

А. И. ЛУРЬЕ

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ  
ЗАДАЧИ  
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1955

12-5-4

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	7
<b>Глава 1. Основные уравнения математической теории упругости</b> . . . . .	<b>9</b>
§ 1. Тензор напряжения. Уравнения статики сплошной среды . . . . .	9
§ 2. Деформация сплошной среды . . . . .	15
§ 3. Некоторые операции над тензорами . . . . .	17
§ 4. Определение перемещения по тензору деформации . . . . .	22
§ 5. Функции напряжений . . . . .	26
§ 6. Ортогональные криволинейные координаты . . . . .	29
§ 7. Основные соотношения механики сплошной среды в криволинейных координатах . . . . .	39
§ 8. Связь между тензорами напряжения и деформации в изотропном упругом теле (обобщённый закон Гука) . . . . .	43
§ 9. Дифференциальные уравнения теории упругости в перемещениях . . . . .	46
§ 10. Решение уравнений равновесия теории упругости в перемещениях в форме П. Ф. Папковича — Нейбера . . . . .	49
§ 11. Дифференциальные уравнения теории упругости в напряжениях . . . . .	55
§ 12. Связь общих решений с тензором функций напряжений . . . . .	58
§ 13. Объёмные силы, имеющие потенциал. Тепловые напряжения . . . . .	63
Примечания и литературные указания к главе 1. . . . .	68
<b>Глава 2. Неограниченная упругая среда и упругое полупространство</b> . . . . .	<b>71</b>
§ 1. Действие сосредоточенной силы в неограниченной упругой среде . . . . .	71
§ 2. Решения уравнений теории упругости, соответствующие особым точкам . . . . .	76
§ 3. Действие системы сил, распределённых в малом объёме . . . . .	81
§ 4. Действие распределённых особенностей . . . . .	86
§ 5. Действие сосредоточенной силы и распределённой нагрузки, нормальных к граничной плоскости упругого полупространства . . . . .	89
§ 6. Непрерывное распределение нагрузки . . . . .	99

§ 7. Неравномерное нагружение по эллиптической площадке . . .	112
§ 8. Напряжённое состояние в упругом полупространстве при заданных на границе внешних силах . . . . .	121
§ 9. Сосредоточенная сила в упругом полупространстве . . . . .	134
§ 10. Задачи о равновесии упругого конуса . . . . .	139
Примечания и литературные указания к главе 2 . . . . .	143
<b>Глава 3. Равновесие упругого слоя . . . . .</b>	<b>146</b>
§ 1. Постановка задачи. Растяжение и изгиб слоя . . . . .	146
§ 2. Символический способ составления решений . . . . .	149
§ 3. Введение функций напряжений . . . . .	153
§ 4. Определение функций напряжений . . . . .	165
§ 5. Сжатие упругого слоя . . . . .	174
§ 6. Изгиб упругого слоя . . . . .	185
§ 7. Действие объёмных сил. Тепловые напряжения в слое . . . . .	191
Примечания и литературные указания к главе 3 . . . . .	198
<b>Глава 4. Равновесие толстой плиты . . . . .</b>	<b>200</b>
§ 1. Однородные решения . . . . .	200
§ 2. Неоднородные решения . . . . .	211
§ 3. Равновесие круглой толстой плиты . . . . .	218
§ 4. Тепловые напряжения в плите . . . . .	230
Примечания и литературные указания к главе 4 . . . . .	248
<b>Глава 5. Пространственные контактные задачи . . . . .</b>	<b>251</b>
§ 1. Постановка задачи о действии жёсткого штампа на упругое полупространство . . . . .	251
§ 2. Метод решения задачи о жёстком штампе . . . . .	255
§ 3. Специальный случай эллиптических координат. Разыскание гармонических функций $\omega$ и $\omega_1$ . . . . .	259
§ 4. Плоский штамп с круговым основанием . . . . .	271
§ 5. Неплоский штамп круговой в плане . . . . .	273
§ 6. Плотное прилегание штампа . . . . .	279
§ 7. Конический штамп . . . . .	284
§ 8. Общий случай эллиптических координат . . . . .	287
§ 9. Плоский эллиптический штамп . . . . .	299
§ 10. Неплоский, эллиптический в плане штамп . . . . .	304
§ 11. Сжатие упругих тел (задача Герца) . . . . .	315
Примечания и литературные указания к главе 5 . . . . .	324
<b>Глава 6. Деформация симметрично нагруженной упругой сферы</b>	<b>326</b>
§ 1. Общая форма решения задачи о равновесии симметрично нагруженного тела вращения . . . . .	326
§ 2. Выражения перемещений и напряжений через объёмные сферические функции . . . . .	328

§ 3. Частное решение, соответствующее объёмным силам . . . . .	339
§ 4. Рассмотрение простейших частных задач . . . . .	342
§ 5. Вращающийся шар . . . . .	348
§ 6. Внутренняя задача для сферы . . . . .	350
§ 7. Сжатие упругого шара сосредоточенными силами . . . . .	362
§ 8. Равновесие тяжёлой сферы . . . . .	368
§ 9. Напряжённое состояние в окрестности эллипсоидальной по- лости . . . . .	371
Примечания и литературные указания к главе 6 . . . . .	379
<b>Глава 7. Деформация симметрично нагружённого упругого кру- гового цилиндра . . . . .</b>	<b>381</b>
§ 1. Обзор содержания главы. Исходные соотношения . . . . .	381
§ 2. Элементарные решения . . . . .	386
§ 3. Полиномиальные решения задачи о равновесии цилиндра . . . . .	388
§ 4. Синусоидальное загрузеие боковой поверхности цилиндра. Однородные решения . . . . .	393
§ 5. Деформация цилиндра конечной длины, нагружённого по бо- ковой поверхности. Метод тригонометрических рядов . . . . .	399
§ 6. Деформация бесконечного цилиндра, нагружённого по участку боковой поверхности. Применение интеграла Фурье . . . . .	404
§ 7. «Опясанный цилиндр». Нормальное нагружение боковой по- верхности по произвольному закону . . . . .	416
§ 8. Касательное нагружение по участку боковой поверхности . . . . .	419
§ 9. Краевые условия на торцах цилиндра . . . . .	429
Примечания и литературные указания к главе 7 . . . . .	438
<b>Глава 8. Общая задача о равновесии упругой сферы . . . . .</b>	<b>441</b>
§ 1. Постановка задачи. Некоторые свойства объёмных сфериче- ских функций . . . . .	441
§ 2. Краевые задачи для сплошной сферы. Случай заданных на поверхности сферы перемещений . . . . .	447
§ 3. Случай заданных на поверхности сферы усилий . . . . .	449
§ 4. Решение краевых задач для сферической полости в неогра- ниченной упругой среде . . . . .	459
§ 5. Равновесие упругой полой сферы при заданных на границах перемещениях . . . . .	462
§ 6. Равновесие упругой полой сферы при заданных на границах усилиях . . . . .	472
Примечания и литературные указания к главе 8 . . . . .	484
Именной указатель . . . . .	486
Предметный указатель . . . . .	488



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга посвящена решению некоторых классических задач математической теории упругости. В неё вошли в переработанном и расширенном виде материалы, опубликованные автором в течение истекших 15 лет, а также новые результаты. При написании книги учтены известные автору классические и современные работы, относящиеся к пространственным задачам теории упругости.

В настоящую книгу, посвящённую пространственным задачам теории упругости, можно было бы включить наряду с тем материалом, который представлен, изложение теорем о существовании решений уравнений теории упругости, вариационных и других прямых методов решения пространственных задач и рассмотрение некоторых специальных вопросов, в первую очередь задачи Сен-Венана и её родственных задач Митчелла и Альманзи, а также учения о концентрации напряжений в местах резкого изменения геометрической формы упругого тела. Выполнение такой программы превышает силы и возможности автора; оно потребовало бы для изложения, могущего претендовать на полноту и обстоятельность, работы целого коллектива и книги совершенно иного объёма. Надо надеяться, что советская литература, располагающая капитальными трудами по теории упругости, со временем обогатится отдельными сочинениями и по указанным выше вопросам.

Книга рассчитана на читателя, обладающего знаниями по теории упругости в объёме учебников Л. С. Лейбензона, П. Ф. Папковича или С. П. Тимошенко. Она может быть использована для преподавания специальных разделов теории упругости на механико-математических факультетах университетов и механических специальностях физико-механических и родственных факультетов технических учебных заведений. Материалы книги могут найти применение в работе расчётных семинаров по теории упругости, использоваться для заданий по курсовым работам студентам указанных специальностей, а также в работе аспирантов при подготовке к кандидатским экзаменам по теории упругости. Мы рассчитываем также на то, что книга окажется полезной для научных работников, ведущих исследовательскую работу по теории упругости; круг таких лиц в наших научно-исследовательских институтах и высших учебных заведениях весьма широк, о чём

свидетельствует всё увеличивающееся число работ по теории упругости, публикуемых в наших журналах. Работы по пространственным задачам в этих публикациях сравнительно немногочисленны, и автор будет считать, что он удовлетворительно выполнил свою задачу, если настоящая книга повысит интерес к этим вопросам теории упругости.

При написании книги мы заботились о возможности независимого чтения отдельных её глав. Нам представляется, что эта цель ценой несущественных повторений достигнута. Органически связаны между собой только третья и четвёртая главы; нельзя разобраться в материале четвёртой, не зная содержания §§ 1—4 главы 3. Имеется связь также между материалами §§ 5—8 главы 2 и содержанием главы 5. Главы 1, 6, 7, 8 независимы от остальных. Читатель, знакомый в указанном выше объёме с основными соотношениями математической теории упругости, может начинать чтение книги с главы 2, минуя первую. Если этого читателя интересует, например, задача о равновесии упругого цилиндра, он может независимо от прочих глав прочесть главу 7 и т. д.

Литературные указания, помещённые в конце каждой главы, имеют цель ориентировать читателя в истории развития вопроса, трактуемого в главе. Они не претендуют на полноту, а отражают только те сочинения, которые в разной степени были известны автору ранее и стали ему известны в процессе работы над книгой, а также работы, непосредственно использованные при написании книги.

Автор приносит глубокую благодарность М. П. Кошутину за тщательную проверку всех вычислений и обнаружение некоторых погрешностей в первоначальном тексте и Г. С. Шапиро за указание ряда неизвестных автору литературных источников.

Ленинград

15 июля 1954 г.



## ГЛАВА 1

# ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### § 1. Тензор напряжения. Уравнения статики сплошной среды

Напряжённое состояние сплошной среды, создаваемое действием объёмных и поверхностных сил, задаётся в каждой точке среды тензором напряжения  $T$ . В системе декартовых прямоугольных осей  $x, y, z$  этот тензор задаётся таблицей своих компонентов

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{xy} & \sigma_z \end{Bmatrix}, \quad (1.1)$$

каждая строка которой определяет компоненты напряжения на площадке, перпендикулярной к соответствующей оси.

Диагональные элементы таблицы (1.1)

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \quad (1.2)$$

определяют нормальные напряжения на соответствующих площадках;  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  считаются положительными при растяжении и отрицательными при сжатии.

Недиагональные элементы таблицы (1.1) определяют касательные напряжения; так,  $\tau_{xy}$  определяет составляющую по оси  $y$  напряжения, действующего по площадке, нормаль к которой параллельна оси  $x$ . Касательное напряжение считается положительным, если оно действует по положительному (отрицательному) направлению оси, определяемой в его наименовании вторым индексом, на площадке выделенного объёма, внешняя нормаль которой имеет направление положительной (отрицательной) оси, определяемой первым индексом. На рис. 1 показаны действия напряжений  $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ , когда они являются положительными, на площадках, перпендикулярных к оси  $x$ .

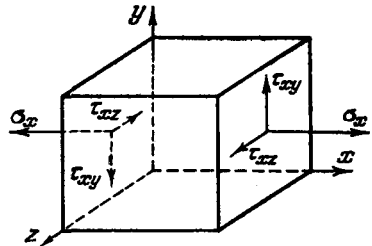


Рис. 1.

Можно условиться задавать тензор напряжений тремя векторами

$$\left. \begin{aligned} t_x &= \sigma_x i + \tau_{xy} j + \tau_{xz} k, \\ t_y &= \tau_{yx} i + \sigma_y j + \tau_{yz} k, \\ t_z &= \tau_{zx} i + \tau_{zy} j + \sigma_z k, \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

определяющими векторы напряжений на площадках, перпендикулярных к координатным осям ( $i, j, k$  обозначают единичные векторы координатных осей). Вводя это наименование, оказывающееся во многих случаях удобным, не следует забывать, что величины  $t_x, t_y, t_z$  не являются векторами, подобными скорости, силе и т. п. Это следует из того, что сумма квадратов проекций скорости на взаимно перпендикулярные оси определяет квадрат величины скорости, тогда как выражение  $\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2$  не имеет значения, не зависящего от выбора системы координат. Никакого смысла не имела бы также операция геометрического сложения векторов напряжения  $t_x, t_y, t_z$ .

Напомним, что произведением справа тензора  $\mathbf{P}$  на вектор  $\mathbf{a}$  называется вектор  $\mathbf{b}$ , обозначаемый

$$\mathbf{b} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}, \quad (1.4)$$

проекция которого определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} b_x &= P_{xx}a_x + P_{xy}a_y + P_{xz}a_z, \\ b_y &= P_{yx}a_x + P_{yy}a_y + P_{yz}a_z, \\ b_z &= P_{zx}a_x + P_{zy}a_y + P_{zz}a_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Здесь

$$\left\{ \begin{array}{ccc} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{array} \right\}$$

— таблица компонентов тензора  $\mathbf{P}$  и через  $a_x, a_y, a_z$  обозначены проекции вектора  $\mathbf{a}$ . Проекция вектора

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{P}, \quad (1.6)$$

называемого произведением слева тензора  $\mathbf{P}$  на вектор  $\mathbf{a}$ , определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} c_x &= P_{xx}a_x + P_{yx}a_y + P_{zx}a_z, \\ c_y &= P_{xy}a_x + P_{yy}a_y + P_{zy}a_z, \\ c_z &= P_{xz}a_x + P_{yz}a_y + P_{zz}a_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Задание таблицы (1.1) компонентов тензора напряжения определяет вектор напряжения  $t_n$  на любой площадке. Именно, имеют место

известные соотношения Коши, выражающие условия равновесия элементарного тетраэдра, три грани которого расположены в координатных плоскостях, а нормаль (направленная вовне тетраэдра) к четвертой грани задается единичным вектором  $\mathbf{n}$  (рис. 2).

Эти соотношения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} t_{nx} &= \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z, \\ t_{ny} &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z, \\ t_{nz} &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z, \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

где  $n_x, n_y, n_z$  обозначают косинусы углов, составляемых вектором  $\mathbf{n}$  с осями координат.

Можно записать (1.8) также в виде

$$t_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = t_x n_x + t_y n_y + t_z n_z. \quad (1.9)$$

Внешние силы, действующие на рассматриваемый объем сплошной среды, подразделяются на объемные и поверхностные. Объемную силу, действующую на единицу объема, будем обозначать  $\mathbf{K}$ . Так, в случае силы веса  $\mathbf{K} = -\gamma \mathbf{k}$ , где  $\mathbf{k}$  — единичный вектор восходящей вертикали,  $\gamma$  — весовая плотность. В системе подвижных осей тело, скоростями частиц которого по отношению к этой системе осей можно пренебречь, можно рассматривать как находящееся в равновесии под действием объемной силы инерции переносного движения  $\mathbf{K} = -\frac{\gamma}{g} \mathbf{w}_e$ , где вектор ускорения  $\mathbf{w}_e$  определяется по известной формуле кинематики

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \quad (1.10)$$

( $\mathbf{w}_0$  — ускорение начала подвижных осей,  $\mathbf{R}$  — вектор-радиус частицы по отношению к этому началу,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  — векторы углового ускорения и угловой скорости тела). В частности, при вращении вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью объемная сила равна

$$\mathbf{K} = -\frac{\gamma}{g} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = \frac{\gamma}{g} \omega^2 h \mathbf{e}, \quad (1.11)$$

где  $h$  — расстояние до оси вращения,  $\mathbf{e}$  — единичный вектор, направленный от оси вращения по радиусу окружности, описываемой рассматриваемой точкой.

Внешняя поверхностная сила, отнесенная к единице площади поверхности рассматриваемого объема сплошной среды, обозначается  $\mathbf{F}_n$ ; на площадку  $do$  будет действовать сила  $\mathbf{F}_n do$ , причём индекс  $n$  указывает, что направленный во вне среды единичный вектор нормали к площадке обозначен через  $\mathbf{n}$ . Так, при действии по поверхности

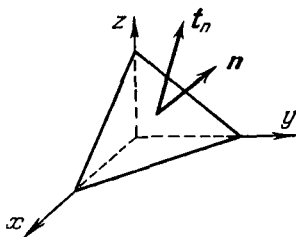


Рис. 2.

тела равномерного распределённого нормального давления интенсивности  $p$  имеем  $F_n = -pn$ . На тело, погруженное в жидкость, будет действовать поверхностная сила  $F_n = -\gamma_0 zn$ , где  $z$  — глубина погружения площадки,  $\gamma_0$  — вес единицы объёма жидкости.

Рассматривая равновесие элементарного тетраэдра, примыкающего к поверхности тела, и совмещая четвёртую грань (см. выше) этого тетраэдра с элементом поверхности  $do$ , будем иметь уравнение статики на поверхности тела:

$$t_n = F_n \quad \text{или} \quad n \cdot T = F_n. \quad (1.12)$$

Необходимые условия равновесия произвольного объёма  $V$  сплошной среды, ограниченного поверхностью  $S$ , получим, приравняв нулю главный вектор и главный момент относительно произвольной точки внешних объёмных и поверхностных сил

$$\left. \begin{aligned} \iiint_V K d\tau + \iint_S F_n do &= 0, \\ \iiint_V R \times K d\tau + \iint_S R \times F_n do &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

По (1.12) эти соотношения можно записать также в виде

$$\left. \begin{aligned} \iiint_V K d\tau + \iint_S n \cdot T do &= 0, \\ \iiint_V R \times K d\tau + \iint_S R \times (n \cdot T) do &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

Напомним, что в случае вектора  $a$  по формуле Остроградского — Гаусса имеем:

$$\begin{aligned} \iint_S n \cdot a do &= \iint_S (n_x a_x + n_y a_y + n_z a_z) do = \\ &= \iiint_V \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) d\tau = \iiint_V \operatorname{div} a d\tau. \end{aligned}$$

Аналогично этому по (1.9) можно написать:

$$\begin{aligned} \iint_S n \cdot T do &= \iint_S (n_x t_x + n_y t_y + n_z t_z) do = \\ &= \iiint_V \left( \frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y} + \frac{\partial t_z}{\partial z} \right) d\tau = \iiint_V \operatorname{div} T d\tau, \end{aligned}$$

где через  $\operatorname{div} T$  (дивергенция тензора  $T$ ) назван вектор

$$\operatorname{div} T = \frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y} + \frac{\partial t_z}{\partial z}. \quad (1.15)$$

Проекции этого вектора на оси декартовой системы по (1.3) должны быть определены соотношениями

$$\left. \begin{aligned} (\operatorname{div} \mathbf{T})_x &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}, \\ (\operatorname{div} \mathbf{T})_y &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}, \\ (\operatorname{div} \mathbf{T})_z &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Первое соотношение (1.14) принимает вид

$$\iiint_V (\mathbf{K} + \operatorname{div} \mathbf{T}) d\tau = 0,$$

откуда вследствие произвольности объёма  $V$  следует уравнение равновесия сплошной среды

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{K} = 0. \quad (1.17)$$

Проектируя на оси декартовой системы, получаем три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + K_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + K_y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + K_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Обращаясь ко второму соотношению (1.14), заметим, что по (1.9) и (1.15)

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{R} \times (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}) d\sigma &= \int_S [n_x (\mathbf{R} \times \mathbf{t}_x) + n_y (\mathbf{R} \times \mathbf{t}_y) + n_z (\mathbf{R} \times \mathbf{t}_z)] d\sigma = \\ &= \iiint_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{R} \times \mathbf{t}_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{R} \times \mathbf{t}_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{R} \times \mathbf{t}_z) \right] d\tau = \\ &= \iiint_V (\mathbf{R} \times \operatorname{div} \mathbf{T}) d\tau + \iiint_V [(i \times \mathbf{t}_x) + (j \times \mathbf{t}_y) + (k \times \mathbf{t}_z)] d\tau. \end{aligned}$$

Последнее равенство написано на основании того, что из выражения вектор-радиуса

$$\mathbf{R} = ix + jy + kz$$

следует, что единичные векторы  $i$ ,  $j$ ,  $k$  координатных осей равны частным производным вектор-радиуса по соответствующим координатам.

Теперь получаем:

$$\begin{aligned} \int_V \int \int \mathbf{R} \times \mathbf{K} d\tau + \int_S \int \mathbf{R} \times (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}) do = \\ = \int_V \int \int \mathbf{R} \times (\mathbf{K} + \operatorname{div} \mathbf{T}) d\tau + \\ + \int_V \int \int [(\mathbf{i} \times \mathbf{t}_x) + (\mathbf{j} \times \mathbf{t}_y) + (\mathbf{k} \times \mathbf{t}_z)] d\tau = 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Первый интеграл обращается в нуль по уравнению равновесия (1.17); из произвольности рассматриваемого объёма следует, что подинтегральное выражение во втором интеграле обращается в нуль. Это выражение, если воспользоваться (1.3), приводится к виду

$$\mathbf{i}(\tau_{yz} - \tau_{zy}) + \mathbf{j}(\tau_{zx} - \tau_{xz}) + \mathbf{k}(\tau_{xy} - \tau_{yx}) = 0. \quad (1.20)$$

Условие обращения в нуль главного момента внешних сил, таким образом, привело к теореме взаимности касательных напряжений

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (1.21)$$

Симметрично расположенные относительно главной диагонали элементы таблицы (1.1) равны попарно. Это свойство выражает симметричность тензора напряжений  $\mathbf{T}$ . Число компонентов тензора понижается до шести; эти шесть величин — три нормальных  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  и три касательных напряжения  $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{zx}$  — связаны тремя уравнениями равновесия в объёме (1.18) и должны удовлетворять трём уравнениям равновесия на поверхности

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{zx} n_z &= F_{nx}, \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z &= F_{ny}, \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z &= F_{nz}. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Заметим, что выражение  $\mathbf{t}_n$  можно записать теперь также в виде произведения справа тензора  $\mathbf{T}$  на вектор  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}. \quad (1.23)$$

Любое состояние среды, удовлетворяющее уравнениям равновесия в объёме и на поверхности, называется статически возможным. Напряжённое состояние, которое фактически реализуется в теле при заданных объёмных и поверхностных силах или при заданных объёмных силах и геометрических условиях на поверхности тела, принадлежит к числу  $\infty^8$  статически возможных состояний. Для разыскания

этого истинного напряжённого состояния уравнений статики, являющихся необходимыми условиями равновесия, недостаточно. Должны быть сформулированы физические законы, определяющие поведение среды под действием сил.

## § 2. Деформация сплошной среды

Состояние среды, в котором внутренние напряжения отсутствуют, назовём натуральным. Под действием внешнего нагружения или по другим причинам (например, вследствие изменения температуры) частицы среды, находившейся в натуральном состоянии, перемещаются из положения, которое они занимали в этом состоянии. Вектор перемещения частицы обозначим через  $u$ , а через  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — его проекции на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  декартовой системы;  $u$ ,  $v$ ,  $w$  в дальнейшем называются просто перемещениями. Они являются непрерывными функциями  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , имеющими внутри объёма тела частные производные по координатам по крайней мере до второго порядка включительно. В дальнейшем считаем, что как сами перемещения, так и их производные являются малыми величинами, и произведениями их будем пренебрегать.

Рассмотрим поле вектора  $u$ . При смещении в этом поле из положения, определяемого вектор-радиусом  $R$ , в положение  $R + dR$  вектор  $u$  приобретает приращение  $du$ ; проекции вектора  $du$  на оси координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  равны полным дифференциалам его проекций

$$\left. \begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Из этих выражений и равенств (1.5) следует, что вектор  $du$  может быть представлен как произведение справа тензора, называемого тензором, производным вектора  $u$  по вектору  $R$ , на вектор  $dR$ .

Таблица составляющих этого тензора имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right\}, \quad (2.2)$$

а сам тензор обозначается  $\frac{du}{dR}$ ; итак,

$$du = \frac{du}{dR} \cdot dR. \quad (2.3)$$

Тензор, транспонированный тензору  $\frac{du}{dR}$ , называется градиентом вектора  $u$ ; он имеет таблицу составляющих

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

и обозначается  $\text{grad } u$ . По (1,7) имеем:

$$du = dR \cdot \text{grad } u. \quad (2.5)$$

Симметричный тензор

$$E = \text{def } u = \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dR} + \text{grad } u \right) \quad (2.6)$$

называется деформацией. Для компонентов этого тензора принимаются обозначения

$$\left. \begin{array}{ccc} \varepsilon_x, & \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}, & \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \gamma_{xz}, \\ \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \gamma_{yx}, & \varepsilon_y, & \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{yz}, \\ \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \gamma_{zx}, & \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \gamma_{zy}, & \varepsilon_z, \end{array} \right\} \quad (2.6')$$

причём величины

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.7)$$

называются относительными удлинениями, а величины

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.8)$$

— сдвигами. При принятом пренебрежении квадратами и произведениями производных перемещений по координатам  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  равны относительным удлинениям отрезков, параллельных координатным осям, а  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$  — изменениям первоначально прямых углов между координатными осями, указываемыми в обозначении сдвигов.

Антисимметричная часть тензора  $\frac{du}{dR}$

$$\Omega = \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dR} - \text{grad } u \right) \quad (2.9)$$

имеет таблицу составляющих:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{array} \right\}, \quad (2.10)$$



где обозначено

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (2.11)$$

Величины  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  можно рассматривать как проекции вектора  $\omega$ , равного половине вихря перемещения:

$$\omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} u. \quad (2.12)$$

По (1.5) и (1.7) имеем:

$$\Omega \cdot dR = -dR \cdot \Omega = \omega \times dR. \quad (2.13)$$

Возвращаясь теперь к (2.3), можем написать:

$$du = \frac{du}{dR} \cdot dR = \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dR} + \operatorname{grad} u \right) \cdot dR + \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dR} - \operatorname{grad} u \right) \cdot dR$$

или по (2.5), (2.9) и (2.13)

$$du = E \cdot dR + \Omega \cdot dR = E \cdot dR + \omega \times dR. \quad (2.14)$$

Это соотношение определяет относительное перемещение точек, определяемых вектор-радиусами  $R$  и  $R + dR$ , в виде суммы двух слагаемых: перемещения, вызываемого деформацией бесконечно малого объёма, и перемещения, обусловленного поворотом этого объёма, как твёрдого тела.

Дивергенция вектора перемещения в дальнейшем обозначается через  $\vartheta$ :

$$\vartheta = \operatorname{div} u = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (2.15)$$

При указанной степени точности величина  $\vartheta$  представляет относительное изменение элемента объёма среды — объёмное расширение.

Сумма диагональных элементов тензора  $P$  является величиной, не зависящей от выбора координатной системы; одна треть этого скаляра называется линейным (первым) инвариантом тензора или следом тензора и обозначается  $J_1(P)$ . Итак,

$$\vartheta = 3J_1(\operatorname{def} u) = 3J_1(E). \quad (2.16)$$

### § 3. Некоторые операции над тензорами

Естественный путь определения применяемых ниже операций над тензорами состоит в использовании диадного представления тензора. Диадным умножением векторов  $a$  и  $b$  называется операция образования по этим векторам тензора, обозначаемого  $ab$  \*) и определяемого таблицей компонентов

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{array} \right\}. \quad (3.1)$$

\*) Напомним, что  $a \cdot b$  обозначает скалярное,  $a \times b$  — векторное произведение векторов  $a$  и  $b$ .

Тензор  $\mathbf{P}$  с таблицей компонентов

$$\left\{ \begin{array}{ccc} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

может быть представлен в виде суммы трёх диад

$$\mathbf{P} = iP_x + jP_y + kP_z, \quad (3.2')$$

причём вторые векторы диад связаны с компонентами тензора соотношениями

$$\left. \begin{array}{l} P_x = iP_{xx} + jP_{xy} + kP_{xz}, \\ P_y = iP_{yx} + jP_{yy} + kP_{yz}, \\ P_z = iP_{zx} + jP_{zy} + kP_{zz}. \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

Из сказанного следует также, что тензор  $\mathbf{P}$  представляется суммой девяти диад

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = & iiP_{xx} + ijP_{xy} + ikP_{xz} + \\ & + jiP_{yx} + jjP_{yy} + jkP_{yz} + \\ & + kiP_{zx} + kjP_{zy} + kkP_{zz}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В этом представлении компоненты тензора являются коэффициентами соответствующих диад.

Рассмотрим тензор  $\mathbf{P}^*$ , диадное представление которого имеет вид

$$\mathbf{P}^* = P_x i + P_y j + P_z k, \quad (3.5)$$

где векторы  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$  определены по (3.3). Получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^* = & iiP_{xx} + ijP_{yx} + ikP_{zx} + \\ & + jiP_{xy} + jjP_{yy} + jkP_{zy} + \\ & + kiP_{xz} + kjP_{yz} + kkP_{zz}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Вводя в рассмотрение векторы

$$\left. \begin{array}{l} P_x^* = iP_{xx} + jP_{yx} + kP_{zx}, \\ P_y^* = iP_{xy} + jP_{yy} + kP_{zy}, \\ P_z^* = iP_{xz} + jP_{yz} + kP_{zz}, \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

можем написать:

$$\mathbf{P}^* = iP_x^* + jP_y^* + kP_z^*. \quad (3.8)$$

Тензор  $\mathbf{P}^*$  является транспонированным тензору  $\mathbf{P}$ .

Определим операции умножения диады на вектор  $c$ . Это, во-первых, умножение справа

$$ab \cdot c = a(b \cdot c), \quad (3.9)$$

во-вторых, умножение слева

$$c \cdot ab = (c \cdot a)b, \quad (3.10)$$

в результате которых приходим к вектору. Могут быть определены далее операции векторного умножения диады справа и слева на вектор  $c$

$$ab \times c = a(b \times c), \quad (3.11)$$

$$c \times ab = (c \times a)b, \quad (3.12)$$

в результате которых получаем снова диады, одним из множителей которых является векторное произведение.

Обобщение на случай произвольного тензора приводит к уже известным операциям умножения слева тензора на вектор  $a$ :

$$a \cdot P = (a \cdot i)P_x + (a \cdot j)P_y + (a \cdot k)P_z = a_x P_x + a_y P_y + a_z P_z, \quad (3.13)$$

и умножения справа

$$P \cdot a = i(P_x \cdot a) + j(P_y \cdot a) + k(P_z \cdot a) \quad (3.14)$$

и векторному умножению слева и справа тензора  $P$  на вектор  $a$ , приводящему к новым тензорам:

$$\begin{aligned} a \times P &= (a \times i)P_x + (a \times j)P_y + (a \times k)P_z = \\ &= (a_z j - a_y k)P_x + (a_x k - a_z i)P_y + (a_y i - a_x j)P_z = \\ &= i(a_y P_z - a_z P_y) + j(a_z P_x - a_x P_z) + k(a_x P_y - a_y P_x), \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$P \times a = i(P_x \times a) + j(P_y \times a) + k(P_z \times a). \quad (3.16)$$

По (3.3) находим таблицу компонентов тензора  $a \times P$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_y P_{zx} - a_z P_{yx} & a_y P_{zy} - a_z P_{yy} & a_y P_{zz} - a_z P_{yz} \\ a_z P_{xx} - a_x P_{zx} & a_z P_{xy} - a_x P_{zy} & a_z P_{xz} - a_x P_{zz} \\ a_x P_{yx} - a_y P_{xx} & a_x P_{yy} - a_y P_{xy} & a_x P_{yz} - a_y P_{xz} \end{array} \right\}. \quad (3.17)$$

Легко проверяются также соотношения

$$P \cdot a = a \cdot P^*, \quad P^* \times a = -(a \times P)^*. \quad (3.18)$$

Применим их и (3.13) к преобразованию выражения вектора  $a \times (P \cdot b)$ :

$$\begin{aligned} a \times (P \cdot b) &= a \times (b \cdot P^*) = a \times (b_x P_x^* + b_y P_y^* + b_z P_z^*) = \\ &= b_x (a \times P_x^*) + b_y (a \times P_y^*) + b_z (a \times P_z^*) = \\ &= -b \cdot [i(P_x^* \times a) + j(P_y^* \times a) + k(P_z^* \times a)] = \\ &= -b \cdot (P^* \times a) = b \cdot (a \times P)^* \end{aligned}$$

и окончательно

$$\mathbf{a} \times (\nabla \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \nabla) \cdot \mathbf{b}. \quad (3.19)$$

Введём теперь в рассмотрение набла-оператор, рассматриваемый как символический вектор

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.20)$$

По (3.13) получим определённый выше вектор-дивергенцию тензора  $\mathbf{P}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = \text{div } \mathbf{P}. \quad (3.21)$$

Диадное произведение  $\nabla \mathbf{a}$  представляет тензор  $\text{grad } \mathbf{a}$  — градиент вектора  $\mathbf{a}$ .

