НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Ю.И.Кулаков.

ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ФИЗИКОВ.

(Лекции для студентов НГУ)

г.Новосибирск
1966 г.

В память о Маленьком Принце, погибшем во время авиационной катастрофы.

"Все ранние усилия, направленные на создание союза между тензорным исчислением и динамикой, не были встречены с особым энтузиазмом. Тензорное исчисление можно было сравнить с маленьким ребенком, неизвестным вне узкого круга математиков-специалистов, тогда как динамика была зрелой трехсотлетней дамой, которая, по справедливости, могла оспаривать у любимицы Гаусса титул "Королевы наук". Но когда в 1916 году мир был потрясен общей теорией относительности, тензорное исчисление сразу становится "героем дня", в то время как репутация классической динамики и физики несколько тускнеет. Ничто не мешало теперь этому, неравному прежде, союзу. Но вряд ли надо специально оговаривать, что такой математический союз не предполагает "верности" от его членов, и, действительно, тензорное исчисление никогда не рассматривало связи с динамикой иначе, как приятный эпизод в своей деловой жизни".

Дж.Л.Синг.

Глава I.

Специальные символы и внешние формы Картана.

> Но на следующий день один из его учеников сказал ему: "О, Совершенный, зачем ты делаешь это ? Хотя нам и доставляет радость, нам не ведомы ни высокие причины, ни значение этого!" И ответил он: "Сначала я скажу вам, что я делаю, а потом объясню зачем".
>
> Лоуренс Хоусмен.

§ I. Индексные обозначения.

Как известно, современные успехи теории дифференциальных инвариантов и плодотворное применение этой теории в физических исследованиях были достигнуты в большой степени из-за широкого применения определенного типа обозначений. Характерной особенностью тензорного исчисления является широкое использование верхних и нижних индексов, впервые предложенных итальянским математиком Риччи [I].

[I]. Грегорио Риччи-Курбастро (1853-1925) - итальянский геометр. Профессор Падуанского университета. Риччи является одним из основателей тензорного исчисления.В мемуаре "Методы абсолютного дифференциального исчисления и их приложения" (1901), написанном им совместно с Леви-Чивита, дано не только первое систематическое изложение тензорного исчисления, но и его приложения к классической механике, теоретической физике и римановой геометрии.

Так система n независимых переменных $x, y, \ldots, z$ записывается в виде $x^i \; (i = 1, 2, \ldots, n)$. Что же касается функций от этих n переменных, применяемых в тензорном анализе, то они объединяются в семейства, ооозначаемые с помощью верхних и нижних индексов. Например, при $m = 3$ возможны, строго говоря, восемь различных типов семейств:

$$A^{ikl}, \quad A^{ik}_{\cdot\cdot l}, \quad A^{i\cdot l}_{\cdot k \cdot}, \quad A_{i}^{\cdot kl}, \quad A^{i}_{\cdot kl}, \quad A_{i\cdot l}^{\cdot k}, \quad A_{ik}^{\cdot\cdot l}, \quad A_{ikl}.$$

Воообще говоря, индексы должны располагаться так, что для каждого верхнего индекса всегда существовало бы свободное место внизу. И только в отдельных случаях, когда это не может привести к недоразумениям, верхний индекс может располагаться над нижним, как, например, в символе Кронекера δ^i_k.

Согласно сложившейся традиции нижние индексы называются ковариантными, а верхние - контравариантными. Система функций или чисел, снабженных m индексами, называется объектом m-го ранга. Отдельные функции или числа системы называются компонентами объекта.

Объект называется симметрическим *) по отношению к какой-либо группе индексов, если его значение остается неизменным при любой перестановке этих индексов.

Например, если

$$A_{mnk\cdot\cdot}^{\quad\; il} = A_{mnk\cdot\cdot}^{\quad\; li}$$

---

*) Термин "симметрия" происходит от греческого слова *symmetria* - "соразмерность" (*syn* - „с" и *metreo* - "измеряю").

то объект $A_{mnk}{}^{il}_{..}$ симметричен относительно верхних индексов.

Объект называется антисимметрическим по отношению к данной системе индексов, если его значение остается неизменным при любой четной перестановке этих индексов и меняет свой знак на обратный - при любой нечетной. Например, если

$$A_{mnk}{}^{il}_{..} = A_{kmn}{}^{il}_{..} = A_{nkm}{}^{il}_{..} = -A_{mkn}{}^{il}_{..} = -A_{nmk}{}^{il}_{..} = -A_{knm}{}^{il}_{..}$$

то объект $A_{mnk}{}^{il}_{..}$ антисимметричен относительно нижних индексов.

Число n, показывающее, сколько различных значений может пробегать каждых индекс, называется размерностью или числом измерений. Очевидно, что объект m -го ранга имеет n^m компонент.

§ 2. Правило суммирования.

Поскольку в дальнейшем нам часто придется иметь дело с суммами вида

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}{}^{l}_{.} A_l B^{km},$$

в которых один и тот же индекс, по которому производится суммирование, встречается дважды, введем следующее правило, позволяющее записывать все формулы в более простом и компактном виде:

Правило суммирования *) Эйнштейна [2] .

Если один и тот же индекс входит в какой-либо одночлен дважды: один раз как ко- , а другой раз как контравариантный, то написанное выражение означает сумму n одночленов, в которой этот индекс пробегает все значения от I до n.

например

$$a^{ik}_{\cdot\cdot m} b_{ek}{}^{l}_{\cdot p} \equiv \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a^{ik}_{\cdot\cdot m} b_{ek}{}^{l}_{\cdot p} \qquad (1,1)$$

Неудобство возникает только в том случае, когда мы хотим обозначить общий член $a^{ik}_{\cdot\cdot m} b_{ek}{}^{l}_{\cdot p}$ выражения (1,I), не выполняя при этом суммирования. В этом случае приходится специально оговаривать, что в выражении $a^{ik}_{\cdot\cdot m} b_{ek}{}^{l}_{\cdot p}$ суммирование не выполняется. Однако в тензорном анализе такое положение встречается настолько редко, что мы можем пренебречь этим неудобством по сравнению со всеми преимуществами новой формы записи.

---

*) Правило Эйнштейна предложено им в работе "Основы общей теории относительности" (1916).

[2] . Альберт Эйнштейн- величайший физик мира со времен Ньютона. Родился 14 марта 1879 года в немецком городе Ульме (Вюртенберг); умер в Принстоне (США) 18 апреля 1955 года.

Альберт Эйнштейн занимает в истории естествознания совершенно особое место. На рубеже старой и новой физики он возвышается одновременно и как Завершитель и как Первооткрыватель.

Созданием теории относительности Эйнштейн завершил классическую физику и одновременно заложил основы нового учения о пространстве, времени и тяготении. Своими работами по молекулярной физике он завершил и продолжил исследования Больцмана о тепловом движении. Фундаментальные исследования Эйнштейна по квантовой теории света, являющиеся развитием гениальной идеи Планка о дискретной природе теплового излучения, положили начало новой эре - эре атомной физики.

индексы, по которым производится суммирование (в нашем примере индексы k и ℓ) называются "немыми". Обозначение немых индексов можно изменять произвольным образом, не изменяя смысла и вида написанного выражения.

Например:

$$a^{ik}_{\cdot\cdot m}\, b_{\ell k}{}^{\ell}{}_{\cdot p} = a^{is}_{\cdot\cdot m}\, b_{rs}{}^{r}{}_{\cdot p}$$

Важно только чтобы буквы,предназначенные для обозначения немых индексов, не повторялись в одном одночлене более чем два раза (один раз сверху, один - снизу).

Индексы, встречающиеся в одночлене только один раз (в нашем примере индексы i, m, p), называются свободными. Число, положение и обозначение свободных индексов должно быть одинаковым в левой и правой частях равенства. Например:

$$a^{ik}_{\cdot\cdot m}\, b_{\ell k}{}^{\ell}{}_{\cdot p} = C^{i}_{\cdot mp}$$

§ 3. Основные алгебраические операции.

В тензорном анализе имеются три основные алгебраические операции:

1. Сложение.

Эта операция применима к объектам с одинаковым числом ко- и контравариантных индексов.

Чтобы сложить два объекта, достаточно сложить их одноименные компоненты. Например:

$$A^i_{\cdot k} + B^i C_k = U^i_{\cdot k}$$

2. Умножение.

Эта операция применима к объектам любого ранга и строения.

Произведением двух объектов называется объект, компоненты которого равны произведению соответствующих компонент перемножаемых объектов. Например:

$$A^m_{\cdot p} B_{rs} = C^m_{\cdot prs}$$

3. Свертывание.

Эта операция применима к объектам, обладающим одновременно ко- и контравариантными индексами.

Сверткой называется сумма по одной или нескольким парам немых индексов. Например:

$$A^{mp}_{\cdot\cdot m} = B^p$$

Покажем, что свертка симметрического объекта с антисимметрическим тождественно равна нулю.

Пусть S^{ik} - симметрический, а A_{ik} -антисимметрический объекты. Обозначим их свертку по индексам i и k через a :

$$a = S^{ik} A_{ik}.$$

Переставляя в S^{ik} и A_{ik} индексы i и k и производя переобозначения $i \to k$, $k \to i$, получим

$$a = S^{ik} A_{ik} = -S^{ki} A_{ki} = -S^{ik} A_{ik} = -a$$

откуда

$$a = S^{ik} A_{ik} \equiv 0. \qquad (1,2)$$

§ 4. Символы Леви-Чивита и обобщенные символы Кронекера.

Символом *) Леви-Чивита [3] называется объект $e^{ik\ldots e} = e_{ik\ldots e}$ ранга n, составляющие которого имеют следующие значения: **)

---

*) Вообще говоря, символы $e^{ik\ldots e}$ и $e_{ik\ldots e}$ были впервые введены в применяемой нами форме английским математиком и астрономом Артуром Эддингтоном (1882-1944) в книге "Пространство, время, тяготение" однако отдавая дань традиции, мы сохраним за ними, ставшее уже привычным, название символа Леви-Чивита.

**) Необходимость обозначать одну и ту же величину двумя различными символами $e^{ik\ldots e}$ и $e_{ik\ldots e}$ связана с возможностью применять правило суммирования Эйнштейна без каких-либо оговорок. Что же касается законов преобразования $e^{ik\ldots e}$ и $e_{ik\ldots e}$ при переходе от одной системы координат к другой, то воспользовавшись результатами главы Ш, посвященной тензорной алгебре, нетрудно показать, что $e^{ik\ldots e}$ и $e_{ik\ldots e}$, не являясь тензорами, преобразуются одинаковым образом.

[3] . Туллио Леви-Чивита (1873-1942) - итальянский математик и механик, профессор в Падуе и Риме. Автор исследований по теории дифференциальных уравнений, небесной механике, гидродинамике; им разработан тензорный анализ, особый метод решения знаменитой задачи трех тел, обоснование теории адиабатических инвариантов; ему принадлежат работы по механике и геометрии неголономных систем и релятивистской механике.

[4] . Леопольд Кронекер (1823-1891) - немецкий математик. С 1861 г. - член Берлинской Академии наук и профессор Берлинского университета. Основные работы Кронекера относятся к алгебре и теории чисел, к теории квадратичных форм и теории групп. Кронекер был сторонником "арифметизации" математики, которая по его мнению должна быть сведена к арифметике целых чисел, так как только последняя, как он утверждал, обладает подлинной реальностью. Эти взгляды Кронекера односторонни и неверны; защищая их он вел упорную борьбу с принципами теоретико-функциональной школы Вейерштрасса и теоретико-множественной школы Кантора.

$$e^{ik\ \ell} = \begin{cases} 1, & \text{когда индексы } i,k,\ \ ,\ell \text{ образуют} \\ & \text{четную перестановку чисел } 1,2,\ .\ ,n \\ -1, & \text{когда индексы } i,k,\ \ ,\ell \text{ образуют} \\ & \text{нечетную перестановку чисел } 1,2,\ \ ,n \\ 0, & \text{когда среди индексов } i,k,\ \ ,\ell \\ & \text{имеются хотя бы два одинаковые.} \end{cases}$$

Свертка двух символов Леви-Чивита по $n-k$ индексам, деленная на $(n-k)!$, называется обобщенным символом Кронекера $\delta^{q\ \ p}_{i\ \ m}$ порядок К:

$$\delta^{q\ \ p}_{\underbrace{i\ \ m}_{k}} = \frac{1}{(n-k)!}\, e_{\underbrace{i\ \ m}_{k}\underbrace{u\ \ v}_{n-k}}\, e^{\underbrace{q\ \ p}_{k}\underbrace{u\cdot\ v}_{n-k}} \qquad (1,3)$$

Как следует из определения (I,3) компоненты обобщенных символов Кронекера [4] имеют следующие значения:

$$\delta^{q\cdots p}_{i\cdots m} = \begin{cases} 1, & \text{когда индексы } q,\ \ ,p \text{ образуют чет-} \\ & \text{ную перестановку индексов } i,\ \ ,m \\ -1, & \text{когда индексы } q,\ \ ,p \text{ образуют нечет-} \\ & \text{ную перестановку индексов } i,\ .\ ,m \\ 0, & \text{1) когда среди индексов } q,\ \ ,p \\ & \text{есть индексы, отсутствующие среди } i,\dots,m \\ & \text{или 2) когда среди индексов } q,\dots,p \\ & \text{или } i,\dots,m \text{ есть хотя бы два оди-} \\ & \text{наковые.} \end{cases}$$

Обобщенные символы Кронекера порядка m могут быть выражены через символы Кронекера первого порядка δ_i^k, компоненты которых, как это следует из их определения (I,3) имеют следующие значения *):

$$\delta_i^k = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k \\ 1 & \text{при } i = k \end{cases} \qquad (1,4)$$

Эти выражения могут быть получены с помощью следующих рекуррентных соотношений для $\delta_{i \dots k}^{q \dots p}$ приводимых здесь без доказательства:

$$\begin{aligned} &\delta_i^k = \delta_i^k ; \\ &\delta_{ip}^{km} = \delta_i^k \delta_p^m - \delta_i^m \delta_p^k ; \\ &\delta_{ipv}^{kmu} = \delta_{ip}^{km} \delta_v^u - \delta_{ip}^{ku} \delta_v^m + \delta_{ip}^{mu} \delta_v^k ; \\ &\delta_{ipvr}^{kmuq} = \delta_{ipv}^{kmu} \delta_r^q - \delta_{ipv}^{kmq} \delta_r^u + \delta_{ipv}^{kuq} \delta_r^m - \delta_{ipv}^{muq} \delta_r^k ; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \qquad (1,5)$$

Таким образом, для двух наиболее употребительных символов Кронекера имеем следующие выражения:

$$\delta_{ip}^{km} = \delta_i^k \delta_p^m - \delta_i^m \delta_p^k ; \qquad (1,6)$$

$$\delta_{ipq}^{kmr} = \delta_i^k \delta_p^m \delta_q^r + \delta_i^r \delta_p^k \delta_q^m + \delta_i^m \delta_p^r \delta_q^k - \delta_i^k \delta_p^r \delta_q^m - \delta_i^r \delta_p^m \delta_q^k - \delta_i^m \delta_p^k \delta_q^r . \qquad (1,7)$$

---

*) Символ δ_i^k введен Кронекером в работе " О линейных формах" (1866).

Используя соотношения (I,5) можно получить ряд тождеств, связывающих между собой символы Леви-Чивита $e^{ik\dots\ell}$ и символы Кронекера первого порядка δ^p_q.

Замечая, что, например, при $n=2$

$$\delta^{kmu}_{ipv} = 0,$$

получаем:

$$\delta^{km}_{ip}\,\delta^u_v - \delta^{ku}_{ip}\,\delta^m_v + \delta^{mu}_{ip}\,\delta^k_v = 0.$$

Но так как при $n=2$

$$\delta^{km}_{ip} = e^{km}\,e_{ip},$$

то

$$e_{ip}\left(e^{km}\,\delta^u_v - e^{ku}\,\delta^m_v + e^{mu}\,\delta^k_v\right) = 0$$

или

$$e^{km}\,\delta^u_v - e^{ku}\,\delta^m_v + e^{mu}\,\delta^k_v = 0. \qquad (1,8)$$

Подобным же образом доказываются аналогичные соотношения для $n = 3, 4, \dots$

$$e^{kmu}\,\delta^p_v - e^{kmp}\,\delta^u_v + e^{kup}\,\delta^m_v - e^{mup}\,\delta^k_v = 0; \qquad (1,9)$$

$$e^{kmup}\,\delta^q_v - e^{kmuq}\,\delta^p_v + e^{kmpq}\,\delta^u_v - e^{kupq}\,\delta^m_v + e^{mupq}\,\delta^k_v = 0;$$

. . . . (1,10)

Приведем для справок следующие соотношения, которые могут быть легко проверены подсчетов числа членов, появляющихся в соответствующих суммах:

$$\delta^{i\dots l s\dots t}_{\underbrace{m\dots n u\dots v}_{r}} \delta^{u\dots v}_{\underbrace{p\dots q}_{k}} = k!\, \delta^{i\dots l s\dots t}_{\underbrace{m\dots n p\dots q}_{r}} \qquad (1,11)$$

$$\delta^{\overbrace{i\dots l u\dots v}^{r}}_{\underbrace{m\dots n}_{k} u\dots v} = \frac{(n-k)!}{(n-r)!} \delta^{i\dots l}_{\underbrace{m\dots n}_{k}} \qquad (1,12)$$

$$e_{\underbrace{m\dots n u\dots v}_{n}} \delta^{u\dots v}_{\underbrace{p\dots q}_{k}} = k!\, e_{\underbrace{m\dots n p\dots q}_{n}} \qquad (1,13)$$

$$e^{\underbrace{m\dots n u\dots v}_{n}} \delta^{p\dots q}_{\underbrace{u\dots v}_{k}} = k!\, e^{\underbrace{m\dots n p\dots q}_{n}} \qquad (1,14)$$

В частном случае $k=0$ формула (I,I2) принимает вид:

$$\delta^{u\dots v}_{\underbrace{u\dots v}_{r}} = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (1,15)$$

Если объекты $A_{i\dots l}$ и $A^{i\dots l}$ антисимметричны по всем к индексам $i,\dots,l$, то как легко видеть, имеют место следующие соотношения:

$$\delta^{i\dots l}_{p\dots q} A_{\underbrace{i\dots l}_{k}} = k!\, A_{\underbrace{p\dots q}_{k}} \qquad (1,16)$$

$$\delta^{p\dots q}_{i\dots l} A^{\underbrace{i\dots l}_{k}} = k!\, A^{\underbrace{p\dots q}_{k}} \qquad (1,17)$$

§ 5. Внутреннее и внешнее произведение.

Как указывалось в § 3, одной из алгебраических операций, с помощью которой из двух данных объектов можно построить третий, является операция свертывания. Применяя эту операцию к произведению двух объектов введем следующие два понятия.

Внутренним произведением двух объектов называется свертка по ковариантным индексам одного объекта и контравариантным индексом другого.

Например:

$$A^{im}_{\cdot\cdot n} B^{n}_{\cdot m} = C^{i}$$

В частности, внутренним произведением двух ко- и контравариантных векторов A_i и B^i , является их скалярное произведение:

$$AB = A_i B^i$$

Внешним произведением двух объектов является свертка их с обобщенным символом Кронекера соответствующего порядка.

Например:

$$\delta^{pqrs}_{ikem} A^{n}_{\cdot p} B^{uv}_{\cdot\cdot qrs} = C^{nuv}_{\cdot\cdot\cdot ikem}$$

или

$$\delta^{ike}_{nuv} A^{n}_{\cdot p} B^{uv}_{\cdot\cdot qrs} = \mathcal{D}^{ike}_{\cdot\cdot\cdot pqrs}$$

В частности, внешним произведением трех контравариантных векторов A^i, B^k и C^l является выражение

$$\delta^{mnp}_{ikl} A^i B^k C^l.$$

Что касается терминов "внутреннее" и "внешнее" произведение, то они как раз и выражают тот факт, что в первом случае объекты свертываются непосредственно друг с другом (все немые индексы находятся "внутри" произведения объектов), а во втором - через обобщенный символ Кронекера (одна половина немых индексов находится в $\delta^{i \dots k}_{m \dots n}$, т.е. "вне" произведения исходных объектов).

§ 6. Внешние формы.

Применим, введенные в предыдущем параграфе понятия внутреннего и внешнего произведения к объектам второго ранга *) x^i_α $(i, \alpha = 1, 2, \dots, n)$ и рассмотрим сначала внутренние произведения объектов m-го ранга $a_{ik \dots l}$ или $a^{\alpha\beta \dots \gamma}$ и m объектов $x^i_\alpha, x^k_\beta, \dots, x^l_\gamma$:

$$A_{\alpha\beta \dots \gamma} = a_{ik \dots l}\, x^i_\alpha x^k_\beta \dots x^l_\gamma \qquad (1,18)$$

и

$$A^{ik \dots l} = a^{\alpha\beta \dots \gamma}\, x^i_\alpha x^k_\beta \dots x^l_\gamma \qquad (1,19)$$

*) Применение латинских и греческих индексов при обозначении объекта x^i_α обусловлено необходимостью подчеркнуть различный смысл ко- и контравариантных индексов, которые в тензорной алгебре будут означать следующее: первые - номер вектора, вторые - порядковый номер координаты.

Первая свертка называется алгебраической полилинейной формой и является в линейной алгебре удобной "моделью" для изучения тензоров и действий над ними.

Рассмотрим теперь два возможных варианта внешних произведений m объектов $x^i_\alpha, x^k_\beta, \dots, x^\ell_\gamma$, приняв для них следующие обозначения $^{*)}$:

$$[x^i x^k \dots x^\ell]_{\alpha\beta\dots\gamma} = \frac{1}{m!}\, \delta^{\mu\nu\dots\lambda}_{\alpha\beta\dots\gamma}\, x^i_\mu\, x^k_\nu \dots x^\ell_\lambda \qquad (1,20)$$

$$[x_\alpha x_\beta \dots x_\gamma]^{ik\dots\ell} = \frac{1}{m!}\, \delta^{ik\dots\ell}_{pq\dots r}\, x^p_\alpha\, x^q_\beta \dots x^r_\gamma. \qquad (1,21)$$

Нетрудно убедиться в том,что оба написанных выражения равны между собой, т.е.

$$[x_\alpha x_\beta \dots x_\gamma]^{ik\dots\ell} = [x^i x^k \dots x^\ell]_{\alpha\beta\dots\gamma} \qquad (1,22)$$

Чтобы понять идею доказательства $^{**)}$ этого равенства, рассмотрим случай $m=2$. Имеем:

---

*) В дальнейшем, там, где это не вызовет недоразумений, мы будем опускать индексы, стоящие снаружи квадратных скобок и вместо $[x^i x^k \dots x^\ell]_{\alpha\beta\dots\gamma}$ и $[x_\alpha x_\beta \dots x_\gamma]^{ik\dots\ell}$ писать просто $[x^i x^k \dots x^\ell]$ и $[x_\alpha x_\beta \dots x_\gamma]$.
Заметим кстати, что в трактате Бурбаки ("Алгебра", гл.Ш, § 5, п.5) внешнее произведение $[x_\alpha x_\beta \dots x_\gamma]^{ik\dots\ell}$ обозначается через $x_\alpha \wedge x_\beta \wedge \dots \wedge x_\gamma$.

**) Если использовать формулы (2,) и (2,) теории определителей (см. гл.II), то равенство (I,22) может быть доказано в общем виде следующим образом:

$$m!\,[x^i \dots x^\ell]_{\alpha\dots\beta} = \delta^{\mu\dots\nu}_{\alpha\dots\beta}\, x^i_\mu \dots x^\ell_\nu = e_{\alpha\dots\beta}\, e^{\mu\dots\nu}\, x^i_\mu \dots x^\ell_\nu =$$
$$= e_{\alpha\dots\beta}\, e^{i\dots\ell} x = e^{i\dots\ell}\, e_{\alpha\dots\beta}\, x = e^{i\dots\ell}\, e_{p\dots q}\, x^p_\alpha \dots x^q_\beta =$$
$$= \delta^{i\dots\ell}_{p\dots q}\, x^p_\alpha \dots x^q_\beta = m!\,[x_\alpha \dots x_\beta]^{i\dots\ell}$$

$$[x^i x^k]_{\alpha\beta} = \frac{1}{2!}\delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\, x^i_\mu x^k_\nu = \frac{1}{2!}\left(\delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \delta^\nu_\alpha \delta^\mu_\beta\right) x^i_\mu x^k_\nu =$$

$$= \frac{1}{2!}\left(x^i_\alpha x^k_\beta - x^i_\beta x^k_\alpha\right) = \frac{1}{2!}\left(x^i_\alpha x^k_\beta - x^k_\alpha x^i_\beta\right) = \frac{1}{2!}\delta^{ik}_{pq}\, x^p_\alpha x^q_\beta =$$

$$= [x_\alpha x_\beta]^{ik}.$$

Образуя свертку полученных выше внешних произведений (I,20) и (I,21) с объектами $a^{u\dots v}{}_{p\dots q\,\underbrace{ik\dots e}_{m}}$ или $a_{\lambda\dots\sigma}{}^{\mu\dots\nu\,\underbrace{\alpha\beta\dots\gamma}_{m}}$ по m последним индексам, приходим к выражениям:

$$\mathcal{F}^{u\dots v}{}_{p\dots q;\,\alpha\beta\dots\gamma} = a^{u\dots v}{}_{p\dots q\, ik\dots e}\,[x^i x^k \dots x^e]_{\alpha\beta\dots\gamma} \tag{1,23}$$

и

$$\mathcal{F}_{\lambda\dots\sigma}{}^{\mu\dots\nu;\,ik\dots e} = a_{\lambda\dots\sigma}{}^{\mu\dots\nu\,\alpha\beta\dots\gamma}\,[x_\alpha x_\beta \dots x_\gamma]^{ik\dots e} \tag{1,24}$$

первое из которых называется внешней тензорной формой степени m.

Там, где это не может вызвать недоразумений, мы будем опускать индексы $u\dots v$, $p\dots q$ и $\alpha\beta\dots\gamma$ и вместо (I,23) и (I,24) писать *) :

$$\mathcal{F}_{(\dots)\,\alpha\beta\dots\gamma} = a_{(\dots)\,ik\dots e}\,[x^i x^k \dots x^e]_{\alpha\beta\dots\gamma}$$

или еще проще

$$\mathcal{F}_{(\dots)} = a_{(\dots)\,ik\dots e}\,[x^i x^k \dots x^e].$$

---

*) Знак (...) используется нами для сокращенного обозначения всех ко- и контравариантных индексов, остающихся неизменными на протяжении всего рассмотрения.

Рассмотрим простейшие операции над внешними формами.

Суммой двух внешних форм

$$\mathcal{F}_{(\dots)} = a_{(\dots)ik\dots e}\,[x^i x^k \dots x^e]$$

и

$$\phi_{(\dots)} = b_{(\dots)ik\dots e}\,[x^i x^k \dots x^e]$$

одной и той же степени m и одного и того же ранга и строения называется форма той же степени, коэффициенты которой равны сумме коэффициентов заданных форм, т.е.

$$\mathcal{F}_{(\dots)} + \phi_{(\dots)} = \left(a_{(\dots)ik\dots e} + b_{(\dots)ik\dots e}\right)[x^i x^k \dots x^e].$$

Внешним произведением двух внешних форм степени p и q

$$\mathcal{F}_{(\dots)\underbrace{\alpha\beta\dots\gamma}_{p}} = a_{(\dots)ik\dots e}\,[x^i x^k \dots x^e]_{\alpha\beta\dots\gamma}$$

$$\phi_{(\dots)\underbrace{\mu\nu\dots\lambda}_{q}} = b_{(\dots)mn\dots r}\,[x^m x^n \dots x^r]_{\mu\nu\dots\lambda}$$

называется свертка произведений обеих форм с обобщенным символом Кронекера порядка $p+q$, т.е.

$$\psi_{(\dots)(\dots)\alpha\beta\dots\gamma\mu\nu\dots\lambda} = [\mathcal{F}_{(\dots)}\,\phi_{(\dots)}]_{\alpha\beta\dots\gamma\mu\nu\dots\lambda} =$$

$$= \frac{1}{p!\,q!}\,\delta^{\sigma\rho\dots\tau\varphi\chi\dots\psi}_{\alpha\beta\dots\gamma\mu\nu\dots\lambda}\,\mathcal{F}_{(\dots)\sigma\rho\dots\tau}\,\phi_{(\dots)\varphi\chi\dots\psi}.$$

Раскрывая $[x^i x^k \dots x^e]_{\alpha\beta\dots\gamma}$ и $[x^m x^n \dots x^z]_{\mu\nu\dots\lambda}$ *по формуле (I,20) и используя два раза равенство*

$$\delta^{\sigma\dots\tau\,\varphi\dots\psi}_{\underbrace{\alpha\dots\gamma}_{p}\,\underbrace{\mu\dots\lambda}_{q}}\,\delta^{\pi\dots\rho}_{\underbrace{\sigma\dots\tau}_{p}} = p!\,\delta^{\pi\dots\rho\,\varphi\dots\psi}_{\underbrace{\alpha\dots\gamma}_{p}\,\underbrace{\mu\dots\lambda}_{q}}$$

(см. соотношение (I,II) получаем

$$\Psi_{(\dots)(\dots)} = [\mathcal{F}_{(\dots)}\Phi_{(\dots)}] = a_{(\dots)i\dots e}\, b_{(\dots)m\dots z}\,[x^i \dots x^e x^m \dots x^z].$$

§ 7. Внешние дифференциальные формы Картана.

