})$ будет равна $\frac{s_H}{2}$. При этом половина подъемов или спусков $\bar{W}(j\omega)$ может иметь место при $\omega = 0$, если $\bar{W}(j\omega)|_{\omega=0}$ начинается на отрезке $(-\infty, \frac{1}{k_0})$. Оче-

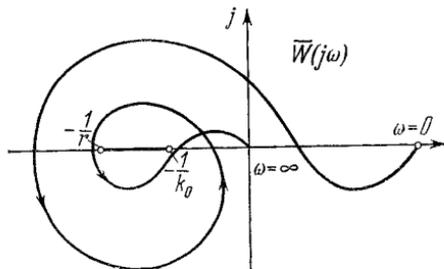


Рис. 10.8.

видно, что это будет иметь место, если нормированная частотная характеристика $\bar{W}(j\omega)$ будет охватывать $\frac{s_H}{2}$ раз точку $(-\frac{1}{k_0}, j0)$. Поэтому частотные критерии устойчивости в этом случае можно сформулировать в следующей форме.

Частотный критерий I (точечный критерий). Если разомкнутая система неустойчива и обладает индексом неустойчивости s_H , то для того, чтобы замкнутая система была устойчива при $k = k_0$, необходимо и достаточно, чтобы нормированная частотная характеристика $\bar{W}(j\omega)$ охватывала бы точку $(-\frac{1}{k_0}, j0)$ против часовой стрелки $\frac{s_H}{2}$ раз.

Частотный критерий II (отрезковый критерий). Если разомкнутая система неустойчива и обладает индексом неустойчивости s_H , то для того, чтобы замкнутая система была устойчива при $r < k < k_0$, необходимо и достаточно, чтобы нормированная частотная характеристика $\bar{W}(j\omega)$ охватывала бы отрезок $(-\frac{1}{r}, -\frac{1}{k_0})$ против часовой стрелки $\frac{s_H}{2}$ раз, не пересекая его.

Нормированная частотная характеристика $\bar{W}(j\omega)$, соответствующая устойчивой системе при $s_H = 2$, изображена на рис. 10.8.

Характерная черта частотного критерия устойчивости состоит в том, что он дает возможность судить об устойчивости замкнутой системы по устойчивости разомкнутой системы. Для устойчивых ($s_a = 0$, $s_k = 0$, $s_n = 0$) и нейтральных ($s_a \neq 0$, $s_k \neq 0$, $s_n = 0$) разомкнутых систем частотная характеристика $W(j\omega)$ может быть снята экспериментально и затем использована для суждений об устойчивости замкнутой системы. Для неустойчивых разомкнутых систем, разумеется, нельзя снять частотную характеристику экспериментально, поэтому для этого случая частотный критерий устойчивости носит формальный характер.

§ 10.4. Логарифмические частотные критерии устойчивости

Для реальных автоматических систем модуль частотной характеристики

$$W(j\omega) = W_0(\omega) e^{j\theta(\omega)} \quad (10.51)$$

при изменении ω изменяется в очень широких пределах — от 0 до 10^6 . Поэтому практически изображение их в обычном масштабе невозможно. В этих случаях удобно пользоваться логарифмическими частотными характеристиками, а именно логарифмической амплитудно-частотной характеристикой и логарифмической фазочастотной характеристикой.

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика определяется соотношением

$$L(\omega) = 20 \lg W_0(\omega) \quad (10.52)$$

и измеряется в децибелах (дБ). Сопоставление величин $W_0(\omega)$ и $L(\omega)$ приведено в табл. 10.3.

Таблица 10.3

$W_0(\omega)$	0,01	0,1	0,2	1	1,12	2	10	100	1000
$L(\omega)$	-40	-20	-6,02	0	1	6,02	20	40	60

Логарифмическая фазо-частотная характеристика $\theta(\omega)$ измеряется в градусах или радианах, как и ранее. Для изображения $L(\omega)$ и $\theta(\omega)$ применяется полулогарифмическая система координат: по оси абсцисс откладывается ω в логарифмическом масштабе, а по оси ординат $L(\omega)$ в дБ и $\theta(\omega)$ в градусах или радианах (рис. 10.9). Изменение ω в два раза соответствует октаве, а в 10 раз — декаде.

Назовем положительным (отрицательным) переход фазо-частотной характеристикой при $L(\omega) > 0$ прямых $\theta = -\pi, -3\pi$,

$-\pi$, $-(2m+1)\pi$ снизу вверх (сверху вниз) (рис. 10.9). Тогда частотный критерий устойчивости можно сформулировать следующим образом.

Для того чтобы система автоматического регулирования была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между числом подъемов и числом спусков фазо-частотной характеристики при $L(\omega) > 0$ на прямых $\theta = -\pi, -3\pi, -5\pi, \dots$ равнялась половине индекса неустойчивости, т. е. $\frac{s_H}{2}$. Если разомкнутая система устойчива или нейтральна, то $s_H = 0$ и для того, чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между числом подъемов и числом спусков фазо-частотной характеристики была равна нулю (рис. 10.10).

На рис. 10.9 изображены логарифмические амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики для устойчивой (1) и неустойчивой (2) замкнутой системы. В частном случае, когда

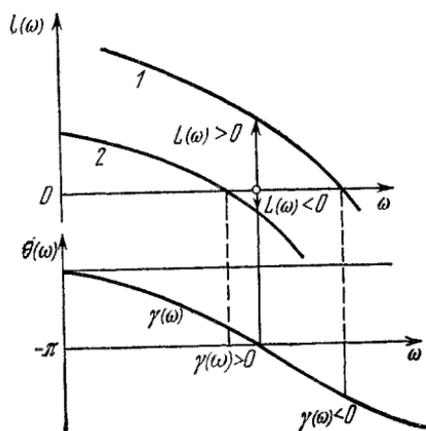


Рис. 10.9.

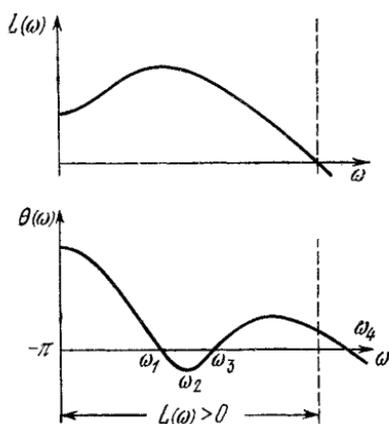


Рис. 10.10.

существует единственное пересечение фазо-частотной характеристики $\theta(\omega)$ прямой $\theta = -\pi$ удобно использовать понятие *запаса по фазе*, представляющее собой отклонение фазо-частотной характеристики от прямой $\theta = -\pi$ при частоте, соответствующей $L(\omega) = 0$. Тогда, если разомкнутая система устойчива, то замкнутая система будет устойчива, если запас по фазе γ положительен, и неустойчива, если запас по фазе отрицателен. Изобразим логарифмические частотные характеристики в декартовой системе координат, откладывая по оси абсцисс $\theta(\omega)$ или за-

пас по фазе $\theta(\omega) - \pi$, а по оси ординат $L(\omega)$. Сформулированные выше критерии устойчивости остаются справедливыми и для таким образом изображенных логарифмических характеристик (рис. 10.11).

Применение логарифмических частотных характеристик позволяет внести существенные упрощения при конкретных исследованиях устойчивости. Пусть передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{k_1(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)} \quad (T_1 > T_2 > T_3). \quad (10.53)$$

При $p = j\omega$ получаем частотную характеристику

$$W(j\omega) = \frac{k_1(1 + T_2 j\omega)}{j\omega(1 + T_1 j\omega)(1 + T_3 j\omega)}, \quad (10.54)$$

откуда находим амплитудно-частотную характеристику

$$W_0(\omega) = \frac{k_1 \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}}{\omega \sqrt{1 + T_1^2 \omega^2} \sqrt{1 + T_3^2 \omega^2}} \quad (10.55)$$

и фазо-частотную характеристику

$$\theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} T_1 \omega + \operatorname{arctg} T_2 \omega - \operatorname{arctg} T_3 \omega. \quad (10.56)$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика определяется как

$$L(\omega) = 20 \lg k_1 - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + T_1^2 \omega^2} + 20 \lg \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2} - 20 \lg \sqrt{1 + T_3^2 \omega^2}. \quad (10.57)$$

Рассмотрим соответствующие слагаемые в выражениях логарифмической амплитудно-частотной характеристики (10.57) и фазо-частотной характеристики (10.56). Первые слагаемые

$$L_1(\omega) = 20 \lg k_1 \quad \text{и} \quad \theta_1(\omega) = 0 \quad (10.58)$$

представляют собой прямые, параллельные оси частот (рис. 10.12). $L_1(\omega)$ приводит к смещению логарифмической амплитудно-частотной характеристики, соответствующей $k_1 = 1$, вверх (если $k_1 > 0$) или вниз (если $k_1 < 0$) на величину $20 \lg k_1$ (рис. 10.12). Вторые слагаемые

$$L_2(\omega) = -20 \lg \omega \quad \text{и} \quad \theta_2(\omega) = -\frac{\pi}{2}. \quad (10.59)$$

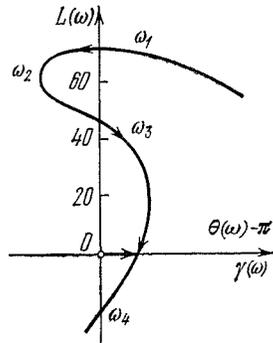


Рис. 10.11.

$L_2(\omega)$ представляют собой прямую, проходящую через ось абсцисс в точке $\omega = 1$ с наклоном 20 децибел на декаду (рис. 10.13),

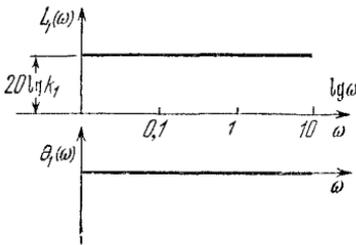


Рис. 10.12.

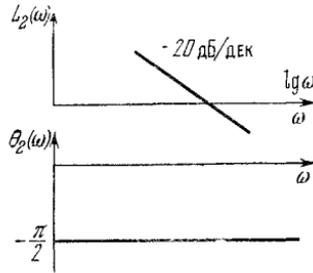


Рис. 10.13.

$\theta_2(\omega)$ — постоянная фаза. Третьи слагаемые имеют вид

$$L_3(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + T_1^2 \omega^2} \quad \text{и} \quad \theta_3(\omega) = -\arctg \omega. \quad (10.60)$$

При $T_1 \omega \ll 1$ пренебрегаем $T_1 \omega$ по сравнению с 1. Тогда

$$L_3(\omega) \approx 20 \lg 1 = 0, \quad \theta_3(\omega) \approx 0. \quad (10.61)$$

При $T_1 \omega \gg 1$ пренебрегаем 1 по сравнению с $T_1 \omega$:

$$L_3(\omega) \approx 20 \lg T_1 \omega \quad \text{и} \quad \theta_3(\omega) \approx -\frac{\pi}{2}. \quad (10.62)$$

В этом случае $L_3(\omega)$ представляет собой прямую, проходящую через ось абсцисс в точке $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$ с наклоном в -20 децибел на декаду. Выражения (10.61), (10.62) определяют асимптотические логарифмические амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики, изображенные на рис. 10.14. Частота $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$ называется сопрягающей. Отличие асимптотической характеристики от истинной максимально в точке сопряжений и равно 3 дБ. Четвертые слагаемые

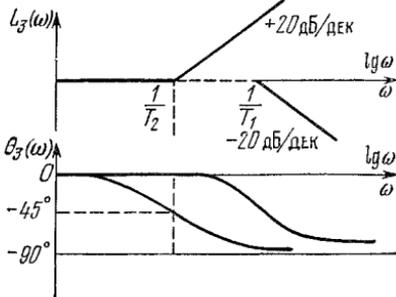


Рис. 10.14.

$$L_4(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}, \quad (10.63)$$

$$\theta_4(\omega) = \arctg T_2 \omega.$$

$L_4(\omega)$ и $\theta_4(\omega)$ отличаются от $L_3(\omega)$ и $\theta_3(\omega)$ только величиной постоянной времени и знаком. Постоянная времени, определяющая сопрягающую частоту $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$, приводит к смещению ам-

плитудно-частотной и фазо-частотной характеристик вдоль осей ω , а знак изменяет наклон -20 дБ/дек на $+20$ дБ/дек (рис. 10.14). Пятые слагаемые

$$L_5(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + T_3^2 \omega^2}, \quad \theta_5(\omega) = -\operatorname{arctg} T_3 \omega \quad (10.64)$$

отличаются от третьих лишь величиной постоянной времени.

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика $L(\omega)$ (10.51) и фазо-частотная характеристика $\theta(\omega)$ (10.50) получаются в результате суммирования характеристик, соответствующих каждому слагаемому. Практически удобно производить построение логарифмической амплитудно-частотной характеристики следующим образом:

1) отмечаем на оси ω сопрягающие частоты $\omega_k = \frac{1}{T_k}$ ($k = 1, 2, 3$);

2) проводим через точку $20 \lg k_1$ при $\omega = 0$ прямую с наклоном -20 дБ/дек;

3) после каждой сопрягающей частоты изменяем наклон амплитудно-частотной характеристики на -20 дБ/дек, если множитель $(1 + T_k j\omega)$ находится в числителе $W(j\omega)$, или на $+20$ дБ/дек, если множитель $(1 + T_k j\omega)$ находится в знаменателе $W(j\omega)$;

4) проводя сглаженную кривую, отличающуюся от асимптотической амплитудно-частотной характеристики в точках частот сопряжения на ∓ 3 дБ, получаем приближенно амплитудно-частотную характеристику.

Фазо-частотная характеристика строится следующим образом:

1) отмечаем на оси ω сопрягающие частоты $\omega_k = \frac{1}{T_k}$ ($k = 1, 2, 3$);

2) проводим фазо-частотную характеристику $\theta_1(\omega) = -\frac{\pi}{2}$;

3) из каждой сопрягающей частоты вычитаем $\frac{\pi}{2}$, если множитель $(1 + T_k j\omega)$ находится в числителе $W(j\omega)$, или прибавляем $\frac{\pi}{2}$, если множитель $(1 + T_k j\omega)$ находится в знаменателе;

4) сглаживая полученную ступенчатую кривую, находим приближенную фазо-частотную характеристику.

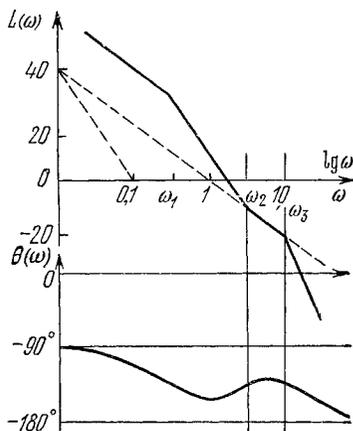


Рис. 10.15

Более точные результаты получаются, если фазо-частотная характеристика строится как сумма отдельных фазо-частотных характеристик. При этом используется, по существу, одна и та же кривая $\operatorname{arctg} T_h \omega$, которая в зависимости от величины T_h смещается вдоль оси ω и изменяет знак вместе с изменением знака наклона $L_h(\omega)$. Пример построения $L(\omega)$ и $\theta(\omega)$ приведен на рис. 10.15. Там же изображена логарифмическая частотная характеристика в декартовой системе координат.

З а д а ч и

10.1. Показать, что система будет неустойчива, если в характеристическом уравнении какой-либо из коэффициентов равен нулю или не все коэффициенты имеют одинаковые знаки.

10.2. Показать, что граница устойчивости линейной системы определяется равенствами

$$\Delta_n = 0,$$

или

$$\Delta_{n-1} = 0, \quad a_n = 0,$$

где Δ_{n-1} — предпоследний определитель Гурвица, а a_n — свободный член характеристического уравнения.

10.3. Показать, что если линейная система находится на границе устойчивости, то соответствующая граничная частота равна

$$\omega_{\text{гр}}^2 = \frac{\Delta_{n-3}}{\Delta_{n-2}} a_n,$$

или

$$\omega_{\text{гр}}^2 = \frac{a_n}{c_{1, n-1}} = \frac{c_{2, n-1}}{c_{1, n-1}},$$

где Δ_{n-2} , Δ_{n-3} — определители Гурвица, $c_{1, n-1}$, $c_{2, n-1}$ — коэффициенты Рауса. Проверить формулы для $\omega_{\text{гр}}^2$ при $n = 2, 3, 4$.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 11.1. Исследование устойчивости типовых систем

Рассмотрим системы первого и второго порядка. Передаточные функции разомкнутых систем равны

$$W(p) = \frac{k}{T_1 p + 1} \quad \text{и} \quad W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}.$$

Характеристические уравнения замкнутых систем соответственно представляются в виде

$$G(p) = T_1 p + 1 + k = 0, \tag{11.1}$$

$$G(p) = T_2^2 p^2 + T_1 p + 1 + k = 0. \tag{11.2}$$

Поскольку постоянные времена T_1 , T_2 и коэффициент усиления

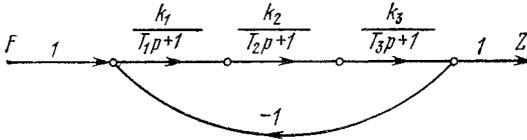


Рис. 11.1.

предполагаются положительными, то все коэффициенты уравнений (11.1) и (11.2) положительны и, согласно алгебраическому критерию устойчивости (табл. 10.1, строки 1 и 2),

замкнутые системы первого и второго порядка всегда устойчивы.

Рассмотрим теперь систему третьего порядка, граф которой изображен на рис. 11.1. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{k_1 k_2 k_3}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}.$$

Для нее $n = 3$, $r_c = 3$, $s_a = s_k = s_H = s_{нф} = 0$. Обозначим $k_1 k_2 k_3 = k$. Составим характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$G(p) = Q(p) + P(p) = (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) + k = 0,$$

или, после раскрытия скобок,

$$G(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0,$$

где

$$a_0 = T_1 T_2 T_3,$$

$$a_1 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3,$$

$$a_2 = T_1 + T_2 + T_3,$$

$$a_3 = 1 + k.$$

Воспользуемся теперь условиями устойчивости (табл. 10 2, строка 3). Поскольку постоянные времени и коэффициент усиления положительны, то все коэффициенты a_0 , a_1 , a_2 , a_3 положительны, т. е. первое требование условий Гурвица выполняется. Далее, из условия $\Delta_2 > 0$ следует

$$a_0 a_3 < a_1 a_2,$$

или, после подстановки значений коэффициентов,

$$T_1 T_2 T_3 (1 + k) < (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)(T_1 + T_2 + T_3). \quad (11.3)$$

Неравенство (11.3) можно преобразовать к виду

$$k < k_{гр} = \left(\frac{1}{T_3} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_1} \right) (T_1 + T_2 + T_3) - 1. \quad (11.4)$$

$k_{гр}$ определяет *границный коэффициент усиления* системы, превышение которого ведет к неустойчивости. Границный коэффициент усиления (11.4) удобно представить в следующем виде:

$$k_{гр} = \left(1 + \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_1}{T_2} \right) \left(\frac{T_1}{T_3} + \frac{T_2}{T_3} + 1 \right) - 1. \quad (11.5)$$

Таким образом, величина $k_{гр}$ зависит не от абсолютных значений постоянных времени, а определяется только их отношениями.

При равенстве постоянных времени, $T_1 = T_2 = T_3$, граничный коэффициент усиления принимает минимально возможное значение $k_{гр} = 8$.

Граничный коэффициент усиления $k_{гр}$ тем больше, чем сильнее отличаются друг от друга постоянные времени T_1 , T_2 , T_3 .

На рис. 11.2 приведена качественно зависимость $k_{гр}$ от $\frac{T_1}{T_2}$ при $\frac{T_2}{T_3} = \text{const}$. При возрастании T_1 граничный коэффициент усиления вначале уменьшается, достигая минимума, а затем неограниченно возрастает.

Рассмотрим еще систему регулирования третьего порядка, граф которой изображен на рис. 11.3. Передаточная функция разомкнутой системы для данного случая имеет вид

$$W(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{k_1 k_2}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) T_3 p}$$

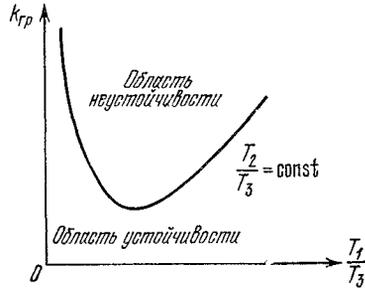


Рис. 11.2.

Обозначая $k = k_1 k_2$, получим, как и ранее, характеристическое

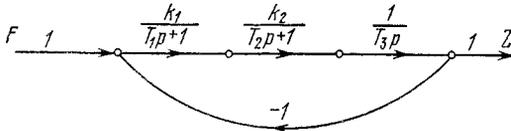


Рис. 11.3.

уравнение замкнутой системы:

$$G(p) = (T_1 p + 1)(T_2 p + 1) T_3 p + k = 0.$$

После преобразования получим, что

$$G(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0,$$

где

$$a_0 = T_1 T_2 T_3, \quad a_1 = (T_1 + T_2) T_3, \quad a_2 = T_3, \quad a_3 = k. \quad (11.6)$$

Из условий устойчивости (табл. 10.2, строка 3) имеем

$$a_0 a_3 < a_1 a_2,$$

или, после подстановки значений коэффициентов из (11.6),

$$T_1 T_2 T_3 k < (T_1 + T_2) T_3^2. \quad (11.7)$$

Неравенство (11.7) можно записать в виде

$$k < k_{гр} = \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_3}{T_2}.$$

Характер зависимости $k_{гр}$ от $\frac{T_1}{T_3}$ при $\frac{T_3}{T_2} = \text{const}$ представлен на рис. 11.4. Видно, что $k_{гр}$ с ростом постоянной времени T_1 стремится к постоянному значению, и, следовательно, в данном

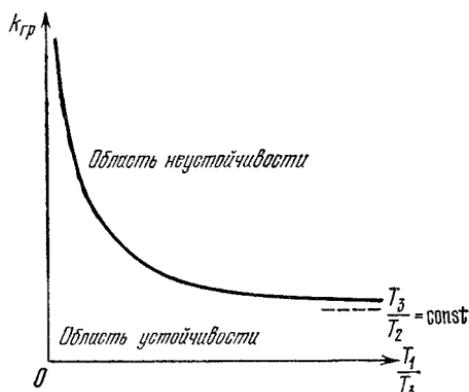


Рис. 11.4.

случае увеличение постоянной времени T_1 понижает значение граничного коэффициента усиления системы. Таким образом,

системы, передаточные функции которых $W(p)$ обладают степенью r_c , равной порядку n , не меньшему 3 ($r_c = n \geq 3$), всегда имеют конечный граничный коэффициент.

§ 11.2. Структурно неустойчивые системы и их стабилизация

Рассмотрим теперь более общий класс систем, характеризующихся контурной передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{p^{s_a} Q_{n-s_a}(p)}. \quad (11.8)$$

Показатели передаточной функции следующие.

1. Степень r_c равна порядку n . Это значит, что числитель $W(p)$ не зависит от p .
2. Индекс аperiodической нейтральности равен s_a .
3. Индексы колебательной нейтральности и неустойчивости равны нулю, $s_{кн} = s_{н} = 0$.

$Q_{n-s_a}(p)$ означает полином степени $n - s_a$ с положительными коэффициентами. Характеристическое уравнение замкнутой

системы в этом случае будет иметь вид

$$G(p) = p^{s_a} Q_{n-s_a}(p) + k = 0,$$

или, в развернутой форме,

$$G(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-s_a} p^{s_a} + k = 0, \quad (11.9)$$

где

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad \dots, \quad a_{n-s_a} > 0.$$

При $s_a \geq 2$ часть коэффициентов характеристического уравнения (11.9), а именно $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-s_a+1}$, обращается в нуль, и, следовательно, не будет выполнено условие положительности всех коэффициентов, что свидетельствует о неустойчивости системы. Никаким выбором $a_0, a_1, \dots, a_{n-s_a}$ и k при $s_a \geq 2$ невозможно придать системе устойчивость, т. е. стабилизировать ее. Итак,

системы, для которых степень передаточной функции $W(p)$ равна ее порядку, структурно неустойчивы, если индекс апериодической нейтральности не меньше двух. Такие системы содержат не менее двух последовательно соединенных интеграторов.

Для стабилизации структурно неустойчивых систем необходимо изменить их структуру таким образом, чтобы уменьшить степень передаточной функции. Действительно, если изменить структуру системы таким образом, чтобы передаточная функция $W(p)$ приняла вид

$$W(p) = \frac{P(p)}{p^{s_a} Q_{n-s_a}(p)},$$

то степень передаточной функции будет равна $r = n - m$, где m — степень полинома $P(p)$.

Если

$$n \geq s_a + 1$$

и индекс неминимально-фазовости равен нулю, $s_{\text{нф}} = 0$, то можно подобрать коэффициенты $P(p)$ так, чтобы характеристическое уравнение замкнутой системы

$$G(p) = p^{s_a} Q_{n-s_a}(p) + P(p) = 0$$

имело все коэффициенты, отличные от нуля. Для этого, очевидно, нужно, чтобы степень многочлена $P(p)$ была не меньше $s_a - 1$.

Итак, условие, при котором система перестает быть структурно неустойчивой, можно записать в виде

$$r \leq n - s_a + 1.$$

Стабилизация структурно неустойчивой системы достигается введением внутренней связи, охватывающей один из интеграторов, либо введением производной.

Такого рода коррекцию системы можно также рассматривать как параллельную коррекцию.

К структурно неустойчивым системам относятся также системы, для которых степень передаточной функции $W(p)$ равна ее порядку и если индекс неустойчивости s_H не меньше двух, т. е. если, например,

$$W(p) = \frac{k}{(T_1 p - 1)(T_2 p - 1) Q_{n-2}(p)},$$

где $T_1 > T_2 > 0$. Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$G(p) = (T_1 p - 1)(T_2 p - 1) Q_{n-2}(p) + k = 0. \quad (11.10)$$

Построим зависимость $G(p)$ при изменении p от 0 до ∞ . Поскольку при $p = \frac{1}{T_1}$ и $p = \frac{1}{T_2}$

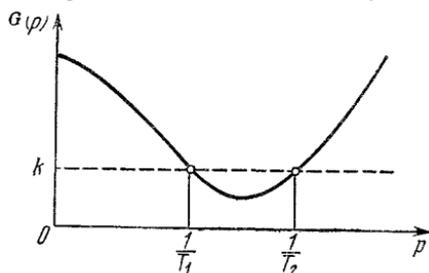


Рис. 11.5.

имеем $G\left(\frac{1}{T_1}\right) = G\left(\frac{1}{T_2}\right) = k$,

то эта зависимость имеет вид, показанный на рис. 11.5. $G(p)$ с ростом p изменяется не монотонно. Это возможно лишь тогда, когда не все коэффициенты характеристического уравнения $G(p) = 0$ (11.10) положительны. Следовательно, ха-

рактеристический многочлен $G(p)$ имеет по крайней мере один отрицательный коэффициент при любых значениях параметров системы.

Система, в которой степень передаточной функции $W(p)$ равна ее порядку, а индекс неустойчивости $s_H \geq 2$, структурно неустойчива. Такую структурно неустойчивую систему можно стабилизировать введением внутренней обратной связи, охватывающей неустойчивый элемент.

При индексе аperiodической нейтральности $s_a = 0$ или $s_a = 1$, если индексы колебательной нейтральности s_K и неустойчивости s_H равны нулю и все полюсы $W(p)$ вещественны (а значит, и отрицательны), мы при $n = 3$ приходим к рассмотренным выше простейшим статической и астатической системам. Выводы, по-

лученные на примерах этих простейших статической и астатической систем, оказываются справедливыми и при порядке $n > 3$. На рис. 11.6 и рис. 11.7 представлена качественная зависимость граничного коэффициента усиления системы от значения постоянной времени для указанного класса систем. Для этого класса систем повышение граничного коэффициента усиления $k_{гр}$ достигается «разнесением» постоянных времени. Это осуществляется

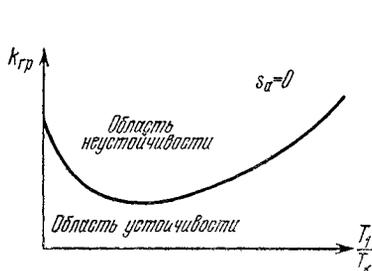


Рис. 11.6

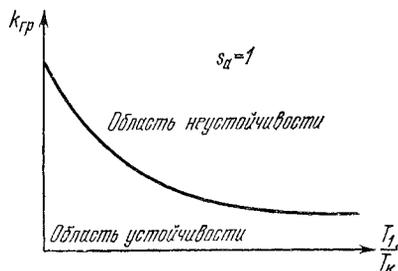


Рис. 11.7.

либо выбором элементов системы с надлежащими постоянными времени, либо охватом внутренней обратной связью. Надлежащий выбор величины обратной связи, как было показано в § 9.2, позволяет в широких пределах изменять постоянную времени элемента. Из рассмотрения рис. 11.6 и 11.7 следует, что

если $W(p)$ имеет нулевой индекс аperiodической нейтральности, т. е. $s_a = 0$, то граничный коэффициент усиления можно повышать как путем увеличения постоянной времени, так и (до определенного предела) путем уменьшения постоянной времени. Если же $W(p)$ имеет индекс аperiodической нейтральности, равный единице, т. е. $s_a = 1$, то граничный коэффициент усиления может быть повышен только путем уменьшения постоянной времени.

§ 11.3. Системы, устойчивые при больших коэффициентах усиления

Выше было установлено, что системы первого и второго порядка, если постоянные времени их элементов положительны, устойчивы при любых коэффициентах усиления. Системы же третьего порядка, если порядок $W(p)$ совпадает со степенью $W(p)$, обладают конечным граничным коэффициентом усиления. Эти факты могут быть получены также с помощью частотного критерия. Действительно, построим частотные характеристики

разомкнутых систем

$$W(j\omega) = \frac{k}{T_1 j\omega + 1}, \quad (11.11)$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{-T_2^2 \omega^2 + T_1 j\omega + 1}, \quad (11.12)$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{-jT_3^3 \omega^3 - T_2^2 \omega^2 + T_1 j\omega + 1}. \quad (11.13)$$

При малых ω и при больших ω частотные характеристики разомкнутых систем приближенно равны

$$W(j\omega) \approx k \quad \text{и} \quad W(j\omega) \approx -j \frac{k}{T_1 \omega}, \quad (11.11')$$

$$W(j\omega) \approx k \quad \text{и} \quad W(j\omega) \approx -\frac{k}{T_2^2 \omega^2}, \quad (11.12')$$

$$W(j\omega) \approx k \quad \text{и} \quad W(j\omega) \approx j \frac{k}{T_3^3 \omega^3}. \quad (11.13')$$

Поэтому нетрудно изобразить качественно соответствующий вид частотных характеристик. На рис. 11.8 изображены нормированные частотные характеристики

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{k}.$$

Жирными линиями отмечены участки нормированных частотных характеристик, соответствующие приближенным значениям

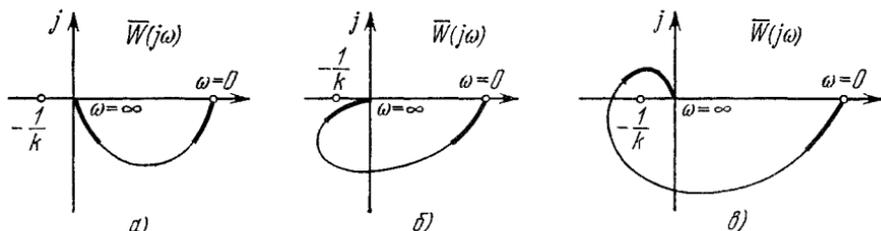


Рис. 11.8.

(11.11')—(11.13'). При возрастании k точка $(-\frac{1}{k}, j0)$ движется вдоль действительной оси к началу координат. При этом для систем первого и второго порядка точка $(-\frac{1}{k}, j0)$ ни при каком значении k не будет охватываться частотными характеристиками $\bar{W}(j\omega)$ (рис. 11.8, а, б), а для системы третьего порядка, начиная с некоторого значения, точка $(-\frac{1}{k}, j0)$ станет охваты-

ваться частотной характеристикой (рис. 11.8, в), что свидетельствует об устойчивости систем первого и второго порядка при любом k и о наступлении неустойчивости в системах третьего порядка при превышении k некоторого граничного значения. Эти элементарные соображения будут положены в основу определения условий, при которых замкнутая система произвольного порядка допускает теоретически неограниченное увеличение коэффициента усиления без нарушения ее устойчивости.

Рассмотрим передаточную функцию

$$W(p) = k\bar{W}(p),$$

где

$$\bar{W}(p) = \frac{\bar{P}(p)}{\bar{Q}(p)} = \frac{b'_{n-m}p^m + b'_{n-m+1}p^{m-1} + \dots + b'_{n-1}p + 1}{a'_0p^n + a'_1p^{n-1} + \dots + a'_{n-1}p + 1} \quad (11.14)$$

представляет собой нормированную передаточную функцию разомкнутой системы. Характеристическое уравнение замкнутой системы запишется в виде

$$\bar{Q}(p) + k\bar{P}(p) = 0,$$

или

$$\frac{1}{k}\bar{Q}(p) + \bar{P}(p) = 0. \quad (11.15)$$

При $k = \infty$ это характеристическое уравнение вырождается в предельное уравнение

$$\bar{P}(p) = 0. \quad (11.16)$$

Поскольку при $k = \infty$ система должна быть устойчива, то корни этого предельного уравнения должны быть левыми. Отсюда следует, что индекс неминимально-фазовости $\bar{W}(p)$ (11.14) должен быть равен нулю, т. е.

$$s_{\text{нф}} = 0.$$

Но, чтобы замкнутая система была устойчива при достаточно больших k , поведение нормированной частотной характеристики $\bar{W}(j\omega)$ при больших значениях k должно быть подобным поведению нормированных частотных характеристик $\bar{W}(j\omega)$ систем первого и второго порядка (рис. 11.8, а, б). Подставляя в (11.14) $p = j\omega$ и ограничиваясь при достаточно больших ω старшими степенями ω , получим

$$\bar{W}(j\omega) \approx \frac{b'_{n-m}(j\omega)^m + b'_{n-m+1}(j\omega)^{m-1}}{a'_0(j\omega)^n + a'_1(j\omega)^{n-1}} = \frac{b'_c j\omega + b'_{r_c+1}}{a'_0 j\omega + a'_1} \frac{1}{(j\omega)^{r_c}}. \quad (11.17)$$

Предположим, что

$$\frac{b'_c}{a'_0} > 0.$$

Поведение $\bar{W}(j\omega)$ при достаточно больших ω определяется степенью передаточной функции $W(p)$

$$r_c = n - m.$$

Так, для $r_c = n - m = 1$ из (11.17) следует

$$\bar{W}(j\omega) \approx \frac{b'_1}{a'_0} \frac{1}{j\omega} = -j \frac{b'_1}{a'_0} \frac{1}{\omega}, \quad (11.18)$$

и, значит, мнимая часть (11.18)

$$\text{Im } \bar{W}(j\omega) \approx -\frac{b'_1}{a'_0} \frac{1}{\omega} < 0$$

отрицательна (рис. 11.9, а). Этот случай соответствует устойчивости замкнутой системы при достаточно больших k (ср. с

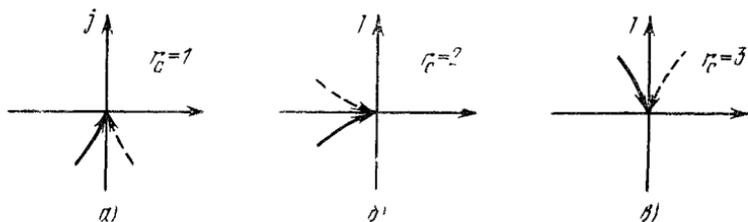


Рис. 11.9

рис. 11.8, а). Случай $r_c = n - m = 2$ является критическим. Если ограничиться теми же приближениями, что и ранее, то из (11.17) получаем

$$\bar{W}(j\omega) \approx -\frac{b'_2}{a'_0} \frac{1}{\omega^2}, \quad (11.19)$$

и, значит,

$$\text{Im } \bar{W}(j\omega) = 0.$$

Для выяснения знака $\text{Im } \bar{W}(j\omega)$ нужно вместо (11.19) взять более точное приближение (11.17). Тогда

$$\bar{W}(j\omega) \approx \frac{b'_2 j\omega + b'_3}{a'_0 j\omega + a'_1} \frac{1}{(j\omega)^2}.$$

И, значит,

$$\operatorname{Im} \bar{W}(j\omega) \approx -\operatorname{Im} \frac{b'_2 j\omega + b'_3}{a'_0 j\omega + a'_1} \frac{1}{\omega^2}.$$

Замкнутая система будет устойчива при достаточно большом k , если мнимая часть $\bar{W}(j\omega)$ будет отрицательна (рис. 11.9, б), или

$$\operatorname{Im} \frac{b'_2 j\omega + b'_3}{a'_0 j\omega + a'_1} \frac{1}{\omega^2} = \frac{b'_2 a'_1 - b'_3 a'_0}{a_0'^2 \omega^2 + a_1'^2} \frac{1}{\omega^2} > 0,$$

т. е. если выполняется неравенство

$$b'_2 a'_1 - b'_3 a'_0 > 0,$$

что эквивалентно,

$$\frac{b'_2}{a'_0} > \frac{b'_3}{a'_1}. \quad (11.20)$$

Это условие обеспечивает поведение $\bar{W}(j\omega)$ при достаточно больших ω , аналогичное изображенному на рис. 11.8, б. Если же $r_c = n - m = 3$, то из (11.17) получаем

$$\bar{W}(j\omega) \approx \frac{b'_3}{a'_0} \frac{1}{(j\omega)^3} = j \frac{b'_3}{a'_0 \omega^3}, \quad (11.21)$$

и, значит, мнимая часть (11.21)

$$\operatorname{Im} \bar{W}(j\omega) \approx \frac{b'_3}{a'_0 \omega^3}$$

положительна (рис. 11.9, в). Этот случай соответствует неустойчивости замкнутой системы при достаточно больших k , так как при малых частотах мнимая часть отрицательна и, значит, рано или поздно, $\bar{W}(j\omega)$ с ростом ω пересечет отрицательную действительную ось (ср. с рис. 11.8, в). Аналогичная картина будет иметь место и при $r_c = n - m = 2$ и невыполнении неравенства (11.20) (см. рис. 11.8, б).

Теперь можно подвести итог проведенному анализу и прийти к следующему заключению.

Замкнутая система будет устойчива при достаточно больших коэффициентах усиления, если индекс неминимальнофазовости $W(p)$ равен нулю, $s_{\text{нф}} = 0$, и при $r_c = 1$ выполнено условие $\frac{b'_1}{a'_0} > 0$, при $r_c = 2$ выполнено условие $\frac{b'_2}{a'_0} > \frac{b'_3}{a'_1}$. При $r_c > 2$ или при $s_{\text{нф}} \neq 0$ замкнутая система не может быть устойчивой при достаточно больших коэффициентах усиления.

§ 11.4. Асимптотические свойства систем, устойчивых при больших коэффициентах усиления

Поскольку при достаточно больших коэффициентах усиления общее характеристическое уравнение (11.15) вырождается в предельное (11.16), то при выполнении условий устойчивости свойства системы практически не зависят от величины коэффициента усиления и полностью определяются предельной системой, которой соответствует предельное характеристическое уравнение (11.16). Установим асимптотические свойства, которые проясняют физический смысл подобных систем. Как было выше

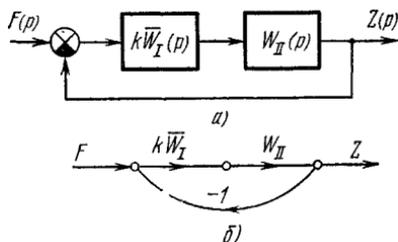


Рис. 11.10.

установлено (см. § 11.3), если степень передаточной функции разомкнутой системы $W(p)$ больше 2, то замкнутая система обладает граничным коэффициентом усиления. Для придания ей нужных свойств необходимо путем коррекции, включения дополнительных элементов уменьшить степень

передаточной функции $W(p)$ так, чтобы она стала меньше или равной двум. Обозначим через

$$W_I(p) = k\bar{W}(p)$$

передаточную функцию элементов, возрастание коэффициентов усиления которых не должно нарушать устойчивость замкнутой

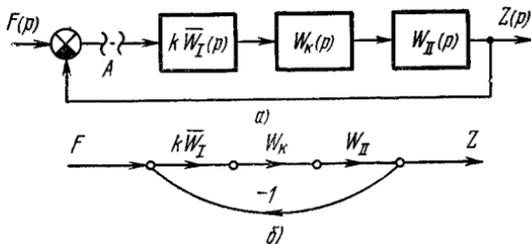


Рис. 11.11.

системы, а через $W_{II}(p)$ — передаточную функцию остальной части системы (рис. 11.10).

Структура системы при последовательной коррекции будет иметь вид, приведенный на рис. 11.11, а при параллельной — на рис. 11.12. Легко видеть, что степень передаточной функции по-

следовательного соединения $W_1(p)W_2(p)$ равна сумме степеней передаточных функций: $r_c = r_{c1} + r_{c2}$, а степень передаточной

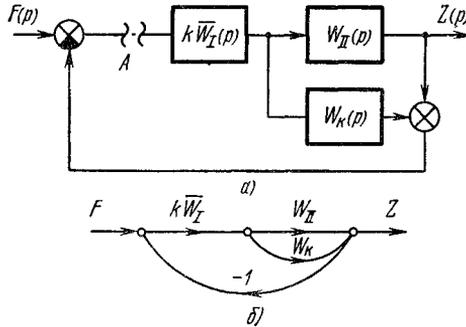


Рис. 11.12.

функции параллельного соединения $W_1(p) + W_2(p)$ равна минимальной из степеней передаточных функций:

$$r_c = \min [r_{c1}, r_{c2}].$$

Передаточная функция разомкнутой в точке A системы при последовательной коррекции (рис. 11.11) равна

$$W(p) = kW_I(p)W_K(p)W_{II}(p).$$

Степень этой передаточной функции

$$r_c = r_{c1} + r_{cK} + r_{c2} \geq r_{c1} + r_{c2},$$

т. е. она не меньше степени передаточной функции некорректированной системы, так как для реальных элементов $r_{cK} > 0$; это связано с тем, что отсутствуют способы получения «чистых» производных. Поэтому

последовательная коррекция непригодна для стабилизации системы при больших коэффициентах усиления.

Передаточная функция разомкнутой в точке A системы при параллельной коррекции (рис. 11.12) равна

$$W(p) = kW_I(p)[W_K(p) + W_{II}(p)].$$

Разумно выбирать корректирующий элемент так, чтобы степень его передаточной функции r_{cK} была меньше r_{c2} . Тогда степень передаточной функции $W(p)$ будет равна

$$r_c = r_{c1} + r_{cK}$$

и необходимым условием устойчивости при больших коэффициентах усиления будет условие

$$r_{c1} + r_{ck} \leq 2; \quad (11.22)$$

физически это условие очевидно.

Наличие параллельного корректирующего канала позволяет устранить инерционность и запаздывания, которые существовали в некорректированной системе и были причиной неустойчивости при больших коэффициентах усиления.

Но системе с параллельной коррекцией (рис. 11.12) эквивалентна система с внутренней отрицательной обратной связью

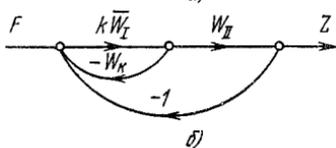
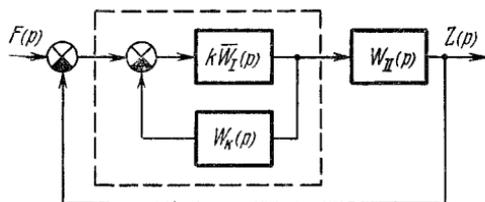


Рис. 11.13.

(рис. 11.13). При выполнении условия (11.22) системы с внутренней обратной связью сами по себе устойчивы при любом k .

Сопоставим теперь некорректированную систему (рис. 11.10) и систему с параллельной коррекцией (рис. 11.12) или, что эквивалентно, систему с внутренней обратной связью (рис. 11.13). В первом случае

$$K(p) = \frac{kW_I(p)W_{II}(p)}{1 + kW_I(p)W_{II}(p)}$$

и система имеет граничный коэффициент усиления $k = k_{гр}$. Во втором случае

$$K_K(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)}, \quad (11.23)$$

где

$$W(p) = \frac{kW_I(p)}{1 + kW_K(p)W_I(p)} W_{II}(p) \quad (11.24)$$

— передаточная функция разомкнутой в точке A системы (рис. 11.12). При $k \rightarrow \infty$ из (11.24) получаем

$$W(p) = \frac{W_{II}(p)}{W_K(p)}. \quad (11.25)$$

И значит, из (11.23) следует, после подстановки $W(p)$ из (11.25), что при $k \rightarrow \infty$

$$K_K(p) = \frac{W_{II}(p)}{W_K(p) + W_{II}(p)}, \quad (11.25')$$

и если $W_K(p)$ выбрано так, чтобы все полюсы $K_K(p)$ были левыми, то замкнутая корректированная система, определяемая передаточной функцией (11.23), (11.24) (рис. 11.12), будет устойчива при неограниченном возрастании k . Для достаточно больших k эта система превращается в предельную, или асимптотическую, систему, соответствующую передаточной функции (11.25'). Блок-схема и граф такой предельной системы изображены на рис. 11.14. Важно отметить следующие особенности предельной системы. Прежде всего, свойства предельной системы не зависят от коэффициентов передаточной функции $W_I(p)$ и от коэффициента усиления k , начиная с некоторой величины $k > k_0$. Передаточная функция разомкнутой в точке A системы (рис. 11.12) определяется выражением (11.25). Так, при

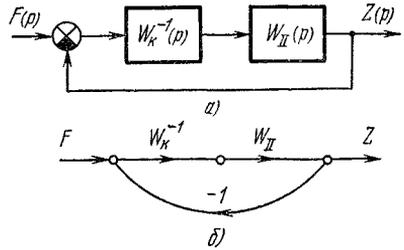


Рис. 11.14.

$$W_K(p) = \frac{T_{kp}}{1 + T_{kp}p} \quad (11.26)$$

получаем из (11.25)

$$W(p) = \frac{1 + T_{kp}}{T_{kp}} W_{II}(p).$$

Отсюда следует, что предельная система может приобрести новые свойства, которые отсутствовали в исходной системе.

Введение корректирующего элемента, не пропускающего постоянной составляющей, придает системе свойства астатичности.

Таким образом,

в системах, устойчивых при большом коэффициенте усиления, реализуются свойства глубокой отрицательной обратной связи: устранение влияния параметров той части системы, которая охватывается обратной связью, и обращение передаточной функции цепи обратной связи.

Именно таким путем создают интегрирующие устройства в аналоговой технике электронного моделирования.

Примеры систем, в которых используется подобный способ коррекции, изображены на рис. 11.15, *a — в*. Здесь же показаны и блок-схемы этих систем. Обычно передаточная функция корректирующего элемента выбирается в виде (11.26). Нетрудно видеть, что выбор передаточной функции корректирующего

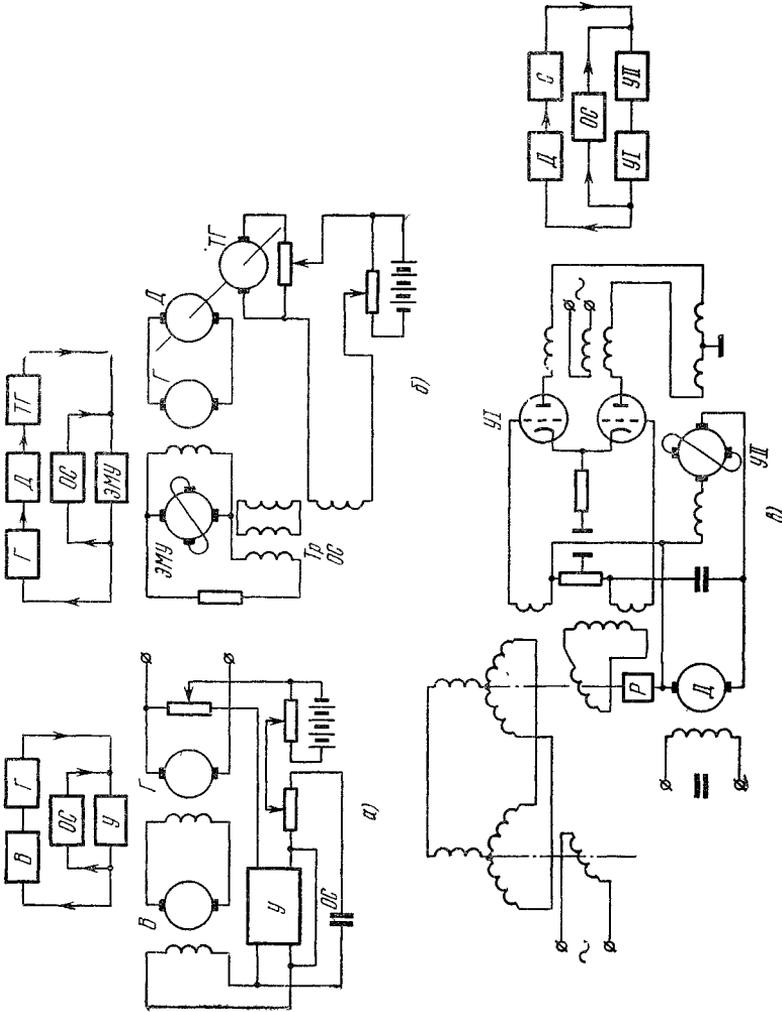


Рис. 11.15.

элемента $W_K(p)$ не зависит от свойств элементов, характеризующих передаточной функцией $W_I(p)$. Поэтому сделанные здесь выводы справедливы и для тех случаев, когда последние элементы содержат распределенные параметры, запаздывания и т. п. Единственное требование, которому должны удовлетворять эти элементы, — это устойчивость предельной системы.

§ 11.5. Устойчивость систем с запаздыванием

До сих пор рассматривались системы автоматического регулирования с сосредоточенными параметрами. Однако на практике часто встречаются системы с распределенными параметрами и, в частности, с запаздыванием. В качестве примера такой

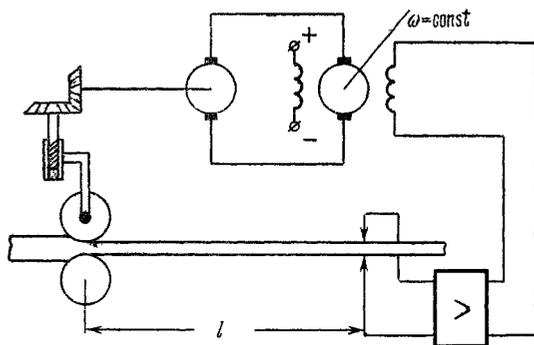


Рис. 11.16.

системы можно указать на систему регулирования толщины листа при прокатке (рис. 11.16). Из-за пространственной удаленности валков и измерителя толщины изменение толщины, вызванное нажатием валков, воспринимается не сразу, а спустя некоторое время запаздывания

$$\tau = \frac{l}{v},$$

где v — скорость прокатки, а l — расстояние между валками и измерителем. Временная характеристика такого элемента запаздывания, представляющая собой реакцию его на импульсную функцию $\delta(t)$, равна

$$k(t) = \delta(t - \tau).$$

Следовательно, передаточная функция определяется как

$$\int_0^{\infty} \delta(t - \tau) e^{-pt} dt = e^{-p\tau}.$$

При $p = j\omega$ получаем частотную характеристику элемента запаздывания

$$e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau.$$

Она представляет собой окружность и изображена на рис. 11.17. Граф системы с элементом запаздывания приведен на рис. 11.18. Передаточная функция разомкнутой системы запишется в виде

$$W_{\tau}(p) = k\bar{W}(p) e^{-p\tau} = \frac{k\bar{P}(p)}{\bar{Q}(p)} e^{-p\tau}, \quad (11.27)$$

откуда находим характеристическое уравнение

$$G(p) = \bar{Q}(p) + k\bar{P}(p) e^{-p\tau} = 0.$$

Это уравнение из-за наличия множителя $e^{-p\tau}$ трансцендентно, и поэтому к нему непосредственно неприменимы алгебраические критерии устойчивости. Что же касается частотного критерия устойчивости, то он применим и в этом случае.

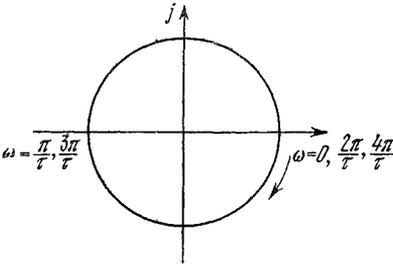


Рис. 11.17.

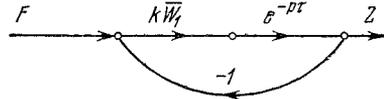


Рис. 11.18.

Частотная характеристика разомкнутой системы с запаздыванием получается и при подстановке $p = j\omega$ в (11.27):

$$W_{\tau}(j\omega) = k\bar{W}(j\omega) e^{-j\omega\tau},$$

или поскольку

$$\bar{W}(j\omega) = \bar{W}_0(\omega) e^{j\theta(\omega)}, \quad (11.28)$$

то

$$W_{\tau}(j\omega) = k\bar{W}_0(\omega) e^{j[\theta(\omega) - \omega\tau]}. \quad (11.29)$$

Назовем частотную характеристику, определяемую выражением (11.28), *нормированной предельной частотной характеристикой*. Из (11.29) видно, что наличие запаздывания сказывается в дополнительном сдвиге фаз. Благодаря этому радиусы векторов нормированной предельной частотной характеристики сдвинуты на углы, равные $-\omega\tau$. Такой сдвиг фаз деформирует предельную частотную характеристику и может привести систему к неустойчивости. На границе устойчивости

$$W_{\tau}(j\omega) = k\bar{W}_0(\omega) e^{j[\theta(\omega) - \omega\tau]} = -1,$$

откуда следует, что

$$\bar{W}_0(\omega) = \frac{1}{k} \quad (11.30)$$

и

$$\theta(\omega) - \omega\tau = -\pi,$$

или

$$\tau = \frac{\pi - \theta(\omega)}{\omega} = \frac{\gamma(\omega)}{\omega}. \quad (11.31)$$

Условия (11.30) и (11.31) удобно интерпретировать следующим образом. На плоскости нормированной предельной частотной характеристики $\bar{W}(j\omega)$ (11.28) проведем окружность радиуса $\frac{1}{k}$ (рис. 11.19). Точка пересечения этой окружности с $\bar{W}(j\omega)$ определяет критическую частоту $\omega_{кр}$, при которой выполняется равенство (11.30). А предельное запаздывание определяется, как видно из (11.31), отношением запаса по фазе к критической частоте

$$\tau_{кр} = \frac{\pi - \theta(\omega_{кр})}{\omega_{кр}} = \frac{\gamma(\omega_{кр})}{\omega_{кр}}.$$

При

$$\tau < \tau_{кр}$$

система устойчива. При

$$\tau > \tau_{кр}$$

система неустойчива.

Из этого критерия устойчивости можно сделать ряд полезных выводов.

Система, передаточная функция $W(p)$ которой обладает положительным индексом аperiodической или колебательной нейтральности, не может быть устойчивой при любом τ — она всегда имеет конечное значение $\tau_{кр}$ (рис. 11.20, а). Система, передаточная функция которой обладает нулевым индексом аperiodической и колебательной нейтральности при

$$k\bar{W}_0(\omega) < 1,$$

устойчива при любом τ (рис. 11.20, б).

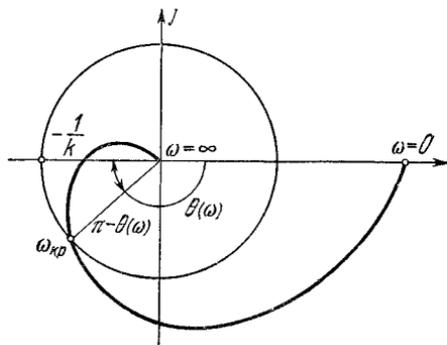


Рис. 11.19.

В качестве примера рассмотрим систему регулирования толщины прокатываемого металла (рис. 11.16), граф которой

приведен на рис. 11.21. Передающая функция разомкнутой системы равна

$$W_{\tau}(p) = \frac{k}{(T_{\text{дв}}p + 1)p} e^{-p\tau}, \quad (11.32)$$

где $k = k_y k_r k_{\text{дв}}$ — общий коэффициент усиления, $T_{\text{дв}}$ — постоянная

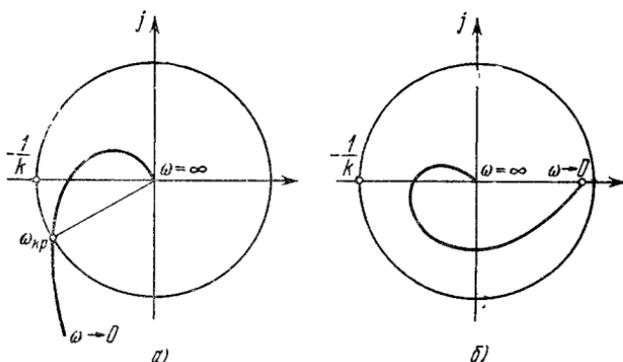


Рис. 11.20.

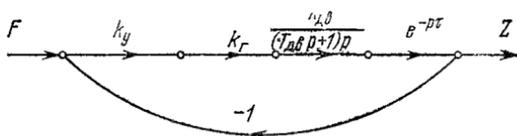


Рис. 11.21

времени двигателя. Частотная характеристика получается из (11.32) при $p = j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{k}{(T_{\text{дв}}j\omega + 1)j\omega} e^{-j\omega\tau}. \quad (11.33)$$

Вводя безразмерные величины

$$\bar{\omega} = \omega T_{\text{дв}}, \quad \tau = \frac{\tau}{T_{\text{дв}}}, \quad \bar{k} = k T_{\text{дв}},$$

запишем (11.33) в виде

$$W(j\bar{\omega}) = \frac{\bar{k}}{(j\bar{\omega} + 1)j\bar{\omega}} e^{-j\bar{\omega}\tau}.$$

Отсюда следует, что нормированная предельная частотная характеристика равна

$$\bar{W}(j\bar{\omega}) = \frac{1}{(j\bar{\omega} + 1)j\bar{\omega}}. \quad (11.34)$$

Она изображена на рис. 11.22. Проведя окружность радиуса $\frac{1}{\bar{k}}$, определяем $\bar{\omega}_{кр}$ и $\theta(\bar{\omega}_{кр})$ и, значит,

$$\bar{\tau}_{кр} = \frac{\pi - \theta(\bar{\omega}_{кр})}{\bar{\omega}_{кр}}.$$

$\bar{\tau}_{кр}$ можно определить и в явной форме. Из уравнений (11.30) и (11.31) получаем для $\bar{W}(j\bar{\omega})$, определяемой выражением (11.34),

$$\frac{1}{\sqrt{\bar{\omega}^2 + 1} \bar{\omega}} = \frac{1}{\bar{k}},$$

или

$$\sqrt{\bar{\omega}^2 + 1} \bar{\omega} = \bar{k}, \quad (11.35)$$

и

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\bar{\omega}} \left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg } \bar{\omega} \right). \quad (11.36)$$

Уравнения (11.35) и (11.36) определяют параметрическую зависимость $\bar{\tau}$ от \bar{k} , и эту зависимость можно построить, задаваясь различными значениями $\bar{\omega}$. Однако эту зависимость можно найти и в явной форме, если исключить из (11.35) и (11.36) $\bar{\omega}$. Для этой цели из (11.35) получаем уравнение

$$\bar{\omega}^4 + \bar{\omega}^2 - \bar{k}^2 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения равен

$$\bar{\omega} = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} + \bar{k}^2} - \frac{1}{2}}. \quad (11.37)$$

Подставляя это значение $\bar{\omega}$ в (11.36), находим

$$\bar{\tau}_{кр} = \frac{\frac{\pi}{2} - \text{arctg } \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} + \bar{k}^2} - \frac{1}{2}}}{\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} + \bar{k}^2} - \frac{1}{2}}}. \quad (11.38)$$

При $\bar{k} \gg 1$ из (11.37) следует $\bar{\omega} \approx \sqrt{\bar{k}}$, и поскольку

$$\frac{\pi}{2} - \text{arctg } \sqrt{\bar{k}} \approx \frac{1}{\sqrt{\bar{k}}},$$

то из (11.38) получаем

$$\bar{\tau}_{кр} \approx \frac{1}{\bar{k}}.$$

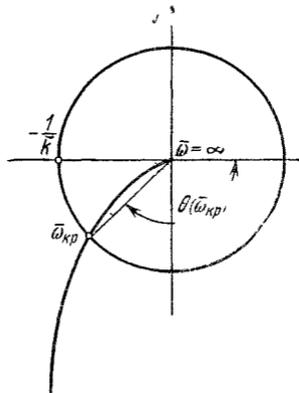


Рис. 11.22.

Эта зависимость изображена на рис. 11.23. Система устойчива при $\bar{\tau} < \bar{\tau}_{кр}$. Чем больше запаздывание $\bar{\tau}$, тем меньше допустимый коэффициент усиления K .

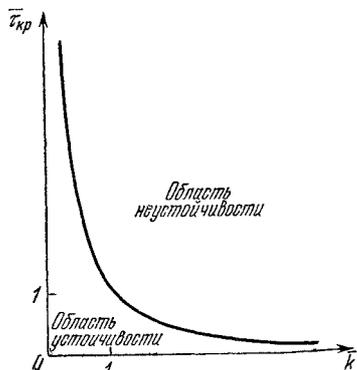


Рис. 11.23

В тех случаях, когда система с запаздыванием сложна, удобно использовать логарифмические частотные характеристики предельной системы, о которых шла речь в гл. 9. Окружность радиуса $\frac{1}{k}$ для логарифмической частотной характеристики предельной системы преобразуется в прямую, параллельную оси абсцисс и проходящую на уровне $-20 \lg k$ (рис. 11.24). Точка пересечения этой прямой с логарифмической частотной характеристикой определяет критическую частоту $\omega =$

$= \omega_{кр}$, а запас по фазе (возможно, с учетом кратности), относенный к частоте $\omega_{кр}$, — критическое время запаздывания $\tau_{кр}$

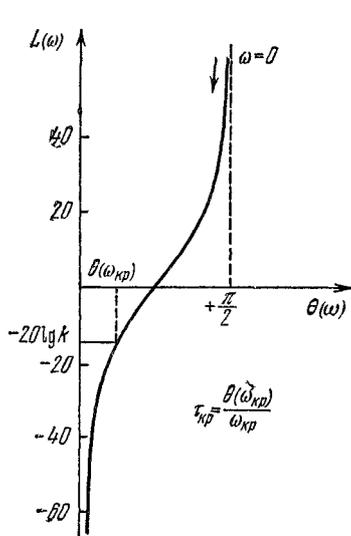


Рис. 11.24.

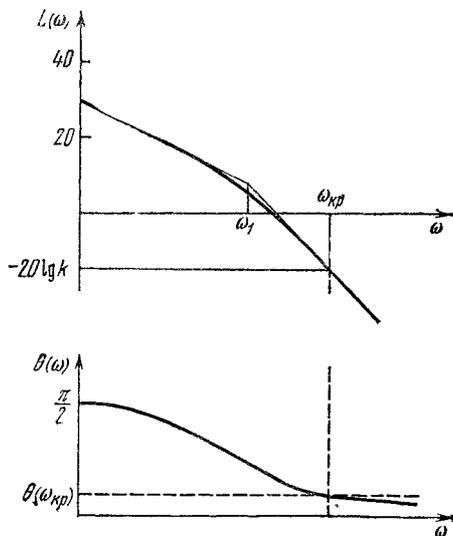


Рис. 11.25.

(рис. 11.24). Подобным же образом определяются критическая частота и время запаздывания по логарифмическим амплитудно-

частотной и фазочастотной характеристикам. Критическая частота определяется как абсцисса точки пересечения прямой $-20 \lg k$ с логарифмической амплитудно-частотной характеристикой (рис. 11.25).

Задачи

11.1. Показать, что если передаточная функция разомкнутой линейной системы равна

$$W(p) = \frac{k}{p} e^{-p\tau},$$

то граничное время запаздывания определяется соотношением

$$\tau_{гр} = \frac{\pi}{k}$$

и замкнутая система будет устойчивой при

$$\tau < \tau_{гр} = \frac{\pi}{k}.$$

11.2. Показать, что если передаточная функция разомкнутой линейной системы равна

$$W(p) = \frac{k}{p} e^{-\sqrt{p}\tau},$$

то факт устойчивости замкнутой системы не зависит от τ и замкнутая система будет устойчивой при

$$k < e^{\pi} \approx 23,14.$$

11.3. Показать, что если передаточная функция разомкнутой линейной системы имеет вид

$$W(p) = \frac{k}{p^4 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3},$$

то замкнутая система будет структурно неустойчивой.

СВОБОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

§ 12.1. Мера быстродействия автоматических систем

Факт устойчивости автоматической системы свидетельствует о том, что свободные процессы затухают с течением времени и в системе устанавливается вынужденный процесс. При этом временная характеристика замкнутой системы абсолютно интегрируема, т. е. ограничена и с течением времени стремится к нулю. Чем быстрее происходит это стремление к нулю, тем больше быстродействие системы и, значит, тем быстрее наступает установившийся режим. Подобно тому, как мобильность эскадры кораблей характеризуют мобильностью наименее быстроходного корабля, быстродействие системы можно оценивать той компонентой временной характеристики, которая затухает медленнее всех.

Как было показано в § 8.4, временная характеристика системы равна

$$k(t) = \sum_{\nu=1}^n d_{\nu} e^{p_{\nu} t}, \quad d_{\nu} = \frac{H(p_{\nu})}{G'(p_{\nu})}. \quad (12.1)$$

Выражение (12.1) можно представить также в виде

$$k(t) = e^{-\xi t} \sum_{\nu=1}^n d_{\nu} e^{(p_{\nu} + \xi) t}.$$

Выберем значение ξ таким, чтобы всегда выполнялись неравенства

$$\operatorname{Re}(p_{\nu} + \xi) \leq 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (12.2)$$

Очевидно, что максимально возможное значение $\operatorname{Re} \xi$, удовлетворяющее условию (12.2), равно по абсолютной величине действи-

тельной части полюса, расположенного ближе всего к мнимой оси (рис. 12.1). Замечая, что модуль суммы не превосходит суммы модулей, получаем из (12.1) оценку

$$|k(t)| \leq e^{-\xi t} \sum_{v=1}^n |d_v| |e^{(p_v + \xi)t}|.$$

Обозначая

$$\sum_{v=1}^n |d_v| = M$$

и замечая, что в силу (12.2)

$$|e^{(p_v + \xi)t}| \leq 1,$$

получаем

$$|k(t)| \leq Me^{-\xi t}.$$

Это неравенство дает оценку быстродействия автоматической системы: процессы в системе затухают быстрее, чем $e^{-\xi_0 t}$, где

$$\xi_0 = \min_v |\operatorname{Re} p_v|.$$

Величина ξ_0 называется *степенью устойчивости системы*. Она характеризует *предельное быстродействие* системы. Поэтому далее будем называть ξ_0 еще и *мерой быстродействия* системы. Из выражения (12.2) следует, что $k(t)e^{\xi t}$ абсолютно интегрируема лишь при $\xi < \xi_0$, а при $\xi > \xi_0$ абсолютная величина неограниченно возрастает с ростом t . По определению временной характеристики

$$L\{k(t)\} = K(p),$$

и, значит, в силу теоремы смещения (теорема 5 приложения 1)

$$L\{k(t)e^{\xi t}\} = K(p - \xi). \quad (12.3)$$

Назовем замкнутую систему, передаточная функция которой равна $K(p - \xi)$, *смещенной*. Тогда из (12.3) следует, что предельное быстродействие определяется таким выбором ξ_0 , при котором смещенная система еще сохраняет устойчивость. Таким образом, исследование степени устойчивости, или быстродействия, замкнутой системы сводится к исследованию устойчивости замкнутой смещенной системы.

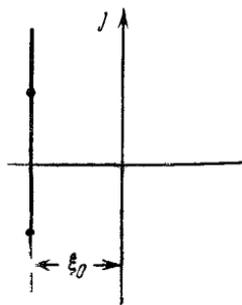


Рис. 12.1.

Определим верхние границы предельного быстродействия типовых автоматических систем, граф которых приведен на

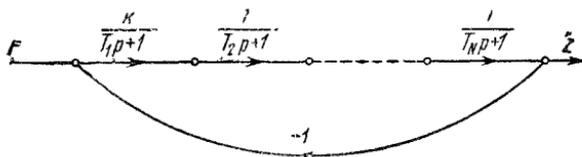


Рис. 12.2.

рис. 12.2. Положим, что передаточная функция управляемого объекта имеет вид

$$W_{об}(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) \dots (T_N p + 1)}.$$

Примем, что

$$T_1 > T_2 > T_3 > \dots > T_N.$$

Передаточные же функции управляющего устройства могут быть различными:

1. *Интегральный закон управления (И-управление):*

$$W_y(p) = \frac{k_{-1}}{p}.$$

2. *Пропорциональный закон управления (П-управление):*

$$W_y(p) = k_0.$$

3. *Пропорционально-интегральный закон управления (ПИ-управление):*

$$W_y(p) = k_0 + \frac{k_{-1}}{p}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = W_y(p) W_{об}(p).$$

В зависимости от выбора управляющего устройства вид $W(p)$ будет различен. Так, для И-управления

$$W(p) = \frac{k k_1}{p (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) \dots (T_N p + 1)}.$$

При замене p на $p - \xi$ получаем передаточную функцию разомкнутой смещенной системы

$$W(p - \xi) = \frac{k k_1}{(p - \xi)(T_1 p + 1 - T_1 \xi) \dots (T_N p + 1 - T_N \xi)}.$$

Как было показано в § 11.2, если степень передаточной функции разомкнутой системы совпадает с порядком передаточной функции и сумма индексов нейтральности и неустойчивости больше или равна двум, то такая система структурно неустойчива. Замкнутую смещенную систему можно стабилизировать, если индекс неустойчивости не превосходит единицы. Для этого должно выполняться неравенство $1 - T_1\xi > 0$. Отсюда находим

$$\xi < \frac{1}{T_1}.$$

Быстродействие системы с И-управлением не может превосходить быстродействие самого объекта, которое определяется величиной, обратной наибольшей постоянной времени, т. е. $\frac{1}{T_1}$.

Для П-управления

$$W(p) = \frac{kk_0}{(T_1p + 1)(T_2p + 1)(T_3p + 1) \dots (T_Np + 1)}; \quad (12.4)$$

передаточная функция разомкнутой смещенной системы, полученная заменой p на $p - \xi$ в (12.4), для этого случая имеет вид

$$W(p - \xi) = \frac{kk_0}{(T_1p + 1 - T_1\xi) \dots (T_Np + 1 - T_N\xi)}. \quad (12.5)$$

Замкнутую смещенную систему можно стабилизировать, если индекс неустойчивости равен единице, т. е. если выполнены неравенства

$$1 - T_1\xi > 0, \quad 1 - T_2\xi > 0, \quad (12.6)$$

и так как $T_1 > T_2$, то из (12.6) находим

$$\xi < \frac{1}{T_2}.$$

Быстродействие системы с П-управлением может превосходить быстродействие объекта, которое определяется величиной, обратной наибольшей постоянной времени, но оно ограничено величиной, обратной постоянной времени, следующей за наибольшей.

Эти выводы подтверждают известный из практики результат о том, что астатическая система уступает по быстродействию статической системе.

Для более сложного ПИ-управления передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{k(k_0p + k_1)}{p(T_1p + 1)(T_2p + 1) \dots (T_Np + 1)},$$

а передаточная функция разомкнутой смещенной системы имеет вид

$$W(p - \xi) = \frac{k(k_1 + k_0 p - k_0 \xi)}{(p - \xi)(T_1 \xi + 1 - T_1 \xi) \dots (T_N p + 1 - T_N \xi)}.$$

В этом случае степень $W(p)$ и $W(p - \xi)$ не совпадает с порядком $r_c = n - 1$ и можно показать, что замкнутая смещенная система будет структурно неустойчивой, если при порядке неминимально-фазовости, равном нулю, сумма индексов нейтральности и неустойчивости будет больше или равна трем. Поэтому, чтобы замкнутая смещенная система могла быть устойчива, порядок неустойчивости не должен быть больше двух. Отсюда получается условие

$$1 - T_2 \xi > 0,$$

и, значит,

$$\xi < \frac{1}{T_2}.$$

Таким образом,

ПИ-управление приводит к астатизму, но при этом сохраняет быстроедействие, как и в статической системе с П-управлением.

§ 12.2. Связь временной и частотной характеристик автоматических систем

Связь передаточной функции замкнутой системы $K(p)$ с временной характеристикой $k(t)$ определяется соотношением

$$K(p) = \int_0^{\infty} k(t) e^{-pt} dt.$$

Полагая $p = j\omega$, получаем соотношение, связывающее частотную характеристику системы с ее временной характеристикой:

$$K(j\omega) = \int_0^{\infty} k(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (12.7)$$

Это соотношение справедливо только для устойчивых замкнутых систем, ибо в противном случае интеграл, стоящий в правой части (12.7), расходится.

При анализе качества процессов в автоматических системах приходится решать и обратную задачу, связанную с построением временной характеристики $k(t)$ по частотной характеристике $K(j\omega)$. Напомним, что временная характеристика системы пред-

ставляет собой реакцию системы на дельта-функцию $\delta(t)$. Предположим, что на систему действует периодическая последовательность дельта-функций (рис. 12.3). Эта периодическая последовательность, которую будем обозначать $\delta_T(t)$, может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$\delta_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{a}_m e^{jm\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (12.8)$$

Вычисляя коэффициенты Фурье, получаем

$$\bar{a}_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}. \quad (12.9)$$

Подставляя значение \bar{a}_m из (12.9) в (12.8), находим ряд Фурье для $\delta_T(t)$ в явной форме:

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\omega_0 t}.$$

Реакция системы, обладающей частотной характеристикой $K(j\omega)$, на последовательность $\delta_T(t)$ в силу принципа суперпозиции будет определяться соотношением

$$k_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} K(jm\omega_0) e^{jm\omega_0 t}.$$

(12.10)

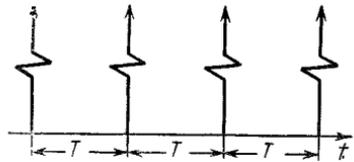


Рис. 12.3.

Временную характеристику системы $k(t)$ можно получить из (12.10), устремив T к ∞ , ибо

$$k(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} k_T(t).$$

Поскольку

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m\omega_0 - (m-1)\omega_0}{2\pi} = \frac{\Delta\omega}{2\pi},$$

$$k_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} K(jm\omega_0) e^{jm\omega_0 t} \Delta\omega. \quad (12.11)$$

При $T \rightarrow \infty$ из (12.11) получаем в пределе

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (12.12)$$

Соотношения (12.7) и (12.12) определяют прямое и обратное преобразования Фурье. Преобразуем (12.12) к более удобной форме. Положим

$$K(j\omega) = B(\omega) + jM(\omega),$$

где $B(\omega)$ и $M(\omega)$ — вещественная и мнимая частотные характеристики замкнутой системы. Учитывая еще, что

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t,$$

представим $k(t)$ (12.12) в виде

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [B(\omega) \cos \omega t - M(\omega) \sin \omega t] d\omega + \\ + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [B(\omega) \sin \omega t + M(\omega) \cos \omega t] d\omega. \quad (12.13)$$

Подынтегральная функция во втором интеграле представляет собой нечетную функцию частоты ω , поэтому интеграл от этой функции будет равен нулю. Подынтегральная функция в первом интеграле представляет собой четную функцию частоты, и интеграл в пределах от $-\infty$ до ∞ от этой функции может быть заменен удвоенным значением интеграла от 0 до ∞ . Таким образом, из (12.13) получаем

$$k(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [B(\omega) \cos \omega t - M(\omega) \sin \omega t] d\omega. \quad (12.14)$$

Примем во внимание условие физической реализуемости

$$k(t) \equiv 0 \quad \text{при } t \leq 0.$$

Оно означает, что до приложения воздействия $\delta(t)$ реакция на это воздействие не может существовать. Поэтому

$$k(-t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [B(\omega) \cos(-\omega t) - M(\omega) \sin(-\omega t)] d\omega = 0,$$

или

$$k(-t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [B(\omega) \cos \omega t + M(\omega) \sin \omega t] d\omega = 0. \quad (12.15)$$

Соотношение (12.15) определяет связь вещественной и мнимой частотных характеристик друг с другом. Складывая и вычитая

соотношения (12.14) и (12.15), получим

$$k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega,$$

$$k(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} M(\omega) \sin \omega t d\omega.$$
(12.16)

Эти выражения определяют временную характеристику по вещественной или мнимой части частотной характеристики. Важно подчеркнуть, что

| для определения $k(t)$ достаточно знания одной лишь вещественной или мнимой частотной характеристики.

§ 12.3. Переходная характеристика автоматической системы

Зная временную характеристику, можно определить процессы при произвольном воздействии на основе интеграла свертки

$$z(t) = \int_0^t k(\tau) f(t - \tau) d\tau.$$
(12.17)

Назовем *переходной характеристикой* системы реакцию ее на воздействие вида скачка

$$f(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t - \tau \leq 0, \\ 1 & \text{при } t - \tau > 0. \end{cases}$$
(12.18)

Подставляя (12.18) в (12.17), получаем выражение для переходной характеристики

$$z(t) = h(t) = \int_0^t k(\tau) d\tau,$$
(12.19)

т. е. переходная характеристика равна интегралу от импульсной характеристики. Подставляя в (12.19)

$$k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega$$

и меняя очередность интегрирования, получим

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \int_0^t \cos \omega \tau d\tau d\omega,$$

ИЛИ

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{B(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \quad (12.20)$$

Это выражение определяет переходную характеристику по вещественной частотной характеристике.

Выясним некоторые свойства $h(t)$. Рассмотрим две вещественные частотные характеристики $B(\omega)$ и $B(\alpha\omega)$, где $\alpha \neq 1$ (рис. 12.4, а). Соответствующие этим вещественным частотным

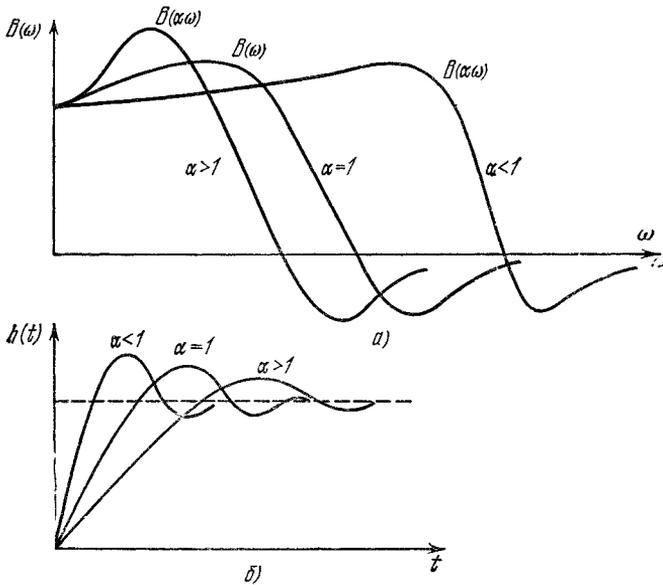


Рис. 12.4.

характеристикам переходные функции определяются выражениями (12.20) и

$$h_{\alpha}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{B(\alpha\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega, \quad (12.21)$$

или, вводя новую переменную $\alpha\omega = \bar{\omega}$, получаем из (12.21)

$$h_{\alpha}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{B(\bar{\omega})}{\bar{\omega}} \sin \bar{\omega} \frac{t}{\alpha} d\bar{\omega} = h\left(\frac{t}{\alpha}\right).$$

Отсюда следует, что

чем более широкополосна вещественная частотная характеристика $B(\omega)$, тем быстрее переходная функция достигает установившегося состояния (рис. 12.4, б).

Пусть $B(\omega)$ — монотонная функция частоты (рис. 12.5, а), т. е.

$$B(0) \geq B(\omega) > 0.$$

При этом условии выражение (12.20) можно представить в виде суммы слагаемых:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/t} \frac{B(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega + \int_{\pi/t}^{2\pi/t} \frac{B(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega + \dots \right\}. \quad (12.22)$$

Абсолютное значение каждого последующего интеграла в (12.22) меньше предыдущего. Таким образом, правая часть $h(t)$ (12.22) представляет собой знакопеременный убывающий ряд. Отбрасывая все слагаемые, кроме первого, получаем оценку

$$\begin{aligned} h(t) &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/t} \frac{B(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega \leq \\ &\leq \frac{2B(0)}{\pi} \int_0^{\pi/t} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (12.23) \end{aligned}$$

Но

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \int_0^{\pi} \frac{\sin \bar{\omega}}{\bar{\omega}} d\bar{\omega} = \text{Si}(\pi),$$

где

$$\text{Si}(\psi) = \int_0^{\psi} \frac{\sin \bar{\omega}}{\bar{\omega}} d\bar{\omega}$$

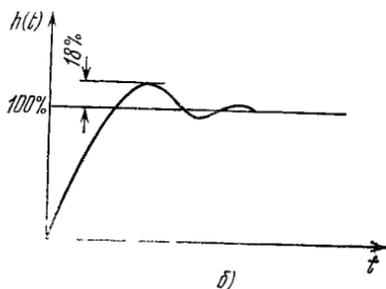
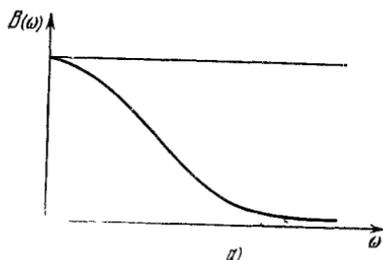


Рис. 12.5.

— интегральный синус. Замечая, что $\text{Si}(\pi) = 1,85$, получаем из (12.23)

$$h(t) \leq \frac{2}{\pi} \text{Si}(\pi) B(0) \approx 1,18 B(0).$$

Таким образом,

если вещественная частотная характеристика положительна и монотонна, то величина перерегулирования не может быть более 18% (рис. 12.5, б).

§ 12.4. Построение переходных характеристик

Непосредственное аналитическое определение импульсной $k(t)$ и переходной $h(t)$ характеристик по выражениям (12.16) и (12.20) довольно сложно, поэтому для упрощения вычислений $k(t)$ и $h(t)$ вещественную частотную характеристику $B(\omega)$ аппроксимируют прямыми таким образом, чтобы $B(\omega)$ представлялась в виде суммы некоторого числа трапеций (рис. 12.6). Тогда, если можно найти временной процесс, соответствующий каждой трапеции, то общая временная характеристика будет равна сумме найденных временных процессов, соответствующих каждой из трапеций порознь. Рассмотрим одну из трапецидальных вещественных частотных характеристик (рис. 12.7, а). $B(0)$ характеризует высоту, ω_0 — частота пропускания, ω_d — частота

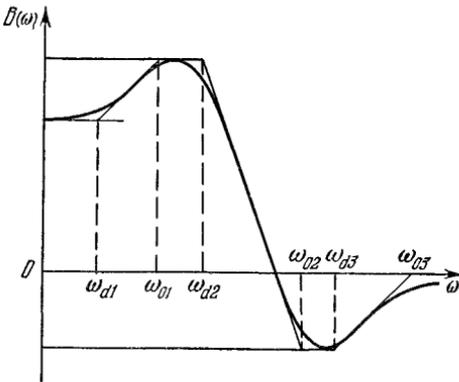


Рис. 12.6.

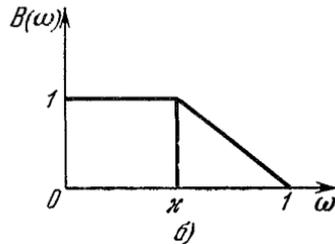
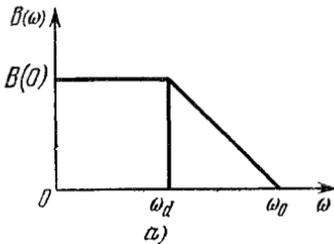


Рис. 12.7

равномерного пропускания. Введем коэффициент наклона

$$\kappa = \frac{\omega_d}{\omega_0}$$

и рассмотрим единичную трапецидальную вещественную частотную характеристику (рис. 12.7, б), для которой

$$B(0) = 1, \quad \omega_0 = 1, \quad 0 \leq \kappa \leq 1.$$

Уравнение такой единичной трапецидальной вещественной частотной характеристики можно записать в следующей форме:

$$B(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega < \kappa, \\ \frac{1-\omega}{1-\kappa}, & \kappa \leq \omega \leq 1, \end{cases} \quad (12.24)$$

Подставляя $B(\omega)$ из (12.24) в (12.20), получим

$$h_{\kappa}(t) = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\kappa} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega + \int_{\kappa}^1 \frac{1-\omega}{1-\kappa} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega \right].$$

После простых вычислений получаем

$$h_{\kappa}(t) = \frac{2}{\pi} \left[\text{Si}(\kappa t) - \frac{1}{1-\kappa} \left(\text{Si}(t) - \text{Si}(\kappa t) + \frac{\cos t - \cos \kappa t}{t} \right) \right].$$

Отметим частные случаи $h_{\kappa}(t)$. При $\kappa=1$, что соответствует прямоугольной частотной характеристике (рис. 12.8),

$$h_1(t) = \frac{2}{\pi} \text{Si}(t).$$

При $\kappa=0$, что соответствует треугольной частотной характеристике (рис. 12.9),

$$h_0(t) = -\frac{2}{\pi} \left[\text{Si}(t) - \frac{1 - \cos t}{t} \right].$$

Чем ближе κ к 1, тем более колебательна составляющая пере-

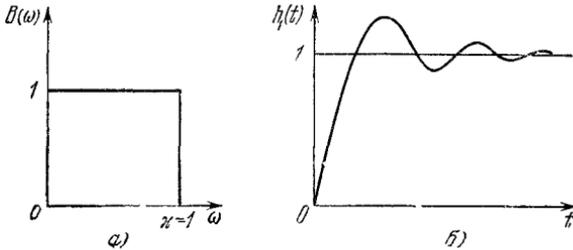


Рис. 12.8

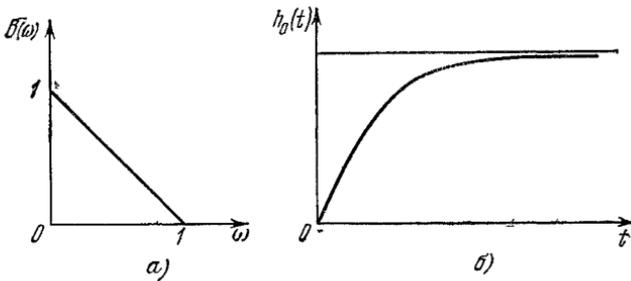


Рис. 12.9.

ходной характеристики. Для определения компоненты процесса, соответствующей не единичной трапецидальной характеристике,

изменяем ординаты $h_k(t)$ в $B(0)$ раз и, согласно соотношению (12.20), уменьшаем значение аргумента t в ω_0 раз. Весь процесс образуется суммированием отдельных компонент (рис. 12.10).

Функция $h_k(t)$ табулирована при различных значениях k (см. табл. 12.1).

Пользуясь этой таблицей, построение переходной характеристики осуществляют следующим образом.

Вещественную частотную характеристику разлагают на трапецеидальные характеристики, и затем определяют параметры трапецеидальных характеристик:

$$B_k(0), \omega_{0k}, \omega_{dk}, \kappa_k = \frac{\omega_{dk}}{\omega_{0k}}.$$

По таблице при заданных κ_k определяются $h_{\kappa_k}(t)$; ординаты $h_{\kappa_k}(t)$ умножаются на $B_k(0)$, а значения аргумента t , приведенные в таблице, делятся на ω_{0k} . Суммируя алгебраически найденные таким образом компоненты, получаем переходную характеристику

$$h(t) = \sum_{k=1}^N B_k(0) h_{\kappa_k}\left(\frac{t}{\omega_{0k}}\right).$$

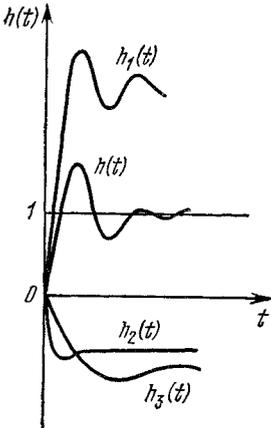


Рис. 12.10.

При построении переходной характеристики используется вещественная частотная характеристика замкнутой системы.

Эта последняя характеристика может быть построена по известной частотной характеристике разомкнутой системы $W(j\omega)$. Действительно,

$$K(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)} = \frac{W_0(\omega) e^{j\varphi(\omega)}}{1 + W_0(\omega) e^{j\varphi(\omega)}},$$

или

$$K(j\omega) = \frac{W_0(\omega)}{e^{-j\varphi(\omega)} + W_0(\omega)} = \frac{W_0(\omega)}{W_0(\omega) + \cos \varphi(\omega) - j \sin \varphi(\omega)}.$$

Отделяя действительную часть, получаем

$$B(\omega) = \frac{W_0(\omega) [W_0(\omega) + \cos \varphi(\omega)]}{[W_0(\omega) + \cos \varphi(\omega)]^2 + \sin^2 \varphi(\omega)},$$

или, после элементарных преобразований,

$$B(\omega) = \frac{W_0(\omega) [W_0(\omega) + \cos \varphi(\omega)]}{W_0^2(\omega) + 2W_0(\omega) \cos \varphi(\omega) + 1}. \quad (12.25)$$

По выражению (12.25) в плоскости логарифмической частотной характеристики ($20 \lg k, \theta$) строятся линии $B(\omega) = \text{const}$ (рис. 12.11). Если на этот график наложить начерченную на

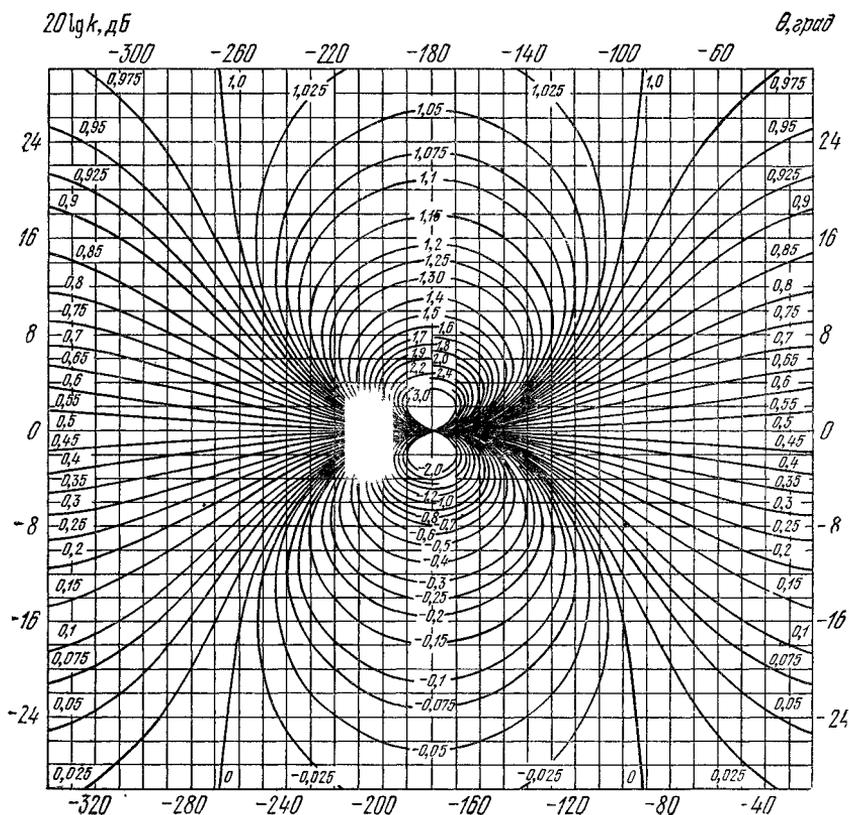


Рис. 12.11.

кальке логарифмическую частотную характеристику разомкнутой системы, то в точках пересечения ее с линиями $B(\omega) = \text{const}$ определяется значение $B(\omega)$, которое затем используется для построения переходной характеристики.

В заключение отметим, что качество процессов управления характеризует свободные процессы. Качество процессов тем выше, чем быстрее и плавнее происходит переход к установившимся процессам.

h -функции для трапецидальных ве

$\frac{x}{t}$	0,0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,5	0,18	0,165	0,176	0,184	0,192	0,199	0,207	0,215	0,223	0,231
1,0	0,310	0,325	0,340	0,356	0,371	0,386	0,402	0,417	0,432	0,447
1,5	0,449	0,469	0,494	0,516	0,538	0,560	0,594	0,603	0,617	0,646
2,0	0,571	0,560	0,628	0,655	0,682	0,709	0,732	0,761	0,785	0,810
2,5	0,674	0,707	0,739	0,771	0,802	0,833	0,862	0,891	0,917	0,943
3,0	0,755	0,792	0,828	0,863	0,895	0,928	0,958	0,986	1,013	1,038
3,5	0,815	0,853	0,892	0,928	0,963	0,994	1,024	1,050	1,074	1,095
4,0	0,856	0,898	0,937	0,974	1,008	1,039	1,066	1,090	1,110	1,127
4,5	0,883	0,923	0,960	0,998	1,029	1,057	1,084	1,104	1,120	1,129
5,0	0,895	0,939	0,977	1,012	1,042	1,067	1,087	1,102	1,112	1,117
5,5	0,900	0,940	0,986	1,015	1,042	1,063	1,079	1,088	1,092	1,096
6,0	0,903	0,945	0,981	1,013	1,037	1,054	1,065	1,070	1,068	1,062
6,5	0,904	0,943	0,980	1,009	1,029	1,043	1,050	1,049	1,043	1,033
7,0	0,904	0,945	0,978	1,006	1,024	1,034	1,037	1,033	1,023	1,009
7,5	0,907	0,945	0,980	1,005	1,021	1,027	1,027	1,020	1,005	0,989
8,0	0,911	0,951	0,983	1,007	1,020	1,024	1,021	1,011	0,998	0,982
8,5	0,918	0,956	0,989	1,010	1,021	1,024	1,018	1,007	0,993	0,978
9,0	0,925	0,966	0,996	1,016	1,025	1,025	1,017	1,006	0,992	0,978
9,5	0,932	0,972	1,004	1,020	1,028	1,026	1,018	1,006	0,993	0,982
10,0	0,939	0,980	1,009	1,025	1,030	1,028	1,018	1,005	0,994	0,985
10,5	0,943	0,985	1,013	1,028	1,031	1,026	1,016	1,004	0,994	0,989
11,0	0,947	0,988	1,015	1,028	1,030	1,024	1,013	1,002	0,993	0,990
11,5	0,949	0,988	1,016	1,027	1,028	1,021	1,010	0,998	0,991	0,991
12,0	0,950	0,990	1,015	1,025	1,024	1,015	1,004	0,994	0,988	0,990
12,5	0,950	0,989	1,013	1,022	1,019	1,010	0,998	0,990	0,986	0,989
13,0	0,950	0,989	1,012	1,019	1,015	1,004	0,993	0,986	0,981	0,989
13,5	0,950	0,990	1,011	1,016	1,011	1,000	0,990	0,983	0,984	0,989
14,0	0,951	0,990	1,010	1,015	1,008	0,997	0,987	0,983	0,985	0,991
14,5	0,954	0,990	1,011	1,014	1,008	0,996	0,986	0,984	0,987	0,994
15,0	0,956	0,993	1,012	1,014	1,006	0,995	0,987	0,986	0,991	0,998
15,5	0,959	0,995	1,013	1,014	1,006	0,995	0,989	0,989	0,995	1,002
16,0	0,961	0,998	1,015	1,014	1,006	0,995	0,990	0,992	0,999	1,007
16,5	0,964	0,999	1,016	1,015	1,005	0,996	0,992	0,995	1,002	1,009
17,0	0,965	1,001	1,016	1,014	1,005	0,996	0,993	0,998	1,005	1,011
17,5	0,966	1,002	1,016	1,013	1,003	0,995	0,994	0,999	1,007	1,011
18,0	0,966	1,002	1,015	1,012	1,002	0,994	0,994	1,000	1,007	1,010
18,5	0,966	1,001	1,014	1,010	1,000	0,993	0,994	1,001	1,007	1,009
19,0	0,966	1,002	1,013	1,008	0,998	0,992	0,994	1,001	1,006	1,006
19,5	0,967	1,001	1,012	1,006	0,996	0,991	0,994	1,001	1,005	1,004
20,0	0,967	1,001	1,011	1,004	0,995	0,991	0,994	1,001	1,004	1,001
20,5	0,968	1,002	1,010	1,003	0,994	0,991	0,995	1,001	1,003	1,000
21,0	0,968	1,002	1,010	1,003	0,994	0,991	0,996	1,002	1,003	0,999
21,5	0,969	1,003	1,010	1,002	0,994	0,992	0,999	1,004	1,003	0,998
22,0	0,971	1,004	1,011	1,002	0,994	0,994	1,000	1,005	1,004	0,998
22,5	0,973	1,005	1,011	1,002	0,995	0,995	1,002	1,006	1,004	0,998
23,0	0,973	1,006	1,011	1,002	0,995	0,997	1,003	1,006	1,004	0,998
23,5	0,975	1,006	1,011	1,002	0,995	0,998	1,004	1,006	1,003	0,998
24,0	0,975	1,006	1,010	1,001	0,995	0,998	1,005	1,006	1,002	0,998
24,5	0,975	1,006	1,009	1,000	0,995	0,999	1,005	1,005	1,000	0,997
25,0	0,975	1,006	1,008	0,999	0,995	0,999	1,004	1,004	0,999	0,996
25,5	0,975	1,006	1,007	0,998	0,994	0,999	1,004	1,002	0,997	0,996
26,0	0,975	1,006	1,006	0,997	0,994	0,999	1,003	1,001	0,996	0,996

Таблица 12.1

щественных частотных характеристик

	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,040	0,248	0,255	0,259	0,267	0,275	0,282	0,290	0,297	0,304	0,314	0,314
0,061	0,476	0,490	0,505	0,5 9	0,534	0,547	0,561	0,575	0,590	0,602	0,602
0,065	0,685	0,706	0,722	0,740	0,758	0,776	0,794	0,813	0,832	0,844	0,844
0,831	0,856	0,878	0,899	0,919	0,938	0,957	0,974	0,991	1,008	1,022	1,022
0,967	0,985	1,010	1,030	1,050	1,067	1,084	1,090	1,105	1,120	1,133	1,133
1,061	1,081	1,100	1,116	1,131	1,143	1,154	1,162	1,169	1,175	1,177	1,177
1,115	1,132	1,145	1,158	1,165	1,170	1,174	1,174	1,175	1,176	1,175	1,175
1,141	1,151	1,158	1,162	1,163	1,161	1,156	1,150	1,141	1,132	1,119	1,119
1,138	1,141	1,141	1,138	1,132	1,127	1,111	1,099	1,085	1,071	1,053	1,053
1,117	1,114	1,107	1,097	1,084	1,069	1,053	1,036	1,019	1,003	0,987	0,987
1,090	1,076	1,064	1,050	1,032	1,016	0,994	0,979	0,962	0,951	0,932	0,932
1,051	1,036	1,020	1,001	0,984	0,956	0,949	0,934	0,922	0,914	0,907	0,907
1,018	1,001	0,982	0,965	0,948	0,936	0,920	0,910	0,906	0,904	0,905	0,905
1,992	0,975	0,957	0,941	0,927	0,917	0,911	0,909	0,911	0,917	0,926	0,926
0,974	0,956	0,944	0,931	0,922	0,919	0,920	0,927	0,934	0,946	0,962	0,962
0,966	0,952	0,941	0,934	0,932	0,936	0,944	0,955	0,970	0,986	1,002	1,002
0,964	0,954	0,948	0,948	0,951	0,958	0,974	0,990	1,006	1,023	1,041	1,041
0,968	0,962	0,961	0,967	0,976	0,990	1,006	1,023	1,038	1,051	1,060	1,060
0,975	0,972	0,977	0,987	1,000	1,015	1,033	1,048	1,059	1,065	1,066	1,066
0,982	0,984	0,993	1,006	1,020	1,036	1,049	1,059	1,063	1,062	1,056	1,056
0,988	0,994	1,005	1,019	1,033	1,046	1,054	1,058	1,055	1,048	1,033	1,033
0,993	1,001	1,014	1,027	1,039	1,047	1,048	1,044	1,034	1,021	1,005	1,005
0,996	1,006	1,017	1,029	1,037	1,039	1,034	1,024	1,010	0,994	0,977	0,977
0,997	1,007	1,018	1,026	1,029	1,025	1,015	1,000	0,984	0,970	0,958	0,958
0,997	1,007	1,015	1,019	1,017	1,010	0,995	0,980	0,965	0,955	0,950	0,950
0,997	1,006	1,012	1,012	1,005	0,993	0,980	0,965	0,955	0,952	0,955	0,955
0,998	1,005	1,008	1,004	0,995	0,982	0,968	0,958	0,954	0,958	0,970	0,970
0,999	1,005	1,005	0,998	0,975	0,965	0,961	0,965	0,961	0,965	0,976	0,976
1,002	1,005	1,003	0,994	0,983	0,970	0,969	0,971	0,981	0,997	1,010	1,010
1,005	1,006	1,002	0,994	0,983	0,977	0,978	0,987	1,001	1,018	1,032	1,032
1,008	1,007	1,001	0,992	0,985	0,984	0,991	1,003	0,019	1,032	1,048	1,048
1,010	1,008	1,001	0,994	0,990	0,993	1,003	1,018	1,031	1,040	1,039	1,039
1,011	1,008	1,001	0,995	0,995	1,001	1,014	1,027	1,035	1,037	1,028	1,028
1,012	1,007	1,000	0,996	0,999	1,008	1,020	1,030	1,032	1,026	1,012	1,012
1,009	1,005	0,998	0,997	1,002	1,012	1,023	1,027	1,023	1,013	0,994	0,994
1,008	1,001	0,997	0,997	1,004	1,014	1,020	1,018	1,008	0,993	0,978	0,978
1,005	0,999	0,995	0,997	1,005	1,012	1,014	1,007	0,993	0,978	0,969	0,969
1,001	0,995	0,993	0,997	1,004	1,009	1,006	0,995	0,981	0,970	0,967	0,967
0,998	0,992	0,992	0,997	1,003	1,005	0,998	0,985	0,973	0,967	0,973	0,973
0,995	0,991	0,992	0,998	1,003	1,001	0,991	0,980	0,972	0,975	0,986	0,986
0,994	0,991	0,994	0,999	1,002	0,998	0,987	0,978	0,977	0,990	1,001	1,001
0,993	0,992	0,996	1,001	1,002	0,996	0,987	0,982	0,989	1,001	1,015	1,015
0,994	0,995	0,999	0,995	1,002	0,995	0,988	0,988	0,998	1,013	1,025	1,025
0,995	0,997	1,000	1,004	1,002	0,995	0,991	0,997	1,010	1,024	1,029	1,029
0,996	1,000	1,005	1,005	1,002	0,996	0,996	1,006	1,018	1,028	1,028	1,028
0,997	1,002	1,007	1,007	1,002	0,997	1,001	1,011	1,022	1,025	1,016	1,016
0,998	1,003	1,008	1,006	1,001	0,998	1,004	1,015	1,021	1,016	1,016	1,016
0,999	1,004	1,007	1,004	0,999	0,999	1,007	1,015	1,016	1,006	0,990	0,990
1,000	1,004	1,006	1,002	0,998	0,999	1,007	1,012	1,007	0,995	0,979	0,979
1,000	1,004	1,004	0,999	0,996	1,000	1,007	1,008	0,998	0,984	0,975	0,975
1,000	1,003	1,002	0,997	0,995	1,000	1,005	1,001	0,989	0,978	0,977	0,977
1,000	1,002	0,999	0,995	0,995	1,000	1,002	0,997	0,984	0,978	0,983	0,983

З а д а ч и

12.1. Показать, что быстродействие системы $\xi \geq 0,6$, характеристическое уравнение которой имеет вид

$$p^3 + 3,5p^2 + 3,5p + 1 + k = 0,$$

достигается при $-0,056 \leq k \leq 0,59$. Убедиться в том, что предельное быстродействие системы не превышает $\xi = 1$.

12.2. Верны ли соотношения (12.16) для неминимально-фазовой системы?

12.3. Показать, что переходные характеристики для систем с передаточными функциями $W(p) = \frac{1 - T_1 p}{1 + T_2 p}$, $W(p) = e^{-\sqrt{pT}}$ (см. задачи 8.1 и 8.2)

равны соответственно

$$h(t) = 1 - \left(1 + \frac{T_1}{T_2}\right) e^{-t/T_2}$$

и

$$\begin{aligned} h(t) &= \operatorname{erf}\left(0,5 \sqrt{\frac{T}{t}}\right) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0,5 \sqrt{\frac{T}{t}}}^{\infty} e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

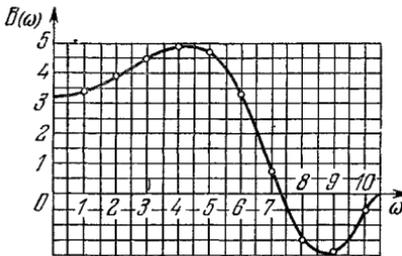


Рис 12.12

12.4. Построить переходную характеристику $h(t)$ для $B(\omega)$, изображенной на рис. 12.12.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

§ 13.1. Показатели качества

Выбор структуры и параметров автоматической системы определяет ее динамические свойства. Устойчивость системы является, как правило, необходимым, но далеко не достаточным условием для того, чтобы система выполняла свое назначение. Возникает задача обеспечения не только устойчивости, но и надлежащего качества системы и, более того, наилучшего, оптимального в том или ином смысле, режима функционирования. Такая задача может быть названа *задачей оптимизации*.

Задача оптимизации сводится к выбору структуры и параметров системы, при которых свойства последней оптимальны, т. е. сводится к выбору лучшего варианта из числа возможных.

Каждый из таких вариантов системы характеризуется отклонением ошибки системы $x(t)$, вызванной изменением внешних воздействий, от установившейся ошибки $x^p(t)$ (рис. 13.1). Обозначим это отклонение через $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon(t) = x(t) - x^p(t).$$

Качество вариантов системы определяется некоторым показателем — численной характеристикой, показывающей, насколько $\varepsilon(t)$ отличается от нуля. Наилучший вариант соответствует экстремальному значению показателя качества, в данном случае минимуму.

Показатели качества представляют собой некоторые функционалы. Их можно рассматривать как функциональные выражения, в которых роль независимых переменных играют функции, кривые, векторы, характеризующие варианты. Приведем примеры показателей качества.

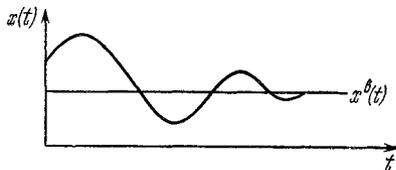


Рис. 13.1.

Максимальное отклонение $\varepsilon(t)$ (рис. 13.2):

$$I = \max |\varepsilon(t)|, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Интегральное абсолютное отклонение $\varepsilon(t)$ (рис. 13.3, а):

$$I = \int_0^{\infty} |\varepsilon(t)| dt.$$

Интегральное квадратическое отклонение (рис. 13.3, б):

$$I = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt.$$

Чем меньше I , тем лучше система. Для идеальных систем

$$\varepsilon(t) \equiv 0$$

и, значит,

$$I \equiv 0. \quad (13.1)$$

Но, как уже неоднократно подчеркивалось, идеальные системы реализовать невозможно, и, следовательно, тождества (13.1) достигнуть нельзя. Поэтому для оптимальных систем показатель качества I достигает минимума, вообще говоря, отличного от нуля. Выбор функционалов, соответствующих показателю качества, представляет собой трудную задачу, так как он связан с учетом

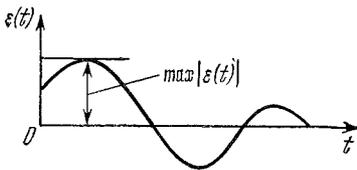


Рис. 13.2.

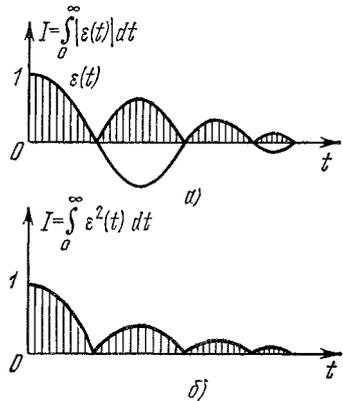


Рис. 13.3.

многих конкретных условий, как, например, требования, предъявляемые к системе, простота последующего определения оптимальной системы и т. п.

Часто, помимо показателя качества, необходимо принять во внимание ограничения, налагаемые на переменные системы. Эти ограничения могут быть заданы в виде

$$|\varepsilon(t)| \leq \varepsilon_0, \quad (13.2)$$

или

$$\left| \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right| \leq \dot{\varepsilon}_0, \quad (13.3)$$

или, наконец,

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right)^2 dt \leq a. \quad (13.4)$$

Ограничения (13.2), (13.3) требуют, чтобы отклонение $\varepsilon(t)$ или его производная $\dot{\varepsilon}(t)$ по абсолютной величине не превосходили заданных значений. Что же касается ограничения (13.4), то оно не допускает быстрых изменений отклонения $\varepsilon(t)$. Помимо перечисленных выше показателей оптимальности иногда вводят в рассмотрение более общие показатели, например:

$$I = \int_0^{\infty} \left[\varepsilon^2(t) + \tau_1^2 \left(\frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right)^2 \right] dt. \quad (13.5)$$

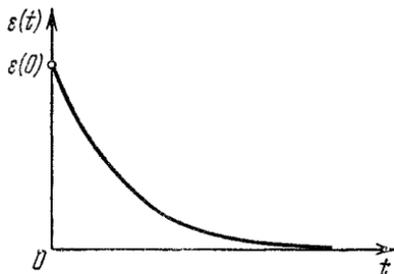


Рис. 13.4.

Нетрудно видеть, что этот показатель оптимальности эквивалентен в определенном смысле интегральному квадратичному показателю оптимальности при учете ограничений вида (13.4). Полезно рассмотреть геометрический смысл показателя оптимальности (13.5). Для этой цели преобразуем его к виду

$$I = \int_0^{\infty} \left[\varepsilon(t) + \tau_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right]^2 dt - 2\tau_1 \int_0^{\infty} \varepsilon(t) \frac{d\varepsilon(t)}{dt} dt.$$

Но легко видеть, что для систем, у которых $\varepsilon(\infty) = 0$,

$$\int_0^{\infty} \varepsilon(t) \frac{d\varepsilon(t)}{dt} dt = - \frac{\varepsilon^2(0)}{2}.$$

Следовательно, из (13.5) получаем

$$I = \int_0^{\infty} \left[\varepsilon(t) + \tau_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right]^2 dt - \tau_1 \varepsilon^2(0).$$

I достигает минимума, если $\varepsilon(t)$ является решением уравнения

$$\tau_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \varepsilon(t) = 0$$

при начальном условии $\varepsilon(0)$, т. е. когда

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0) e^{-t/\tau_1}. \quad (13.6)$$

Кривая $\varepsilon(t)$ (13.6), называемая *экстремалью функционала* (13.5), изображена на рис. 13.4.

Экстремаль для интегрального квадратичного функционала получается из (13.6) при $\tau_1 \rightarrow 0$. Она совпадает с осями координат и соответствует идеальной системе.

§ 13.2. Интегральное квадратическое отклонение

Рассмотрим способ вычисления показателя качества интегрального квадратического отклонения. Будем предполагать, что автоматическая система устойчива, ибо только в этом случае показатели оптимальности, о которых шла речь в § 13.1, имеют смысл. Для устойчивой системы показатель качества

$$I = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt \quad (13.7)$$

существует и конечен. Согласно обратному преобразованию Фурье

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (13.8)$$

Умножим обе части (13.8) на $\varepsilon(t)$ и проинтегрируем полученное равенство по t от 0 до ∞ . Тогда после изменения очередности интегрирования получим

$$I = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega) \left[\int_0^{\infty} \varepsilon(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega. \quad (13.9)$$

Замечая, что

$$\int_0^{\infty} \varepsilon(t) e^{j\omega t} dt = E(-j\omega)$$

представляет собой спектральную функцию, сопряженную $E(j\omega)$, получаем из (13.9)

$$I = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E(j\omega)|^2 d\omega. \quad (13.10)$$

Соотношение (13.10) часто называется *формулой Парсеваля* и выражает тот факт, что

энергия отклонения ошибки от установившегося значения пропорциональна интегралу от квадрата модуля спектральной функции этого отклонения.