Рассматривая  $\nabla \times \mathbf{P}$  по (3.15), придём к рассмотрению тензора

$$\text{rot } \mathbf{P} = \mathbf{i} \left( \frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y} \right), \quad (3.22)$$

называемого ротором тензора  $\mathbf{P}$ . Таблица компонентов этого тензора имеет аналогично (3.17) вид

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \frac{\partial P_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial P_{yx}}{\partial z} & \frac{\partial P_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial P_{yy}}{\partial z} & \frac{\partial P_{zz}}{\partial y} - \frac{\partial P_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial P_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial P_{zx}}{\partial x} & \frac{\partial P_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial P_{zy}}{\partial x} & \frac{\partial P_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial P_{zz}}{\partial x} \\ \frac{\partial P_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial P_{xx}}{\partial y} & \frac{\partial P_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} & \frac{\partial P_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial P_{xz}}{\partial y} \end{array} \right\}. \quad (3.23)$$

К понятию ротора естественно приходим, составляя условия, что бесконечно малый вектор  $d\mathbf{R} \cdot \mathbf{P}$  является полным дифференциалом некоторого вектора; по (3.13) имеем:

$$d\mathbf{R} \cdot \mathbf{P} = P_x dx + P_y dy + P_z dz, \quad (3.24)$$

откуда следует, что эти условия сводятся к требованию обращения в нуль трёх векторов

$$\frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y}, \quad (3.25)$$

т. е. к обращению в нуль тензора  $\text{rot } \mathbf{P}$ .

Из (1.15) следует, что для любого тензора  $\mathbf{P}$

$$\text{div } \text{rot } \mathbf{P} = 0. \quad (3.26)$$

Из таблицы (3.23) легко видеть, что след ротора симметричного тензора  $\mathbf{P}$  равен нулю:

$$J_1 (\text{rot } \mathbf{P}) = 0. \quad (3.27)$$

Тензор, задаваемый таблицей компонентов

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\}, \quad (3.28)$$

называется единичным и обозначается  $\mathbf{U}$ ; его диадное представление имеет вид

$$\mathbf{U} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}. \quad (3.29)$$

Тензор, равный  $\mathbf{U}J_1(\mathbf{P})$ , называется шаровой частью тензора  $\mathbf{P}$ ; тензор, остающийся после вычитания из тензора  $\mathbf{P}$  его шаровой части, называется девиатором  $\text{Dev } \mathbf{P}$  этого тензора:

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}J_1(\mathbf{P}) + \text{Dev } \mathbf{P}. \quad (3.30)$$

Очевидно, что

$$J_1(\text{Dev } \mathbf{P}) = 0. \quad (3.31)$$

Ниже будет использовано выражение ротора тензора  $\mathbf{P} \times \mathbf{R}$ , где  $\mathbf{R}$  вектор-радиус; по (3.16) и (3.22) имеем:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{P} \times \mathbf{R}) &= (\nabla \times \mathbf{i})(\mathbf{P}_x \times \mathbf{R}) + (\nabla \times \mathbf{j})(\mathbf{P}_y \times \mathbf{R}) + (\nabla \times \mathbf{k})(\mathbf{P}_z \times \mathbf{R}) = \\ &= \left( \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial z} - \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial y} \right) (\mathbf{P}_x \times \mathbf{R}) + \left( \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\mathbf{P}_y \times \mathbf{R}) + \\ &+ \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y} - \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial x} \right) (\mathbf{P}_z \times \mathbf{R}) = \left[ \mathbf{i} \left( \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial z} \right) + \right. \\ &+ \mathbf{j} \left( \frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial y} \right) \left. \right] \times \mathbf{R} + \\ &+ \mathbf{i}(\mathbf{P}_z \times \mathbf{j} - \mathbf{P}_y \times \mathbf{k}) + \mathbf{j}(\mathbf{P}_x \times \mathbf{k} - \mathbf{P}_z \times \mathbf{i}) + \mathbf{k}(\mathbf{P}_y \times \mathbf{i} - \mathbf{P}_x \times \mathbf{j}). \end{aligned}$$

Первое слагаемое по (3.22) представляет  $(\text{rot } \mathbf{P}) \times \mathbf{R}$ ; далее по (3.3), (3.7)

$$\mathbf{P}_z \times \mathbf{j} - \mathbf{P}_y \times \mathbf{k} = \mathbf{k}P_{zx} - \mathbf{i}P_{zz} + \mathbf{j}P_{yx} - \mathbf{i}P_{yy} = \mathbf{P}_x^* - 3\mathbf{i}J_1(\mathbf{P}),$$

$$\mathbf{P}_x \times \mathbf{k} - \mathbf{P}_z \times \mathbf{i} = \mathbf{i}P_{xy} - \mathbf{j}P_{xx} + \mathbf{k}P_{zy} - \mathbf{j}P_{zz} = \mathbf{P}_y^* - 3\mathbf{j}J_1(\mathbf{P}),$$

$$\mathbf{P}_y \times \mathbf{i} - \mathbf{P}_x \times \mathbf{j} = \mathbf{j}P_{yz} - \mathbf{k}P_{yy} + \mathbf{i}P_{xz} - \mathbf{k}P_{xx} = \mathbf{P}_z^* - 3\mathbf{k}J_1(\mathbf{P}),$$

и по (3.8) и (3.29) получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}(\mathbf{P}_z \times \mathbf{j} - \mathbf{P}_y \times \mathbf{k}) + \mathbf{j}(\mathbf{P}_x \times \mathbf{k} - \mathbf{P}_z \times \mathbf{i}) + \mathbf{k}(\mathbf{P}_y \times \mathbf{i} - \mathbf{P}_x \times \mathbf{j}) = \\ = \mathbf{P}^* - 3\mathbf{U}J_1(\mathbf{P}). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Подстановка приводит к соотношению

$$\text{rot}(\mathbf{P} \times \mathbf{R}) = (\text{rot } \mathbf{P}) \times \mathbf{R} + \mathbf{P}^* - 3\mathbf{U}J_1(\mathbf{P}). \quad (3.33)$$

#### § 4. Определение перемещения по тензору деформации

Имея в виду симметрию тензора деформации  $\mathbf{E}$  и соотношение (2.13), перепишем (2.14) в форме

$$d\mathbf{u} = d\mathbf{R} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{\Omega}), \quad (4.1)$$

и, поскольку правая часть этого выражения представляет полный дифференциал, должно иметь место соотношение

$$\text{rot}(\mathbf{E} - \mathbf{\Omega}) = 0. \quad (4.2)$$

Пользуясь таблицами (3.23) и (2.10), составляем таблицу компонентов тензора  $\text{rot} \mathbf{\Omega}$ . Тогда, имея в виду, что

$$\text{div} \boldsymbol{\omega} = \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0, \quad (4.3)$$

придём к таблице

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} & \frac{\partial \omega_x}{\partial y} & \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial x} & \frac{\partial \omega_y}{\partial y} & \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega_z}{\partial x} & \frac{\partial \omega_z}{\partial y} & \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \end{array} \right\}, \quad (4.4)$$

откуда по (2.2) и (4.2) следует, что

$$\text{rot} \mathbf{E} = \text{rot} \mathbf{\Omega} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\mathbf{R}}. \quad (4.5)$$

Это соотношение служит для выражения девяти производных проекций вектора  $\boldsymbol{\omega}$  по координатам через производные компонентов деформации.

Возвращаясь к (2.14), теперь можем по (2.3) написать:

$$\begin{aligned} d\mathbf{u} &= d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + d\mathbf{R} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{R} \times \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\mathbf{R}} \cdot d\mathbf{R} \right) = \\ &= d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + d\mathbf{R} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{R} \times (\text{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{R}). \end{aligned}$$

Последнее слагаемое преобразуется по (3.19)

$$\mathbf{R} \times (\text{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{R}) = (\mathbf{R} \times \text{rot} \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{R}$$

и далее по (3.18)

$$(\mathbf{R} \times \text{rot} \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{R} = d\mathbf{R} \cdot (\mathbf{R} \times \text{rot} \mathbf{E})^* = -d\mathbf{R} \cdot [(\text{rot} \mathbf{E})^* \times \mathbf{R}].$$

Приходим к соотношению

$$d\mathbf{u} = d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + d\mathbf{R} \cdot [\mathbf{E} - (\text{rot} \mathbf{E})^* \times \mathbf{R}]. \quad (4.6)$$

Первое слагаемое в этой формуле является полным дифференциалом. Поэтому и второе слагаемое должно представлять полный дифференциал. Приходим к важному соотношению

$$\text{rot} \Pi = \text{rot} [\mathbf{E} - (\text{rot} \mathbf{E})^* \times \mathbf{R}] = 0, \quad (4.7)$$

которому должен удовлетворять тензор деформации. Выразим это соотношение в явной форме, применив формулу (3.33), в которой  $\mathbf{P}$  следует заменить тензором  $(\text{rot } \mathbf{E})^*$ . Имеем:

$$\text{rot} [(\text{rot } \mathbf{E})^* \times \mathbf{R}] = [\text{rot} (\text{rot } \mathbf{E})^*] \times \mathbf{R} + (\text{rot } \mathbf{E})^{**} - 3\mathbf{U}_1 [(\text{rot } \mathbf{E})^*].$$

Замечая, что тензор, транспонированный транспонированному тензору, представляет исходный тензор, и учитывая (3.27), придём к формуле

$$\text{rot} [(\text{rot } \mathbf{E})^* \times \mathbf{R}] = [\text{rot} (\text{rot } \mathbf{E})^*] \times \mathbf{R} + \text{rot } \mathbf{E}, \quad (4.8)$$

и условие (4.7) представляется в виде

$$\text{rot } \Pi = - [\text{rot} (\text{rot } \mathbf{E})^*] \times \mathbf{R} = 0. \quad (4.9)$$

Это соотношение должно иметь место при произвольном  $\mathbf{R}$ . Поэтому тензор  $\mathbf{E}$  является деформацией при условии

$$\mathbf{Q} = \text{rot} (\text{rot } \mathbf{E})^* = 0. \quad (4.10)$$

Ротор от транспонированного ротора тензора деформации равен нулю.

Для вычисления компонентов тензора  $\mathbf{Q}$  следует применить правило, выражаемое таблицей (3.23) и транспонированной таблицей (3.23), заменив в ней тензор  $\mathbf{P}$  тензором деформации. Прделав это вычисление, найдём, что тензор  $\mathbf{Q}$  является симметричным, а компоненты его имеют выражения

$$\left. \begin{aligned} Q_{xx} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ Q_{xy} &= Q_{yx} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y}, \\ Q_{xz} &= Q_{zx} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x}, \\ Q_{yy} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x}, \\ Q_{yz} &= Q_{zy} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z}, \\ Q_{zz} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Условие обращения тензора  $\mathbf{Q}$  в нуль приводит, таким образом, к шести зависимостям Сен-Венана, называемым также условиями сплошности

$$\left. \begin{aligned} Q_{xx} &= 0, & Q_{xy} &= 0, & Q_{xz} &= 0, \\ & & Q_{yy} &= 0, & Q_{yz} &= 0, \\ & & & & Q_{zz} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Предполагая, что заданный тензор деформации удовлетворяет этим зависимостям, составим выражение вектора перемещения.

Перепишывая (2.14) в виде

$$d\tilde{u} = \tilde{E} \cdot d\tilde{R} + \tilde{\omega} \times d(\tilde{R} - R),$$

где  $R$  — вектор-радиус точки  $M$ , в которой разыскивается значение вектора перемещения,  $\tilde{R}$  — вектор-радиус переменной точки  $\tilde{M}$  на кривой  $M_0M$ , вдоль которой ведётся интегрирование, получим, воспроизведя ранее проведённые выкладки,

$$\begin{aligned} d\tilde{u} &= d[\tilde{\omega} \times (\tilde{R} - R)] + d\tilde{R} \cdot \{\tilde{E} - (\text{rot } \tilde{E})^* \times (\tilde{R} - R)\} = \\ &= d[\tilde{\omega} \times (\tilde{R} - R)] + d\tilde{R} \cdot \tilde{\Pi}, \end{aligned}$$

где для краткости обозначено

$$\tilde{\Pi} = \tilde{E} - (\text{rot } \tilde{E})^* \times (\tilde{R} - R), \quad (4.13)$$

причём знак над обозначением тензора  $E$  указывает, что значение этого тензора рассматривается в переменной точке  $\tilde{M}$  с вектор-радиусом  $\tilde{R}$ .

После интегрирования придём к соотношению

$$u(M) = u(M_0) + \omega(M_0) \times (R - \tilde{R}_0) + \int_{M_0}^M d\tilde{R} \cdot \tilde{\Pi}. \quad (4.14)$$

Эта формула определяет вектор перемещения в виде суммы двух слагаемых: во-первых, перемещения среды как твердого тела

$$u(M_0) + \omega(M_0) \times (R - R_0), \quad (4.15)$$

обусловленного перемещением в фиксированной точке  $M_0$  и поворотом вокруг этой точки, определяемым малым вектором поворота  $\omega(M_0)$ ; во-вторых, перемещением, обусловленным деформацией среды и определяемым заданием тензора деформации  $E$ .

Спроектировав выражение (4.13) на оси координат, найдём перемещения в точке  $M$ :

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \omega_{0y}(z - z_0) - \omega_{0z}(y - y_0) + \int_{M_0}^M (\tilde{\Pi}_{xx}d\tilde{x} + \tilde{\Pi}_{yx}d\tilde{y} + \tilde{\Pi}_{zx}d\tilde{z}), \\ v &= v_0 + \omega_{0z}(x - x_0) - \omega_{0x}(z - z_0) + \int_{M_0}^M (\tilde{\Pi}_{xy}d\tilde{x} + \tilde{\Pi}_{yy}d\tilde{y} + \tilde{\Pi}_{zy}d\tilde{z}), \\ w &= w_0 + \omega_{0x}(y - y_0) - \omega_{0y}(x - x_0) + \int_{M_0}^M (\tilde{\Pi}_{xz}d\tilde{x} + \tilde{\Pi}_{yz}d\tilde{y} + \tilde{\Pi}_{zz}d\tilde{z}), \end{aligned} \right\} (4.16)$$



где по (1.7):

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \tilde{\Pi}_{xx} & \tilde{\Pi}_{xy} & \tilde{\Pi}_{xz} \\ \tilde{\Pi}_{yx} & \tilde{\Pi}_{yy} & \tilde{\Pi}_{yz} \\ \tilde{\Pi}_{zx} & \tilde{\Pi}_{zy} & \tilde{\Pi}_{zz} \end{array} \right\} \quad (4.17)$$

— таблица компонентов тензора  $\tilde{\Pi}$ .

Транспонируем таблицу (3.23) и применяя (3.16), получим:

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\Pi}_{xx} = \tilde{\varepsilon}_{xx} - (\tilde{z} - z) \left( \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{xx}}{\partial \tilde{z}} - \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{zx}}{\partial \tilde{x}} \right) + (\tilde{y} - y) \left( \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{yx}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{xy}}{\partial \tilde{y}} \right), \\ \tilde{\Pi}_{xy} = \tilde{\varepsilon}_{xy} - (\tilde{x} - x) \left( \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{yx}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{xx}}{\partial \tilde{y}} \right) + (\tilde{z} - z) \left( \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{zx}}{\partial \tilde{y}} - \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{yz}}{\partial \tilde{z}} \right), \\ \tilde{\Pi}_{xz} = \tilde{\varepsilon}_{xz} - (\tilde{y} - y) \left( \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{zx}}{\partial \tilde{y}} - \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{yz}}{\partial \tilde{z}} \right) + (\tilde{x} - x) \left( \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{xx}}{\partial \tilde{z}} - \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{zx}}{\partial \tilde{x}} \right), \end{array} \right\} \quad (4.18)$$

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\Pi}_{yx} = \tilde{\varepsilon}_{yx} - (\tilde{z} - z) \left( \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{xy}}{\partial \tilde{z}} - \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{zy}}{\partial \tilde{x}} \right) + (\tilde{y} - y) \left( \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{yy}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{xy}}{\partial \tilde{y}} \right), \\ \tilde{\Pi}_{yy} = \tilde{\varepsilon}_{yy} - (\tilde{x} - x) \left( \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{yy}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{xy}}{\partial \tilde{y}} \right) + (\tilde{z} - z) \left( \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{zy}}{\partial \tilde{y}} - \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{yy}}{\partial \tilde{z}} \right), \\ \tilde{\Pi}_{yz} = \tilde{\varepsilon}_{yz} - (\tilde{y} - y) \left( \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{zy}}{\partial \tilde{y}} - \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{yy}}{\partial \tilde{z}} \right) + (\tilde{x} - x) \left( \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{xy}}{\partial \tilde{z}} - \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{zy}}{\partial \tilde{x}} \right), \end{array} \right\} \quad (4.19)$$

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\Pi}_{zx} = \tilde{\varepsilon}_{zx} - (\tilde{z} - z) \left( \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{xz}}{\partial \tilde{z}} - \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{zz}}{\partial \tilde{x}} \right) + (\tilde{y} - y) \left( \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{yz}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{xz}}{\partial \tilde{y}} \right), \\ \tilde{\Pi}_{zy} = \tilde{\varepsilon}_{zy} - (\tilde{x} - x) \left( \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{yz}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{xz}}{\partial \tilde{y}} \right) + (\tilde{z} - z) \left( \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{zz}}{\partial \tilde{y}} - \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{yz}}{\partial \tilde{z}} \right), \\ \tilde{\Pi}_{zz} = \tilde{\varepsilon}_{zz} - (\tilde{y} - y) \left( \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{zz}}{\partial \tilde{y}} - \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{yz}}{\partial \tilde{z}} \right) + (\tilde{x} - x) \left( \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{xz}}{\partial \tilde{z}} - \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{zz}}{\partial \tilde{x}} \right), \end{array} \right\} \quad (4.20)$$

В качестве примера определим перемещения при свободном всестороннем расширении среды, вызванном повышением температуры  $t$ . При такой деформации относительные удлинения равны друг другу и пропорциональны температуре

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha t, \quad (4.21)$$

а сдвиги равны нулю:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0. \quad (4.22)$$

Подстановка этих значений компонентов деформации в (4.11) показывает, что свободное температурное расширение является

возможным, если закон изменения температуры по объёму тела подчинён шести условиям:

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= \alpha \left( \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) = 0, & Q_{yy} &= \alpha \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) = 0, \\ Q_{zz} &= \alpha \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) = 0, & Q_{xy} &= -\alpha \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = 0, \\ Q_{yz} &= -\alpha \frac{\partial^2 t}{\partial y \partial z} = 0, & Q_{zx} &= -\alpha \frac{\partial^2 t}{\partial z \partial x} = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что все шесть вторых производных температуры по координатам должны быть равны нулю, т. е. температура представляет линейную функцию координат

$$t = t_0 + \theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z. \quad (4.23)$$

Значения перемещений получим по (4.16) и (4.18) — (4.20); после простого вычисления найдём:

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha \left( xt - \frac{1}{2} \theta_1 R^2 \right), & v &= \alpha \left( yt - \frac{1}{2} \theta_2 R^2 \right), \\ w &= \alpha \left( zt - \frac{1}{2} \theta_3 R^2 \right), \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

причём за начало координат принята точка  $M_0$  и слагаемые, соответствующие перемещению твёрдого тела, опущены.

При законе распределения температуры по объёму тела, отличном от линейного, свободное температурное расширение не будет иметь места; на деформацию, определяемую по (4.21) и (4.22), наложится добавочная деформация; обозначая через  $E'$  тензор этой деформации, можно представить тензор полной деформации в виде

$$E = \text{def } u = E' + Uat. \quad (4.25)$$

Было бы ошибочно думать, что вектор перемещения  $u$  также может быть представлен в виде суммы двух векторов  $u'$  и  $u''$  таких, что

$$\text{def } u' = E', \quad \text{def } u'' = Uat.$$

Действительно, тензоры  $E'$  и  $Uat$ , взятые по отдельности, не удовлетворяют условиям интегрируемости (4.10), т. е. векторы  $u'$  и  $u''$  не могут быть определены.

## § 5. Функции напряжений

Вернёмся к уравнениям равновесия сплошной среды (1.17), причём предположим, что известно частное решение этих уравнений, соответствующее действию объёмных сил, т. е. какое-либо значение  $T_0$  тензора напряжений, удовлетворяющее условиям

$$\text{div } T_0 + K = 0. \quad (5.1)$$

Тогда можно будет принять, что

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_1, \quad (5.2)$$

где  $\mathbf{T}_1$  — симметричный тензор, подчинённый условиям

$$\operatorname{div} \mathbf{T}_1 = 0. \quad (5.3)$$

По (3.26) можно удовлетворить условию (5.3), принимая, что

$$\mathbf{T}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{P}, \quad (5.4)$$

причём тензор  $\mathbf{P}$  должен быть выбран так, чтобы его ротор представлял симметричный тензор. Принимая для тензора диадное представление (3.2), имеем по (3.25) диадное представление его ротора

$$\operatorname{rot} \mathbf{P} = i \left( \frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z} \right) + j \left( \frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x} \right) + k \left( \frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y} \right).$$

Условие симметричности этого тензора может быть, как это было отмечено при выводе уравнений статики [ср. (1.19)], записано в форме обращения в нуль вектора

$$i \times \left( \frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z} \right) + j \times \left( \frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x} \right) + k \times \left( \frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y} \right) = 0. \quad (5.5)$$

Заменяв векторы  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$  по (3.3), после простого преобразования приведём это условие к виду

$$\begin{aligned} & i \left( \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z} \right) - 3i \frac{\partial}{\partial x} J_1(\mathbf{P}) + \\ & + j \left( \frac{\partial P_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial z} \right) - 3j \frac{\partial}{\partial y} J_1(\mathbf{P}) + \\ & + k \left( \frac{\partial P_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} \right) - 3k \frac{\partial}{\partial z} J_1(\mathbf{P}) = 0, \end{aligned}$$

где  $J_1(\mathbf{P})$  — след тензора  $\mathbf{P}$ . По (1.16) это условие можно записать в форме

$$\operatorname{div} \mathbf{P}^* - 3 \operatorname{grad} J_1(\mathbf{P}) = 0, \quad (5.6)$$

и ему можно удовлетворить, приняв

$$\mathbf{P} = (\operatorname{rot} \Phi)^*, \quad (5.7)$$

где  $\Phi$  — произвольный симметричный тензор. Действительно, тогда

$$\mathbf{P}^* = \operatorname{rot} \Phi \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \mathbf{P}^* = \operatorname{div} \operatorname{rot} \Phi = 0,$$

а с другой стороны, для симметричного тензора  $\Phi$  [ср. (3.27)]

$$J_1 [(\operatorname{rot} \Phi)^*] = 0.$$

Из (5.7) и (5.4) получаем:

$$\mathbf{T}_1 = \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \Phi)^*, \quad (5.8)$$

т. е. тензор напряжений, удовлетворяющий однородным уравнениям статики, является ротором транспонированного ротора произвольного симметричного тензора  $\Phi$ . Тензор  $\Phi$  называется тензором функций напряжений. Явное выражение напряжений через компоненты тензора  $\Phi$  можно сразу же написать по формулам (4.11), заменив в них  $Q_{xx}, \dots, Q_{zx}$  на  $\sigma_x, \dots, \tau_{zx}$ , а  $\varepsilon_{xx}, \dots, \varepsilon_{zx}$  — компонентами  $\Phi_{xx}, \dots, \Phi_{zx}$  тензора  $\Phi$ .

Полагая, что все недиагональные элементы этого тензора равны нулю, т. е. что

$$\Phi = ii\Phi_{xx} + jj\Phi_{yy} + kk\Phi_{zz}, \quad (5.9)$$

придём по (4.11) к выражению напряжений через три функции напряжений Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{zz}}{\partial y^2}, & \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi_{yz}}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{xx}}{\partial z^2}, & \tau_{yz} &= -\frac{\partial^2 \Phi_{zx}}{\partial y \partial z}, \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2 \Phi_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{yy}}{\partial x^2}, & \tau_{zx} &= -\frac{\partial^2 \Phi_{xy}}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

К выражениям напряжений через три функции напряжений, введённые Морера, придём, считая, что все диагональные элементы тензора  $\Phi$  равны нулю:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -2 \frac{\partial^2 \Phi_{yz}}{\partial y \partial x}, & \tau_{xy} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Phi_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_{xy}}{\partial z} \right), \\ \sigma_y &= -2 \frac{\partial^2 \Phi_{zx}}{\partial z \partial x}, & \tau_{yz} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_{yz}}{\partial x} \right), \\ \sigma_z &= -2 \frac{\partial^2 \Phi_{xy}}{\partial x \partial y}, & \tau_{zx} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Представления напряжений через функции напряжений Максвелла инвариантны; действительно, при переходе от выбранной декартовой системы координат к другой декартовой системе тензор, ранее диагональный, перестает быть таковым, и формулы (5.10) изменяют свой вид. То же относится к функциям напряжений Морера.

Тензор функций напряжений определен с точностью до тензора  $\Psi$ , удовлетворяющего требованию

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \Psi)^* = 0, \quad (5.12)$$

так как добавление такого тензора к  $\Phi$  не меняет по (5.8) значений компонентов напряжения. Но согласно § 4 соотношению (5.12) удо-

влетворяет любая деформация, т. е. тензор  $\Psi$  может быть представлен в виде

$$\Psi = \text{def } \mathbf{a}, \quad (5.13)$$

где  $\mathbf{a}$  — произвольный вектор. Итак, можно принять

$$\Phi = \Phi_0 + \text{def } \mathbf{a},$$

где  $\Phi_0$  — любой симметричный тензор,  $\mathbf{a}$  — произвольный вектор.

### § 6. Ортогональные криволинейные координаты

Три числа, однозначно определяющие положение точки в пространстве трёх измерений, могут рассматриваться как координаты этой точки. Установив закон выбора этих чисел для любой точки некоторой области, мы вводим тем самым некоторую криволинейную систему координат. Если  $\mathbf{R}$  обозначает вектор-радиус рассматриваемой точки  $M$  по отношению к началу отсчёта  $O$ , то в силу однозначности соответствия между определением положения точки  $M$  с помощью вектор-радиуса и с помощью совокупности трёх чисел  $q_1, q_2, q_3$  можно написать:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(q_1, q_2, q_3) \quad (6.1)$$

или

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3), \quad (6.2)$$

где  $x, y, z$  — декартовы координаты точки  $M$  в системе осей, имеющей начало в  $O$ .

Если поочередно придавать одной из координат фиксированное значение и менять две другие, то уравнения

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(q_1^0, q_2, q_3), \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}(q_1, q_2^0, q_3), \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}(q_1, q_2, q_3^0)$$

представят поверхности, называемые координатными поверхностями. Точка  $M_0$  с криволинейными координатами  $q_1^0, q_2^0, q_3^0$  является точкой пересечения трёх указанных координатных поверхностей. Уравнения

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(q_1^0, q_2^0, q_3), \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}(q_1, q_2^0, q_3^0), \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}(q_1^0, q_2, q_3^0)$$

представляют линии пересечения соответствующих координатных поверхностей и называются координатными линиями. Единичные векторы  $\mathbf{e}_i$  касательных к координатным линиям определяют в каждой точке три направления осей выбранной системы криволинейных координат.

Эти единичные векторы определяются равенствами

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad (6.3)$$

где величины

$$H_\alpha = \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_\alpha} \right| = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_\alpha}} \quad (6.4)$$

называются коэффициентами Ляме. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только ортогональных криволинейных координат.

Тогда единичные векторы  $e_1, e_2, e_3$  будут удовлетворять трём соотношениям

$$e_\alpha \cdot e_\beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta).$$

Если же  $\alpha = \beta$ , то имеем соотношения

$$e_\alpha \cdot e_\alpha = 1,$$

выражающие, что векторы  $e_\alpha$  — единичные. Если ввести в рассмотрение дельта-символ Кронекера

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta, \\ 0 & \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad (6.5)$$

то шести предыдущим соотношениям можно придать вид

$$e_\alpha \cdot e_\beta = \delta_{\alpha\beta}. \quad (6.6)$$

Введём также символ Леви-Чивита  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ , определив его следующим образом:  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 0$ , если в числе индексов  $\alpha, \beta, \gamma$  имеются одинаковые;  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 1$ , если все индексы  $\alpha, \beta, \gamma$  различны и следуют в порядке 1, 2, 3 или составляют круговую перестановку этого порядка (т. е. 2, 3, 1 и 3, 1, 2); наконец,  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = -1$ , если в записи различных индексов  $\alpha, \beta, \gamma$  нарушен порядок чисел 1, 2, 3 или их круговой перестановки. Применяя символ  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ , можно написать:

$$e_\alpha \times e_\beta = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} e_\gamma. \quad (6.7)$$

Выведем выражение квадрата дифференциала дуги любой кривой в заданной системе криволинейных координат; имеем:

$$dR = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} dq_\alpha = \sum_{\alpha=1}^3 H_\alpha e_\alpha dq_\alpha;$$

из этого выражения и из (6.6) следует, что

$$(ds)^2 = dR \cdot dR = \sum_{\alpha=1}^3 H_\alpha^2 (dq_\alpha)^2. \quad (6.8)$$

В последующем основное значение имеют формулы дифференцирования (деривационные формулы) основных векторов. Замечая, что

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial q_\beta}$$

представляет вектор в точке  $M$ , представим его как геометрическую сумму трёх векторов, имеющих направление единичных векторов  $e_\alpha$  в этой точке:

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial q_\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \ \beta \end{pmatrix} e_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \ \beta \end{pmatrix} e_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \ \beta \end{pmatrix} e_3 = \sum_{\gamma=1}^3 \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \ \beta \end{pmatrix} e_\gamma. \quad (6.9)$$

Для коэффициента при  $e_\gamma$  в представлении производной от  $e_\alpha$  по  $q_\beta$  введено обозначение

$$\left( \begin{array}{c} \gamma \\ \alpha \ \beta \end{array} \right);$$

в тензорном анализе за основные векторы принимают не единичные векторы  $e_\alpha$ , а соответствующие производные  $\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}$ ; коэффициент при  $\frac{\partial R}{\partial q_\gamma}$  в представлении производной этого вектора по  $q_\beta$  называется символом Кристоффеля второго рода (волнистые скобки) и обозначается

$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma \\ \alpha \ \beta \end{array} \right\},$$

так что

$$\frac{\partial^2 R}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} = \sum_{\gamma=1}^s \left\{ \begin{array}{c} \gamma \\ \alpha \ \beta \end{array} \right\} \frac{\partial R}{\partial q_\gamma}. \quad (6.10)$$

Повторяющийся индекс, по которому производится суммирование, называют немой индексом; мы условимся в дальнейшем опускать в записях знак суммы по нему; к нему не придаем значения 1, 2, 3 и сложить полученные выражения. Конечно, немой индекс может быть заменён любой другой буквой. Если в некотором выражении имеется повторяющийся индекс, по которому суммирование не производится, то это каждый раз особо оговаривается (не суммировать!).

Записав в соответствии с этим условием выражение (6.9) в виде

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial q_\beta} = \left( \begin{array}{c} \sigma \\ \alpha \ \beta \end{array} \right) e_\sigma, \quad (6.11)$$

умножим обе части скалярно на  $e_\gamma$ . Получим по (6.6)

$$e_\gamma \cdot \frac{\partial e_\alpha}{\partial q_\beta} = \left( \begin{array}{c} \sigma \\ \alpha \ \beta \end{array} \right) e_\sigma \cdot e_\gamma = \left( \begin{array}{c} \sigma \\ \alpha \ \beta \end{array} \right) \delta_{\sigma\gamma} = \left( \begin{array}{c} \gamma \\ \alpha \ \beta \end{array} \right).$$

Таким образом (не суммировать по  $\alpha$ ,  $\gamma$ !),

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c} \gamma \\ \alpha \ \beta \end{array} \right) &= e_\gamma \cdot \frac{\partial e_\alpha}{\partial q_\beta} = \frac{1}{H_\gamma} \frac{\partial R}{\partial q_\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left( \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} \right) = \\ &= - \frac{1}{H_\gamma H_\alpha^2} \frac{\partial R}{\partial q_\gamma} \cdot \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_\beta} + \frac{1}{H_\gamma H_\alpha} \frac{\partial R}{\partial q_\gamma} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} = \\ &= - \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_\beta} \delta_{\gamma\alpha} + \frac{1}{H_\gamma H_\alpha} \frac{\partial R}{\partial r_\gamma} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial q_\beta \partial q_\alpha}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Надо найти скалярное произведение  $\frac{\partial R}{\partial q_\gamma} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial q_\beta \partial q_\alpha}$ . Имеем (в формулах (6.13) — (6.18) не суммировать по повторяющимся индексам!):

$$\frac{\partial R}{\partial q_\gamma} \cdot \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = H_\gamma H_\alpha \delta_{\gamma\alpha}. \quad (6.13)$$

Продифференцировав это выражение по  $q_\beta$ , получим:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial q_\beta \partial q_\gamma} \cdot \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial R}{\partial q_\gamma} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} = \frac{\partial H_\gamma H_\alpha}{\partial q_\beta} \delta_{\gamma\alpha}. \quad (6.14)$$

Переставляя в круговом порядке буквы, получим ещё два выражения:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial q_\gamma \partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial R}{\partial q_\beta} + \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial q_\gamma \partial q_\beta} = \frac{\partial H_\alpha H_\beta}{\partial q_\gamma} \delta_{\alpha\beta}, \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \cdot \frac{\partial R}{\partial q_\gamma} + \frac{\partial R}{\partial q_\beta} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial q_\alpha \partial q_\gamma} = \frac{\partial H_\beta H_\gamma}{\partial q_\alpha} \delta_{\beta\gamma}. \quad (6.16)$$

Сложив эти три выражения и вычтя из их полусуммы (6.15), найдём значение скалярного произведения

$$\frac{\partial R}{\partial q_\gamma} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} = \frac{1}{2} \left[ \delta_{\gamma\alpha} \frac{\partial H_\gamma H_\alpha}{\partial q_\beta} + \delta_{\beta\gamma} \frac{\partial H_\beta H_\gamma}{\partial q_\alpha} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial H_\alpha H_\beta}{\partial q_\gamma} \right], \quad (6.17)$$

и подстановка в (6.12) даёт значения искомым коэффициентов

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c} \gamma \\ \alpha \beta \end{array} \right) = & -\frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_\beta} \delta_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2H_\gamma H_\alpha} \left[ \delta_{\gamma\alpha} \frac{\partial H_\gamma H_\alpha}{\partial q_\beta} + \right. \\ & \left. + \delta_{\beta\gamma} \frac{\partial H_\beta H_\gamma}{\partial q_\alpha} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial H_\alpha H_\beta}{\partial q_\gamma} \right]. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Из этих выражений видно, что

$$\left( \begin{array}{c} \gamma \\ \alpha \beta \end{array} \right) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma, \quad \left( \begin{array}{c} \alpha \\ \alpha \beta \end{array} \right) = 0, \quad \left( \begin{array}{c} \alpha \\ \alpha \alpha \end{array} \right) = 0, \quad (6.19)$$

и отличны от нуля двенадцать коэффициентов ( $\gamma \neq \alpha$ )

$$\left( \begin{array}{c} \gamma \\ \alpha \alpha \end{array} \right) = -\frac{1}{H_\gamma} \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_\gamma}, \quad \left( \begin{array}{c} \gamma \\ \alpha \gamma \end{array} \right) = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\gamma}{\partial q_\alpha} \quad (6.20)$$

(не суммировать!).