Будем называть внешней дифференциальной тензорной формой Картана [5] степени m внешнюю форму, в которой переменными являются дифференциалы $d_\alpha x^i \; (i,\alpha = 1,2,\dots,n)$, а коэффициентами - произвольные функции координат,т.е.

$$\omega_{(\dots)} = a_{(\dots)ik\dots e}\,[dx^i dx^k \dots dx^e] \qquad (1,25)$$

или подробнее

$$\omega^{u\dots v}{}_{p\dots q;\,\alpha\beta\dots\gamma} = a^{u\dots v}{}_{p\dots q\,ik\dots e}\,[dx^i dx^k \dots dx^e]_{\alpha\beta\dots\gamma}$$

---

[5] . Эли Картан (I86I-I95I) - французский математик; преподавал в Лионе,Нанси; с I9I2г. - в Парижском университете. С I93I г. - член Парижской Академии наук. Автор многочисленных работ по теории непрерывных групп, по теории открытых им спиноров и теории относительности.

и совсем подробно

$$\omega^{u\dots v}{}_{p\dots q;\alpha\beta\dots\gamma} = a^{u\dots v}{}_{p\dots q i k\dots e} \frac{1}{m!} \delta^{\mu\nu\dots\lambda}_{\alpha\beta\dots\gamma} d_\mu x^i d_\nu x^k \dots d_\lambda x^e.$$

Введем теперь понятие внешнего дифференциала.

Внешним дифференциалом от внешней дифференциальной формы степени m

$$\omega_{(\dots)} = a_{(\dots)i\dots e}[dx^i\dots dx^e]$$

называется внешняя дифференциальная форма степени $m+1$ имеющая вид *) :

$$d\omega_{(\dots)} = [d a_{(\dots)i\dots e}\, dx^i\dots dx^e] =$$

$$= \frac{\partial a}{\partial x^m}{}_{(\dots)i\dots e}[dx^m dx^i\dots dx^e] \qquad (1,26)$$

---

*) Основанием для такого определения является специальный закон преобразования $d\omega$ при переходе от одной системы координат к другой, состоящий в следующем: если дифференциальная форма ω при замене координат $x = x(\bar{x})$ преобразуется в форму $\bar{\omega}$, то внешний дифференциал $d\omega$, определенный указанным сопособом, преобразуется во внешний дифференциал $d\bar{\omega}$ от формы $\bar{\omega}$. Заметим кстати, что это не имело бы места, если в определении внешнего дифференциала (I,26) вместо частной производной $\frac{\partial a}{\partial x^m}{}_{(\dots)i\dots e}$, взять ковариантную производную $a_{(\dots)i\dots e,m}$ (см. § I,гл.IУ). Точно так же не имела бы места обобщенная теорема Стокса (см. § I0,гл. IУ), ради которой мы и рассматриваем внешние формы Картана.

В более подробной записи определение (I,26) имеет вид:

$$d_\sigma \omega_{(\dots)\alpha\dots\gamma} = \frac{1}{(m+1)!}\, \delta^{\tau\mu\dots\lambda}_{\sigma\alpha\dots\gamma}\, d_\tau a_{(\dots)i\dots\ell}\, d_\mu x^i \dots d_\lambda x^\ell =$$

$$= \frac{\partial a_{(\dots)i\dots\ell}}{\partial x^m}\, \frac{1}{(m+1)!}\, \delta^{\tau\mu\dots\lambda}_{\sigma\alpha\dots\gamma}\, d_\tau x^m d_\mu x^i \dots d_\lambda x^\ell. \qquad (1,27)$$

Если θ -дифференциальная форма Картана равная внешнему дифференциалу от внешней дифференциальной формы ω , т.е. $\theta = d\omega$, то воспользовавшись определением (I,26) легко показать, что ее внешний дифференциал равен нулю.

Таким образом, имеет место теорема Пуанкаре [6]: Второй внешний дифференциал от дифференциальной формы тождественно равен нулю.

---

[6]. Анри Паункаре - крупнейший французский математик. Родился в Нанси в 1854 г., умер в Париже в 1912 г. Обучался в политехнической и Горной школах в Париже. С 1886 г. - профессор Парижского университета. Член парижской академии наук. Его исследования об устойчивости движения и о фигурах равновесия жидкой вращающейся массы открыли новые горизонты в астрономии и космогонии, позволяя применять более совершенные методы современного анализа. Он является также одним из основателей специальной теории относительности. Исследования Пуанкаре охватывают почти все разделы математики и математической физики.

ГЛАВА II.

ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.

> Возможно, что самым замечательным является то, что при всей своей красоте и очевидной математической ценности преподавание теории определителей представляет настоящую проблему.
>
> *У.Сойер.*

§ I. Понятие определителя.

К понятию определителя можно придти несколькими путями.

Один из таких путей связан с рассмотрением грассмановой алгебры. Понятие определителя, сформулированного в терминах внешнего произведения *) является важным инструментом линейной алгебры. Однако для приложений удобно исходить из такого определения, в котором определитель рассматривается как особая функция от n^2 переменных a_{ik}, снабженных двумя индексами.

Чтобы сделать исходное определение более естественным, вспомним, как впервые возникло понятие определителя.

Рассматривалась система n линейных уравнений с n неизвестными

$$a_{ik} x^k = b_i \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

---

*) Согласно определению, приведенному в трактате Бурбаки)"Алгебра", гл.III, § 6, п.I), определителем эндоморфизма u модуля E, имеющего базис, состоящий из n элементов, называют скаляр λ, обозначаемый $\det u$, такой, что внешняя степень $\overset{n}{\Lambda} u$ совпадает с гомотетией $z \to \lambda z$ модуля $\overset{n}{\Lambda} u$. Таким образом, каковы бы ни были n элементов $x_i \in E$

$$u(x_1) \wedge u(x_2) \wedge \ldots \wedge u(x_n) = \det u \cdot x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n.$$

Было замечено, что решение этой системы выражается через a_{ik} и b_i с помощью одной функции, специальным образом зависящей от n^2 переменных. Эта функция представляет собой сумму $n!$ слагаемых, каждое из которых является произведением n множителей

$$\pm a_{1i} a_{2k} \dots a_{nl},$$

вторые индексы которых различны и образуют все возможные перестановки чисел I,2,..., n; причем такое произведение берется со знаком $+$ или $-$ в зависимости от того, четным или нечетным числом перестановок последовательность $i, k, \dots, l$ переводится в $1, 2, \dots, n$.

Функцию, определенную таким образом, назвали определителем квадратной матрицы a_{ik}. В дальнейшем выяснилось, что введенная так функция играет чрезвычайно важную роль как в чистой, так и в прикладной математике *).

Приведенному выше определению можно придать компактный и удобный для вычислений вид, если воспользоваться символами Леви-Чивита.

Определителем называется свертка по всем $2n$ индексам произведения n об"ектов и двух символов Леви-Чивита.
Если в качестве исходных об"ектов взять a_{ik}, a^{ik} или $a_{i\cdot}^{\cdot k}$, то для каждого типа будем иметь соответственно:

$$a_0 = \frac{1}{n!} e^{ik\dots l} e^{mn\dots p} a_{im} a_{kn} \dots a_{lp} \qquad (2,1)$$

*) Заметим при этом, что эта функция обнаруживает еще одно, ранее неизвестное удивительное свойство, благодаря которому она оказывается чрезвычайно полезной при описании общих закономерностей, присущих разнообразным физическим системам.

$$a^{0} = \frac{1}{n!}\, e_{ik\ldots e}\, e_{mn\ldots p}\, a^{im} a^{kn} \ldots a^{ep} \qquad (2,2)$$

$$a = \frac{1}{n!}\, e^{ik\ldots e}\, e_{mn\ldots p}\, a_{i}{}^{m} a_{k}{}^{n} \ldots a_{e}{}^{p} \qquad (2,3)$$

Следует отметить, что обозначение определителя в виде

$$a_{0} = \frac{1}{n!}\, e^{ik\ldots e}\, e^{mn\ldots p}\, a_{im}\, a_{kn} \ldots a_{ep}$$

имеет преимущество перед традиционным

$$a_{0} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

не только в том, что оно компактнее; оставляя в стороне несущественные стороны вопроса, оно позволяет подчеркнуть те фундаментальные идеи антисимметрии, которые лежат в основе многих разделов чистой математики и теоретической физики.

§ 2. Миноры и алгебраические дополнения.

Иногда возникает необходимость в специальных обозначениях для определителей, построенных на элементах произвольных квадратных подматриц матрицы $\|a_{ik}\|$. Существуют два способа построения таких определителей; оба они сводятся к образованию соответствующих сверток по k или по $n-k$ индексам.

Минором порядка k называется свертка по k индексам произведения k об"ектов и обобщенного символа Кронекера порядка k .

Для об"ектов a_{ik} , a^{ik} и $a_{i}{}^{k}$ имеем, соответственно

$$M_{\underbrace{i\ldots k}_{k};\underbrace{m\ldots n}_{k}} = \delta^{u\ldots v}_{\underbrace{i\ldots k}_{k}} \underbrace{a_{um}\ldots a_{vn}}_{k} \qquad (2,4)$$

$$M^{\overbrace{i\ldots k}^{}; \overbrace{m\ldots n}^{}}_{\;k\qquad k} = \delta^{i\ldots k}_{\underbrace{u\ldots v}_{k}} \underbrace{a^{um}\ldots a^{vn}}_{k} \qquad (2,5)$$

$$M^{m\ldots n}_{\underbrace{i\ldots k}_{k}} = \delta^{u\ldots v}_{\underbrace{i\ldots k}_{k}} \underbrace{a_u^{\ m}\ldots a_v^{\ n}}_{k} \qquad (2,6)$$

Алгебраическим дополнением порядка k называется свертка по $n-k$ индексам произведения $n-k$ об"ектов и двух символов Леви-Чивита.

Для об"ектов a_{ik} , a^{ik} и $a_i^{\ k}$ имеем, соответственно:

$$A^{\underbrace{i\ldots k}_{k};\underbrace{m\ldots n}_{k}} = \frac{1}{(n-k)!} e^{\underbrace{i\ldots k}_{k}\underbrace{u\ldots v}_{n-k}} e^{\underbrace{m\ldots n}_{k}\underbrace{p\ldots q}_{n-k}} \underbrace{a_{up}\ldots a_{vq}}_{n-k} \qquad (2,7)$$

$$A_{\underbrace{i\ldots k}_{k};\underbrace{m\ldots n}_{k}} = \frac{1}{(n-k)!} e_{\underbrace{i\ldots k}_{k}\underbrace{u\ldots v}_{n-k}} e_{\underbrace{m\ldots n}_{k}\underbrace{p\ldots q}_{n-k}} \underbrace{a^{up}\ldots a^{vq}}_{n-k} \qquad (2,8)$$

$$A^{i\ldots k}_{\underbrace{m\ldots n}_{k}} = \frac{1}{(n-k)!} e^{\underbrace{i\ldots k}_{k}\underbrace{u\ldots v}_{n-k}} e_{\underbrace{m\ldots n}_{k}\underbrace{p\ldots q}_{n-k}} \underbrace{a_u^{\ p}\ldots a_v^{\ q}}_{n-k} \qquad (2,9)$$

Миноры и алгебраические дополнения, определенные соотношениями $(2,4)-(2,9)$,допускают следующую интерпретацию.

Пусть $\|a_{ik}\|$ квадратная матрица, состоящая из n строк и столбцов.

Согласно определению $(2,4)$ минор $M_{i\ldots k;m\ldots n}$ равен определителю, составленному из элементов матрицы $\|a_{ik}\|$, стоящих на пересечении i-ой , ... , k-ой строки и m-го, ..., n-го столбца, со знаком $(-1)^{p+q}$, где p и q - числа перестановок, переводящих ряды чисел $i\ldots k$ и $m\ldots n$ в монотонно возрастающие последовательности.

Точно так же, согласно определению $(2,7)$ алгебраическое дополнение $A^{i\dots k;\, m\dots n}$ равно определителю, составленному из элементов матрицы $\|a_{ik}\|$, оставшихся после вычеркивания i-ой, ... , k-ой строки и m-го, ... , n-го столбца, со знаком $(-1)^{u+v}$, где u и v - числа перестановок, переводящих ряд $1,2,\dots,n$ в ряды $i\dots k g\dots f$ и $m\dots n s\dots t$ с монотонно возрастающими подпоследовательностями $g\dots f$ и $s\dots t$.

Например, для матрицы, состоящей из пяти строк и столбцов

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

имеем:

$$M_{15;32} = (-1)^{0+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{52} & a_{53} \end{vmatrix}$$

$$A^{15;32} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}$$

Таким образом минор первого порядка $M_{i;k}$ равен элементу a_{ik}, а минор n-го порядка $M_{12\dots n;\,12\dots n}$ и алгебраическое дополнение нулевого порядка A равны определителю матрицы $\|a_{ik}\|$.

Отметим кстати, что внешние произведения $(1,20)$ и $(1,21)$ m

об"ектов x_α^i , введенные в § 6, гл.I есть ни что иное как соответствующий минор порядка m , деленный на $m!$, т.е.

$$[x^i x^k \ldots x^\ell]_{\alpha\beta\ldots\gamma} = [x_\alpha x_\beta \ldots x_\gamma]^{ik\ldots\ell} = \frac{1}{m!} M^{ik\ldots\ell}_{\alpha\beta\ldots\gamma}.$$

§ 3. Некоторые свойства определителя.

Прежде всего докажем следующие, полезные для приложений, соотношения для определителей a_o , a^o и a , построенных соответственно из об"ектов a_{ik} , a^{ik} и $a_i{}^k$:

$$a^o e^{ik\ldots\ell} = e_{mn\ldots p}\, a^{im} a^{kn} \ldots a^{\ell p} \tag{2,10}$$

$$a_o e_{ik\ldots\ell} = e^{mn\ldots p}\, a_{im} a_{kn} \ldots a_{\ell p} \tag{2,11}$$

$$\begin{cases} a\, e_{ik\ldots\ell} = e_{mn\ldots p}\, a_i{}^m a_k{}^n \ldots a_\ell{}^p \\ a\, e^{ik\ldots\ell} = e^{mn\ldots p}\, a_m{}^i a_n{}^k \ldots a_p{}^\ell \end{cases} \tag{2,12}$$

Для этого рассмотрим следующий об"ект ранга n :

$$a_{ik\ldots\ell} = e^{mn\ldots p}\, a_{im} a_{kn} \ldots a_{\ell p} \tag{2,13}$$

Поскольку этот об"ект антисимметричен по всем n индексам, то

$$a_{ik\ldots\ell} = c\, e_{ik\ldots\ell}$$

Чтобы найти c умножим обе части равенства (2,13) на $e^{ik\ldots\ell}$ и образуем свертку по всем n индексам. Получаем:

$$c\, n! = e^{ik\ldots\ell} e^{mn\ldots p}\, a_{im} a_{kn} \ldots a_{\ell p},$$

откуда, на основании определения $(2,1)$, имеем : $C = a_0$. Подставляя полученное значение C в $(2,13)$, получаем $(2,11)$.

Что касается соотношений $(2,10)$ и $(2,12)$, то они доказываются совершенно аналогичным образом.

Используя соотношения (2,I) - (2,3) и (2,I0) - (2,I2) ,можно простейшим способом доказать все элементарные свойства определителей, приводимые в традиционных курсах. Остановимся лишь на тех свойствах, которые понадобятся нам в дальнейшем.

I. Произведение определителей.

Пусть a и b два определителя, построенные соответственно из об"ектов $a_i^{\;k}$ и $b_i^{\;k}$:

$$a = \frac{1}{n!}\, e^{ik\ldots l}\, e_{mn\ldots p}\, a_i^{\;m} a_k^{\;n} \ldots a_l^{\;p}$$

$$b = \frac{1}{n!}\, e^{mn\ldots p}\, e_{ik\ldots l}\, b_m^{\;i} b_n^{\;k} \ldots b_p^{\;l}$$

Покажем, что

$$ab = \frac{1}{n!}\, e^{ik\ldots l}\, e_{mn\ldots p}\, (ab)_i^{\;m} (ab)_k^{\;n} \ldots (ab)_l^{\;p} \qquad (2,14)$$

где

$$(ab)_i^{\;m} = a_i^{\;k} b_k^{\;m}$$

Для доказательства представим a и b в виде

$$a\, e^{mn\ldots p} = e^{qr\ldots s}\, a_q^{\;m} a_r^{\;n} \ldots a_s^{\;p}$$

$$b\, e_{mn\ldots p} = e_{ik\ldots l}\, b_m^{\;i} b_n^{\;k} \ldots b_p^{\;l}$$

Перемножая написанные выражения и свертывая по всем n индексам, получаем (2,I4).

Однако, если рассматривать определители a_0 и b_0 или a^0 и b^0 построенные, соответственно, из об"ектов a_{ik} и b_{ik}

или a^{ik} и b^{ik}, то в процессе доказательства мы встретимся с необходимостью проводить суммирование по одним *ковариантным индексам в первом случае и по одним контравариантным* – во втором, вопреки правилу Эйнштейна, согласно которому суммирование производится по *ко*- и контравариантным индексам одновременно.

В результате, используя равенства

$$\sum_{i,k,\dots l} e_{ik\dots l}\, e_{ik\dots l} = \sum_{ik\dots l} e^{ik\dots l}\, e^{ik\dots l} = n!$$

получаем

$$a_0 b_0 = \frac{1}{n!}\, e^{ik\dots l}\, e^{mn\dots p}\, (ab)_{im}(ab)_{kn}\dots(ab)_{lp}$$

и

$$a^0 b^0 = \frac{1}{n!}\, e_{ik\dots l}\, e_{mn\dots p}\, (ab)^{im}(ab)^{kn}\dots(ab)^{lp},$$

где

$$(ab)_{im} = \sum_{q=1}^{n} a_{iq}\, b_{qm}$$

$$(ab)^{im} = \sum_{q=1}^{n} a^{iq}\, b^{qm}$$

Нарушение правила Эйнштейна при нахождении $a_0 b_0$ и $a^0 b^0$ не является случайным, а связано с тем, что a_0 и a^0, в отличие от a, в различных системах координат принимают различные значения и, таким образом, не являются скалярами *).

---

*) Как будет показано ниже (см. § 7, гл. Ш) a_0 и a^0 являются псевдоскалярами веса 2 и -2 соответственно.

2. Формула Лапласа.

Формула Лапласа [7] позволяет представить определитель a в виде свертки произведения алгебраических дополнений и миноров порядка K :

$$a_0 \delta^{\overbrace{s\ldots t}}_{\underbrace{u\ldots v}_{K}} = \frac{1}{K!} M_{\underbrace{u\ldots v}_{K};\underbrace{m\ldots n}_{K}} A^{\underbrace{s\ldots t}_{K};\underbrace{m\ldots n}_{K}} \qquad (2,15)$$

Для доказательства соотношения (2,I5) умножим равенство

$$a_0 e_{\underbrace{i\ldots e}_{K}\underbrace{p\ldots q}_{n-K}} = e^{\underbrace{m\ldots n}_{K}\underbrace{u\ldots v}_{n-K}} \underbrace{a_{im}\ldots a_{en}}_{K} \underbrace{a_{pu}\ldots a_{qv}}_{n-K}$$

на $e^{s\ldots t p\ldots q}$ и образуем свертку по $n-K$ индексам $p\ldots q$. Используя определения (I,2) и (2,7) будем иметь

$$a_0 \delta^{s\ldots t}_{i\ldots e} = a_{im}\ldots a_{en} A^{s\ldots t;m\ldots n}.$$

Умножим полученное равенство на $\delta^{i\ldots e}_{u\ldots v}$ и образуем сверт - ку по K индексам $i\ldots e$:

$$a_0 \delta^{s\ldots t}_{i\ldots e} \delta^{i\ldots e}_{u\ldots v} = \delta^{i\ldots e}_{u\ldots v} a_{im}\ldots a_{en} A^{s\ldots t;m\ldots n}.$$

---

[7]. Пьер Симон Лаплас - французский математик и механик. Родился в I749 г. в маленьком городке Бомоне на северо-западе Франции, умер в Париже в I827 г. Член Парижской Академии наук, один из основателей Нормальной и Политехнической школ. Руководитель Бюро долгот. Основные работы Лапласа относятся к области небесной механики. Ему принадлежит ряд фундаментальных работ по дифференциальным уравнениям и теории вероятности. Исследования Лапласа по физике касаются, главным образом, вопросов электромагнетизма, акустики и теории капиллярности.

Воспользовавшись формулой (I,I0) и определением минора (2,4) получаем равенство (2,I5).

Производя свертку по всем K индексам и используя соотношение (I,I2) перепишем формулу Лапласа (2,I5) в виде:

$$a_0 = \frac{(n-k)!}{n!\,k!} M_{u\dots v;m\dots n} A^{u\dots v;m\dots n} \tag{2,16}$$

В частном, но очень важном, случае $K=1$ формула (2,I5) имеет вид:

$$a_0 \delta_u^s = a_{um} A^{s;m} \tag{2,17}$$

Полагая в (2,I7) $s=u=\underline{i}$ (черта под индексом означает,что этот индекс фиксирован и по нему не производится суммирование), получаем формулу разложения определителя по элементам $\underline{i}$ -ой строки

$$a_0 = a_{\underline{i}m} A^{\underline{i};m} \tag{2,18}$$

где

$$A^{\underline{i};m} = \frac{1}{(n-1)!} e^{ik\dots e} e^{mu\dots v} a_{ku} \dots a_{ev}$$

3. Производные определителя.

Рассматривая определитель как функцию своих элементов a_{ik}, нетрудно показать, что

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_{ik}} = A^{i;k} \tag{2,19}$$

Равенство (2,I9) доказывается непосредственным дифференцированием. Имеем:

$$a_0 = \frac{1}{n!} e^{uv\dots w} e^{mn\dots p} a_{um} a_{vn} \dots a_{wp}$$

Замечая, что

$$\frac{\partial a_{rs}}{\partial a_{ik}} = \delta^i_r \delta^k_s$$

получим

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_{ik}} = \frac{1}{n!}\Big(e^{iv\ldots w} e^{kn\ldots p} \underbrace{a_{vn}\ldots a_{wp}}_{n-1} + \ldots +$$

$$+ e^{uv\ldots i} e^{mn\ldots k} \underbrace{a_{um} a_{vn} \ldots}_{n-1}\Big).$$

Но

$$\frac{1}{(n-1)!} e^{iv\ldots w} e^{kn\ldots p} a_{vn}\ldots a_{wp} = A^{i;k},$$

следовательно

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_{ik}} = \frac{1}{n}\left(A^{i;k} + A^{i;k} + \ldots + A^{i;k}\right) = A^{i;k}$$

что и требовалось показать.

Если элементы определителя являются функциями x^α $(\alpha = 1, 2, \ldots, r)$, то

$$\frac{\partial a_0}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^\alpha} A^{i;k}. \qquad (2,20)$$

В самом деле, дифференцируя a_0 по x^α получаем:

$$\frac{\partial a_0}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{n!} e^{uv\ldots w} e^{mn\ldots p} \frac{\partial a_{um}}{\partial x^\alpha} a_{vn}\ldots a_{wp} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!} e^{uv\ldots w} e^{mn\ldots p} a_{um} a_{vn}\ldots \frac{\partial a_{wp}}{\partial x^\alpha}$$

или, используя определение алгебраического дополнения (2,7),

$$\frac{\partial a_0}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial a_{um}}{\partial x^\alpha} A^{u;m} + \ldots + \frac{\partial a_{wp}}{\partial x^\alpha} A^{w;p}\right) = \frac{\partial a_{um}}{\partial x^\alpha} A^{u;m}$$

4. Связь между минорами и алгебраическими дополнениями

Используя определения (2,4) - (2,6) и (2,7)- (2,9) нетрудно получить формулы, позволяющие выразить алгебраические дополнения через миноры:

$$\mathcal{A}^{\underbrace{i\ldots\ell}_{n-k};\underbrace{m\ldots r}_{n-k}} = \frac{1}{(k!)^2} e^{i\ldots\ell u\ldots v} e^{m\ldots r p\ldots q} M_{\underbrace{u\ldots v}_{k};\underbrace{p\ldots q}_{k}} \qquad (2,21)$$

$$\mathcal{A}_{\underbrace{i\ldots\ell}_{n-k};\underbrace{m\ldots r}_{n-k}} = \frac{1}{(k!)^2} e_{i\ldots\ell u\ldots v}\, e_{m\ldots r p\ldots q} M^{\underbrace{u\ldots v}_{k};\underbrace{p\ldots q}_{k}} \qquad (2,22)$$

$$\mathcal{A}^{i\ldots\ell}_{\underbrace{m\ldots r}_{n-k}} = \frac{1}{(k!)^2} \delta^{i\ldots\ell u\ldots v}_{m\ldots r p\ldots q}\, M^{p\ldots q}_{\underbrace{u\ldots v}_{k}} \qquad (2,23)$$

и обратно

$$M^{\underbrace{i\ldots\ell}_{n-k};\underbrace{m\ldots r}_{n-k}} = \frac{1}{(k!)^2} e^{i\ldots\ell u\ldots v} e^{m\ldots r p\ldots q} \mathcal{A}_{\underbrace{u\ldots v}_{k};\underbrace{p\ldots q}_{k}} \qquad (2,24)$$

$$M_{\underbrace{i\ldots\ell}_{n-k};\underbrace{m\ldots r}_{n-k}} = \frac{1}{(k!)^2} e_{i\ldots\ell u\ldots v}\, e_{m\ldots r p\ldots q} \mathcal{A}^{\underbrace{u\ldots v}_{k};\underbrace{p\ldots q}_{k}} \qquad (2,25)$$

$$M^{i\ldots\ell}_{\underbrace{m\ldots r}_{n-k}} = \frac{1}{(k!)^2} \delta^{i\ldots\ell u\ldots v}_{m\ldots r p\ldots q}\, \mathcal{A}^{p\ldots q}_{\underbrace{u\ldots v}_{k}} \qquad (2,26)$$

Действительно, используя соотношение (I;I4) перепишем выражение (2,7) в виде:

$$\mathcal{A}^{i\ldots\ell;m\ldots r} = \frac{1}{(k!)^2} e^{i\ldots\ell s\ldots t} \delta^{u\ldots v}_{s\ldots t} e^{m\ldots r p\ldots q} a_{up}\ldots a_{vq},$$

откуда, на основании определения (2,4) получаем соотношение (2,21).

Формулы (2,22) и (2,23) получаются совершенно аналогичным образом.

Умножая (2,22) на $e^{i\dots e f\dots h}\, e^{m\dots z s\dots t}$ и свертывая полученное выражение по $i\dots e$ и $m\dots z$ будем иметь:

$$e^{i\dots e f\dots h}\, e^{m\dots z s\dots t} A_{\underbrace{i\dots e}_{n-k};\underbrace{m\dots z}_{n-k}} = \left(\frac{(n-k)!}{k!}\right)^2 \delta^{f\dots h}_{\underbrace{u\dots v}_{k}}\, \delta^{s\dots t}_{\underbrace{p\dots q}_{k}} M^{u\dots v;p\dots q}$$

Дважды используя формулу (I,I7) получаем соотношение

$$e^{i\dots e f\dots h}\, e^{m\dots z s\dots t} A_{i\dots e;m\dots z} = ((n-k)!)^2 M^{f\dots h;\, s\dots t}$$

эквивалентное (2,24).

Точно так же доказываются и формулы (2,25) и (2,26).

5. Взаимные миноры и алгебраические дополнения.