Обозначим *спектральную энергетическую функцию*, или *спектральную плотность энергии*, через $S_{э\epsilon}(\omega)$, т. е.

$$S_{э\epsilon}(\omega) = |E(j\omega)|^2.$$

Тогда из (13.10) находим

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{э\epsilon}(\omega) d\omega, \quad (13.11)$$

т. е.

квадратическое интегральное отклонение равно площади спектральной плотности энергии, поделенной на 2π .

Таким образом, если известен график $S_{э\epsilon}(\omega)$, то I можно определить графически (рис. 13.5). Интегральное квадратическое отклонение можно вычислить аналитически через коэффициенты спектральной плотности энергии ошибки. Пусть изображение отклонения $\epsilon(t)$ представимо в виде дробно-рациональной функции от p , которая имеет вид

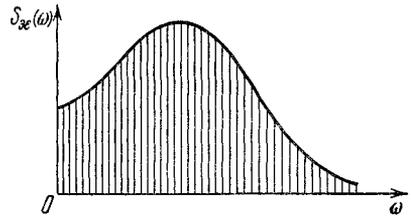


Рис 13.5

$$E(p) = \frac{N_{\epsilon}(p)}{M_{\epsilon}(p)} = \frac{g_0 + g_1 p + \dots + g_{s-1} p^{s-1}}{d_0 + d_1 p + \dots + d_s p^s}. \quad (13.12)$$

Тогда

$$S_{э\epsilon}(j\omega) = \left| \frac{N_{\epsilon}(j\omega)}{M_{\epsilon}(j\omega)} \right|^2 = \left| \frac{g_0 + g_1 p + \dots + g_{s-1} p^{s-1}}{d_0 + d_1 p + \dots + d_s p^s} \right|_{p=j\omega}^2 \quad (13.13)$$

и, значит,

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{N_{\epsilon}(j\omega)}{M_{\epsilon}(j\omega)} \right|^2 d\omega. \quad (13.14)$$

Этот интеграл можно вычислить с помощью обычных методов теории функций комплексного переменного и выразить через коэффициенты изображения $E(p)$ (13.12). Опуская несколько громоздкие вычисления, приведем окончательные результаты:

$$I = (-1)^s \frac{\Delta'_{s-1}}{2d_s \Delta_{s-1}}, \quad (13.15)$$

где

$$\Delta_{s-1} = \begin{vmatrix} d_1 & d_3 & d_5 & \dots \\ d_0 & d_2 & d_4 & \dots \\ 0 & d_1 & d_3 & \dots \\ 0 & d_0 & d_2 & \dots \\ 0 & 0 & d_1 & \dots \end{vmatrix} \quad (13.16)$$

— определитель Гурвица для уравнения

$$M(p) = d_0 + d_1 p + \dots + d_s p^s = 0,$$

а Δ'_{s-1} — определитель, получающийся из (13.16) заменой последней строки на строчку

$$g_0, 2g_0g_2 - g_1, \dots, 2g_0g_4 - 2g_1g_3 + g_2, \dots, (-1)^{s-1} g_{s-1}.$$

Частные случаи выражения I (13.15) приведены в табл. 13.1.

Таблица 13.1

s	I
$s = 1$	$\frac{g_0}{2d_0d_1}$
$s = 2$	$\frac{g_1^2d_0 + g_0^2d_2}{2d_0d_1d_2}$
$s = 3$	$\frac{g_2^2d_0d_1 + (g_1^2 - 2g_0g_2)d_0d_3 + d_0^2d_2^2d_3^2}{2d_1d_3(d_1d_2 - d_0d_3)}$
$s = 4$	$\frac{g_3^2(d_0d_1d_2 - d_0^2d_3) + (g_2^2 - 2g_1g_3)d_0d_1d_4 + (g_2^2 - 2g_0g_4)d_0d_3d_4}{2d_0d_4(d_1d_2d_3 - d_0d_3^2 - d_1^2d_4)} +$ $\frac{g_0(d_2d_3d_4 - d_1d_4^2)}{2d_0d_4(d_1d_2d_3 - d_0d_3^2 - d_1^2d_4)}$

Подставляя значение параметров в (13.15), можно вычислить I и тем самым охарактеризовать качество системы. Чем меньше I , тем лучше система.

§ 13.3. Оптимальные параметры систем

В общем случае функционал I является функцией параметров c_ν ($\nu = 1, 2, \dots, N$) системы, т. е.

$$I = I(c_1, c_2, \dots, c_N).$$

Оптимальной системе соответствуют такие значения c_ν , при которых I достигает минимума. Предположим, что минимум выпуклой функции I существует и единствен, а ограничения на параметры c_h отсутствуют. Тогда условие минимума находится

приравниванием частных производных от I по c_ν нулю, т. е.

$$\frac{\partial I(c_1, c_2, \dots, c_N)}{\partial c_\nu} = 0, \quad \nu = 1, \dots, N. \quad (13.17)$$

Введем векторные обозначения:

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_N)$$

— вектор-столбец параметров,

$$\nabla I(\mathbf{c}) = \text{grad } I(\mathbf{c}) = \left(\frac{\partial I(\mathbf{c})}{\partial c_1}, \frac{\partial I(\mathbf{c})}{\partial c_2}, \dots, \frac{\partial I(\mathbf{c})}{\partial c_N} \right)$$

— градиент-вектор-столбец частных производных. Тогда систему уравнений (13.17) можно записать в виде одного векторного уравнения:

$$\nabla I(\mathbf{c}) = 0.$$

Решение этого уравнения и определяет оптимальный вектор параметров

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}^*.$$

Пример. Рассмотрим простейшую следующую систему, изображенную на рис 13.6, а. Граф системы приведен на рис 13.6, б. Предположим, что параметром этой системы, который мы можем выбирать, является постоянная времени T_1 . Задающее воздействие представляет собой скачкообразную функцию времени

$$f(t) = \begin{cases} A, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

И значит

$$F(p) = \frac{A}{p}.$$

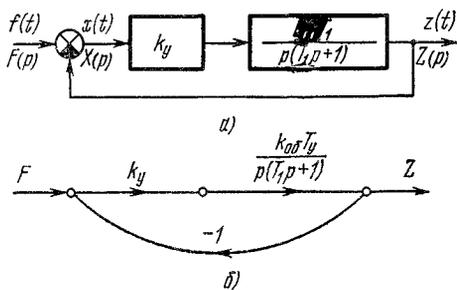


Рис 13.6

Возмущающее воздействие отсутствует. Передаточная функция объекта равна

$$W_{об}(p) = \frac{k_{об} T_1}{p(T_1 p + 1)}.$$

Передаточная функция управляющего устройства

$$W_y(p) = k_y$$

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = W_y(p) W_{об}(p) = \frac{k_y k_{об} T_1}{p(T_1 p + 1)}.$$

Следовательно, передаточная функция замкнутой системы по задающему воздействию будет равна

$$K(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{k_y k_{об} T_1}{T_1 p^2 + p + k_y k_{об} T_1}.$$

Подставляя выражения для $K(p)$ и $F(p)$ в уравнение замкнутой системы

$$X(p) = [1 - K(p)] F(p),$$

получим

$$X(p) = \frac{T_1 p + 1}{T_1 p^2 + p + k_y k_{об} T_1}.$$

Поскольку установившееся значение ошибки равно

$$x^B(t) = \lim_{s \rightarrow 0} pX(p) = 0,$$

то

$$E(p) = X(p) = \frac{AT_1 p + A}{T_1 p^2 + p + k_y k_{об} T_1}. \quad (13.18)$$

Сопоставляя (13.18) с (13.12) заключаем, что $s = 2$ и

$$\begin{aligned} g_0 &= A, & d_0 &= k_y k_{об} T_1, \\ g_1 &= AT_1, & d_1 &= 1, \\ & & d_2 &= T_1. \end{aligned}$$

Пользуясь табл. 13.1, находим для $s = 2$

$$\begin{aligned} I &= \frac{A^2 T_1^3 k_y k_{об} + A^2 T_1}{2 k_y k_{об} T_1^2} = \\ &= \frac{A}{2} \left(T_1 + \frac{1}{k_y k_{об} T_1} \right). \quad (13.19) \end{aligned}$$

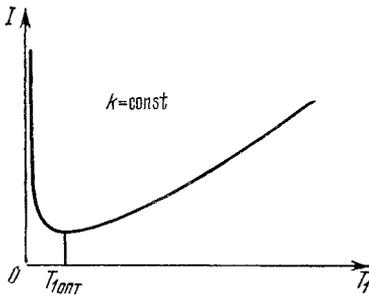
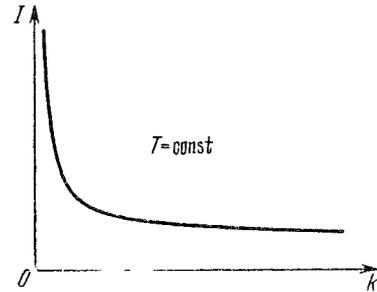


Рис. 13.7.

Качественно зависимость $I = I(k_y, T_1)$ изображена на рис. 13.7. I монотонно убывает с ростом k_y и имеет минимум по T_1 . Для нахождения этого минимума продифференцируем (13.19) по T_1 и приравняем результат нулю:

$$\frac{\partial I}{\partial T_1} = \frac{A}{2} \left(1 - \frac{1}{k_y k_{об} T_1^2} \right) = 0$$

Отсюда находим оптимальное значение постоянной времени

$$T_1 = (k_y k_{об})^{-\frac{1}{2}}.$$

Подставляя это значение T_1 в (13.19), получаем

$$I = I_{\min} = A (k_y k_{об})^{-\frac{1}{2}}$$

Чем больше k_y , тем меньшего значения минимума I можно добиться выбором T_1 . При $k_y \rightarrow \infty$, как это уже неоднократно показывалось, мы приходим к идеальной системе.

§ 13.4. Оптимальные характеристики систем

Рассмотрим автоматическую систему, изображенную на рис. 13.8. Обозначим через $W_{об}(p)$ передаточную функцию неизменяемой части системы — объекта, а через $W_y(p)$ — передаточную функцию управляющего устройства. Задача определения оптимальных характеристик системы состоит в определении передаточной функции $W_y(p)$ или частотной характеристики $W_y(j\omega)$ изменяемой части системы — управляющего устройства, при котором показатель оптимальности достигает экстремума.

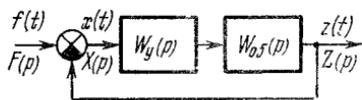


Рис. 13.8

В качестве таких показателей можно выбрать:

1. Интегральное квадратическое отклонение

$$I_e = \int_0^{\infty} \epsilon_x^2(t) dt. \quad (13.20)$$

2. Энергию управления

$$I_u = \int_0^{\infty} \epsilon_u^2(t) dt, \quad (13.21)$$

где

$$\epsilon_x(t) = x(t) - x^B(t), \quad \epsilon_u(t) = u(t) - u^B(t). \quad (13.22)$$

Поскольку одновременно невозможно достигнуть оптимума по двум различным показателям, то можно сформулировать три задачи оптимизации: определить оптимальные характеристики системы, при которых:

- 1) достигается минимум I_e при условии, что $I_u = H_1$;
- 2) достигается минимум I_u при условии, что $I_e = H_2$;
- 3) достигается минимум

$$I = I_e + \lambda^2 I_u = \int_0^{\infty} [\epsilon_x^2(t) + \lambda^2 \epsilon_u^2(t)] dt, \quad (13.23)$$

где λ^2 — некоторое число, характеризующее «вес» функционала I_u .

Займемся решением более общей третьей задачи. На основании соотношения (13.10) получаем

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [|E_x(j\omega)|^2 + \lambda^2 |E_u(j\omega)|^2] d\omega. \quad (13.24)$$

Для простоты и наглядности предположим, что вынужденные или установившиеся значения ошибки и управляющего воздействия равны нулю, т. е.

$$x^B(t) = u^B(t) = 0.$$

Тогда, как видно из (13.22),

$$\begin{aligned} e_x(t) &= x(t), & e_u(t) &= u(t), \\ E_x(j\omega) &= X(j\omega), & E_u(j\omega) &= U(j\omega) \end{aligned}$$

и вместо (13.24) будем иметь

$$I = \int_0^{\infty} [x^2(t) + \lambda^2 u^2(t)] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [|X(j\omega)|^2 + \lambda^2 |U(j\omega)|^2] d\omega. \quad (13.25)$$

Но, как это непосредственно следует из блок-схемы системы (рис. 13.8),

$$X(j\omega) = [1 - K(j\omega)] F(j\omega)$$

и

$$U(j\omega) = \frac{Z(j\omega)}{W_{об}(j\omega)} = K(j\omega) \frac{F(j\omega)}{W_{об}(j\omega)}.$$

Подставляя значения спектральных функций ошибки $X(j\omega)$ и управления $U(j\omega)$ в (13.25), получим

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ |1 - K(j\omega)|^2 |F(j\omega)|^2 + \lambda^2 |K(j\omega)|^2 \left| \frac{F(j\omega)}{W_{об}(j\omega)} \right|^2 \right\} d\omega. \quad (13.26)$$

Введем обозначения спектральной энергии задающего воздействия

$$S_{\mathcal{F}}(\omega) = |F(j\omega)|^2$$

и спектральной энергии управляющего воздействия

$$S_{\mathcal{U}}(\omega) = \lambda^2 \left| \frac{F(j\omega)}{W_{об}(j\omega)} \right|^2.$$

Тогда (13.26) можно окончательно записать в следующей форме:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ |1 - K(j\omega)|^2 S_{\mathcal{F}}(\omega) + |K(j\omega)|^2 S_{\mathcal{U}}(\omega) \} d\omega. \quad (13.27)$$

Если подставить в (13.27) значения спектральных энергий и частотной характеристики замкнутой системы, в которую входит часть неопределенных параметров, то мы придем к задаче опре-

деления оптимальных параметров, рассмотренной в § 13.3. Более общая задача состоит в нахождении оптимальной частотной характеристики $K_{\text{опт}}(j\omega)$ или передаточной функции замкнутой системы $K_{\text{опт}}(p)$, для которой функционал I (13.27) достигает своего минимума. Для решения этой задачи преобразуем функционал I (13.27) к более удобному виду. Замечая, что

$$|1 - K(j\omega)|^2 = 1 - [K(j\omega) + K(-j\omega)] + K(j\omega)K(-j\omega),$$

и обозначая

$$S_s(\omega) = S_{sf}(\omega) + S_{su}(\omega), \quad (13.28)$$

запишем функционал I (13.27) в виде

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_{sf}(\omega) + K(j\omega)K(-j\omega)S_s(\omega) - [K(j\omega) + K(-j\omega)]S_{sf}(\omega)\} d\omega.$$

Если в подынтегральном выражении прибавить и вычесть слагаемое $\frac{S_{sf}^2(\omega)}{S_s(\omega)}$, то после очевидных преобразований получаем выражение функционала в наиболее удобной форме:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ |K(j\omega)S_s(\omega) - S_{sf}(\omega)|^2 \frac{1}{S_s(\omega)} + \frac{S_{sf}(\omega)S_{su}(\omega)}{S_s(\omega)} \right\} d\omega. \quad (13.29)$$

Удобство такого представления функционала состоит в том, что искомая частотная характеристика $K(j\omega)$ входит только в одно слагаемое подынтегрального выражения. А так как слагаемые в подынтегральном выражении неотрицательны, то минимизация I сводится к минимизации слагаемого

$$|K(j\omega)S_s(\omega) - S_{sf}(\omega)|^2 \frac{1}{S_s(\omega)} = \frac{\Lambda(\omega)}{S_s(\omega)},$$

зависящего от $K(j\omega)$, или, что то же, к минимизации

$$\Lambda(\omega) = |K(j\omega)S_s(\omega) - S_{sf}(\omega)|^2.$$

Очевидно, что если не наложить требования реализуемости на $K(j\omega)$, то I достигает минимума при обращении $\Lambda(\omega)$ в нуль, т. е. при $K(j\omega)$, равном

$$K_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{S_{sf}(\omega)}{S_s(\omega)} = \frac{S_{sf}(\omega)}{S_{sf}(\omega) + S_{su}(\omega)}. \quad (13.30)$$

При этом I (13.29) достигает наименьшего значения

$$I_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{\text{эф}}(\omega) S_{\text{эи}}(\omega)}{S_{\text{эф}}(\omega) + S_{\text{эи}}(\omega)} d\omega. \quad (13.31)$$

Подставляя значения $S_{\text{эф}}(\omega)$ и $S_{\text{эи}}(\omega)$ в (13.30), получаем выражение оптимальной частотной характеристики замкнутой системы:

$$K_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{|F(j\omega)|^2}{|F(j\omega)|^2 + \lambda^2 \left| \frac{F(j\omega)}{W_{\text{об}}(j\omega)} \right|^2}. \quad (13.32)$$

Умножая числитель и знаменатель (13.32) на $\left| \frac{W_{\text{об}}(j\omega)}{F(j\omega)} \right|^2$, получаем

$$K_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{|W_{\text{об}}(j\omega)|}{|W_{\text{об}}(j\omega)|^2 + \lambda^2}. \quad (13.33)$$

После подстановки значений $S_{\text{эф}}(\omega)$ и $S_{\text{эи}}(\omega)$ в (13.31) находим минимальное значение функционала:

$$I_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 |F(j\omega)|^2}{|W_{\text{об}}(j\omega)|^2 + \lambda^2} d\omega. \quad (13.34)$$

Таким образом,

оптимальная частотная характеристика замкнутой системы определяется частотной характеристикой объекта $W_{\text{об}}(j\omega)$ и весовым множителем λ^2 . Показатель качества зависит, естественно, также от спектральной плотности энергии возмущающего воздействия.

При $\lambda = 0$ из (13.33) и (13.34) следует:

$$K_{\text{опт}}(j\omega) = 1$$

и

$$I_{\min} = 0,$$

что соответствует идеальной системе.

Пример. Пусть частотная характеристика равна

$$W_{\text{об}}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T_1}.$$

Тогда согласно (13.33) оптимальная частотная характеристика замкнутой системы будет иметь вид

$$K_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{1}{1 + \lambda^2 |1 + T_1 j\omega|^2},$$

или

$$K_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{1}{(1 + \lambda^2) + \lambda^2 T_1^2 \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2} + \lambda T_1 j\omega} \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2} - \lambda T_1 j\omega}. \quad (13.35)$$

Вводя обозначения эквивалентных коэффициента усиления и постоянной времени $k_э = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$ и $T_э = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} T_1$, запишем (13.35) в такой форме:

$$K_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{k_э^2}{1 + T_э^2 \omega^2} = \frac{k_э}{1 + T_э j\omega} \frac{k_э}{1 - T_э j\omega},$$

или, после разложения дроби на простейшие,

$$K_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{k_э}{2} \left[\frac{1}{1 + T_э j\omega} + \frac{1}{1 - T_э j\omega} \right]. \quad (13.36)$$

Если заменить в (13.36) $j\omega$ на p , то получим выражение для оптимальной передаточной функции:

$$K_{\text{опт}}(p) = \frac{k_э}{2} \left[\frac{1}{1 + T_э p} + \frac{1}{1 - T_э p} \right]. \quad (13.37)$$

Но оптимальная передаточная функция такого вида не может соответствовать никакой физически реализуемой системе. Это связано с тем, что импульсная характеристика, соответствующая передаточной функции (13.37), равна (см. приложение 1)

$$k(t) = \begin{cases} \frac{k_э}{2} e^{-t/T_э}, & t \geq 0, \\ \frac{k_э}{2} e^{t/T_э}, & t \leq 0. \end{cases} \quad (13.38)$$

Отсюда видно, что импульсная характеристика $k(t)$ (13.38) не удовлетворяет условию физической реализуемости $k(t) \equiv 0$ при $t < 0$. Возникает задача определения такой оптимальной частотной характеристики $K(j\omega)$ и соответствующей передаточной функции $K(p)$, которые удовлетворяли бы условию физической реализуемости.

§ 13.5. Реализуемые оптимальные характеристики

Условие физической реализуемости состоит в требовании равенства нулю импульсной характеристики системы при $t < 0$:

$$k(t) \equiv 0.$$

Но это может иметь место, как видно из примера § 13.4, лишь тогда, когда соответствующая передаточная функция $K(p)$ имеет все левые полюсы и, значит, все верхние полюсы частотной характеристики $K(j\omega)$. Для определения оптимальной реализуемой частотной характеристики представим $S_э(\omega)$ (13.28) в виде

$$S_э(\omega) = |\Psi(j\omega)|^2 = \Psi(j\omega) \Psi(-j\omega), \quad (13.39)$$

где функции $\Psi(j\omega)$ имеют все нули и полюсы в верхней полуплоскости (верхние нули и полюсы), а $\Psi(-j\omega)$ имеют все нули и полюсы в нижней полуплоскости (нижние нули и полюсы). Такая операция называется *факторизацией*. Подставляя $S_s(\omega)$ из (13.39) в выражение для $\Lambda(\omega)$, получим

$$\Lambda(\omega) = \left| K(j\omega) \Psi(j\omega) - \frac{S_{zf}(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right|^2 S_s(\omega). \quad (13.40)$$

Разобьем теперь $\frac{S_{zf}(\omega)}{\Psi(-j\omega)}$ на две части:

$$\frac{S_{zf}(\omega)}{\Psi(-j\omega)} = \left\{ \frac{S_{zf}(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right\}^+ + \left\{ \frac{S_{zf}(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right\}^-, \quad (13.41)$$

одна из которых, обозначенная символом $\{\cdot\}^+$, имеет только верхние полюсы, а другая, обозначенная символом $\{\cdot\}^-$, имеет только нижние полюсы. Эта операция, связанная с разложением на простейшие дроби и соответствующей группировкой слагаемых, называется *расщеплением*. Подставляя (13.41) в (13.40), получаем

$$\Lambda(\omega) = \left| K(j\omega) \Psi(j\omega) - \left\{ \frac{S_{zf}(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right\}^+ - \left\{ \frac{S_{zf}(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right\}^- \right|^2 S_s(\omega). \quad (13.42)$$

Для определения оптимальной устойчивой частотной характеристики приравняем нулю алгебраическую сумму (первых двух) реализуемых слагаемых в (13.42). Тогда получим

$$K_{\text{опт}}^p(j\omega) = \frac{1}{\Psi(j\omega)} \left\{ \frac{S_{zf}(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right\}^+. \quad (13.43)$$

При этом $\Lambda(\omega)$ достигает минимального в этих условиях значения, но уже отличного от нуля:

$$\Lambda_{\text{min}}(\omega) = \left| \left\{ \frac{S_{zf}(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right\}^- \right|^2 S_s(\omega). \quad (13.44)$$

Соответственно функционал (13.29) достигает своего минимального значения, равного

$$I_{\text{min}}^p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left| \left\{ \frac{S_{zf}(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right\}^- \right|^2 + \frac{S_{zf}(\omega) S_{zu}(\omega)}{S_s(\omega)} \right) d\omega. \quad (13.45)$$

Сопоставляя (13.45) и (13.34), заключаем, что

$$I_{\text{min}}^p > I_{\text{min}}.$$

Поскольку $S_3(\omega)$ после подстановки значений $S_{3f}(\omega)$, $S_{3u}(\omega)$ равно

$$S_3(\omega) = \left| \frac{F(j\omega)}{W_{06}(j\omega)} \right|^2 (|W_{06}(j\omega)|^2 + \lambda^2),$$

то для устойчивого, минимально-фазового объекта и типового задающего воздействия

$$\Psi(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{W_{06}(j\omega)} [|W_{06}(j\omega)|^2 + \lambda^2]_+,$$

$$\Psi(-j\omega) = \frac{F(-j\omega)}{W_{06}(-j\omega)} [|W_{06}(j\omega)|^2 + \lambda^2]_-.$$

И значит, оптимальная реализуемая частотная характеристика замкнутой системы (13.43) будет равна

$$K_{\text{опт}}^p(j\omega) = \frac{W_{06}(j\omega)}{F(j\omega) [|W_{06}(j\omega)|^2 + \lambda^2]_+} \left\{ \frac{F(j\omega) W_{06}(-j\omega)}{[|W_{06}(j\omega)|^2 + \lambda^2]_-} \right\}^+ \quad (13.46)$$

Определив оптимальную реализуемую частотную характеристику замкнутой системы, можно по ней для заданной частотной характеристики управляемого объекта $W_{06}(j\omega)$ найти частотную характеристику управляющего устройства $W_y(j\omega)$. Для этого воспользуемся известным соотношением

$$K(j\omega) = \frac{W_y(j\omega) W_{06}(j\omega)}{1 + W_y(j\omega) W_{06}(j\omega)}.$$

Разрешая его относительно $W_y(j\omega)$, получим при $K(j\omega) = K_{\text{опт}}^p(j\omega)$

$$W_{y, \text{опт}}(j\omega) = \frac{1}{W_{06}(j\omega)} \frac{K_{\text{опт}}^p(j\omega)}{1 - K_{\text{опт}}^p(j\omega)}, \quad (13.47)$$

где $K_{\text{опт}}^p(j\omega)$ определяется выражением (13.46).

Пример. Пусть

$$W_{06}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T_1}, \quad F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}.$$

Составляем выражение

$$|W_{06}(j\omega)|^2 + \lambda^2 = \frac{1 + \lambda^2 + \lambda^2 T_1^2 \omega^2}{1 + T_1^2 \omega^2}.$$

Произведем факторизацию:

$$[|W_{06}(j\omega)|^2 + \lambda^2]_{\pm} = \frac{\sqrt{1 + \lambda^2} \pm \lambda T_1 j\omega}{1 \pm T_1 j\omega} = k_3 \frac{1 \pm T_3 j\omega}{1 \pm T_1 j\omega},$$

где k_3 и T_3 определяются, как и ранее. Подставляя эти значения, а также $W_{06}(j\omega)$ и $F(j\omega)$ в (13.46), получим

$$K_{\text{опт}}^p(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{k_3(1 + T_3 j\omega)} \left\{ \frac{1}{(1 + j\omega)(1 - T_3 j\omega)} \right\}^+.$$

Произведем расщепление. Пусть

$$\frac{1}{(1+j\omega)(1-T_3j\omega)} = \frac{A_1}{1+j\omega} + \frac{A_2}{1-T_3j\omega}. \quad (13.48)$$

Очевидно

$$\left\{ \frac{1}{(1+j\omega)(1-T_3j\omega)} \right\}^+ = \frac{A_1}{1+j\omega},$$

а из (13.48) имеем, что

$$A_1 = \frac{1}{1+T_3}.$$

Следовательно,

$$K_{\text{опт}}^p(j\omega) = \frac{1+j\omega}{k_s(1+T_3j\omega)} \frac{1}{(1+T_3)(1+j\omega)} = \frac{1}{1+T_3} \frac{1}{1+T_3j\omega}.$$

Подставляя $K_{\text{опт}}^p(j\omega)$ и $W_{\text{об}}(j\omega)$ в (13.47) находим частотную характеристику управляющего устройства:

$$W_{y, \text{опт}}(j\omega) = (1+j\omega T_1) \frac{\frac{1}{(1+T_3)(1+T_3j\omega)}}{1 - \frac{1}{(1+T_3)(1+T_3j\omega)}},$$

или

$$W_{y, \text{опт}}(j\omega) = \frac{1}{T_c} \frac{1+T_1j\omega}{1+(1+T_3)j\omega}.$$

Эта частотная характеристика управляющего устройства может быть физически реализована

Для более полного анализа реализуемости оптимальной частотной характеристики рассмотрим соотношение

$$\frac{U(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{K(j\omega)}{W_{\text{об}}(j\omega)}.$$

Если частотная характеристика управляемого объекта обладает индексом неминимально-фазовости, отличным от нуля, и содержит, например, элементы запаздывания, т. е.

$$W_{\text{об}}(j\omega) = W_{01}(j\omega) e^{-l\omega\tau}, \quad (13.49)$$

то

$$\frac{U(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{K(j\omega)}{W_{01}(j\omega)} e^{l\omega\tau}$$

и, значит, частотная характеристика должна обладать ненулевым индексом неустойчивости и содержать упреждающие звенья. Такая система физически нереализуема. Для преодоления этих трудностей необходимо наложить дополнительные ограничения на искомую передаточную функцию, включив в них, например, требование, чтобы она в качестве множителя содержала (13.49), т. е. нужно потребовать, чтобы она имела вид

$$K(j\omega) = W_{01}(j\omega) e^{-l\omega\tau} R(j\omega).$$

Тогда

$$\frac{U(j\omega)}{F(j\omega)} = R(j\omega).$$

Таким образом,

частотная характеристика замкнутой системы $K(j\omega)$ может быть физически реализована, если она содержит в качестве множителя частотную характеристику неизменной части системы $W_{об}(j\omega)$.

Более подробно вопрос о реализации частотной характеристики замкнутой системы будет рассмотрен в гл. 14.

Задачи

13.1. Показать, что для системы на рис. 13.9 при

$$f(t) = \begin{cases} A, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

интегральная квадратическая ошибка равна

$$I_2 = \int_0^{\infty} x^2(t) dt = A^2 \left(T_1 + \frac{1}{k_1} \right).$$

13.2. Показать что, вводя коэффициент демпфирования $\xi = \frac{1}{2(T_1 k_1)^{1/2}}$

и собственную частоту $\omega_0 = \left(\frac{k_1}{T_1} \right)^{1/2}$ системы (рис. 13.9), можно квадратическую ошибку представить в виде

$$I_2 = \frac{A^2}{2\omega_0} \left(\frac{1}{2\xi} + 2\xi \right).$$

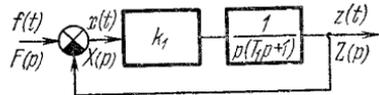


Рис 13.9

Убедиться в том, что минимум I_2 достигается при $\xi = \frac{1}{2}$ и равен $\min I_2 = \frac{A^2}{\omega_0}$.

13.3. Показать, что при произвольном задающем воздействии $f_3(t)$ передаточная функция $K(p)$ оптимальной системы при которой достигается минимум квадратичного критерия

$$I = \int_0^{\infty} [f_3(t) - z(t)]^2 dt = \int_0^{\infty} x^2(t) dt,$$

равна

$$K(p) = 1.$$

СИСТЕМЫ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

§ 14.1. Основные понятия

До сих пор предполагалось, что все воздействия, приложенные к системе, детерминированные. На практике мы часто сталкиваемся с такими воздействиями, которые носят случайный, не предсказуемый точно, характер. Такими воздействиями являются изменения нагрузок энергосистем, зависящие от потребления энергии и поэтому носящие случайный характер. Порывы ветра, действующие на самолет, управляемый автопилотом, также имеют случайный характер. В высококачественных системах регулирования и следящих системах, содержащих усилители с большим коэффициентом усиления, на протекающие процессы существенное влияние могут оказывать флуктуационные шумы усилителя. В радиолокационных следящих системах задающее воздействие также носит случайный характер, вызванный как случайностью полезного сигнала, так и наличием мешающей составляющей. В экономических системах случайная составляющая вызывается, например, непредсказуемым спросом. При наличии случайных воздействий состояние системы в какой-либо момент времени обуславливает лишь определенную вероятность наступления возможного состояния ее в последующие моменты времени. Возмущения, описанные выше, называются *случайными возмущениями*.

Принципиально можно применить для исследования систем при наличии случайных возмущений оценки отклонения регулируемой величины от заданного значения в наихудшем случае, т. е. для случая возмущения, произвольно ограниченного по модулю. Однако, ведя расчет на максимальное значение случайного возмущения, вероятность появления которого, вообще говоря, невелика, мы будем предъявлять заведомо более жесткие требования к системе, чем это вызвано сутью дела. Поэтому к значительно лучшим и технически более приемлемым результатам приводят методы, характеризующие усредненное поведение системы при наличии случайных возмущений, т. е. методы, которые учитывают статистическую природу возмущений.

Случайным процессом называется процесс, который может принимать тот или иной конкретный вид, заранее не предсказуемый. Этот конкретный вид процесса представляет собой реализацию случайного процесса. Для простоты будем обозначать как случайный процесс, так и реализацию его одной и той же буквой, например $x(t)$. Вероятность того, что функции $x(t)$ принимают в некоторый фиксированный момент времени t_1 значения, лежащие в интервале $(x, x + dx)$, зависит от значения x , выбранного момента t_1 и пропорциональна dx , т. е. она равна

$$p_1(x, t_1) dx.$$

Вероятность того, что функции $x(t)$ в момент t_1 , принимают значения, лежащие в интервале $(x_1, x_1 + dx_1)$, а в момент t_2 — значения, лежащие в интервале $(x_2, x_2 + dx_2)$, зависит от значений x_1 и x_2 , моментов t_1, t_2 и пропорциональна dx_1, dx_2 , т. е. она равна

$$p_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2.$$

Функции $p_1(x, t_1)$, $p_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$ представляют собой одномерную и двумерную плотности распределения случайного процесса $x(t)$. Аналогично можно определить и многомерные плотности распределения случайного процесса высших порядков. Совокупности плотностей распределения с возрастающей мерностью характеризуют случайный процесс тем подробнее, чем больше соотвествующая мерность. Практически ограничиваются обычно рассмотрением одномерных и двумерных плотностей распределения либо иных характеристик случайных процессов, которые тем или иным образом зависят от этих плотностей распределения.

Если плотности распределения вероятностей не зависят от выбора момента времени t_1 , т. е. инвариантны относительно начала отсчета t_1 , то случайный процесс называется *стационарным*. Стационарный случайный процесс обладает, таким образом, тем свойством, что его характеристики не зависят от выбора начала отсчета или момента наблюдения. Для стационарного случайного процесса вероятность того, что значение x лежит в интервале $(x, x + dx)$, равна

$$p_1(x) dx,$$

а вероятность того, что два значения x лежат в интервалах $(x_1, x_1 + dx_1)$ и $(x_2, x_2 + dx_2)$, равна

$$p_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2, \quad \tau = t_1 - t_2.$$

Далее будем предполагать, что задающие и возмущающие воздействия представляют собой стационарные случайные процессы. В основном нас будут интересовать вынужденные или,

точнее, установившиеся процессы, вызываемые стационарными случайными воздействиями. Ясно, что эти установившиеся, стационарные процессы также являются случайными процессами, но, вообще говоря, с иными статистическими характеристиками.

§ 14.2. Характеристики случайных процессов

К важным характеристикам стационарных случайных процессов, которые далее будут использоваться, относятся *математические ожидания, корреляционные функции и спектральные плотности*.

Математическое ожидание случайного процесса

$$\overline{\tilde{x}(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x) dx$$

определяет среднее значение случайного процесса и геометрически соответствует центру тяжести плотности распределения $p_1(x)$.

Математическое ожидание квадрата случайного процесса

$$\overline{\tilde{x}^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_1(x) dx$$

определяет среднее значение квадрата случайного процесса и геометрически соответствует моменту инерции плотности распределения относительно начала координат.

Дисперсия случайного процесса

$$D_x = \overline{[\tilde{x}(t) - \overline{\tilde{x}(t)}]^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 p_1(x) dx$$

характеризует меру рассеивания значений случайного процесса относительно его среднего значения и геометрически соответствует моменту инерции относительно центра тяжести. Раскрывая под знаком интеграла квадрат разности, получим

$$D_x = \overline{\tilde{x}^2(t)} - (\overline{\tilde{x}(t)})^2.$$

Дисперсия случайного процесса равна разности среднего значения квадрата процесса и квадрата среднего значения процесса. Корень квадратный из дисперсии определяет среднеквадратическое отклонение σ_x , так что

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}.$$

Корреляционная функция

$$\begin{aligned}
 R_x(\tau) &= \overline{x(t)x(t+\tau)} = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau) p_2(x(t), t; x(t+\tau), t+\tau) dx(t) dx(t+\tau)
 \end{aligned}$$

представляет собой среднее значение произведения случайных процессов $x(t)$ и $x(t+\tau)$. Корреляционная функция случайного процесса характеризует степень зависимости, корреляции между значениями процесса, отстоящими друг от друга на время τ .

Определения математического ожидания случайного процесса и его квадрата, а также дисперсии и корреляционной функции основаны на усреднении по множеству реализаций случайных процессов, которые характеризуются одномерной и двумерной плотностями распределения. Наряду с усреднением по множеству возможно усреднение по времени. Пользуясь усреднением по времени, определим среднее значение случайного процесса выражением

$$\overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt.$$

Среднее значение квадрата случайного процесса будет равно

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt.$$

Дисперсия найдется как

$$\overline{(x(t) - \overline{x(t)})^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t) - \overline{x(t)})^2 dt,$$

или

$$\overline{(x(t) - \overline{x(t)})^2} = \overline{x^2(t)} - (\overline{x(t)})^2.$$

Наконец, корреляционная функция будет определяться выражением

$$\overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt.$$

Для стационарных эргодических процессов статистические характеристики, полученные усреднением по множеству и по времени, равны друг другу, т. е.

$$\overline{\overline{x(t)}} = \overline{x(t)} = \mathbf{M}\{x(t)\} \equiv m_x,$$

$$\overline{\overline{x^2(t)}} = \overline{x^2(t)} = \mathbf{M}\{x^2(t)\},$$

и, значит,

$$\overline{\overline{(x(t) - \overline{x(t)})^2}} = \overline{(x(t) - \overline{x(t)})^2} = \mathbf{M}\{[x(t) - m_x]^2\} \equiv D_x$$

и

$$R_x(\tau) \equiv \overline{\overline{x(t)x(t+\tau)}} = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \mathbf{M}\{x(t)x(t+\tau)\}.$$

Эргодичность широкого класса стационарных случайных процессов позволяет множество случайных процессов образовывать из отрезков конечной длины одной достаточно продолжительной по времени реализации случайного процесса. Поскольку далее мы будем иметь дело только с эргодическими случайными процессами, для которых имеет место эквивалентность усреднения по множеству и по времени, то введем общий символ усреднения $\mathbf{M}\{\cdot\}$, под которым мы будем понимать удобный для нас вид усреднения. Чаще из-за наглядности мы будем использовать усреднение по времени.

Наиболее важной характеристикой случайного процесса является корреляционная функция, указывающая степень зависимости между значениями случайного процесса в моменты времени, отстоящие друг от друга на величину τ . Заменяя в формуле для $R_x(\tau)$ t на $t - \tau$, получим

$$R_x(\tau) = \mathbf{M}\{x(t)x(t+\tau)\} = \mathbf{M}\{x(t-\tau)x(t)\} = R_x(-\tau),$$

т. е. корреляционная функция является четной функцией сдвига τ . Для стационарного случайного процесса сдвиг на τ в сторону возрастания или убывания времени не меняет степени зависимости значений случайного процесса. При $\tau = 0$ получаем, что

$$R_x(0) = \mathbf{M}\{x^2(t)\}.$$

Начальное значение корреляционной функции равно среднему значению квадрата случайного процесса. Из выражения для дисперсии следует также

$$R_x(0) = D_x + m_x^2.$$

Начальное значение корреляционной функции равно сумме дисперсии и квадрата среднего значения случайного процесса. Из

очевидного неравенства

$$\mathbf{M} \{(x(t) - x(t + \tau))^2\} \geq 0$$

следует

$$\mathbf{M} \{x^2(t)\} + \mathbf{M} \{x^2(t + \tau)\} \geq 2\mathbf{M} \{x(t)x(t + \tau)\}.$$

Так как

$$\mathbf{M} \{x^2(t)\} = \mathbf{M} \{x^2(t + \tau)\} = R_x(0)$$

и

$$\mathbf{M} \{x(t)x(t + \tau)\} = R_x(\tau),$$

то

$$R_x(0) \geq R_x(\tau).$$

Значения корреляционной функции при $\tau \neq 0$ не могут быть больше ее начального значения.

Корреляционная функция имеет определенный смысл и для детерминированных ограниченных неисчезающих процессов

Пример 1. Пусть $x(t)$ — постоянное воздействие

$$x(t) = a.$$

Корреляционная функция равна

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a^2 dt = a^2.$$

Корреляционная функция постоянного воздействия равна квадрату этого воздействия

Пример 2. Пусть $x(t)$ — гармоническое воздействие

$$x(t) = a \sin(\omega t + \varphi).$$

Корреляционная функция равна

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a^2 \sin(\omega t + \varphi) \sin[\omega(t + \tau) + \varphi] dt.$$

Поскольку подынтегральное выражение периодически, то, представляя интеграл в виде суммы интегралов с пределами от $(k-1)\frac{2\pi}{\omega}$ до $k\frac{2\pi}{\omega}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), получим

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \frac{a^2\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sin(\omega t + \varphi) \sin[\omega(t + \tau) + \varphi] dt = \\ &= \frac{a^2\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi/\omega} [\cos \omega\tau - \cos(\omega t + 2\omega\tau + 2\varphi)] dt. \end{aligned}$$

Но так как

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t + 2\omega\tau + 2\varphi) dt = 0,$$

то

$$R_x(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos \omega\tau.$$

Корреляционная функция гармонического воздействия частоты ω и фазы φ не зависит от фазы φ и представляет собой гармоническую функцию той же частоты ω , амплитуды $\frac{a^2}{2}$.

Если случайный процесс содержит постоянную составляющую, т. е. если среднее значение случайного процесса m_x отлично от нуля, то

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = m_x^2.$$

Если же случайный процесс с нулевым средним содержит гармоническую составляющую частоты ω , то

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[R_x(\tau) - \frac{a^2}{2} \cos \omega\tau \right] = 0.$$

При отсутствии в случайном процессе с нулевым средним таких детерминированных составляющих

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = 0,$$

что свидетельствует об уменьшении зависимости между значениями процесса с ростом разделяющего их интервала. Эти свойства корреляционной функции используются при выделении постоянных и гармонических составляющих из случайного процесса.

Взаимная корреляционная функция

$$R_{xy}(\tau) = \mathbf{M} \{x(t) y(t + \tau)\}$$

характеризует меру связи двух случайных процессов. Заменяя t на $t - \tau$, получим

$$R_{xy}(\tau) = \mathbf{M} \{x(t - \tau) y(t)\} = \mathbf{M} \{y(t) x(t - \tau)\} = R_{yx}(-\tau).$$

Взаимная корреляционная функция при изменении сдвига τ на $-\tau$ изменяет порядок своих индексов.

При $\tau = 0$

$$R_{xy}(0) = \mathbf{M} \{x(t) y(t)\}.$$

Начальное значение взаимной корреляционной функции равно среднему значению произведения случайных процессов.

Наконец, если средние значения m_x и m_y процессов $x(t)$ и $y(t)$ отличны от нуля, то

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{xy}(\tau) = m_x m_y.$$

Далее для простоты изложения мы будем предполагать, что в случайных воздействиях постоянные и гармонические составляющие отсутствуют, т.е. корреляционная функция удовлетворяет условию $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = 0$. Учет постоянных составляющих в тех случаях, когда это необходимо, не представляет труда.

Спектральную плотность случайного процесса $S_x(\omega)$ определим как двустороннее преобразование Фурье корреляционной функции $R_x(\tau)$:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} R_x(\tau) d\tau. \quad (14.1)$$

Согласно обратному преобразованию Фурье

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} S_x(\omega) d\omega. \quad (14.2)$$

Заменяя в (14.1) τ на $-\tau$, ω на $-\omega$ и принимая во внимание четность корреляционной функции, получаем

$$S_x(\omega) = S_x(-\omega).$$

Спектральная функция случайного процесса является четной функцией частоты.

Двустороннее преобразование Фурье взаимной корреляционной функции $R_{xy}(\tau)$ определяет собой взаимную спектральную плотность $S_{xy}(\omega)$:

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} R_{xy}(\tau) d\tau. \quad (14.3)$$

Обратное преобразование Фурье определяет взаимную корреляционную функцию по спектральной плотности:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} S_{xy}(\omega) d\omega. \quad (14.4)$$

Заменяя в (14.3) τ на $-\tau$, ω на $-\omega$ и принимая во внимание свойства взаимной корреляционной функции, получаем

$$S_{xy}(\omega) = S_{yx}(-\omega).$$

Взаимная спектральная плотность при изменении частоты ω на $-\omega$ изменяет порядок своих индексов. Полагая в (14.2) $\tau = 0$ при $m_x = 0$, получаем

$$D_x = R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (14.5)$$

Отсюда видно, что дисперсия D_x пропорциональна площади соответствующей спектральной плотности $S_x(\omega)$. Найдем иное представление спектральной плотности. Введем финитную функцию

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{при } |t| \leq T, \\ 0 & \text{при } |t| > T. \end{cases}$$

Для такой финитной функции справедлива формула Парсеваля, которым мы широко пользовались в предыдущей, 13 главе. Обозначим через $X_T(j\omega)$ спектральную функцию $x_T(t)$, т. е.

$$X_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} x_T(t) dt = \int_{-T}^T e^{-j\omega t} x(t) dt.$$

Тогда согласно формуле Парсеваля получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt = \int_{-T}^T x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(j\omega)|^2 d\omega,$$

или, после деления на $2T$ и перехода к пределу при $T \rightarrow \infty$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2 d\omega. \quad (14.5')$$

Левая часть этого выражения при $m_x = 0$ равна дисперсии D_x . Поэтому

$$D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2 d\omega.$$

Сопоставляя (14.5') и (14.5), заключаем, что

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_T(j\omega) X_T(-j\omega). \quad (14.6)$$

Спектральная плотность представляет собой предел отношения спектральной энергии финитной функции к интервалу длительности при неограниченном возрастании последнего. Спектральная плотность, таким образом, определяет мощность случайного процесса.

Для взаимной спектральной плотности, аналогично (14.6), будем иметь

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_T(j\omega) Y_T(-j\omega). \quad (14.7)$$

Найдем корреляционные функции и спектральные плотности суммы двух случайных процессов. Пусть

$$z(t) = x(t) + y(t).$$

Корреляционная функция $R_z(\tau)$ равна

$$R_z(\tau) = \mathbf{M} \{(x(t) + y(t))(x(t + \tau) + y(t + \tau))\},$$

или

$$R_z(\tau) = \mathbf{M} \{x(t)x(t + \tau)\} + \mathbf{M} \{x(t)y(t + \tau)\} + \\ + \mathbf{M} \{x(t + \tau)y(t)\} + \mathbf{M} \{y(t)y(t + \tau)\}.$$

Первое и четвертое слагаемые представляют собой корреляционные функции $R_x(\tau)$ и $R_y(\tau)$, второе и третье представляют собой взаимно корреляционные функции $R_{xy}(\tau)$ и $R_{yx}(\tau)$. Таким образом,

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau) + R_y(\tau). \quad (14.8)$$

Так как спектральная плотность есть преобразование Фурье от корреляционной функции, то

$$S_z(\omega) = S_x(\omega) + S_{xy}(\omega) + S_{yx}(\omega) + S_y(\omega). \quad (14.9)$$

Если процессы y и z независимы, то их взаимные корреляционные функции равны нулю, соответствующие им спектральные плотности также равны нулю, т. е.

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = 0,$$

$$S_{xy}(\omega) = S_{yx}(\omega) = 0,$$

и, следовательно, из (14.8), (14.9) получаем

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) \quad (14.10)$$

и

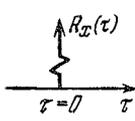
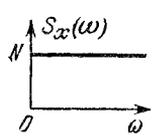
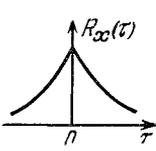
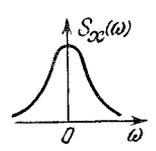
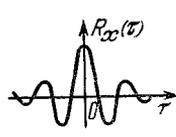
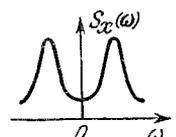
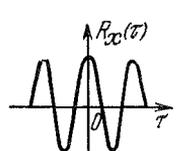
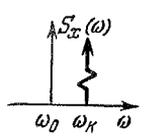
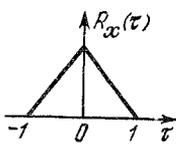
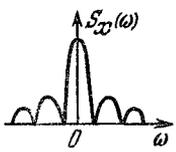
$$S_z(\omega) = S_x(\omega) + S_y(\omega). \quad (14.11)$$

Итак,

если процессы $x(t)$ и $y(t)$ независимы, то корреляционная функция их суммы равна сумме корреляционных функций составляющих, а спектральная плотность суммы составляющих также равна сумме спектральных плотностей отдельных составляющих.

Связь между корреляционными функциями $R_x(\tau)$ и спектральными плотностями $S_x(\omega)$, устанавливаемая двусторонним преобразованием Фурье, аналогична связи между временными и частотными характеристиками, устанавливаемой односторонним преобразованием Фурье. Примеры соответствия $R_x(\tau)$ и $S_x(\omega)$ приведены в табл. 14.1. Отметим среди этих соответствий корреляционную функцию и спектральную плотность так называемого «белого шума» — случайного внешнего воздействия, корреляция в котором при любом $\tau > 0$ отсутствует.

Таблица 14.1

№	Корреляционная функция $R_x(\tau)$	Спектральная плотность $S_x(\omega)$
1	$N\delta(\tau)$ 	$\frac{N}{2}$ 
2	$e^{-\beta \tau }$ 	$\frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2}$ 
3	$e^{-a \tau } \left(\cos \omega_1 \tau + \frac{a}{\omega_1} \sin \omega_1 \tau \right)$ 	$\frac{A^2}{(\omega - \omega_1)^2 + 4a^2 \omega^2}$ 
4	$\frac{A_0^2}{2} \cos \omega \tau$ 	$A_0^2 \delta(\omega - \omega_k)$ 
5	$\frac{1}{4} (1 - \tau),$ $ \tau < 1$ $0, \tau \geq 1$ 	$\left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\omega} \right)^2$ 

Для белого шума корреляционная функция представляет собой δ -функцию, а спектральная плотность постоянна.

Это значит, что белый шум обладает гармоническими составляющими всех частот от 0 до ∞ одинаковой интенсивности.

§ 14.3. Статистические характеристики автоматической системы

Рассмотрим линейную систему, обладающую частотной характеристикой $K(j\omega)$ и временной характеристикой $k(t)$. Обозначим через $R_x(\tau)$ и $S_x(\omega)$ корреляционную функцию и спектральную плотность входной величины. Определим статистические характеристики выходной величины системы. По определению взаимной спектральной плотности

$$S_{zx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} Z_T(j\omega) X_T(-j\omega),$$

или, после очевидного преобразования,

$$S_{zx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{Z_T(j\omega)}{X_T(j\omega)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2. \quad (14.12)$$

Если условиться, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{Z_T(j\omega)}{X_T(j\omega)} = K(j\omega),$$

то, принимая во внимание выражение $S_x(\omega)$ (14.6), получаем из (14.12)

$$S_{zx}(\omega) = K(j\omega) S_x(\omega). \quad (14.13)$$

Взаимная спектральная плотность входной и выходной величин линейной системы равна произведению спектральной плотности входной величины на частотную характеристику системы.

Рассмотрим еще спектральную плотность выходной величины, которую, аналогично (14.6), можно представить в виде

$$S_z(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |Z_T(j\omega)|^2, \quad (14.14)$$

или, после очевидного преобразования,

$$S_z(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{Z_T(-j\omega)}{X_T(-j\omega)} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_T(-j\omega) Z_T(j\omega). \quad (14.15)$$

Принимая во внимание (14.12) и (14.15), получаем

$$S_z(\omega) = K(-j\omega) S_{zx}(\omega). \quad (14.16)$$

Спектральная плотность выходной величины линейной системы равна произведению взаимной спектральной плотности на сопряженную частотную характеристику системы.

Исключая из (14.13) и (14.16) взаимную спектральную плотность $S_{zx}(\omega)$, получаем основное соотношение, связывающее спектральные плотности входной и выходной величин:

$$S_z(\omega) = |K(j\omega)|^2 S_x(\omega). \quad (14.17)$$

Спектральная плотность выходной величины линейной системы равна произведению спектральной плотности входной величины на квадрат модуля частотной характеристики линейной части системы.

Соотношения (14.13), (14.16) и особенно (14.17) играют важную роль при исследовании стохастических процессов в автоматических системах.

Если подать на вход линейной системы воздействие $x(t)$ вида «белого шума», спектральная плотность которого равна единице, т. е.

$$S_x(\omega) = 1,$$

то при этом из (14.13) получаем

$$S_{zx}(\omega) = K(j\omega). \quad (14.18)$$

Переходя от спектральных плотностей к корреляционным функциям, а от частотных характеристик — к временным, получим из (14.18)

$$R_{zx}(\tau) = k(\tau). \quad (14.19)$$

При подаче на вход линейной системы воздействия типа «белого шума» взаимная спектральная плотность равна частотной характеристике системы, а взаимная корреляционная функция равна временной характеристике.

Зная спектральную плотность выходной величины линейной системы, легко определить ее дисперсию по формуле

$$D_z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_z(\omega) d\omega$$

или, на основании соотношения (14.17),

$$D_z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega. \quad (14.20)$$

Эта формула лежит в основе исследований случайных процессов в автоматических системах.

§ 14.4. Среднеквадратическое отклонение

Рассмотрим следующую систему, схема которой изображена на рис. 14.1. Задающее воздействие представляет собой сумму полезного сигнала $s(t)$ и центрированной помехи $\xi(t)$, так что

$$x(t) = s(t) + \xi(t).$$

Будем предполагать, что $s(t)$ и $\xi(t)$ независимы, т. е.

$$\mathbf{M}\{s(t)\xi(t)\} = 0. \quad (14.21)$$

В общем случае назначение следящей системы состоит в воспроизведении или надлежащем преобразовании полезного сигнала

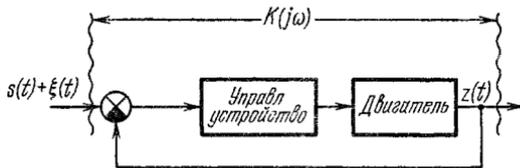


Рис. 14.1.

$s(t)$. Это значит, что желаемая величина $z_0(t)$ на выходе следящей системы может представлять собой результат воздействия некоторого оператора Λ на полезный сигнал:

$$z_0(t) = \Lambda [s(t)].$$

Обозначим отклонение действительной выходной величины от желаемой через

$$\varepsilon(t) = z_0(t) - z(t). \quad (14.22)$$

Структурная схема образования отклонения (14.22) изображена на рис. 14.2. Она состоит из реальной системы, на вход которой поступает сумма полезного сигнала и помехи, и идеальной системы, на вход которой поступает только полезный сигнал. Обозначим через $K(j\omega)$ частотную характеристику реальной системы, а через $K_0(j\omega)$ — частотную характеристику идеальной системы. Эта последняя частотная характеристика однозначно связана с оператором Λ (см. табл. 14.2). Структурная схема на рис. 14.2 легко преобразуется к эквивалентным схемам, изображенным на рис. 14.3 и 14.4. В схеме на рис. 14.4 полезный сигнал и помеха приложены к различным входам. Качество работы следящей системы можно оценить среднеквадратическим отклонением

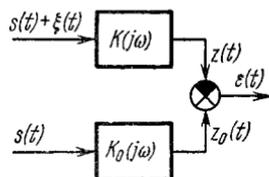


Рис. 14.2.

$$I = R_\varepsilon(0) = \mathbf{M}\{\varepsilon^2(t)\}. \quad (14.23)$$

Таблица 14.2

$z_0(t) = \Lambda [s(t)]$	$K_0(j\omega)$	Название
$s(t)$ $s'(t)$ $s''(t)$	1 $j\omega$ $(j\omega)^2$	воспроизведение дифференцирование двойное дифференцирование
$\int_0^t s(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega}$	интегрирование
$s(t + t_0)$	$e^{j\omega t_0}$	упреждение

Чем меньше эта величина, тем выше качество системы. Аналогично (14.5)

$$I = R_\varepsilon(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\varepsilon(\omega) d\omega. \quad (14.24)$$

Для того чтобы воспользоваться соотношением (14.24), необходимо прежде всего определить спектральную плотность отклонения $\varepsilon(t)$. Предположим, что спектральные плотности полезного

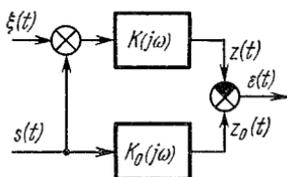


Рис. 14.3.

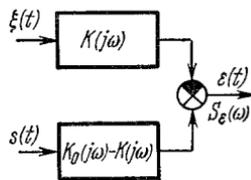


Рис. 14.4.

сигнала и помехи равны соответственно $S_s(\omega)$ и $S_\xi(\omega)$; тогда по формуле (14.17) находим составляющие спектральной плотности отклонения

$$|K_0(j\omega) - K(j\omega)|^2 S_s(\omega) \quad \text{и} \quad |K(j\omega)|^2 S_\xi(\omega),$$

соответствующие полезному сигналу и помехе. Так как спектральная плотность алгебраической суммы независимых процессов равна сумме спектральных плотностей составляющих, то

$$S_\varepsilon(\omega) = |K_0(j\omega) - K(j\omega)|^2 S_s(\omega) + |K(j\omega)|^2 S_\xi(\omega).$$

Подставляя значение $S_\varepsilon(\omega)$ в (14.24), находим выражение среднеквадратического отклонения:

$$I = M \{ \varepsilon^2(t) \} = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (|K_0(j\omega) - K(j\omega)|^2 S_s(\omega) + |K(j\omega)|^2 S_\xi(\omega)) d\omega. \quad (14.25)$$

При известных частотных характеристиках и спектральных плотностях выражение для I можно привести к виду

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{N_\varepsilon(j\omega)}{M_\varepsilon(j\omega)} \right|^2 d\omega, \quad (14.26)$$

где $N_\varepsilon(j\omega)$ и $M_\varepsilon(j\omega)$ — полиномы по $j\omega$. Для вычисления можно применить формулы предыдущей главы и табл. 13.1. Поскольку I является функцией параметров системы, то можно поставить вопрос об определении оптимальных параметров. Оптимальные параметры $c = c^*$ могут быть найдены, как отмечалось ранее, из условия

$$\nabla I(c) = 0.$$

Отметим, что в вычислительных процедурах нет принципиального различия между детерминированной задачей минимизации интегрального квадратического отклонения и статистической задачей минимизации среднеквадратического отклонения.

Пример. Рассмотрим следящую систему, структура которой изображена на рис. 14.5. Предположим, что входной сигнал представляет собой ряд

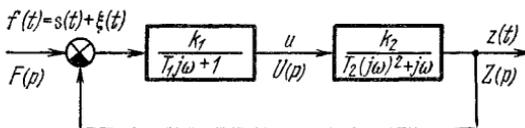


Рис. 14.5.

скачкообразных поворотов на случайные углы в случайные моменты времени:

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \mathbf{1}(t - t_k),$$

где $\mathbf{1}(t)$ — единичная скачкообразная функция времени:

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{для } t \geq 0, \\ 0 & \text{для } t < 0. \end{cases}$$

Интервалы $t_k - t_{k-1}$ являются независимыми случайными переменными, имеющими одну и ту же функцию распределения вероятности, а все d_k также представляют собой независимые случайные переменные, обладающие одной и

той же функцией распределения вероятности. Пусть значение спектральной плотности производной входного сигнала равно

$$S_{s'}(\omega) = A$$

Предположим, далее, что в устройстве, измеряющем ошибку, содержится источник помех, так что выходной сигнал сравнивающего устройства равен $s(t) - z(t) + \xi(t)$, где $\xi(t)$ представляет собой чисто случайный стационарный процесс (белый шум), обладающий спектральной плотностью

$$S_{\xi}(\omega) = B.$$

Наконец, предположим, что помехи и производная от сигнала независимы, т. е.

$$S_{s'\xi}(\omega) = 0.$$

Ограничимся применением стабилизирующего устройства с неизменной постоянной времени T_1 и будем изменять его коэффициент усиления k_1 . В этом случае выходное напряжение стабилизирующего устройства определится уравнением

$$T_1 \frac{du}{dt} + u = k_1 (\varepsilon(t) + \xi(t)).$$

Уравнение движения двигателя имеет вид

$$J \frac{d^2z}{dt^2} + k_2 \frac{dz}{dt} = k_3 u,$$

где J представляет собой сумму моментов инерции двигателя и нагрузки, k_2 — коэффициент противоэлектродвижущей силы или жидкостного трения, k_3 — удельный выходной момент, u — входное напряжение. Если теперь положить $T_2 = J/k_2$ и исключить из этих уравнений переменную u , то получим

$$T_1 T_2 \frac{d^3 s(t)}{dt^3} + (T_1 + T_2) \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{ds(t)}{dt} - \frac{k_1 k_3}{k_2} \xi(t) = 0.$$

Единственным изменяемым параметром является коэффициент k_1 . Следует заметить, что в левую часть этого дифференциального уравнения входят помехи и только производные входного сигнала. Следовательно, спектральная плотность производных входного сигнала занимает в нашем анализе место обычной входной спектральной плотности. В связи с этим можно записать

$$S_{\varepsilon}(\omega) = |1 - K(j\omega)|^2 S_{s'}(\omega) + |K(j\omega)|^2 S_{\xi}(\omega),$$

где

$$K(j\omega) = - \frac{\frac{k_1 k_2}{k_3}}{T_1 T_2 (j\omega)^3 + (T_1 + T_2) (j\omega)^2 + j\omega + \frac{k_1 k_3}{k_2}}.$$

Формула для $K(j\omega)$ может быть приведена к более удобному виду с помощью замены переменных:

$$T = T_1 + T_2, \quad \tilde{\omega} = \omega T, \\ \alpha = T \frac{k_1 k_3}{k_2} = (T_1 + T_2) \frac{k_1 k_3}{k_2}, \quad \beta = \frac{T_1 T_2}{T^2} = \frac{T_1 T_2}{(T_1 + T_2)^2}.$$

Величина β неизменна и меньше или равна $1/4$ для всех положительных значений T_1 и T_2 ; α представляет собой усиление, величину которого можно менять. При этом среднее значение квадрата ошибки равно

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta \bar{\omega}^4 + (1 - 2\beta) \bar{\omega}^2 + 1}{|\beta (j\bar{\omega})^3 + (j\bar{\omega})^2 + j\bar{\omega} + \alpha|^2} 2AT d\bar{\omega} + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{|\beta (j\bar{\omega})^3 + (j\bar{\omega})^2 + j\bar{\omega} + \alpha|^2} \frac{B}{T} d\bar{\omega}.$$

Вычисляя среднее значение квадрата ошибки, окончательно получаем

$$I = AT \frac{1 + \alpha(1 - \beta) + \kappa\alpha^2}{2\alpha(1 - \alpha\beta)},$$

где

$$\kappa = \frac{B}{2AT}.$$

Для того чтобы найти минимум I , продифференцируем I по коэффициенту усиления α и приравняем производную нулю. Полученное уравнение будет уравнением второй степени относительно α . Только один из его корней, а именно

$$\alpha_0 = \frac{1}{\beta + \sqrt{\beta + \kappa}},$$

соответствует области устойчивости. Подставив α_0 в выражение для I , найдем минимальное значение I_{\min} :

$$I_{\min} = \frac{AT}{2} (\beta + 2\sqrt{\beta + \kappa + 1}).$$

§ 14.5. Оптимальные системы

Задача синтеза оптимальных систем при случайных воздействиях состоит в определении их характеристик, при которых среднеквадратическое отклонение I достигает минимума. Для решения этой задачи преобразуем выражение (14.25) к такой форме:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_0(j\omega)|^2 \left\{ \left| 1 - \frac{K(j\omega)}{K_0(j\omega)} \right|^2 S_s(\omega) + \left| \frac{K(j\omega)}{K_0(j\omega)} \right|^2 S_\xi(\omega) \right\} d\omega. \quad (14.27)$$

Легко видеть сходство выражения для среднеквадратического отклонения I (14.27) с выражением для интегральной ошибки детерминированной системы I . Поэтому для решения задачи синтеза мы можем воспользоваться уже известными результатами,

изложенными в гл. 13. Из сопоставления (13.27) и (14.27) заключаем, что

$$\begin{aligned} K(j\omega) & \text{ соответствует } K(j\omega)/K_0(j\omega), \\ S_{sf}(\omega) & \text{ соответствует } S_s(\omega), \\ S_{зи}(\omega) & \text{ соответствует } S_{\xi}(\omega). \end{aligned}$$

Множитель $|K_0(j\omega)|^2$ в (14.27) не оказывает влияния на условие оптимальности. Подставляя соответствующие значения в формулу (13.27) оптимальной частотной характеристики

$$K_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{S_{sf}(\omega)}{S_{sf}(\omega) + S_{зи}(\omega)},$$

получим

$$\frac{K_{\text{опт}}(j\omega)}{K_0(j\omega)} = \frac{S_s(\omega)}{S_s(\omega) + S_{\xi}(\omega)}.$$

Из последнего выражения получим формулу для оптимальной частотной передаточной функции, минимизирующей I :

$$K_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{K_0(j\omega) S_s(\omega)}{S_s(\omega) + S_{\xi}(\omega)}. \quad (14.28)$$

При этом, как легко установить,

$$I_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_0(j\omega)|^2 \frac{S_s(\omega) S_{\xi}(\omega)}{S_s(\omega) + S_{\xi}(\omega)} d\omega. \quad (14.29)$$

Частотная характеристика $K_{\text{опт}}(j\omega)$, определяемая выражением (14.28), физически нереализуема. Это следует из того, что если найти временную характеристику $k_{\text{опт}}(\tau)$, соответствующую $K_{\text{опт}}(j\omega)$, то при $t < 0$ эта импульсная характеристика будет отлична от нуля (см. приложение 1), т. е.

$$k(t) \neq 0 \quad \text{при } t < 0.$$

Это означает, что следствие (реакция на возмущение) предшествует причине (возмущению вида дельта-функции, примененному в момент времени $t = 0$). Для получения реализуемой оптимальной частотной характеристики можно использовать операцию факторизации и расщепления, аналогично тому как это делалось в § 13.4. Представим сумму спектральных плотностей в виде произведения двух сомножителей, один из которых имеет нули и полюсы в верхней полуплоскости ω , а другой — в нижней:

$$S(\omega) = S_s(\omega) + S_{\xi}(\omega) = |\Psi(j\omega)|^2 = \Psi(j\omega) \Psi(-j\omega).$$

Тогда физически реализуемая оптимальная частотная характеристика будет иметь вид

$$K_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{1}{\Psi(j\omega)} \left\{ \frac{K_0(j\omega) S_s(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right\}^+, \quad (14.30)$$

где выражение, полученное в результате расщепления,

$$\left\{ \frac{K_0(j\omega) S_s(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right\}^+$$

имеет нули и полюсы в верхней полуплоскости ω .

Пример. Пусть спектральная плотность сигнала равна

$$S_s(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2},$$

а спектральная плотность помехи

$$S_{\xi}(\omega) = 1$$

и задача состоит в построении системы, осуществляющей фильтрацию и дифференцирование. В этом случае

$$K_0(j\omega) = j\omega$$

Для отыскания $K_{\text{опт}}(j\omega)$ воспользуемся формулой (14.30). Произведем операцию факторизации:

$$S_s(\omega) + S_{\xi}(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2} + 1 = \frac{2 + \omega^2}{1 + \omega^2} = \Psi(j\omega) \Psi(-j\omega),$$

$$\Psi(\pm j\omega) = \frac{\sqrt{2} \pm j\omega}{1 \pm j\omega}.$$

Затем произведем операцию расщепления:

$$\frac{K_0(j\omega) S_s(\omega)}{\Psi(-j\omega)} = \frac{j\omega \frac{1}{1 + \omega^2}}{\frac{\sqrt{2} - j\omega}{1 - j\omega}} = \frac{j\omega}{(1 + j\omega)(\sqrt{2} - j\omega)},$$

или

$$\frac{K_0(j\omega) S_s(\omega)}{\Psi(-j\omega)} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \frac{j\omega}{1 + j\omega} + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \frac{j\omega}{\sqrt{2} - j\omega}.$$

Таким образом,

$$\left\{ \frac{K_0(j\omega) S_s(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right\}^+ = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \frac{j\omega}{1 + j\omega}.$$

Подставляя это выражение, а также значение $\Psi(j\omega)$ в формулу (14.30), получаем

$$K_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{j\omega}{\sqrt{2} + 1} \frac{1}{\sqrt{2} + j\omega}.$$

Эта частотная характеристика соответствует реальному дифференцирующему устройству с коэффициентом усиления $k = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}$ и с постоянной времени

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

§ 14.6. Оптимальная стохастическая система при учете ограничений

Обычно при проектировании систем характеристики управляемого объекта являются заданными и изменить их невозможно. Если мы не будем учитывать ограничений, связанных с неминимально-фазовостью объек-

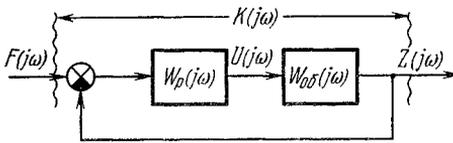


Рис. 14.6.

та, с запаздыванием в объекте, то определение оптимальной передаточной функции системы по формуле (14.30) приведет, вообще говоря, к нереализуемой передаточной функции. Действительно, из структурной схемы (рис. 14.6) следует, что

$$\frac{Z(j\omega)}{F(j\omega)} = K(j\omega), \quad \frac{Z(j\omega)}{W_{\phi}(j\omega)} = U(j\omega), \quad \frac{U(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{K(j\omega)}{W_{\phi}(j\omega)}.$$

Предположим, что частотная характеристика объекта имеет вид

$$W_{\phi}(j\omega) = W_1(j\omega) e^{-j\omega\tau}.$$

Пусть объект устойчив, но неминимально-фазовый, т. е. $W_1(j\omega)$ имеет нижние нули ω ($p = j\omega$ — правые). В этом случае

$$\frac{U(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{K(j\omega)}{W_1(j\omega) e^{-j\omega\tau}} = \frac{K(j\omega)}{W_1(j\omega)} e^{j\omega\tau}.$$

Из этого выражения следует, что найденная частотная характеристика $U(j\omega)/F(j\omega)$ содержит нижние нули ω , что соответствует неустойчивой системе, и, кроме того, содержит упрещающие звенья, что соответствует нереализуемой системе.

Для того чтобы обойти эти трудности и получить устойчивую и оптимальную реализуемую систему, поступим следующим образом. Включим в искомую частотную характеристику $K(j\omega)$ множитель $W_1(j\omega) e^{-j\omega\tau}$, так что

$$K(j\omega) = W_1(j\omega) e^{-j\omega\tau} L(j\omega).$$

Таким образом, $K(j\omega)$ содержит нижние нули ω и запаздывание τ . Теперь уже искомой функцией является $L(j\omega)$. При таком выборе передаточной функции замкнутой системы получаем

$$\frac{U(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{W_1(j\omega) e^{-j\omega\tau} L(j\omega)}{W_1(j\omega)} e^{j\omega\tau} = L(j\omega).$$

Таким образом, частотная характеристика системы $K(j\omega)$ должна содержать в качестве множителя частотную характеристику

неизменной части. Найдем теперь $K_{\text{опт}}(j\omega)$ или $L_{\text{опт}}(j\omega)$ при учете ограничений, вызванных неизменной частью системы. Для этой цели преобразуем блок-схему на рис. 14.6 к более удобному виду так, чтобы в верхней ветви остался один элемент с передаточной функцией $L(j\omega)$ (рис. 14.7). Из блок-схемы на рис. 14.7 следует, что в точке A спектральная функция сигнала равна

$$[S_s(\omega) + S_\xi(\omega)] |W_{\text{об}}(j\omega)|^2$$

и, кроме того,

$$S_s^1(\omega) = |W_{\text{об}}(j\omega)|^2 S_s(\omega),$$

$$S_\xi^1(\omega) = |W_{\text{об}}(j\omega)|^2 S_\xi(\omega).$$

Рассматривая правую часть блок-схемы на рис. 14.7, нетрудно

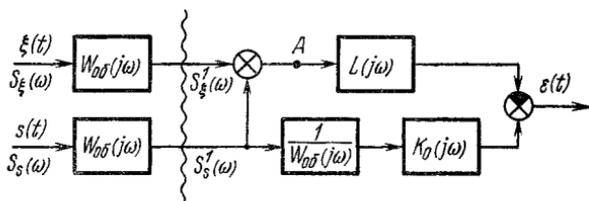


Рис. 14.7.

видеть, что для определения $L_{\text{опт}}(j\omega)$ можно воспользоваться известным соотношением (14.30), если произвести в нем замену

$$K(j\omega) \text{ на } L(j\omega),$$

$$K_0(j\omega) \text{ на } K_0(j\omega)/W_{\text{об}}(j\omega),$$

$$S_s(\omega) \text{ на } S_s^1(\omega),$$

$$S_\xi(\omega) \text{ на } S_\xi^1(\omega).$$

Тогда получим

$$L_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{1}{[S^1(\omega)]_+} \left\{ \frac{K_0(j\omega) S_s^1(\omega)}{W_{\text{об}}(j\omega) [S^1(\omega)]_-} \right\}^+ \quad (14.31)$$

Здесь

$$S_s^1(\omega) + S_\xi^1(\omega) = |W_{\text{об}}(j\omega)|^2 (S_s(\omega) + S_\xi(\omega)) = [S^1(j\omega)]_+ \cdot [S^1(j\omega)]_-.$$

Представляя $[S^1(j\omega)]_+$ в виде

$$[S^1(j\omega)]_+ = \Psi_W(j\omega) \Psi(j\omega),$$

где $\Psi_W(j\omega)$ не содержит верхних нулей и полюсов, и учитывая (14.13), будем иметь

$$L_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{1}{\Psi_W(j\omega) \Psi(j\omega)} \left\{ \frac{K_0(j\omega) W_{\text{об}}(-j\omega) S_s(\omega)}{\Psi_W(-j\omega) \Psi(-j\omega)} \right\}^+ \quad (14.32)$$

и, следовательно, получаем

$$K_{\text{опт}}(j\omega) = W_{\text{об}}(j\omega) L_{\text{опт}}(j\omega). \quad (14.33)$$

Если объект устойчив и минимально-фазовый, то

$$\Psi_W(j\omega) = W_{\text{об}}(j\omega);$$

и тогда

$$K_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{1}{\Psi(j\omega)} \left\{ \frac{K_0(j\omega) S_s(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right\}^+,$$

что совпадает с формулой (14.30).

В заключение отметим, что минимальные значения I , которые достигаются, когда оптимальная частотная характеристика $K_{\text{опт}}(j\omega)$ нереализуема, I_I , когда $K_{\text{опт}}(j\omega)$ реализуема I_{II} , и, наконец, I_{III} , когда $K_{\text{опт}}(j\omega)$ реализуема при учете ограничений, удовлетворяют неравенствам

$$I_I \leq I_{II} \leq I_{III}.$$

После определения $K_{\text{опт}}(j\omega)$ для замкнутой системы (рис. 14.7) нетрудно определить частотную характеристику управляющего устройства $W_y(j\omega)$ из очевидного соотношения

$$K(j\omega) = \frac{W_y(j\omega) W_{\text{об}}(j\omega)}{1 + W_y(j\omega) W_{\text{об}}(j\omega)}.$$

Разрешая это соотношение относительно $W_y(j\omega)$, получим

$$W_{y, \text{опт}}(j\omega) = \frac{1}{W_{\text{об}}(j\omega)} \frac{K_{\text{опт}}(j\omega)}{1 - K_{\text{опт}}(j\omega)}.$$

По найденной таким образом частотной характеристике оптимального управляющего устройства можно определить его структуру и параметры.

Задачи

14.1. Пусть

$$S_f(\omega) = S_{fz}(\omega) = b^2 \frac{2\omega_1}{\omega^2 + 2\omega_1^2},$$

и частотная характеристика неизменной части системы (рис. 14.8) равна

$$W(j\omega) = \frac{1 - \frac{\pi}{2} j\omega}{1 + \frac{\pi}{2} j\omega}.$$

Показать, что оптимальная частотная характеристика управляющего устройства

равна

$$L_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{1 - T_1\omega_1}{1 + T_1\omega_1} = k,$$

оптимальная частотная характеристика корректирующего устройства равна

$$W_k(j\omega) = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{T_1\omega_1} - 1\right) \frac{\pi}{2} j\omega + 1}{1 + \frac{1}{2\nu} j\omega}.$$

При этом

$$I_{\text{min}} = R_2(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_e(\omega) d\omega = 4b^2 \frac{T_1\omega_1}{(T_1\omega_1 + 1)^2},$$

т. е. минимальное значение среднеквадратической ошибки тем меньше, чем меньше b^2 , T_1 и ω_1 .

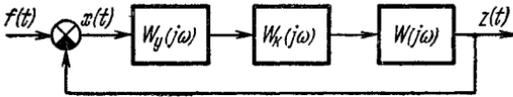


Рис. 14.8.

14.2. При тех же условиях, что и в предыдущей задаче, при частотной характеристике неизменной части системы, равной

$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau},$$

показать, что оптимальные частотные характеристики $L_{\text{опт}}(j\omega)$ и $W_k(j\omega)$ равны соответственно

$$L_{\text{опт}}(j\omega) = k, \quad W_k(j\omega) = \frac{1}{e^{2\tau\nu} - e^{-j\omega\tau}}$$

и минимальное значение среднеквадратичной ошибки равно

$$I_{\text{min}} = b^2 (1 - e^{-4\tau\omega_1}).$$

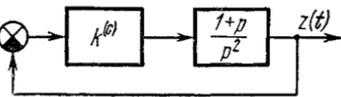


Рис. 14.9.

14.3. Показать, что для системы, изображенной на рис. 14.9, при спектральной плотности входного воздействия $S_f(\omega) = \frac{2a\sigma_f^2}{a^2 + \omega^2}$ дисперсия ошибки и выходной величины равны соответственно

$$\sigma_z^2 = \frac{a\sigma_f^2}{k^{(c)} + \frac{a^2}{1+a^2}} \quad \text{и} \quad \sigma_{\#}^2 = \frac{\sigma_f^2}{k^{(c)}} \frac{k^{(c)} + \frac{a}{1-a}}{k^{(c)} + \frac{a^2}{1+a^2}}.$$

Б. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Глава 15

УРАВНЕНИЯ И ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

§ 15.1. Понятие о нелинейных системах

Линейные автоматические системы, свойства и особенности которых излагались в предыдущих главах, являются, как правило, идеализированными моделями реальных автоматических систем. Поэтому теория линейных систем часто представляет собой лишь первый этап исследования реальных автоматических систем. При рассмотрении реальных систем мы неизбежно сталкиваемся с необходимостью учета всякого рода *нелинейностей*, как присущих системе вследствие ограниченных энергетических ресурсов, погрешностей в изготовлении отдельных элементов, так и преднамеренно вводимых с целью улучшения динамических свойств системы в целом. Все эти нелинейности можно подразделить на несущественные, которыми при определенных условиях можно пренебречь, и существенные, пренебрежение которыми невозможно без искажений качественных явлений и свойств.

Важная особенность нелинейностей состоит в том, что для элементов, содержащих нелинейности, принцип суперпозиции, которым мы так широко ранее пользовались, несправедлив. Это обстоятельство ограничивает возможности применения основного математического аппарата теории линейных систем — преобразований Лапласа и Фурье.

Нелинейные системы значительно разнообразнее и сложнее, чем линейные, и, естественно, они содержат в себе линейные системы как частный, довольно узкий подкласс. Образно выражаясь, линейные системы — это небольшой островок в безбрежном океане нелинейных систем. При изучении нелинейных автоматических систем мы сталкиваемся с новыми явлениями, которые не наблюдались в линейных системах. Выяснение этих явлений, использование их для улучшения свойств нелинейных систем, установление характерных особенностей нелинейных систем и составляет предмет теории нелинейных систем.

Излагаемая в этом разделе теория нелинейных систем существенно использует основные понятия и методы теории линейных систем и линеаризацию нелинейных элементов.

§ 15.2. Блок-схема и граф нелинейной системы

Рассмотрим нелинейную систему автоматического регулирования, содержащую один нелинейный элемент. Блок-схема такой

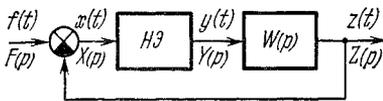


Рис 15.1

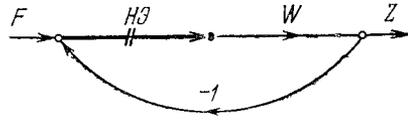
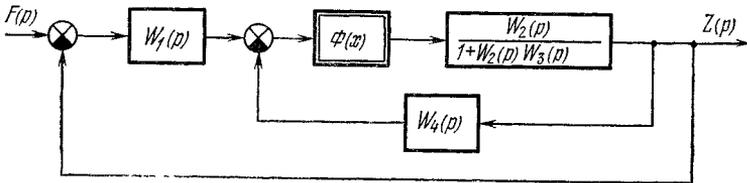
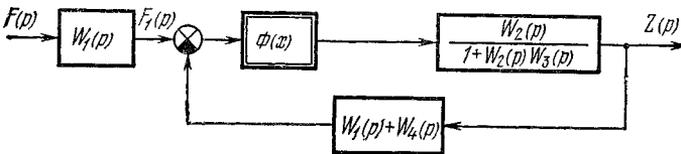


Рис 15.2.

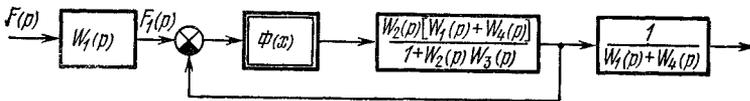
системы изображена на рис. 15.1. Ее можно представить в виде соединения нелинейного элемента НЭ и линейной части ЛЧ.



а)



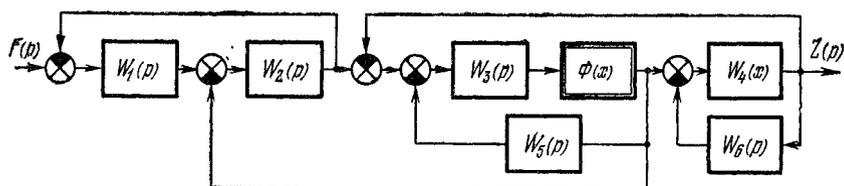
б)



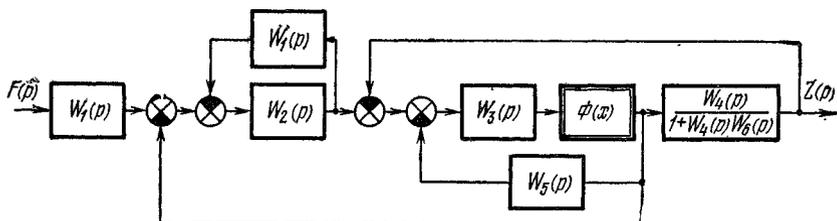
в)

Рис. 15.3.

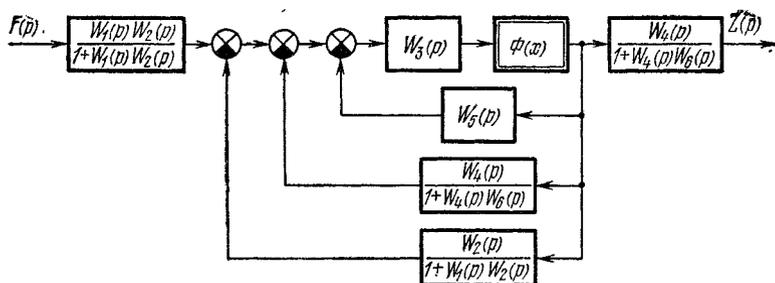
Внешние воздействия приведены ко входу нелинейного элемента. Граф, соответствующий этой блок-схеме, приведен на рис. 15.2. Утолщенная ветвь на графе соответствует нелинейному элементу. К подобной простейшей блок-схеме могут быть приведены



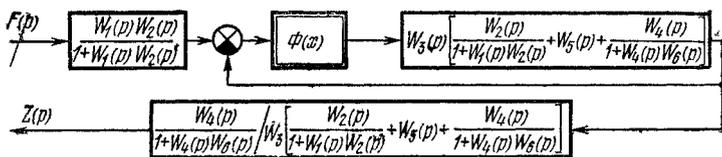
а)



б)



в)



г)

Рис. 15.4.

блок-схемы любых замкнутых систем, содержащих один нелинейный элемент. Действительно, рассмотрим нелинейную систему автоматического регулирования, блок-схема которой представлена на рис. 15.3, *а*. После преобразования блок-схемы на основе правил алгебры передаточных функций (гл. 5) получим простейшие блок-схемы на рис. 15.3, *б*, *в*.

Более сложная блок-схема неодаконтурной системы, изображенная на рис. 15.4, *а*, приводится к простейшей (рис. 15.4, *г*) путем переноса первого узла вправо и преобразования выходного соединения с обратной связью к одному элементу (рис. 15.4, *б*), выноса элементов внутренних обратных связей за пределы замкнутого контура (рис. 15.4, *в*), объединения параллельно соединенных элементов в цепях внутренней и основной обратных связей и выноса элемента общей обратной связи за пределы контура (рис. 15.4, *г*). На входе и выходе этой преобразованной блок-схемы присутствуют две дополнительные линейные части. Однако эти линейные части не влияют на устойчивость основного контура, включающего нелинейный элемент, т. е. на устойчивость простейшей блок-схемы. Результаты исследования простейшей блок-схемы легко использовать для исследования процессов в дополнительных линейных частях, а значит, и в исходной блок-схеме. Отметим, что первая дополнительная часть изменяет лишь внешнее воздействие простейшей блок-схемы, тогда как вторая дополнительная линейная часть изменяет ее выходную величину.

Таким образом,

любую автоматическую систему, содержащую один нелинейный элемент, можно привести к простейшей блок-схеме. Эта блок-схема состоит из нелинейного элемента и линейной части, включающей в себя линейные элементы исходной системы.

§ 15.3. Типовые нелинейные элементы и их характеристики

Нелинейные элементы в автоматических системах могут быть подразделены на две группы: 1) неизбежно присутствующие в системах, или естественные, 2) преднамеренно вводимые в систему для придания ей нужных свойств, или искусственные.

К первой группе относятся нелинейные элементы, обладающие насыщением, зоной нечувствительности, гистерезисом. Характеристика типа насыщения изображена на рис. 15.5. Такой характеристикой обладают разнообразные усилители. При малых значениях входных сигналов x выходная величина y пропорциональна x . При больших значениях входных сигналов x из-за ограничений мощности источников энергии, питающих усилители, эта пропорциональность нарушается. Характеристика типа зоны

нечувствительности изображена на рис. 15.6. Она также присуща многим усилителям, не реагирующим на слишком малые значения входных сигналов. Наглядной механической моделью зоны нечувствительности может служить механическое сочленение, состоящее из входной оси с пальцем и выходной оси с вилкой, удерживаемой в вертикальном положении пружиной

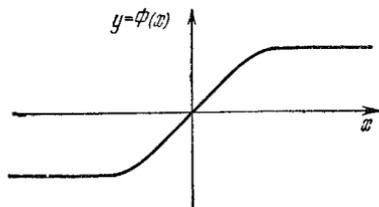


Рис. 15.5.

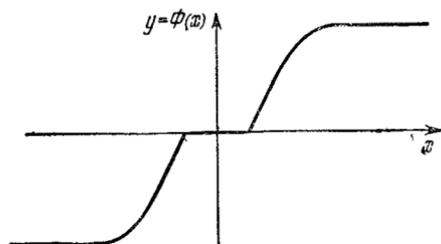


Рис. 15.6.

(рис. 15.7). При повороте входной оси на угол φ выходная ось остается неподвижной до тех пор, пока палец не придет в соприкосновение с вилкой. При дальнейшем увеличении угла выходная ось будет поворачиваться одновременно с входной осью. При повороте входной оси в обратную сторону из-за наличия

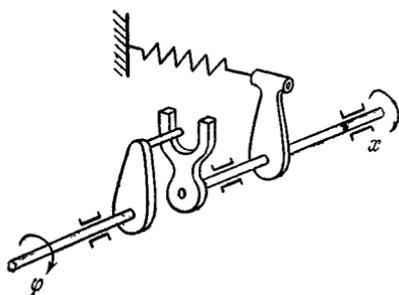


Рис. 15.7.

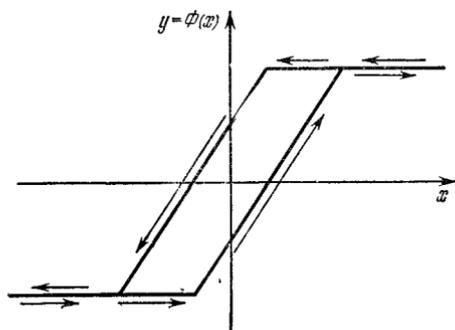


Рис. 15.8.

пружины выходная ось будет следить за движением входной оси до тех пор, пока вилка не займет вертикальное положение. Характеристика типа гистерезиса приведена на рис. 15.8. Механическая модель гистерезиса (рис. 15.9) отличается от модели зоны нечувствительности отсутствием пружины и тем, что теперь выходная ось вращается с трением. Движение до зацепления пальца и вилки аналогично описанному выше. При повороте же входной оси в обратную сторону выходная ось теперь из-за

наличия трения будет неподвижна до тех пор, пока палец не придет снова в соприкосновение с вилкой. При наличии всех этих нелинейностей получается более сложная характеристика, например, изображенная на рис. 15.10.

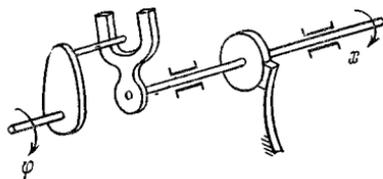


Рис. 15.9.

Характеристики на рис. 15.5, 15.6 однозначны. В этом случае выходная величина нелинейного элемента зависит только от значений входного сигнала x и уравнение нелинейного элемента может быть представлено в виде

$$y = \Phi(x). \quad (15.1)$$

Характеристики на рис. 15.8, 15.9 неоднозначны. В этом случае выходная величина нелинейного элемента зависит не только от

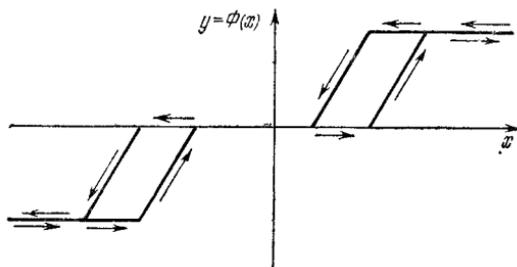


Рис. 15.10.

значений входного сигнала $x(t)$ в данный момент времени t , но и от предшествующего этому моменту времени характера его изменения. Поэтому, строго говоря, уравнение нелинейного элемента с неоднозначной характеристикой представляет собой не

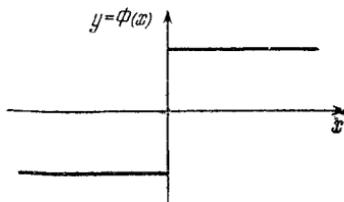


Рис. 15.11.

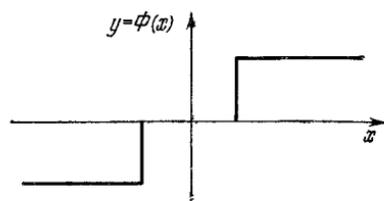


Рис. 15.12.

функцию, а функционал, т.е. функцию от функции, который устанавливает соответствие между значениями выходной величины $y(t)$ в момент времени t и входного сигнала $x(t)$, определенным в интервале от 0 до t . Уравнение нелинейного элемента

с неоднозначной характеристикой, строго говоря, нужно записывать в виде

$$y(t) = \Phi(x(t) | t_0) \quad (15.2)$$

или

$$y(t) = \Phi_t(x(t)). \quad (15.3)$$

Ко второй группе нелинейностей относится различного рода релейные характеристики, а также дополнительные нелинейности, включаемые в системы для той или иной цели. К ним относятся характеристики релейного типа: идеальная характеристика

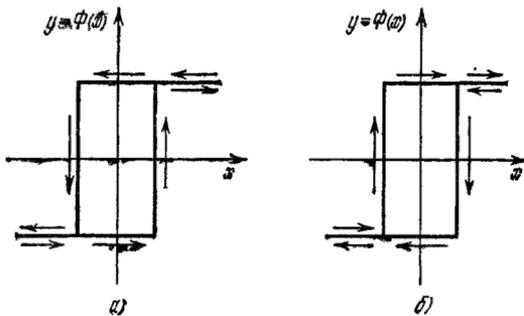


Рис. 15.13.

реле (рис. 15.11), характеристика реле с зоной нечувствительности (рис. 15.12), с гистерезисом *положительным* или *отрицательным* (рис. 15.13, а, б), характеристика реле с зоной нечувствительности и с гистерезисом (рис. 15.14). Часто в качестве

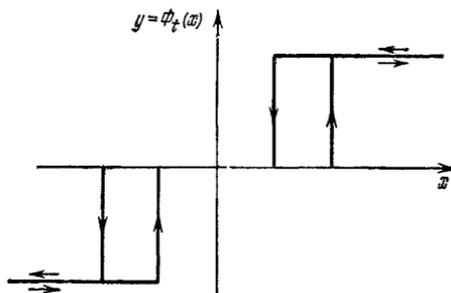


Рис. 15.14.

нелинейных внутренних связей используются нелинейные элементы с параболическими характеристиками, подобные изображенным на рис. 15.15, 15.16.

Характеристики нелинейных элементов обычно задаются в графической форме. Аппроксимация их теми или иными аналитическими формулами приводит к соответствующим

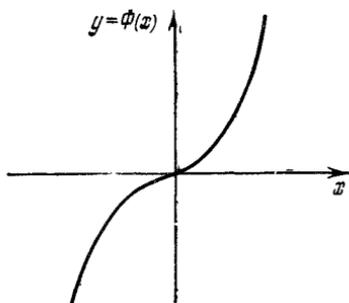


Рис. 15.15.

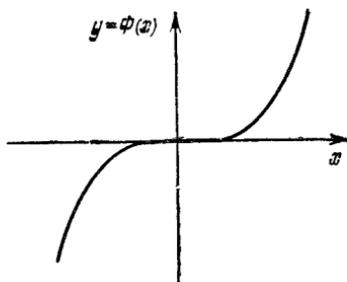


Рис. 15.16.

аналитическим, формульным выражениям. Часто используется кусочно-линейная или полиномиальная аппроксимация.

§ 15.4. Линеаризация нелинейных элементов

Под линеаризацией нелинейного элемента подразумевается замена его нелинейной характеристики линеаризованной. При этом нелинейный элемент

$$y = \Phi(x) \quad (15.4)$$

описывается линеаризованным уравнением

$$\hat{y} = k^{(\cdot)}(\cdot)x, \quad (15.5)$$

где $k^{(\cdot)}(\cdot)$ — коэффициент линеаризации. Аргумент коэффициента линеаризации зависит от вида линеаризации. Будем различать четыре вида линеаризации: статическую, дифференциальную, гармоническую и стохастическую. Все эти виды линеаризации мы будем широко использовать при изучении различных режимов работы нелинейных систем.

Коэффициент статической линеаризации $k^{(c)}(x)$ определяется отношением выходной величины нелинейного элемента $y = \Phi(x)$ к входной величине, т. е.

$$k^{(c)}(x) = \frac{y}{x} = \frac{\Phi(x)}{x}. \quad (15.6)$$

Уравнение статически линеаризованного элемента

$$\hat{y} = k^{(c)}(x)x = \left[\frac{\Phi(x)}{x} \right] x \quad (15.7)$$

представляет собой лишь иную форму записи уравнения нелинейного элемента. Если же фиксировать в (15.6) значение $k^{(e)} = \text{const}$, то уравнение статически линеаризованного элемента можно рассматривать как линейную аппроксимацию (15.4).

Коэффициент дифференциальной линеаризации $k^{(n)}(x)$ определяется производной выходной величины нелинейного элемента $y = \Phi(x)$ по входной величине:

$$k^{(n)}(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d\Phi(x)}{dx}. \quad (15.8)$$

Уравнение дифференциально линеаризованного элемента

$$\hat{y} = k^{(n)}(x)x = \left[\frac{d\Phi(x)}{d(x)} \right] x \quad (15.9)$$

отличается от уравнения нелинейного элемента (15.4) как при нефиксированном, так и при фиксированном значении x в $k^{(n)}(x)$. Уравнение (15.9) можно рассматривать как линейную аппроксимацию (15.4) при малых изменениях входной величины относительно некоторого значения аргумента.

Предположим теперь, что $x(t)$ изменяется по гармоническому закону:

$$x(t) = A \sin \omega t. \quad (15.10)$$

Тогда

$$y(t) = \Phi(A \sin \omega t) \quad (15.11)$$

будет периодической функцией времени.

Коэффициенты гармонической линеаризации $k_s^{(r)}$, $k_c^{(r)}$ определим из условия наилучшего квадратического приближения $y(t)$ (15.11) гармонически изменяющейся величиной

$$\hat{y}(t) = A[k_s^{(r)} \sin \omega t + k_c^{(r)} \cos \omega t], \quad (15.12)$$

т. е. из условия

$$\int_0^{2\pi} [y(t) - \hat{y}(t)]^2 d\omega t \rightarrow \min_{k_s^{(r)}, k_c^{(r)}}, \quad (15.13)$$

или, в раскрытой форме,

$$\int_0^{2\pi} \{\Phi(A \sin \omega t) - A[k_s^{(r)} \sin \omega t + k_c^{(r)} \cos \omega t]\}^2 d\omega t \rightarrow \min_{k_s^{(r)}, k_c^{(r)}}. \quad (15.14)$$

Дифференцируя левую часть (15.14) по $k_s^{(r)}$ и $k_c^{(r)}$ и приравнявая результат нулю, получим

$$\int_0^{2\pi} \{\Phi(A \sin \omega t) - A[k_s^{(r)} \sin \omega t + k_c^{(r)} \cos \omega t]\} \sin \omega t d\omega t = 0, \quad (15.15)$$

$$\int_0^{2\pi} \{\Phi(A \sin \omega t) - A[k_s^{(r)} \sin \omega t + k_c^{(r)} \cos \omega t]\} \cos \omega t d\omega t = 0.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} \sin \omega t \cos \omega t d\omega t = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \omega t d\omega t = \int_0^{2\pi} \cos^2 \omega t d\omega t = \pi, \quad (15.16)$$

найдем искомые коэффициенты гармонической линеаризации:

$$k_s^{(r)} \equiv k_s^{(r)}(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \Phi(A \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t, \quad (15.17)$$

$$k_c^{(r)} \equiv k_c^{(r)}(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \Phi(A \sin \omega t) \cos \omega t d\omega t.$$

Величину $\hat{y}(t)$ (15.12) можно еще записать в эквивалентной форме:

$$\hat{y}(t) = A k^{(r)}(A) \sin(\omega t - \psi(A)), \quad (15.18)$$

где

$$k^{(r)}(A) = \sqrt{[k_s^{(r)}(A)]^2 + [k_c^{(r)}(A)]^2}, \quad \psi(A) = -\operatorname{arctg} \frac{k_c^{(r)}(A)}{k_s^{(r)}(A)}, \quad (15.19)$$

или, используя комплексную форму записи

$$\vec{x}(t) = a e^{j\omega t},$$

окончательно получаем

$$\vec{\hat{y}}(t) = \vec{k}^{(r)}(A) \vec{x}(t), \quad (15.20)$$

где

$$\vec{k}^{(r)}(A) = k_s^{(r)}(A) - j k_c^{(r)}(A) = k^{(r)}(A) e^{-j\psi(A)}. \quad (15.21)$$

Таким образом, гармонический коэффициент линеаризации (15.21) представляет собой комплексную функцию амплитуды гармонического воздействия A . Для однозначных нелинейностей

$$k_c^{(r)}(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \Phi(A \sin \omega t) \cos \omega t d\omega t = 0 \quad (15.22)$$

и, следовательно,

$$\vec{k}^{(r)}(A) = k^{(r)}(A) = k_s^{(r)}(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \Phi(A \sin \omega t) \sin \omega t \, d\omega t. \quad (15.23)$$

В этом случае гармонический коэффициент линеаризации вещественный. И, значит,

$$\vec{y}(t) = k_s^{(r)}(A) \vec{x}(t). \quad (15.24)$$

Нетрудно видеть, что $k_s^{(r)}(A)$ и $k_c^{(r)}(A)$ представляют собой отношение коэффициентов первой гармоники разложения в ряд Фурье периодической функции (15.11) к амплитуде входного периодического воздействия.

Уравнения гармонической линеаризации (15.20), (15.24) представляют собой аппроксимацию уравнения нелинейного элемента (15.11) при гармоническом воздействии.

Предположим теперь, что $x(t)$ — стационарный случайный процесс, тогда $y(t) = \Phi(x(t))$ будет также стационарным случайным процессом. Определим коэффициент стохастической линеаризации $k^{(cr)}$ из условия наилучшего среднеквадратического приближения $y(t)$ величиной

$$\hat{y}(t) = k^{(cr)} x(t), \quad (15.25)$$

т. е. из условия

$$M \{[y(t) - \hat{y}(t)]^2\} \rightarrow \min_{k^{(cr)}}, \quad (15.26)$$

или, в развернутой форме,

$$M \{[\Phi(x(t)) - k^{(cr)} x(t)]^2\} \rightarrow \min_{k^{(cr)}}. \quad (15.27)$$

Дифференцируя левую часть (15.27) по $k^{(cr)}$ и приравнявая ее нулю, получим

$$M \{[\Phi(x(t)) - k^{(cr)} x(t)] x(t)\} = 0. \quad (15.28)$$

Отсюда, учитывая, что

$$M \{\Phi(x(t)) x(t)\} = R_{yx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) x p(x) dx, \quad (15.29)$$

$$M \{x^2(t)\} = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \sigma_x^2,$$

где $R_{yx}(0)$ и $R_x(0)$ — начальные значения взаимной и собственной корреляционной функции, получаем выражение для коэффициента стохастической линеаризации:

$$k^{(cr)} \equiv k^{(cr)}(\sigma_x^2) = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) x p(x) dx. \quad (15.30)$$

Поскольку для стационарных эргодических процессов $R_{yx}(0)$ и $R_x(0)$ можно также представить в виде

$$R_{yx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Phi(x(t)) x(t) dt, \quad (15.31)$$

$$R_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \sigma_x^2,$$

то, наряду с (15.30), коэффициент стохастической линеаризации можно определить и так:

$$k^{(cr)} = k^{(cr)}(\sigma_x) = \frac{1}{\sigma_x} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Phi(x(t)) x(t) dt. \quad (15.32)$$

Уравнение стохастической линеаризации (15.25) представляет собой аппроксимацию уравнения нелинейного элемента при случайном воздействии.

В частном случае, если

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (15.33)$$

где φ — случайная фаза, из (15.31) следует

$$R_x(0) = \sigma_x^2 = \frac{A^2}{2}, \quad (15.34)$$

а

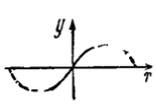
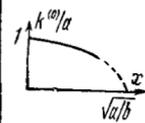
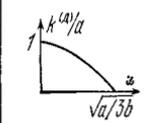
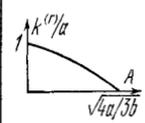
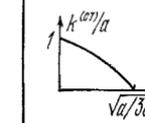
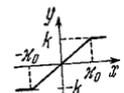
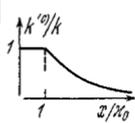
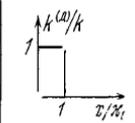
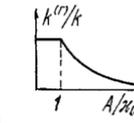
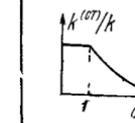
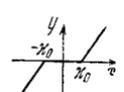
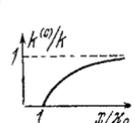
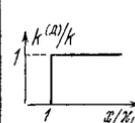
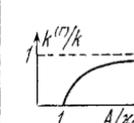
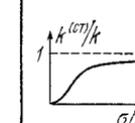
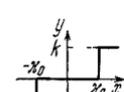
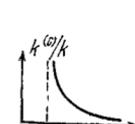
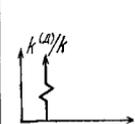
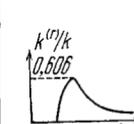
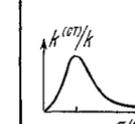
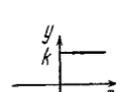
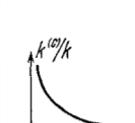
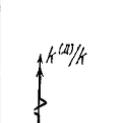
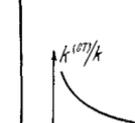
$$R_{yx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Phi(A \sin(\omega t + \varphi)) A \sin(\omega t + \varphi) dt = k_s^{(r)}(A) \sigma_x^2 \quad (15.35)$$

и, значит,

$$k^{(cr)}(\sigma_x) = k_s^{(r)}(A), \quad (15.36)$$

т. е. коэффициенты стохастической и гармонической линеаризации в этом случае совпадают. В табл. 15.1 приведены типовые

Таблица 15.1

Нелинейная характеристика	Коэффициенты линеаризации			
	статический $k(c)(x)$	дифференциальный $k(d)(x)$	гармонический $k(r)(A)$	стохастический $k^{ст}(\sigma_x)$
				
				
				
				
				

характеристики нелинейных элементов и соответствующие им коэффициенты статической, дифференциальной, гармонической и стохастической линеаризации, которые удобно использовать при исследовании нелинейных систем.

§ 15.5. Уравнения нелинейных систем

Блок-схема простейшей нелинейной системы, к которой путем структурных преобразований может быть сведена любая система, содержащая один нелинейный элемент, изображена на рис. 15.17. Здесь предполагается, что внешнее воздействие $f(t)$ приложено ко входу нелинейного элемента. Уравнение нелинейного элемента примем в виде (15.1), т. е.

$$y(t) = \Phi(x(t)) \quad (15.37)$$

или относительно изображений

$$Y(p) = L\{\Phi(x(t))\} = \int_0^{\infty} \Phi(x(t)) e^{-pt} dt. \quad (15.38)$$

Уравнение же линейной части относительно изображений имеет вид

$$Z(p) = W(p)Y(p), \quad (15.39)$$

где

$$W(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} \quad (15.40)$$

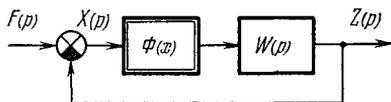


Рис. 15.17.

— передаточная функция линейной части. Условие замыкания системы имеет вид

$$x(t) = f(t) - z(t) \quad (15.41)$$

или относительно изображений

$$X(p) = F(p) - Z(p). \quad (15.42)$$

Заменяя в (15.39) $Y(p)$ его значением из (15.38) и учитывая условие замыкания (15.42), получаем уравнение нелинейной системы в изображениях относительно выходной величины:

$$Z(p) = W(p) L\{\Phi(f(t) - z(t))\}. \quad (15.43)$$

Если же в (15.39) заменить $Y(p)$ его значением из (15.38) и подставить значение $Z(p)$ в (15.42), то мы получим уравнение нелинейной системы в изображениях относительно ошибки:

$$X(p) = F(p) - W(p) L\{\Phi(x(t))\}. \quad (15.44)$$

Это уравнение нелинейно, поскольку в него входят изображения $x(t)$ и нелинейной функции $\Phi(x(t))$. Если перейти в (15.44) и

(15.43) от изображений к оригиналам, а для этого достаточно воспользоваться теоремой линейности и теоремой свертывания (теоремы 1 и 6 приложения 1), то мы получим уравнение в оригиналах относительно выходной величины:

$$z(t) = \int_0^t \omega(t - \tau) \Phi(f(\tau) - z(\tau)) d\tau, \quad (15.45)$$

и относительно ошибки:

$$x(t) = f(t) - \int_0^t \omega(t - \tau) \Phi(x(\tau)) d\tau. \quad (15.46)$$

Интегральные уравнения (15.45) и (15.46) представляют собой нелинейные интегральные уравнения. К сожалению, не существует общих методов решения нелинейных уравнений (15.45) или (15.46). Однако, учитывая специфику нелинейных элементов или линейных частей, можно точно или приближенно исследовать процессы в нелинейных системах. Разумеется, решения подобных нелинейных интегральных уравнений могут быть получены различными численными или алгоритмическими методами с помощью ЦВМ. Нас далее будут в основном интересовать такие методы исследования нелинейных систем, которые позволяют установить их свойства и особенности, не находя непосредственно решения описывающего их уравнения.

Рассматриваемые нелинейные автоматические системы полностью определяются заданием характеристики нелинейного элемента и передаточной функцией или временной характеристикой линейной части системы. Если к нелинейной системе приложено несколько воздействий, например, кроме задающего воздействия еще и возмущающие, то, как было показано ранее, все возмущающие воздействия могут быть приведены к точке приложения задающего воздействия. При этом уравнения относительно ошибки (15.44), (15.46) останутся без изменений, только $F(p)$ и $f(t)$ будут включать в свой состав изображения и оригиналы реакций линейной части системы на эти воздействия. Поэтому при исследовании нелинейных систем мы ограничимся уравнением ошибки с одним приведенным воздействием $f(t)$.

Задачи

15.1. Показать, что для однозначных характеристик коэффициент гармонической линеаризации веществен.

15.2. Показать, что при гауссовой плотности распределения

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$$

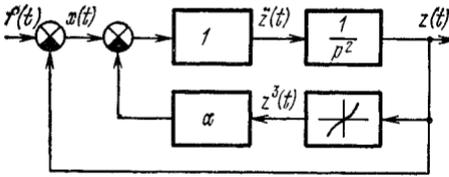


Рис. 15.18.

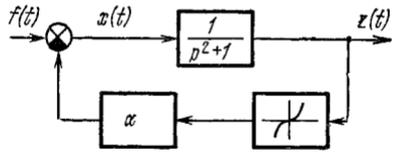
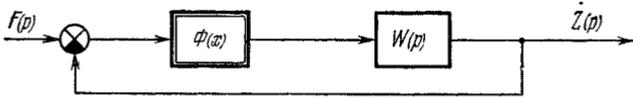
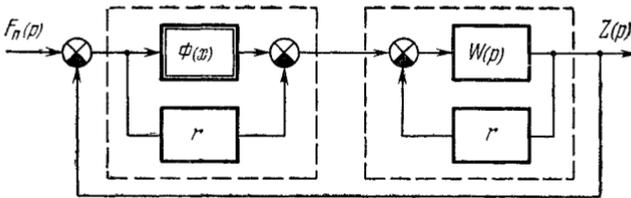


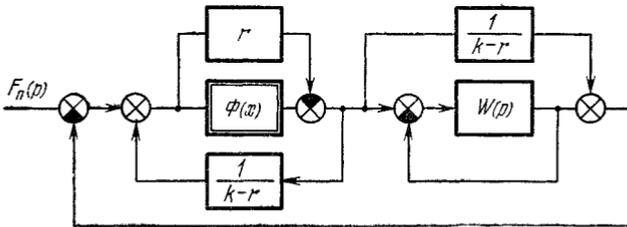
Рис. 15.19.



а)



б)



в)

Рис 15.20.

коэффициент стохастической линеаризации

$$k^{(ст)}(\sigma_x) = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} x \Phi(x) p(x) dx$$

и коэффициент дифференциальной линеаризации

$$k^{(л)}(x) = \frac{d\Phi(x)}{dx}$$

связаны соотношением

$$k^{(ст)}(\sigma_x) = \int_{-\infty}^{\infty} k^{(л)}(x) p(x) dx$$

Пользуясь этим соотношением, определить $k^{(ст)}(\sigma_x)$ по $k^{(л)}(x)$, приведенному в табл. 15.1.

15.3. Показать, что уравнение Дюффинга

$$\ddot{z} + \dot{z} + \alpha z^3 = f$$

описывает нелинейную систему, структура которой имеет вид, изображенный на рис. 15.18 или на рис. 15.19.

15.4. Убедиться в эквивалентности структур нелинейных систем, изображенных на рис. 15.20, а, б, в

15.5. Показать, что если $0 < \Phi(x)/x < k$ для структуры на рис. 15.20, б, то эквивалентная характеристика нелинейного элемента принадлежит сектору $(0, k - r)$, а для структуры, изображенной на рис. 15.20, в, — сектору $(0, \infty)$.

ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

§ 16.1. Вынужденные и свободные процессы

Процессы в нелинейных автоматических системах отличаются от процессов в линейных системах весьма большим разнообразием. Несмотря на это, целесообразно для нелинейных систем ввести понятия *вынужденного* и *свободного* процессов, которые позволили бы выяснить свойства и особенности этих процессов, а для линейных систем совпадали бы с известными аналогичными понятиями (см. § 8.3).