Таким образом, развёрнутое выражение дериационных формул

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial q_\beta} = \left( \begin{array}{c} \gamma \\ \alpha \beta \end{array} \right) e_\gamma \quad (6.21)$$

имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial e_1}{\partial q_1} &= -\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} e_2 - \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} e_3, \\ \frac{\partial e_1}{\partial q_2} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} e_2, \quad \frac{\partial e_1}{\partial q_3} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} e_3. \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial e_2}{\partial q_2} &= -\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} e_3 - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} e_1, \\ \frac{\partial e_2}{\partial q_3} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} e_3, \quad \frac{\partial e_2}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} e_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial e_3}{\partial q_3} &= -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} e_1 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} e_2, \\ \frac{\partial e_3}{\partial q_1} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} e_1, \quad \frac{\partial e_3}{\partial q_2} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} e_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$



С помощью деривационных формул легко установить зависимости Ляме, существующие между коэффициентами Ляме. Для этого продифференцируем (6.21) по  $q_\rho$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_\alpha}{\partial q_\rho \partial q_\beta} &= \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{pmatrix} \frac{\partial e_\gamma}{\partial q_\rho} + e_\gamma \frac{\partial}{\partial q_\rho} \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \gamma \rho \end{pmatrix} e_\sigma + e_\sigma \frac{\partial}{\partial q_\rho} \begin{pmatrix} \sigma \\ \alpha \beta \end{pmatrix} = \\ &= e_\sigma \left[ \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \gamma \rho \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial q_\rho} \begin{pmatrix} \sigma \\ \alpha \beta \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Меняя индексы  $\rho$  и  $\beta$  местами, получим также:

$$\frac{\partial^2 e_\alpha}{\partial q_\beta \partial q_\rho} = e_\sigma \left[ \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \gamma \beta \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial q_\beta} \begin{pmatrix} \sigma \\ \alpha \rho \end{pmatrix} \right].$$

Записав условие равенства этих выражений, придём к искомым зависимостям

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \gamma \rho \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \gamma \beta \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial q_\rho} \begin{pmatrix} \sigma \\ \alpha \beta \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial q_\beta} \begin{pmatrix} \sigma \\ \alpha \rho \end{pmatrix} = 0. \quad (6.25)$$

Подробное рассмотрение этих зависимостей для различных значений  $\alpha, \beta, \sigma, \rho$ , принимающих значения 1, 2, 3 (причём  $\beta \neq \rho$ ), приводит после подстановки значений величин (6.19), (6.20), обозначенных скобками, к шести не обращающимся тождественно в нуль соотношениям. Это будут соотношения вида

$$\frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \right) + \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \right) + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} = 0 \quad (6.26)$$

и вида

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial q_2 \partial q_3} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_3} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \quad (6.27)$$

и соотношения, получающиеся из написанных путём круговой замены индексов.

В случае цилиндрических координат (высота  $z$ , радиус цилиндра  $r$  и полярный угол  $\varphi$ ) имеем  $H_z = 1$ ,  $H_r = 1$ ,  $H_\varphi = r$ , и из двенадцати скобок отличны от нуля только две:

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \varphi \end{pmatrix} = -1, \quad \begin{pmatrix} \varphi \\ r \varphi \end{pmatrix} = 1. \quad (6.28)$$

Для сферических координат (радиус сферы  $R$ , полюсный угол  $\vartheta$  и угол долготы  $\psi$ ) имеем  $H_R = 1$ ,  $H_\vartheta = R$ ,  $H_\psi = R \sin \vartheta$ , и вычисления по (6.19), (6.20) приводит к выражениям

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} R \\ \vartheta \vartheta \end{pmatrix} &= -1, & \begin{pmatrix} R \\ \psi \psi \end{pmatrix} &= -\sin \vartheta, & \begin{pmatrix} \vartheta \\ \psi \psi \end{pmatrix} &= -\cos \vartheta, \\ \begin{pmatrix} \vartheta \\ R \vartheta \end{pmatrix} &= 1, & \begin{pmatrix} \psi \\ R \psi \end{pmatrix} &= \sin \vartheta, & \begin{pmatrix} \psi \\ \vartheta \psi \end{pmatrix} &= \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

Пользуясь дериационными формулами, легко составить выражения основных дифференциальных операций над единичными векторами. Заметим для этого, что выражение набла-оператора в криволинейных координатах представляется в виде

$$\nabla = e_\beta \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial}{\partial q_\beta} = \frac{e_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{e_2}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{e_3}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3}. \quad (6.30)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{div} e_\alpha &= \nabla \cdot e_\alpha = \frac{1}{H_\beta} e_\beta \cdot \frac{\partial e_\alpha}{\partial q_\beta} = \frac{1}{H_\beta} \left( \begin{array}{c} \gamma \\ \alpha \ \beta \end{array} \right) e_\beta \cdot e_\gamma = \frac{1}{H_\beta} \left( \begin{array}{c} \gamma \\ \alpha \ \beta \end{array} \right) \delta_{\beta\gamma} = \\ &= \frac{1}{H_\beta} \left( \begin{array}{c} \beta \\ \alpha \ \beta \end{array} \right) = \frac{1}{H_1} \left( \begin{array}{c} 1 \\ \alpha \ 1 \end{array} \right) + \frac{1}{H_2} \left( \begin{array}{c} 2 \\ \alpha \ 2 \end{array} \right) + \frac{1}{H_3} \left( \begin{array}{c} 3 \\ \alpha \ 3 \end{array} \right). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Одно из трёх слагаемых по (6.19) будет нулём. Аналогично найдём:

$$\operatorname{rot} e_\alpha = \nabla \times e_\alpha = \frac{1}{H_\beta} \left( \begin{array}{c} \gamma \\ \alpha \ \beta \end{array} \right) e_\beta \times e_\alpha = \frac{1}{H_\beta} \left( \begin{array}{c} \gamma \\ \alpha \ \beta \end{array} \right) \epsilon_{\beta\alpha\delta} e_\delta, \quad (6.32)$$

и проекция  $\operatorname{rot} e_\alpha$  на ось  $\delta$  равна

$$(\operatorname{rot} e_\alpha)_\delta = \frac{1}{H_\beta} \left( \begin{array}{c} \gamma \\ \alpha \ \beta \end{array} \right) \epsilon_{\beta\alpha\delta}.$$

При фиксированном  $\delta$  имеются две комбинации индексов, для которой величины  $\epsilon_{\beta\alpha\delta}$  не обращаются в нуль: одна  $\beta = \beta_0$ ,  $\gamma = \gamma_0$  ( $\beta_0 \neq \gamma_0 \neq \delta$ ), вторая —  $\beta = \gamma_0$ ,  $\gamma = \beta_0$ ; пусть  $\epsilon_{\beta_0\gamma_0\delta} = 1$ . Тогда

$$(\operatorname{rot} e_\alpha)_\delta = \frac{1}{H_{\beta_0}} \left( \begin{array}{c} \gamma_0 \\ \alpha \ \beta_0 \end{array} \right) - \frac{1}{H_{\gamma_0}} \left( \begin{array}{c} \beta_0 \\ \alpha \ \gamma_0 \end{array} \right).$$

Если  $\alpha = \delta$ , то обе скобки обращаются в нуль, так как все индексы в них различны. Если же  $\alpha \neq \delta$ , то будет отлична от нуля та скобка, в которой  $\alpha$  равен соседнему индексу справа. Итак,  $(\operatorname{rot} e_\alpha)_\alpha = 0$ ; если же  $\alpha \neq \delta$ , то  $(\operatorname{rot} e_\alpha)_\delta$  содержит лишь одно слагаемое.

Аналогично составляются дифференциальные операции от диады  $e_\alpha e_\beta$ . Например,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} e_\alpha e_\beta &= \nabla \cdot e_\alpha e_\beta = \frac{1}{H_\gamma} e_\gamma \cdot \frac{\partial}{\partial q_\gamma} e_\alpha e_\beta = \\ &= \frac{1}{H_\gamma} \left( \begin{array}{c} \delta \\ \alpha \ \gamma \end{array} \right) e_\gamma \cdot e_\alpha e_\beta + \frac{1}{H_\gamma} \left( \begin{array}{c} \delta \\ \beta \ \gamma \end{array} \right) e_\gamma \cdot e_\alpha e_\delta = \frac{1}{H_\delta} \left( \begin{array}{c} \delta \\ \alpha \ \delta \end{array} \right) e_\beta + \frac{1}{H_\alpha} \left( \begin{array}{c} \delta \\ \beta \ \alpha \end{array} \right) e_\delta \end{aligned} \quad (6.33)$$

(не суммировать по  $\alpha$ !).

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} e_\alpha e_\beta &= \frac{1}{H_\gamma} e_\gamma \times \frac{\partial}{\partial q_\gamma} e_\alpha e_\beta = \frac{1}{H_\gamma} \left( \begin{array}{c} \delta \\ \alpha \ \gamma \end{array} \right) e_\gamma \times e_\alpha e_\beta + \frac{1}{H_\gamma} \left( \begin{array}{c} \delta \\ \beta \ \gamma \end{array} \right) e_\gamma \times e_\alpha e_\delta = \\ &= \frac{1}{H_\gamma} \left( \begin{array}{c} \delta \\ \alpha \ \gamma \end{array} \right) \epsilon_{\gamma\alpha\sigma} e_\sigma e_\beta + \frac{1}{H_\gamma} \left( \begin{array}{c} \delta \\ \beta \ \gamma \end{array} \right) \epsilon_{\gamma\alpha\sigma} e_\sigma e_\delta \end{aligned} \quad (6.34)$$

и т. д.

Применим эти правила к составлению  $\operatorname{div} \mathbf{a}$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  и тензора  $\operatorname{grad} \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}$  — вектор с проекциями  $a_\alpha$  на оси системы криволинейных координат

$$\mathbf{a} = a_\alpha \mathbf{e}_\alpha. \quad (6.35)$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{a} &= \nabla \cdot a_\alpha \mathbf{e}_\alpha = \frac{1}{H_\beta} \mathbf{e}_\beta \cdot \frac{\partial}{\partial q_\beta} a_\alpha \mathbf{e}_\alpha = \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial q_\beta} \delta_{\beta\alpha} + \frac{a_\alpha}{H_\beta} \left( \begin{array}{c} \gamma \\ \alpha \beta \end{array} \right) \delta_{\beta\gamma} = \\ &= \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial a_\alpha}{\partial q_\alpha} + \frac{a_\alpha}{H_\beta} \left( \begin{array}{c} \beta \\ \alpha \beta \end{array} \right). \end{aligned} \quad (6.36)$$

Развернув это выражение и применив (6.20), найдём:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 a_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 a_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 a_3) \right]. \quad (6.37)$$

Пользуясь (6.32), теперь составим  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ :

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times a_\alpha \mathbf{e}_\alpha = \left[ \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial q_\beta} \in_{\beta\alpha\sigma} + \frac{a_\alpha}{H_\beta} \left( \begin{array}{c} \gamma \\ \alpha \beta \end{array} \right) \in_{\beta\gamma\sigma} \right] \mathbf{e}_\sigma.$$

Применив приведённое выше рассуждение и учитывая (6.20), получим проекции  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ :

$$\left. \begin{aligned} (\operatorname{rot} \mathbf{a})_1 &= \frac{1}{H_2 H_3} \left( \frac{\partial a_3 H_3}{\partial q_2} - \frac{\partial a_2 H_2}{\partial q_3} \right), \\ (\operatorname{rot} \mathbf{a})_2 &= \frac{1}{H_3 H_1} \left( \frac{\partial a_1 H_1}{\partial q_3} - \frac{\partial a_3 H_3}{\partial q_1} \right), \\ (\operatorname{rot} \mathbf{a})_3 &= \frac{1}{H_1 H_2} \left( \frac{\partial a_2 H_2}{\partial q_1} - \frac{\partial a_1 H_1}{\partial q_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

Те же правила вычисления дают значение тензора

$$\operatorname{grad} \mathbf{a} = \nabla \mathbf{a} = \frac{1}{H_\beta} \mathbf{e}_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta} a_\alpha \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\beta \mathbf{e}_\alpha \left[ \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial q_\beta} + \frac{a_\gamma}{H_\beta} \left( \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma \beta \end{array} \right) \right]. \quad (6.39)$$

Транспонированный тензор имеет выражение

$$\frac{d\mathbf{a}}{dR} = \mathbf{e}_\beta \mathbf{e}_\alpha \left[ \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial a_\beta}{\partial q_\alpha} + \frac{a_\gamma}{H_\alpha} \left( \begin{array}{c} \beta \\ \gamma \alpha \end{array} \right) \right]. \quad (6.40)$$

В заключение отметим выражение градиента скаляра

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{H_\alpha \partial q_\alpha} \mathbf{e}_\alpha. \quad (6.41)$$

По (6.37) легко составить выражение лапласиана

$$\begin{aligned} \Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.42)$$

### § 7. Основные соотношения механики сплошной среды в криволинейных координатах

Соотношения, полученные в §§ 1, 2, 4 и 5, были сформулированы в инвариантной форме. Это позволяет тотчас же, руководствуясь правилами, установленными в § 6, записать эти соотношения в криволинейных координатах. Начнём с уравнений равновесия сплошной среды. Надо составить выражение вектора  $\operatorname{div} \mathbf{T}$  — дивергенции тензора напряжений  $\mathbf{T}$ . Диадное представление этого тензора имеет вид

$$\mathbf{T} = e_\alpha e_\beta \tau_{\alpha\beta}, \quad (7.1)$$

где  $\tau_{\alpha\beta}$  — компоненты тензора напряжения,  $\tau_{\alpha\alpha} = \sigma_\alpha$  — нормальное напряжение на площадке координатной поверхности  $q_\alpha = q_\alpha^0$ ,  $\tau_{\alpha\beta}$  — касательное напряжение на этой площадке, направленное по оси  $\beta$ . Вследствие симметрии тензора  $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$ .

Применив способ вычисления, объяснённый при составлении (6.33), получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T} &= \delta_{\gamma\alpha} e_\beta \frac{1}{H_\gamma} \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial q_\gamma} + \frac{\tau_{\alpha\beta}}{H_\delta} \left( \begin{smallmatrix} \delta \\ \alpha \delta \end{smallmatrix} \right) e_\beta + \frac{\tau_{\alpha\beta}}{H_\alpha} \left( \begin{smallmatrix} \delta \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right) e_\delta = \\ &= e_\beta \left[ \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial q_\alpha} + \frac{\tau_{\alpha\beta}}{H_\delta} \left( \begin{smallmatrix} \delta \\ \alpha \delta \end{smallmatrix} \right) + \frac{\tau_{\alpha\delta}}{H_\alpha} \left( \begin{smallmatrix} \beta \\ \delta \alpha \end{smallmatrix} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Проекция на ось  $e_1$ , таким образом, равна

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \mathbf{T})_1 &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \tau_{21}}{\partial q_2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial \tau_{31}}{\partial q_3} + \tau_{11} \left[ \frac{1}{H_2} \left( \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{smallmatrix} \right) + \frac{1}{H_3} \left( \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \ 3 \end{smallmatrix} \right) \right] + \\ &+ \tau_{21} \left[ \frac{1}{H_1} \left( \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \ 1 \end{smallmatrix} \right) + \frac{1}{H_3} \left( \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \ 3 \end{smallmatrix} \right) \right] + \tau_{31} \left[ \frac{1}{H_1} \left( \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \ 1 \end{smallmatrix} \right) + \frac{1}{H_2} \left( \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \ 2 \end{smallmatrix} \right) \right] + \frac{\tau_{12}}{H_1} \left( \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \ 1 \end{smallmatrix} \right) + \\ &+ \frac{\tau_{13}}{H_1} \left( \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \ 1 \end{smallmatrix} \right) + \frac{\tau_{22}}{H_2} \left( \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{smallmatrix} \right) + \frac{\tau_{33}}{H_3} \left( \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \ 3 \end{smallmatrix} \right). \end{aligned}$$

Заменив скобки их значениями по (6.20), придём к уравнению равновесия

$$\begin{aligned} &\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial (H_2 H_3 \sigma_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial H_3 H_1 \tau_{21}}{\partial q_2} + \frac{\partial H_1 H_2 \tau_{31}}{\partial q_3} \right] + \\ &+ \frac{\tau_{12}}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{\tau_{13}}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{\sigma_2}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{\sigma_3}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + K_1 = 0, \end{aligned} \quad (7.3)$$

и ещё к двум уравнениям, получающимся при круговой перестановке индексов.

Выражение тензора деформации через перемещения находим по (2.6), (6.39) и (6.40):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} e_\beta e_\alpha \left[ \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial q_\beta} + \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial u_\beta}{\partial q_\alpha} + \frac{u_\gamma}{H_\beta} \left( \begin{smallmatrix} \alpha \\ \gamma \ \beta \end{smallmatrix} \right) + \frac{u_\gamma}{H_\alpha} \left( \begin{smallmatrix} \beta \\ \gamma \ \alpha \end{smallmatrix} \right) \right]. \quad (7.4)$$

Отсюда получаем относительные удлинения

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial q_1} + \frac{u_2}{H_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{u_3}{H_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial q_1} + \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{u_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (7.5)$$

и сдвиги

$$\gamma_{12} = 2e_{12} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial q_2} - \frac{u_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \text{ и т. д.} \quad (7.6)$$

Переходим к составлению условий сплошности в ортогональных криволинейных координатах. По (6.34) легко составить выражение ротора любого тензора  $\mathbf{P}$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = \text{rot } \mathbf{P} &= \nabla \times \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta P_{\alpha\beta} = \\ &= \mathbf{e}_\sigma \mathbf{e}_\rho \left\{ \left[ \frac{\partial P_{\sigma\beta}}{\partial q_\gamma} + \frac{P_{\alpha\delta}}{H_\gamma} \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \\ \gamma \end{pmatrix} \right] \in \gamma^{\alpha\sigma} + \frac{P_{\alpha\beta}}{H_\gamma} \begin{pmatrix} \delta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \in \gamma^{\delta\sigma} \right\} = \mathbf{e}_\sigma \mathbf{e}_\rho M_{\sigma\rho}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Транспонированный тензор записывается в виде

$$(\text{rot } \mathbf{P})^* = \mathbf{e}_\sigma \mathbf{e}_\rho M_{\rho\sigma} = \mathbf{M}^*. \quad (7.8)$$

Найдём, например,  $M_{11}$ . По (7.7) имеем:

$$M_{11} = \left[ \frac{\partial P_{\alpha 1}}{\partial q_\gamma} + \frac{P_{\alpha\delta}}{H_\gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \\ \gamma \end{pmatrix} \right] \in \gamma^{\alpha 1} + \frac{P_{\alpha 1}}{H_\gamma} \begin{pmatrix} \delta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \in \gamma^{\delta 1}.$$

В символах Леви-Чивита фиксирован последний индекс; этим определены значения двух остающихся индексов. Получаем:

$$M_{11} = \frac{\partial P_{31}}{H_2 \partial q_2} + \frac{P_{3\delta}}{H_2} \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \\ 2 \end{pmatrix} - \left[ \frac{\partial P_{21}}{H_3 \partial q_3} + \frac{P_{2\delta}}{H_3} \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \\ 3 \end{pmatrix} \right] + \frac{P_{\alpha 1}}{H_2} \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{P_{\alpha 1}}{H_3} \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отличными от нуля в этом выражении могут быть только скобки, в которых нижние индексы одинаковы. Итак,

$$\begin{aligned} M_{11} &= \frac{\partial P_{31}}{H_2 \partial q_2} + \frac{P_{32}}{H_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \left[ \frac{\partial P_{21}}{H_3 \partial q_3} + \frac{P_{23}}{H_3} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right] + \\ &\quad + \frac{P_{21}}{H_2} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{P_{31}}{H_3} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и остаётся подставить значения скобок по (6.20). Получаем:

$$M_{11} = \frac{1}{H_2 H_3} \left( \frac{\partial P_{31} H_3}{\partial q_2} - \frac{\partial P_{21} H_2}{\partial q_3} \right) + P_{23} \frac{\partial \ln H_3}{H_1 \partial q_1} - P_{32} \frac{\partial \ln H_2}{H_1 \partial q_1}.$$

Выражения компонентов тензора  $\text{rot } \mathbf{P}$  приведены в таблице 1. Эта же таблица даёт компоненты транспонированного тензора  $(\text{rot } \mathbf{P})^*$ .

Для вычисления компонентов тензора  $\mathbf{Q} = \text{rot}(\text{rot } \mathbf{E})^*$  следует, заменив в таблице 1  $P_{ik}$  на  $\varepsilon_{ik}$  и найдя  $M_{ik}$ , проделать операции, указываемые этой же таблицей, над  $M_{ki} = M_{ik}^*$ . Таким образом придём к условиям сплошности. Общее выражение их будет громоздким.

Таблица 1

Тензоры  $\text{rot } \mathbf{P} = \mathbf{M}$  и  $(\text{rot } \mathbf{P})^* = \mathbf{M}^*$ 

	1	2	3
1	$M_{11} = M_{11}^* = \frac{1}{H_2 H_3} \left( \frac{\partial P_{31} H_3}{\partial q_3} - \frac{\partial P_{31} H_2}{\partial q_2} \right) + P_{22} \frac{\partial \ln H_3}{H_1 \partial q_1} - P_{22} \frac{\partial \ln H_2}{H_1 \partial q_1}$	$M_{12} = M_{21}^* = \frac{1}{H_2 H_3} \left( \frac{\partial P_{23} H_3}{\partial q_3} - \frac{\partial P_{23} H_2}{\partial q_2} \right) + P_{31} \frac{\partial \ln H_2}{H_1 \partial q_1} + P_{32} \frac{\partial \ln H_3}{H_2 \partial q_2} + P_{22} \frac{\partial \ln H_2}{H_2 \partial q_2}$	$M_{13} = M_{31}^* = \frac{1}{H_2 H_3} \left( \frac{\partial P_{32} H_3}{\partial q_3} - \frac{\partial P_{32} H_2}{\partial q_2} \right) - P_{22} \frac{\partial \ln H_2}{H_2 \partial q_2} - P_{31} \frac{\partial \ln H_3}{H_1 \partial q_1} - P_{22} \frac{\partial \ln H_3}{H_2 \partial q_2}$
2	$M_{21} = M_{13}^* = \frac{1}{H_3 H_1} \left( \frac{\partial P_{11} H_1}{\partial q_3} - \frac{\partial P_{31} H_3}{\partial q_1} \right) - P_{13} \frac{\partial \ln H_3}{H_1 \partial q_1} - P_{13} \frac{\partial \ln H_1}{H_2 \partial q_2} - P_{13} \frac{\partial \ln H_1}{H_3 \partial q_3}$	$M_{22} = M_{22}^* = \frac{1}{H_3 H_1} \left( \frac{\partial P_{12} H_1}{\partial q_3} - \frac{\partial P_{23} H_3}{\partial q_1} \right) + P_{31} \frac{\partial \ln H_1}{H_2 \partial q_2} - P_{13} \frac{\partial \ln H_3}{H_2 \partial q_2}$	$M_{23} = M_{32}^* = \frac{1}{H_3 H_1} \left( \frac{\partial P_{11} H_1}{\partial q_3} - \frac{\partial P_{31} H_3}{\partial q_1} \right) + P_{13} \frac{\partial \ln H_3}{H_2 \partial q_2} + P_{11} \frac{\partial \ln H_3}{H_1 \partial q_1} + P_{31} \frac{\partial \ln H_1}{H_3 \partial q_3}$
3	$M_{31} = M_{13}^* = \frac{1}{H_1 H_2} \left( \frac{\partial P_{21} H_2}{\partial q_1} - \frac{\partial P_{12} H_1}{\partial q_2} \right) + P_{22} \frac{\partial \ln H_1}{H_2 \partial q_2} + P_{22} \frac{\partial \ln H_1}{H_2 \partial q_2} + P_{12} \frac{\partial \ln H_2}{H_1 \partial q_1}$	$M_{32} = M_{23}^* = \frac{1}{H_1 H_2} \left( \frac{\partial P_{22} H_2}{\partial q_1} - \frac{\partial P_{12} H_1}{\partial q_2} \right) - P_{31} \frac{\partial \ln H_1}{H_2 \partial q_2} - P_{12} \frac{\partial \ln H_2}{H_3 \partial q_3} - P_{11} \frac{\partial \ln H_2}{H_1 \partial q_1}$	$M_{33} = M_{33}^* = \frac{1}{H_1 H_2} \left( \frac{\partial P_{23} H_2}{\partial q_1} - \frac{\partial P_{13} H_1}{\partial q_2} \right) + P_{13} \frac{\partial \ln H_3}{H_2 \partial q_2} - P_{31} \frac{\partial \ln H_1}{H_3 \partial q_3}$

Остановимся на рассмотрении частных случаев.

а) Цилиндрические координаты  $q_1 = z$ ,  $q_2 = r$ ,  $q_3 = \varphi$ .  
Компоненты тензора  $(\text{rot } \mathbf{E})^*$  в цилиндрических координатах

$$M_{zz}^* = \frac{\partial \varepsilon_{\varphi z}}{\partial r} - \frac{\partial \varepsilon_{r z}}{r \partial \varphi} + \frac{\varepsilon_{\varphi z}}{r}, \quad M_{zr}^* = \frac{\partial \varepsilon_{z z}}{r \partial \varphi} - \frac{\partial \varepsilon_{\varphi z}}{\partial z}, \quad M_{z\varphi}^* = \frac{\partial \varepsilon_{r z}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{z z}}{\partial r},$$

$$M_{r z}^* = \frac{\partial \varepsilon_{\varphi r}}{\partial r} - \frac{\partial \varepsilon_{r r}}{r \partial \varphi} + \frac{2\varepsilon_{\varphi r}}{r}, \quad M_{r r}^* = \frac{\partial \varepsilon_{z r}}{r \partial \varphi} - \frac{\partial \varepsilon_{\varphi r}}{\partial z} - \frac{\varepsilon_{z r}}{r}, \quad M_{r\varphi}^* = \frac{\partial \varepsilon_{r r}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{z r}}{\partial r},$$

$$M_{\varphi z}^* = \frac{\partial \varepsilon_{\varphi \varphi}}{\partial r} - \frac{\partial \varepsilon_{r \varphi}}{r \partial \varphi} + \frac{\varepsilon_{\varphi \varphi} - \varepsilon_{r r}}{r}, \quad M_{\varphi r}^* = \frac{\partial \varepsilon_{z \varphi}}{r \partial \varphi} - \frac{\partial \varepsilon_{\varphi \varphi}}{\partial z} + \frac{\varepsilon_{z r}}{r}, \quad M_{\varphi \varphi}^* = \frac{\partial \varepsilon_{r \varphi}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{z \varphi}}{\partial r}.$$

Подставив эти выражения в таблицу 1, найдём компоненты тензора  $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{E})^* = \mathbf{Q}$ :

$$\left. \begin{aligned} Q_{zz} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right) + \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \varepsilon_{rr} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varepsilon_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right), \\ Q_{zr} = Q_{rz} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varepsilon_{z\varphi}}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{\varphi r}}{\partial \varphi \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{r^2 \partial \varphi^2} - \\ &\quad - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial z}, \\ Q_{z\varphi} = Q_{\varphi z} &= - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \varepsilon_{\varphi z} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varepsilon_{r\varphi}}{\partial z} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{r \partial \varphi \partial z}, \\ Q_{rr} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{\varphi z}}{\partial \varphi \partial z} - \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial z}, \\ Q_{r\varphi} = Q_{\varphi r} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{r \partial \varphi \partial z} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z\varphi}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\varphi}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{r \partial \varphi} \right), \\ Q_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{rz}}{\partial r \partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

Условия сплошности в цилиндрических координатах выражают требование обращения в нуль всех шести компонентов  $Q_{zz}, \dots, Q_{\varphi\varphi}$  симметричного тензора  $\mathbf{Q}$ .

Выражения компонентов деформации через проекции перемещения  $w, u, v$  на оси  $z, r, \varphi$  цилиндрической системы координат по (7.5) и (7.6) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2} \gamma_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{z\varphi} &= \frac{1}{2} \gamma_{z\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right), \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{u}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Эти выражения обращают правые части соотношений (7.9) тождественно в нуль.

Уравнения равновесия в цилиндрических координатах имеют по (7.3) вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\tau_{zr}}{r} + \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{r \partial \varphi} + K_z &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + K_r &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} + K_\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Этим уравнениям при отсутствии объёмных сил можно согласно § 5 удовлетворить, вводя симметричный тензор функций напряжений  $\Phi_{zz}, \dots, \Phi_{\varphi\varphi}$ . Компоненты тензора напряжения  $\sigma_r, \dots, \sigma_\varphi$  выражаются через функции напряжений так же, как соответствующие компоненты тензора  $\mathbf{Q}$  выражались через компоненты тензора деформации, т. е. с помощью формул (7.9). Возьмём, например, за тензор функций напряжений шаровой тензор, т. е. произведение скаляра  $\Phi$  и единичного тензора

$$\Phi = \mathbf{U}\Phi,$$

т. е.  $\Phi_{zr} = \Phi_{r\varphi} = \Phi_{\varphi z} = 0$ ,  $\Phi_{zz} = \Phi_{rr} = \Phi_{\varphi\varphi} = \Phi$ . Выражения компонентов тензора напряжения, удовлетворяющие однородным уравнениям равновесия, по (7.9) будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{r^2 \partial \varphi^2} = \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad \sigma_{rr} = \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \Delta \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Phi}{r^2 \partial \varphi^2}, \\ \tau_{zr} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}, \quad \tau_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right), \quad \tau_{\varphi z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi \partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

б) Случай аксиальной симметрии. Рассмотрим два семейства взаимно ортогональных поверхностей вращения вокруг оси  $z$ . Меридиональные сечения этих поверхностей представляют семейства кривых  $q_2 = \text{const}$  и  $q_1 = \text{const}$ . Коэффициенты Ляме  $H_i$  не зависят от азимута  $\varphi$  и являются функциями координат  $q_1$  и  $q_2$ ; при этом  $H_3 = H_\varphi = r$ , где  $r$  — расстояние точки до оси  $z$ .

Предположим, что деформация также аксиально-симметрична, т. е. относительные удлинения и сдвиги являются функциями только двух координат. По (7.5) они разбиваются на две группы: группу четырёх компонентов

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial q_1} + \frac{u_2}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial q_2} + \frac{u_1}{H_1} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{u_1}{H_1} \frac{\partial \ln r}{\partial q_1} + \frac{u_2}{H_2} \frac{\partial \ln r}{\partial q_2}, \\ \gamma_{12} &= 2\varepsilon_{12} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial q_2} - \frac{u_1}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} - \frac{u_2}{H_1} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1}, \end{aligned} \quad (7.13)$$

выражающихся через перемещения  $u_1$  и  $u_2$ , и двух компонентов, зависящих только от  $u_3 = u_\varphi = v$ :

$$\gamma_{2\varphi} = 2\varepsilon_{2\varphi} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial v}{\partial q_2} - \frac{v}{H_2} \frac{\partial \ln r}{\partial q_2}, \quad \gamma_{\varphi 1} = 2\varepsilon_{\varphi 1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial v}{\partial q_1} - \frac{v}{H_1} \frac{\partial \ln r}{\partial q_1}. \quad (7.14)$$

Как видно из таблицы 1, пять из девяти компонентов тензора  $\mathbf{M} = \text{rot } \mathbf{E}$ , именно

$$M_{11}, M_{22}, M_{33}, M_{12}, M_{21},$$



выражаются через  $\varepsilon_{2\varphi}$  и  $\varepsilon_{\varphi 1}$ , а остальные четыре компонента этого тензора,

$$M_{13}, M_{31}, M_{23}, M_{32},$$

выражаются через  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_{12}$ . Отсюда следует, что и симметричный тензор  $\mathbf{Q} = \text{rot}(\text{rot } \mathbf{E})^*$  распадается на две группы компонентов:

$$Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}, Q_{12},$$

выражающихся через  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_{12}$ , и группу компонентов

$$Q_{23}, Q_{31},$$

выражающихся через  $\varepsilon_{2\varphi}, \varepsilon_{\varphi 1}$ .

Таким образом, аксиально-симметричная деформация распадается на два состояния деформации: меридиональную деформацию, определяемую тремя относительными удлинениями и сдвигом  $\gamma_{12}$ , и деформацию кручения, сопровождающуюся сдвигами  $\gamma_{2\varphi}$  и  $\gamma_{\varphi 1}$ .