Пусть даны об"екты a_{ik}, a^{ik} и $a_i^{\ k}$. Об"ектами взаимными к a_{ik}, a^{ik} и $a_i^{\ k}$, называются такие об"екты $\overset{*}{a}{}^{ik}$, $\overset{*}{a}_{ik}$ и $\overset{*}{a}{}^{i}_{\ k}$, что

$$a_{ik}\, \overset{*}{a}{}^{ek} = \delta_i^e \qquad (2,27)$$

$$a^{ik}\, \overset{*}{a}_{ek} = \delta_e^i \qquad (2,28)$$

$$a_i^{\ k}\, \overset{*}{a}_k^{\ e} = \delta_i^e \qquad (2,29)$$

Назовем определители $\overset{*}{a}{}^{o}$, миноры $\overset{*}{M}{}^{s\dots t;\kappa\dots\ell}$ и алгебраические дополнения $\overset{*}{A}_{s\dots t;\kappa\dots\ell}$ взаимными к a_o , $M_{s\dots t;\kappa\dots\ell}$ и $A^{s\dots t;\kappa\dots\ell}$, если они построены из об"ектов $\overset{*}{a}{}^{i\kappa}$ взаимных к $a_{i\kappa}$.

Покажем, что для взаимных определителей, миноров и алгебраических дополнений имеют место следующие соотношения:

$$a_o \overset{*}{a}{}^{o} = 1 \tag{2,30}$$

$$\overset{*}{M}{}^{s\ t;\kappa\dots\ell} = \frac{1}{a_o} A^{s\dots t;\kappa\dots\ell} \tag{2,31}$$

$$\overset{*}{A}_{s\dots t;\kappa\dots\ell} = \frac{1}{a_o} M_{s\dots t;\kappa\dots\ell} \tag{2,32}$$

$$M_{s\dots t;\kappa\dots\ell} \overset{*}{M}{}^{p\dots q;\kappa\dots\ell} = m!\, \delta^{p\dots q}_{s\dots t} \tag{2,33}$$

$$A^{p\dots q;\kappa\dots\ell} \overset{*}{A}_{s\dots t;\kappa\dots\ell} = m!\, \delta^{p\dots q}_{s\dots t} \tag{2,34}$$

Отметим, что равенство (2,30) получается как частный случай равенства (2,34), если принять $m=0$.

Для доказательства соотношения (2,30) умножим равенство

$$a_o\, e_{i\dots\kappa} = e^{p\dots q} a_{ip} \dots a_{\kappa q}$$

на $\overset{*}{a}{}^{iu}, \dots, \overset{*}{a}{}^{\kappa v}$. Воспользовавшись определением (2,27) получим

$$a_o\, e_{i\dots\kappa}\, \overset{*}{a}{}^{iu} \dots \overset{*}{a}{}^{\kappa v} = e^{u\dots v}.$$

Умножая обе части полученного равенства на $e_{u\dots v}$ и свертывая по всем n индексам, будем иметь

$$a_0 e_{u\ldots v} e_{i\ldots k} \overset{*}{a}{}^{iu} \ldots \overset{*}{a}{}^{kv} = n!$$

или по определению (2,2)

$$a_0 \overset{*}{a}{}^0 = 1.$$

Для доказательства соотношения (2,31) умножим равенство

$$a_0 e_{\underbrace{i\ldots r}_{k}\underbrace{p\ldots q}_{n-k}} = e^{\underbrace{m\ldots n}_{k}\underbrace{u\ldots v}_{n-k}} \underbrace{a_{im} \ldots a_{rn}}_{k} \underbrace{a_{pu} \ldots a_{qv}}_{n-k},$$

на $e^{s\ldots t\, p\ldots q}$ и оразуем свертку по $n-k$ последним индексам $p\ldots q$. Используя определения (1,3) и (2,7) будем иметь

$$a_0 \delta^{s\ldots t}_{i\ldots r} = a_{im} \ldots a_{rn} A^{s\ldots t;\, m\ldots n} \qquad (2,35)$$

Умножая обе части полученного равенства на $\overset{*}{a}{}^{ik}, \ldots, \overset{*}{a}{}^{rl}$ и учитывая (2,27), получаем

$$a_0 \delta^{s\ldots t}_{i\ldots r} \overset{*}{a}{}^{ik} \ldots \overset{*}{a}{}^{rl} = A^{s\ldots t;\, k\ldots l}$$

или

$$a_0 \overset{*}{M}{}^{s\ldots t;\, k\ldots l} = A^{s\ldots t;\, k\ldots l}$$

Для доказательства соотношения (2,32) воспользуемся равенством, аналогичным (2,35):

$$\overset{*}{a}{}^0 \delta^{i\ldots r}_{s\ldots t} = \overset{*}{a}{}^{im} \ldots \overset{*}{a}{}^{rn} \overset{*}{A}_{s\ldots t;\, m\ldots n} ,$$

умножив которое на $a_{ik}, \ldots, a_{rl}$, получим

$$\overset{*}{a}{}^0 M_{s\ldots t;\, k\ldots l} = \overset{*}{A}_{s\ldots t;\, k\ldots l}$$

или

$$\frac{1}{a_0} M_{s\dots t;\,k\dots \ell} = \overset{*}{A}_{s\dots t;\,k\dots \ell}$$

Соотношение (2,33) доказывается непосредственно:

$$M_{s\dots t;\,k\dots \ell}\ \overset{*}{M}{}^{p\dots q;\,k\dots \ell} =$$

$$= \delta^{u\dots v}_{s\dots t}\, a_{ku}\dots a_{\ell v}\, \delta^{p\dots q}_{r\dots f}\, \overset{*}{a}{}^{kr}\dots \overset{*}{a}{}^{\ell f} =$$

$$= \delta^{u\dots v}_{s\dots t}\, \delta^{p\dots q}_{u\dots v} = m!\, \delta^{p\dots q}_{s\dots t}.$$

Что же касается соотношения (2,34), то оно следует из равенства:

$$M_{s\dots t;\,k\dots \ell}\ \overset{*}{M}{}^{p\dots q;\,k\dots \ell} = A^{p\dots q;\,k\dots \ell}\ \overset{*}{A}_{s\dots t;\,k\dots \ell}, \qquad (2,36)$$

которое легко получить перемножая (2,31) и (2,32) и свертывая по m индексам $k\dots \ell$.

§ 4. Специальные определители.

Приведем для справок выражения для некоторых определителей, играющих важную роль в различных областях математики и теоретической физики.

I. Определитель Грама.

Для существования линейной зависимости между m векторами n -мерного пространства $\vec{a}_\alpha = (a^1_\alpha, a^2_\alpha, \dots, a^n_\alpha)$ $(\alpha = 1, 2, \dots, m)$ необходимо и достаточно, чтобы определитель Грама *)

*) Определитель Грама был введен датским математиком Иоргеном Грамом (1850-1916) в работе "О разложении вещественных функций в ряды с помощью метода наименьших квадратов" (1883).

$$\Delta_m = \frac{1}{m!} e^{\alpha\beta\ldots\gamma} e^{\mu\nu\ldots\lambda} (\vec{a}_\alpha \vec{a}_\mu)(\vec{a}_\beta \vec{a}_\nu)\ldots(\vec{a}_\gamma \vec{a}_\lambda) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{a}_1^{\,2} & (\vec{a}_1 \vec{a}_2) & \ldots & (\vec{a}_1 \vec{a}_m) \\ (\vec{a}_2 \vec{a}_1) & \vec{a}_2^{\,2} & \ldots & (\vec{a}_2 \vec{a}_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\vec{a}_m \vec{a}_1) & (\vec{a}_m \vec{a}_2) & \ldots & \vec{a}_m^{\,2} \end{vmatrix} \qquad (2,37)$$

где
$$\vec{a}_\alpha \vec{a}_\mu = \vec{a}_\mu \vec{a}_\alpha = g_{ik} a^i_\alpha a^k_\mu , \qquad (i,k = 1,2,\ldots,n)$$

$g_{ik} = g_{ki}$ – метрический тензор (см. § 4, гл.Ш), был тождественно равен нулю.

В пространстве функций определитель Грама имеет вид:

$$\Delta_m = \frac{1}{m!} e^{\alpha\beta\ldots\gamma} e^{\mu\nu\ldots\lambda} a_{\alpha\mu} a_{\beta\nu} \ldots a_{\gamma\lambda} ,$$

где
$$a_{\alpha\beta} = \int_a^b x_\alpha(t) x_\beta(t) dt ,$$

а приведенное выше утверждение означает:

Для линейной зависимости m функций $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)$ необходимо и достаточно, чтобы их определитель Грама был равен нулю.

2. Определитель Вронского [8].

Если функции $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ являются частными решениями линейного дифференциального уравнения n-го порядка

$$x^{(n)} + c_1(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + c_{n-1}(t)\, x' + c_n(t)\, x = 0,$$

[8] Юзеф Вронский (1778-1853) - польский математик и философ. Был артиллерийским офицером в армии Костюшки. Его работы по математике характеризуются чрезвычайной широтой и общностью постановки задач. Вронский искал общие методы решения алгебраических уравнений любых степеней, формулы, охватывающие все до него известные разложения в ряды, способы решения дифференциальных уравнений любых порядков и т.д. Однако сложность обозначений которыми он пользовался, темный, склоняющийся к мистицизму стиль, затрудняли изучение его произведений.

то для их линейной зависимости необходимо и достаточно, чтобы их определитель Вронского (вронскиан)

$$W[x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{1}{n!} e^{ik\dots\ell} e_{pq\dots r} x_i^{(p-1)} x_k^{(q-1)} \dots x_\ell^{(r-1)} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (2,38)$$

был тождественно равен нулю *).

Если в качестве исходного взять дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами, а в качестве частных решений - систему функций $x_1(t) = e^{a_1 t}$, $x_2(t) = e^{a_2 t}, \dots, x_n(t) = e^{a_n t}$, то определитель Вронского сведется к определителю Вандермонда

$$\mathcal{D}_n = \frac{1}{n!} e^{ik\dots\ell} e_{pq\dots r} (a_i)^{p-1} (a_k)^{q-1} \dots (a_\ell)^{r-1} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < k \le n} (a_k - a_i) \qquad (2,39)$$

одному из немногих определителей, которые могут быть вычислены в общем виде.

---

*) Заметим, что для произвольной системы n линейно зависимых функций определитель Грама (2,37) всегда равен нулю, в то время как определитель Вронского (2,38), вообще говоря, отличен от нуля, так как для обращения $W[x_1, x_2, \dots, x_n]$ в нуль необходимо чтобы $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ были линейно зависимыми решениями одного и того же дифференциального уравнения.

3. Функциональный определитель Якоби [9]

Пусть дана система n функций от n переменных

$$
\begin{aligned}
y^1 &= y^1(x^1, x^2, \ldots, x^n)\\
y^2 &= y^2(x^1, x^2, \ldots, x^n) \qquad\qquad (2,40)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y^n &= y^n(x^1, x^2, \ldots, x^n)
\end{aligned}
$$

Определитель, составленный из частных производных $\frac{\partial y^i}{\partial x^k}$

$$
\frac{\partial(y^1, y^2, \ldots, y^n)}{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)} = \frac{1}{n!}\, \varepsilon^{ik\ldots\ell}\, \varepsilon_{pq\ldots r}\, \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial y^q}{\partial x^k} \cdots \frac{\partial y^r}{\partial x^\ell} =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
\frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^1}\\
\frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^2}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{\partial y^1}{\partial x^n} & \frac{\partial y^2}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n}
\end{vmatrix} \qquad (2,41)
$$

называется функциональным определителем Якоби или якобианом.

Если наряду с системой (2,40) рассмотреть новую систему функций

---

[9] Карл Густав Якоб Якоби - немецкий математик, родился в Потсдаме в 1804 г., умер в Берлине в 1851 г. Профессор Берлинского университета. С 1827 г. - член Берлинской Академии наук. Им получены фундаментальные результаты в области уравнений с частными производными. В своих лекциях по динамике и в ряде исследований по теории эллиптических функций Якоби решил ряд важнейших вопросов чистой и прикладной математики. Он усовершенствовал предложенный Гамильтоном метод интегрирования дифференциальных уравнений динамики, известный как метод Гамильтона - Якоби.

$$\begin{aligned} z^1 &= z^1(y^1,\dots,y^n) = \bar{z}^1(x^1,\dots,x^n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z^n &= z^n(y^1,\dots,y^n) = \bar{z}^n(x^1,\dots,x^n) \end{aligned} \qquad (2,42)$$

где $\quad \bar{z}^i(x^1,\dots,x^n) = z^i(y^1(x^1,\dots,x^n),\dots,y^n(x^1,\dots,x^n))$,

то используя правило умножения определителей (2,14), нетрудно доказать следующее свойство якобианов:

$$\frac{\partial(z^1,z^2,\dots,z^n)}{\partial(y^1,y^2,\dots,y^n)}\cdot\frac{\partial(y^1,y^2,\dots,y^n)}{\partial(x^1,x^2,\dots,x^n)} = \frac{\partial(\bar{z}^1,\bar{z}^2,\dots,\bar{z}^n)}{\partial(x^1,x^2,\dots,x^n)} \qquad (2,43)$$

Легко видеть, что соотношение (2,43) является обобщением формулы для производной сложной функции.

Если положить $z^i = x^i$ так что система (2,42) будет являться результатом обращения системы (2,40) , то равенство (2,43) сведется к соотношению

$$\frac{\partial(y^1,y^2,\dots,y^n)}{\partial(x^1,x^2,\dots,x^n)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(x^1,x^2,\dots,x^n)}{\partial(y^1,y^2,\dots,y^n)}}, \qquad (2,44)$$

напоминающему формулу для производной обратной функции.

Воспользовавшись очевидным равенством:

$$\delta^{ik\dots l}_{pq\dots r}\,\frac{\partial(y^1,y^2,\dots,y^n)}{\partial(x^1,x^2,\dots,x^n)} = \frac{\partial(y^i,y^k,\dots,y^l)}{\partial(x^p,x^q,\dots,x^r)} \qquad (2,45)$$

получим выражение для обобщенного символа Кронекера через якобиан

$$\delta^{ik\dots l}_{pq\dots r} = \frac{\partial(x^i,x^k,\dots x^l)}{\partial(x^p,x^q,\dots,x^r)}$$

Используя понятие якобиана, сформулируем несколько теорем, относящихся к теории неявных функций и имеющих непосредственное отношение к криволинейным координатам, рассматриваемым в тензорном анализе.

Система n уравнений

$$y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y^n = y^n(x^1, \dots, x^n)$$

разрешима относительно $x^1, \dots, x^n$, если якобиан ее $\frac{\partial(y^1, y^2, \dots, y^n)}{\partial(x^1, x^2, \dots, x^n)}$ отличен от нуля.

Система m уравнений с $m+n$ переменными

$$\mathcal{F}_1(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^m) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\mathcal{F}_m(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^m) = 0$$

определяет $y^1, \dots, y^m$ как однозначную функцию $x^1, \dots, x^n$, если якобиан $\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m)}{\partial(y_1, \dots, y^m)}$ отличен от нуля.

Среди m функций n переменных $x^1, \dots, x^n$

$$y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y^m = y^m(x^1, \dots, x^n)$$

имеется p функционально зависимых *), если

---

*) P функций $y^1, \dots, y^p$ называются функционально зависимыми, если существует такая функция $\phi(y^1, \dots, y^p)$, не равная тождественно нулю, что равенство

$$\phi(y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^p(x^1, \dots, x^n)) = 0$$

является тождеством.

ранг *) матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^m}{\partial x^1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^n} & \dots & \frac{\partial y^m}{\partial x^n} \end{matrix} \right\|$$

равен p .

4. Определитель Гессе [10]

Рассмотрим функцию n переменных $\varphi(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Определитель, составленный из частных производных второго порядка

$$y_n = \frac{1}{n!} e^{ik\dots\ell} e^{pq\dots z} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^p} \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^k \partial x^q} \cdot \dots \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\ell \partial x^z} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1 \partial x^1} & \dots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1 \partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^n \partial x^1} & \dots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^n \partial x^n} \end{vmatrix} \tag{2,46}$$

---

*) Рангом матрицы называется наивысший из порядков определителей отличных от нуля и образованных из элементов этой матрицы.

[10]. Отто Людвиг Гессе (1811-1874) - немецкий математик. Ученик Якоби; профессор в Кенигсберге, Галле и Мюнхене. Основные работы Гессе посвящены теории проективных свойств кривых и поверхностей, определению точек перегиба плоской кривой -го порядка. В этих работах Гессе приходит к инвариантному определителю-гессиану

называется определителем Гессе или гессианом.

Функция $\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ имеет в точке $A(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ максимум (минимум), если все производные первого порядка в этой точке равны нулю, а все определители Гессе $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2, \ldots,$ $\mathcal{G}_n$ порядка от I до n меньше (больше) нуля.

Преобразование

$$y_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x^1, x^2, \ldots, x^n) \qquad (2,47)$$

осуществляемое с помощью функции n переменных $\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ обратимо, если гессиан этой функции $\mathcal{G}_n$ отличен от нуля.

Заметим при этом, что преобразование (2,47) имеет взаимный характер, т.е.

$$x^i = \frac{\partial \psi}{\partial y_i}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

где

$$\psi = y_i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - \varphi .$$

ГЛАВА III.

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

> Бо́льшая общность придает тензорному исчислению ясность, которой порой лишены частные случаи.
>
> Марсель Гроссман.

§ I. Криволинейные координаты.

Исторически тензорное *) исчисление возникло в работах Кристоффеля, Риччи и Леви-Чивита на базе дифференциальной геометрии. Однако для целей теоретической физики наиболее интересна его аналитическая сторона, очищенная от излишних ассоциаций с понятиями эвклидовой геометрии. В связи с этим мы намеренно отказываемся от каких-либо геометрических иллюстраций, так как, по нашему мнению, они мало что дают для понимания тензорного анализа.

Пусть x^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ совокупность n переменных связанная с другой совокупностью $\bar{x}^i$ системой n произвольных, достаточное число раз дифференцируемых функций, якобиан которой

*) Общее понятие тензора было введено итальянским математиком Риччи (см. [1] на стр.) в работе "О ковариантном и контравариантном дифференцировании" (1888). Риччи называл тензоры "системами" *(sistemi)* . Термин "тензор" (от латинского слова *tensor* , означающего "растягиватель") был введен Гамильтоном в значении модуля кватерниона и вектора. В современном значении термины "тензор" и "тензорный анализ " были введены одновременно с созданием общей теории относительности и были предложены Эйнштейном и Гроссманом в работе "Проект обобщенной теории относительности и теории тяготения " (1913).

отличен от нуля:

$$x^1 = x^1(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$$
$$x^2 = x^2(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^n = x^n(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$$

или короче

$$x^i = x^i(\bar{x}^k) \qquad (3,1)$$

Поскольку якобиан системы (3,I) отличен от нуля, система (3,I) может быть разрешена относительно $\bar{x}^i$:

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^k) \qquad (3,2)$$

Назовем переменные x^i - старыми, а $\bar{x}^i$ - новыми криволинейными координатами *).

Рассмотрим закон преобразования дифференциалов dx^i при переходе от старой системы координат к новой. Дифференцируя (3,I) и (3,2), имеем

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} d\bar{x}^k \qquad (3,3)$$

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} dx^k \qquad (3,4)$$

Частные производные $$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} = \underline{c}^i_k \qquad (3,5)$$

---

*) Криволинейные координаты произвольного вида на поверхности трехмерного пространства введены Гауссом в "Общих исследованиях о кривых поверхностях" (I827). Криволинейные координаты на поверхности n -пространства, являющиеся частным случаем координат в римановом пространстве, были введены Риманом в лекции "О гипотезах, лежащих в основании геометрии " (I854).

и
$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} = \bar{C}^i_k \tag{3,6}$$

можно рассматривать как элементы двух матриц преобразования $\underline{C}$ и $\bar{C}$.

Перепишем соотношения (3,3) и (3,4) в новых обозначениях
$$dx^i = \underline{C}^i_k\, d\bar{x}^k \tag{3,7}$$
и
$$d\bar{x}^i = \bar{C}^i_k\, dx^k \tag{3,8}$$

Итак, мы видим, что при произвольных преобразованиях координат (3,1) дифференциалы dx^i преобразуются линейным образом.

Подставляя в (3,7) выражение для $d\bar{x}^k$ из (3,8), получаем:
$$dx^i = \underline{C}^i_k\, \bar{C}^k_m\, dx^m$$
или
$$\underline{C}^i_k\, \bar{C}^k_m = \delta^i_m \tag{3,9}$$

Совершенно аналогично доказывается, что
$$\underline{C}^i_k\, \bar{C}^l_i = \delta^l_k \tag{3,10}$$

На языке матриц уравнения (3,9) и (3,10) эквивалентны равенству:
$$\underline{C}\,\bar{C} = \bar{C}\,\underline{C} = 1 \tag{3,11}$$

Очевидно, что определители $\underline{C}$ и $\bar{C}$ соответствующих матриц преобразования связаны между собой тем же уравнением (3,11).

§ 2. Скаляры и векторы.

Функция A от переменных x^i называется скаляром *),

*) Термин "скаляр" (от латинского слова *scala* – "лестница") для обозначения вещественных чисел (расположенных "как ступеньки лестницы") и "вектор" (от латинского слова *vector* – "переноситель" были введены ирландским математиком и механиком Гамильтоном (1805-1865) в его "Лекциях о кватернионах" (1853).

если при переходе от одной системы координат к другой она преобразуется по закону

$$\mathcal{A}(x^i) = \bar{\mathcal{A}}(\bar{x}^k) \qquad (3,12)$$

Совокупность функций $\mathcal{A}_i$ от переменных x^k называется ковариантным вектором, если при переходе от одной системы координат к другой, она преобразуется по закону

$$\mathcal{A}_i = \bar{C}_i^k \bar{\mathcal{A}}_k \qquad (3,13)$$

Совокупность функций $\mathcal{A}^i$ от переменных x^k называется контравариантным вектором, если при переходе от одной системы координат к другой она преобразуется по закону

$$\mathcal{A}^i = \underline{C}_k^i \bar{\mathcal{A}}^k \qquad (3,14)$$

Частная производная скалярной функции $\mathcal{A}$ является ковариантным вектором.

В самом деле, дифференцируя (3,12) по x^i получаем:

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x^i} = \frac{\partial \bar{\mathcal{A}}}{\partial \bar{x}^k} \cdot \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} = \bar{C}_i^k \frac{\partial \bar{\mathcal{A}}}{\partial \bar{x}^k}$$

что совпадает с (3,13), если положить

$$\mathcal{A}_i = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x^i}.$$

Следует обратить внимание на тот факт, что совокупность n переменных x^i <u>не является</u> контравариантным вектором, так как закон преобразования (3,1) не имеет ничего общего с законом преобразования (3,14).

С другой стороны, совокупность $\bar{n}$ дифференциалов dx^i

является контравариантным вектором, так как закон преобразования (3,7) совпадает с (3,I4).

Заметим, наконец, что совокупность дифференциалов *ко* -или контравариантного вектора dA_i (или dA^i) не является вектором, так как преобразование

$$dA_i = \bar{C}_i^{\kappa}\, d\bar{A}_\kappa + \frac{\partial^2 \bar{x}^\kappa}{\partial x^i \partial x^\ell}\, \bar{A}_\kappa\, d\bar{x}^m\, \underline{C}_m^{\ell}$$

отличается от (3,I3) слагаемыми, пропорциональными $d\bar{x}^m$.

Свертка *ко* - и контравариантных векторов является скаляром. В самом деле

$$A_i B^i = \bar{C}_i^{m}\, \underline{C}_n^{i}\, \bar{A}_m \bar{B}^n = \delta_n^m \bar{A}_m \bar{B}^n = \bar{A}_n \bar{B}^n.$$

§ 3. Общее определение тензора.

К понятию тензора можно придти, вообще говоря, различными путями. Один из таких путей связан с рассмотрением тензора как вектора в специальном линейном пространстве, полученном из обычных пространств путем образования их, так называемого, тензорного произведения *). Такая точка зрения на тензор оказывается чрезвычайно удобной, когда дело касается рассмотрения его общих

---

*) Согласно определению, приведенному в трактате Бурбаки ("Алгебра", гл.Ш, § 4, п.I), тензором ковариантным ранга m и контравариантным ранга r называется всякий элемент тензорного произведения $\bigotimes_{i=1}^{m+r} E_i$, где m из модулей E_i совпадают с E - унитарным модулем над коммутативным кольцом A , а остальные r - с сопряженным модулем E^* ; тензорным произведением $\bigotimes_{i=1}^{n} E_i$ n модулей E_i $(i=1,2,\dots,n)$ называется фактор-модуль $\mathcal{Y}/H$ модуля $\mathcal{Y}$ линейных комбинаций элементов произведения $\prod E_i$ по подмодулю H , на котором аннулируются все полилинейные функции.

свойств и ряда приложений, связанных с нахождением неприводимых представлений тех или иных групп.

Однако существует большой круг проблем, в которых удобно характеризовать тензор совокупностью n^p функций n переменных, называемых его компонентами, преобразующихся при переходе от одной системы координат к другой по вполне определенному закону. Именно такой подход мы и примем за основу.

Прежде всего введем понятие дифференциально-геометрического об"екта.

Мы будем говорить, что задано поле дифференциального об"екта класса p (или короче геометрический об"ект), если задана система N функций $\varphi_\alpha(x)$ от n переменных x^i , которая при переходе к новой системе координат $\bar{x}^i$ преобразуется по закону

$$\varphi_\alpha(x^i) = \Phi_\alpha\left(\bar{\varphi}_\mu(\bar{x}^\kappa),\ \frac{\partial \bar{x}^\kappa}{\partial x^\ell},\ \frac{\partial^2 \bar{x}^\kappa}{\partial x^\ell \partial x^m},\ \dots,\ \frac{\partial^p \bar{x}^\kappa}{\partial x^\ell \dots \partial x^\nu}\right) \quad (3,15)$$

где Φ_α - вполне определенные для данного об"екта функции.

На первый взгляд может показаться, что закон (3,15) в значительной степени произволен. На самом же деле, определение (3,15) накладывает на закон преобразования Φ_α очень жесткое требование - он не должен зависеть от вида преобразования координат, а следовательно должен обладать групповыми свойствами.

Среди различных возможных об"ектов особенно важными являются тензорные поля.

Мы будем говорить, что задано поле тензора (или просто тензор) ковариантного ранга m и контравариантного ранга z если задана система n^{m+z} функций $A_{\underbrace{i \dots \kappa}_{m}}{}^{\overbrace{p \dots \psi}^{z}}$ от n

переменных x^s, если при переходе от одной системы координат к другой она преобразуется как произведение m ковариантных и r контравариантных векторов, т.е.

$$A_{i\ldots k}{}^{p\ldots q} = \bar{C}^u_i \ldots \bar{C}^v_k \, \underline{C}^p_s \ldots \underline{C}^q_t \, \bar{A}_{u\ldots v}{}^{s\ldots t} \qquad (3,16)$$

Так, например, закон преобразования тензора $A^{ik}_{\cdot\cdot mnp}$ имеет вид:

$$A^{ik}_{\cdot\cdot mnp} = \underline{C}^i_u \, \underline{C}^k_v \, \bar{C}^s_m \, \bar{C}^r_n \, \bar{C}^t_p \, \bar{A}^{uv}_{\cdot\cdot srt}$$

Используя очевидное равенство

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \cdot \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial \bar{\bar{x}}^m} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{\bar{x}}^m}$$

нетрудно убедиться в том, что тензорный закон преобразования (3,16) обладает групповыми свойствами.

Если компоненты ко - или контравариантного тензора не меняются от перестановки двух или нескольких индексов, тензор называется симметрическим относительно этих индексов. Тензор называется антисимметрическим по отношению к данной системе индексов, если его компоненты остаются неизменными при любой четной перестановке этих индексов и меняют свой знак на обратный - при любой нечетной.

Из линейности и однородности закона преобразования (3,16) вытекает важное следствие: Если все компоненты тензора равны нулю в одной системе координат, то они остаются равными нулю в любой другой произвольно выбранной системе.

Таким образом, если физические уравнения приведены к виду, выражающему обращение в нуль всех компонент некоторого тензора, то эти уравнения имеют определенный смысл, не зависящий от выбора системы координат.

Из определения (3,16) следует также, что операции сложения, умножения и свертки сохраняют тензорный характер тех об"ектов, которые получаются из данных тензоров в результате трех перечисленных операций. Можно также показать, что тензор , симметрический (антисимметрический) в одной системе координат, будет симметрическим (антисимметрическим) в любой другой. Однако заметим еще раз, что операция дифференцирования не сохраняет тензорного ? характера получаемых об"ектов, т.е. дифференциал тензора не есть тензор.