Уравнение нелинейной системы, полученное в предыдущей главе, имеет вид

$$x(t) = f(t) - \int_0^t \omega(t - \tau) \Phi(x(\tau)) d\tau. \quad (16.1)$$

Здесь предполагается, что внешнее воздействие приложено ко входу нелинейной автоматической системы в момент $t = 0$, а до этого момента система находилась в покое. Для введения понятия *вынужденного процесса* рассмотрим произвольное ограниченное неисчезающее внешнее воздействие $f(t) = f_{\sim}(t)$ и предположим, что оно прикладывается ко входу нелинейной автоматической системы в некий произвольный момент времени $t = t_0$. Тогда уравнение нелинейной системы вместо (16.1) принимает вид

$$x(t) = f_{\sim}(t) - \int_{t_0}^t \omega(t - \tau) \Phi(x(\tau)) d\tau. \quad (16.2)$$

В этом уравнении t_0 — момент возмущения системы, а t — момент наблюдения процесса в ней. Под вынужденным процессом $x^B(t)$ естественно подразумевать процесс, вызванный внешним ограниченным воздействием, приложенным в момент времени $t_0 = -\infty$, отстоящий от момента наблюдения на бесконечно большой интервал времени. Полагая в (16.2) $t_0 = -\infty$, получим

уравнение вынужденного процесса

$$x^B(t) = f_{\sim}(t) - \int_{-\infty}^t \omega(t - \tau) \Phi(x^B(\tau)) d\tau \quad (16.3)$$

или, после замены переменных в интеграле (16.3) $t - \tau$ на τ и τ на $t - \tau$,

$$x^B(t) = f_{\sim}(t) - \int_0^{\infty} \omega(\tau) \Phi(x^B(t - \tau)) d\tau. \quad (16.4)$$

Уравнения (16.3), (16.4) являются *уравнениями вынужденного процесса*.

Под *свободным процессом* $x^c(t)$ естественно понимать разность между общим $x(t)$ и вынужденным $x^B(t)$ процессами, т. е.

$$x^c(t) = x(t) - x^B(t), \quad t \geq 0. \quad (16.5)$$

Полагая в уравнении (16.1) $f(t) = f_{\sim}(t)$ и вычитая из него уравнение (16.3), получаем, после очевидных преобразований, *уравнение свободного процесса*

$$x^c(t) = f_{\downarrow}(t) - \int_0^t \omega(t - \tau) [\Phi(x^B(\tau) + x^c(\tau)) - \Phi(x^B(\tau))] d\tau. \quad (16.6)$$

Здесь функцию

$$f_{\downarrow}(t) = \int_{-\infty}^0 \omega(t - \tau) \Phi(x^B(\tau)) d\tau = \int_t^{\infty} \omega(\tau) \Phi(x^B(t - \tau)) d\tau, \quad (16.7)$$

как нетрудно понять, можно рассматривать как причину, вызывающую свободный процесс, которая связана с приложением внешнего воздействия к нелинейной системе, находящейся до момента его приложения в покое. Если же, кроме приложения внешнего воздействия, в этот момент начальные значения координат состояния не нулевые, то в уравнения общего процесса (16.1) при $f(t) = f_{\sim}(t)$ и свободного процесса (16.7) следует добавить воздействие $f^0(t)$, представляющее собой реакцию линейной части системы на эти ненулевые начальные состояния.

Таким образом, в общем случае при ненулевом начальном состоянии уравнения общего и свободного процессов будут иметь вид

$$x(t) = f_{\sim}(t) + f_{\downarrow}^0(t) - \int_0^t \omega(t - \tau) \Phi(x(\tau)) d\tau \quad (16.8)$$

и

$$x^c(t) = f_{\downarrow}(t) + f_{\downarrow}^0(t) - \int_0^t \omega(t - \tau) [\Phi(x^B(\tau) + x^c(\tau)) - \Phi(x^B(\tau))] d\tau. \quad (16.9)$$

Что же касается уравнений вынужденного процесса (16.3) или (16.4), то они остаются без изменений. Вынужденные процессы не зависят от начального состояния системы. Как видно из (16.9),

свободный процесс в нелинейных системах существенно зависит от вынужденного процесса $x^B(t)$, а значит, в конечном итоге и от внешнего воздействия $f_{\sim}(t)$.

В общем случае при произвольной характеристике нелинейного элемента невозможно аналитически решить уравнения (16.4), (16.9) или (16.8) и, значит, невозможно в явном виде получить выражения вынужденного $x^B(t)$, свободного $x^C(t)$ и полного $x(t)$ процессов. В линейном случае, т. е. при

$$y = \Phi(x) = x, \quad (16.10)$$

из уравнений (16.4), (16.9) и (16.8) получаем

$$x^B(t) = f_{\sim}(t) - \int_0^{\infty} \omega(\tau) x^B(t - \tau) d\tau, \quad (16.11)$$

$$x^C(t) = f_{\downarrow}(t) + f_{\downarrow}^0(t) - \int_0^t \omega(t - \tau) x^C(\tau) d\tau \quad (16.12)$$

и

$$x(t) = f_{\sim}(t) + f_{\downarrow}^0(t) - \int_0^t \omega(t - \tau) x(\tau) d\tau. \quad (16.13)$$

Эти уравнения сравнительно просто решаются, и их решения совпадают с решениями, полученными иным путем для линейных систем в гл. 8.

§ 16.2. Понятия состояний равновесия и автоколебаний

Если в уравнении вынужденного процесса (16.4) положить

$$f_{\sim}(t) \equiv 0,$$

что соответствует устранению внешнего ограниченного воздействия, то мы получим уравнение, определяющее автономные стационарные состояния $x^a(t)$ нелинейной системы:

$$x^a(t) = - \int_0^{\infty} \omega(\tau) \Phi(x^a(t - \tau)) d\tau. \quad (16.14)$$

Для линейной системы, в силу (16.10), это уравнение принимает особенно простой вид:

$$x^a(t) = - \int_0^{\infty} \omega(\tau) x^a(t - \tau) d\tau. \quad (16.15)$$

Уравнение (16.15) имеет единственное решение

$$x^a(t) = x^a = 0, \quad (16.16)$$

соответствующее *состоянию равновесия*.

В нелинейных системах возможны, вообще говоря, несколько состояний равновесия. Полагая в (16.14) $x^a(t) = x^a = \text{const}$, получим

$$x^a = - \Phi(x^a) \int_0^{\infty} \omega(\tau) d\tau. \quad (16.17)$$

Передаточная функция $W(p)$ линейной части системы связана с ее импульсной характеристикой преобразованием Лапласа

$$W(p) = \int_0^{\infty} \omega(\tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad (16.18)$$

и, значит, при $p = 0$

$$W(0) = \int_0^{\infty} \omega(\tau) d\tau. \quad (16.19)$$

Из уравнения (16.17) получаем

$$\Phi(x^a) = - \frac{1}{W(0)} x^a. \quad (16.20)$$

Используя обозначение статического коэффициента линеаризации (15.6)

$$\Phi(x^a) = k^{(c)}(x^a) x^a, \quad (x^a \neq 0) \quad (16.21)$$

перепишем (16.20) в виде

$$k^{(c)}(x^a) = - \frac{1}{W(0)}.$$

Для определения состояний равновесия воспользуемся уравнением (16.20). Проведем на графике нелинейной характеристики $y = \Phi(x^a)$ прямую $y = - \frac{1}{W(0)} x^a$ (рис. 16.1). Абсциссы точек

их пересечения определяют значения возможных состояний равновесия. Так, при $W(0) > 0$ состояние равновесия системы единственное $x^a \equiv 0$, при $W(0) < 0$ (что соответствует не отрицательной, а положительной обратной связи) в системе возможны также и состояния равновесия, отличные от нулевого.

Помимо состояний равновесия в нелинейной системе возможны периодические процессы. Эти автономные периодические процессы, соответствующие периодическим решениям уравнения (16.4), называются *автоколебаниями*. Автоколебания порождаются не внешними периодическими воздействиями, а «внутренними силами» нелинейной системы. Таким образом, в отличие от линейных систем, в нелинейных системах возможно наличие нескольких состояний равновесия и специфических автономных периодических процессов — автоколебаний.

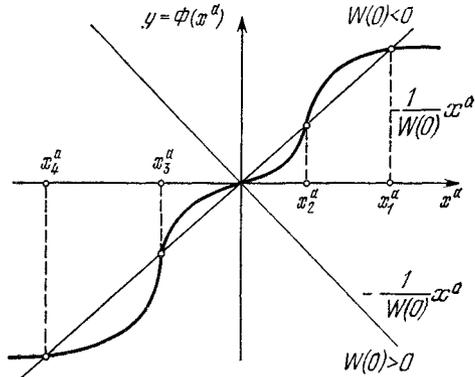


Рис. 16.1.

§ 16.3. Возможные режимы нелинейных систем

Приложение внешних воздействий к нелинейным системам может вызвать в них разнообразные и сложные режимы. Помимо вынужденных процессов, которые «по образу и подобию» напоминают внешние воздействия в линейных системах, возможны и иные виды вынужденных процессов. Так, постоянное внешнее воздействие может вызвать изменение состояний равновесия. Действительно, если в уравнении (16.4) положить

$$\dot{x}^a(t) = c = \text{const} \tag{16.22}$$

и обозначить $x^b(t) = x^a(t) = x^a$, то, учитывая, как и ранее, (16.19), получим

$$x^a = c - \Phi(x^a) W(0), \tag{16.23}$$

или

$$\Phi(x^a) = \frac{c - x^a}{W(0)}. \tag{16.24}$$

Графическое решение уравнения (16.24) изображено на рис. 16.2. Если нелинейная система статическая, т. е. $W(0) < \infty$, то при

изменении величины внешнего воздействия изменяется состояние равновесия, а при $W(0) < 0$ возможно также изменение и числа состояний равновесия.

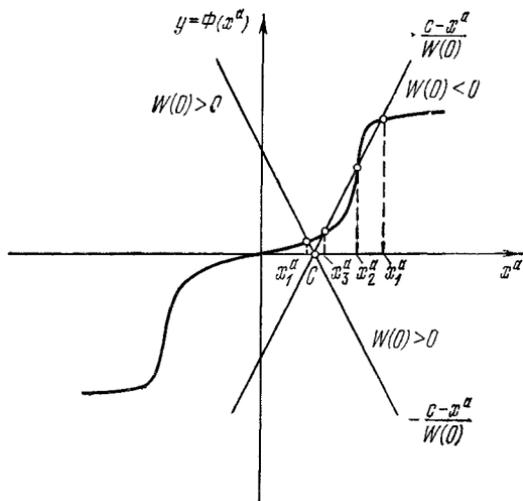


Рис. 16.2.

Если линейная система астатическая, т. е. $W(0) = \infty$, то из (16.24) следует

$$\Phi(x^a) = 0,$$

и, значит, для однозначных функций $y = \Phi(x)$

$$x^a = 0,$$

откуда следует, что

в нелинейной астатической системе нулевое состояние равновесия при изменении постоянного воздействия $f_~(t)$ не изменяется.

Изменение постоянного воздействия может привести к изменению частоты и амплитуды либо к смене автоколебаний. Периодическое воздействие при определенных условиях подавляет автоколебания и навязывает нелинейной системе свою частоту либо частоту, меньшую этой в целое число раз.

Такие режимы называются режимами принудительной синхронизации на основной частоте либо, соответственно, на частоте субгармоник.

Возможен и режим совместного существования вынужденных колебаний и автоколебаний, т. е. режим биений. Исследование

всех возможных режимов нелинейной системы с произвольной линейной частью представляет собой в настоящее время неразрешимую задачу.

§ 16.4. Общие свойства процессов

Выясним некоторые общие свойства процессов в нелинейных системах. Рассмотрим сначала нелинейные системы при отсутствии насыщения нелинейных элементов. В этом случае (рис. 16.3) функция $\Phi(x)$, определяющая нелинейность, как правило, может быть задана соотношением

$$\Phi(x) = kx + \Delta(x), \quad (16.25)$$

где

$$\begin{aligned} 0 < k < \infty, \\ |\Delta(x)| \leq \Delta = \text{const} < \infty, \\ \left| \frac{\Delta(x)}{x} \right| \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0, \quad \frac{d\Delta(x)}{dx} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0. \end{aligned} \quad (16.26)$$

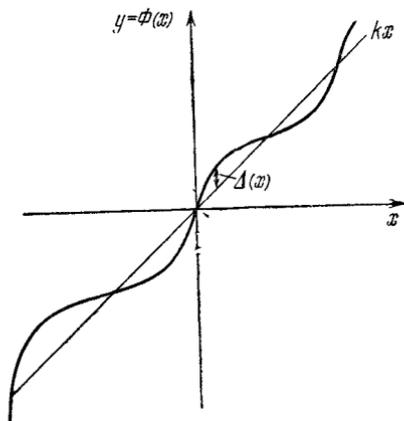


Рис. 16.3

Для нелинейностей этого типа статический $k^{(c)}(x)$ и дифференциальный $k^{(n)}(x)$ коэффициенты линеаризации удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} k^{(c)}(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = k > 0, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} k^{(n)}(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{d\Phi(x)}{dx} = k > 0. \end{aligned}$$

Согласно (16.25) нелинейный элемент при отсутствии насыщения

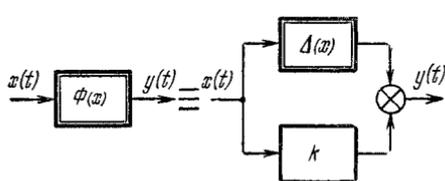


Рис. 16.4.

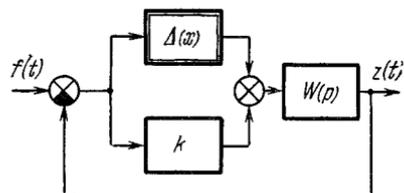


Рис. 16.5.

может быть представлен в виде линейного элемента и нелинейного элемента с насыщением, обладающего ограниченной по абсолютной величине характеристикой $\Delta(x)$ (рис. 16.4). Поэтому

блок-схема нелинейной системы представится в виде, изображенном на рис. 16.5. Рассматривая выходную величину нелинейного элемента $\Delta(x)$ как дополнительное воздействие в точке

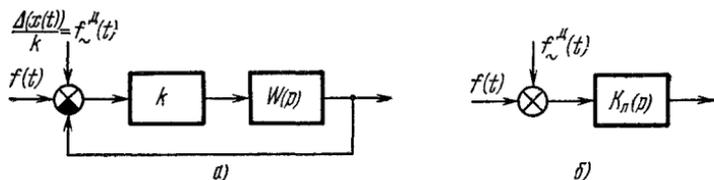


Рис. 16.6.

суммирования и перенося его на вход линейного элемента, можно заменить рассматриваемую нелинейную систему линеаризованной системой (рис. 16.6, а), но с дополнительным воздействием

$$f_{\sim}^{(n)}(t) = \frac{\Delta(x(t))}{k}.$$

В явном виде это воздействие неизвестно, так как неизвестен процесс $x(t)$. Однако в силу (16.26)

$$|f_{\sim}^{(n)}(t)| \leq \frac{\Delta}{k},$$

т. е. $f_{\sim}^{(n)}(t)$ представляет собой ограниченное воздействие. Передаточная функция замкнутой линеаризованной системы равна

$$K_n(p) = \frac{kW(p)}{1 + kW(p)}.$$

Она представляет собой изображение временной характеристики $k_n(t)$ замкнутой линеаризованной системы:

$$K_n(p) = \int_0^{\infty} k_n(t) e^{-pt} dt = L\{k_n(t)\}. \quad (16.27)$$

Таким образом, нелинейную систему с внешним воздействием мы представили в виде линеаризованной системы с передаточной функцией $K_n(p)$, временной характеристикой $k_n(t)$, ко входу которой, помимо внешнего воздействия $f(t)$, приложено ограниченное дополнительное воздействие $f_{\sim}^{(n)}(t)$ (рис. 16.6, б). Уравнение этой системы можно представить в виде

$$z(t) = \int_0^t k_n(\tau) f(t - \tau) d\tau + \int_0^t k_n(\tau) f_{\sim}^{(n)}(t - \tau) d\tau. \quad (16.28)$$

Обозначим выходную величину линеаризованной системы при отсутствии дополнительного воздействия через $z_n(t)$. Очевидно,

$$z_n(t) = \int_0^t k_n(\tau) f(t - \tau) d\tau. \quad (16.29)$$

Отличие нелинейной системы от линеаризованной характеризуется разностью их выходных величин:

$$\delta z(t) = z(t) - z_n(t). \quad (16.30)$$

Вычитая (16.29) из (16.28), получаем

$$\delta z(t) = \int_0^t k_n(\tau) f^{(n)}(t - \tau) d\tau. \quad (16.31)$$

Оценивая обе части (16.31), получим

$$|\delta z(t)| \leq \int_0^t |k_n(\tau)| |f^{(n)}(t - \tau)| d\tau. \quad (16.32)$$

Учитывая ограниченность дополнительного воздействия и полагая в (16.32) $t = \infty$, мы лишь усилим оценку, и тогда

$$|\delta z(t)| \leq \frac{\Delta}{k} \int_0^{\infty} |k_n(\tau)| d\tau. \quad (16.33)$$

Если линеаризованная система устойчива, а только этот случай имеет смысл рассматривать, то интеграл в правой части (16.33) конечен, и мы получаем оценку изменения процесса нелинейной системы по сравнению с линеаризованной.

Таким образом,

максимальное отклонение процесса в нелинейной системе от процесса в линеаризованной системе определяется величиной наибольшего отличия Δ нелинейной характеристики от линейной, коэффициентом усиления линейного элемента k и площадью абсолютной величины временной характеристики в линеаризованной системе.

Если временная характеристика линеаризованной системы неотрицательна,

$$k_n(t) \geq 0,$$

то, учитывая (16.27), получаем

$$\int_0^{\infty} |k_n(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} k_n(\tau) d\tau = K_n(0) = \frac{kW(0)}{1 + kW(0)} \leq 1. \quad (16.34)$$

Для астатических систем ($W(0) = \infty$) в (16.34) имеет место равенство и оценка (16.33) принимает особенно простой вид:

$$|\delta z(t)| \leq \frac{\Delta}{k}. \quad (16.35)$$

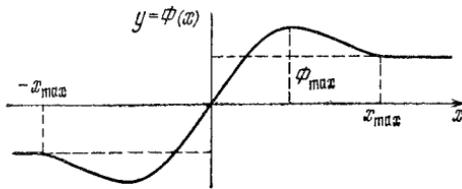


Рис. 16.7

Это наибольшее возможное отклонение.

Рассмотрим теперь нелинейные системы при наличии насыщения у нелинейных элементов. В этом случае (рис. 16.7) функция $\Phi(x)$, определяющая нелинейность в системе, является ограниченной, т. е.

$$|\Phi(x)| \leq \Phi_{\max} < \infty. \quad (16.36)$$

Коэффициенты линеаризации нелинейного элемента удовлетворяют условиям

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} k^{(c)}(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\Phi(x)}{x} = 0, \quad (16.37)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} k^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{d\Phi(x)}{dx} = 0. \quad (16.38)$$

Производя оценку левой части уравнения нелинейной системы (16.8) с учетом (16.36), получим

$$|x(t)| \leq |f_{\sim}(t)| + |f_{\downarrow}^0(t)| + \Phi_{\max} \int_0^t |\omega(t-\tau)| d\tau. \quad (16.39)$$

Заменяя сумму абсолютных значений воздействий их верхней границей и замечая, что для устойчивой линейной части

$$\int_0^t |\omega(t-\tau)| d\tau = \int_0^t |\omega(\tau)| d\tau < \int_0^{\infty} |\omega(\tau)| d\tau < \infty, \quad (16.40)$$

получим

$$|x(t)| \leq \sup_t [|f_{\sim}(t)| + |f_{\downarrow}^0(t)|] + \Phi_{\max} \int_0^{\infty} |\omega(\tau)| d\tau \equiv x_{\max}. \quad (16.41)$$

Отсюда следует, что в нелинейных системах

при наличии насыщения нелинейного элемента с устойчивой линейной частью и ограниченных воздействиях процессы всегда ограничены.

Поэтому рабочий участок характеристики нелинейного элемента определяется величиной x_{\max} (рис. 16.8). Это дает возможность линеаризовать нелинейный элемент несколько иначе, чем мы делали выше.

Выберем коэффициент усиления линейного элемента так, чтобы наибольшие отклонения Δ при $x = x_{\max}$ и при некотором x внутри интервала $(-x_{\max}, x_{\max})$ были бы равны по абсолютной величине (рис. 16.8). Тогда в интервале $(-x_{\max}, x_{\max})$ справедливо будет равенство

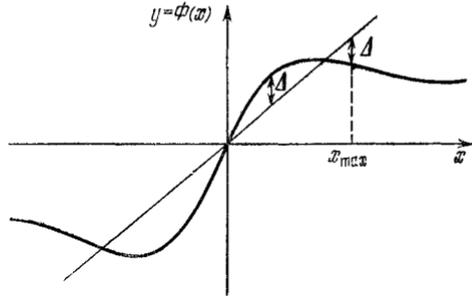


Рис 16.8.

(16.25) и неравенство (16.26). Проводя для этого случая рассуждения, подобные изложенным выше, мы получим оценку

$$|\delta z(t)| \leq \frac{\Delta}{k} \int_0^{\infty} |\omega(\tau)| d\tau. \tag{16.42}$$

Естественно, теперь величина Δ зависит от x_{\max} . Эти простые оценки позволяют в ряде случаев составить представление о характере процессов в нелинейных системах.

Задачи

16.1. Показать эквивалентность уравнений вынужденных процессов

$$x^B(t) = f_{\sim}(t) - \int_0^{\infty} \omega(\tau) x^B(t - \tau) d\tau$$

и

$$x^B(t) = \int_0^{\infty} k(\tau) f_{\sim}(t - \tau) d\tau.$$

где временные характеристики замкнутой и разомкнутой систем связаны соотношением

$$k(t) = \delta(t) - \int_0^{\infty} \omega(\tau) k(t - \tau) d\tau$$

16.2. Привести примеры характеристик нелинейных элементов, не удовлетворяющих условиям (16.26).

16.3. Привести примеры характеристик нелинейных элементов, не удовлетворяющих одному из условий (16.37), (16.38).

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

§ 17.1. Понятия устойчивости

Состояние равновесия, вынужденные процессы, автоколебания могут реально существовать лишь в том случае, когда они устойчивы. Устойчивость этих режимов определяется характером изменений отклонений, вызванных приложением к системе убывающих воздействий. Если эти отклонения стремятся с течением времени к нулю, то соответствующие режимы устойчивы. Возникающие отклонения представляют собой не что иное, как свободные процессы. Поэтому исследование устойчивости сводится к исследованию свободных процессов. В отличие от линейных систем, в нелинейных системах свободный процесс существенно зависит от рассматриваемых режимов. В нелинейных системах возможны ситуации, в которых один режим устойчив, тогда как другой режим неустойчив. Так, при устойчивых автоколебаниях часто состояние равновесия неустойчиво. Поэтому устойчивость состояния равновесия, вынужденных процессов и автоколебаний следует рассматривать, вообще говоря, раздельно. В этой главе мы будем рассматривать устойчивость состояния равновесия и устойчивость вынужденных процессов. Исследованию автоколебаний и их устойчивости будет посвящена гл. 20.

Известны различные понятия устойчивости положения равновесия процессов. Нам удобно будет использовать понятия устойчивости, основанные на понятии свободного процесса. Рассмотрим схему нелинейной автоматической системы (рис. 17.1). Она описывается уравнением (16.1). Для состояния равновесия

$$x^b(t) = x^b = x^a = 0 \quad (17.1)$$

уравнение свободного процесса принимает вид

$$x^c(t) = f_{\downarrow}^0(t) - \int_0^t \omega(t - \tau) \Phi(x^c(\tau)) d\tau. \quad (17.2)$$

Это уравнение описывает процессы в нелинейной системе, изображенной на рис. 17.1, вызываемые убывающим воздействием $f_{\downarrow}^0(t)$.

Будем говорить, что состояние равновесия $x^a \equiv 0$ *устойчиво*, если для убывающих внешних воздействий $f_{\downarrow}^0(t)$ таких, что

$$\sup |f_{\downarrow}^0(t)| = \eta < \infty, \quad (17.3)$$

свободный процесс $x^c(t)$, определяемый уравнением (17.2), ограничен и удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x^c(t) = 0. \quad (17.4)$$

Если в (17.3) величина η принимается достаточно малой, то состояние равновесия *устойчиво «в малом»*. Если в (17.3) η — конечная фиксированная величина, то состояние равновесия *устойчиво «в большом»*. Если же в (17.3) η может быть любой величиной, то состояние равновесия *устойчиво «в целом»*. Наконец,

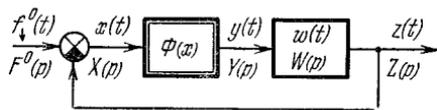


Рис. 17.1

будем говорить, что состояние равновесия *абсолютно устойчиво*, если оно устойчиво в целом, но не для одной фиксированной характеристики нелинейного элемента, а для некоторого семейства этих характеристик, принадлежащих к какому-либо классу.

Для вынужденного процесса $x^b(t)$, определяемого уравнением

$$x^b(t) = f_{\sim}(t) - \int_0^{\infty} \omega(\tau) \Phi(x^b(t - \tau)) d\tau, \quad (17.5)$$

свободный процесс удовлетворяет уравнению, которое мы запишем в такой форме:

$$x^c(t) = f_{\downarrow} + f_{\downarrow}^0(t) - \int_0^t \omega(t - \tau) \Psi(x^c(\tau), \tau) d\tau. \quad (17.6)$$

Здесь

$$\Psi(x^c(t), t) = \Phi(x^b(t) + x^c(t)) - \Phi(x^b(t)) \quad (17.7)$$

— преобразованная характеристика нелинейного элемента. В отличие от исходной характеристики нелинейного элемента системы, преобразованная характеристика зависит от времени, т. е. она нестационарна, и это обстоятельство вносит свою специфику. Для конкретного вынужденного процесса $x^b(t)$ все определения устойчивости состояния равновесия остаются справедливыми для устойчивости вынужденных процессов, если левую часть нера-

венства (17.3) $\sup_t |f_{\downarrow}^0(t)|$ заменить на $\sup_t |f_{\downarrow}^0(t) + f_{\downarrow}(t)|$, а вместо «состояния равновесия» говорить «вынужденный процесс». Различие будет состоять лишь в том, что в уравнении относительно свободного процесса вместо стационарной нелинейной характеристики (см. (17.2)) теперь будет фигурировать нестационарная нелинейная характеристика $(\Psi(x^c(t), t))$ (17.6), (17.7).

Далее нас будет интересовать не определенный вынужденный процесс, соответствующий фиксированному ограниченному внешнему воздействию $f_{\sim}(t)$, например гармоническому, периодическому, почти периодическому или постоянному, а вся совокупность возможных вынужденных процессов, определяемых уравнением (17.5), при любом ограниченном внешнем воздействии $f_{\sim}(t)$. Будем говорить, что вынужденные процессы $x^B(t)$, определяемые уравнением (17.5), устойчивы, если для убывающих внешних воздействий $f_{\downarrow}(t) + f_{\downarrow}^0(t)$ таких, что

$$\sup_t |f_{\downarrow}(t) + f_{\downarrow}^0(t)| = \eta < \infty, \quad (17.8)$$

свободный процесс $x^c(t)$, определяемый уравнением (17.6), ограничен и удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x^c(t) = 0. \quad (17.9)$$

Если в (17.8) η принимается достаточно малой, то вынужденные процессы $x^B(t)$ *устойчивы «в малом»*. Если в (17.8) η — фиксированная конечная величина, то вынужденные процессы $x^B(t)$ *устойчивы «в большом»*. Если в (17.8) η может быть любой величиной, то вынужденные процессы *устойчивы «в целом»*. Наконец, будем говорить об *абсолютной устойчивости* вынужденного процесса, если он устойчив в целом для семейства характеристик нелинейного элемента. Поскольку состояние равновесия является частным случаем вынужденного процесса, вызываемого постоянным внешним воздействием, то из устойчивости в целом и абсолютной устойчивости вынужденных процессов следует также устойчивость и состояния равновесия. Поэтому в этом случае можно говорить об устойчивости в целом или абсолютной устойчивости нелинейной системы. Таким образом,

нелинейная система абсолютно устойчива, если все возможные вынужденные процессы в ней абсолютно устойчивы.

Критерий абсолютной устойчивости состояния равновесия и критерий устойчивости возможных вынужденных процессов, т. е. критерий абсолютной устойчивости нелинейной системы, различаются в своих формулировках. Поэтому мы их будем рассматривать отдельно.

§ 17.2. Условия абсолютной устойчивости состояния равновесия

Для получения условий абсолютной устойчивости состояния равновесия рассмотрим нелинейную автоматическую систему (рис. 17.1), ко входу которой приложено убывающее воздействие. Предположим, что линейная часть системы устойчива. Это значит, что ее временная характеристика удовлетворяет условиям

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0 \quad (17.10)$$

и для всех t

$$\int_0^t |\omega(\tau)| d\tau < \infty, \quad \int_0^t \omega^2(\tau) d\tau < \infty, \quad t \rightarrow \infty.$$

Что же касается характеристики нелинейного элемента, то

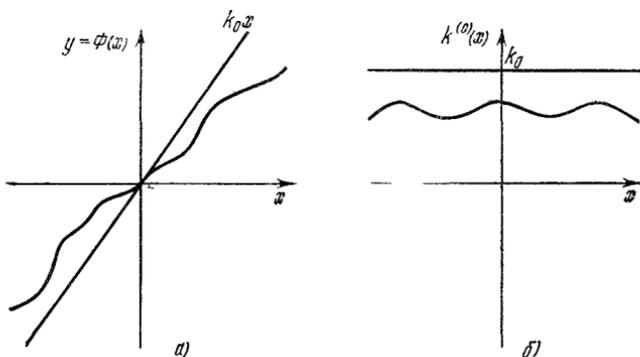


Рис. 17.2

будем считать, что она удовлетворяет условиям принадлежности $\Phi(x)$ сектору $[0, k_0]$ (рис. 17.2, а), т. е. условиям

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= 0, \\ 0 &\leq \frac{\Phi(x)}{x} \leq k_0. \end{aligned} \quad (17.11)$$

Поскольку

$$\frac{\Phi(x)}{x} = k^{(c)}(x) \quad (17.12)$$

представляет собой статический коэффициент линеаризации, то условие принадлежности $\Phi(x)$ сектору $[0, k_0]$ эквивалентно

условию принадлежности $k^{(c)}(x)$ полосе $[0, k_0]$ (рис. 17.2, б), т. е. условиям

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= 0, \\ 0 &\leq k^{(c)}(x) \leq k_0. \end{aligned} \quad (17.13)$$

Введем вспомогательную функцию

$$\psi(t) \equiv x^c(t) + q\dot{x}^c(t) - \frac{1}{k}\Phi(x^c(t)). \quad (17.14)$$

Здесь q — вещественный параметр, $x^c(t)$ определяется уравнением свободного процесса (17.2), $\dot{x}^c(t)$ — производная $x^c(t)$, определяемая уравнением

$$\dot{x}^c(t) = \dot{f}_\downarrow^0(t) - \omega(0)\Phi(x^c(t)) - \int_0^t \dot{\omega}(t-\tau)\Phi(x^c(\tau))d\tau, \quad (17.15)$$

которое получается дифференцированием по t уравнения (17.2). Образум теперь функцию

$$\rho(t) = \int_0^t \psi(\theta)\Phi(x^c(\theta))d\theta, \quad (17.16)$$

или, после подстановки $\psi(t)$ из (17.14),

$$\rho(t) = \int_0^t \left[x^c(\theta) - \frac{1}{k}\Phi(x^c(\theta)) \right] \Phi(x^c(\theta))d\theta + q \int_0^t \dot{x}^c(\theta)\Phi(x^c(\theta))d\theta. \quad (17.17)$$

Подставляя в (17.17) $x^c(t)$ из (17.2) и $\dot{x}^c(t)$ из (17.15) и используя очевидное тождество

$$\Phi(x^c(t)) = \int_0^t \Phi(x^c(\theta))\delta(t-\theta)d\theta, \quad (17.18)$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция, приведем, после очевидных преобразований, функцию $\rho(t)$ к виду

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \int_0^t [f_\downarrow^0(\theta) + q\dot{f}_\downarrow^0(\theta)]\Phi(x^c(\theta))d\theta - \\ &- \int_0^t \int_0^\theta \left\{ \omega(\theta-\tau) + q\dot{\omega}(\theta-\tau) + [q\omega(0) + \frac{1}{k}]\delta(\theta-\tau) \right\} \times \\ &\quad \times \Phi(x^c(\theta))\Phi(x^c(\tau))d\theta d\tau. \end{aligned} \quad (17.19)$$

Второе слагаемое в (17.19) представляет собой квадратичную форму относительно характеристики нелинейного элемента $\Phi(x)$. Предположим, что эта квадратичная форма, которую мы обозначим через $\Gamma(t)$, неотрицательна при всех k из диапазона $(0, k_0 + \varepsilon)$, т. е.

$$\Gamma(t) = \int_0^t \int_0^\theta \left\{ \omega(\theta - \tau) + q\dot{\omega}(\theta - \tau) + \right. \\ \left. + \left[q\omega(0) + \frac{1}{k} \right] \delta(\theta - \tau) \right\} \Phi(x^c(\theta)) \Phi(x^c(\tau)) d\theta d\tau \geq 0 \quad (17.20)$$

при любом сколь угодно малом ε . Тогда можно показать, что

$$\sup_t |x^c(t)| \leq c < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x^c(t) = 0 \quad (17.21)$$

при любой нелинейности, удовлетворяющей условиям (17.11), т. е. состояние равновесия нелинейной системы абсолютно устойчиво. Действительно, отбрасывая в правой части равенства (17.19) $\Gamma(t)$, получим неравенство

$$\rho(t) \leq \int_0^t [f_{\downarrow}^0(\theta) + qf_{\downarrow}^1(\theta)] \Phi(x^c(\theta)) d\theta \quad (17.22)$$

или после замены $\rho(t)$ в левой части этого неравенства его явным выражением из (17.17) получим

$$\int_0^t \left[x^c(\theta) - \frac{1}{k} \Phi(x^c(\theta)) \right] \Phi(x^c(\theta)) d\theta + q \int_0^t \dot{x}^c(\theta) \Phi(x^c(\theta)) d\theta \leq \\ \leq \int_0^t [f_{\downarrow}^0(\theta) + qf_{\downarrow}^1(\theta)] \Phi(x^c(\theta)) d\theta. \quad (17.23)$$

Это неравенство, по предположению, справедливо при любом k из диапазона $(0, k_0 + \varepsilon)$. Принимая во внимание условие принадлежности $\Phi(x)$ сектору $[0, k_0]$, можно написать неравенство

$$\int_0^t \left[x^c(\theta) - \frac{\Phi(x^c(\theta))}{k_0 + \varepsilon} \right] \Phi(x^c(\theta)) d\theta \geq \\ \geq \frac{\varepsilon}{(k_0 + \varepsilon) k_0} \int_0^t \Phi^2(x^c(\theta)) d\theta = \varepsilon_0 \int_0^t \Phi^2(x^c(\theta)) d\theta, \quad \varepsilon_0 > 0, \quad (17.24)$$

и заменить первое слагаемое неравенства (17.23) правой частью неравенства (17.24). Второе слагаемое левой части неравенства

(17.23) преобразуем следующим образом:

$$\int_0^t \dot{x}^c(\theta) \Phi(x^c(\theta)) d\theta = \int_{x^c(0)}^{x^c(t)} \Phi(x^c) dx^c = \int_0^{x^c(t)} \Phi(x) dx - \int_0^{x^c(0)} \Phi(x) dx. \quad (17.25)$$

Наконец, правую часть неравенства (17.23) оценим с помощью неравенства Коши — Буняковского (приложение 4):

$$\begin{aligned} \int_0^t [f_{\downarrow}^0(\theta) + q\dot{f}_{\downarrow}^0(\theta)] \Phi(x^c(\theta)) d\theta &\leq \\ &\leq \left\{ \int_0^t [f_{\downarrow}^0(\theta) + q\dot{f}_{\downarrow}^0(\theta)]^2 d\theta \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^t \Phi^2(x^c(\theta)) d\theta \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (17.26)$$

Пользуясь (17.24)–(17.26), усилим неравенство (17.23):

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \int_0^t \Phi^2(x^c(\theta)) d\theta + q \int_0^{x^c(t)} \Phi(x) dx &\leq q \int_0^{x^c(0)} \Phi(x) dx + \\ + \left\{ \int_0^t [f_{\downarrow}^0(\theta) + q\dot{f}_{\downarrow}^0(\theta)]^2 d\theta \right\}^{1/2} &\left\{ \int_0^t \Phi^2(x^c(\theta)) d\theta \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (17.27)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} I_{\Phi}^2(t) &= \int_0^t \Phi^2(x^c(\theta)) d\theta \geq 0, \\ I_f^2(t) &= \int_0^t [f_{\downarrow}^0(\theta) + q\dot{f}_{\downarrow}^0(\theta)]^2 d\theta \geq 0, \\ I_x(t) &= \int_0^{x(t)} \Phi(x) dx \geq 0. \end{aligned} \quad (17.28)$$

Тогда неравенство (17.27) запишется более компактно:

$$I_{\Phi}^2(t) + \frac{q}{\varepsilon_0} I_x(t) \leq \frac{1}{\varepsilon_0} I_f(t) I_{\Phi}(t) + \frac{q}{\varepsilon_0} I_x(0). \quad (17.29)$$

Прибавляя к обеим частям этого неравенства $\frac{1}{4\varepsilon_0^2} I_f^2(\infty)$ и замечая, что для исчезающих функций $f_{\downarrow}(t)$ и $\dot{f}_{\downarrow}(t)$, как видно из (17.28),

$$I_f^2(\infty) \geq I_f^2(t), \quad (17.30)$$

преобразуем неравенство (17.29) окончательно к виду

$$\left[I_{\Phi}(t) - \frac{1}{2\varepsilon_0} I_f(\infty) \right]^2 + \frac{q}{\varepsilon_0} I_{x(t)} \leq \frac{1}{4\varepsilon_0^2} I_f(\infty) + \frac{q}{\varepsilon_0} I_{x(0)} = A. \quad (17.31)$$

Правая часть этого неравенства постоянна. При $q \geq 0$ слагаемые левой части неравенства неотрицательны. Отсюда заключаем, что при любом t имеет место неравенство

$$I_{\Phi}^2(t) = \int_0^t \Phi^2(x^c(\theta)) d\theta \leq c_1 < \infty. \quad (17.32)$$

Но из уравнения свободного процесса (17.2) следует, что

$$|x^c(t)| \leq |f_{\downarrow}^0(t)| + \left| \int_0^t \omega(t-\tau) \Phi(x^c(\tau)) d\tau \right|, \quad (17.33)$$

или, в силу неравенства Коши — Буняковского,

$$|x^c(t)| \leq |f_{\downarrow}^0(t)| + \left[\int_0^t \omega^2(t-\tau) d\tau \right]^{1/2} I_{\Phi}(t). \quad (17.34)$$

Для устойчивой линейной части (17.10) при любом t

$$\int_0^t \omega^2(t-\tau) d\tau < \infty.$$

Учитывая ограниченность $I_{\Phi}(t)$, заключаем из (17.34), что $|x^c(t)|$ ограничено, т. е.

$$|x^c(t)| \leq c_2 < \infty.$$

Поскольку $\Phi(x)$ принадлежит сектору $[0, k_0]$, то при ограниченных $|x^c(t)|$ будет также ограничена $\Phi(x^c(t))$, т. е.

$$|\Phi(x^c(t))| \leq c_3 < \infty.$$

При этом условии из выражения для производной процесса (17.15) убеждаемся в ограниченности $|\dot{x}^c(t)|$, так как в силу (17.11)

$$|\dot{x}^c(t)| \leq |f_{\downarrow}(t)| + c_1 |\omega(0)| + c_1 \int_0^t |\omega(t-\tau)| d\tau \leq c_4 < \infty.$$

Если $|x^c(t)|$ и $|\dot{x}^c(t)|$ ограничены, то из ограниченности $I_{\Phi}(t)$ (17.32) следует, что $\Phi(x^c(t))$ стремится при $t \rightarrow \infty$ к нулю, а значит, из условия принадлежности сектору $[0, k_0]$ (17.11) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Это свидетельствует об абсолютной устойчивости состояния равновесия.

Сделанное заключение об абсолютной устойчивости состояния равновесия было основано на предположении неотрицательности $\Gamma(t)$ (17.20). Поэтому неравенство (17.20) для $q \geq 0$ и $0 < k < k_0 + \varepsilon$, а значит, и для $0 < k \leq k_0$ и представляет собой *условие абсолютной устойчивости состояния равновесия*. Таким образом,

для того чтобы состояние равновесия нелинейной автоматической системы с устойчивой линейной частью и характеристикой нелинейного элемента $\Phi(x)$, принадлежащей сектору $[0, k_0]$, было бы абсолютно устойчивым, достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\Gamma(t) = \int_0^t \int_0^\theta \left\{ \omega(\theta - \tau) + q\dot{\omega}(\theta - \tau) + \left[q\omega(0) + \frac{1}{k_0 + \varepsilon} \right] \delta(\theta - \tau) \right\} \Phi(x^c(\theta)) \Phi(x^c(\tau)) d\theta d\tau \geq 0 \quad (17.35)$$

при всех $t \geq 0$, сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ и некотором $q \geq 0$.

Хотя вывод условия абсолютной устойчивости состояния равновесия проведен для $q \geq 0$ и однозначных характеристик нелинейного элемента, далее после вывода частотных неравенств будет показано, что эти неравенства справедливы и для $q < 0$, а при надлежащем выборе знака q также и для гистерезисных (неоднозначных) нелинейных характеристик.

Обратимся к установлению условия абсолютной устойчивости вынужденных процессов $x^b(t)$. В этом случае уравнение свободного процесса (17.2) следует заменить уравнением (17.6). При этом условии принадлежности сектору $(0, k_0)$ (17.11) заменится на

$$\Psi(0, t) = 0, \quad 0 < \frac{\Psi(x^c(t), t)}{x^c(t)} < k_0. \quad (17.36)$$

Поскольку $\Psi(x^c(t), t)$ зависит еще и от t , что соответствует некой нестационарной характеристике нелинейного элемента, то используемое при выводе преобразование (17.25) и третье условие положительности в (17.28) не имеют места. Значит, общее условие абсолютной устойчивости вида (17.35) в этом случае несправедливо. Но если положить $q = 0$, то необходимость в преобразовании (17.25) отпадает. Поэтому, полагая в условии (17.35) $q = 0$ и заменяя в нем $\Phi(x^c)$ на $\Psi(x^c(t), t)$, мы получим *условие абсолютной устойчивости вынужденных процессов*.

Для того чтобы вынужденные процессы $x^B(t)$ в нелинейной автоматической системе с устойчивой линейной частью и преобразованной нелинейной характеристикой $\Psi(x^c(t), t)$, принадлежащей углу $(0, k_0)$, были бы абсолютно устойчивыми, достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\Gamma(t) = \int_0^t \int_0^\theta \left[\omega(\theta - \tau) + \frac{1}{k_0 + \varepsilon} \delta(\theta - \tau) \right] \times \\ \times \Psi(x^c(\theta), \theta) \Psi(x^c(\tau), \tau) d\theta d\tau \geq 0 \quad (17.37)$$

при всех $t \geq 0$ и сколь угодно малом $\varepsilon > 0$.

Это условие абсолютной устойчивости вынужденных процессов можно также назвать условием абсолютной устойчивости нелинейных автоматических систем. Непосредственное применение условий абсолютной устойчивости (17.35) и (17.37) для исследования устойчивости конкретных систем невозможно, так как, с одной стороны, они зависят от неизвестных свободных процессов $x^c(t)$, а с другой стороны, они представляют собой бесконечное множество неравенств. Поэтому дальнейшая задача состоит в установлении на основе этих условий абсолютной устойчивости частотных неравенств, которые были бы эффективно проверяемы и которые можно было бы использовать для формулировки критериев устойчивости.

§ 17.3. Частотные неравенства

Запишем для краткости левую часть условий абсолютной устойчивости состояния равновесия (17.35) в такой форме:

$$\Gamma(t) = \int_0^t \int_0^\theta s(\theta - \tau) y(\theta) y(\tau) d\theta d\tau, \quad (17.38)$$

где обозначено

$$s(t) = \omega(t) + \frac{1}{k_0 + \varepsilon} \delta(t) + q[\dot{\omega}(t) + \omega(0)\delta(t)], \quad (17.39)$$

$$y(t) = \Phi(x^c(t)). \quad (17.40)$$

Поскольку временная характеристика линейной части и ее производная удовлетворяют условию

$$\omega(t) = \dot{\omega}(t) = 0 \quad \text{при } t < 0, \quad (17.41)$$

то и

$$s(t) \equiv 0 \quad \text{при } t < 0. \quad (17.42)$$

Принимая во внимание, что

$$\int_0^t \int_0^\theta s(\theta - \tau) y(\theta) y(\tau) d\theta d\tau = \int_0^t \int_0^t s(\tau - \theta) y(\tau) y(\theta) d\theta d\tau, \quad (17.43)$$

преобразуем $\Gamma(t)$ к виду

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t [s(\theta - \tau) + s(\tau - \theta)] y(\theta) y(\tau) d\tau d\theta. \quad (17.44)$$

Обозначая

$$\hat{s}(\theta - \tau) = \frac{1}{2} [s(\theta - \tau) + s(\tau - \theta)], \quad (17.45)$$

получим

$$\Gamma(t) = \int_0^t \int_0^t \hat{s}(\theta - \tau) y(\theta) y(\tau) d\theta d\tau. \quad (17.46)$$

В отличие от односторонней функции $s(t)$, существующей лишь при $t \geq 0$, функция $\hat{s}(t)$, как видно из (17.45), двусторонняя: она существует как при положительных t , так и при отрицательных t . Спектральная функция $\hat{S}(\omega)$ и соответствующая ей функция времени $\hat{s}(t)$ связаны между собой преобразованием Фурье:

$$\hat{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (17.47)$$

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (17.48)$$

Заменяя в $\hat{s}(t)$ (17.48) аргумент t на $\theta - \tau$ и подставляя $\hat{s}(\theta - \tau)$ в (17.46), получим после очевидных преобразований

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}(\omega) \left\{ \int_0^t \int_0^t e^{j\omega\theta} y(\theta) e^{-j\omega\tau} y(\tau) d\theta d\tau \right\} d\omega, \quad (17.49)$$

или

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}(\omega) \left| \int_0^t e^{-j\omega\tau} y(\tau) d\tau \right|^2 d\omega. \quad (17.50)$$

Условие абсолютной устойчивости состояния равновесия нелинейной системы (17.35) на основании (17.50) запишется в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}(\omega) \left| \int_0^t e^{-j\omega\tau} y(\tau) d\tau \right|^2 d\omega \geq 0. \quad (17.51)$$

Это условие будет выполнено при любых $t \geq 0$, если при всех ω

$$\hat{S}(\omega) \geq 0. \quad (17.52)$$

Найдем явное выражение $\hat{S}(\omega)$. Полагая в (17.45) $t = 0$, получим

$$\hat{S}(\theta) = \frac{1}{2} [s(\theta) - s(-\theta)]$$

и, значит, согласно (17.47)

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [s(\theta) + s(-\theta)] e^{-j\omega\theta} d\theta, \quad (17.53)$$

или

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\infty} s(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta + \int_{-\infty}^0 s(-\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta \right]. \quad (17.54)$$

Производя во втором интеграле замену θ на $-\theta$, получим, что

$$S(j\omega) = \int_0^{\infty} s(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta \quad (17.55)$$

представляет собой спектральную функцию, соответствующую односторонней функции $s(t)$. Следовательно,

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{2} [S(j\omega) + S(-j\omega)] = \operatorname{Re} S(j\omega). \quad (17.56)$$

То есть $\hat{S}(\omega)$ равна вещественной части спектральной функции $S(j\omega)$. Таким образом, условие (17.52) записывается в виде неравенства

$$\operatorname{Re} S(j\omega) \geq 0. \quad (17.57)$$

Но из (17.39) и (17.55) следует, что

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \int_0^{\infty} \left[w(t) + \frac{1}{k_0 + \varepsilon} \delta(t) + q(\dot{w}(t) + w(0)\delta(t)) \right] e^{-j\omega t} dt = \\ &= W(j\omega) + \frac{1}{k_0 + \varepsilon} + jq\omega W(j\omega). \end{aligned} \quad (17.58)$$

Следовательно, неравенство (17.57) запишется в виде частотного неравенства

$$\operatorname{Re} (1 + jq\omega) W(j\omega) + \frac{1}{k_0 + \varepsilon} \geq 0. \quad (17.59)$$

Учитывая, что ε может быть сколь угодно малым положительным числом, неравенство (17.59) можно записать в виде строгого неравенства

$$\operatorname{Re}(1 + qj\omega)W(j\omega) + \frac{1}{k_0} > 0, \quad q \geq 0, \quad (17.60)$$

которое и является частотным критерием абсолютной устойчивости. В него входит частотная характеристика линейной части системы $W(j\omega)$, граничное значение k_0 сектора $[0, k_0]$, которому принадлежит семейство нелинейных характеристик $\Phi(x)$, и отрицательное вещественное число q .

Для того чтобы показать, что частотное неравенство, при выполнении которого обеспечивается абсолютная устойчивость состояния равновесия нелинейной автоматической системы, справедливо и для $q < 0$, преобразуем тождественно схему нелинейной автоматической системы на рис. 17.1. Введем обратное соединение линейной части с усилительным элементом, коэффициент усиления которого равен k_0 , и параллельное соединение

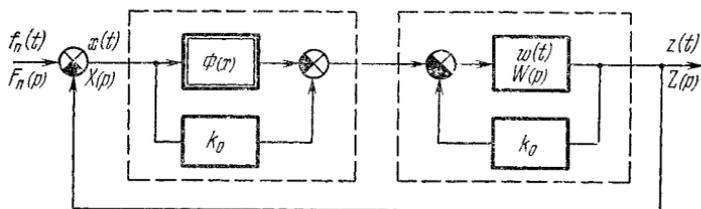


Рис 17.3.

нелинейного элемента с таким же усилительным элементом, а затем изменим знак у выхода нелинейного элемента и входа обратного соединения (рис. 17.3). При этом, как легко видеть,

$$F_n(p) = \frac{F(p)}{1 + k_0 W(p)}. \quad (17.61)$$

Характеристика преобразованного нелинейного элемента и передаточная функция преобразованной линейной части будут равны соответственно

$$\Phi_n(x) = k_0 x - \Phi(x) \quad (17.62)$$

и

$$W_n(p) = -\frac{W(p)}{1 + k_0 W(p)}. \quad (17.63)$$

Поскольку эквивалентные преобразования не изменяют свойства системы, то если была абсолютно устойчива исходная нелиней-

ная система, преобразованная нелинейная система также будет абсолютно устойчивой. Так как

$$\frac{\Phi_{\Pi}(x)}{x} = k_0 - \frac{\Phi(x)}{x},$$

то из неравенства

$$0 \leq \frac{\Phi(x)}{x} \leq k_0$$

следует неравенство

$$0 \leq \frac{\Phi_{\Pi}(x)}{x} \leq k_0,$$

т. е. характеристика преобразованного нелинейного элемента принадлежит тому же сектору, что и характеристика исходного нелинейного элемента. Применим частотное неравенство (17.59) к преобразованной нелинейной системе. Частотная характеристика линейной части преобразованной системы находится из (17.63) при $p = j\omega$:

$$W_{\Pi}(j\omega) = - \frac{W(j\omega)}{1 + k_0 W(j\omega)}.$$

Поэтому частотное условие устойчивости состояния равновесия преобразованной системы примет вид

$$\operatorname{Re}(1 + qj\omega) W_{\Pi}(j\omega) + \frac{1}{k_0} > 0, \quad q \geq 0. \quad (17.64)$$

Подставляя в левую часть неравенства выражение для $W_{\Pi}(j\omega)$, после простых преобразований получим

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re}(1 + qj\omega) \frac{W(j\omega)}{1 + k_0 W(j\omega)} + \frac{1}{k_0} &= \operatorname{Re} \frac{1 - k_0 qj\omega W(j\omega)}{k_0 (1 + k_0 W(j\omega))} = \\ &= \frac{1}{|1 + k_0 W(j\omega)|^2} \left\{ \operatorname{Re}(1 - qj\omega) W(j\omega) + \frac{1}{k_0} \right\} > 0. \end{aligned}$$

Так как первый из множителей положителен, то частотное неравенство (17.64) будет выполняться одновременно с неравенством

$$\operatorname{Re}(1 - qj\omega) W(j\omega) + \frac{1}{k_0} > 0, \quad q \geq 0. \quad (17.65)$$

Таким образом, из частотного условия устойчивости состояния равновесия преобразованной системы (17.64) мы получили частотное условие устойчивости состояния равновесия исходной системы (17.65), в которое, в отличие от (17.64), входит параметр q с обратным знаком. Но так как эквивалентное преобразование исходной нелинейной системы не изменяет абсолютной устойчивости, то из (17.65) следует, что для однозначных характеристик нелинейных элементов в частотном неравенстве (17.60)

параметр q может принимать любые вещественные значения, т. е. $-\infty < q < \infty$.

Рассмотрим теперь те случаи, когда нелинейный элемент обладает гистерезисом, т. е. неоднозначной характеристикой. Гистерезис, как уже отмечалось в гл. 15, может быть отрицательным

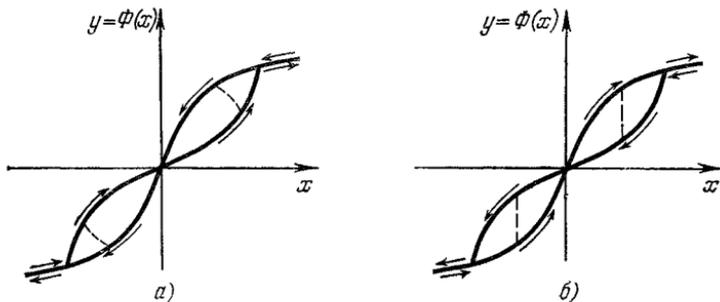


Рис 17.4

(рис. 17.4, а) и положительным (рис. 17.4, б). Для неоднозначной характеристики интеграл

$$I_{x(t)} = \int_0^{x(t)} \Phi(x) dx \quad (17.66)$$

представляет собой приращение площади при произвольном изменении $x(t)$ от $x(0) = 0$. Для отрицательного гистерезиса $I_{x(t)}$ всегда неотрицателен, и поэтому вывод, приведенный для однозначной характеристики, при $q \geq 0$ остается справедливым. Следовательно, для отрицательного гистерезиса частотное неравенство совпадает с (17.60). Для положительного гистерезиса знак $I_{x(t)}$ зависит от характера изменения $x(t)$, который, естественно, заранее нам неизвестен. Однако, как нетрудно видеть, преобразование (17.61) превращает характеристику с положительным гистерезисом в характеристику с отрицательным гистерезисом. Но для преобразованной нелинейной системы с отрицательным гистерезисом справедливо частотное неравенство (17.65). Это же частотное неравенство справедливо и для исходной системы с положительным гистерезисом. Оно отличается от частотного неравенства (17.60) лишь тем, что теперь параметр $q \leq 0$.

Условие абсолютной устойчивости вынужденных процессов (17.37) получается из условия абсолютной устойчивости состояния равновесия (17.35) при $q = 0$ и замене $\Phi(x^c(t))$ на $\Psi(x^c(t), t)$. Но частотные неравенства не зависят от нелинейных характеристик. Поэтому, полагая в частотных неравенствах (17.60) $q = 0$, получим частотное неравенство абсолютной

устойчивости вынужденных процессов:

$$\operatorname{Re} W(j\omega) + \frac{1}{k_0} > 0. \quad (17.67)$$

Отметим, что это же частотное неравенство обеспечивает абсолютную устойчивость состояния равновесия нелинейной системы с нестационарной характеристикой нелинейного элемента вида

$$y = \Phi(x^c(t), t). \quad (17.68)$$

§ 17.4. Критерий абсолютной устойчивости состояния равновесия

Критерий абсолютной устойчивости состояния равновесия нелинейной системы представляет собой геометрическую интерпретацию частотного неравенства

$$\operatorname{Re}(1 + qj\omega) W(j\omega) + \frac{1}{k_0} > 0,$$

причем для однозначной стационарной характеристики нелинейного элемента

$$-\infty < q < \infty, \quad (17.69)$$

для неоднозначной характеристики с отрицательным гистерезисом

$$0 \leq q < \infty, \quad (17.69')$$

для неоднозначной характеристики с положительным гистерезисом

$$-\infty < q \leq 0, \quad (17.69'')$$

для нестационарной однозначной и неоднозначной характеристики

$$q = 0. \quad (17.69''')$$

Представим частотную характеристику линейной части в виде

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega). \quad (17.70)$$

Тогда, после подстановки $W(j\omega)$ в частотное неравенство и выделения действительной части, получаем

$$U(\omega) - q\omega V(\omega) + \frac{1}{k_0} > 0. \quad (17.71)$$

Введем понятие *модифицированной* частотной характеристики линейной части:

$$W_m(j\omega) = U_m(\omega) + jV_m(\omega), \quad (17.72)$$

где

$$U_m(\omega) = U(\omega), \quad V_m(\omega) = \omega V(\omega). \quad (17.73)$$

Модифицированная частотная характеристика $W_M(j\omega)$ отличается от обычной $W(j\omega)$ лишь изменением масштаба мнимой части в ω раз (рис. 17.5). На плоскости модифицированной частотной характеристики уравнение

$$U_M(\omega) - qV_M(\omega) + \frac{1}{k_0} = 0 \quad (17.74)$$

определяет прямую, проходящую через точку оси абсцисс $-\frac{1}{k_0}$ с наклоном $\frac{1}{q}$ (рис. 17.5). Для краткости будем называть эту прямую (q, k_0) -прямой, или *прямой В. Попова*.

Тогда, очевидно, частотное неравенство (17.60) или, что эквивалентно, (17.71) выполняется, если модифицированная частотная характеристика расположена справа от (q, k_0) -прямой. Таким образом, критерий абсолютной устойчивости состояния равновесия нелинейной системы можно сформулировать в следующей форме.

Частотный критерий I (линейный критерий). Состояние равновесия $x^c = 0$ нелинейной системы с устойчивой линейной частью будет абсолютно устойчивым, если характеристика нелинейного элемента $\Phi(x)$ принадлежит сектору $[0, k_0]$ или, что то же, если коэффициент статической линеаризации $k^{(c)}(x)$ принадлежит полосе $[0, k_0]$ и модифицированная частотная характеристика линейной части $W_M(j\omega)$ не пересекает (q, k_0) -прямую.

Область, определяющая выбор q , зависит от нестационарности и свойств характеристики нелинейного элемента (17.69) — (17.69'''). Так, рис. 17.5 свидетельствует об абсолютной устойчивости состояния равновесия нелинейных систем с устойчивой линейной частью и однозначной характеристикой нелинейного элемента. Если же нелинейный элемент обладает гистерезисом, то рис. 17.6, а соответствует абсолютной устойчивости состояния равновесия при положительном гистерезисе, а рис. 17.6, б — при отрицательном гистерезисе. Сопоставляя эту формулировку частотного критерия абсолютной устойчивости состояния равновесия нелинейной системы с частотным критерием устойчивости

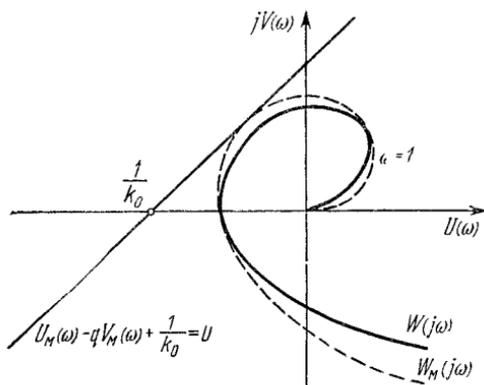


Рис. 17.5

линейной системы (§ 11.3), замечаем, что теперь роль точки $(-\frac{1}{k_0}, j0)$ или отрезка $(-\infty, -\frac{1}{k_0})$ играет (q, k_0) -прямая.

Частотный критерий абсолютной устойчивости состояния равновесия нелинейной системы впервые был сформулирован

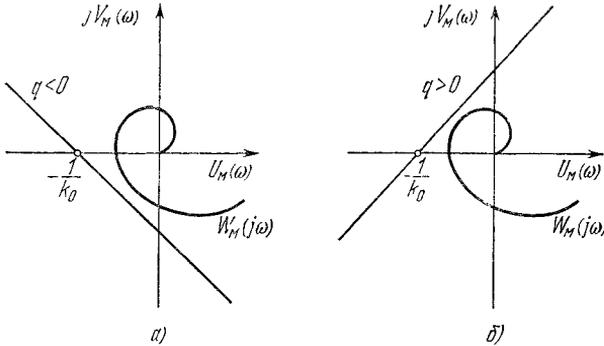


Рис. 17.6.

В. Поповым. Поэтому частотные критерии абсолютной устойчивости обычно называются критериями абсолютной устойчивости Попова

§ 17.5. Общий критерий абсолютной устойчивости состояния равновесия

Предположим теперь, что линейная часть системы может быть нейтральна ($s_n = 0$) и даже неустойчива ($s_n \neq 0$). Тогда, как известно, линеаризованная система, получаемая заменой нелинейного элемента $\Phi(x)$ линейным kx , при достаточно малых k будет неустойчива. Поэтому, чтобы охватить и эти случаи, условие принадлежности $\Phi(x)$ сектору $[0, k_0]$ или условие принадлежности $k^{(c)}(x)$ полосе $[0, k_0]$ нужно заменить условием принадлежности $\Phi(x)$ сектору (r, k_0) или условием принадлежности $k^{(c)}(x)$ полосе (r, k_0) , г. е.

$$r < \frac{\Phi(x)}{x} < k_0 \tag{17.75}$$

или

$$r < k^{(c)}(x) < k_0. \tag{17.76}$$

Для получения критерия устойчивости произведем эквивалентное преобразование исходной нелинейной системы (рис. 17.1), аналогичное тому, которое было приведено на рис. 17.3, но с той лишь разницей, что теперь коэффициент усиления усилительных

элементов выберем равным не k_0 , а r и не будем менять знак у выхода нелинейного элемента и входа обратного соединения. При таком эквивалентном преобразовании мы получим схему, изображенную на рис. 17.7. Выберем такое значение $r < k_0$, при

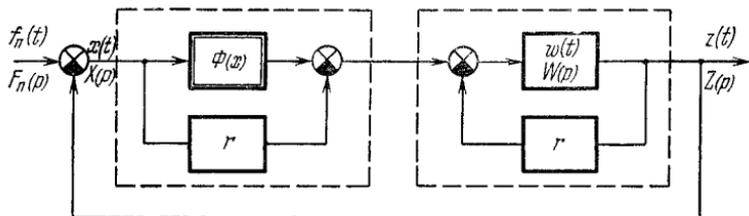


Рис. 17.7

котором преобразованная линейная часть устойчива. При таком преобразовании исходной структуры вместо (17.61) будем иметь

$$F_n(p) = \frac{F(p)}{1 + rW(p)}, \quad (17.77)$$

а характеристика преобразованного нелинейного элемента и передаточная функция линейной части будут равны соответственно

$$\Phi_n(x) = \Phi(x) - rx \quad (17.78)$$

и

$$W_n(p) = \frac{W(p)}{1 + rW(p)}. \quad (17.79)$$

Так как

$$\frac{\Phi_n(x)}{x} = \frac{\Phi(x)}{x} - r, \quad (17.80)$$

то из неравенства (17.75) следует неравенство

$$0 < \frac{\Phi_n(x)}{x} < k_0 - r, \quad (17.81)$$

т. е. характеристика преобразованного нелинейного элемента принадлежит сектору $(0, k_0 - r)$. Применяя к преобразованной системе частотное неравенство (17.60), получим

$$\operatorname{Re}(1 + qj\omega) W_n(j\omega) + \frac{1}{k_0 - r} > 0. \quad (17.82)$$

Но так как при $p = j\omega$ из (17.79) с учетом (17.70) следует, что

$$W_n(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1 + rW(j\omega)} = \frac{U(\omega) + jV(\omega)}{1 + rU(\omega) + jrV(\omega)}, \quad (17.83)$$

то частотное неравенство (17.82) запишется в виде

$$\operatorname{Re}(1 + qj\omega) \frac{U(\omega) + jV(\omega)}{1 + rU(\omega) + jrV(\omega)} + \frac{1}{k_0 - r} > 0. \quad (17.84)$$

После простых преобразований и выделения действительной части получаем

$$U^2(\omega) + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{k_0}\right) U(\omega) - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k_0}\right) q\omega V(\omega) + V^2(\omega) + \frac{1}{k_0 r} > 0. \quad (17.85)$$

Но уравнение

$$U^2(\omega) + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{k_0}\right) U(\omega) - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k_0}\right) q\omega V(\omega) + V^2(\omega) + \frac{1}{k_0 r} = 0 \quad (17.86)$$

на плоскости модифицированной частотной характеристики $W_M(j\omega)$ определяет параболу, проходящую через точки оси абсцисс $-\frac{1}{r}$, $-\frac{1}{k_0}$. Касательные к параболе в точках $-\frac{1}{r}$ и $-\frac{1}{k_0}$ имеют наклоны $-\frac{1}{q}$ и $\frac{1}{q}$ и пересекаются в точке a (рис. 17.8). Будем называть эту параболу (q, k_0, r) -параболой. Выполнение частотного неравенства соответствует расположению модифицированной частотной характеристики линейной части $W_M(j\omega)$ вне (q, k_0, r) -параболы. Таким образом, критерий абсолютной устойчивости состояния равновесия нелинейной системы можно сформулировать в такой форме.

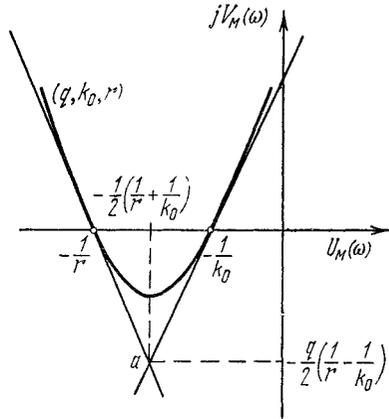


Рис. 17.8.

Частотный критерий II (параболический критерий). Состояние равновесия $x^e = 0$ нелинейной системы будет абсолютно устойчивым, если характеристика нелинейного элемента $\Phi(x)$ принадлежит сектору (r, k_0) или, что то же, если коэффициент статической линеаризации $k^{(e)}(x)$ принадлежит полосе (r, k_0) , а модифицированная частотная характеристика линейной части $W_M(j\omega)$ не пересекает (q, k_0, k) -параболы (рис. 17.9).

При стремлении r к нулю (q, k_0, r) -парабола вырождается в (q, k_0) -прямую (рис. 17.6) и частотный критерий II (параболический)

ческий критерий) сводится к частотному критерию 1 (линейному критерию). Заметим, что параболический критерий может

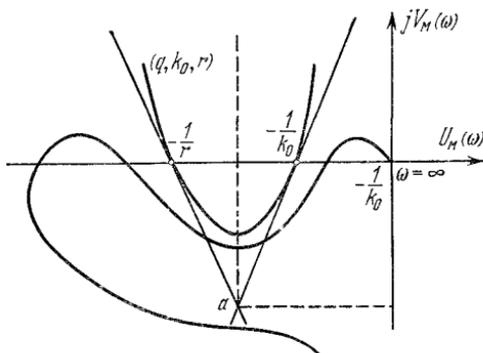


Рис. 17.9

выполняться в случае нейтральной и неустойчивой линейной части лишь при индексе аperiodической нейтральности s_a не больше 2 и индексе неустойчивости s_n не больше 1. Это связано с тем, что в любом ином случае (q, k_0, r) -парабола обязательно будет пересечена модифицированной частотной характеристикой.

§ 17.6. Критерий абсолютной устойчивости состояния равновесия при нестационарной нелинейной характеристике

Рассмотрим нелинейную систему, структура которой изображена на рис. 17.3, но с той лишь разницей, что характеристика нелинейного элемента нестационарна:

$$y = \Phi(x, t). \quad (17.87)$$

Предположим, что она удовлетворяет условиям принадлежности $\Phi(x, t)$ сектору (r, k_0) при любом t (рис. 17.10):

$$\begin{aligned} \Phi(0, t) &= 0, \\ r &< \frac{\Phi(x, t)}{x} < k_0. \end{aligned} \quad (17.88)$$

В этом случае коэффициент статической линеаризации $k^{(c)}(x, t)$ при любом t принадлежит полосе

$$r < k^{(c)}(x, t) < k_0. \quad (17.89)$$

В случае нестационарной характеристики нелинейного элемента в частотном неравенстве следует положить $q = 0$. А значит, нуж-

но положить $q = 0$ и в частотном неравенстве (17.85). Тогда получим

$$U^2(\omega) + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{k_0}\right)U(\omega) + V^2(\omega) + \frac{1}{k_0 r} > 0. \quad (17.90)$$

Теперь уравнение (17.86) при $q = 0$ имеет вид

$$U^2(\omega) + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{k_0}\right)U(\omega) + V^2(\omega) + \frac{1}{k_0 r} = 0. \quad (17.91)$$

На плоскости не модифицированной, а обычной частотной характеристики $W(j\omega)$ (17.91) определяет окружность с центром

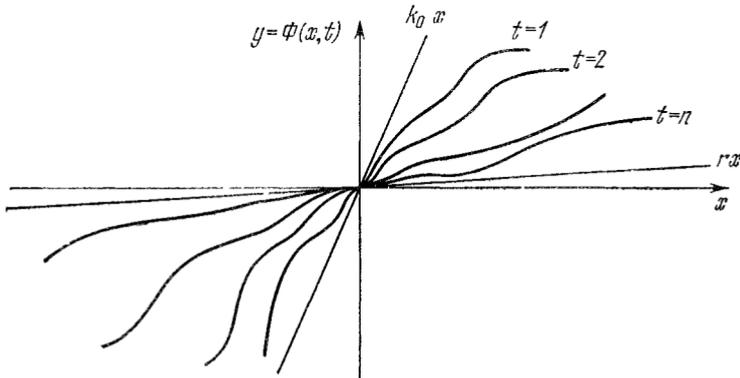


Рис. 17.10.

на действительной оси и пересекающую последнюю в точках $-\frac{1}{r}$, $-\frac{1}{k_0}$ (рис. 17.11). Будем называть эту окружность

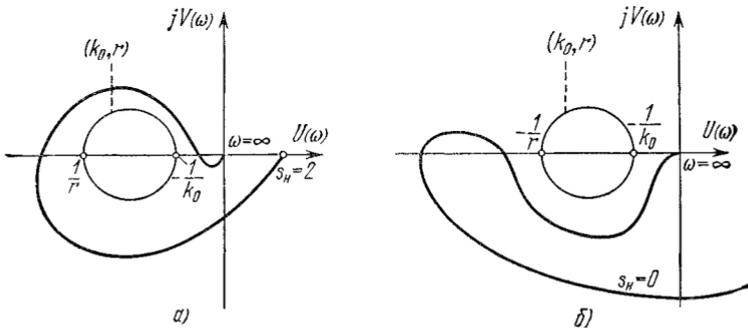


Рис. 17.11.

(k_0, r) -окружностью. Выполнение частотного неравенства (17.90) соответствует расположению частотной характеристики линейной части вне (k_0, r) -окружности. Поэтому критерий абсолютной

устойчивости состояния равновесия нелинейной системы с нестационарной нелинейной характеристикой можно сформулировать в следующей форме.

Частотный критерий III (круговой критерий). Состояние равновесия $x^c = 0$ нелинейной системы с нестационарной нелинейной характеристикой будет абсолютно устойчивым, если характеристика нелинейного элемента $\Phi(x, t)$ при всех t принадлежит сектору (r, k_0) или, что то же, если коэффициент статической линеаризации $k^{(c)}(x, t)$ при всех t принадлежит полосе (r, k_0) , а частотная характеристика линейной части $W(j\omega)$, не пересекая (k_0, r) -окружности, охватывает ее в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки, $s_H/2$ раз, где s_H — индекс неустойчивости (рис. 17.11, а).

В частном случае, если $s_H = 0$, то $W(j\omega)$ не должна охватывать (k_0, r) -окружность (рис. 17.11, б).

§ 17.7. Общий критерий устойчивости процессов

Уравнение свободного процесса, определяющее устойчивость вынужденного процесса $x^B(t)$, отличается от уравнения свободного процесса (17.6), определяющего устойчивость состояния равновесия $x^c = 0$, лишь конкретизацией нестационарной нелинейной характеристики. Поэтому для установления критерия устойчивости вынужденного режима воспользоваться частотным критерием III (круговым частотным критерием). Рассмотрим условия принадлежности $\Psi(x^c(t), t)$ сектору (r, k_0)

$$\Psi(0, t) = 0$$

и

$$r < \frac{\Psi(x^c, t)}{x^c} < k_0.$$

Подставляя выражение для $\Psi(x^c(t), t)$ из (17.7), получим

$$\begin{aligned} \Psi(0, t) &= \Phi(x^c(t)) - \Phi(x^c(t)) \equiv 0, \\ r < \frac{\Phi(x^c(t) + x^B(t)) - \Phi(x^B(t))}{x^c(t)} < k_0. \end{aligned} \quad (17.92)$$

Но для любой кусочно-непрерывной функции

$$\frac{\Phi(x^c(t) + x^B(t)) - \Phi(x^B(t))}{x^c(t)} = \Phi'(\vartheta x^c(t)), \quad (17.93)$$

где $0 \leq \vartheta \leq 1$. Поэтому второе из условий (17.92) эквивалентно условию

$$r < \Phi'(x^c(t)) < k_0. \quad (17.94)$$

Но

$$\Phi'(x^c(t)) = k^{(x)}(x^c(t)) \quad (17.95)$$

представляет собой коэффициент дифференциальной линеаризации. Значит, условие принадлежности $\Psi(x^c, t)$ сектору (r, k_0) эквивалентно условию принадлежности коэффициента дифференциальной линеаризации нелинейного элемента $k^{(n)}(x^c(t))$ полосе (r, k_0) . Таким образом, критерий абсолютной устойчивости процессов, или критерий абсолютной устойчивости нелинейных систем, можно сформулировать в следующей форме.

Частотный критерий IV (круговой критерий). *Вынужденные процессы в нелинейной системе будут абсолютно устойчивыми, если производная характеристики нелинейного элемента $\Phi'(x)$ или, что то же, коэффициент дифференциальной линеаризации $k^{(n)}(x)$ принадлежит полосе (r, k_0) и частотная характеристика линейной части $W(j\omega)$, не пересекая (k_0, r) -окружности, охватывает ее в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки, $s_H/2$ раз, где s_H — индекс неустойчивости (рис. 17.11, а).*

В частном случае при $s_H = 0$ частотная характеристика линейной части $W(j\omega)$ не должна охватывать (k_0, r) -окружность (рис. 17.11, б).

Круговые критерии (критерии III, IV) по своей формулировке аналогичны обычному частотному критерию устойчивости линейных систем, но теперь роль точки

$(-\frac{1}{k_0}, j0)$ или также отрезка (k_0, r) играет (k_0, r) -окружность (рис. 17.12). Требования абсолютной устойчивости нелинейных систем более жесткие, чем требования устойчивости линейных систем. Так, для частотной характеристики I (рис. 17.12) линейная система будет устойчива, тогда как об абсолютной устойчивости нелинейной системы ничего сказать нельзя, так как все критерии абсолютной устойчивости являются лишь достаточными.

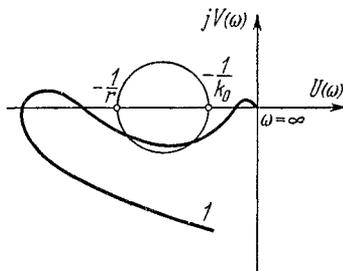


Рис. 17.12.

§ 17.8. Об устойчивости «в малом» и «в большом»

Рассмотрим нелинейную систему с произвольной характеристикой нелинейного элемента $\Phi(x)$ (рис. 17.13). Представим $\Phi(x)$ в виде

$$\Phi(x) = \Phi'(0)x + \delta\Phi(x),$$

где $\delta\Phi(x)$ содержит степени x не ниже второй. Используя обозначение коэффициента дифференциальной линеаризации,

запишем $\Phi(x)$ в виде

$$\Phi(x) = k^{(x)}(0)x + \delta\Phi(x). \quad (17.96)$$

Предположим, что линеаризованная система, в которой $\Phi(x)$ заменено на $k^{(x)}(0)x$, устойчива. Это значит согласно частотному критерию устойчивости линейных систем (см. § 11.3), что частотная характеристика линейной части системы $W(j\omega)$ охватывает точку $\left(-\frac{1}{k^{(x)}(0)}, j0\right)$ в положительном направлении $s_H/2$ раз, где s_H — индекс неустойчивости (рис. 17.14). Проведем

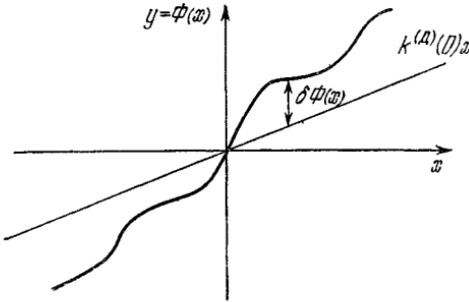


Рис. 17.13.

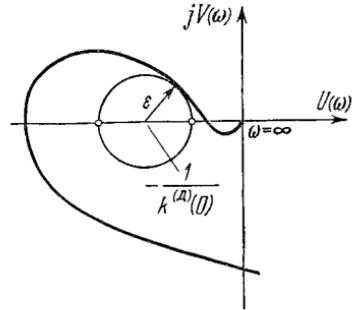


Рис. 17.14.

на плоскости W окружность достаточно малого радиуса ε с центром в точке $\left(-\frac{1}{k^{(x)}(0)}, j0\right)$ так, чтобы она не пересекалась с $W(j\omega)$. Эта окружность представляет собой не что иное, как $(k^{(x)}(0) + \varepsilon, k^{(x)}(0) - \varepsilon)$ -окружность, и она определяет сектор $(k^{(x)}(0) + \varepsilon, k^{(x)}(0) - \varepsilon)$, которому принадлежит начальная часть характеристики нелинейного элемента. Всегда можно выбрать такое малое $\eta = \sup |f(t)|$ или $\eta = \sup |\dot{f}_\downarrow(t) + \dot{f}_\downarrow^0(t)|$, что x не будет выходить за пределы начальной части характеристики $\Phi(x)$, принадлежащей сектору $(k^{(x)}(0) - \varepsilon, k^{(x)}(0) + \varepsilon)$. В этом случае выполняются условия кругового частотного критерия (критерий IV), но при малых отклонениях x от нуля. Отсюда мы приходим к выводу, что

нелинейная система будет устойчива «в малом», если соответствующая ей линеаризованная система устойчива.

Устойчивость «в малом» лишь констатирует факт устойчивости, но не определяет каких-либо границ области устойчивости. Увеличим ε до величины, при которой $(k^{(x)}(0) + \varepsilon, k^{(x)}(0) - \varepsilon)$ -окружность касается частотной характеристики линейной части (рис. 17.14). При этом раствор сектора $(k^{(x)}(0) - \varepsilon, k^{(x)}(0) + \varepsilon)$ увеличится до максимально возможного при заданном $k^{(x)}(0)$.

Характеристика $\Phi(x)$ нелинейного элемента принадлежит сектору $(k^{(x)}(0) - \varepsilon, k^{(x)}(0) + \varepsilon)$ для ограниченных значений x , а вне некоторого отрезка она выходит за пределы сектора. Если величину $\eta = \sup |f(t)|$ или $\eta = \sup |\dot{f}_\downarrow(t) + \dot{f}_\downarrow^0(t)|$ ограничить так, чтобы x удовлетворяло неравенству $|x| \leq \text{const}$, то нелинейная система будет устойчива «в большом». Легко установить аналогичным путем факт устойчивости «в малом» и «в большом» при других способах линеаризации. Применению частотных критериев абсолютной устойчивости состояния равновесия и процессов для исследования устойчивости конкретных систем и установления закономерностей, связанных с абсолютной устойчивостью, посвящена следующая глава.

Задачи

17.1. Использовать результаты задачи 15.5 для установления кругового критерия абсолютной устойчивости.

17.2. Показать, что геометрическая интерпретация условия устойчивости при $q \neq 0$ и $k > r \geq 0$

$$\left| W(j\omega) - \frac{k+r-j\omega q(k-r)}{2kr} \right|^2 - \left(\frac{k-r}{2kr} \right)^2 (1+q^2\omega^2) > 0$$

состоит в том, что частотная характеристика $W(j\omega)$ линейной части системы должна располагаться при $\omega \geq 0$ вне окружности с центром в точке

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{2} jq\omega \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k} \right),$$

пересекающей действительную ось в точках $-\frac{1}{r}, -\frac{1}{k}$.

17.3. Показать, что $q = 0$ в задаче 17.2 соответствует обычному круговому критерию абсолютной устойчивости.

ИССЛЕДОВАНИЕ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 18.1. Абсолютная устойчивость состояния равновесия типовых систем

Исследование абсолютной устойчивости состояния равновесия нелинейной автоматической системы основано на применении линейного или параболического критериев, в которых фигурирует модифицированная частотная характеристика

$$W_M(j\omega) = U_M(\omega) + jV_M(\omega) = U(\omega) + j\omega V(\omega).$$

Напомним, что $U(\omega)$ и $V(\omega)$ представляют собой действительную и мнимую части обычной частотной характеристики линейной части $W(j\omega)$. Значения $W_M(j\omega)$ и $W(j\omega)$ совпадают при $\omega = 1$ и на действительной оси, где $V(\omega) = 0$ (рис. 18.1, а). При $\omega = \infty$ значения $W_M(j\omega)$ и $W(j\omega)$ также совпадают, если степень r передаточной функции $W(p)$ больше единицы, т. е. $r = n - m > 1$. Если же $r = n - m = 1$, то

$$V_M(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega V(\omega) = a < 0$$

и, следовательно, значение модифицированной частотной характеристики $W_M(j\omega)$ при $\omega = \infty$ будет расположено не в начале координат, а на отрицательной мнимой оси (рис. 18.1, б). Отмеченные свойства позволяют, с одной стороны, легко построить $W_M(j\omega)$ по $W(j\omega)$, а с другой стороны, выяснить возможности, когда об абсолютной устойчивости состояния равновесия нелинейной системы можно судить непосредственно по частотной характеристике $W(j\omega)$ линейной части системы.

Если модифицированная частотная характеристика $W_M(j\omega)$ построена, то, применяя линейный или параболический критерий, нетрудно определить границы изменения статического коэффициента усиления нелинейного элемента $k^{(c)}(x)$, при котором обеспечивается абсолютная устойчивость состояния равновесия нелинейной системы. Наибольшая верхняя граница достигается

в том случае, когда прямая (рис. 18.2, а) или парабола (рис. 18.2, б) проведены так, что они касаются модифицированной частотной характеристики $W_M(j\omega)$ и при этом правый конец

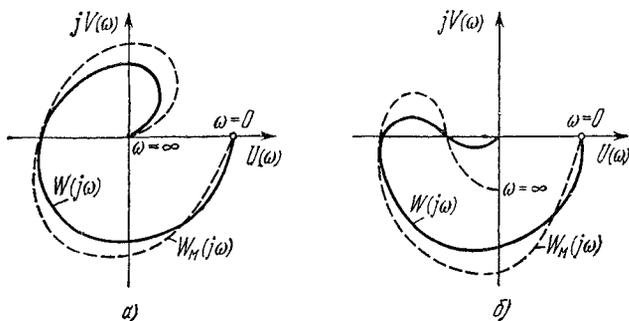


Рис. 18.1

отрезка $(-\frac{1}{k_0}, a)$, отсекаемого ими на вещественной оси, минимален по абсолютному значению. В тех случаях, когда прямую можно провести так, чтобы она касалась модифицированной частотной характеристики $W_M(j\omega)$ в точке пересечения ее с

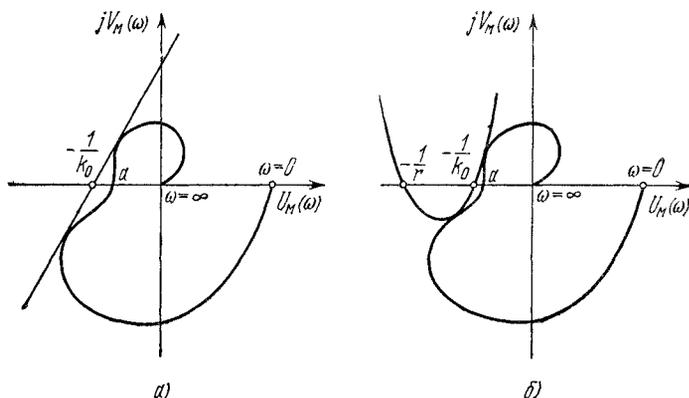


Рис 18.2.

вещественной осью и $W_M(j\omega)$ была бы расположена справа от этой прямой (рис. 18.3), границы изменения статического коэффициента линеаризации совпадают с границей устойчивости по коэффициенту усиления линеаризованной системы. Для подобных нелинейных систем задача исследования абсолютной устойчивости сводится к исследованию устойчивости соответствующей

линеаризованной системы на основе известных критериев устойчивости, приведенных в гл. 10.

Рассмотрим типовые автоматические системы, состоящие из соединения нелинейного элемента и линейной части. Предполо-

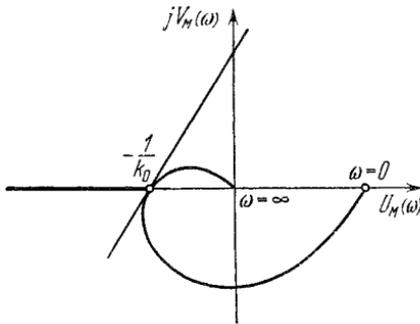


Рис. 18.3.

жим, что частотная характеристика линейной части системы $W(j\omega)$ целиком лежит справа от касательной, проведенной в самой левой точке пересечения с действительной осью. Выясним, когда этим свойством будет обладать и модифицированная частотная характеристика.

Пусть ω_r — частота, соответствующая самой левой точке пересечения частотной характеристики с действительной

осью. При монотонно убывающем модуле частотной характеристики это — минимальный отличный от нуля корень уравнения $V(\omega) = 0$. Уравнение касательной имеет вид

$$V_1(\omega) = \frac{V'(\omega_r)}{U'(\omega_r)} [U_1(\omega) - U(\omega_r)],$$

где $U_1(\omega)$ и $V_1(\omega)$ — абсцисса и ордината касательной. Если модуль частотной характеристики $W(j\omega)$ убывает, то для её ординаты справедливо неравенство

$$V(\omega) \leq \frac{V'(\omega_r)}{U'(\omega_r)} [U_1(\omega) - U(\omega_r)]. \quad (18.1)$$

Умножим обе части неравенства на $\omega > 0$, получим неравенство для ординаты модифицированной частотной характеристики

$$V_M(\omega) \leq \frac{\omega V'(\omega_r)}{U'(\omega_r)} [U_1(\omega) - U(\omega_r)]. \quad (18.2)$$

Сравнивая это неравенство с неравенством

$$V_M(\omega) \leq \frac{V'_M(\omega_r)}{U'(\omega_r)} [U_1(\omega) - U(\omega_r)], \quad (18.3)$$

заметим, что последнее неравенство выполняется при $0 \leq \omega \leq \omega_r$, так как

$$V(\omega_r) = V_M(\omega_r) = 0, \quad V'_M(\omega_r) = \omega_r V'(\omega_r).$$

Кроме того, для выполнения (18.2) при $\omega = \omega_r$ необходимо выполнение (18.1). Если действительная часть частотной характеристики принимает в точке ω_r минимальное значение, то этого достаточно для выполнения неравенства (18.3). Следовательно,

если модуль частотной характеристики системы убывает с ростом ω , то модифицированная характеристика будет лежать справа от касательной, проведенной в самой левой точке пересечения ее с действительной осью. В этом случае об абсолютной устойчивости нелинейной системы можно судить по устойчивости линеаризованной системы.

Предположим, что передаточная функция линейной части системы имеет вид

$$W(p) = \frac{1}{Q(p)}, \quad (18.4)$$

где $Q(p)$ — многочлен n -й степени, корни которого все вещественны и отрицательны. Один из нулей многочлена $Q(p)$ может быть равен нулю. Степень этой передаточной функции равна порядку, т. е. n , а индексы неустойчивости, неминимально-фазовости и колебательности равны нулю. Полагая в (18.4) $p = j\omega$, находим частотную характеристику линейной части:

$$W(j\omega) = \frac{1}{Q(j\omega)} = \frac{1}{|Q(j\omega)|} e^{-i \arg Q(j\omega)}.$$

При возрастании ω от 0 до ∞ модуль частотной характеристики и ее фаза монотонно убывают. В этом случае границы изменения статического коэффициента линеаризации, обеспечивающие абсолютную устойчивость состояния равновесия, совпадают с предельными.

Для системы второго порядка абсолютная устойчивость состояния равновесия будет иметь место при любой однозначной характеристике нелинейного элемента, расположенной в первом и третьем квадрантах (рис. 18.4, а), а для систем выше второго порядка абсолютная устойчивость состояния равновесия будет иметь место, когда характеристика нелинейного элемента будет однозначна и расположена в секторе $(0, k_{гп})$ (рис. 18.4, б), где $k_{гп}$ — граничный коэффициент усиления соответствующей линейной системы.

Эти выводы остаются справедливыми и для характеристик нелинейного элемента, обладающих отрицательным гистерезисом. Заметим, что в этих случаях условия абсолютной устойчи-

ности состояния равновесия являются не только достаточными, но и необходимыми. Таким образом,

для типовых автоматических систем, передаточная функция линейных частей которых определяется выражением (18.1), исследование абсолютной устойчивости состояния равновесия сводится к исследованию устойчивости соответствующей линейной системы.

Это обстоятельство позволяет использовать результаты исследования устойчивости линейных систем для исследования абсолютной устойчивости нелинейных систем. Итак,

чтобы состояние равновесия типовой нелинейной системы было абсолютно устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы статический коэффициент линеаризации $k^{(c)}(x) = \frac{\Phi(x)}{x}$ нелинейного элемента при всех x был положителен и не превосходил граничного коэффициента усиления $k_{гр}$ линеаризованной системы, т. е.

$$0 < k^{(c)}(x) < k_{гр}.$$

Этот же вывод остается справедливым и для типовых систем с

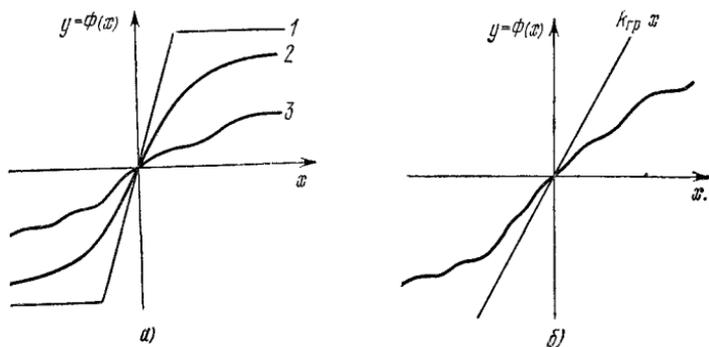


Рис. 18.4.

запаздыванием, передаточная функция линейной части которых отличается от (18.4) наличием множителя $e^{-p\tau}$, т. е.

$$W_{\tau}(p) = \frac{e^{-p\tau}}{Q(p)}.$$

Частотная характеристика линейной части в этом случае равна

$$W_{\tau}(j\omega) = \frac{e^{-j\omega\tau}}{Q(j\omega)} = \frac{1}{|Q(j\omega)|} e^{-j[\arg Q(j\omega) + \tau\omega]}.$$

Ее модуль и фаза монотонно убывают при возрастании ω от 0 до ∞ .

В общем же случае линейный критерий абсолютной устойчивости состояния равновесия является лишь достаточным.

Пример. Рассмотрим систему, передаточная функция линейной части которой равна

$$W(p) = \frac{16}{p(p+1)(p^2 + 0,45p + 16)}.$$

Модифицированная частотная характеристика

$$W_M(j\omega) = \frac{16(\omega^2 - 16,45)}{(1 + \omega^2)[(16 - \omega^2)^2 + (0,45\omega)^2]} + j \frac{16(1,45\omega^2 - 16)}{(1 + \omega^2)[(16 - \omega^2)^2 + (0,45\omega)^2]}$$

построена на рис. 18.5. Граничный коэффициент усиления линейризованной системы равен

$$k_{гр, л} = \frac{1}{0,3} \approx 3,33.$$

Проводя прямую, касательную к модифицированной частотной характеристике, находим на основании линейного критерия граничное значение для статического коэффициента линейризации:

$$k_{гр} = \frac{1}{0,77} \approx 1,3.$$

Положение равновесия нелинейной системы будет абсолютно устойчивым, если

$$0 < k^{(c)}(x) = \frac{\Phi(x)}{x} < k_{гр} \approx 1,3.$$

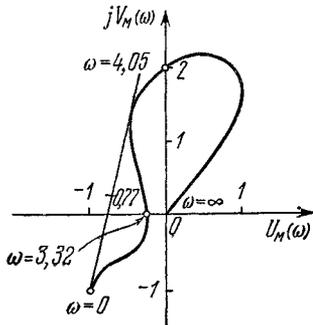


Рис. 18.5.

Отсюда видно, что в рассматриваемом случае область устойчивости нелинейной системы меньше области устойчивости соответствующей линейной системы.

§ 18.2. Абсолютная устойчивость состояния равновесия при любых положительных коэффициентах статической линейризации

Выше было показано, что нелинейные системы второго порядка обладают абсолютно устойчивым положением равновесия при любой однозначной характеристике нелинейного элемента, расположенной в первом и третьем квадрантах. Типовые нелинейные системы третьего и более высокого порядка всегда имеют конечный граничный коэффициент усиления, определяющий пределы изменения статического коэффициента усиления нелинейного элемента. Выделим классы нелинейных систем, в которых

положение равновесия абсолютно устойчиво при любых положительных статических коэффициентах линеаризации, т. е. при любых характеристиках нелинейного элемента, принадлежащих первому и третьему квадрантам (рис. 18.4, а). Полагая в частотном неравенстве (17.60) $k_0 = \infty$, получим

$$\operatorname{Re}(1 + qj\omega)W(j\omega) > 0, \quad (18.5)$$

или, в развернутой форме,

$$U(\omega) + q\omega V(\omega) > 0. \quad (18.6)$$

Условия (18.5) или (18.6), очевидно, будут выполнены, если можно провести прямую Попова через начало координат и при этом модифицированная частотная характеристика $W_M(j\omega) = U(\omega) +$

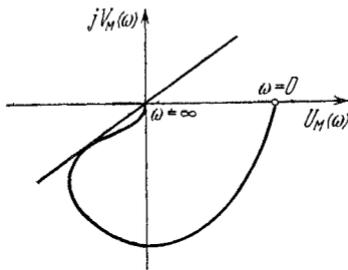


Рис. 18.6.

$+ j\omega V(\omega)$ будет расположена справа от этой прямой (рис. 18.6). Для выполнения указанных свойств линейная часть системы должна быть прежде всего минимально-фазовой, т. е. все нули числителя и знаменателя должны быть левыми. Кроме того, характеристика $W_M(j\omega)$ не может проходить больше двух квадрантов, так как неравенство (18.5) требует, чтобы характеристика

$(1 + qj\omega)W(j\omega)$ целиком лежала в правой полуплоскости. Условие (18.5) заведомо будет выполнено, если при минимальной фазовости системы разность степеней числителя и знаменателя $W(j\omega)$ меньше двух, т. е. $n - m < 2$. Обычно для реальных систем, линейная часть которых состоит из типовых звеньев, степень числителя меньше или равна степени знаменателя, $m \leq n$. Условие (18.5) будет выполнено при $n = m$ или при $n - m = 1$. В первом случае суммарное изменение фазы частотной характеристики линейной системы равно нулю, во втором случае $-\frac{\pi}{2}$. В соответствии с расположением корней числителя и знаменателя при изменении ω от 0 до ∞ частотная характеристика

$$W(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)}$$

при $n - m = 2$ может зайти на высоких частотах в третий квадрант, однако основная часть $W(j\omega)$ будет лежать в четвертом квадранте. В этом случае всегда можно подобрать такое q ,

что характеристика

$$(1 + qj\omega) W(j\omega)$$

целиком будет лежать в правой полуплоскости.

При $n - m = 2$ абсолютной устойчивостью в секторе $(0, \infty)$ обладают системы, линейные части которых имеют нули и полюсы в левой полуплоскости, ограниченной биссектрисами второго и третьего квадрантов.

Это условие обеспечивает монотонность изменения фазы частотной характеристики. Кроме того, если нули и полюсы $W(p)$ удовлетворяют определенным условиям чередования, например, если для

$$W(p) = \frac{(\rho_1 p + 1)(\rho_2 p + 1) \dots (\rho_n p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) \dots (T_n p + 1)}$$

эти условия чередования имеют вид

$$T_1 > \rho_1 > T_2 > \rho_2 > \dots > T_n, \quad n - m = 1, \quad (18.7)$$

то частотная характеристика $W(j\omega)$ целиком лежит в четвертом квадранте. При $n - m = 2$ любой пропуск ρ в последовательности (18.7) можно скомпенсировать с помощью q так, что характеристика $(1 + qj\omega)W(j\omega)$ будет целиком лежать в четвертом квадранте. Аналогичные условия можно получить и для систем, передаточная функция которых содержит комплексные, мнимые и нулевые полюсы.

Пример. Пусть линейная часть системы имеет передаточную функцию вида

$$W(p) = \frac{1}{T_1^2 p^2 + 2\delta T p + 1},$$

где $T_1^2 = a$, $2\delta T = b$. Частотная характеристика такой системы изображена на рис. 18.7. Модифицированная частотная характеристика, соответствующая ей, равна

$$W_m(j\omega) = \frac{1 - a\omega^2}{(1 - a\omega^2)^2 + b\omega^2} - j \frac{b\omega^2}{(1 - a\omega^2)^2 + b\omega^2}.$$

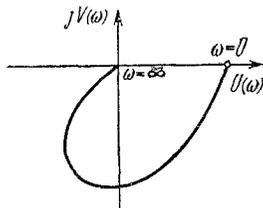


Рис. 18.7.

$W_m(j\omega)$ отличается от $W(j\omega)$ лишь изменением масштаба ординат в ω раз. Так как $\omega \geq 0$, то при любом таком изменении $W(j\omega)$ всегда через начало координат можно провести прямую так, чтобы эта характеристика лежала справа от нее. А это значит, что состояние равновесия этой нелинейной системы будет абсолютно устойчивым при любом положительном коэффициенте статической линеаризации $k^{(e)}(x)$, т. е. при любой характеристике нелинейного элемента, расположенной в первом и третьем квадрантах.

§ 18.3. Абсолютная устойчивость процессов

Исследование абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах сводится к применению непосредственно к частотной характеристике линейной части $W(j\omega)$ кругового критерия. Частотные характеристики $W(j\omega)$ линейных частей типовых автоматических систем, рассмотренных в § 18.1, изображены на

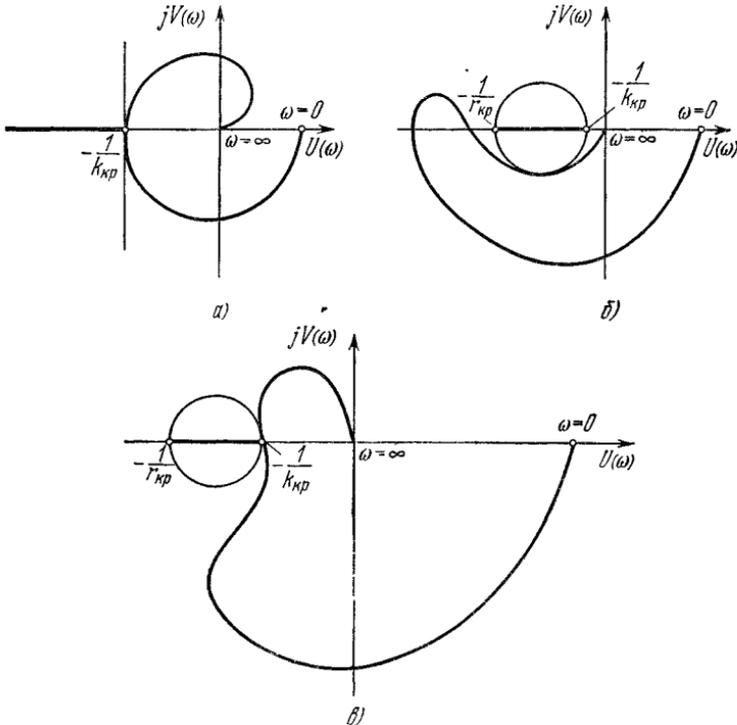


Рис. 18.8.

рис. 18.8. Проводя (r, k) -окружности, касающиеся частотных характеристик (рис. 18.8, а, б, в), определим $r_{кр}$ и $k_{кр}$ такие, что при

$$r_{кр} < k^{(n)}(x) = \Phi'(x) < k_{кр}$$

процессы в нелинейных автоматических системах будут абсолютно устойчивы. При r , стремящемся к нулю, (r, k) -окружность стремится к окружности бесконечно большого радиуса, т. е. к вертикальной прямой (рис. 18.8, а). Предельные значения $k_{кр}$, определяемые вертикальными прямыми, касательными к частотным характеристикам линейных частей, обычно меньше ранее

определенных предельных значений. Во всех рассмотренных случаях $k_{кр} < k_{гр}$, т. е. область абсолютной устойчивости процессов уже области абсолютной устойчивости положения равновесия. Эти области будут совпадать между собой и $k_{кр}$ будет равно $k_{гр}$, когда вертикальная прямая (рис. 18.8, а) касается $W(j\omega)$ в точке ее пересечения с действительной осью или когда (r, k) -окружность касается действительной осью (рис. 18.8, в). В этих случаях круговой критерий является необходимым и достаточным. $k_{кр}$ может иметь значения, большие $k_{гр}$, в том случае, когда $k^{(n)}(x) = \Phi'(x)$ изменяется в небольших пределах, т. е. нелинейная функция $\Phi(x)$ мало отличается от линейной.

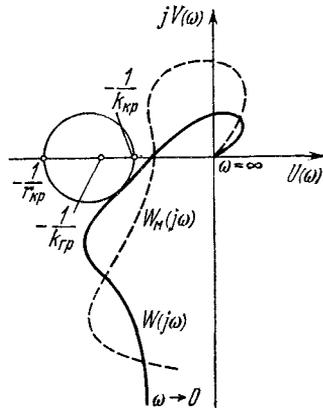


Рис. 18.9.

Пример. Рассмотрим систему, передаточная функция которой выражается той же формулой, что и в примере § 18.1. Частотная характеристика этой системы изображена на рис. 18.9. Проводя окружность, касательную к частотной характеристике, получим значения $k_{кр} = 1,9$ и $r_{кр} = 0,67$.

В примере § 18.1 $k_{гр} = 1,3$ меньше $k_{кр} = 1,9$, однако пределы изменения нелинейности теперь сильно ограничены.

Задачи

18.1. Показать, что для нелинейной системы с устойчивой линейной частью второго порядка сектор абсолютной устойчивости $(0, \infty)$ можно расширить до сектора $(-1, \infty)$.

18.2. Определить сектор абсолютной устойчивости для нелинейной системы с линейной частью, обладающей передаточной функцией

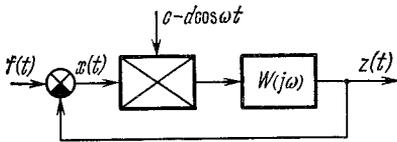


Рис. 18.10.

$$W(p) = \frac{p^2 - 0,5}{(p^2 + 1)(p + 1)}.$$

Показать, что этот сектор уже сектора устойчивости (гурвицева сектора) линеаризованной замкнутой системы

18.3. Показать, что для системы на рис. 18.10 с нестационарным линейным элементом

$$\Phi(x) = (c - d \cos \omega t) x(t)$$

и частотной характеристикой стационарной линейной части

$$W(j\omega) = \frac{7,08}{(j\omega - 1)(j\omega + 3)}$$

условия абсолютной устойчивости имеют вид

$$3,5 < c - d \cos \omega t < 10,7.$$

18.4. Применить геометрическую интерпретацию условия устойчивости задачи 17.2 к нелинейной системе, частотная характеристика линейной части которой равна

$$W(j\omega) = \frac{1}{(j\omega - 1)(j\omega + 3)(j\omega + 4)}.$$

18.5. Показать, что если линейная часть системы имеет передаточную функцию

$$W(p) = \frac{b_0 p^2 + b_1 p + b_2}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3}$$

и

$$b_0(b_2 a_1 - b_0 a_3) \geq 0,$$

то условия абсолютной устойчивости нелинейной системы

$$r < \frac{\Phi(x)}{x} < k$$

совпадают с условиями устойчивости статически линеаризованной системы.

ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА СВОБОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 19.1. Виды оценок

Свободный процесс в нелинейных автоматических системах характеризует переход от некоторого начального состояния к устойчивому состоянию равновесия или устойчивому вынужденному режиму. Оценками свободного процесса могут служить такие показатели качества, как *мера быстродействия* или *степень устойчивости* и *квадратическое интегральное отклонение*.

Для линейных систем эти оценки, как было показано в § 12.1 и § 13.2, могут быть найдены точно. Для нелинейных систем такая возможность исключена и приходится довольствоваться установлением границ, внутри которых могут находиться эти оценки.

§ 19.2. Оценка меры быстродействия нелинейных систем

Будем говорить, что *быстродействие* или *степень устойчивости нелинейной системы* не меньше заданной ξ_0 , если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x^c(t) e^{\xi_0 t} = 0. \quad (19.1)$$

Равенство (19.1) означает, что свободный процесс $x^c(t)$ с ростом t убывает быстрее затухающей экспоненты $e^{-\xi_0 t}$. Уравнение свободного процесса, как было показано ранее, может быть представлено в виде

$$x^c(t) = f_{\downarrow}(t) - \int_0^t \omega(t - \tau) \Phi(x^c(\tau)) d\tau. \quad (19.2)$$

Чтобы определить условия, при которых быстродействие нелинейной системы не меньше ξ_0 , умножим левую и правую части уравнения (19.2) на $e^{\xi_0 t}$, тогда

$$x^c(t) e^{\xi_0 t} = f_{\downarrow}(t) e^{\xi_0 t} - \int_0^t \omega(t - \tau) e^{\xi_0(t-\tau)} \Phi\left(\frac{x^c(\tau) e^{\xi_0 \tau}}{e^{\xi_0 \tau}}\right) e^{\xi_0 \tau} d\tau.$$

Введем новые обозначения:

$$\begin{aligned}\tilde{x}^c(t) &= x^c(t) e^{\xi_0 t}, & \tilde{f}_\downarrow^c(t) &= f_\downarrow^c(t) e^{\xi_0 t}, \\ \tilde{\omega}(t) &= \omega(t) e^{\xi_0 t}, & \tilde{\Phi}(\tilde{x}^c(t), t) &= \Phi\left(\frac{x^c(t) e^{\xi_0 t}}{e^{\xi_0 t}}\right) e^{\xi_0 t}.\end{aligned}$$

Тогда преобразованное уравнение запишется так:

$$\dot{\tilde{x}}^c(t) = \tilde{f}_\downarrow^c(t) - \int_0^t \tilde{\omega}(t - \tau) \tilde{\Phi}(\tilde{x}^c(\tau), \tau) d\tau.$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение некоторой нелинейной системы с нестационарной характеристикой нелинейного элемента $\Phi(\tilde{x}^c, \tau)$. Назовем эту нелинейную систему *преобразованной*.

Если преобразованная нелинейная система абсолютно устойчива, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}^c(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x^c(t) e^{\xi_0 t} = 0$$

и, значит, по определению (19.1) быстродействие исходной нелинейной системы будет не меньше ξ_0 . Таким образом,

определение быстродействия нелинейной системы сводится к определению абсолютной устойчивости состояния равновесия преобразованной нелинейной системы.

Покажем, что к преобразованной нелинейной системе с нестационарной нелинейной характеристикой применимы частотные критерии устойчивости, установленные в гл. 17. Доказательство справедливости критерия, приведенное в гл. 17, непосредственно можно перенести на преобразованную систему в том случае, если для нестационарного нелинейного элемента справедливо неравенство

$$\int_0^{\tilde{x}^c(t)} \tilde{\Phi}(\tilde{x}^c(\tau), \tau) d\tilde{x}(\tau) \geq 0. \quad (19.3)$$

Поскольку обратная функция $\tau(\tilde{x})$ может быть не однозначной, то написанный интеграл понимается как сумма интегралов по интервалам монотонности $\tau(\tilde{x})$. Для функции $\tilde{\Phi}(\tilde{x}^c(\tau), \tau) = \Phi\left(\frac{x^c(\tau) e^{\xi_0 \tau}}{e^{\xi_0 \tau}}\right) e^{\xi_0 \tau}$ при $0 < \frac{\Phi(x)}{x} < k_0$ справедливость неравенства легко устанавливается. В самом деле,

$$\Phi(x) = \min_{\tau} \tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tau).$$

Поскольку

$$\int_0^x \Phi(x) dx \geq 0, \quad \int_0^{\bar{x}} \tilde{\Phi}(\bar{x}, \tau) d\bar{x} \geq \int_0^x \Phi(x) dx,$$

то неравенство (19.3) справедливо при любом $\tau \geq 0$. Поэтому к преобразованной системе применимы частотные критерии устойчивости, установленные в гл. 17.

Временная характеристика линейной части преобразованной системы равна

$$\tilde{\omega}(t) = \omega(t) e^{\xi_0 t}.$$

Следовательно, частотная характеристика преобразованной системы по определению будет равна

$$\tilde{W}(j\omega) = \int_0^{\infty} \tilde{\omega}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} \omega(t) e^{-(j\omega - \xi_0)t} dt = W(j\omega - \xi_0).$$

Назовем ее для краткости *смещенной частотной характеристикой линейной части*. Условию принадлежности нестационарной нелинейной характеристики $\tilde{\Phi}(\bar{x}^c, t)$ преобразованной системы сектору (r, k_0)

$$r < \frac{\tilde{\Phi}(\bar{x}^c, t)}{\bar{x}} < k_0$$

эквивалентно условию принадлежности стационарной нелинейной характеристики $\Phi(x^c)$ исходной системы тому же сектору (r, k_0)

$$r < \frac{\Phi(x^c)}{x^c} < k_0.$$

Введем понятие *модифицированной смещенной частотной характеристики*

$$W_m(j\omega - \xi_0) = U(\omega, \xi_0) + jV(\omega, \xi_0),$$

где

$$U(\omega, \xi_0) = \operatorname{Re} W(j\omega - \xi_0),$$

$$V(\omega, \xi_0) = \omega \operatorname{Im} W(j\omega - \xi_0).$$

Тогда, заменяя в формулировках частотных критериев частотные характеристики на смещенные частотные характеристики, мы получим критерии быстродействия, т. е. критерии, обеспечивающие быстродействие нелинейной системы, не меньшее чем ξ_0 . Таким образом, мы приходим к следующим формулировкам частотных критериев быстродействия.

Частотный критерий быстродействия I (линейный критерий быстродействия). Нелинейная система с устойчивой линейной частью и характеристиками нелинейного элемента $\Phi(x)$, принадлежащими сектору $(0, k_0)$, будет обладать быстродействием, не меньшим ξ_0 , если модифицированная смещенная частотная характеристика $W_M(j\omega - \xi_0)$ не пересекает (q, k_0) -прямоугольник.

Частотный критерий быстродействия II (параболический критерий быстродействия). Нелинейная система с устойчивой, или нейтральной линейной частью и характеристиками нелинейного элемента $\Phi(x)$, принадлежащими сектору (r, k_0) , будет обладать быстродействием, не меньшим ξ_0 , если модифицированная смещенная частотная характеристика $W_M(j\omega - \xi_0)$ не пересекает (q, k_0, r) -параболу.

Таким образом, исследование быстродействия нелинейных систем сведено к применению частотных критериев абсолютной устойчивости положения равновесия, но в которых фигурирует, вместо модифицированной частотной характеристики, модифицированная смещенная частотная характеристика. Напомним, что принадлежность характеристики нелинейного элемента $\Phi(x)$ сектору (r, k_0) означает принадлежность коэффициента статической линеаризации $k^{(c)}(x)$ полосе (r, k_0) . Если прямая (q, k_0) или парабола (q, k_0, r) могут быть проведены так, чтобы они касались смещенной модифицированной частотной характеристики $W_M(j\omega - \xi_0)$ в точке пересечения ее с вещественной осью и $W_M(j\omega - \xi_0)$ была расположена справа, то (см. § 18.1) быстродействие и границы устойчивости преобразованных нелинейной и соответствующей линеаризованной системы будут совпадать, а следовательно, в нелинейной системе будет то же быстродействие ξ_0 , что и в соответствующей линеаризованной системе.

В общем случае быстродействие нелинейной системы не может превосходить максимального быстродействия соответствующей линеаризованной системы.