Формулы, получающиеся в результате этих вычислений, могут быть несколько упрощены, если учесть соотношения (6.26)—(6.27) между коэффициентами Ляме, принимающие в случае симметрии вращения вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial r}{\partial q_1} \right) + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial r}{\partial q_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial r}{\partial q_2} \right) + \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial r}{\partial q_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial q_1 \partial q_2} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial r}{\partial q_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial r}{\partial q_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

(остающиеся два соотношения удовлетворяются тождественно). Выражения составляющих тензора  $\mathbf{Q}$ , однако, остаются и после этого упрощения весьма громоздкими и здесь по этой причине не приводятся в общем виде. Ограничимся случаем сферических координат:  $q_1 = R, q_2 = \vartheta, q_3 = \varphi$  и  $H_1 = 1, H_2 = R, H_3 = r = R \sin \vartheta$ . Для меридиональной деформации по таблице 1 получаем:

$$\left. \begin{aligned} M_{31}^* &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial \vartheta} + \varepsilon_{\varphi\varphi} \text{ctg } \vartheta - \varepsilon_{\vartheta\vartheta} \text{ctg } \vartheta - \varepsilon_{\vartheta R} \right), \\ M_{32}^* &= \frac{1}{R} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{\varphi R}}{\partial R} + \varepsilon_{RR} + \varepsilon_{\vartheta R} \text{ctg } \vartheta \right), \\ M_{13}^* &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \varepsilon_{\vartheta R}}{\partial R} - \frac{\partial \varepsilon_{RR}}{\partial \vartheta} + \varepsilon_{\vartheta R} \right), \\ M_{23}^* &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \varepsilon_{\vartheta\vartheta}}{\partial R} - \frac{\partial \varepsilon_{\vartheta R}}{\partial \vartheta} - \varepsilon_{RR} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

Снова применив эту таблицу, получим:

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial \vartheta^2} + \frac{2 \operatorname{ctg} \vartheta}{R^2} \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varepsilon_{\vartheta\vartheta}}{\partial R} - \\ &\quad - \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{R^2} \frac{\partial \varepsilon_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{2 \varepsilon_{\vartheta\vartheta}}{R^2} - \frac{2}{R^2} \left( \frac{\partial \varepsilon_{\vartheta R}}{\partial \vartheta} + \varepsilon_{\vartheta R} \operatorname{ctg} \vartheta \right) - \frac{2}{R^2} \varepsilon_{RR}, \\ Q_{22} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{\varphi\varphi} R}{R \partial R^2} - \frac{\partial \varepsilon_{RR}}{R \partial R} + \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{R^2} \frac{\partial \varepsilon_{RR}}{\partial \vartheta} - \frac{2 \operatorname{ctg} \vartheta}{R^2} \frac{\partial \varepsilon_{\vartheta R} R}{\partial R}, \\ Q_{33} &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varepsilon_{\vartheta\vartheta} R}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{RR}}{\partial \vartheta^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \varepsilon_{RR}}{\partial R} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{\vartheta R} R}{\partial R \partial \vartheta}, \\ Q_{12} &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial \varepsilon_{RR}}{\partial \vartheta} - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial R \partial \vartheta} + \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial R} \operatorname{ctg} \vartheta \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial \varepsilon_{\vartheta\vartheta}}{\partial R} \operatorname{ctg} \vartheta - \frac{2 \varepsilon_{\vartheta R}}{R^2}. \end{aligned} \right\} (7.17)$$

Условия сплошности выражаются в требовании обращения этих величин в нуль.

Уравнения равновесия для аксиально-симметричной деформации также разбиваются на две группы — меридиональную, содержащую нормальные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  и касательное напряжение  $\tau_{12}$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{H_1 H_2 r} \left( \frac{\partial H_2 r \sigma_1}{\partial q_1} + \frac{\partial H_1 r \tau_{12}}{\partial q_2} \right) + \frac{\tau_{12}}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} - \frac{\sigma_2}{H_1} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1} - \frac{\sigma_3}{H_1} \frac{\partial \ln r}{\partial q_1} + K_1 &= 0, \\ \frac{1}{H_1 H_2 r} \left( \frac{\partial H_1 r \sigma_2}{\partial q_2} + \frac{\partial H_2 r \tau_{12}}{\partial q_1} \right) + \frac{\tau_{12}}{H_1} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1} - \frac{\sigma_1}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} - \frac{\sigma_3}{H_2} \frac{\partial \ln r}{\partial q_2} + K_2 &= 0, \end{aligned} \right\} (7.18)$$

и группу кручения для напряжений  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{23}$ :

$$\frac{1}{H_1 H_2 r} \left( \frac{\partial H_2 r \tau_{13}}{\partial q_1} + \frac{\partial H_1 r \tau_{23}}{\partial q_2} \right) + \frac{\tau_{31}}{H_1} \frac{\partial \ln r}{\partial q_1} + \frac{\tau_{32}}{H_2} \frac{\partial \ln r}{\partial q_2} + K_3 = 0. \quad (7.19)$$

Выбирая тензор функций напряжений шаровым  $\Phi = \mathbf{U}\Phi$ , можно при отсутствии объемных сил удовлетворить уравнениям равновесия (7.18) с помощью функции напряжений  $\Phi$ ; тогда, как видно из таблицы 1, тензор  $(\operatorname{rot} \Phi)^*$  будет кососимметричным с таблицей компонентов

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -\frac{1}{H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{H_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \\ \frac{1}{H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} & -\frac{1}{H_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} & 0 \end{array} \right\}. \quad (7.20)$$

С помощью той же таблицы 1 находим выражения напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{\partial \Phi}{H_2 \partial q_2} \right) + \frac{\partial \Phi}{H_1 \partial q_1} \frac{\partial \ln r}{H_1 \partial q_1} + \frac{\partial \Phi}{H_2 \partial q_2} \frac{\partial \ln r}{H_2 \partial q_2} + \\ &\quad + \frac{\partial \Phi}{H_1 \partial q_1} \frac{\partial \ln H_2}{H_1 \partial q_1}, \\ \sigma_2 &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{\partial \Phi}{H_1 \partial q_1} \right) + \frac{\partial \Phi}{H_2 \partial q_2} \frac{\partial \ln r}{H_2 \partial q_2} + \frac{\partial \Phi}{H_1 \partial q_1} \frac{\partial \ln r}{H_1 \partial q_1} + \\ &\quad + \frac{\partial \Phi}{H_2 \partial q_2} \frac{\partial \ln H_1}{H_2 \partial q_2}, \\ \sigma_3 &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2 \partial \Phi}{H_1 \partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_1 \partial \Phi}{H_2 \partial q_2} \right) \right], \\ \tau_{12} &= \frac{1}{H_1 H_2} \left( - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_1 \partial q_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

### § 8. Связь между тензорами напряжения и деформации в изотропном упругом теле (обобщённый закон Гука)

Результаты опытного исследования связи между напряжениями в упругом изотропном теле и создаваемыми ими деформациями могут быть для большого числа материалов сформулированы в форме двух положений.

1. Первые инварианты тензоров напряжений и деформаций пропорциональны друг другу:

$$J_1(\mathbf{T}) = 3kJ_1(\mathbf{E}) \quad (8.1)$$

или

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = k\theta = k(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z). \quad (8.2)$$

Постоянная для данного материала  $k$  называется коэффициентом объёмного сжатия.

2. Девикторы этих тензоров также пропорциональны друг другу:

$$\text{Dev } \mathbf{T} = 2G \text{Dev } \mathbf{E}, \quad (8.3)$$

где постоянная материала  $G$  называется модулем сдвига. В развёрнутой форме соотношение (8.3) записывается в форме трёх соотношений, связывающих нормальные напряжения с относительными удлинениями

$$\begin{aligned} \sigma_x - \frac{\sigma}{3} &= 2G \left( \varepsilon_x - \frac{\theta}{3} \right), & \sigma_y - \frac{\sigma}{3} &= 2G \left( \varepsilon_y - \frac{\theta}{3} \right), \\ \sigma_z - \frac{\sigma}{3} &= 2G \left( \varepsilon_z - \frac{\theta}{3} \right), \end{aligned} \quad (8.4)$$

и трёх соотношений между касательными напряжениями и сдвигами

$$\tau_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}. \quad (8.5)$$

Эти законы поведения изотропного материала под нагрузкой имеют место до тех пор, пока некоторая инвариантная величина, составляемая по компонентам девиатора напряжений, не превзойдёт некоторого предельного для данного материала значения, а деформации достаточно малы. В этой книге, посвящённой рассмотрению строгих решений некоторых задач математической теории упругости, всё последующее основано на допущении, что сформулированные законы справедливы.

Из двух положений (8.1) и (8.3) следует, что

$$\text{Dev } \mathbf{T} + \mathbf{U}J_1(\mathbf{T}) = 2G \text{Dev } \mathbf{E} + 3k\mathbf{U}J_1(\mathbf{E}) \quad (8.6)$$

или

$$\text{Dev } \mathbf{E} + \mathbf{U}J_1(\mathbf{E}) = \frac{1}{2G} \text{Dev } \mathbf{T} + \frac{1}{3k} \mathbf{U}J_1(\mathbf{T}), \quad (8.7)$$

причём через  $\mathbf{U}$  обозначен единичный тензор. Отсюда по (3.30) следует выражение тензора напряжений через тензор деформации

$$\mathbf{T} = 2G \left[ \mathbf{E} + \left( \frac{3k}{2G} - 1 \right) \mathbf{U}J_1(\mathbf{E}) \right] \quad (8.8)$$

и тензора деформации через тензор напряжения

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2G} \left[ \mathbf{T} - \left( 1 - \frac{2G}{3k} \right) \mathbf{U}J_1(\mathbf{T}) \right]. \quad (8.9)$$

Из последнего соотношения получим выражения относительных удлинений через нормальные напряжения в виде

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2G} \left[ \left( \frac{2}{3} + \frac{2G}{9k} \right) \sigma_x - \left( \frac{1}{3} - \frac{2G}{9k} \right) (\sigma_y + \sigma_z) \right], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2G} \left[ \left( \frac{2}{3} + \frac{2G}{9k} \right) \sigma_y - \left( \frac{1}{3} - \frac{2G}{9k} \right) (\sigma_z + \sigma_x) \right], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2G} \left[ \left( \frac{2}{3} + \frac{2G}{9k} \right) \sigma_z - \left( \frac{1}{3} - \frac{2G}{9k} \right) (\sigma_x + \sigma_y) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

В случае линейного напряжённого состояния, осуществляемого в опыте с растяжением цилиндрического образца,  $\sigma_y = \sigma_z = 0$  и эти формулы приводят к выражению закона Гука в его простейшей форме

$$\varepsilon_x = \left( \frac{1}{3G} + \frac{1}{9k} \right) \sigma_x, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = - \left( \frac{1}{6G} - \frac{1}{9k} \right) \sigma_x. \quad (8.11)$$

Известно, что отношение напряжения к относительному удлинению образца в упомянутом опыте называется модулем нормальной упругости (или модулем Юнга) и обозначается через  $E$ ; отношение относительного удлинения в направлении действия нагрузки к относительному укорочению поперечных размеров обозначается через  $m$  и называется числом Пуассона; часто применяется обратная величина  $\frac{1}{m} = \sigma$ ,

называемая коэффициентом Пуассона. Итак,

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\varepsilon_x}{m} = -\frac{\sigma_x}{Em} \quad (8.12)$$

и сравнение с (8.11) даёт:

$$\frac{1}{3G} + \frac{1}{9k} = \frac{1}{E}, \quad \frac{1}{6G} - \frac{1}{9k} = \frac{1}{Em}, \quad (8.13)$$

откуда следует, что

$$G = \frac{Em}{2(m+1)}, \quad k = \frac{Em}{3(m-2)} = \frac{2G(m+1)}{3(m-2)}. \quad (8.14)$$

Важно отметить, что поведение упругого изотропного тела в пределах применимости закона Гука описывается заданием двух независимых модулей (постоянных). В дальнейшем мы будем пользоваться модулями  $G$  и  $m$  (иногда  $E$ ,  $m$ ). Запись соотношений (8.8) и (8.9) примет вид

$$\mathbf{T} = 2G \left( \mathbf{E} + \frac{\vartheta}{m-2} \mathbf{U} \right), \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2G} \left( \mathbf{T} - \frac{3\sigma}{m+1} \mathbf{U} \right), \quad (8.15)$$

где согласно (8.2) через  $\sigma$  обозначено среднее арифметическое трёх нормальных напряжений

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Часто применяются также обозначения Ляме

$$\mu = G, \quad \lambda = \frac{2G}{m-2}. \quad (8.16)$$

Заметим, что для реальных тел  $m > 2$ , в противном случае имели бы  $k < 0$ , т. е. материал расширился бы под давлением;  $m = 2$  соответствует несжимаемому материалу.

Связь компонентов тензора напряжений с относительными удлинениями и сдвигами — обобщённый закон Гука — получаем, записывая тензорные соотношения (8.15) в координатной форме:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left( \varepsilon_x + \frac{\vartheta}{m-2} \right), & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= 2G \left( \varepsilon_y + \frac{\vartheta}{m-2} \right), & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= 2G \left( \varepsilon_z + \frac{\vartheta}{m-2} \right), & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

Обратные зависимости имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2G} \left( \sigma_x - \frac{3\sigma}{m+1} \right) = \frac{1}{E} \left( \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right), & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2G} \left( \sigma_y - \frac{3\sigma}{m+1} \right) = \frac{1}{E} \left( \sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m} \right), & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2G} \left( \sigma_z - \frac{3\sigma}{m+1} \right) = \frac{1}{E} \left( \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right), & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

Отметим, что подобные соотношения имеют место в любой системе ортогональных криволинейных координат:

$$\sigma_\alpha = 2G \left( \varepsilon_\alpha + \frac{\vartheta}{m-2} \right), \quad \tau_{\alpha\beta} = G \gamma_{\alpha\beta}, \quad \vartheta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (8.19)$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2G} \left( \sigma_\alpha - \frac{3\sigma}{m+1} \right), \quad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{G} \tau_{\alpha\beta}, \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \quad (8.20)$$

### § 9. Дифференциальные уравнения теории упругости в перемещениях

Для составления этих уравнений следует исключить тензор напряжений  $\mathbf{T}$  из уравнений равновесия

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{K} = 0 \quad (9.1)$$

и формул связи тензора напряжений с тензором деформации, выраженным через перемещения с помощью соотношений (2.6)

$$\mathbf{T} = 2G \left( \mathbf{E} + \frac{\vartheta}{m-2} \mathbf{U} \right) = G \left( \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{R}} + \operatorname{grad} \mathbf{u} + \frac{2}{m-2} \mathbf{U} \operatorname{div} \mathbf{u} \right). \quad (9.2)$$

Приходим к векторному уравнению

$$\operatorname{div} \left( \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{R}} + \operatorname{grad} \mathbf{u} \right) + \frac{2}{m-2} \operatorname{div} \mathbf{U} \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{\mathbf{K}}{G} = 0. \quad (9.3)$$

Имеем:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u},$$

где через  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  обозначен лапласов оператор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

а  $\Delta \mathbf{u}$  представляет вектор, проекции которого на оси неизменного направления равны лапласовым операторам от проекций этого вектора. Далее имеем:

$$\operatorname{div} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{R}} = \mathbf{i}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \cdot \mathbf{i}_\beta \mathbf{i}_\gamma \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma} = \delta_{\alpha\beta} \mathbf{i}_\gamma \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\gamma} = \mathbf{i}_\gamma \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\gamma \partial x_\alpha} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u},$$

так как

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{u};$$

остаётся заметить ещё, что

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{U} \operatorname{div} \mathbf{u} &= i_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \cdot i_\beta i_\beta \operatorname{div} \mathbf{u} = \delta_{\alpha\beta} i_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \operatorname{div} \mathbf{u} = \\ &= i_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Подстановка этих соотношений в (9.3) приводит к дифференциальному уравнению теории упругости, выраженному через вектор перемещения:

$$\frac{m}{m-2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} + \frac{K}{G} = 0. \quad (9.4)$$

В проекциях на оси декартовой системы координат будем иметь три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{m}{m-2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \Delta u + \frac{K_x}{G} &= 0, \\ \frac{m}{m-2} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \Delta v + \frac{K_y}{G} &= 0, \\ \frac{m}{m-2} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \Delta w + \frac{K_z}{G} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

Замечая, что

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} \text{ или } \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u},$$

можно представить (9.4) также в форме

$$\frac{2(m-1)}{m-2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \frac{K}{G} = 0. \quad (9.6)$$

В общем случае на части  $S_1$  поверхности  $S$ , ограничивающей упругое тело, могут быть заданы перемещения, а на другой её части  $S_2$  — поверхностные силы. Запись краевых условий на  $S_1$  имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}(x, y, z) \quad (9.7)$$

или

$$u = U(x, y, z), \quad v = V(x, y, z), \quad w = W(x, y, z), \quad (9.8)$$

где  $U, V, W$  — заданные функции координат точек поверхности  $S_1$ . На части границы  $S_2$  по (1.12) и (9.2) имеем:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = 2G \left( \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{m-2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{U} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) = \mathbf{F}_n, \quad (9.9)$$

причём  $\mathbf{F}_n$  — вектор поверхностных сил, заданный на  $S_2$ . По (2.6) и (2.9) можно написать:

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} \mathbf{u} + \mathbf{Q}; \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = (\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q} = (\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u},$$

причём последнее равенство получено по (2.13) и (2.12). Заметив ещё, что  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{U} = n$ , придём к следующей записи краевого условия на  $S_2$ :

$$2G \left[ \mathbf{n} \frac{\operatorname{div} \mathbf{u}}{m-2} + (\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} \right] = \mathbf{F}_n. \quad (9.10)$$

В проекции на ось  $x$  получим на  $S_2$ :

$$2G \left\{ \frac{\operatorname{div} \mathbf{u}}{m-2} n_x + \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{1}{2} \left[ n_y \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - n_z \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} = F_{nx}, \quad (9.11)$$

где  $\frac{\partial u}{\partial n}$  — производная  $u$  по нормали

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y + \frac{\partial u}{\partial z} n_z.$$

Уравнения равновесия, выраженные через перемещения, в ортогональных криволинейных координатах проще всего составить, используя (9.6). Получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2(m-1)}{m-2} \frac{1}{H_1} \frac{\partial \vartheta}{\partial q_1} - \frac{2}{H_2 H_3} \left( \frac{\partial \omega_3 H_3}{\partial q_2} - \frac{\partial \omega_2 H_2}{\partial q_3} \right) + \frac{K_1}{\bar{G}} &= 0, \\ \frac{2(m-1)}{m-2} \frac{1}{H_2} \frac{\partial \vartheta}{\partial q_2} - \frac{2}{H_3 H_1} \left( \frac{\partial \omega_1 H_1}{\partial q_3} - \frac{\partial \omega_3 H_3}{\partial q_1} \right) + \frac{K_2}{\bar{G}} &= 0, \\ \frac{2(m-1)}{m-2} \frac{1}{H_3} \frac{\partial \vartheta}{\partial q_3} - \frac{2}{H_1 H_2} \left( \frac{\partial \omega_2 H_2}{\partial q_1} - \frac{\partial \omega_1 H_1}{\partial q_2} \right) + \frac{K_3}{\bar{G}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

Здесь  $2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3$  — проекции на оси криволинейных координат вектора  $\operatorname{rot} \mathbf{u}$ , определяемые по (6.38), тогда как  $\vartheta = \operatorname{div} \mathbf{u}$  находится по (6.37). Краевые условия для поверхностных сил в предположении, что поверхность  $S_2$  является координатной поверхностью  $q_1 = \text{const}$ , т. е.  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$ , имеют вид

$$\sigma_1 = F_{11}, \quad \tau_{12} = F_{12}, \quad \tau_{13} = F_{13},$$

т. е. по (8.19) и (7.5), (7.6) получаем:

$$\left. \begin{aligned} 2G \left[ \frac{\vartheta}{m-2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial q_1} + \frac{u_2}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} + \frac{u_3}{H_3} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_3} \right] &= F_{11}, \\ G \left[ \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial q_2} - \frac{u_1}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} - \frac{u_2}{H_1} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1} \right] &= F_{12}, \\ G \left[ \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_3}{\partial q_1} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_1}{\partial q_3} - \frac{u_1}{H_3} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_3} - \frac{u_3}{H_1} \frac{\partial \ln H_3}{\partial q_1} \right] &= F_{13}. \end{aligned} \right\} \quad (9.13)$$

К этим же формулам можно прийти, применив соотношение (9.10).



Например, в цилиндрических координатах уравнения равновесия в перемещениях имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{m}{m-2} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \Delta w + \frac{K_z}{G} &= 0, \\ \frac{m}{m-2} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \Delta u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{K_r}{G} &= 0, \\ \frac{m}{m-2} \frac{\partial \vartheta}{r \partial \varphi} + \Delta v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{K_\varphi}{G} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

причём

$$\vartheta = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \varphi} \quad (9.15)$$

и через  $w$ ,  $u$ ,  $v$  обозначены проекции вектора перемещения на оси  $z$ ,  $r$ ,  $\varphi$ .

Отметим одно следствие уравнений равновесия в перемещениях. Вычислив дивергенцию правой части уравнения, взятого в форме (9.6), получим сразу же:

$$2 \frac{m-1}{m-2} \Delta \vartheta + \frac{1}{G} \operatorname{div} \mathbf{K} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \Delta \vartheta = -\frac{m-2}{2G(m-1)} \operatorname{div} \mathbf{K}. \quad (9.16)$$

В частности, при отсутствии объёмных сил объёмное расширение является гармонической функцией

$$\Delta \vartheta = 0. \quad (9.17)$$

По (8.2), (8.14) и (9.16) получаем также:

$$\Delta \varepsilon = -\frac{m+1}{3(m-1)} \operatorname{div} \mathbf{K}. \quad (9.18)$$

## § 10. Решение уравнений равновесия теории упругости в перемещениях в форме П. Ф. Папковича — Нейбера

Оказывается возможным выразить три неизвестные функции — перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , входящие в уравнения равновесия теории упругости (9.5), через три гармонические функции  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$ . Иными словами, вектор перемещения  $\mathbf{u}$  может быть выражен через гармонический вектор  $\mathbf{B}$ , т. е. вектор, лапласиан которого равен нулю:

$$\Delta \mathbf{B} = \nabla \cdot \nabla \mathbf{B} = 0. \quad (10.1)$$

Проекции этого вектора на оси декартовой системы координат также удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta B_x = 0, \quad \Delta B_y = 0, \quad \Delta B_z = 0. \quad (10.2)$$

Отметим, что отсюда нельзя заключить, что проекции  $B_x$  вектора  $\mathbf{B}$  на оси системы криволинейных координат также представляют гармонические функции. Это следует из того, что проекции вектора  $\Delta \mathbf{B}$

на оси переменного направления не равны лапласианам от его проекций на такие оси.

Для получения искомой зависимости представим вектор перемещения в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{B} + \text{grad } \chi, \quad (10.3)$$

где вектор  $\mathbf{u}_0$  представляет какое-либо частное решение уравнений (9.5), соответствующее действию объёмных сил, т. е. вектор, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{m}{m-2} \text{grad div } \mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}_0 + \frac{\mathbf{K}}{G} = 0. \quad (10.4)$$

Замечая, что

$$\text{div grad } \chi = \Delta \chi, \quad \text{grad } \Delta \chi = \Delta \text{ grad } \chi$$

и учитывая условие (10.1), придём к соотношению, связывающему вектор  $\mathbf{B}$  и скаляр  $\chi$ :

$$\frac{m}{m-2} \text{grad div } \mathbf{B} + \frac{2(m-1)}{m-2} \text{grad } \Delta \chi = 0. \quad (10.5)$$

Вместо одного неизвестного вектора  $\mathbf{u}$ , т. е. трёх неизвестных функций  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , в рассмотрение был введён другой неизвестный вектор  $\mathbf{B}$ , т. е. также три неизвестные функции  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$ . Поэтому достаточно найти какое-либо частное решение уравнения (10.5) или уравнения

$$\Delta \chi = -\frac{m}{2(m-1)} \text{div } \mathbf{B}. \quad (10.6)$$

Нетрудно проверить, что этому соотношению можно удовлетворить, положив

$$\chi = -\frac{m}{4(m-1)} \mathbf{R} \cdot \mathbf{B} = -\frac{m}{4(m-1)} (xB_x + yB_y + zB_z). \quad (10.7)$$

Это следует из того, что

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R} \cdot \mathbf{B} &= \Delta (xB_x + yB_y + zB_z) = \\ &= 2 \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) + x\Delta B_x + y\Delta B_y + z\Delta B_z = 2 \text{div } \mathbf{B} + \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{B}, \end{aligned}$$

т. е. по (10.1)

$$\Delta \mathbf{R} \cdot \mathbf{B} = 2 \text{div } \mathbf{B}.$$

Заметим ещё, что при добавлении к решению (10.7) произвольного гармонического скаляра  $\chi_0$  соотношение (10.6) также будет удовлетворено. Поэтому, полагая

$$\chi_0 = -\frac{m}{4(m-1)} B_0, \quad \Delta B_0 = 0, \quad (10.8)$$

можем написать общее решение уравнения (10.6) в виде

$$\chi = -\frac{m}{4(m-1)} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{B} + B_0), \quad (10.9)$$

и искомое выражение вектора перемещения через гармонический вектор  $\mathbf{B}$  и гармонический скаляр  $B_0$  принимает вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{B} - \frac{m}{4(m-1)} \text{grad} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{B} + B_0). \quad (10.10)$$

Из хода рассуждения следует, что существенно из четырёх, входящих в это соотношение гармонических функций, сохранить три. Однако сохранение всех четырёх функций во многих случаях даёт известную свободу выбора частных решений, и это может облегчить решение задачи при удовлетворении краевым условиям. Решение в форме (10.10) было дано П. Ф. Папковичем в 1932 г. и несколько позже, в 1934 г., Нейбером. В дальнейшем вектор  $\mathbf{B}$  и скаляр  $B_0$  мы называем соответственно вектором и скаляром Папковича.

Приведём выражение тензора напряжений  $\mathbf{T}$  через  $\mathbf{B}$  и  $B_0$ . Имеем выражение тензора деформации

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \text{def} \mathbf{B} + \frac{m}{4(m-1)} \text{def} \text{grad} \chi, \quad (10.11)$$

где  $\mathbf{E}_0 = \text{def} \mathbf{u}_0$  — деформация, соответствующая взятому частному решению для объёмных сил.

По определению (2.6) тензора деформации имеем:

$$\text{def} \text{grad} \chi = \frac{1}{2} [\nabla \nabla \chi + (\nabla \nabla \chi)^*].$$

Тензор-градиент от вектора-градиента скаляра  $\chi$

$$\nabla \nabla \chi = i_s \frac{\partial}{\partial x_s} i_k \frac{\partial}{\partial x_k} \chi = i_s i_k \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_s \partial x_k}$$

является симметричным. Поэтому  $(\nabla \nabla \chi)^* = \nabla \nabla \chi$ , и можно написать:

$$\text{def} \text{grad} \chi = \nabla \nabla \chi = i_s i_k \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_s \partial x_k}$$

(через  $x_1, x_2, x_3$  обозначены соответственно декартовы координаты  $x, y, z$ ). Замечая далее, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_k} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{B}) &= \frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_k} x_q B_q = \frac{\partial}{\partial x_s} \left( x_q \frac{\partial B_q}{\partial x_k} + B_q \frac{\partial x_q}{\partial x_k} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_s} \left( x_q \frac{\partial B_q}{\partial x_k} + B_k \right) = x_q \frac{\partial^2 B_q}{\partial x_s \partial x_k} + \frac{\partial B_s}{\partial x_k} + \frac{\partial B_k}{\partial x_s}, \end{aligned}$$

причём  $B_1 = B_x, B_2 = B_y, B_3 = B_z$ , получаем:

$$\text{def} \text{grad} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{B}) = x_q i_s i_k \frac{\partial^2 B_q}{\partial x_s \partial x_k} + 2 \text{def} \mathbf{B} = x_q \nabla \nabla B_q + 2 \text{def} \mathbf{B}. \quad (10.12)$$

Итак,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \frac{m-2}{2(m-1)} \text{def} \mathbf{B} - \frac{m}{4(m-1)} (x_q \nabla \nabla B_q + \nabla \nabla B_0). \quad (10.13)$$

Здесь введён в рассмотрение симметричный тензор  $\nabla\nabla\varphi$ , таблица компонентов которого имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \end{array} \right\}, \quad (10.14)$$

причём в нашем случае  $\varphi = B_q$  ( $q = 0, 1, 2, 3$ ). Из (10.8) и (10.2) следует, что первый инвариант каждого из этих тензоров равен нулю. Вспомня, что  $3J_1(\text{def } \mathbf{B}) = \text{div } \mathbf{B}$ , получим:

$$3J_1(\mathbf{E}) = \text{div } \mathbf{u} = \text{div } \mathbf{u}_0 + \frac{m-2}{2(m-1)} \text{div } \mathbf{B}, \quad (10.15)$$

и по (8.15) выражение тензора напряжений через вектор и скаляр Папковича принимает вид

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \frac{G}{2(m-1)} [(2m-4) \text{def } \mathbf{B} - m(x_q \nabla\nabla B_q + \nabla\nabla B_0) + 2\mathbf{U} \text{div } \mathbf{B}]. \quad (10.16)$$

Через  $\mathbf{T}_0$  обозначен тензор напряжений для частного решения, соответствующего действию объёмных сил. Выражение вектора поверхностных сил по (9.9) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_0 + \frac{G}{2(m-1)} \{ & (2m-4)(\mathbf{n} \cdot \text{grad } \mathbf{B}) + \\ & + (m-2)(\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{B}) + 2\mathbf{n} \text{div } \mathbf{B} - \\ & - m[x_q(\mathbf{n} \cdot \text{grad}) \text{grad } B_q + (\mathbf{n} \cdot \text{grad}) \text{grad } B_0]\}. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Чтобы составить выражения компонентов тензора  $\mathbf{T}$  в криволинейных координатах, следует воспользоваться приведёнными выше выражениями (7.4) тензора деформации, заменив в них  $u_\alpha$  на  $B_\alpha$ . При этом  $B_\alpha$  (греческий подстрочный индекс) обозначают проекции вектора  $\mathbf{B}$  на оси системы криволинейных координат. Они могут быть выражены через проекции  $B_q$  (латинский индекс) на оси декартовой системы с помощью очевидных формул

$$\begin{aligned} B_\alpha = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{B} = B_q \cos(x_q, \mathbf{e}_\alpha) = \\ = B_x \cos(x, \mathbf{e}_\alpha) + B_y \cos(y, \mathbf{e}_\alpha) + B_z \cos(z, \mathbf{e}_\alpha), \end{aligned} \quad (10.18)$$

где

$$\cos(\mathbf{e}_\alpha, x_q) = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial x_q}{\partial q_\alpha}. \quad (10.19)$$

Остаётся составить выражение в криволинейных ортогональных координатах компонентов тензора  $\nabla\nabla\varphi$ . Имеем:

$$\begin{aligned}\nabla\nabla\varphi &= \frac{e_\alpha}{H_\alpha} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{e_\beta}{H_\beta} \frac{\partial\varphi}{\partial q_\beta} = \\ &= \frac{1}{H_\alpha H_\beta} e_\alpha e_\beta \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} - \frac{\partial\varphi}{\partial q_\beta} \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial q_\alpha} \right) + \frac{e_\alpha e_\gamma}{H_\alpha H_\beta} \frac{\partial\varphi}{\partial q_\beta} \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \ \alpha \end{pmatrix} = \\ &= e_\alpha e_\beta \left[ \frac{1}{H_\alpha H_\beta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} - \frac{1}{H_\alpha H_\beta} \frac{\partial\varphi}{\partial q_\beta} \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial q_\alpha} + \frac{1}{H_\alpha H_\gamma} \frac{\partial\varphi}{\partial q_\gamma} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \ \alpha \end{pmatrix} \right]. \quad (10.20)\end{aligned}$$

Пусть  $\beta = \alpha$ ; тогда по (6.20)

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \ \alpha \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{H_\gamma} \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_\gamma} & \gamma \neq \alpha, \\ 0 & \gamma = \alpha \end{cases}$$

и диагональные компоненты тензора  $\nabla\nabla\varphi$  будут:

$$(\nabla\nabla\varphi)_{11} = \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1^2} - \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial\varphi}{\partial q_1} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial\varphi}{\partial q_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} + \frac{1}{H_3^2} \frac{\partial\varphi}{\partial q_3} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_3} \quad (10.21)$$

и т. д. Если же  $\beta \neq \alpha$ , то отлична от нуля лишь скобка, в которой  $\gamma = \alpha$ , и по (6.20) получим:

$$(\nabla\nabla\varphi)_{\alpha\beta} = \frac{1}{H_\alpha H_\beta} \left[ \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} - \frac{\partial\varphi}{\partial q_\beta} \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial q_\beta} \right]. \quad (10.22)$$

Выражения нормальных и касательных напряжений получают вид

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_1^0 + \frac{G}{2(m-1)} \left[ 2 \operatorname{div} B + (2m-4) \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial B_1}{\partial q_1} + \frac{B_2}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} + \frac{B_3}{H_3} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_3} \right) - \right. \\ &- m S_x \left( \frac{\partial^2 B_x}{H_1^2 \partial q_1^2} - \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial B_x}{\partial q_1} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial B_x}{\partial q_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} + \frac{1}{H_3^2} \frac{\partial B_x}{\partial q_3} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_3} \right) - \\ &\left. - m \left( \frac{\partial^2 B_0}{H_1^2 \partial q_1^2} - \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial B_0}{\partial q_1} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial B_0}{\partial q_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} + \frac{1}{H_3^2} \frac{\partial B_0}{\partial q_3} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_3} \right) \right], \quad (10.23)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{12} &= \tau_{12}^0 + \frac{G}{2(m-1)} \left[ (m-2) \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial B_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial B_1}{\partial q_2} - \frac{B_1}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} - \frac{B_2}{H_1} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1} \right) - \right. \\ &- \frac{m}{H_1 H_2} S_x \left( \frac{\partial^2 B_x}{\partial q_1 \partial q_2} - \frac{\partial B_x}{\partial q_2} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1} - \frac{\partial B_x}{\partial q_1} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} \right) - \\ &\left. - \frac{m}{H_1 H_2} \left( \frac{\partial^2 B_0}{\partial q_1 \partial q_2} - \frac{\partial B_0}{\partial q_2} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1} - \frac{\partial B_0}{\partial q_1} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} \right) \right] \quad (10.24)\end{aligned}$$

и т. д. Здесь символ  $S$  обозначает, что должна быть взята сумма трёх выражений — одного, стоящего под знаком суммы, и ещё двух, получающихся из него при замене  $x$ ,  $B_x$  соответственно на  $y$ ,  $B_y$  и  $z$ ,  $B_z$ . Напомним также, что  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  выражаются через гармонические функции  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$  с помощью (10.18).