§ 4. Метрический тензор.

Как мы уже упоминали, эффективность тензорного исчисления при описании физических явлений связана с возможностью записывать уравнения в ковариантном виде, сводя их правую часть к нуль-тензору. Но кроме нуль - тензора существуют скаляры, которые оставаясь неизменными в различных системах координат, также могли бы служить для инвариантной записи тех или иных уравнений.

Скаляр легко получить свертывая произведение ко - и контравариантного векторов. Но невозможно получить скаляр из одного вектора, оставаясь в рамках тех определений и понятий, которые были даны выше.

Чтобы сделать теорию более содержательной и эффективной, необходимо дополнить ее правилом, по которому каждому вектору сопоставляется скаляр или, в более общей постановке, правило, по которому каждому тензору сопоставляется тензор меньшего ранга.

В принципе существует много способов построения скаляров, в одном случае можно было бы задать фиксированную для каждой теории совокупность n функций g_i, преобразующихся как ковариантный вектор, и об"явить скаляром A, соответствующим вектору A^i следующую свертку:

$$A = g_i A^i \qquad (3,17)$$

В другом случае можно было бы задать $\frac{1}{2} n(n+1)$ произвольных, но для данной теории фиксированных функций g_{ik}, симметричных относительно перестановки индексов i и k и преобразующихся как дважды ковариантный тензор и назвать скаляром A, соответствующим вектору A^i, следующее выражение:

$$A = g_{ik} A^i A^k \qquad (3,18)$$

Наконец, можно было бы рассмотреть $\frac{1}{3!} n(n+1)(n+2)$ функций g_{ike}, симметричных относительно перестановки индексов i, k, ℓ и преобразующихся как ковариантный тензор третьего ранга и назвать скаляром A, связанным с вектором A^i, величину

$$A = g_{ik\ell} A^i A^k A^\ell \qquad (3,19)$$

Если в качестве A^i взять наиболее естественный вектор dx^i, то соотношения (3,17) - (3,19), соответствующие различным вариантам теории, можно было бы записать в виде:

$$ds = g_i dx^i \qquad (3,20)$$

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \qquad (3,21)$$

$$ds^3 = g_{ik\ell} dx^i dx^k dx^\ell \qquad (3,22)$$

. . . .

Очевидно, что форма и содержание теории существенно зависят от того, какой из перечисленных вариантов взять за основу.

По причинам, выяснение которых в данном месте могло бы увести нас слишком далеко, из всех возможных способов образования скаляра из вектора наиболее содержательным с точки зрения математики и единственно приемлемым с точки зрения физики является способ, основанный на введении в теорию ковариантного тензора второго ранга g_{ik}.

Итак, будем рассматривать такой вариант теории, в котором задана система функций g_{ik}, симметричных относительно перестановки индексов i и k

$$g_{ik} = g_{ki}$$

и преобразующихся по тензорному закону

$$g_{ik} = \bar{C}_i^m \bar{C}_k^n \bar{g}_{mn} \tag{3,23}$$

Эта совокупность функций g_{ik} называется *метрическим тензором* и состоит из $\frac{1}{2} n(n+1)$ произвольных функций, единственное ограничение на которые сводится к требованию, чтобы определитель $g_0 = |g_{ik}|$ был бы отличен от нуля.

Говорят, что величины g_{ik} определяют метрику пространства, арифметические свойства которого устанавливаются введенной системой координат x^i. Такие пространства называются римановыми многообразиями. Теория римановых многообразий называется римановой геометрией, основы которой заложены классическими работами Римана [11].

Если под ds^2 в формуле

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k \qquad (3,21)$$

понимать квадрат расстояния между двумя реальными физическими телами или квадрат интервала между двумя событиями, то метрический тензор g_{ik} может быть получен экспериментально путем измерения взаимных расстояний между достаточно большим числом близких тел в первом случае или путем измерения интервалов между достаточно большим числом близких событий - во втором.

Подчеркнем, что в тензорном анализе метрический тензор g_{ik} предполагается заданным извне, точно так же как электромагнитное поле в механике. И так же как электродинамика позволяет найти электромагнитное поле по заданному распределению зарядов и токов, так и тензор g_{ik} может быть найден в рамках общей теории относительности по заданному распределению масс.

---

[11] Георг Фридрих Бернхард Риман (1826-1866) - выдающийся немецкий математик. Родился в Брезеленце (провинция Ганновер), умер от туберкулеза в Италии. В Геттингенском университете слушал лекции Гаусса, многие идеи которого были развиты им позже. Там же сблизился с физиком Вебером, который пробудил в нем глубокий интерес к вопросам математического естествознания. Бернхард Риман положил начало новому направлению теории аналитических функций и широкому применению идей и методов математической физики, дал основные идеи топологии. Он рассматривал геометрию в весьма широком смысле как учение о непрерывных многообразиях. Введение римановых пространств, частным случаем которых являются геометрии Эвклида и Лобачевского, раскрыло новые пути в развитии математики. Большое значение для физики 20-го века имел разработаный Риманом (1861) и его последователями аппарат теории дифференциальных квадратичных форм.

§ 5. Контравариантный тензор g^{ik}.

Зная метрический тензор g_{ik}, введем такой об"ект g^{ek}, что

$$g_{ik} g^{ek} = \delta_i^e . \qquad (3,24)$$

Легко убедиться в том, что g^{ek} равно алгебраическому дополнению

$$y^{e;k} = \frac{1}{(n-1)!} e^{ep\dots q} e^{ku\dots v} g_{pu} \dots g_{qv} \qquad (3,25)$$

деленному на определитель

$$g_0 = \frac{1}{n!} e^{mp\dots q} e^{zu\dots v} g_{mz} g_{pu} \dots g_{qv} \qquad (3,26)$$

В самом деле, образуя свертку

$$g_{ik} \frac{y^{e;k}}{g_0} = \frac{1}{(n-1)!\, g_0} e^{ep\dots q} e^{ku\dots v} g_{ik} g_{pu} \dots g_{qv}$$

и замечая, что *)

$$e^{ep\dots q} e^{ku\dots v} g_{ik} g_{pu} \dots g_{qv} = (n-1)!\, g_0 \delta_i^e , \qquad (3,27)$$

получаем

$$g_{ik} \frac{y^{e;k}}{g_0} = \delta_i^e \qquad (3,28)$$

*) Соотношение (3,27) может быть легко получено, если равенство

$$e_{ip\dots q}\, g_0 = e^{ku\dots v} g_{ik} g_{pu} \dots g_{qv}$$

свернуть по $n-1$ индексам с $e^{ep\dots q}$ и воспользоваться формулой

$$\delta^{ep\dots q}_{ip\dots q} = (n-1)!\, \delta_i^e$$

Таким образом, действительно *)

$$g^{ik} = \frac{\mathfrak{g}^{i;k}}{g_0} \qquad (3,29)$$

Покажем теперь, что при переходе от старых координат x^i к новым $\bar{x}^k$ об"ект g^{ik} преобразуется как дважды контравариантный тензор.

Мы будем исходить из определения (3,24), справедливого в любой системе координат:

$$g_{ik}\, g^{lk} = \bar{g}_{ik}\, \bar{g}^{lk} = \delta_i^l \qquad (3,30)$$

Подставляя в (3,30)

$$g_{ik} = \bar{c}_i^u\, \bar{c}_k^v\, \bar{g}_{uv}$$

получим

$$\bar{c}_i^u\, \bar{c}_k^v\, \bar{g}_{uv}\, g^{lk} = \delta_i^l \qquad (3,31)$$

Умножая обе части равенства (3,31) на $\underline{c}_z^i$ и замечая, что

$$\underline{c}_z^i\, \bar{c}_i^u = \delta_z^u$$

будем иметь

$$\bar{c}_k^v\, \bar{g}_{zv}\, g^{lk} = \underline{c}_z^l \qquad (3,32)$$

Умножим (3,32) на $\bar{g}^{zs}$. На основании (3,24) получим

$$\bar{c}_k^s\, g^{lk} = \underline{c}_z^l\, \bar{g}^{zs}$$

---

*) Вообще говоря, из формулы (3,28) следует, что

$$g^{ik} = \frac{1}{g_0}\, \mathfrak{g}^{i;k} + a^{ik}$$

где a^{ik} – произвольный антисимметрический об"ект, но накладывая на g^{ik} дополнительное требование симметрии относительно перестановки индексов i и k, получаем (3,29).

откуда
$$g^{ek} = \underline{C}^{e}_{r}\,\underline{C}^{k}_{s}\,\bar{g}^{rs} \qquad (3,33)$$

Используя явное выражение $g^{i;k}$ через составляющие симметрического тензора g_{ik} легко показать, что тензор g^{ik} симметричен, т.е.
$$g^{ik} = g^{ki}$$

Обозначая определитель, построенный из g^{ik}, через g^{o} на основании равенства (3,24) имеем:
$$g_{o}\,g^{o} = 1 \qquad (3,34)$$

Используя законы преобразования
$$g_{ik} = \bar{C}^{u}_{i}\,\bar{C}^{v}_{k}\,\bar{g}_{uv}$$
$$g^{ik} = \underline{C}^{i}_{u}\,\underline{C}^{k}_{v}\,\bar{g}^{uv}$$

получаем следующие соотношения для определителей g_{o}, g^{o} и определителей $\underline{C}$ и $\bar{C}$ построенных соответственно из $\underline{C}^{i}_{u}$ и $\bar{C}^{u}_{i}$:
$$g_{o} = \bar{C}^{2}\,\bar{g}_{o} \qquad (3,35)$$
$$g^{o} = \underline{C}^{2}\,\bar{g}^{o} \qquad (3,36)$$

§ 6. *Ко* - и контравариантные тензоры Леви-Чивита.

Рассмотрим определители $\bar{C}$ и $\underline{C}$ построенные соответственно из $\bar{C}^{u}_{i}$ и $\underline{C}^{i}_{u}$. Имеем:
$$e_{ik\ldots e}\,\bar{C} = e_{mp\ldots q}\,\bar{C}^{m}_{i}\,\bar{C}^{p}_{k}\ldots\bar{C}^{q}_{e} \qquad (3,37)$$

$$e^{ik\ldots l}\,\underline{c} = e^{mp\ldots q}\,\underline{c}^{i}_{m}\,\underline{c}^{k}_{p}\ldots\underline{c}^{l}_{q} \qquad (3,38)$$

Воспользовавшись соотношениями (3,34), (3,35) и (3,36) перепишем (3,37) и (3,38) в виде:

$$e_{ik\ldots l}\sqrt{g_0} = \bar{c}^{m}_{i}\,\bar{c}^{p}_{k}\ldots\bar{c}^{q}_{l}\,e_{mp\ldots q}\sqrt{\bar{g}_0} \qquad (3,39)$$

$$e^{ik\ldots l}\frac{1}{\sqrt{g_0}} = \underline{c}^{i}_{m}\,\underline{c}^{k}_{p}\ldots\underline{c}^{l}_{q}\,e^{mp\ldots q}\frac{1}{\sqrt{\bar{g}_0}} \qquad (3,40)$$

откуда видно, что выражения

$$\varepsilon_{ik\ldots l} = e_{ik\ldots l}\sqrt{g_0} \qquad (3,41)$$

$$\varepsilon^{ik\ldots l} = e^{ik\ldots l}\frac{1}{\sqrt{g_0}} \qquad (3,42)$$

преобразуются как *ко* - и контравариантные тензоры.

$\varepsilon_{ik\ldots l}$ и $\varepsilon^{ik\ldots l}$ называются *ко* - и контравариантными тензорами Леви-Чивита.

Довольно часто возникает необходимость по одному тензору построить другой. Это можно сделать, например, свертывая данный тензор с *ко* - и контравариантными тензорами Леви-Чивита.

Тензор, полученный путем свертки данного с тензором Леви - Чивита по K выделенным индексам, называется тензором, дуальным данному по K индексам *).

В зависимости от конкретного выбора совокупности K индексов, по которым производится суммирование, из одного тензора можно получить несколько тензоров, дуальных данному.

---

*) Если исходный тензор антисимметричный по всем K индексам, то при определении тензора, дуального данному, свертку обычно делят на $K!$

пусть, например, при $n=3$ исходным тензором является $a^{ik}_{\cdot\cdot p}$. В этом случае имеем, вообще говоря, три тензора, дуальных данному по одному индексу:

$$u^{mpil} = \varepsilon^{mpk} a^{il}_{\cdot\cdot k}$$

$$v_{mp\cdot k}^{\ \ \ l} = \varepsilon_{mpi} a^{il}_{\cdot\cdot k}$$

$$w_{mp\cdot k}^{\ \ \ i} = \varepsilon_{mpl} a^{il}_{\cdot\cdot k}$$

и один тензор, дуальный данному по двум индексам

$$h_{mk} = \varepsilon_{mil} a^{il}_{\cdot\cdot k}$$

§ 7. Псевдотензор.

В предыдущем параграфе мы видели, что свертка любого тензора с *ко* - или контравариантным тензором Леви-Чивита является тензором.

Рассмотрим теперь закон преобразования об"ектов, получен - ных в результате свертки произвольного тензора с символом Леви-Чивита. Для этого умножим обе части равенства (3,38) на произ - вольный тензор $a_{u\ldots v}$ ранга k

$$a_{u\ldots v} = \bar{c}^s_u \ldots \bar{c}^z_v \, \bar{a}_{s\ldots z}$$

и свернем по k индексам. Перенося $\underline{c} = \frac{1}{\bar{c}}$ в правую часть, будем иметь:

$$e^{i\ldots k u\ldots v} a_{u\ldots v} = \bar{c}\, \underline{c}^i_m \ldots \underline{c}^k_p \, \underline{c}^u_q \ldots \underline{c}^v_t \, \bar{c}^s_u \ldots \bar{c}^z_v \, e^{m\ldots pq\ldots t} \bar{a}_{s\ldots z}$$

или после суммирования по $u \ldots v$

$$\tilde{a}^{i\ldots k} = \bar{c}\, \underline{c}^i_m \ldots \underline{c}^k_p \, \tilde{\bar{a}}^{m\ldots p} \qquad (3{,}43)$$

где *)
$$\tilde{a}^{i\dots k} = e^{i\dots k u\dots v}\, a_{u\dots v}$$
$$\tilde{a}'^{m\dots p} = e^{m\dots p q\dots t}\, \bar{a}_{q\dots t}$$

Таким образом величина $\tilde{a}^{i\dots k}$, полученная путем свертки тензора $a_{u\dots v}$ с символом Леви-Чивита $e^{i\dots k u\dots v}$, преобразуется по закону (3,43), отличающемуся от обычного закона преобразования тензоров наличием множителя $\bar{c}$.

Точно так же можно показать, что об"ект

$$\tilde{a}_{i\dots k} = e_{i\dots k u\dots v}\, a^{u\dots v}$$

преобразуется по закону

$$\tilde{a}_{i\dots k} = (\bar{c})^{-1}\, \bar{c}_i^{\,m} \dots \bar{c}_k^{\,p}\, \tilde{a}'_{m\dots p} \qquad (3,44)$$

Об"екты, преобразующиеся по закону (3,43) или (3,44), называются соответственно псевдотензорами**) веса I или -I.

Вообще псевдотензором веса p называются об"екты, преобразующиеся при переходе от одной системы координат к другой, по закону

$$\tilde{A}_{i\dots k}{}^{e\dots z} = (\bar{c})^{p}\, \bar{c}_i^{\,u} \dots \bar{c}_k^{\,v}\, \underline{c}_s^{\,e} \dots \underline{c}_t^{\,z}\, \tilde{A}'_{u\dots v}{}^{s\dots t}. \qquad (3,45)$$

Так символы Леви-Чивита $e^{i\dots k}$ и $e_{i\dots k}$ являются, соответственно, псевдотензорами веса I и -I, определители $g_{\circ}$ и g° - псевдоскалярами веса 2 и (-2) (определитель g является скаляром), а алгебраическое дополнение $y^{i;k}$ - псевдотензором веса 2.

Легко видеть, что произведение двух псевдотензоров веса p и q является псевдотензором веса $p+q$.

*) Чтобы сделать обозначения менее громоздкими мы вместо $\bar{\tilde{a}}$ пишем $\tilde{a}'$.

**) Иногда псевдотензор веса p называют тензорной плотностью веса p.

ГЛАВА IУ.

Тензорный анализ

> Не следует недооценивать преимуществ, которые можно получить применением хорошо приспособленного для дальнейших исследований формализма, который, если можно так выразиться, опережает нашу мысль.
>
> Феликс Клейн [12]

§ I. Ковариантное дифференцирование.

Преимущества тензорного анализа состоят прежде всего в возможности записывать уравнения в инвариантной форме, не зависящей от выбора системы координат. Поэтому при изложении тензорного анализа следует с самого начала определить операцию, обладающую с одной стороны всеми основными свойствами частной произ-

---

[12]. *Феликс Клейн (1849-1925)* - немецкий математик, обучался в Бонне, профессор математики в Эрлангене, Мюнхене и Геттингене. Автор ряда фундаментальных работ по неевклидовой геометрии, теории непрерывных групп и различным вопросам геометрии. В своей работе под названием "Эрлангенская программа" (1892) Клейн разрабатывал общую систему геометрического исследования. Эта работа оказала большое влияние на дальнейшее развитие геометрии.

водной, а с другой – сохраняющей тензорный характер.

Пусть φ – скалярная функция x^i, т.е.

$$\varphi(x^i) = \bar{\varphi}(\bar{x}^i) \tag{4,1}$$

Покажем, что $\varphi_{,i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ является ковариантным вектором. В самом деле, дифференцируя (4,I) по x^i, имеем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}^k} \cdot \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}$$

или

$$\varphi_{,i} = \bar{C}_i^k \, \bar{\varphi}_{,k} \tag{4,2}$$

Итак мы видим, что $\varphi_{,i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ называемая ковариантным градиентом скалярной функции φ, действительно преобразуется как ковариантный вектор.

Покажем теперь, что это единственный случай, когда в общей системе криволинейных координат частная производная от тензора является тензором.

Пусть A_i ковариантный вектор, т.е.

$$A_i(x) = \bar{C}_i^m \bar{A}_m(x) \tag{4,3}$$

Легко убедиться в том, что производная $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ <u>не является</u> тензором.

В самом деле, дифференцируя (4,3) по x^k и замечая, что

$$\bar{C}_i^m = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i}$$

получаем

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \bar{C}_i^m \bar{C}_k^n \frac{\partial \bar{A}_m}{\partial \bar{x}^n} + \frac{\partial^2 \bar{x}^m}{\partial x^i \partial x^k} \bar{A}_m \tag{4,4}$$

Наличие второго слагаемого в (4,4) как раз и указывает на нетензорный характер преобразования производной $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$

Покажем, что из $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ можно получить дважды ковариантный тензор, если добавить к нему некоторое слагаемое вида $-\Gamma_{ik}^m A_m$, где

$$\Gamma_{ik}^m = g^{mn} \Gamma_{n,ik} \tag{4,5}$$

$$\Gamma_{n,ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ni}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{nk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^n}\right) \tag{4,6}$$

Для этого выразим $\frac{\partial^2 \bar{x}^m}{\partial x^i \partial x^k}$ в соотношении (4,4) через $\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^\ell}$, g_{ik} и $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\ell}$.

Дифференцируя формулу преобразования метрического тензора

$$g_{ik} = \bar{C}_i^m \bar{C}_k^n \bar{g}_{mn} = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^k} \bar{g}_{mn}$$

по x^ℓ , получим систему линейных неоднородных уравнений относительно неизвестных $\frac{\partial^2 \bar{x}^n}{\partial x^u \partial x^v}$:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{e}} = \frac{\partial^2 \bar{x}^m}{\partial x^i \partial x^e} \bar{c}_k^n \bar{g}_{mn} + \bar{c}_i^m \frac{\partial^2 \bar{x}^n}{\partial x^k \partial x^e} \bar{g}_{mn} + \bar{c}_i^r \bar{c}_k^s \bar{c}_e^q \frac{\partial \bar{g}_{rs}}{\partial \bar{x}^q}. \quad (4,7)$$

Чтобы выразить вторые производные $\frac{\partial^2 \bar{x}^n}{\partial x^k \partial x^v}$ через первые $\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^k} = \bar{c}_k^n$ в явном виде, воспользуемся специальным видом системы (4,7) и осуществим циклическую перестановку индексов i, k, ℓ и r, s, q :

$$\frac{\partial g_{ei}}{\partial x^{k}} = \frac{\partial^2 \bar{x}^m}{\partial x^e \partial x^k} \bar{c}_i^n \bar{g}_{mn} + \bar{c}_e^m \frac{\partial^2 \bar{x}^n}{\partial x^i \partial x^k} \bar{g}_{mn} + \bar{c}_i^r \bar{c}_k^s \bar{c}_e^q \frac{\partial \bar{g}_{qr}}{\partial \bar{x}^s}, \quad (4,8)$$

$$\frac{\partial g_{ke}}{\partial x^{i}} = \frac{\partial^2 \bar{x}^m}{\partial x^k \partial x^i} \bar{c}_e^n \bar{g}_{mn} + \bar{c}_k^m \frac{\partial^2 \bar{x}^n}{\partial x^e \partial x^i} \bar{g}_{mn} + \bar{c}_i^r \bar{c}_k^s \bar{c}_e^q \frac{\partial \bar{g}_{sq}}{\partial \bar{x}^r}. \quad (4,9)$$

Если теперь из суммы (4,7) и (4,8) вычесть (4,9), то в результате получим:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^e} + \frac{\partial g_{ie}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ke}}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial^2 \bar{x}^n}{\partial x^k \partial x^e} \bar{g}_{nm} \bar{c}_i^m +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{g}_{rs}}{\partial \bar{x}^q} + \frac{\partial \bar{g}_{rq}}{\partial \bar{x}^s} - \frac{\partial \bar{g}_{sq}}{\partial \bar{x}^r}\right) \bar{c}_i^r \bar{c}_k^s \bar{c}_e^q. \quad (4,10)$$

Вводя обозначения (4,5) и (4,6) и умножая обе части равенства (4,I0) на

$$g^{in} \bar{c}_n^r = \bar{g}^{rn} \underline{c}_n^i$$

будем иметь
$$\frac{\partial^2 \bar{x}^r}{\partial x^k \partial x^e} = \Gamma_{ke}^u \bar{c}_u^r - \bar{\Gamma}_{sq}^r \bar{c}_k^s \bar{c}_e^q. \quad (4,11)$$

Подставляя (4,II) в (4,4) получаем окончательное выражение

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^n_{ik} A_n = \bar{C}^p_i \bar{C}^q_k \left(\frac{\partial \bar{A}_p}{\partial \bar{x}^q} - \bar{\Gamma}^r_{pq} \bar{A}_r \right). \qquad (4,12)$$

Итак, мы видим, что комбинация

$$A_{i,k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^n_{ik} A_n \qquad (4,13)$$

называемая ковариантной производной *) ковариантного вектора A_i действительно преобразуется как дважды ковариантный тензор. Трехиндексные -символы $\Gamma_{i,k\ell}$ и $\Gamma^i_{k\ell}$, определяемые равенствами (4,5) и (4,6) называются символами Кристоффеля [13] соответственно первого и второго рода**).

*) Ковариантная производная определена Риччи в работе "О ковариантном и контравариантном дифференцировании" (1888), в которой было введено и общее понятие тензора.

[13] Эльвин Бруно Кристоффель - немецкий геометр, родился в Монтуа (на Рейне) в 1829 г., умер в Страсбурге в 1900 г. Был профессором в Политехнической школе в Цюрихе, в Берлинской промышленной академии и в Страсбургском университете. Прямой ученик Дирихле, а в широком смысле - и Римана, он дал ряд замечательных исследований в области алгебраических и абелевых функций, уравнений в частных производных и диффенциальной геометрии.

**) Символы Кристоффеля для поверхностей трехмерного пространства были введены Кристоффелем в работе "О преобразовании однородных дифференциальных выражений второй степени" (1869). Сам Кристоффель обозначал величины Γ^ℓ_{ik} символами $\left\{ {ik \atop \ell} \right\}$, а величины $g_{i\ell}\Gamma^\ell_{mk}$ символами $\left[{mk \atop i} \right]$, которые поэтому назывались символами Кристоффеля, соответственно, первого и второго рода.

Процесс образования ковариантной производной называется ковариантным дифференцированием и обозначается с помощью запятой, поставленной перед новым индексом, возникшим в результате ковариантного дифференцирования. Общие свойства ковариантных производных мы рассмотрим ниже, а сейчас посмотрим, как выглядит ковариантная производная контравариантного вектора A^i .

Для этого возьмем произвольный ковариантный вектор X_i и построим скаляр

$$\varphi = A^i X_i$$

Образуем градиент $\varphi_{,k}$, который, как было показано выше, есть ковариантный вектор:

$$\varphi_{,k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(A^i X_i\right) = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} X_i + A^i \frac{\partial X_i}{\partial x^k} \qquad (4,14)$$

Но согласно (4,13)

$$\frac{\partial X_i}{\partial x^k} = X_{i,k} + \Gamma^n_{ik} X_n$$

Таким образом

$$\varphi_{,k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} X_i + A^i X_{i,k} + \Gamma^n_{ik} A^i X_n$$

или, переобозначая соответствующие немые индексы

$$\varphi_{,k} - A^m X_{m,k} = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{nk} A^n \right) X_i$$

но так как $\varphi_{,k}$, $A^m X_{m,k}$ и X_i - векторы,то комбинация

$$A^i_{,k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{nk} A^n \qquad (4,15)$$

называемая ковариантной производной контравариантного вектора является смешанным тензором, контравариантным по i и ковариантным по k .

Чтобы получить выражение для ковариантной производной произвольного тензора (например $T_{ik\cdot}^{\;\;\;\ell}$) нужно построить скаляр вида

$$\varphi = T_{ik\cdot}^{\;\;\;\ell} X^i y^k z_\ell$$

и повторить только что описанную процедуру.

Таким образом для ковариантных производных тензоров второго ранга получаем следующие выражения:

$$T_{ik,\ell} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x^\ell} - \Gamma^n_{i\ell} T_{nk} - \Gamma^n_{k\ell} T_{in} \qquad (4,16)$$

$$T^i_{\cdot k,\ell} = \frac{\partial T^i_{\cdot k}}{\partial x^\ell} + \Gamma^i_{n\ell} T^n_{\cdot k} - \Gamma^n_{k\ell} T^i_{\cdot n} \qquad (4,17)$$

$$T^{ik}_{\;\;,\ell} = \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^\ell} + \Gamma^i_{n\ell} T^{nk} + \Gamma^k_{n\ell} T^{in} \qquad (4,18)$$

Общая схема, по которой образуется ковариантная производная произвольного тензора имеет вид:

$$T^{**}_{**,\ell} = \frac{\partial T^{**}_{**}}{\partial x^\ell} + \Gamma^{*}_{n\ell} T^{n*}_{**} + \Gamma^{*}_{n\ell} T^{*n}_{**} -$$

$$- \Gamma^{n}_{*\ell} T^{**}_{n*} - \Gamma^{n}_{*\ell} T^{**}_{*n}. \qquad (4,19)$$

§ 2. Абсолютная производная.

Пусть вектор A_i является функцией параметра t. Покажем, что производная $\frac{dA_i}{dt}$ не является вектором. В самом деле,

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} u^k, \qquad (4,20)$$

где

$$u^k = \frac{dx^k}{dt}.$$

Но u^k - вектор, так как dx^k - вектор, а $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ не тензор, и следовательно $\frac{dA_i}{dt}$ не является вектором.

Чтобы построить производную по t обладающую векторным законом преобразования, выразим $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ с помощью(4,15) через ковариантную производную $A_{i,k}$. Получим

$$\frac{dA_i}{dt} = \left(A_{i,k} + \Gamma^{n}_{ik} A_n\right) u^k$$

или

$$\frac{dA_i}{dt} - \Gamma^{n}_{ik} A_n u^k = A_{i,k} u^k$$

Здесь $A_{i,k}$ - тензор, u^k- вектор, следовательно комбинация

$$\frac{\hat{d} A_i}{dt} = A_{i,k} u^k = \frac{dA_i}{dt} - \Gamma^n_{ik} A_n u^k \qquad (4,21)$$

называемая абсолютной производной ковариантного вектора,подчиняется векторному закону преобразования.

Общая схема, по которой ооразуется абсолютная производная произвольного тензора имеет вид

$$\frac{\hat{d} T_{(\dots)}}{dt} = T_{(\dots),k} u^k \qquad (4,22)$$

§ 3. Символы Кристоффеля.