Для нелинейных систем с нестационарной частотной характеристикой $\Phi(x^c, t)$ оценка быстродействия осуществляется на основе **частотного критерия быстродействия III (кругового критерия быстродействия).**

Быстродействие нелинейной системы с нестационарной характеристикой нелинейного элемента $\Phi(x^c, t)$, принадлежащей при всех t сектору (r, k) , будет не меньше ξ_0 , если смещенная частотная характеристика $W(j\omega - \xi_0)$, не пересекая (k_0, r) -окружности, охватывает ее в положительном направлении $s_H/2$ раз, где s_H — индекс неустойчивости линейной части передаточной функции.

Этот частотный критерий быстродействия III позволяет оценить скорость протекания процессов в нелинейной системе с нестационарной характеристикой.

Пример. Рассмотрим систему, частотная характеристика линейной части которой равна

$$W(j\omega) = \frac{1}{(2j\omega + 1)(j\omega + 1)(0,5j\omega + 1)}.$$

Зададимся быстродействием $\xi_0 = 0,5$. Тогда смещенная частотная характеристика, получаемая заменой $j\omega$ на $j\omega - 0,5$, запишется так:

$$W(j\omega - 0,5) = \frac{1}{2j\omega(j\omega + 0,5)(0,5j\omega + 0,75)},$$

а соответствующая модифицированная характеристика (рис. 19.1) — так:

$$W_m(j\omega - 0,5) = -\frac{1}{0,5\omega^4 + 1,25\omega^2 + 0,28} - j\frac{0,375 - 0,5\omega^2}{0,5\omega^4 + 1,25\omega^2 + 0,28}.$$

Проводя касательную к модифицированной смещенной частотной характеристике,

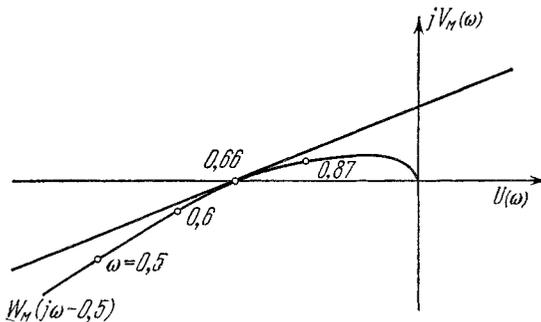


Рис. 19.1.

определяем граничное значение статического коэффициента линеаризации:

$$k_{гр} = \frac{1}{0,66} \approx 1,52.$$

Нелинейная система будет обладать быстродействием, не меньшим чем $\xi_0 = 0,5$, если

$$0 < k^{(c)}(x) = \frac{\Phi(x)}{x} < k_{гр} = 1,52.$$

§ 19.3. Оценка квадратического интегрального отклонения

Квадратические интегральные отклонения, вызываемые свободным процессом, можно определить как

$$I_x = \int_0^{\infty} [x^c(\theta)]^2 d\theta$$

или

$$I_{\Phi} = \int_0^{\infty} \Phi^2(x^c(\theta)) d\theta.$$

Для оценки I_{Φ} и I_x воспользуемся неравенством (17.22), которое представляет собой следствие выполнения условия устойчивости $\Gamma_1(t) \geq 0$. Полагая в нем $q = 0$, получим

$$\rho = \int_0^t \left[x^c(\theta) - \frac{1}{k} \Phi(x^c(\theta)) \right] \Phi(x^c(\theta)) d\theta \leq \int_0^t f_{\downarrow}(\theta) \Phi(x^c(\theta)) d\theta. \quad (19.4)$$

При $t \rightarrow \infty$ из оценки для ρ получаем после очевидных преобразований

$$\int_0^{\infty} \Phi^2(x^c(\theta)) \left(\frac{x^c(\theta)}{\Phi(x^c(\theta))} - \frac{1}{k} \right) d\theta \leq \int_0^{\infty} f_{\downarrow}(\theta) \Phi(x^c(\theta)) d\theta.$$

Так как характеристика нелинейного элемента принадлежит сектору $(0, k_0)$, то максимальный статический коэффициент усиления $k_{\max}^{(c)}$ удовлетворяет неравенству

$$k_0 > k_{\max}^{(c)} \geq k^{(c)}(x^c) = \frac{\Phi(x^c(t))}{x^c(t)} \quad \forall t.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\infty} \Phi^2(x^c(\theta)) \left(\frac{x^c(\theta)}{\Phi(x^c(\theta))} - \frac{1}{k_0} \right) d\theta \geq \left(\frac{1}{k_{\max}^{(c)}} - \frac{1}{k_0} \right) \int_0^{\infty} \Phi^2(x(\theta)) d\theta. \quad (19.5)$$

Правую же часть неравенства (19.4) на основании неравенства Коши — Буняковского (приложение 4) преобразуем к виду

$$\int_0^{\infty} f_{\downarrow}(\theta) \Phi(x(\theta)) d\theta \leq \left(\int_0^{\infty} f_{\downarrow}^2(\theta) d\theta \right)^{1/2} \left(\int_0^{\infty} \Phi^2(x(\theta)) d\theta \right)^{1/2}. \quad (19.6)$$

Принимая во внимание обозначение для I_{Φ} и неравенства (19.5), (19.6), получим

$$\left(\frac{1}{k_{\max}^{(c)}} - \frac{1}{k_0} \right) I_{\Phi} \leq \left(\int_0^{\infty} f_{\downarrow}^2(\theta) d\theta \right)^{1/2} I_{\Phi}^{1/2},$$

или, после возведения в квадрат и элементарных преобразований,

$$I_{\Phi} \leq \frac{k_0^2 (k_{\max}^{(c)})^2}{(k_0 - k_{\max}^{(c)})^2} \int_0^{\infty} f_{\downarrow}^2(\theta) d\theta.$$

Поскольку согласно теореме Парсеваля

$$\int_0^{\infty} f_{\downarrow}^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_{\downarrow}(j\omega)|^2 d\omega,$$

где $F_{\downarrow}(j\omega)$ — спектральная функция $f_{\downarrow}(t)$, то оценка I_{Φ} может быть также представлена в виде

$$I_{\Phi} \leq \frac{k_0^2 (k_{\max}^{(c)})^2}{(k_0 - k_{\max}^{(c)})^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |F_{\downarrow}(j\omega)|^2 d\omega. \quad (19.7)$$

Замечая, что

$$\Phi^2(x^c) = \left(\frac{\Phi(x^c)}{x^c} \right)^2 x^{c^2} = (k^{(c)}(x) x^c)^2 \geq (k_{\min}^{(c)} x^c)^2,$$

получаем

$$I_{\Phi} = \int_0^{\infty} \Phi^2(x^c(\theta)) d\theta \geq (k_{\min}^{(c)})^2 \int_0^{\infty} x^2(\theta) d\theta = (k_{\min}^{(c)})^2 I_x. \quad (19.8)$$

И следовательно, из (19.7) с учетом (19.8) получим

$$I_x \leq \frac{k_0^2 (k_{\max}^{(c)})^2}{(k_0 - k_{\max}^{(c)})^2 (k_{\min}^{(c)})^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |F_{\downarrow}(j\omega)|^2 d\omega.$$

Если характеристика нелинейного элемента $\Phi(x)$ принадлежит не сектору $(0, k_0)$, а (r, k_0) , то в полученных выше оценках I^* следует заменить k_0 на $k_0 - r$, $k_{\max}^{(c)}$ на $k_{\max}^{(c)} - r$ и $k_{\min}^{(c)}$ на $k_{\min}^{(c)} - r$. Таким образом, в общем случае будем иметь

$$I_x \leq \frac{(k_0 - r)^2 (k_{\max}^{(c)} - r)^2}{(k_0 - k_{\max}^{(c)})^2 (k_{\min}^{(c)} - r)^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |F_{\downarrow}^*(j\omega)|^2 d\omega, \quad (19.9)$$

где

$$F_{\downarrow}^*(j\omega) = \frac{F_{\downarrow}(j\omega)}{1 + rW(j\omega)}.$$

Пример. Рассмотрим нелинейную систему, абсолютная устойчивость которой была исследована в примере § 18.1. Пусть характеристики нелинейного элемента таковы, что $k_{\max}^{(c)} = 0,6$; $k_{\min}^{(c)} = 0,3$; $k_0 = 1,3$. Графичное значение

коэффициента статической линеаризации, как было найдено ранее, равно $k_0 = k_{гр} = 1,3$. Подставляя эти значения в формулу (19.7), получим

$$I_{\Phi} \leq \frac{1,3^2 \cdot 0,6^2}{(1,3 - 0,6)^2} \int_0^{\infty} f_{\downarrow}^2(\theta) d\theta,$$

или

$$I_{\Phi} \leq 1,24 \int_0^{\infty} f_{\downarrow}^2(\theta) d\theta.$$

Аналогично будем иметь

$$I_x \leq \frac{1,3^2 \cdot 0,6^2}{(1,3 - 0,6)^2 \cdot 0,3^2} \int_0^{\infty} f_{\downarrow}^2(\theta) d\theta,$$

или

$$I_x \leq 13,1 \int_0^{\infty} f_{\downarrow}^2(\theta) d\theta.$$

Оценка I_x , естественно, более грубая, чем I_{Φ}

Оценка (19.9), как и приведенные выше оценки, пригодна для любых свободных процессов, имеющих место в нелинейных автоматических системах, для любых характеристик, принадлежащих углу (r, k_0) или $(0, k_0)$, и любых частотных характеристик линейной части, при которых нелинейная система абсолютно устойчива. Столь малая информация о характеристиках нелинейной системы, естественно, требует определенной платы, и эта плата состоит в том, что для конкретных характеристик оценки процессов могут получиться завышенными.

З а д а ч и

19.1. Начертить качественный вид смещенной частотной характеристики $W(j\omega - \xi_0)$ при

$$\xi_0 = 0; 0,5; 1; 2 \quad \text{и} \quad W(j\omega) = \frac{2}{(j\omega)^2 - 2(j\omega) - 1}.$$

19.2. Показать, что быстродействие $\xi_0 = 0,5$ системы в задаче 18.3 достигается при $c = 25$ и $d = 5$

19.3. Найти оценку квадратического интегрального отклонения для системы на рис. 18.10 при условии, что

$$\int_0^{\infty} f_{\downarrow}^2(\theta) d\theta = 0,7.$$

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

§ 20.1. Понятие о периодических процессах

Характерными периодическими процессами в нелинейных системах являются *автоколебания*. Автоколебания возможны лишь тогда, когда нелинейная система не может быть абсолютно устойчивой. Поэтому задача исследования возможности существования автоколебаний и их свойств возникает, если критерии абсолютной устойчивости положения равновесия не выполняются. Установление факта существования автоколебаний и исследование зависимости их частоты и амплитуды от параметров линейной части и характеристики нелинейного элемента позволяют выяснить возможности устранения автоколебаний или уменьшения их амплитуды до необходимой величины тогда, когда автоколебания нежелательны, либо наметить пути установления нужной частоты и амплитуды тогда, когда автоколебания являются нормальным, рабочим режимом. Весьма важным является выяснение поведения нелинейной автоматической системы при внешнем периодическом или гармоническом воздействии. Такое внешнее воздействие может устранить автоколебания, навязав системе свою частоту либо частоту, в целое число раз меньшую.

Точное решение подобных нелинейных задач возможно для очень ограниченного класса характеристик нелинейных элементов, а именно кусочно-линейных и, в частности, релейных автоматических систем. Поэтому в общем случае широко используются различные приближенные методы исследования автоколебаний и вынужденных колебаний. Среди них выделяется своей простотой, наглядностью и физичностью метод, основанный на гармонической линеаризации.

При исследовании абсолютной устойчивости состояния равновесия и процессов мы использовали статическую и дифференциальную линеаризации. Гармоническая линеаризация специально приспособлена для исследования периодических процессов в нелинейных системах.

§ 20.2. Гармонический баланс для автоколебаний

Как было показано в гл. 16, возможные автоколебания описываются нелинейным уравнением вида

$$x^a(t) = - \int_0^{\infty} \omega(\tau) \Phi(x^a(t - \tau)) d\tau. \quad (20.1)$$

Точное решение этого уравнения при произвольной характеристике нелинейного элемента невозможно. Для приближенного решения его воспользуемся понятием гармонической линеаризации. Будем искать решение нелинейного уравнения (20.1) в виде

$$\hat{x}^a(t) = A \sin \omega t$$

или, в комплексной форме,

$$\vec{\hat{x}}^a(t) = A e^{j\omega t}. \quad (20.2)$$

Воспользуемся гармонической линеаризацией. При этом уравнение нелинейного элемента $y = \Phi(x)$ заменяется на

$$\vec{y}(t) = \vec{k}^{(r)}(A) \vec{\hat{x}}^a(t) = \vec{k}^{(r)}(A) A e^{j\omega t}. \quad (20.3)$$

Подставляя (20.2) и (20.3) в уравнение (20.1), получим уравнение гармонически линеаризованной нелинейной системы:

$$A e^{j\omega t} = - \int_0^{\infty} \omega(\tau) \vec{k}^{(r)}(A) A e^{j\omega(t-\tau)} d\tau,$$

или

$$A e^{j\omega t} = - \left(\int_0^{\infty} \omega(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right) \vec{k}^{(r)}(A) A e^{j\omega t}.$$

Отсюда, учитывая, что по определению частотной характеристики

$$\int_0^{\infty} \omega(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = W(j\omega),$$

получаем основное соотношение:

$$1 = - W(j\omega) \vec{k}^{(r)}(A). \quad (20.4)$$

Это соотношение имеет ясный физический смысл. Разомкнем нелинейную систему (рис. 20.1, а) на входе нелинейного элемента и приложим ко входу разомкнутой системы гармоническое воздействие амплитуды A и частоты ω (рис. 20.1, б). На выходе не-

линейного элемента возникнет периодический процесс, содержащий также составляющие кратных частот. Если линейная часть системы устойчива и достаточно хорошо фильтрует составляющие кратных частот, т. е. подавляет высокие гармоники, то ее выходная величина $z(t)$ будет близка к гармонической частоте ω , но с иной амплитудой и фазой, отличной от 0 или π . Эта гармоническая величина $z(t)$ представляет собой выходную величину разомкнутой гармонически линеаризованной нелинейной

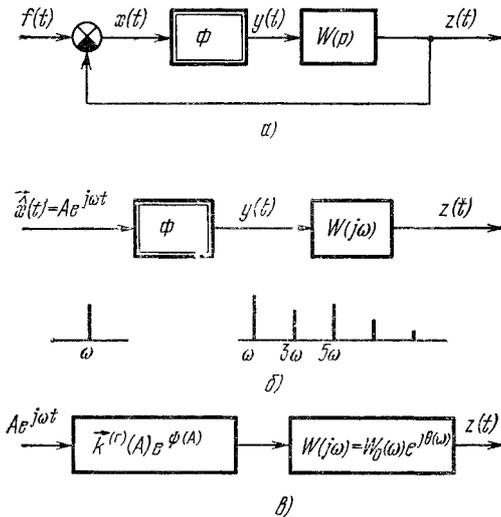


Рис 20.1.

системы (рис. 20.1, в). Чем лучше линейная часть фильтрует высокие гармоники, тем гармоническая линеаризация дает более точные результаты.

Условие существования гармонического режима требует, чтобы амплитуды на входе и выходе разомкнутой гармонически линеаризованной нелинейной системы (рис. 20.1, в) были равны друг другу, а сдвиг фаз между входной и выходной величинами был равен π , т. е.

$$A = \vec{k}^{(r)}(A) AW_0(\omega), \tag{20.5}$$

$$\pi = \psi(A) + \theta(\omega),$$

что представляет собой иную запись основного соотношения (20.4).

Таким образом, основное соотношение выражает собой баланс амплитуд и фаз и его можно назвать соотношением гармонического баланса. Соотношение гармонического баланса опре-

деляет амплитуду A^a и частоту ω^a возможных автоколебаний. Хотя физическая интерпретация соотношения гармонического баланса относится к системам, в которых линейная часть устойчива, само по себе соотношение гармонического баланса справедливо в любых случаях. Амплитуда A^a и частота ω^a являются решениями алгебраических уравнений (20.5). Но эти алгебраические уравнения выражают то обстоятельство, что гармонически линеаризованная система находится на границе устойчивости. Отсюда следует, что

условие существования автоколебаний требует такого изменения коэффициента гармонической линеаризации за счет изменения амплитуды A и частоты ω , при котором гармонически линеаризованная нелинейная система выводится на границу устойчивости.

§ 20.3. Определение амплитуды и частоты автоколебаний

Определение амплитуды и частоты автоколебаний и исследование их зависимости от параметров линейной части системы сводится к изучению поведения гармонически линеаризованной системы на границе устойчивости. Для этой цели можно использовать частотный или алгебраический критерий устойчивости линейных систем, находя из него условия вывода системы на границу устойчивости. Часто можно использовать уже готовые результаты исследования устойчивости соответствующих линейных систем, представленные в виде областей и границ устойчивости.

Рассмотрим вначале непосредственное применение соотношения гармонического баланса (20.4). Запишем его в форме

$$-\frac{1}{\bar{k}^{(r)}(A)} = W(j\omega). \quad (20.6)$$

Если на комплексной плоскости изобразить частотную характеристику линейной части $W(j\omega)$ и отрицательный обратный коэффициент гармонической линеаризации $-\frac{1}{\bar{k}^{(r)}(A)}$ (рис. 20.2), то точка пересечения их определит частоту ω^a (по оцифровке $-\frac{1}{\bar{k}^{(r)}(A)}$) и амплитуду A (по оцифровке $-\frac{1}{\bar{k}^{(r)}(A)}$) возможных автоколе-

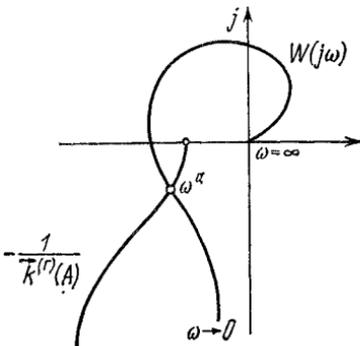


Рис. 20.2.

баний. Это построение очень удобно для исследования влияния параметров нелинейной системы на частоту и амплитуду возможных автоколебаний. Изменение параметров линейной части приводит к деформации частотной характеристики $W(j\omega)$, а изменение характеристики нелинейного элемента приводит к изменению отрицательного обратного коэффициента гармонической линеаризации. Отсутствие

точки пересечения $W(j\omega)$ и

$-\frac{1}{\vec{k}^{(r)}(A)}$ (рис. 20.3) свидетельствует лишь о том, что автоколебания искомой формы отсутствуют. Описанный выше способ исследования был основан на использовании частотной характеристики линейной части и тесно связан с частотным критерием устойчивости линейных систем.

Возможен и иной способ исследования, использующий характеристическое уравнение и тесно связанный с алгебраическими критериями устойчивости. Для этой цели введем понятие *передаточной функции гармонически линеаризованного нелинейного элемента*:

$$k^{(r)}\left(\frac{p}{\omega}, A\right) = k_s^{(r)}(A) - k_c^{(r)}(A) \frac{p}{\omega}. \quad (20.7)$$

При $p = j\omega$ эта передаточная функция совпадает с коэффициентом гармонической линеаризации:

$$k^{(r)}\left(\frac{p}{\omega}, A\right)\Big|_{p=j\omega} = \vec{k}^{(r)}(A) = k_s^{(r)}(A) - jk_c^{(r)}(A). \quad (20.8)$$

В отличие от коэффициента гармонической линеаризации $\vec{k}^{(r)}(A)$, передаточная функция гармонически линеаризованного нелинейного элемента $k^{(r)}\left(\frac{p}{\omega}, A\right)$ зависит не только от амплитуды, но и от частоты ω автоколебаний. Передаточная функция разомкнутой гармонически линеаризованной системы равна произведению передаточных функций гармонически линеаризованного нелинейного элемента и передаточной функции линейной части системы, т. е.

$$k^{(r)}\left(\frac{p}{\omega}, A\right) W(p) = \left[k_s^{(r)}(A) - k_c^{(r)}(A) \frac{p}{\omega} \right] W(p). \quad (20.9)$$

Но так как

$$W(p) = \frac{P(p)}{Q(p)},$$

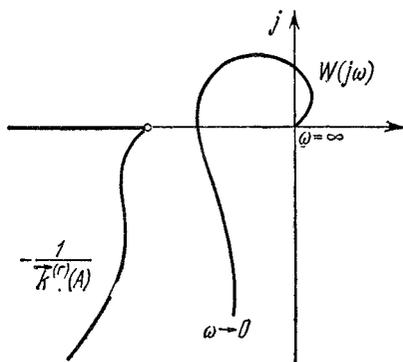


Рис. 20.3.

то, суммируя знаменатель и числитель (20.9), получаем характеристическое уравнение гармонически линеаризованной замкнутой системы:

$$G\left(\frac{p}{\omega}, A\right) = Q(p) + \left[k_s^{(r)}(A) - k_c^{(r)}(A) \frac{p}{\omega}\right] P(p) = 0. \quad (20.10)$$

К этому характеристическому уравнению могут быть применены алгебраические критерии устойчивости.

Если потребовать, чтобы гармонически линеаризованная система была на границе устойчивости, т. е. чтобы характеристическое уравнение (20.10) имело пару чисто мнимых корней, а остальные все корни были левыми, то те значения A и ω , при которых это имеет место, и определяют амплитуды и частоты возможных автоколебаний. Особенно просто определение амплитуд и частот возможных автоколебаний в нелинейных системах с однозначной характеристикой нелинейного элемента. В этом случае

$$k_c^{(r)}(A) \equiv 0$$

и, значит, гармонический коэффициент линеаризации веществен:

$$\vec{k}^{(r)}(A) = k_s^{(r)}(A).$$

Следовательно, $-\frac{1}{\vec{k}^{(r)}(A)} = -\frac{1}{k_s^{(r)}(A)}$ совпадает с вещественной

осью (рис. 20.3). Граничная частота в этом случае определяется полностью линейной частью системы и не зависит от характеристики нелинейного элемента. Она равна граничной частоте линейной части системы. Определяя на основе анализа устойчивости линейной системы любым способом граничный коэффициент усиления $k_{гр}$ и приравнивая его коэффициенту усиления разомкнутой гармонически линеаризованной системы $k_{л} k_s^{(r)}(A)$, находим уравнение относительно амплитуды возможных автоколебаний:

$$k_s^{(r)}(A) = \frac{k_{гр}}{k_{л}}. \quad (20.11)$$

Проще всего уравнение (20.11) решается графически (рис. 20.4). Изменение параметров линейной части изменяет $k_{гр}$ и $k_{л}$, т. е. правую часть уравнения (20.11), а изменение характеристики не-

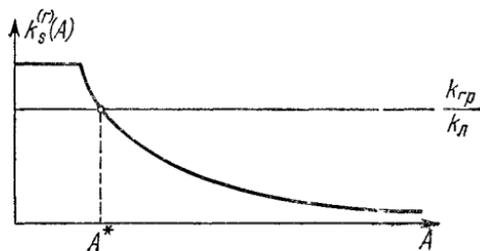


Рис. 20.4.

линейного элемента изменяет левую часть уравнения (20.11). Таким образом, можно выяснить влияние параметров и характеристик системы на параметры автоколебаний. Особенно удобно для этой цели использовать границы устойчивости линейных систем, представляющих собой зависимость $k_{гр}$ от параметров системы. Так, в § 11.1 для линейной системы третьего порядка была построена граница устойчивости, разбивающая плоскость $(k, T_3/T_1)$ на области устойчивости и неустойчивости. Эта граница устойчивости воспроизведена на рис. 20.5. Каждая точка границы устойчивости соответствует граничной частоте. Стрелка на рис. 20.5 показывает направление возрастания частоты.

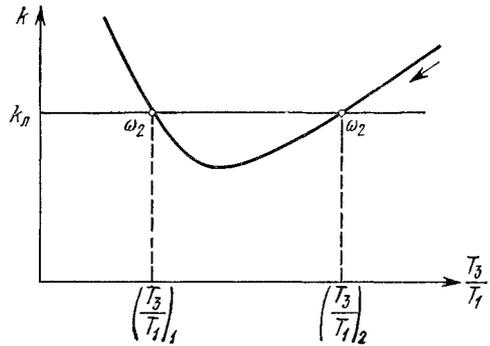


Рис. 20.5.

Рассмотрим теперь нелинейную систему третьего порядка, граф ее изображен на рис. 20.6. Характеристике нелинейного элемента типа зоны нечувствительности и насыщения (рис. 20.7)

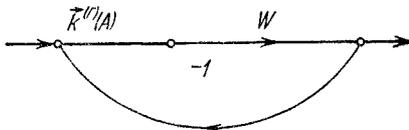


Рис. 20.6.

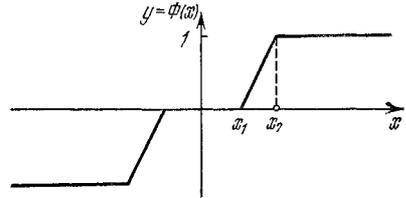


Рис. 20.7.

соответствует гармонический коэффициент линеаризации, изображенный на рис. 20.8. Величина M определяет максимальное значение $k^{(v)}(A)$. Проводя на графике гармонического коэффициента линеаризации горизонтальную прямую $k_{гр}/k_{л}$, определяем амплитуды возможных автоколебаний как абсциссы точек их пересечения A_1, A_2 с этой прямой (рис. 20.8). При $T_3/T_1 = \text{const}$ и изменении $k_{л}$ прямая $k_{гр}/k_{л}$ меняет свое положение: поднимается при уменьшении $k_{л}$ и опускается при увеличении $k_{л}$. Если $k_{гр}/k_{л} > M$ (прямая 1), то автоколебания отсутствуют. При $k_{гр}/k_{л} < M$ (прямая 2) в системе возможны автоколебания частоты ω_1 с амплитудами A_1 и A_2 . С ростом $k_{л}$ амплитуда A_1

уменьшается, а амплитуда A_2 увеличивается. Частота автоколебаний ω_1 остается неизменной. При $k_{\text{л}} = \text{const}$ и изменении T_3

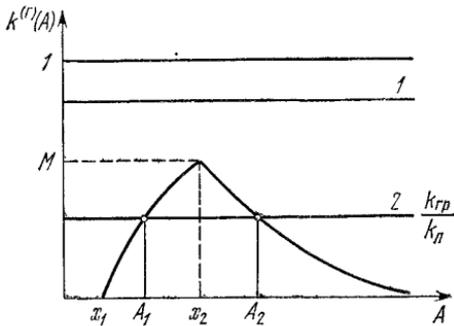


Рис. 20.8.

(рис. 20.5) $k_{\text{гп}}$ вначале уменьшается, а затем увеличивается. Если T_3/T_1 таково, что $k_{\text{гп}}/k_{\text{л}} < M$, то автоколебания в системе отсутствуют. Автоколебания возможны, лишь когда

$$\left(\frac{T_3}{T_1}\right)_1 \leq \frac{T_3}{T_1} \leq \left(\frac{T_3}{T_1}\right)_2.$$

Амплитуды этих автоколебаний при возрастании T_3/T_1 внутри неравенства достигают максимального A_2 и минимального значения A_1 , частота убывает (рис. 20.9). Таким образом, по границе устойчивости линейной системы легко как

качественно, так и количественно выяснить влияние изменения параметров на амплитуду и частоту возможных автоколебаний.

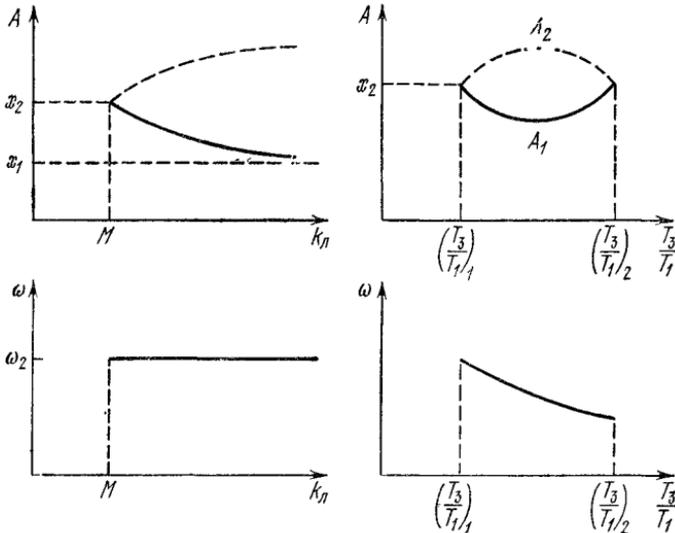


Рис. 20.9.

качественно, так и количественно выяснить влияние изменения параметров на амплитуду и частоту возможных автоколебаний.

§ 20.4. Гармонический баланс для вынужденных колебаний

Если ко входу нелинейного элемента автоматической системы приложено внешнее гармоническое воздействие

$$f_{\sim}(t) = C \sin(\omega_b t + \varphi), \quad (20.12)$$

то в зависимости от тех или иных условий в автоматической системе возможны различные режимы. Так, в абсолютно устойчивых нелинейных системах вынужденные процессы будут периодическими с частотой, равной частоте внешнего гармонического воздействия ω_b , либо с частотами ω_b/k субгармонических колебаний. Если же в нелинейной системе были автоколебания, то внешнее гармоническое воздействие может подавить эти автоколебания, навязав системе свою частоту ω_b или ω_b/k . Мы пока будем интересоваться вынужденными процессами, которые приближенно представляют собой гармонические колебания частоты ω_b , т. е.

$$\dot{x}^b(t) = A \sin \omega_b t. \quad (20.13)$$

В комплексной форме записи (20.12) и (20.13) представляются в виде

$$\vec{f}_\sim(t) = C e^{j\varphi} e^{j\omega_b t}, \quad \vec{x}^b(t) = A e^{j\omega_b t}. \quad (20.14)$$

Пользуясь уравнением гармонически линеаризованного нелинейного элемента (20.3), можно записать уравнение вынужденного процесса в комплексной форме:

$$\vec{x}^b(t) = \vec{f}_\sim(t) - \int_0^\infty \omega(\tau) \vec{k}^{(r)}(A) \vec{x}^b(t - \tau) d\tau. \quad (20.15)$$

Замечая, что

$$\vec{x}^b(t - \tau) = e^{-j\omega_b \tau} \vec{x}^b(t),$$

и учитывая (20.14), получаем из (20.15)

$$\vec{x}^b(t) = \vec{f}_\sim(t) - W(j\omega_b) \vec{k}^{(r)}(A) \vec{x}^b(t), \quad (20.16)$$

или

$$\vec{x}^b(t) = \frac{1}{1 + W(j\omega_b) \vec{k}^{(r)}(A)} \vec{f}_\sim(t). \quad (20.17)$$

Уравнение (20.17) представляет собой уравнение относительно ошибки гармонически линеаризованной нелинейной системы, и оно может быть получено непосредственно по блок-схеме или графу линеаризованной системы. Заменяя в (20.16) $\vec{x}^b(t)$ и $\vec{f}_\sim(t)$ их значениями из (20.14), получим после сокращения на $e^{j\omega_b t}$ основное соотношение гармонического баланса для вынужденных гармонических колебаний:

$$A = C e^{j\varphi} - \vec{k}^{(r)}(A) A W(j\omega_b), \quad (20.18)$$

или

$$1 = \frac{C}{A} e^{j\varphi} - W(j\omega_b) \vec{k}^{(r)}(A). \quad (20.19)$$

При $C \equiv 0$ это соотношение переходит в соотношение гармонического баланса для автоколебаний.

Соотношение гармонического баланса для вынужденных колебаний (20.19) определяет амплитуду вынужденных колебаний A^B и сдвиг фаз φ между внешним гармоническим воздействием и вынужденными колебаниями.

Зависимость A^B и φ от частоты ω внешнего воздействия определяет резонансные свойства нелинейной системы.

§ 20.5. Резонансные свойства нелинейной автоматической системы

Для исследования резонансных свойств воспользуемся соотношением гармонического баланса для вынужденных колебаний (20.19). Его можно записать в виде

$$\frac{C}{A \vec{k}^{(r)}(A)} e^{j\varphi} - \frac{1}{\vec{k}^{(r)}(A)} = W(j\omega_B) \quad (20.20)$$

или, воспользовавшись обозначением $\vec{k}^{(r)}(A) = k^{(r)}(A) e^{j\varphi(A)}$,

$$\frac{C}{A k^{(r)}(A)} e^{j[\varphi - \varphi(A)]} - \frac{1}{k^{(r)}(A)} e^{-j\varphi(A)} = W(j\omega_B). \quad (20.21)$$

Рассмотрим снова комплексную плоскость, на которой изображены частотная характеристика линейной части $W(j\omega)$ и отрицательный обратный коэффициент гармонической линеаризации $-\frac{1}{\vec{k}^{(r)}(A)}$ (рис. 20.10, а) под этой кривой. Отметим на частотной характеристике линейной части $W(j\omega)$ точку, соответствующую частоте внешнего воздействия $\omega = \omega_B$. Минимальное расстояние $R_{\min}(\omega_B)$ от этой точки до отрицательного обратного коэффициента гармонической линеаризации $-\frac{1}{\vec{k}^{(r)}(A)}$ определяется величиной радиуса окружности с центром в точке $\omega = \omega_B$, касающейся $-\frac{1}{\vec{k}^{(r)}(A)}$. Пусть это касание имеет место в точке $A = A_m$.

Тогда

$$R_{\min}(\omega_B) = \left| \frac{C e^{j\varphi}}{A_m \vec{k}^{(r)}(A_m)} \right| = \frac{C}{A_m k^{(r)}(A_m)}. \quad (20.22)$$

Соотношение (20.21) будет выполнено при таких ω_B , A и C , для которых

$$R(\omega_B) \geq R_{\min}(\omega_B). \quad (20.23)$$

Из (20.22) находим пороговое значение амплитуды внешнего воздействия:

$$C_{\text{пор}}(\omega_B) = R_{\text{min}}(\omega_B) A_m k^{(r)}(A_m). \quad (20.24)$$

При $C < C_{\text{пор}}(\omega_B)$ вынужденные колебания частоты $\omega = \omega_B$ невозможны. При $C \geq C_{\text{пор}}(\omega_B)$ возможно существование вынужденных колебаний частоты $\omega = \omega_B$. При этом амплитуда этих колебаний не может быть меньше $A = A_m$. Пороговое значение

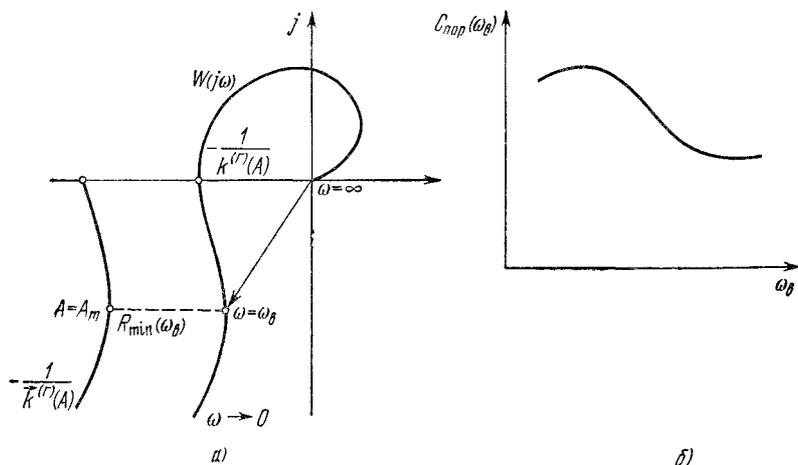


Рис. 20.10.

$C_{\text{пор}}(\omega_B)$ зависит от частоты внешнего воздействия, и эта зависимость может быть построена непосредственно по рис. 20.10, а и формуле (20.24). Качественно вид этой зависимости изображен на рис. 20.10, б. Область существования — выше соответствующей границы. Если частотная характеристика $W(j\omega)$ и отрицательный обратный коэффициент гармонической линеаризации $-\frac{1}{k^{(r)}(A)}$ пересекаются (рис. 20.11, а), то в системе воз-

можны автоколебания частоты ω^a и амплитуды A^a . В этом случае зависимость порогового значения $C_{\text{пор}}(\omega_B)$ от частоты вынужденных колебаний имеет вид, показанный на рис. 20.11, б. При $\omega_B = \omega^a$ пороговое значение обращается в нуль. Область существования вынужденных колебаний расположена под этой кривой. При $C \geq C_{\text{пор}}(\omega_B)$ в нелинейной системе внешнее периодическое воздействие частоты $\omega = \omega_B$ подавляет ранее существовавшие автоколебания частоты ω^a . Этот режим называется режимом принудительной синхронизации или захватыванием. При достаточно высокой частоте ω_B амплитуда вынужденных

колебаний C может быть сделана достаточно малой. Поэтому часто при $\omega_B \gg \omega^a$ режим захватывания используется для подавления автоколебаний.

Важной характеристикой, определяющей свойства нелинейных систем, является их частотная характеристика, или *резонансный график*, т. е. зависимость амплитуды A_B и фазы φ от частоты внешнего гармонического воздействия при $C = \text{const}$. Для построения резонансных графиков зададимся значением $A = A_B$ и

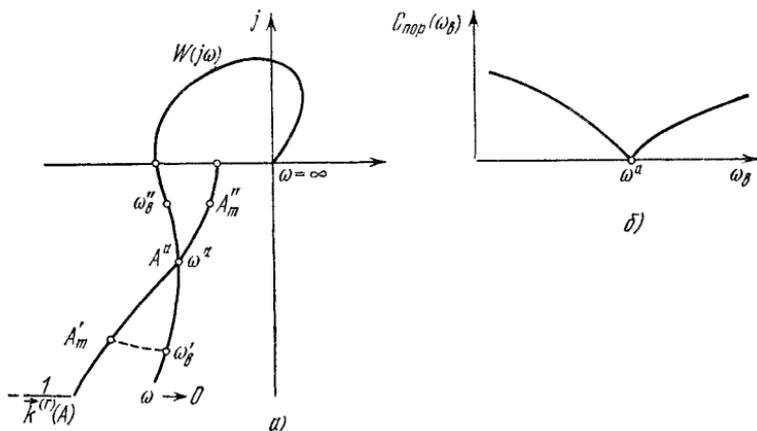


Рис 20.11.

из точки, соответствующей этому значению, на отрицательном обратном гармоническом коэффициенте проведем окружность радиуса

$$R = \left| \frac{C e^{j\varphi}}{A_B k^{(r)}(A_B)} \right| = \frac{C}{A_B k^{(r)}(A_B)}. \quad (20.25)$$

Тогда точки пересечения этой окружности с частотной характеристикой $W(j\omega)$ определяют соответствующие частоты $\omega_B^{(1)}$, $\omega_B^{(2)}$ вынужденных колебаний, а по углам φ_1 , φ_2 определяется фазовая характеристика. Задаваясь различными значениями A_B и определяя ω , построим амплитудную и фазовую частотные характеристики. Качественный вид частотных характеристик показан на рис. 20.12, а. В таких системах возможен так называемый скачкообразный резонанс. Если частота внешнего гармонического воздействия ω_B возрастает, то при $\omega_B \geq \omega_B^{(2)}$ происходит скачкообразное увеличение амплитуды вынужденных колебаний. Если же частота убывает, то при $\omega_B \leq \omega_B^{(1)}$ происходит скачкообразное уменьшение амплитуды вынужденных колебаний (рис. 20.12, б).

Выясним области возможного существования скачкообразного резонанса. Для этого построим зависимость C от A при $\omega_B = \text{const}$. Характер этой зависимости, существенно зависящий от

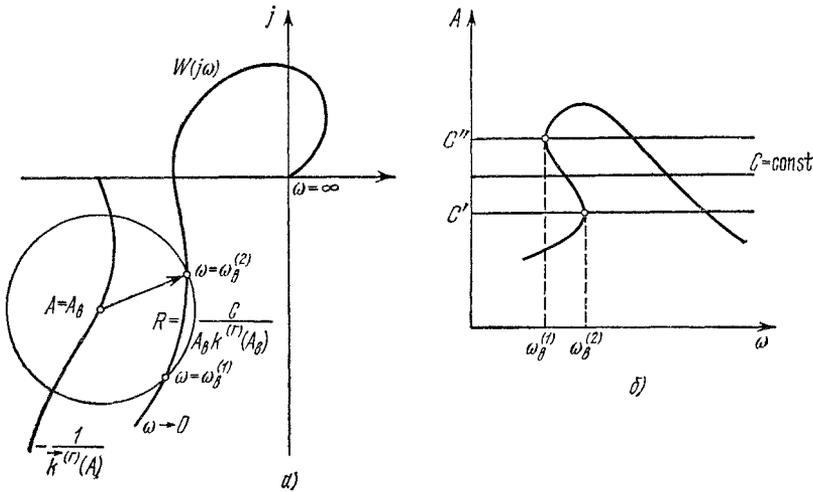


Рис. 20.12.

нелинейного элемента, приведен на рис. 20.13, а, б. Скачкообразный резонанс может иметь место лишь в случае неоднозначной зависимости A от C (рис. 20.13, б). Если амплитуда внешнего

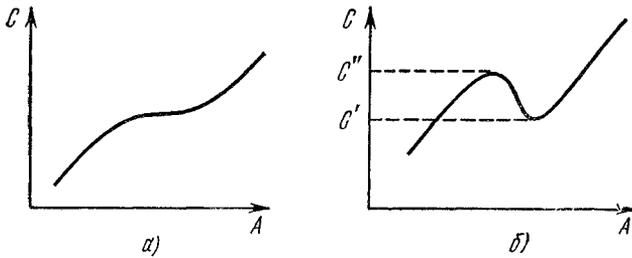


Рис. 20.13.

воздействия C возрастает (убывает), то при $C \geq C'$ ($C \leq C''$) амплитуда вынужденных колебаний увеличивается (уменьшается) скачком. Отсюда следует, что условием существования скачкообразного резонанса является неравенство

$$\left(\frac{dC}{dA}\right)_{\omega=\text{const}} \leq 0. \tag{20.26}$$

Раскроем это условие для случая вещественного коэффициента гармонической линеаризации $k^{(r)}(A)$. Запишем уравнение (20.18) в такой форме:

$$Ce^{i\varphi} = Ak^{(r)}(A) \left[\frac{1}{k^{(r)}(A)} + W(j\omega) \right].$$

Отсюда находим, беря абсолютные величины от обеих частей,

$$C = Ak^{(r)}(A) \left[\left(U(\omega) + \frac{1}{k^{(r)}(A)} \right)^2 + V^2(\omega) \right]^{1/2}.$$

Дифференцируя обе части уравнения по A , получим условие существования скачкообразного резонанса в виде

$$L(A, \omega) = \left[U(\omega) + \frac{1}{k^{(r)}(A)} \right] \left[\frac{1}{k^{(r)}(A) + A \frac{dk^{(r)}(A)}{dA}} + U(\omega) \right] + V^2(\omega) \leq 0. \quad (20.27)$$

На плоскости частотной характеристики уравнение

$$L(A, \omega) = 0$$

соответствует окружности радиуса

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{k^{(r)}(A) + A \frac{dk^{(r)}(A)}{dA}} - \frac{1}{k^{(r)}(A)} \right]$$

с центром в точке

$$\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{1}{k^{(r)}(A) + A \frac{dk^{(r)}(A)}{dA}} + \frac{1}{k^{(r)}(A)} \right]; 0 \right).$$

Эти окружности зависят от амплитуды возможных вынужденных колебаний. Очевидно, что область возникновения скачкообразного резонанса определяется огибающей семейства окружностей. Для получения уравнения огибающей в параметрической форме достаточно продифференцировать по A левую часть (20.27) приравнять результат нулю и разрешить это уравнение относительно U и V . Тогда получим

$$U(\omega) = - \frac{\frac{dk^{(r)}(A)}{dA} \left[k^{(r)}(A) + A \frac{dk^{(r)}(A)}{dA} \right] + k^{(r)}(A) \left[2 \frac{dk^{(r)}(A)}{dA} + A \frac{d^2k^{(r)}(A)}{dA^2} \right]}{3 \frac{dk^{(r)}(A)}{dA} + A \frac{d^2k^{(r)}(A)}{dA^2}} R^2(\omega),$$

$$V(\omega) = \frac{\pm \sqrt{\frac{dk^{(r)}(A)}{dA} \left[2 \frac{dk^{(r)}(A)}{dA} + A \frac{d^2k^{(r)}(A)}{dA^2} \right] \left(-A \frac{dk^{(r)}(A)}{dA} \right)}}{3 \frac{dk^{(r)}(A)}{dA} + A \frac{d^2k^{(r)}(A)}{dA^2}} R^2(\omega),$$

где

$$R^2(\omega) = [U(\omega)]^2 + [V(\omega)]^2.$$

На плоскости частотной характеристики огибающая выделяет некую область (на рис. 20.14 эта область заштрихована).

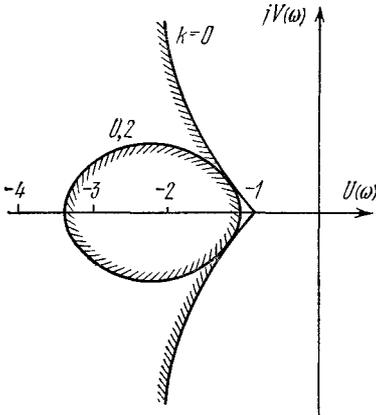


Рис. 20.14.

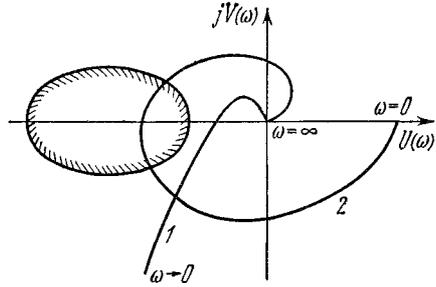


Рис. 20.15.

Если частотная характеристика находится вне огибающей (рис. 20.15, кривая 1), то в нелинейной системе скачки невозможны. Если частотная характеристика пересекает огибающую (рис. 20.15, кривая 2), то скачки могут наблюдаться лишь на частотах, соответствующих точкам частотной характеристики, лежащим внутри огибающей.

Задачи

20.1. Показать, что применение метода гармонической линеаризации к релейной системе с релейной характеристикой вида как на рис. 20.16 и передаточной функцией линейной части

$W(p) = \frac{k}{T_1 p + 1}$ приводит к качественно неверным результатам.

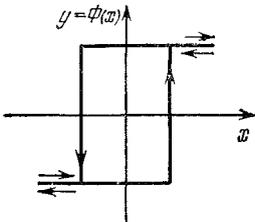


Рис. 20.16.

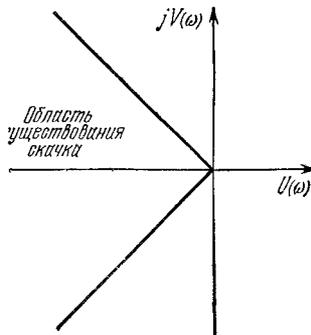


Рис. 20.17.

20.2. Показать, пользуясь методом гармонической линеаризации, что в релейной системе с релейной характеристикой вида как на рис. 20.16 и переда-

точной функцией линейной части $W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$ частота и амплитуда возможных автоколебаний равны соответственно

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}, \quad A = \frac{4T_1 T_2 k}{\pi(T_1 + T_2)}.$$

20.3. Показать, что область существования резонансного скачка для системы с нелинейностью вида $y = x^3$ определяется условиями

$$U = -\frac{2}{3} \frac{1}{A^2}, \quad V = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{1}{A^2},$$

или

$$V = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} U$$

(рис. 20.17).

Глава 21

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

§ 21.1. Особенности стохастических процессов

Стохастические процессы в нелинейных автоматических системах могут быть вызваны как внешними случайными воздействиями, так и случайными изменениями параметров линейной части или характеристики нелинейного элемента. Наличие нелинейного элемента приводит к существенному изменению *плотности распределения* случайного процесса. Пусть ко входу нелинейного элемента приложено случайное воздействие $x(t)$, плотность распределения которого в каждый момент времени t гауссова (рис. 21.1, а), т. е.

$$p(x(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{x^2(t)}{2\sigma_x^2}}, \quad (21.1)$$

где σ_x^2 — дисперсия случайного воздействия. Среднее значение случайного воздействия $x(t)$ предполагается равным нулю. Плотность распределения $p(y(t))$ выходной величины $y(t) = \Phi(x(t))$ будет, вообще говоря, отличаться от $p(x(t))$ (21.1). Так, для нелинейного элемента с насыщением (рис. 21.1, б) в интервалах, где $|x(t)| \leq \kappa_0$, соответствующих линейным участкам с конечным наклоном, отличным от нуля, распределение выходной величины будет также гауссовым, при этом $\sigma_y = |k| \sigma_x$. На отрезках, где выходная величина постоянна, плотность распределения $y(t)$ является нулевой, с δ -функциями на границе. Весовые коэффициенты этих δ -функций определяются из того условия, что площадь любого распределения равна 1. Таким образом, плотность распределения выходной величины $y(t)$ рассмотренного нелинейного элемента состоит из участков гауссова распределения и δ -функций (рис. 21.1, в), т. е.

$$p(y(t)) = r \delta(y(t) + k\kappa_0) + r \delta(y(t) - k\kappa_0) + p(y) |_{y \in (-k\kappa_0, k\kappa_0)},$$

где

$$r = \frac{1}{2} [1 - S(\kappa_0)], \quad S(\kappa_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \int_{-\kappa_0}^{\kappa_0} e^{-\frac{x^2(t)}{2\sigma_x^2}} dx.$$

Для релейного элемента с зоной нечувствительности (рис. 21.2, б) плотность распределения представляет собой совокупность трех δ -функций (рис. 21.2, в), т. е.

$$p(y(t)) = r[\delta(y(t) + kx_0) + \delta(y(t) - kx_0)] + S(x_0)\delta(y(t)).$$

Таким образом, нелинейный элемент всегда приводит к существенному изменению плотности распределения входного случайного воздействия. Аналогично внешнему периодическому воздействию, внешнее случайное воздействие, приложенное к нелинейной

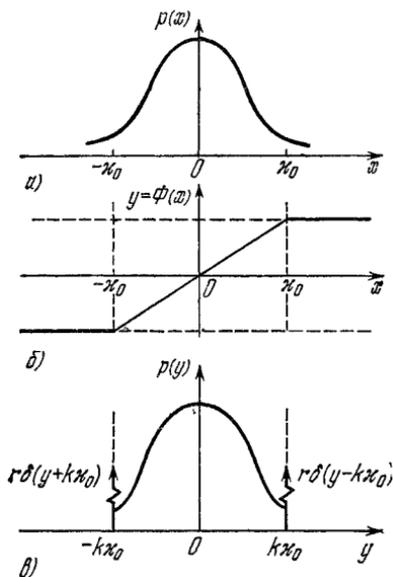


Рис. 21.1.

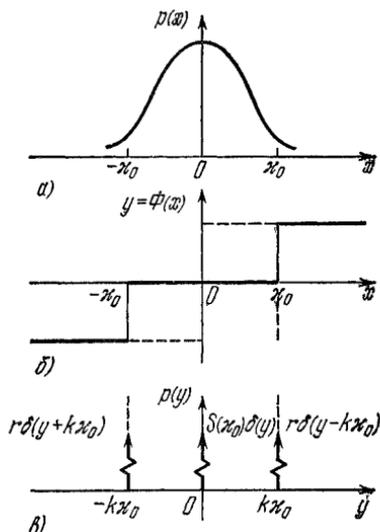


Рис. 21.2.

автоматической системе, может изменить параметры возможных автоколебаний или устранить их вовсе. Оно может также стабилизировать ранее неустойчивую систему. К сожалению, точные методы исследования нелинейных автоматических систем к настоящему времени неизвестны. Поэтому мы воспользуемся приближенным методом, основанным на стохастической линеаризации нелинейного элемента (см. § 15.4).

§ 21.2. Дисперсия ошибки

Рассмотрим нелинейную автоматическую систему (рис. 21.3, а), к которой приложено внешнее случайное воздействие $f(t)$. Уравнение вынужденного процесса, вызванного этим

случайным воздействием (см. § 16.1), можно представить в виде

$$x^B(t) = f(t) - \int_0^{\infty} \omega(\tau) \Phi(x^B(t - \tau)) d\tau. \quad (21.2)$$

Удобной характеристикой качества нелинейной системы может служить дисперсия ошибки $x(t)$, которая при $M\{x(t)\} = 0$ равна

$$\sigma_x^2 = M\{x^2(t)\}. \quad (21.3)$$

Для определения σ_x^2 воспользуемся стохастической линеаризацией. Стохастическая линеаризация нелинейного элемента, как было показано в § 15.4, состоит в замене уравнения нелинейного элемента

$$y(t) = \Phi(x^B(t)) \quad (21.4)$$

линеаризованным уравнением

$$\hat{y}(t) = k^{(cr)}(\sigma_x) x^B(t), \quad (21.5)$$

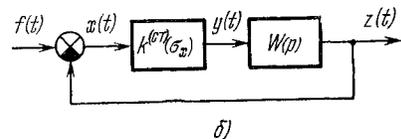
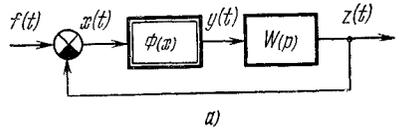


Рис. 21.3.

где коэффициент стохастической линеаризации определяется выражением (15.30) или (15.32), т. е.

$$k^{(cr)}(\sigma_x) = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} x \Phi(x) p(x) dx. \quad (21.6)$$

Подставляя выражение для $\hat{y}(t)$ (21.5) вместо (21.4) в уравнение (21.2), получаем

$$x^B(t) = f(t) - k^{(cr)}(\sigma_x) \int_0^{\infty} \omega(\tau) x^B(t - \tau) d\tau. \quad (21.7)$$

Это уравнение является, естественно, приближенным. Оно описывает стохастически линеаризованную систему (рис. 21.3, б), которая получается из исходной нелинейной системы (рис. 21.3, а) заменой нелинейного элемента стохастически линеаризованным. Частотная характеристика этой стохастически линеаризованной системы, определяемая по обычным правилам, равна

$$K(j\omega, \sigma_x) = \frac{k^{(cr)}(\sigma_x) W(j\omega)}{1 + k^{(cr)}(\sigma_x) W(j\omega)}, \quad (21.8)$$

а частотная характеристика для ошибки линеаризованной системы запишется в виде

$$K_x(j\omega, \sigma_x) = 1 - K(j\omega, \sigma_x) = \frac{1}{1 + k^{(\text{ст})}(\sigma_x) W(j\omega)}. \quad (21.9)$$

В отличие от частотных характеристик линейных систем, частотные характеристики стохастически линеаризованных систем $K(j\omega, \sigma_x)$ и $K_x(j\omega, \sigma_x)$ зависят от дисперсии ошибки σ_x^2 .

Найдем дисперсию ошибки σ_x^2 . По определению

$$D_x \equiv \sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega, \quad (21.10)$$

где $S_{xx}(\omega)$ — спектральная плотность стационарного случайного процесса. Обозначим через $S_{ff}(\omega)$ спектральную плотность внешнего случайного воздействия. Тогда, используя свойства спектральных плотностей (см. (14.17)), получим

$$S_{xx}(\omega) = |K_x(j\omega, \sigma_x)|^2 S_{ff}(\omega). \quad (21.11)$$

Следовательно, согласно (21.10) получаем

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_x(j\omega, \sigma_x)|^2 S_{ff}(\omega) d\omega. \quad (21.12)$$

Правая часть (21.12) может быть вычислена по формулам (13.15), (13.16) или по формулам табл. 13.1. Обозначим результат вычислений через $\varphi(\sigma_x)$, поскольку правая часть (21.11) является функцией σ_x и параметров системы. Таким образом, мы получаем уравнение относительно искомой дисперсии:

$$\sigma_x^2 = \varphi(\sigma_x). \quad (21.13)$$

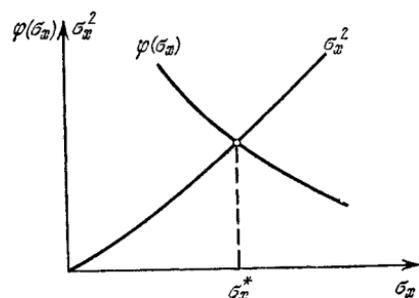


Рис. 21.4.

Это уравнение может быть решено различными итеративными или графическими методами. Изображая на плоскости (φ, σ_x) зависимость $\varphi(\sigma_x)$ и проводя параболу σ_x^2 (рис. 21.4), находим точку пересечения их σ_x^* , определяющую значение дисперсии ошибки σ_x^2 .

§ 21.3. Реакция нелинейной системы на случайное воздействие

После нахождения дисперсии ошибки σ_x^2 коэффициент стохастической линеаризации $k^{(ct)}(\sigma_x)$ становится полностью определенным, а значит, полностью определена и частотная характеристика замкнутой системы (21.8). Учитывая это, легко найти дисперсии различных переменных σ_y^2 , σ_z^2 нелинейной автоматической системы, которые характеризуют реакцию системы на стохастическое воздействие. Поскольку спектральные плотности $S_y(\omega)$, $S_z(\omega)$ для стохастически линеаризованной системы соответственно равны

$$S_y(\omega) = |K_x(j\omega, \sigma_x) k^{(ct)}(\sigma_x)|^2 S_{ff}(\omega), \quad (21.14)$$

$$S_z(\omega) = |K_x(j\omega, \sigma_x) k^{(ct)}(\sigma_x) W(j\omega)|^2 S_{ff}(\omega), \quad (21.15)$$

то согласно формуле, аналогичной (21.10), получаем

$$D_y \equiv \sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_x(j\omega, \sigma_x) k^{(ct)}(\sigma_x)|^2 S_{ff}(\omega) d\omega, \quad (21.16)$$

$$D_z \equiv \sigma_z^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_x(j\omega, \sigma_x) k^{(ct)}(\sigma_x) W(j\omega)|^2 S_{ff}(\omega) d\omega. \quad (21.17)$$

В этих формулах σ_x определяется уравнением (21.13). Естественно, что точность определения дисперсии выходной величины нелинейного элемента невысока.

§ 21.4. Исследование простейшей автоматической системы

Рассмотрим простейшую нелинейную автоматическую систему (рис. 21.5, а). Пусть нелинейный элемент представляет собой идеальное реле

$$y = \Phi(x) = k_p \operatorname{sign} x = \begin{cases} k_p, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -k_p, & x < 0, \end{cases} \quad (21.18)$$

а частотная характеристика линейной части равна

$$W(j\omega) = \frac{k_n}{j\omega(T_1 j\omega + 1)}. \quad (21.19)$$

Ко входу этой нелинейной системы приложено стационарное случайное воздействие $\dot{f}(t)$, спектральная плотность которого

равна

$$S_{ff}(\omega) = \frac{S_0}{|1 + T_f j\omega|^2} = \frac{S_0}{1 + T_f^2 \omega^2}. \quad (21.20)$$

Дисперсия входного случайного воздействия σ_f^2 находится по формуле, аналогичной (21.10):

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) d\omega = \frac{S_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{1 + T_f^2 \omega^2} = \frac{S_0}{T_f}. \quad (21.21)$$

Для дальнейшего удобно выразить спектральную плотность входного воздействия (21.20) через дисперсию σ_f^2 . В силу (21.21)

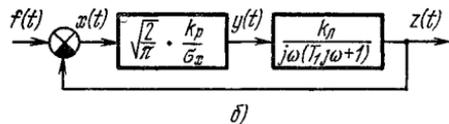
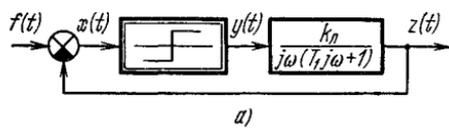


Рис. 21.5.

$$S_{ff}(\omega) = \frac{T_f \sigma_f}{|1 + T_f j\omega|^2}. \quad (21.22)$$

Найдем дисперсию входной величины нелинейного элемента σ_x^2 . Для этой цели определим прежде всего коэффициент стохастической линейризации $k^{(cr)}(\sigma_x)$ для идеального релейного элемента согласно (21.6) при нормальном законе распределения:

$$k^{(cr)}(\sigma_x) = \frac{k_p}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} x \operatorname{sign} x p(x) dx = \frac{k_p}{\sigma_x^2} \int_0^{\infty} \frac{2x}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} dx. \quad (21.23)$$

Вводя новую переменную $u = \frac{x^2}{2\sigma_x^2}$, получаем

$$k^{(cr)}(\sigma_x) = \frac{2k_p}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \int_0^{\infty} e^{-u} du, \quad (21.24)$$

или так как

$$\int_0^{\infty} e^{-u} du = 1,$$

то окончательно

$$k^{(cr)}(\sigma_x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k_p}{\sigma_x}. \quad (21.25)$$

Таким образом, схема стохастически линеаризованной системы примет вид, изображенный на рис. 21.5, б. После замены в (21.9) $W(j\omega)$ из (21.19) будем иметь

$$K_x(j\omega, \sigma_x) = \frac{j\omega(T_1 j\omega + 1)}{j\omega(T_1 j\omega + 1) + k^{(cr)}(\sigma_x)k_n}. \quad (21.26)$$

Подставляя $K_x(j\omega, \sigma_x)$ (21.26) и $S_{ff}(\omega)$ (21.22) в (21.12), получаем

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{j\omega(T_1 j\omega + 1)}{j\omega(T_1 j\omega + 1) + k^{(cr)}(\sigma_x)k_n} \right|^2 \frac{T_f \sigma_f^2}{|1 + T_f j\omega|^2} d\omega,$$

или

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{T_f^{1/2} \sigma_f j\omega + T_1 T_f^{1/2} \sigma_f (j\omega)^2}{k^{(cr)}(\sigma_x)k_n + (1 + T_f k^{(cr)}(\sigma_x)k_n)j\omega + (T_1 + T_f)(j\omega)^2 - T_1 T_f (j\omega)^3} \right|^2 d\omega. \quad (21.27)$$

Для вычисления правой части (21.27) воспользуемся формулой из табл. 13.1. Принимая

$$\begin{aligned} s &= 3, & g_0 &= 0, & g_1 &= T_f^{1/2} \sigma_f, & g_2 &= T_1 T_f^{1/2} \sigma_f, \\ d_0 &= k^{(cr)}(\sigma_x)k_n, & d_1 &= 1 + T_f k^{(cr)}(\sigma_x)k_n, \\ d_2 &= T_1 + T_2, & d_3 &= T_1 T_f, \end{aligned}$$

получим после элементарных преобразований

$$\sigma_x^2 = \sigma_f^2 \frac{1 + \frac{T_f}{T_1} + k_n k^{(cr)}(\sigma_x) \frac{T_f}{T_1}}{1 + \frac{T_f}{T_1} + k_n k^{(cr)}(\sigma_x) \left(\frac{T_f}{T_1}\right)^2}. \quad (21.28)$$

Это уравнение справедливо для нелинейного элемента любого вида. В частности, для релейного элемента, принимая во внимание выражение для $k^{(cr)}(\sigma_x)$ (21.25), из (21.28) будем иметь

$$\sigma_f^2 = \frac{\left(1 + \frac{T_f}{T_1}\right) \sigma_x^2 + \frac{T_f}{T_1} k_n k_p \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_x}{\left(1 + \frac{T_f}{T_1}\right) + \frac{T_f}{T_1} k_n k_p \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_x}}.$$

Зависимость правой части от σ_x при фиксированных $\frac{T_f}{T_1}$ и различных $k_n k_p$ дана на рис. 21.6. Проведя горизонтальную прямую

σ_f^2 , легко найти σ_x как функцию σ_f . Для малых коэффициентов усиления $k_n k_p$ имеем $\sigma_f \approx \sigma_x$, что свидетельствует о плохом режиме работы системы. С ростом

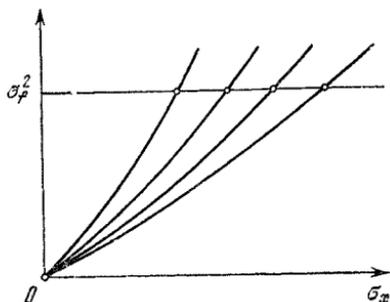


Рис. 21.6.

$k_n k_p$ отношение $\frac{\sigma_f^2}{\sigma_x^2}$ уменьшается, т. е. режим работы системы улучшается. Это отношение при $k_n k_p \rightarrow \infty$ достигает предела, равного

$$\frac{\sigma_f^2}{\sigma_x^2} = \frac{T_f}{T_1},$$

т. е. чем больше постоянная времени системы T_1 , тем эффективнее работа системы.

Дисперсия выходной величины системы σ_z^2 может быть найдена по формуле (21.28):

$$\sigma_z^2 = \sigma_f^2 \frac{\frac{T_f}{T_1} \left(1 + \frac{T_f}{T_1}\right) k_n k^{(\text{ст})}(\sigma_x)}{1 + \frac{T_f}{T_1} + \left(\frac{T_f}{T_1}\right)^2 k_n k^{(\text{ст})}(\sigma_x)}$$

или, в частном случае, для релейной системы

$$\sigma_z^2 = \sigma_f^2 \frac{\frac{T_f}{T_1} \left(1 + \frac{T_f}{T_1}\right)^2 k_n k_p \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\left(1 + \frac{T_f}{T_1}\right) \sigma_x + \left(\frac{T_f}{T_1}\right)^2 k_n k_p \sqrt{\frac{2}{\pi}}}.$$

Это соотношение определяет эффект подавления помех на выходе релейной системы. Чем больше $\frac{T_f}{T_1}$, тем больше этот эффект.

Задачи

21.1. Показать, что коэффициент стохастической линеаризации

$$k^{(\text{ст})}(\sigma) = \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} x \Phi(x) p(x) dx$$

для нелинейного элемента с релейной характеристикой

$$\Phi(x) = \begin{cases} k_p, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -k_p, & x < 0, \end{cases}$$

при различных плотностях распределения $p(x)$:

а) равномерной

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma}, & |x| \leq \sqrt{3}\sigma, \\ 0, & |x| > \sqrt{3}\sigma; \end{cases}$$

б) треугольной

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{6\sigma^2}x + \frac{1}{\sqrt{6}\sigma}, & -\sqrt{6}\sigma \leq x \leq 0, \\ -\frac{1}{6\sigma^2}x + \frac{1}{\sqrt{6}\sigma}, & 0 \leq x \leq \sqrt{6}\sigma; \end{cases}$$

в) нормальной

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}};$$

г) лапласовой

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}\sqrt{2}},$$

равен соответственно:

$$\text{а) } k^{(\text{CT})}(\sigma) = \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{k_p}{\sigma} \approx 0,87 \frac{k_p}{\sigma};$$

$$\text{б) } k^{(\text{CT})}(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{k_p}{\sigma} \approx 0,82 \frac{k_p}{\sigma};$$

$$\text{в) } k^{(\text{CT})}(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k_p}{\sigma} \approx 0,80 \frac{k_p}{\sigma};$$

$$\text{г) } k^{(\text{CT})}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{k_p}{\sigma} \approx 0,71 \frac{k_p}{\sigma}.$$

Убедиться, что $k^{(\text{CT})}(\sigma)$ мало зависит от вида типовых плотностей распределения.

21.2. Показать, что $k^{(\text{CT})}(\sigma)$ мало зависит от вида типовых плотностей распределения для нелинейного элемента с характеристикой вида

$$\Phi(x) = \begin{cases} x_0, & x > x_0, \\ x, & |x| \leq x_0, \\ -x_0, & x < -x_0 \end{cases}$$

Начертить зависимости $k^{(\text{CT})}(\sigma) = k^{(\text{CT})}\left(\frac{\sigma}{x_0}\right)$ при $0 \leq \frac{\sigma}{x_0} \leq 5$.

21.3. Показать, используя результаты задачи 15.2, что при замене нормального распределения на равномерное коэффициент стохастической линеаризации приближенно может быть представлен в виде $k^{(\text{CT})}(\sigma) \approx \frac{\Phi(\sqrt{3}\sigma)}{\sqrt{3}\sigma}$.

21.4. Показать, что для системы на рис. 21.7 при спектральной плотности воздействия, равной $S_f(\omega) = \frac{S_0}{1 + \omega^2 T^2}$, имеет место равенство

$$\sigma_x^2 = \sigma_f^2 \frac{T_1^2 (T + T_d)}{T_d [T_1^2 + T (T + T_d) k_i^{(cr)}(\sigma_x)]},$$

$$i = 1, 2.$$

Для нормального распределения

$$k_1^{(cr)}(\sigma_x) = \frac{k}{\kappa_0} \operatorname{erf} \left(\frac{\kappa_0}{\sqrt{2} \sigma_x} \right)$$

или, согласно результату задачи 21.3, приближенно

$$k_2^{(cr)}(\sigma_x) \approx \begin{cases} \frac{k \sqrt{3}}{\kappa_0}, & \text{если } \sigma_x \leq \frac{\kappa_0}{\sqrt{3}}, \\ \frac{k}{\kappa_0} \frac{1}{\sqrt{3} \sigma_x}, & \text{если } \sigma_x > \frac{\kappa_0}{\sqrt{3}}, \end{cases}$$

и определение σ_x^2 сводится к графическому решению уравнения $k_i^{(cr)}(\sigma_x) = \frac{T_1^2}{T T_d} \left(\frac{\sigma_f^2}{\sigma_x^2} - \frac{T_d}{T + T_d} \right)$, $i = 1, 2$. Найти σ_x при $T = T_d = T_1$, используя

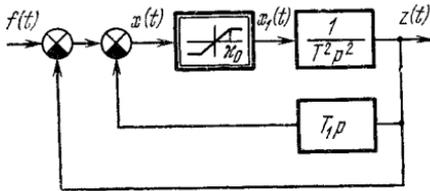


Рис. 21.7.

приведенные выше определения $k^{(cr)}(\sigma_x)$. Сопоставить вычисленное значение σ_x при коэффициентах гармонической линеаризации $k_1^{(cr)}(\sigma_x)$ и $k_2^{(cr)}(\sigma_x)$.

21.5. Найти значение σ_f при котором система на рис. 21.5, а теряет устойчивость.

ДИСКРЕТНЫЕ АВТОМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

ВИДЫ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

§ 22.1. Квантование и его особенности

В рассмотренных ранее непрерывных автоматических системах сигналы, несущие информацию об ошибке, а также остальные сигналы представляли собой, вообще говоря, непрерывные функции времени (рис. 22.1, а). Наряду с непрерывным способом передачи и преобразования сигналов в настоящее время широко применяются дискретные способы, в которых используется в том или ином виде дискретизация сигнала. Дискретизация сигнала состоит в замене непрерывного сигнала теми или иными дискретными значениями и может быть осуществлена по времени, по уровню либо по времени и по уровню.

Дискретизация сигнала по времени, или квантование по времени, соответствует выделению значений сигнала в заранее фиксированные моменты времени. Обычно эти моменты времени отстоят друг от друга на постоянную величину T , называемую *интервалом квантования по времени* (рис. 22.1, б).

Дискретизация сигнала по уровню, или квантование по уровню, соответствует выделению значений сигнала при достижении им заранее фиксированных уровней. Эти фиксированные уровни сигнала обычно отстоят друг от друга на постоянную величину σ , называемую *интервалом квантования по уровню* (рис. 22.1, в). Дискретизация сигнала по времени и по уровню соответствует выделению в заранее фиксированные моменты времени значений сигнала, ближайших к заранее фиксированным уровням (рис. 22.1, г). Типичный пример квантования по времени представляет собой кинолента, которая на своих кадрах фиксирует мгновенные события непрерывно изменяющихся явлений. Квантование по времени всегда имеет место в импульсных способах передачи данных. Типичным примером квантования по времени и уровню или, точнее, по аргументу и функции являются таблицы функций. Аргументы заданы дискретно, а значения функций округлены до определенного количества цифр. Квантование

по времени и уровню всегда имеет место в любой цифровой вычислительной машине.

В зависимости от типа квантования, которое используется в автоматических системах, мы будем подразделять их на три вида: *импульсные автоматические системы*, если хотя бы одна из величин, характеризующих состояние системы, квантуется по времени; *релейные автоматические системы*, если хотя бы одна из величин, характеризующих состояние системы, квантуется по уровню; *цифровые автоматические системы*, если хотя бы одна из величин, характеризующих состояние системы, квантуется и по времени, и по уровню.

Отметим, что релейные системы можно также рассматривать как нелинейные непрерывные системы с нелинейностью релейного типа и к ним можно применять методы исследования, описанные в предыдущей части книги. Поэтому далее мы их рассматривать не будем.

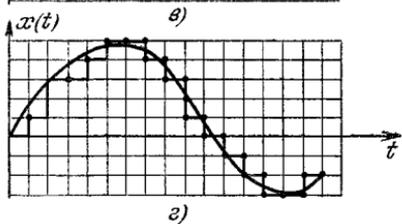
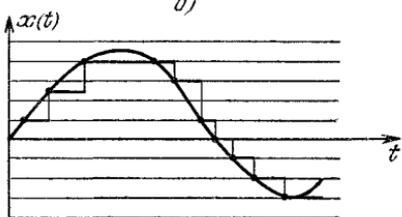
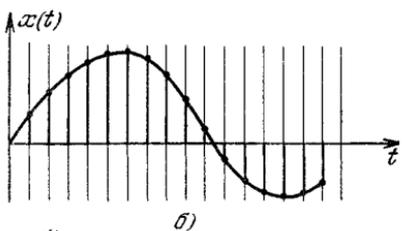
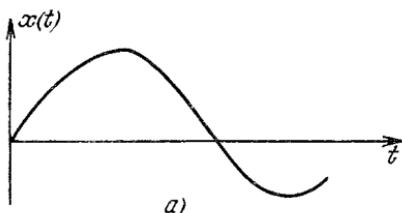


Рис. 22.1.

§ 22.2. Виды импульсных и цифровых автоматических систем

Квантование по времени заменяет непрерывную функцию *решетчатой*, которая определяется совокупностью выделенных ординат, или *дискрет*. Эти ординаты, или дискреты, модулируют неко-

торую последовательность импульсов. Квантование по времени и модуляция осуществляются импульсным модулятором. Входной величиной импульсного модулятора является непрерывная величина, а выходной — модулированная последовательность импульсов. Будем обозначать импульсный модулятор, как показано на рис. 22.2. Изображенный импульс показывает форму модулируемой последовательности импульсов. Модуляция сводится к изменению тех или иных параметров импульсов, например амплитуды, длительности или ширины.

В зависимости от вида модуляции будем различать: *амплитудно-импульсные автоматические системы (АИАС)*, в которых

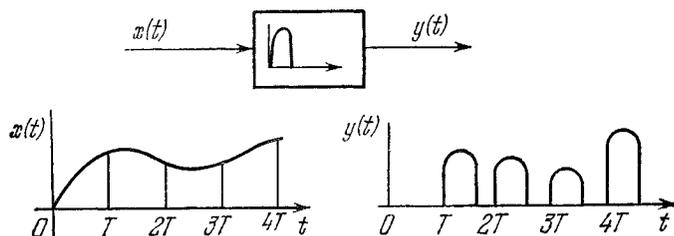


Рис. 22.2.

импульсный элемент осуществляет амплитудно-импульсную модуляцию (рис. 22.3, б); *широтно-импульсные автоматические системы (ШИАС)*, в которых импульсный элемент осуществляет широтно-импульсную модуляцию (рис. 22.3, в).

Представим общую схему импульсной автоматической системы в виде соединения импульсного элемента и непрерывной части (рис. 22.4). Амплитудно-импульсные автоматические системы могут быть как линейными, так и при наличии нелинейного элемента — нелинейными. Широтно-импульсные автоматические системы принципиально нелинейны. Нелинейными являются также цифровые автоматические системы, в которых имеется такая «нелинейная» операция, как квантование по уровню. Если пренебречь квантованием по уровню, что бывает возможным при наличии достаточно большого числа разрядов, когда результат после округления мало изменяется, то цифровые автоматические системы можно свести к амплитудно-импульсным системам.

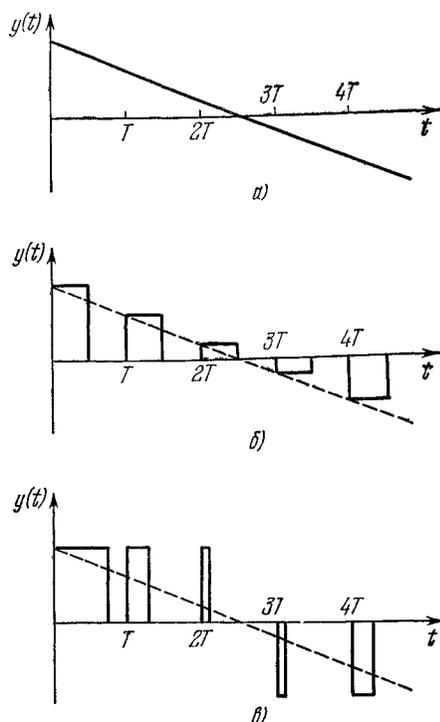


Рис. 22.3.

Общая схема цифровой автоматической системы изображена на рис. 22.5. Она содержит цифровую вычислительную машину (ЦВМ), играющую роль задающего, сравнивающего и управляющего устройства. Выработанные ею дискретные сигналы управления с помощью преобразователя дискретных сигналов в непрерывные (Д → Н) преобразуются в непрерывные управляющие воздействия, которые

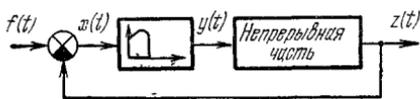


Рис. 22.4.

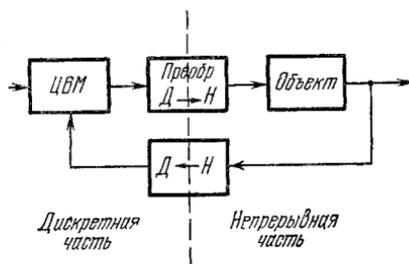


Рис. 22.5.

изменяют состояние объекта. Переменные состояния объекта с помощью преобразователя непрерывных сигналов в дискретные (Н → Д) преобразуются в дискретные переменные, которые вводятся в ЦВМ. Преобразователь играет роль импульсного элемента.

§ 22.3. Примеры дискретных автоматических систем

В первой части книги мы уже познакомились с типовыми импульсными автоматическими системами. Поэтому здесь мы сделаем упор на некоторые нетривиальные применения дискретизации и, в частности, приведем примеры сведения к дискретным системам некоторых задач преобразования сигналов и численного анализа. Рассмотрим также примеры схем цифровых вычислительных машин.

Преобразователь масштаба времени. Пусть задана некоторая периодическая функция времени вида последовательности импульсов произвольной формы (рис. 22.6, а). Квантование по времени, осуществляемое импульсным элементом, фиксирует дискретные значения — дискреты — этих импульсов (рис. 22.6, б, в). Если интервал квантования T кратен периоду импульсной последовательности, то фиксированные дискреты будут равны друг другу, т. е. в этом случае останавливается, или замораживается, определенное значение импульса. Изменяя фазу квантования по времени, можно таким же образом зафиксировать иное значение импульса (рис. 22.6, б). Следовательно, квантование по времени позволяет наблюдать любую точку высокочастотного периодического процесса благодаря ее фиксации на неопределенно долгое время. Если выбрать интервал квантования T' не кратным периоду импульсной последовательности, то форма огибающей

полученных дискрет представит собой растянутую по времени форму импульса (рис. 22.6, в). В этом случае импульсный элемент осуществляет преобразование масштаба времени. Очевидно,

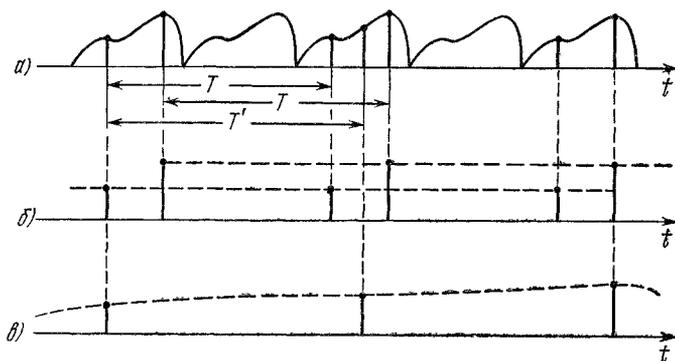


Рис. 22.6.

преобразователь масштаба времени использует известный стробоскопический эффект.

Двухкальная система управления. Эта система состоит из модели объекта и модели управляющего устройства (рис. 22.7), работающей в убыстренном масштабе времени с повторением,

которое отыскивает наилучшее с той или иной точки зрения управление. Это управление периодически повторяется в модели системы. Преобразователь $Д \rightarrow Н$, содержащий импульсный элемент, производит преобразование масштаба времени этого управления и осуществляет через исполнительное устройство управление реальным объектом.

Преобразователь $Н \rightarrow Д$ при изменении режима работы реального объекта вносит коррекции в модель управления. Такая двухкальная система позволяет осуществлять оптимальное управление объектом без предварительного расчета оптимального управления.

Дискретно-непрерывные фильтры. Такие фильтры осуществляют над входными переменными операции сдвига и взвешивания. Уравнение дискретно-непрерывного фильтра может быть

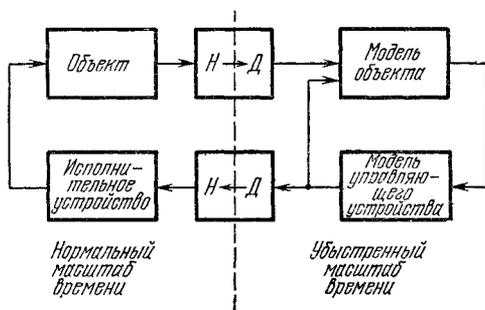


Рис. 22.7.

представлено в виде

$$u(t) = \sum_{k=0}^N \beta_k y(t - kT) - \sum_{k=1}^N \alpha_k u(t - kT), \quad (22.1)$$

где $y(t)$ — входная величина, $u(t)$ — выходная величина, β_k ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) и α_k ($k = 1, 2, \dots, N$) — весовые коэффициенты входных и выходных «сдвинутых» переменных соответственно. Уравнение (22.1) представляет собой разностное уравнение с непрерывно изменяющимся аргументом t . Основным элементом дискретного фильтра является элемент памяти, задержки или запаздывания, который, не меняя формы, сдвигает

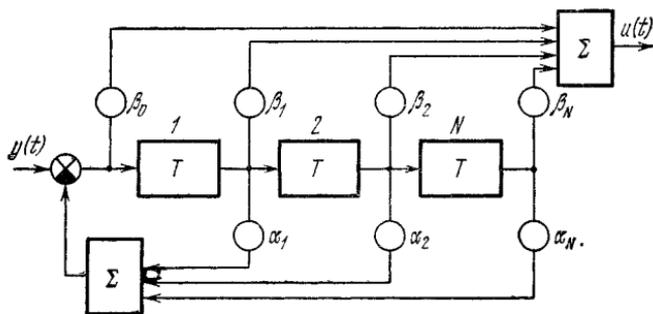


Рис. 22.8.

входную величину на величину T . Схема фильтра, описываемого уравнением (22.1), изображена на рис. 22.8. Вторая сумма соответствует обратным связям, а первая — прямым связям.

Частным случаем дискретно-непрерывных фильтров является так называемый *нерекурсивный фильтр*, который не содержит обратных связей. Его уравнение получается из (22.1) при $\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, N$,

$$u(t) = \sum_{k=0}^N \beta_k y(t - kT). \quad (22.2)$$

Схема нерекурсивного фильтра изображена на рис. 22.9. Если на вход такого фильтра подать импульс произвольной формы и длительности, меньшей T , то реакция этого фильтра представит собой конечную последовательность «взвешенных» импульсов, и при $t \geq (N + 1)T$ эта реакция будет тождественно равна нулю.

Рассмотрим частные случаи этого фильтра. Полагая в (22.2)

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = -1, \quad \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_N = 0,$$

получим

$$u(t) = y(t) - y(t - T) = \Delta y(t), \quad (22.3)$$

что представляет собой первую разность входных величин. Структурная схема, соответствующая (22.3), имеет простой вид

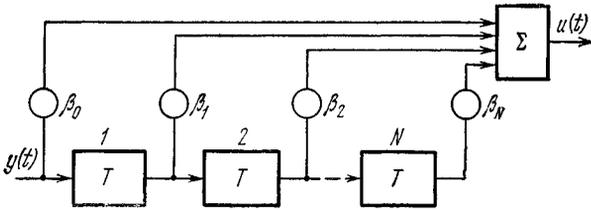


Рис. 22.9.

(рис. 22.10). При малых T первая разность приближенно пропорциональна первой производной:

$$\Delta y(t) \approx T \frac{dy(t)}{dt}. \tag{22.4}$$

Осуществление дифференциатора в виде дискретно-непрерывного фильтра может дать определенные выгоды. Так, предположим, что $y(t)$ состоит из медленно изменяющегося низкочастотного сигнала $y_0(t)$ и аддитивной высокочастотной периодической помехи, т. е.

$$y(t) = y_0(t) + a \sin \omega t. \tag{22.5}$$

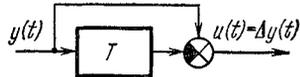


Рис. 22.10

В этом случае идеальный непрерывный дифференциатор дает на выходе величину

$$u(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dy_0(t)}{dt} + a\omega \cos \omega t. \tag{22.6}$$

При достаточно большой частоте ω полезная составляющая будет полностью маскироваться интенсивной помехой амплитуды $a\omega$. Дискретно-непрерывный дифференциатор в этом случае дает на выходе

$$u(t) = y_0(t) - y_0(t - T) + a [\sin \omega t - \sin \omega(t - T)]. \tag{22.7}$$

При выборе $T = \frac{2\pi s}{\omega}$, где s — целое число,

$$\sin \omega \left(t - \frac{2\pi s}{\omega} \right) = \sin \omega t \tag{22.8}$$

и

$$u(t) = y_0(t) - y_0(t - T) \approx T \frac{dy_0(t)}{dt}, \tag{22.9}$$

т. е. влияние помехи устраняется.

Полагая в (22.1)

$$\begin{aligned} \beta_0 = 1, \quad \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_N = 0, \\ \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = \dots = \alpha_N = 0, \end{aligned} \quad (22.10)$$

получим

$$u(t) - u(t - T) = y(t), \quad (22.11)$$

что представляет собой разностное уравнение. Структурная схема, соответствующая ему, изображена на рис. 22.11. Она представляет собой дискретно-непрерывный фильтр с положительной обратной связью. Из (22.11) легко получить

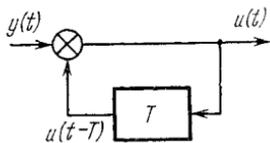


Рис. 22.11.

$$\begin{aligned} u(t) = \sum_{k=0}^m y(t - kT), \\ (m - 1)T \leq t \leq mT. \end{aligned} \quad (22.12)$$

Таким образом, этот фильтр осуществляет операцию суммирования входных сигналов.

Цифровая вычислительная машина. ЦВМ может быть представлена в виде дискретного фильтра, осуществляющего преобразование входной последовательности чисел $y(mT)$ в выходную

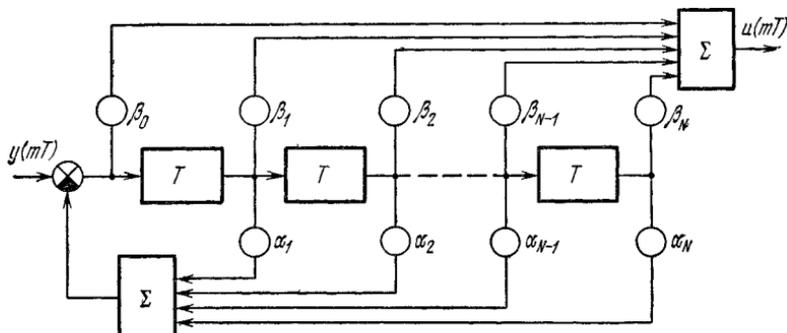


Рис. 22.12.

$u(mT)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) (рис. 22.12). Если пренебречь квантованием по уровню, т. е. конечностью разрядов обрабатываемых ЦВМ данных, и ограничиться линейными операциями, то уравнение ЦВМ можно представить в виде, аналогичном (22.1), положив в нем $t = mT$:

$$u(mT) = \sum_{k=0}^N \beta_k y[(m - k)T] - \sum_{k=1}^N \alpha_k u[(m - k)T]. \quad (22.13)$$

Структурная схема ЦВМ, определяемая уравнением (22.13), совпадает с изображенной на рис. 22.8, с одной лишь разницей, что входными и выходными сигналами являются не непрерывные, а дискретные функции (рис. 22.12). Уравнение (22.13) можно назвать условно программой ЦВМ. Рассмотрим в качестве примеров программы и соответствующие им структурные схемы численного интегрирования. Пусть

$$u(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau. \quad (22.14)$$

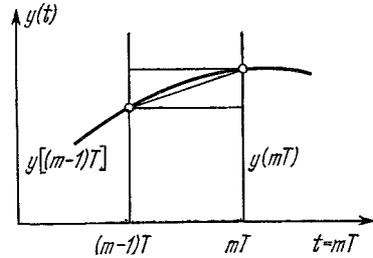


Рис. 22.13.

Положим $t = mT$; тогда получим следующие выражения:

$$u(mT) = \int_0^{mT} y(\tau) d\tau = \int_0^{(m-1)T} y(\tau) d\tau + \int_{(m-1)T}^{mT} y(\tau) d\tau, \quad (22.15)$$

т. е.

$$u(mT) - u[(m-1)T] = \int_{(m-1)T}^{mT} y(\tau) d\tau. \quad (22.16)$$

Численные методы интегрирования отличаются друг от друга способом приближенного вычисления интеграла, стоящего в

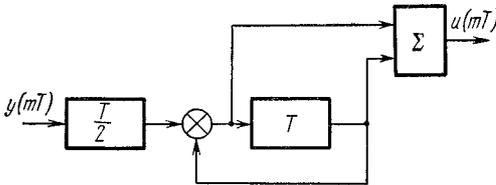


Рис. 22.14.

правой части (22.16). Так, при аппроксимации трапецией (рис. 22.13) получаем

$$\int_{(m-1)T}^{mT} y(\tau) d\tau \approx \frac{T}{2} [y[(m-1)T] + y(mT)], \quad (22.17)$$

и следовательно, после подстановки приближенного значения интеграла (22.17) в (22.16) получим

$$u(mT) - u[(m-1)T] = \frac{T}{2} (y[(m-1)T] + y(mT)). \quad (22.18)$$

Этому методу численного интегрирования соответствует структурная схема, изображенная на рис. 22.14. Она является частным случаем общей схемы (рис. 22.8) при

$$\beta_0 = \frac{T}{2}, \quad \beta_1 = \frac{T}{2}, \quad \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_N = 0,$$

$$\alpha_0 = -1, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_N = 0.$$

Таким образом, операции, осуществляемые ЦВМ, можно анализировать, изучая соответствующие дискретные фильтры.

В автоматических системах ЦВМ часто применяется в качестве управляющего устройства, которое мы далее будем называть *цифровым вычислительным устройством* (ЦВУ).

А. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Глава 23

УРАВНЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

§ 23.1. Блок-схема и граф импульсных систем

Блок-схему импульсной автоматической системы можно представить в виде соединения импульсного элемента и непрерывной части. В амплитудно-импульсных системах, которые мы будем далее рассматривать, на непрерывную часть воздействует последовательность импульсов, амплитуда которых пропорциональна значению входной величины импульсного элемента — ошибки $x(t)$ в дискретные моменты времени $t = mT$ (рис. 23.1). Таким образом, импульсная система реагирует лишь на дискретные значения ошибки

$$x(t) = f(t) - z(t) \quad \text{при} \quad t = mT,$$

т. е.

$$x(mT) = f(mT) - z(mT),$$

и не реагирует на изменение внешнего воздействия $f(t)$ и выходной величины непрерывной части системы $z(t)$ между этими дискретными моментами времени. Поскольку непрерывная часть системы линейна, то она может быть описана системой линейных дифференциальных уравнений, либо интегральным уравнением, либо, наконец, уравнением относительно изображений. Мы здесь будем использовать описание непрерывной части, включающие временную характеристику $\omega_n(t)$ или передаточную функцию $W_n(p)$.

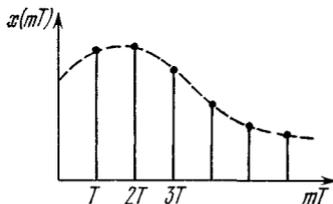
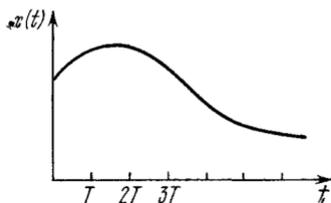
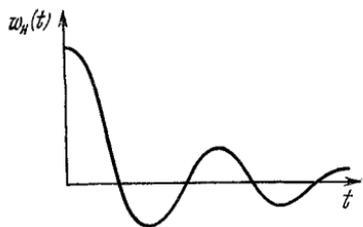


Рис. 23.1.

Индекс «н» напоминает, что речь здесь идет об исходной непрерывной части системы. Таким образом, уравнение непрерывной части может быть записано в виде

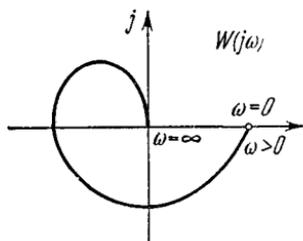


$$z(t) = \int_0^t w_n(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

либо

$$Z(p) = W_n(p) Y(p),$$

где



$$W_n(p) = L\{w_n(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} w_n(t) dt.$$

Помимо временной характеристики $w_n(t)$ и передаточной функции $W_n(p)$, линейная часть может быть описана и частотной характеристикой $W_n(j\omega)$, которая получается из передаточной функции $W(p)$ при замене p на $j\omega$. Эти характеристики и

переменные указаны на рис. 23.2. Новым элементом в этой системе является импульсный элемент, и для составления уравнения всей системы в целом нам необходимо выяснить свойства импульсного элемента и найти его уравнения.

§ 23.2. Импульсный элемент и его уравнения

Амплитудно-импульсный элемент представляет собой устройство, реагирующее на дискретные равноотстоящие друг от друга значения входного сигнала $x(t)$ при $t = mT$. Его выходная величина является последовательностью импульсов определенной

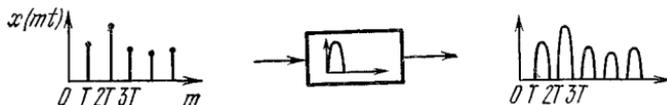


Рис. 23.3

формы, амплитуда которых пропорциональна дискретным значениям входной величины $x(mT)$ (рис. 23.3). Поскольку далее мы в основном рассматриваем амплитудно-импульсные элементы, то для краткости слово «амплитудный» мы будем опускать.

Назовем *простейшим импульсным элементом* такой, выходная величина которого $x^*(t)$ представляет собой последователь-

ность δ -функций, «площади» которых равны дискретным значениям выходной величины $x(mT)$. Физически δ -функции (см. приложение 2) соответствуют импульсам бесконечно большой амплитуды и бесконечно малой длительности, с площадью, равной 1. Очевидно, что любой импульсный элемент с произвольной формой импульса $s(t)$ всегда может быть представлен в виде

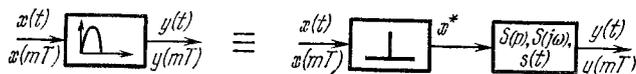


Рис. 23.4.

последовательного соединения простейшего импульсного элемента и некоторой *формирующей цепи*, реакция которой на импульсные воздействия равна $s(t)$. Эта реакция представляет собой временную характеристику формирующей цепи. Обозначая через $S(p)$ изображение $s(t)$, а через $S(j\omega)$ спектр $s(t)$, приходим

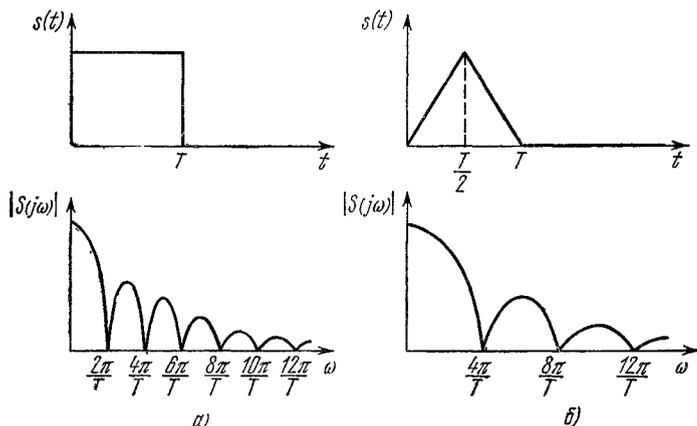


Рис. 23.5.

к заключению, что импульсному элементу с произвольной формой импульса эквивалентно последовательное соединение простейшего импульсного элемента с формирующей цепью. Передаточная функция, частотная и временная характеристики равны соответственно $S(p)$, $S(j\omega)$, $s(t)$ (рис. 23.4). Так, для импульсов прямоугольной формы (рис. 23.5, а)

$$s(t) = \begin{cases} k_{\Phi}, & 0 \leq t < T, \\ 0, & T \leq t < \infty, \end{cases}$$

имеем

$$S(p) = k_{\Phi} \left[\frac{1}{p} - \frac{e^{-pT}}{p} \right] = k_{\Phi} \frac{1 - e^{-pT}}{p}$$

и при $p = j\omega$

$$S(j\omega) = k_{\Phi} \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = k_{\Phi} \frac{\left| \sin \frac{\omega T}{2} \right|}{\frac{\omega}{2}} e^{-j \left(\frac{\omega T}{2} - k\pi \right)}.$$

Для импульсов треугольной формы (рис. 23.5, б)

$$s(t) = \begin{cases} k_{\Phi} t, & 0 \leq t < \frac{T}{2}, \\ k_{\Phi} (T - t), & \frac{T}{2} \leq t < T, \\ 0, & T \leq t < \infty, \end{cases}$$

будем иметь

$$S(p) = k_{\Phi} \left[\frac{1}{p^2} - \frac{2}{p^2} e^{-\frac{pT}{2}} + \frac{1}{p^2} e^{-pT} \right] = k_{\Phi} \frac{\left(1 - e^{-\frac{pT}{2}} \right)^2}{p^2},$$

а при $p = j\omega$

$$S(j\omega) = -\frac{k_{\Phi}}{\omega^2} \left(1 - e^{-j\omega \frac{T}{2}} \right)^2 = \frac{4k_{\Phi}}{T\omega^2} \sin^2 \left(\frac{\omega T}{2} \right) e^{-j \left(\frac{\omega T}{2} - k\pi \right)}.$$

Заметим, что для конечных по времени импульсов, т. е. для финитных $s(t)$, передаточная функция $S(p)$ не имеет особых точек — полюсов. Формирующие цепи можно отнести к непрерывной части системы. Поэтому здесь мы ограничимся детальным

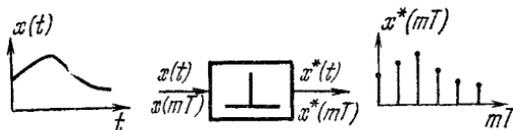


Рис. 23.6.

изучением свойств и особенностей простейшего импульсного элемента. Выходная величина простейшего импульсного элемента $x^*(t)$ представляет собой последовательность модулированных δ -функций, поэтому простейший импульсный элемент можно также рассматривать как модулятор δ -функций (рис. 23.6). Представим немодулированную периодическую последовательность δ -функций в виде

$$\delta_T^*(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$$

либо представим эту периодическую последовательность в виде ряда Фурье

$$\delta_T^*(t) = \frac{2\pi}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t},$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ — частота квантования по времени.

Модуляция состоит в умножении входной величины — огибающей — $x(t)$ на немодулированную последовательность $\delta_T^*(t)$. Следовательно, выходная величина простейшего импульсного элемента $x^*(t)$, представляющая собой модулированную последовательность δ -функций, будет равна

$$x^*(t) = x(t) \delta_T^*(t). \quad (23.1)$$

Изображение непрерывной входной величины простейшего импульсного элемента $x(t)$ по определению равно

$$X(p) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt.$$

Найдем теперь изображение выходной величины простейшего импульсного элемента $x^*(t)$. Учитывая (23.1), имеем

$$X^*(p) = L\{x^*(t)\} = L\{x(t) \delta_T^*(t)\}. \quad (23.2)$$

Если подставить в (23.2) выражение $\delta_T^*(t)$, то мы получим

$$X^*(p) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} L\{x(t) \delta(t - mT)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT) L\{\delta(t - mT)\}. \quad (23.3)$$

Здесь учитывается то свойство δ -функции, что, кроме точки $t = mT$, она всюду равна нулю. Замечая еще, что

$$L\{\delta(t - mT)\} = \int_0^{\infty} \delta(t - mT) e^{-pt} dt = e^{-pmT}$$

и

$$x(t) \equiv 0, \quad t \leq 0,$$

получаем из (23.3)

$$X^*(p) = \sum_{m=1}^{\infty} x(mT) e^{-pmT} = D\{x(mT)\}. \quad (23.4)$$

Соотношение (23.4) отличается от (23.2) тем, что вместо непрерывных функций $x(t)$ в нем фигурируют соответствующие решетчатые функции $x(mT)$. Поэтому соотношение (23.4) уместно назвать дискретным преобразованием Лапласа или, короче,

D-преобразованием. Итак, из (23.4) и (23.2) заключаем, что преобразование Лапласа, или *L-преобразование*, модулированной последовательности δ -функций равно дискретному преобразованию Лапласа, или *D-преобразованию*, соответствующей решетчатой функции $x(mT)$, т. е.

$$X^*(p) = L\{x^*(t)\} = D\{x(mT)\}.$$

Подставляя в (23.2) выражение $\delta_T^*(t)$ через ряд Фурье, получим

$$X^*(p) = \frac{2\pi}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} L\{x(t) e^{jk\omega_0 t}\},$$

но на основании свойств преобразования Лапласа

$$L\{x(t) e^{jk\omega_0 t}\} = X(p - jk\omega_0).$$

Следовательно,

$$X^*(p) = \frac{2\pi}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(p - jk\omega_0) = \mathfrak{D}\{X(p)\}. \quad (23.5)$$

Соотношение (23.5) устанавливает связь между изображениями непрерывной $X(p)$ и решетчатой функций $X^*(p)$. Будем называть операцию нахождения $X^*(p)$ по $X(p)$, определяемую соотношением (23.5), *\mathfrak{D}-преобразованием*. Приведенные выше соотношения справедливы при выполнении условия $x(t) \equiv 0, t \leq 0$. Если же при $t = 0$

$$x(0) \neq 0,$$

то вместо (23.4) и (23.5) следует пользоваться соотношениями

$$X^*(p) = D\{x(mT)\} = \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) e^{-pmT} \quad (23.6)$$

и

$$X^*(p) = \mathfrak{D}\{X(p)\} = \frac{x(0)}{2} + \frac{2\pi}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(p - jk\omega_0). \quad (23.7)$$

Основные теоремы и свойства *D-* и *\mathfrak{D}*-преобразований приведены в приложении 3.

Здесь мы ограничимся несколькими примерами.

Пример. Пусть $x(t) = e^{-\alpha t}$ и, значит, $X(p) = \frac{1}{p + \alpha}$. Найдем изображение соответствующей решетчатой функции (рис. 23.7, а, б)

$$x(mT) = e^{-\alpha mT}.$$

Согласно (23.6)

$$X^*(p) = D \{e^{-\alpha mT}\} = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha mT} e^{-\rho mT} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(\alpha+\rho) mT}.$$

Пользуясь формулой суммы геометрической прогрессии получим

$$X^*(p) = D \{e^{-\alpha mT}\} = \frac{1}{1 - e^{-(\alpha+\rho)T}} = \frac{e^{\rho T}}{e^{\rho T} - e^{-\alpha T}}.$$

Таким образом.

$$X^*(p) = D \{e^{-\alpha mT}\} = \frac{e^{\rho T}}{e^{\rho T} - e^{-\alpha T}}. \tag{23.8}$$

При $\alpha \rightarrow 0$ экспоненциальная решетчатая функция стремится к единичной функции (рис. 23.7 в) и из (23.8) следует

$$D \{1(mT)\} = \mathfrak{D} \left\{ \frac{1}{p} \right\} = \frac{e^{\rho T}}{e^{\rho T} - 1}.$$

В отличие от изображений непрерывных функций — L -изображений, являющихся функциями переменной p , изображения решетчатых функций — D - и \mathfrak{D} -изображения являются функциями переменной $e^{\rho T}$. Подводя итог сказанному выше, заключаем, что простейший импульсный элемент может быть описан уравнениями (23.1) и (23.7). Уравнение (23.1) устанавливает связь между выходной величиной $x^*(t)$ и входной непрерывной величиной $x(t)$. Уравнение (23.7) устанавливает связь между изображением $X^*(p)$ выходной величины импульсного элемента и изображением $X(p)$ его непрерывной входной величины. В отличие от обычных элементов, например непрерывной части системы или формирующей цепи, для простейшего импульсного элемента не существует понятия передаточной функции как отношения изображения выходной величины к изображению входной.

Зная уравнение простейшего импульсного элемента, нетрудно найти уравнение исходного импульсного элемента

$$Y(p) = S(p) X^*(p), \tag{23.9}$$

где $S(p)$ — передаточная функция формирующей цепи.

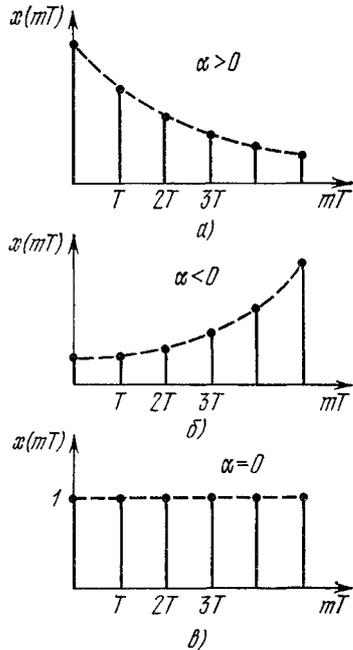


Рис. 23.7.

§ 23.3. Свойства импульсного элемента

Выясним спектральные, или частотные, свойства простейшего импульсного элемента. Для этой цели воспользуемся его уравнением относительно изображений (23.5). Для простоты мы положим, что имеет место условие $x(t) \equiv 0$ при $t < 0$. Полагая в (23.5) $p = j\omega$, найдем связь между спектрами выходной и входной величин простейшего импульсного элемента:

$$X^*(j\omega) = \mathfrak{D}\{X(j\omega)\} = \frac{2\pi}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_0)). \quad (23.10)$$

Отсюда следует, что

спектр $X^(j\omega)$ выходной величины $x^*(t)$ простейшего импульсного элемента пропорционален сумме смещенных спектров $X(j(\omega - k\omega_0))$ непрерывной входной величины $x(t)$.*

Заменим в (23.10) ω на $\omega \pm r\omega_0$, где r — целое число. Тогда

$$X^*(j(\omega \pm r\omega_0)) = \frac{2\pi}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - (k \mp r)\omega_0)).$$

Вводя новую переменную $s = k \mp r$, получим

$$\frac{2\pi}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - (k \mp r)\omega_0)) = \frac{2\pi}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - s\omega_0)) = X^*(j\omega).$$

Таким образом,

$$X^*(j(\omega \pm r\omega_0)) = X^*(j\omega) \quad (23.11)$$

и, значит,

$$\mathfrak{D}\{X(j(\omega \pm r\omega_0))\} = \mathfrak{D}\{X(j\omega)\}.$$

Из соотношения (23.11) следует, что

спектр $X^(j\omega)$ выходной величины $x^*(t)$ простейшего импульсного элемента периодичен по частоте с «периодом», равным частоте квантования.*

Отсюда следует, что спектр $X^*(j\omega)$ полностью определяется диапазоном частот $\left(-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right)$, или в силу симметрии $\left(0, \frac{\omega_0}{2}\right)$. Из соотношения (23.11) следует, что наличие в спектре входного сигнала $X(j\omega)$ частоты ω_1 , лежащей вне основной полосы $\left(-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right)$, вызывает такой же эффект, как частота $\omega'_1 = \omega_1 - r\omega_0$, где r — целое число такое, что $|\omega_1 - r\omega_0| < \frac{\omega_0}{2}$, т. е.

простейший импульсный элемент осуществляет перенос, транспонирование частот в основную полосу $\left(-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right)$. Особенно эти факты наглядно иллюстрируются графическим построением (рис. 23.8). На рис. 23.8, а изображен условно спектр $X(j\omega)$ входного сигнала $x(t)$. Согласно соотношению (23.10), для построения спектра $X^*(j\omega)$ выходной величины $x^*(t)$ простейшего

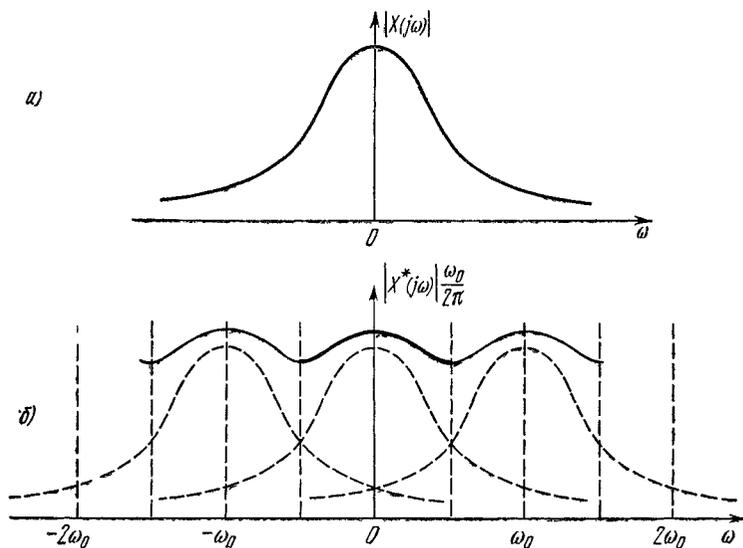


Рис. 23.8.

импульсного элемента нужно сместить этот спектр вдоль оси частот на величины $\pm r\omega_0$ ($r = 1, 2, \dots$), просуммировать и изменить масштаб по оси ординат в $\frac{2\pi}{\omega_0}$ раз (рис. 23.8, б). Жирной линией выделена часть спектра $X^*(j\omega)$ в диапазоне $\left(-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right)$.

В этих фактах проявляется двойственность, характерная для преобразования Фурье. Как известно, периодической функции времени соответствует дискретный, решетчатый спектр. Решетчатой функции времени соответствует периодический спектр. В общем случае спектр $X^*(j\omega)$ отличается от спектра $X(j\omega)$, т. е.

эффект кватования по времени, осуществляемый простейшим импульсным элементом, вносит искажение в квантуемый сигнал, т. е. квантование сопряжено с потерей информации.

Выясним условия, при которых квантование по времени не приводит к потере информации. Как следует из построения (рис. 23.8, б), если спектр $X(j\omega)$ не ограничен или, точнее, не финитен, то всегда будут иметь место искажения. Поэтому предположим, что спектр $X(j\omega)$ финитен (рис. 23.9, а), т. е.

$$X(j\omega) \equiv 0 \text{ при } |\omega| \geq \omega_c,$$

где ω_c — частота среза.

Построение $X^*(j\omega)$ при $\omega_0 < 2\omega_c$, $\omega_0 = 2\omega_c$ и $\omega_0 > 2\omega_c$ приведено на рис. 23.9, б, в, г соответственно. При $\omega_0 < 2\omega_c$ происходит наложение смещенных спектров $X(j(\omega - k\omega_0))$ и в результате $X^*(j\omega)$ в диапазоне $(-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2})$ отличается по форме от $X(j\omega)$. При $\omega_0 \geq 2\omega_c$ наложение смещенных спектров $X(j(\omega - k\omega_0))$ отсутствует и в диапазоне $(-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2})$ $X^*(j\omega)$ и $X(j\omega)$ по форме совпадают и различаются лишь масштабом. Спектр выходной величины исходного импульсного элемента получится из (23.9) при $p = j\omega$:

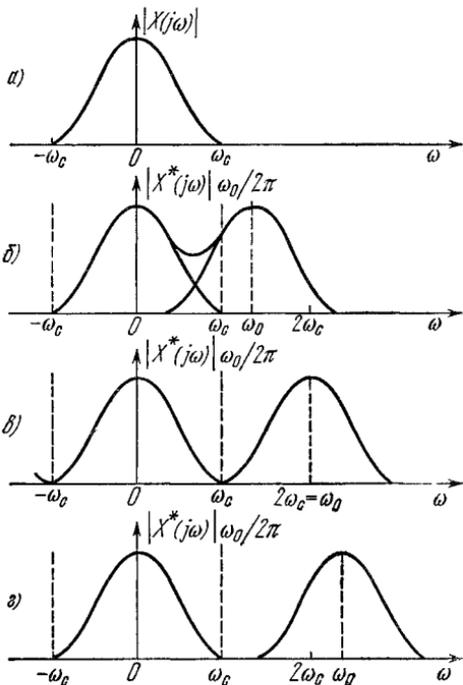
$$Y(j\omega) = S(j\omega) X^*(j\omega). \quad (23.12)$$


Рис. 23.9.