Имеем по (10.18) и (10.19):

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_1} \frac{\partial B_1}{\partial q_1} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} S B_x \cos(x, e_1) = \\ &= S \frac{\partial B_x}{H_1^2 \partial q_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{1}{H_1} S B_x \frac{\partial \cos(x, e_1)}{\partial q_1}. \end{aligned}$$

Спроектировав на ось  $x$  первое соотношение (6.22), получим:

$$\frac{1}{H_1} \frac{\partial \cos(x, e_1)}{\partial q_1} = -\frac{1}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} \cos(x, e_2) - \frac{1}{H_3} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_3} \cos(x, e_3),$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{H_1} S B_x \frac{\partial \cos(x, e_1)}{\partial q_1} = -\frac{B_2}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} - \frac{B_3}{H_3} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_3}.$$

Таким образом, приходим к соотношению

$$\frac{1}{H_1} \frac{\partial B_1}{\partial q_1} + \frac{B_2}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} + \frac{B_3}{H_3} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_3} = \frac{1}{H_1^2} S \frac{\partial B_x}{\partial q_1} \frac{\partial x}{\partial q_1}. \quad (10.25)$$

Точно таким же образом найдём:

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_1} \frac{\partial B_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial B_1}{\partial q_2} - \frac{B_1}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} - \frac{B_2}{H_1} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1} = \\ = \frac{1}{H_1 H_2} S \left( \frac{\partial B_x}{\partial q_1} \frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial B_x}{\partial q_2} \frac{\partial x}{\partial q_1} \right). \quad (10.26) \end{aligned}$$

Таковы выражения компонентов тензора  $\text{def } \mathbf{B}$  в осях рассматриваемой системы криволинейных координат через проекции  $\mathbf{B}$  на оси декартовой системы. Замечая ещё, что  $\text{div } \mathbf{B} = 3J_1(\text{def } \mathbf{B})$  по (10.25), получим:

$$\text{div } \mathbf{B} = S \left( \frac{\partial B_x}{H_1^2 \partial q_1} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial B_x}{H_2^2 \partial q_2} \frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial B_x}{H_3^2 \partial q_3} \frac{\partial x}{\partial q_3} \right). \quad (10.27)$$

Подстановка в (10.23) и (10.24) приводит теперь к выражениям

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_1^0 + G \left[ \frac{1}{H_1^2} S \frac{\partial B_x}{\partial q_1} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{1}{m-1} S \left( \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial B_x}{\partial q_2} \frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{1}{H_3^2} \frac{\partial B_x}{\partial q_3} \frac{\partial x}{\partial q_3} \right) \right] - \\ - \frac{mG}{2(m-1)} S x \left( \frac{\partial^2 B_x}{H_1^2 \partial q_1^2} - \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial B_x}{\partial q_1} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial B_x}{\partial q_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} + \frac{1}{H_3^2} \frac{\partial B_x}{\partial q_3} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_3} \right) - \\ - \frac{mG}{2(m-1)} \left( \frac{\partial^2 B_0}{H_1^2 \partial q_1^2} - \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial B_0}{\partial q_1} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial B_0}{\partial q_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} + \frac{1}{H_3^2} \frac{\partial B_0}{\partial q_3} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_3} \right), \quad (10.28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{12} = \tau_{12}^0 + \frac{G(m-2)}{2(m-1)} \frac{1}{H_1 H_2} S \left( \frac{\partial B_x}{\partial q_1} \frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial B_x}{\partial q_2} \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) - \\ - \frac{mG}{2(m-1)} \frac{1}{H_1 H_2} \left[ S x \left( \frac{\partial^2 B_x}{\partial q_1 \partial q_2} - \frac{\partial B_x}{\partial q_2} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1} - \frac{\partial B_x}{\partial q_1} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} \right) - \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial^2 B_0}{\partial q_1 \partial q_2} - \frac{\partial B_0}{\partial q_2} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1} - \frac{\partial B_0}{\partial q_1} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} \right) \right]. \quad (10.29) \end{aligned}$$

**§ 11. Дифференциальные уравнения теории упругости в напряжениях**

Эти уравнения получаются путём исключения деформаций из условий сплошности (4.10) с помощью соотношений, связывающих тензор деформации с тензором напряжений. В случае упругого тела указанная связь даётся обобщённым законом Гука (8.15) и результат исключения имеет вид

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{T})^* - \frac{3}{m+1} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{U}\sigma)^* = 0. \quad (11.1)$$

Тензор напряжения должен удовлетворять также уравнениям статики сплошной среды в объёме тела

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{K} = 0, \quad (11.2)$$

и на той части поверхности его, где заданы внешние поверхностные силы,

$$(\text{на } S_2) \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}_n. \quad (11.3)$$

Соотношения (11.1)—(11.3) представляют полную систему уравнений теории упругости в напряжениях. Они выражают, что из всех статически возможных напряжённых состояний фактически в упругом теле реализуется такое состояние, которому соответствуют деформации, удовлетворяющие условиям сплошности. Отметим, что при задании внешних поверхностных сил  $\mathbf{F}_n$  по всей границе тела для разыскания напряжений нет необходимости использовать какие-либо иные соотношения теории упругости, кроме (11.1)—(11.3). По найденным напряжениям определяются деформации, а по последним, поскольку условия сплошности соблюдены, могут быть с помощью формул (4.16) определены перемещения.

Уравнения (11.1) можно записать в иной форме, если учесть, что вектор  $\operatorname{div} \mathbf{T}$  определяется через объёмную силу. Соответствующее преобразование, имея в виду другое приложение, проведём в общем виде. Пусть  $\mathbf{L}$  — симметричный тензор второго ранга, через  $\mathbf{a}$  обозначим вектор  $\operatorname{div} \mathbf{L}$

$$\mathbf{a} = \operatorname{div} \mathbf{L} \quad \left. \begin{aligned} a_x &= \frac{\partial L_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial L_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial L_{zx}}{\partial z}, \\ a_y &= \frac{\partial L_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial L_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial L_{zy}}{\partial z}, \\ a_z &= \frac{\partial L_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial L_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial L_{zz}}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

Рассмотрим тензор  $\mathbf{Q} = \text{rot}(\text{rot } \mathbf{L})^*$ . По (4.11) имеем:

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= \frac{\partial^2 L_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 L_{zz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 L_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 L_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 L_{zz}}{\partial y^2} - \frac{\partial a_y}{\partial y} - \frac{\partial a_z}{\partial z} + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial L_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial L_{yy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial L_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial L_{zz}}{\partial z} \right) = \\ &= \Delta(L_{yy} + L_{zz}) - \frac{\partial^2 (L_{yy} + L_{zz})}{\partial x^2} - \frac{\partial a_y}{\partial y} - \frac{\partial a_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial L_{xz}}{\partial z} \right) = \\ &= \Delta(L_{yy} + L_{zz}) + \frac{\partial a_x}{\partial x} - \frac{\partial a_y}{\partial y} - \frac{\partial a_z}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (L_{xx} + L_{yy} + L_{zz}). \end{aligned}$$

Обозначив для краткости через  $l$  след (первый инвариант) тензора  $\mathbf{L}$ , получим:

$$Q_{xx} = 2 \frac{\partial a_x}{\partial x} - \text{div } \mathbf{a} - \Delta L_{xx} - 3 \frac{\partial^2 l}{\partial x^2} + 3 \Delta l. \quad (11.5)$$

Аналогичное вычисление даёт:

$$Q_{xy} = \frac{\partial a_x}{\partial y} + \frac{\partial a_y}{\partial x} - \Delta L_{xy} - 3 \frac{\partial^2 l}{\partial x \partial y}. \quad (11.6)$$

Эти соотношения могут быть представлены в следующей инвариантной форме:

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{L})^* = 2 \text{def } \mathbf{a} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{L} - 3 \nabla \nabla l + \mathbf{U} (3 \Delta l - \text{div } \mathbf{a}), \quad (11.7)$$

где  $\nabla \cdot \nabla \mathbf{L} = \Delta \mathbf{L}$  — тензор, компоненты которого в декартовой системе осей равны лапласианам от соответствующих компонентов тензора  $\mathbf{L}$ , а  $\nabla \nabla l$  — градиент градиента  $l$ , т. е. тензор, образуемый по скаляру  $l$  согласно правилу, указываемому таблицей (10.14). Через  $\mathbf{U}$ , как всегда, обозначен единичный тензор. Для дальнейшего полезно напомнить, что

$$\nabla \nabla l = \text{def grad } l. \quad (11.8)$$

Пусть, в частности,  $\mathbf{L} = \mathbf{U}l$ . Заметив, что

$$\mathbf{a} = \text{grad } l, \quad \text{div } \mathbf{a} = \Delta l, \quad 2 \text{def } \mathbf{a} = 2 \nabla \nabla l, \quad \nabla \cdot \nabla \mathbf{L} = \mathbf{U} \Delta l, \quad (11.9)$$

по (11.7) получим:

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{U}l)^* = 2 \nabla \nabla l - \mathbf{U} \Delta l - 3 \nabla \nabla l + \mathbf{U} (3 \Delta l - \Delta l) = \mathbf{U} \Delta l - \nabla \nabla l, \quad (11.10)$$

что легко проверить и непосредственно [ср. (4.21), (4.22)].

Возвращаясь к соотношению (11.1) и учитывая (11.2), (11.4), (11.7), (11.10), получим теперь:

$$-2 \text{def } \mathbf{K} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{T} - 3 \nabla \nabla \sigma + \mathbf{U} (3 \Delta \sigma + \text{div } \mathbf{K}) - \frac{3}{m+1} (\mathbf{U} \Delta \sigma - \nabla \nabla \sigma) = 0. \quad (11.11)$$

Выражая, что след тензора, равного нулю, есть нуль, найдём:

$$-2 \text{div } \mathbf{K} - 3 \Delta \sigma - 3 \Delta \sigma + 9 \Delta \sigma + 3 \text{div } \mathbf{K} - \frac{3}{m+1} (3 \Delta \sigma - \Delta \sigma) = 0,$$



откуда следует, что

$$\Delta \varepsilon = -\frac{m+1}{3(m-1)} \operatorname{div} \mathbf{K}. \quad (11.12)$$

Это соотношение было отмечено выше как следствие уравнений теории упругости в перемещениях и связи между объёмным расширением и суммой нормальных напряжений [см. (9.18)]. Исключив теперь  $\Delta \varepsilon$  из (11.11) с помощью (11.12), придём к условиям сплошности, выраженным через тензор напряжений, в форме Бельтрами-Митчелла:

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{T} + \frac{3m}{m+1} \nabla \nabla \varepsilon + 2 \operatorname{def} \mathbf{K} + \mathbf{U} \frac{\operatorname{div} \mathbf{K}}{m-1} = 0. \quad (11.13)$$

В декартовой системе координат зависимости Бельтрами-Митчелла имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varepsilon_{\alpha\alpha} + \frac{3m}{m+1} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\operatorname{div} \mathbf{K}}{m-1} + 2 \frac{\partial K_{\alpha\alpha}}{\partial x} &= 0, \\ \Delta \tau_{\alpha\beta} + \frac{3m}{m+1} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial y} + \frac{\partial K_{\alpha\beta}}{\partial y} + \frac{\partial K_{\beta\alpha}}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11.14)$$

и т. д.

Для записи этих зависимостей в произвольной системе криволинейных ортогональных координат составим предварительно выражение тензора третьего ранга  $\nabla \mathbf{T}$  — градиента тензора  $\mathbf{T}$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{T} &= \frac{e_\alpha}{H_\alpha} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \tau_{\beta\gamma} e_\beta e_\gamma = \frac{e_\alpha e_\beta e_\gamma}{H_\alpha} \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}}{\partial q_\alpha} + \frac{\tau_{\beta\gamma}}{H_\alpha} \left( \begin{smallmatrix} \delta \\ \beta \ \alpha \end{smallmatrix} \right) e_\alpha e_\beta e_\gamma + \\ &+ \frac{\tau_{\beta\gamma}}{H_\alpha} \left( \begin{smallmatrix} \delta \\ \gamma \ \alpha \end{smallmatrix} \right) e_\alpha e_\beta e_\delta = \frac{e_\alpha e_\beta e_\gamma}{H_\alpha} \left[ \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}}{\partial q_\alpha} + \tau_{\delta\gamma} \left( \begin{smallmatrix} \beta \\ \delta \ \alpha \end{smallmatrix} \right) + \tau_{\beta\delta} \left( \begin{smallmatrix} \gamma \\ \delta \ \alpha \end{smallmatrix} \right) \right]. \end{aligned} \quad (11.15)$$

Дивергенция этого тензора, т. е. лапласов оператор от тензора  $\mathbf{T}$ , равен

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{T} = \nabla \cdot \nabla \mathbf{T} &= \frac{e_\alpha}{H_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \nabla \mathbf{T} = \frac{e_\beta e_\gamma}{H_\alpha} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{1}{H_\alpha} \left[ \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}}{\partial q_\alpha} + \left( \begin{smallmatrix} \beta \\ \delta \ \alpha \end{smallmatrix} \right) \tau_{\delta\gamma} + \left( \begin{smallmatrix} \gamma \\ \delta \ \alpha \end{smallmatrix} \right) \tau_{\beta\delta} \right] + \\ &+ \frac{1}{H_\alpha} \left[ \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}}{\partial q_\alpha} + \left( \begin{smallmatrix} \beta \\ \delta \ \alpha \end{smallmatrix} \right) \tau_{\delta\gamma} + \left( \begin{smallmatrix} \gamma \\ \delta \ \alpha \end{smallmatrix} \right) \tau_{\beta\delta} \right] \left[ \frac{1}{H_\alpha} \left( \begin{smallmatrix} \sigma \\ \alpha \ \sigma \end{smallmatrix} \right) e_\beta e_\gamma + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{H_\alpha} \left( \begin{smallmatrix} \mu \\ \beta \ \alpha \end{smallmatrix} \right) e_\mu e_\gamma + \frac{1}{H_\alpha} \left( \begin{smallmatrix} \mu \\ \gamma \ \alpha \end{smallmatrix} \right) e_\beta e_\mu \right] = \\ &= \frac{e_\beta e_\gamma}{H_\alpha} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{1}{H_\alpha} \left[ \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}}{\partial q_\alpha} + \left( \begin{smallmatrix} \beta \\ \delta \ \alpha \end{smallmatrix} \right) \tau_{\delta\gamma} + \left( \begin{smallmatrix} \gamma \\ \delta \ \alpha \end{smallmatrix} \right) \tau_{\beta\delta} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{H_\alpha} \left( \begin{smallmatrix} \sigma \\ \alpha \ \sigma \end{smallmatrix} \right) \left[ \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}}{\partial q_\alpha} + \left( \begin{smallmatrix} \beta \\ \delta \ \alpha \end{smallmatrix} \right) \tau_{\delta\gamma} + \left( \begin{smallmatrix} \gamma \\ \delta \ \alpha \end{smallmatrix} \right) \tau_{\beta\delta} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{H_\alpha} \left( \begin{smallmatrix} \beta \\ \mu \ \alpha \end{smallmatrix} \right) \left[ \frac{\partial \tau_{\mu\gamma}}{\partial q_\alpha} + \left( \begin{smallmatrix} \mu \\ \delta \ \alpha \end{smallmatrix} \right) \tau_{\delta\gamma} + \left( \begin{smallmatrix} \gamma \\ \delta \ \alpha \end{smallmatrix} \right) \tau_{\mu\delta} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{H_\alpha} \left( \begin{smallmatrix} \gamma \\ \mu \ \alpha \end{smallmatrix} \right) \left[ \frac{\partial \tau_{\beta\mu}}{\partial q_\alpha} + \left( \begin{smallmatrix} \beta \\ \delta \ \alpha \end{smallmatrix} \right) \tau_{\delta\mu} + \left( \begin{smallmatrix} \mu \\ \delta \ \alpha \end{smallmatrix} \right) \tau_{\beta\delta} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11.16)$$

Группа подчеркнутых слагаемых по (6.42) представляет  $\Delta\tau_{\beta\gamma}$  — лапласиан от  $\tau_{\beta\gamma}$ . Воспользовавшись также (10.20), получим приводимые ниже выражения зависимостей Бельтрами в криволинейных ортогональных координатах. Выписываем их в случае отсутствия объёмных сил:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{\beta\gamma} + \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{1}{H_\alpha} \left[ \left( \begin{matrix} \beta \\ \delta \ \alpha \end{matrix} \right) \tau_{\delta\gamma} + \left( \begin{matrix} \gamma \\ \delta \ \alpha \end{matrix} \right) \tau_{\beta\delta} \right] + \frac{1}{H_\alpha^2} \left[ \left( \begin{matrix} \beta \\ \mu \ \alpha \end{matrix} \right) \frac{\partial \tau_{\mu\gamma}}{\partial q_\alpha} + \left( \begin{matrix} \gamma \\ \mu \ \alpha \end{matrix} \right) \frac{\partial \tau_{\beta\mu}}{\partial q_\alpha} \right] + \\ + \frac{1}{H_\alpha H_\sigma} \left( \begin{matrix} \sigma \\ \alpha \ \sigma \end{matrix} \right) \left[ \tau_{\delta\gamma} \left( \begin{matrix} \beta \\ \delta \ \alpha \end{matrix} \right) + \tau_{\beta\delta} \left( \begin{matrix} \gamma \\ \delta \ \alpha \end{matrix} \right) \right] + \frac{1}{H_\alpha^2} \left( \begin{matrix} \mu \\ \delta \ \alpha \end{matrix} \right) \left[ \left( \begin{matrix} \beta \\ \mu \ \alpha \end{matrix} \right) \tau_{\delta\gamma} + \left( \begin{matrix} \gamma \\ \mu \ \alpha \end{matrix} \right) \tau_{\beta\delta} \right] + \\ + \frac{1}{H_\alpha^2} \left[ \left( \begin{matrix} \beta \\ \mu \ \alpha \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} \gamma \\ \delta \ \alpha \end{matrix} \right) \tau_{\mu\delta} + \left( \begin{matrix} \gamma \\ \mu \ \alpha \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} \beta \\ \delta \ \alpha \end{matrix} \right) \tau_{\delta\mu} \right] + \\ + \frac{3m}{m+1} \left[ \frac{1}{H_\beta H_\gamma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial q_\beta \partial q_\gamma} - \frac{1}{H_\beta H_\gamma} \frac{\partial \ln H_\gamma}{\partial q_\gamma} \frac{\partial \sigma}{\partial q_\gamma} + \frac{1}{H_\alpha H_\beta} \left( \begin{matrix} \gamma \\ \alpha \ \beta \end{matrix} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial q_\alpha} \right] = 0. \quad (11.17) \end{aligned}$$

В случае цилиндрических координат, учитывая (6.28), получим без труда:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\tau_z + \frac{3m}{m+1} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} &= 0, \\ \Delta\tau_r + \frac{2(\sigma_\varphi - \sigma_r)}{r^2} - \frac{4}{r^2} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{3m}{m+1} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} &= 0, \\ \Delta\sigma_\varphi - \frac{2(\sigma_\varphi - \sigma_r)}{r^2} + \frac{4}{r^2} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{3m}{m+1} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\partial^2 \sigma}{r^2 \partial \varphi^2} \right) &= 0, \\ \Delta\tau_{r\varphi} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sigma_\varphi - \sigma_r) - \frac{4}{r^2} \tau_{r\varphi} + \frac{3m}{m+1} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \right) &= 0, \\ \Delta\tau_{rz} - \frac{\tau_{rz}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{3m}{m+1} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r \partial z} &= 0, \\ \Delta\tau_{z\varphi} - \frac{\tau_{z\varphi}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \varphi} + \frac{3m}{m+1} \frac{\partial^2 \sigma}{r \partial \varphi \partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.18)$$

## § 12. Связь общих решений с тензором функций напряжений

В § 5 было показано, что уравнениям равновесия сплошной среды при отсутствии объёмных сил можно удовлетворить, выражая тензор напряжения  $\mathbf{T}$  через симметричный тензор функций напряжений  $\Phi$ :

$$\mathbf{T} = \text{rot}(\text{rot } \Phi)^*. \quad (12.1)$$

В случае упругого тела тензор напряжений должен удовлетворять зависимостям Бельтрами — Митчелла (11.13); последние, пользуясь (11.10) и (11.12), при отсутствии объёмных сил можно записать также в виде

$$\Delta \mathbf{T} - \frac{3m}{m+1} \text{rot}(\text{rot } \mathbf{U})^* = 0. \quad (12.2)$$

Замечая теперь, что

$$\Delta \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \Phi)^* = \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \Delta \Phi)^*, \quad (12.3)$$

после подстановки (12.1) в (12.2) придём к соотношению

$$\operatorname{rot} \left[ \operatorname{rot} \left( \Delta \Phi - \frac{3m}{m+1} \mathbf{U} \varepsilon \right)^* \right] = 0. \quad (12.4)$$

Как мы видели выше, обращение в нуль вихря от транспонированного вихря симметричного тензора указывает на то, что этот тензор является деформацией некоторого вектора. Поэтому

$$\Delta \Phi - \frac{3m}{m+1} \mathbf{U} \varepsilon = \operatorname{def} \mathbf{c}. \quad (12.5)$$

В дальнейшем вводим в рассмотрение вектор

$$\mathbf{b} = \operatorname{div} \Phi \quad (12.6)$$

и скаляр  $\Phi$  — след тензора  $\Phi$ :

$$3\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}. \quad (12.7)$$

По (11.5) находим также:

$$\begin{aligned} 3\varepsilon &= 3J_1(\mathbf{T}) = 3J_1[\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \Phi)^*] = \\ &= 2 \left( \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} \right) - \Delta (\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}) - \\ &\quad - 3 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) + 9\Delta \Phi - 3 \operatorname{div} \mathbf{b}, \end{aligned}$$

и следовательно,

$$3\varepsilon = 3\Delta \Phi - \operatorname{div} \mathbf{b} = 3\Delta \Phi - \operatorname{div} \operatorname{div} \Phi. \quad (12.8)$$

Таким образом, (12.5) представляется в форме

$$\Delta \Phi - \frac{m}{m+1} \mathbf{U} (3\Delta \Phi - \operatorname{div} \mathbf{b}) = \operatorname{def} \mathbf{c}, \quad (12.9)$$

откуда, выразив равенство следов тензоров, стоящих в левой и правой частях этого соотношения, придём к соотношению

$$3\Delta \Phi - \frac{3m}{m+1} (3\Delta \Phi - \operatorname{div} \mathbf{b}) = \operatorname{div} \mathbf{c};$$

учитывая, что  $\Delta \Phi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi$ , получим:

$$\operatorname{div} \mathbf{c} = \operatorname{div} \left[ \frac{3m}{m+1} \mathbf{b} - \frac{2m-1}{m+1} 3 \operatorname{grad} \Phi \right],$$

т. е. вектор  $\mathbf{c}$  может отличаться от вектора, стоящего в прямых скобках справа, лишь ротором некоторого вектора. Итак, примем

$$\mathbf{c} = \frac{3m}{m+1} \mathbf{b} - \frac{2m-1}{m+1} 3 \operatorname{grad} \Phi + \frac{3m}{m+1} \operatorname{rot} \mathbf{q},$$

а в дальнейшем вектор  $\operatorname{rot} \mathbf{q}$  будем считать входящим как слагаемое

в вектор  $\mathbf{b}$ ; поэтому предыдущее равенство может быть записано в виде

$$\mathbf{c} = \frac{3m}{m+1} \mathbf{b} - \frac{2m-1}{m+1} 3 \operatorname{grad} \Phi. \quad (12.10)$$

Подстановка в (12.9) приводит к следующему дифференциальному уравнению для тензора функций напряжений:

$$\Delta \Phi = \frac{m}{m+1} \mathbf{U} (3\Delta \Phi - \operatorname{div} \mathbf{b}) + \frac{3m}{m+1} \operatorname{def} \mathbf{b} - \frac{2m-1}{m+1} 3\nabla \nabla \Phi, \quad (12.11)$$

в котором вектор  $\mathbf{b}$  и скаляр  $\Phi$  определены через тензор  $\Phi$  по (12.6) и (12.7).

Выражение тензора напряжений  $\mathbf{T}$  через тензор функций напряжений  $\Phi$  по (12.1) и (11.7) имеет вид

$$\mathbf{T} = 2 \operatorname{def} \mathbf{b} + \mathbf{U} (3\Delta \Phi - \operatorname{div} \mathbf{b}) - 3\nabla \nabla \Phi - \Delta \Phi.$$

Подставив сюда значение  $\Delta \Phi$  по (12.11), придём к соотношению

$$\mathbf{T} = -\frac{m-2}{m+1} (\operatorname{def} \mathbf{b} - 3\nabla \nabla \Phi) + \frac{\mathbf{U}}{m+1} (3\Delta \Phi - \operatorname{div} \mathbf{b})$$

или по (11.8)

$$\mathbf{T} = \frac{m-2}{m+1} \operatorname{def} (3 \operatorname{grad} \Phi - \mathbf{b}) + \frac{\mathbf{U}}{m+1} (3\Delta \Phi - \operatorname{div} \mathbf{b}). \quad (12.12)$$

Отсюда, учитывая (12.8) и (8.15), сразу же находим:

$$\mathbf{E} = \operatorname{def} \mathbf{u} = \frac{1}{2J} \frac{m-2}{m+1} \operatorname{def} (3 \operatorname{grad} \Phi - \mathbf{b}). \quad (12.13)$$

Но при равенстве деформаций двух векторов сами векторы могут отличаться лишь вектором перемещения среды, как твёрдого тела (§ 4). Отбрасывая последнее, получим выражение вектора перемещения точек упругого тела в виде

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2J} \frac{m-2}{m+1} (3 \operatorname{grad} \Phi - \mathbf{b}). \quad (12.14)$$

Из соотношений (12.12) и (12.14) следует, что для решения задачи теории упругости не требуется знания тензора функций напряжений, а достаточно иметь выражения его дивергенции и первого инварианта. Этот вектор и скаляр, однако, не независимы друг от друга, а связаны соотношением, которое получим, вычислив дивергенцию тензоров в правой и левой частях соотношения (12.11). Применив формулы преобразования

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \Delta \Phi &= \Delta \operatorname{div} \Phi = \Delta \mathbf{b}, & \operatorname{div} \operatorname{def} \mathbf{b} &= \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{b} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{b}), \\ \operatorname{div} \nabla \nabla \Phi &= \operatorname{div} \operatorname{def} \operatorname{grad} \Phi = \operatorname{grad} \Delta \Phi, \\ \operatorname{div} \mathbf{U} (3\Delta \Phi - \operatorname{div} \mathbf{b}) &= \operatorname{grad} (3\Delta \Phi - \operatorname{div} \mathbf{b}), \end{aligned} \right\} \quad (12.15)$$

придём к соотношению

$$\Delta \mathbf{b} + \frac{m}{m-2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{b} = \frac{2(m-1)}{m-2} 3 \operatorname{grad} \Delta \Phi. \quad (12.16)$$

Заметим, что требование гармоничности суммы нормальных напряжений является следствием этого соотношения. Действительно, определив дивергенцию входящих в него векторов, получим:

$$\Delta \operatorname{div} \mathbf{b} + \frac{m}{m-2} \operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{b} = \frac{2(m-1)}{m-2} 3\Delta\Delta\Phi,$$

или по (12.8)

$$\frac{2(m-1)}{m-2} \Delta (\operatorname{div} \mathbf{b} - 3\Delta\Phi) = -3 \frac{2(m-1)}{m-2} \Delta\sigma = 0, \quad (12.17)$$

что и требовалось.

Итак, всем уравнениям теории упругости при отсутствии объемных сил можно удовлетворить, выразив тензор напряжений  $\mathbf{T}$  и вектор перемещения  $\mathbf{u}$  через вектор  $\mathbf{b}$  и скаляр  $\Phi$ , связанные соотношением (12.16). Преобразуем это соотношение, выразив вектор  $\mathbf{b}$  через скалярный и векторный потенциалы:

$$\mathbf{b} = \operatorname{grad} \psi + \operatorname{rot} \mathbf{q}. \quad (12.18)$$

Тогда найдём

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = \Delta\psi, \quad \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{b} = \Delta \operatorname{grad} \psi,$$

и подстановка в (12.16) дает:

$$\Delta \left[ \operatorname{rot} \mathbf{q} + \frac{2(m-1)}{m-2} \operatorname{grad} (\psi - 3\Phi) \right] = 0.$$

Поэтому, обозначив

$$3\Phi - \psi = \varphi, \quad (12.19)$$

можем написать:

$$\operatorname{rot} \mathbf{q} = \frac{2(m-1)}{m-2} \operatorname{grad} \varphi + \mathbf{A}, \quad (12.20)$$

где  $\mathbf{A}$  — гармонический вектор:

$$\Delta \mathbf{A} = 0. \quad (12.21)$$

Выражение вектора перемещения по (12.14) примет вид

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2G} \frac{m-2}{m+1} (3 \operatorname{grad} \Phi - \operatorname{rot} \mathbf{q} - \operatorname{grad} \psi) = \frac{1}{2G} \frac{m-2}{m+1} (\operatorname{grad} \varphi - \operatorname{rot} \mathbf{q}),$$

и по (12.20)

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2G} \frac{m-2}{m+1} \left( \mathbf{A} + \frac{m}{m-2} \operatorname{grad} \varphi \right). \quad (12.22)$$

При этом скаляр  $\varphi$  и вектор  $\mathbf{A}$  связаны соотношением, которое получим по (12.20), выразив, что  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{q} = 0$ :

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta\varphi = -\frac{m-2}{2(m-1)} \operatorname{div} \mathbf{A}. \quad (12.23)$$

Представление (12.22) вектора перемещения  $\mathbf{u}$  через гармонический вектор  $\mathbf{A}$  и скаляр  $\varphi$ , связанный с этим вектором соотношением (12.23), только обозначением отличается от решения П. Ф. Папковича, приведённого в § 10. Достаточно сделать замены

$$-\frac{1}{2G} \frac{m-2}{m+1} \mathbf{A} \text{ на } \mathbf{B} \text{ и } -\frac{1}{2G} \frac{m}{m+1} \varphi \text{ на } \chi,$$

чтобы прийти к формулам § 10; в частности, соотношение (12.23) приведётся к виду (10.6).

Исходя из соотношения (12.16), можно получить другие общие решения уравнений теории упругости. Если, в частности, принять в них  $\Phi = 0$ , то вектор  $\mathbf{b}$ , как следует из (12.14) и (9.4), только множителем будет отличаться от вектора перемещения  $\mathbf{u}$ . Таким образом, имея вектор перемещения  $\mathbf{u}$ , удовлетворяющий уравнениям теории упругости в перемещениях при отсутствии объёмных сил, можем рассматривать этот вектор как дивергенцию некоторого тензора функций напряжений, являющегося девиатором симметричного тензора  $\Psi$

$$\mathbf{u} = \operatorname{div} (\operatorname{Dev} \Psi). \quad (12.24)$$

Введём далее в рассмотрение вектор  $\mathbf{G}$ , связанный с  $\mathbf{b}$  соотношением

$$\mathbf{b} = \Delta \mathbf{G}. \quad (12.25)$$

По (12.16) получим:

$$\Delta \Delta \mathbf{G} + \frac{m}{m-2} \Delta \left( \operatorname{div} \mathbf{G} - \frac{2(m-1)}{m} 3\Phi \right) = 0.$$

Примем теперь

$$3\Phi = \frac{m}{2(m-1)} \operatorname{div} \mathbf{G}. \quad (12.26)$$

Тогда вектор  $\mathbf{G}$  будет бигармоническим

$$\Delta \Delta \mathbf{G} = 0, \quad (12.27)$$

и мы приходим к решению уравнений теории упругости, в котором вектор перемещения  $\mathbf{u}$  и тензор напряжения  $\mathbf{T}$  выражены через один бигармонический вектор  $\mathbf{G}$ . Именно, по (12.12), (12.14) и (12.25) получаем, отбросив в результате не имеющий значения постоянный множитель  $\frac{m-2}{m+1}$ :

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2G} \left[ \frac{m}{2(m-1)} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{G} - \Delta \mathbf{G} \right], \quad (12.28)$$

$$\mathbf{T} = -\operatorname{def} \Delta \mathbf{G} + \frac{1}{2(m-1)} (m \nabla \nabla \operatorname{div} \mathbf{G} - \mathbf{U} \operatorname{div} \Delta \mathbf{G}). \quad (12.29)$$

На эту форму решения уравнений теории упругости указал Буссинеск. К ней же, независимо от Буссинеска, пришёл Б. Г. Галеркин, который отметил общность этого решения и дал ряд применений его

к частным задачам. В компонентах по осям декартовой системы уравнения (12.29) выразятся формулами

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{\partial \Delta G_x}{\partial x} + \frac{1}{2(m-1)} \left( m \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \Delta \right) \operatorname{div} \mathbf{G}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta G_y}{\partial x} + \frac{\partial \Delta G_x}{\partial y} \right) + \frac{m}{2(m-1)} \frac{\partial^2 \operatorname{div} \mathbf{G}}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (12.30)$$

и т. д. Здесь  $G_x, G_y, G_z$  — бигармонические функции

$$\Delta \Delta G_x = 0, \quad \Delta \Delta G_y = 0, \quad \Delta \Delta G_z = 0. \quad (12.31)$$

Представим основное соотношение (12.16) в виде

$$\Delta \mathbf{b} = \frac{2(m-1)}{m-2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \left[ 3 \operatorname{grad} \Phi - \frac{m}{2(m-1)} \mathbf{b} \right]. \quad (12.32)$$

Примем теперь, что вектор, стоящий в квадратных скобках, является ротором некоторого вектора  $\mathbf{K}$ , лишённого источников:

$$3 \operatorname{grad} \Phi = \frac{m}{2(m-1)} \mathbf{b} + \operatorname{rot} \mathbf{K}, \quad \operatorname{div} \mathbf{K} = 0. \quad (12.33)$$

Вектор перемещения  $\mathbf{u}$  по (12.14) представится в форме

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2G} \frac{m-2}{m+1} \left( \operatorname{rot} \mathbf{K} - \frac{m-2}{2(m-1)} \mathbf{b} \right),$$

причём по (12.32) и (12.33)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{K} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{K} - \Delta \mathbf{K} = -\Delta \mathbf{K} = -\frac{m}{2(m-1)} \operatorname{rot} \mathbf{b}.$$

Таким образом, отбросив несущественный постоянный множитель и несколько изменив обозначения, придём к представлению вектора перемещения в форме Корна

$$\mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{K} - \frac{m-2}{m} \mathbf{b}_1. \quad (12.34)$$

Здесь  $\mathbf{b}_1$  — гармонический вектор,

$$\Delta \mathbf{b}_1 = 0, \quad (12.35)$$

а вектор  $\mathbf{K}$  определяется условиями

$$\Delta \mathbf{K} = \operatorname{rot} \mathbf{b}_1, \quad \operatorname{div} \mathbf{K} = 0. \quad (12.36)$$

Решение вида (12.34) было использовано Корном при построении доказательства существования решения уравнений теории упругости при заданных на поверхности упругого тела перемещениях.