Рассмотрим несколько важных свойств символов Кристоффеля, определяемых равенствами

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right) \qquad (4,6)$$

$$\Gamma^i_{kl} = g^{in} \Gamma_{n,kl} \qquad (4,5)$$

I. Символы Кристоффеля $\Gamma_{i,kl}$ и Γ^i_{kl} не являются тензорами.

Согласно (4,II) законы преобразования $\Gamma_{i,ke}$ и Γ^i_{ke} имеют вид:

$$\Gamma_{i,ke} = \bar{C}_i^m \bar{C}_k^n \bar{C}_e^q \bar{\Gamma}_{m,nq} + \frac{\partial^2 \bar{x}^p}{\partial x^k \partial x^e} \cdot \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x^i} \tag{4,23}$$

$$\Gamma^i_{ke} = \underline{C}^i_m \bar{C}_k^n \bar{C}_e^q \bar{\Gamma}^m_{nq} + \frac{\partial^2 \bar{x}^p}{\partial x^k \partial x^e} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \tag{4,24}$$

где
$$\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x^i} = \bar{g}_{pq} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^i}$$

2. Символы Кристоффеля $\Gamma_{i,ke}$ и Γ^i_{ke} симметричны относительно индексов k и ℓ :

$$\Gamma_{i,ke} = \Gamma_{i,ek},$$
$$\Gamma^i_{ke} = \Gamma^i_{ek}$$

3. Частная производная метрического тензора может быть явно выражена через $\Gamma_{i,ke}$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^e} = \Gamma_{i,ke} + \Gamma_{k,ie} \tag{4,25}$$

4. Свертки символов Кристоффеля с метрическим тензором могут быть записаны в виде следующих компактных выражений:

$$\Gamma^{i}_{mn} g^{mn} = -\frac{1}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial}{\partial x^n}\left(\sqrt{g_0}\, g^{in}\right) \qquad (4,26)$$

$$\Gamma_{i,mn} g^{mn} = -\frac{g_{im}}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial}{\partial x^n}\left(\sqrt{g_0}\, g^{in}\right) \qquad (4,27)$$

$$\Gamma_{m,ni}\, g^{mn} = \Gamma^{n}_{ni} = \frac{1}{\sqrt{g_0}} \cdot \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial x^i} \qquad (4,28)$$

Равенство (4,26) доказывается следующим образом: Имеем

$$\Gamma^{i}_{mn} g^{mn} = \frac{g^{ik}}{2}\left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k}\right) g^{mn}. \qquad (4,29)$$

Но так как

$$g^{ik} g_{km} = \delta^{i}_{m},$$

то

$$g^{ik} \frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} = -g_{km} \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^n}$$

и следовательно

$$g^{mn} \cdot \frac{g^{ik}}{2}\left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^m}\right) = -\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^k}.$$

Третье слагаемое в (4,29) преобразуем с помощью соотношения

$$g_0 g^{mn} = \frac{\partial g_0}{\partial g_{mn}} \qquad (4,30)$$

которое получается на основании (2,19) и (3,29).
Имеем:

$$g^{mn}\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k}=\frac{1}{g_0}\frac{\partial g_0}{\partial g_{mn}}\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k}=\frac{1}{g_0}\cdot\frac{\partial g_0}{\partial x^k}=\frac{2}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial\sqrt{g_0}}{\partial x^k}$$

откуда

$$\Gamma^i_{mn}g^{mn}=-\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^k}-\frac{g^{ik}}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial\sqrt{g_0}}{\partial x^k}=-\frac{1}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g_0}\,g^{ik}\right)$$

Что касается выражения (4,27), то оно получается из (4,26) простым опусканием индекса.

Переходим к доказательству равенства (4,28).
Имеем:

$$\Gamma^n_{ni}=\frac{g^{mn}}{2}\left(\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^n}-\frac{\partial g_{ni}}{\partial x^m}\right)=\frac{g^{mn}}{2}\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^i}$$

так как

$$g^{mn}\left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^n}-\frac{\partial g_{ni}}{\partial x^m}\right)=0.$$

Но выше было доказано, что

$$\frac{1}{2}g^{mn}\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^i}=\frac{1}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial\sqrt{g_0}}{\partial x^i}.$$

Таким образом получаем окончательно

$$\Gamma^n_{ni}=\frac{1}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial\sqrt{g_0}}{\partial x^i}. \qquad (4,28)$$

Итак, мы показали, как зная метрический тензор g_{ik} построить ковариантную производную. При этом оказалось, что для построения ковариантных производных тензоров любого ранга и строения достаточно иметь лишь символы Кристоффеля Γ^i_{kl}. В связи с этим возникает возможность рассмотрения пространств существенно новой природы, в которых нет понятия метрического тензора g_{ik}, а следовательно и расстояния, а вместо g_{ik} задано поле коэффициентов аффинной связности γ^i_{kl}, играющих при определении ковариантной производной ту же самую роль что и символы Кристоффеля Γ^i_{kl}. При этом символы γ^i_{kl}, вообще говоря, не предполагаются симметричными относительно индексов k и l и определяются как числа, преобразующиеся при переходе от одной системы координат к другой по закону (4,24).

Такие пространства, в которых задано поле γ^i_{kl} называются пространствами аффинной связности *) (L_n - с кручением, если тензор кручения $S^i_{kl} = \gamma^i_{kl} - \gamma^i_{lk} \neq 0$ и A_n -без кручения, если $S^i_{kl} = 0$).

§ 4. Общие свойства ковариантных производных.

Прежде всего заметим, что для ковариантных производных применимы те же правила, что и в обычном дифференциальном исчислении **):

---

*) Частный случай пространства аффинной связности, не являющегося римановым пространством, введен в связи с выдвинутой общей теорией относительности задачей построения единой теории электромагнитного и гравитационного поля немецким математиком Германом Вейлем в книге "Пространство,время,материя" (1918).Пространство аффинной связности общего вида было введено в связи с той же задачей французским математиком Эли Картаном (1869-1951) в работе "Пространства аффинной связности и обобщенная теория относительности" (1923).

**) Термин "дифференциал" (от латинского слова *differentia* - "разность") введен немецким математиком и философом Лейбницем (1646-1716), термин "производная" введен французским математиком и механиком Лагранжем (1736-1813).

I. Если *)

$$C_{(\dots)} = A_{(\dots)} + B_{(\dots)}$$

то

$$C_{(\dots),i} = A_{(\dots),i} + B_{(\dots),i} .$$

2. Если

$$C_{(\dots)} = A_{(\dots)} \cdot B_{(\dots)}$$

то

$$C_{(\dots),i} = A_{(\dots),i} B_{(\dots)} + A_{(\dots)} B_{(\dots),i}$$

Однако, в отличие от обычных производных ковариантные производные ко- и контравариантных метрических тензоров g_{ik} и g^{ik} тождественно равны нулю (теорема Риччи).

В самом деле

$$g_{ik,e} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^e} - \Gamma^n_{ie} g_{nk} - \Gamma^n_{ke} g_{in} =$$

$$= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^e} - \Gamma_{k,ie} - \Gamma_{i,ke} .$$

Но согласно (4,25)

$$\Gamma_{k,ie} + \Gamma_{i,ke} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^e} ,$$

следовательно

$$g_{ik,e} = 0 \qquad (4,31)$$

Чтобы доказать подобное равенство для тензора g^{km} , покажем, что ковариантная производная символа Кронекера перво-

---

*) См.сноску на стр.

го порядка тождественно равна нулю. В самом деле:

$$\delta^k_{i,l} = \frac{\partial \delta^k_i}{\partial x^l} + \Gamma^k_{nl}\,\delta^n_i - \Gamma^n_{il}\,\delta^k_n =$$

$$= \frac{\partial \delta^k_i}{\partial x^l} + \Gamma^k_{il} - \Gamma^k_{il} = \frac{\partial \delta^k_i}{\partial x^l} = 0.$$

Итак, ковариантная производная левой части равенства

$$g_{im}\,g^{km} = \delta^k_i$$

должна быть равной нулю. Следовательно

$$g_{im,l}\,g^{km} + g_{im}\,g^{km}{}_{,l} = g_{im}\,g^{km}{}_{,l} = 0,$$

откуда

$$g^{km}{}_{,l} = 0 \qquad (4,32)$$

Можно показать также, что ковариантная производная ко- и контравариантных тензоров Леви-Чивита тождественно равна нулю, т.е.

$$\varepsilon^{ik\ldots m}{}_{,l} = 0 \qquad (4,33)$$

и

$$\varepsilon_{ik\ldots m,l} = 0 \qquad (4,34)$$

§ 5. Тензоры, порожденные производными первого порядка.

Используя операцию ковариантного дифференцирования, рассмотрим следующие тензоры, полученные из ко- и контравариантных тензоров $T_{i\ldots ke}$ и $T^{i\ldots ke}$ ранга m :

$$\mathcal{G}_{\underbrace{i\ldots ep}_{m+1}} = T_{\underbrace{i\ldots e}_{m},p} \qquad (4,35)$$

$$\mathcal{D}^{\overbrace{i\ldots k}^{m-1}} = T^{\overbrace{i\ldots ke}^{m}}{}_{,e} \qquad (4,36)$$

$$\mathcal{G}_{\underbrace{p\ldots qr}_{m+1}} = \frac{1}{m!}\,\delta^{i\ldots ke}_{p\ldots qr}\, T_{\underbrace{i\ldots k}_{m},e} \qquad (4,37)$$

$$R^{\overbrace{u\ldots v}^{n-m-1}} = \frac{1}{m!}\,\varepsilon^{\overbrace{u\ldots v}^{n-m-1}\overbrace{i\ldots ke}^{m+1}}\, T_{\underbrace{i\ldots k}_{m},e} \qquad (4,38)$$

где $\varepsilon^{u\ldots vi\ldots ke}$ - контравариантный тензор Леви-Чивита (3,42).

I. Градиент скалярной функции.

Если в (4,35) вместо $T_{i\ldots e}$ взять скалярную функцию φ , то получим ковариантный вектор

$$\mathcal{G}_i = \varphi_{,i}$$

который называется градиентом скалярной функции φ .

Согласно (4,2) градиент $\varphi_{,i}$ просто равен частной производной, т.е.

$$\varphi_{,i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}. \qquad (4,39)$$

2. Дивергенция.

Если в (4,36) вместо $T^{i\dots kl}$ взять вектор A^i или антисимметрический тензор $A^{i\dots kl}$, то получим, соответственно, скаляр

$$\mathcal{D} = A^l{}_{,l}$$

и антисимметрический тензор

$$\mathcal{D}^{i\dots k} = A^{i\dots kl}{}_{,l}$$

которые называются дивергенцией вектора и дивергенцией антисимметрического тензора.

Покажем, что $A^{i\dots kl}{}_{,l}$ простым образом выражается через частные производные

$$A^{i\dots kl}{}_{,l} = \frac{1}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{g_0}\, A^{i\dots kl}\right). \qquad (4,40)$$

Действительно, по общему правилу (4,19) имеем:

$$A^{i\dots kl}{}_{,l} = \frac{\partial A^{i\dots kl}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{nl} A^{n\dots kl} + \dots + \Gamma^k_{nl} A^{i\dots nl} + \Gamma^l_{nl} A^{i\dots kn}.$$

Так как символы Кристоффеля Γ^{i}_{nl} симметричны по нижним индексам, то все слагаемые, содержащие Γ^{i}_{nl}, за исключением последнего, обращаются в нуль при свертывании с антисимметричным тензором $A^{n\dots kl}$. Таким образом

$$A^{i\dots kl}{}_{,l} = \frac{\partial A^{i\dots kl}}{\partial x^{l}} + \Gamma^{l}_{nl} A^{i\dots kn}$$

Но согласно (4,28)

$$\Gamma^{l}_{nl} = \frac{1}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial x^{n}};$$

следовательно

$$A^{i\dots kl}{}_{,l} = \frac{\partial A^{i\dots kl}}{\partial x^{l}} + \frac{1}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial x^{n}} A^{i\dots kn} = \frac{1}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial}{\partial x^{l}} (\sqrt{g_0} A^{i\dots kl})$$

3. Тензор Стокса - Пуанкаре.

Тензором Стокса [14]- Пуанкаре называется тензор, определяемый соотношением (4,37).

---

[14]. Джорж Габриель Стокс (1819-1903) - английский физик и математик, член Лондонского королевского общества. Труды Стокса охватывают различные вопросы оптики, гидродинамики и математической физики. Среди гидродинамических работ наибольшее значение имеют труды по теории движения вязкой жидкости (уравнение Навье-Стокса). Им сформулирован закон Стокса, определяющий силу сопротивления, испытываемую твердым шаром при движении в вязкой среде. Стокс был автором ряда крупных математических исследований. Именем Стокса названа единица кинематической вязкости.

Покажем, что

$$\mathcal{P}_{rp\ldots q} = \frac{1}{m!}\,\delta^{\,li\ldots k}_{\,rp\ldots q}\,\frac{\partial T_{i\ldots k}}{\partial x^{l}} \qquad (4,41)$$

имеем:

$$\delta^{\,li\ldots k}_{\,rp\ldots q}\,T_{i\ldots k,l} = \delta^{\,li\ldots k}_{\,rp\ldots q}\left(\frac{\partial T_{i\ldots k}}{\partial x^{l}} - \Gamma^{n}_{il}\,T_{n\ldots k} - \ldots - \Gamma^{n}_{kl}\,T_{i\ldots n}\right).$$

Но так как свертка антисимметричного символа Кронекера с симметричным символом Кристоффеля равна нулю, то

$$\delta^{\,li\ldots k}_{\,rp\ldots q}\,T_{i\ldots k,l} = \delta^{\,li\ldots k}_{\,rp\ldots q}\,\frac{\partial T_{i\ldots k}}{\partial x^{l}}$$

и следовательно имеет место (4,41).

Если вместо произвольного $T_{i\ldots k}$ взять антисимметричный тензор $A_{i\ldots k}$, то при $m = 2,3$ тензор Стокса - Пуанкаре имеет, соответственно, вид:

$$\mathcal{P}_{lik} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^{l}} + \frac{\partial A_{kl}}{\partial x^{i}} + \frac{\partial A_{li}}{\partial x^{k}}$$

$$\mathcal{P}_{mikl} = \frac{\partial A_{ikl}}{\partial x^{m}} - \frac{\partial A_{klm}}{\partial x^{i}} + \frac{\partial A_{lmi}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial A_{mik}}{\partial x^{l}}.$$

4. Ротор.

Если в (4,38) вместо $T_{\underbrace{i\ldots k}_{m}}$ взять антисимметричный тензор $A_{\underbrace{i\ldots k}_{n-2}}$ ранга $n-2$, то получим контравариантный вектор:

$$R^u = \frac{1}{(n-2)!}\,\mathcal{E}^{uei\ldots k} A_{i\ldots k,e} \qquad (4,42)$$

который называется ротором антисимметричного тензора $A_{i\ldots k}$ ранга $n-2$.

Легко показать, что

$$R^u = \frac{1}{(n-2)!}\,\frac{e^{uei\ldots k}}{\sqrt{g_0}}\,\frac{\partial A_{i\ldots k}}{\partial x^e} \qquad (4,43)$$

Ротор R^u связан с тензором Стокса - Пуанкаре ранга $n-1$ следующим образом:

$$R^u = \frac{1}{(n-1)!}\,\mathcal{E}^{uei\ldots k}\,\varphi_{\underbrace{ei\ldots k}_{n-1}} \qquad (4,44)$$

В самом деле, имеем:

$$R^u = \frac{1}{(n-1)!}\,\mathcal{E}^{uei\ldots k}\varphi_{ei\ldots k} = \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{e^{uei\ldots k}}{\sqrt{g_0}}\cdot\frac{1}{(n-2)!}\,\delta^{rp\ldots q}_{ei\ldots k} A_{\underbrace{p\ldots q}_{n-2},r}$$

Но

$$e^{uei\ldots k}\,\delta^{rp\ldots q}_{\underbrace{ei\ldots k}_{n-1}} = (n-1)!\,e^{urp\ldots q}$$

следовательно

$$R^u = \frac{1}{(n-2)!}\,\frac{e^{urp\ldots q}}{\sqrt{g_0}}\,A_{\underbrace{p\ldots q}_{n-2},r}$$

что и требовалось показать.

§ 6. Ковариантные производные второго порядка.

Рассмотрим вторую ковариантную производную скалярной функции φ и свернем её с метрическим тензором g^{ik}

$$\Delta\varphi = g^{ik}\,\varphi_{,ik} \qquad (4,45)$$

Полученный дифференциальный оператор второго порядка называется оператором Лапласа.

Покажем, что $\Delta\varphi$ может быть простым образом выражен через обычные производные. Имеем:

$$\Delta\varphi = g^{ik}(\varphi_{,i})_{,k} = g^{ik}\left(\frac{\partial\varphi_{,i}}{\partial x^k} - \Gamma^n_{ik}\,\varphi_{,n}\right).$$

Но согласно (4,26)

$$g^{ik}\,\Gamma^n_{ik} = -\frac{1}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\sqrt{g_0}\,g^{mn}\right)$$

и следовательно

$$\Delta\varphi = g^{ik}\frac{\partial\varphi_{,i}}{\partial x^k} + \frac{1}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g_0}\,g^{ik}\right)\varphi_{,i}$$

или

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g_0}\,g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right). \qquad (4,46)$$

Легко видеть, что вторая ковариантная производная скалярной функции не зависит от порядка дифференцирования, т.е.

$$\varphi_{,ik} = \varphi_{,ki}$$

Однако для тензора произвольного ранга это утверждение, вообще говоря, не имеет места, т.е.

$$A_{(\dots),ik} \neq A_{(\dots),ki}$$

В связи с этим имеет смысл говорить о симметрированной и альтернированной производных

$$A_{(\dots),(ik)} = \frac{1}{2}\left(A_{(\dots),ik} + A_{(\dots),ki}\right)$$

и

$$A_{(\dots),[ik]} = \frac{1}{2}\left(A_{(\dots),ik} - A_{(\dots),ki}\right)$$

Применяя дважды операцию ковариантного дифференцирования к произвольному ковариантному вектору A_i, получаем:

$$A_{i,mn} = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^m \partial x^n} - \left(\Gamma^k_{im}\delta^l_n + \Gamma^k_{in}\delta^l_m + \Gamma^l_{mn}\delta^k_i\right)\frac{\partial A_k}{\partial x^l} - \left(\frac{\partial \Gamma^k_{im}}{\partial x^n} - \Gamma^k_{ip}\Gamma^p_{mn} - \Gamma^k_{mp}\Gamma^p_{in}\right)A_k. \qquad (4{,}47)$$

или

$$A_{i,(mn)} = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^m \partial x^n} - \left(\Gamma^k_{im}\delta^l_n + \Gamma^k_{in}\delta^l_m + \Gamma^l_{mn}\delta^k_i\right)\frac{\partial A_k}{\partial x^l} + \left[\Gamma^k_{ip}\Gamma^p_{mn} + \frac{1}{2}\left(\Gamma^k_{mp}\Gamma^p_{in} + \Gamma^k_{np}\Gamma^p_{im}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^k_{im}}{\partial x^n} + \frac{\partial \Gamma^k_{in}}{\partial x^m}\right)\right]A_k \qquad (4{,}48)$$

и
$$A_{i,mn} - A_{i,nm} = \left(\frac{\partial \Gamma^k_{in}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^k_{im}}{\partial x^n} + \Gamma^k_{mp}\Gamma^p_{in} - \Gamma^k_{np}\Gamma^p_{im}\right)A_k. \qquad (4,49)$$

Итак, мы видим, что симметризованная производная $A_{i,(mn)}$ равна обычной производной второго порядка $\frac{\partial^2 A_i}{\partial x^m \partial x^n}$ дополненной членами пропорциональными первой производной $\frac{\partial A_k}{\partial x^e}$ и самому вектору A_k. При этом коэффициенты пропорциональности оказываются зависящими только от символов Кристоффеля Γ^k_{im} и их производных и обращаются в нуль в декартовой системе координат, где $\Gamma^k_{im} \equiv 0$.

Что же касается альтернированной производной $A_{i,[mn]}$ или разности $A_{i,mn} - A_{i,nm}$, то она оказывается пропорциональной только A_k. Легко сообразить, что коэффициент перед A_k является тензором (так как $A_{i,mn}$, $A_{i,nm}$ и A_k - тензоры) четвертого ранга. Этот тензор обращается в нуль в декартовой системе координат. Но поскольку он тензор, то он равен нулю в любой системе криволинейных координат, вводимой в эвклидовом пространстве. И только в римановом пространстве, где нельзя ввести декартову систему координат, разность $A_{i,mn} - A_{i,nm}$ оказывается отличной от нуля.

Если вместо ковариантного вектора A_i взять тензор произвольного ранга и строения A^{**}_{**}, то общая схема нахождения разности производных второго порядка имеет вид:

$$A^{**}_{**,mn} - A^{**}_{**,nm} = R^p{}_{*mn} A^{**}_{p*} + R^p{}_{*mn} A^{**}_{*p} + \dots$$
$$- R^*{}_{pmn} A^{p*}_{**} - R^*{}_{pmn} A^{*p}_{**} - \dots \qquad (4,50)$$

где $$R^{p}{}_{imn} = \frac{\partial \Gamma^{p}_{in}}{\partial x^{m}} - \frac{\partial \Gamma^{p}_{im}}{\partial x^{n}} + \Gamma^{p}_{mq}\Gamma^{q}_{in} - \Gamma^{p}_{nq}\Gamma^{q}_{im}.$$

Соотношение (4,50) было получено Риччи в 1901 году и называется "тождеством Риччи".

§ 7. Тензор кривизны.

Тензор четвертого ранга

$$R^{i}{}_{\cdot kmn} = \frac{\partial \Gamma^{i}_{kn}}{\partial x^{m}} - \frac{\partial \Gamma^{i}_{km}}{\partial x^{n}} + \Gamma^{i}_{mp}\Gamma^{p}_{kn} - \Gamma^{i}_{np}\Gamma^{p}_{km} \qquad (4,51)$$

возникающий при рассмотрении разности ковариантных производных второго порядка (4,50) называется тензором кривизны *) или

*) Тензор кривизны по существу был введен в работе Римана " О гипотезах, лежащих в основании геометрии" (1854) и вычислен им в "Ответе на вопрос, предложенный Парижской Академией"(1861), где показал, что необходимым и достаточным условием возможности приведения квадратичной формы $g_{ik}\,dx^i dx^k$ к сумме квадратов является обращение в нуль всех составляющих тензора R_{ikem}. Составляющие тензора кривизны были также получены Кристоффелем в работе "О преобразовании однородных дифференциальных выражений второй степени" (1869), вследствие чего тензор кривизны часто называют тензором Римана-Кристоффеля. Сам Риман обозначал тензор кривизны R_{ikmn} символом (ik,mn).

Тензорный закон преобразования R_{ikmn} и его свойства симметрии (4,56), (4,57) и (4,61) можно объединить в следующем едином утверждении: компоненты тензора кривизны являются коэффициентами квадратичной формы

$$\Omega_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{ikmn}[dx^i dx^k]_{\alpha\beta}[dx^m dx^n]_{\gamma\delta} = \frac{1}{4} R_{ikmn}\, d_{\alpha\beta}S^{ik}\, d_{\gamma\delta}S^{mn}$$

где $$d_{\alpha\beta}S^{ik} = 2!\,[dx^i dx^k]_{\alpha\beta} = \delta^{ik}_{uv}\, d_\alpha x^u d_\beta x^v.$$

тензором Римана - Кристоффеля и является важной характеристикой риманова пространства.

Наряду с тензором $R^{i}{}_{kmn}$ часто используется полностью ковариантный тензор кривизны

$$R_{ikmn} = g_{ip} R^{p}{}_{kmn} \qquad (4,52)$$

Найдем выражение для R_{ikmn} через символы Кристоффеля $\Gamma^{p}_{k\ell}$ и их производные. Имеем:

$$R_{ikmn} = g_{ip} \left(\frac{\partial \Gamma^{p}_{kn}}{\partial x^{m}} - \frac{\partial \Gamma^{p}_{km}}{\partial x^{n}} + \Gamma^{p}_{mq} \Gamma^{q}_{kn} - \Gamma^{p}_{nq} \Gamma^{q}_{km} \right). \qquad (4,53)$$

Используя очевидное равенство

$$g_{ip} \frac{\partial \Gamma^{p}_{kn}}{\partial x^{m}} = \frac{\partial}{\partial x^{m}} \left(g_{ip} \Gamma^{p}_{kn} \right) - \Gamma^{p}_{kn} \frac{\partial g_{ip}}{\partial x^{m}} =$$

$$= \frac{\partial \Gamma_{i,kn}}{\partial x^{m}} - \Gamma^{p}_{kn} \left(\Gamma_{i,pm} + \Gamma_{p,im} \right)$$

перепишем (4,53) в окончательном виде

$$R_{ikmn} = \frac{\partial \Gamma_{i,kn}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma_{i,km}}{\partial x^n} + \Gamma^p_{km}\Gamma_{p,in} - \Gamma^p_{kn}\Gamma_{p,im}. \qquad (4,54)$$

Рассмотрим некоторые свойства тензоров $R^i_{\cdot kmn}$ и R_{ikmn}.

I. Свойства симметрии.

а) Тензоры $R^i_{\cdot kmn}$ и R_{ikmn} антисимметричны относительно двух последних индексов, т.е.

$$R^i_{\cdot kmn} = - R^i_{\cdot knm} \qquad (4,55)$$

$$R_{ikmn} = - R_{iknm} \qquad (4,56)$$

эти свойства видны непосредственно из (4,5I) и (4,54).

в) Тензор R_{ikmn} антисимметричен относительно индексов первой пары, т.е.

$$R_{ikmn} = -R_{kimn} \qquad (4,57)$$

В самом деле, из (4,54) следует:

$$R_{ikmn} + R_{kimn} = \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\Gamma_{i,kn} + \Gamma_{k,in}\right) - \frac{\partial}{\partial x^n}\left(\Gamma_{i,km} + \Gamma_{k,im}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^n}\right) - \frac{\partial}{\partial x^n}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right) = 0$$

c) Тензор R_{ikmn} симметричен относительно перестановки первой и второй пары индексов, т.е.

$$R_{ikmn} = R_{mnik} \qquad (4,58)$$

Для доказательства соотношения (4,58) подставим в первые два слагаемые равенства (4,54) выражения для символов Кристоффеля через компоненты метрического тензора (4,6). Получим:

$$R_{ikmn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{in}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^n} - \frac{\partial^2 g_{kn}}{\partial x^i \partial x^m}\right) +$$

$$+ g^{pq}\left(\Gamma_{p,in}\Gamma_{q,km} - \Gamma_{p,im}\Gamma_{q,kn}\right). \qquad (4,59)$$

Используя полученное выражение легко убеждаемся в существовании свойства (4,58).

d) Циклическая симметрия тензоров $R^{i}{}_{kmn}$ и R_{ikmn}

$$R^{i}{}_{kmn} + R^{i}{}_{mnk} + R^{i}{}_{nkm} = 0 \qquad (4,60)$$

$$R_{ikmn} + R_{imnk} + R_{inkm} = 0 \qquad (4,61)$$

проверяется непосредственной подстановкой в (4,60) и (4,61) выражений (4,51) и (4,54).

2. Число независимых компонент тензора кривизны равно

$$\mathcal{N} = \frac{1}{12} n^2 (n^2-1) \qquad (4,62)$$

действительно, число компонент с двумя различными индексами вида R_{ikki} равно $\frac{1}{2} n(n-1)$, число компонент с тремя различными индексами вида: R_{ikie} R_{kike} и R_{eiek} равно $3 \cdot \frac{1}{3!} n(n-1)(n-2)$ число компонент с четырьмя различными индексами вида: R_{ikmn}, R_{imnk} ($R_{inkm} = - R_{ikmn} - R_{imnk}$) равно $2 \cdot \frac{1}{4!} n(n-1)(n-2)(n-3)$

Таким образом, полное число независимых компонент тензора кривизны равно

$$\mathcal{N} = \frac{n}{2}(n-1) + \frac{n}{2}(n-1)(n-2) + \frac{n}{12}(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

Так для двухмерной поверхности ($n=2$) тензор кривизны из $2^4=16$ компонент имеет одну ($N = 1$) независимую и выражается через скаляр K следующим образом:

$$R_{ikmn} = \mathcal{E}_{ik}\,\mathcal{E}_{mn}\,K.$$

для трехмерного пространства ($n=3$) тензор кривизны из 3^4 = 81 компоненты имеет шесть (N =6) независимых и выражается через симметрический тензор y^{pq}

$$R_{ikmn} = \mathcal{E}_{ikp}\,\mathcal{E}_{mnq}\,y^{pq}.$$

для четырехмерного пространства ($n=4$) тензор кривизны из 4^4 =256 компонент имеет двадцать (N =20) независимых.