Как видно из рис. 23.8, даже при выполнении условия $\omega_0 \geq 2\omega_c$ он отличается от спектра входного сигнала $X(j\omega)$. Однако если $S(j\omega)$ финитно, например представляет собой частотную характеристику идеального фильтра

$$S(j\omega) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\omega_0} = T, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & |\omega| \geq \omega_c, \end{cases} \quad (23.13)$$

то из (23.12) с учетом финитности $X(j\omega)$ получим

$$Y(j\omega) = TX^*(j\omega), \quad |\omega| < \omega_c.$$

Определим процесс на выходе такого импульсного элемента, пользуясь формулой обратного преобразования

Фурье

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

которая в силу (23.12), (23.13) принимает вид

$$y(t) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} X^*(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (23.14)$$

Но из (23.6) при $p = j\omega$ следует, что

$$X^*(j\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} x(mT) e^{-j\omega mT}.$$

Поэтому из (23.14) получаем

$$y(t) = \sum_{m=1}^{\infty} x(mT) \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(t-mT)} d\omega,$$

или окончательно

$$y(t) = \sum_{m=1}^{\infty} x(mT) \frac{\sin \omega_c(t-mT)}{\omega_c(t-mT)},$$

откуда видно (рис. 23.9), как по дискретам $x(mT)$ восстанавливается непрерывный сигнал без потери информации. Таким образом,

если непрерывная величина $x(t)$ обладает финитным спектром $X(j\omega)$ с частотой среза ω_c , то квантование по времени ее с частотой $\omega_0 \geq 2\omega_c$ не приводит к потере информации.

Этот вывод составляет содержание теоремы о квантовании и лежит в основе импульсных способов передачи и преобразования информации. Она обосновывает возможность замены передачи непрерывного сигнала передачей решетчатого сигнала без потери информации. Для этого квантованный сигнал необходимо подать на формирующее устройство, обладающее частотной характеристикой идеального фильтра.

§ 23.4. Уравнения импульсных автоматических систем

Импульсную автоматическую систему после замены импульсного элемента соединением простейшего импульсного элемента и формирующей цепи или формирующего устройства можно

представить в виде блок-схемы (рис. 23.10). Вводя обозначение простейшего элемента в виде «ключа», можно изобразить граф

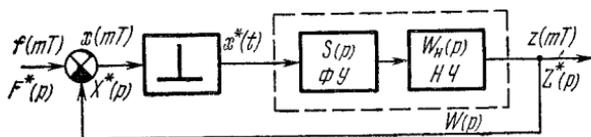


Рис. 23.10.

импульсной автоматической системы, как это показано на рис. 23.11. Таким образом,

импульсная автоматическая система представляет собой соединение простейшего импульсного элемента и приведенной непрерывной части, состоящей из формирующего устройства и непрерывной части.

Обозначим передаточную функцию приведенной непрерывной части через $W(p)$, так что

$$W(p) = S(p) W_n(p).$$

Тогда уравнение разомкнутой на входе импульсного элемента системы запишется в виде

$$Z(p) = S(p) W_n(p) X^*(p) = W(p) X^*(p).$$

Поскольку уравнение замыкания имеет вид

$$x(t) = f(t) - z(t),$$

то изображение входной величины импульсного элемента будет

$$X(p) = F(p) - Z(p),$$

что представляет собой уравнение замыкания системы относительно изображений. Исключая из этих уравнений $Z(p)$, получим уравнение замкнутой импульсной системы

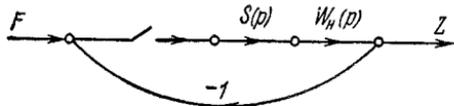


Рис. 23.11

$$X(p) = F(p) - W(p) X^*(p). \quad (23.15)$$

Это уравнение содержит изображения $X(p)$ непрерывной величины $x(t)$ и $X^*(p)$ ретчатой величины $x(mT)$, и поэтому из-за такой неоднородности его нельзя разрешить относительно одного из этих изображений. Для того чтобы обойти эту трудность, подвергнем обе части (23.15) \mathfrak{D} -преобразованию, определяющему по изображению непрерывной функции изображение соответствующей ретчатой функции.

Применяя теоремы о линейности (теорема 1 приложения 3), получим

$$\mathfrak{D}\{X(p)\} = \mathfrak{D}\{F(p)\} - \mathfrak{D}\{W(p)X^*(p)\}. \quad (23.16)$$

Замечая, что согласно теореме 5 приложения 3

$$\mathfrak{D}\{W(p)X^*(p)\} = \mathfrak{D}\{W(p)\}X^*(p),$$

и вводя обычные обозначения

$$\mathfrak{D}\{W(p)\} = W^*(p), \quad \mathfrak{D}\{X(p)\} = X^*(p), \quad \mathfrak{D}\{F(p)\} = F^*(p),$$

получим из (23.16)

$$X^*(p) = F^*(p) - W^*(p)X^*(p),$$

откуда следует, что

$$X^*(p) = \frac{F^*(p)}{1 + W^*(p)}.$$

Здесь

$$W^*(p) = \mathfrak{D}\{W(p)\} = \mathfrak{D}\{S(p)W_n(p)\}$$

— передаточная функция разомкнутой импульсной системы. Зная $X^*(p)$, нетрудно определить изображение непрерывных функций. Подставляя $X^*(p)$ в (23.15) и в выражение для $Z(p)$, получим соответственно

$$X(p) = F(p) - \frac{W(p)}{1 + W^*(p)}F^*(p) \quad (23.17)$$

и

$$Z(p) = \frac{W(p)}{1 + W^*(p)}F^*(p). \quad (23.18)$$

Эти уравнения определяют изображения непрерывной ошибки и выходной величины импульсных автоматических систем. Если подвергнуть уравнение (23.18) \mathfrak{D} -преобразованию, то можно получить уравнение относительно изображения решетчатой функции выходной величины:

$$\mathfrak{D}\{Z(p)\} = \frac{\mathfrak{D}\{W(p)\}}{1 + W^*(p)}F^*(p),$$

или

$$Z^*(p) = \frac{W^*(p)}{1 + W^*(p)}F^*(p). \quad (23.19)$$

Уравнение (23.19) для импульсных автоматических систем по форме совпадает с аналогичным уравнением для непрерывных автоматических систем. Но теперь в (23.19) фигурируют изображения не непрерывных, а решетчатых функций. Выражение

$$K^*(p) = \frac{W^*(p)}{1 + W^*(p)} \quad (23.20)$$

определяет передаточную функцию замкнутой импульсной системы.

Принимая во внимание (23.20), уравнения для $X^*(p)$ и $Z^*(p)$ запишутся кратко в виде

$$\begin{aligned} X^*(p) &= [1 - K^*(p)] F^*(p), \\ Z^*(p) &= K^*(p) F^*(p). \end{aligned}$$

Для составления уравнений замкнутых импульсных систем необходимо прежде всего на основании общей методики (§ 5.4) определить передаточную функцию непрерывной части $W_H(p)$, а затем и приведенной непрерывной части $W(p) = S(p) W_H(p)$. По этой передаточной функции определяется $W^*(p)$ на основе \mathfrak{D} -преобразования, а затем на основе (23.20) находится передаточная функция $K^*(p)$ замкнутой системы. Если нас интересует не выходная величина z , а промежуточная величина z_i , то вместо уравнения $Z(p) = W(p) X^*(p)$ будем иметь

$$Z_i(p) = W_i(p) X^*(p).$$

И значит,

$$Z_i^*(p) = W_i^*(p) X^*(p)$$

и после замены $X^*(p)$ получим

$$Z_i^*(p) = \frac{W_i^*(p)}{1 + W^*(p)} F^*(p),$$

где $W_i^*(p) = \mathfrak{D}\{W_i(p)\}$ — передаточная функция прямой части разомкнутой импульсной системы.

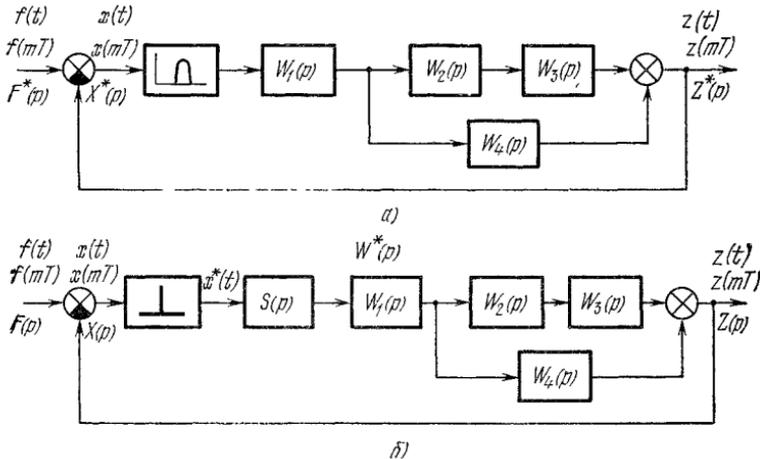


Рис. 23.12.

Пример. Найдем передаточную функцию импульсной системы, блок-схема которой изображена на рис. 23.12, а. Приведенная импульсная система будет иметь вид как на рис. 23.12, б. Передаточная функция линейной части равна

$$W_H(p) = W_1(p) [W_2(p) W_3(p) + W_4(p)]. \quad (23.21)$$

Умножая ее на $S(p)$, определяющую форму импульса, получим передаточную функцию приведенной импульсной системы:

$$W(p) = S(p) W_H(p) = S(p) W_1(p) [W_2(p) W_3(p) + W_4(p)].$$

Подвергая (23.21) \mathfrak{D} -преобразованию, находим передаточную функцию разомкнутой импульсной системы:

$$\begin{aligned} W^*(p) &= \mathfrak{D} \{S(p) W_1(p) W_2(p) W_3(p)\} + \mathfrak{D} \{S(p) W_1(p) W_4(p)\} = \\ &= W_{1.2.3}^*(p) + W_{1.4}^*(p). \end{aligned}$$

Передаточная функция прямой части импульсной системы равна

$$W_{1.2.3}^*(p) = \mathfrak{D} \{S(p) W_1(p) W_2(p) W_3(p)\}.$$

Таким образом, передаточные функции замкнутой импульсной системы получим равными

$$K^*(p) = \frac{W^*(p)}{1 + W^*(p)} = \frac{W_{1.2.3}^*(p) + W_{1.4}^*(p)}{1 + W_{1.2.3}^*(p) + W_{1.4}^*(p)}$$

и

$$K_1^*(p) = \frac{W_{1.2}^*(p)}{1 + W_{1.2.3}^*(p) + W_{1.4}^*(p)}.$$

Иногда полезно оперировать уравнением импульсных автоматических систем относительно оригиналов. Если в (23.15) перейти от изображений к оригиналам, то мы получим

$$x(t) = f(t) - \int_0^t \omega(t - \tau) x^*(\tau) d\tau.$$

Заменяя $x^*(\tau)$ согласно (23.1), получим

$$x(t) = f(t) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^t \omega(t - \tau) x(\tau) \delta(\tau - mT) d\tau,$$

откуда, учитывая свойство δ -функций, будем иметь

$$x(t) = f(t) - \sum_{s=0}^m \omega(t - sT) x(sT), \quad mT \leq t \leq (m+1)T. \quad (23.22)$$

При $t = mT$ получаем связь между решетчатыми функциями:

$$x(mT) = f(mT) - \sum_{s=0}^m \omega((m-s)T) x(sT). \quad (23.23)$$

Этот же результат получится, если перейти от изображений к оригиналам в уравнениях для $X^*(p)$, используя теорему линейности и свертывания \mathfrak{D} -преобразования. Уравнения (23.22), (23.23)

имеют простой физический смысл: они определяют реакцию непрерывной части системы на воздействие последовательности импульсных функций.

Задачи

23.1. Показать, что передаточные функции «треугольных» формирующих устройств (рис. 23.13, а, б) равны соответственно

$$а) \quad S(p) = \frac{1}{p} - \frac{1 - e^{-pT}}{Tp^2},$$

$$б) \quad S(p) = \left[\frac{1 - e^{-pT}}{Tp^2} - \frac{e^{-pT}}{p} \right] e^{pT}.$$

Какое из этих формирующих устройств физически реализуемо? Почему?

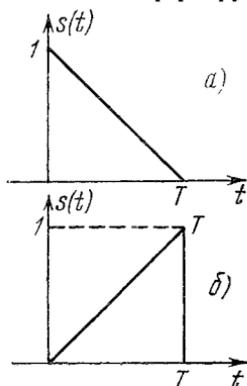


Рис. 23.13.

23.2. Показать, что линейная аппроксимация непрерывной кривой (рис. 23.14) может быть получена в результате комбинации двух «треугольных» формирующих устройств. Показать, что уравнение, связывающее вход и

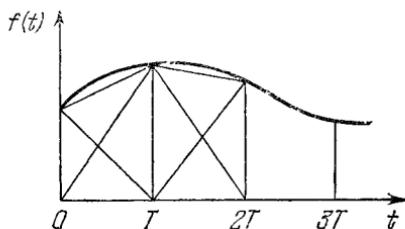


Рис. 23.14.

выход такого «трапециoidalного» формирующего устройства, при $(m-1)T \leq t \leq mT$ имеет вид

$$y(t) = x[(m-1)T] + \frac{t-mT}{T} [x(mT) - x[(m-1)T]],$$

а передаточная функция равна

$$\frac{1 - e^{-pT}}{Tp^2} (e^{pT} - 1)$$

23.3. Пусть передаточная функция замкнутой импульсной системы равна

$$K^*(p) = \frac{e^{2pT} - 3e^{pT} + 3}{(e^{pT} - 0,5)(e^{pT} - 0,8)}.$$

Найти временную характеристику $k(mT)$ при $m = 1, 2, \dots, 10$.

ОСНОВНЫЕ СТРУКТУРЫ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

§ 24.1. Система с дискретным фильтром или с ЦВУ

Со структурой обычной импульсной системы мы уже познакомились в гл. 23. Здесь мы рассмотрим более общие структуры, включающие в контур дискретные фильтры или ЦВУ. Дискретный фильтр или ЦВУ могут быть включены между импульсным элементом и непрерывной частью (рис. 24.1, а) либо до импульсного элемента (рис. 24.1, б). Покажем, что уравнения этих

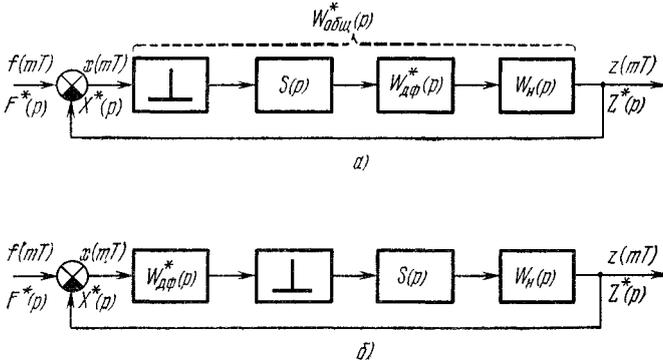


Рис. 24.1.

систем относительно выходной величины одни и те же. Уравнение дискретного фильтра, как было показано в § 22.3, имеет вид

$$u(t) = \sum_{k=0}^N \beta_k y(t - kT) - \sum_{k=1}^N \alpha_k u(t - kT). \quad (24.1)$$

Поскольку входные и выходные переменные, вообще говоря, непрерывны, то, применяя к (24.1) L -преобразование и учитывая, что на основании теоремы запаздывания

$$L\{y(t - kT)\} = Y(p) e^{-p k T}, \quad L\{u(t - kT)\} = U(p) e^{-p k T},$$

получим

$$U(p) = \sum_{k=0}^N \beta_k e^{-pkT} Y(p) - \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{-pkT} U(p).$$

Разрешая это уравнение относительно $U(p)$, будем иметь

$$U(p) = \frac{\sum_{k=0}^N \beta_k e^{-pkT}}{1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{-pkT}} Y(p).$$

Отсюда следует, что передаточная функция дискретного фильтра равна

$$W_{\text{дф}}(p) = \frac{\sum_{k=0}^N \beta_k e^{-pkT}}{\sum_{k=0}^N \alpha_k e^{-pkT}}, \quad \alpha_0 = 1. \quad (24.2)$$

Умножая числитель и знаменатель на e^{pNT} , преобразуем (24.2) к виду

$$W_{\text{дф}}(p) = \frac{\sum_{k=0}^N \beta_{N-k} e^{pkT}}{\sum_{k=0}^N \alpha_{N-k} e^{pkT}}, \quad \alpha_0 = 1, \quad (24.3)$$

т. е. передаточная функция дискретного фильтра является дробно-рациональной функцией e^{pT} . Применяя к (24.3) \mathfrak{D} -преобразование на основании теоремы запаздывания, получаем

$$W_{\text{дф}}^*(p) = \mathfrak{D}\{W_{\text{дф}}(p)\} = \frac{\sum_{k=0}^N \beta_{N-k} e^{pkT}}{\sum_{k=0}^N \alpha_{N-k} e^{pkT}} = W_{\text{дф}}(p), \quad (24.4)$$

т. е. импульсная и обычная передаточные функции в этом случае совпадают.

Уравнение ЦВУ, как было отмечено в § 23.3, получается из (24.1) при $t = mT$, т. е.

$$u(mT) = \sum_{k=0}^N \beta_k y((m-k)T) - \sum_{k=1}^N \alpha_k u((m-k)T).$$

В этом случае входные и выходные переменные представляются решетчатыми функциями. Применяя к этому уравнению

\mathfrak{D} -преобразование, получим

$$U^*(p) = \sum_{k=0}^N \beta_k e^{-pkT} Y^*(p) - \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{-pkT} U^*(p). \quad (24.5)$$

Разрешая уравнение (24.5) относительно $U^*(p)$, получаем

$$U^*(p) = \frac{\sum_{k=0}^N \beta_k e^{-pkT}}{1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{-pkT}} Y^*(p).$$

Отсюда следует, что передаточная функция ЦВУ равна

$$W_{\text{цву}}^*(p) = \frac{\sum_{k=0}^N \beta_k e^{-pkT}}{\sum_{k=0}^N \alpha_k e^{-pkT}} = \frac{\sum_{k=0}^N \beta_{N-k} e^{pkT}}{\sum_{k=0}^N \alpha_{N-k} e^{pkT}}, \quad \alpha_0 = 1,$$

т. е. передаточные функции дискретного фильтра $W_{\text{дф}}^*(p)$ и ЦВУ $W_{\text{цву}}^*(p)$ совпадают между собой. Поскольку передаточные функции дискретного фильтра и ЦВУ являются дробно-рациональными функциями e^{pT} , то их можно выносить за знак операции \mathfrak{D} -преобразования. Для структуры на рис. 24.1, а передаточная функция разомкнутой импульсной системы в случае ЦВУ будет равна (теорема 6 приложения 3)

$$W_{\text{общ}}^*(p) = \mathfrak{D}\{W_{\text{цву}}^*(p) S(p) W_{\text{н}}(p)\} = W_{\text{цву}}^*(p) \mathfrak{D}\{S(p) W_{\text{н}}(p)\} = \\ = W_{\text{цву}}^*(p) W^*(p),$$

а передаточная функция $K^*(p)$ замкнутой системы запишется так:

$$K^*(p) = \frac{W_{\text{цву}}^*(p) W^*(p)}{1 + W_{\text{цву}}^*(p) W^*(p)}. \quad (24.6)$$

И значит, уравнение импульсной системы представится в обычном виде:

$$Z^*(p) = K^*(p) Y^*(p) = \frac{W_{\text{цву}}^*(p) W^*(p)}{1 + W_{\text{цву}}^*(p) W^*(p)} Y^*(p). \quad (24.7)$$

Для структуры на рис. 24.1, б передаточная функция разомкнутой системы будет равна произведению передаточных функций $W_{\text{цву}}^*(p)$ — дискретного фильтра или ЦВУ — и $W(p)$ — разомкнутой исходной системы, т. е.

$$W_{\text{общ}}^*(p) = W_{\text{цву}}^*(p) W^*(p).$$

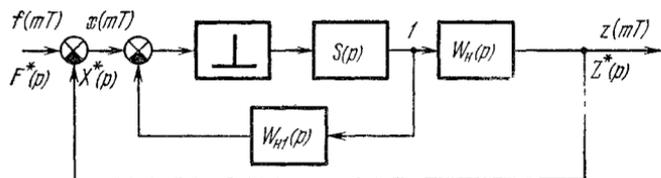
Следовательно, передаточная функция замкнутой системы относительно $Z^*(p)$ будет по-прежнему иметь вид (24.7). Уравнения относительно иных переменных, например переменных на входе импульсного элемента, разумеется, будут различны.

Как видно из структуры на рис. 24.1, б,

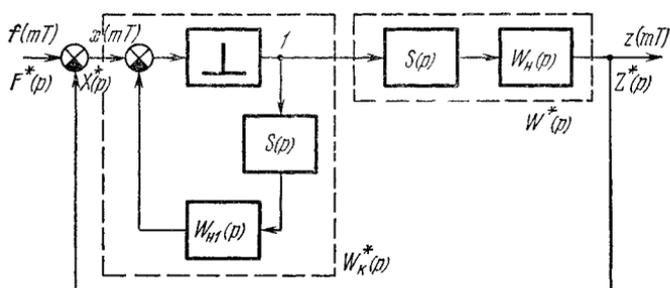
введение дискретного фильтра или ЦВУ меняет закон изменения входной величины импульсного элемента, изменяя тем самым свойства импульсной системы в целом.

§ 24.2. Система с непрерывным фильтром, охватывающим импульсный элемент

Рассмотрим импульсную систему, в которой импульсный элемент охвачен непрерывным элементом (рис. 24.2, а). Пусть передаточная функция этого непрерывного элемента равна $W_{н1}(p)$. Для составления уравнения этой системы перенесем точку 1 съема с выхода формирующего устройства на вход его



а)



б)

Рис. 24.2.

(рис. 24.2, б). Контур обратной связи можно рассматривать как некоторую обычную замкнутую импульсную систему. Ее передаточная функция равна

$$W_k^*(p) = \frac{1}{1 + W_{н1}^*(p)}, \quad (24.8)$$

где

$$W_{н1}^*(p) = \mathcal{D}\{S(p)W_{н1}(p)\}.$$

Передаточная функция разомкнутой общей системы равна произведению передаточных функций $W_{\kappa}^*(p)$ и $W^*(p)$, т. е.

$$W_{\text{общ}}^*(p) = W_{\kappa}^*(p) W^*(p) = \frac{W^*(p)}{1 + W_1^*(p)},$$

а передаточная функция замкнутой импульсной системы относительно z будет равна

$$K^*(p) = \frac{W_{\kappa}^*(p) W^*(p)}{1 + W_{\kappa}^*(p) W^*(p)}, \tag{24.9}$$

или, с учетом (24.8),

$$K^*(p) = \frac{W^*(p)}{1 + W_1^*(p) + W^*(p)}.$$

Если выбрать

$$W_{\kappa}^*(p) = \frac{W^*(p)}{1 + W_1^*(p)} = W_{\text{цву}}^*(p),$$

то, как видно из (24.6) и (24.9), передаточные функции замкнутых систем с ЦВУ и охватом импульсного элемента соответствующим непрерывным элементом совпадают, а значит, и совпадают их динамические свойства. Физически это ясно, так как охват импульсного элемента непрерывным элементом, так же как и введение ЦВУ, меняет закон изменения входной величины импульсного элемента.

§ 24.3. Разомкнуто-замкнутая импульсная система

В разомкнуто-замкнутой импульсной системе измеряется входное воздействие, которое после преобразования его с помощью

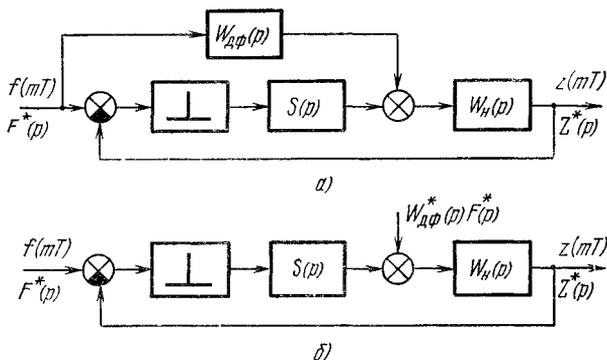


Рис 24.3

дискретного фильтра или ЦВУ действует на приведенную непрерывную часть системы (рис. 24.3, а). Эту систему можно рассматривать как импульсную систему с двумя внешними

воздействиями $F^*(p)$ и $W_{дф}^*(p) F^*(p)$, приложенными в разных точках системы (рис. 24.3, б). Уравнение этой системы, составляемое по обычным правилам, представится в виде

$$Z^*(p) = \frac{W^*(p)}{1 + W^*(p)} F^*(p) + \frac{\mathfrak{D} \{W(p) W_{дф}^*(p) F^*(p)\}}{1 + W^*(p)}$$

Или, так как согласно теореме 5 приложения 3

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} \{W(p) W_{дф}^*(p) F^*(p)\} &= W_{дф}^*(p) F^*(p) \mathfrak{D} \{W(p)\} = \\ &= W_{дф}^*(p) W^*(p) F^*(p), \end{aligned}$$

то окончательно получим

$$Z^*(p) = \frac{W^*(p) [1 + W_{дф}^*(p)]}{1 + W^*(p)} F^*(p).$$

Уравнение же относительно ошибки $X^*(p) = F^*(p) - Z^*(p)$ представится в виде

$$X^*(p) = \frac{1 - W^*(p) W_{дф}^*(p)}{1 + W^*(p)} F^*(p).$$

При выборе

$$W_{дф}^*(p) = \frac{1}{W^*(p)} \quad (24.10)$$

получаем тождественное равенство нулю ошибки:

$$X^*(p) \equiv 0.$$

Таким образом,

при передаточной функции дискретного фильтра $W_{дф}^(p)$, равной обратной передаточной функции непрерывной части, система воспроизводит входное воздействие без искажений, т. е.*

$$Z^*(p) \equiv F^*(p). \quad (24.11)$$

Как и в непрерывных системах, условие (24.10) не может быть точно выполнено, и поэтому не могут быть выполнены и условия идеального воспроизведения (24.11).

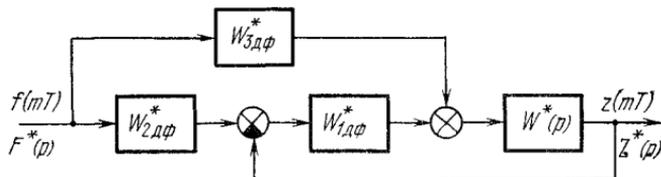


Рис 24.4

К разомкнуто-замкнутой системе близка по структуре система с условной обратной связью (рис. 24.4). Эту систему можно также рассматривать как систему с двумя внешними воздействиями,

изображения которых равны $W_{2дф}^*(p) F(p)$ и соответственно $W_{3дф}^*(p) F(p)$, приложенными в различных точках. Уравнение такой системы запишется в виде

$$Z^*(p) = \frac{W^*(p) [W_{1дф}^*(p) W_{2дф}^*(p) + W_{3дф}^*(p)]}{1 + W^*(p) W_{1дф}^*(p)} F^*(p).$$

При

$$W_{1дф}^*(p) = W_{2дф}^*(p) = 1$$

система с условной обратной связью соответствует ранее рассмотренной разомкнуто-замкнутой системе.

Задачи

24.1. Показать, что передаточная функция разомкнутой импульсной системы с запоминанием (рис. 24.5), непрерывная часть которой имеет

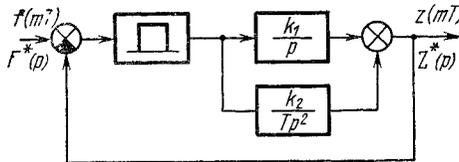


Рис 24.5

передаточную функцию вида $W(p) = \frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{Tp^2}$, равна

$$W^*(p) = \mathfrak{D} \left\{ \frac{1 - e^{-pT}}{p} W(p) \right\} = \frac{k_1 T}{e^{pT} - 1} + \frac{k_2 T (e^{pT} + 1)}{2(e^{pT} - 1)^2}.$$

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

§ 25.1. Законы управления

Простейшие законы управления, такие, как пропорциональный (П), интегральный (И), пропорционально-интегральный (ПИ), могут формироваться в непрерывной части системы подобно тому, как это делалось в непрерывных автоматических системах (см. § 8.1). Изменение характеристик непрерывной части системы в конечном итоге влияет на свойства замкнутой системы в целом. По аналогии с подобными непрерывными законами управления можно формировать дискретные законы регулирования в дискретном фильтре или ЦВУ путем выбора передаточной функции $W_{\text{дф}}^*(p) = W_{\text{цву}}^*(p) = W_{\text{к}}^*(p)$. Так, при

$$W_{\text{к}}^*(p) = k_0 + \frac{k_{-1}}{1 - e^{-pT}} + k_1(1 - e^{-pT}) \quad (25.1)$$

мы получаем пропорциональный суммарно-разностный (ПСР) закон управления. Составляющие, входящие в (25.1),

$$\frac{1}{1 - e^{-pT}} = \frac{e^{pT}}{e^{pT} - 1} \quad \text{и} \quad 1 - e^{-pT} = \frac{e^{pT} - 1}{e^{pT}} \quad (25.2)$$

соответствуют суммированию и взятию первой разности входной релетчатой величины.

В отличие от операции дифференцирования, которая не может быть точно осуществлена, взятие разности не представляет особого труда. Подставляя (25.2) в (25.1), получим после приведения к общему знаменателю

$$W_{\text{к}}^*(p) = \frac{(k_0 + k_{-1} + k_1)e^{2pT} - (k_0 + k_1)e^{pT} + k_1}{e^{pT} - e^{-pT}}.$$

Отсюда видно, что стандартные законы управления соответствуют выборам конкретных видов коэффициентов передаточных функций дискретного фильтра или ЦВУ (24.3). В общем же случае дискретные фильтры и ЦВУ позволяют реализовать разно-

образные сложные законы управления, что открывает широкие возможности получения высококачественных импульсных систем управления. Поэтому целесообразно далее рассмотреть структуру импульсной автоматической системы, которая содержит дискретный фильтр или ЦВУ в контуре управления.

§ 25.2. Дискретные передаточные функции разомкнутых импульсных систем

В отличие от непрерывных систем, для которых передаточные функции составляются непосредственно по уравнениям элементов, в импульсных системах передаточные функции определяются по временной характеристике или передаточной функции непрерывной части. Соответствие между ними устанавливается D - или \mathfrak{D} -преобразованиями. Так, если передаточная функция приведенной непрерывной части равна

$$W(p) = S(p) W_n(p),$$

то передаточная функция разомкнутой импульсной системы $W^*(p)$, которую мы будем называть для краткости дискретной передаточной функцией, находится в результате \mathfrak{D} -преобразования от $W(p)$, т. е.

$$W^*(p) = \mathfrak{D}\{W(p)\} = \mathfrak{D}\{S(p) W_n(p)\}.$$

Для прямоугольной формы импульса

$$S(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}.$$

И значит, согласно определению \mathfrak{D} -преобразования (23.5)

$$W^*(p) = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-(p-jk\omega_0T)}}{p - jk\omega_0T} W_n(p - jk\omega_0T). \quad (25.3)$$

Мы здесь предполагаем, что начальное значение импульсной характеристики непрерывной части равно нулю, т. е. $w_n(0) = 0$. В противном случае к правой части (25.3) следует добавить слабое $w_n(0)/2$. Тогда получим, что

$$W^*(p) = \frac{w_n(0)}{2} + \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-(p-jk\omega_0T)}}{p - jk\omega_0T} W_n(p - jk\omega_0T). \quad (25.4)$$

Соотношения (25.3), (25.4) определяют дискретную передаточную функцию разомкнутой импульсной системы через передаточную функцию непрерывной части в виде бесконечного ряда.

Можно найти выражение дискретной передаточной функции разомкнутой импульсной системы в конечной форме.

Предположим, что в общем случае

$$W_H(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}, \quad (25.5)$$

где $P(p)$, $Q(p)$ — многочлены степени n_1 и n соответственно. Обозначая через p_1, p_2, \dots, p_n полюсы передаточной функции и предполагая их отличными друг от друга, представим (25.5) в виде разложения:

$$W_H(p) = \sum_{\nu=1}^n \frac{P(p_\nu)}{Q'(p_\nu)} \frac{1}{p - p_\nu}. \quad (25.6)$$

Подставляя (25.6) в выражение для $W^*(p)$, получим

$$W^*(p) = \mathfrak{D} \left\{ \frac{1 - e^{-pT}}{p} \sum_{\nu=1}^n \frac{P(p_\nu)}{Q'(p_\nu)} \frac{1}{p - p_\nu} \right\}.$$

Меняя последовательность суммирования и взятия \mathfrak{D} -преобразования и вынося за знак \mathfrak{D} -преобразования функции e^{pT} на основании теорем \mathfrak{D} -преобразования (см. приложение 2), получим

$$W^*(p) = \sum_{\nu=1}^n \frac{P(p_\nu)}{p_\nu Q'(p_\nu)} (1 - e^{-pT}) \mathfrak{D} \left\{ \frac{p_\nu}{p(p - p_\nu)} \right\}. \quad (25.7)$$

Но поскольку

$$\frac{p_\nu}{p(p - p_\nu)} = \frac{1}{p - p_\nu} - \frac{1}{p},$$

то

$$\mathfrak{D} \left\{ \frac{p_\nu}{p(p - p_\nu)} \right\} = \mathfrak{D} \left\{ \frac{1}{p - p_\nu} \right\} - \mathfrak{D} \left\{ \frac{1}{p} \right\}.$$

Пользуясь таблицей соответствий (таблица П.2 приложения 2), получаем

$$\mathfrak{D} \left\{ \frac{p_\nu}{p(p - p_\nu)} \right\} = \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{p_\nu T}} - \frac{e^{pT}}{e^{pT} - 1} = - \frac{e^{pT} (1 - e^{p_\nu T})}{(e^{pT} - 1)(e^{pT} - e^{p_\nu T})}. \quad (25.8)$$

Подставляя (25.8) в (25.7), после очевидных преобразований получим

$$W^*(p) = - \sum_{\nu=1}^n \frac{P(p_\nu)}{p_\nu Q'(p_\nu)} \frac{1 - e^{p_\nu T}}{e^{pT} - e^{p_\nu T}}. \quad (25.9)$$

Если один из полюсов $W_H(p)$, например p_n , равен нулю, $p_n = 0$, то n -е слагаемое в (25.6) становится неопределенным. Раскрывая неопределенность, получим

$$- \lim_{p_n \rightarrow 0} \frac{P(p_n)}{p_n Q'(p_n)} \frac{1 - e^{p_n T}}{e^{pT} - e^{p_n T}} = T \frac{P(0)}{Q'(0)} \frac{1}{e^{pT} - 1}.$$

Неопределенность возникает также при наличии кратных полюсов. Она может быть раскрыта обычным способом.

Передающую функцию разомкнутой импульсной системы (25.9) можно представить в виде дробно-рациональной функции. Из (25.4) или (25.9) следует, что

$$W^*(p + jk\omega_0) = W^*(p), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (25.10)$$

Это значит, что дискретная передаточная функция $W^*(p)$ представляет собой периодическую функцию вдоль мнимой оси комплексной плоскости p (рис. 25.1). Назовем полосу $-\frac{\omega_0}{2} < \text{Im } p \leq \frac{\omega_0}{2}$ (рис. 25.1) *основной*. Задание $W^*(p)$ в основной полосе

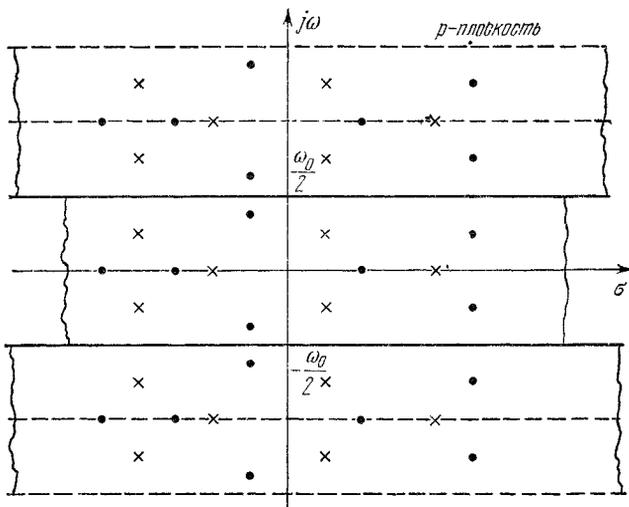


Рис. 25.1.

в силу периодичности (25.10) полностью определяет $W^*(p)$. Полюсы и нули передаточной функции, лежащие в основной полосе (на рис. 25.1 они изображены крестиками и жирными точками соответственно), будем называть *основными*. Если полюсы p_1, p_2, \dots, p_n передаточной функции непрерывной части системы таковы, что

$$-\frac{\omega_0}{2} < \text{Im } p_v \leq \frac{\omega_0}{2},$$

то они совпадают с основными полюсами $W^*(p)$.

В общем случае дискретную передаточную функцию разомкнутой системы можно представить в виде дроби

$$W^*(p) = \frac{P^*(p)}{Q^*(p)},$$

где $Q^*(p)$ и $P^*(p)$ — многочлены e^{pT} степени n и, вообще говоря, $n - 1$ соответственно. Таким образом, импульсная передаточная функция имеет n полюсов и $n - 1$ нулей.

Дискретную передаточную функцию часто удобно представить в форме

$$W^*(p) = \frac{k_s}{(e^{pT} - 1)^s} \frac{\tilde{P}^*(p)}{\tilde{Q}_s^*(p)},$$

где $\tilde{Q}_s^*(p)$ и $\tilde{P}^*(p)$ — нормированные многочлены степени $n - s$ и $n - 1$ соответственно, т. е. такие, что

$$\frac{\tilde{P}^*(0)}{\tilde{Q}_s^*(0)} = 1,$$

а k_s — коэффициент усиления разомкнутой импульсной системы.

Введем следующие числовые показатели дискретной передаточной функции.

1. *Порядок* n определяется степенью знаменателя дискретной передаточной функции $W^*(p)$.

2. *Степень* r_c определяется разностью степеней знаменателя и числителя дискретной передаточной функции $W^*(p)$. Как правило, степень $W^*(p)$ равна

$$r_c = n - (n - 1) = 1.$$

3. *Индекс неустойчивости* s_n определяется числом правых полюсов $W^*(p)$.

4. *Индекс астатизма* s_a определяется числом полюсов $W^*(p)$, равных нулю.

5. *Индекс неминимально-фазовости* $s_{нф}$ определяется числом правых нулей $W^*(p)$.

Через эти числовые показатели далее будут выражены различные свойства импульсных систем.

§ 25.3. Дискретные передаточные функции типовых импульсных систем

Найдем передаточные функции ряда конкретных типовых импульсных систем.

Рассмотрим импульсную систему первого порядка (рис. 25.2, а), состоящую из импульсного элемента с прямоугольной формой импульса и линейной части, передаточная функция

которой равна

$$W_n(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}.$$

Передаточная функция формирующего устройства в этом случае равна

$$S(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}.$$

Таким образом, переда- точная функция приведенной непрерывной части (рис. 25.2, б) имеет вид

$$\begin{aligned} W(p) &= S(p) W_n(p) = \\ &= \frac{1 - e^{-pT}}{p} \frac{k_1}{T_1 p + 1}. \end{aligned} \quad (25.11)$$

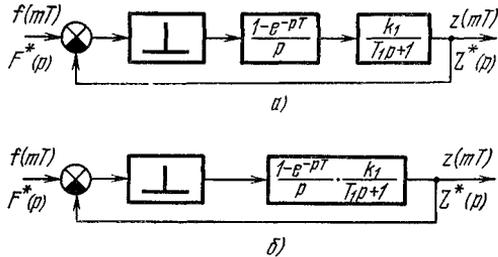


Рис. 25.2.

Для определения передаточной функции разомкнутой импульсной системы $W^*(p)$ подвергнем (25.11) \mathfrak{D} -преобразованию:

$$W^*(p) = \mathfrak{D} \{W(p)\} = \mathfrak{D} \left\{ \frac{1 - e^{-pT}}{p} \frac{k_1}{T_1 p + 1} \right\}. \quad (25.12)$$

Вынося, согласно теореме 5 приложения 3, за знак \mathfrak{D} -преобразования функции от e^{-pT} и разлагая выражение под знаком \mathfrak{D} -преобразования на простейшие дроби, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(T_1 p + 1)} &= \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{T_1}}, \\ \mathfrak{D} \left\{ \frac{1}{p(T_1 p + 1)} \right\} &= \frac{e^{pT}}{e^{pT} - 1} - \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{-T/T_1}}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (25.12), получим после элементарных преобразований передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W^*(p) = k_1 \frac{1 - e^{-T/T_1}}{e^{pT} - e^{-T/T_1}}.$$

Числовые характеристики этой передаточной функции таковы: порядок $n = 1$, степень $r_c = 1$, индекс неустойчивости $s_n = 0$, индекс неминимально-фазовости $s_{нф} = 0$, индекс астатизма $s_a = 0$.

Передаточная функция замкнутой импульсной системы (рис. 25.1) равна

$$K^*(p) = \frac{W^*(p)}{1 + W^*(p)} = \frac{k(1 - e^{-T/T_1})}{e^{pT} - e^{-T/T_1} + k_1(1 - e^{-T/T_1})}.$$

Рассмотрим импульсную систему второго порядка (рис. 25.3), состоящую из простейшего импульсного элемента и линейной части, передаточная функция которой равна

$$W_{\text{н}}(p) = \frac{k_1}{p(T_1 p + 1)}.$$

Формирующее устройство в этом случае отсутствует, т. е.

$$S(p) = 1.$$

Поэтому передаточные функции приведенной и неприведенной непрерывной части совпадают, т. е.

$$W(p) = W_{\text{н}}(p) = \frac{k_1}{p(T_1 p + 1)},$$

и, значит,

$$W^*(p) = \mathfrak{D} \left\{ \frac{k_1}{p(T_1 p + 1)} \right\} = k_1 \left\{ \frac{e^{pT}}{e^{pT} - 1} - \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{-T/T_1}} \right\},$$

или, после преобразования,

$$W^*(p) = \frac{k(1 - e^{-T/T_1})e^{pT}}{(e^{pT} - 1)(e^{pT} - e^{-T/T_1})}.$$

Числовые характеристики этой передаточной функции таковы: порядок $n = 2$, степень $r_c = 1$, индекс неустойчивости $s_{\text{н}} = 0$,

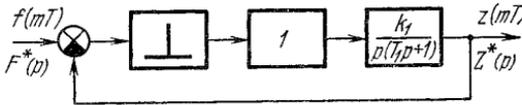


Рис 25.3.

индекс неминимально-фазовости $s_{\text{нф}} = 0$, индекс астатизма $s_{\text{а}} = 1$.

Передаточная функция замкнутой системы будет равна

$$K^*(p) = \frac{W^*(p)}{1 + W^*(p)} = \frac{k_1(1 - e^{-T/T_1})e^{pT}}{e^{2pT} - [1 + e^{-T/T} - k_1(1 - e^{-T/T_1})]e^{pT} + e^{-T/T_1}}.$$

§ 25.4. Уравнения импульсных систем

Зная передаточные функции замкнутых систем, можно уравнения этих замкнутых систем относительно изображений записать в виде

$$Z^*(p) = K^*(p) F^*(p). \quad (25.13)$$

По определению дискретного преобразования Лапласа

$$K^*(p) = D \{k(mT)\},$$

где $k(mT)$ — оригинал, соответствующий изображению $K^*(p)$. Исходя из уравнения относительно изображений (25.13), на основании теоремы свертывания получим уравнение импульсной системы относительно оригиналов:

$$z(mT) = \sum_{s=0}^m k(sT) f((m-s)T) \quad (25.14)$$

или, что эквивалентно,

$$z(mT) = \sum_{s=0}^m k((m-s)T) f(sT). \quad (25.15)$$

Эти уравнения определяют процессы в замкнутой импульсной системе при произвольном внешнем воздействии $f(mT)$. В отличие от уравнения (23.22), определяющего процесс в импульсной системе через временную характеристику разомкнутой системы в неявной форме, уравнения (25.14), (25.15) определяют процесс в импульсной системе через временную характеристику замкнутой системы в явной форме. Нетрудно видеть, что выражения (25.14), (25.15) являются решением уравнения (23.22).

Предположим, что внешнее воздействие кратковременно, т. е.

$$f(mT) = \sigma(mT) = \begin{cases} 1, & m=0, \\ 0, & m>0. \end{cases} \quad (25.16)$$

Тогда из уравнения (25.15) получаем

$$z(mT) = \sum_{s=0}^m k((m-s)T) \sigma(sT) = k(mT),$$

откуда следует, что реакция замкнутой импульсной системы на импульсное решетчатое воздействие определяется временной решетчатой функцией $k(mT)$. Назовем $k(mT)$ *временной характеристикой* замкнутой импульсной системы. Найдем явное выражение для временной характеристики. Передаточная функция замкнутой импульсной системы равна

$$K(j\omega) = \frac{W^*(p)}{1 + W^*(p)}, \quad (25.17)$$

а

$$W^*(p) = \frac{P^*(p)}{Q^*(p)},$$

где Q^* и P^* — многочлены по e^{pT} степени n и $n-1$ соответственно. Подставляя $W^*(p)$ в (25.17), получим

$$K^*(p) = \frac{P^*(p)}{Q^*(p) + P^*(p)} = \frac{H^*(p)}{G^*(p)}.$$

Знаменатель передаточной функции замкнутой импульсной системы

$$G^*(p) = Q^*(p) + P^*(p)$$

определяет характеристический многочлен.

Нулями характеристического многочлена являются полюсы передаточной функции. Предположим, что эти полюсы простые, и обозначим их как $e^{p_1 T}$, $e^{p_2 T}$, ..., $e^{p_n T}$. Тогда передаточную функцию можно представить в виде разложения на простейшие дроби:

$$K^*(p) = \sum_{\nu=1}^n \frac{H^*(p_\nu)}{\dot{G}^*(p_\nu)} \frac{1}{e^{pT} - e^{p_\nu T}}, \quad (25.18)$$

где

$$\dot{G}^*(p_\nu) = \left. \frac{dG^*(p)}{de^{pT}} \right|_{p=p_\nu}.$$

Поскольку на основании теоремы запаздывания дискретного преобразования Лапласа

$$\frac{1}{e^{pT} - e^{p_\nu T}} = e^{-pT} \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{p_\nu T}} \doteq \begin{cases} e^{p_\nu(m-1)T}, & m \geq 1, \\ 0, & m = 0, \end{cases}$$

то, переходя в (25.18) от изображений к оригиналам, получим

$$k(mT) = \sum_{\nu=1}^n \frac{H^*(p_\nu)}{\dot{G}^*(p_\nu)} e^{p_\nu(m-1)T}, \quad m \geq 1, \\ k(0) = 0, \quad (25.19)$$

причем формула разложения (25.19) определяет временную характеристику замкнутой системы по полюсам передаточной функции.

Для определения процесса в замкнутой импульсной системе при произвольном воздействии подставим (25.19) в (25.15). Тогда после очевидных преобразований получим

$$z(mT) = \sum_{\nu=1}^n \frac{H^*(p_\nu)}{\dot{G}^*(p_\nu)} e^{p_\nu m T} \sum_{s=0}^m e^{-p_\nu(s+1)T} f(sT). \quad (25.20)$$

Эта формула для конкретных выражений $f(mT)$ позволяет определить процесс $z(mT)$ в замкнутой форме.

З а д а ч и

25.1. Показать, что частотные характеристики элемента, формирующего прямоугольные импульсы длительности T , определяются выражением

$$S(j\omega) = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{\left| \sin \pi \frac{\omega}{\omega_0} \right|}{\frac{\pi\omega}{\omega_0}} e^{-j\pi \frac{\omega}{\omega_0}}.$$

Нарисовать зависимости модуля и фазы от частоты.

25.2. Показать, что передаточная функция замкнутой импульсной системы (рис. 245) равна

$$K^*(p) = \frac{W^*(p)}{1 + W^*(p)} = \frac{T [(2k_1 + k_2) e^{pT} - 2k_1 + k_2]}{2e^{2pT} + [(2k_1 + k_2) T - 4] e^{pT} + 2 + (k_2 - 2k_1) T}.$$

25.3. Пусть передаточная функция линейной части $W_H(p)$ равна

$$W_H(p) = \frac{k_1}{p(T_1 p + 1)}.$$

Показать, что передаточная функция замкнутой импульсной системы с импульсным элементом, генерирующим импульсы прямоугольной формы, равна

$$K^*(p) = \frac{k_1 [(T + T_1 e^{-T/T_1}) e^{pT} - (T_1 + T) e^{-T/T_1}]}{e^{2pT} + [k_1 (T + T_1 e^{-T/T_1}) - 1 - e^{-T/T_1}] e^{pT} + e^{-T/T_1} - k_1 (T_1 + T) e^{-T/T_1}}.$$

ПРОЦЕССЫ В ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМАХ

§ 26.1. Понятие о процессах в импульсных системах

Процессы в замкнутых импульсных системах определяются уравнениями (23.22) или их решениями — выражениями (25.14), (25.15), (25.20). Последние выражения описывают процесс, возникающий в замкнутой импульсной системе при приложении внешнего воздействия в момент $t = 0$. Если же внешнее воздействие $f(mT)$ будет приложено в произвольный момент времени, например $t = t_0$, то вместо

$$z(mT) = \sum_{s=0}^m k((m-s)T) f(sT) \quad (26.1)$$

будем иметь

$$z(mT) = \sum_{s=m_0}^m k((m-s)T) f(sT), \quad m \geq m_0.$$

Пусть $m_0 = -\infty$. Это соответствует тому, что между моментом приложения внешнего воздействия $t_0 = -\infty$ и моментом наблюдения процесса t прошло бесконечно большое время. Такой процесс естественно назвать *вынужденным*. Обозначим его через $z^B(mT)$. Тогда

$$z^B(mT) = \sum_{s=-\infty}^m k((m-s)T) f(sT)$$

или, после замены переменной $m - s$ на s и, значит, s на $m - s$ и соответствующего изменения пределов суммирования $-\infty$ и m на ∞ и 0 , получим выражение для вынужденного процесса

$$z^B(mT) = \sum_{s=0}^{\infty} k(sT) f((m-s)T). \quad (26.1')$$

Разность между общим процессом $z(mT)$ (25.15) и вынужденным

процессом $z^B(mT)$ назовем *свободным* процессом $z^C(mT)$:

$$z^C(mT) = z(mT) - z^B(mT).$$

В силу (25.15)

$$z^C(mT) = \sum_{s=m+1}^{\infty} k(sT) f((m-s)T). \quad (26.2)$$

Свободный процесс определяет отклонение общего процесса в нелинейной системе от вынужденного процесса.

§ 26.2. Вынужденные процессы

Вынужденный процесс в импульсных системах определяется выражением (26.1'). Для получения общей формулы вынужденных процессов воспользуемся разложением внешнего воздействия в ряд Тейлора

$$f((m-s)T) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(sT)^k}{k!} f^{(k)}(mT), \quad (26.3)$$

где

$$f^{(k)}(mT) = \left[\frac{d^k f(t)}{dt^k} \right]_{t=mT}$$

— производные внешнего воздействия в дискретных точках $t = mT$. Подставляя (26.3) в (26.1') и изменяя очередность суммирования, получим

$$z^B(mT) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} k(sT) (sT)^k \right\} (-1)^k \frac{f^{(k)}((m-s)T)}{k!}. \quad (26.4)$$

Величины

$$d(k) = (-1)^k \sum_{s=0}^{\infty} k(sT) (sT)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (26.5)$$

представляют собой *моменты* k -го порядка решетчатой временной характеристики $k(mT)$. Принимая во внимание (26.5), запишем (26.4) окончательно в виде

$$z^B(mT) = \sum_{k=0}^{\infty} d(k) \frac{f^{(k)}((m-s)T)}{k!}. \quad (26.6)$$

Таким образом, вынужденный процесс в импульсной системе полностью определяется моментами решетчатой временной характеристики и производными внешнего воздействия в дискретных точках. Моменты $d(k)$ (26.5) можно определить и по пере

даточнои функции замкнутой импульсной системы $K^*(p)$. Для этой цели воспользуемся определением D -преобразования

$$K^*(p) = \sum_{s=0}^{\infty} e^{-psT} k(sT). \quad (26.7)$$

Дифференцируя k раз обе части (26.7) по p , получим

$$\frac{d^k K^*(p)}{dp^k} = (-1)^k \sum_{s=0}^{\infty} e^{-psT} (sT)^k k(sT),$$

откуда при $p=0$ будем иметь

$$d(k) = (-1)^k \sum_{s=0}^{\infty} (sT)^k k(sT) = \left[\frac{d^k K^*(p)}{dp^k} \right]_{p=0}. \quad (26.8)$$

Это значит, что момент $d(k)$ равен k -й производной передаточнои функции импульсной системы $K^*(p)$ по p при $p=0$.

§ 26.3. Вынужденные процессы при монотонных воздействиях

Рассмотрим вынужденные процессы при монотонных воздействиях: постоянном, линейном и степенном

1. Постоянное воздействие

$$f(t) = A, \quad t \geq 0.$$

В этом случае

$$f^{(k)}(t) \equiv 0, \quad k \geq 1,$$

и, значит, при $t = mT$

$$f(mT) = A, \quad f^{(k)}(mT) \equiv 0, \quad k > 0.$$

Из выражения вынужденного процесса (26.6) следует

$$z^B(mT) = d(0) A.$$

Но согласно (26.8)

$$d(0) = \sum_{s=0}^{\infty} k(sT) = K^*(0).$$

Поэтому

$$z^B(mT) = K^*(0) A.$$

Вынужденный процесс при постоянном воздействии также постояен и его отношение к величине внешнего воздействия равно значению передаточнои функции замкнутой системы $K^(p)$ при $p=0$.*

2. Линейное воздействие

$$f(t) = At.$$

В этом случае

$$f^{(1)}(t) = A, \quad f^{(k)}(t) \equiv 0, \quad k \geq 2,$$

и, значит, при $t = mT$

$$f(mT) = ATm, \quad f^{(1)}(mT) = A, \quad f^{(k)}(mT) \equiv 0, \quad k \geq 2. \quad (26.9)$$

Из выражения вынужденного процесса (26.6) при учете (26.9) получаем

$$z^B(mT) = d(0) ATm + d(1) A,$$

где

$$d(0) = \sum_{s=0}^{\infty} k(sT) = K^*(0),$$

$$d(1) = - \sum_{s=0}^{\infty} k(sT)(sT) = \left[\frac{dK^*(p)}{dp} \right]_{p=0}.$$

Следовательно,

$$z^B(mT) = K^*(0) mTA + \left[\frac{dK^*(p)}{dp} \right]_{p=0} A.$$

Вынужденный процесс при линейном воздействии также линеен, но с угловым коэффициентом, равным значению передаточной функции замкнутой системы $K^(p)$ при $p=0$, и свободным членом, равным значению производной по p передаточной функции при $p=0$.*

3. Степенное воздействие

$$f(t) = At^l,$$

$$f^{(k)}(t) = A \frac{l!}{(l-k)!} t^{l-k}, \quad k = 1, 2, \dots, l-1,$$

$$f^{(l)}(t) = Al!,$$

$$f^{(l+v)}(t) \equiv 0, \quad v \geq 1,$$

и, значит, при $t = mT$

$$\begin{aligned} f(mT) &= AT^l m^l, & f^{(k)}(mT) &= A \frac{l!}{(l-k)!} T^{l-k} m^{l-k}, \\ f^{(l)}(mT) &= Al!, & f^{(l+v)}(mT) &\equiv 0, \quad v \geq 1. \end{aligned} \quad (26.10)$$

Учитывая (26.10), получаем из выражения вынужденного процесса (26.6)

$$z^B(mT) = d(0)AT^l m^l + \sum_{k=1}^l d(k)A \frac{l!}{(l-k)!} T^{l-k} m^{l-k},$$

или, учитывая (26.8),

$$z^B(mT) = A \left\{ K^*(0)T^l m^l + \sum_{k=1}^l \left[\frac{d^k K^*(p)}{dp^k} \right]_{p=0} \frac{l!}{(l-k)!} T^{l-k} m^{l-k} \right\}. \quad (26.11)$$

Вынужденный процесс при степенном воздействии степени l представляет собой полином той же степени l , но с иными коэффициентами.

Легко видеть, что при $l = 0, 1$ из (26.11) следуют выражения вынужденного процесса при постоянном и линейном воздействиях. Вынужденный процесс при полиномиальном воздействии находится как линейная комбинация вынужденных процессов при степенных воздействиях.

§ 26.4. Условия нулевой вынужденной ошибки

Подставим $z^B(mT)$ из (26.6) в выражение вынужденной ошибки

$$x^B(mT) = f(mT) - z^B(mT).$$

Тогда, обозначая

$$\begin{aligned} c(0) &= 1 - d(0) = 1 - K^*(0), \\ c(s) &= -d(s) = \frac{d^s}{dp^s} [1 - K^*(p)] \Big|_{p=0}, \end{aligned} \quad (26.12)$$

запишем выражение вынужденной ошибки в виде

$$x^B(mT) = c(0)f(mT) + \sum_{s=1}^{\infty} c(s) \frac{f^{(s)}(mT)}{s!}. \quad (26.13)$$

Коэффициенты $c(0), \dots, c(s), \dots$ (26.12) будем называть *коэффициентами ошибок*.

Рассмотрим вначале постоянное воздействие. В этом случае из (26.13) получаем

$$x^B(mT) = x^B = c(0)A = [1 - K^*(0)]A.$$

Вынужденная ошибка будет равна нулю,

$$x^B = 0,$$

при условии

$$1 - K^*(0) = 0, \quad (26.14)$$

или поскольку

$$K^*(p) = \frac{W_K^*(p) W^*(p)}{1 + W_K^*(p) W^*(p)},$$

то условие (26.14) принимает вид

$$1 - K^*(0) = \frac{1}{1 + W_K^*(0) W^*(0)} = 0. \quad (26.15)$$

Но это условие совпадает с условием нулевой ошибки (6.8), если в последнем принять $p = 0$. Таким образом,

условие нулевой вынужденной ошибки при постоянном воздействии является частным случаем условия идеальной системы с нулевой ошибкой при $p = 0$.

Естественно, условия нулевой вынужденной ошибки (26.15) значительно менее стеснительны, чем условия идеальной системы с нулевой ошибкой, и если последние условия часто принципиально невозможно осуществить, то условия (26.15), как правило, легко осуществимы. Так, условия (26.15) выполняются, если

$$W_K^*(0) W^*(0) = \infty,$$

т. е. если передаточная функция разомкнутой системы имеет, например, индекс нейтральности, равный 1, или если выражение представимо в виде

$$W_K^*(p) W^*(p) = \frac{1}{e^{\rho T} - 1} W_1^*(p).$$

Это имеет место, если непрерывная часть содержит интеграторы либо ЦВУ содержит диграторы, т. е. если разомкнутая система содержит запоминающие элементы. Для степенного или, в общем случае, полиномиального воздействия степени l

$$x^B(mT) = c(0) f(mT) + \sum_{k=1}^l c(k) \frac{f^{(k)}(mT)}{k!}$$

вынужденная ошибка будет равна нулю,

$$x^B(mT) \equiv 0,$$

при условиях

$$c(0) = 1 - K^*(0) = 0, \quad c(m) = \frac{d^m}{dp^m} [1 - K^*(p)]|_{p=0}, \quad m = 1, \dots, l.$$

Первое из этих условий совпадает с (26.15). Все эти условия будут выполнены, если индекс нейтральности передаточной функции разомкнутой системы $W_K^*(p) W^*(p)$ равен l . При $l = 1$

мы приходим к ранее рассмотренному частному случаю. Очевидно, что увеличение индекса нейтральности не меняет вывода о нулевой вынужденной ошибке. Таким образом,

средство достижения нулевой вынужденной ошибки при полиномиальном внешнем воздействии состоит в использовании или введении в систему надлежащего числа интеграторов или диграторов.

§ 26.5. Вынужденный процесс при гармоническом воздействии

При гармонических внешних воздействиях число слагаемых в общей формуле вынужденного процесса бесконечно велико, и для получения явных формул приходится прибегать к суммированию бесконечных рядов. Хотя это в общем и не сложная операция, мы изберем для определения вынужденного процесса при гармоническом воздействии более простой путь. Запишем решетчатое гармоническое воздействие в комплексной форме:

$$\vec{f}(mT) = Be^{j(\omega mT + \psi)},$$

где B — амплитуда, ψ — угловая частота, или начальная фаза. Подставляя его в уравнение вынужденного процесса (26.1), получим выражение для вынужденного процесса также в комплексной форме:

$$\vec{z}^B(mT) = \sum_{s=0}^{\infty} k(sT) Be^{j(\omega(m-s)T + \psi)},$$

или, после очевидных преобразований,

$$\vec{z}^B(mT) = \left[\sum_{s=0}^{\infty} k(sT) e^{-j\omega sT} \right] Be^{j(\omega mT + \psi)}.$$

Полагая в выражении (26.7), определяющем связь между передаточной функцией и временной характеристикой, $p = j\omega$, получим

$$K^*(j\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} k(mT) e^{-j\omega mT}.$$

И значит, принимая во внимание (26.11), запишем выражение для $\vec{z}^B(mT)$ окончательно в такой форме:

$$\vec{z}^B(mT) = K^*(j\omega) \vec{f}(mT).$$

Величина $K^*(j\omega)$ показывает характер преобразования гармонического воздействия $\vec{f}(mT)$ замкнутой импульсной системой. Она называется *частотной характеристикой* замкнутой импульсной системы.

§ 26.6. Основные характеристики замкнутой импульсной системы

Основными характеристиками замкнутой импульсной системы являются: передаточная функция $K^*(p)$, временная характеристика $k(mT)$, частотная характеристика $K^*(j\omega)$. Каждая из этих характеристик однозначно определяет свойство замкнутой импульсной системы.

Первая характеристика — *передаточная функция представляет собой сокращенную запись уравнений, описывающих состояния импульсной системы в дискретные моменты времени*. В отличие от непрерывных систем, эти уравнения не дифференциальные, а разностные. Само по себе составление разностных уравнений импульсной системы по дифференциальным уравнениям ее приведенной непрерывной части представляет собой весьма громоздкую процедуру. Эту процедуру удалось избежать благодаря установлению связи между передаточными функциями разомкнутой импульсной системы $W^*(p)$ и ее приведенной непрерывной части $W(p)$.

Вторая характеристика — *временная характеристика определяет временные свойства импульсной системы*, а третья характеристика — *частотная характеристика определяет частотные свойства системы*.

Все эти характеристики тесно связаны друг с другом. Особенно проста связь между частотной характеристикой и передаточной функцией:

$$K^*(j\omega) = [K^*(p)]_{p=j\omega}.$$

Частотная характеристика $K^*(j\omega)$ определяется частным значением аргумента p передаточной функции $K^*(p)$, расположенным на отрезке

$$-\frac{\omega_0}{2} < \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$$

мнимой оси комплексной плоскости (рис. 25.1). Связь передаточной функции $K(p)$ с временной характеристикой $k(mT)$ определяется дискретным преобразованием Лапласа, а связь частотной характеристики $K^*(j\omega)$ с временной характеристикой — дискретным преобразованием Фурье, получаемым из (23.4) при $p = j\omega$. Связь временной характеристики с частотной характеристикой дается обратным преобразованием Фурье, которое имеет вид

$$k(mT) = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} K^*(j\omega) e^{j\omega mT} d\omega.$$

З а д а ч и

26.1. Показать, что коэффициенты ошибок импульсной системы на рис. 26.1 равны

$$c(0) = 0 \quad c(1) = \frac{1}{k_1}, \quad c(2) = \frac{1}{k_1} \left(T_1 + T_2 - \frac{1}{k_1} \right)$$

и что $c(0)$ и $c(1)$ совпадают с коэффициентами ошибок предельной непрерывной системы.

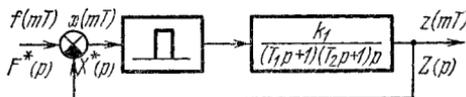


Рис. 26.1.

26.2. Показать, что в импульсной системе, рассмотренной в задаче 25.3, установившееся значение ошибки при линейном воздействии

$$f(mT) = \alpha T m$$

равно

$$x^B(mT) = \frac{\alpha}{k_1} = c(1).$$

26.3. Найди вынужденный процесс $z^B(t)$ в импульсной системе на рис. 26.1 по коэффициентам ошибок $c(0)$, $c(1)$, $c(2)$ при полиномиальном воздействии

$$f(t) = 1 + t + t^2.$$

26.4. Чем отличаются вынужденные процессы при гармоническом воздействии в импульсных и непрерывных системах?

УСТОЙЧИВОСТЬ ИМПУЛЬСНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 27.1. Условия устойчивости

Будем говорить, что импульсная автоматическая система *устойчива* тогда и только тогда, когда ее реакция на любое ограниченное внешнее воздействие ограничена. Если же реакция импульсной системы хотя бы на одно ограниченное внешнее воздействие не ограничена, то такая система *неустойчива*.

Воспользуемся этим определением устойчивости для установления условий устойчивости. Для этой цели рассмотрим уравнение импульсной системы

$$z(mT) = \sum_{s=0}^m k(sT) f((m-s)T). \quad (27.1)$$

Предположим, что внешнее воздействие при любом значении аргумента ограничено:

$$|f(mT)| \leq M \quad \text{для всех } m \geq 0. \quad (27.2)$$

Тогда, оценивая по абсолютной величине левую часть (27.1) и учитывая, что абсолютная величина суммы не превосходит сумму абсолютных величин, получим

$$|z(mT)| \leq \sum_{s=0}^m |k(sT)| |f((m-s)T)|,$$

или, принимая во внимание (27.2),

$$|z(mT)| \leq M \sum_{s=0}^m |k(sT)|. \quad (27.3)$$

Увеличивая верхний предел суммы в (27.3) до ∞ , мы лишь усилим неравенство. Таким образом,

$$|z(mt)| \leq M \sum_{s=0}^{\infty} |k(sT)|, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (27.4)$$

Импульсная система будет устойчива, если ряд, стоящий в правой части неравенства (27.4), сходится, т. е. если

$$\sum_{s=0}^{\infty} |k(sT)| < \infty. \quad (27.5)$$

Таким образом,

импульсная система устойчива, если ряд дискрет временной характеристики абсолютно сходится.

Предположим теперь, что условие (27.5) не выполнено, т. е.

$$\sum_{s=0}^{\infty} |k(sT)| = \infty. \quad (27.6)$$

Тогда найдется такое ограниченное воздействие (27.2), при котором $z(mT)$ будет не ограничено. Действительно, зафиксируем m и выберем

$$f((m-s)T) = M \operatorname{sign} k(sT).$$

Тогда из (27.6) получим

$$z(mT) = M \sum_{s=0}^m k(sT) \operatorname{sign} k(sT) = M \sum_{s=0}^m |k(sT)|.$$

Поскольку такой выбор можно осуществить при любом наперед заданном m , то $z(mT)$ в силу (27.6) будет неограниченно возрастать с ростом m , что свидетельствует о неустойчивости импульсной системы. Таким образом,

абсолютная сходимость дискрет временной характеристики (27.5) является необходимым и достаточным условием устойчивости импульсной системы.

Как было показано в § 26.1, процесс в линейной импульсной системе, вызываемый внешним воздействием, можно представить в виде суммы вынужденного $z^b(mT)$ и свободного процессов $z^c(mT)$:

$$z(mT) = z^b(mT) + z^c(mT),$$

где

$$z^c(mT) = - \sum_{s=m+1}^{\infty} k(sT) f((m-s)T).$$

При ограниченном внешнем воздействии (27.2) имеем

$$|z^c(mT)| \leq M \sum_{s=m+1}^{\infty} |k(sT)|.$$

Но если ряд дискрет временной характеристики абсолютно сходится (27.5), то его остаток $\sum_{s=m+1}^{\infty} |k(sT)|$ при $m \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Это значит, что в устойчивой импульсной системе с ростом времени m свободный процесс $z^c(mT)$ стремится к нулю, а следовательно, общий процесс $z(mT)$ с ростом времени mT стремится к вынужденному процессу $z^b(mT)$. Таким образом,

в устойчивых импульсных системах с течением времени устанавливается вынужденный процесс $z^b(mT)$.

По определению дискретного преобразования Лапласа

$$K^*(p) = D\{k(sT)\} = \sum_{s=0}^{\infty} k(sT) e^{-psT},$$

откуда следует

$$|K^*(p)| \leq \sum_{s=0}^{\infty} |k(sT)| |e^{-psT}|. \quad (27.7)$$

Если $\operatorname{Re} p \geq 0$, то $|e^{-psT}| \leq 1$ и, значит, из (27.7) получаем

$$|K^*(p)| \leq \sum_{s=0}^{\infty} |k(sT)| \quad \text{для} \quad \operatorname{Re} p \geq 0.$$

Из этого неравенства и абсолютной сходимости ряда дискрет временной характеристики (27.5) следует, что передаточная функция $K^*(p)$ устойчивой импульсной системы должна быть ограничена в правой полуплоске $\operatorname{Re} p \geq 0$, т. е. $K^*(p)$ не должно иметь особых точек — полюсов в правой полуплоске $\operatorname{Re} p \geq 0$. Таким образом,

импульсная система будет устойчива только тогда, когда все полюсы $K^(p)$ будут расположены в левой полуплоске, или, короче, если все полюсы $K^*(p)$ — левые.*

Но, как следует из (25.18), полюсы $K^*(p)$ определяются нулями характеристического многочлена $G^*(p)$. Поэтому мы приходим к заключению, что

импульсная система будет устойчива, если все нули характеристического многочлена $G^(p)$ будут левые.*

Непосредственное вычисление нулей характеристического многочлена $G^*(p)$ представляет собой весьма громоздкую операцию, которая при степени многочлена выше 4 может быть основана лишь на численных методах. Поэтому важно найти критерии устойчивости, которые позволяют установить факт устойчивости нулей характеристического многочлена.

Мы рассмотрим здесь две формы критериев устойчивости — алгебраическую, связанную с рассмотрением характеристического многочлена $G^*(p)$, и частотную, связанную с рассмотрением частотной характеристики разомкнутой импульсной системы $W^*(j\omega)$.

§ 27.2. Алгебраический критерий устойчивости

Запишем характеристический многочлен в раскрытой форме:

$$G^*(p) = a_0 e^{pnT} + a_1 e^{p(n-1)T} + \dots + a_n. \quad (27.8)$$

Импульсная система будет устойчива, если ее основные нули p_1, p_2, \dots, p_n будут левыми, т. е. будут расположены в левой

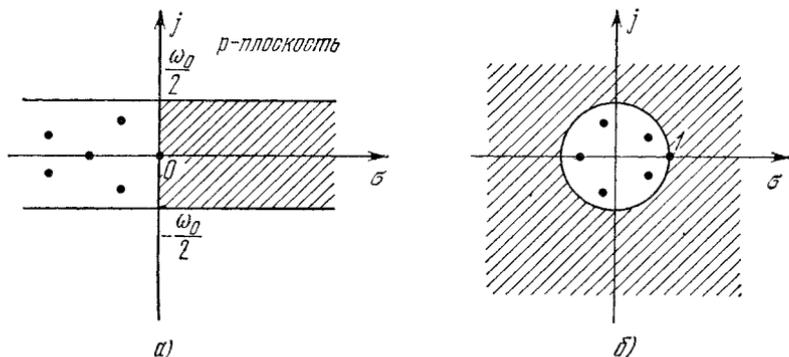


Рис. 27.1.

полуполосе $\operatorname{Re} p < 0 \left(-\frac{\omega_0}{2} < \operatorname{Im} p \leq \frac{\omega_0}{2} \right)$ комплексной плоскости p (рис. 27.1, а), т. е.

$$\operatorname{Re} p_\nu < 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (27.9)$$

Произведем замену переменных в (27.8):

$$e^{pT} = v, \quad p = \frac{1}{T} \ln v. \quad (27.10)$$

Тогда характеристический многочлен (27.8) запишется в виде

$$G^*\left(\frac{1}{T} \ln v\right) = G_1^*(v) = a_0 v^n + a_1 v^{n-1} + \dots + a_n. \quad (27.11)$$

Замена переменных (27.10) преобразует отрезок $\left(-\frac{\omega_0}{2} < \operatorname{Im} p \leq \leq \frac{\omega_0}{2} \right)$ мнимой оси $\operatorname{Re} p = 0$ (рис. 27.1, а) плоскости p в еди-

ничную окружность $v = e^{i\omega T}$ на плоскости (рис. 27.1, б). Левая полуполоса $\operatorname{Re} p < 0$ $\left(-\frac{\omega_0}{2} < \operatorname{Im} p \leq \frac{\omega_0}{2}\right)$ (рис. 27.1, а) плоскости p преобразуется во внутренность круга $v = e^{pT}$ ($\operatorname{Re} p < 0$) плоскости v (рис. 27.1, б), а правая полуполоса $\operatorname{Re} p > 0$ $\left(-\frac{\omega_0}{2} < \operatorname{Im} p \leq \frac{\omega_0}{2}\right)$ плоскости p (рис. 27.1, а) — во внешнюю часть круга $v = e^{pT}$ ($\operatorname{Re} p > 0$) плоскости v (рис. 27.1, б). И значит, импульсная система будет устойчива, если все нули характеристического многочлена $G_1^*(v)$ (27.11) будут расположены внутри единичной окружности, или если все нули $v_1 = e^{p_1 T}, \dots, v_n = e^{p_n T}$ будут внутренними, т. е.

$$|v_\nu| < 1, \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (27.12)$$

Наиболее простой путь получения алгебраического критерия устойчивости импульсных систем состоит в сведении этой задачи к уже известной нам формулировке алгебраического критерия Рауса — Гурвица (§ 11.2). Для этой цели произведем еще одну замену переменной. Положим в (27.11)

$$v = \frac{u+1}{u-1}.$$

Тогда после умножения (27.11) на $(u-1)^n$ получим

$$(u-1)^n G_1^*\left(\frac{u+1}{u-1}\right) = G_2^*(u) = \\ = a_0(u+1)^n + a_1(u+1)^{n-1}(u-1) + \dots + a_n(u-1)^n,$$

или, после раскрытия скобок и приведения подобных членов,

$$G_2(u) = A_0 u^n + A_1 u^{n-1} + \dots + A_n, \quad (27.13)$$

где

$$A_0 = \sum_{k=0}^n a_k,$$

$$A_\mu = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{\nu=0}^n \binom{k}{\nu} \binom{n-k}{\mu-\nu} (-1)^\nu, \quad \mu = 1, 2, \dots, n-1, \quad (27.14)$$

$$A_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k,$$

и $\binom{k}{\mu} = \frac{k!}{\mu!(k-\mu)!}$ — биномиальные коэффициенты. Как видно непосредственно из рис. 27.2,

если $\operatorname{Re} u > 0$, то $|v| > 1$;

если $\operatorname{Re} u < 0$, то $|v| < 1$;

если $\operatorname{Re} u = 0$, то $|v| = 1$.

Следовательно, корни характеристического многочлена (27.11) будут внутренними, если корни характеристического многочлена (27.13) будут левыми. А это будет иметь место при выполнении критерия устойчивости Рауса — Гурвица (10.34).

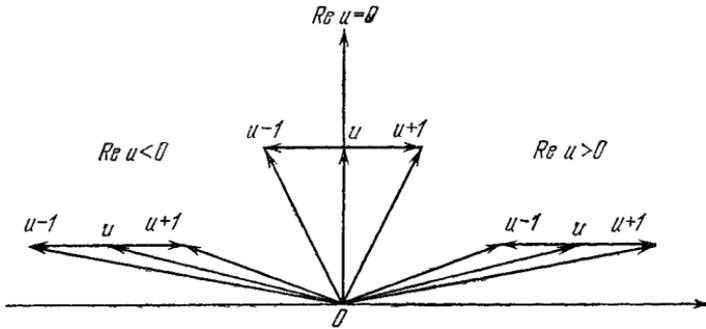


Рис 27.2.

Применяя этот последний критерий к характеристическому многочлену (27.13), получаем формулировку критерия устойчивости импульсных систем.

Импульсная система будет устойчива при выполнении неравенств

$$\begin{aligned}
 A_0 > 0, \quad \Delta_1 = A_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ A_0 & A_2 \end{vmatrix} > 0, \\
 \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 \\ A_0 & A_2 & A_4 \\ 0 & A_1 & A_3 \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \Delta_{n-1} > 0, \\
 \Delta_n = A_n \Delta_{n-1} > 0.
 \end{aligned} \quad (27.15)$$

В раскрытой форме относительно коэффициентов (27.14) исходного характеристического многочлена (27.13) условия устойчивости (27.15) имеют вид:

для $n = 1$

$$A_0 = a_0 + a_1 > 0,$$

$$A_1 = a_0 - a_1 > 0;$$

для $n = 2$

$$A_0 = a_0 + a_1 + a_2 > 0,$$

$$A_1 = 2(a_0 - a_1) > 0,$$

$$A_2 = a_0 - a_1 + a_2 > 0;$$

для $n = 3$

$$A_0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0,$$

$$A_1 = 3(a_0 - a_3) + a_1 - a_2 > 0,$$

$$A_2 = 3(a_0 + a_3) - a_1 - a_2 > 0,$$

$$A_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 > 0,$$

$$A_1 A_3 - A_0 A_2 = a_0^2 - a_3^2 + a_1 a_3 - a_0 a_2 > 0$$

и т. д.

При исследовании устойчивости конкретных импульсных систем, когда коэффициенты заданы в числовой форме, можно также воспользоваться таблицей Рауса, которая была приведена в § 10.2.

§ 27.3. Частотный критерий устойчивости

Для установления частотного критерия устойчивости рассмотрим знаменатель $T^*(p)$ передаточной функции замкнутой импульсной системы $K^*(p)$:

$$T^*(p) = 1 + W^*(p), \quad (27.16)$$

где

$$W^*(p) = \frac{P^*(p)}{Q^*(p)} \quad (27.17)$$

— передаточная функция разомкнутой системы. Подставляя $W^*(p)$ из (27.17) в (27.16), получим

$$T^*(p) = \frac{Q^*(p) + P^*(p)}{Q^*(p)} = \frac{G^*(p)}{Q^*(p)}. \quad (27.18)$$

Числитель этой функции представляет характеристический многочлен замкнутой системы $G^*(p)$, а знаменатель — характеристический многочлен разомкнутой импульсной системы $W^*(p)$. Частотный критерий устойчивости может быть получен на основе сопоставления устойчивости замкнутой и разомкнутой импульсных систем.

Что касается разомкнутой системы, характеризуемой передаточной функцией $W^*(p)$, то, как видно из выражения (27.17), основные полюсы ее совпадают с полюсами передаточной функции непрерывной части $W(p)$. Поэтому разомкнутая импульсная система будет устойчива, если устойчива ее непрерывная часть. В этом случае все полюсы $W(p)$, а значит, $W^*(p)$ будут левыми.

Замкнутая импульсная система будет устойчива, если все нули $T^*(p)$ будут левыми. Производя замену переменной (27.10), запишем $T^*(p)$ в виде

$$T^* \left(\frac{1}{T} \ln v \right) = T_1^*(v) = \frac{G_1^*(v)}{Q_1^*(v)}. \quad (27.19)$$

Замкнутая импульсная система будет устойчивой, если все нули функции $T_1^*(v)$ будут принадлежать единичному кругу, т. е. будут внутренними. Рассмотрим на комплексной плоскости v контур, представляющий собой окружность единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 27.1, б). Предположим, что на этом контуре нет ни нулей, ни полюсов функции $T_1^*(v)$ (27.19). Представим $T_1^*(v)$ в виде

$$T_1^*(v) = \frac{\prod_{v=1}^n (v - v_v^h)}{\prod_{v=1}^n (v - v_v^n)},$$

где v_v^h — нули, v_v^n — полюсы $T_1^*(v)$. При изменении v вдоль единичной окружности $|v| = 1$ по часовой стрелке каждый множитель $(v - v_v^h)$ изменяет свой аргумент на -2π , если нуль v_v^h лежит внутри единичной окружности, и не меняет своего аргумента, если нуль v_v^h лежит вне единичной окружности (рис. 27.3, а),

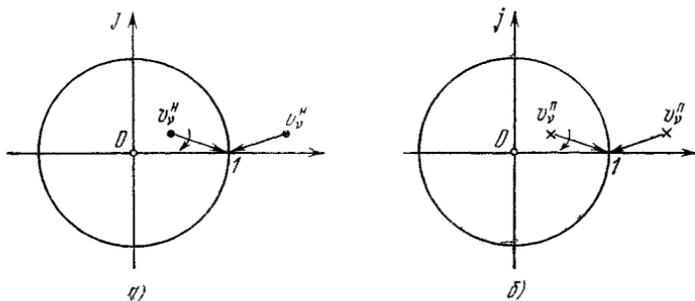


Рис. 27.3.

а каждый множитель $(v - v_v^n)$ изменяет свой аргумент на 2π , если полюс v_v^n лежит внутри единичной окружности, и не меняет своего аргумента, если полюс v_v^n лежит вне единичной окружности (рис. 27.3, б). Отсюда следует, что при изменении v вдоль контура единичной окружности $|v| = 1$ по часовой стрелке изменение аргумента $T_1^*(v)$ будет равно 2π , помноженному на разность между числом полюсов N_n и числом нулей N_h , лежащих внутри контура, т. е.

$$\Delta \arg_{|v|=1} T_1^*(v) = 2\pi (N_n - N_h). \tag{27.20}$$

Предположим вначале, что разомкнутая система устойчива. Это значит, что все полюсы $T_1^*(v)$ лежат внутри единичного круга, т. е.

$$N_{\Pi} = n.$$

Но, как было сказано выше, замкнутая система будет устойчива, если все нули $T_1^*(p)$ будут лежать внутри единичного круга, т. е. если

$$N_{\Pi} = n.$$

Таким образом, замкнутая система будет устойчива, если

$$\Delta \arg T_1^*(v) = 0, \quad (27.21)$$

$$|v|=1$$

т. е. если при изменении v вдоль окружности единичного радиуса $|v|=1$ изменение аргумента $T_1^*(v)$ будет равно нулю.

Изображая на плоскости T_1^* кривую $T_1^*(v)$ при $|v|=1$ или, что то же самое, кривую $T^*(j\omega)$ ($-\frac{\omega_0}{2} < \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$) (рис. 27.4), заключаем, что изменение аргумента будет равно нулю, если начало координат $(0, j0)$ будет находиться вне кривой $T^*(j\omega)$.

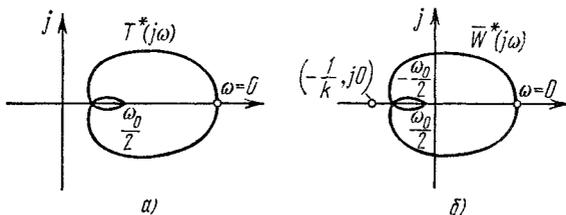


Рис. 27.4.

Функция $T^*(j\omega)$, полученная из (27.16) при $p = j\omega$, связана непосредственно с частотной характеристикой разомкнутой системы:

$$T^*(j\omega) = 1 + W^*(j\omega).$$

Представим частотную характеристику $W^*(j\omega)$, в виде

$$W^*(j\omega) = k \bar{W}^*(j\omega), \quad (27.22)$$

где k — коэффициент усиления, а $\bar{W}^*(j\omega)$ — нормированная частотная характеристика разомкнутой системы. Составим функцию

$$T_2^*(j\omega) = \frac{1}{k} + \bar{W}^*(j\omega).$$

Очевидно, что

$$T_2^*(j\omega) = \frac{1}{k} T^*(j\omega). \quad (27.23)$$

Начало координат $(0, j0)$ в плоскости T^* или плоскости T_2^* (рис. 27.4, а) соответствует точке $(-1, j0)$ в плоскости W^* или точке $(-\frac{1}{k}, j0)$ в плоскости \bar{W}^* (27.4, б). Поэтому условие устойчивости (27.21) будет выполнено, если точка $(-\frac{1}{k}, j0)$ не будет охватываться нормированной частотной характеристикой $\bar{W}^*(j\omega)$ ($-\frac{\omega_0}{2} < \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$). В силу симметрии частотной характеристики относительно действительной оси при $0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$ и $0 \geq \omega \geq -\frac{\omega_0}{2}$ можно изображать на графике лишь частотную характеристику для неотрицательных частот. Таким образом, мы приходим к следующей формулировке частотного критерия устойчивости.

Частотный критерий I (точечный критерий). Импульсная система с устойчивой непрерывной частью будет устойчива тогда и только тогда, когда нормированная частотная характеристика $\bar{W}^*(j\omega)$ разомкнутой импульсной системы не охватывает точку $(-\frac{1}{k}, j0)$.

Если нас интересует устойчивость замкнутой импульсной системы при значениях коэффициента усиления k , принадлежащих

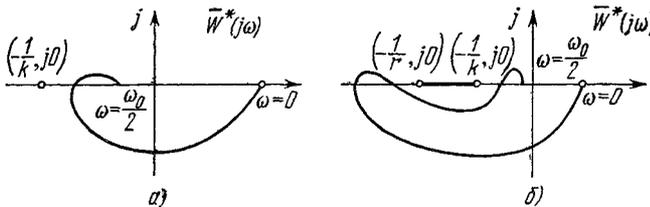


Рис. 27.5.

интервалу (r, k_0) , т. е. $r < k < k_0$, то в этом случае частотный критерий устойчивости можно сформулировать в следующей форме.

Частотный критерий II (отрезковый критерий). Импульсная система с устойчивой непрерывной частью будет устойчивой при $r < k < k_0$ тогда и только тогда, когда нормированная частотная характеристика $\bar{W}^*(j\omega)$ разомкнутой импульсной системы не охватывает и не пересекает отрезок $(-\frac{1}{r}, -\frac{1}{k_0})$.

Примеры, иллюстрирующие применения критериев устойчивости, изображены на рис. 27.5, а, б.

В том случае, когда непрерывная часть системы нейтральна, т. е. $\bar{W}^*(p)$ имеет нулевые полюсы, индекс нейтральности становится отличным от нуля. Аналогично тому, как это делалось для непрерывных систем (см. § 10.3), нормированную частотную характеристику $\bar{W}^*(j\omega)$ нужно дополнить дугой бесконечно большого радиуса, соответствующей углу $s_a \frac{\pi}{2}$, где s_a — индекс аperiодической нейтральности (рис. 27.6), а формулировка частотного критерия остается неизменной. Если же непрерывная часть неустойчива, то $\bar{W}^*(p)$ имеет индекс неустойчивости $s_n \neq 0$, отличный от нуля. В этом случае будем иметь

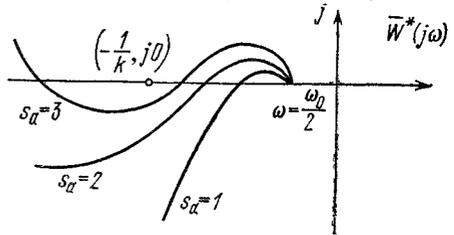


Рис. 27.6.

$$N_n = n - s_n,$$

и так как замкнутая система по-прежнему устойчива, то согласно (27.20) получаем

$$\Delta \arg T_1^*(v) \Big|_{|v|=1} = 2\pi s_n. \quad (27.24)$$

То есть в этом случае для выполнения условия (27.24) частотная характеристика разомкнутой системы при $-\frac{\omega_0}{2} < \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$ должна охватывать точку $(-\frac{1}{k}, j0)$ против часовой стрелки s_n раз. Если же изобразить частотную характеристику для положительных значений ω ($0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$), то частотный критерий устойчивости можно сформулировать следующим образом.

Частотный критерий I (точечный критерий). Импульсная система с неустойчивой непрерывной частью, индекс неустойчивости которой равен $s_n > 0$, будет устойчивой тогда и только тогда, когда нормированная частотная характеристика $\bar{W}^*(j\omega)$ разомкнутой импульсной системы охватывает точку $(-\frac{1}{k}, j0)$ против часовой стрелки $s_n/2$ раз.

Частотный критерий II (отрезковый критерий). Импульсная система с неустойчивой непрерывной частью, индекс неустойчивости которой равен $s_n > 0$, будет устойчивой тогда и только тогда, когда нормированная частотная характеристика $\bar{W}^*(j\omega)$ разомкнутой импульсной системы охватывает отрезок $(-\frac{1}{r}, -\frac{1}{k_0})$ против часовой стрелки $s_n/2$ раз.

На рис. 27.7 изображена нормированная частотная характеристика $\bar{W}^*(j\omega)$, соответствующая устойчивой замкнутой системе при $s_n = 2$.

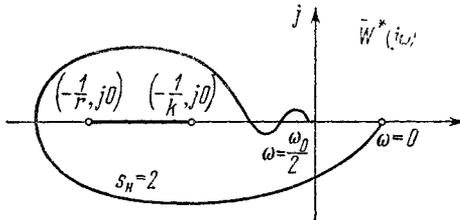


Рис. 27.7.

Задачи

27.1. Показать, что если временная характеристика замкнутой импульсной системы $k(mT)$ удовлетворяет условию $k(mT) \geq 0$ при всех $m \geq 0$, то необходимое и достаточное условие устойчивости такой системы имеет вид

$$K^*(j0) < \infty.$$

27.2. Показать, что границы устойчивости импульсных систем определяются равенством

$$\Delta_n = A_n \Delta_{n-1} = 0,$$

что эквивалентно

$$A_n = 0 \quad \text{либо} \quad \Delta_{n-1} = 0.$$

27.3. Провести доказательство частотного критерия устойчивости импульсных систем, используя рассуждения, примененные при доказательстве этого критерия для непрерывных систем (§ 10.3).

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

§ 28.1. Исследование устойчивости
типовых импульсных систем

Рассмотрим вначале общую форму характеристических многочленов импульсных систем первого и второго порядка. Для многочлена первой степени

$$G^*(p) = a_0 e^{pT} + a_1$$

согласно условиям устойчивости (§ 27.2) имеем

$$a_0 + a_1 > 0, \quad a_0 - a_1 > 0, \quad (28.1)$$

или при $a_0 > 0$

$$1 + \frac{a_1}{a_0} > 0, \quad 1 - \frac{a_1}{a_0} > 0.$$

Область устойчивости изображена на рис. 28.1. Она соответствует отрезку $(-1, 1)$ на прямой a_1/a_0 .

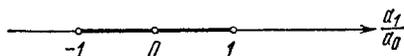


Рис. 28.1.

Для многочлена второй степени $G^*(p) = a_0 e^{2pT} + a_1 e^{pT} + a_2$ из тех же условий устойчивости имеем

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 &> 0, \\ a_0 - a_2 &> 0, \end{aligned} \quad (28.2)$$

$$a_0 - a_1 + a_2 > 0$$

или при $a_0 > 0$

$$1 + \frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0} > 0,$$

$$1 - \frac{a_2}{a_0} > 0,$$

$$1 - \frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0} > 0.$$

Область устойчивости соответствует (рис. 28.2) внутренности треугольника, образованного прямыми, уравнения которых получатся при замене этих неравенств на равенства.

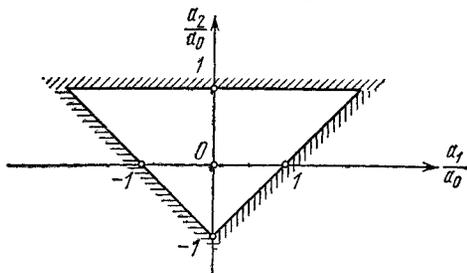


Рис. 28.2.

Часто, однако, удобнее получать область устойчивости на плоскости физических параметров, таких, например, как отношения постоянных времени, коэффициента усиления.

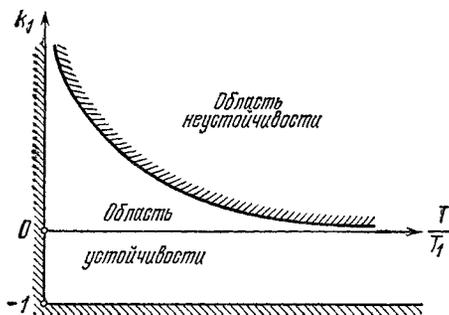


Рис. 28.3.

Пример 1. Так, для системы первого порядка характеристический многочлен имеет вид

$$G^*(p) = e^{pT} + [e^{-T/T_1} - k_1(1 - e^{-T/T_1})].$$

В этом случае

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = e^{-T/T_1} - k_1(1 - e^{-T/T_1}).$$

Пользуясь неравенствами (28.1), получаем

$$a_0 + a_1 = 1 + e^{-T/T_1} - k_1(1 - e^{-T/T_1}) > 0,$$

$$a_0 - a_1 = 1 - e^{-T/T_1} + k_1(1 - e^{-T/T_1}) > 0.$$

Из первого неравенства следует

$$k_1 < k_{1 \text{ гр}} = \frac{1 + e^{-T/T_1}}{1 - e^{-T/T_1}} = \text{cth} \frac{T}{2T_1}.$$

Из второго неравенства получим

$$k_1 > k_{2 \text{ гр}} = -1.$$

Граница устойчивости, таким образом, определяется двумя кривыми:

$$k_{1 \text{ гр}} = \text{cth} \frac{T}{2T_1}, \quad k_{2 \text{ гр}} = -1.$$

Область устойчивости в плоскости параметров $(k_1, \frac{T}{T_1})$ находится между этими границами (рис. 28.3).

Пример 2. Для импульсной системы второго порядка с простейшим импульсным элементом характеристический многочлен второго порядка имеет вид

$$G^*(p) = e^{2pT} + [1 + e^{-T/T_1} - k_1(1 - e^{-T/T_1})] e^{pT} + e^{-T/T_1}.$$

В этом случае

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1 + e^{-T/T_1} - k_1(1 - e^{-T/T_1}), \quad a_2 = e^{-T/T_1}.$$

Пользуясь неравенствами (28.2), получаем

$$a_0 + a_1 + a_2 = 2(1 + e^{-T/T_1}) - k_1(1 - e^{-T/T_1}) > 0,$$

$$a_0 - a_2 = 1 - e^{-T/T_1} > 0,$$

$$a_0 - a_1 + a_2 = k_1(1 - e^{-T/T_1}) > 0.$$

Из первого неравенства получаем

$$k_1 < k_{1 \text{ гр}} = 2 \frac{1 + e^{-T/T_1}}{1 - e^{-T/T_1}} = 2 \operatorname{cth} \frac{T}{2T_1}.$$

Второе и третье неравенства выполняются при всех положительных параметрах, т. е. граница устойчивости определяется двумя кривыми:

$$k_{1 \text{ гр}} = 2 \operatorname{cth} \frac{T}{2T_1}, \quad k_{2 \text{ гр}} = 0.$$

Область устойчивости в плоскости параметров $(k_1, \frac{T}{T_1})$ лежит между этими границами (рис. 28.4). Для этих систем с ростом периода повторения T или с уменьшением постоянной времени линейной части системы T_1 граничный коэффициент усиления падает и минимальное значение $k_{1 \text{ гр}}$ равно 1 для системы первого порядка или 0 для системы второго порядка. При $k_1 < \lim_{T_1 \rightarrow 0} k_{1 \text{ гр}}$ система устойчива при всех значениях параметров T_1 и T .

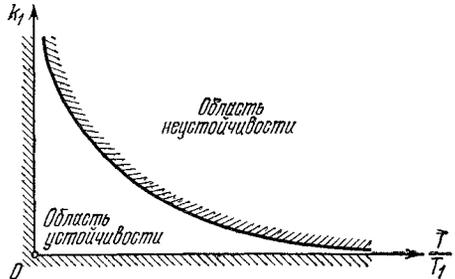


Рис. 28.4.

Применим для исследования устойчивости импульсных систем частотные критерии устойчивости.

Пример 3. Передаточная функция разомкнутой системы первого порядка имеет вид

$$W^*(p) = k_1 \frac{1 - e^{-T/T_1}}{e^{pT} - e^{-T/T_1}}. \quad (28.3)$$

Полагая в (28.3) $p = j\omega$, получаем после деления обеих частей на k_1 нормированную частотную характеристику

$$\overline{W}^*(j\omega) = \frac{1}{k_1} W(j\omega) = \frac{1 - e^{-T/T_1}}{e^{j\omega T} - e^{-T/T_1}}. \quad (28.4)$$

Эта нормированная частотная характеристика изображена на рис. 28.5. Как следует из (28.4),

$$\bar{W}^*(j0) = 1, \quad \bar{W}^*\left(j \frac{\omega_0}{2}\right) = -\frac{1 - e^{-T/T_1}}{1 + e^{-T/T_1}} = -\operatorname{th} \frac{T}{2T_1}.$$

Замкнутая импульсная система будет устойчива, если точка $\left(-\frac{1}{k_1}, j0\right)$

не будет охватываться нормированной частотной характеристикой, т. е. если

$$-\frac{1}{k_1} > -\operatorname{th} \frac{T}{2T_1}.$$

Отсюда получаем

$$k_1 < k_{1 \text{ гр}} = \operatorname{cth} \frac{T}{2T_1},$$

что совпадает с ранее полученным условием.

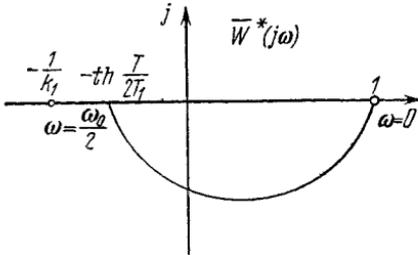


Рис. 28.5.

В отличие от непрерывных систем первого и второго порядка (см. § 11.1), устойчивых при любых положительных значениях коэффициента усиления, импульсные системы первого и второго порядка всегда имеют предельный коэффициент усиления, превышение которого приводит к неустойчивости.

§ 28.2. Устойчивость импульсных систем при малых периодах повторения

Рассмотрим типовую импульсную систему с произвольной непрерывной частью и импульсным элементом, формирующим прямоугольные импульсы (рис. 28.6). Частотная характеристика приведенной непрерывной части равна

$$W(j\omega) = S(j\omega) W_H(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} W_H(j\omega),$$

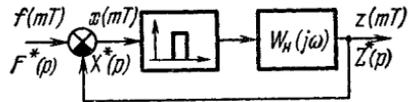


Рис. 28.6.

а частотная характеристика разомкнутой импульсной системы представится в виде

$$W^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W(j(\omega - r\omega_0))$$

или, более подробно,

$$W^*(j\omega) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-j(\omega - r\omega_0)T}}{j(\omega - r\omega_0)T} W_H(j(\omega - r\omega_0)).$$

Так как $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, т. е. $\omega_0 T = 2\pi$, то

$$W^*(j\omega) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{j(\omega T - 2\pi r)}}{j(\omega T - 2\pi r)} W_H \left(j \left(\omega - \frac{2\pi r}{T} \right) \right). \quad (28.5)$$

При достаточно малом периоде повторения T , что соответствует достаточно большой частоте повторения $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, можно в правой части (28.5) ограничиться наибольшим слагаемым, соответствующим $r = 0$, и тогда приближенно будем иметь

$$W^*(j\omega) \approx \frac{1 - e^{j\omega T}}{j\omega T} W_H(j\omega),$$

или, поскольку при $\omega T \ll 1$

$$\frac{1 - e^{j\omega T}}{j\omega T} = \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j\omega \frac{T}{2}} \approx e^{-j\omega \frac{T}{2}},$$

то

$$W^*(j\omega) \approx e^{-j\omega \frac{T}{2}} W_H(j\omega). \quad (28.6)$$

Из (28.6) следует, что при достаточно малых периодах повторения импульсную систему можно рассматривать как непрерывную систему, содержащую ту же непрерывную часть и элемент запаздывания (рис. 28.7). Эта непрерывная система образуется из импульсной заменой импульсного элемента, формирующего прямоугольные импульсы,

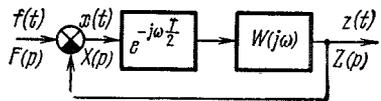


Рис. 28.7.

элементом запаздывания, осуществляющего запаздывание на время, равное половине периода повторения $\frac{T}{2}$. Но, как было показано в § 11.5, наличие запаздывания всегда приводит к существованию конечного граничного коэффициента усиления. Этот факт объясняет, почему, в отличие от непрерывных систем, импульсные системы первого и второго порядка всегда имеют конечный граничный коэффициент усиления.

§ 28.3. Влияние частоты повторения на устойчивость импульсных систем

Как уже отмечалось, частотная характеристика разомкнутой импульсной системы связана с частотной характеристикой приведенной непрерывной части соотношением

$$W^*(j\omega) = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W(j(\omega - r\omega_0)). \quad (28.7)$$

Для построения $W^*(j\omega)$ по $W(j\omega)$ можно поступить следующим образом. Зададимся частотой повторения ω_0 и на приведенной частотной характеристике непрерывной части $W(j\omega) = S(j\omega)W_n(j\omega)$ (рис. 28.8) отметим точку $\frac{\omega_0}{2}$. Затем выберем в интервале частот $0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$ значение $\omega = \omega_1$ и отметим на частотной характеристике $W(j\omega)$ точки $\omega_0 - \omega_1$, $\omega_0 + \omega_1$, $2\omega_0 - \omega_1$, $2\omega_0 + \omega_1$ и т. д. Замечая, что значения $W(j(\omega_0 - \omega_1))$ и $W(j(\omega_1 - r\omega_0))$ комплексно сопряженные, из точки ω_1 на частотной характеристике строим ломаную линию из векторов, соответствующих $W(j(\omega_0 - \omega_1))$, $W(j(\omega_0 + \omega_1))$, $W(j(2\omega_0 - \omega_1))$, $W(j(2\omega_0 + \omega_1))$ и т. д. Так как с ростом r модуль частотной характеристики $W(j(r\omega_0 \mp \omega_1))$ стремится к нулю, то практически ломаная векторов будет содержать конечное число векторов (рис. 28.8), и конечная точка ломаной и есть точка $\omega = \omega_1$, соответствующая значению частотной характеристики $W^*(j\omega_1)$ в масштабе $\frac{\omega_0}{2\pi}$ при $\omega = \omega_1$. Для частоты $\omega = \frac{\omega_0}{2}$ из (28.7) получаем

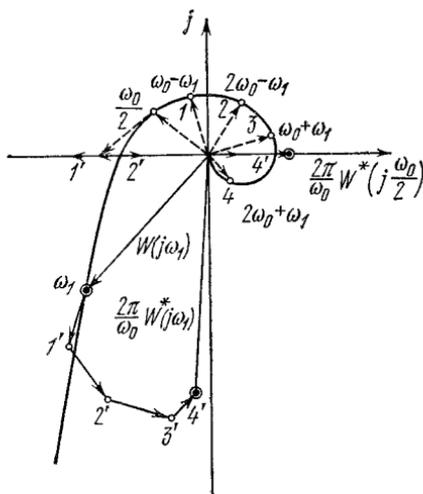


Рис. 28.8.

ристики $W^*(j\omega_1)$ в масштабе $\frac{\omega_0}{2\pi}$ при $\omega = \omega_1$. Для частоты $\omega = \frac{\omega_0}{2}$ из (28.7) получаем

$$\begin{aligned} W^*\left(j \frac{\omega_0}{2}\right) &= \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W\left(j \frac{\omega_0}{2}(1-2r)\right) = \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{Re} W\left(j \frac{\omega_0}{2}(2r-1)\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что точка $W^*\left(j \frac{\omega_0}{2}\right)$ частотной характеристики разомкнутой импульсной системы всегда лежит на вещественной оси и равна сумме вещественных частей частотной характеристики приведенной непрерывной части при соответствующих частотах (в масштабе $\frac{\omega_0}{\pi}$) (рис. 28.8).

Для достаточно высокой частоты повторения в (28.7) можно ограничиться двумя слагаемыми, соответствующими $r = 0$ и

$r = 1$. Тогда

$$W^*(j\omega) \approx \frac{\omega_0}{2\pi} [W^*(j\omega) + W(j(\omega - \omega_0))]. \quad (28.8)$$

В этом случае вместо ломаной, указывающей переход от $W(j\omega)$ к $W^*(j\omega)$, мы будем иметь лишь один вектор $W(j(\omega_0 - \omega))$. Соотношение (28.8) особенно удобно для качественного исследования влияния частоты повторения на устойчивость импульсной системы.

Предположим, что частотная характеристика приведенной непрерывной системы расположена в нижней полуплоскости (рис. 28.9). Такими частотными характеристиками обладают системы не выше второго порядка, а также системы более высокого порядка, но устойчивые при любом положительном коэффициенте усиления. В этом случае применение способа построения $W^*(j\omega)$ по $W(j\omega)$ приводит к тому, что частотная характеристика $W^*(j\omega)$ расположена слева от $W(j\omega)$ и при $\omega = \frac{\omega_0}{2}$ значение частотной характеристики $W^*(j\frac{\omega_0}{2})$ отлично от нуля и отрицательно, что свидетельствует о наличии конечного граничного коэффициента усиления

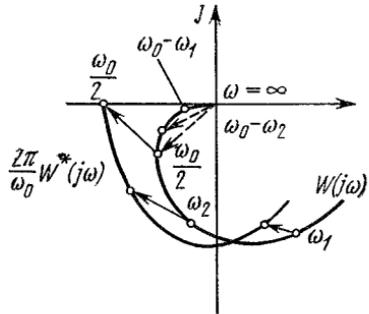


Рис. 28.9.

а это имеет место при любом $\omega_0 \neq \infty$. Таким образом,

$$k_{гр} = - \frac{1}{W^*(j\frac{\omega_0}{2})},$$

если $W(j\omega)$ расположена в нижней полуплоскости, то введение простейшего импульсного элемента в непрерывную систему приводит к возникновению конечного граничного коэффициента усиления. Частота на границе устойчивости при этом наивысшая и равна $\frac{\omega_0}{2}$.

Предположим, что частотная характеристика приведенной непрерывной части расположена в левой полуплоскости (рис. 28.10). Такими частотными характеристиками обладают системы третьего порядка, а также системы более высокого порядка, если модуль высокочастотной части частотной характеристики весьма мал и этой частью мы можем пренебречь. В этом случае, строя $W^*(j\omega)$ по $W(j\omega)$, заключаем, что в низкочастотной области вплоть до $\omega = \omega_{гр}$ частотная характеристика $W^*(j\omega)$ расположе-

на левее $W(j\omega)$. И следовательно, граничный коэффициент импульсной системы меньше, чем граничный коэффициент непрерывной системы. Таким образом,

если $W(j\omega)$ расположена в левой полуплоскости, то введение простейшего импульсного элемента в непрерывную систему приводит к уменьшению граничного коэффициента усиления. В рассмотренных выше случаях замена непрерывной системы импульсной приводит к понижению запаса устойчивости.

Рассмотрим в заключение тот случай, когда частотная характеристика приведенной непрерывной части имеет существенный модуль на частотах, расположенных в правой полуплоскости. Такими частотными характеристиками

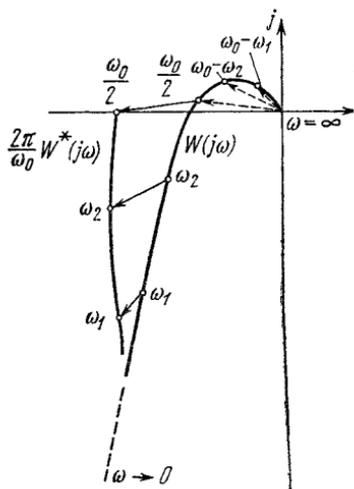


Рис. 28.10.

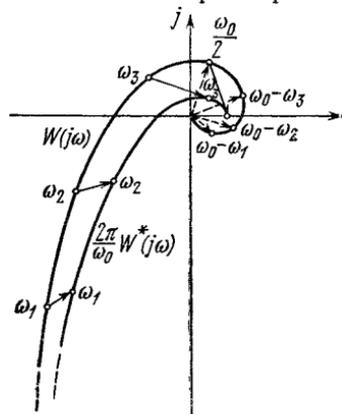


Рис. 28.11.

обладают системы, содержащие элементы запаздывания, распределенные параметры, резонансные контуры и т. п. В этом случае, выбирая надлежащим образом частоту повторения ω_0 и строя $W^*(j\omega)$ по $W(j\omega)$ (рис. 28.11), заключаем, что для частот, близких к $\omega_{гр}$, частотная характеристика $W^*(j\omega)$ располагается правее $W(j\omega)$. И значит, граничный коэффициент усиления импульсной системы становится выше граничного коэффициента непрерывной системы. Таким образом,

если $W(j\omega)$ на высоких частотах имеет существенную часть, расположенную в правой полуплоскости, введение простейшего импульсного элемента с надлежащей частотой повторения приводит к повышению граничного коэффициента усиления. Иначе говоря, введение импульсного элемента в этом случае повышает запас устойчивости.

Этот вывод объясняет наблюдаемое на практике явление стабилизации непрерывных систем с запаздыванием при введении прерывающих устройств.

Задачи

28.1. Показать, что импульсная система (рис. 24.5), рассмотренная в задаче 25.2, будет устойчива при выполнении неравенств

$$0 < k_2 < 2k_1T, \quad k_1 < \frac{2}{T}.$$

Начертить область устойчивости в плоскости (k_1T, k_2) .

28.2. Показать, что импульсная система, рассмотренная в задаче 25.3, будет устойчива при выполнении наиболее жесткого из неравенств

$$k_1 < k_{1 \text{ гр}} = \frac{2(1 - e^{-T/T_1})}{T(1 + e^{-T/T_1}) - 2T_1(1 - e^{-T/T_1})},$$

$$k_1 < k_{2 \text{ гр}} = \frac{1 - e^{-T/T_1}}{T_1 - (T_1 + T)e^{-T/T_1}}.$$

Начертить область устойчивости в плоскости $\left(k_1, \frac{T_1}{T}\right)$.

28.3. Показать, что если в импульсной системе, рассмотренной в задаче 28.2, имеется запаздывание $\tau < T$, то существует такая область для периода повторения T , внутри которой граничный коэффициент усиления импульсной системы больше, чем граничный коэффициент усиления предельной непрерывной системы.

Глава 29

СВОБОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ИМПУЛЬСНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

§ 29.1. Мера быстродействия импульсных систем

Рассмотрим временную характеристику замкнутой импульсной системы

$$k(0) = 0, \quad k(mT) = \sum_{\nu=1}^n d_{\nu} e^{p_{\nu}(m-1)T}, \quad m \geq 1.$$

Записывая ее в виде

$$k(mT) = e^{-\xi(m-1)T} \sum_{\nu=1}^n d_{\nu} e^{(p_{\nu} + \xi)(m-1)T}, \quad m \geq 1, \quad (29.1)$$

и выбирая ξ так, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{Re}(p_{\nu} + \xi) \leq 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

находим степень устойчивости системы

$$\xi_0 = \min_{\nu} |\operatorname{Re} p_{\nu}|.$$

При этом, так как для $\xi \leq \xi_0$

$$|e^{(p_{\nu} + \xi)(m-1)T}| \leq 1,$$

получаем из (29.1)

$$|k(mT)| \leq M_1 e^{-\xi(m-1)T}.$$

Величина ξ_0 определяет предельное быстродействие системы, поэтому далее мы будем называть ξ_0 *быстродействием*. При $\xi < \xi_0$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} k(mT) e^{\xi m T} = 0. \quad (29.2)$$

Поскольку

$$D\{k(mT)\} = K^*(p),$$

то по теореме смещения дискретного преобразования Лапласа (теорема 3 приложения 3)

$$D\{k(mT)e^{\xi_0 mT}\} = K^*(p - \xi_0).$$

Импульсную систему, передаточная функция которой равна

$$K^*(p - \xi_0) = \frac{H^*(p - \xi_0)}{G^*(p - \xi_0)},$$

будем называть *смещенной*. Из (29.2) следует, что

импульсная система обладает быстродействием, не меньшим ξ_0 , если соответствующая смещенная система устойчива.

Таким образом, исследование быстродействия импульсной системы сводится к исследованию устойчивости смещенной системы. Для этой цели к характеристическому многочлену $G^*(p - \xi_0)$ или смещенной частотной характеристике разомкнутой системы $W^*(j\omega - \xi_0)$ нужно применить алгебраический или частотный критерий устойчивости.