### § 13. Объёмные силы, имеющие потенциал.

#### Тепловые напряжения

При действии на упругое тело объёмных сил, имеющих потенциал  $\Pi$ , уравнения теории упругости в перемещениях (9.4) приобретают вид

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{m}{m-2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = -\frac{1}{G} \mathbf{K} = \frac{1}{G} \operatorname{grad} \Pi. \quad (13.1)$$

Частное решение, соответствующее действию объёмных сил, будем искать в форме

$$\mathbf{u}_0 = \text{grad } \psi. \quad (13.2)$$

Тогда

$$\Delta \mathbf{u}_0 = \text{grad } \Delta \psi, \quad \text{grad div } \mathbf{u}_0 = \text{grad div grad } \psi = \text{grad } \Delta \psi,$$

и подстановка в (13.1) приводит к соотношению

$$\text{grad} \left[ \frac{2(m-1)}{m-2} \Delta \psi - \frac{1}{G} \Pi \right] = 0,$$

т. е. скаляр  $\psi$  должен быть определён как решение уравнения Пуассона

$$\Delta \psi = \frac{m-2}{2G(m-1)} \Pi. \quad (13.3)$$

Тензор деформации, соответствующей частному решению (13.2), по (11.8) будет:

$$\mathbf{E}_0 = \text{def } \mathbf{u}_0 = \text{def grad } \psi = \nabla \nabla \psi, \quad (13.4)$$

а его утроенный первый инвариант равен

$$3J_1(\mathbf{E}_0) = \Delta \psi = \frac{m-2}{2G(m-1)} \Pi. \quad (13.5)$$

Выражение тензора напряжений получаем по (8.15):

$$\mathbf{T}_0 = 2G \nabla \nabla \psi + \frac{\mathbf{U}}{m-1} \Pi. \quad (13.6)$$

Вектор напряжения на площадке с нормалью  $\mathbf{n}$ , соответствующий этому значению тензора, равен

$$\mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{n} = \frac{\Pi}{m-1} \mathbf{n} + 2G (\mathbf{n} \cdot \text{grad}) \text{grad } \psi. \quad (13.7)$$

Задача о разыскании тепловых напряжений, возникающих в упругом теле при нагревании его, формально сводится к рассмотрению равновесия тела, находящегося под действием объёмных сил, имеющих потенциал, и некоторой системы поверхностных сил.

Обозначим через  $t$  температуру, являющуюся в общем случае функцией координат точек тела. Каждый элемент тела при свободном расширении, вызванном повышением температуры, получает деформацию, определяемую тензором

$$\mathbf{E}' = \alpha t \mathbf{U}, \quad (13.8)$$

где  $\alpha$  — коэффициент температурного расширения. Соответствующее объёмное расширение равно

$$\vartheta' = 3\alpha t. \quad (13.9)$$

Воздействие соседних элементов, препятствующих свободному расширению, создаёт тепловые напряжения, определяемые тензором  $\mathbf{T}$ ,



которому соответствует наложение добавочной деформации, определяемой тензором  $E''$ , который связан с  $T$  законом Гука (8.15).

Как отмечалось в конце § 4, тензоры  $E'$  и  $E''$  не представляют «деформацию» в том смысле, как это понятие было определено выше. Иными словами, не существует векторов  $u'$  и  $u''$  таких, чтобы  $\text{def } u'$  и  $\text{def } u''$  были соответственно равны тензорам  $E'$  и  $E''$ . «Деформацией» является тензор полной деформации:

$$E = E' + E'' = \text{def } u, \quad (13.10)$$

где  $u$  — вектор перемещения.

По (8.15) и (13.10) имеем:

$$T = 2G \left( E'' + \frac{\vartheta''}{m-2} U \right) = 2G \left( E + \frac{\vartheta}{m-2} U \right) - 2G \left( E' + \frac{\vartheta'}{m-2} U \right),$$

и далее по (13.8), (13.9)

$$T = 2G \left( \text{def } u + \frac{\text{div } u}{m-2} U - \frac{m+1}{m-2} U \alpha t \right). \quad (13.11)$$

Составив теперь условие равновесия при отсутствии объёмных сил

$$\text{div } T = 0,$$

придём к соотношению

$$\text{div} \left( \text{def } u + \frac{\text{div } u}{m-2} U \right) = \frac{m+1}{m-2} \text{div } U \alpha t,$$

правая часть которого была развёрнута в § 9 при выводе уравнений равновесия в перемещениях. Получаем:

$$\Delta u + \frac{m}{m-2} \text{grad } \text{div } u = 2 \frac{m+1}{m-2} \text{grad } \alpha t. \quad (13.12)$$

Сравнение с (13.1) показывает, что влияние неравномерности распределения температуры по объёму тела может быть в уравнениях равновесия теории упругости в перемещениях учтено как действие объёмных сил с потенциалом

$$\Pi = 2G \frac{m+1}{m-2} \alpha t. \quad (13.13)$$

В вычислении, которое было выше проведено, модули  $G$  и  $m$  считались постоянными, т. е. не зависящими от температуры.

При отсутствии внешнего нагружения на поверхности тела по (13.11) имеем [ср. (9.10)]:

$$T \cdot n = 0, \text{ т. е. } n \frac{\text{div } u}{m-2} + (n \cdot \text{grad}) u + \frac{1}{2} n \times \text{rot } u = \frac{m+1}{m-2} \alpha t n, \quad (13.14)$$

где  $t$  — температура поверхности тела. Таким образом, поддержание на поверхности тела температуры  $t$  создаёт в теле те же перемещения,

что и распределение нормальной поверхностной нагрузки интенсивности

$$F_n = 2G \frac{m+1}{m-2} \sigma t = \Pi. \quad (13.15)$$

Частное решение уравнений (13.12), соответствующее наличию в них температурного слагаемого, может быть представлено в форме (13.2), причём  $\psi$  определяется уравнением Пуассона

$$\Delta\psi = \frac{m+1}{m-1} \alpha t. \quad (13.16)$$

Предположим, что объёмные силы отсутствуют, а на части поверхности тела,  $S_1$ , отсутствуют перемещения, т. е.  $U = 0$  в условиях (9.7), тогда как на другой её части,  $S_2$ , отсутствуют внешние нагрузки, т. е.  $F_n = 0$ .

Представим вектор перемещения в виде суммы двух слагаемых

$$u = u_1 + \text{grad } \psi, \quad (13.17)$$

где  $u_1$  — решение однородных уравнений теории упругости в перемещениях. Тензор напряжения найдём по (13.11) и (13.6):

$$\begin{aligned} T &= 2G \left( \text{def } u_1 + \frac{\text{div } u_1}{m-2} U \right) + 2G \nabla \nabla \psi + 2G \frac{(m+1)U}{(m-2)(m-1)} \sigma t - 2G \frac{m+1}{m-2} U \sigma t = \\ &= 2G \left( \text{def } u_1 + \frac{\text{div } u_1}{m-2} U - \frac{m+1}{m-1} U \sigma t \right). \end{aligned} \quad (13.18)$$

Краевые условия для вектора  $u_1$  поэтому будут:

$$\text{на } S_1 \quad u_1 = -\text{grad } \psi, \quad (13.19)$$

$$\begin{aligned} \text{на } S_2 \quad n \frac{\text{div } u_1}{m-2} + (n \cdot \text{grad}) u_1 + \frac{1}{2} n \times \text{rot } u_1 = \\ = n \frac{m+1}{m-1} \alpha t - (n \cdot \text{grad}) \text{grad } \psi. \end{aligned} \quad (13.20)$$

Заметив, что  $\text{rot } u_1 = \text{rot } u$ , и добавляя к правой и левой частям этого равенства

$$n \frac{\text{div grad } \psi}{m-2} = n \frac{\Delta\psi}{m-2} = \frac{m+1}{(m-1)(m-2)} \alpha t n,$$

приведём (13.20) также к виду

$$\text{на } S_2 \quad n \frac{\text{div } u}{m-2} + (n \cdot \text{grad}) u + \frac{1}{2} n \times \text{rot } u = n \frac{m+1}{m-2} \alpha t, \quad (13.21)$$

что вполне согласуется с (13.15).

Если опоры не препятствуют перемещениям точек поверхности тела, то краевое условие (13.19) отпадает и по всей поверхности

тела  $S$  должно выполняться соотношение (13.20) или (13.21). Проверим, что оно будет выполнено в случае линейного распределения температуры по объёму тела [см. (4.23)]:

$$t = t_0 + \theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z = t_0 + \theta \cdot R. \quad (13.22)$$

По (4.24) вектор перемещения определяется соотношением

$$u = \alpha \left( tR - \frac{1}{2} \theta R^2 \right), \quad (13.23)$$

и вычисление по формулам

$$\operatorname{div} \varphi a = \varphi \operatorname{div} a + a \cdot \operatorname{grad} \varphi, \quad \operatorname{rot} \varphi a = \varphi \operatorname{rot} a + \operatorname{grad} \varphi \times a,$$

$$(n \cdot \operatorname{grad}) \varphi a = \varphi (n \cdot \operatorname{grad}) a + a (n \cdot \operatorname{grad} \varphi)$$

даёт:

$$\operatorname{div} u = \alpha \left( t \operatorname{div} R + R \cdot \operatorname{grad} t - \frac{1}{2} \theta \cdot \operatorname{grad} R^2 \right) =$$

$$= 3\alpha t - \alpha R \cdot \theta + \alpha \theta \cdot R = 3\alpha t,$$

$$\operatorname{rot} u = \alpha \left( t \operatorname{rot} R + \operatorname{grad} t \times R - \frac{1}{2} \operatorname{grad} R^2 \times \theta \right) = 2\alpha \theta \times R,$$

$$(n \cdot \operatorname{grad}) u = \alpha \left[ t (n \cdot \operatorname{grad}) R + R (n \cdot \operatorname{grad} t) - \theta \left( n \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{2} R^2 \right) \right] =$$

$$= \alpha [tn + R(n \cdot \theta) - \theta(n \cdot R)] = \alpha tn + \alpha n \times (R \times \theta),$$

и в левой части равенства (13.21) получаем:

$$\frac{3\alpha t}{m-2} n + \alpha tn + \alpha n \times (R \times \theta) + \alpha n \times (\theta \times R) = \frac{m+1}{m-2} \alpha tn,$$

что и требовалось. Заметим, что выражение (13.23) удовлетворяет также уравнениям равновесия в перемещениях (13.12). Итак, при линейном законе распределения температуры в упругом теле не возникает тепловых напряжений.

Перейдём к составлению дифференциальных уравнений равновесия упругого тела в напряжениях, предполагая отсутствие объёмных и поверхностных сил и считая известным распределение температуры по объёму тела. По условию, имеют место уравнения статики сплошной среды в объёме и на поверхности

$$\operatorname{div} T = 0, \quad (13.24)$$

$$n \cdot T = 0, \quad (13.25)$$

причём связь тензора деформации  $E = \operatorname{def} u$  с тензором напряжений по (8.15), (13.10) и (13.8) должна быть представлена в виде

$$E = \frac{1}{2G} \left( T - \frac{3\sigma}{m+1} U \right) + \alpha t U. \quad (13.26)$$

Это выражение следует подставить в выражение условия сплошности

(4.10); получим:

$$\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot} T - \frac{3\sigma}{m+1} U\right)^* + 2G \operatorname{rot}(\operatorname{rot} U \alpha t)^* = 0. \quad (13.27)$$

Воспроизведя вычисление § 11 и учитывая (13.24) и (11.10), придём вместо (11.11) к равенству

$$\Delta T + \frac{3m}{m+1} (\nabla \nabla \sigma - U \Delta \sigma) - 2G (U \alpha t - \nabla \nabla \alpha t) = 0. \quad (13.28)$$

Для определения  $\Delta \sigma$  составляем первый инвариант тензора, стоящего в левой части этого равенства:

$$3\Delta \sigma + \frac{3m}{m+1} (\Delta \sigma - 3 \Delta \sigma) - 2G (3\Delta \alpha t - \Delta \alpha t) = 0;$$

отсюда находим:

$$3\Delta \sigma = - \frac{4G(m+1)}{m-1} \Delta \alpha t, \quad (13.29)$$

и подстановка в (13.28) приводит к уравнениям Бельтрами — Митчелла в задаче о тепловых напряжениях:

$$\Delta T + \frac{3m}{m+1} \nabla \nabla \sigma + 2G \left( \nabla \nabla \alpha t + \frac{m+1}{m-1} U \Delta \alpha t \right) = 0. \quad (13.30)$$

Записав это соотношение в форме

$$\Delta T + \nabla \nabla \left[ \frac{3m}{m+1} \sigma + \frac{4Gm}{m-1} \alpha t \right] - 2G \frac{m+1}{m-1} (\nabla \nabla - U \Delta) \alpha t = 0$$

и замечая, что по (13.29) лапласиан выражения в квадратных скобках равен нулю, имеем также:

$$\Delta T + (\nabla \nabla - U \Delta) \left( \frac{3m\sigma}{m+1} + \frac{4Gm}{m-1} \alpha t - 2G \frac{m+1}{m-1} \alpha t \right) = 0.$$

Зависимости Бельтрами — Митчелла для тепловых напряжений поэтому приобретают вид

$$\Delta T + (\nabla \nabla - U \Delta) \left( \frac{3m\sigma}{m+1} + 2G \alpha t \right) = 0. \quad (13.31)$$

## ПРИМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ К ГЛАВЕ 1

Предполагается, что основные уравнения математической теории упругости известны читателю в объёме, излагаемом в распространённых учебных руководствах: М. М. Филоненко-Бородич «Теория упругости» (Гостехиздат, 1947). Л. С. Лейбензон «Курс теории упругости» (Гостехиздат 1947). П. Ф. Папкович «Теория упругости» (Обorongиз, 1939). С. П. Тимошенко «Теория упругости» (ГТТИ, 1934).

От читателя требуется также знание основ векторного анализа в объёме первой и второй глав книги Н. Е. Кочина «Векторное исчисление и начала тензорного исчисления» (ОНТИ, ГТТИ, 1934) и знакомство с понятием аффинного ортогонального тензора, излагаемым в третьей главе этой книги, к которой следует обратиться, если изложение в § 3 покажется малодоступным.

Изложение в § 4 вопроса об определении перемещений по тензору деформации представляет в известной мере пересказ в обозначениях тензорного анализа, приспособленный к дальнейшему развитию предмета, § 15 книги Н. И. Мухелишвили «Некоторые основные задачи математической теории упругости» (Изд-во Акад. наук, 1949).

Всё, о чём говорится в главе 1, непосредственно основывается на труде Ю. А. Круткова «Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости». Впервые тензор функций напряжений (см. § 5 главы 1) ввёл в рассмотрение В. И. Блох. См. его работу «Функции напряжений в теории упругости» (Прикл. матем. и мех. XIV, 1950, стр. 415—422) и библиографию к этой работе, в которой перечислены предшествующие публикации В. И. Блоха.

В § 6 изложен, как нам представляется, наиболее простой приём составления основных дифференциальных операций в криволинейных координатах. Мы ограничились случаем ортогональных координат, как наиболее важным для приложений. В § 7 этот приём применён для записи в ортогональных криволинейных координатах основных соотношений механики сплошной среды, в том числе для составления условий сплошности. Другой вывод условий сплошности (в любых криволинейных координатах) дан в статье Т. Н. Блинчикова «Дифференциальные уравнения равновесия теории упругости в криволинейной координатной системе» (Прикл. матем. и мех., 2, 1938, стр. 407) и В. З. Власова «Уравнения неразрывности деформаций в криволинейных координатах» (там же, 8, 1944, стр. 301). Запись уравнений сплошности в сферических и цилиндрических координатах приведена в книге В. З. Власова «Общая теория оболочек» (Гостехиздат, 1949).

Первая публикация П. Ф. Папковича «Выражение общего интеграла уравнений теории упругости через гармонические функции» (Известия АН СССР, сер. матем. и естеств. наук, № 10) относится к 1932 г. Статья Нейбера (Neuber), содержащая то же решение «Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie» (Zeitsch. für angew. Math. und Mech. 14, № 4) опубликована в 1934 г.

В настоящее время вопросам, относящимся к представлению решения уравнений равновесия теории упругости, посвящено большое число работ. Ограничимся здесь указанием на статьи Л. Н. Тер-Мкртычана «Об общем решении задачи теории упругости» (Труды Ленинградского политехн. ин-та, № 4, 1947) и М. Г. Слободянского «Общие формы решений уравнений упругости для односвязных и многосвязных областей, выраженные через гармонические функции» (Прикл. матем. и мех. 18, 1954, стр. 55), в которых трактуется вопрос о допустимости или недопустимости уменьшения числа гармонических функций в «общем решении» до трёх (вместо четырёх). Наша точка зрения сводится к тому, что решение П. Ф. Папковича, равно как и другие формы общих решений, является весьма полезным вспомогательным средством решения краевых задач теории упругости, допускающим непосредственное применение при выборе частных решений хорошо известных классических решений в форме гармонических функций. Если и верно, что «общее решение» должно содержать только три гармонические функции, а не четыре, то при построении решения конкретной задачи сохранение четвёртой гармонической функции может облегчить выбор необходимых частных решений, и поэтому нет нужды от него отказываться.

Вывод решения П. Ф. Папковича, приведенный в § 10, сообщён автору Г. Ю. Джанелидзе. Запись выражения составляющих тензора напряжений в криволинейных координатах через гармонические функции в форме, отличной от (10.28) и (10.29), имеется в книге Нейбера «Концентрация напряжений» (Гостехиздат, 1947), на стр. 34—39, и в статье Г. С. Шапиро «Функции напряжений в произвольной системе криволинейных координат» (Докл. Акад. наук, 55, № 8, 1947). Формулы (10.28) и (10.29) приведены в работе М. Садовского и Е. Штернберга (Journal of Applied Mech. 16, № 2, стр. 149,

1949); выражения составляющих тензора напряжения через гармонические функции в произвольной системе криволинейных координат, из которых получаются, в частности, формулы (10.28) и (10.29), приведены в статье Г. Ю. Джанелидзе «Общие решения уравнений теории упругости в произвольных криволинейных координатах» (Докл. Акад. наук, 88, № 3, 1953).

Зависимости Бельтрами—Митчелла в тензорной форме в записи, несколько отличной от (11.13), приводятся в книге Ю. А. Круткова (стр. 93). Выражения этих зависимостей в системе ортогональных криволинейных координат (11.17) автору не приходилось встречать в литературе; в частном случае цилиндрических координат при наличии симметрии вращения зависимости Бельтрами—Митчелла получены довольно кропотливым путём в известном курсе С. П. Тимошенко (стр. 341). См. также (11.18).

Установление связи между тензором функций напряжений и функциями, определяющими общие решения уравнений теории упругости, принадлежит В. И. Блоху и Ю. А. Круткову; оно составляет основное содержание указанной выше книги Круткова. Следуя ходу рассуждений Круткова, мы приходим к соотношению (12.16) между дивергенцией тензора функций напряжений и его первым инвариантом. Из (12.16) непосредственно получаются решения в форме Папковича—Нейбера и Буссинеска—Галеркина, а также решение Корна. Отметим ещё работу Шефера (H. Schäfer «Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums und des elastischen Körpers», Zeitsch. für angew. Math. und Mechanik, 33, № 10—11, 1953), в которой вновь получены основные результаты Круткова и Блоха.

Задаче о тепловых напряжениях посвящена книга Н. Н. Лебедева «Температурные напряжения в теории упругости» (ОНТИ, 1937), в которой имеется подробная библиография. Большое число задач о тепловых напряжениях было рассмотрено Г. Н. Масловым; результаты этих работ суммированы в статье этого автора «Задача теории упругости о термоупругом равновесии» (Известия научно-исследов. института гидротехники, № 23, 1938). Оригинальный метод решения задач теории упругости, относящихся к этой области, предложен В. М. Майзелем в книге «Температурная задача теории упругости» (Изд-во Акад. наук УССР, 1951). Основные соотношения математической теории упругости для тепловых напряжений, приведённые в § 12, излагаются во многих учебных руководствах. Запись соотношений Бельтрами—Митчелла в форме (13.30) имеется в книге Н. Н. Лебедева.

При изложении основных уравнений теории упругости мы не останавливались на вариационных принципах и основанных на них методах приближённого решения частных задач теории упругости. Эти методы получили применение к рассмотрению некоторых пространственных задач в работах М. М. Филоненко-Бородича «Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях» (Прикл. матем. и мех. 15, № 2, 1951). «Две задачи о равновесии упругого параллелепипеда» (там же, № 5, 1951), «Некоторые обобщения задачи Ляме для упругого параллелепипеда» (там же 17, № 4, 1953) и Г. С. Шапиро «Некоторые задачи о деформациях стержней переменного сечения» (там же 17, № 2, 1953).

Вопросу о приведении основных задач статики упругого тела к интегральным уравнениям посвящена большая литература. Существенные результаты получены Д. И. Шерманом (Пространственная задача теории упругости с заданными смещениями на границе, Прикл. матем. и мех., 7, стр. 341—360, 1943) и в ряде публикаций И. С. Аржаных, собранных в монографии «Интегральные уравнения основных задач теории поля и теории упругости» (Ташкент, Издательство Акад. наук Узбекской ССР, 1954), в которой читатель найдёт также указания на фундаментальные работы Фредгольма, Вейля и Лихтенштейна.

ГЛАВА 2  
НЕОГРАНИЧЕННАЯ УПРУГАЯ СРЕДА  
И УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

§ 1. Действие сосредоточенной силы в неограниченной  
упругой среде

Решение задачи о действии сосредоточенной силы даёт пример напряжённого состояния, возникающего при наличии простейшей точечной особенности; с помощью этого решения могут быть найдены напряжённые состояния, создаваемые особенностями более сложной природы (двойная сила, центр расширения, сосредоточенный момент и т. д.). Имея решение уравнений теории упругости, соответствующее приложению сосредоточенной силы, можно с помощью суммирования получить решение для любого распределения сил по объёму, поверхности или линии в неограниченном упругом теле.

Точку приложения  $O$  сосредоточенной силы  $Q$  примем за начало координат (точка истока), а положение любой точки  $M$  упругой среды (точки наблюдения) будем задавать её вектор-радиусом, проведённым из этого начала:

$$R = ix + jy + kz. \quad (1.1)$$

Через

$$r = \frac{1}{R} R$$

будем обозначать единичный вектор направления  $R$ . Пусть далее  $T$  — тензор напряжений, тогда его скалярное произведение на единичный вектор  $n$  нормали к некоторой площадке определяет значение вектора напряжения [глава 1, формула (1.9)]

$$t_n = n \cdot T$$

на этой площадке. Поэтому интегралы по замкнутой поверхности

$$V = \int_S \int t_n do, \quad M = \int_S \int R \times t_n do \quad (1.2)$$

дают главный вектор и главный момент относительно точки  $O$  напряжений, распределённых по этой поверхности.

Из соображений статики следует, что интегралы (1.2) будут равны нулю, если начало координат лежит вне  $S$ ; если же оно лежит внутри  $S$ , то по тем же соображениям

$$\mathbf{V} = -\mathbf{Q}, \quad \mathbf{M} = 0. \quad (1.3)$$

За поверхность  $S$  может быть взята сфера радиуса  $R$  с центром в начале координат; тогда

$$do = R^2 do^*, \quad (1.4)$$

где  $do^*$  — элемент поверхности концентрической сферы  $S^*$  единичного радиуса. Поэтому  $\mathbf{V}$  может иметь не зависящее от  $R$  значение ( $-\mathbf{Q}$ ) лишь при условии, что компоненты тензора  $\mathbf{T}$  убывают обратно пропорционально квадрату расстояния от точки приложения силы; но тогда вектор перемещения должен убывать при удалении от этой точки, как  $R^{-1}$ .

Это соображение подсказывает характер искомого решения уравнений теории упругости. Будем исходить из общего решения в форме П. Ф. Папковича [глава 1, формула (10.10)]:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - \frac{m}{4(m-1)} \text{grad} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{B} + B_0), \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{B}$  — потенциальный вектор,  $B_0$  — потенциальный скаляр,

$$\Delta \mathbf{B} = 0, \quad \Delta B_0 = \text{div grad } B_0 = 0. \quad (1.6)$$

Естественно предположить:

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}\varphi, \quad B_0 = 0, \quad (1.7)$$

где потенциальный скаляр  $\varphi$  подлежит определению. Тогда

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}) \varphi.$$

Применив известные формулы векторного исчисления

$$\text{grad } \varphi \psi = \varphi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \varphi, \quad \text{grad } \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{Q},$$

по (1.5) получим:

$$\mathbf{u} = \frac{3m-4}{4(m-1)} \mathbf{Q}\varphi - \frac{m}{4(m-1)} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}) \text{grad } \varphi. \quad (1.8)$$

Но единственной потенциальной функцией, имеющей при  $R=0$  особенность и убывающей при  $R \rightarrow \infty$  как  $\frac{1}{R}$ , является произведение  $\frac{1}{R}$  на некоторую постоянную  $A$ . Поэтому

$$\varphi = \frac{A}{R}, \quad \mathbf{B} = \frac{A}{R} \mathbf{Q}, \quad (1.9)$$



и остаётся так подобрать  $A$ , чтобы удовлетворить первому условию (1.3). Второе условие (1.3) будет при этом удовлетворено автоматически, так как подинтегральное выражение в формуле (1.2) для момента  $\mathbf{M}$  имеет порядок  $R$ , а величина этого интеграла не должна зависеть от радиуса сферы  $S$ . Поэтому последний можно считать сколь угодно малым и при  $R \rightarrow 0$  получим  $\mathbf{M} = 0$ , что и требуется.

Для вычисления главного вектора  $\mathbf{V}$  надо обратиться к выражению  $t_n$  через вектор  $\mathbf{u}$ , приведённому в § 9 главы 1 [формула (9.10)]:

$$t_n = 2G \left[ \frac{1}{m-2} \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{u} + (\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u} + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}) \right]. \quad (1.10)$$

Вместо  $\mathbf{u}$  подставляем его значение по (1.8) и (1.9) и проводим указываемые соотношением (1.10) вычисления; для нашей цели было бы достаточно принять  $\mathbf{n} = \mathbf{r}$ , т. е. найти напряжения на поверхности сферы  $S$ , но, имея в виду последующие приложения, не будем специализировать выбора площадки.

Имеем:

$$\operatorname{grad} \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2} \operatorname{grad} R = -\frac{1}{R^3} \mathbf{R},$$

и значит

$$\mathbf{u} = A \left[ \frac{3m-4}{4(m-1)} \frac{\mathbf{Q}}{R} + \frac{m}{4(m-1)} \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}}{R^3} \mathbf{R} \right]. \quad (1.11)$$

Теперь вычисляем:

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{Q}}{R} = \mathbf{Q} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^3} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \frac{1}{R^3} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R} &= -\operatorname{div} \left[ (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}) \operatorname{grad} \frac{1}{R} \right] = \\ &= -\operatorname{grad} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}) \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{R} - (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}) \operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{R} = \frac{1}{R^3} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}, \end{aligned}$$

так как

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{R} = \Delta \frac{1}{R} = 0.$$

Итак,

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = -A \frac{m-2}{2(m-1)} \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}}{R^3}. \quad (1.12)$$

Замечая далее, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{B}) = 0,$$

получаем:

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{B} = A \operatorname{rot} \frac{\mathbf{Q}}{R} = A \operatorname{grad} \frac{1}{R} \times \mathbf{Q} = A \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{R}}{R^3}. \quad (1.13)$$

Нужно ещё вычислить  $(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u}$ , т. е. производную вектора  $\mathbf{u}$  по направлению  $\mathbf{n}$ . Для этого полезно отметить соотношения

$$(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{R} = \mathbf{n}, \quad (\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}) \psi A = A (\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \psi) + \psi (\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}) A.$$

Получим:

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \text{grad}) \frac{Q}{R} &= Q \left( \mathbf{n} \cdot \text{grad} \frac{1}{R} \right) = -Q \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}}{R^3}, \\ (\mathbf{n} \cdot \text{grad}) \frac{1}{R^3} (Q \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R} &= \mathbf{R} \left( \mathbf{n} \cdot \text{grad} \frac{Q \cdot \mathbf{R}}{R^3} \right) + \frac{1}{R^3} (Q \cdot \mathbf{R}) \mathbf{n} = \\ &= -\frac{3}{R^3} (Q \cdot \mathbf{R}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R} + \frac{1}{R^3} (\mathbf{n} \cdot Q) \mathbf{R} + \frac{1}{R^3} (Q \cdot \mathbf{R}) \mathbf{n} \end{aligned}$$

и далее

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} &= \frac{-A}{4(m-1)} \left[ (3m-4) \frac{1}{R^3} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}) Q + \frac{3m}{R^3} (Q \cdot \mathbf{R}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m}{R^3} (\mathbf{n} \cdot Q) \mathbf{R} - \frac{m}{R^3} (Q \cdot \mathbf{R}) \mathbf{n} \right]. \quad (1.14) \end{aligned}$$

Подстановка в (1.10) теперь даёт:

$$\begin{aligned} t_n &= -\frac{GA(m-2)}{2(m-1)R^3} \left[ - (Q \cdot \mathbf{R}) \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot Q) \mathbf{R} + Q (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3m}{m-2} \frac{1}{R^2} (Q \cdot \mathbf{R}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R} \right]. \quad (1.15) \end{aligned}$$

В частности, при  $\mathbf{n} = \mathbf{r}$  получим:

$$t_r = -\frac{GA(m-2)}{2(m-1)R^2} \left[ Q + \frac{3m}{m-2} (Q \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} \right]. \quad (1.16)$$

Остаётся определить значение интеграла

$$V = -Q = \iint_S t_r do = R^3 \iint_{S^*} t_r do^*.$$

Для этого находим:

$$\iint_{S^*} Q do^* = Q \iint do^* = 4\pi Q.$$

$$\iint_{S^*} (Q \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} do^* = \frac{4\pi}{3} Q.$$

Последний интеграл вычисляется так: можно рассматривать  $Q \cdot \mathbf{r}$  как значение на поверхности  $S^*$  величины  $Q \cdot \mathbf{R}$ , заданной внутри  $S^*$ ; замечая ещё, что на  $S^*$  имеем также  $\mathbf{n} = \mathbf{r}$ , можем написать:

$$\begin{aligned} \iint_{S^*} (Q \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} do^* &= \iint_{S^*} \mathbf{n} (Q \cdot \mathbf{R}) do^* = \iint_{V^*} \text{grad} (Q \cdot \mathbf{R}) d\tau = \\ &= Q \iiint_{V^*} d\tau = \frac{4\pi}{3} Q. \end{aligned}$$

Здесь была применена формула Гаусса — Остроградского, позволяющая перейти к интегрированию по объёму  $V^*$  единичной сферы.

Получаем:

$$-Q = -\frac{GA(m-2)}{2(m-1)} 4\pi Q \left(1 + \frac{m}{m-2}\right), \quad \text{т. е.} \quad A = \frac{1}{4\pi G}. \quad (1.17)$$

Вышеприведённые выражения векторов  $B$ ,  $u$  и  $t_n$  теперь могут быть записаны в окончательном виде:

$$B = \frac{1}{4\pi G R} Q, \quad (1.18)$$

$$u = \frac{1}{16\pi G(m-1)} \frac{1}{R} [(3m-4)Q + mr(r \cdot Q)], \quad (1.19)$$

$$t_n = -\frac{m-2}{8\pi(m-1)} \frac{1}{R^2} \left[ -(r \cdot Q)n + (n \cdot Q)r + Q(n \cdot r) + \right. \\ \left. + \frac{3m}{m-2} (r \cdot Q)(n \cdot r)r \right]. \quad (1.20)$$

Вводя ещё в рассмотрение единичный вектор  $l$ , который может быть или перпендикулярен к  $n$ , или сонаправлен с ним, получим:

$$t_n \cdot l = t_{nl} = -\frac{m-2}{8\pi(m-1)} \frac{1}{R^2} [-(r \cdot Q)\delta_{nl} + (n \cdot Q)(l \cdot r) + \\ + (Q \cdot l)(n \cdot r) + \frac{3m}{m-2} (r \cdot Q)(n \cdot r)(l \cdot r)], \quad (1.21)$$

где введён дельта-символ  $\delta_{nl}$ , равный нулю в первом случае и единице во втором. Симметрия этого выражения относительно букв  $n$  и  $l$  объясняется свойством взаимности касательных напряжений.