3. Тождества Бианки.

Наряду с алгебраическими соотношениями (4,60) и (4,61) тензоры $R^i{}_{kmn}$ и R_{ikmn} удовлетворяют следующим дифференциальным соотношениям,которые называются тождествами Бианки:

$$R^i{}_{kmn,p} + R^i{}_{knp,m} + R^i{}_{kpm,n} = 0 \qquad (4,63)$$

$$R_{ikmn,p} + R_{iknp,m} + R_{ikpm,n} = 0 \qquad (4,64)$$

Для доказательства соотношения (4,63) воспользуемся тождеством Риччи

$$A_{i,mn} - A_{i,nm} = R^{l}{}_{imn} A_{l} \qquad (4,65)$$

Дифференцируя (4,65) ковариантным образом по x^{p} и осуществляя циклическую перестановку индексов m, n, p получим:

$$A_{i,mnp} - A_{i,nmp} = R^{l}{}_{imn,p} A_{l} + R^{l}{}_{imn} A_{l,p} \qquad (4,66)$$

$$A_{i,npm} - A_{i,pnm} = R^{l}{}_{inp,m} A_{l} + R^{l}{}_{inp} A_{l,m} \qquad (4,67)$$

$$A_{i,pmn} - A_{i,mpn} = R^{l}{}_{ipm,n} A_{l} + R^{l}{}_{ipm} A_{l,n} \qquad (4,68)$$

Сложим все три равенства (4,66), (4,67) и (4,68) и перегруппируем члены в левой части:

$$(A_{i,mnp} - A_{i,mpn}) + (A_{i,npm} - A_{i,nmp}) + (A_{i,pmn} - A_{i,pnm}) =$$

$$= (R^{l}{}_{imn,p} + R^{l}{}_{inp,m} + R^{l}{}_{ipm,n}) A_{l} +$$

$$+ R^{l}{}_{imn} A_{l,p} + R^{l}{}_{inp} A_{l,m} + R^{l}{}_{ipm} A_{l,n}. \qquad (4,69)$$

Рассматривая $A_{i,mnp}$ как вторую ковариантную производную $A_{i,m}$ по x^n и x^p, имеем согласно (4,50)

$$A_{i,mnp} - A_{i,mpn} = R^l{}_{inp} A_{l,m} + R^l{}_{mnp} A_{i,l} \qquad (4,70)$$

и аналогично

$$A_{i,npm} - A_{i,nmp} = R^l{}_{ipm} A_{l,n} + R^l{}_{npm} A_{i,l} \qquad (4,71)$$

$$A_{i,pmn} - A_{i,pnm} = R^l{}_{imn} A_{l,p} + R^l{}_{pmn} A_{i,l} \qquad (4,72)$$

Подставим (4,70)-(4,72) в (4,69). После сокращения соответствующих членов получим:

$$(R^l{}_{mnp} + R^l{}_{npm} + R^l{}_{pmn}) A_l = (R^l{}_{imn,p} + R^l{}_{inp,m} + R^l{}_{ipm,n}) A_l.$$

Но из-за циклической симметрии (4,60)

$$R^l{}_{mnp} + R^l{}_{npm} + R^l{}_{pmn} = 0$$

А поскольку A_l - произвольный вектор, то

$$R^l{}_{imn,p} + R^l{}_{inp,m} + R^l{}_{ipm,n} = 0$$

Второе тождество (4,64) доказывается совершенно аналогичным образом.

§ 8. Тензор Риччи.

В приложениях тензорного анализа к общей теории относительности очень важную роль играет симметричный тензор второго ранга, получаемый путем свертывания тензора кривизны $R^{i}{}_{kmn}$ по двум индексам: контравариантному и ковариантному, стоящему на последнем месте

$$R_{km} = R^{i}{}_{kmi} = g^{in} R_{ikmn} \tag{4,73}$$

или

$$R_{km} = \frac{\partial \Gamma^{p}_{kp}}{\partial x^{m}} - \frac{\partial \Gamma^{p}_{km}}{\partial x^{p}} + \Gamma^{p}_{kq} \Gamma^{q}_{mp} - \Gamma^{p}_{km} \Gamma^{q}_{pq}. \tag{4,74}$$

Тензор R_{km} называется тензором Риччи.

Рассмотрим некоторые его свойства.

1. Симметрия

$$R_{km} = R_{mk} \tag{4,75}$$

следует непосредственно из выражения (4,74), если воспользоваться равенством (4,28) и преобразовать первое слагаемое к виду

$$\frac{\partial \Gamma^{p}_{kp}}{\partial x^{m}} = \frac{\partial}{\partial x^{m}}\left(\frac{1}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial x^{k}}\right) = -\frac{1}{g_0} \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial x^{m}} \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial x^{m}} + \frac{1}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial^2 \sqrt{g_0}}{\partial x^{m} \partial x^{k}}.$$

2. Дивергенция.

Пусть $R^n_k = g^{nm} R_{mk}$ – смешанный тензор Риччи, а $R = R^n_n$ – скалярная риманова кривизна. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$R^n_{k,n} = \frac{1}{2} R_{,k} \tag{4,76}$$

В самом деле, согласно тождеству Бианки, имеем

$$R^{pn}{}_{mk,l} + R^{pn}{}_{kl,m} + R^{pn}{}_{lm,k} = 0, \tag{4,77}$$

где

$$R^{pn}{}_{mk} = g^{in} R^{p}{}_{imk}.$$

После свертки по двум индексам тождество (4,77) принимает вид

$$R^{pn}{}_{pn,l} + R^{pn}{}_{nl,p} + R^{pn}{}_{lp,n} = 0$$

или

$$R_{,l} - R^p_{l,p} - R^n_{l,n} = R_{,l} - 2R^p_{l,p} = 0.$$

3. Тензор Эйнштейна.

Из смешанного тензора Риччи R_k^m легко получить тензор $\mathcal{G}_k^m$, дивергенция которого тождественно равна нулю

$$\mathcal{G}^n_{k,n} = 0 \qquad (4,78)$$

Тензор $\mathcal{G}_k^m$ обладающий этим свойством называется тензором Эйнштейна и имеет вид:

$$\mathcal{G}_k^m = R_k^m - \frac{1}{2} R \delta_k^m + \Lambda \delta_k^m \qquad (4,79)$$

где Λ - произвольная константа, исторически введенная Эйнштейном при решении частной задачи о структуре вселенной и потому называемая "космологической".

Тензор Эйнштейна (4,79) может быть записан в ко- и контравариантном виде:

$$\mathcal{G}_{mk} = R_{mk} - \frac{1}{2} R g_{mk} + \Lambda g_{mk}$$

$$\mathcal{G}^{mk} = R^{mk} - \frac{1}{2} R g^{mk} + \Lambda g^{mk}.$$

Четыре уравнения (4,78) имеют глубокий физический смысл, связанный с законами сохранения энергии и импульса.

§ 9. Частные случаи римановых пространств.

I. Пространством Эйнштейна $\mathcal{Y}_n$ называется такое риманово пространство V_n, для которого тензор Риччи имеет вид:

$$R_{ik} = \frac{1}{n} R g_{ik} \qquad (4,80)$$

С помощью формулы (4,76) можно показать, что при $n \geqslant 3$ скалярная кривизна R пространства Эйнштейна должна быть постоянной; при $n=2$ любое V_2 является пространством Эйнштейна $\mathcal{Y}_2$.

2. Пространство постоянной кривизны.

Пространством постоянной кривизны S_n называется такое риманово пространство V_n, для которого тензор кривизны R_{ikmn} имеет вид:

$$R_{ikmn} = K\,(g_{im}g_{kn} - g_{in}g_{km}) \qquad (4,81)$$

Покажем, что пространство постоянной кривизны S_n является частным случаем пространства Эйнштейна $\mathcal{Y}_n$, для которого

$$R = K(1-n)n$$

В самом деле, имеем

$$R^{p}{}_{kmn} = K g^{pi}(g_{im}g_{kn} - g_{in}g_{km}) = K\,(\delta^{p}_{m} g_{kn} - \delta^{p}_{n} g_{km}),$$

откуда

$$R_{km} = K(1-n)g_{km}$$

Сравнивая полученное выражение с (4,80) находим, что

$$R = K(1-n)n \quad .$$

В частном случае $n=3$ можно показать, что если V_3 - пространство Эйнштейна, то оно является пространством постоянной кривизны.

3. Эвклидовы пространства.

Эвклидовым[15] пространством R_n называется такое риманово пространство V_n, для которого тензор кривизны R_{ikmn} тождественно равен нулю.

§ 10. Интегральные теоремы.

Рассмотрим n - мерное риманово пространство V_n с координатами x^i и в нем подпространство V_m размерности m.

Назовем элементом интегрирования в V_m, соответствующим элементарной ячейке с m упорядоченными реорами $d_\alpha x^i$ $(\alpha=1,2,\dots,m;\ i=1,2,\dots,n)$, внешнее произведение m дифференциалов

$$[dx^i dx^k \dots dx^\ell]_{\alpha\beta\dots\gamma} = \frac{1}{m!}\,\delta^{\mu\nu\dots\lambda}_{\alpha\beta\dots\gamma}\, d_\mu x^i d_\nu x^k \dots d_\lambda x^\ell .$$

Тогда каждому m - мерному подпространству V_m

---

[15]. Эвклид - древнегреческий математик, автор первого из дошедших до нас теоретических трактатов по математике. Его научная деятельность протекала в Александрии в начале III века до н.э. Как свидетельствует Папп Александрийский, Эвклид был человеком мягкого характера очень скромным и независимым. Главная работа Эвклида - "Начала" составила целую эпоху в развитии элементарной геометрии. В "Началах" Эвклида, состоящих из 13 книг, дан образец дедуктивного изложения геометрического материала на основе предпосланной системы аксиом.

может быть сопоставлено число *)

$$\int\limits_{(m)} \omega_{(\dots)} = \int\limits_{(m)} a_{(\dots)ik\dots e}\,[dx^i dx^k \dots dx^e]$$

где $a_{(\dots)ik\dots e}$ - известные функции координат.

Если подмножество V_m является m -мерной границей подмножества V_{m+1}, то при любых

$$\omega_{(\dots)} = a_{(\dots)ik\dots e}\,[dx^i dx^k \dots dx^e]$$

имеет место замечательное соотношение

$$\int\limits_{(m)} \omega_{(\dots)} = \int\limits_{(m+1)} d\omega_{(\dots)} \qquad (4,82)$$

Эта чрезвычайно компактная формула заключает в себе формулы Стокса, Гаусса-Остроградского, Грина и обобщает их на случай n -мерных римановых пространств.

Формула (4,82), называемая обобщенной теорией Стокса, приводится нами без доказательства. При желании с ним можно познакомиться, например, по книге

---

*) Термин "интеграл" (от латинского слова *integer* - "целый") введен швейцарским математиком Якобом Бернулли (1654-1705). Символ $\int$ был введен Лейбницем как стилизация первой буквы слова *summa* -"сумма" - первоначального названия интеграла. Современное обозначение определенного интеграла введено французским математиком Жозефом Фурье (1763-1830).

Переписывая соотношение (4,82) в развернутом виде, получим:

$$\int\limits_{(m)} a_{(\dots)i\dots \ell}\,[dx^i\dots dx^\ell] = \int\limits_{(m+1)} \frac{\partial a_{(\dots)i\dots \ell}}{\partial x^m}\,[dx^m dx^i\dots dx^\ell]. \quad (4,83)$$

Рассматривая строение подинтегральных выражений в формуле (4,83) нетрудно заметить, что слева под интегралом стоит тензор, справа – нет, поскольку частная производная тензора, вообще говоря, не есть тензор. Однако никакого противоречия в этом нет, так как интеграл по конечной области пространства от тензора, заданного в системе криволинейных координат, вовсе не обязан быть тензором. Другое дело, если тензор задан в декартовой системе координат. В этом случае, действительно, интеграл от тензора есть тензор.

Обобщенная формула Стокса (4,82) имеет простой и компактный вид благодаря тому, что в качестве элемента интегрирования взята внешняя дифференциальная форма $[dx^i\dots dx^\ell]$ наиболее адекватно выражающая интегральные свойства дифференцируемых многообразий. Однако на практике, из соображений наглядности, в качестве исходных элементов интегрирования берут так называемые ковариантные ($n-m$)- объемы $d\tau_{\underbrace{p\dots q}_{n-m}}$ которые являются тензорами, дуальными к внешним дифференциальным формам $[\underbrace{dx^i\dots dx^\ell}_{m}]$ по всем m индексам. При этом обобщенная формула Стокса теряет присущую ей изящную форму и приобретает более громоздкий вид, различный для тензоров различного ранга и строения.

Чтобы установить соответствие между соотношением (4,82), выражающим наиболее глубокие интегральные свойства подпространств V_m и V_{m+1} и различными интегральными теоремами, встречающимися при рассмотрении конкретных задач, приведем формулы, позволяющие переходить от внешних форм $[\underbrace{dx^i dx^k \dots dx^e}_{m}]$ к ковариантным $(n-m)$- объемам $d\tau_{\underbrace{p\dots q}_{n-m}}$ и обратно.

Согласно определению (стр.) тензора, дуального данному, имеем:

$$d\tau_{\underbrace{u\dots v}_{n-m}} = \frac{1}{m!} \mathcal{E}_{\underbrace{u\dots v}_{n-m}\underbrace{i\dots e}_{m}} [\underbrace{dx^i \dots dx^e}_{m}] \qquad (4,84)$$

Умножая обе части равенства (4,84) на $\mathcal{E}^{\overbrace{u\dots v}^{n-m}\overbrace{p\dots q}^{m}}$ и осуществляя свертку по $n-m$ индексам $u\dots v$ получаем:

$$\mathcal{E}^{u\dots v p\dots q} d\tau_{u\dots v} = \frac{(n-m)!}{m!} \delta^{p\dots q}_{i\dots e} [dx^i \dots dx^e]. \qquad (4,85)$$

Но так как внешняя форма $[dx^i \dots dx^e]$ антисимметрична по всем индексам, то на основании соотношения (I,17) переписываем (4,85) в виде

$$[\underbrace{dx^i \dots dx^e}_{m}] = \frac{1}{(n-m)!} \mathcal{E}^{\overbrace{u\dots v}^{n-m}\overbrace{i\dots e}^{m}} d\tau_{\underbrace{u\dots v}_{n-m}}. \qquad (4,86)$$

Итак, чтобы найти подинтегральное выражение $\phi^{(\dots)u\dots v}$ в правой части соотношения

$$\int\limits_{(m)} A^{(\dots)u\dots vr} d\tau_{\underbrace{u\dots vr}_{n-m}} = \int\limits_{(m+1)} \phi^{(\dots)u\dots v} d\tau_{\underbrace{u\dots v}_{n-m-1}}$$

выразим $d\tau_{\underbrace{u\dots vr}_{n-m}}$ через $[\underbrace{dx^i\dots dx^\ell}_{m}]$ и сведем левый интеграл к виду

$$\int\limits_{(m)} \omega_{(\dots)} = \int\limits_{(m)} a_{(\dots)i\dots\ell}\,[dx^i\dots dx^\ell]$$

затем, воспользовавшись формулой Стокса (4,82) приведем исходный интеграл к

$$\int d\omega_{(\dots)} = \int \frac{\partial a_{(\dots)i\dots\ell}}{\partial x^m}\,[dx^m dx^i\dots dx^\ell]$$

Наконец, выражая $[dx^m dx^i\dots dx^\ell]$ через $d\tau_{\underbrace{u\dots v}_{n-m-1}}$, приведем исходный интеграл к окончательному виду

$$\int \phi^{(\dots)u\dots v} d\tau_{u\dots v}$$

В главе У, посвященной прикладной стороне векторного анализа, мы проиллюстрируем описанную схему на примере целого ряда интегральных теорем.

§ II. Тензорный анализ в терминах линейной алгебры.

Так уже поминалось выше, в своем изложении тензорного анализа мы старались придерживаться чисто аналитической точки зрения, избегая каких-либо геометрических понятий, претендующих на наглядность. Однако, после получения основных соотношений аналитическим путем, представляется интересным получить те же соотношения в более или менее наглядных терминах линейной алгебры.

При этом мы будем предполагать известными понятия вектора, произвольного базиса $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ и скалярного произведения двух векторов.

Итак, рассмотрим вектор

$$d\vec{r} = dx^i \vec{a}_i$$

и его квадрат, равный квадрату расстояния между двумя соседними точками

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \vec{a}_i \vec{a}_k dx^i dx^k$$

Сравнивая полученное соотношение с квадратом расстояния между двумя точками, записанным с помощью метрического тензора

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k$$

получаем простое выражение для составляющих метрического тензора g_{ik} в виде скалярного произведения соответствующих базисных векторов:

$$g_{ik} = \vec{a}_i \vec{a}_k \qquad (4,87)$$

Введем новый базис $\vec{a}^1, \vec{a}^2, \dots, \vec{a}^n$ взаимный к базису $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, т.е. такой что

$$\vec{a}_i \vec{a}^k = \delta_i^k \qquad (4,88)$$

Обозначая искомые координаты вектора $\vec{a}^k$ относительно первоначального базиса $\vec{a}_\ell$ через $g^{k\ell}$ будем иметь:

$$\vec{a}^k = g^{k\ell} \vec{a}_\ell \qquad (4,89)$$

Подставляя (4,89) в (4,88) получим

$$g^{k\ell} g_{i\ell} = \delta_i^k \qquad (4,90)$$

С другой стороны, умножая обе части равенства (4,89) на $\vec{a}^{i}$, находим

$$\vec{a}^{i}\vec{a}^{k} = g^{ik} \tag{4,91}$$

Рассмотрим теперь произвольный вектор $\vec{A}$, имеющий компоненты A^{i}, в базисе $\vec{a}_{i}$:

$$\vec{A} = A^{i}\vec{a}_{i} \tag{4,92}$$

и образуем производную

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^{k}} = \frac{\partial A^{i}}{\partial x^{k}}\vec{a}_{i} + A^{i}\frac{\partial \vec{a}_{i}}{\partial x^{k}}. \tag{4,93}$$

Вектор $\frac{\partial \vec{a}_{i}}{\partial x^{k}}$ может быть разложен по векторам первоначального базиса $\vec{a}_{e}$. Обозначая его координаты, называемые коэффициентами аффинной связности, через γ^{e}_{ik}, получим:

$$\frac{\partial \vec{a}_{i}}{\partial x^{k}} = \gamma^{e}_{ik}\vec{a}_{e} \tag{4,94}$$

Умножая обе части равенства (4,94) на $\vec{a}^{m}$, находим:

$$\gamma^{e}_{ik} = \frac{\partial \vec{a}_{i}}{\partial x^{k}}\vec{a}^{e} \tag{4,95}$$

Точно так же определяем координаты $\gamma_{e,ik}$ вектора $\frac{\partial \vec{a}_{i}}{\partial x^{k}}$ относительно взаимного базиса $\vec{a}^{e}$

$$\frac{\partial \vec{a}_i}{\partial x^k} = \gamma_{e,ik}\, \vec{a}^e \qquad (4,96)$$

или

$$\gamma_{e,ik} = \frac{\partial \vec{a}_i}{\partial x^k}\, \vec{a}_e \qquad (4,97)$$

Рассмотрим теперь разность

$$\frac{\partial \vec{a}_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \vec{a}_k}{\partial x^i} = S_{e,ik}\, \vec{a}^e \qquad (4,98)$$

где

$$S_{e,ik} = \gamma_{e,ik} - \gamma_{e,ki} \qquad (4,99)$$

- антисимметрическая часть объекта $\gamma_{e,ik}$ и постараемся выразить симметрическую часть объекта $\gamma_{e,ik}$ через производные от $g_{ik} = \vec{a}_i \vec{a}_k$:

$$\gamma_{e,ik} + \gamma_{e,ki} = \vec{a}_e \frac{\partial \vec{a}_i}{\partial x^k} + \vec{a}_e \frac{\partial \vec{a}_k}{\partial x^i} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k}(\vec{a}_e \vec{a}_i) + \frac{\partial}{\partial x^i}(\vec{a}_e \vec{a}_k) - \vec{a}_i \frac{\partial \vec{a}_e}{\partial x^k} - \vec{a}_k \frac{\partial \vec{a}_e}{\partial x^i}.$$

Воспользовавшись соотношением (4,98), получим

$$\gamma_{e,ik} + \gamma_{e,ki} = \frac{\partial g_{ei}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ek}}{\partial x^i} - \vec{a}_i \frac{\partial \vec{a}_k}{\partial x^e} - \vec{a}_k \frac{\partial \vec{a}_i}{\partial x^e} -$$

$$- S_{m,ek}\, \vec{a}^m \vec{a}_i - S_{m,ei}\, \vec{a}^m \vec{a}_k$$

или

$$\gamma_{e,ik} + \gamma_{e,ki} = \frac{\partial g_{ei}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ek}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^e} - S_{i,ek} - S_{k,ei}. \qquad (4,100)$$

Складывая (4,99) и (4,100) находим окончательное выражение для коэффициентов аффинной связности:

$$\gamma_{e,ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ei}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ek}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^e}\right) + \frac{1}{2}\left(S_{i,ke} + S_{k,ie} + S_{e,ik}\right)$$

или

$$\gamma_{e,ik} = \Gamma_{e,ik} + \frac{1}{2}\left(S_{i,ke} + S_{k,ie} + S_{e,ik}\right) \qquad (4,101)$$

где

$$\Gamma_{e,ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ei}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ek}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^e}\right)$$

– символ Кристоффеля,

$S_{e,ik}$ – заданный произвольные антисимметрический по i и k тензор, называемый тензором кручения.

Итак, вообще говоря

$$\frac{\partial \vec{a}_i}{\partial x^k}\vec{a}_e = \Gamma_{e,ik} + \frac{1}{2}\left(S_{i,ke} + S_{k,ie} + S_{e,ik}\right) \qquad (4,102)$$

Если $S_{e,ik} \neq 0$, то многообразие, задаваемое координатами x^i, называется римановым пространством с кручением;

если же $S_{e,ik} = 0$, то многообразие называется римановым пространством без кручения.

Как правило, в физике рассматриваются римановы пространства без кручения и потому мы везде будем полагать $S_{e,ik} = 0$ и считать $\gamma_{e,ik} = \Gamma_{e,ik}$

Таким образом, для римановых пространств без кручения имеют место следующие простые выражения для символов Кристоффеля $\Gamma_{\ell,ik}$ и Γ^{ℓ}_{ik} в виде скалярных произведений векторов $\vec{a}_\ell$ или $\vec{a}^{\,\ell}$ и $\frac{\partial \vec{a}_i}{\partial x^k}$

$$\Gamma_{\ell,ik} = \vec{a}_\ell \frac{\partial \vec{a}_i}{\partial x^k} \tag{4,103}$$

$$\Gamma^{\ell}_{ik} = \vec{a}^{\,\ell} \frac{\partial \vec{a}_i}{\partial x^k} \tag{4,104}$$

Возвращаясь к равенству (4,93) и подставляя в него выражение (4,94), получим:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^k} = A^{\ell}_{,k}\, \vec{a}_\ell \tag{4,105}$$

где

$$A^{\ell}_{,k} = \frac{\partial A^{\ell}}{\partial x^k} + \gamma^{\ell}_{ik} A^i \tag{4,106}$$

ковариантная производная контравариантного вектора A^{ℓ} ; при отсутствии кручения

$$A^{\ell}_{,k} = \frac{\partial A^{\ell}}{\partial x^k} + \Gamma^{\ell}_{ik} A^i \tag{4,107}$$

Воспользовавшись соотношением (4,104) легко найти закон преобразования Γ^{ℓ}_{ik} при переходе от одной системы координат к другой. Имеем

$$\vec{a}^{\,\ell} = \underline{c}^{\ell}_{m}\, \underline{\vec{a}}^{\,m}$$

$$\vec{a}_{i} = \bar{c}^{p}_{i}\, \underline{\vec{a}}_{p}$$

Следовательно

$$\Gamma^{\ell}_{ik} = \vec{a}^{\,\ell} \frac{\partial \vec{a}_{i}}{\partial x^{k}} = \underline{c}^{\ell}_{m}\, \underline{\vec{a}}^{\,m} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{r}} (\bar{c}^{p}_{i}\, \underline{\vec{a}}_{p})\, \bar{c}^{r}_{k} =$$

$$= \underline{c}^{\ell}_{m}\, \bar{c}^{p}_{i}\, \bar{c}^{r}_{k}\, \underline{\vec{a}}^{\,m} \frac{\partial \underline{\vec{a}}_{p}}{\partial \bar{x}^{r}} + \underline{c}^{\ell}_{p}\, \bar{c}^{r}_{k} \frac{\partial \bar{c}^{p}_{i}}{\partial \bar{x}^{r}}$$

Но так как

$$\frac{\partial \bar{c}^{p}_{i}}{\partial \bar{x}^{r}} = \frac{\partial \bar{c}^{p}_{i}}{\partial x^{m}}\, \underline{c}^{m}_{r},$$

то

$$\Gamma^{\ell}_{ik} = \underline{c}^{\ell}_{m}\, \bar{c}^{p}_{i}\, \bar{c}^{r}_{k}\, \bar{\Gamma}^{m}_{pr} + \bar{c}^{p}_{ik}\, \underline{c}^{\ell}_{p} \qquad (4,108)$$

где

$$\bar{c}^{p}_{ik} = \frac{\partial \bar{c}^{p}_{i}}{\partial x^{k}} = \frac{\partial^{2} \bar{x}^{p}}{\partial x^{i} \partial x^{k}}$$

Рассмотрим теперь разность вторых производных базисного вектора $\vec{a}_\ell$.

Ооозначая составляющие этой разности относительно оазиса $\vec{a}_m$ через $R^m{}_{\ell i k}$, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \vec{a}_\ell}{\partial x^k}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \vec{a}_\ell}{\partial x^i}\right) = R^m{}_{\ell i k}\, \vec{a}_m \qquad (4,109)$$

покажем, что $R^m{}_{\ell i k}$ есть ни что иное как тензор кривизны.

В самом деле

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \vec{a}_\ell}{\partial x^k}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \vec{a}_\ell}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\gamma^m_{\ell k}\, \vec{a}_m\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\gamma^m_{\ell i}\, \vec{a}_m\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial \gamma^m_{\ell k}}{\partial x^i} - \frac{\partial \gamma^m_{\ell i}}{\partial x^k}\right)\vec{a}_m + \gamma^p_{\ell k}\,\frac{\partial \vec{a}_p}{\partial x^i} - \gamma^p_{\ell i}\,\frac{\partial \vec{a}_p}{\partial x^k} =$$

$$= \left(\frac{\partial \gamma^m_{\ell k}}{\partial x^i} - \frac{\partial \gamma^m_{\ell i}}{\partial x^k} + \gamma^p_{\ell k}\,\gamma^m_{p i} - \gamma^p_{\ell i}\,\gamma^m_{p k}\right)\vec{a}_m .$$

Сравнивая полученное выражение с определением (4,109), получаем:

$$R^m{}_{\ell i k} = \frac{\partial \gamma^m_{\ell k}}{\partial x^i} - \frac{\partial \gamma^m_{\ell i}}{\partial x^k} + \gamma^p_{\ell k}\,\gamma^m_{p i} - \gamma^p_{\ell i}\,\gamma^m_{p k} . \qquad (4,110)$$

При отсутсвии кручения $\gamma^m_{ek} = \Gamma^m_{ek}$ и выражение (4,110) совпадает с общеупотребительным определением тензора кривизны (4,51).