Пример. Для импульсной системы первого порядка характеристический многочлен равен

$$G^*(p) = e^{pT} - (e^{-T/T_1} - k_1(1 - e^{-T/T_1})).$$

Смещенный характеристический многочлен получается заменой p на $p - \xi$:

$$G^*(p - \xi) = e^{-\xi T_1} e^{pT} - (e^{-T/T_1} - k_1(1 - e^{-T/T_1})).$$

Теперь

$$a_0 = e^{-\xi T_1},$$

$$a_1 = -e^{-T/T_1} + k_1(1 - e^{-T/T_1}).$$

Пользуясь соответствующими неравенствами, находим

$$a_0 + a_1 = e^{-\xi T_1} - e^{-T/T_1} + k_1(1 - e^{-T/T_1}) > 0,$$

$$a_0 - a_1 = e^{-\xi T_1} + e^{-T/T_1} - k_1(1 - e^{-T/T_1}) > 0.$$

Из первого неравенства получаем

$$k_1 > k_2 \text{ гр}(\xi) = \frac{e^{-T/T_1} - e^{-\xi T_1}}{1 - e^{-T/T_1}}. \quad (29.3)$$

Из второго неравенства получаем

$$k_1 < k_1 \text{ гр}(\xi) = \frac{e^{-\xi T_1} + e^{-T/T_1}}{1 - e^{-T/T_1}}. \quad (29.4)$$

При $\xi = \infty$ из (29.3) и (29.4) находим

$$k_1 \text{ гр}(\infty) = k_2 \text{ гр}(\infty) = \frac{e^{-T/T_1}}{1 - e^{-T/T_1}} = \frac{1}{e^{T/T_1} - 1}.$$

Таким образом, импульсные системы первого порядка при конечных значениях параметров непрерывной части могут обладать бесконечной степенью устойчивости. Зависимость $k_{1гр}(\xi)$ и $k_{2гр}(\xi)$ от $\frac{T}{T_1}$ при фиксированных значениях ξT_1 изображена на рис. 29.1. Область значений параметров $k_1, \frac{T}{T_1}$,

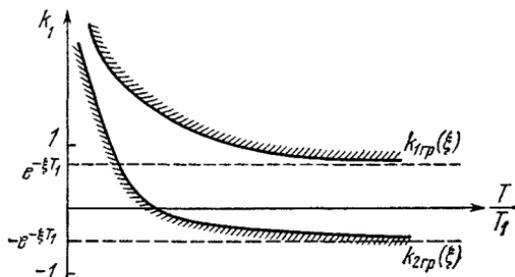


Рис. 29.1.

заключенная между кривыми, соответствующими фиксированным значениям $\xi_0 T_1$, обеспечивает импульсной системе степень устойчивости, не меньшую ξ_0

§ 29.2. Определение временной характеристики по дискретной передаточной функции

Выражение временной характеристики (29.1) очень удобно для качественных исследований устойчивости и нахождения степени устойчивости. Однако определение $k(mT)$ по формуле (29.1) требует предварительного вычисления нулей характеристического многочлена $G^*(p)$, что представляет собой сложную задачу. В отличие от непрерывных систем, в импульсных системах существует возможность определения временной характеристики непосредственно через коэффициенты передаточной функции. Для этой цели запишем передаточную функцию в виде отношения многочленов:

$$K^*(p) = \frac{H^*(p)}{G^*(p)} = \frac{b_1 e^{p(n-1)T} + \dots + b_n}{a_0 e^{pnT} + a_1 e^{p(n-1)T} + \dots + a_n},$$

или, умножая обе части на e^{-pnT} ,

$$K^*(p) = \frac{\sum_{v=1}^n b_v e^{-pvT}}{\sum_{v=0}^n a_v e^{-pvT}}. \quad (29.5)$$

Но передаточная функция и временная характеристика связаны друг с другом дискретным преобразованием Лапласа:

$$K^*(p) = D\{k(mT)\} = \sum_{m=0}^{\infty} k(mT) e^{-pmT}. \quad (29.6)$$

Следовательно, из (29.5) и (29.6) получаем

$$\frac{\sum_{\nu=1}^n b_{\nu} e^{-p\nu T}}{\sum_{\mu=0}^n a_{\mu} e^{-p\mu T}} = \sum_{m=0}^{\infty} k(mT) e^{-pmT}. \quad (29.7)$$

Освобождаясь в (29.7) от знаменателя, получим после элементарных преобразований

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n b_{\nu} e^{-p\nu T} &= \sum_{\mu=1}^n \sum_{m=0}^{\infty} a_{\mu} k(mT) e^{-p(\mu+m)T} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{l=0}^n a_l k[(n-l)T] \right\} e^{-pnT}. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях e^{pT} , получим

$$\begin{aligned} b_1 &= a_0 k(T), \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ b_n &= a_0 k(nT) + a_1 k[(n-1)T] + \dots + a_{n-1} k(T), \end{aligned}$$

и при $m > n$

$$b_m = 0 = a_0 k(mT) + a_1 k[(m-1)T] + \dots + a_n [k(m-n)T].$$

Отсюда находим рекуррентное соотношение для значений временной характеристики:

$$k(mT) = \frac{1}{a_0} \left\{ b_m - \sum_{s=1}^{m-1} a_s k[(m-s)T] \right\}, \quad (29.8)$$

причем $b_m \equiv 0$ при $m > n$. Это соотношение позволяет вычислить $k(mT)$ по коэффициентам передаточной функции $K^*(p)$ и предшествующим значениям временной характеристики $k(s)$, $s \leq m-1$.

§ 29.3. Процессы конечной длительности

В общем случае, как следует из описанного выше определения временной характеристики, процесс в устойчивой импульсной системе протекает неограниченно долго. Однако, в отличие от непрерывных систем, возможны такие условия, при которых процесс длится конечное время, т. е. условия, при которых, начиная с некоторого момента времени, временная характеристика тождественно равна нулю:

$$k(mT) \equiv 0, \quad m \geq m_0. \quad (29.9)$$

В этом случае согласно (29.6) должно иметь место равенство

$$K^*(p) = \sum_{m=0}^{m_0} k(mT) e^{-pmT}. \quad (29.10)$$

Из (29.7) очевидно, что это может быть лишь тогда, когда дробь, стоящая в левой части равенства, превратится в многочлен. Но это может иметь место лишь тогда, когда знаменатель передаточной функции не будет зависеть от e^{-pT} , т. е. тогда, когда

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0. \quad (29.11)$$

Действительно, при выполнении условий (29.11) из (29.7) получаем при учете (29.10)

$$\sum_{v=0}^{n-1} \frac{b_v}{a_0} e^{-pvT} = \sum_{m=0}^{m_0} k(mT) e^{-pmT} = K^*(p),$$

откуда следует, что

$$m_0 = n - 1$$

и

$$k(mT) = \frac{b_m}{a_0}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Таким образом,

при выполнении условий (29.11) процесс имеет конечную длительность, равную $(n - 1)T$, где n — порядок передаточной функции $K^(p)$.*

При выполнении условия (29.10) характеристический многочлен $G^*(p)$ превращается в одночлен

$$G^*(p) = a_0 e^{pnT}.$$

При замене p на $p - \xi$ получаем

$$G^*(p - \xi) = a_0 e^{-\xi nT} e^{pnT},$$

откуда следует, что смещенная система будет устойчива при любом значении ξ , в том числе и при $\xi = \infty$. Это значит, что

система с конечной длительностью процесса обладает бесконечной степенью устойчивости.

§ 29.4. Процессы при произвольных воздействиях

Если к системе приложено произвольное воздействие $f(mT)$, то выходная величина определяется выражениями

$$z(mT) = \sum_{s=0}^m k(sT) f((m-s)T), \quad m < n-1,$$

или

$$z(mT) = \sum_{s=0}^m k((m-s)T) f(sT), \quad m \geq n-1. \quad (29.12)$$

Подставляя в (29.12) значение $k(mT)$, получим после преобразований

$$z(mT) = \sum_{v=1}^m d_v e^{p_v mT} \sum_{s=0}^m e^{-p_s T} f(mT). \quad (29.13)$$

Это соотношение удобно для определения процесса, если известны нули характеристического многочлена.

Рассмотрим процессы для типовых воздействий при выполнении условий конечной длительности. В этом случае согласно (29.11) из (29.12) получим

$$z(mT) = \sum_{s=0}^m k(sT) f((m-s)T), \quad m \leq n-1,$$

и

$$z(mT) = \sum_{s=0}^{n-1} k(sT) f((m-s)T), \quad m > n-1.$$

В частности, при постоянном внешнем воздействии

$$f(mT) = \begin{cases} A, & m \geq 0, \\ 0, & m < 0, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{aligned} z(mT) &= A \sum_{s=0}^m k(sT), \quad m \leq n-1, \\ z(mT) &= A \sum_{s=0}^{m-1} k(sT), \quad m > n-1. \end{aligned} \quad (29.14)$$

Сопоставляя (29.14) с (29.10), получаем

$$z(mT) = A \sum_{s=0}^{m-1} k(sT) = AK^*(0).$$

Отсюда следует, что

в системе с конечной длительностью переходный процесс при постоянном во времени воздействии также устанавливается за $n - 1$ периодов повторения и его установившееся значение пропорционально значению передаточной функции при $p = 0$.

Задачи

29.1. Показать, что в импульсной системе (рис. 29.2) невозможно подобрать параметры системы k и T , при которых осуществлялась бы конечная длительность процесса.

29.2. Показать, что в импульсной системе (рис. 24.5), рассмотренной в задаче 24.1, конечная длительность процесса достигается при выборе коэффициентов усиления равными

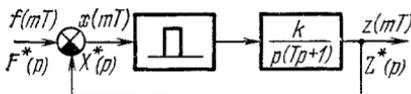


Рис. 29.2.

$$k_1 = \frac{3}{2T},$$

$$k_2 = \frac{1}{T}.$$

29.3. Найти процесс в импульсной системе (рис. 24.5) при выполнении условий конечной длительности, если внешнее воздействие постоянно:

$$f(mT) = \begin{cases} A, & m \geq 0, \\ 0, & m < 0, \end{cases}$$

и линейно:

$$f(mT) = \begin{cases} AmT, & m \geq 0, \\ 0, & m < 0. \end{cases}$$

СИНТЕЗ ИМПУЛЬСНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 30.1. Задача синтеза

Задача синтеза импульсных систем сводится к определению передаточной функции $W_k^*(p)$ или частотной характеристики $W_k^*(j\omega)$ ЦВУ, при которых замкнутая импульсная система обладала бы заранее заданными свойствами. Эти свойства не могут быть произвольными. Они должны быть согласованы с возможностями замкнутых импульсных систем, которые зависят от предъявляемых требований, например, в виде тех или иных критериев оптимальности, и особенностей неизменной части импульсной системы. Поэтому важно выяснить эти возможности для последующего учета при синтезе замкнутых импульсных систем.

Естественно, передаточная функция ЦВУ $W_k^*(p)$ должна быть прежде всего *осуществимой*. Это значит, что реакция ЦВУ на внешнее воздействие не должна предшествовать моменту приложения этого воздействия.

Кроме того, синтезируемая замкнутая система должна быть *грубой*. Под грубой системой подразумевается система, в которой при малых отклонениях параметров элементов системы отклонения величин, характеризующих состояние системы, также малы. Наряду с основными требованиями к синтезируемой замкнутой системе, например оптимальности с точки зрения минимума того или иного критерия, часто необходимо учитывать *дополнительные требования*: конечную длительность процесса, астатизм заданного порядка и т. п. Таким образом, задача синтеза замкнутой импульсной системы сведется к определению передаточной функции $W_k^*(p)$ или частотной характеристики $W_k^*(j\omega)$ ЦВУ, которая должна быть осуществимой и при которой замкнутая система должна быть грубой.

§ 30.2. Условия осуществимости

Рассмотрим импульсную систему с ЦВУ, изображенную на рис. 30.1. Передаточная функция замкнутой системы относительно выходной величины, как известно, равна

$$K^*(p) = \frac{W_k^*(p) W^*(p)}{1 + W_k^*(p) W^*(p)}, \quad (30.1)$$

где $W^*(p)$ — передаточная функция неизменяемой части системы,

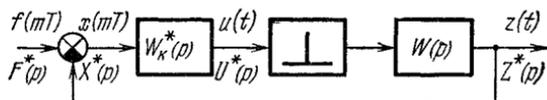


Рис. 30.1.

$W_k^*(p)$ — передаточная функция ЦВУ, определяющая закон управления. Предположим, что мы хотим реализовать некую заданную передаточную функцию

$$K^*(p) = K_s^*(p)$$

путем выбора передаточной функции ЦВУ $W_k^*(p)$. Подставляя в (30.1) $K_s^*(p)$ вместо $K^*(p)$ и разрешая уравнение относительно $W_k^*(p)$, найдем соответствующую передаточную функцию ЦВУ:

$$W_k^*(p) = \frac{1}{W^*(p)} \frac{K_s^*(p)}{1 - K_s^*(p)}. \quad (30.2)$$

Передаточную функцию $W_k^*(p)$ можно реализовать лишь тогда, когда ее порядок неотрицателен, т. е. разность степеней знаменателя и числителя неотрицательна.

Поскольку порядок заданной передаточной функции $K_s^*(p)$ совпадает с порядком дроби $K_s^*(p)/(1 - K_s^*(p))$, то из (30.2) следует, что передаточная функция ЦВУ осуществима лишь тогда, когда порядок заданной передаточной функции не меньше порядка передаточной функции неизменной части, т. е.

$$n_3 \geq n_n.$$

Поскольку передаточная функция неизменной части системы равна

$$W^*(p) = \frac{P^*(p)}{Q^*(p)},$$

то из (30.2) получаем выражение для передаточной функции ЦВУ:

$$W_k^*(p) = \frac{Q^*(p)}{P^*(p)} \frac{K_3^*(p)}{1 - K_3^*(p)}. \quad (30.3)$$

Если неизменная часть импульсной системы содержит элемент запаздывания с временем запаздывания τ , которое для простоты примем кратным периоду повторения:

$$\tau = s_0 T, \quad s_0 = 1, 2, \dots,$$

то передаточная функция неизменной части представится в виде

$$W^*(p) = \frac{P^*(p)}{Q_1^*(p)} e^{-ps_0 T}.$$

В этом случае вместо (30.3) будем иметь

$$W_k^*(p) = \frac{Q_1^*(p) e^{ps_0 T}}{P^*(p)} \frac{K_3^*(p)}{1 - K_3^*(p)}. \quad (30.4)$$

Отсюда видно, что передаточная функция ЦВУ $W_k^*(p)$ должна обеспечить упреждение на s_0 периодов повторения, что физически невозможно. Следовательно, передаточная функция ЦВУ $W_k^*(p)$ (30.4) неосуществима при произвольно заданной передаточной функции $K_3^*(p)$. Каким же условиям должна удовлетворять задаваемая передаточная функция $K_3^*(p)$, чтобы $W_k^*(p)$ была осуществима? Очевидно, условия осуществимости $W_k^*(p)$ сводятся к тому, чтобы $K_3^*(p)$ включала в качестве множителя $e^{-ps_0 T}$, т. е. чтобы

$$K_3^*(p) = K_{13}^*(p) e^{-ps_0 T}. \quad (30.5)$$

Действительно, в этом случае из (30.4) следует

$$W_k^*(p) = \frac{Q_1^*(p)}{P^*(p)} \frac{K_{13}^*(p)}{1 - K_{13}^*(p) e^{-ps_0 T}}.$$

Требование, выражаемое соотношением (30.5), означает, что

если неизменная часть обладает запаздыванием, то по меньшей мере таким же запаздыванием должна обладать и замкнутая синтезируемая импульсная система.

Условия осуществимости предъявляют определенные требования к заданной передаточной функции, а именно:

порядок заданной передаточной функции должен быть не меньше порядка передаточной функции неизменной части.

При наличии же запаздывания в неизменной части передаточная функция должна учитывать это запаздывание.

§ 30.3. Условия грубости

На первый взгляд кажется, что при выполнении условий осуществимости передаточная функция ЦВУ $W_K^*(p)$, полученная по формулам (30.3) или (30.4), обеспечивает получение заданной передаточной функции $K_3^*(p)$. В действительности это не всегда так. Практически обеспечить точное равенство (30.3) или (30.4) невозможно из-за наличия погрешностей, вызванных возникающими вариациями параметров неизменной части. Если при малых погрешностях изменения величин, характеризующих состояние системы, будут также малы, то естественно такую систему назвать *грубой*. Если же при малых погрешностях изменения величин, характеризующих состояние системы, будут с течением времени неограниченно возрастать, то такая система будет *негрубой*. Негрубая система неработоспособна, так как она не может нормально функционировать. Для определения условий грубости замкнутой системы найдем вариацию передаточной функции замкнутой системы. По определению вариации

$$\delta K^*(p) = \frac{\partial K^*(p)}{\partial W_K^*(p)} \delta W_K^*(p).$$

Дифференцируя выражение (30.1) по $W_K^*(p)$, получим

$$\frac{\partial K^*(p)}{\partial W_K^*(p)} = \frac{W^*(p)}{[1 + W_K^*(p) W^*(p)]^2}.$$

Следовательно,

$$\delta K^*(p) = \frac{W^*(p)}{[1 + W_K^*(p) W^*(p)]^2} \delta W_K^*(p). \quad (30.6)$$

После подстановки в (30.6) $W_K^*(p)$ из (30.2) имеем

$$\delta K^*(p) = [1 - K_3^*(p)]^2 W^*(p) \delta W_K^*(p).$$

Вариация $\delta W_K^*(p)$, как видно из (30.3), вызывается вариацией многочленов $P^*(p)$ и $Q^*(p)$, определяющих передаточную функцию неизменной части системы, и она равна

$$\delta W_K^*(p) = \frac{\partial W_K^*(p)}{\partial Q^*(p)} \delta Q^*(p) + \frac{\partial W_K^*(p)}{\partial P^*(p)} \delta P^*(p). \quad (30.7)$$

Но из (30.3) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_K^*(p)}{\partial Q^*(p)} &= \frac{1}{P^*(p)} \frac{K_3^*(p)}{1 - K_3^*(p)}, \\ \frac{\partial W_K^*(p)}{\partial P^*(p)} &= - \frac{Q^*(p)}{[P^*(p)]^2} \frac{K_3^*(p)}{1 - K_3^*(p)}. \end{aligned} \quad (30.8)$$

Подставляя (30.8) в (30.7), получаем

$$\delta W_{\kappa}^*(p) = \frac{K_3^*(p)}{1 - K_3^*(p)} \left\{ \frac{\delta Q^*(p)}{Q^*(p)} - \frac{\delta P^*(p)}{P^*(p)} \right\} \frac{Q^*(p)}{P^*(p)}. \quad (30.9)$$

Заменяя $\delta W_{\kappa}^*(p)$ в выражении для $\delta K^*(p)$ его значением из (30.9), находим окончательное выражение для вариации $\delta K^*(p)$:

$$\delta K^*(p) = K_3^*(p) [1 - K_3^*(p)] \left\{ \frac{\delta Q^*(p)}{Q^*(p)} - \frac{\delta P^*(p)}{P^*(p)} \right\}. \quad (30.10)$$

Вариация $\delta K^*(p)$ характеризует влияние неточностей в реализации передаточной функции $W_{\kappa}^*(p)$, а значит, и $K_3^*(p)$. Если все полюсы и нули передаточной функции $W^*(p)$ неизменной части левые, то, как видно из (30.10), все полюсы вариации будут также левыми, что свидетельствует об устойчивости вариации $\delta k(mT)$, а значит, и об устойчивости замкнутой системы при малых отклонениях параметров от желаемых или оптимальных. Если же передаточная функция неизменной части $W^*(p)$ имеет правые полюсы, т. е. неустойчива, и (или) правые нули, т. е. неминимально-фазовая, то вариация $\delta K^*(p)$, как видно из (30.10), будет иметь правые полюсы, что свидетельствует о неустойчивости $\delta k(mT)$, т. е. о неустойчивости замкнутой импульсной системы, как бы ни малы были отклонения параметров. Это обстоятельство свидетельствует о негрубости замкнутой системы, ибо она становится неустойчивой при сколь угодно малой неточности в реализации передаточной функции ЦВУ $W_{\kappa}^*(p)$. Для того чтобы замкнутая система была грубой, нельзя допускать сокращения правых нулей и полюсов передаточной функции неизменной части системы $W^*(p)$ при помощи передаточной функции ЦВУ $W_{\kappa}^*(p)$. При наличии неточностей такого сокращения и появляется неустойчивость. Таким образом,

условие грубости требует, чтобы передаточная функция ЦВУ $W_{\kappa}^(p)$ не содержала нулей и полюсов, близких к правым полюсам и нулям передаточной функции неизменной части системы $W^*(p)$.*

А для этого, как следует из (30.3), необходимо и достаточно, чтобы заданная передаточная функция $K_3^*(p)$ содержала правые нули $P^*(p)$, т. е. правые нули $W^*(p)$, и $1 - K_3^*(p)$ содержала бы правые нули $Q^*(p)$, т. е. правые полюсы $W^*(p)$. При выполнении этих условий, как видно из выражения для вариации $\delta K^*(p)$, последняя не будет иметь правых полюсов и, следовательно, замкнутая система будет грубой. Если непрерывная часть системы устойчива, то и неизменная часть системы будет также устойчивой, а все полюсы $W^*(p)$ будут левыми. Что же

касается нулей $W^*(p)$, то даже для тех случаев, когда непрерывная часть системы минимально-фазовая, эти нули могут быть как левыми, так и правыми.

Наряду с передаточной функцией замкнутой системы $K^*(p)$ (30.1) относительно выходной величины рассмотрим передаточную функцию замкнутой системы $K_u^*(p)$ относительно управляющего воздействия $U(p)$ (рис. 30.1):

$$K_u^*(p) = \frac{K^*(p)}{W^*(p)},$$

или, после подстановки $W^*(p)$,

$$K_u^*(p) = K^*(p) \frac{Q^*(p)}{P^*(p)}.$$

Отсюда следует, что соответствующая временная характеристика $k_u(mT)$ будет определяться не только полюсами $K_s^*(p)$, но и нулями $W^*(p)$, т. е. нулями многочлена $P^*(p)$ неизменной части системы, что вызывает дополнительные переходные процессы в управляющем воздействии. Для устранения этих дополнительных процессов нужно, чтобы задаваемая передаточная функция $K_s^*(p)$ содержала не только правые нули $P^*(p)$, но и левые нули $P^*(p)$, т. е. $K_s^*(p)$ в этом случае должна содержать все нули $P^*(p)$. Заметим, что при этом в синтезируемой системе возможен процесс конечной длительности. Действительно, как следует из результатов § 29.3, для этого характеристический многочлен $G^*(p)$ должен иметь вид

$$G^*(p) = e^{pnT},$$

так что

$$K^*(p) = \frac{H^*(p)}{G^*(p)} = \frac{H^*(p)}{e^{pnT}}. \quad (30.11)$$

Следовательно,

$$K_u^*(p) = \frac{H^*(p)}{P^*(p)} \frac{Q^*(p)}{e^{pnT}}.$$

Для того чтобы $K_u^*(p)$ имело форму (30.11), нужно, чтобы многочлен $H^*(p)$ включал в себя многочлен $P^*(p)$, или, иначе, нужно, чтобы передаточная функция $K_s^*(p)$ включала в себя многочлен $P^*(p)$. Таким образом,

чтобы синтезируемая импульсная система обладала конечной длительностью процесса, задаваемая передаточная функция должна включать в себя числитель передаточной функции неизменной части системы, а ее знаменатель должен иметь вид одночлена e^{pnT} .

Часто может оказаться нежелательным, чтобы при отклонении параметров ЦВУ от расчетных в системе возникали допол-

нительные переходные процессы, определяемые вариацией временной характеристики $\delta k(mT)$. В этом случае задаваемая передаточная функция синтезируемой системы $K_3^*(p)$, как следует из выражения вариации (30.10), должна содержать все нули $P^*(p)$, а $1 - K_3^*(p)$ — все нули $Q^*(p)$. При этом, разумеется, условия грубости будут заведомо выполняться.

§ 30.4. Основные уравнения синтеза

Уравнения синтеза должны обеспечить синтез осуществимой и работоспособной импульсной системы. Для составления уравнений синтеза представим числитель $P^*(p)$ и знаменатель $Q^*(p)$ передаточной функции $W^*(p)$ неизменной части системы в виде

$$\begin{aligned} P^*(p) &= P_+^*(p) P_-^*(p), \\ Q^*(p) &= Q_+^*(p) Q_-^*(p), \end{aligned} \quad (30.12)$$

где $P_+^*(p)$ и соответственно $Q_+^*(p)$ — многочлены по e^{pT} — включают в себя все n_{P_+} левых нулей и соответственно все n_{Q_+} левых полюсов $W^*(p)$, а $P_-^*(p)$ и соответственно $Q_-^*(p)$ — все n_{P_-} правых нулей и соответственно все n_{Q_-} правых полюсов $W^*(p)$. При наличии в неизменной части системы запаздывания (30.12) заменяется на

$$\begin{aligned} P^*(p) &= P_+^*(p) P_-^*(p), \\ Q_1^*(p) &= Q_{1+}^*(p) Q_{1-}^*(p). \end{aligned}$$

Такое разбиение $P^*(p)$ и $Q^*(p)$ или $Q_1^*(p)$ называется *факторизацией*.

Согласно условиям осуществимости и работоспособности задаваемая передаточная функция синтезируемой системы $K_3^*(p)$ должна содержать в качестве сомножителей член e^{-ps_0T} , соответствующий запаздыванию в неизменной части системы, и $P_-^*(p)$, определяющий правые нули передаточной функции $W^*(p)$ неизменной части системы, а $1 - K_3^*(p)$ должна содержать сомножитель $Q_{1-}^*(p)$, определяющий правые полюсы передаточной функции $W^*(p)$ неизменной части системы. Таким образом, $K_3^*(p)$ и $1 - K_3^*(p)$ осуществимой и грубой системы должны иметь вид

$$K_3^*(p) = P_-^*(p) e^{-ps_0T} \frac{M^*(p)}{G^*(p)} \quad (30.13)$$

и

$$1 - K_3^*(p) = Q_{1-}^*(p) \frac{N^*(p)}{G^*(p)}, \quad (30.14)$$

где $M^*(p)$, $N^*(p)$, $G^*(p)$ — многочлены по e^{pT} степени n_M , n_N и n соответственно, которые при синтезе подлежат выбору. Из условия осуществимости $K_s^*(p)$ (30.13) следует, что

$$n_{P_-} + n_M \leq n + s_0 - 1. \quad (30.15)$$

Кроме того, очевидно из (30.14), что

$$n_{Q_{1-}} + n_N = n. \quad (30.16)$$

Исключая из (30.13) и (30.14) $K_s^*(p)$, получаем *первое полиномиальное уравнение синтеза*:

$$P_-^*(p) M^*(p) + Q_{1-}^*(p) e^{ps_0T} N^*(p) = G^*(p) e^{ps_0T}, \quad (30.17)$$

определяющее многочлены $M^*(p)$ и $N^*(p)$. Если наряду с осуществимостью и грубостью нужно обеспечить устранение дополнительного переходного процесса в управляющем воздействии, то, как было указано в § 30.2, задаваемая передаточная функция $K^*(p)$ должна включать в себя многочлен $P^*(p)$. И значит, вместо (30.13) должно иметь место равенство

$$K_s^*(p) = P^*(p) e^{-ps_0T} \frac{M_1^*(p)}{G^*(p)} \quad (30.18)$$

и по-прежнему

$$1 - K_s^*(p) = Q_{1-}^*(p) \frac{N^*(p)}{G^*(p)}. \quad (30.19)$$

Из условия осуществимости (30.18) следует

$$n_P + n_{M_1} \leq n + s_0 - 1, \quad (30.20)$$

и для (30.19) по-прежнему

$$n_{Q_{1-}} + n_N = n. \quad (30.21)$$

Исключая из (30.18) и (30.19) $K_s^*(p)$, получаем *второе полиномиальное уравнение синтеза*:

$$P^*(p) M_1^*(p) + Q_{1-}^*(p) e^{ps_0T} N^*(p) = G^*(p) e^{ps_0T}. \quad (30.22)$$

Если нужно устранить также дополнительные переходные процессы, вызванные вариацией параметров неизменной части, т. е. как вариацией числителя, так и вариацией знаменателя передаточной функции неизменной части, то задаваемая передаточная функция $K_s^*(p)$ должна содержать в качестве сомножителей все нули $W^*(p)$, т. е. многочлен $P^*(p)$, а $1 - K_s^*(p)$ — все полюсы $W^*(p)$, т. е. многочлен $Q^*(p)$. В этом случае, как и для (30.18),

будем иметь

$$K_3^*(p) = P^*(p) e^{-ps_0T} \frac{M_1^*(p)}{G^*(p)}, \quad (30.23)$$

а вместо (30.19)

$$1 - K_3^*(p) = Q^*(p) \frac{N_1^*(p)}{G^*(p)}. \quad (30.24)$$

Из условий осуществимости следует для (30.23)

$$n_p + n_{M_1} \leq n + s_0 - 1 \quad (30.25)$$

и для (30.24)

$$n_Q + n_{N_1} = n. \quad (30.26)$$

Исключая из (30.23) и (30.24) $K_3^*(p)$, получим *третье полиномиальное уравнение синтеза*:

$$P^*(p) M_1(p) + Q^*(p) e^{ps_0T} N_1(p) = G^*(p) e^{ps_0T}. \quad (30.27)$$

Наконец, когда к импульсной системе предъявляются еще и требования нулевой вынужденной ошибки, как следует из результатов § 26.4, $1 - K_3^*(p)$ должна содержать в качестве множителя $(e^{pT} - 1)^{s_a}$, где $s_a = v_0$ — индекс астатизма. Это будет заведомо иметь место, если

$$Q^*(p) = Q_{v_0}^*(p) (e^{pT} - 1)^{v_0}.$$

Тогда

$$1 - K_3^*(p) = Q_{v_0}^*(p) (e^{pT} - 1)^{v_0} \frac{N_1^*(p)}{G^*(p)}.$$

Если же

$$Q^*(p) = Q_{v_1}^*(p) (e^{pT} - 1)^{v_1},$$

где $v_1 < v_0$, то тогда для обеспечения астатизма v_0 -го порядка нужно, чтобы

$$1 - K_3^*(p) = Q^*(p) (e^{pT} - 1)^{v_0 - v_1} \frac{N_2^*(p)}{G^*(p)}. \quad (30.28)$$

Полагая в (30.24)

$$N_1^*(p) = (e^{pT} - 1)^{v_0 - v_1} N_2^*(p),$$

получаем *четвертое полиномиальное уравнение синтеза* системы с нулевой вынужденной ошибкой:

$$P^*(p) M_1^*(p) + Q^*(p) e^{ps_0T} (e^{pT} - 1)^{v_0 - v_1} N_2^*(p) = G^*(p) e^{ps_0T}. \quad (30.29)$$

При этом по-прежнему

$$n_p + n_{M_1} \leq n + s_0 - 1, \quad (30.30)$$

а из (30.28) теперь следует, что

$$n_Q + v_0 - v_1 + n_{N_1} = n. \quad (30.31)$$

Очевидно, если положить во втором (30.22), третьем (30.27) и четвертом (30.29) полиномиальных уравнениях

$$G^*(p) = e^{pnT},$$

то мы приходим к полиномиальным уравнениям, определяющим системы с конечной длительностью процесса при отсутствии дополнительных переходных процессов. Вынужденная ошибка в этих системах равна нулю.

Уравнения синтеза (30.17), (30.22), (30.27) и (30.29) определяют неизвестные многочлены $M^*(p)$, $N^*(p)$, $N_1^*(p)$ и $M_1^*(p)$, $N^*(p)$. Для разрешимости уравнений синтеза нужно, чтобы число уравнений, получаемых из уравнений синтеза относительно коэффициентов искомого многочлена, было бы не меньше числа этих коэффициентов. Число уравнений равно степени многочлена $G^*(p) = e^{ps_0T}$, увеличенной на единицу, т. е. $n + s_0 + 1$. Число коэффициентов многочленов $M^*(p)$, $N^*(p)$ равно их степени, увеличенной на единицу, т. е. $n_M + 1$, $n_N + 1$. Следовательно, условия разрешимости первого уравнения синтеза (30.17) запишутся в виде

$$n + s_0 + 1 \leq (n_M + 1) + (n_N + 1) = n_M + n_N + 2,$$

или

$$n + s_0 \leq n_M + n_N + 1. \quad (30.32)$$

Отсюда нетрудно определить степени многочленов $M^*(p)$, $N^*(p)$. Подставив в (30.32) значения n из (30.15) и (30.16), получим

$$n + s_0 < n_{P_-} + n_M \leq n_N + 1$$

и

$$n_{Q_{1-}} + n_N + s_0 \leq n_M + n_N + 1,$$

откуда следует

$$n_M \geq n_{P_-}, \quad n_N \geq n_{Q_{1-}} + s_0 - 1.$$

Условия разрешимости второго уравнения синтеза (30.22) получаются из (30.32) заменой n_M на n_{M_1} :

$$n + s_0 \leq n_{M_1} + n_N + 1. \quad (30.33)$$

Подставляя в (30.33) n из (30.20) и (30.21), получим

$$n_{M_1} \geq n_P, \quad n_{N_1} \geq n_{Q_{1-}} + s_0 - 1.$$

Условия разрешимости третьего полиномиального уравнения синтеза (30.27) получаются из (30.33) заменой n_N на n_{N_1} :

$$n + s_0 \leq n_{M_1} + n_{N_1} + 1. \quad (30.34)$$

Подставляя в (30.34) n из (30.25) и (30.26), получим

$$n_{M_1} \geq n_p, \quad n_{N_1} \geq n_{Q_{1-}} + s_0 - 1.$$

Наконец, условия разрешимости четвертого уравнения синтеза (30.29) получаются из (30.32) заменой n_M на n_{M_1} и n_N на n_{N_2} :

$$n + s_0 \leq n_{M_1} + n_{N_2} + 1. \quad (30.35)$$

Подставляя в (30.35) n из (30.30) и (30.31), получим

$$n_{M_1} \geq n_p, \quad n_{N_2} \geq n_{Q_{1-}} + v_0 + s_0 - 1.$$

Определяя тем или иным путем многочлены $M^*(p)$, $N^*(p)$, находим $K_3^*(p)$ и $1 - K_3^*(p)$. Используя эти выражения, получаем передаточные функции ЦВУ:

$$а) \quad W_K^*(p) = \frac{Q_+^*(p) M^*(p)}{P_+^*(p) N^*(p)}, \quad (30.36)$$

обеспечивающие условия осуществимости и грубости;

$$б) \quad W_K^*(p) = \frac{Q_{1+}^*(p) M_1^*(p)}{N^*(p)}, \quad (30.37)$$

обеспечивающие еще устранение дополнительных переходных процессов;

$$в) \quad W_K^*(p) = \frac{M_1^*(p)}{N_1^*(p)}, \quad (30.38)$$

обеспечивающие еще и устранение дополнительных переходных процессов, вызванных вариацией неизменной части;

$$г) \quad W_K^*(p) = \frac{M_1^*(p)}{(e^{pT} - 1)^{v_0} N_2^*(p)}, \quad (30.39)$$

обеспечивающие еще и нулевую вынужденную ошибку.

Ответим, что при выборе в уравнениях синтеза $G^*(p) = e^{pnT}$ передаточные функции $W_K^*(p)$ (30.36) — (30.39) позволяют осуществить в синтезируемых системах процессы конечной длительности.

§ 30.5. Компенсация влияния запаздывания

Рассмотрим систему управления, в которой неизменная часть обладает запаздыванием $\tau = s_0 T$. Структура этой системы

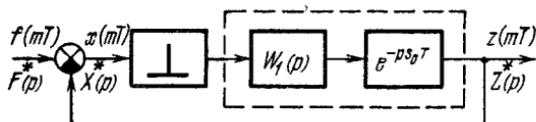


Рис. 30.2.

изображена на рис. 30.2. Передаточная функция такой системы имеет вид

$$K^*(p) = \frac{W_1^*(p) e^{-ps_0 T}}{1 + W_1^*(p) e^{-ps_0 T}},$$

или, так как

$$W_1^*(p) = \frac{P_1^*(p)}{Q^*(p)},$$

то

$$K^*(p) = \frac{P_1^*(p) e^{-ps_0 T}}{Q^*(p) + P_1^*(p) e^{-ps_0 T}}. \quad (30.40)$$

Характеристический многочлен системы равен

$$G^*(p) = Q^*(p) + P_1^*(p) e^{-ps_0 T}. \quad (30.41)$$

Наличие запаздывания часто приводит к неустойчивости либо к таким процессам, которые не позволяют системе выполнить свое назначение.

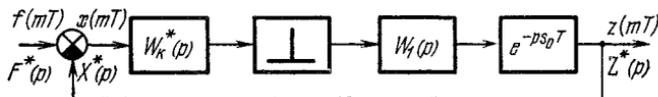


Рис. 30.3.

Введем в систему ЦВУ (рис. 30.3). Обозначим передаточную функцию ЦВУ через $W_k^*(p)$. Тогда передаточная функция замкнутой системы с ЦВУ будет равна

$$K^*(p) = \frac{W_k^*(p) W_1^*(p) e^{-ps_0 T}}{1 + W_k^*(p) W_1^*(p) e^{-ps_0 T}}. \quad (30.42)$$

Попытаемся найти такую $W_k^*(p)$, чтобы устранить влияние запаздывания на процессы в системе. Предположим, что неизменная

часть системы устойчива. Это значит, что все полюсы $W_1^*(p)$ — левые, т. е.

$$Q_{1-}^*(p) \equiv 1.$$

Влияние запаздывания на динамические процессы будет устранено, скомпенсировано, если характеристический многочлен $G^*(p)$ не будет от него зависеть, т. е. если $G^*(p)$, вместо (30.41), будет выражаться так

$$G^*(p) = Q_1^*(p) + P^*(p). \quad (30.43)$$

При этом задаваемая передаточная функция будет иметь вид

$$K_3^*(p) = \frac{P^*(p) M^*(p)}{Q_1^*(p) + P^*(p)}.$$

Воспользуемся теперь вторым полиномиальным уравнением (30.22):

$$P^*(p) M_1^*(p) + e^{ps_0T} N^*(p) = [Q_1^*(p) + P^*(p)] e^{ps_0T}, \quad (30.44)$$

или, после умножения на e^{-ps_0T} ,

$$P^*(p) e^{-ps_0T} M_1^*(p) + N^*(p) = Q_1^*(p) + P^*(p).$$

Отсюда находим многочлены наименьшей степени

$$M_1^*(p) \equiv 1$$

и, значит,

$$N^*(p) = Q_1^*(p) + P^*(p) [1 - e^{-ps_0T}].$$

Подставляя $M_1^*(p)$ и $N^*(p)$ в выражение (30.44) и учитывая, что в нашем случае

$$Q_{1+}^*(p) = Q_1^*(p),$$

получим выражение для передаточной функции ЦВУ:

$$W_k^*(p) = \frac{Q_1^*(p)}{Q_1^*(p) + P^*(p) [1 - e^{-ps_0T}]}.$$

После деления числителя и знаменателя на $Q_1^*(p)$ получаем

$$W_k^*(p) = \frac{1}{1 + W_1^*(p) [1 - e^{-ps_0T}]}. \quad (30.45)$$

Передаточная функция $W_k^*(p)$ (30.45) реализуется выбором соответствующей программы ЦВУ. Можно $W_k^*(p)$ реализовать согласно (30.45) и несколько иным путем. Замечая, что

$$W_1^*(p) = \mathfrak{D}\{W_1(p)\},$$

охватим импульсный элемент, входящий в систему (рис. 30.4), обратной связью, состоящей из непрерывного элемента с передаточной функцией $W_1(p)$ и параллельного соединения усилительного элемента с единичным усилением и элемента запаздывания

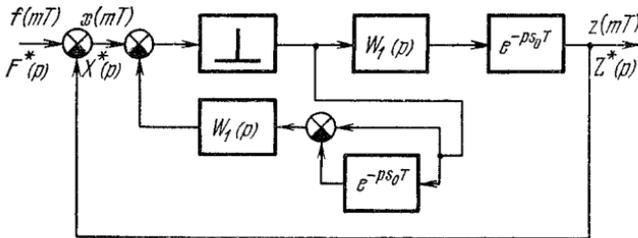


Рис 30.4.

на s_0 тактов. Тогда такое соединение будет обладать передаточной функцией $W_k^*(p)$ (30.45). Найдем передаточную функцию замкнутой системы, в которой скомпенсировано влияние запаздывания. Из (30.42) получаем

$$K_s^*(p) = \frac{P^*(p)}{Q_1^*(p) + P^*(p)} e^{-ps_0T},$$

или, после деления числителя и знаменателя на $Q_1^*(p)$,

$$K_s^*(p) = \frac{W_1^*(p)}{1 + W_1^*(p)} e^{-ps_0T}. \quad (30.46)$$

Этот же результат нетрудно также получить, подставив $W_k^*(p)$ из (30.45) в (30.42). При компенсации влияния запаздывания,

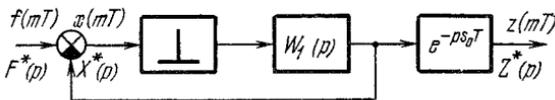


Рис. 30.5.

т. е. при выборе $W_k^*(p)$ согласно (30.45), структурная схема системы (рис. 30.3 или рис. 30.4) становится эквивалентной структурной схеме, изображенной на рис. 30.5. Структурная схема системы содержит в цепи внутренней обратной связи модель разомкнутой системы без запаздывания и модель с запаздыванием. Выходы этих моделей вычитаются друг из друга и тем самым

создают корректирующий сигнал, компенсирующий влияние запаздывания.

Применение ЦВУ с передаточной функцией $W_k^*(p)$ (30.45) приводит как бы к вынесению элемента запаздывания за замкнутый контур.

Иногда целесообразно не полностью, а частично устранять влияние запаздывания. Как мы видели ранее, при наличии

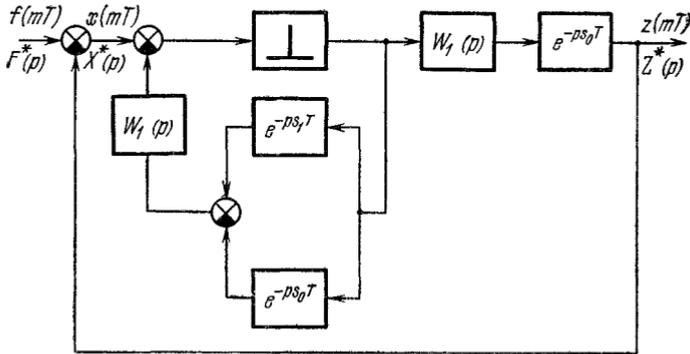


Рис. 30.6.

запаздывания коэффициент усиления может быть увеличен по сравнению со случаем отсутствия запаздывания. Для этой цели достаточно в (30.45) заменить s_0 на $s_1 < s_0$, и тогда вместо (30.46) будем иметь

$$K_s^*(p) = \frac{W_1^*(p) e^{-ps_0 T}}{1 + W_1^*(p) e^{-p(s_1 - s_0) T}}. \quad (30.47)$$

Структурная схема этой системы изображена на рис. 30.6. Здесь заменена лишь модель системы без запаздывания на модель системы с запаздыванием.

§ 30.6. Система с конечной длительностью процесса

Для синтеза импульсной системы с конечной длительностью процесса воспользуемся наиболее общим, вторым полиномиальным уравнением синтеза (30.22). Полагая в нем $G^*(p) = e^{pnT}$, получим

$$P^*(p) M_1^*(p) + Q_{1-}^*(p) e^{ps_0 T} N^*(p) = e^{p(n+s_0) T}. \quad (30.48)$$

Как следует из (30.20) и (30.21), минимальная длительность процесса, возникающего в системе, определяется выражением

$$n = n_p + n_{Q_-} + s_0 - 1. \quad (30.49)$$

Отсюда следует, что $t_{\min} = nT$, т. е.

минимальная длительность процесса в импульсной системе равна произведению периода повторения на сумму числа нулей, правых полюсов неизменной части системы и времени запаздывания.

Пример. Рассмотрим импульсную систему. Пусть передаточная функция $W^*(p)$ ее неизменной импульсной части равна

$$W^*(p) = \frac{P^*(p)}{Q^*(p)} = \frac{1,84(e^{pT} + 0,718)}{(e^{pT} - 1)(e^{pT} - 0,368)}.$$

Здесь

$$P^*(p) = 1,84(e^{pT} + 0,718)$$

и

$$Q_{1-}^*(p) = (e^{pT} - 1), \quad s_0 = 0$$

и, значит, $n = 2$. Поэтому уравнение (30.48) запишется так:

$$1,84(e^{pT} + 0,718)M_1^*(p) + (e^{pT} - 1)N^*(p) = e^{2pT}. \quad (30.50)$$

Многочлены $M_1^*(p)$ и $N^*(p)$ будем искать в виде

$$M_1^*(p) = a_0, \quad N^*(p) = b_1 e^{pT} + b_0. \quad (30.51)$$

Подставляя эти многочлены в (30.50) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях e^{pT} , получаем систему уравнений

$$1,84 \cdot 0,71 a_0 - b_0 = 0,$$

$$1,84 a_0 - b_0 - b_1 = 0,$$

откуда находим

$$a_0 = 0,316, \quad b_0 = 0,418, \quad b_1 = 1.$$

Следовательно,

$$M_1^*(p) = 0,316, \quad N^*(p) = e^{pT} + 0,418.$$

Подставляя значения этих многочленов, а также $Q_{1+}^*(p)$ в соотношение

$$W_k^*(p) = \frac{Q_{1+}^*(p) M_1^*(p)}{N^*(p)},$$

найдем передаточную функцию ЦВУ, реализующего процесс конечной длительности:

$$W_k^*(p) = \frac{0,316(e^{pT} - 0,368)}{e^{pT} + 0,418}.$$

Оптимальная передаточная функция замкнутой системы найдется по формуле (30.23) при $s = 0$ и $G^*(p) = e^{2pT}$:

$$K^*(p) = P^*(p) \frac{N_1^*(p)}{e^{2pT}}.$$

Подставляя сюда значения $P^*(p)$ и $N_1^*(p)$, получим

$$K^*(p) = \frac{0,582(e^{pT} + 0,718)}{e^{2pT}},$$

или

$$K^*(p) = 0,582e^{-pT} + 0,418e^{-2pT}.$$

Временная характеристика при этом равна

$$k(mT) = \begin{cases} 0, & m = 0, \\ 0,582, & m = 1, \\ 1, & m = 2, \\ 0, & m > 2, \end{cases}$$

что свидетельствует о конечной длительности процесса.

Задачи

30.1. Показать, что при частичной компенсации запаздывания в импульсной системе (рис. 30.2) передаточная функция ЦВУ имеет вид

$$W_K^*(p) = \frac{1}{1 + W_1^*(p) [e^{-ps_1T} - e^{-ps_2T}]}$$

30.2. Показать, что передаточная функция ЦВУ, осуществляющего конечную длительность процесса в системе (рис. 30.7), равна $W_K^*(p) =$

$$= \frac{1}{kT(1 - e^{-T/T_1})} \frac{e^{pT} - e^{-T/T_1}}{e^{pT} - \alpha}, \text{ где } \alpha = \frac{T e^{-T/T_1} - T(1 - e^{-T/T_1})}{T(1 - e^{-T/T_1})}.$$

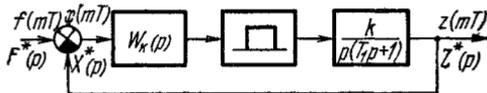


Рис. 30.7.

30.3. Показать, что в системе, рассмотренной в задаче 25.3, передаточная функция ЦВУ, реализующая конечную длительность процесса $l = 2$, равна

$$W_K^*(p) = \frac{1}{1 - e^{-T/T_1}} \frac{1 - e^{-T/T_1} e^{-pT}}{1 + \alpha_1 e^{-pT}}, \text{ где } \alpha_1 = \frac{1 + \frac{T}{T_1} - e^{-T/T_1}}{e^{T/T_1} - 1}.$$

Предложить возможные реализации передаточной функции ЦВУ.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 31.1. Показатели качества

Как и для непрерывных систем, вводя отклонение ошибки системы $x(mT)$ от установившейся ошибки $x^B(mT)$:

$$\varepsilon(mT) = x(mT) - x^B(mT), \quad (31.1)$$

можно сформировать различные типы показателей качества.

Максимальное отклонение:

$$I = \max_m |\varepsilon(mT)|, \quad 0 \leq m < \infty. \quad (31.2)$$

Суммарное абсолютное отклонение:

$$I = \sum_{m=0}^{\infty} |\varepsilon(mT)|. \quad (31.3)$$

Суммарное квадратическое отклонение:

$$I = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^2(mT). \quad (31.4)$$

Для оптимальных импульсных систем показатели должны достигать минимального значения. Часто при оптимизации импульсных систем необходимо принимать во внимание различные ограничения:

$$|\varepsilon(mT)| \leq a \quad (31.5)$$

и

$$|\Delta\varepsilon((m-1)T)| = |\varepsilon(mT) - \varepsilon((m-1)T)| \leq b \quad (31.6)$$

или

$$\sum_{m=0}^{\infty} [(\Delta\varepsilon((m-1)T))]^2 \leq c. \quad (31.7)$$

Иногда целесообразно использовать обобщенные показатели качества, например:

$$I = \sum_{m=0}^{\infty} \{ \varepsilon^2(mT) + \tau_1^2 [\Delta \varepsilon((m-1)T)]^2 \}. \quad (31.8)$$

Этот функционал в некотором смысле эквивалентен минимизации критерия (31.4) при ограничении типа (31.6).

§ 31.2. Квадратическое суммарное отклонение

Для устойчивой импульсной системы показатель качества — суммарное квадратическое отклонение

$$I = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^2(mT) \quad (31.9)$$

— существует и конечен. Выразим I через спектральные функции. Для этого воспользуемся соотношением

$$\varepsilon(mT) = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} E^*(j\omega) e^{j\omega mT} d\omega. \quad (31.10)$$

Умножая (31.10) на $\varepsilon(mT)$ и суммируя обе части по m от 0 до ∞ , получим после изменения очередности интегрирования и суммирования

$$I = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^2(mT) = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} E^*(j\omega) \left[\sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon(mT) e^{j\omega mT} \right] d\omega. \quad (31.11)$$

Но

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon(mT) e^{j\omega mT} = E^*(-j\omega). \quad (31.12)$$

Поэтому из (31.11) получаем

$$I = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^2(mT) = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} |E^*(j\omega)|^2 d\omega. \quad (31.13)$$

Соотношение (31.13) устанавливает соответствие между энергией отклонения ошибки от установившейся ошибки и площадью квадрата модуля спектра. Это соотношение называется *формулой Парсеваля*. Оно является дискретным аналогом формулы Парсеваля (13.10). Введем понятие энергетической спектральной функции

$$S_{\varepsilon}^*(\omega) = |E^*(j\omega)|^2. \quad (31.14)$$

Тогда (31.13) можно представить в виде

$$I = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} S_{\text{эс}}^*(\omega) d\omega, \quad (31.15)$$

т. е.

суммарное квадратическое отклонение равно площади энергетической спектральной функции, поделенной на частоту повторения.

Представим изображение отклонения $E^*(p)$ в виде дробной функции от e^{pT} :

$$E^*(p) = \frac{N_e^*(p)}{M_e^*(p)} = \frac{g_0 + g_1 e^{pT} + g_2 e^{2pT} + \dots + g_{s-1} e^{(s-1)pT} + g_s e^{spT}}{d_0 + d_1 e^{pT} + d_2 e^{2pT} + \dots + d_s e^{spT}}. \quad (31.16)$$

Тогда энергетическая спектральная функция представится в виде

$$S_{\text{эс}}(j\omega) = \left| \frac{N_e^*(j\omega)}{M_e^*(j\omega)} \right|^2 \quad (31.17)$$

и, следовательно, показатель оптимальности (31.15) запишется в виде

$$I = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \left| \frac{N_e^*(j\omega)}{M_e^*(j\omega)} \right|^2 d\omega. \quad (31.18)$$

Этот интеграл вычисляется на основе методов теории функций комплексного переменного и выражается непосредственно через коэффициенты $E^*(p)$ (31.16). Приведем окончательные результаты:

$$I = \frac{\Delta'_{s+1}}{d_s \Delta_{s+1}}, \quad (31.19)$$

где

$$\Delta_{s+1} = \begin{vmatrix} d_s & d_{s-1} & d_{s-2} & \dots & d_{s-j} & \dots & d_0 \\ d_{s-1} & d_{s-2} + d_s & d_{s-3} & \dots & d_{s-j-1} & \dots & 0 \\ d_{s-2} & d_{s-3} + d_{s-1} & d_{s-4} + d_s & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_i & \dots & \dots & \dots & d_{i-j} - d_{i+j} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 & d_0 + d_2 & d_3 & \dots & d_{1+j} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_0 & d_1 & d_2 & \dots & d_j & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (31.20)$$

Таблица 31.1

s	$\frac{N_g^*(p)}{M_g^*(p)}$	I
s = 1	$\frac{g_0}{d_0 + d_1 e^{pT}}$	$\frac{g_0^2}{d_1^2 - d_0^2}$
s = 2	$\frac{g_0 + g_1 e^{pT}}{d_0 + d_1 e^{pT} + d_2 e^{2pT}}$	$\frac{(g_0^2 + g_1^2) d_2 (d_0 + d_2) - 2g_0 g_1 d_2 d_1}{d_2 [(d_2^2 - d_0^2) (d_0 + d_2) - (d_1 d_2 - d_0 d_1) d_1]}$
s = 3	$\frac{g_0 + g_1 e^{pT} + g_2 e^{2pT}}{d_0 + d_1 e^{pT} + d_2 e^{2pT} + d_3 e^{3pT}}$	$\frac{B_0 Q_0 - B_1 Q_1 + B_2 Q_2}{(d_3^2 - d_0^2) Q_0 - (d_3 d_2 - d_0 d_1) Q_1 + (d_3 d_1 - d_0 d_2) Q_2},$ $B_0 = g_0^2 + g_1^2 + g_2^2, \quad B_1 = 2(g_1 g_2 + g_0 g_1), \quad B_2 = 2g_0 g_2,$ $Q_0 = d_3(d_3 + d_1) - d_0(d_2 + d_0), \quad Q_1 = d_3 d_2 - d_1 d_0,$ $Q_2 = d_2(d_2 + d_0) - d_1(d_3 + d_1),$ $Q_3 = (d_2 - d_0)(d_0 + d_1 + d_2 + d_3)(d_2 + d_0 - d_1 - d_3) +$ $+ d_3 [d_3(d_0 + d_2) - d_0(d_1 + d_3)]$

— определитель Мизеса для уравнения

$$M_g^*(p) = 0, \quad (31.21)$$

а Δ'_{s+1} — определитель, получающийся из Δ_{s+1} заменой первой строки на

$$\left(\sum_{i=0}^s g_i, 2 \sum_{i=0}^{s-1} g_i g_{i+1}, \dots, 2(g_0 g_{s-1} + g_1 g_s), 2g_0 g_s \right). \quad (31.22)$$

Выражения I для $g_s = 0$ и $s = 1, 2, 3$ приведены в табл. 31.1. Чем меньше при данных значениях параметров неизменной части величина I , тем выше качество импульсной системы.

§ 31.3. Оптимальные параметры систем

В общем случае показатель оптимальности I является функцией неких конкретных параметров системы. Обозначим их через c_ν , $\nu = 1, 2, \dots, N$. Тогда

$$I = I(c_1, \dots, c_N). \quad (31.23)$$

Оптимальные параметры соответствуют таким значениям $c_\nu = c_\nu^*$, при которых I достигает минимума. Предположим, что минимум I существует и он единственный. Часто это предположение вытекает из физических соображений. В этом случае условие минимума получается приравниванием частных производных I по c_1, \dots, c_N нулю, т. е.

$$\frac{\partial I(c_1, \dots, c_N)}{\partial c_\nu} = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, N. \quad (31.24)$$

Вводя обозначение градиента

$$\nabla I(c) = \text{grad } I = \left(\frac{\partial I(c)}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial I(c)}{\partial c_N} \right), \quad (31.25)$$

условие (31.24) можно записать в векторной форме:

$$\nabla I(c) = 0, \quad (31.26)$$

где $c = (c_1, c_2, \dots, c_N)$ — вектор параметров. Решение уравнения (31.26) и определяет оптимальные параметры системы.

§ 31.4. Оптимальные характеристики

Найдем оптимальную характеристику ЦВУ $W_k^*(p)$, определяющую закон управления, при котором достигается минимум показателя качества вида

$$I = \sum_{m=0}^{\infty} [e_x^2(mT) + \lambda^2 e_u^2(mT)], \quad (31.27)$$

где

$$e_x(mT) = x(mT) - x^b(mT) \quad (31.28)$$

— отклонение ошибки от вынужденной и

$$\epsilon_u(mT) = u(mT) - u^B(mT) \quad (31.29)$$

— отклонение управления от вынужденного. Будем предполагать, что неизменная часть устойчива или нейтральна. Согласно формуле Парсеваля (31.13) имеем

$$\begin{aligned} I &= \sum_{m=0}^{\infty} [\epsilon_v^2(mT) + \lambda^2 \epsilon_u^2(mT)] = \\ &= \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \{ |E_x^*(j\omega)|^2 + \lambda^2 |E_u^*(j\omega)|^2 \} d\omega, \quad (31.30) \end{aligned}$$

где $E_x^*(j\omega)$ и $E_u^*(j\omega)$ — спектры отклонений ошибки и управляющего воздействия. Предположим для простоты, что как вынужденная ошибка $x^B(mT)$, так и вынужденное управление равны нулю:

$$x^B(mT) = u^B(mT) = 0. \quad (31.31)$$

Тогда

$$\epsilon_x(mT) = x(mT), \quad \epsilon_u(mT) = u(mT).$$

Поэтому вместо (31.30) получаем

$$\begin{aligned} I &= \sum_{m=0}^{\infty} [x^2(mT) + \lambda^2 u^2(mT)] = \\ &= \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \{ |X^*(j\omega)|^2 + \lambda^2 |U^*(j\omega)|^2 \} d\omega, \quad (31.32) \end{aligned}$$

где $X^*(j\omega)$ и $U^*(j\omega)$ — спектры ошибки и управляющего воздействия. Но согласно структуре системы

$$X^*(j\omega) = [1 - K^*(j\omega)] F^*(j\omega) \quad (31.33)$$

и

$$U^*(j\omega) = \frac{Z^*(j\omega)}{W^*(j\omega)} = K^*(j\omega) \frac{F^*(j\omega)}{W^*(j\omega)}. \quad (31.34)$$

Поэтому (31.32) можно представить в виде

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \left\{ |1 - K^*(j\omega)|^2 |F^*(j\omega)|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \lambda^2 |K^*(j\omega)|^2 \left| \frac{F^*(j\omega)}{W^*(j\omega)} \right|^2 \right\} d\omega. \quad (31.35) \end{aligned}$$

Вводя обозначения энергетических спектров внешнего воздействия

$$S_{эф}^*(\omega) = |F^*(j\omega)|^2 \quad (31.36)$$

и приведенного управляющего воздействия

$$S_{эи}^*(\omega) = \lambda^2 \left| \frac{F^*(j\omega)}{W^*(j\omega)} \right|^2, \quad (31.37)$$

запишем показатель оптимальности окончательно в виде

$$I = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \{ |1 - K^*(j\omega)|^2 S_{эф}^*(\omega) + |K^*(j\omega)|^2 S_{эи}^*(\omega) \} d\omega. \quad (31.38)$$

Если в (31.38) подставить значения энергетических спектров (31.36), (31.37), то мы придем к выражению (31.18), которое было использовано для определения оптимальных параметров.

Для получения реализуемой характеристики можно было бы поступить аналогично тому, как это было сделано в гл. 13 для непрерывных систем. Однако такой подход не обеспечивает некоторых дополнительных условий работоспособности импульсной системы. Поэтому изложим иной путь, который позволяет эти условия учесть.

Чтобы удовлетворить условию (31.31), предположим, что знаменатель изображения входного воздействия $B^*(p)$ содержится в знаменателе передаточной функции объекта $Q^*(p)$, т. е.

$$Q^*(p) = B^*(p) \cdot Q_1^*(p). \quad (31.39)$$

Воспользуемся теперь соотношениями для допустимой передаточной функции (30.18), (30.19), положив в них $s_0 = 0$, $Q_{1-}^*(p) = 1$ и дополнив последнее требованием нулевой вынужденной ошибки (31.31) при отслеживании воздействия с изображением $F^*(p) = \frac{A^*(p)}{B^*(p)}$:

$$K^*(p) = \frac{P^*(p) M_k^*(p)}{G^*(p)}, \quad (31.40)$$

$$1 - K^*(p) = \frac{B^*(p) N_k^*(p)}{G^*(p)}. \quad (31.41)$$

Здесь $P^*(p)$ — числитель передаточной функции объекта, $G^*(p)$ — характеристический многочлен замкнутой системы, $M_k^*(p)$ и $N_k^*(p)$ — неизвестные многочлены, удовлетворяющие полиномиальному уравнению

$$P^*(p) M_k^*(p) + B^*(p) N_k^*(p) = G^*(p). \quad (31.42)$$

В выражении (31.41) сомножитель $B^*(p)$ обобщает введенное ранее в (30.28) требование астатизма ν -го порядка.

Определение оптимальной частотной характеристики $K^*(j\omega)$ сводится к решению вариационной задачи — минимизации I при учете условий работоспособности замкнутой системы. Для этой цели нужно в выражение (31.38) вместо $K^*(j\omega)$ подставить $K_{\text{опт}}^*(j\omega) + \eta \delta K^*(j\omega)$, где η — произвольная постоянная, а $\delta K^*(j\omega)$ — вариация частотной характеристики, взятая в соответствии с (31.40) при $p = j\omega$. Тогда I будет функцией параметра η . Эта функция достигает минимума при $\eta = 0$, т. е. при $K^*(j\omega) = K_{\text{опт}}^*(j\omega)$. Следовательно, при $\eta = 0$

$$\delta I = \left[\frac{\partial I}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} = 0. \quad (31.43)$$

Подставляя сюда выражение I из (31.38), получим условие минимума I в виде

$$\begin{aligned} \delta I = & \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \{K^*(j\omega) S_{su}^*(\omega) - (1 - K^*(j\omega)) S_{sf}^*(\omega)\} \delta K^*(-j\omega) d\omega + \\ & + \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \{K^*(-j\omega) S_{su}^*(\omega) - (1 - K^*(-j\omega)) S_{sf}^*(\omega)\} \delta K^*(j\omega) d\omega = 0, \end{aligned}$$

которое, в силу сопряженности подынтегральных выражений, переписывается в виде

$$\delta I = \frac{2}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \{K^*(j\omega) S_{su}^*(\omega) - (1 - K^*(j\omega)) S_{sf}^*(\omega)\} \delta K^*(-j\omega) d\omega = 0. \quad (31.44)$$

Вводя обозначение

$$S_{\circ}^*(\omega) = S_{sf}^*(\omega) + S_{su}^*(\omega), \quad (31.45)$$

из (31.44) получаем

$$\frac{2}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \{K^*(j\omega) S_{\circ}^*(\omega) - S_{sf}^*(\omega)\} \delta K^*(-j\omega) d\omega = 0. \quad (31.46)$$

Запишем интеграл (31.46) через переменную $p = j\omega$, учтя, что

$$S_{sf}^*(\omega) = [F^*(p) F^*(-p)]_{p=j\omega}, \quad (31.47)$$

$$S_{su}^*(\omega) = \left[\lambda^2 \frac{F^*(p) F^*(-p)}{W^*(p) W^*(-p)} \right]_{p=j\omega},$$

$$S_{\circ}^*(\omega) = \left[\frac{G_1^*(p) G_1^*(-p)}{P^*(p) P^*(-p)} F^*(p) F^*(-p) \right]_{p=j\omega}, \quad (31.48)$$

где $G_1^*(p)$ определяется уравнением

$$G_1^*(p) G_1^*(-p) = P^*(p) P^*(-p) + \lambda^2 Q^*(p) Q^*(-p). \quad (31.49)$$

Поскольку в подынтегральном выражении (31.46) степень числителя ниже степени знаменателя, то интегрирование по прямой от $-j \frac{\omega_0}{2}$ до $+j \frac{\omega_0}{2}$ на плоскости p можно заменить интегрированием по контуру L , охватывающему левую полуплоску:

$$\frac{2}{j\omega_0} \oint_L \left\{ K^*(p) \frac{G_1^*(p) G_1^*(-p)}{P^*(p) P^*(-p)} - 1 \right\} F^*(p) F^*(-p) \delta K^*(-p) dp = 0. \quad (31.50)$$

Интеграл (31.50) равен нулю, если его подынтегральное выражение не содержит левых полюсов. Это условие определяет выбор оптимальной передаточной функции $K^*(p)$.

Учитывая (31.40), подынтегральное выражение из (31.50) можно переписать в виде

$$\Lambda^*(p) = \frac{P^*(p) M^*(p) G_1^*(p) G_1^*(-p) - G^*(p) P^*(p) P^*(-p)}{G^*(p) P^*(p) P^*(-p)} \times \\ \times \frac{A^*(p) A^*(-p)}{B^*(p) B^*(-p)} \delta K^*(-p). \quad (31.51)$$

Выражение (31.51) позволяет просто найти характеристический многочлен $G^*(p)$ замкнутой оптимальной системы. При этом потребуем, чтобы характеристический многочлен $G^*(p)$ не зависел от вида числителя $A^*(p)$ изображения входного воздействия. Другими словами, свойства замкнутой системы не должны зависеть от начальных условий входного воздействия, т. е. система будет оптимальной не для воздействия данного вида, а для класса воздействий, характеризующихся одинаковыми знаменателями их изображений. Это требование означает запрет на сокращение в (31.51) числителя $A^*(p)$ изображения входного воздействия с сомножителями многочлена $G^*(p)$. Если такого требования не наложить, то замкнутая система может даже не оказаться устойчивой. Так, для сигнала, растущего с постоянным ускорением, замкнутая система в этом случае получилась бы на границе устойчивости, поскольку $F^*(p) = \frac{T^2 e^{pT} (e^{pT} + 1)}{2(e^{pT} - 1)^3}$ и характеристический многочлен приобретает сомножитель $(e^{pT} + 1)$.

Конечно, указанное ограничение, обеспечивающее работоспособность системы, вместе с ограничениями (31.40), (31.41) увеличивает наименьшее значение функционала I по сравнению со

случаем, когда эти ограничения отсутствуют. Покажем теперь, что если выбрать

$$G^*(p) = G_1^*(p), \quad (31.52)$$

где $G_1^*(p)$ определяется уравнением (31.49), то все полюсы выражения (31.51) будут правыми. Для этого, используя замену $S_{zf}^*(\omega) = S_s^*(\omega) - S_{zu}^*(\omega)$, перепишем подынтегральное выражение из (31.46) в ином виде, содержащем $1 - K^*(j\omega)$:

$$\Lambda^*(j\omega) = \{S_{zu}^*(\omega) - (1 - K^*(j\omega)) S_{zf}^*(\omega)\} \delta K^*(-j\omega).$$

Полагая здесь $j\omega = p$, принимая во внимание (31.47) и замечая, что

$$1 - K^*(p) = \frac{B^*(p) N^*(p)}{G^*(p)},$$

получим

$$\begin{aligned} \Lambda^*(p) &= \frac{\lambda^2 Q^*(p) Q^*(-p) G^*(p) - B^*(p) N^*(p) G_1^*(p) G_1^*(-p)}{G^*(p) P^*(p) P^*(-p)} \times \\ &\quad \times \frac{A^*(p) A^*(-p)}{B^*(p) B^*(-p)} \delta K^*(-p) = \\ &= \frac{G_1^*(p) B^*(p) (\lambda^2 Q_1^*(p) Q^*(-p) - N^*(p) G_1^*(-p))}{G_1^*(p) P^*(p) P^*(-p)} \times \\ &\quad \times \frac{A^*(p) A^*(-p)}{B^*(p) B^*(-p)} \delta K^*(-p). \quad (31.53) \end{aligned}$$

В последнем преобразовании использованы условия (31.39), (31.52). Приравнявая числители выражений (31.51) и (31.53) при $G^*(p) = G_1^*(p)$, получаем, что числитель (31.51) представим в виде произведения четырех сомножителей

$$\begin{aligned} P^*(p) G_1^*(p) (M_k^*(p) G_1^*(-p) - P^*(-p)) &= \\ = B^*(p) G_1^*(p) (\lambda^2 Q_1^*(p) Q^*(-p) - N^*(p) G_1^*(-p)) &= \\ = P^*(p) B^*(p) G_1^*(p) L^*(p), \quad (31.54) \end{aligned}$$

где $L^*(p)$ — некоторый многочлен. При записи последнего равенства предполагалось, что $B^*(p)$ и $P^*(p)$ не имеют общих сомножителей. Если учесть, что при фиксированном $G(p) = G_1(p)$ вариация равна

$$\delta K^*(-p) = \frac{P^*(-p)}{G_1^*(-p)} \delta M_k^*(-p),$$

то убеждаемся, что все полюсы выражения

$$\Lambda^*(p) = \frac{P^*(p) B^*(p) G_1^*(p) L^*(p) A^*(p) A^*(-p)}{G_1^*(p) P^*(p) P^*(-p) B^*(p) B^*(-p)} \delta K^*(-p) = \\ = \frac{L^*(p) A^*(p) A^*(-p)}{B^*(-p) G_1^*(-p)} \delta M_K^*(-p) \quad (31.55)$$

— правые. Это и доказывает оптимальность передаточной функции

$$K_{\text{опт}}^*(p) = \frac{P^*(p) M_K^*(p)}{G_1^*(p)},$$

где $G_1^*(p)$ и $M_K^*(p)$ определяются соответственно уравнениями (31.49) и (31.42) при $G^*(p) = G_1^*(p)$. Оптимальная передаточная функция последовательного управляющего устройства вычисляется обычным образом:

$$W_{\text{опт}}^*(p) = \frac{K_{\text{опт}}^*(p)}{(1 - K_{\text{опт}}^*(p)) W^*(p)} = \frac{Q^*(p) M_K^*(p)}{B^*(p) N_K^*(p)}. \quad (31.56)$$

С учетом (31.39), (31.40) при $p = j\omega$ и (31.46) выражение для минимального значения функционала (31.38) можно представить в виде

$$I_{\text{min}} = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} (|N^*(j\omega)|^2 + \lambda^2 |M^*(j\omega) Q_1(j\omega)|^2) \left| \frac{A^*(j\omega)}{G_1^*(j\omega)} \right|^2 d\omega.$$

Задачи

31.1. Показать, что суммарная квадратическая ошибка импульсной системы

$$I = \sum_{m=0}^{\infty} [f(mT) - z(mT)]^2,$$

передаточная функция которой равна

$$K^*(p) = \frac{kT(1 - e^{-T/T_1}) e^{pT}}{e^{2pT} - [(1 + e^{-T/T_1}) - kT(1 - e^{-T/T_1})] e^{pT} + e^{-T/T_1}},$$

представима в виде

$$I = \frac{4(k_{\text{гп}} - k) + k_{\text{гп}}^2 k}{8(k_{\text{гп}} - k)k},$$

где $k_{\text{гп}} = 2 \operatorname{cth} \frac{T}{2T_1}$.

Исследовать зависимость I от k . Показать, что I достигает минимума при $k = 1 + e^{-T/T_1}$.

31.2. Показать, что суммарная квадратическая ошибка импульсной системы рассмотренной в задаче 25.2, равна

$$I = \frac{2}{(2k_1T - k_2T^2)(2 - k_1T)}$$

при скачкообразном входном воздействии и равна

$$I = \frac{2 - k_1T - 0,5k_2^2T^2}{k_2T^2(2k_1T - k_2T^2)(2 - k_1T)}$$

при линейном входном воздействии.

Исследовать поведение I в плоскости (k_1T, k_2T) . Найти оптимальные параметры k_1 и k_2 для заданного T , при котором I минимально.

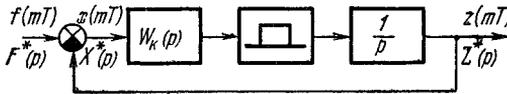


Рис. 31.1.

31.3. Ко входу системы, изображенной на рис. 31.1, приложено единичное воздействие

$$f(mT) = \begin{cases} 1 & \text{при } m \geq 0, \\ 0 & \text{при } m < 0. \end{cases}$$

Показать, что оптимальная передаточная функция корректирующего устройства $W_k(p)$, при которой достигается минимум

$$I_1 = \sum_{m=0}^{\infty} [f(mT) - z(mT)]^2$$

при условии

$$I_2 = \sum_{n=0}^{\infty} u^2(mT) \leq 2,$$

равна

$$W_k^*(p) = \frac{4}{3},$$

т. е. представляет собой усилитель.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

§ 32.1. Статистические характеристики импульсного элемента

Найдем вначале статистические характеристики идеального импульсного элемента (рис. 32.1). Выходная величина идеального импульсного элемента $x^*(t)$ представляет собой модулированную последовательность мгновенных импульсов (см. § 23.3):

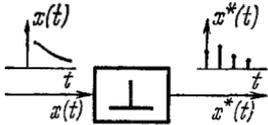


Рис. 32.1

$$x^*(t) = x(t) \delta_T^*(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - mT). \quad (32.1)$$

Среднее значение выходной величины идеального импульсного элемента будет равно

$$m_{x^*} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x^*(t) dt. \quad (32.2)$$

Разобьем интервал интегрирования $(-T_0, T_0)$ на интервалы, равные периоду повторения T , так что $2T_0 = (2N + 1)T$. Тогда m_{x^*} (32.2) можно представить в виде

$$m_{x^*} = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{1}{(2N + 1)T} \sum_{m=-N}^N \int_{(m - \frac{1}{2})T}^{(m + \frac{1}{2})T} x^*(t) dt. \quad (32.3)$$

Но в силу свойств δ -функции

$$\int_{(m - \frac{1}{2})T}^{(m + \frac{1}{2})T} x^*(t) dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{(m - \frac{1}{2})T}^{(m + \frac{1}{2})T} x(t) \delta(t - mT) dt = x(mT). \quad (32.4)$$

Следовательно, среднее значение выходной величины идеального импульсного элемента определяется выражением

$$m_{x^*} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T} \sum_{m=-N}^N x(mT). \quad (32.5)$$

Найдем взаимную корреляционную функцию выходной и входной величин идеального импульсного элемента. Согласно определению

$$R_{x^*x}(\tau) = \mathbf{M} \{x^*(t) x(t + \tau)\}, \quad (32.6)$$

или

$$R_{x^*x}(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x^*(t) x(t + \tau) dt. \quad (32.7)$$

Подставим в правую часть (32.7) $x^*(t)$ из (32.1). Производя преобразования, аналогичные проделанным выше, используя вместо (32.4) равенство

$$\begin{aligned} & \int_{(m-\frac{1}{2})T}^{(m+\frac{1}{2})T} x^*(t) x(t + \tau) dt = \\ & = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{(m-\frac{1}{2})T}^{(m+\frac{1}{2})T} x(t) \delta(t - mT) x(t + \tau) dt = x(mT) x(mT + \tau), \end{aligned} \quad (32.8)$$

получим выражение взаимной корреляционной функции выходной и входной величин идеального импульсного элемента:

$$R_{x^*x}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T} \sum_{m=-N}^N x(mT) x(mT + \tau). \quad (32.9)$$

Для определения взаимной спектральной плотности воспользуемся соотношением (14.32) при $y = x^*$:

$$S_{x^*x}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} R_{x^*x}(\tau) d\tau. \quad (32.10)$$

Запишем $R_{x^*x}(\tau)$ (32.9) в равносильной форме:

$$R_{x^*x}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_N(mT) x_{T_0}(mT + \tau), \quad (32.11)$$

где

$$x_N(mT) = \begin{cases} x(mT) & \text{при } -NT \leq mT \leq NT, \\ 0 & \text{в ином случае} \end{cases} \quad (32.12)$$

и

$$x_{T_0}(mT + \tau) = \begin{cases} x(mT + \tau) & \text{при } -T_0 \leq mT + \tau \leq T_0, \\ 0 & \text{в ином случае.} \end{cases} \quad (32.13)$$

Напомним, что $T_0 = (N + \frac{1}{2})T$. Представляя $R_{x^*x}(\tau)$ (32.11) в (32.10) и изменяя порядок интегрирования и суммирования, получим

$$S_{x^*x}(j\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_N(mT) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} x_{T_0}(mT + \tau) d\tau. \quad (32.14)$$

Производя в интеграле замену переменной $mT + \tau$ на τ , получим

$$S_{x^*x}(j\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T} \sum_{m=-N}^N x_N(mT) e^{j\omega mT} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} x_{T_0}(\tau) d\tau. \quad (32.15)$$

Но

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} x_{T_0}(\tau) d\tau = X_{T_0}(j\omega) \quad (32.16)$$

есть не что иное, как спектральная функция усеченного непрерывного процесса $x_{T_0}(\tau)$, а

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_N(mT) e^{-j\omega mT} = \sum_{m=-N}^N x(mT) e^{-j\omega mT} = X_N^*(j\omega) \quad (32.17)$$

представляет собой спектральную функцию усеченного решетчатого процесса. Следовательно, из (32.15) получим выражение для взаимной спектральной плотности выходной и входной величин идеального импульсного элемента:

$$S_{x^*x}(j\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T} X_N^*(-j\omega) X_{T_0}(j\omega), \quad (32.18)$$

или так как $2T_0 = (2N+1)T$, то

$$S_{x^*x}(j\omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} X_N^*(-j\omega) X_{T_0}(j\omega). \quad (32.19)$$

$S_{x^*x}(j\omega)$ зависит от спектральных функций усеченных решетчатого и непрерывного процессов.

§ 32.2. Корреляционная функция и спектральная плотность решетчатых процессов

Найдем теперь характеристики случайного решетчатого процесса. Полагая во взаимной корреляционной функции $R_{x^*x}(\tau)$ (32.11) аргумент $\tau = sT$, $s = 0, 1, 2, \dots$, получаем

$$R_{x^*x}(sT) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T} \sum_{m=-N}^N x(mT)x((m+s)T). \quad (32.20)$$

Но, как видно из правой части этого выражения, $R_{x^*x}(sT)$ представляет собой корреляционную функцию случайного решетчатого процесса $x(mT)$. Обозначим такую *решетчатую корреляционную функцию* $R_{x_s}(sT)$, где теперь индекс x_s означает не непрерывную, а решетчатую функцию, так что

$$R_{x_s}(sT) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T} \sum_{m=-N}^N x(mT)x((m+s)T) = R_{x^*x}(sT). \quad (32.21)$$

Таким образом, при сдвигах, кратных периоду повторения T , взаимная корреляционная функция выходной и входной величин идеального импульсного элемента $R_{x^*x}(sT)$ совпадает с решетчатой корреляционной функцией $R_{x_s}(sT)$. Решетчатая корреляционная функция $R_{x_s}(sT)$ обладает, естественно, всеми свойствами корреляционных функций (см. § 14.2) и, в частности,

$$R_{x_s}(0) = M\{x^2(mT)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T} \sum_{m=-N}^N x^2(mT). \quad (32.22)$$

Начальное значение решетчатой корреляционной функции равно среднему значению квадрата решетчатого случайного процесса.

Если среднее значение решетчатого случайного процесса $x(mT)$ равно нулю, т. е. $m_{x_s} = 0$, то $R_{x_s}(0)$ (32.22) определяет и дисперсию решетчатого случайного процесса. Далее будем иметь в виду именно этот случай, если не будет специальной оговорки об обратном.

Для нахождения спектральной плотности соответствующей решетчатой корреляционной функции, которую мы обозначим через $S_x^*(\omega)$, нужно (см. § 23.3) взаимную спектральную плотность $S_{x^*x}(j\omega)$ подвергнуть \mathfrak{D} -преобразованию Фурье, т. е.

\mathfrak{D} -преобразованию (23.5) при $p = j\omega$:

$$S_x^*(\omega) = \mathfrak{D}\{S_{x^*x}(j\omega)\} = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_{x^*x}(j(\omega + k\omega_0)). \quad (32.23)$$

Заменим $S_{x^*x}(j\omega)$ ее значением из (32.18), получим

$$S_x^*(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T} \mathfrak{D}\{X_N^*(-j\omega) X_{T_0}(j\omega)\}. \quad (32.24)$$

Но так как $X^*(-j\omega)$ периодически по ω , а (см. § 23.3)

$$\mathfrak{D}\{X_{T_0}(j\omega)\} = X_N^*(j\omega), \quad (32.25)$$

то окончательно из (32.23) следует:

$$S_x^*(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T} X_N^*(-j\omega) X_N^*(j\omega), \quad (32.26)$$

или

$$S_x^*(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T} |X_N^*(j\omega)|^2. \quad (32.27)$$

Спектральная плотность $S_x^*(\omega)$ удовлетворяет тем же свойствам, что и $S_x(\omega)$. Так, если

$$z(mT) = x(mT) + y(mT) \quad (32.28)$$

и $x(mT)$ и $y(mT)$ не коррелированы, то

$$S_z^*(\omega) = S_x^*(\omega) + S_y^*(\omega). \quad (32.29)$$

Взаимная корреляционная функция $R_{x^*x}(\tau)$ выражается через соответствующую спектральную плотность $S_{x^*x}(j\omega)$ с помощью соотношения (14.4) при $y = x^*$:

$$R_{x^*x}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} S_{x^*x}(j\omega) d\omega. \quad (32.30)$$

Полагая $\tau = sT$, получаем согласно (32.21) решетчатую корреляционную функцию

$$R_{x_s}(sT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega sT} S_{x^*x}(j\omega) d\omega. \quad (32.31)$$

Разбивая интервал интегрирования на интервалы, равные частоте повторения $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, будем иметь

$$R_{x_s}(sT) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(2k-1)\frac{\omega_0}{2}}^{(2k+1)\frac{\omega_0}{2}} e^{j\omega sT} S_{x^*x}(j\omega) d\omega. \quad (32.32)$$

Производя в (32.32) замену переменной ω на $\omega + m\omega_0$ и учитывая, что

$$e^{j(\omega+k\omega_0)sT} = e^{j(\omega sT + 2\pi kn)} = e^{j\omega sT},$$

получим

$$R_{x_s}(sT) = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} e^{j\omega sT} \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_{x^*x}(j(\omega + k\omega_0)) \right\} d\omega. \quad (32.33)$$

Но, как видно из (32.33), выражение в фигурных скобках определяет собой \mathfrak{D} -преобразование взаимной спектральной плотности и оно равно спектральной плотности $S_x^*(\omega)$, соответствующей решетчатой функции $x(sT)$. Поэтому окончательно (32.33) представится в виде

$$R_{x_s}(sT) = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} e^{j\omega sT} S_x^*(\omega) d\omega. \quad (32.34)$$

При $s=0$ получаем из (32.34) выражение для среднего значения квадрата решетчатого процесса:

$$R_{x_s}(0) = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} S_x^*(\omega) d\omega. \quad (32.35)$$

Среднее значение квадрата решетчатого процесса пропорционально площади спектральной функции $S_x^*(\omega)$ в основной полосе частот $\left(-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right)$.

Если среднее значение решетчатого процесса равно нулю $m_{x_s} = 0$, то соотношение (32.35) определяет и дисперсию:

$$D_x = R_{x_s}(0) = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} S_x^*(\omega) d\omega. \quad (32.36)$$

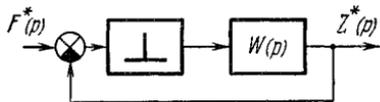
Связь между дискретными корреляционными функциями $R_{x_s}(sT)$ и спектральными плотностями $S_{x_s}^*(\omega)$, устанавливаемая двусторонним дискретным преобразованием Фурье, аналогична связи между дискретными временными и частотными характеристиками, устанавливаемой односторонним преобразованием Фурье.

§ 32.3. Статистические характеристики импульсной системы

Рассмотрим замкнутую импульсную систему (рис. 32.2). Уравнение этой системы относительно изображения непрерывной выходной величины, как было показано в § 24.3, имеет вид

$$Z(p) = \frac{W(p)}{1 + W^*(p)} F^*(p). \quad (32.37)$$

Передаточная функция, определяемая отношением изображения $Z(p)$ непрерывной выходной величины $z(t)$ к изображению $F^*(p)$ решетчатого внешнего воздействия $f(mT)$, устанавливает связь между непрерывной выходной величиной и дискретной входной величиной. Обозначая ее через $K_{\text{дн}}(p)$, получаем из (32.37)



$$K_{\text{дн}}(p) = \frac{Z(p)}{F^*(p)} = \frac{W(p)}{1 + W^*(p)}.$$

Рис. 32.2.

Передаточная функция $K_{\text{дн}}(p)$ зависит как от передаточной функции разомкнутой импульсной системы $W^*(p)$, так и от ее непрерывной части $W(p)$ и, значит, является как функцией e^{pT} , так и p . При $p = j\omega$ получаем частотную характеристику

$$K_{\text{дн}}(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1 + W^*(j\omega)}.$$

Полагая в основных соотношениях (14.13), (14.16) $x = x^*$, получим

$$S_{x^*z}(j\omega) = K(j\omega) S_{x^*}(\omega) \quad (32.38)$$

и

$$S_z(j\omega) = K(-j\omega) S_{x^*z}(j\omega). \quad (32.39)$$

Подвергая (32.38) \mathfrak{D} -преобразованию, будем иметь

$$S_{x^*z}^*(j\omega) = K^*(j\omega) S_{x^*}^*(\omega), \quad (32.40)$$

где

$$K^*(j\omega) = \mathfrak{D} \{K_{\text{дн}}(j\omega)\} = \frac{\mathfrak{D} \{W(j\omega)\}}{1 + W^*(j\omega)} = \frac{W^*(j\omega)}{1 + W^*(j\omega)} \quad (32.41)$$

— передаточная функция импульсной системы, связывающая решетчатые выходную и входную величины. Но из (32.39) следует:

$$S_z(j\omega) = K(-j\omega) S_{x^*z}(j\omega) \quad (32.42)$$

или, после исключения $S_{x^*z}(j\omega)$,

$$S_z(\omega) = K(-j\omega) K^*(j\omega) S_{x^*}(\omega). \quad (32.43)$$

Применяя \mathfrak{D} -преобразование к соотношению (32.43), окончательно получим

$$S_z^*(\omega) = |K^*(j\omega)|^2 S_{x^*}^*(\omega). \tag{32.44}$$

Спектральная плотность решетчатой выходной величины равна спектральной плотности решетчатой входной величины, умноженной на квадрат модуля частотной характеристики импульсной системы $K^(j\omega)$.*

Зная спектральную плотность выходной величины импульсной системы, по формуле, аналогичной (32.36), находим её дисперсию:

$$D_z = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} S_z^*(\omega) d\omega, \tag{32.45}$$

или, учитывая (32.44),

$$D_z = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} |K^*(j\omega)|^2 S_{x^*}^*(\omega) d\omega. \tag{32.46}$$

При этом предполагается, что $m_z = 0$.

§ 32.4. Среднеквадратическое отклонение

Предположим, что ко входу импульсной системы (рис. 32.3) приложено внешнее воздействие $f(mT)$, представляющее собой сумму полезного сигнала $s(mT)$ и помехи $\xi(mT)$:

$$f(mT) = s(mT) + \xi(mT). \tag{32.47}$$

Сигнал и помеха независимы, так что

$$M \{s(mT) \xi(mT)\} = 0. \tag{32.48}$$

Желаемая величина $z_0(mT)$ представляет собой результат преобразования полезного сигнала $s(mT)$, осуществляемого оператором Λ , так что

$$z_0(mT) = \Lambda \{s(mT)\}. \tag{32.49}$$

Этот оператор может быть в общем и физически нереализуемым,

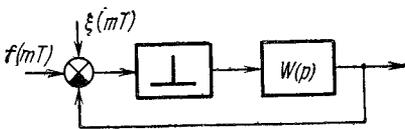


Рис. 32.3.

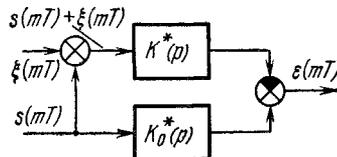


Рис. 32.4.

например, в случае упреждения. Структурная схема образования отклонения изображена на рис. 32.4. Она аналогична схеме

(рис. 14.2) для непрерывных систем. Обозначим через $K^*(j\omega)$ и $K_0^*(j\omega)$ частотные характеристики реальной и идеальной систем. Тогда, преобразуя структурную схему, находим спектральную плотность ошибки $\varepsilon(mT) = z_0(mT) - z(mT)$:

$$S_\varepsilon^*(\omega) = |K_0^*(j\omega) - K^*(j\omega)|^2 S_s^*(\omega) + |K^*(j\omega)|^2 S_\xi^*(\omega). \quad (32.50)$$

Оценивая качество работы системы среднеквадратическим отклонением или, что то же, дисперсией:

$$I = M\{\varepsilon^2(mT)\} = R_{\varepsilon_s}(0) = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} S_\varepsilon^*(\omega) d\omega, \quad (32.51)$$

получим после подстановки $S_\varepsilon^*(\omega)$ из (32.50)

$$\begin{aligned} I &= M\{\varepsilon^2(mT)\} = \\ &= \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \{|K_0^*(j\omega) - K^*(j\omega)|^2 S_s^*(\omega) + |K^*(j\omega)|^2 S_\xi^*(\omega)\} d\omega. \end{aligned} \quad (32.52)$$

Если $K^*(j\omega)$, $S_s^*(\omega)$ и $S_\xi^*(\omega)$ известны, то I (32.52) приводится к виду

$$I = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \left| \frac{N^*(j\omega)}{M^*(j\omega)} \right|^2 d\omega, \quad (32.53)$$

где $N^*(j\omega)$ и $M^*(j\omega)$ — многочлены по $e^{j\omega T}$. Можно для вычисления I воспользоваться формулами в табл. 31.1. Оптимальные параметры определяются, как и в случае непрерывных систем, из уравнения, получаемого приравнением нулю градиента I по параметрам.

§ 32.5. Оптимальные импульсные системы

Синтез оптимальных импульсных систем состоит в таком подборе их характеристик, при котором среднеквадратическое отклонение I достигает минимума. Поскольку такое I отличается от рассмотренных в §§ 14.4, 14.5 лишь тем, что вместо обычных частотных характеристик и спектральных плотностей в него входят дискретные частотные характеристики и спектральные плотности, то достаточно воспользоваться готовыми результатами § 14.5 и произвести соответствующие замены, учитывая специфику дискретных характеристик при операциях факторизации и расщепления. В частности, при проведении факторизации надо так представить сомножители функции $\Psi^*(j\omega)$, определяемой соотношением

$$|\Psi^*(j\omega)|^2 = S_s^*(\omega) + S_\xi^*(\omega), \quad (32.54)$$

чтобы все ее полюсы и нули лежали в верхней полуплоскости ω (в левой полуплоскости p). Этому требованию можно удовлетворить, если записать функцию $\Psi^*(j\omega)$ по отрицательным степеням $e^{j\omega T}$. Дело в том, что полюсы сомножителей $1/(e^{j\omega T} - a_i)$, $|a_i| < 1$, входящих в числитель и знаменатель выражения $\Psi^*(j\omega)$, находятся в верхней полуплоскости ω , тогда как нули этих сомножителей, равные $(-j\omega)$, находятся в нижней полуплоскости ω . Если же соответствующие сомножители записать в виде $1/(1 - a_i e^{-j\omega T})$, то не только их полюсы, но и нули будут находиться в верхней полуплоскости ω .

Обозначим функцию, содержащую только сомножители вида $1/(1 - a_i e^{-j\omega T})$, через $\tilde{\Psi}^*(j\omega)$. Заметим, что $|\tilde{\Psi}^*(j\omega)|^2 = |\Psi^*(j\omega)|^2$. Функцию $\tilde{\Psi}^*(j\omega)$ можно записать в виде

$$\tilde{\Psi}^*(j\omega) = \frac{C \prod_{v=1}^{n_2} (1 - a_v e^{-j\omega T})}{\prod_{v=1}^{n_1} (1 - b_v e^{-j\omega T})}. \quad (32.55)$$

Теперь по аналогии с (14.30) можно записать выражение для физически реализуемой частотной характеристики оптимальной импульсной системы:

$$K_{\text{опт}}^*(j\omega) = \frac{1}{\tilde{\Psi}^*(j\omega)} \left\{ \frac{K_0^*(j\omega) S_s^*(\omega)}{\tilde{\Psi}^*(-j\omega)} \right\}^+. \quad (32.56)$$

Величина $\{\cdot\}^+$ находится с помощью расщепления, т. е. в результате выделения той части разложения на простые дроби, которая имеет полюсы в верхней полуплоскости ω и которая является правильной дробью относительно переменной $e^{-j\omega T}$:

$$\left\{ \frac{K^*(j\omega) S_s^*(\omega)}{\Psi^*(-j\omega)} \right\}^+ = \sum_i \frac{A_i}{1 - a_i e^{-j\omega T}}, \quad (32.57)$$

причем сумма берется по всем i , для которых $|a_i| < 1$.

Пример. Пусть спектральные плотности полезного сигнала и помехи равны соответственно ($T = 1$)

$$S_s^*(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Lambda e^{-\alpha |m|} e^{-j\omega m} = \Lambda \frac{1 - e^{-2\alpha}}{|e^{j\omega} - e^{-\alpha}|^2},$$

$$S_{\xi}^*(\omega) = B,$$

причем сигнал и помеха не коррелированы, т. е.

$$S_{s\xi}^*(j\omega) = 0.$$

Найдем оптимальную частотную характеристику системы, предназначенной для воспроизведения сигнала В этом случае $K_0^*(j\omega) = 1$. Производя факторизацию суммы $S_c^*(\omega) + S_\xi^*(\omega)$, получаем

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}^*(j\omega) &= C \frac{1 - e^{-\alpha_1} e^{-j\omega}}{1 - e^{-\alpha} e^{-j\omega}}, \\ \hat{\Psi}^*(-j\omega) &= C \frac{1 - e^{-\alpha_1} e^{j\omega}}{1 - e^{-\alpha} e^{j\omega}},\end{aligned}$$

где C и α_1 определяются из уравнений

$$\operatorname{ch} \alpha_1 = \frac{A}{B} \operatorname{sh} \alpha + \operatorname{ch} \alpha, \quad C^2 e^{-\alpha_1} = B e^{-\alpha}.$$

Далее находим

$$\begin{aligned}\frac{S_s^*(\omega)}{\hat{\Psi}^*(-j\omega)} &= \frac{A}{C} (1 - e^{-2\alpha}) \frac{e^{-j\omega}}{(1 - e^{-\alpha} e^{-j\omega})(e^{-j\omega} - e^{-\alpha_1})}, \\ \left\{ \frac{S_s^*(\omega)}{\hat{\Psi}^*(-j\omega)} \right\}^+ &= \frac{A (1 - e^{-2\alpha})}{C (1 - e^{-(\alpha+\alpha_1)}) (1 - e^{-\alpha} e^{-j\omega})}.\end{aligned}$$

Подстановка соответствующих выражений в формулу (32.56) дает частотную характеристику оптимальной импульсной системы:

$$K_{\text{опт}}^*(j\omega) = \frac{A}{C^2} \frac{(1 - e^{-2\alpha}) e^{j\omega}}{(1 - e^{-(\alpha+\alpha_1)}) (e^{j\omega} - e^{-\alpha_1})}.$$

§ 32.6. Учет ограничений

Поскольку характеристики управляемого объекта являются заданными, то при синтезе реализуемой оптимальной импульсной системы необходимо учитывать ограничения, связанные с неминимально-фазовостью объекта, запаздыванием и т. д.

Как было показано в § 14.6, для получения устойчивой оптимальной реализуемой системы необходимо, чтобы передаточная функция замкнутой системы включала в себя числитель передаточной функции объекта и передаточную функцию элемента запаздывания. Поступая так же, как это было сделано в § 14.6, нетрудно получить выражение для оптимальной частотной характеристики замкнутой импульсной системы при учете ограничений и замечания относительно операции факторизации (см. § 32.5) в виде

$$K_{\text{опт}}^*(j\omega) = \frac{W_{\text{об}}^*(j\omega)}{\hat{\Psi}_\omega^*(j\omega) \hat{\Psi}^*(j\omega)} \left\{ \frac{K_0^*(j\omega) W_{\text{об}}^*(-j\omega) S_s^*(\omega)}{\hat{\Psi}_\omega^*(-j\omega) \hat{\Psi}^*(-j\omega)} \right\}^+, \quad (32.58)$$

где функции $\hat{\Psi}^*(j\omega)$ и $\hat{\Psi}_\omega^*(j\omega)$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned}|\hat{\Psi}^*(j\omega)|^2 &= S_s^*(\omega) + S_\xi^*(\omega), \\ |\hat{\Psi}_\omega^*(j\omega)|^2 &= |W_{\text{об}}^*(j\omega)|^2.\end{aligned}$$

Функции $\tilde{\Psi}^*(j\omega)$ и $\tilde{\Psi}_w^*(j\omega)$, как и ранее, записываются по степеням $e^{-j\omega T}$. В этом случае, когда импульсная передаточная функция неизменной части устойчива и минимально-фазова, имеем

$$\tilde{\Psi}_w^*(j\omega) = W_{об}^*(j\omega) e^{j\omega T}.$$

Тогда из выражения (32.58) получаем

$$K_{опт}^*(j\omega) = \frac{1}{e^{j\omega T} \tilde{\Psi}^*(j\omega)} \left\{ \frac{K_0^*(j\omega) S_s^*(\omega)}{e^{-j\omega T} \tilde{\Psi}^*(-j\omega)} \right\}^+. \quad (32.59)$$

Частотная характеристика управляющего устройства находится по частотной характеристике замкнутой импульсной системы обычным образом:

$$W_{к\ опт}^*(j\omega) = \frac{1}{W_{об}^*(j\omega)} \frac{K_{опт}^*(j\omega)}{1 - K_{опт}^*(j\omega)}. \quad (32.60)$$

По этой частотной характеристике можно определить структуру оптимального управляющего устройства.

Пример Найдём управляющее устройство, обеспечивающее управление по минимуму дисперсии ошибки, для системы, содержащей неизменяющую часть в виде

$$W_{об}^*(p) = \mathfrak{D} \left\{ \frac{1 - e^{pT}}{p^2(p+1)} \right\}, \quad T = 0,2 \text{ сек}$$

Пусть $K_0^*(j\omega) = 1$, полезный сигнал и помеха не коррелированы, а их спектральные плотности равны соответственно

$$S_s^*(\omega) = \frac{0,164}{|e^{j0,2\omega} - 0,819|^2}, \quad S_\xi^*(\omega) = 0,1.$$

Так как импульсная передаточная функция объекта устойчива и минимально-фазова, то оптимальную передаточную функцию замкнутой системы находим по формуле (32.59). Имеем

$$S_s^*(\omega) + S_\xi^*(\omega) = \frac{0,31 |e^{j0,2\omega} - 0,261|^2}{|e^{j0,2\omega} - 0,819|^2}.$$

Используя результаты факторизации

$$\tilde{\Psi}^*(j\omega) = \frac{1 - 0,261 e^{-j0,2\omega}}{1 - 0,819 e^{-j0,2\omega}},$$

$$\tilde{\Psi}^*(-j\omega) = \frac{1 - 0,261 e^{j0,2\omega}}{1 - 0,819 e^{j0,2\omega}},$$

получаем

$$\frac{S_s^*(\omega)}{e^{-j\omega} \tilde{\Psi}^*(-j\omega)} = \frac{0,295}{(1 - 0,819 e^{-j0,2\omega})(e^{-j0,2\omega} - 0,261)}.$$

Отсюда находим

$$\left\{ \frac{S_s^*(\omega)}{e^{-j\omega} \tilde{Y}^*(-j\omega)} \right\}^+ = \frac{0,31}{1 - 0,819e^{-j0,2\omega}},$$

после чего определяется

$$K_{\text{опт}}^*(j\omega) = \frac{0,557}{e^{j0,2\omega} - 0,261}.$$

Импульсная передаточная функция неизменной части находится по таблицам и равна

$$W_{\text{об}}^*(p) = \frac{0,019(e^{0,2p} + 0,895)}{(e^{0,2p} - 1)(e^{0,2p} - 0,819)}.$$

Теперь по формуле (32.60) определяется частотная характеристика оптимального управляющего устройства:

$$W_{\text{к опт}}^*(j\omega) = \frac{29,25(e^{j0,2\omega} - 1)(e^{j0,2\omega} - 0,819)}{e^{j0,4\omega} - 0,08e^{j0,2\omega} - 0,73}.$$

Задачи

32.1. Доказать что из соотношения

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega$$

при $\tau = mT$ следует

$$R(mT) = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} S^*(\omega) e^{-j\omega mT} d\omega, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

где

$$S^*(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega + k\omega_0) = \mathfrak{D}\{S(\omega)\}.$$

32.2. Пусть спектральные плотности сигнала и помехи, воздействующих на импульсную систему, изображенную на рис. 32.5, равны соответственно

$$S_s^*(\omega) = \frac{10(1 - e^{-0,2})}{|e^{j\omega 0,1} - e^{-0,1}|^2} \approx \frac{1,8}{|e^{j\omega 0,1} - 0,87|^2}$$

и

$$S_{\xi}^*(\omega) = 1,$$

причем $S_{s\xi}^*(\omega) = S_{\xi s}^*(\omega) = 0$, а частотная характеристика идеальной системы равна $K_0^*(j\omega) = e^{-j\omega 0,1}$. Предполагая, что частотная характеристика неизменной части импульсной системы равна

$$W^*(j\omega) = \frac{0,005(e^{j\omega 0,1} + 0,9)}{(e^{j\omega 0,1} - 1)(e^{j0,1\omega} - 0,905)},$$

показать, что оптимальная частотная характеристика корректирующего устройства, при которой минимизируется среднеквадратическая ошибка, равна

$$W_{\text{к опт}}^*(j\omega) = \frac{141,4 (e^{j\omega 0,1} - 1) (e^{j\omega 0,1} - 0,905)}{(e^{j\omega 0,1} + 0,9) (e^{j\omega 0,1} - 0,975)}.$$

Начертить схему, реализующую частотную характеристику $W_{\text{к опт}}^*(j\omega)$. Показать, что $I_{\text{min}} = \min \mathbf{M} \{\varepsilon^2(m0,1)\} = 1,16$.

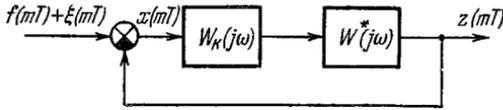


Рис. 32.5.

32.3. Показать, что если факторизация проведена в виде

$$\Psi^*(j\omega) = C \frac{\prod_{\nu=1}^{n_2} (e^{j\omega T} - a_\nu)}{\prod_{\nu=1}^{n_1} (e^{j\omega T} - a_\nu)},$$

то полученный результат

$$K_{\text{опт}}^*(j\omega) = \frac{1}{\Psi^*(j\omega)} \left\{ \frac{K_0^*(j\omega) S_s^*(\omega)}{\Psi^*(-j\omega)} \right\}^+$$

будет отличаться от (32.56) при $n_2 = n_1$ и совпадать с (32.56) при $n_2 < n_1$. Объяснить почему при $n_2 = n_1$ приведенное здесь выражение $K_{\text{опт}}^*(j\omega)$ неверно.

32.4. Показать что при учете ограничений замена в (32.58) $\tilde{\Psi}_\omega^*(j\omega)$ и $\tilde{\Psi}^*(j\omega)$ на $\Psi_\omega^*(j\omega)$ и $\Psi^*(j\omega)$ не изменяет выражения $K_{\text{опт}}^*(j\omega)$.

Б. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Глава 33

УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

§ 33.1. Блок-схема и граф нелинейной импульсной системы

Нелинейные импульсные системы, содержащие один нелинейный элемент, отличаются большим разнообразием, чем соответствующие нелинейные непрерывные системы. Это связано с тем, что нелинейный элемент может входить как в непрерывную часть, так и в импульсный элемент. Из этого многообразия нелинейных импульсных систем мы выделим те системы, в которых нелинейный элемент входит в импульсный элемент и непосредственно предшествует ему. Блок-схема такой нелинейной импульсной системы изображена на рис. 33.1, а. Граф, соответствующий этой блок-схеме, приведен на рис. 33.1, б. Нелинейную

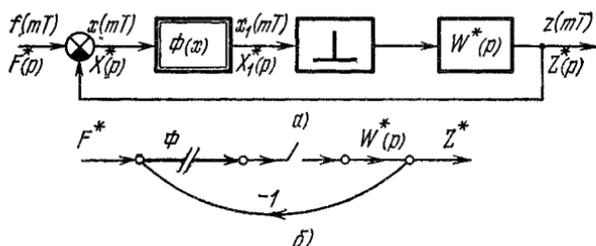


Рис. 33.1.

импульсную систему подобной структуры можно рассматривать как соединение нелинейного элемента и линейной импульсной части, представляющей собой некую разомкнутую линейную импульсную систему. И подобно тому, как мы изучали свойства нелинейной непрерывной системы по характеристикам ее линейной части, так и свойства нелинейной импульсной системы могут быть изучены по характеристикам ее линейной импульсной части.

Типовые нелинейные элементы, входящие в нелинейную импульсную систему, не отличаются от описанных в § 15.3. Их уравнения запишутся в следующем виде:

для нелинейных элементов с однозначной характеристикой (рис. 33.2, а)

$$x_1(t) = \Phi(x), \quad (33.1)$$

для нелинейных элементов с неоднозначной характеристикой (рис. 33.2, б)

$$x_1(t) = \Phi(x(t) | t_0^+) \quad (33.2)$$

или

$$x(t) = \Phi_t(x(t)). \quad (33.3)$$

Неоднозначность характеристики нелинейного элемента требует знания входной величины $x(t)$ не только в дискретные моменты

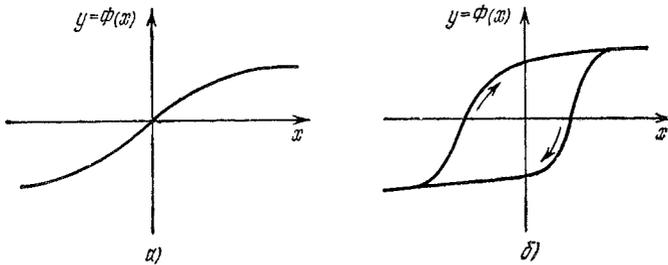


Рис. 33.2.

времени $t = mT$, но и в интервалах между ними. Характеристики (33.1)—(33.3) задаются в графической или аналитической форме.

§ 33.2. Линеаризация нелинейных импульсных элементов

Совокупность нелинейного и импульсного элементов образует *нелинейный импульсный элемент*. Линеаризация нелинейного импульсного элемента сводится к замене его некоторым эквивалентным линейным импульсным элементом. Если эта замена не зависит от конкретного вида входного воздействия, то линеаризация нелинейного импульсного элемента сводится к линеаризации нелинейного элемента. Если же эта замена производится для определенного вида воздействия, например гармонического или случайного, тогда удобно осуществлять линеаризацию совокупности нелинейного и импульсного элементов как единого нелинейного импульсного элемента. Таким образом, при *статической* и *дифференциальной линеаризации* мы можем воспользоваться уже готовыми результатами § 15.4 и представить уравнения линеаризованных нелинейных элементов в виде

$$x_1 = k^{(c)}(x)x, \quad (33.4)$$

где $k^{(c)}(x) = \frac{\Phi(x)}{x}$ — коэффициент статической линейризации, и

$$x_1 = k^{(n)}(x)x, \quad (33.5)$$

где $k^{(n)}(x) = \frac{d\Phi(x)}{dx}$ — коэффициент дифференциальной линейризации. Если в непрерывных системах нас интересовало поведение $k^{(c)}(x)$ и $k^{(n)}(x)$ при непрерывных функциях $x(t)$, то в дискретных системах нас будет интересовать поведение $k^{(c)}(x)$ и $k^{(n)}(x)$ при решетчатых функциях $x(mT)$.

Для определения коэффициентов *гармонической* и *стохастической линейризации* рассмотрим нелинейный импульсный элемент. Выходная величина его $x_1^*(t)$ может быть представлена в виде (см. § 23.2)

$$x_1^*(t) = x_1(t) \delta_T(t) = \Phi(x(t)) \delta_T(t),$$

где

$$\delta_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT).$$

Предположим, что $x_1(t)$ изменяется по гармоническому закону $x_1(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, причем

$$\omega = \omega_N = \frac{2\pi}{2NT} = \frac{\pi}{NT} = \frac{\omega_0}{2N}.$$

Это значит, что полупериод гармонического колебания равен NT . Тогда $x_1^*(t) \equiv \tilde{x}^*(t)$ будет периодической функцией того же полупериода:

$$\tilde{x}^*(t) = \Phi(A \sin(\omega_N t + \varphi)) \delta_T(t). \quad (33.6)$$

Определим коэффициенты гармонической линейризации $k_s^{(r)}$ и $k_c^{(r)}$ из условия наилучшего квадратического приближения $\tilde{x}^*(t)$ (33.6) гармонически изменяющейся величиной

$$\hat{\tilde{x}}^*(t) = A [k_s^{(r)} \sin \omega_N t + k_c^{(r)} \cos \omega_N t] \delta_T(t), \quad (33.7)$$

т. е. из условия

$$\int_0^{NT} [\tilde{x}^*(t) - \hat{\tilde{x}}^*(t)]^2 dt \rightarrow \min_{k_s^{(r)}, k_c^{(r)}},$$

или, в раскрытой форме,

$$\int_0^{NT} \{ \Phi(A \sin(\omega_N t + \varphi)) - A [k_s^{(r)} \sin \omega_N t + k_c^{(r)} \cos \omega_N t] \}^2 \delta_T(t) dt \rightarrow \min_{k_s^{(r)}, k_c^{(r)}}. \quad (33.8)$$

Подставляя в левую часть (33.8) выражение $\delta_T(t)$ и меняя очередность суммирования и интегрирования, получим, учитывая свойства δ -функций,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{NT} [\Phi(A \sin(\omega_N t + \varphi)) - \\ & \quad - A(k_s^{(r)} \sin \omega_N t + k_c^{(r)} \cos \omega_N t)]^2 \delta(t - mT) dt = \\ & = \sum_{m=0}^{N-1} [\Phi(A \sin(\omega_N mT + \varphi)) - A(k_s^{(r)} \sin \omega_N mT + k_c^{(r)} \cos \omega_N mT)]^2. \end{aligned} \quad (33.9)$$

Таким образом, задача (33.8), согласно (33.9), сводится к задаче

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{N-1} \left[\Phi \left(A \sin \left(\frac{\pi}{N} m + \varphi \right) \right) - A \left(k_s^{(r)} \sin \frac{\pi}{N} m + k_c^{(r)} \cos \frac{\pi}{N} m \right) \right]^2 \rightarrow \\ & \rightarrow \min_{k_s^{(r)}, k_c^{(r)}}. \end{aligned} \quad (33.10)$$

Дифференцируя левую часть (33.10) по $k_s^{(r)}$ и $k_c^{(r)}$ и приравнявая получаемые результаты нулю, будем иметь

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{N-1} \left[\Phi \left(A \sin \left(\frac{\pi}{N} m + \varphi \right) \right) - \right. \\ & \quad \left. - A \left(k_s^{(r)} \sin \frac{\pi}{N} m + k_c^{(r)} \cos \frac{\pi}{N} m \right) \right] \sin \frac{\pi}{N} m = 0, \\ & \sum_{m=0}^{N-1} \left[\Phi \left(A \sin \left(\frac{\pi}{N} m + \varphi \right) \right) - \right. \\ & \quad \left. - A \left(k_s^{(r)} \sin \frac{\pi}{N} m + k_c^{(r)} \cos \frac{\pi}{N} m \right) \right] \cos \frac{\pi}{N} m = 0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание тождества

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{N-1} \sin \frac{\pi}{N} m \cos \frac{\pi}{N} m = 0, \\ & \sum_{m=0}^{N-1} \sin^2 \frac{\pi}{N} m = \frac{N}{2} (1 - \delta_{1,N}), \end{aligned}$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} \cos^2 \frac{\pi}{N} m = \frac{N}{2} (1 - \delta_{1,N}) + \delta_{1,N}, \quad \delta_{1,N} = \begin{cases} 1, & N=1, \\ 0, & N \neq 1, \end{cases}$$

находим коэффициенты гармонической линейризации:

$$k_s^{(r)} = k_s^{(r)}(A, N, \varphi) = \frac{2}{AN} \sum_{m=0}^{N-1} \Phi \left(A \sin \left(\frac{\pi}{N} m + \varphi \right) \right) \sin \frac{\pi}{N} m, \quad (33.11)$$

$$k_c^{(r)} = k_c^{(r)}(A, N, \varphi) = \frac{2}{AN} \sum_{m=0}^{N-1} \Phi \left(A \sin \left(\frac{\pi}{N} m + \varphi \right) \right) \cos \frac{\pi}{N} m.$$

Выходную величину $\widehat{x}_1(mT)$ гармонически линейризованного элемента (33.11) можно представить в несколько иной, эквивалентной форме:

$$\widehat{x}_1(mT) = Ak^{(r)}(A, N, \varphi) \sin \left(\frac{\pi}{N} m + \varphi + \psi(A, N, \varphi) \right), \quad (33.12)$$

где

$$k^{(r)}(A, N, \varphi) = \sqrt{[k_s^{(r)}(A, N, \varphi)]^2 + [k_c^{(r)}(A, N, \varphi)]^2},$$

$$\psi(A, N, \varphi) = -\operatorname{arctg} \frac{k_c^{(r)}(A, N, \varphi)}{k_s^{(r)}(A, N, \varphi)}.$$

Используя комплексную форму записи входной величины

$$\vec{x}(mT) = Ae^{j \left(\frac{\pi}{N} m + \varphi \right)},$$

запишем (33.12) в комплексной форме:

$$\widehat{x}_1(mT) = \vec{k}^{(r)}(A, N, \varphi) \vec{x}(mT),$$

где

$$\vec{k}^{(r)}(A, N, \varphi) = k^{(r)}(A, N, \varphi) e^{-j\psi(A, N, \varphi)} =$$

$$= k_s^{(r)}(A, N, \varphi) - jk_c^{(r)}(A, N, \varphi),$$

или, с учетом (33.11),

$$\vec{k}^{(r)}(A, N, \varphi) = \frac{1}{AN} \sum_{m=0}^{N-1} \Phi \left(A \sin \left(\frac{\pi}{N} m + \varphi \right) \right) e^{-j \left(\frac{\pi}{N} m + \varphi \right)} \quad (33.13)$$

— комплексный коэффициент гармонической линейризации. Комплексный коэффициент гармонической линейризации представляет собой отношение комплексной амплитуды первой гармоники разложения периодической решетчатой выходной величины нелинейного элемента к комплексной амплитуде входной гармонической решетчатой функции.