В декартовой системе координат, принимая, что сила  $Q$  направлена по оси  $z$ , получим по (1.19):

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{mQ}{16\pi G(m-1)} \frac{xz}{R^3}, & v &= \frac{mQ}{16\pi G(m-1)} \frac{yz}{R^3}, \\ \omega &= \frac{mQ}{16\pi G(m-1)} \left[ \frac{z^2}{R^3} + \frac{3m-4}{m} \frac{1}{R} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Направляя далее векторы  $n$  и  $l$  по координатным осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , получим по (1.21) составляющие тензора напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{Qz}{8\pi(m-1)R^3} \left( m-2 - \frac{3mx^2}{R^2} \right), & \sigma_y &= \frac{Qz}{8\pi(m-1)R^3} \left( m-2 - \frac{3my^2}{R^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{3Qmxyz}{8\pi(m-1)R^3}, & \sigma_z &= -\frac{Qz}{8\pi(m-1)R^3} \left( m-2 + \frac{3mz^2}{R^2} \right), \\ \tau_{xz} &= -\frac{Qx}{8\pi(m-1)R^3} \left( m-2 + \frac{3mz^2}{R^2} \right), & \tau_{yz} &= -\frac{Qy}{8\pi(m-1)R^3} \left( m-2 + \frac{3mz^2}{R^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

При вычислении в сферических координатах  $R$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$  сначала примем, что сила  $Q$  имеет направление оси  $z$ , от которой ведётся отсчёт полюсного угла  $\vartheta$ . Тогда, называя через  $e_R = r$ ,  $e_\vartheta$ ,  $e_\varphi$  единичные векторы касательных к координатным линиям и замечая, что

$$Q = Qk, \quad k \cdot e_R = \cos \vartheta, \quad k = e_R \cos \vartheta - e_\vartheta \sin \vartheta,$$

по (1.19) получим:

$$\mathbf{u} = \frac{Q}{16\pi G(m-1)R} [4(m-1)\mathbf{e}_R \cos \vartheta - (3m-4)\mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta]$$

и значит

$$u_R = \frac{Q \cos \vartheta}{4\pi GR}, \quad u_\vartheta = -\frac{3m-4}{4(m-1)} \frac{Q \sin \vartheta}{4\pi GR}, \quad u_\varphi = 0. \quad (1.24)$$

Далее, совмещая направления  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{l}$  с единичными векторами координатных направлений, по (1.21) найдём:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= -\frac{4m-2}{m-1} \frac{Q \cos \vartheta}{8\pi R^2}, & \tau_{R\vartheta} &= \frac{m-2}{m-1} \frac{Q \sin \vartheta}{8\pi R^2}, & \tau_{R\varphi} &= 0, \\ \sigma_\vartheta &= \frac{m-2}{m-1} \frac{Q \cos \vartheta}{8\pi R^2}, & \tau_{\varphi} &= \frac{m-2}{m-1} \frac{Q \cos \vartheta}{8\pi R^2}, & \tau_{\vartheta\varphi} &= 0. \end{aligned} \right\} (1.25)$$

В дальнейшем окажутся полезными также формулы для случая, когда сила направлена по оси  $x$ , т. е. по линии пересечения экваториальной плоскости сферы ( $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ) и азимутальной плоскости, от которой ведётся отсчёт угла  $\varphi$ . Тогда

$$\mathbf{Q} = Q\mathbf{i}, \quad \mathbf{i} = \mathbf{e}_R \sin \vartheta \cos \varphi + \mathbf{e}_\vartheta \cos \vartheta \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_R = \sin \vartheta \cos \varphi$$

и по (1.19), (1.21) найдём:

$$\left. \begin{aligned} u_R &= \frac{Q}{4\pi GR} \sin \vartheta \cos \varphi, \\ u_\vartheta &= \frac{3m-4}{4(m-1)} \frac{Q}{4\pi GR} \cos \vartheta \cos \varphi, \\ u_\varphi &= -\frac{3m-4}{4(m-1)} \frac{Q}{4\pi GR} \sin \varphi, \end{aligned} \right\} (1.26)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= -\frac{4m-2}{m-1} \frac{Q}{8\pi R^2} \sin \vartheta \cos \varphi, & \sigma_\vartheta = \sigma_\varphi &= \frac{m-2}{m-1} \frac{Q}{8\pi R^2} \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \tau_{R\vartheta} &= -\frac{m-2}{m-1} \frac{Q}{8\pi R^2} \cos \vartheta \cos \varphi, & \tau_{R\varphi} &= \frac{m-2}{m-1} \frac{Q}{8\pi R^2} \sin \varphi, & \tau_{\vartheta\varphi} &= 0. \end{aligned} \right\} (1.27)$$

## § 2. Решения уравнений теории упругости, соответствующие особым точкам

Решение, построенное в § 1, позволяет найти новые решения уравнений теории упругости, соответствующие другим особенностям. Для этого рассмотрим, как изменится это решение, если перенести точку приложения силы  $\mathbf{Q}$  в близкую к началу координат  $O$  точку  $O'$ ; вектор-радиус последней  $\overrightarrow{OO'}$  обозначим  $\rho$ . Ограничимся при этом рассмотрением напряжённого состояния на достаточно большом расстоянии от точки  $O$  (или  $O'$ ), точнее говоря, будем вести вычисление лишь с точностью до членов порядка  $\frac{\rho}{R}$  включительно.

Через  $R'$  обозначим расстояние от точки приложения силы  $O'$  до точки наблюдения  $M$ , а для расстояния  $OM$  сохраним прежнее обозначение  $R$ . Тогда можно написать:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \rho \cdot \text{grad}^* \frac{1}{R}. \quad (2.1)$$

Второе слагаемое в этой формуле и представляет вычисленное с указанной степенью точности приращение величины  $\frac{1}{R}$ , когда начало отсчёта перенесено из  $O$  в  $O'$ . Значок при символе  $\text{grad}$  указывает на то, что дифференцирование производится по координатам точки истока  $O$ ; переходя к дифференцированию по координатам точки наблюдения  $M$ , получим:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} - \rho \cdot \text{grad} \frac{1}{R} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R^3} (\rho \cdot R), \quad (2.2)$$

и новое значение вектора  $B$  по (1.18) будет:

$$B' = \frac{1}{4\pi G} Q \left[ \frac{1}{R} + \frac{1}{R^3} (\rho \cdot R) \right] = B + \frac{1}{4\pi G R^3} Q (\rho \cdot R). \quad (2.3)$$

Чтобы выяснить значение второго слагаемого, представим вектор  $Q(\rho \cdot R)$  в форме скалярного произведения тензора (диады)  $Q\rho$  и вектора  $R$ :

$$Q(\rho \cdot R) = Q\rho \cdot R. \quad (2.4)$$

Разлагаем далее тензор  $Q\rho$  на симметричную и антисимметричную части:

$$\rho = \frac{1}{2} (Q\rho + \rho Q), \quad \Omega = \frac{1}{2} (Q\rho - \rho Q). \quad (2.5)$$

В декартовой системе координат эти тензоры задаются таблицами их составляющих:

$$\rho = \left\{ \begin{array}{lll} p_{xx} = Q_x \xi & p_{xy} = \frac{1}{2} (Q_x \eta + Q_y \xi) & p_{xz} = \frac{1}{2} (Q_x \zeta + Q_z \xi) \\ p_{yx} = p_{xy} & p_{yy} = Q_y \eta & p_{yz} = \frac{1}{2} (Q_y \zeta + Q_z \eta) \\ p_{zx} = p_{xz} & p_{zy} = p_{yz} & p_{zz} = Q_z \zeta \end{array} \right\}, \quad (2.6)$$

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & -\omega_3 = -\frac{1}{2} (\xi Q_y - \eta Q_x) & \omega_2 = \frac{1}{2} (\zeta Q_x - \xi Q_z) \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 = -\frac{1}{2} (\eta Q_z - \zeta Q_y) \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{array} \right\}. \quad (2.7)$$

Через  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  здесь обозначены проекции вектора  $\rho$ , т. е. координаты точки  $O'$ , когда начало координат помещено в  $O$ . Величины  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  можно рассматривать как проекции вектора

$$\omega = \frac{1}{2}(\rho \times Q). \quad (2.8)$$

По (2.4) и (2.5) имеем теперь:

$$Q(\rho \cdot R) = \rho \cdot R + \Omega \cdot R.$$

Но скалярное произведение антисимметричного тензора  $\Omega$  на вектор  $R$  справа можно записать в форме векторного произведения [см. (2.13) главы 1]:

$$\Omega \cdot R = \omega \times R = \frac{1}{2}(\rho \times Q) \times R = \frac{1}{2}m_o(Q) \times R, \quad (2.9)$$

где  $m_o(Q)$  обозначает момент силы  $Q$  относительно точки  $O$ . Итак,

$$\begin{aligned} Q(\rho \cdot R) &= \rho \cdot R - \frac{1}{2}[R \times m_o(Q)] = \\ &= \frac{1}{2}\{Q(\rho \cdot R) + \rho(Q \cdot R) - R \times (\rho \times Q)\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Конечно, это тождество можно было бы написать сразу, замечая, что

$$R \times (\rho \times Q) = \rho(Q \cdot R) - Q(\rho \cdot R),$$

но мы предпочли приведенный выше вывод, так как для последующего важно иметь отчётливое разложение тензора  $Q\rho$  на части  $\rho$  и  $\Omega$ .

Формула (2.3) теперь приобретает вид

$$B' = \frac{1}{4\pi \cup R} Q - \frac{1}{8\pi \cup R^3}[R \times m_o(Q)] + \frac{1}{4\pi \cup R^3} \rho \cdot R. \quad (2.11)$$

Таким образом, с указанной выше степенью точности действие силы  $Q$ , приложенной в точке  $O'$ , сводится к действию этой силы, перенесённой в точку  $O$ , действию момента  $m_o(Q)$ , который также можно считать сосредоточенным в  $O$ , и, наконец, действию, выражаемому третьим слагаемым в (2.11). Чтобы выяснить значение этого члена, рассмотрим случай, когда в точках  $O$  и  $O'$  приложены силы, равные по величине, противоположные по направлению и имеющие общую линию действия: сила  $(-Q)$  в точке  $O$  и  $Q$  — в точке  $O'$ ; тогда вектор  $\rho$  и сила  $Q$  имеют одно и то же направление, которое мы определим единичным вектором  $e$ . Указанную совокупность сил назовём двойной силой в точке  $O$ . Для силы  $Q$ , входящей в её состав, имеем, очевидно,

$$m_o(Q) = 0, \quad \rho = \frac{1}{2}(Q\rho + \rho Q) = Q\rho = Q\rho e e, \quad (2.12)$$

где введена в рассмотрение единичная диада  $ee$ . Это выражение позволяет сопоставить двойной силе величину  $Q\rho$  и направление, характеризуемое единичным вектором  $e$ . Ни в коем случае отсюда не следует, что двойная сила может рассматриваться как вектор; она представляет диаду, т. е. тензор, одно из главных направлений которого задаётся вектором  $e$ , соответствующее ему главное значение равно  $Q\rho$ , а два других направления произвольны и соответствующие им значения — нули.

Вектор  $B$  для двойной силы составим как сумму двух векторов, соответствующих каждой из сил по отдельности; тогда для силы ( $-Q$ ) в точке  $O$  по (1.18) имеем

$$B_1 = -\frac{Q}{4\pi UR}$$

и для силы  $Q$  в точке  $O'$  по (2.11) и (2.12)

$$B'_2 = \frac{1}{4\pi GR} Q + \frac{Q\rho}{4\pi UR^3} e(e \cdot R),$$

и, значит, для двойной силы

$$B = B_1 + B'_2 = \frac{1}{4\pi UR^3} Q\rho e(e \cdot R). \quad (2.13)$$

Возвращаясь к общему случаю, когда направления  $Q$  и  $\rho$  различны, допустим, что найдены главные значения  $p_1, p_2, p_3$  тензора  $\rho$  и его главные направления; им соответствующие единичные векторы назовём  $e_1, e_2, e_3$ . Тогда можно представить тензор  $\rho$  в форме суммы трёх диад

$$\rho = p_1 e_1 e_1 + p_2 e_2 e_2 + p_3 e_3 e_3. \quad (2.14)$$

Третье слагаемое в выражении (2.11) теперь записывается в виде

$$\frac{1}{4\pi UR^3} \rho \cdot R = \frac{1}{4\pi UR^3} [p_1 e_1 (e_1 \cdot R) + p_2 e_2 (e_2 \cdot R) + p_3 e_3 (e_3 \cdot R)] \quad (2.15)$$

и сравнение с (2.13) теперь показывает, что это слагаемое можно трактовать как действие трёх двойных сил величины  $p_1, p_2, p_3$ , сопоставляемых направлениям  $e_1, e_2, e_3$  главных осей тензора  $\rho$ .

Рассмотрим ещё разбиение тензора  $\rho$  на шаровой тензор и девиатор

$$\rho = pU + \text{Dev } \rho, \quad (2.16)$$

где  $U$  — единичный тензор и через  $p$  обозначен первый инвариант  $\rho$ , т. е.

$$p = \frac{1}{3} (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) = \frac{1}{3} (p_1 + p_2 + p_3) = J_1(\rho)$$

или в соответствии с таблицей (2.6)

$$p = \frac{1}{3} (Q_x \xi + Q_y \eta + Q_z \zeta) = \frac{1}{3} Q \cdot \rho. \quad (2.17)$$

Замечая ещё, что

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R},$$

можно также написать:

$$\frac{1}{4\pi GR^3} \mathbf{p} \cdot \mathbf{R} = \frac{1}{12\pi GR^3} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{R} + \frac{1}{4\pi GR^3} \text{Dev } \mathbf{p} \cdot \mathbf{R}. \quad (2.18)$$

Первое слагаемое определяет действие особенности, называемой центром расширения в точке  $O$ ; центр расширения эквивалентен, таким образом, действию трёх двойных сил одинаковой величины  $\mathbf{p}$ , сопоставляемых трём произвольным взаимно перпендикулярным направлениям. Второе слагаемое по вышесказанному соответствует трём двойным силам, имеющим величины

$$p'_1 = p_1 - p, \quad p'_2 = p_2 - p, \quad p'_3 = p_3 - p \quad (2.19)$$

и сопоставляемым направлениям главных осей тензора  $\mathbf{p}$ .

Выражение (2.11) вектора  $\mathbf{B}'$  теперь можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' = \frac{1}{4\pi GR} \mathbf{Q} - \frac{1}{8\pi GR^3} \mathbf{R} \times m_0(\mathbf{Q}) + \frac{1}{12\pi GR^3} \mathbf{R} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{p}) + \\ + \frac{1}{4\pi GR^3} \text{Dev } \mathbf{p} \cdot \mathbf{R}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

причём в главных осях последнее слагаемое имеет выражение

$$\text{Dev } \mathbf{p} \cdot \mathbf{R} = p'_1 \mathbf{e}_1 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{R}) + p'_2 \mathbf{e}_2 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{R}) + p'_3 \mathbf{e}_3 (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{R}). \quad (2.21)$$

В произвольно же ориентированных осях декартовой системы координат имеем:

$$\begin{aligned} \text{Dev } \mathbf{p} \cdot \mathbf{R} = [(p_{xx} - p)x + p_{xy}y + p_{xz}z] \mathbf{i} + \\ + [p_{yx}x + (p_{yy} - p)y + p_{yz}z] \mathbf{j} + \\ + [p_{zx}x + p_{zy}y + (p_{zz} - p)z] \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Переходим к вычислению вектора перемещения  $\mathbf{u}$ . Для этого нужно знать по (1.5) скалярное произведение  $\mathbf{R}' \cdot \mathbf{B}'$  и его градиент. Если заметить, что

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R} - \mathbf{p}, \quad (2.23)$$

то легко обнаружить, что для вычисления указанного произведения с требуемой степенью точности следует на  $\mathbf{R}'$  умножить первое, не содержащее  $\mathbf{p}$ , слагаемое в (2.20), а остальные слагаемые — на  $\mathbf{R}$ . Получаем:

$$\mathbf{R}' \cdot \mathbf{B}' = \frac{1}{4\pi GR} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}) - \frac{1}{6\pi GR} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{p}) + \frac{1}{4\pi GR^3} \mathbf{R} \cdot (\text{Dev } \mathbf{p} \cdot \mathbf{R}). \quad (2.24)$$



Из (2.22) следует, что

$$R \cdot (\text{Dev } p \cdot R) = (p_{xx} - p) x^2 + (p_{yy} - p) y^2 + (p_{zz} - p) z^2 + \\ + 2p_{xy}xy + 2p_{yz}yz + 2p_{zx}zx \quad (2.25)$$

и по (2.22) градиент этой квадратичной формы будет:

$$\text{grad } [R \cdot (\text{Dev } p \cdot R)] = 2 \text{Dev } p \cdot R. \quad (2.26)$$

По (1.5), (2.20) и (2.24) получим теперь:

$$u = \frac{m}{16\pi G(m-1)} \left[ \frac{3m-4}{mR} Q + \frac{1}{R^3} (Q \cdot R) R \right] - \\ - \frac{1}{8\pi G R^3} R \times m_0(Q) + \frac{m-2}{8\pi G(m-1)} \frac{1}{3} (Q \cdot p) \frac{R}{R^3} + \\ + \frac{m-2}{8\pi G(m-1)} \left[ \frac{1}{R^3} \text{Dev } p \cdot R + \frac{3m}{2(m-2)} \frac{1}{R^5} R (R \cdot (\text{Dev } p \cdot R)) \right]. \quad (2.27)$$

Первая группа слагаемых по (1.19) представляет перемещение от силы  $Q$ , приложенной в точке  $O$ . Второе слагаемое — перемещение от сосредоточенного момента, третье — радиально-симметричное перемещение, создаваемое центром расширения. Наконец, последняя группа слагаемых, наиболее сложных по структуре, определяет перемещение, обусловленное действием трёх двойных сил, сопоставляемых направлениям главных осей тензора  $p$ . Каждая из этих групп слагаемых представляет некоторое частное решение уравнений теории упругости, соответствующее действию в точке  $O$  каждой из указанных особенностей по отдельности: сосредоточенная сила, сосредоточенный момент, центр расширения, двойная сила. Перемещения, создаваемые сосредоточенной силой, убывают по мере удаления от точки приложения силы, как  $\frac{1}{R}$ ; перемещения от действия остальных указанных точечных особенностей имеют одинаковый порядок убывания — как  $\frac{1}{R^2}$ .

### § 3. Действие системы сил, распределённых в малом объёме

При действии на упругую среду системы сил  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , приложенных в достаточно близких к  $O$  точках  $O_1, O_2, \dots, O_n$  с вектор-радиусами  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , перемещение точки  $M$  можно, конечно, получить, складывая перемещения (2.27), создаваемые каждой силой по отдельности. Введём поэтому в рассмотрение главный вектор системы сил

$$V = \sum_{i=1}^n Q_i, \quad (3.1)$$

её главный момент относительно точки  $O$

$$m^0 = \sum_{i=1}^n m^0(Q_i) = \sum_{i=1}^n \rho_i \times Q_i \quad (3.2)$$

и, наконец, тензор системы сил

$$P = \sum_{i=1}^n \rho_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (Q_i \rho_i + \rho_i Q_i). \quad (3.3)$$

Его составляющие получаются, конечно, суммированием соответствующих каждой силе составляющих, показанных в таблице (2.6). Первый инвариант  $P$  по (2.17) будет:

$$J_1(P) = P = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \rho_i. \quad (3.4)$$

Конечно, при непрерывном распределении сил по объёму или поверхности суммы в формулах (3.1) — (3.4) заменяются соответствующими интегралами.

По (2.27) перемещение  $u$  представится суммой четырёх слагаемых:

$$u_1 = \frac{m}{16\pi G(m-1)} \left[ \frac{3m-4}{mR} V + \frac{1}{R^3} (V \cdot R) R \right]. \quad (3.5)$$

Это перемещение обусловлено действием главного вектора  $V$ . Далее имеем:

$$u_2 = -\frac{1}{8\pi G R^3} (R \times m^0) = \frac{1}{8\pi G} \left( \text{grad} \frac{1}{R} \times m^0 \right) \quad (3.6)$$

— перемещение, создаваемое главным моментом,

$$u_3 = \frac{m-2}{8\pi G(m-1)R^3} PR = -\frac{m-2}{8\pi G(m-1)} P \text{grad} \frac{1}{R} \quad (3.7)$$

— перемещение, вызванное наличием центра расширения, и, наконец,

$$u_4 = \frac{m-2}{8\pi G(m-1)R^3} \left[ \text{Dev } P \cdot R + \frac{3m}{2(m-2)R^2} R (R \cdot (\text{Dev } P \cdot R)) \right]. \quad (3.8)$$

— перемещение, создаваемое девиаторной частью силового тензора; его можно представить также как результат действия трёх двойных сил, величин  $P'_1, P'_2, P'_3$  (главные значения девиатора), сопоставляемых направлениям главных осей  $e_1, e_2, e_3$  силового тензора  $P$ .

Для системы сил, статически эквивалентной нулю, обращаются в нуль перемещения  $u_1$  и  $u_2$ ; перемещения и напряжения при действии такой системы сил убывают как  $\frac{1}{R^2}$  и соответственно  $\frac{1}{R^3}$  при удалении от точки  $O$ . Таков же порядок убывания этих величин при действии системы сил, только главный вектор которой равен нулю.

Рассмотрим примеры некоторых систем сил.

а) Пара сил: в точке  $O$  приложена сила  $Q_1 = -Q$ , в точке  $O'$  — сила  $Q_2 = Q$ , причём  $\rho \cdot Q = 0$ , т. е. отрезок  $OO'$ , соединяющий точки приложения сил, перпендикулярен к силам (рис. 3). В этом случае  $V = 0$ ;  $m^O = \rho \times Q$  представляет момент пары; интенсивность  $P$  центра расширения равна нулю. Направляя ось  $y$  вдоль  $Q$ , а ось  $x$  по вектору  $\rho$ , по (2.6) получим:

$$P = \text{Dev } P = \begin{Bmatrix} 0 & \frac{1}{2} Q\rho & 0 \\ \frac{1}{2} Q\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} Q\rho & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} Q\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.9)$$

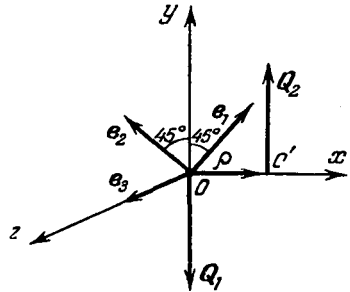


Рис. 3.

где вторая таблица даёт представление тензора в главных осях  $e_1, e_2, e_3$ , имеющих направление биссектрис углов между осями  $x, y$ , и осью  $z$ .

Таким образом, действие рассматриваемой пары сил сводится к сосредоточенному в точке  $O$  моменту, равному моменту пары, и действию двух двойных сил интенсивностей  $\pm Q\rho$ , приложенных в этой точке и сопоставляемых направлениям  $e_1, e_2$ .

б) Рассмотрим совокупность четырёх равных сил (рис. 4), образующих две пары, расположенные в одной плоскости  $xu$ , проходящей через точку  $O$ . Как показано в приводимой ниже таблице 2, первая пара составлена из сил  $Q_1$  и  $Q_2$ ;  $Q_1$  приложена в начале координат и направлена по отрицательной оси  $y$ ,  $Q_2$  имеет противоположное направление, а координаты точки приложения её  $\xi = h, \eta = 0$ . Аналогично определяется вторая пара сил  $Q_3$  и  $Q_4$ : сила  $Q_3$  действует в начале координат и имеет направление оси  $x$ , а  $Q_4$  приложена в точке  $\xi = 0, \eta = h$  и направлена в противоположную сторону. Общая величина всех сил обозначена через  $Q$ . Главный вектор этой системы сил  $V$ , очевидно, равен нулю; её главный момент  $m^O$  равен по величине  $2Qh$  и направлен перпендикулярно к плоскости  $xu$  по положительному направлению оси  $z$ :

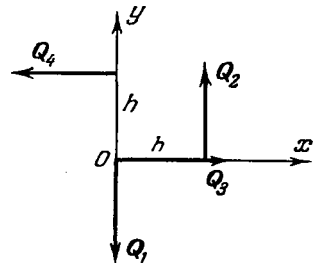


Рис. 4.

$$m^O = 2Qhk. \quad (3.10)$$

Далее из (2.6) и (3.3) следует, что и силовой тензор  $\mathbf{P}$  также равен нулю. Поэтому только перемещение  $\mathbf{u}_3$  будет отлично от нуля

Таблица 2

Сила	Проекции на оси		Координаты точки приложения	
	$x$	$y$	$\xi$	$\eta$
$Q_1$	0	$-Q$	0	0
$Q_2$	0	$Q$	$h$	0
$Q_3$	$Q$	0	0	0
$Q_4$	$-Q$	0	0	$h$

и рассматриваемая система сил образует особенность, называемую центром вращения.

в) Распределение напряжений, соответствующее центру расширения, может быть определено по (1.10), причём вычисление будет очень простым, так как, поскольку  $\mathbf{u}_3$  представляет градиент потенциального скаляра  $\frac{1}{R}$ ,

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_3 = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{u}_3 = 0.$$

Остаётся отметить, что

$$(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}) \frac{R}{R^3} = \frac{1}{R^3} \mathbf{n} - \frac{3}{R^5} R (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}).$$

Получаем:

$$\mathbf{t}_n = \frac{(m-2)P}{4\pi(m-1)R^3} [\mathbf{n} - 3r(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})]. \quad (3.11)$$

Например, в сферических координатах

$$\sigma_R = -\frac{(m-2)P}{2\pi(m-1)R^3}, \quad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \frac{(m-2)P}{4\pi(m-1)R^3}, \quad \tau_{R\theta} = \tau_{R\varphi} = \tau_{\theta\varphi} = 0. \quad (3.12)$$

Поэтому напряжённое состояние, соответствующее центру расширения, можно реализовать в упругой среде, имеющей сферическую полость радиуса  $R_0$ , по поверхности которой распределено нормальное давление интенсивности

$$q = \frac{(m-2)P}{2\pi(m-1)R_0^3}. \quad (3.13)$$

Из (3.12) и (3.7) следует, что напряжения и перемещения точек среды при этом будут:

$$\sigma_R = -\frac{qR_0^3}{R^3}, \quad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \frac{qR_0^3}{2R^3}, \quad \tau_{R\theta} = \tau_{R\varphi} = \tau_{\theta\varphi} = 0, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{u}_R = \frac{qR_0^3}{4GR^2}, \quad \mathbf{u}_\theta = \mathbf{u}_\varphi = 0. \quad (3.15)$$

Мы получили решение известной задачи Ляме при бесконечном радиусе внешней сферы.

Рассмотрим ещё действие системы нормальных напряжений  $q$ , равномерно распределённых по поверхности  $S$  сферы малого радиуса  $R_0$ , мысленно проведённой в сплошной упругой среде. В этом случае  $V$ ,  $m^0$  и  $\text{Dev } P$  равны нулю, а интенсивность центра расширения будет по (3.4):

$$P = \frac{1}{3} \int_S \int q n \cdot p \, do = \frac{R_0^3}{3} \int_{S^*} \int q \, do^* = \frac{4\pi}{3} R_0^3 q,$$

так как  $p = R_0 n$ . Отличие от (3.13) объясняется тем, что эффект действия на упругую среду давления при наличии в среде полости будет иным, чем при отсутствии её.

г) Распределение перемещений, соответствующее центру вращения, как следует из (3.6), может быть также реализовано в упругой среде со сферической полостью радиуса  $R_0$ , если точкам поверхности этой полости сообщить перемещение, определяемое вектором поворота

$$\theta = \frac{1}{8\pi G R_0^3} m^0. \quad (3.16)$$

Перемещение точки среды при таком повороте будет:

$$u = \frac{R_0^3}{R^3} (\theta \times R). \quad (3.17)$$

Для определения напряжений вычисляем:

$$\text{div } u = 0, \quad \text{rot } u = -R^3 (\theta \cdot \text{grad}) \frac{R}{R^3} = -\frac{R_0^3}{R^3} [\theta - 3r (\theta \cdot r)].$$

Вектор  $(n \cdot \text{grad}) \frac{R}{R^3}$  был найден в предшествующем пункте; поэтому

$$(n \cdot \text{grad}) \frac{\theta \times R}{R^3} = \theta \times (n \cdot \text{grad}) \frac{R}{R^3} = \frac{1}{R^3} [(\theta \times n) - 3(\theta \times r)(n \cdot r)].$$

Подстановка в (1.10) теперь даёт:

$$t_n = \frac{3GR_0^3}{R^3} [(\theta \times n) - 2(\theta \times r)(n \times r) + (n \times r)(\theta \cdot r)]. \quad (3.18)$$

В сферических координатах, полагая, что вектор  $\theta$  имеет направление оси  $z$ , т. е.

$$\theta = \gamma k = \gamma (r \cos \vartheta - e_\vartheta \sin \vartheta),$$

где  $\gamma$  — угол поворота, получим:

$$\tau_{R\varphi} = -\frac{3GR_0^3 \gamma}{R^3} \sin \vartheta, \quad (3.19)$$

а остальные составляющие напряжения равны нулю. Эта система напряжений статически эквивалентна моменту относительно  $z$ :

$$m_z = 3GR_0^3\gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3\vartheta d\vartheta = 8\pi GR_0^3\gamma, \quad (3.20)$$

определяемому по (3.16).

#### § 4. Действие распределённых особенностей

Выражения для перемещения  $u$ , создаваемого сосредоточенными особенностями того или иного типа (сосредоточенная сила, двойная сила, центр расширения, центр вращения), можно рассматривать как некоторые частные решения уравнений теории упругости для безграничной среды, из которой удалена точка приложения особенности (решение должно быть в рассматриваемой области конечным и непрерывным и иметь в ней такие же производные любого порядка по всем координатам). Можно построить сколь угодно большое число новых выражений вектора  $u$ , рассматривая наложение действий этих элементарных особенностей, распределённых по некоторым линиям, поверхностям и объёмам. Эти выражения будут служить решениями уравнений теории упругости для частей упругой среды, не содержащих указанных особых геометрических мест. Комбинируя решения друг с другом, можно в некоторых случаях их использовать при решении краевой задачи для ограниченного упругого тела, когда требуется удовлетворить заданным силовым или геометрическим условиям на его поверхности. Конечно, практически можно использовать лишь наиболее простые замкнутые выражения, поэтому из всего многообразия решений, которые можно построить указанным образом, следует выбрать такие, которые соответствуют простейшим распределениям простейших точечных особенностей. Как показывают формулы (3.5) — (3.8), таковыми следует признать центр расширения и центр вращения, когда вектор перемещения выражен через градиент наиболее простой потенциальной функции  $\frac{1}{R}$ . За линию распределения этих особенностей с этой же точки зрения требования максимальной простоты естественно выбрать бесконечную полупрямую. Тогда получим решения уравнений теории упругости для упругой среды, из которой выделена область, ограниченная конической поверхностью со сколь угодно малым углом раствора, имеющей вершину в начале полупрямой и охватывающей эту полупрямую.

Итак, ограничимся рассмотрением двух непрерывных распределений особенностей: линией (полупрямой) центров расширения и линией центров вращения. Интенсивности особенностей на единицу длины линии распределения будем в том и другом случае считать постоянными.

Направление на полупрямой зададим единичным вектором  $e$ , а абсциссу её текущей точки  $O'$ , отсчитываемую от начала  $O$  полупрямой, обозначим через  $\lambda$ . Как и выше, точка наблюдения  $M$  определяется вектор-радиусом  $R$ , имеющим начало в  $O$ . Расстояние  $O'M$  обозначим через  $R'$ , а угол между векторами  $e$  и  $R$  — через  $\gamma$ . Тогда

$$R' = \sqrt{R^2 + \lambda^2 - 2R\lambda \cos \gamma} = \sqrt{R^2 + \lambda^2 - 2\lambda R \cdot e}. \quad (4.1)$$

Из (3.6) и (3.7) следует, что речь идёт о вычислении интеграла

$$\int_0^{\infty} d\lambda \operatorname{grad} \frac{1}{R'}. \quad (4.2)$$

Заметим, что интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{R'} \quad (4.3)$$

не сходится. Поэтому вычисление надо вести так: сначала рассмотреть интеграл

$$\int_0^{\lambda} \frac{d\lambda}{R'} = \ln(R' + \lambda - R \cos \gamma) - \ln(R - R \cos \gamma), \quad (4.4)$$

вычислить градиент этого выражения и затем принять, что  $\lambda \rightarrow \infty$ . Но окончательный результат останется тем же, если сразу вынести знак градиента за знак интеграла (4.2) и не обращать внимания на бесконечно большую величину, которая получится при подстановке в (4.4) значения  $\lambda = \infty$ , ибо она все равно отпадёт после вычисления градиента.

Итак, получаем:

$$\int_0^{\infty} d\lambda \operatorname{grad} \frac{1}{R'} = -\operatorname{grad} \ln(R - R \cos \gamma) = -\operatorname{grad} \ln(R - R \cdot e). \quad (4.5)$$

По (3.7) и (3.6) находим теперь особые решения: решение вида

$$u = A \operatorname{grad} \ln(R - R \cdot e), \quad (4.6)$$

соответствующее линии центров расширения, названное Буссинекком элементарным решением второго типа, и решение

$$u = C \times \operatorname{grad} \ln(R - R \cdot e), \quad (4.7)$$

соответствующее линии центров вращения. Здесь  $A$  и  $C$  — постоянные скаляр и вектор. При  $R \neq R \cdot e$ , т. е. когда угол  $\gamma$  отличен от нуля,

величина под знаком логарифма не обращается в нуль, т. е. выражения (4.6) и (4.7) будут решениями уравнений теории упругости вне указанного конуса.