Итак, результаты данного параграфа сводятся к следующему:

1. Метрический тензор g_{ik} равен составляющим вектора $\vec{a}_i$ относительно базиса $\vec{a}^k$:

$$\vec{a}_i = g_{ik}\vec{a}^k,$$

а контравариантный тензор g^{ik} равен составляющим вектора $\vec{a}^i$ относительно базиса $\vec{a}_k$:

$$\vec{a}^i = g^{ik}\vec{a}_k.$$

2. Тензоры кручения S^l_{ik} и $S_{l,ik}$ равны составляющим вектора $\frac{\partial \vec{a}_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \vec{a}_k}{\partial x^i}$ относительно базиса $\vec{a}_l$ и $\vec{a}^l$ соответственно:

$$\frac{\partial \vec{a}_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \vec{a}_k}{\partial x^i} = S^l_{ik}\vec{a}_l = S_{l,ik}\vec{a}^l.$$

3. Коэффициенты аффинной связности γ^l_{ik} и $\gamma_{l,ik}$ а при отсутствии кручения символы Кристоффеля Γ^l_{ik} и $\Gamma_{l,ik}$ равны составляющим вектора $\frac{\partial \vec{a}_i}{\partial x^k}$ относительно базиса $\vec{a}_l$ и $\vec{a}^l$ соответственно:

$$\frac{\partial \vec{a}_i}{\partial x^k} = \gamma^l_{ik}\vec{a}_l = \gamma_{l,ik}\vec{a}^l \qquad \text{при } S^l_{ik} \neq 0$$

$$\frac{\partial \vec{a}_i}{\partial x^k} = \Gamma^l_{ik}\,\vec{a}_l = \Gamma_{l,ik}\,\vec{a}^l \qquad \text{при} \quad S^l_{ik} = 0$$

4. Тензоры кривизны $R^l{}_{mik}$ и R_{lmik} равны составляющим вектора

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \vec{a}_m}{\partial x^k}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \vec{a}_m}{\partial x^i}\right)$$

относительно базиса $\vec{a}_l$ и $\vec{a}^l$ соответственно

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \vec{a}_m}{\partial x^k}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \vec{a}_m}{\partial x^i}\right) = R^l{}_{mik}\,\vec{a}_l = R_{lmik}\,\vec{a}^l.$$

ГЛАВА У.

Векторный анализ в трехмерном эвклидовом пространстве

Difficile est proprie communia dicere; tuque
Rectius Iliacum carmen deducis in actus,
Quam si proferres ignota indictaque primus. *)

Квинт Гораций Флакк

§ I. Векторная алгебра в терминах тензорного исчисления.

Что такое вектор ? Ответ на этот вопрос представляет известные затруднения. Существуют разные подходы к определению вектора.

С точки зрения элементарной геометрии вектором называется всякая величина, которой может быть поставлен в соответствие отрезок, имеющий определенную длину и направление **).

---

*) - Если будем понимать слова Горация, как понял их английский поэт (Байрон - Ю.К.), то мы согласимся с его мнением: трудно хорошо выразить общеизвестные вещи. - А.С.Пушкин, "Об Альфреде Мюссе" .

**) Подчеркнем, что все понятия, приведенные в данной главе не претендуют на какую-либо строгость и выражают лишь наглядно-интуитивную точку зрения, присущую традиционному изложению.

Беря за основу наглядный образ направленного отрезка, определяются следующие операции, осуществляемые над векторами:

1. Сложение

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

2. Умножение на число

$$\lambda \vec{a} = \vec{b}$$

3. Скалярное произведение

$$\vec{a}\vec{b} = \alpha$$

4. Векторное произведение *)

$$[\vec{a}\vec{b}] = \vec{c}$$

Используя соответствующие свойства введенных операций, можно доказать ряд тождеств, составляющих набор основных теорем векторной алгебры

---

*) Векторное произведение было определено Гамильтоном как векторная часть кватернионного произведения. Векторное произведение было определено также Грассманом под названием "внешнего произведения двух векторов"; Грассман обозначал это произведение как $[\vec{a}\,\vec{b}]$, это же обозначение применял Хевисайд. Гиббс обозначал векторное произведение как $\vec{a} \times \vec{b}$ и называл его "косым произведением" (в противоположность "прямому", т.е. скалярному).

$$\vec a[\vec b\vec c] = \vec b[\vec c\vec a] = \vec c[\vec a\vec b] \qquad (5,1)$$

$$[\vec a[\vec b\vec c]] = \vec b(\vec a\vec c) - \vec c(\vec a\vec b) \qquad (5,2)$$

$$[\vec a[\vec b\vec c]] + [\vec b[\vec c\vec a]] + [\vec c[\vec a\vec b]] = 0 \qquad (5,3)$$

$$[\vec a\vec b][\vec c\vec d] = \begin{vmatrix} (\vec a\vec c) & (\vec a\vec d) \\ (\vec b\vec c) & (\vec b\vec d) \end{vmatrix} \qquad (5,4)$$

$$[\vec a\vec b]^2 = a^2 b^2 - (\vec a\vec b)^2 \qquad (5,5)$$

$$\vec a(\vec b[\vec c\vec d]) - \vec b(\vec c[\vec d\vec a]) + \vec c(\vec d[\vec a\vec b]) - \vec d(\vec a[\vec b\vec c]) = 0 \qquad (5,6)$$

$$(\vec a[\vec b\vec c])\cdot(\vec f[\vec g\vec h]) = \begin{vmatrix} (\vec a\vec f) & (\vec a\vec g) & (\vec a\vec h) \\ (\vec b\vec f) & (\vec b\vec g) & (\vec b\vec h) \\ (\vec c\vec f) & (\vec c\vec g) & (\vec c\vec h) \end{vmatrix} \qquad (5,7)$$

$$(\vec a[\vec b\vec c])^2 = \begin{vmatrix} a^2 & (\vec a\vec b) & (\vec a\vec c) \\ (\vec b\vec a) & b^2 & (\vec b\vec c) \\ (\vec c\vec a) & (\vec c\vec b) & c^2 \end{vmatrix} \qquad (5,8)$$

Эти тождества могут быть легко получены, если рассматривать вектор $\vec a$ как тензор первого порядка, определенный в декартовой системе координат.

Поскольку в декартовой системе координат матрический тензор имеет вид:

$$g_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

то не имеет смысла различать ко- и контравариантные индексы. Поэтому на протяжении этой главы мы будем писать все индексы, в том числе и немые, внизу.

Итак, рассматривая вектор $\vec{a}$ как тензор первого ранга a_i легко установить соответствие между скалярным и векторным произведением с одной стороны и известными свертками с другой

$$\vec{a}\vec{b} = a_i b_i \tag{5,9}$$

$$[\vec{a}\vec{b}]_i = e_{ike} a_k b_e \tag{5,10}$$

Используя эти соотношения, тождества (5,I)-(5,8) доказываются безо всякого труда, почти автоматически.

(5,I). Циркулярная симметрия тройного произведения следует из очевидных равенств:

$$\vec{a}[\vec{b}\vec{c}] = a_i[\vec{b}\vec{c}]_i = e_{ike} a_i b_k c_e = e_{kei} b_k c_e a_i =$$

$$= e_{eik} c_e a_i b_k = \vec{b}[\vec{c}\vec{a}] = \vec{c}[\vec{a}\vec{b}].$$

(5,2). Двойное векторное произведение раскрывается автоматически:

$$[\vec a[\vec b\vec c]]_i = e_{ike}\, a_k [\vec b\vec c]_e = e_{ike}\, e_{emn}\, a_k b_m c_n =$$

$$= (\delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km})\, a_k b_m c_n = a_k b_i c_k - a_k b_k c_i =$$

$$= b_i(\vec a\vec c) - c_i(\vec a\vec b).$$

(5,3). Это тождество, известное под названием тождества Якоби и заменяющее собой свойство ассоциативности в алгебре Ли, доказывается непосредственной подстановкой равенства (5,2):

$$[\vec a[\vec b\vec c]]_i + [\vec b[\vec c\vec a]]_i + [\vec c[\vec a\vec b]]_i =$$

$$= a_k b_i c_k - a_k b_k c_i + a_k b_k c_i - a_i b_k c_k + a_i b_k c_k - a_k b_i c_k = 0.$$

(5,4). Это тождество называется тождеством Лагранжа. Его доказательство очевидно:

$$[\vec a\vec b][\vec c\vec d] = [\vec a\vec b]_i[\vec c\vec d]_i = e_{ike}\, e_{imn}\, a_k b_e c_m d_n =$$

$$= (\delta_{km}\delta_{en} - \delta_{kn}\delta_{em})\, a_k b_e c_m d_n = a_k b_n c_k d_n - a_k b_n c_n d_k =$$

$$= (\vec a\vec c)(\vec b\vec d) - (\vec a\vec d)(\vec b\vec c).$$

(5,5). Это тождество, выражающее квадрат векторного произведения через определитель Грама второго порядка, является частным случаем $(\vec{c}=\vec{a};\ \vec{d}=\vec{b})$ тождества (5,4).

(5,6). Это тождество представляет собой разложение произвольного вектора $\vec{d}$ по трем произвольным направлениям, задаваемым тремя некомпланарными $(\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]\neq 0)$ векторами $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

Имеем:

$$X_s = a_s(\vec{b}[\vec{c}\vec{d}]) - b_s(\vec{c}[\vec{d}\vec{a}]) + c_s(\vec{d}[\vec{a}\vec{b}]) - d_s(\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]) =$$

$$= e_{ike}(a_s b_i c_k d_e - b_s c_i d_k a_e + c_s d_i a_k b_e - d_s a_i b_k c_e).$$

Замечая, что $a_s = a_m \delta_{ms}$ и циклически переобозначая индексы i, k, e получаем

$$X_s = a_m b_i c_k d_e (e_{ike}\delta_{ms} - e_{kem}\delta_{is} + e_{emi}\delta_{ks} - e_{mik}\delta_{es}).$$

но согласно (I,9)

$$e_{ike}\delta_{ms} - e_{kem}\delta_{is} + e_{emi}\delta_{ks} - e_{mik}\delta_{es} = 0$$

Следовательно $X_s \equiv 0$.

(5,7). Для доказательства этого тождества воспользуемся соотношением (1,7), выражающим обобщенные символы Кронекера третьего порядка через δ_i^k. Имеем:

$$(\vec a[\vec b\vec c])(\vec f[\vec g\vec h]) = e_{ikl}\, e_{pqr}\, a_i b_k c_l f_p g_q h_r =$$

$$= (\delta_{ip}\delta_{kq}\delta_{lr} - \delta_{ip}\delta_{lq}\delta_{kr} - \delta_{kp}\delta_{iq}\delta_{lr} + \delta_{kp}\delta_{lq}\delta_{ir} +$$

$$+ \delta_{lp}\delta_{iq}\delta_{kr} - \delta_{lp}\delta_{kq}\delta_{ir})\, a_i b_k c_l f_p g_q h_r =$$

$$= (\vec a\vec f)(\vec b\vec g)(\vec c\vec h) + (\vec a\vec g)(\vec b\vec h)(\vec c\vec f) + (\vec a\vec h)(\vec b\vec f)(\vec c\vec g) -$$

$$- (\vec a\vec h)(\vec b\vec f)(\vec c\vec g) - (\vec a\vec f)(\vec b\vec h)(\vec c\vec g) - (\vec a\vec g)(\vec b\vec f)(\vec c\vec h).$$

(5,8). Это тождество выражает квадрат тройного произведения через определитель Грама (2,37) и является частным случаем тождества (5,7).

§ 2. Векторный анализ в терминах тензорного исчисления.

Основная задача векторного анализа, как известно, состоит в получении новых величин, обладающих ковариантными свойствами, т.е. преобразующихся как скаляр или вектор, из заданных скалярных или векторных функций путем операции дифференцирования.

Существуют следующие четыре дифференциальные операции первого порядка, обладающие указанными выше свойствами:

I. Градиент скалярной функции φ -

$$\operatorname{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \qquad (5,9)$$

2. Производная *) векторной функции $\vec{a}$ по направлению вектора $\vec{c}$

$$(\vec{c}\operatorname{grad})\vec{a} = (\vec{c}\,\vec{\nabla})\vec{a} = \vec{i}\left(c_x\frac{\partial a_x}{\partial x} + c_y\frac{\partial a_x}{\partial y} + c_z\frac{\partial a_x}{\partial z}\right) +$$

$$+\vec{j}\left(c_x\frac{\partial a_y}{\partial x} + c_y\frac{\partial a_y}{\partial y} + c_z\frac{\partial a_y}{\partial z}\right) +$$

$$+\vec{k}\left(c_x\frac{\partial a_z}{\partial x} + c_y\frac{\partial a_x}{\partial y} + c_z\frac{\partial a_z}{\partial z}\right). \qquad (5,10)$$

---

*) Градиент скалярной функции $\operatorname{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi$ дивергенция $\operatorname{div}\vec{a} = (\vec{\nabla}\vec{a})$, ротор $\operatorname{rot}\vec{a} = [\vec{\nabla}\vec{a}]$ и символ набла $\vec{\nabla}$ были определены Гамильтоном в "Лекциях о кватериионах" (1853). Производная векторной функции по заданному направлению была определена Гиббсом в "Элементах векторного анализа" (1884).

Термин "набла" (*nabla*) для символа $\vec{\nabla}$ происходит от библейского названия музыкального инструмента типа арфы, имеющего треугольную форму - "небел". Слово "градиент" происходит от латинского слова *gradiens* -"шагающий" и появился впервые в метеорологии для обозначения направления максимального изменения температуры воздуха, атмосферного давления и т.д."дивергенция" и "ротор" происходящие от латинских слов *divergo* - "расхожусь" и *roto* -"вращаю" объясняются тем, что необращение в нуль дивергенции или ротора силового поля указывает на наличие, соответственно, источников или стоков силовых линий или их замкнутости. Что касается вектора (5,10), то до сих пор не выработан общепринятый термин для его обозначения.

3. Дивергенция векторной функции $\vec{a}$

$$div\,\vec{a} = (\vec{\nabla}\vec{a}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \qquad (5,11)$$

4. Ротор векторной функции $\vec{a}$

$$rot\,\vec{a} = [\vec{\nabla}\vec{a}] =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right). \qquad (5,12)$$

Применяя эти операции к произведениям скалярных и векторных функций, получаем:

$$grad\,(\varphi\psi) = \varphi\,grad\,\psi + \psi\,grad\,\varphi; \qquad (5,13)$$

$$grad\,(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{a}\,grad)\,\vec{b} + (\vec{b}\,grad)\,\vec{a} +$$
$$+ [\vec{a}\,rot\,\vec{b}] + [\vec{b}\,rot\,\vec{a}]; \qquad (5,14)$$

$$(\vec{c}\,grad)(\varphi\vec{a}) = \varphi(\vec{c}\,grad)\,\vec{a} + \vec{a}\,(\vec{c}\,grad\,\varphi); \qquad (5,15)$$

$$(\vec{c}\,grad)[\vec{a}\vec{b}] = [\vec{a}\cdot(\vec{c}\,grad)\,\vec{b}] - [\vec{b}\cdot(\vec{c}\,grad)\,\vec{a}]; \qquad (5,16)$$

$$div\,(\varphi\vec{a}) = \varphi\,div\,\vec{a} + \vec{a}\,grad\,\varphi; \qquad (5,17)$$

$$div\,[\vec{a}\vec{b}] = \vec{b}\,rot\,\vec{a} - \vec{a}\,rot\,\vec{b}; \qquad (5,18)$$

$$rot\,(\varphi\vec{a}) = \varphi\,rot\,\vec{a} - [\vec{a}\,grad\,\varphi]; \qquad (5,19)$$

$$\mathrm{rot}\,[\vec{a}\,\vec{b}] = \vec{a}\,\mathrm{div}\,\vec{b} - \vec{b}\,\mathrm{div}\,\vec{a} +$$

$$+ (\vec{b}\,\mathrm{grad})\,\vec{a} - (\vec{a}\,\mathrm{grad})\,\vec{b}. \qquad (5{,}20)$$

Рассматривая вектор $\vec{a}$ как тензор первого ранга a_i заменим введенные выше дифференциальные операторы соответствующими свертками содержащими оператор $\frac{\partial}{\partial x^i}$:

$$\mathrm{grad}_i\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \qquad (5{,}21)$$

$$(\vec{c}\,\mathrm{grad})\,a_i = c_k \frac{\partial a_i}{\partial x^k} \qquad (5{,}22)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \frac{\partial a_k}{\partial x^k} \qquad (5{,}23)$$

$$\mathrm{rot}_i\,\vec{a} = e_{ike} \frac{\partial a_e}{\partial x^k} \qquad (5{,}24)$$

Кроме того оказывается полезным еще одно выражение

$$e_{ike}\,\mathrm{rot}_e\,\vec{a} = \frac{\partial a_k}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^k} \qquad (5{,}25)$$

Используя эти соотношения, тождества (5,13)-(5,20) доказываются безо всякого труда:

$$(5,13).\quad grad_i\,(\varphi\psi) = \frac{\partial}{\partial x^i}(\varphi\psi) = \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x^i} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} =$$

$$= \varphi\, grad_i\,\psi + \psi\, grad_i\,\varphi\,;$$

$$(5,14)\quad grad_i\,(\vec{a}\vec{b}) = \frac{\partial}{\partial x^i}(a_\kappa b_\kappa) = a_\kappa\frac{\partial b_\kappa}{\partial x^i} + b_\kappa\frac{\partial a_\kappa}{\partial x^i} =$$

$$= a_\kappa\frac{\partial b_i}{\partial x^\kappa} + a_\kappa e_{i\kappa e}\, rot_e\,\vec{b} + b_\kappa\frac{\partial a_i}{\partial x^\kappa} + b_\kappa e_{i\kappa e}\, rot_e\,\vec{a} =$$

$$= (\vec{a}\, grad)\, b_i + (\vec{b}\, grad)\, a_i + [\vec{a}\, rot\,\vec{b}]_i + [\vec{b}\, rot\,\vec{a}]_i\,;$$

$$(5,15).\quad (\vec{c}\, grad)(\varphi a_i) = c_\kappa\frac{\partial}{\partial x^\kappa}(\varphi a_i) = c_\kappa\frac{\partial\varphi}{\partial x_\kappa}a_i + c_\kappa\varphi\frac{\partial a_i}{\partial x^\kappa} =$$

$$= a_i\,(\vec{c}\, grad\,\varphi) + \varphi\,(\vec{c}\, grad)\, a_i\,,$$

$$(5,16).\quad (\vec{c}\, grad)\,[\vec{a}\vec{b}]_i = c_\kappa\frac{\partial}{\partial x^\kappa}(e_{imn}a_m b_n) = e_{imn}c_\kappa a_m\frac{\partial b_n}{\partial x_\kappa} +$$

$$+ e_{imn}c_\kappa b_n\frac{\partial a_m}{\partial x_\kappa} = [\vec{a}\;(\vec{c}\, grad)\,\vec{b}]_i - [\vec{b}\cdot(\vec{c}\, grad)\,\vec{a}]_i\,;$$

$$(5,17).\quad div\,(\varphi\vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x_\kappa}(\varphi a_\kappa) = \varphi\frac{\partial a_\kappa}{\partial x_\kappa} + a_\kappa\frac{\partial\varphi}{\partial x_\kappa} =$$

$$= \varphi\, div\,\vec{a} + \vec{a}\, grad\,\varphi\,;$$

$$(5,18).\quad div\,[\vec{a}\vec{b}] = \frac{\partial}{\partial x_\kappa}(e_{\kappa mn}a_m b_n) = e_{\kappa mn}\frac{\partial a_m}{\partial x_\kappa}b_n +$$

$$+ e_{kmn}\frac{\partial b_n}{\partial x_k}a_m = \vec{b}\,\mathrm{rot}\,\vec{a} - \vec{a}\,\mathrm{rot}\,\vec{b};$$

$$(5,19).\quad \mathrm{rot}_i(\varphi\vec{a}) = e_{ike}\frac{\partial}{\partial x_k}(\varphi a_e) = e_{ike}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}a_e + e_{ike}\varphi\frac{\partial a_e}{\partial x_k} =$$

$$= \varphi\,\mathrm{rot}_i\vec{a} - [\vec{a}\,\mathrm{grad}\,\varphi]_i;$$

$$(5,20).\quad \mathrm{rot}_i[\vec{a}\vec{b}] = e_{ike}\frac{\partial}{\partial x_k}[\vec{a}\vec{b}]_e = e_{ike}\frac{\partial}{\partial x_k}(e_{emn}a_m b_n) =$$

$$= (\delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km})\left(\frac{\partial a_m}{\partial x_k}b_n + a_m\frac{\partial b_n}{\partial x_k}\right) =$$

$$= \frac{\partial a_i}{\partial x_k}b_k - \frac{\partial a_k}{\partial x_k}b_i + a_i\frac{\partial b_k}{\partial x_k} - a_k\frac{\partial b_i}{\partial x_k} =$$

$$= (\vec{b}\,\mathrm{grad})a_i - (\vec{a}\,\mathrm{grad})b_i + a_i\,\mathrm{div}\,\vec{b} - b_i\,\mathrm{div}\,\vec{a}.$$

§ 3. Интегральные теоремы.

Применим теперь общие результаты, полученные в § 10, гл. IУ к векторам трехмерного эвклидова пространства.

Обычно при записи интегральных выражений в традиционном векторном анализе в качестве элементов интегрирования используются

dl_i – декартовы составляющие элемента длины дуги кривой,

ds_i – декартовы составляющие элемента площади поверхности и

dV – элемент объема.

Чтобы воспользоваться обобщенной формулой Стокса (4,82) необходимо выразить $d\ell_i$, dS_i и dV через внешние формы Картана $[dx_i]$, $[dx_i dx_k]$ и $[dx_i dx_k dx_l]$. Оказывается, что декартовы составляющие элемента длины $d\ell_i$ просто равны $[dx_i]$, а dS_i и dV являются ковариантными объемами $d\tau_i$ и $d\tau$.

Итак

$$d\ell_i = [dx_i] \tag{5,26}$$

и согласно (4,84) и (4,86) *)

$$dS_i = d\tau_i = \frac{1}{2!} e_{ikl} [dx_k dx_l] \tag{5,27}$$

$$dV = d\tau = \frac{1}{3!} e_{ikl} [dx_i dx_k dx_l] \tag{5,28}$$

и обратно

$$[dx_i dx_k] = e_{lik} dS_l \tag{5,29}$$

$$[dx_i dx_k dx_l] = e_{\cdots} dV \tag{5,30}$$

Используя соотношения (5,26),(5,27) и (5,29) нетрудно доказать следующие интегральные теоремы, устанавливающие связь между интегралами по замкнутому контуру L и интегралами по поверхности S, опирающейся на этот контур:

---

*) В декартовой системе координат $g_0 = 1$ и поэтому в формулах (4,84) и (4,86) мы можем заменить ε_{ikl} на e_{ikl}

$$\oint\limits_L \varphi\, d\vec{\ell} = \int\limits_S [d\vec{S}\, \mathrm{grad}\,\varphi]; \tag{5,31}$$

$$\oint\limits_L \vec{a}\, d\vec{\ell} = \int\limits_S \mathrm{rot}\,\vec{a}\, d\vec{S}; \tag{5,32}$$

$$\oint\limits_L \vec{a}\,(\vec{b}\, d\vec{\ell}) = \int\limits_S \vec{a}\,(\mathrm{rot}\,\vec{b}\cdot d\vec{S}) + ([\vec{b}\, d\vec{S}]\cdot \mathrm{grad})\vec{a}; \tag{5,33}$$

$$\oint\limits_L [\vec{a}\, d\vec{\ell}] = \int\limits_S \mathrm{div}\,\vec{a}\cdot d\vec{S} - (d\vec{S}\cdot \mathrm{grad})\vec{a} + [\mathrm{rot}\,\vec{a}\cdot d\vec{S}]; \tag{5,34}$$

В самом деле, имеем:

(5,31). $$\oint\limits_L \varphi\, d\ell_i = \oint\limits_L \varphi\,[dx_i] = \int\limits_S \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}[dx_k\, dx_i] =$$

$$= \int\limits_S \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} e_{\ell k i}\, dS_\ell = \int\limits_S [d\vec{S}\, \mathrm{grad}\,\varphi]_i \ ;$$

(5,32). $$\oint\limits_L a_i\, d\ell_i = \oint\limits_L a_i\,[dx_i] = \int\limits_S \frac{\partial a_i}{\partial x_k}[dx_k\, dx_i] =$$

$$= \int\limits_S \frac{\partial a_i}{\partial x_k} e_{\ell k i}\, dS_\ell = \int\limits_S \mathrm{rot}_\ell\, \vec{a}\cdot dS_\ell \ ;$$

(5,33). $$\oint\limits_L a_i\, b_k\, d\ell_k = \oint\limits_L a_i\, b_k\,[dx_k] = \int\limits_S \left(a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_m} + \frac{\partial a_i}{\partial x_m} b_k\right)[dx_m\, dx_k]$$

$$= \int_S a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_m} e_{mkl}\, dS_l + \frac{\partial a_i}{\partial x_m} b_k e_{mkl}\, dS_l =$$

$$= \int a_i \, \mathrm{rot}_l \vec{b}\, dS_l + [\vec{b}\, d\vec{S}]_m \frac{\partial a_i}{\partial x_m} \quad ;$$

$$(5,34). \quad \oint [\vec{a}\, d\vec{l}]_i = \oint e_{ikl}\, a_k\, [dx_l] = \int e_{ikl} \frac{\partial a_k}{\partial x_m} [dx_m dx_l] =$$

$$= \int e_{ikl}\, e_{pml} \frac{\partial a_k}{\partial x_m} dS_p = \int (\delta_{ip}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kp}) \frac{\partial a_k}{\partial x_m} dS_p =$$

$$= \int \frac{\partial a_m}{\partial x_m} dS_i - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} dS_k = \int \frac{\partial a_m}{\partial x_m} dS_i - \frac{\partial a_i}{\partial x_k} dS_k -$$

$$- \int e_{ikl}\, \mathrm{rot}_l \vec{a}\, dS_k = \int \mathrm{div}\, \vec{a}\, dS_i - (d\vec{S}\, \mathrm{grad})\vec{a} + [\mathrm{rot}\, \vec{a} \cdot d\vec{S}]_i .$$

Точно так же используя соотношения (5,27) – (5,30) доказываем интегральные теоремы, устанавливающие связь между интегралами по замкнутой поверхности S и интегралами по объему V, заключенному внутри этой поверхности:

$$\oint_S \varphi\, d\vec{S} = \int_V \mathrm{grad}\, \varphi\, dV \qquad (5,35)$$

$$\oint_S \vec{a}\, d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{a}\, dV \qquad (5,36)$$

$$\oint_S \vec{a}\,(\vec{b}\, d\vec{S}) = \int_V \vec{a} \operatorname{div} \vec{b}\, dV + \int_V (\vec{b}\, \operatorname{grad})\, \vec{a}\, dV \qquad (5,37)$$

$$\oint_S [\vec{a}\, d\vec{S}] = -\int_V \operatorname{rot} \vec{a}\, dV \qquad (5,38)$$

Действительно, имеем:

(5,35). $$\oint_S \varphi\, dS_i = \frac{1}{2!} \oint_S \varphi\, e_{ikl} [dx_k dx_l] = \frac{1}{2!} \int_V e_{ikl} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} [dx_m dx_k dx_l] =$$

$$= \frac{1}{2!} \int_V e_{ikl}\, e_{mkl} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}\, dV = \int_V \delta_{im} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}\, dV = \int_V \operatorname{grad}_i \varphi\, dV;$$

(5,36). $$\oint_S a_i\, dS_i = \frac{1}{2!} \oint_S a_i\, e_{ikl} [dx_k dx_l] = \frac{1}{2!} \int_V e_{ikl} \frac{\partial a_i}{\partial x_m} [dx_m dx_k dx_l] =$$

$$= \int_V \delta_{im} \frac{\partial a_i}{\partial x_m}\, dV = \int_V \operatorname{div} \vec{a}\, dV;$$

(5,37). $$\oint_S a_i\, b_k\, dS_k = \frac{1}{2!} \oint_S a_i\, b_k\, e_{kmn} [dx_m dx_n] =$$

$$= \frac{1}{2!} \int_V e_{kmn} \frac{\partial}{\partial x_l} (a_i b_k) [dx_l dx_m dx_n] = \int_V \delta_{kl} \Big(a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_l} +$$

$$+ \frac{\partial a_i}{\partial x_l} b_k \Big)\, dV = \int_V a_i \operatorname{div} \vec{b}\, dV + \int_V (\vec{b}\, \operatorname{grad})\, a_i\, dV$$

$$(5,38).\quad \oint_S [\vec{a}\,d\vec{S}]_i = \oint_S e_{ikl}\, a_k\, dS_l = \frac{1}{2!}\oint_S e_{ikl}\, a_k\, e_{lmn}[dx_m dx_n] =$$

$$= \frac{1}{2!}\int_V e_{ikl}\, e_{lmn} \frac{\partial a_k}{\partial x_p}[dx_p dx_m dx_n] = \frac{1}{2!}\int_V e_{ikl}\, e_{lmn}\, e_{pmn}\frac{\partial a_k}{\partial x_p} dV =$$

$$= \int_V e_{ikp}\frac{\partial a_k}{\partial x_p} dV = -\int_V \mathrm{rot}_i\, \vec{a}\, dV.$$

Отметим,что соотношение (5,32) называется теоремой Стокса (в узком смысле), а (5,36) - теоремой Гаусса [16] - Остроградского [17] .