Для однозначных нелинейностей

$$k_c^{(r)}(A, N, \varphi) = \frac{2}{NA} \sum_{m=0}^{N-1} \Phi \left(A \sin \left(\frac{\pi}{N} m + \varphi \right) \right) \cos \frac{\pi}{N} m \equiv 0$$

и, значит,

$$\vec{k}^{(r)}(A, N, \varphi) =$$

$$= k_s^{(r)}(A, N, \varphi) = \frac{2}{NA} \sum_{m=0}^{N-1} \Phi \left(A \sin \left(\frac{\pi}{N} m + \varphi \right) \right) \sin \frac{\pi}{N} m.$$

Представим непрерывную выходную величину нелинейного элемента

$$x_1(t) = \Phi(A \sin \omega_N t + \varphi) = \Phi \left(A \sin \left(\frac{\pi}{NT} t + \varphi \right) \right)$$

в виде ряда Фурье:

$$\Phi \left(A \sin \left(\frac{\pi}{Nt} t + \varphi \right) \right) = \frac{1}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \dot{A}_r e^{j \frac{r\pi}{NT} t}. \quad (33.14)$$

Назовем коэффициентом $k_r^{(r)}$ гармонической линеаризации по r -й гармонике или r -м коэффициентом гармонической линеаризации отношение амплитуды r -й гармоники к амплитуде первой гармоники, т. е.

$$k_r^{(r)}(A, \varphi) = \frac{\dot{A}_r}{\dot{A}_1}. \quad (33.15)$$

Подставляя (33.14) при $t = mT$ в (33.15), получим

$$k^{(r)}(A, N, \varphi) = \frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} k_r^{(r)}(A, \varphi) \sum_{m=0}^{N-1} e^{j \left[\frac{\pi}{N} (r-1) m \right]}.$$

Но так как

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{j \left[\frac{\pi}{N} (r-1) m \right]} = \begin{cases} N & \text{при } r = 1 + 2Nl, \\ 0 & \text{при } r \neq 1 + 2Nl, \end{cases}$$

где l — целое число, то окончательно получаем

$$k^{(r)}(A, N, \varphi) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} k_{1+2rN}^{(r)}(A, \varphi), \quad (33.16)$$

т. е.

коэффициент гармонической линеаризации нелинейного элемента равен сумме обычных непрерывных коэффициентов гармонической линеаризации по всем гармоникам $(1 + 2mN)$ -го порядка.

Предположим, что x — стационарный случайный процесс. Тогда $x_1 = \Phi(x)$ будет также стационарным случайным процес-

сом. Определим коэффициент стохастической линейаризации из условия наилучшего среднеквадратического приближения x_1 величиной

$$\hat{x}_1 = k^{(ст)}x,$$

т. е. из условия

$$\mathbf{M} \{[x_1 - \hat{x}_1]^2\} \rightarrow \min_{k^{(ст)}}$$

или, в раскрытой форме,

$$\mathbf{M} \{[\Phi(x) - k^{(ст)}x]^2\} \rightarrow \min_{k^{(ст)}}. \quad (33.17)$$

Дифференцируя левую часть (33.17) и приравнявая результат нулю, получим

$$\mathbf{M} \{[\Phi(x) - k^{(ст)}x]x\} = 0. \quad (33.18)$$

Учитывая, что

$$\mathbf{M} \{\Phi(x)x\} = R_{yx}^*(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)x p(x) dx,$$

$$\mathbf{M} \{x^2\} = R_x^*(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \sigma_x^2,$$

получим из (33.18)

$$k^{(ст)} = k^{(ст)}(\sigma_x) = \frac{R_{yx}^*(0)}{R_x^*(0)} = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)x p(x) dx, \quad (33.19)$$

что совпадает с выражением $k^{(ст)}(\sigma_x)$ при непрерывных случайных воздействиях. Представляя $R_{yx}^*(0)$ и $R_x^*(0)$ в виде

$$R_{yx}^*(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^N \Phi(x(mT))x(mT)$$

$$R_x^*(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^N x^2(mT) = \sigma_x^2,$$

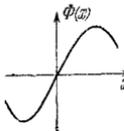
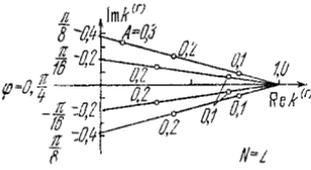
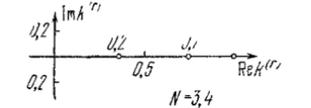
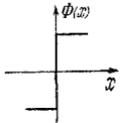
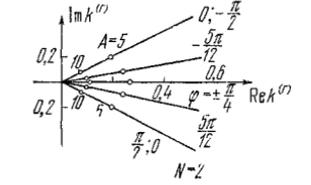
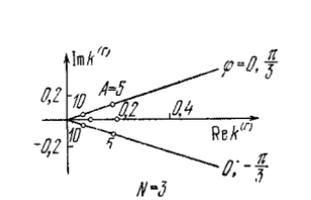
найдем выражение коэффициента стохастической линейаризации (33.19) в несколько иной форме:

$$k^{(ст)}(\sigma_x) = \frac{1}{\sigma_x^2} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^N \Phi(x(mT))x(mT). \quad (33.20)$$

Таблица 33.1

Характеристика нелинейного элемента	Коэффициенты гармонической линеаризации	$k(r)$ (A, N, φ)
	$k(r) = \frac{\kappa_1}{N} \left\{ (\alpha_1 + \alpha_2 + 1) + \frac{\sin \frac{\pi}{N} (\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}{\sin \frac{\pi}{N}} \times e^{-2j \left[\varphi_1 + \frac{\pi}{2N} (\alpha_1 - \alpha_2) \right]} + 2 \frac{\kappa_0}{A} \frac{\sin \frac{\pi}{2N} (\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}{\sin \frac{\pi}{2N}} \times e^{-j \left[\varphi_1 + \frac{\pi}{2N} (\alpha_1 - \alpha_2) \right]} \right\},$ $\alpha_1 = E \left\{ \frac{N}{\pi} \left(\arccos \frac{\kappa_0}{A} \mp \varphi_1 \right) \right\},$ $\alpha_2 = E \left\{ \frac{N}{\pi} \left(\arccos \frac{\kappa_0}{A} \pm \varphi_1 \right) \right\}$	
	$k(r) = \frac{\kappa_1}{N} \left\{ N - (\alpha_1 + \alpha_2 + 1) - \frac{\sin \frac{\pi}{N} (\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}{\sin \frac{\pi}{N}} \times e^{-2j \left[\varphi_1 + \frac{\pi}{2N} (\alpha_1 - \alpha_2) \right]} + 2 \frac{\kappa_0}{N} \frac{\sin \frac{\pi}{2N} (\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}{\sin \frac{\pi}{2N}} \times e^{-j \left[\varphi_1 + \frac{\pi}{2N} (\alpha_1 - \alpha_2) \right]} \right\}$	

Продолжение табл. 33.1

Характеристика нелинейного элемента	Коэффициенты гармонической линеаризации	$k(r)$ (A, N, φ_1)
	$k(r) = \alpha \left(1 - 3 \frac{\beta}{4\alpha} A^2 - \frac{\beta}{4\alpha} A^2 e^{-j4\varphi_1} \right)$	
$\Phi(x) = \alpha x - \beta x^3$	$k(r) = \alpha \left(1 - 3 \frac{\beta}{4\alpha} A^2 \right)$	
	$k(r) = \frac{2}{AN} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2N}} e^{-j(\varphi_1 \pm \frac{\pi}{2N})},$ <p style="text-align: center;">N четно</p>	
$\Phi(x) = \text{sign } x$	$k(r) = \frac{2}{AN} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2N}} \times \begin{cases} e^{-j\varphi_1}, & 0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2N}, \\ e^{-j(\varphi_1 \pm \frac{\pi}{N})}, & \frac{\pi}{2N} \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{N}, \end{cases}$ <p style="text-align: center;">N нечетно</p>	

Рассмотрим частный случай

$$x(mT) = A \sin\left(\frac{\pi}{N} m + \varphi\right).$$

Тогда

$$R_x^*(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^N A^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{N} m + \varphi\right) = \frac{A^2}{2} = \sigma_x^2,$$

$$R_{yx}^*(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^N \Phi\left(A \sin\left(\frac{\pi}{N} m + \varphi\right)\right) A \sin\left(\frac{\pi}{N} m + \varphi\right) = k_s^{(r)}(A, N, \varphi) \sigma_x^2.$$

И значит, согласно (33.19), (33.20)

$$k^{(cr)}(\sigma_x^2) = k_s^{(r)}(A, N, \varphi).$$

В табл. 33.1 приведены характеристики нелинейных элементов и соответствующие им коэффициенты гармонической линеаризации.

§ 33.3. Уравнения нелинейных импульсных систем

Уравнения нелинейных импульсных систем, блок-схема которых приведена к виду рис. 33.1, образуются из уравнения линейной импульсной части

$$z(mT) = \sum_{s=0}^m \omega((m-s)T) x_1(sT), \quad (33.21)$$

уравнения нелинейного элемента

$$x_1(mT) = \Phi(x(mT)) \quad (33.22)$$

и условия замыкания

$$x(mT) = f(mT) - z(mT). \quad (33.23)$$

Исключая из уравнений (33.21)—(33.23) промежуточные переменные $x_1(mT)$, $z(mT)$, получаем уравнение относительно ошибки:

$$x(mT) = f(mT) - \sum_{s=0}^m \omega((m-s)T) \Phi(x(sT)). \quad (33.24)$$

Если же исключить $x_1(mT)$ и $x(mT)$, то получим уравнение относительно выходной величины:

$$z(mT) = \sum_{s=0}^m \omega((m-s)T) \Phi(f(sT) - z(sT)). \quad (33.25)$$

Уравнения (33.24) и (33.25) представляют собой нелинейные суммарные уравнения относительно величин, характеризующих состояние системы в дискретные моменты времени $t = mT$. Подвергая уравнения (33.24) и (33.25) D -преобразованию и учитывая, что

$$D\{f(mT)\} = F^*(p),$$

получим уравнения относительно изображений:

$$X^*(p) = F^*(p) - W^*(p) D\{\Phi(x(mT))\} \quad (33.26)$$

и

$$Z^*(p) = W^*(p) D\{\Phi(f(mT) - z(mT))\}. \quad (33.27)$$

Здесь

$$W^*(p) = D\{\omega(mT)\}$$

— передаточная функция линейной части импульсной системы. Уравнения (33.26) и (33.27) содержат изображение нелинейной функции от искомого решения $D\{\Phi(x(mT))\}$. К сожалению, это изображение не выражается в явной форме через $X^*(p) = D\{x(mT)\}$. Поэтому уравнения (33.26), (33.27) носят условный характер. В отличие от уравнений нелинейных непрерывных систем — нелинейных интегральных уравнений, уравнения нелинейных импульсных систем — нелинейные суммарные уравнения (33.24), (33.25) представляют собой рекуррентные соотношения и позволяют определить значения ошибки процесса $x(mT)$ в последовательные моменты времени mT ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$). Поэтому задача построения процесса в нелинейной импульсной системе при заданном внешнем воздействии решается довольно просто. Что же касается исследования свойств этого процесса, то здесь имеются те же возможности, что и для непрерывных систем.

Задачи

33.1. Вывести выражения коэффициентов гармонической линеаризации для типовых нелинейных элементов, приведенных в табл. 33.1.

33.2. Установить отличие коэффициентов статической, дифференциальной, гармонической и стохастической линеаризации нелинейных элементов в непрерывных и дискретных системах.

ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМАХ

§ 34.1. Построение процессов

Рассмотрим нелинейную импульсную систему (рис. 34.1), ко входу которой приложено в момент $t = mT = 0$ произвольное внешнее воздействие $f(mT)$. Предположим, что импульсная

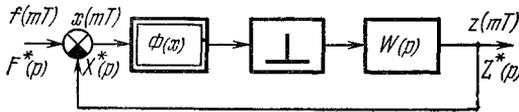


Рис. 34.1.

характеристика линейной импульсной части удовлетворяет условию

$$\omega(0) = 0. \tag{34.1}$$

Тогда суммарное уравнение нелинейной импульсной системы (33.24) запишется в виде

$$x(mT) = f(mT) - \sum_{s=0}^{m-1} \omega((m-s)T) \Phi(x(sT)). \tag{34.2}$$

Это суммарное уравнение можно рассматривать как рекуррентное соотношение, позволяющее последовательно вычислить процесс в нелинейной импульсной системе. В развернутой форме (34.2) представится в виде совокупности уравнений:

$$\begin{aligned} m=0: & \quad x(0) = f(0), \\ m=1: & \quad x(T) = f(T) - \omega(T) \Phi(x(0)), \\ m=2: & \quad x(2T) = f(2T) - \omega(2T) \Phi(x(0)) - \omega(T) \Phi(x(T)), \\ & \quad \dots \dots \dots \\ & \quad x(mT) = f(mT) - \omega(mT) \Phi(x(0)) - \\ & \quad - \omega((m-1)T) \Phi(x(T)) - \dots - \omega(T) \Phi(x((m-1)T)). \end{aligned} \tag{34.3}$$

Из этих уравнений наглядно видна возможность последовательного вычисления процесса $x(mT)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, по заданным $f(mT)$, $\omega(mT)$ и $\Phi(x(mT))$. Некоторое неудобство рекуррентного соотношения (34.2) состоит в том, что с ростом m в нем число слагаемых неограниченно возрастает. Для того чтобы освободиться от этого, воспользуемся уравнением нелинейной импульсной системы относительно изображений (33.26):

$$X^*(p) = F^*(p) - W^*(p) D \{ \Phi(x(mT)) \}, \quad (34.4)$$

где

$$W^*(p) = D \{ \omega(mT) \},$$

или, в развернутой форме при выполнении условия (34.1),

$$W^*(p) = \frac{b'_1 e^{p(n-1)T} + b'_2 e^{p(n-2)T} + \dots + b'_n}{a'_0 e^{pnT} + a'_1 e^{p(n-1)T} + \dots + a'_n}. \quad (34.5)$$

При этом порядок $W^*(p)$ отличен от 0. Умножая числитель и знаменатель (34.5) на e^{-pnT} , запишем $W^*(p)$ в виде

$$W^*(p) = \frac{b'_1 e^{-pT} + b'_2 e^{-p2T} + \dots + b'_n e^{-pnT}}{a'_0 + a'_1 e^{-pT} + \dots + a'_n e^{-pnT}}. \quad (34.6)$$

Подставляя $W^*(p)$ (34.6) в (34.4) и освобождаясь в полученном уравнении от знаменателя, запишем (34.4) в таком виде:

$$\begin{aligned} (a'_0 + a'_1 e^{-pT} + \dots + a'_n e^{-pnT}) X^*(p) = \\ = (a'_0 + a'_1 e^{-pT} + \dots + a'_n e^{-pnT}) F^*(p) - \\ - (b'_1 e^{-pT} + b'_2 e^{-p2T} + \dots + b'_n e^{-pnT}) D \{ \Phi(x(mT)) \}. \end{aligned} \quad (34.7)$$

Переходя в (34.7) от изображений к оригиналам на основании теорем линейности и запаздывания, получим

$$\begin{aligned} a'_0 x(mT) + a'_1 x((m-1)T) + \dots + a'_n x((m-n)T) = \\ = a'_0 f(mT) + a'_1 f((m-1)T) + \dots + a'_n f((m-n)T) - \\ - b'_1 \Phi(x((m-1)T)) - b'_2 \Phi(x((m-2)T)) - \dots \\ \dots - b'_n \Phi(x((m-n)T)), \end{aligned} \quad (34.8)$$

где $x((m-n)T)$, $f((m-n)T)$ при $m < n$ следует полагать равными нулю. Таким образом, получим из (34.8)

$$\begin{aligned} \text{для } m \leq n \\ x(mT) = \\ = \frac{1}{a'_0} \left\{ \sum_{v=0}^m a'_v f((m-v)T) - \sum_{v=1}^m [b'_v \Phi(x((m-v)T)) + a'_v x((m-v)T)] \right\} \end{aligned} \quad (34.9)$$

и для $m \geq n$

$$x(mT) = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{\nu=0}^n a'_\nu f((m-\nu)T) - \sum_{\nu=1}^n [b'_\nu \Phi(x((m-\nu)T)) + a'_\nu x((m-\nu)T)] \right\}. \quad (34.9')$$

Эти рекуррентные соотношения содержат конечное число слагаемых, не превышающее $3n + 1$, где n — порядок передаточной функции линейной части импульсной системы. Таким образом,

в отличие от нелинейных непрерывных систем, в нелинейных импульсных системах при заданном внешнем воздействии принципиально всегда может быть построен процесс, вызванный этим воздействием.

Этот факт будет иметь важное значение при цифровом моделировании непрерывных систем.

§ 34.2. Вынужденные и свободные процессы

Назовем *вынужденным процессом* процесс $x^B(mT)$, вызываемый внешним ограниченным воздействием, приложенным в момент времени, отстоящий от момента наблюдения на бесконечно большой интервал времени. Предположим, что внешнее воздействие приложено к системе в момент времени $k = m_0$, тогда поведение этой системы будет описываться суммарным уравнением вида

$$x(mT) = f(mT) - \sum_{s=m_0}^m \omega((m-s)T) \Phi(x(sT)). \quad (34.10)$$

Устремляя в (34.10) m_0 к $-\infty$, получаем уравнение вынужденного процесса:

$$x^B(mT) = f(mT) - \sum_{k=-\infty}^m \omega((m-k)T) \Phi(x^B(kT)),$$

или, после замены $m - k$ на s и, значит, k на $m - s$,

$$x^B(mT) = f(mT) - \sum_{s=0}^{\infty} \omega(sT) \Phi(x^B((m-s)T)). \quad (34.11)$$

Свободный процесс $x^C(mT)$ определяется разностью между общим процессом $x(mT)$ и вынужденным процессом $x^B(mT)$, т. е.

$$x^C(mT) = x(mT) - x^B(mT).$$

Полагая в уравнении (34.2)

$$f(mT) = f_\downarrow(mT) + f_\uparrow(mT),$$

где $f_{\downarrow}(mT)$ — исчезающее внешнее воздействие, характеризующее ненулевое состояние импульсной системы в момент приложения внешнего воздействия, вычитая из него уравнение вынужденного процесса (34.11), получаем уравнение свободного процесса:

$$x^c(mT) = f_{\downarrow}^0(mT) + f_{\downarrow}(mT) - \sum_{s=0}^m \omega((m-s)T) [\Phi(x^b(sT) + x^c(sT)) - \Phi(x^b(sT))]. \quad (34.12)$$

В этом уравнении

$$f_{\downarrow}(mT) = \sum_{s=-\infty}^0 \omega((m-s)T) \Phi(x^b(mT)) = \sum_{s=0}^{\infty} \omega(sT) \Phi(x^b((m-s)T))$$

— воздействие, которое, наряду с $f_{\downarrow}^0(mT)$, вызывает свободный процесс.

Свободный процесс вызывается как самим фактом приложения внешнего воздействия, так и ненулевым начальным состоянием.

§ 34.3. Возможные процессы

Если положить в уравнении вынужденного процесса (34.11)

$$f(mT) \equiv 0, \quad (34.13)$$

то мы получим уравнения, определяющие возможные стационарные состояния нелинейной импульсной системы при отсутствии внешнего воздействия. Обозначив эти стационарные состояния $x^{ст}(mT)$, получаем из (34.12) при условии (34.13) уравнение стационарных состояний:

$$x^{ст}(mT) = - \sum_{s=0}^{\infty} \omega(sT) \Phi(x^{ст}((m-s)T)). \quad (34.14)$$

Стационарные состояния могут соответствовать положениям равновесия системы либо периодическим процессам, но в отличие от нелинейных непрерывных систем, где период этих процессов может быть, вообще говоря, любым, в нелинейных импульсных системах периодические процессы имеют период, всегда кратный периоду повторения импульсного элемента. Эти процессы, строго говоря, нельзя назвать автономными, так как импульсная система даже при отсутствии внешних воздействий не является автономной из-за наличия импульсного элемента. Поэтому такие процессы, строго говоря, не являются автоколеба-

ниями. Это обстоятельство объясняет сложность процессов, которые могут возникать в нелинейной импульсной системе. Поэтому далее мы ограничимся исследованием только периодических процессов.

§ 34.4. Влияние квантования по уровню

Общие свойства процессов в непрерывных системах, рассмотренные в § 16.4, остаются справедливыми и для импульсных систем. Поэтому здесь мы не будем повторяться и подробнее рассмотрим влияние квантования по уровню — нелинейности, специфической для цифровых автоматических систем. Квантование

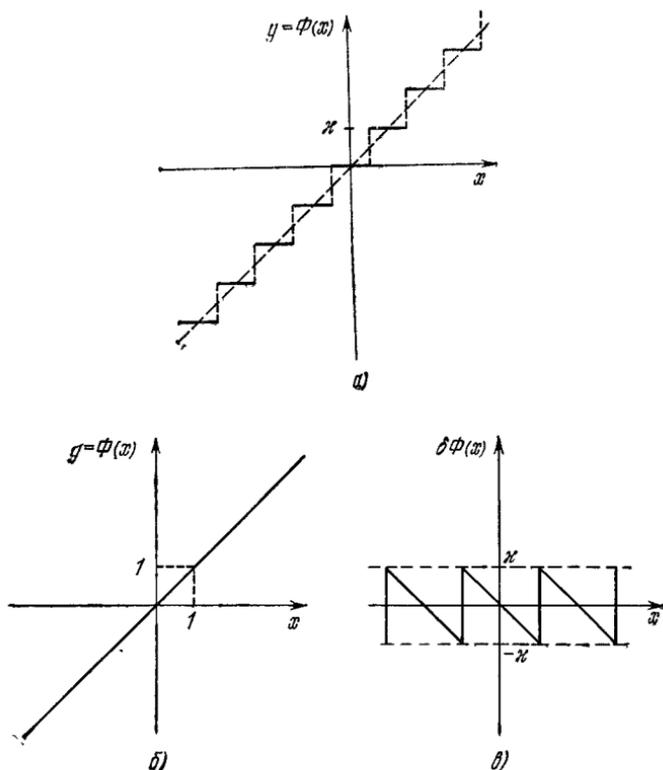


Рис. 34.2.

по уровню соответствует операции округления, и характеристика квантования имеет вид, показанный на рис. 34.2, а, где κ — шаг квантования. Эту характеристику $\Phi(x)$ можно представить в виде суммы линейной характеристики x (рис. 34.2, б) и нелинейной

ограниченной характеристики $\delta\Phi(x)$ (рис. 34.2, в),

$$\Phi(x) = x + \delta\Phi(x), \tag{34.15}$$

где $\delta\Phi(x)$ такова, что

$$|\delta\Phi(x)| \leq \frac{\kappa}{2}. \tag{34.16}$$

Поэтому нелинейный элемент типа квантователя по уровню (рис. 34.3, а), можно представить в виде параллельного соединения линейного элемента и нелинейного элемента $\delta\Phi(x)$ с ограниченной характеристикой (рис. 34.3, б) либо в виде линейного элемента, к которому приложено воздействие $f_{ш}$, характеризующее шумы квантования:

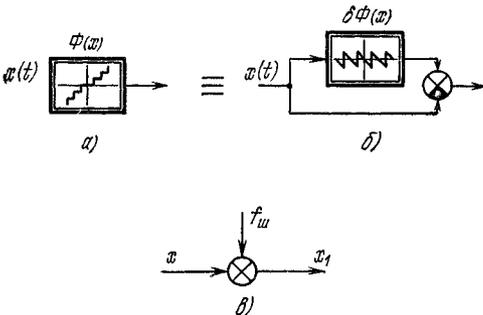


Рис. 34.3.

$$f_{ш}(mT) = \delta\Phi(x(mT)) \tag{34.17}$$

квантователя по уровню, цифровую автоматическую систему (рис. 34.1) можно привести к линейной импульсной системе с дополнительным воздействием вида шумов квантования (рис. 34.4). Передаточная функция замкнутой линейной импульсной системы равна

$$K^*(p) = \frac{W^*(p)}{1 + W^*(p)}.$$

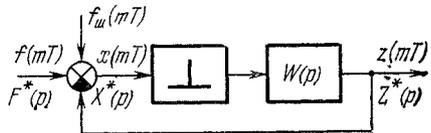


Рис. 34.4.

И следовательно, уравнение ее относительно изображения выходной величины запишется в виде

$$Z^*(p) = K^*(p) [F^*(p) + F_{ш}^*(p)], \tag{34.18}$$

где

$$F_{ш}^*(p) = D \{f_{ш}(mT)\}.$$

На основании теоремы свертывания из (34.18) получаем уравнение относительно оригиналов — решетчатых функций:

$$z(mT) = \sum_{s=0}^m k(mT) f((m-s)T) + \sum_{s=0}^m k(mT) f_{ш}((m-s)T). \tag{34.19}$$

Назовем импульсную систему *предельной* при стремлении шага квантования κ к нулю. Предельная импульсная система со-

ответствует линейной системе при отсутствии воздействия шума квантования; ее уравнение:

$$z_{\text{пр}}(mT) = \sum_{s=0}^m k(sT) f((m-s)T). \quad (34.20)$$

Обозначая через

$$\delta z(mT) = z(mT) - z_{\text{пр}}(mT)$$

эффект, вызываемый квантованием по уровню, находим, вычитая из уравнения (34.19) уравнение (34.20),

$$\delta z(mT) = \sum_{s=0}^m k(sT) f_{\text{ш}}((m-s)T).$$

Оценим $\delta z(mT)$. Очевидно,

$$|\delta z(mT)| \leq \sum_{s=0}^m |k(sT)| |f_{\text{ш}}((m-s)T)|. \quad (34.21)$$

Но в силу (34.16) и (34.17)

$$|f_{\text{ш}}((m-s)T)| \leq \frac{\kappa}{2}.$$

Поэтому неравенство (34.21) можно усилить как за счет замены $|f_{\text{ш}}((m-s)T)|$ в правой части, так и за счет увеличения верхнего предела суммирования m до ∞ . Таким образом, получим

$$|\delta z(mT)| \leq \frac{\kappa}{2} \sum_{s=0}^{\infty} |k(sT)|.$$

Для устойчивых линейных импульсных систем, как следует из определения устойчивости,

$$\sum_{s=0}^{\infty} |k(sT)| = C < \infty, \quad (34.22)$$

где C — податливость системы, и, значит, верхняя граница $|\delta z(mT)|$ всегда будет меньше некоторой фиксированной величины, а именно:

$$\sup_m |\delta z(mT)| \leq \frac{\kappa}{2} C.$$

Таким образом,

наибольшее отклонение процесса, вызываемое квантованием по уровню, не превосходит произведения податливости системы на половину шага квантования.

Рассмотрим частный случай. Пусть предельная линейная импульсная система аperiодична, т. е.

$$k(sT) \geq 0.$$

Тогда, учитывая (34.22), имеем

$$C = \sum_{s=0}^{\infty} |k(sT)| = \sum_{s=0}^{\infty} k(sT) = K^*(0)$$

и, значит,

$$\sup_m |\delta z(mT)| \leq \frac{\alpha}{2} K^*(0).$$

Но при $p = 0$

$$K^*(0) = \frac{W^*(0)}{1 + W^*(0)} = \begin{cases} 1, & \text{если } W^*(0) = \infty, \\ \alpha < 1, & \text{если } W^*(0) < \infty. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\sup_m |\delta z(mT)| \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Для аperiодической предельной системы наибольшее отклонение процесса, вызываемое квантованием по уровню, не превосходит половины шага квантования.

Чем более податлива предельная система, т. е. чем больше величина C , тем больше верхняя граница отклонения предела, вызываемого квантованием по уровню.

Задачи

34.1. Построить процесс в нелинейной импульсной системе, передаточная функция непрерывной части которой равна

$$W(p) = \frac{1}{p + 0,5} + \frac{1}{p + 1},$$

а нелинейная характеристика определяется выражением

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, & |x| > 1, \\ x, & |x| \leq 1, \end{cases}$$

при

$$f(t) = \begin{cases} 10, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

34.2. Определить стационарные состояния в нелинейной импульсной системе, рассмотренной в задаче 34.1, при $f(t) \equiv 0$ и

$$f(t) = \begin{cases} 10, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

34.3. Определить влияние квантования по уровню в нелинейной импульсной системе, передаточная функция непрерывной части которой равна

$$W(p) = \frac{1}{p + 0,5} + \frac{1}{p + 1}.$$

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

§ 35.1. Понятие устойчивости

Процесс в нелинейной импульсной системе $x(mT)$ можно представить в виде суммы вынужденного процесса $x^B(mT)$ и свободного процесса $x^C(mT)$:

$$x(mT) = x^B(mT) + x^C(mT). \quad (35.1)$$

Установление вынужденного процесса в нелинейной системе возможно лишь тогда, когда свободный процесс с течением времени стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x^C(mT) = 0. \quad (35.2)$$

Как следует из § 34.2, вынужденный процесс в нелинейной импульсной системе определяется нелинейным суммарным уравнением вида

$$x^B(mT) = f_{\sim}(mT) - \sum_{s=0}^m \omega(sT) \Phi(x^B((m-s)T)), \quad (35.3)$$

а соответствующий свободный процесс $x^C(mT)$ — суммарным уравнением, которое можно записать в форме

$$x^C(mT) = f_{\downarrow}(mT) + f_{\downarrow}^0(mT) - \sum_{s=0}^m \omega((m-s)T) \tilde{\Phi}(x^C(sT), s), \quad (35.4)$$

где

$$\tilde{\Phi}(x^C(mT), m) = \Phi(x^B(mT) + x^C(mT)) - \Phi(x^B(mT)). \quad (35.5)$$

Будем говорить, что вынужденный процесс $x^B(mT)$ устойчив, если соответствующий ему свободный процесс $x^C(mT)$ с течением времени стремится к нулю (см. (35.2)). Обозначим квадрат исчезающего внешнего воздействия $f_{\downarrow}(mT) + f_{\downarrow}^0(mT)$ через η , так что

$$\eta = \sum_{m=0}^{\infty} [f_{\downarrow}(mT) + f_{\downarrow}^0(mT)]^2. \quad (35.6)$$

Если условие (35.2) выполняется при достаточно малых величинах η (35.6), то имеет место устойчивость вынужденного процесса «в малом». Если условие (35.2) выполняется при фиксированной конечной величине η (35.6), то имеет место устойчивость вынужденного процесса «в большом». Если условие (35.2) выполняется при любой величине η (35.6), то имеет место устойчивость вынужденного процесса «в целом». Устойчивость вынужденного процесса в целом не для одной фиксированной характеристики нелинейного элемента $\Phi(x)$, а для некоторого семейства таких характеристик называется *абсолютной устойчивостью* вынужденного процесса.

Поскольку состояние равновесия является частным случаем вынужденного процесса, вызываемого постоянным внешним воздействием, то из устойчивости вынужденного процесса в целом либо абсолютной устойчивости вынужденного процесса следует и устойчивость положения равновесия. В этом случае можно говорить об устойчивости в целом либо абсолютной устойчивости нелинейной импульсной системы. Таким образом,

нелинейная импульсная система абсолютно устойчива, если все возможные в ней вынужденные процессы абсолютно устойчивы.

§ 35.2. Условия абсолютной устойчивости

Рассмотрим нелинейную импульсную систему (рис. 35.1), ко входу которой приложено ограниченное внешнее воздействие

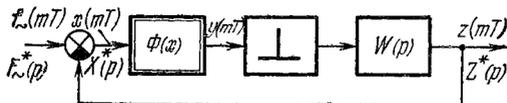


Рис. 35.1.

$f_{\sim}(mT)$. Предположим вначале, что ее линейная импульсная часть устойчива, т. е.

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\omega(mT)| < C, \quad \sum_{m=0}^{\infty} [\omega(mT)]^2 < C_1. \quad (35.7)$$

Найдем условия абсолютной устойчивости процессов в нелинейной импульсной системе. Свободный процесс в общем случае определяется уравнением (35.4). Образует функцию

$$\rho(M) = \sum_{m=0}^M \left[x^c(mT) - \frac{\hat{\Phi}(x^c(mT), m)}{k} \right] \hat{\Phi}(x^c(mT), m), \quad (35.8)$$

или

$$\rho(M) = \sum_{m=0}^M \left[\frac{1}{S(x^c(mT), m)} - \frac{1}{k} \right] \tilde{\Phi}^2(x^c(mT), m). \quad (35.9)$$

Здесь обозначено

$$S(x^c, m) = \frac{\tilde{\Phi}(x^c, m)}{x^c}, \quad (35.10)$$

а $\tilde{\Phi}(x^c, m)$ определяется выражением (35.5). Как видно из (35.5),

$$\tilde{\Phi}(0, m) = 0 \quad \forall m, \quad (35.11)$$

где \forall означает «для всех».Функция $\rho(M)$ (35.9) будет неотрицательна и конечна, если

$$0 < S(x^c, m) < k_0 \quad (35.12)$$

и

$$k_0 < k. \quad (35.13)$$

Подставляя в выражение $\rho(M)$ (35.8) $x^c(mT)$ из уравнения (35.4) и $\tilde{\Phi}(x^c(mT), m)$ из очевидного тождества

$$\frac{1}{k} \tilde{\Phi}(x^c(mT), m) = \sum_{s=0}^m \frac{\sigma(m-s)}{k} \tilde{\Phi}(x^c(sT), s), \quad (35.14)$$

где

$$\sigma(m-s) = \begin{cases} 1, & m=s, \\ 0, & m \neq s, \end{cases} \quad (35.15)$$

получим

$$\begin{aligned} \rho(M) &= \sum_{m=0}^M [f_{\downarrow}(mT) + f_{\downarrow}^0(mT)] \tilde{\Phi}(x^c(mT), m) - \\ &- \sum_{m=0}^M \sum_{s=0}^m \left[\omega((m-s)T) + \frac{\sigma(m-s)}{k} \right] + \tilde{\Phi}(x^c(sT), s) \tilde{\Phi}(x^c(mT), m), \end{aligned} \quad (35.16)$$

или

$$\rho(M) = \sum_{m=0}^M [f_{\downarrow}(mT) + f_{\downarrow}^0(mT)] \tilde{\Phi}(x^c(mT), m) - \Gamma_{\tilde{\Phi}}(M), \quad (35.17)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{\tilde{\Phi}}(M) &= \\ &= \sum_{m=0}^M \sum_{s=0}^m \left[\omega((m-s)T) + \frac{\sigma(m-s)}{k} \right] \tilde{\Phi}(x^c(sT), s) \tilde{\Phi}(x^c(mT), m) \end{aligned} \quad (35.18)$$

— квадратичная форма относительно $\tilde{\Phi}(x^c, m)$. Предположим, что для всех M ($M=1, 2, 3, \dots$) эта квадратичная форма неотрицательна, т. е.

$$\Gamma_{\tilde{\Phi}}(M) \geq 0 \quad \forall M. \quad (35.19)$$

Тогда, опуская $\Gamma_{\tilde{\Phi}}(M)$ в (35.17), получим неравенства

$$\rho(M) \leq \sum_{m=0}^M [f_{\downarrow}(mT) + f_{\downarrow}^0(mT)] \tilde{\Phi}(x^c(mT), m). \quad (35.20)$$

Заменяя $\rho(M)$ его значением из (35.9), получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^M \left[\frac{1}{S(x^c(mT), m)} - \frac{1}{k} \right] \tilde{\Phi}^2(x^c(mT), m) &\leq \\ &\leq \sum_{m=0}^M [f_{\downarrow}(mT) + f_{\downarrow}^0(mT)] \tilde{\Phi}(x^c(mT), m). \end{aligned} \quad (35.21)$$

Подставляя в левую часть неравенства (35.21) вместо $S(x^c(mT), m)$ верхнюю границу k_0 (35.12), получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^M \tilde{\Phi}^2(x^c(mT), m) \left[\frac{1}{S(x^c(mT), m)} - \frac{1}{k} \right] &\geq \\ &\geq \left(\frac{1}{k_0} - \frac{1}{k} \right) \sum_{m=0}^M \tilde{\Phi}^2(x^c(mT), m). \end{aligned} \quad (35.22)$$

Применяя к правой части неравенства (35.21) неравенств Коши — Буняковского (приложение 4), будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^M [f_{\downarrow}(mT) + f_{\downarrow}^0(mT)] \tilde{\Phi}(x^c(mT), m) &\leq \\ &\leq \left(\sum_{m=0}^M [f_{\downarrow}(mT) + f_{\downarrow}^0(mT)]^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^M \tilde{\Phi}^2(x^c(mT), m) \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (35.23)$$

На основании неравенств (35.22), (35.23) неравенство (35.21) можно усилить:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{k_0} - \frac{1}{k} \right) \sum_{m=0}^M \tilde{\Phi}^2(x^c(mT), m) &\leq \\ &\leq \left(\sum_{m=0}^M [f_{\downarrow}(mT) + f_{\downarrow}^0(mT)]^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^M \tilde{\Phi}^2(x^c(mT), m) \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (35.24)$$

Принимая во внимание, что в силу (35.13) левая часть неравенства (35.24) положительна, и возведя обе части неравенства (35.24) в квадрат, после очевидных сокращений получим

$$\sum_{m=0}^M \tilde{\Phi}^2(x^c(mT), m) \leq \left(\frac{k_0 k}{k - k_0}\right)^2 \sum_{m=0}^M [f_{\downarrow}(mT) + f_{\downarrow}^0(mT)]^2 \quad \forall M. \quad (35.25)$$

По определению исчезающих воздействий ряд их квадратов сходится, т. е.

$$\sum_{m=0}^M [f_{\downarrow}(mT) + f_{\downarrow}^0(mT)]^2 \leq \eta \quad \forall M. \quad (35.26)$$

Следовательно, из (35.26) получаем

$$\sum_{m=0}^M \tilde{\Phi}^2(x^c(mT), m) \leq \eta \left(\frac{k_0 k}{k - k_0}\right)^2 \quad \forall M. \quad (35.27)$$

Если суммы равномерно ограничены, то ряд $\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\Phi}^2(x^c(mT), m)$ сходится и его слагаемые при $m \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, т. е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{\Phi}(x^c(mT), m) = 0. \quad (35.28)$$

Но из уравнения свободного процесса (35.4) при условии (35.28) следует, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x^c(mT) = 0. \quad (35.29)$$

Отсюда следует вывод об абсолютной устойчивости процессов в нелинейной импульсной системе.

Условием абсолютной устойчивости процессов в нелинейных импульсных системах, как следует из изложенного, является неравенство (35.19) при $k < k_0$, т. е. неотрицательность квадратичной формы $\Gamma_{\tilde{\Phi}}(M)$ (35.18) при $k < k_0$ для всех M .

Для того чтобы процессы в нелинейной импульсной системе с устойчивой импульсной частью были абсолютно устойчивыми, достаточно, чтобы квадратичная форма

$$\begin{aligned} \Gamma_{\tilde{\Phi}}(M) &= \\ &= \sum_{m=0}^M \sum_{s=0}^M \left[w((m-s)T) + \frac{\sigma(m-s)}{k} \right] \tilde{\Phi}(x^c(sT), s) \tilde{\Phi}(x^c(mT), m) \end{aligned} \quad (35.30)$$

для $k < k_0$, где k_0 — верхняя грань $S(x^c, m)$, была бы неотрицательной для всех M .

Для установления условий абсолютной устойчивости состояния равновесия нелинейной импульсной системы, как это видно из уравнения свободного процесса (35.4), нужно в приведенных выше результатах положить

$$\dot{f}_{\downarrow}^0(mT) = 0 \quad (35.31)$$

и

$$\tilde{\Phi}(x^c, m) = \Phi(x^c). \quad (35.32)$$

Тогда квадратичная форма (35.30) переходит в

$$\begin{aligned} & \Gamma_{\Phi}(M) = \\ & = \sum_{m=0}^M \sum_{s=0}^m \left[\omega((m-s)T) + \frac{\sigma(m-s)}{k} \right] \Phi(x^c(sT)) \Phi(x^c(mT)) \end{aligned} \quad (35.33)$$

и

$$S(x^c, m) = S(x^c) = \frac{\Phi(x^c)}{x^c}. \quad (35.34)$$

Положение равновесия нелинейной импульсной системы с устойчивой импульсной частью будет абсолютно устойчивым, если квадратичная форма $\Gamma_{\Phi}(M)$ (35.33) для $k < k_0$, где k_0 — верхняя грань $S(x^c)$ (35.34), неотрицательна для всех M .

Установленные выше условия устойчивости процессов и состояния равновесия непосредственно трудно использовать, так как они требуют проверки бесконечного числа неравенств.

Перейдем к установлению на основе этих условий критериев абсолютной устойчивости, которые удобно было бы применять при конкретных исследованиях.

§ 35.3. Критерий абсолютной устойчивости

Обозначим

$$\hat{\omega}((m-s)T) = \begin{cases} \frac{1}{2} [\omega((m-s)T) + \omega((s-m)T)], & m \neq s, \\ \omega(0) + \frac{1}{k}, & m = s. \end{cases} \quad (35.35)$$

В отличие от временной характеристики $\omega((m-s)T)$, равной нулю при $m < s$, т. е. при отрицательных значениях аргумента, $\hat{\omega}((m-s)T)$, как видно из (35.35), существует как при положительных, так и при отрицательных значениях аргумента. При чем

$$\hat{\omega}(-mT) = \hat{\omega}(mT). \quad (35.36)$$

Пользуясь (35.35), можно квадратичную форму $\Gamma_{\tilde{\Phi}}(M)$ (35.30) представить в виде

$$\Gamma_{\tilde{\Phi}}(M) = \sum_{m=0}^M \sum_{s=0}^M \hat{w}((m-s)T) \tilde{\Phi}(x^c(mT), m) \tilde{\Phi}(x^c(sT), s). \quad (35.37)$$

Установим прежде всего условия неотрицательности квадратичной формы $\Gamma_{\tilde{\Phi}}(M)$ (35.37). Для этой цели воспользуемся двусторонним преобразованием Фурье

$$\hat{W}^*(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{w}(mT) e^{-j\omega mT}. \quad (35.38)$$

Обратное преобразование

$$\hat{w}(mT) = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \hat{W}^*(\omega) e^{j\omega mT} d\omega \quad (35.39)$$

определяет $\hat{w}(mT)$ по спектральной функции $\hat{W}^*(\omega)$. Подставляя $\hat{w}(mT)$ из (35.39) в (35.37), получим, после перемены порядка суммирования и интегрирования,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\tilde{\Phi}}(M) &= \\ &= \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \hat{W}^*(\omega) \sum_{m=0}^M \sum_{s=0}^M \tilde{\Phi}(x^c(mT), m) \tilde{\Phi}(x^c(sT), s) e^{j\omega(m-s)T} d\omega. \end{aligned} \quad (35.40)$$

Или так как

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^M \sum_{s=0}^M \tilde{\Phi}(x^c(mT), m) \tilde{\Phi}(x^c(sT), s) e^{j\omega(m-s)T} &= \\ &= \sum_{m=0}^M \tilde{\Phi}(x^c(mT), m) e^{j\omega mT} \sum_{s=0}^M \tilde{\Phi}(x^c(sT), s) e^{-j\omega sT} = \\ &= \left| \sum_{m=0}^M \tilde{\Phi}(x^c(mT), m) e^{j\omega mT} \right|^2, \end{aligned} \quad (35.41)$$

то

$$\Gamma_{\tilde{\Phi}}(M) = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \hat{W}^*(\omega) \left| \sum_{m=0}^M \tilde{\Phi}(x^c(mT), m) e^{j\omega mT} \right|^2 d\omega. \quad (35.42)$$

Отсюда видно, что условие неотрицательности $\Gamma_{\tilde{\Phi}}(M)$ (35.19) будет выполнено при любой $\tilde{\Phi}(x^c(mT), m)$, если будет неотрицательна спектральная функция $\hat{W}^*(\omega)$, т. е. если

$$\hat{W}^*(\omega) \geq 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}. \quad (35.43)$$

Но из (35.38) при учете (35.35) следует

$$\widehat{W}^*(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \omega(mT) e^{-j\omega mT} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{-\infty} \omega(-mT) e^{-j\omega mT}. \quad (35.44)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \omega(mT) e^{-j\omega mT} &= W^*(j\omega), \\ \sum_{m=0}^{-\infty} \omega(-mT) e^{-j\omega mT} &= \sum_{m=0}^{\infty} \omega(mT) e^{j\omega mT} = W^*(-j\omega), \end{aligned} \quad (35.45)$$

получим

$$\widehat{W}^*(\omega) = \frac{1}{2} W^*(j\omega) + \frac{1}{k} + \frac{1}{2} W^*(-j\omega),$$

или

$$\widehat{W}^*(\omega) = \operatorname{Re} W^*(j\omega) + \frac{1}{k}, \quad (35.46)$$

где $W^*(j\omega)$ — частотная характеристика линейной импульсной части. Таким образом, условие неотрицательности $\Gamma_{\Phi}(M)$ (35.43) запишется в виде

$$\operatorname{Re} W^*(j\omega) + \frac{1}{k} \geq 0, \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}. \quad (35.47)$$

Это же неравенство является также условием неотрицательности и $\Gamma_{\Phi}(M)$ (35.33).

Геометрический смысл неравенства (35.47) весьма прост. Проведем на плоскости частотной характеристики W^* вертикаль-

ную прямую $-\frac{1}{k}$ через точку

$(-\frac{1}{k}, j0)$ (рис. 35.2). Тогда неравенство (35.47) будет выполнено, если частотная характеристика линейной части импульсной системы $W^*(j\omega)$ ($0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$) будет расположена справа от вертикальной прямой.

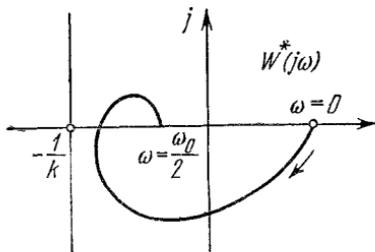


Рис. 35.2.

Теперь можно перейти к формулировке критериев устойчивости состояния равновесия и процессов. Для этого достаточно использовать условие (35.47) и выяснить конкретный смысл функции $S(x^c, m)$. При рассмотрении устойчивости состояния равновесия, как видно из (35.34), $S(x^c, m)$ представляет собой

коэффициент статической линейризации нелинейного элемента, т. е.

$$S(x^c, m) = k^{(c)}(x^c) = \frac{\Phi(x^c)}{x^c}. \quad (35.48)$$

Поэтому критерий устойчивости состояния равновесия нелинейной импульсной системы можно сформулировать следующим образом.

Состояние равновесия нелинейной импульсной системы с устойчивой линейной частью будет абсолютно устойчивым, если коэффициент статической линейризации нелинейного элемента удовлетворяет неравенству

$$0 < k^{(c)}(x) < k_0, \quad (35.49)$$

а частотная характеристика линейной импульсной части $W^(j\omega)$ расположена справа от вертикальной прямой $-\frac{1}{k}$, где $k > k_0$.*

Условие, налагаемое на коэффициент статической линейризации (35.49), равносильно условию принадлежности характеристики нелинейного элемента $\Phi(x)$ сектору $(0, k)$ (рис. 35.3). При рассмотрении устойчивости процессов, как следует из (35.5) и (35.10),

$$\begin{aligned} S(x^c, m) &= \\ &= \frac{\Phi(x^B(mT) + x^c) - \Phi(x^B(mT))}{x^c}, \end{aligned} \quad (35.50)$$

т. е. $S(x^c, m)$ представляет собой разделенную разность. Для непрерывной и дифференцируемой характеристики нелинейного элемента неравенство

$$0 < S(x^c, m) < k_0 \quad (35.51)$$

равносильно неравенству

$$0 < \frac{d\Phi(x^c)}{dx^c} < k_0, \quad (35.52)$$

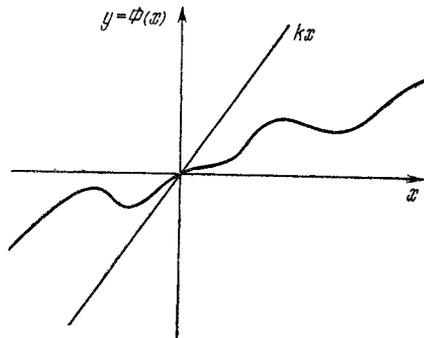


Рис. 35.3.

т. е. неравенству относительно коэффициента дифференциальной линейризации $k^{(n)}(x^c) = \frac{d\Phi(x^c)}{dx^c}$. Поэтому критерий устойчивости процессов можно сформулировать следующим образом.

Процессы в нелинейной импульсной системе с устойчивой импульсной частью, вызываемые ограниченным внешним воздействием, будут устойчивыми, если коэффициент дифференциальной линеаризации нелинейного элемента удовлетворяет условию

$$0 < k^{(x)}(x) < k_0, \quad (35.53)$$

а частотная характеристика линейной импульсной части $W^*(j\omega)$ расположена справа от вертикальной прямой $-\frac{1}{k}$, где $k > k_0$.

Условие (35.53), налагаемое на коэффициент дифференциальной линеаризации $k^{(x)}(x)$, равносильно не только условию принадлеж-

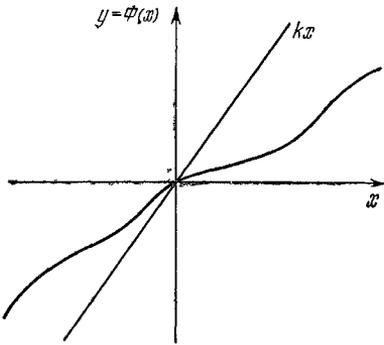


Рис. 35.4.

жности характеристики нелинейного элемента сектору $(0, k)$, но и ее монотонности (рис. 35.4). Критерий абсолютной устойчивости процессов предъявляет более жесткие требования к характеристике нелинейного элемента, чем критерий абсолютной устойчивости состояния равновесия.

Если характеристика нелинейного элемента зависит от времени:

$$y = \Phi(x, m),$$

то и коэффициенты статической линеаризации

$$k^{(c)}(x^c, m) = \frac{\Phi(x^c, m)}{x^c} \quad (35.54)$$

и дифференциальной линеаризации

$$k^{(x)}(x^c, m) = \frac{d\Phi(x^c, m)}{dx^c} \quad (35.55)$$

будут также зависеть от времени m . Критерии абсолютной устойчивости состояния равновесия и процессов такой нестационарной системы формулируются, как и выше, но вместо стационарных коэффициентов статической и дифференциальной линеаризации в них фигурируют нестационарные коэффициенты статической и дифференциальной линеаризации и условия вида (35.49), (35.53) должны выполняться при всех значениях m .

§ 35.4. Общий критерий абсолютной устойчивости

Рассмотрим теперь нелинейную импульсную систему, в которой линейная импульсная часть может быть пейтральной или неустойчивой, но при этом такой, которая допускает стабилизацию при помощи пропорциональной обратной связи (рис. 35.1). Эквивалентными преобразованиями эту структурную схему легко привести к виду как на рис. 35.5, где r — постоянная

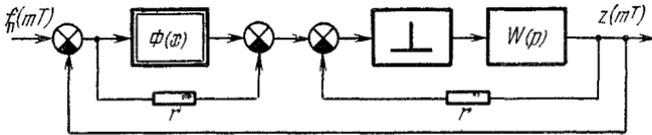


Рис 35.5

величина. В этой схеме характеристика нелинейного элемента определяется как

$$\Phi_{\Pi}(x) = \Phi(x) - rx, \quad (35.56)$$

Частотная характеристика линейной импульсной части равна

$$W_{\Pi}^*(j\omega) = \frac{W^*(j\omega)}{1 + rW^*(j\omega)}, \quad (35.57)$$

а спектр внешнего воздействия определяется выражением

$$F_{\Pi}^*(j\omega) = \frac{F^*(j\omega)}{1 + rF^*(j\omega)}. \quad (35.58)$$

Из (35.56) следует, что коэффициенты статической и дифференциальной линеаризации характеристики преобразованного $\Phi_{\Pi}(x)$ и исходного $\Phi(x)$ нелинейных элементов связаны соотношениями

$$k_{\Pi}^{(c)}(x) = k^{(c)}(x) - r \quad (35.59)$$

и

$$k_{\Pi}^{(h)}(x) = k^{(h)}(x) - r. \quad (35.60)$$

Если коэффициенты статической и дифференциальной линеаризации нелинейного элемента удовлетворяют неравенствам

$$r < k^{(c)}(x) < k_0 \quad (35.61)$$

и

$$r < k^{(h)}(x) < k_0, \quad (35.62)$$

то согласно (35.59), (35.60) $k_n^{(c)}(x)$ и $k_n^{(a)}(x)$ будут удовлетворять неравенствам

$$0 < k_n^{(c)}(x) < k_0 - r \quad (35.63)$$

и

$$0 < k_n^{(a)}(x) < k_0 - r. \quad (35.64)$$

Поскольку приведенная линейная импульсная часть должна быть устойчива, то согласно частотному критерию устойчивости частотная характеристика должна охватывать точку $(-\frac{1}{k}, j0)$ в положительном направлении $s_n/2$ раз, где s_n — индекс неустойчивости исходной линейной части. Условие неотрицательности типа (35.47) запишется в виде

$$\operatorname{Re} W_n^*(j\omega) + \frac{1}{k_0 - r} \geq 0. \quad (35.65)$$

Подставляя в (35.65) значение $W_n^*(j\omega)$ из (35.57), получим после простых преобразований

$$\operatorname{Re} \frac{1 + k_0 W^*(j\omega)}{1 + r W^*(j\omega)} \geq 0 \quad (k_0 > r). \quad (35.66)$$

Граница области, определяемой неравенством (35.66), задается уравнением

$$\operatorname{Re} \frac{1 + k_0 W^*(j\omega)}{1 + r W^*(j\omega)} = 0$$

или, что равносильно,

$$\operatorname{Re} [1 + k_0 W^*(j\omega)] [1 + r W^*(-j\omega)] = 0. \quad (35.67)$$

Уравнение вида (35.67) определяет собой окружность, проходящую через точки и $-\frac{1}{r}$, $-\frac{1}{k_0}$ с центром на оси абсцисс в точке $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{k_0} \right)$ и радиусом $\frac{1}{2} \left| \frac{1}{k_0} - \frac{1}{r} \right|$, а область, определяемая неравенством (35.66), соответствует внешности окружности при

$k_0 r > 0$ (рис. 35.6, а) и внутренности при $k_0 r < 0$ (рис. 35.6, б). Назовем для краткости эти окружности (k_0, r) -окружностями. Неравенство (35.66) будет выполняться, если частотная характеристика линейной импульсной части будет находиться в незаштрихованной области. Теперь нетрудно сформулировать *круговые критерии абсолютной устойчивости*.

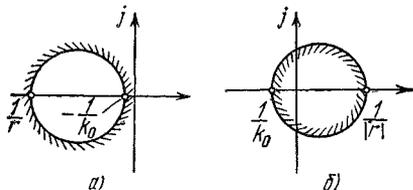


Рис. 35.6.

Критерий абсолютной устойчивости состояния равновесия (круговой критерий). Состояние равновесия нелинейной импульсной системы будет абсолютно устойчивым, если коэффициент статической линеаризации нелинейного элемента удовлетворяет неравенству

$$r < k^{(c)}(x) < k_0, \quad (35.68)$$

а частотная характеристика линейной импульсной части $W^*(j\omega)$ при $0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$ охватывает (k_0, r) -окружность при $k < k_0$ и $r > 0$ против часовой стрелки $s_H/2$ раз, где s_H — индекс неустойчивости.

На рис. 35.7 изображены случаи абсолютной устойчивости состояния равновесия при $s_H = 0$ (а) и $s_H = 2$ (б). Условие (35.68), налагаемое на коэффициент статической линеаризации

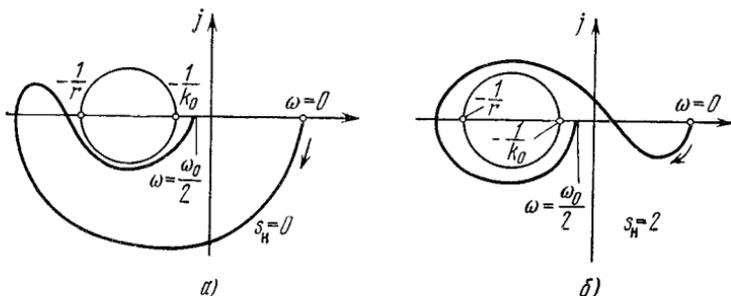


Рис. 35.7.

$k^{(c)}(x)$, равносильно условию принадлежности характеристики нелинейного элемента $\Phi(x)$ углу (r, k_0) (рис. 35.8).

Критерий абсолютной устойчивости процессов (круговой критерий). Процессы в нелинейной импульсной системе, вызванные ограниченным внешним воздействием, будут абсолютно устойчивыми, если коэффициент дифференциальной линеаризации нелинейного элемента удовлетворяет условию

$$r < k^{(d)}(x) < k_0, \quad (35.69)$$

а частотная характеристика линейной импульсной части $W^*(j\omega)$ при $0 \leq \omega \leq \frac{\omega}{2}$ охватывает (k_0, r) -окружность при $k < k_0$ и $r > 0$ против часовой стрелки $s_H/2$ раз, где s_H — индекс неустойчивости.

Условие (35.69), налагаемое на коэффициент дифференциальной линеаризации при $r > 0$, равносильно условию монотонности

характеристики нелинейного элемента в угле (r, k_0) . Монотонность в угле означает, что при перемещении начала угла вдоль характеристики так, что его стороны остаются параллельными, характеристики все время принадлежат углу.

Для устойчивой линейной импульсной части, $s_H = 0$, положения равновесия и, соответственно, процессы будут абсолютно

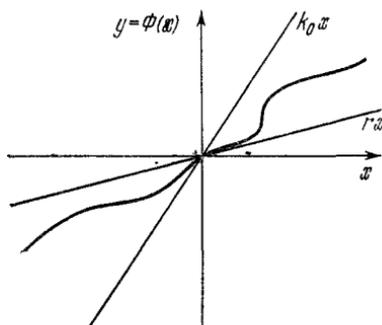


Рис. 35.8.

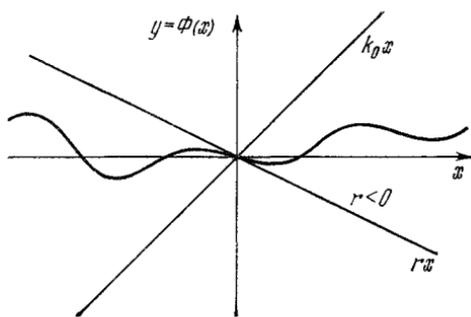


Рис. 35.9.

устойчивы, если выполнены неравенства (35.68) и, соответственно, (35.69) и частотная характеристика при $0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$ не охва-

тывает (k_0, r) -окружность. В этом случае можно принять $r < 0$ (рис. 35.9). При $r < 0$ выполнение неравенства (35.66) определяет внутренность окружности, и критерий абсолютной устойчивости положения равновесия или процессов будет выполняться при выполнении неравенств (35.68) или, соответственно, (35.69), если частотная характеристика линейной импульсной части будет расположена внутри (k_0, r) -окружности (рис. 35.10).

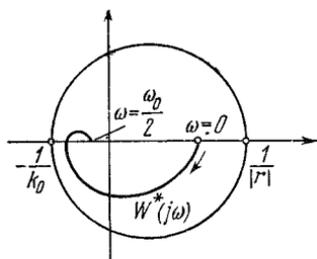


Рис. 35.10.

Установленные критерии абсолютной устойчивости справедливы и для нестационарных характеристик нелинейного элемента

$$y = \Phi(x, t),$$

если при всех $t \geq 0$ они удовлетворяют условиям (35.68) или (35.69). Если, начиная с некоторого $x^0 = \min(x^{(1)}, x^{(2)})$, условия (35.68), (35.69) не выполняются, то можно утверждать, что имеет место лишь устойчивость в большом.

З а д а ч и

35.1. Показать, что при дополнительном ограничении на характеристику нелинейного элемента

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} \geq 0$$

частотное условие устойчивости принимает вид

$$\operatorname{Re} [1 + \alpha (1 - e^{-j\omega T})] W^*(j\omega) + \frac{1}{k} > 0.$$

Дать геометрическую интерпретацию этому частотному условию.

35.2. Показать, что для абсолютной устойчивости нелинейной импульсной системы, частотная характеристика линейной импульсной части которой равна

$$W^*(j\omega) = \frac{0,572}{e^{j\omega T} - 1} + \frac{0,028}{e^{j\omega T} - 0,3},$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$0 < \frac{\Phi(x)}{x} < 3,25.$$

35.3. Показать, что условия абсолютной устойчивости цифрового фильтра (рис. 35.11) с характеристикой нелинейного элемента вида как на рис. 35.9

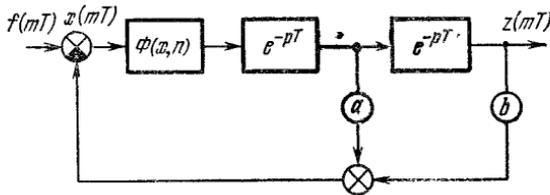


Рис. 35.11

и передаточной функцией $W^*(p) = ae^{-pT} + be^{-p2T}$ состоит в выполнении неравенств

$$-\alpha \leq \frac{\Phi(x, m)}{x} \leq 1, \quad |a + b| < 1, \quad |a - b| < 1, \quad \alpha > 0.$$

Показать, что эти условия необходимы и достаточны.

ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА СВОБОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 36.1. Мера быстродействия
нелинейных импульсных систем

Будем говорить, что *быстродействие* или *степень устойчивости* нелинейной импульсной системы не меньше заданной ξ_0 , если

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x^c(mT) e^{\xi_0 mT} = 0. \quad (36.1)$$

Для оценки быстродействия, или степени устойчивости, умножим обе части уравнения свободного процесса (35.4) на $e^{\xi_0 mT}$. Тогда получим после очевидных преобразований

$$x^c(mT) e^{\xi_0 mT} = f_{\downarrow}(mT) e^{\xi_0 mT} - \sum_{s=0}^m \omega((m-s)T) e^{\xi_0(m-s)T} T \tilde{\Phi} \left(\frac{x^c(mT) e^{\xi_0 mT}}{e^{\xi_0 mT}}, m \right) e^{\xi_0 mT}. \quad (36.2)$$

Вводя новые обозначения

$$\left. \begin{aligned} \check{x}^c(mT) &= x^c(mT) e^{\xi_0 mT}, \\ \check{f}_{\downarrow}(mT) &= f_{\downarrow}(mT) e^{\xi_0 mT}, \\ \check{\omega}(mT) &= \omega(mT) e^{\xi_0 mT}, \\ \tilde{\Phi}(\check{x}^c(mT), m) &= \tilde{\Phi} \left(\frac{x^c(mT) e^{\xi_0 mT}}{e^{\xi_0 mT}}, m \right) e^{\xi_0 mT}, \end{aligned} \right\} \quad (36.3)$$

запишем уравнение (36.2) в такой форме:

$$\check{x}^c(mT) = \check{f}_{\downarrow}(mT) - \sum_{s=0}^m \check{\omega}((m-s)T) \tilde{\Phi}(\check{x}^c(mT), m). \quad (36.4)$$

Это уравнение соответствует некой преобразованной нелинейной импульсной системе с нестационарной характеристикой нелиней-

ного элемента $\Phi(\check{x}^c, m)$ и видоизмененной линейной импульсной частью, обладающей временной характеристикой $\check{\omega}(mT)$. Очевидно, если преобразованная система будет абсолютно устойчивой, т. е. если

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \check{x}^c(mT) = \lim_{m \rightarrow \infty} x^c(mT) e^{\xi_0 mT} = 0, \quad (36.5)$$

то быстродействие исходной нелинейной импульсной системы будет не меньше ξ_0 . Отсюда следует, что оценка быстродействия исходной системы сводится к установлению абсолютной устойчивости преобразованной системы. Применим к последней общий критерий абсолютной устойчивости состояния равновесия, который, как мы отмечали уже выше, справедлив и для нестационарных характеристик. Найдем прежде всего частотную характеристику линейной импульсной части преобразованной системы. Так как согласно обозначению (36.3)

$$\check{\omega}(mT) = \omega(mT) e^{\xi_0 mT}, \quad (36.6)$$

то частотная характеристика, представляющая собой дискретное преобразование Фурье, будет равна

$$\check{W}^*(j\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \check{\omega}(mT) e^{-j\omega mT},$$

или, с учетом (36.6),

$$\check{W}^*(j\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \omega(mT) e^{-(j\omega - \xi_0) mT} = W^*(j\omega - \xi_0). \quad (36.7)$$

Назовем $W^*(j\omega - \xi_0)$ *смещенной частотной характеристикой*. Тогда нелинейная импульсная система будет обладать быстродействием, не меньшим ξ_0 , если смещенная частотная характеристика будет удовлетворять круговому критерию абсолютной устойчивости. При этом, если выполнены ограничения, налагаемые на статический коэффициент линеаризации $k^{(c)}(x)$ (35.54), то речь идет об оценке скорости достижения состояния равновесия. Если же выполнены ограничения, налагаемые на дифференциальный коэффициент линеаризации $k^{(w)}(x)$ (35.55), то тогда оценивается скорость установления процессов в нелинейной импульсной системе.

На рис. 36.1 приведены смещенные частотные характеристики $W^*(j\omega - \xi_0)$, которых система обладает степенью устойчивости ξ_0 , для случая устойчивой линейной импульсной части

(рис. 36.1, а) и неустойчивой линейной импульсной части с индексом неустойчивости $s_H = 2$ (рис. 36.1, б).

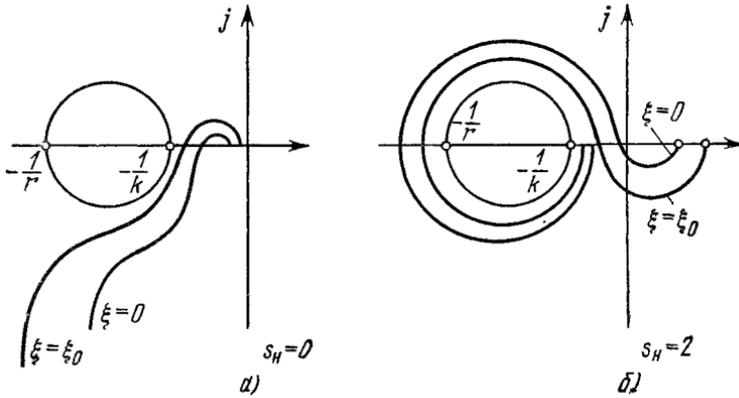


Рис. 36.1.

Пример. Определим степень устойчивости нелинейной импульсной системы, структура которой изображена на рис. 36.2. Характеристика $\Phi(x)$

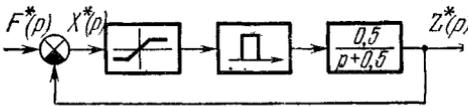


Рис. 36.2.

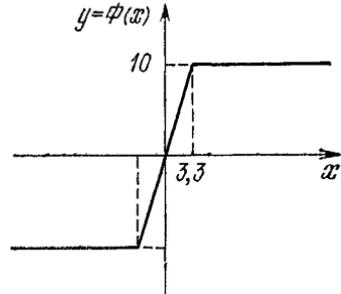


Рис. 36.3.

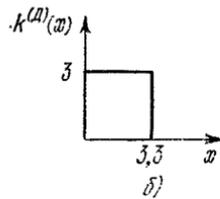
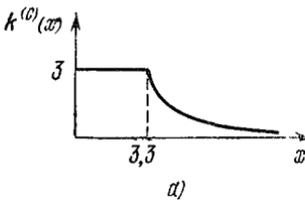


Рис. 36.4.

нелинейного элемента соответствует системе с насыщением (рис. 36.3):

$$\Phi(x) = \begin{cases} 10, & x > 3,3, \\ 3x, & |x| \leq 3,3, \\ -10, & x < -3,3 \end{cases}$$

При этом (рис. 36.4, а, б) $0 \leq k^{(c)}(x) \leq 3$ и $0 \leq k^{(z)}(x) \leq 3$. Частотная характеристика линейной импульсной части определяется выражением

$$W^*(j\omega) = \frac{0,39}{e^{j\omega} - 0,61}.$$

Смещенная частотная характеристика будет равна

$$W^*(j\omega - \xi) = \frac{0,39}{e^{j\omega - \xi} - 0,61}.$$

Она для различных значений $\xi = 0; 0,1; 0,2; 0,49$ построена на рис. 36.5. Как видно из рис. 36.5, максимальная степень устойчивости равна $\xi_0 = 0,49$. Проведя прямую $-\frac{1}{k} = -\frac{1}{0,33} = -0,33$,

для которой удовлетворяются критерию абсолютной устойчивости относительно смещенной частотной характеристики, находим значение степени устойчивости нелинейной системы, не меньшее величины $\xi_0 = 0,49$.

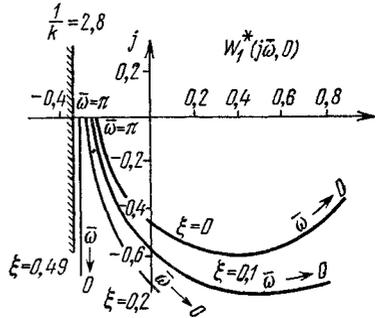


Рис. 36.5

§ 36.2. Оценка суммарного квадратического отклонения

Суммарное квадратическое отклонение, вызываемое собственным процессом, по аналогии с интегральным квадратическим отклонением (см. § 19.3) определим как

$$I = \sum_{m=0}^{\infty} [x^c(mT)]^2, \tag{36.8}$$

или

$$I_{\Phi} = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi^2(x^c(mT)), \tag{36.9}$$

если мы интересуемся суммарным квадратическим отклонением от состояния равновесия, или, наконец,

$$I_{\tilde{\Phi}} = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\Phi}^2(x^c(mT), m), \tag{36.10}$$

если мы интересуемся суммарным квадратическим отклонением от заданного процесса. Поскольку согласно (35.5)

$$\tilde{\Phi}(x^c(mT), m) = \Phi(x^b(mT) + x^c(mT)) - \Phi(x^b(mT)) \tag{36.11}$$

и, в частном случае, при $x^b(mT) \equiv 0$ становится равной

$$\tilde{\Phi}(x^c(mT), m) = \Phi(x^c(mT)), \tag{36.12}$$

то мы рассмотрим наиболее общее выражение суммарного квадратического отклонения (36.10) оценки $I_{\tilde{\Phi}}$. Точное значение $I_{\tilde{\Phi}}$

для нелинейной импульсной системы определить невозможно, поэтому мы ограничимся оценкой I_{Φ} . Для этой цели воспользуемся соотношением (35.25). При $M = \infty$ имеем

$$I_{\Phi} = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\Phi}^2(x^c(mT), m) \leq C \sum_{m=0}^{\infty} [f_{\downarrow}(mT) + f_{\downarrow}^0(mT)]^2, \quad (36.13)$$

или, принимая во внимание неравенство (35.27),

$$I_{\Phi} \leq \frac{k^2 k_0^2}{(k_0 - k)^2} \sum_{m=0}^{\infty} [f_{\downarrow}(mT) + f_{\downarrow}^0(mT)]^2. \quad (36.14)$$

Для получения наименьшей оценки выберем в (36.14)

$$k = k_s = \sup k^{(c)}(x^c) \quad (36.15)$$

или

$$k = k_s = \sup k^{(n)}(x^c),$$

где k_s — наибольшее значение коэффициента статической или дифференциальной линеаризации заданной характеристики нелинейного элемента или, при необходимости, семейства нелинейных характеристик. Тогда

$$I_{\Phi} \leq \frac{k_s^2 k_0^2}{(k_0 - k_s)^2} \sum_{m=0}^{\infty} [f_{\downarrow}(mT) + f_{\downarrow}^0(mT)]^2. \quad (36.16)$$

Используя равенство Парсеваля

$$\sum_{m=0}^{\infty} [f_{\downarrow}(mT) + f_{\downarrow}^0(mT)]^2 = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} |F_{\downarrow}^*(j\omega) + F_{\downarrow}^{0*}(j\omega)|^2 d\omega, \quad (36.17)$$

получаем из (36.16) вторую форму оценки:

$$I_{\Phi} = \frac{k_s^2 k_0^2}{(k_0 - k_s)^2} \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} |F_{\downarrow}^*(j\omega) + F_{\downarrow}^{0*}(j\omega)|^2 d\omega. \quad (36.18)$$

Обозначим через

$$k_i = \inf k^{(c)}(x^c)$$

или

$$k_i = \inf k^{(n)}(x^c)$$

наименьшее значение коэффициента статической или дифференциальной линеаризации; тогда, поскольку

$$\tilde{\Phi}^2(x^c, m) \geq k_i^2 [x^c]^2, \quad (36.19)$$

получим

$$I_{\Phi} \geq \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\Phi}^2(x^c(mT), m) \geq k_i \sum_{m=0}^{\infty} [x^c(mT)]^2 = k_i I_x \quad (36.20)$$

и, значит,

$$I_x \leq \frac{1}{k_i} I_{\tilde{\Phi}}, \quad (36.21)$$

т. е.

$$I_x \leq \frac{k_s^2 k_0^2}{(k_0 - k_s)^2 k_i^2} \sum_{m=0}^{\infty} [f_{\downarrow}(mT) + f_{\downarrow}^0(mT)]^2, \quad (36.22)$$

и

$$I_x \leq \frac{k_s^2 k_0^2}{(k_0 - k_s)^2 k_i^2} \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} |F_{\downarrow}^*(j\omega) + F_{\downarrow}^{0*}(j\omega)|^2 d\omega. \quad (36.23)$$

При $x^B \equiv 0$, а значит, и $f_{\downarrow}^0(mT) \equiv 0$ из (36.15), (36.16) и (36.17) получаем

$$I_{\Phi} = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi^2(x^c(mT)) \leq \frac{k_s^2 k_0^2}{(k_0 - k_s)^2} \sum_{m=0}^{\infty} f_{\downarrow}^2(mT) \quad (36.24)$$

и

$$I_{\Phi} \leq \frac{k_s^2 k_0^2}{(k_0^2 - k_s^2) k_i^2} \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} |F_{\downarrow}^*(j\omega)|^2 d\omega, \quad (36.25)$$

а из (36.22) и (36.23)

$$I_x \leq \frac{k_s^2 k_0^2}{(k_0^2 - k_s^2) k_i^2} \sum_{m=0}^{\infty} f_{\downarrow}^2(mT) \quad (36.26)$$

и

$$I_x \leq \frac{k_s^2 k_0^2}{(k_0^2 - k_s^2) k_i^2} \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} |F_{\downarrow}^*(j\omega)|^2 d\omega. \quad (36.27)$$

Если

$$r < k^{(c)}(x) < k_0 - r$$

или

$$r < k^{(n)}(x) < k_0 - r,$$

то

$$I_{\tilde{\Phi}} = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\Phi}_{\Pi}^2(x^c(mT), m) = \sum_{m=0}^{\infty} [\tilde{\Phi}(x^c(mT), m) - rx(mT)]^2$$

и в приведенных выше оценках следует заменить k_s на $k_s - r$, k_i на $k_i - r$, $f_{\downarrow}(mT)$ на $f_{\downarrow\Pi}(mT)$, $F_{\downarrow}^*(j\omega)$ на $F_{\downarrow\Pi}^*(j\omega)$.

З а д а ч и

36.1. Показать, что для нелинейной импульсной системы с частотной характеристикой линейной импульсной части, равной $W^*(j\omega) = \frac{0,39}{e^{j\omega T} - 0,61}$ и нелинейной характеристикой

$$\Phi(x) = \begin{cases} 10, & x \geq 3,3, \\ 3x, & |x| < 3,3, \\ -10 & x \leq -3,3 \end{cases}$$

причем $0 \leq \Phi'(x) \leq 3$, быстродействие, или степень устойчивости, удовлетворяет неравенству

$$\xi \leq 0,49$$

36.2. Показать, что для нелинейной системы с частотной характеристикой линейной импульсной части, равной

$$W^*(j\omega) = \frac{1}{e^{j\omega T} - 1} - \frac{1 - 0,368}{e^{j\omega T} - 0,368}$$

и нелинейной характеристикой

$$\Phi(x) = \begin{cases} 10, & x \geq 3,3, \\ 3x, & |x| < 3,3, \\ -10, & x \leq -3,3, \end{cases}$$

при

$$f(nT) = e^{-0,3nT} \quad n \geq 0$$

суммарная квадратичная ошибка удовлетворяет условию

$$I_{\Phi} \leq 0,35.$$

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМАХ

§ 37.1. Понятие о периодических процессах

Если условия абсолютной устойчивости состояния равновесия нелинейной импульсной системы не выполняются, то в ней могут возникать собственные периодические процессы. Эти собственные периодические процессы характеризуются тем, что их период кратен периоду повторения T . Внешне эти собственные *периодические процессы* напоминают автоколебания, которые при определенных условиях возникают в непрерывных системах (см. § 20.1). Однако использовать термин «автоколебания» применительно к нелинейным импульсным системам непосредственно нельзя. Говоря об автоколебаниях в тех или иных системах, всегда предполагают, что эти системы автономны, т. е. к ним не приложено внешнее периодическое воздействие либо в них отсутствует периодическое изменение параметров. Импульсные системы не являются автономными, так как импульсный элемент представляет собой модулятор (см. § 24.2), т. е. устройство, в котором периодически с периодом повторения T меняется некий параметр, а именно коэффициент усиления. Приложение к нелинейной импульсной системе внешнего периодического воздействия может вызвать сложные непериодические процессы, содержащие комбинацию колебаний, кратных периоду внешнего воздействия и периоду повторения. Картина резко упрощается, если период внешнего воздействия кратен периоду повторения T .

В отличие от нелинейных непрерывных систем, для нелинейных импульсных систем существует принципиальная возможность точного определения как собственных периодических процессов, так и вынужденных периодических процессов, кратных периоду повторения. Однако и для нелинейных импульсных систем в ряде случаев целесообразно использовать приближенные методы, основанные на *гармонической линеаризации*.

§ 37.2. Уравнения периодических процессов

Предположим, что внешнее воздействие $f(mT) = \tilde{f}(mT)$ представляет собой симметричную периодическую решетчатую функцию с полупериодом, равным NT (рис. 37.1). Будем искать периодические процессы того же полупериода, т. е.

$$\tilde{x}(mT) = (-1)^k \tilde{x}((m + kN)T), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (37.1)$$

Для нечетной характеристики нелинейного элемента

$$\Phi(x) = -\Phi(-x)$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi(\tilde{x}(mT)) &= \\ &= (-1)^k \Phi(\tilde{x}((m + kN)T)). \end{aligned} \quad (37.2)$$

Полагая в уравнении вынужденного процесса

$$x^B(mT) = \tilde{x}(mT), \quad (37.3)$$

запишем его в виде

$$\tilde{x}(mT) = \tilde{f}(mT) - \sum_{s=0}^{\infty} \omega(sT) \Phi(\tilde{x}((m-s)T)). \quad (37.4)$$

Разбивая интервал суммирования $(0, \infty)$ на сумму интервалов, равных полупериоду N , получим

$$\tilde{x}(mT) = \tilde{f}(mT) - \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=rN}^{(r+1)N-1} \omega(sT) \Phi(\tilde{x}((m-s)T)) \quad (37.5)$$

или, после замены переменной s на $s + rN$ и учета (37.2),

$$\tilde{x}(mT) = \tilde{f}(mT) - \sum_{s=0}^{N-1} \Phi(\tilde{x}((m-s)T)) \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \omega((s+rN)T). \quad (37.6)$$

Обозначим

$$\alpha_s(N) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \omega((s+rN)T). \quad (37.7)$$

Тогда из (37.6) получаем систему нелинейных уравнений относительно дискрет:

$$\tilde{x}(mT) = \tilde{f}(mT) - \sum_{s=0}^{N-1} \alpha_s(N) \Phi(\tilde{x}((m-s)T)), \quad (37.8)$$

определяющую N дискрет периодического процесса. Коэффициенты $\alpha_s(N)$ (37.7), входящие в систему уравнений, могут быть

представлены в замкнутой форме. Действительно, замечая, что $\omega(0) = 0$ и

$$\omega(mT) = \sum_{\nu=1}^n \frac{H^*(p_\nu)}{\dot{G}^*(p_\nu)} e^{p_\nu(m-1)T}, \quad m \geq 1, \dots, \quad (37.9)$$

и подставляя (37.9) в (37.7), получим после изменения очередности суммирований

$$\alpha_s(N) = \sum_{\nu=1}^n \frac{H^*(p_\nu)}{\dot{G}^*(p_\nu)} e^{p_\nu(s-1)T} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r e^{p_\nu r NT} \quad (37.10)$$

или, так как

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r e^{p_\nu r NT} = \frac{1}{1 + e^{p_\nu NT}}, \quad (37.11)$$

то окончательно получаем

$$\alpha_s(N) = \sum_{\nu=1}^n \frac{H^*(p_\nu)}{\dot{G}^*(p_\nu)} \frac{e^{p_\nu(s-1)T}}{1 + e^{p_\nu NT}}. \quad (37.12)$$

Найдем теперь систему уравнений не относительно дискрет, а относительно комплексных амплитуд периодического процесса.

Периодический процесс, определяемый периодической решетчатой функцией (37.1), может быть представлен в виде тригонометрического полинома

$$\tilde{x}(mT) = \frac{1}{2} \sum_{s=-N_1}^{N_1} \dot{A}_s e^{js \frac{\omega_0}{2N} mT}, \quad (37.13)$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ и

$$N_1 = \begin{cases} N, & \text{если } N \text{ нечетно,} \\ N-1, & \text{если } N \text{ четно,} \end{cases} \quad (37.14)$$

а штрих у суммы означает, что суммирование ведется только по нечетным индексам. Коэффициенты разложения \dot{A}_s определяются по формулам

$$\dot{A}_s = A_s e^{i\varphi_s} = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(mT) e^{-js \frac{\omega_0}{2N} mT}, \quad s = 1, 3, \dots, N-2, \quad (37.15)$$

и если N четно, то

$$\dot{A}_{N-1} = A_{N-1} e^{i\varphi_{N-1}} = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(mT) e^{-i(N-1) \frac{\omega_0}{2N} mT}, \quad (37.16)$$

если же N нечетно, то

$$\dot{A}_N = A_N = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(mT) e^{-j \frac{\omega_0}{2} mT}. \quad (37.16')$$

Выходная величина нелинейного элемента будет также периодична и обладать тем же полупериодом NT или частотой $\frac{\omega_0}{2N}$.

Поэтому, аналогично (37.13), можно записать

$$\Phi(\tilde{x}(mT)) = \frac{1}{2} \sum_{s=-N_1}^{N_1} \dot{B}_s e^{js \frac{\omega_0}{2N} mT}, \quad (37.17)$$

где

$$\dot{B}_s = B_s e^{j\psi_s} = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \Phi(\tilde{x}(mT)) e^{-js \frac{\omega_0}{2N} mT}, \quad s = 1, 3, 5, \dots \quad (37.18)$$

и если N четно, то

$$\dot{B}_{N-1} = B_{N-1} e^{j\psi_{N-1}} = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \Phi(\tilde{x}(mT)) e^{-j(N-1) \frac{\omega_0}{2N} mT}, \quad (37.19)$$

если же N нечетно, то

$$\dot{B}_N = B_N = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \Phi(\tilde{x}(mT)) e^{-j \frac{\omega_0}{2} mT}. \quad (37.19')$$

Представим периодическое внешнее воздействие также в виде

$$\tilde{f}(mT) = \frac{1}{2} \sum_{s=-N_1}^{N_1} \dot{C}_s e^{j \frac{\omega_0}{2N} mT}, \quad (37.20)$$

где \dot{C}_s определяется формулами, аналогичными (37.15), (37.16), (37.16'). Подставляя разложения (37.13), (37.17) и (37.20) в уравнение (37.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получим

$$\dot{A}_s = \dot{C}_s - \left[\sum_{s=0}^{\infty} \omega(sT) e^{-js \frac{\omega_0}{2N} mT} \right] \dot{B}_s, \quad (37.21)$$

или так как по определению величины

$$\sum_{s=0}^{\infty} \omega(sT) e^{-js \frac{\omega_0}{2N} mT} = W^* \left(j \frac{s\omega_0}{2N} \right), \quad (37.22)$$

т. е. являются значениями частотной характеристики линейной импульсной части, то из (37.21) следует

$$\dot{A}_s = \dot{C}_s - W^* \left(j \frac{s\omega_0}{2N} \right) \dot{B}_s, \quad s = 1, 3, 5, \dots \quad (37.23)$$

В этой системе равенств комплексные амплитуды \dot{B}_k гармонических составляющих выхода нелинейного элемента $\tilde{y}(mT) = \Phi(\tilde{x}(mT))$ зависят от комплексных составляющих ошибки $\dot{A}_1, \dot{A}_3, \dots, \dot{A}_N$ и полупериода N , т. е.

$$\dot{B}_s = \dot{B}_s(\dot{A}_1, \dot{A}_3, \dots, \dot{A}_N, N), \quad s = 1, 3, \dots \quad (37.24)$$

Поэтому (37.23) представляет собой систему нелинейных уравнений относительно комплексных амплитуд:

$$\dot{A}_s = \dot{C}_s - W^* \left(j \frac{s\omega_0}{2N} \right) \dot{B}_s(\dot{A}_1, \dot{A}_3, \dots, \dot{A}_N, N), \quad (37.25)$$

$$s = 1, 3, 5, \dots$$

Таким образом, мы получили две формы уравнений периодического процесса: относительно дискрет (37.8) и относительно комплексных амплитуд (37.25).

§ 37.3. Частные случаи

Для высокочастотных периодических процессов с $N = 1$ (рис. 37.2, а) и $N = 2$ (рис. 37.2, б) уравнения (37.25) существенно упрощаются и допускают простые графические способы их решения.

Так, при $N = 1$, а значит, и $m = 0$ из (37.8) получаем

$$\tilde{x}(0) = \tilde{f}(0) - \Phi(\tilde{x}(0)) \alpha_0(1), \quad (37.26)$$

откуда

$$\Phi(\tilde{x}(0)) = \frac{\tilde{f}(0) - \tilde{x}(0)}{\alpha_0(1)}. \quad (37.27)$$

Это нелинейное уравнение допускает простое графическое решение. На плоскости нелинейной характеристики $\Phi(\tilde{x})$ (рис.

37.3, а) проводится прямая $\frac{\tilde{f}(0) - \tilde{x}}{\alpha_0(1)}$, проходящая через точку $\tilde{x} = \tilde{f}$ с наклоном $\frac{1}{\alpha_0(1)}$. Предположим, что $\alpha_0(1) < 0$, тогда наклон прямой положителен. Точка пересечения этой прямой с нелинейной характеристикой определяет дискреты вынужденного периодического процесса $\tilde{x}(0)$. Если $\tilde{f}(0) = 0$, то прямая $-\frac{\tilde{x}}{\alpha_0(1)}$

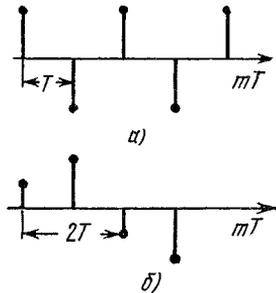


Рис. 37.2.

проходит через начало координат (рис. 37.3, б). В этом случае определится дискрет свободной периодической системы. Наличие нескольких точек пересечения (рис. 37.3, в) свидетельствует о возможности существования нескольких периодических процессов одной и той же частоты, но с различными дискретами.

Аналогично из уравнения относительно комплексных амплитуд (37.25) получаем при $s = N = 1$

$$\dot{A}_1 = \dot{C}_1 - W^* \left(j \frac{\omega_0}{2} \right) \dot{B}_1 (\dot{A}_1). \quad (37.28)$$

Согласно формулам (37.16'), (37.19') при $N = 1$ получаем

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \bar{x}(0), \quad \dot{C}_1 = \bar{f}(0), \\ \dot{B}_1 &= \Phi(\bar{x}(0)). \end{aligned} \quad (37.29)$$

Поэтому (37.28) запишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{x}(0) &= \bar{f}(0) - \\ &- W^* \left(\frac{j\omega_0}{2} \right) \Phi(\bar{x}(0)). \end{aligned} \quad (37.30)$$

Из (37.7) при $s = N = 1$ и $p = j \frac{\omega_0}{2}$ следует

$$\begin{aligned} \alpha_0(1) &= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \omega(sT) = \\ &= W \left(j \frac{\omega_0}{2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения (37.26) и (37.30) тождественны, что и следовало ожидать.

Рассмотрим возможность существования собственных высокочастотных периодических процессов ($N = 1, \omega_c = \frac{\omega_0}{2}$) в нелинейной импульсной системе в предположении, что характеристика нелинейного элемента обладает насыщением (рис. 37.4). Про-

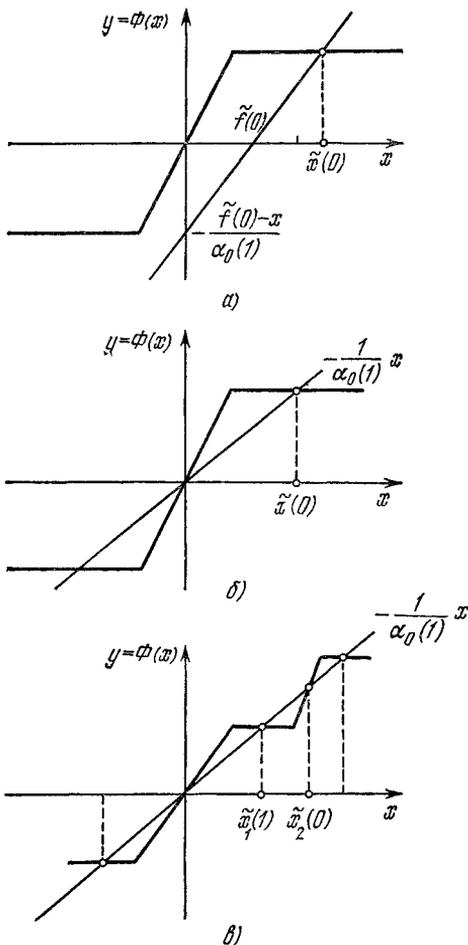


Рис. 37.3.

водя прямую $-\tilde{x}/W^*(j\frac{\omega_0}{2})$, замечаем, что она будет пересекать характеристику нелинейного элемента в точке \tilde{x} , отличной от начала координат, если будет выполнено условие

$$-1/W^*(j\frac{\omega_0}{2}) > k > 0,$$

где k — максимальный статический коэффициент линеаризации, или, поскольку

$$W^*(j\frac{\omega_0}{2}) = \operatorname{Re} W^*(j\frac{\omega_0}{2}),$$

если

$$\operatorname{Re} W^*(j\frac{\omega_0}{2}) + \frac{1}{k} < 0. \quad (37.31)$$

Но неравенство (37.31) свидетельствует о невыполнении условия абсолютной устойчивости для частоты $\omega_c = \frac{\omega_0}{2}$. Таким образом,

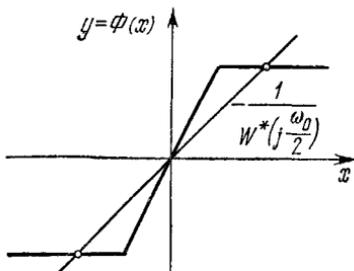


Рис. 37.4.

Если частотное неравенство (35.47) нарушается на частоте $\omega_0/2$, то в системе возможен периодический процесс частоты $\omega_0/2$.

Для определения возможности существования периодического процесса, соответствующего $N=2$, т.е. с частотой $\omega_c = \frac{\omega_0}{4}$, удобно воспользоваться уравнением относительно комплексных амплитуд (37.25). Полагая в (37.25) $N=2$ и $s=1$, получим

$$\dot{A}_1 = \dot{C}_1 - W^*(j\frac{\omega_0}{4}) \dot{B}_1(A_1). \quad (37.32)$$

Обозначим

$$\frac{\dot{B}_1(A_1)}{\dot{A}_1} = k^{(r)}(A_1, 2). \quad (37.33)$$

Учитывая выражение для \dot{B}_1 (37.18) и (37.15), при $s=1$ и $N=2$ запишем (37.3) в виде

$$k^{(r)}(A_1, 2) = k^{(r)}(A_1, \varphi_1, 2) = \frac{1}{A_1} \sum_{m=0}^1 \Phi(\tilde{x}(mT)) e^{-i(\frac{\omega_0}{4} mT + \varphi_1)}. \quad (37.34)$$

Но так как в этом случае, как видно из (37.13), при $N=2$ и, значит, $N_1 = N - 1 = 1$

$$\tilde{x}(mT) = \frac{1}{2} (\dot{A}_1 e^{i\frac{\omega_0}{4} mT} + \dot{A}_{-1} e^{-i\frac{\omega_0}{4} mT}) = A_1 \cos\left(\frac{\omega_0}{4} mT + \varphi_1\right), \quad (37.35)$$

то следовательно,

$$k^{(r)}(A_1, \varphi_1, 2) = \frac{2}{A_1} \sum_{m=0}^1 \Phi \left(A_1 \cos \left(\frac{\omega_0}{4} mT + \varphi_1 \right) \right) e^{-j \left(\frac{\omega_0}{4} mT + \varphi_1 \right)}. \quad (37.36)$$

Выражение (37.36) представляет собой частный случай коэффициента гармонической линейаризации.

При $N = 2$ коэффициент гармонической линейаризации точно, а не приближенно характеризует нелинейный элемент.

Это связано с тем, что две дискреты всегда определяют решетчатую гармоническую функцию, а значит, при $N = 2$ любое нелинейное преобразование решетчатой гармонической функции представляет собой также решетчатую гармоническую функцию. Пользуясь введенным обозначением коэффициента гармонической линейаризации (37.33), (37.36), запишем уравнение (37.32) в виде

$$W^* \left(j \frac{\omega_0}{4} \right) = \frac{\dot{C}_1 - 1}{k^{(r)}(A_1, \varphi_1, 2)}. \quad (37.37)$$

Это уравнение при заданном значении \dot{C}_1 определяет параметры периодического процесса A_1 и φ_1 , которые могут быть найдены графически. Мы, однако, отложим это графическое построение до следующего параграфа, посвященного общему приближенному методу определения параметров периодического процесса, который для $N = 2$ совпадает с описанием здесь точным методом.

§ 37.4. Приближенный метод определения периодических процессов

Предположим, что внешнее воздействие $\tilde{f}(mT)$, приложенное ко входу нелинейной импульсной системы, представляет собой решетчатую гармоническую функцию, и будем искать периодический процесс в виде решетчатой гармонической функции. Это значит, что в тригонометрических полиномах для $\tilde{f}(mT)$ (37.20) и $\tilde{x}(mT)$ (37.13) N_1 следует полагать равным 1. Разумеется, при этом тригонометрический полином для $\Phi(\tilde{x}(mT))$ (37.17) не будет гармонической решетчатой функцией и наше приближение будет состоять в том, что в тригонометрическом полиноме для $\Phi(\tilde{x}(mT))$ (37.17) мы ограничимся только первой решетчатой гармоникой. Это значит, что из всей совокупности уравнений (37.25) мы оставляем лишь уравнение при $s = 1$ и в выражении

для \dot{A}_1 (37.24) следует положить $\dot{A}_3 = \dot{A}_5 = \dots = \dot{A}_N = 0$. Таким образом, мы получаем из (37.25), (37.24)

$$\dot{A}_1 = \dot{C}_1 - W^* \left(j \frac{\omega_0}{2N} \right) \dot{B}_1(A_1, N), \quad (37.38)$$

или

$$W^* \left(j \frac{\omega_0}{2N} \right) = \frac{\dot{C}_1 - 1}{k^{(r)}(A_1, \varphi_1, N)}, \quad (37.39)$$

где, как следует из (37.18),

$$\begin{aligned} k^{(r)}(A_1, \varphi_1, N) &= \frac{\dot{B}_1}{\dot{A}_1} = \\ &= \frac{2}{A_1 N} \sum_{m=0}^{N-1} \Phi \left(A_1 \sin \left(\frac{\omega_0}{2N} mT + \varphi_1 \right) \right) e^{-j \left(\frac{\omega_0}{2N} mT + \varphi_1 \right)} \end{aligned}$$

— коэффициент гармонической линейризации нелинейного элемента. Заметим, что уравнение (37.39) может быть также получено из уравнения (37.4) при замене в нем характеристики нелинейного элемента гармонической линейризованной характеристикой. Ясно, что приближенный метод, основанный на соотношении (37.38), будет давать результаты, тем более близкие к точным, чем сильнее выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \left| W^* \left(j \frac{\omega_0}{2} \right) \right| &\gg \left| W^* \left(j s \frac{\omega_0}{2N} \right) \right|, \\ s &= 3, 5, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Для исследования собственных периодических процессов в (37.39) следует положить $\dot{C}_1 \equiv 0$, и тогда

$$W^* \left(j \frac{\omega_0}{2N} \right) = - \frac{1}{k^{(r)}(A_1, \varphi_1, N)}.$$

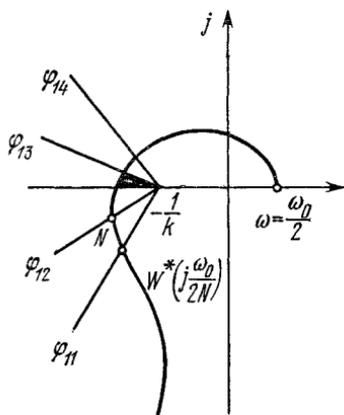


Рис. 37.5.

Изобразим на плоскости частотной характеристики линейной импульсной части $W^*(j\omega)$ коэффициент гармонической линейризации как функцию A_1 , при различных φ_1 и фиксированном N (рис. 37.5). Тогда точка пересечения частотной характеристики $W^* \left(j \frac{\omega_0}{2N} \right)$ и $k^{(r)}(A_1, \varphi_1, N)$ для данного N определяет частоту $\frac{\omega_0}{2N}$ свободного периодического процесса по оцифровке

$W^*(j \frac{\omega_0}{2N})$, его амплитуду по оцифровке кривой $1/k^{(r)}(A_1, \varphi_1, N)$ и фазу φ_1 по параметру этой кривой.

Пример. Пусть характеристика нелинейного элемента равна

$$\Phi(x) = ax + bx^3.$$

Коэффициент гармонической линеаризации для такой характеристики равен

$$k^{(r)}(A_1, \varphi_1, N) = \begin{cases} a \left[1 - \frac{b}{4a} A_1^2 (3 - e^{j4\varphi_1}) \right] & \text{при } N = 2, \\ a \left[1 - \frac{b}{4a} A_1^2 \right] & \text{при } N \geq 3. \end{cases}$$

Для частот $\frac{\omega_0}{2N}$ при $N \geq 3$ дискретные коэффициенты гармонической линеаризации импульсного и непрерывного нелинейных элементов совпадают, и поэтому при анализе периодических режимов можно использовать коэффициент гармонической линеаризации непрерывного нелинейного элемента.

Задачи

37.1. Показать, что в нелинейной импульсной системе (рис. 37.6) возможны периодические движения вида

$$\tilde{y}(mT) = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ a, & m = 1, \\ -1 & m = 2, \\ -a & m = 3, \end{cases}$$

где $0 < a < 1$.

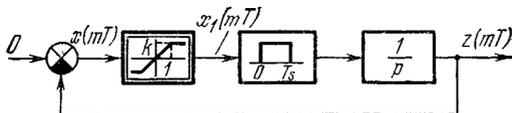


Рис. 37.6.

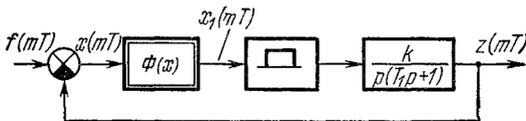


Рис. 37.7.

37.2. Показать, что в нелинейной импульсной системе (рис. 37.7) с релейной характеристикой нелинейного элемента, изображенной на рис. 37.8, суще-

ствуют периодические колебания вида $+1, +1, -1, -1$ и не могут существовать периодические колебания вида $0, +1, -1, 0$.

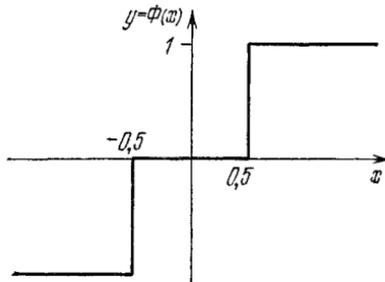


Рис. 37.8

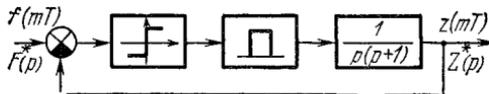


Рис. 37.9

37.3. Показать, что в релейно-импульсной системе (рис. 37.9) возможны периодические колебания частот $\omega = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$. Пользуясь методом гармонического баланса, определить амплитуды этих колебаний.

ИМПУЛЬСНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

§ 38.1. Понятие об импульсном моделировании

Для импульсных автоматических систем, как мы уже видели, не существует принципиальных трудностей в вычислении процессов при произвольных внешних воздействиях. Применение цифровых вычислительных машин для этой цели особенно просто, так как разностные или суммарные уравнения представляют собой программы рекуррентного вычисления процесса.

При стремлении периода повторения к нулю импульсная система стремится к некоторой непрерывной системе, т. е.

непрерывная система является предельным случаем для импульсной системы при стремлении периода повторения к нулю.

Поэтому при достаточно малом периоде повторения и, возможно, при выполнении некоторых дополнительных условий процессы в непрерывной и импульсной системах будут близки друг к другу. Это обстоятельство позволяет при изучении процессов в непрерывных системах заменить их соответствующими импульсными системами и воспользоваться затем рекуррентными соотношениями. Собственно говоря, все численные методы решения дифференциальных уравнений, основанные на замене последних разностными уравнениями, по существу, связаны с идеей замены непрерывной системы соответствующей импульсной, и различие в способах вызвано различными способами этой замены. Такую замену мы будем называть *импульсным моделированием*. Особые возможности импульсное моделирование раскрывает в связи с широким применением цифровых вычислительных машин. Переход от непрерывной системы к ее импульсной модели возможен различными способами.

Наиболее естественный и простой способ получения цифровой модели для заданной непрерывной системы состоит в следующем. Строим аналоговую модель (рис. 38.1, а) для заданной непрерывной системы и вводим в эту модель импульсный эле-

мент. Таким образом мы получаем импульсную модель (рис. 38.1, б). Для этой импульсной модели находим передаточную функцию $K^*(p)$ и выписываем, как это было изложено ранее, рекуррентные соотношения, которые и используются в качестве приближенных при построении процесса на ЦВМ. Для получения передаточной функции импульсной модели $K^*(p)$ нужно знать полюсы передаточной функции непрерывной части $K(p)$, что в случае сложной непрерывной части представляет определенные трудности. Этого можно избежать, если ввести не один, а несколько импульсных элементов так, чтобы следующие за ними непрерывные части были просты и определение полюсов их не представляло бы труда.

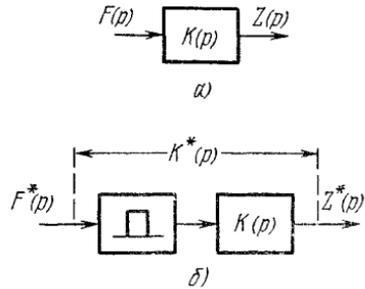


Рис 38.1

§ 38.2. Определение передаточной функции импульсной модели по передаточной функции непрерывной модели

Рассмотрим передаточную функцию импульсной модели, в которой формирующее устройство генерирует импульсы прямоугольной формы со скважностью, равной 1:

$$K^*(p) = - \sum_{v=1}^n c_v \frac{1 - e^{p_v T}}{p_v} \frac{1}{e^{pT} - e^{p_v T}}. \quad (38.1)$$

Соответствующая передаточная функция непрерывной модели получается из (38.1) при $T \rightarrow 0$. Действительно, замечая, что

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1 - e^{p_v T}}{p_v} \frac{1}{e^{pT} - e^{p_v T}} = - \frac{1}{p - p_v}, \quad (38.2)$$

получаем

$$K(p) = \sum_{v=1}^n c_v \frac{1}{p - p_v}. \quad (38.3)$$

Найдем связь между передаточными функциями импульсной $K^*(p)$ и непрерывной $K(p)$ моделей. Для достаточно малых периодов повторения, таких, что

$$T |p_v| \ll 1, \quad v = 1, 2, \dots, n,$$

приближенно можно положить

$$e^{\rho_v T} = \frac{e^{\rho_v \frac{T}{2}}}{e^{-\rho_v \frac{T}{2}}} \approx \frac{1 + \rho_v \frac{T}{2}}{1 - \rho_v \frac{T}{2}} \quad (38.4)$$

и, значит,

$$\frac{1 - e^{\rho_v T}}{\rho_v} \approx \frac{T}{1 - \rho_v \frac{T}{2}}. \quad (38.5)$$

Подставляя в (38.1) вместо $\frac{1 - e^{\rho_v T}}{\rho_v}$ и $e^{\rho_v T}$ их приближенные значения из (38.5) и (38.4), после элементарных преобразований получим

$$K^*(p) = \frac{2}{e^{\rho T} + 1} \sum_{v=1}^n c_v \frac{1}{\frac{2}{T} \frac{e^{\rho T} - 1}{e^{\rho T} + 1} - \rho_v}. \quad (38.6)$$

Но согласно (38.3)

$$\sum_{v=1}^n c_v \frac{1}{\frac{2}{T} \frac{e^{\rho T} - 1}{e^{\rho T} + 1} - \rho_v} = K \left(\frac{2}{T} \frac{e^{\rho T} - 1}{e^{\rho T} + 1} \right). \quad (38.7)$$

Следовательно, из (38.6) получим

$$K^*(p) = \frac{2}{e^{\rho T} + 1} K \left(\frac{2}{T} \frac{e^{\rho T} - 1}{e^{\rho T} + 1} \right). \quad (38.8)$$

Таким образом,

для получения передаточной функции импульсной модели нужно в передаточной функции непрерывной модели заменить

$$p \text{ на } \frac{2}{T} \frac{e^{\rho T} - 1}{e^{\rho T} + 1}$$

и полученный результат умножить на $\frac{2}{e^{\rho T} + 1}$.

Соотношение (38.8) позволяет определить передаточную функцию импульсной модели $K^*(p)$ непосредственно по передаточной функции непрерывной модели $K(p)$, минуя предварительное определение полюсов $K(p)$ и минуя разложение ее на простейшие дроби. Разумеется, эта возможность не дается бесплат-

но. Соотношение (38.8) — приближенное, и оно тем точнее выполняется, чем меньше период повторения. По $K^*(p)$ можно определить $k(mT)$ известными способами.

§ 38.3. Аппроксимация операций интегрирования

Одной из основных операций в непрерывных моделях является *интегрирование*. Попытаемся аппроксимировать эту операцию, не осуществимую точно в импульсных моделях, с помощью тех операций, которые легко осуществляются в них. Речь идет о замене непрерывного интегратора некоторым дискретным интегратором, который уместно назвать *дигратором*. Для этой цели рассмотрим уравнение интегратора

$$\frac{dz(t)}{dt} = f(t), \quad z(0) = 0, \quad (38.9)$$

или

$$z(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (38.10)$$

Передаточная функция интегратора, очевидно, равна

$$K_{\text{и}}(p) = \frac{1}{p}. \quad (38.11)$$

Положим в (38.10) $t = mT$; тогда

$$z(mT) = \int_0^{mT} f(\tau) d\tau \quad (38.12)$$

и, значит,

$$z((m-k)T) = \int_0^{(m-k)T} f(\tau) d\tau. \quad (38.13)$$

Вычитая (38.13) из (38.12), получаем

$$z(mT) - z((m-k)T) = \int_{(m-k)T}^{mT} f(\tau) d\tau, \quad (38.14)$$

или

$$z(mT) = z((m-k)T) + \int_{(m-k)T}^{mT} f(\tau) d\tau. \quad (38.15)$$

Соотношения (38.14), (38.15) представляют собой разностные уравнения k -го порядка. Смысл уравнения (38.15) весьма прост.

Площадь под кривой $f(t)$ в интервале $(0, mT)$, обозначаемая как $z(mT)$, равна сумме площади под кривой $f(t)$ в интервале $(0, (m-k)T)$, обозначаемой как $z((m-k)T)$, и площади в интервале $((m-k)T, mT)$. В частном случае при $k=1$ (рис. 38.2) получаем из (38.15)

$$z(mT) = z[(m-1)T] + \int_{(m-1)T}^{mT} f(\tau) d\tau. \quad (38.16)$$

Конкретный вид разностных уравнений (38.15), (38.16) зависит от вида аппроксимации интеграла, связанного с тем или иным

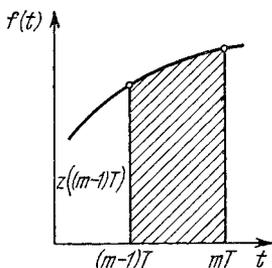


Рис. 38.2

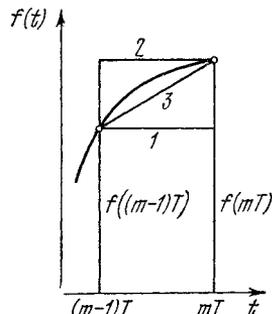


Рис. 38.3

способом вычисления элементарной площади $f(t)$ в интервале $((m-k)T, mT)$, т. е. способом *численного интегрирования*. Рассмотрим известные способы численного интегрирования.

а) *Способ прямоугольников* (рис. 38.3 (1, 2)). В этом случае (рис. 38.3 (1))

$$\int_{(m-1)T}^{mT} f(\tau) d\tau \approx Tf((m-1)T) \quad (38.17)$$

и, значит, из (38.16) мы получим

$$z(mT) = z((m-1)T) + Tf((m-1)T). \quad (38.18)$$

Подвергая (38.18) D -преобразованию, находим передаточную функцию

$$K_n^*(p) = \frac{T e^{-pT}}{1 - e^{-pT}} = \frac{T}{e^{pT} - 1}. \quad (38.19)$$

В случае как на рис. 38.3(2)

$$\int_{(m-1)T}^{mT} f(\tau) d\tau \approx Tf(mT) \quad (38.20)$$

и поэтому из (38.16) имеем

$$z(mT) = z((m-1)T) + Tf(mT). \quad (38.21)$$

Подвергая (38.21) D -преобразованию, находим передаточную функцию

$$K_n^*(p) = \frac{T}{1 - e^{-pT}} = \frac{T e^{pT}}{e^{pT} - 1}. \quad (38.22)$$

б) *Способ трапеций.* В этом случае $f(T)$ аппроксимируется прямой (рис. 38.3 (3))

$$\int_{(m-1)T}^{mT} f(\tau) d\tau \approx \frac{T}{2} [f(mT) + f((m-1)T)] \quad (38.23)$$

и, следовательно, уравнение (38.16) принимает вид

$$z(mT) = z((m-1)T) + \frac{T}{2} [f(mT) + f((m-1)T)]. \quad (38.24)$$

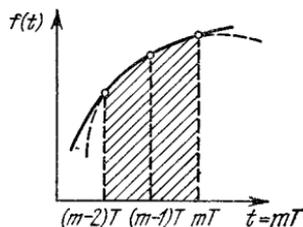


Рис. 38.4.

Соответствующая передаточная функция будет равна

$$K_n^*(p) = \frac{T}{2} \frac{1 - e^{-pT}}{1 + e^{-pT}} = \frac{T}{2} \frac{e^{pT} - 1}{e^{pT} + 1}. \quad (38.25)$$

в) *Способ Симпсона.* В этом случае $f(t)$ аппроксимируется параболой (рис. 38.4)

$$\int_{(m-2)T}^{mT} f(\tau) d\tau = \frac{T}{3} [f(mT) + 4f((m-1)T) + f((m-2)T)]. \quad (38.26)$$

Уравнение (38.15) при $k=2$ принимает вид

$$z(mT) = z((m-2)T) + \frac{T}{3} [f(mT) + 4f((m-1)T) + f((m-2)T)]. \quad (38.27)$$

Отсюда находим передаточную функцию:

$$K_n^*(p) = \frac{T}{3} \frac{1 + 4e^{-pT} + e^{-2pT}}{1 - e^{2pT}} = \frac{T}{2} \frac{e^{2pT} + 4e^{pT} + 1}{e^{2pT} - 1}. \quad (38.28)$$

Аналогичным путем можно получить передаточные функции и для более сложных способов численного интегрирования. Однако мы этого делать не будем.

Таким образом, в зависимости от выбранного способа численного интегрирования мы заменяем передаточную функцию

интегратора (38.11) одной из передаточных функций дигратора $K^*(p)$, которая представляет собой частный случай передаточных функций импульсных фильтров. Полезно вычислить частотные характеристики диграторов и сопоставить их с частотной

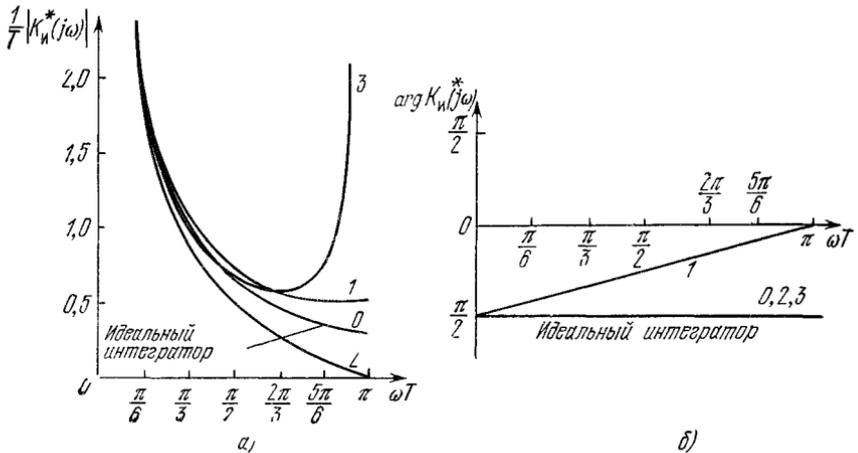


Рис. 38.5.

характеристикой интегратора. Частотная характеристика интегратора получается из (38.11) при замене $p = j\omega$, так что

$$K_n(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}. \quad (38.29)$$

Аналогично получаем частотные характеристики для диграторов при разных численных способах интегрирования.

а) Способ прямоугольников:

$$K_n^*(j\omega) = \frac{T}{e^{j\omega T} - 1} = \frac{T}{2 \sin \frac{\omega T}{2}} e^{-j\frac{\omega T - \pi}{2}} \quad (38.30)$$

и

$$K_n^*(j\omega) = \frac{T e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - 1} = \frac{T}{2 \sin \frac{\omega T}{2}} e^{-j\frac{\omega T + \pi}{2}}. \quad (38.31)$$

б) Способ трапеций:

$$K_n^*(j\omega) = \frac{T}{2} \frac{e^{j\omega T} + 1}{e^{j\omega T} - 1} = \frac{T}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad (38.32)$$

$$0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2} = \frac{\pi}{T}.$$

в) *Способ Симпсона:*

$$K_n^*(j\omega) = \frac{T}{3} \frac{e^{2j\omega T} + 4e^{j\omega T} + 1}{e^{2j\omega T} - 1} = \frac{T}{3} \frac{2 + \cos \omega T}{\sin \omega T} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad (38.33)$$

$$0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2} = \frac{\pi}{T}.$$

Амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики интегратора и диграторов изображены на рис. 38.5 (а, б). Из этого рисунка видно, что диграторы, реализующие способ трапеций (2) и Симпсона (3), имеют фазовую характеристику, совпадающую с фазовой характеристикой интегратора (0), тогда как фазовая характеристика диграторов, реализующих способы прямоугольников, существенно отличается на низких частотах (1). Что же касается амплитудной характеристики диграторов, то наиболее близкой к амплитудной характеристике интегратора обладает дигратор, реализующий способ Симпсона.

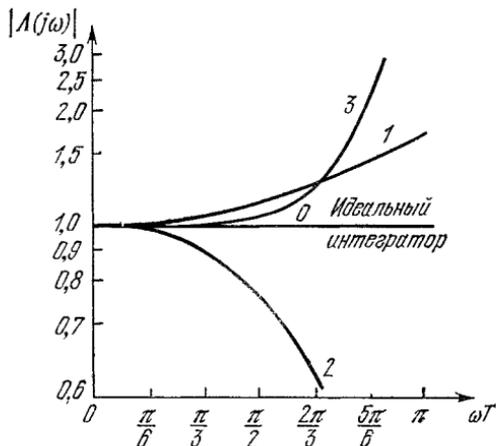


Рис. 38.6.

Для суждения о точностях интегрирования диграторами и выяснения некоторых особенностей рассмотрим зависимость

$$\Lambda(\omega) = \frac{|K_n^*(j\omega)|}{|K_n(j\omega)|} = \omega |K_n^*(j\omega)|, \quad (38.34)$$

или, вводя относительную частоту $\bar{\omega} = \omega T$,

$$\Lambda(\bar{\omega}) = \bar{\omega} \left| \frac{1}{T} K_n^*(j\bar{\omega}) \right|. \quad (38.35)$$

Эта зависимость изображена на рис. 38.6 при $0 \leq \bar{\omega} \leq \pi$. Как видно из рис. 38.6, наибольшую точность дает дигратор, реализующий способ Симпсона, но этот дигратор, поскольку для него $\Lambda(\omega) > 0$, подчеркивает возможные высокочастотные ошибки, тогда как дигратор, реализующий способ трапеций, уменьшает, сглаживает их.

Заметим, что в § 38.2 мы, по существу, использовали дигратор, реализующий способ трапеций. Точнее говоря, мы использовали обратную передаточную функцию этого дигратора, что соответствует аппроксимации оператора дифференцирования.

§ 38.4. Аппроксимация операций кратного интегрирования

Операция кратного интегрирования определяется уравнением

$$\frac{d^k z(t)}{dt^k} = \dot{f}(t), \quad z(0) = z^{(1)}(0) = \dots = z^{(k-1)}(0) = 0, \quad (38.36)$$

или

$$z(t) = \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{k} \dot{f}(\tau) (d\tau)^k. \quad (38.36')$$

Передаточная функция такого кратного интегратора равна

$$K_n(p) = \frac{1}{p^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Аппроксимацию этой передаточной функции можно было бы получить, беря k -ю степень передаточных функций соответствующих диграторов, приведенных в § 38.3. Однако более точную аппроксимацию при одних и тех же значениях периода повторения T можно получить на основе следующих соображений. Рассмотрим тождество

$$\frac{1}{p} \equiv \frac{T}{\ln e^{pT}}. \quad (38.37)$$

Воспользуемся теперь разложением

$$\ln e^{pT} = 2 \left(v + \frac{1}{3} v^3 + \frac{1}{5} v^5 + \dots \right), \quad (38.38)$$

где для краткости обозначено

$$v = \frac{e^{pT} - 1}{e^{pT} + 1} = \frac{1 - e^{-pT}}{1 + e^{-pT}}. \quad (38.39)$$

Подставляя (38.38) в (38.37) и произведя в правой части (38.37) деление числителя на знаменатель, получим

$$\frac{1}{p} = \frac{T}{2} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{3} v - \frac{4}{45} v^3 - \frac{44}{945} v^5 - \dots \right). \quad (38.40)$$

Удерживая в (38.40) главную часть ряда, т. е. отбрасывая положительные степени v , получим, учитывая обозначение (38.39),

$$\frac{1}{p} \approx \frac{T}{2} \frac{1}{v} = \frac{T}{2} \frac{1 + e^{-pT}}{1 - e^{-pT}}. \quad (38.41)$$

Этот результат соответствует способу Симпсона.

Возведем теперь обе части (38.40) в степень:

$$\frac{1}{p^k} = \frac{T^k}{2^k} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{3} v - \frac{4}{45} v^3 - \frac{44}{945} v^5 - \dots \right)^k. \quad (38.42)$$

Удерживая после этого главную часть, т. е. пренебрегая положительными степенями v , получим после замены v согласно (38.39)

$$\frac{1}{p^k} \approx \frac{T}{2^k} \frac{R_k(e^{-pT})}{(1 - e^{-pT})^k} = K_{(k)}^*(p), \quad (38.43)$$

где $R_k(e^{-pT})$ — полиномы по e^{-pT} степени k . Явные выражения передаточных функций для различных значений k приведены в табл. 38.1.

Таблица 38.1

k	$K_k(p)$	$K_k^*(p)$
1	$\frac{1}{p}$	$\frac{T}{2} \frac{1 + e^{-pT}}{1 - e^{-pT}}$
2	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T^2}{12} \frac{1 + 10e^{-pT} + e^{-2pT}}{(1 - e^{-pT})^2}$
3	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T^3}{2} \frac{e^{-pT} - e^{-3pT}}{(1 - e^{-pT})^3}$
4	$\frac{1}{p^4}$	$\frac{T^4}{6} \frac{e^{-pT} + 4e^{-2pT} + e^{-3pT}}{(1 - e^{-pT})^4} - \frac{T^4}{720}$
5	$\frac{1}{p^5}$	$\frac{T^5}{24} \frac{e^{-pT} + 11e^{-2pT} + 11e^{-3pT} + e^{-4pT}}{(1 - e^{-pT})^5}$

§ 38.5. Методика импульсного моделирования

Рассмотрим изображение выходной величины непрерывной линейной системы

$$Z(p) = K(p)F(p), \quad (38.44)$$

где $K(p)$ — передаточная функция замкнутой системы, а $F(p)$ — изображение внешнего воздействия. Для систем с сосредоточенными параметрами при типовых воздействиях $K(p)$ и $F(p)$ представляют собой дробно-рациональные функции p , поэтому $Z(p)$ можно представить в виде

$$Z(p) = \frac{B_1 p^{n-1} + B_2 p^{n-2} + \dots + B_n}{A_0 p^n + A_1 p^{n-1} + \dots + A_n} \quad (38.45)$$

или, после деления числителя и знаменателя на p^n ,

$$Z(p) = \frac{B_1 \frac{1}{p} + B_2 \frac{1}{p^2} + \dots + B_n \frac{1}{p^n}}{A_0 + A_1 \frac{1}{p} + \dots + A_n \frac{1}{p^n}}. \quad (38.46)$$

Заменяя в (38.46) $\frac{1}{p^s}$ на $\frac{T^s}{2^s} \left(\frac{1 + e^{-pT}}{1 - e^{-pT}} \right)^s$ или, что приводит к большей точности, на $K_{(s)}^*(p)$ согласно табл. 38.1, после элементарных преобразований получим дробно-рациональную функцию относительно e^{-pT} :

$$Z(p) \approx Z^*(p) = \frac{\bar{B}_0 + \bar{B}_1 e^{-pT} + \dots + \bar{B}_n e^{-pnT}}{\bar{A}_0 + \bar{A}_1 e^{-pT} + \dots + \bar{A}_n e^{-pnT}}. \quad (38.47)$$

Но по определению

$$Z^*(p) = D \{z(mT)\} = \sum_{m=0}^{\infty} z(mT) e^{-pmT}. \quad (38.48)$$

Приравнивая выражения (38.48) и (38.47) и умножая обе части равенства на знаменатель (38.47), получим после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях e^{-pmT} рекуррентные соотношения относительно $z(mT)$.

При $m=0$

$$z(0) = \frac{\bar{B}_0}{\bar{A}_0}; \quad (38.49)$$

при $m=1$

$$z(T) = \frac{1}{\bar{A}_0} (\bar{B}_1 - z(0) \bar{A}_1); \quad (38.50)$$

при $m \leq n$

$$z(mT) = \frac{1}{\bar{A}_0} \left[\bar{B}_m - \sum_{v=1}^m z((m-v)T) \bar{A}_v \right]; \quad (38.51)$$

при $m > n$, принимая во внимание, что $\bar{A}_m = \bar{B}_m = 0$,

$$z(mT) = -\frac{1}{\bar{A}_0} \sum_{v=1}^n z((m-v)T) \bar{A}_v. \quad (38.52)$$

Рекуррентные соотношения (38.49) — (38.52) позволяют последовательно определить $z(mT)$.

Пример. Пусть

$$Z(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1} \frac{1}{p},$$

или

$$Z(p) = \frac{\frac{1}{p^3}}{1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}}.$$

Заменяя $\frac{1}{p}$ на $\frac{T}{2} \frac{1 + e^{-pT}}{1 - e^{-pT}}$, получим

$$Z(p) \approx Z^*(p) = \frac{\frac{T^3}{8} \left(\frac{1 + e^{-pT}}{1 - e^{-pT}} \right)^3}{1 + \frac{T}{2} \left(\frac{1 + e^{-pT}}{1 - e^{-pT}} \right) + \frac{T^2}{4} \left(\frac{1 + e^{-pT}}{1 - e^{-pT}} \right)^2},$$

или, после преобразований,

$$Z^*(p) = \frac{T^3 (1 + 3e^{-pT} + 3e^{-2pT} + e^{-3pT})}{(8 + 4T + 2T^2) - (24 + 4T - 2T^2)e^{-pT} + (24 - 4T - 2T^2)e^{-2pT} - (8 - 4T + 2T^2)e^{-3pT}}.$$

Полагая $T = 1$, будем иметь

$$Z^*(p) = \frac{1 + 3e^{-p} + 3e^{-2p} + e^{-3p}}{14 - 26e^{-p} + 18e^{-2p} - 6e^{-3p}}.$$

Пользуясь рекуррентными соотношениями (38.50), (38.51), получаем значения процесса $z(t)$ при $t = mT$. Результаты вычислений приведены в табл. 38.2 — $z_{\text{прибл. I}}(t)$. Заметим, что так как $B_0 \neq 0$, то рекуррентные соотношения

Таблица 38.2

mT	0	1	2	3	4	5	6	7
$z(mT)$	3,07	0,344	0,763	1,08	1,17	1,11	1,02	0,97
$z_{\text{прибл. I}}(mT)$	0	0,308	0,758	1,04	1,124	1,096	1,031	1,00
$z_{\text{прибл. II}}(mT)$	0	0,316	0,764	1,150	1,160	1,065	0,994	0,997

(38.49) — (38.52) дают $z(0) = 0,07 \neq 0$. Если же произвести замечу $\frac{1}{p^3}$ на $K_{(s)}^*(p)$ согласно табл. 38.1, то мы получим

$$Z(p) \approx Z^*(p) = \frac{\frac{T^3}{2} \frac{e^{-pT} - e^{-3pT}}{(1 - e^{-pT})^3}}{1 + \frac{T}{2} \frac{1 + e^{-pT}}{1 - e^{-pT}} + \frac{T^2}{12} \frac{1 + 10e^{-pT} + e^{-2pT}}{(1 - e^{-pT})^2}},$$

или, после преобразований,

$$Z^*(p) = \frac{6T^3 e^{-pT} + 6T^3 e^{-3pT}}{(12 + 6T + T^2) - (36 + 6T + 9T^2) e^{-pT} + (36 - 6T - T^2) e^{-2pT} + (12 - 6T - T^2) e^{-3pT}}.$$

При $T = 1$

$$Z^*(p) = \frac{6e^{-pT} + 6e^{-2pT}}{19 - 33e^{-pT} + 21e^{-2pT} + 7e^{-3pT}}.$$

Пользуясь рекуррентными соотношениями (38.49)—(38.52) и принимая во внимание, что $B_0 = 0$ и, значит, $z(0) = 0$, вычисляем значения процесса $z(t)$ при $t = mT$. Результаты вычислений приведены в табл. 38.2— $z_{\text{прибл. II}}(t)$. В табл. 38.2 для сравнения указаны также точные значения процесса

$$z(t) = 1 - 1,17e^{-0,5t} \sin(0,25t + 1,045)$$

при $t = mT$ и $T = 1$.

График точного решения с нанесенными на нем значениями (\times — для $z_{\text{прибл. I}}$ и \circ — для $z_{\text{прибл. II}}$), полученными по рекуррентным соотношениям,

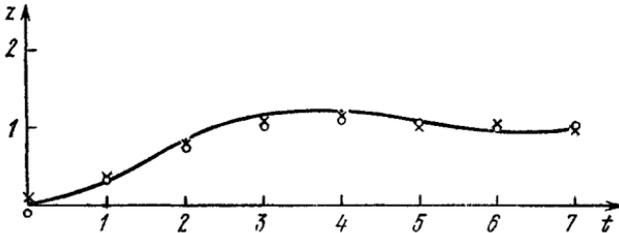


Рис. 38.7.

изображен на рис. 38.7. Как видно из табл. 38.2, второй способ дает более точные результаты.

В тех случаях, когда необходимо получить процессы при различных внешних воздействиях, удобно аппроксимировать не изображение $z(p)$, а передаточную функцию $K(p)$, и тогда

$$K(p) \approx K^*(p) = \frac{b_0 + b_1 e^{-pT} + \dots + b_n e^{-pnT}}{a_0 + a_1 e^{-pT} + \dots + a_n e^{-pnT}}.$$

И значит, согласно (38.44)

$$(a_0 + a_1 e^{-pT} + \dots + a_n e^{-pnT}) Z(p) = (b_0 + b_1 e^{-pT} + \dots + b_n e^{-pnT}) F(p). \quad (38.53)$$

Но по теореме запаздывания

$$e^{-pvT} Y(p) \rightarrow \begin{cases} 0, & t < vT, \\ y(t - vT), & t \geq vT. \end{cases} \quad (38.54)$$

Переходя в (38.53) от изображений к оригиналам и полагая $t = mT$, получим

$$\sum_{v=0}^n a_v z((m - v)T) = \sum_{v=1}^n b_v f((m - v)T), \quad (38.55)$$

где $z((m - \nu)T) = f((m - \nu)T) = 0$ при $m < \nu$, и получим рекуррентное соотношение при $m \leq n$

$$z(mT) = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{\nu=0}^n b_\nu f((m - \nu)T) - \sum_{\nu=1}^m a_\nu z((m - \nu)T) \right] \quad (38.56)$$

и

$$z(mT) = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{\nu=0}^n b_\nu f((m - \nu)T) - \sum_{\nu=1}^n a_\nu z((n - \nu)T) \right] \quad (38.57)$$

при $m > n$.

Аналогично можно определить процессы и в нелинейной системе. Для этой цели воспользуемся уравнением нелинейной системы относительно изображений

$$Z(p) = W(p) L \{ \Phi(f(t) - z(t)) \}. \quad (38.58)$$

Аппроксимируем передаточную функцию линейной части системы $W(p)$ заменой в ней $\frac{1}{p}$ на $\frac{T}{2} \frac{1 + e^{-pT}}{1 - e^{-pT}}$ или на $K_{(s)}^*(p)$:

$$W(p) \approx W^*(p) = \frac{b_1 e^{-\rho T} + b_1 e^{-2\rho T} + \dots + b_n e^{-\rho n T}}{a_0 + a_1 e^{-\rho T} + \dots + a_n e^{-\rho n T}}. \quad (38.59)$$

Подставляя (38.59) в (38.58), получим

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 e^{-\rho T} + \dots + a_n e^{-\rho n T}) Z(p) = \\ = (b_1 e^{-\rho T} + \dots + b_n e^{-\rho n T}) L \{ \Phi(f(t) - z(t)) \}. \end{aligned} \quad (38.60)$$

После перехода к оригиналам и принятия $t = mT$ получаем

$$\sum_{\nu=0}^n a_\nu z((m - \nu)T) = \sum_{\nu=1}^n b_\nu \Phi \{ f((m - \nu)T) - z((m - \nu)T) \}, \quad (38.61)$$

где при $\nu > m$ нужно положить $z((m - \nu)T) = f((m - \nu)T) = 0$. Из (38.61) получаем рекуррентные соотношения при $m \leq n$

$$\begin{aligned} z(mT) = \\ = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{\nu=1}^m a_\nu z((m - \nu)T) - \sum_{\nu=0}^m b_\nu \Phi(f((m - \nu)T) - z((m - \nu)T)) \right], \end{aligned} \quad (38.62)$$

при $m > n$

$$\begin{aligned} z(mT) = \\ = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{\nu=1}^n a_\nu z((n - \nu)T) - \sum_{\nu=1}^n b_\nu \Phi(f((m - \nu)T) - z((m - \nu)T)) \right], \end{aligned} \quad (38.63)$$

которые позволяют последовательно определить дискреты процесса в нелинейной системе.

Важным вопросом при цифровом моделировании является выбор периода повторения, или шага T . Для контроля правильности выбора T можно поступить следующим образом. Наряду с построением процесса при $T = T_0$ построим некий процесс для $T = \frac{T_0}{2}$. Если при этом дискреты $x(kT_0)$ и $x\left(2k\frac{T_0}{2}\right)$ будут близки друг к другу, то выбор $T = T_0$ сделан правильно. Так, на рис. 38.7 вычисленные значения $x\left(k\frac{T_0}{2}\right)$ указаны кружочками, они весьма близки к ранее найденным значениям.

Задачи

38.1. Показать, что способу численного интегрирования Уэддла, при котором $\hat{f}(t)$ аппроксимируется многочленом 6-й степени

$$\int_{(m-6)T}^T f(\tau) d\tau \approx \frac{3T}{10} \{x(mT) + 5x((m-1)T) + x((m-2)T) + \\ + 6x((m-3)T) + x((m-4)T) + 5x((m-5)T) + x((m-6)T)\},$$

соответствует передаточная функция

$$K_n^*(p) = \frac{3T}{10} \frac{1 + 6e^{-pT} + 6e^{-2pT} + 6e^{-3pT} + e^{-4pT}}{1 + e^{-pT} - e^{-3pT} - e^{-4pT}};$$

38.2. Найти частотную характеристику для дигратора Уэддла

$$K_n^*(j\omega) = |K_n^*(j\omega)| e^{-j\theta(\omega)}$$

и сравнить дигратор Уэддла с иными типами диграторов по величине $\Delta(\omega)$

38.3. Построить процесс, если

$$Z(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1} \frac{1}{p},$$

при $T = 0,5$ и $T = 2$ и сопоставить полученные результаты с результатом примера (стр. 517).

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Преобразования Лапласа и Фурье

Преобразованием Лапласа называется преобразование некоторой функции $f(t)$ вещественной переменной t в другую функцию $F(p)$ комплексного переменного p , определяемое соотношением

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1)$$

Функция $f(t)$, определенная в интервале $0 \leq t < \infty$, называется *оригиналом*, а функция $F(p)$ — *изображением*. Обозначим операцию, которую необходимо произвести над оригиналом, чтобы получить изображение, через L , т. е.

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = L \{f(t)\}. \quad (2)$$

Тогда преобразование Лапласа (1) запишется кратко в виде

$$F(p) = L \{f(t)\}. \quad (3)$$

Обратное преобразование Лапласа осуществляется по формуле обращения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (4)$$

Путь интегрирования на плоскости p изображен на рис. П.1. Постоянная c , так называемая абсцисса абсолютной сходимости, выбирается так, чтобы все особые точки — полюсы находились слева от нее. Кратко формула обращения записывается так:

$$f(t) = L^{-1} \{F(p)\}. \quad (5)$$

Одним из важнейших свойств преобразования Лапласа, которое способствовало широкому применению его для решения разнообразных задач, является простота операций над изображениями по сравнению с операциями над оригиналами. Так, дифференцированию и интегрированию оригиналов соответствуют более простые операции умножения и деления на параметр преобразования p в случае изображений. На основе этих свойств и линейности преобразования Лапласа от линейного дифференциального уравнения относительно оригиналов переходят к линейному алгебраическому уравнению относительно изображений. По найденному из этого уравнения изображению определяется оригинал с помощью формулы обращения либо таблиц соответствий оригиналов и изображений.

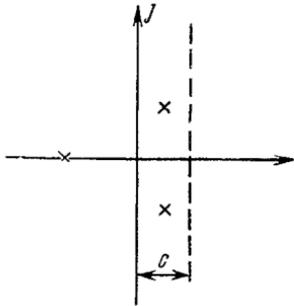


Рис. П.1.

с помощью формулы обращения либо таблиц соответствий оригиналов и изображений.

Пример. Пусть $f(t) = e^{-at}$. Тогда из (1), (3) получаем

$$F(p) = L\{e^{-at}\} = \int_0^{\infty} e^{-(p+a)t} dt = \frac{1}{p+a}.$$

При $a=0$, $f(t) = 1(t)$, $0 \leq t < \infty$

$$F(p) = L\{f(t)\} = \frac{1}{p}.$$

Важную роль при использовании преобразования Лапласа играют теоремы, устанавливающие соответствия между операциями в области оригиналов и изображений. Приведем формулировки основных теорем с краткими указаниями способа их доказательства. Подробные доказательства и ряд дополнительных теорем читатель может найти в книгах, приведенных в списке литературы

Теорема 1. Линейность преобразования Лапласа:

$$L\left\{\sum_{v=1}^n a_v f_v(t)\right\} = \sum_{v=1}^n a_v \cdot L\{f_v(t)\} = \sum_{v=1}^n a_v F_v(p). \quad (6)$$

Изображение линейной комбинации оригиналов равно линейной комбинации их изображений.

Теорема 2. Дифференцирование оригинала:

$$L\{\dot{f}(t)\} = pL\{f(t)\} - f(0) = pF(p) - f(0), \quad (7)$$

$$L\{\ddot{f}(t)\} = p^2L\{f(t)\} - pf(0) - \dot{f}(0) = p^2F(p) - pf(0) - \dot{f}(0) \quad (8)$$

и, в общем случае,

$$L \{f^{(n)}(t)\} = p^n L \{f(t)\} - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(0) = p^n F(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(0), \quad (9)$$

где $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(t)|_{t=0}$.

Равенство (7) находится интегрированием основного соотношения (1) по частям. Равенство (9) получается последовательным применением (7) к соотношению

$$L \{f^{(k)}(t)\} = p L \{f^{(k-1)}(t)\} - f^{(k-1)}(0).$$

Если

$$f^{(k-1)}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

то из (9) получаем

$$L \{f^{(n)}(t)\} = p^n L \{f(t)\} = p^n F(p). \quad (10)$$

В этом случае n -кратному дифференцированию оригинала соответствует умножение изображения на p^n .

Теорема 3. Интегрирование оригинала:

$$L \left\{ \int_0^t f(t) dt \right\} = \frac{1}{p} L \{f(t)\} = \frac{F(p)}{p}. \quad (11)$$

Интегрированию оригинала от 0 до t соответствует деление изображения на p .

Соотношение (11) можно получить, например, интегрированием (1) по частям.

Теорема 4. Смещение аргумента оригинала (теорема запаздывания):

$$L \{f(t - \tau)\} = e^{-p\tau} L \{f(t)\} = e^{-p\tau} F(p). \quad (12)$$

Предполагается, что $f(t - \tau) \equiv 0$ при $t \leq \tau$. Смещению аргумента оригинала на τ соответствует умножение изображения на $e^{-p\tau}$.

Соотношение (12) вытекает из (1) при замене в нем $f(t)$ на $f(t - \tau)$ и последующей замене переменной t на $t + \tau$.

Теорема 5. Смещение аргумента изображения:

$$F(p + \alpha) = L \{e^{-\alpha t} f(t)\}. \quad (13)$$

Смещению аргумента изображения на α соответствует умножение оригинала на $e^{-\alpha t}$.

Теорема 6. Умножение изображений (теорема свертывания):

$$\begin{aligned} L \left\{ \int_0^t f_1(t - \lambda) f_2(\lambda) d\lambda \right\} &= L \left\{ \int_0^t f_1(\lambda) f_2(t - \lambda) d\lambda \right\} = \\ &= L \{f_1(t)\} L \{f_2(t)\} = F_1(p) F_2(p). \end{aligned} \quad (14)$$

Операция

$$\int_0^t f_1(t - \alpha) f_2(\alpha) d\alpha = \int_0^t f_1(\alpha) f_2(t - \alpha) d\alpha$$

называется *сверткой*. Изображение *свертки* двух оригиналов равно произведению их изображений.

Равенство (14) можно получить умножением обеих частей (1) на $F_2(p)$ и применением теоремы 4.

Теорема 7. Площадь оригинала:

$$F(0) = \int_0^{\infty} f(t) dt. \quad (15)$$

Площадь оригинала (если она существует) равна начальному значению изображения.

Соотношение (15) следует из (1) при $p = 0$.

Теорема 8. Предельные значения:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0), \quad (16)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty), \quad (17)$$

если эти предельные значения существуют.

Эта теорема позволяет найти значение оригинала при $t = 0$ и $t = \infty$ по изображению. Соотношения (16) и (17) следуют из (7) при стремлении p к бесконечности и нулю.

Наиболее часто встречающиеся оригиналы и соответствующие им изображения приведены в табл. П.1.

Наряду с односторонним преобразованием Лапласа, определяемым формулами (1) и (4), иногда вводят в рассмотрение двустороннее преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (18)$$

и

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(p) e^{pt} dp, \quad (19)$$

в котором оригинал $f(t)$ определен в интервале $-\infty < t < \infty$. Для двустороннего преобразования Лапласа справедливы теоремы 1, 4, 5. Что же касается теорем 2, 3, 6, 7, то их формулировки несколько упрощаются благодаря тому, что $f(t)$ определено при всех значениях t , и поэтому начальные значения оригиналов и

Таблица П.1

	$f(t)$	$F(p) = L\{f(t)\}$
1	$\delta(t)$	1
2	1(t)	$\frac{1}{p}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$
4	$t^n/n!$	$1/p^{n+1}$
5	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$
6	$\frac{t^n}{n!} e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p - \alpha)^{n+1}}$
7	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
8	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
9	$\sin(\omega t - \varphi)$	$\frac{\omega \cos \varphi - p \sin \varphi}{p^2 + \omega^2}$
10	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t - \varphi)$	$\frac{\omega \cos \varphi - (p - \alpha) \sin \varphi}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$

производных в них не фигурируют. Если в (18) предположить, что

$$f(t) \equiv 0 \text{ при } t < 0, \tag{20}$$

то двустороннее преобразование Лапласа превращается в одностороннее.

Полагая в двустороннем преобразовании Лапласа (18) и (19) $p = j\omega$, мы приходим к преобразованию Фурье:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt, \tag{21}$$

или, кратко,

$$F(j\omega) = L\{f(t)\}_{p=j\omega} = \mathcal{F}\{f(t)\}, \tag{22}$$

и

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \tag{23}$$

или, кратко,

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\}_{p=j\omega} = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\}. \tag{24}$$

Преобразование Фурье (21), (23) определяет оригинал $f(t)$ лишь для абсолютно интегрируемых функций $f(t)$, т. е. когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty. \quad (25)$$

В этом случае абсцисса абсолютной сходимости $\sigma = 0$ и путь интегрирования на плоскости p совпадает с мнимой осью (рис. П. 2).

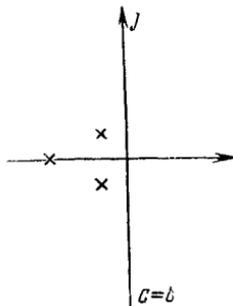


Рис. П.2.

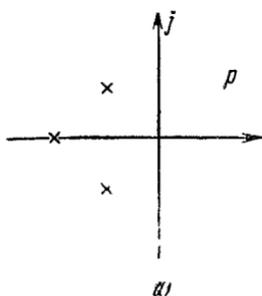
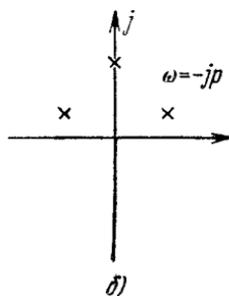


Рис. П.3.



Изображение $F(p)$ при $p = j\omega$ представляет собой спектр, соответствующий функции времени — оригиналу $f(t)$. Если $f(t)$ удовлетворяет еще и условию (20), то для получения спектра достаточно в соответствующих изображениях табл. П.1 заменить p на $j\omega$. Естественно, что преобразование Фурье охватывает более узкий класс функций времени — оригиналов по сравнению с преобразованием Лапласа.

Если полюсы изображения $F(p)$ все левые (рис. П.3, а), а это соответствует тому, что все полюсы спектра $F(j\omega)$ верхние (рис. П.3, б), то оригиналы $f(t)$, определяемые по изображению $F(p)$ (19) и спектру $F(j\omega)$ (23), при $t < 0$ будут удовлетворять условию (20), а при $t \geq 0$ они будут совпадать друг с другом.

Совсем иная ситуация имеет место в том случае, когда изображение $F(p)$ имеет как левые, так и правые полюсы (рис. П.4, а) и, значит, когда спектр $F(j\omega)$ имеет как верхние, так и нижние полюсы (рис. П.4, б).

Обратное преобразование Лапласа (19) при выборе абсциссы сходимости σ так, чтобы все полюсы лежали левее прямой (рис. П.4, а), определит оригинал $f(t)$, равный нулю при $t < 0$ и содержащий убывающие с ростом времени составляющие, соответствующие левым полюсам, и возрастающие с ростом t составляющие, соответствующие правым полюсам. Что же касается

обратного преобразования Фурье (23), то теперь $c = 0$ фиксировано. Интегрирование вдоль мнимой оси (рис. П.4, а) или вдоль

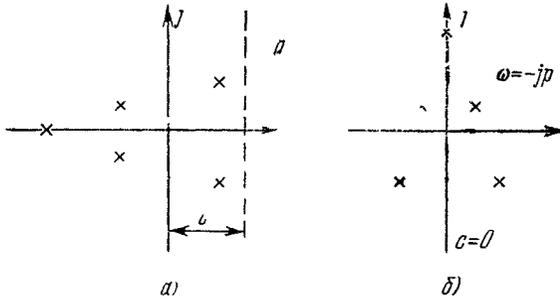


Рис. П.4.

вещественной оси (рис. П.4, б) можно представить как интегрирование по замкнутому контуру, образованному бесконечной

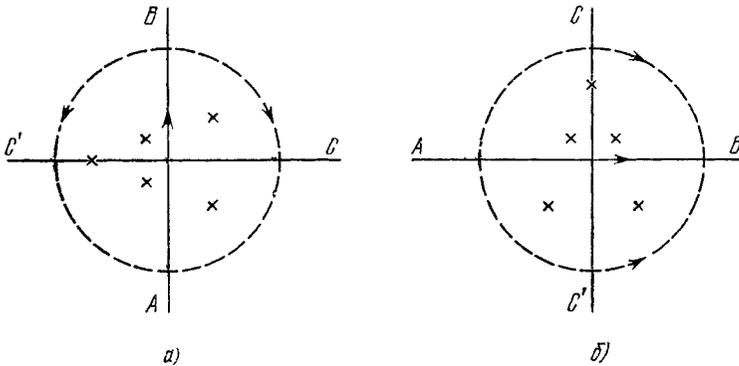


Рис. П.5.

прямой и полуокружностью бесконечного радиуса (рис. П.5, а, б), что условно может быть записано так:

$$\int_A^B = \int_{ABCA} - \int_{BCA} \quad \text{или} \quad \int_A^B = \int_{ABC'A} - \int_{BC'A} \quad (26)$$

Но легко проверить непосредственным вычислением, что для $F(j\omega) \rightarrow 0$

$$\int_{BCA} F(j\omega) e^{t\omega} d\omega \equiv 0, \quad \text{если } t < 0,$$

$$\int_{BC'A} F(j\omega) e^{t\omega} d\omega \equiv 0, \quad \text{если } t > 0, \quad (27)$$

и что интеграл по контуру $ABC'A$, охватывающему левую (верхнюю) полуплоскость, определяет $f(t)$ при $t > 0$, а интеграл по контуру $ABCA$, охватывающему правую (нижнюю) полуплоскость, определяет $f(t)$ при $t < 0$. Таким образом, если разложить $F(j\omega)$ на простейшие дроби, то составляющие, соответствующие верхним полюсам, определяют $f_h(t)$ при $t > 0$, а составляющие, соответствующие нижним полюсам, определяют $f_h(t)$ при $t < 0$.

Пример. Пусть

$$F(p) = \frac{1}{(p-a)(p+b)} = \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p+b} \right], \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Тогда оригинал, соответствующий обратному преобразованию Лапласа, будет равен

$$\begin{aligned} f(t) &\equiv 0, & t \leq 0, \\ f(t) &= \frac{1}{b-a} [e^{at} - e^{-bt}], & t > 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Применим теперь обратное преобразование Фурье

$$F(j\omega) = \frac{1}{(j\omega - a)(j\omega + b)} = \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{j\omega - a} - \frac{1}{j\omega + b} \right];$$

в этом случае

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{b-a} e^{at}, & t < 0, \\ f(t) &= \frac{1}{b-a} e^{-bt}, & t > 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Полученные оригиналы изображены на рис. П.6, a и b соответственно. Они существенно отличаются друг от друга. Очевидно, что оригинал $f(t)$

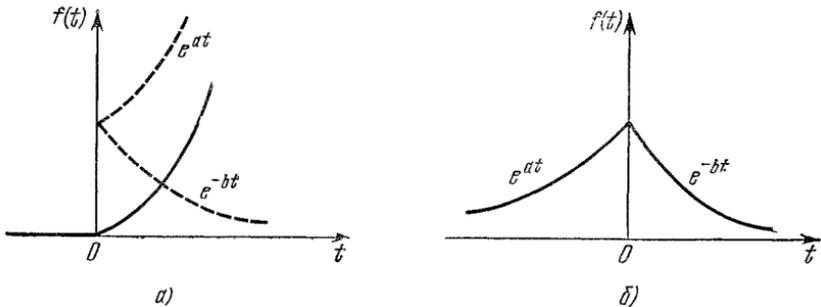


Рис. П.6.

рис. П.6, б соответствует физически нереализуемому процессу, так как он существует при отрицательном времени.

2. Импульсивные функции

Для выяснения смысла импульсивной функции, или, как ее еще называют, δ -функции, рассмотрим разрывную функцию вида скачка (рис. П.7). Эта функция аналитически представима в виде

$$1(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sign } t), \quad (30)$$

где

$$\text{sign } t = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t = 0, \\ -1 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (31)$$

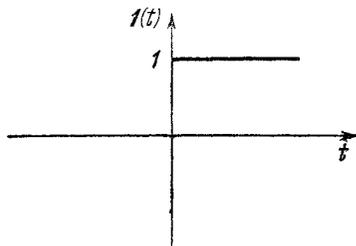


Рис. П.7.

Разрывную функцию $1(t)$ можно рассматривать как предел некоторого семейства непрерывных функций при изменении параметра этого семейства, например:

$$1(\alpha, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{arctg } \alpha t. \quad (32)$$

В пределе при $\alpha \rightarrow \infty$, как видно из рис. П.8, а,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} 1(\alpha, t) = 1(t). \quad (33)$$

Обозначим производную $1(\alpha, t)$ через $\delta(\alpha, t)$, так что с учетом (32)

$$\delta(\alpha, t) = \frac{d1(\alpha, t)}{dt} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \alpha^2 t^2}. \quad (34)$$

Площадь $\delta(\alpha, t)$ (рис. П.8, б) не зависит от α и всегда равна 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha, t) dt = [\delta(\alpha, t)]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = 1. \quad (35)$$

Возможны иные, более сложные семейства, обладающие свойствами (33), (35).

Определим импульсивную функцию, или δ -функцию, как предел $\delta(\alpha, t)$ при $\alpha \rightarrow \infty$, т. е.

$$\delta(t) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \delta(\alpha, t). \quad (36)$$

δ -функция представляет собой функцию, равную нулю во всех точках, кроме точки $t = 0$, причем «площадь» этой δ -функции равна единице. Физически δ -функцию можно представить себе как ток, протекающий через емкость, включенную на постоянное напряжение в 1 В. Формально δ -функция может быть получена

в результате дифференцирования единичной скачкообразной функции

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}. \quad (37)$$

Из определения δ -функции видно, что она не удовлетворяет тем требованиям, которым подчиняются функции, рассматриваемые в классическом анализе. И если стремиться к математической строгости, то следовало бы вместо δ -функций использовать

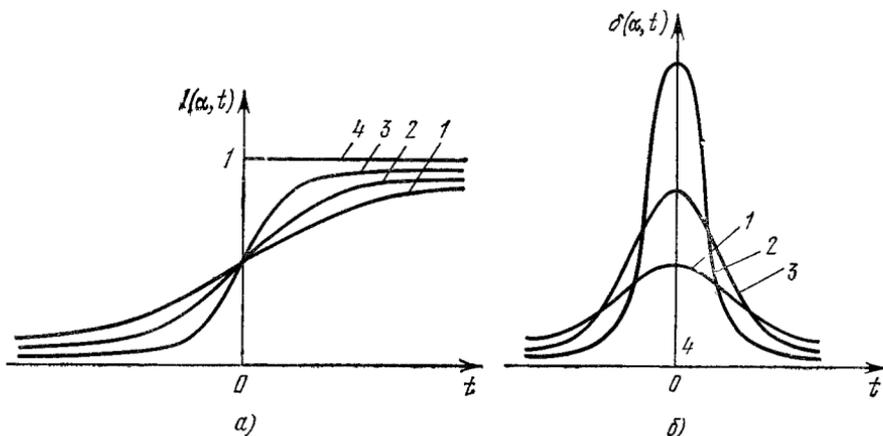


Рис П.8.

обобщенные функции, теория которых в последние годы достигла высокого уровня развития. Однако для наших целей этот путь излишне сложен. Знаменитый физик П. Дирак, который ввел δ -функцию в квантовую механику, сказал, что на δ -функцию нужно смотреть как на удобное обозначение, которое «всегда может быть переписано в равносильном, но обычно более громоздком виде». Нам нет необходимости излагать строгую теорию δ -функций, и мы ограничимся здесь теми свойствами, которые использованы в основном тексте книги.

1-е свойство

$$x(t) \delta(t - \tau) = x(\tau) \delta(t - \tau). \quad (38)$$

Это свойство следует из того, что $\delta(t - \tau)$ отлична от нуля только при $t = \tau$.

2-е свойство.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt = x(\tau). \quad (39)$$

Это свойство вытекает из 1-го свойства. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) dt = x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt.$$

Но из определения δ -функции следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = 1. \quad (40)$$

Заметим, что бесконечные пределы в (39) можно заменить конечными, но так, чтобы аргумент δ -функции обращался в нуль внутри этих пределов:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt &= \\ &= \int_{\tau - \varepsilon}^{\tau + \varepsilon} x(t) \delta(t - \tau) dt = x(\tau). \end{aligned} \quad (41)$$

3-е свойство.

$$\delta(x(t)) = \sum_{\nu} \frac{\delta(t - t_{\nu})}{|\dot{x}(t_{\nu})|}, \quad (42)$$

где t_{ν} — нули функции $x(t)$,

т. е. корни уравнения

$x(t) = 0$, которые предполагаются простыми. Суммирование в (42) ведется по всем корням t_{ν} .

Рассмотрим функцию $\mathbf{1}(x(t))$ и предположим, что она меняет знак в точках t_0, t_1, t_2, \dots (рис. П.9, а). Очевидно, что

$$\mathbf{1}(x(t)) = \sum_{\nu} (-1)^{\nu} \mathbf{1}(t - t_{\nu}). \quad (43)$$

Дифференцируя обе части (43) по t , получим

$$\frac{d\mathbf{1}(x(t))}{dx} \dot{x}(t) = \sum_{\nu} (-1)^{\nu} \frac{d\mathbf{1}(t - t_{\nu})}{dt}.$$

По определению δ -функции (37)

$$\frac{d\mathbf{1}(x(t))}{dx} = \delta(x(t)), \quad \frac{d\mathbf{1}(t - t_{\nu})}{dt} = \delta(t - t_{\nu}).$$

Пользуясь 1-м свойством (38), получаем (см. рис. П.9, б)

$$\delta(x(t)) \dot{x}(t) = \sum_{\nu} (-1)^{\nu} \delta(t - t_{\nu}). \quad (44)$$

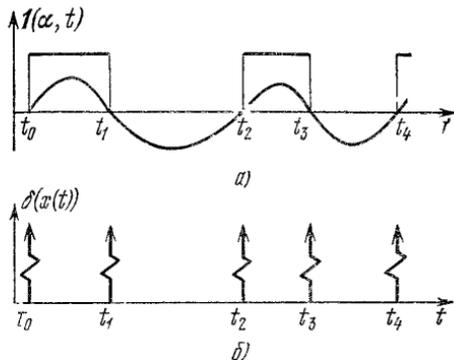


Рис П.9.

Замечая, наконец, что $\dot{x}(t_v) = (-1)^v |\dot{x}(t_v)|$, из (44) окончательно получаем

$$\delta(x(t)) = \sum_v \frac{\delta(t - t_v)}{|\dot{x}(t_v)|}. \quad (45)$$

Найдем изображение и спектр δ -функции

$$L\{\delta(t - t_v)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_v) e^{-pt} dt.$$

На основании 2-го свойства (39) получаем

$$L\{\delta(t - t_v)\} = e^{-pt_v}, \quad (46)$$

и, значит, при $p = j\omega$

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_v)\} = e^{-j\omega t_v} \quad (47)$$

и, в частности, при $t_v = 0$

$$L\{\delta(t)\} = \mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1, \quad (48)$$

т. е. изображение и спектр δ -функции представляют собой постоянную величину, равную единице. И значит, по формулам обращения (19) и (23)

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} dp \quad (49)$$

и

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega. \quad (50)$$

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega t d\omega = 0,$$

получим из (50)

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t d\omega, \quad (51)$$

$$\delta(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega t d\omega. \quad (52)$$

3. Дискретные преобразования Лапласа и Фурье

Дискретным преобразованием Лапласа называется преобразование решетчатой функции $f(mT)$ вещественной дискретной переменной mT ($m = 0, 1, 2, \dots$, T — интервал повторения в другую функцию $F^*(p)$ комплексного переменного p , определяемое соотношением

$$F^*(p) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-pmT} f(mT). \tag{53}$$

Решетчатая функция $f(mT)$, представляющая собой последовательность дискретных значений непрерывной функции $f(t)$ при $0 \leq mT < \infty$, называется оригиналом, а функция $F^*(p)$ — изображением. Сокращенно соотношение (53) будем записывать в виде

$$F^*(p) = D \{f(mT)\}. \tag{54}$$

Обратное дискретное преобразование Лапласа осуществляется по формуле

$$f(mT) = \frac{1}{j\omega_0} \int_{c-j\frac{\omega_0}{2}}^{c+j\frac{\omega_0}{2}} F^*(p) e^{-pmT} dp, \tag{55}$$

где c — абсцисса абсолютной сходимости. Кратко формула обращения (55) запишется так:

$$f(mT) = D^{-1} \{F^*(p)\}. \tag{56}$$

Дискретное преобразование решетчатой функции можно рассматривать как обычное преобразование Лапласа непрерывной функции $f(t)$, модулирующей периодическую последовательность импульсивных функций

$$\delta_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT). \tag{57}$$

Обозначим результат этой модуляции через $f^*(t)$, тогда

$$f^*(t) = f(t) \delta_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - mT). \tag{58}$$

Найдем

$$F^*(p) = L \{f^*(t)\}. \tag{59}$$

Заменяя в (59) $f^*(t)$ его выражением из (58), получим после использования теоремы линейности и свойства 1 δ -функции

$$F^*(p) = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT) L\{\delta(t - mT)\}.$$

Но в силу (46)

$$L\{\delta(t - mT)\} = e^{-pmT}.$$

Следовательно, окончательно получим

$$F^*(p) = L\{f^*(t)\} = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT) e^{-pmT} = D\{f(mT)\}. \quad (60)$$

Установим связь между изображением $F^*(p)$ решетчатой функции $f(mT)$ и изображением $F(p)$ порождающей ее непрерывной функции $f(t)$. Для этой цели положим в формуле обращения (4) $t = mT$, тогда получим

$$f(mT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(p) e^{pmT} dp. \quad (61)$$

Разобьем путь интегрирования на интервалы $((2m-1)\frac{\omega_0}{2}, (2m+1)\frac{\omega_0}{2})$, где

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (62)$$

— частота повторения. Тогда (61) можно представить в виде

$$f(mT) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{c-j(2m-1)\frac{\omega_0}{2}}^{c+j(2m+1)\frac{\omega_0}{2}} F(p) e^{pmT} dp. \quad (63)$$

Производя в (63) замену переменной p на $p + jm\omega_0$ и учитывая, что

$$e^{(p+jk\omega_0)mT} = e^{pmT},$$

получим после изменения очередности суммирования и интегрирования

$$f(mT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\frac{\omega_0}{2}}^{c+j\frac{\omega_0}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(p + jm\omega_0) e^{pmT} dp.$$

Обозначив

$$F^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(p + jm\omega_0) \quad (64)$$

и принимая во внимание (62), получаем формулу обращения дискретного преобразования Лапласа (55)

$$f(mT) = \frac{1}{j\omega_0} \int_{c-j\frac{\omega_0}{2}}^{c+j\frac{\omega_0}{2}} F^*(p) e^{p m T} dp. \quad (65)$$

Изображение $F^*(p)$ решетчатой функции $f(mT)$ связано с изображением $F(p)$ соответствующей непрерывной функции $f(t)$ соотношением (64). Кратко это соотношение мы будем записывать в виде

$$F^*(p) = \mathfrak{D} \{F(p)\} = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(p + jm\omega_0). \quad (66)$$

Это соотношение справедливо при $f(0) = 0$. Если же $f(0) \neq 0$, то

$$F^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(p + jm\omega_0) + \frac{f(0)}{2}. \quad (67)$$

Приведем простые примеры соответствий $f(mT)$ и $F^*(p)$. Пусть $f(mT) = e^{-\alpha m T}$ ($m = 0$). Из (53) получаем

$$F^*(p) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(p+\alpha)mT} = \frac{1}{1 - e^{-(p+\alpha)T}},$$

или

$$F^*(p) = D \{e^{-\alpha m T}\} = \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{\alpha T}}. \quad (68)$$

При $\alpha = 0$

$$f(mT) = \mathbf{1}(mT) = 1, \quad m \geq 0,$$

и из (68) получаем

$$F^*(p) = D \{\mathbf{1}(mT)\} = \frac{e^{pT}}{e^{pT} - 1}. \quad (69)$$

В отличие от изображений $F(p)$ непрерывных функций $f(t)$, являющихся функциями p , изображения $F^*(p)$ решетчатых функций $f(mT)$ являются функциями не p , а e^{pT} . Поэтому $F^*(p)$

представляют собой периодические функции с периодом $j\omega_0$. Действительно,

$$F^*(p + jk\omega_0) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(p+jk\omega_0)mT} f(mT) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-pmT} f(mT) = F^*(p). \quad (70)$$

Изображение решетчатой функции $F^*(p)$ полностью определяется своими значениями в основной полосе $\left(-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right)$.

Если изображение $F(p)$ имеет полюсы p_k в основной полосе $\left(-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right)$, то $F^*(p)$ будет иметь соответствующие полюсы

$$p_k + jm\omega_0 \quad (-\infty < m < \infty)$$

во всех полосах. Этот факт следует непосредственно из определения $F^*(p)$ (64).

Часто вводят новую переменную

$$z = e^{pT}. \quad (71)$$

Тогда вместо (60) будем иметь

$$F^*\left(p = \frac{1}{T} \ln z\right) = F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^{-m} f(mT), \quad (72)$$

или, кратко,

$$F(z) = Z\{f(mT)\}. \quad (73)$$

Это соотношение определяет собой *Z-преобразование*, которое широко используется в литературе по теории импульсных систем. Соотношение (68) преобразует мнимую ось плоскости p в окружность единичного радиуса и левые полуполосы во внутренность ее. Изображения *Z-преобразования* e^{-amT} и $1(mT)$ получаются из (68) и (69) простой заменой в их правых частях e^{pT} на z , так что

$$F(z) = Z\{e^{-amT}\} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad (74)$$

и

$$F(z) = Z\{1(mT)\} = \frac{z}{z - 1}. \quad (75)$$

Однако для установления более тесной связи теории импульсных систем с теорией непрерывных систем нам удобнее применять дискретные преобразования Лапласа. Важную роль при использовании дискретного преобразования Лапласа играют теоремы, устанавливающие связь между операциями оригиналов и изображений решетчатых и непрерывных функций.

Приведем формулировки основных теорем с краткими указаниями способа их доказательства. Подробные доказательства, а

также ряд дополнительных сведений читатель может найти в книгах, указанных в списке литературы.

Теорема 1. *Линейность дискретного преобразования Лапласа:*

$$D \left\{ \sum_{v=1}^n a_v f_v(mT) \right\} = \sum_{v=1}^n a_v D \{f_v(mT)\} = \sum_{v=1}^n a_v F_v^*(p). \quad (76)$$

D-преобразование линейной комбинации решетчатых функций равно линейной комбинации их D-преобразований.

$$\mathfrak{D} \left\{ \sum_{v=1}^n b_v F_v(p) \right\} = \sum_{v=1}^n b_v \mathfrak{D} \{F_v(p)\} = \sum_{v=1}^n b_v F_v^*(p). \quad (77)$$

\mathfrak{D}-преобразование линейной комбинации изображений непрерывных функций равно линейной комбинации изображений \mathfrak{D}-преобразований изображений непрерывных функций или изображений соответствующих решетчатых функций.

Теорема 2. *Смещение аргумента решетчатой функции (теорема запаздывания):*

$$D \{f((m-s)T)\} = e^{-psT} D \{f(mT)\} = e^{-psT} F^*(p). \quad (78)$$

Предполагается, что $f((m-s)T) \equiv 0$ при $m \leq s$. Смещение аргумента решетчатой функции на sT соответствует умножению изображения $F^*(p)$ на e^{-psT} .

Соотношение (78) вытекает из (60) при замене $f(mT)$ на $f((m-s)T)$ и последующей замене переменной mT на $(m-s)T$.

Теорема 3. *Смещение аргумента изображения:*

$$F^*(p + \alpha T) = D \{e^{-\alpha mT} f(mT)\}. \quad (79)$$

Смещению аргумента p изображения на αT соответствует умножение оригинала на $e^{-\alpha mT}$.

Теорема 4. *Умножение изображений (теорема свертывания):*

$$\begin{aligned} D \left\{ \sum_{s=0}^m f_1((m-s)T) f_2(sT) \right\} &= D \left\{ \sum_{s=0}^m f_1(sT) f_2((m-s)T) \right\} = \\ &= D \{f_1(mT)\} D \{f_2(mT)\} = F_1^*(p) F_2^*(p). \end{aligned} \quad (80)$$

Изображение свертки двух оригиналов решетчатых функций равно произведению их изображений.

Соотношение (80) можно получить, умножая обе части (51) на $F_2^*(p)$ и применяя теорему 2.

Теорема 5. *Умножение изображений непрерывной и решетчатой функций:*

$$\mathfrak{D} \{F_1(p) F_2^*(p)\} = \mathfrak{D} \{F_1(p)\} F_2^*(p) = F_1^*(p) F_2^*(p). \quad (81)$$

Преобразование произведения изображений непрерывной и решетчатой функций равно произведению изображений решетчатых функций.

Для доказательства этой теоремы достаточно воспользоваться свойством (70) для $F_2^*(p)$.

В частном случае, если $F_1(p) = e^{pT}$, из (81) получаем

$$\mathfrak{D}\{e^{pT}F_2^*(p)\} = \mathfrak{D}\{e^{pT}\}F_2^*(p) = e^{pT}F_2^*(p),$$

т. е. множитель вида e^{pT} выносится за знак операции \mathfrak{D} -преобразования.

Теорема 6. Сумма дискрет:

$$F^*(0) = \lim_{p \rightarrow 0} F^*(p) = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT). \quad (82)$$

Сумма дискрет (если она существует) равна начальному значению изображения.

Соотношение (82) следует из определения дискретного преобразования Лапласа (60) при $p = 0$.

Теорема 7. Предельные значения:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (1 - e^{-pT}) F^*(p) = f(0), \quad (83)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} (e^{pT} - 1) F^*(p) = f(\infty), \quad (84)$$

если эти предельные значения существуют.

Эти соотношения получаются применением теоремы 6 к изображениям разностей

$$\Delta f(mT) = f((m+1)T) - f(mT)$$

и

$$\Delta f((m-1)T) = f(mT) - f((m-1)T).$$

Наиболее часто встречающиеся соответствия в дискретном преобразовании Лапласа приведены в табл. П.2.

Наряду с односторонним дискретным преобразованием Лапласа иногда вводят в рассмотрение двустороннее дискретное преобразование Лапласа

$$F^*(p) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-pmT} f(mT), \quad (85)$$

$$f(mT) = \frac{1}{j\omega_0} \int_{c-j\frac{\omega_0}{2}}^{c+j\frac{\omega_0}{2}} F^*(p) e^{pmT} dp, \quad (86)$$

в котором решетчатая функция $f(mT)$ определяется для всех

Таблица П.2

	$f(mT)$	$F^*(p) = D\{f(mT)\} = \mathcal{D}\{F(p)\}$	$F(p)$
1	1	$\frac{e^{pT}}{e^{pT} - 1}$	$\frac{1}{p}$
2	m	$\frac{e^{pT}}{(e^{pT} - 1)^2}$	$\frac{1}{p^2}$
3	m^2	$\frac{e^{pT}(e^{pT} + 1)}{(e^{pT} - 1)^2}$	$\frac{1}{p^3}$
4	$\frac{m}{a}$	$\frac{e^{pT}}{e^{pT} - a}$	$\frac{1}{p - \frac{\ln a}{T}}$
5	e^{-amT}	$\frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{-aT}}$	$\frac{1}{p - a}$
6	me^{-amT}	$\frac{e^{pT}}{(e^{pT} - e^{-aT})} e^{-aT}$	$\frac{1}{(p - a)^2}$
7	$\sin \omega_0 mT$	$\frac{e^{pT} \sin \omega_0 T}{e^{2pT} - 2e^{pT} \cos \omega_0 T + 1}$	$\frac{\omega_0}{p + \omega_0^2}$
8	$\cos \omega_0 mT$	$\frac{e^{pT}(e^{pT} - \cos \omega_0 T)}{e^{2pT} - 2e^{pT} \cos \omega_0 T + 1}$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$

целых, а не только положительных $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ При

$$f(mT) \equiv 0 \quad \text{для } m < 0 \quad (87)$$

двустороннее дискретное преобразование Лапласа обращается в одностороннее.

Полагая в (85) и (86) $p = j\omega$, мы приходим к дискретному преобразованию Фурье:

$$F^*(j\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega mT} f(mT), \quad (88)$$

или, кратко,

$$F^*(j\omega) = D\{f(mT)\}_{p=j\omega}, \quad (89)$$

и

$$f(mT) = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} F^*(j\omega) e^{j\omega mT} d\omega, \quad (90)$$

или, кратко,

$$f(mT) = D^{-1}\{F^*(j\omega)\}. \quad (91)$$

Дискретное преобразование Фурье определяет оригинал $f(mT)$, удовлетворяющий условию (87), лишь для абсолютно суммируемых функций, т. е. если

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |f(mT)| < \infty. \quad (92)$$

Изображение $F^*(p)$ при $p = j\omega$ представляет собой спектр решетчатой функции $f(mT)$. Этот спектр периодичен. Для получения спектра решетчатых функций при выполнении условия (92) достаточно в соответствующих изображениях табл. П.2 положить $p = j\omega$.

Условие (92) выполняется, когда $F^*(p)$ имеет все полюсы левые, а значит, $F^*(j\omega)$ имеет все полюсы верхние. В противном случае, когда $F^*(p)$ имеет и правые полюсы, а значит, $F^*(j\omega)$ имеет нижние полюсы, оригиналы $f(mT)$, получаемые из дискретных преобразований Лапласа и Фурье, будут различными.

Оригинал $f(mT)$, соответствующий изображению $F^*(p)$, будет равен нулю при $m < 0$, а при $m > 0$ он будет содержать возрастающие с ростом m составляющие. Оригинал $f(mT)$, соответствующий спектру $F^*(j\omega)$, будет отличен от нуля при $m < 0$ и содержать составляющие, порожденные нижними полюсами, а при $m > 0$ — составляющие, порожденные верхними полюсами. То есть здесь имеет место ситуация, аналогичная непрерывному случаю. Эти факты играют существенную роль при синтезе оптимальных систем. Выделение составляющих, соответствующих положительному времени $m > 0$, приводит к решению, которое описывает физически реализуемые процессы.

4. Неравенства

При выводе условий абсолютной устойчивости нелинейных непрерывных (§ 17.2) и дискретных (§ 35.2) систем использовались неравенства Коши — Буняковского

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(\tau) d\tau \leq \left[\int_0^t f_1^2(\tau) d\tau \right]^{1/2} \left[\int_0^t f_2^2(\tau) d\tau \right]^{1/2} \quad (93)$$

и

$$\sum_{m=0}^M f_1(mT) f_2(mT) \leq \left[\sum_{m=0}^M f_1^2(mT) \right]^{1/2} \left[\sum_{m=0}^M f_2^2(mT) \right]^{1/2}. \quad (94)$$

В литературе неравенство (93) называется также неравенством Коши — Шварца, или неравенством Шварца, или, наконец, неравенством Буняковского — Шварца, а неравенство (94) — неравенством Коши или неравенством Коши — Буняковского.

Для вывода неравенства (93) рассмотрим очевидное неравенство

$$\int_0^t [\lambda f_1(\tau) \pm f_2(\tau)]^2 d\tau \geq 0. \quad (95)$$

В развернутой форме это неравенство представится в виде

$$a\lambda^2 \pm 2b\lambda + c \geq 0, \quad (96)$$

где

$$a = \int_0^t f_1^2(\tau) d\tau, \quad b = \int_0^t f_1(\tau) f_2(\tau) d\tau, \quad c = \int_0^t f_2^2(\tau) d\tau. \quad (97)$$

Из неотрицательности квадратичного многочлена (96) следует неположительность его дискриминанта

$$b^2 - ac \leq 0, \quad (98)$$

или, после подстановки значений коэффициентов из (97),

$$\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(\tau) d\tau \right]^2 - \int_0^t f_1^2(\tau) d\tau \cdot \int_0^t f_2^2(\tau) d\tau \leq 0, \quad (99)$$

откуда следует неравенство (93).

Точно так же из очевидного неравенства

$$\sum_{m=0}^M [\lambda f_1(mT) \pm f_2(mT)]^2 \geq 0 \quad (100)$$

можно получить дискретный вариант неравенства Коши — Буняковского

$$\left[\sum_{m=0}^M f_1(mT) f_2(mT) \right]^2 \leq \sum_{m=0}^M f_1^2(mT) \cdot \sum_{m=0}^M f_2^2(mT), \quad (101)$$

которое равносильно (94).

Неравенства Коши — Буняковского лежат в основе вывода не только условий абсолютной устойчивости непрерывных и дискретных систем (§ 17.2 и § 35.2), но и оценки интегрального (§ 19.3) и суммарного (36.2) квадратического отклонения,

ЛИТЕРАТУРА

Более подробное изложение ряда вопросов, а также дополнительные сведения по курсу «Теория автоматических систем» можно найти в приведенной ниже литературе. Для удобства литература распределена по главам.

Главы 1—4

Описание систем автоматического управления техническими процессами приведено в книгах:

- Л. С. Гуткин, В. Б. Пестряков, В. Н. Типугин, Радиоуправление. «Советское радио», М., 1970;
- В. И. Каганов, Системы автоматического регулирования в радиопередатчиках. «Связь», М., 1969,
- А. А. Фельдбаум, Электрические системы автоматического регулирования. Оборонгиз, М., 1957;
- А. Б. Челюсткин, Е. А. Розенман, Автоматическое управление прокатными станами. «Металлургиздат», М., 1955;
- И. Чермак, В. Петерка, М. Заборка, Динамика регулируемых систем в теплоэнергетике и химии «Мир», М., 1972.

Описание систем управления в биологии и экономике имеется в книгах: Дж. Милсэм, Анализ биологических систем управления. «Мир», М., 1968;

Ф. Гродингз, Теория регулирования и биологические системы. «Мир», М., 1966;

Н. Рашевски, Некоторые медицинские аспекты математической биологии. «Медицина», М., 1966;

Процессы регулирования в биологии ИЛ, М., 1960;

Процессы регулирования в моделях экономических систем. ИЛ, М., 1961; Н. Е. Кобринский, Е. З. Майминас, А. Д. Смирнов, Введение в экономическую кибернетику. «Экономка», М., 1975;

А. А. Первозванский, Математические модели в управлении производством. «Наука», М., 1975

Новый и весьма перспективный метод стабилизации и коррекции автоматических систем, основанный на коммутации ошибки, который вкратце упоминается в § 2.3, подробно изложен в книге:

С. В. Емельянов, Системы автоматического управления с переменной структурой. «Наука», М., 1967.

Глава 5

Методике составления уравнений систем различной природы посвящены книги:

Г. И. Атабеков, Теория линейных электрических цепей. «Советское радио», М., 1960;

- Г Кениг, В. Блекуэлл, Теория электромеханических систем. «Энергия», М., 1965;
- Л. Н. Липатов, Типовые процессы химической технологии как объекты управления. «Химия», М., 1973;
- Ф. Реза, С. Сили, Современный анализ электрических цепей. «Энергия», М., 1964;
- С. Сили, Электромеханическое преобразование энергии «Энергия», М., 1968.

Глава 6

Об инвариантности автоматических систем см., например, в книге:

- А. И. Кухтенко, Проблема инвариантности в автоматике. ГИТЛ, УССР, Киев, 1963.

Глава 7

Теории чувствительности и ее разнообразным применениям посвящены книги:

- М. Л. Быховский, Основы динамической точности электрических цепей. Изд-во АН СССР, 1958;
- Е. Н. Розенвассер, Р. М. Юсупов, Чувствительность систем автоматического управления «Энергия», Л., 1969;
- В. И. Городецкий, Ф. М. Захарин, Е. Н. Розенвассер, Р. М. Юсупов, Методы теории чувствительности в автоматических системах. «Энергия», Л., 1971;
- Р. Томович, М. Вукобратович, Общая теория чувствительности. «Советское радио», М., 1972.

Главы 8, 9

Передаточные функции, частотные и временные характеристики особенно широко были распространены в радиотехнике и электротехнике. Сейчас они используются также в механике, теплотехнике и других смежных дисциплинах. См. например, книги:

- Ю. Г. Толстов, А. А. Теврюков, Теория электрических цепей. «Высшая школа», М., 1971;

Р. А. Халфман, Динамика «Наука», М., 1972,
а также упомянутую выше к главе 5 книгу Г. Кенига, В. Блекуэлла.

Большое число примеров передаточных функций, частотных и временных характеристик типовых объектов и управляющих устройств приведено в книге:

- В. Оппельт, Основы техники автоматического регулирования. Госэнергонздат, М., 1960.

Из этой книги заимствованы табл. 8.1 и 8.2.

Глава 10

Доказательство критериев устойчивости Рауса и Гурвица можно найти в книге:

- А. Г. Курош, Высшая алгебра. «Наука», М., 1971.

Общий метод выделения областей устойчивости основан на понятии D -разбиения, введенном Ю. И. Неймарком, и описан в его книге:

- Ю. И. Неймарк, Устойчивость линеаризованных систем, ЛКВВИД, 1949.

Метод D -разбиения излагается в большинстве книг по теории автоматического управления. Единый метод доказательства различных критериев устойчивости приводится в книге:

М. А. Айз е р м а н, Теория автоматического регулирования. «Наука», М., 1966.

Изучению вопросов структурной неустойчивости посвящена книга:

И. И. Г а л ь п е р и н, Синтез систем автоматики. Госэнергоиздат, М., 1960.

Системы, устойчивые при больших коэффициентах усиления, рассмотрены в книге:

М. В. М е е р о в, Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. Физматгиз, М., 1959.

Частотный критерий устойчивости систем с запаздыванием и его применения, а также большое число примеров систем с запаздыванием и подробное их исследование содержатся в книге:

Х. Г у р е ц к и й, Анализ и синтез систем с запаздыванием. «Машиностроение», М., 1974.

Глава 12

Частотные методы, нашедшие наиболее широкое распространение в практике расчета систем автоматического управления, изложены, например, в книге:

Автоматическое управление и вычислительная техника, вып. 8. Частотные методы. «Машиностроение», М., 1968.

Они занимают большое место в многочисленных книгах по теории автоматического управления. Можно, например, указать:

В. В. С о л о д о в н и к о в (ред.), Техническая кибернетика, Теория автоматического регулирования, книга I — Математическое описание, анализ устойчивости и качества систем автоматического регулирования. «Машиностроение», М., 1967.

В этой книге приведена более подробная таблица h -функций, чем табл. 12.1.

Глава 13

Вывод формулы интегральной квадратической ошибки, приведенный в тексте, изложен в книге:

Дж. К. Н ь ю т о н, А. А. Г у л д, Дж. Ф. К а й з е р, Теория линейных следящих систем. Физматгиз, М., 1961.

Другие, менее удобные формулы интегральной квадратической ошибки, фигурирующие во многих книгах по теории автоматического управления, приведены в книге:

Г. Д ж е й м с, Н Н и к о л ь с, Р. Ф и л л и п с, Теория следящих систем. ИЛ, М., 1951.

Задача синтеза оптимальных непрерывных систем по минимуму квадратического критерия качества при детерминированных воздействиях с несколькими позициями подробно изложена в книгах:

Ш. С. Л. Ч а н г, Синтез оптимальных систем автоматического управления. «Машиностроение», М., 1964;

А. Б р а й с о н, Х о Ю - ш и, Прикладная теория оптимального управления. «Мир», М., 1972.

Глава 14

По исследованию систем при случайных воздействиях укажем следующие книги:

С. В. Первачев, А. А. Валуйев, В. М. Чиликин, Статистическая динамика радиотехнических следящих систем. «Советское радио», М., 1973;

В. С. Пугачев, И. Е. Казаков, Л. Г. Евланов, Основы статистической теории автоматических систем. «Машиностроение», М., 1974;

В. В. Солодовников, Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. Физматгиз, М., 1960;

Цян ь С ю э - с е н ь, Техническая кибернетика. ИЛ, М., 1956,

а также упомянутые выше к главе 13 книги Ш. С. Л. Чанга, Дж. К. Ньютона, А. А. Гулда и Дж. Ф. Кайзера.

Глава 15

Подробное описание характеристик различных нелинейных элементов с гистерезисом и, в частности, нелинейных элементов типа «люфт», «упор» имеется в книге:

Л. С. Гольдфарб, А. В. Балтрушевич, А. В. Нетушил, Е. Б. Пастернак, В. В. Бурляев, В. Я. Ротач, Р. Е. Кузин, Теория автоматического управления. «Вышая школа», М., 1972.

Описанию и методам исследования нелинейных систем посвящены книги: Б. Н. Наумов, Теория нелинейных автоматических систем. «Наука», М., 1972;

Е. П. Попов, Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. «Наука», М., 1973;

Е. И. Хлыпало, Нелинейные системы автоматического регулирования. «Энергия», Л., 1967.

Глава 17

Частотным критериям абсолютной устойчивости посвящены книги:

В. М. Попов, Гиперустойчивость автоматических систем. «Наука», М., 1970;

М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер, Абсолютная устойчивость регулируемых систем. Изд-во АН СССР, 1963,

а также написанные В. А. Якубовичем первые две главы книги:

Р. А. Нелепин (ред.), Методы исследования нелинейных систем автоматического управления. «Наука», М., 1975.

Глава 20

Метод гармонической линеаризации в его частотной форме введен в теорию управления Л. С. Гольдфарбом, см. книгу:

Метод Гольдфарба в теории автоматического регулирования. «Энергия», М., 1962

Этот метод и его обобщения нашли широкое применение в теории управления и смежных дисциплинах, см., например, книгу:

А. А. Вавилов, Частотные методы расчета нелинейных систем. «Энергия», Л., 1970.

Математические аспекты метода гармонической линеаризации и приложения к различным задачам механики изложены в книге:

Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. «Наука», М., 1974,

а также в упомянутых выше в литературе к главе 15 книгах Е. П. Попова и Е. И. Хлыпало.

Глава 21

Стохастическим процессам в нелинейных системах посвящены книги:

А. А. Первозванский, Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. Физматгиз, М., 1962;

И. Е. Казаков, Б. Г. Доступов, Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. Физматгиз, М., 1962;

К. А. Пулков, Статистический расчет нелинейных систем автоматического управления. «Машиностроение», М., 1965,

а также несколько глав упомянутой выше к главе 14 книги

С. В. Первачева, А. А. Валueva, В. М. Чиликина

Глава 22

Специально вопросам квантования посвящена книга:

Ж. Маркюс, Дискретизация и квантование. «Энергия», М., 1969.

Примеры дискретных систем и, в частности, систем с цифровыми вычислительными устройствами приведены, например, в книгах:

М. С. Хитрик, С. М. Федоров (ред.), Динамика управления ракет с бортовыми цифровыми вычислительными машинами. «Машиностроение», М., 1976.

В. М. Муттер, Аналого-цифровые следящие системы. «Энергия», Л., 1974;

Главы 23—28

Линейным импульсным автоматическим системам посвящена обширная литература:

Я. З. Цыпкин, Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, М., 1963;

Л. Т. Кузин, Расчет и проектирование дискретных систем управления. Машгиз, М., 1962;

Е. И. Джури, Импульсные системы автоматического регулирования. Физматгиз, М., 1963;

Ю. Т. Ту, Цифровые и импульсные системы автоматического управления. «Машиностроение», М., 1964;

П. В. Бромберг, Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. «Наука», М., 1967.

Глава 30

Синтез линейных импульсных систем изложен в книге:

Л. Н. Волгин, Элементы теории управляющих машин. «Советское радио», М., 1962.

Задачи синтеза изложены также в упомянутой выше к главе 13 книге Ш. С. Л. Чанга.

Главы 33—37

Нелинейные импульсные системы рассмотрены в книгах:

- Я. З. Цыпкии, Ю. С. Попков, Теория нелинейных импульсных систем. «Наука» М., 1973;
 П. Видаль, Нелинейные импульсные системы. «Энергия», М., 1974;
 В. М. Кунцевич, Ю. Н. Чеховой, Нелинейные системы управления с частотно- и широтно-импульсной модуляцией. «Техника», Киев, 1970.

Глава 38

Цифровое моделирование непрерывных систем рассмотрено в книгах:

- Р. Богнер, А. Константинидиас (ред.), Введение в цифровую фильтрацию. «Мир», М., 1976;
 В. В. Быков, Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. «Советское радио», М., 1971;
 Б. Голд, Ч. Рэйдер, Цифровая обработка сигналов. «Советское радио», М., 1973.

Приложения

1. По преобразованию Лапласа и Фурье отметим книги:

- М. Гарднер, Д. Бэрнс, Переходные процессы в линейных системах. Физматгиз, М., 1961;
 Г. Деч, Руководство по практическому применению преобразования Лапласа и преобразования Фурье «Наука», М., 1971;
 М. И. Конторович, Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. «Советское радио», М., 1975;
 Б. Ван-дер Поля, Х. Бреммер, Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. ИЛ, М., 1952.

Сопоставление свойств преобразований Лапласа и Фурье хорошо изложено в упомянутых выше главах 13 и 14 книгах Дж. К. Ньютона, А. А. Гулда и Дж. Ф. Кайзера, а также Цянь Сюэ-сеня.

Дискретные преобразования Лапласа и Фурье подробно изложены в книге:

Я. З. Цыпкии, Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, М., 1963

и в упомянутых выше книгах М. Гарднера, Д. Бэрнса, а также Г. Дёча и др.

2. Строгое рассмотрение импульсивных функций в настоящее время основано на привлечении понятий обобщенных функций. См., например,

- И. М. Гельфанд, Г. В. Шлов, Обобщенные функции. Вып. 1. Обобщенные функции и действия с ними. Физматгиз, М., 1958;
 Г. Бреммерман, Распределения, комплексные переменные и преобразование Фурье. «Мир», М., 1968.

Превосходное изложение теории импульсивных функций и их применения имеются также в упомянутой выше книге Б. Ван-дер Поля и Х. Бреммера.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютная устойчивость процесса 294, 474
— — состояния равновесия 262, 263 и д., 268, 286 и д.
Абсцисса абсолютной сходимости 533
Автоколебания 51, 253, 305, 495
Автомат курса 7, 27, 29, 34
Автоматическая система 9
Автоматический регулятор 6
Автоматическое управление 6
Алгебра передаточных функций 61
Алгебраические критерии устойчивости 134 и д.
Амплитудно-импульсная система 333
Анализ систем автоматического управления 51
Аналоговое электронное моделирование 165
Апериодическая система 472
Астагизм l -го порядка 127
Астагическая система 23, 126
— — нелинейная 254
- Баланс гармонический** 308
— — для вынужденных колебаний 312
Белый шум 219, 220, 224
Биния 254
Блок-схема 60, 233, 341
Быстродействие системы 174 и д.
— — импульсной 405
— — нелинейной 277
— — импульсной 488
— — предельное 175
- Величина управляемая (регулируемая)** 9
Ветви графа системы регулирования 60
Воздействие возмущающее 43, 45
— — гармоническое 380
— — детерминированное 45
— — линейное 377
— — постоянное 376
— — случайное 45
— — степенное 377
— задающее 43
— управляющее 9
— эквивалентное 71
Возмущение 43, 45
— детерминированное 45
— случайное 45, 208
Временная характеристика 110, 112, 113
— — замкнутой импульсной системы 404, 406
Время запаздывания 32
— — управления 50
Вынужденное отклонение 49
Вынужденный процесс 110, 117 и д.
Вышнеградского гипербола 138
- Гармоническая линеаризация 305, 306
Гармонический баланс 308
— — для вынужденных колебаний 312
Генератор, система регулирования напряжения 6, 9, 19, 23, 34
Гипербола Вышнеградского 138
Гистерезис 236
— отрицательный 238, 274
— положительный 238, 274
Глаз, управление величиной зрачка 16
Граничный коэффициент усиления 152, 311, 399, 402
Граф системы регулирования 60
График резонансный 316
Грубость системы 411, 414
Гурвица критерий устойчивости 137
- Датчик ошибки, отклонения или рассогласования 34
Двигатель постоянного тока, регулируемые 8
Двустороннее преобразование Лапласа 524, 538
— — Фурье 445
Дельта-функция 70, 112, 179, 321, 343, 440, 529
Дигратор 509, 512
Динамическое отклонение 48, 49
— — максимальное 50
Дискрета 332
Дискретизация сигнала по времени 331
— — по уровню 331
Дискретная автоматическая система 36, 52 и д.
— — линейная 341 и д.
— передаточная функция 365
Дискретное преобразование Лапласа 346, 381, 533
— — Фурье 381, 489, 539
Дисперсия выходной величины линейной системы 220
— ошибки в нелинейной системе 323
— случайного процесса 210
— — — решетчатого 443
Дифференциатор 29, 63
— дискретно-непрерывный 337
Дифференцирование оригинала 522
Длительность динамического отклонения 50
- Жесткая внутренняя связь** 28
- Зависимое управление 13
Задатчик 14

- Задача анализа** 51
 — оптимизации 191
 — синтеза 51
 — импульсных систем 411 и д.
Задающее воздействие 43
 — устройство 10, 33
Закон управления интегральный 176
 — пропорционально-интегральный 176
 — пропорциональный 176
 — суммарно-разностный 364
Запаздывание 32, 100, 167, 399, 402, 413, 422
Захватывание 315
Значение среднее выходной величины
 идеального импульсного элемента 440
Значения предельные 524, 538
Зона нечувствительности 236, 238
Зрачок глаза, система управления 16
- Идеальная автоматическая система** 85, 100
Измерительное устройство 10, 33
Изображение 58, 521, 533
 — свертки двух оригиналов 524
Импульсная функция (δ -функция) 70,
 112, 179, 321, 343, 440, 529
Импульсная автоматическая система 37,
 39, 332
 — — — нелинейная 454 и д.
 — — — — предельная 470
 — — — — аperiodическая 472
 — — — — преобразованная 488
 — — — — неустойчивая 383
 — — — — оптимальная 428 и д., 448
 — — — — разомкнуто-замкнутая 361
 — характеристика см. Характеристика
 временная
Импульсный модулятор 332
Инвариантная автоматическая система 85
Индекс аperiodической нейтральности
 108
 — астатизма 368
 — нейтральности аperiodической 393
 — колебательной 108
 — неминимально-фазовости 108, 368
 — неустойчивости 108, 368
Инерционность системы 26, 27
Инерционный элемент 54
Интегратор 22, 65, 126, 155
 — дискретный 509, 512
Интегрирование, аппроксимация в им-
пульсных моделях 509
 — кратное 514
 — оригинала 522
 — численное 510
Интервал квантования по времени 331
 — по уровню 331
Исполнительное устройство 11, 34
И-управление 103, 176
- Качество свободных процессов** 297
Квантовая по времени 331
 — по уровню 331, 469
Комбинированная система 79, 98
 — — — разомкнуто-замкнутая 83
Коммутация сигнала ошибки 29
Контур с обратной связью 53
Контурная передаточная функция 89, 94
Корабль, стабилизация курса 7, 25, 27, 34
Корректирующее устройство 34, 35
Коррекция 30
 — параллельная 163
Корреляционная функция 211
 — — — взаимная 214, 441
 — — — решетчатая 443
- Коэффициент линеаризации** 239
 — — — гармонической 240, 308, 456, 459, 502
 — — — комплексный 458
 — — — дифференциальной 240, 456, 489, 492
 — — — статической 239, 456, 489, 492
 — — — стохастической 242, 323, 456, 460
 — усиления 20, 27, 495
 — — — граничный 152, 311, 399, 402
 — — — предельный 398
Коэффициенты ошибки 119, 378
Критерии быстродействия 300
 — — — устойчивости 135
 — — — алгебраические 134 и д.
 — — — частотные 134, 139, 141, 144, 277, 279,
 282, 283, 389, 392, 393
 — — — — логарифмические 145 и д.
Критерий быстродействия круговой 300
 — — — линейный 300
 — — — параболический 300
 — — — устойчивости абсолютной 275, 277, 280,
 481, 482, 485
 — — — Гурвица 137
 — — — импульсных систем 388
 — — — Найквиста 141
 — — — Рауса 134
 — — — частотный круговой 282, 283
 — — — — линейный 277
 — — — — отрезковый 141, 144, 312, 393
 — — — — параболический 279
 — — — — точечный 141, 144, 392, 393
Кровообращение, регуляция 15
- Лапласа преобразование** 58, 113, 521
 — — — двустороннее 524
 — — — дискретное 346, 381, 533
 — — — двустороннее 538
 — — — обратное 533
 — — — обратное 144, 521
Линеаризация гармоническая 240, 305, 306,
 456, 495
 — дифференциальная 240, 455
 — статическая 239, 455
 — стохастическая 242, 323, 456
Линейная автоматическая система 130 и д.
 — — — неустойчивая 130
Линейность преобразования Лапласа 522
 — — — дискретного 537
Логарифмическая амплитудно-частотная
характеристика 145
 — фазо-частотная характеристика 145
Логарифмические частотные критерии ус-
тойчивости 145
- Математическое ожидание квадрата слу-**
чайного процесса 210
 — — — случайного процесса 210
Матрица Гурвица 137
Машина цифровая вычислительная 38,
 334, 338, 340, 356 и д.
Мера быстродействия 175, 297, 488
Многооточное (многоканальное) регули-
рование 38
Многоузловая автоматическая система 15
Многочлен характеристический 114
Моделирование аналоговое 165
 — импульсное непрерывных систем 506 и
 д., 515
 — цифровое 467
Модель объекта 79
Модулятор импульсный 332
 — δ -функций 344
Моменты временной характеристики 117
Мощность случайного процесса 216

- Найквиста критерий устойчивости 141
 Насыщение 235, 258
 Негрубая автоматическая система 414
 Нейтральный объект 7
 Нелинейная автоматическая система 51, 232 и д.
 — — — преобразованная 298
 — — — устойчивая 260 и д.
 — — — — абсолютно 262
 Нелинейности 232
 Непрерывная автоматическая система 36, 52, 53 и д.
 Неравенства частотные 269
 Неустойчивость объекта 8
 — системы 23
 — — линейной 130
 — — структурная 25, 155
 Нормированная передаточная функция разомкнутой системы 139
 — частотная характеристика 140
 Нули передаточной функции 107
 — — — левые (правые) 108
 — — — нейтральные (нулевые) 108
- Обратная связь 9, 19, 35, 53, 64, 91
 — — внутренняя 28, 57, 60, 76
 — — жесткая 28, 64
 — — отрицательная 64, 93
 — — положительная 64, 93
 — — — внутренняя 76
 — — — условная 82, 362
 Обратное преобразование Лапласа 114, 523
 — — — дискретное 533
 — — — Фурье 114, 180, 351, 525, 527
 Общий процесс 111
 Объект управляемый (регулируемый) 9, 31
 — — — нейтральный 7
 — — — неустойчивый 8
 — — — с запаздыванием 32, 100
 — — — устойчивый 7
 Ограничения 192, 450
 Однонаправленность 35, 36
 Оптимальность 191 и д., 225, 228, 448
 Орган управляющий (регулирующий) 5, 9
 Оригинал 57, 521, 533
 Отклонение 9, 19, 34, 48
 — абсолютное интегральное 192
 — — суммарное 428
 — динамическое 48, 49
 — — максимальное 50
 — квадратическое интегральное 192, 194, 301
 — — суммарное 428, 429, 491
 — — максимальное 192, 428
 — среднеквадратическое 211, 221, 447, 448
 — статическое 48
 —, уравнение 57, 60
 — — установившееся (вынужденное) 49, 50, 121
 Ошибка 34
 — вынужденная 121
 — статическая 20, 121
 — — нулевая 123 и д.
- Парсеваля формула 195, 216, 429
 ПД-управление 103
 Передаточная функция 59, 67, 113
 — — выходная 89
 — — гармонически линеаризованного нелинейного элемента 309
 — — дискретная 365
 — — замкнутой системы 67, 107
 — — импульсной модели 508
- Передающая функция контурная 89, 94
 — — — разомкнутой системы нормированная 139
 — — — сквозная 89, 94
 Перерегулирование 50
 ПИ-управление 103, 176
 ПИД-управление 103
 Плотность распределения случайного процесса 209, 321
 — — спектральная 215
 — — — взаимная 216, 441
 — — — выходной величины линейной системы 220
 — — — решетчатого процесса 444
 — — — энергии 195
 Площадь оригинала 524
 Подавляющие системы 471
 Показатели качества 191, 428
 — — — процесса управления 50
 Полосы передаточной функции 107
 — — — левые (правые) 108
 — — — нейтральные (нулевые) 108
 Попова В. критерии абсолютной устойчивости 277
 — — — прямая 276, 292
 Порядок передаточной функции 108
 — — — дискретной 368
 Постоянная времени 54
 Правило переноса точки суммирования 65
 — — — — сьема 65
 Предельное характеристическое уравнение 159
 Преобразование Лапласа 58, 113, 521
 — — — двустороннее 524
 — — — дискретное 346, 381, 533
 — — — — двустороннее 538
 — — — — обратное 533
 — — — обратное 114, 521
 — — — Фурье 114, 180, 349, 525
 — — — двустороннее 445
 — — — дискретное 381, 489, 539
 — — — обратное 114, 180, 351, 525, 527
 Преобразователь масштаба времени 334
 Принцип отклонения 19
 — — — суперпозиции 53
 Программное управление 12, 13
 Производственная функция 17
 Процесс в автоматической системе 109
 — — — вынужденный 110, 117 и д., 261
 — — — в системе импульсной 374, 375
 — — — — — при монотонных воздействиях 376 и д.
 — — — — — нелинейной 249
 — — — — — импульсной 467
 — — — — — устойчивой абсолютно 262
 — — — — — «в большом» 262
 — — — — — «в малом» 262
 — — — — — «в целом» 262
 — — — конечной длительности в импульсной системе 408
 — — — общий (полный) 111
 — — — оптимальный 191 и д.
 — — — в системе нелинейной 305
 — — — — — импульсной 495, 502
 — — — свободный (собственный) 110, 132, 174 и д.
 — — — в системе импульсной 374
 — — — — — нелинейной 250
 — — — — — импульсной 467
 — — — случайный (стохастический) 209
 — — — в системе импульсной 440 и д.
 — — — — — нелинейной 321 и д.
 — — — — — решетчатый 445
 — — — стационарный 209
 — — — эргодический 212

- Прямая Попова В. 276, 292
 Прямая часть замкнутой системы 64
 ПСР-управление 364
 П-управление 103, 176
- Равновесие** 252
 —, устойчивость 260
 Разомкнуто-замкнутая система 80, 83, 361
 Рассогласование 34
 Расщепление 204
 Рауса — Гурвица критерий для импульсных систем 388
 Рауса критерий устойчивости 134
 Реактор ядерной энергетический, регулирование 11
 Регулируемая величина 9
 Регулирующий орган 6
 Регулятор 6, 31 (см. также Система регулирования)
 Регуляция кровообращения 15
 Режим принудительной синхронизации 254, 315
 Резонанс 314
 — скачкообразный 316
 Резонансный график 316
 Реле идеальное 325
 —, характеристики 238
 Рельсовая автоматическая система 37, 40, 332
 Рефлекс зрачковый 17
 Решетчатая функция 332, 443, 533
 Ряд Фурье 179
- Свертка** 524
 Свободный процесс 110, 132, 174 и д.
 — — в системе импульсной 374
 — — — — нелинейной 250
 — — — — импульсной 467
 Связь обратная 9, 19, 35, 53, 64, 91
 — — внутренняя 28, 57, 60, 76
 — — жесткая 28, 64
 — — отрицательная 64, 93
 — — положительная 64, 93
 — — внутренняя 76
 — — условная 82, 362
 Синтез автоматических систем 52
 — — импульсных 411, 448
 Синхронизация принудительная 254, 315
 Система автоматическая 9
 — амплитудно-импульсная (АИАС) 333
 — астатическая 23, 126
 — нелинейная 254
 — грубая 411, 414
 — дискретная 36, 331 и д.
 — — линейная 341 и д.
 — замкнутая 9
 — смещенная 175
 — идеальная 85, 100
 — импульсная 37, 39, 332
 — — нелинейная 454 и д.
 — — предельная 470
 — — — — аperiodическая 472
 — — преобразованная 488
 — неустойчивая 383
 — оптимальная 428 и д., 448
 — разомкнуто-замкнутая 361
 — с дискретным фильтром или ЦВУ 357
 — с условной обратной связью 362
 — смещенная 405
 — управления температурой печи 38
 — — устойчивая 383
 — инвариантная 85
- Система инвариантная частично 85
 — комбинированная 79, 83, 98
 — линейная неустойчивая 130
 — — устойчивая 130 и д.
 — многосвязная 15
 — негрубая 414
 — нелинейная 51, 232 и д.
 — — преобразованная 298
 — — устойчивая 260 и д.
 — — — — абсолютно 262
 — непрерывная 36, 52, 53 и д.
 — неустойчивая 23
 — — структурно 25, 154
 — — оптимальная 191 и д.
 — — импульсная 448
 — — стохастическая 225, 228
 — при случайных воздействиях 208 и д.
 — разомкнуто-замкнутая 80
 — — комбинированная 83
 — регулирования 6, 12
 — — мощности ядерного реактора 11
 — — напряжения генератора 9, 19, 23, 34
 — — — — с электромашинным усилителем 10, 34
 — — скорости вращения 12
 — — толщины прокатываемого металла 169
 — — числа оборотов двигателя 10
 — — релейная 37, 40, 332
 — с внутренней положительной обратной связью 76
 — с запаздыванием 100, 167, 399, 402, 413, 422
 — с моделью объекта 79
 — с нулевой чувствительностью 97
 — с условной обратной связью 82
 — следящая 13, 43, 223
 — стабилизации (система собственно регулирования) 12, 43
 — — курса корабля 25, 27, 34
 — статическая 20, 28, 122
 — структурно неустойчивая 25, 154
 — управления величиной зрачка глаза 146
 — — двухканальная 335
 — — зависимого 13
 — — кровообращением 15
 — — основными фондами предприятия 17
 — — программного 13
 — устойчивая 23
 — — при больших коэффициентах усиления 157 и д., 162 и д.
 — — цифровая 37, 332
 — — широтно-импульсная 333
 — — экономическая 17
 — «Скайляб», орбитальная станция 40
 Скачок 529
 Сквозная передаточная функция 89, 94
 Следящая система 13, 43, 223
 Случайный процесс 209
 — — в системе импульсной 440 и д.
 — — — — нелинейной 321 и д.
 — — стационарный 209
 — — — — эргодический 212
 Смещение аргумента изображения 523, 537
 — — оригинала 523
 — — решетчатой функции 537
 Собственный процесс см. Свободный процесс
 Соединение обратной связи 63
 — элементное обратное 63, 92
 — — параллельное 62, 92
 — — последовательное 61, 90
 Состояние автономное стационарное 251
 — равновесия 252
 — — устойчивое 261
 Спектр решетчатой функции 540

- Спектральная плотность 215
 — — взаимная 216, 441
 — — выходной величины линейной системы 220
 — — решетчатого процесса 444
 — — энергии 195
 Способ прямоугольников 510, 512
 — Симпсона 511, 513, 514
 — трапеций 511, 512
 Сравняющее устройство 33
 Среднеквадратическое отклонение 211, 221, 447, 448
 Стабилизация автоматических систем 28
 — управляемой величины 12
 Статизм 28
 Статическая ошибка 20
 — — нулевая 123 и д.
 — система 122
 — характеристика 19
 Статическое отклонение 48
 Степень передаточной функции 108
 — — дискретной 368
 — — устойчивости системы 175
 — — — нелинейной 297
 — — — импульсной 488
 Структура автоматической системы 73 и д.
 Сумма дискрет 538
 Схема функциональная 31
- Таблица Рауса 135
 Тахогенератор, уравнение 57, 60
 Тахометр 33, 35
 Теорема запаздывания 357, 372, 523, 537
 — о квантовании 351
 — о линейности 353
 — свертывания 109, 523, 537
 — смещения 405
 Точка суммирования, правило переноса 65
 — сьема, правило переноса 65
- Узлы графа системы регулирования 60
 Умножение изображений 523, 537
 Управление 5 (см. также Устройство управляющее)
 — автоматическое 6
 — зависимое 13
 — курсом корабля 7, 25, 27, 34
 — программное 12, 13, 43
 — ручное 6
 Управляемая величина 9
 Управляемый объект 9, 31
 — — с запаздыванием 32
 Управляющее воздействие 9
 — устройство 9, 31
 Управляющий орган 6, 9
 Уравнение вынужденного процесса 250
 — замкнутой системы 69
 — интегральное нелинейное 246
 — свободного процесса 250
 — синтеза полиномиальное второе 418
 — — — первое 418
 — — — третье 419
 — — — четвертое 419
 — системы нелинейной 245
 — усилителя электромашинного 56, 59
 — — электронного 57
 — — характеристическое 114
 — — гармонически линеаризованной замкнутой системы 310
 — — предельное 159
 Уравнения систем автоматических 55
 — — — импульсных нелинейных 463
 — — — общие 84
- Усилитель электромашинный 10, 34, 56, 59
 — — электронный 57, 59
 Условие воспроизведения задающего воздействия 81, 85
 — замыкания системы 70
 — инвариантности системы 85, 123
 — компенсации возмущающего воздействия 80, 85
 — нулевой чувствительности 98
 — отсутствия статической ошибки 123
 — устойчивости 132
 — — абсолютной 474 и д.
 — — — нелинейных систем 269
 — — — импульсной системы 384
 Условия грубости 414
 — — нулевой вынужденной ошибки 378
 Установившееся отклонение 49, 50
 Устойчивость абсолютная процесса 294
 — — — вынужденного 474
 — — — состояния равновесия 262, 263 и д., 268, 286 и д.
 Устойчивость автоматической системы 7, 23, 46, 130 и д., 383
 — — — нелинейной 260 и д.
 — — — «в большом» 285
 — — — «в малом» 284
 — — — импульсной 473 и д.
 — объекта 7
 — процесса вынужденного «в большом» 474
 — — — «в малом» 474
 — — — состояния равновесия 260, 286 и д.
 — — — «в большом» 261
 — — — «в малом» 261
 — — — «в целом» 261
 Устройство дифференцирующее 29, 63, 337
 — задающее 10, 33
 — измерительное 10, 33
 — исполнительное 11, 34
 — корректирующее 34, 35
 — сравнивающее 33
 — управляющее 9, 31
 — — интегральное 103
 — — пропорционально-дифференциальное 103
 — — пропорциональное 103
 — — пропорционально-интегрально-дифференциальное 103
 — — пропорционально-интегральное 103
 — формирующее 343, 352
 — цифровое вычислительное (ЦВУ) 38, 340, 356 и д.
- Факторизация 204, 417
 Фильтр дискретно-непрерывный (дискретный) 335, 357, 364
 — — рекурсивный 336
 — — идеальный 351
 Фонды основные предприятия 17
 Формирующая цепь 343, 347
 Формула разложения 114
 — Парсевала 195, 216, 429
 — чувствительности общая 90
 Функционал 191, 237
 Функциональная схема 31
 Функция импульсная (δ функция) 70, 112, 179, 321, 343, 440, 529
 — — корреляционная 211
 — — взаимная 214, 441
 — — решетчатая 443
 — — передаточная 59, 67, 113
 — — выходная 89
 — — гармонически линеаризованного нелинейного элемента 309
 — — дискретная 365

Функция передаточная замкнутой системы
 67, 107
 — — импульсной модели 508
 — — контурная 89, 94
 — — нормированная разомкнутой системы 139
 — — сквозная 89, 94
 — производственная 17
 — решетчатая 332, 443, 533
 — скачок 529
 — спектральная энергетическая 195
 — финитная 216
 — чувствительности 88
 — — логарифмическая 88
 Фурье преобразование 114, 180, 349, 525
 — — двустороннее 445
 — — дискретное 381, 489, 539
 — — обратное 114, 180, 351, 381, 525, 527
 — — ряд 179

Характеристика временная (импульсная)
 110, 112, 113
 — — замкнутой импульсной системы 371, 381, 404, 406
 — — логарифмическая амплитудно-частотная 145
 — — фазо-частотная 145
 — — переходная системы 181, 184
 — — реле идеальная 238
 — — с гистерезисом отрицательным 238
 — — — — положительным 238
 — — с зоной нечувствительности 238
 — — статическая 19
 — — частотная 113
 — — вещественная 180
 — — замкнутой импульсной системы 380
 — — линейной части модифицированная 275
 — — — — смещенная 299
 — — мнимая 180
 — — нормированная 140
 — — — — предельная 168
 — — смещенная 489
 Характеристики нелинейных элементов 235
 — — — — релейного типа 238
 — — оптимальные 199, 203
 — — статистические 219
 Характеристический многочлен 114
 Характеристическое уравнение 114

Цепь замкнутая (цепь с обратной связью)
 35
 — — формирующая 343, 347, 351
 Цифровая автоматическая система 37
 — — вычислительная машина (ЦВМ) 38, 334, 338, 340, 356 и д

Частично инвариантная система 85
 Часть прямая замкнутой системы 64
 Чувствительность 88 и д.
 — — нулевая 98
 — — соединения обратного 91
 — — параллельного 91
 — — последовательного 90

Шум белый 219, 220, 224

Эквивалентное воздействие 71
 Экономика 17
 Экстремаль функционала 193
 Электродвигатель 8, 56, 59
 Электромашинный усилитель 10, 23, 34, 56, 59
 Электронный усилитель 57, 60
 Элемент амплитудно-импульсный 342
 — — простейший 342
 — — запаздывания 399, 413, 425
 — — импульсный нелинейный 455
 — — простейший 342, 348
 — — инерционный 54
 — — линейный 53
 — — нелинейный 53
 — — естественный 235
 — — искусственный 235
 — — релейный идеальный 326
 Энергия управления 199
 Эргодичность 212

Ядерный энергетический реактор 11

D -преобразование 346
 \mathcal{D} -преобразование 346
 h -функции для трапецидальных вещественных частотных характеристик 188, 189
 RC -цепь 54
 δ -функция 70, 112, 179, 321, 343, 440, 529

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
-----------------------	---

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОМАТИЧЕСКОМ УПРАВЛЕНИИ

Глава 1. Задачи автоматического управления	5
§ 1.1. Основные понятия	5
§ 1.2. Примеры простейших автоматических систем	9
§ 1.3. Задачи автоматического управления	12
§ 1.4. Автоматические системы в живой природе и обществе	15
Глава 2. Свойства и особенности автоматических систем	19
§ 2.1. Статические свойства автоматических систем	19
§ 2.2. Устойчивость автоматических систем	23
§ 2.3. О стабилизации автоматических систем	27
Глава 3. Функциональная схема и типы автоматических систем	31
§ 3.1. Функциональная схема	31
§ 3.2. Особенности автоматических систем	35
§ 3.3. Основные типы автоматических систем	36
Глава 4. Задачи теории автоматического управления	43
§ 4.1. Виды воздействий	43
§ 4.2. Характер процессов управления	46
§ 4.3. Задачи теории автоматического управления	51

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

НЕПРЕРЫВНЫЕ АВТОМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

А. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Глава 5. Математическое описание автоматических систем	53
§ 5.1. Понятие о линейных системах	53
§ 5.2. Уравнения, блок-схемы и графы автоматических систем	55
§ 5.3. Алгебра передаточных функций	61
§ 5.4. Передаточные функции и уравнения замкнутых систем	67
Задачи	72

Глава 6. Структуры автоматических систем	73
§ 6.1 Обычная система	73
§ 6.2 Система с внутренней положительной обратной связью	76
§ 6.3 Комбинированная система	79
§ 6.4 Разомкнуто-замкнутая система	80
§ 6.5 Комбинированная разомкнуто-замкнутая система	83
§ 6.6 Общие уравнения автоматических систем	84
Задачи	85
Глава 7. Чувствительность автоматических систем	88
§ 7.1. Понятие чувствительности	88
§ 7.2. Общая формула чувствительности	89
§ 7.3 Чувствительность соединений элементов	90
§ 7.4 Чувствительность основных структур автоматических систем	93
§ 7.5 Системы нулевой чувствительности	97
§ 7.6. О реализуемости систем нулевой чувствительности	98
Задачи	100
Глава 8. Характеристики автоматических систем	102
§ 8.1. Законы управления	102
§ 8.2. Показатели передаточных функций	107
§ 8.3. Понятия о процессах в автоматических системах	109
§ 8.4. Характеристики автоматических систем	111
Задачи	115
Глава 9. Вынужденные процессы	117
§ 9.1. Общее описание вынужденных процессов	117
§ 9.2. Коэффициенты ошибок по вынужденному процессу $z^B(t)$	119
§ 9.3. Статическая ошибка	121
§ 9.4. Условия отсутствия статической ошибки	123
§ 9.5. Условия астатизма l -го порядка	127
Задачи	128
Глава 10. Устойчивость автоматических систем	130
§ 10.1. Условия устойчивости	130
§ 10.2. Алгебраические критерии устойчивости	134
§ 10.3. Частотные критерии устойчивости	139
§ 10.4. Логарифмические частотные критерии устойчивости	145
Задачи	150
Глава 11. Исследование устойчивости автоматических систем	151
§ 11.1. Исследование устойчивости типовых систем	151
§ 11.2. Структурно неустойчивые системы и их стабилизация	154
§ 11.3. Системы, устойчивые при больших коэффициентах усиления	157
§ 11.4. Асимптотические свойства систем, устойчивых при больших коэффициентах усиления	162
§ 11.5. Устойчивость систем с запаздыванием	167
Задачи	173
Глава 12. Свободные процессы в автоматических системах	174
§ 12.1. Мера быстродействия автоматических систем	174
§ 12.2. Связь временной и частотной характеристик автоматических систем	178
§ 12.3. Переходная характеристика автоматической системы	181
§ 12.4. Построение переходных характеристик	184
Задачи	190

Глава 13. Оптимальные процессы	191
§ 13.1. Показатели качества	191
§ 13.2. Интегральное квадратическое отклонение	194
§ 13.3. Оптимальные параметры систем	196
§ 13.4. Оптимальные характеристики систем	199
§ 13.5. Реализуемые оптимальные характеристики	203
Задачи	207
Глава 14. Системы при случайных воздействиях	208
§ 14.1. Основные понятия	208
§ 14.2. Характеристики случайных процессов	210
§ 14.3. Статистические характеристики автоматической системы	219
§ 14.4. Среднеквадратическое отклонение	221
§ 14.5. Оптимальные системы	225
§ 14.6. Оптимальная стохастическая система при учете ограничений	228
Задачи	230
 Б. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ 	
Глава 15. Уравнения и характеристики нелинейных систем	232
§ 15.1. Понятие о нелинейных системах	232
§ 15.2. Блок-схема и граф нелинейной системы	233
§ 15.3. Типовые нелинейные элементы и их характеристики	235
§ 15.4. Линеаризация нелинейных элементов	239
§ 15.5. Уравнения нелинейных систем	245
Задачи	246
Глава 16. Процессы в нелинейных системах	249
§ 16.1. Вынужденные и свободные процессы	249
§ 16.2. Понятия состояний равновесия и автоколебаний	251
§ 16.3. Возможные режимы нелинейных систем	253
§ 16.4. Общие свойства процессов	255
Задачи	259
Глава 17. Устойчивость нелинейных систем	260
§ 17.1. Понятия устойчивости	260
§ 17.2. Условия абсолютной устойчивости состояния равновесия	263
§ 17.3. Частотные неравенства	269
§ 17.4. Критерий абсолютной устойчивости состояния равновесия	275
§ 17.5. Общий критерий абсолютной устойчивости состояния равновесия	277
§ 17.6. Критерий абсолютной устойчивости состояния равновесия при нестационарной нелинейной характеристике	280
§ 17.7. Общий критерий устойчивости процессов	282
§ 17.8. Об устойчивости «в малом» и «в большом»	283
Задачи	285
Глава 18. Исследование абсолютной устойчивости нелинейных автоматических систем	286
§ 18.1. Абсолютная устойчивость состояния равновесия типовых систем	286
§ 18.2. Абсолютная устойчивость состояния равновесия при любых положительных коэффициентах статической линеаризации	291
§ 18.3. Абсолютная устойчивость процессов	294
Задачи	295

Глава 19. Оценки качества свободных процессов	297
§ 19.1. Виды оценок	297
§ 19.2. Оценка меры быстродействия нелинейных систем	297
§ 19.3. Оценка квадратического интегрального отклонения	301
Задачи	304
Глава 20. Периодические процессы	305
§ 20.1. Понятие о периодических процессах	305
§ 20.2. Гармонический баланс для автоколебаний	306
§ 20.3. Определение амплитуды и частоты автоколебаний	308
§ 20.4. Гармонический баланс для вынужденных колебаний	312
§ 20.5. Резонансные свойства нелинейной автоматической системы	314
Задачи	319
Глава 21. Стохастические процессы	321
§ 21.1. Особенности стохастических процессов	321
§ 21.2. Дисперсия ошибки	322
§ 21.3. Реакция нелинейной системы на случайное воздействие	325
§ 21.4. Исследование простейшей автоматической системы	325
Задачи	328

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ДИСКРЕТНЫЕ АВТОМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Глава 22. Виды дискретных систем	331
§ 22.1 Квантование и его особенности	331
§ 22.2 Виды импульсных и цифровых автоматических систем	332
§ 22.3. Примеры дискретных автоматических систем	334
А. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ	
Глава 23. Уравнения импульсных систем	341
§ 23.1 Блок-схема и граф импульсных систем	341
§ 23.2. Импульсный элемент и его уравнения	342
§ 23.3. Свойства импульсного элемента	348
§ 23.4. Уравнения импульсных автоматических систем	351
Задачи	356
Глава 24. Основные структуры импульсных систем	357
§ 24.1. Система с дискретным фильтром или с ЦВУ	357
§ 24.2. Система с непрерывным фильтром, охватывающим импульсный элемент	360
§ 24.3. Разомкнуто-замкнутая импульсная система	361
Задачи	363
Глава 25 Основные характеристики импульсных систем	364
§ 25.1. Законы управления	364
§ 25.2. Дискретные передаточные функции разомкнутых импульсных систем	365
§ 25.3. Дискретные передаточные функции типовых импульсных систем	368
§ 25.4. Уравнения импульсных систем	370
Задачи	373

Глава 26. Процессы в импульсных системах	374
§ 26.1. Понятия о процессах в импульсных системах	374
§ 26.2. Вынужденные процессы	375
§ 26.3. Вынужденные процессы при монотонных воздействиях	376
§ 26.4. Условия нулевой вынужденной ошибки	378
§ 26.5. Вынужденный процесс при гармоническом воздействии	380
§ 26.6. Основные характеристики замкнутой импульсной системы	381
Задачи	382
Глава 27. Устойчивость импульсных автоматических систем	383
§ 27.1. Условия устойчивости	383
§ 27.2. Алгебраический критерий устойчивости	386
§ 27.3. Частотный критерий устойчивости	389
Задачи	394
Глава 28 Исследование устойчивости импульсных систем	395
§ 28.1. Исследование устойчивости типовых импульсных систем	395
§ 28.2. Устойчивость импульсных систем при малых периодах повторения	398
§ 28.3. Влияние частоты повторения на устойчивость импульсных систем	399
Задачи	403
Глава 29. Свободные процессы в импульсных автоматических системах	404
§ 29.1. Мера быстродействия импульсных систем	404
§ 29.2. Определение временной характеристики по дискретной передаточной функции	406
§ 29.3. Процессы конечной длительности	408
§ 29.4. Процессы при произвольных воздействиях	409
Задачи	410
Глава 30. Синтез импульсных автоматических систем	411
§ 30.1. Задача синтеза	411
§ 30.2. Условия осуществимости	412
§ 30.3. Условия грубости	414
§ 30.4. Основные уравнения синтеза	417
§ 30.5. Компенсация влияния запаздывания	422
§ 30.6. Системы с конечной длительностью процесса	425
Задачи	427
Глава 31. Оптимальные импульсные системы	428
§ 31.1. Показатели качества	428
§ 31.2. Квадратическое суммарное отклонение	429
§ 31.3. Оптимальные параметры систем	432
§ 31.4. Оптимальные характеристики	432
Задачи	438
Глава 32. Стохастические процессы	440
§ 32.1. Статистические характеристики импульсного элемента	440
§ 32.2. Корреляционная функция и спектральная плотность речетчатых процессов	443
§ 32.3. Статистические характеристики импульсной системы	446
§ 32.4. Среднеквадратическое отклонение	447

§ 32.5	Оптимальные импульсные системы	448
§ 32.6	Учет ограничений	450
Задачи	452

Б. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Глава 33.	Уравнения нелинейных импульсных систем	454
§ 33.1.	Блок-схема и граф нелинейной импульсной системы	454
§ 33.2.	Линеаризация нелинейных импульсных элементов	455
§ 33.3.	Уравнения нелинейных импульсных систем	463
Задачи	464
Глава 34.	Процессы в нелинейных импульсных системах	465
§ 34.1.	Построение процессов	465
§ 34.2.	Вынужденные и собственные процессы	467
§ 34.3.	Возможные процессы	468
§ 34.4.	Влияние квантования по уровню	469
Задачи	472
Глава 35.	Устойчивость нелинейных импульсных систем	473
§ 35.1.	Понятие устойчивости	473
§ 35.2.	Условия абсолютной устойчивости	474
§ 35.3.	Критерий абсолютной устойчивости	478
§ 35.4.	Общий критерий абсолютной устойчивости	483
Задачи	487
Глава 36.	Оценки качества свободных процессов	488
§ 36.1.	Мера быстродействия нелинейных импульсных систем	488
§ 36.2.	Оценка суммарного квадратического отклонения	491
Задачи	494
Глава 37.	Периодические процессы в нелинейных импульсных системах	495
§ 37.1.	Понятие о периодических процессах	495
§ 37.2.	Уравнения периодических процессов	496
§ 37.3.	Частные случаи	499
§ 37.4.	Приближенный метод определения периодических процессов	502
Задачи	504
Глава 38.	Импульсное моделирование непрерывных систем	506
§ 38.1.	Понятие об импульсном моделировании	506
§ 38.2.	Определение передаточной функции импульсной модели по передаточной функции непрерывной модели	507
§ 38.3.	Аппроксимация операций интегрирования	509
§ 38.4.	Аппроксимация операций кратного интегрирования	514
§ 38.5.	Методика импульсного моделирования	515
Задачи	520
Приложения	521
Литература	542
Предметный указатель	548

Яков Залманович Цыпкин
Основы теории автоматических систем

М., 1977 г., 560 стр с илл.

Редактор **А. С. Позняк**

Техн. редактор **И. Ш Аксельрод**

Корректоры **Т. С. Плетнева, И. Я. Кристаль**

Сдано в набор 25/III 1977 г. Подписано к печати 12/X 1977 г.
Бумага 60×90¹/₁₆ тип. № 1. Физ. печ л. 35. Условн печ. л. 35.
Уч.-изд. л. 32,02. Тираж 21 000 экз. Т-16469. Цена книги
1 р. 40 к. Заказ № 546

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская
типография № 2 имени Евгении Соколовой
Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли.
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29,