---

[16] . Карл Фридрих Гаусс (1777-1855), названный современниками королем математиков, родился в Брауншвейге (Германия) в семье водопроводчика. Когда Гауссу исполнилось три года он обнаружил свои удивительные математические способности.Свою вычислительную технику, где он был непревзойденным виртуозом, он совершенствовал всю жизнь. После обнаружения малой планеты Цереры, предвычисленной Гауссом, он стал считаться величайшим математиком мира и получил почетное звание Геттингенского колосса. Гаусс вошел в историю математики и как один из создателей неэвклидовой геометрии. Однако боязнь быть непонятым и осмеянным со стороны невежественных людей помешала ему обработать свои идеи по неэвклидовой геометрии и опубликовать их. Трудно указать такую область чистой и прикладной математики,в которую бы Гаусс не внес существенного вклада. Гаусс является также создателем абсолютной системы электромагнитных единиц.

[17]. Михаил Васильевич Остроградский (1801-1861) русский математик, действительный член Петербургской академии наук. Остроградский был признанным научным авторитетом в области математики и механики. Им написан ряд работ по теории чисел, математическому анализу,алгебре, теории верятностей. Остроградский по праву считается центром всей математической деятельности в России того времени.

Если в формуле (5,36) взять в качестве $\vec{a}$ вектор $\psi\, grad\, \varphi$, то получим:

$$\oint \psi\, grad\, \varphi\, d\vec{S} = \int (\psi \Delta \varphi + grad\, \varphi \cdot grad\, \psi)\, dV, \qquad (5,39)$$

где

$$\Delta \varphi = div\, grad\, \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Формула (5,39), переписанная в симметричном виде

$$\oint (\psi\, grad\, \varphi - \varphi\, grad\, \psi)\, d\vec{S} = \int (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi)\, dV \qquad (5,40)$$

называется формулой Грина [18]

§ 4. Криволинейная система координат в трехмерном эвклидовом пространстве.

В некоторых задачах удобнее определять положение точки в пространстве не тремя декартовыми координатами *) x, y, z, а тремя новыми числами q^1, q^2, q^3, называемыми криволинейными координатами точки.

---

*) Термин "координата" (от латинских слов cum - "с" и ordinata - " упорядоченная") был введен немецким математиком и философом Готтфридом Вильгельмом Лейбницем (1646-1716).

[18] . Джорж Грин (1793-1841) - английский математик-самоучка. Лишь в сорокалетнем возрасте Грин поступил в Кембриджский университет, который окончил в 1838 году. В 1828 году Грин опубликовал книгу "Опыт применения математического анализа к теориям электричества и магнетизма". В ней он впервые ввел в науку понятие и термин потенциал и развил теорию электромагнетизма. Книга Грина, вышедшая незначительным тиражом, оставалась неизвестной до её переиздания (1845) даже в самой Англии. За это время другие ученые успели получить некоторые результаты, совпадающие с результатами Грина.

При этом предполагается, что декартовы и криволинейные координаты связаны друг с другом системой трех произвольных, достаточное число раз дифференцируемых функций, якобиан которой отличен от нуля:

$$q^i = q^i(x, y, z) \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (5,41)$$

Поскольку якобиан системы (5,41) отличен от нуля, она может быть разрешена относительно декартовых[19] координат

$$x = x(q^1, q^2, q^3)$$
$$y = y(q^1, q^2, q^3) \qquad (5,42)$$
$$z = z(q^1, q^2, q^3)$$

Согласно совершенно общим соотношениям (3,9) и (3,10) частные производные вида $\dfrac{\partial q^i}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial x}{\partial q^i}$

---

[19] .Рене Декарт - выдающийся французский философ, физик, математик, физиолог. Родился в 1596 году в местечке Лаэ (департамент Турень) в дворянской семье. С 1629 по 1649 г. прожил в Голландии. Умер в 1650 году в Стакгольме. Математические исследования Декарта тесно связаны с его философскими и физическими работами. В "Геометрии" (1637) Декарт впервые ввел понятие переменной величины и функции, что составило его основную заслугу в математике.

"Поворотным пунктом в математике-писал Энгельс - была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика и благодаря этому же стало немедленно необходимо дифференциальное и интегральное исчисление, которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено Ньютоном и Лейбницем".

удовлетворяют следующим восемнадцати тождествам:

$$\frac{\partial x}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial x}=1; \qquad \frac{\partial x}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial y}=0; \qquad \frac{\partial x}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial z}=0;$$

$$\frac{\partial y}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial x}=0; \qquad \frac{\partial y}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial y}=1; \qquad \frac{\partial y}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial z}=0; \qquad (5,43)$$

$$\frac{\partial z}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial x}=0; \qquad \frac{\partial z}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial y}=0; \qquad \frac{\partial z}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial z}=1;$$

и

$$\frac{\partial x}{\partial q^i}\frac{\partial q^k}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial q^i}\frac{\partial q^k}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial q^i}\frac{\partial q^k}{\partial z}=\delta_i^k. \qquad (5,44)$$

В декартовой системе координат квадрат расстояния между двумя точками имеет наиболее простой вид

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2 \qquad (5,45)$$

Подставляя в (5,45) дифференциалы системы (5,42) будем иметь

$$ds^2=\left(\frac{\partial x}{\partial q^i}\frac{\partial x}{\partial q^k}+\frac{\partial y}{\partial q^i}\frac{\partial y}{\partial q^k}+\frac{\partial z}{\partial q^i}\frac{\partial z}{\partial q^k}\right)dq^i dq^k.$$

Таким образом для метрического тензора g_{ik} имеем следующее выражение

$$g_{ik}=\frac{\partial x}{\partial q^i}\frac{\partial x}{\partial q^k}+\frac{\partial y}{\partial q^i}\frac{\partial y}{\partial q^k}+\frac{\partial z}{\partial q^i}\frac{\partial z}{\partial q^k}. \qquad (5,46)$$

Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы направленные по осям декартовой системы координат. Определим базисные векторы $\vec{a}_i$ в криволинейной системе координат следующим равенством:

$$d\vec{r} = \vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz = \vec{a}_i\,dq^i \qquad (5,47)$$

Из (5,47) следует,что

$$\vec{a}_i = \vec{i}\frac{\partial x}{\partial q^i} + \vec{j}\frac{\partial y}{\partial q^i} + \vec{k}\frac{\partial z}{\partial q^i} \qquad (5,48)$$

и обратно

$$\vec{i} = \vec{a}_i \frac{\partial q^i}{\partial x},$$

$$\vec{j} = \vec{a}_i \frac{\partial q^i}{\partial y}$$

$$\vec{k} = \vec{a}_i \frac{\partial q^i}{\partial z}.$$

Легко видеть,что

$$g_{ik} = \vec{a}_i \vec{a}_k \qquad (5,49)$$

Введем новый базис $\vec{a}^k$, взаимный к $\vec{a}_i$ такой что

$$\vec{a}^k \vec{a}_i = \delta_i^k \qquad (5,50)$$

Используя соотношение (5,44) нетрудно убедиться в том, что векторами $\vec{a}^k$, удовлетворяющими равенству (5,50), являются

$$\vec{a}^k = \vec{i}\,\frac{\partial q^k}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial q^k}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial q^k}{\partial z} \qquad (5,51)$$

Аналогично формуле (5,49) имеет место равенство

$$g^{ik} = \vec{a}^i \vec{a}^k \qquad (5,52)$$

Рассмотрим теперь произвольный вектор $\vec{A}$ разложенный тремя различными способами

$$\vec{A} = \vec{i} A_x + \vec{j} A_y + \vec{z} A_z = \vec{a}_k A^k = \vec{a}^k A_k. \qquad (5,53)$$

Компоненты A_x, A_y, A_z называются декартовыми, а A_k и A^k - ко - и контравариантными компанентами вектора $\vec{A}$.

Базисные векторы $\vec{a}_k$ и $\vec{a}^k$ не являются, вообще говоря, единичными. Поэтому, довольно часто вместо $\vec{a}_k$ и $\vec{a}^k$ рассматривают единичные векторы

$$\vec{e}_{(k)} = \frac{\vec{a}_k}{\sqrt{\vec{a}_k^2}} = \frac{\vec{a}_k}{\sqrt{g_{kk}}} \qquad (5,54)$$

$$\vec{e}^{(k)} = \frac{\vec{a}^k}{\sqrt{\vec{a}^{k2}}} = \frac{\vec{a}^k}{\sqrt{g^{kk}}} \qquad (5,55)$$

Если разложить теперь произвольный вектор $\vec{A}$ по единичным векторам $\vec{e}_{(k)}$ или $\vec{e}^{(k)}$

$$\vec{A} = \vec{e}_{(k)} A^{(k)} = \vec{e}^{(k)} A_{(k)} , \qquad (5,56)$$

то системы чисел $A^{(k)}$ и $A_{(k)}$ будут называться натуральными или физическими компонентами вектора $\vec{A}$. Связь физических компонент $A^{(k)}$ и $A_{(k)}$ с контра- и ковариантными компaнентами вектора $\vec{A}$ находится без труда

$$A^{(k)} = \sqrt{g_{kk}}\, A^{k} \qquad (5,57)$$

$$A_{(k)} = \sqrt{g^{kk}}\, A_{k} \qquad (5,58)$$

(суммирования по k нет!).

Физические компоненты $A^{(k)}$ и $A_{(k)}$ имеют наглядный смысл параллельных проекций вектора $\vec{A}$ на оси, задаваемые векторами $\vec{a}_k$ и $\vec{a}^k$ соответственно. Однако, из-за наличия множителей $\sqrt{g_{kk}}$ и $\sqrt{g^{kk}}$ они не подчиняются векторному закону преобразования (3, 14) или (3, 13) и, таким образом, не являются тензором. В связи с этим все вычисления почти всегда производятся с ко- или контравариантными компонентами A_k или A^k и только в конце, если нужно, делается пересчет на физические компоненты $A_{(k)}$ или $A^{(k)}$.

§ 5. Ортогональная система координат.

Криволинейная система координат называется ортогональной, если взаимно ортогональны базисные векторы $\vec{a}_i$, т.е.

$$\vec{a}_i \vec{a}_k = \begin{cases} g_{ii} & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

Таким образом, в ортогональной системе координат квадрат длины дуги ds между двумя близкими точками имеет вид

$$ds^2 = g_{11}(dq^1)^2 + g_{22}(dq^2)^2 + g_{33}(dq^3)^2 =$$

$$= (h_1 dq^1)^2 + (h_2 dq^2)^2 + (h_3 dq^3)^2. \qquad (5,59)$$

Величины

$$h_k = \sqrt{g_{kk}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q^k}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q^k}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q^k}\right)^2} \qquad (5,60)$$

называются параметрами Ламе [20].

В ортогональной системе координат

$$g^{kk} = \frac{1}{g_{kk}} = \frac{1}{h_k^2} \qquad (5,61)$$

$$g_0 = g_{11} g_{22} g_{33} = h_1^2 h_2^2 h_3^2 \qquad (5,62)$$

$$\vec{a}^k = \frac{1}{h_k^2} \vec{a}_k \qquad (5,63)$$

---

[20]. Габриэль Ламе (1795-1870) - французский математик и инженер, член Парижской академии наук. В 1820-32 годах работал в России. Большое значение имеют его исследования по математической физике и теории упругости. Ламе разработал общую теорию криволинейных координат.

$$\vec{e}_{(k)} = \frac{1}{h_k}\vec{a}_k = h_k\vec{a}^k = \vec{e}^{(k)} \qquad (5,64)$$

$$A_k = h_k^2 A^k \qquad (5,65)$$

$$A^{(k)} = h_k A^k = \frac{1}{h_k} A_k = A_{(k)} \qquad (5,66)$$

Можно показать также, что символы Кристоффеля определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{i,kl} = 0 &\qquad& \Gamma^i_{kl} = 0 \\
&\Gamma_{l,kk} = -h_k\frac{\partial h_k}{\partial q^l} && \Gamma^l_{kk} = -\frac{h_k}{h_l^2}\frac{\partial h_k}{\partial q^l} \\
&\Gamma_{k,kl} = h_k\frac{\partial h_k}{\partial q^l} && \Gamma^k_{kl} = \frac{1}{h_k}\frac{\partial h_k}{\partial q^l} \\
&\Gamma_{k,kk} = h_k\frac{\partial h_k}{\partial q^k} && \Gamma^k_{kk} = \frac{1}{h_k}\frac{\partial h_k}{\partial q^k}
\end{aligned} \qquad (5,67)$$

Заметим, что правило суммирования по дважды повторяющимся индексам не распространяется на формулы (5,6I) -(5,67). Кроме того необходимо иметь в виду, что в формулах (5,67) индексы i, k, l могут принимать лишь отличные друг от друга значения.

Рассмотрим две наиболее употребительные ортогональные системы координат:

I. Цилиндрические координаты.

Цилиндрическими координатами являются переменные

ρ, φ, z, связанные с декартовыми координатами следующими уравнениями:

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi \qquad (5,68)$$

$$z = z$$

и обратно

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \qquad (5,69)$$

$$z = z$$

В цилиндрической системе координат имеем:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \tag{5,70}$$

Таким образом для параметров Ламе получаем следующие выражения:

$$h_\rho = 1\,, \qquad h_\varphi = \rho\,, \qquad h_z = 1 \tag{5,71}$$

Используя соотношения (5,48), (5,63) и (5,64) получаем следующие выражения для базисных векторов $\vec{a}_i$, $\vec{a}^i$ и $\vec{e}_{(i)} = \vec{e}^{(i)}$:

$$\left.\begin{matrix}\vec{a}_\rho \\ \vec{a}^\rho \\ \vec{e}_{(\rho)}\end{matrix}\right\} = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}_\varphi &= -\vec{i}\rho\sin\varphi + \vec{j}\rho\cos\varphi \\
\vec{a}^\varphi &= -\vec{i}\frac{1}{\rho}\sin\varphi + \vec{j}\frac{1}{\rho}\cos\varphi \\
\vec{e}_{(\varphi)} &= -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi
\end{aligned} \tag{5,72}$$

$$\left.\begin{matrix}\vec{a}_z \\ \vec{a}^z \\ \vec{e}_{(z)}\end{matrix}\right\} = \vec{k}$$

Умножая скалярно $\vec{A} = \vec{i} A_x + \vec{j} A_y + \vec{k} A_z$ на $\vec{a}_i$, $\vec{a}^i$ и $\vec{e}_{(i)}$ получаем, соответственно, контравариантные, ковариантные и физические составляющие вектора $\vec{A}$:

$$
\left.\begin{array}{l} A^\rho \\ A_\rho \\ A_{(\rho)} \end{array}\right\} = A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi
$$

$$
\begin{aligned}
A^\varphi &= -A_x \rho \sin\varphi + A_y \rho \cos\varphi \\
A_\varphi &= -A_x \frac{1}{\rho} \sin\varphi + A_y \frac{1}{\rho} \cos\varphi \qquad (5,73) \\
A_{(\varphi)} &= -A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{array}{l} A^z \\ A_z \\ A_{(z)} \end{array}\right\} = A_z
$$

2. Сферические координаты.

Сферическими координатами являются переменные r, θ, φ связанные с декартовыми координатами следующими уравнениями:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$

$$y = r \sin\theta \sin\varphi \qquad (5,74)$$

$$z = r \cos\theta$$

и обратно

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \qquad (5,75)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

В сферической системе координат имеем:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2 \qquad (5,76)$$

Таким образом для параметров Ламе получаем следующие выражения:

$$h_r = 1; \qquad h_\theta = r; \qquad h_\varphi = r \sin\theta. \qquad (5,77)$$

Используя соотношения (5,48), (5,63) и (5,64) как и в случае цилиндрических координат получаем следующие выражения для базисных векторов $\vec{a}_i$, $\vec{a}^i$ и $\vec{e}_{(i)} = \vec{e}^{(i)}$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}_r \\ \vec{a}^r \\ \vec{e}_{(r)}\end{array}\right\} = \vec{i} \sin\theta\cos\varphi + \vec{j} \sin\theta\sin\varphi + \vec{k}\cos\theta$$

$$\vec{a}_\theta = \vec{i}\, r\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}\, r\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}\, r\sin\theta$$

$$\vec{a}^\theta = \vec{i}\,\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}\,\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}\,\frac{1}{r}\sin\theta \qquad (5,78)$$

$$\vec{e}_{(\theta)} = \vec{i}\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}\sin\theta$$

$$\vec{a}_\varphi = -\vec{i}\, r\sin\theta\sin\varphi + \vec{j}\, r\sin\theta\cos\varphi$$

$$\vec{a}^\varphi = -\vec{i}\,\frac{1}{r\sin\theta}\sin\varphi + \vec{j}\,\frac{1}{r\sin\theta}\cos\varphi$$

$$\vec{e}_{(\varphi)} = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi.$$

Так же как и в случае цилиндрических координат, по базисным векторам $\vec{a}_i$, $\vec{a}^i$ и $\vec{e}_{(i)}$ легко находим контравариантные, ковариантные и физические составляющие вектора $\vec{A}$:

$$\left.\begin{matrix} A^r \\ A_r \\ A_{(r)} \end{matrix}\right\} = A_x \sin\theta\cos\varphi + A_y \sin\theta\sin\varphi + A_z \cos\theta$$

$$A^\theta = A_x\, r\cos\theta\cos\varphi + A_y\, r\cos\theta\sin\varphi - A_z\, r\sin\theta$$

$$A_\theta = A_x \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi + A_y \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi - A_z \frac{1}{r}\sin\theta \qquad (5,79)$$

$$A_{(\theta)} = A_x \cos\theta\cos\varphi + A_y \cos\theta\sin\varphi - A_z \sin\theta$$

$$A^\varphi = -A_x\, r\sin\theta\sin\varphi + A_y\, r\sin\theta\cos\varphi$$

$$A_\varphi = -A_x \frac{1}{r\sin\theta}\sin\varphi + A_y \frac{1}{r\sin\theta}\cos\varphi$$

$$A_{(\varphi)} = -A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi.$$

§ 6. Основные дифференциальные операции в криволинейной системе координат.

Используя общие определения, введенные в § § 5 и 6, гл. IУ, рассмотрим основные дифференциальные операции в криволинейной системе координат применительно к векторам трехмерного эвклидова пространства.

I. Градиент скалярной функции

$$\operatorname{grad}\varphi = \varphi_{,i}\,\vec{a}^{\,i} \qquad (5,80)$$

2. Производная векторной функции $\vec{A}$ по заданному направлению .

$$(\vec{B}\,\mathrm{grad})\vec{A} = B^{k} A_{i;k}\, \vec{a}^{i} \qquad (5,81)$$

3. Дивергенция векторной функции $\vec{A}$

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = A^{k}{}_{,k} \qquad (5,82)$$

4. Ротор векторной функции $\vec{A}$

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \varepsilon^{ikl} A_{l,k}\, \vec{a}_{i} \qquad (5,83)$$

5. Оператор Лапласа

$$\Delta\varphi = g^{ik}\varphi_{,ik} \qquad (5,84)$$

Используя соотношения (4,39), (4,13), (4,40), (4,43) и (4,46) перепишем определения (5,80) - (5,84) в виде:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial q^i}\vec{a}^{\,i} \qquad (5,85)$$

$$(\vec{B}\operatorname{grad})\vec{A} = B^k\left(\frac{\partial A_i}{\partial q^k} - \Gamma^{\ell}_{ik}A_\ell\right)\vec{a}^{\,i} \qquad (5,86)$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial}{\partial q^k}\left(\sqrt{g_0}\,A^k\right) \qquad (5,87)$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g_0}}\,e^{ik\ell}\frac{\partial A_\ell}{\partial q^k}\vec{a}_i \qquad (5,88)$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial}{\partial q^k}\left(\sqrt{g_0}\,g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial q^i}\right) \qquad (5,89)$$

В ортогональной системе координат формулы (5,85)-(5,89) принимают вид *):

$$(\operatorname{grad}\varphi)_i = \frac{\partial\varphi}{\partial q^i}$$

$$(\operatorname{grad}\varphi)^i = \frac{1}{h_i^2}\frac{\partial\varphi}{\partial q^i} \qquad (5,90)$$

$$(\operatorname{grad}\varphi)_{(i)} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q^i}$$

---

*) При доказательстве первой из формул (5,91) нужно воспользоваться выражениями (5,67) для символов Кристоффеля и показать, что

$$\Gamma^{\ell}_{ik}A_\ell B^k = \frac{A_i}{h_i}\frac{\partial h_i}{\partial q^k}B^k - \frac{A_k}{h_k^2}\left(h_i B^i\frac{\partial h_i}{\partial q^k} - h_k B^k\frac{\partial h_k}{\partial q^i}\right).$$

В этом выражении, так же как и в формулах (5,90)-(5,94) предполагается суммирование только по немым индексам k при фиксированном значении индекса i .

$$\left\{(\vec{B}\,grad)\vec{A}\right\}_i = h_i\left[B^k\frac{\partial}{\partial q^k}\left(\frac{A_i}{h_i}\right) + \frac{1}{h_i h_k}\left(\frac{A_k}{h_k}\right)\left(h_i B^i\frac{\partial h_i}{\partial q^k} - h_k B^k\frac{\partial h_k}{\partial q^i}\right)\right]$$

$$\left\{(\vec{B}\,grad)\vec{A}\right\}^i = \frac{1}{h_i}\left[B^k\frac{\partial}{\partial q^k}\left(\frac{A_i}{h_i}\right) + \frac{1}{h_i h_k}\left(\frac{A_k}{h_k}\right)\left(h_i B^i\frac{\partial h_i}{\partial q^k} - h_k B^k\frac{\partial h_k}{\partial q^i}\right)\right]$$

$$\left\{(\vec{B}\,grad)\vec{A}\right\}_{(i)} = \frac{B_{(k)}}{h_k}\,\frac{\partial A_{(i)}}{\partial q^k} + \frac{1}{h_i h_k}A_{(k)}\left(B_{(i)}\frac{\partial h_i}{\partial q^k} - B_{(k)}\frac{\partial h_k}{\partial q^i}\right) \quad (5{,}91)$$

$$div\,\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\cdot\frac{\partial}{\partial q^k}\left(h_1 h_2 h_3 A^k\right) =$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q^1}\left(h_2 h_3 A_{(1)}\right) + \frac{\partial}{\partial q^2}\left(h_1 h_3 A_{(2)}\right) + \frac{\partial}{\partial q^3}\left(h_1 h_2 A_{(3)}\right)\right] \quad (5{,}92)$$

$$(rot\,\vec{A})^i = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\,e^{ike}\,\frac{\partial A_e}{\partial q^k}$$

$$(rot\,\vec{A})_i = \frac{h_i^2}{h_1 h_2 h_3}\,e^{ike}\,\frac{\partial A_e}{\partial q^k} \quad (5{,}93)$$

$$(rot\,\vec{A})_{(i)} = \frac{h_i}{h_1 h_2 h_3}\,e^{ike}\,\frac{\partial}{\partial q^k}\left(h_e A_{(e)}\right)$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\,\frac{\partial}{\partial q^k}\left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_k^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial q^k}\right) \quad (5{,}94)$$

Выпишем для справок физические составляющие рассмотренных дифференциальных операторов в цилиндрических и сферических координатах.

I. Цилиндрические координаты

$$grad_{(\rho)}\,\psi=\frac{\partial\psi}{\partial\rho},$$

$$grad_{(\varphi)}\,\psi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, \qquad (5{,}95)$$

$$grad_{(z)}\,\psi=\frac{\partial\psi}{\partial z};$$

$$\left\{(\vec{B}\,grad)\vec{A}\right\}_{(\rho)}=B_{(\rho)}\frac{\partial A_{(\rho)}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}B_{(\varphi)}\frac{\partial A_{(\rho)}}{\partial\varphi}+B_{(z)}\frac{\partial A_{(\rho)}}{\partial z}-\frac{1}{\rho}B_{(\varphi)}A_{(\varphi)},$$

$$\left\{(\vec{B}\,grad)\vec{A}\right\}_{(\varphi)}=B_{(\rho)}\frac{\partial A_{(\varphi)}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}B_{(\varphi)}\frac{\partial A_{(\varphi)}}{\partial\varphi}+B_{(z)}\frac{\partial A_{(\varphi)}}{\partial z}+\frac{1}{\rho}B_{(\varphi)}A_{(\rho)},$$

$$\left\{(\vec{B}\,grad)\vec{A}\right\}_{(z)}=B_{(\rho)}\frac{\partial A_{(z)}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}B_{(\varphi)}\frac{\partial A_{(z)}}{\partial\varphi}+B_{(z)}\frac{\partial A_{(z)}}{\partial z}; \qquad (5{,}96)$$

$$div\,\vec{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_{(\rho)}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_{(\varphi)}}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_{(z)}}{\partial z}; \qquad (5{,}97)$$

$$rot_{(\rho)}\,\vec{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_{(z)}}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_{(\varphi)}}{\partial z},$$

$$rot_{(\varphi)}\,\vec{A}=\frac{\partial A_{(\rho)}}{\partial z}-\frac{\partial A_{(z)}}{\partial\rho}, \qquad (5{,}98)$$

$$rot_{(z)}\,\vec{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_{(\varphi)}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_{(\rho)}}{\partial\varphi};$$

$$\Delta\psi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \qquad (5{,}99)$$

2. Сферические координаты.

$$
\begin{aligned}
grad_{(r)}\,\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial r}, \\
grad_{(\theta)}\,\psi &= \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \qquad\qquad (5,100) \\
grad_{(\varphi)}\,\psi &= \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial \varphi};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\{(\vec{B}\,grad)\vec{A}\right\}_{(r)} &= B_{(r)}\frac{\partial A_{(r)}}{\partial r} + \frac{1}{r}B_{(\theta)}\frac{\partial A_{(r)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}B_{(\varphi)}\frac{\partial A_{(r)}}{\partial \varphi} - \\
&\quad - \frac{1}{r}A_{(\theta)}B_{(\theta)} - \frac{1}{r}A_{(\varphi)}B_{(\varphi)}, \\
\left\{(\vec{B}\,grad)\vec{A}\right\}_{(\theta)} &= B_{(r)}\frac{\partial A_{(\theta)}}{\partial r} + \frac{1}{r}B_{(\theta)}\frac{\partial A_{(\theta)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}B_{(\varphi)}\frac{\partial A_{(\theta)}}{\partial \varphi} + \\
&\quad + \frac{1}{r}A_{(r)}B_{(\theta)} - \frac{ctg\,\theta}{r}A_{(\varphi)}B_{(\varphi)}, \qquad (5,101) \\
\left\{(\vec{B}\,grad)\vec{A}\right\}_{(\varphi)} &= B_{(r)}\frac{\partial A_{(\varphi)}}{\partial r} + \frac{1}{r}B_{(\theta)}\frac{\partial A_{(\varphi)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}B_{(\varphi)}\frac{\partial A_{(\varphi)}}{\partial \varphi} + \\
&\quad + \frac{1}{r}A_{(r)}B_{(\varphi)} + \frac{ctg\,\theta}{r}A_{(\theta)}B_{(\varphi)};
\end{aligned}
$$

$$
div\,\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_{(r)}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\, A_{(\theta)}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_{(\varphi)}}{\partial \varphi}; \qquad (5,102)
$$

$$\operatorname{rot}_{(r)} \vec{A} = \frac{1}{r \sin\theta} \left(-\frac{\partial A_{(\theta)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta\, A_{(\varphi)} \right) \right),$$

$$\operatorname{rot}_{(\theta)} \vec{A} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r A_{(\varphi)} \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_{(r)}}{\partial \varphi}, \qquad (5,103)$$

$$\operatorname{rot}_{(\varphi)} \vec{A} = -\frac{1}{r} \frac{\partial A_{(r)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r A_{(\theta)} \right);$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}. \quad (5,104)$$

Ю.И.Кулаков

ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ФИЗИКОВ

(Лекции для студентов НГУ)

Ответственный за выпуск Б.Я.Штивельман

Подписано к печати 2I/I-67г.№ МН04015
Формат бумаги 60 x 84 I/I6 Объем 9 п.л.
Тираж 5I0 экз. Заказ № 8. Цена 30 коп.

Отпечатано на ротапринте НГУ, Новосибирск,90