Функция  $\ln(R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{e})$  является гармонической (вне этого конуса). Можно проверить непосредственно, что она удовлетворяет уравнению Лапласа, но это же следует из (4.6) и из решения уравнений теории упругости в форме П. Ф. Папковича: если некоторое решение для  $\mathbf{u}$  представлено как градиент скаляра, то последний можно считать пропорциональным потенциальному скаляру  $B_0$ , который фигурирует в выражении (1.5).

Вектор  $\mathbf{u}$  в обоих случаях (4.6) и (4.7) является поэтому потенциальным; объёмное расширение также в обоих этих случаях равно нулю:  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , так как  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \ln(R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}) = \Delta \ln(R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}) = 0$ . Наконец, перемещение, соответствующее элементарному решению второго типа, представляет вектор, лишённый вихрей, так как  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \ln(R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}) = 0$ ; последнее не имеет места для перемещения (4.7).

Для элементарного решения второго типа напряжение на площадке с нормалью  $\mathbf{n}$  по (1.10) может быть определено вектором:

$$t_n = 2GA (\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}) \operatorname{grad} \ln(R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}) = 2GA \frac{\partial}{\partial n} \frac{\mathbf{R} - \mathbf{e}R}{(R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{e})R}. \quad (4.8)$$

Выполнив дифференцирование, получим:

$$t_n = 2GA \left[ e \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{n} - R(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})}{R(R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{e})^2} + \frac{\mathbf{n}}{R(R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{e})} + R \frac{R^2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) - 2R(\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{R} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{R} \cdot \mathbf{e})}{R^3(R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{e})^2} \right]. \quad (4.9)$$

Пусть линия центров расширения совпадает с отрицательной осью  $z$ , т. е.  $\mathbf{e} = -\mathbf{k}$ ; принимая сначала, что  $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ , получим после простого вычисления

$$t_z = -2GA \frac{R}{R^3},$$

т. е.

$$\tau_{xz} = -2GA \frac{x}{R^3}, \quad \tau_{yz} = -2GA \frac{y}{R^3}, \quad \sigma_z = -2GA \frac{z}{R^3}. \quad (4.10)$$

Эти важные формулы будут использованы ниже. Полагая далее  $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ , найдём:

$$t_x = 2GA \left[ \frac{\mathbf{i}}{R(R+z)} - \frac{\mathbf{k}x}{R(R+z)^2} - R \frac{2Rx + xz}{R^3(R+z)^2} \right],$$

откуда получаем:

$$\sigma_x = 2GA \left( \frac{1}{R(R+z)} - \frac{x^2(2R+z)}{R^3(R+z)^2} \right), \quad \tau_{xy} = -2GA \frac{xy(2R+z)}{R^3(R+z)^2} \quad (4.11)$$



и, конечно, вышеприведённое выражение  $\tau_{zx}$ . Аналогично получим, полагая  $\mathbf{n} = \mathbf{j}$ ,

$$\sigma_y = 2GA \left( \frac{1}{R(R+z)} - \frac{y^2(2R+z)}{R^3(R+z)^2} \right). \quad (4.12)$$

Рассмотрим далее сферическую систему координат, полагая, как выше, что вектор  $\mathbf{e}$  направлен по отрицательной оси  $z$ ; делая последовательно  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_R = \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\vartheta$  и  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\varphi$ , найдём напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= -\frac{2GA}{R^2}, & \tau_{R\vartheta} &= \frac{2GA}{R^2} \frac{\sin \vartheta}{1 + \cos \vartheta}, & \tau_{R\varphi} &= 0, \\ \sigma_\vartheta &= \frac{2GA}{R^2} \frac{\cos \vartheta}{1 + \cos \vartheta}, & \tau_{\vartheta\varphi} &= 0, & \sigma_\varphi &= \frac{2GA}{R^2} \frac{1}{1 + \cos \vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Рассмотрим ещё случай линии центров вращения, расположенных по отрицательной оси ( $\mathbf{e} = -\mathbf{k}$ ). По (4.7) получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{C} \times \left[ \mathbf{e}_R \frac{\partial}{\partial R} \ln R(1 + \cos \vartheta) + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln R(1 + \cos \vartheta) \right] = \\ &= \mathbf{C} \times \left[ \frac{1}{R} \mathbf{e}_R - \frac{\sin \vartheta}{R(1 + \cos \vartheta)} \mathbf{e}_\vartheta \right]. \end{aligned}$$

Пусть, например, постоянный вектор  $\mathbf{C}$  имеет направление оси  $y$ :

$$\mathbf{C} = C(\mathbf{e}_R \sin \vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_\vartheta \cos \vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi).$$

Подстановка в предшествующее уравнение даёт ещё одно частное решение уравнений теории упругости, которое будет ниже использовано:

$$u_R = C \frac{\sin \vartheta \cos \varphi}{R(1 + \cos \vartheta)}, \quad u_\vartheta = C \frac{\cos \varphi}{R}, \quad u_\varphi = -C \frac{\sin \varphi}{R}. \quad (4.14)$$

Соответствующие напряжения будут:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= -\sigma_\vartheta = -2GC \frac{\sin \vartheta \cos \varphi}{R^2(1 + \cos \vartheta)}, & \sigma_\varphi &= 0, & \tau_{\vartheta\varphi} &= -GC \frac{\sin \vartheta \sin \varphi}{R^2(1 + \cos \vartheta)}, \\ \tau_{R\varphi} &= \frac{GC}{R^2} \left( 2 - \frac{1}{1 + \cos \vartheta} \right) \sin \varphi, & \tau_{R\vartheta} &= -\frac{GC}{R^2} \left( 2 - \frac{1}{1 + \cos \vartheta} \right) \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

### § 5. Действие сосредоточенной силы и распределённой нагрузки, нормальных к граничной плоскости упругого полупространства

Решение важной задачи (впервые рассмотренной Буссинеском) о напряжённом состоянии, возникающем в упругом полупространстве при действии нагрузки, распределённой по ограничивающей полупространство плоскости и нормальной к ней, может быть найдено двумя путями. Первый путь — синтетический: строится решение

в случае одной сосредоточенной силы, нормальной к границе полупространства; оно может быть получено наложением особых решений, соответствующих, во-первых, действию сосредоточенной силы в неограниченной упругой среде, во-вторых, линии центров расширения (элементарное решение второго типа). Решение для одной сосредоточенной силы далее легко обобщается с помощью принципа наложения на случай произвольной, распределённой по границе нормальной к ней нагрузки. Второй путь решения заключается в сведении рассматриваемой задачи к некоторой краевой задаче теории потенциала — оказывается (это можно получить, исходя из общего решения в форме П. Ф. Папковича), что задача теории упругости о разыскании напряжённого состояния в полупространстве при заданном значении нормального напряжения  $\sigma_n$  на границе полупространства и при отсутствии на ней касательных напряжений  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{yz}$  сводится к разысканию одной гармонической функции, обладающей всеми характеристическими свойствами потенциала простого слоя, распределённого по плоской области загрузки с плотностью, пропорциональной интенсивности нагрузки.

Преимуществом второго метода является то, что здесь не требуется знания указанных выше особых решений; он обобщается и на случай нагрузок, касательных к границе полупространства, тогда как решение синтетическим путём потребовало бы здесь построения ещё одной группы особых решений.

1°. Плоскость  $xu$  совместим с ограничивающей полупространство плоскостью, а ось  $z$ , по которой направлена сила  $F$ , направим внутрь полупространства. Точку  $O$  приложения силы примем за начало координат. В сферической системе координат с центром в  $O$  угол  $\vartheta$  на плоскости  $xu$  будет равен  $\frac{\pi}{2}$ . На этой плоскости повсюду, кроме точки  $O$ , т. е. при  $R \neq 0$ , должно быть

$$\sigma_\vartheta = 0, \quad \tau_{R\vartheta} = 0, \quad \tau_{\vartheta\varphi} = 0. \quad (5.1)$$

Первому и третьему условиям удовлетворяют решения (1.25) и (4.13), каждое по отдельности; можно удовлетворить и второму условию (5.1), если подобрать постоянные  $A$  и  $Q$  в этих решениях так, чтобы

$$A = -\frac{Q(m-2)}{16\pi G(m-1)}. \quad (5.2)$$

В результате наложения решений (1.25) и (4.13) мы получили новое решение, зависящее от одной постоянной  $Q$  и имеющее особенность в точке  $O$ . Остается проверить, что эта особенность соответствует действию сосредоточенной силы, нормальной к плоскости  $xu$ , и подобрать постоянную  $Q$  так, чтобы величина этой силы имела заданное значение  $F$ . Для этого следует заметить, что на поверхности полусферы  $\Sigma$  с центром в  $O$ , расположенной в области  $z > 0$ ,

по (1.25), (4.13) и (5.2) распределены напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \frac{Q}{8\pi R^2(m-1)} [-(4m-2) \cos \vartheta + (m-2)], \\ \tau_{R\vartheta} &= \frac{(m-2)Q}{8\pi R^2(m-1)} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{1 + \cos \vartheta}, \quad \tau_{R\varphi} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Пусть  $m^{(O)}$  — главный момент этой системы напряжений относительно точки  $O$ , а  $\mathbf{V}$  — её главный вектор. Нужно потребовать, чтобы

$$m^{(O)} = 0, \quad \mathbf{F} + \mathbf{V} = 0. \quad (5.4)$$

Первое условие, что легко проверить, выполняется. Точно так же окажется, что  $V_x = V_y = 0$ . Остаётся условие

$$\begin{aligned} F = -V_z &= - \int_{\Sigma} \int (\sigma_R \cos \vartheta - \tau_{R\vartheta} \sin \vartheta) do = \\ &= -R^2 \int_{\Sigma^*} \int (\sigma_R \cos \vartheta - \tau_{R\vartheta} \sin \vartheta) do^*, \end{aligned}$$

где  $do^* = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$  — элемент поверхности единичной полусферы  $\Sigma^*$ . Получаем:

$$\begin{aligned} F &= \frac{Q}{8\pi(m-1)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta d\vartheta \left[ (4m-2) \cos^2 \vartheta - (m-2) \cos \vartheta + \right. \\ &\quad \left. + (m-2) \frac{\sin^2 \vartheta \cos \vartheta}{1 + \cos \vartheta} \right] = \frac{3Qm}{4(m-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta = \frac{mQ}{4(m-1)}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Итак,

$$Q = \frac{4(m-1)F}{m}, \quad A = -\frac{(m-2)F}{4\pi Gm} \quad (5.6)$$

и теперь по (1.22) и (4.6) получаем выражения перемещений

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{Fx}{4\pi G} \left( \frac{z}{R^3} - \frac{m-2}{m} \frac{1}{R(R+z)} \right), \\ v &= \frac{Fy}{4\pi G} \left( \frac{z}{R^3} - \frac{m-2}{m} \frac{1}{R(R+z)} \right), \\ w &= \frac{F}{4\pi G} \left( \frac{z^2}{R^3} + \frac{2(m-1)}{m} \frac{1}{R} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

В частности, перемещения точек самой граничной плоскости будут:

$$u = -\frac{F(m-2)x}{4\pi GmR_0^2}, \quad v = -\frac{F(m-2)y}{4\pi GmR_0^2}, \quad w = \frac{F(m-1)}{2\pi GmR_0}, \quad (5.8)$$

где  $R_0 = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  представляет радиус в цилиндрической системе координат с осью  $z$ . Последняя из этих формул будет иметь существенное применение в дальнейшем.

Из (5.7) следует, что составляющая перемещения  $u_\rho$  по оси  $\rho$  указанной цилиндрической системы координат равна

$$u_\rho = \frac{F \sin \vartheta}{4\pi \dot{U} R} \left( \cos \vartheta - \frac{m-2}{m} \frac{1}{1 + \cos \vartheta} \right) \quad (5.9)$$

и, значит,  $u_\rho > 0$  для точек, расположенных внутри конуса с углом раствора  $2\vartheta_0$ , где

$$\cos^2 \vartheta_0 + \cos \vartheta_0 - \frac{m-2}{m} = 0.$$

При  $m = 4$  получаем  $\vartheta_0 = 68^\circ 30'$ ; частицы упругой среды, расположенные внутри (вне) этого конуса, удаляются (приближаются) от оси  $z$ . В частности, перемещения  $u_\rho$  точек самой граничной плоскости направлены к точке приложения силы.

Легко также составить по (1.23) и (4.10) — (4.12) выражения составляющих тензора напряжений в декартовых координатах. Выпишем здесь только выражения

$$\tau_{xz} = -\frac{3F}{2\pi} \frac{xz^2}{R^5}, \quad \tau_{yz} = -\frac{3F}{2\pi} \frac{yz^2}{R^5}, \quad \sigma_z = -\frac{3F}{2\pi} \frac{z^3}{R^5}. \quad (5.10)$$

Напряжения на площадках, перпендикулярных к линии действия силы, таким образом, оказываются не зависящими от упругой постоянной  $m$ .

В сферических координатах значения перемещений и напряжений будут:

$$\left. \begin{aligned} u_R &= \frac{F}{4\pi \dot{U} m R} [4(m-1) \cos \vartheta - (m-2)], \\ u_\vartheta &= \frac{F \sin \vartheta}{4\pi \dot{U} m R} \left[ -(3m-4) + \frac{m-2}{1 + \cos \vartheta} \right], \\ u_\varphi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \frac{F}{2\pi m R^2} [-(4m-2) \cos \vartheta + (m-2)], \quad \tau_{R\vartheta} = \frac{(m-2) F \sin \vartheta \cos \vartheta}{2\pi m R^2} \frac{1}{1 + \cos \vartheta}, \\ \sigma_\vartheta &= \frac{(m-2) F}{2\pi m R^2} \frac{\cos^2 \vartheta}{1 + \cos \vartheta}, \quad \sigma_\varphi = \frac{(m-2) F \cos \vartheta - \sin^2 \vartheta}{2\pi m R^2} \frac{1}{1 + \cos \vartheta}, \quad \tau_{R\varphi} = \tau_{\vartheta\varphi} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

2°. Полученное решение для дальнейшего полезно выразить через функции П. Ф. Папковича. Для этого вспомним, что для части этого решения, соответствующей действию сосредоточенной силы в неограниченной упругой среде, вектор  $\mathbf{B}$  по (1.18) и (5.6) будет:

$$\mathbf{B} = \mathbf{k} \frac{Q}{4\pi \dot{U} R} = \mathbf{k} \frac{(m-1)F}{\pi m \dot{U} R} \quad (5.13)$$

( $\mathbf{k}$  — единичный вектор оси  $z$ ). Вторая часть вектора перемещения  $\mathbf{u}$ , соответствующая элементарному решению второго типа, по (4.6) является градиентом  $A \ln(R+z)$ . Поэтому ей следует сопоставить скаляр  $B_0$ , который по (5.6) и (1.5) будет:

$$B_0 = \frac{(m-1)F}{\pi\pi G} \frac{m-2}{m} \ln(R+z). \quad (5.14)$$

Таким образом, вектор перемещения  $\mathbf{u}$  представляется в виде

$$\mathbf{u} = \frac{(m-1)F}{\pi\pi G} \frac{\mathbf{k}}{R} - \frac{F}{4\pi G} \text{grad} \left[ \frac{z}{R} + \frac{m-2}{m} \ln(R+z) \right]. \quad (5.15)$$

Это решение определяет действие сосредоточенной силы, нормальной к плоской границе упругого полупространства. Конечно, оно легко обобщается на случай произвольного числа сил

$$\mathbf{u} = \frac{(m-1)}{\pi\pi G} \mathbf{k} \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{R_i} - \frac{1}{4\pi G} \text{grad} \sum_{i=1}^n F_i \left[ \frac{z}{R_i} + \frac{m-2}{m} \ln(R_i+z) \right]. \quad (5.16)$$

Здесь

$$R_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + z^2} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (5.17)$$

$x, y, z$  — координаты точки наблюдения,  $x_i, y_i, z_i = 0$  — точки истока, т. е. точки приложения силы  $F_i$ .

В случае распределённой по некоторой области  $\Omega$  плоскости  $z=0$  нагрузки интенсивности  $p(x', y')$  на единицу площади конечные суммы в (5.16) должны быть заменены интегралами

$$\left. \begin{aligned} \omega(x, y, z) &= \int_{\Omega} \int p(x', y') \frac{do'}{R'}, \\ \omega_1(x, y, z) &= \int_{\Omega} \int p(x', y') \ln(R'+z) do', \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

в которых  $do'$  — элемент площади, а

$$R' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}. \quad (5.19)$$

Функцию  $\omega(x, y, z)$  можно трактовать как потенциал простого слоя, распределённого по области загрузки  $\Omega$  с плотностью, равной интенсивности нагрузки  $p(x', y')$ .

Функция  $\omega(x, y, z)$  удовлетворяет повсюду вне  $\Omega$  уравнению Лапласа, непрерывна во всём пространстве (включая область  $\Omega$ ), а на достаточно больших расстояниях от  $\Omega$ , т. е. при

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty,$$

стремится к нулю, как

$$\frac{P}{R}, \quad \text{где } P = \int_{\Omega} p(x', y') do', \quad (5.20)$$

т. е. представляет главный вектор распределённой по  $\Omega$  нагрузки.

Производная от  $\omega(x, y, z)$  по направлению нормали к области  $\Omega$  претерпевает разрыв непрерывности при переходе от одной стороны слоя на другую. Именно, имеют место соотношения \*): при подходе к точке  $(x, y, 0)$  слоя со стороны положительных  $z$  предельное значение указанной производной определяется равенством

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)_{z \rightarrow +0} = \begin{cases} -2\pi p(x, y) & (x, y) \text{ внутри } \Omega, \\ 0 & (x, y) \text{ вне } \Omega. \end{cases} \quad (5.21)$$

При подходе же со стороны отрицательных  $z$

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)_{z \rightarrow -0} = \begin{cases} 2\pi p(x, y) & (x, y) \text{ внутри } \Omega, \\ 0 & (x, y) \text{ вне } \Omega. \end{cases} \quad (5.22)$$

Функция  $\omega_1(x, y, z)$  является гармонической в полупространстве  $z > 0$ . При  $R \rightarrow \infty$  она неограниченно возрастает, как

$$P \ln(R + z), \quad (5.23)$$

где  $P$  имеет прежнее значение. Однако производные от  $\omega_1(x, y, z)$  по координатам, которые только и могут нас интересовать (при вычислении перемещений), будут в полупространстве  $z > 0$  при  $R \rightarrow \infty$  стремиться к нулю.

Заметим, что, поскольку

$$\frac{\partial \ln(R' + z)}{\partial z} = \frac{1}{R'}, \quad (5.24)$$

то имеет место соотношение

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial z} = \omega, \quad (5.25)$$

которое вместе с условием (5.23) о поведении функции  $\omega_1(x, y, z)$  на бесконечности определяет эту функцию с точностью до несущественной аддитивной постоянной.

Выражение (5.16) для вектора перемещения теперь получает вид

$$\mathbf{u} = \frac{m-1}{m\pi G} k\omega(x, y, z) - \frac{1}{4\pi G} \text{grad} \left[ z\omega + \frac{m-2}{m}\omega_1(x, y, z) \right], \quad (5.26)$$

\*) Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала, Гостехиздат, 1946, стр. 53.

или в проекциях на оси декартовой системы координат [см. (5.25)]

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{4\pi G} \left( z \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{m-2}{m} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right), \\ v &= -\frac{1}{4\pi G} \left( z \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{m-2}{m} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right), \\ w &= \frac{m-1}{2\pi m G} \omega - \frac{1}{4\pi G} z \frac{\partial \omega}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{m-2}{2\pi m G} \frac{\partial \omega}{\partial z}. \quad (5.28)$$

Значение составляющих тензора напряжений на площадках, перпендикулярных к оси  $z$ , будут:

$$\tau_{zx} = -\frac{z}{2\pi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial z \partial x}, \quad \tau_{yz} = -\frac{z}{2\pi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial z}, \quad \sigma_z = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right). \quad (5.29)$$

Таким образом, для вычисления этих напряжений и перемещения  $w$  не требуется знания функции  $\omega_1(x, y, z)$ ; оно нужно для нахождения перемещений  $u$  и  $v$  и остальных составляющих напряжений; отметим, впрочем, что сумму нормальных напряжений  $\sigma_x + \sigma_y$  можно также найти, не зная  $\omega_1$ ; действительно, известно, что

$$3\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{2(m+1)G}{m-2} \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (5.30)$$

и по (5.28) получаем:

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{m+2}{m} \frac{\partial \omega}{\partial z} + z \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right). \quad (5.31)$$

В заключение составим значения вышеприведённых величин при  $z=0$ , т. е. в точках граничной плоскости,

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{m-2}{4\pi m G} \frac{\partial \omega_1(x, y, 0)}{\partial x}, & v &= -\frac{m-2}{4\pi m G} \frac{\partial \omega_1(x, y, 0)}{\partial y}, \\ w &= \frac{m-1}{2\pi m G} \omega(x, y, 0). \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

Таким образом, значение потенциала простого слоя в точках границы пропорционально нормальному к границе компоненту вектора перемещения. Далее имеем при  $z=0$ :

$$\tau_{zx} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_z = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)_{z \rightarrow +0}. \quad (5.33)$$

Поэтому согласно сказанному выше о поведении нормальной производной потенциала простого слоя, т. е. по (5.21), имеем:

$$\frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)_{z \rightarrow +0} = \sigma_z(x, y, 0) = \begin{cases} -p(x, y) & (x, y) \text{ внутри } \Omega, \\ 0 & (x, y) \text{ вне } \Omega. \end{cases} \quad (5.34)$$

3°. Мы уже указывали в начале этого параграфа, что все результаты, приведённые выше, могут быть найдены не синтетическим путём из решения для сосредоточенной силы, а из рассмотрения общего решения уравнений теории упругости, взятого, например, в форме П. Ф. Папковича (1.5).

Мы должны подчинить выбор вектора  $\mathbf{B}$  и скаляра  $B_0$  двум первым условиям (5.33). Из (1.5) находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{G} \tau_{zx} &= \frac{\partial B_x}{\partial z} + \frac{m-2}{2(m-1)} \frac{\partial B_z}{\partial x} - \\ &- \frac{m}{2(m-1)} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial B_x}{\partial z} + y \frac{\partial B_y}{\partial z} + z \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_0}{\partial z} \right), \\ \frac{1}{G} \tau_{yz} &= \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{m-2}{2(m-1)} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \\ &- \frac{m}{2(m-1)} \frac{\partial}{\partial y} \left( x \frac{\partial B_x}{\partial z} + y \frac{\partial B_y}{\partial z} + z \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_0}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

Поэтому указанные условия будут соблюдены, если потребовать, чтобы при  $z = 0$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B_x}{\partial z} &= -\frac{m-2}{2(m-1)} \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{m-2}{2(m-1)} \frac{\partial B_z}{\partial y}, \\ \frac{\partial B_0}{\partial z} &= -\left( x \frac{\partial B_x}{\partial z} + y \frac{\partial B_y}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

Последнее условие в силу двух первых может быть записано также в виде

$$\frac{\partial B_0}{\partial z} = \frac{m-2}{2(m-1)} \left( x \frac{\partial B_z}{\partial x} + y \frac{\partial B_z}{\partial y} \right). \quad (5.37)$$

Но каждая из функций

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_x}{\partial z} \quad \text{и} \quad -\frac{(m-2)}{2(m-1)} \frac{\partial B_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial B_y}{\partial z} \quad \text{и} \quad -\frac{(m-2)}{2(m-1)} \frac{\partial B_z}{\partial y} \end{aligned}$$

является гармонической в полупространстве  $z > 0$ . Поэтому из условия (5.36) равенства этих функций при  $z = 0$  (на границе области) следует, что они равны при  $z > 0$  (во всей области)

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = -\frac{m-2}{2(m-1)} \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{m-2}{2(m-1)} \frac{\partial B_z}{\partial y}. \quad (5.38)$$

Точно так же обе функции

$$\frac{\partial B_0}{\partial z} \quad \text{и} \quad \frac{m-2}{2(m-1)} \left( x \frac{\partial B_z}{\partial x} + y \frac{\partial B_z}{\partial y} + z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right)$$



являются гармоническими; по (5.37) они равны при  $z = 0$ ; значит, это равенство имеет место и при любом  $z > 0$ :

$$\frac{\partial B_0}{\partial z} = \frac{m-2}{2(m-1)} \left( x \frac{\partial B_x}{\partial x} + y \frac{\partial B_y}{\partial y} + z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right). \quad (5.39)$$

Если теперь обозначить (чтобы согласовать с прежними обозначениями)

$$\omega = \frac{\pi G (3m-4) m}{2(m-1)^2} B_z \quad (5.40)$$

и ввести в рассмотрение функцию  $\omega_1$  так, чтобы [см. (5.25)]

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial z} = \omega \quad (5.41)$$

и производные  $\frac{\partial \omega_1}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \omega_1}{\partial y}$  при  $R \rightarrow \infty$  обращались в нуль, то легко получить:

$$\left. \begin{aligned} B_x &= -\frac{(m-2)(m-1)}{\pi G (3m-4) m} \frac{\partial \omega_1}{\partial x}, \\ B_y &= -\frac{(m-2)(m-1)}{\pi G (3m-4) m} \frac{\partial \omega_1}{\partial y}, \\ B_0 &= \frac{(m-2)(m-1)}{\pi G (3m-4) m} \left( x \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + y \frac{\partial \omega_1}{\partial y} + z\omega - \omega_1 \right), \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

и подстановка в (1.5) приведёт в точности к формулам (5.27). При этом оставшаяся до сих пор произвольной потенциальная функция  $\omega(x, y, z)$  должна быть найдена по заданию нормального напряжения  $\sigma_z$  при  $z = 0$ , т. е. по условию (5.34); из последнего же следует, что  $\omega(x, y, z)$  является потенциалом простого слоя плотности  $p(x, y)$ , распределённого по области нагружения  $\Omega$ . Мы восстановили, таким образом, все вышеприведённые результаты.

4°. В следующем параграфе будут приведены примеры вычисления интегралов, определяющих потенциалы  $\omega$  и  $\omega_1$ , при непрерывном распределении нагрузки. Эти вычисления довольно громоздки. Напряжения и перемещения в точках, расположенных на расстояниях  $R$  от площадки нагружения, значительно превосходящих линейные размеры самой площадки, можно определить, применяя приём, использованный в §§ 2 и 3 для безграничной среды. Однако быстрее приведёт к цели рассмотрение разложений потенциалов  $\omega$  и  $\omega_1$  в ряды по степеням величин, зависящих от отношений величин, определяемых размерами площадки, к расстоянию  $R$ .

Имеем:

$$R' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} = R \sqrt{1 - \frac{2(xx'+yy')}{R^2} + \frac{x'^2+y'^2}{R^2}},$$

где  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  — расстояние от начала координат, расположенного внутри площадки нагружения  $\Omega$ , до точки наблюдения  $M$ .

Таким образом,

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{xx' + yy'}{R^3} - \frac{1}{2} \frac{x'^2 + y'^2}{R^3} + \frac{3}{2} \frac{(xx' + yy')^2}{R^5} + \dots$$

Ограничившись написанными слагаемыми, получаем:

$$\begin{aligned} \omega(x, y, z) &= \int_{\Omega} \int p \frac{p(x', y')}{R'} do' = \\ &= \frac{P}{R} + \frac{1}{R^3} (xM_y + yM_x) - \frac{\Theta_x + \Theta_y}{2R^3} + \frac{3}{2R^5} (\Theta_y x^2 + 2\Theta_{xy} xy + \Theta_x y^2) + \dots \end{aligned} \quad (5.43)$$

Здесь введены в рассмотрение статические моменты поверхностного распределения массы с плотностью  $p(x', y')$  по площадке  $\Omega$  («плотность» может быть и отрицательной), её моменты инерции и центробежный момент

$$\left. \begin{aligned} M_y &= \iint_{\Omega} p(x', y') x' do', & M_x &= \iint_{\Omega} p(x', y') y' do', \\ \Theta_y &= \iint_{\Omega} p(x', y') x'^2 do, & \Theta_{xy} &= \iint_{\Omega} p(x', y') x' y' do', \\ \Theta_x &= \iint_{\Omega} p(x', y') y'^2 do'. \end{aligned} \right\} \quad (5.44)$$

Для вычисления потенциала  $\omega_1$  воспользуемся соотношением (5.25) и условием (5.23), определяющим поведение этого потенциала при  $R \rightarrow \infty$ . Находим:

$$\begin{aligned} \omega_1(x, y, z) &= P \ln(R + z) - (xM_y + yM_x) \int_z^{\infty} \frac{dz}{R^3} + \frac{1}{2} (\Theta_x + \Theta_y) \int_z^{\infty} \frac{dz}{R^3} - \\ &\quad - \frac{3}{2} (\Theta_y x^2 + 2\Theta_{xy} xy + \Theta_x y^2) \int_z^{\infty} \frac{dz}{R^5} + \dots \end{aligned}$$

Замечая, что \*)

$$\begin{aligned} - \int_z^{\infty} \frac{dz}{R^3} &= \frac{1}{x^2 + y^2} \frac{z}{R} \Big|_{\infty}^z = \frac{1}{R^2 - z^2} \left( \frac{z}{R} - 1 \right) = - \frac{1}{R(R + z)}, \\ - \int_z^{\infty} \frac{dz}{R^5} &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \left( \frac{z}{R} - \frac{1}{3} \frac{z^3}{R^3} \right) \Big|_{\infty}^z = \\ &= \frac{1}{(R^2 - z^2)^2} \left( \frac{z}{R} - \frac{1}{3} \frac{z^3}{R^3} - \frac{2}{3} \right) = - \frac{z + 2R}{3(R + z)^2 R^3}, \end{aligned}$$

\*) Двайт, Таблицы интегралов и другие математические формулы, Гос. изд-во иностранной литературы, 1948.

получим:

$$\omega_1 = P \ln(R+z) - \left[ xM_y + yM_x - \frac{1}{2}(\Theta_x + \Theta_y) \right] \frac{1}{R(R+z)} - \\ - \frac{1}{2}(\Theta_y x^2 + 2\Theta_{xy}xy + \Theta_x y^2) \frac{z+2R}{R^3(R+z)^2} + \dots \quad (5.45)$$

Рассмотрим, в частности, случай пары сил: одна из сил  $F$ , составляющих пару, направленная по оси  $z$  (внутри среды), приложена в точке  $(\frac{1}{2}h, 0, 0)$ , вторая, имеющая противоположное направление, — в точке  $(-\frac{1}{2}h, 0, 0)$ . Тогда

$$P = 0, \quad M_y = \frac{1}{2}hF + \frac{1}{2}(-h)(-F) = hF, \quad M_x = 0, \\ \Theta_x = \Theta_{xy} = \Theta_y = 0, \quad hF = -m_y,$$

где  $m_y$  — момент пары относительно оси  $y$ , который считается положительным при вращении от оси  $z$  к оси  $x$ . Получаем:

$$\omega = -\frac{xm_y}{R^3} + \dots, \quad \omega_1 = \frac{xm_y}{R(R+z)} + \dots \quad (5.46)$$

Если  $h \rightarrow 0$  и  $F \rightarrow \infty$ , причём произведение  $hF$  имеет конечное значение, то в начале координат приложен сосредоточенный момент  $m_y = -hF$ . Действие сосредоточенного момента определяется потенциалами  $\omega$  и  $\omega_1$ , причём в формулах (5.46) следует сохранить только написанные явно слагаемые, так как размеры «площади загрузки» при сделанном предельном переходе сведены к нулю. Перемещения точек упругой среды определяются по потенциалам  $\omega$  и  $\omega_1$  с помощью формул (5.27). Они убывают при удалении от точки приложения сосредоточенного момента как  $R^{-2}$ ; напряжения будут убывать как  $R^{-3}$ .

## § 6. Непрерывное распределение нагрузки

1°. При равномерном нагружении ( $p = \text{const}$ ) выражение (5.18) функции  $\omega(x, y, z)$  принимает вид

$$\omega(x, y, z) = p \int_{\Omega} \int \frac{do'}{R'} = p \int_{\Omega} \int \frac{do'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}}. \quad (6.1)$$

Для вычисления этого интеграла, т. е. потенциала простого слоя постоянной плотности, распределённого по плоской области  $\Omega$ , можно предложить такой способ: введём в рассмотрение точку  $P(x, y, 0)$ , т. е. проекцию на плоскость  $xu$  точки наблюдения  $M(x, y, z)$ ; эту точку  $P$  примем за начало системы полярных координат  $\rho, \lambda$ :

$$x' - x = \rho \cos \lambda, \quad y' - y = \rho \sin \lambda. \quad (6.2)$$

Тогда элемент площади  $do'$  выразится формулой

$$do' = \rho \, d\rho \, d\lambda$$

и интеграл (6.1) примет вид

$$\begin{aligned} \omega(x, y, z) &= p \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \int_{r_1(\lambda)}^{r_2(\lambda)} \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \\ &= p \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda [V r_2^2(\lambda) + z^2 - V r_1^2(\lambda) + z^2]. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Здесь  $r_1(\lambda)$  и  $r_2(\lambda)$ , а также пределы интегрирования по  $\lambda$  определяются в каждом частном случае в зависимости от вида области;

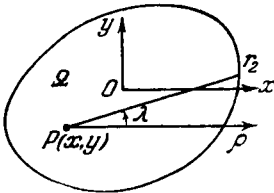


Рис. 5.

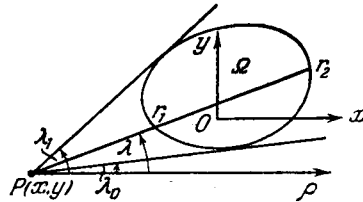


Рис. 6.

если точка  $P$  попадает внутрь области, то  $r_1 = 0$  (рис. 5). В частности, из (6.3) при  $z = 0$  следует:

$$\omega(x, y, 0) = p \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} [r_2(\lambda) - r_1(\lambda)] \, d\lambda, \quad (6.4)$$

когда точка  $M$  (или  $P$ ) находится вне загруженной области  $\Omega$  (рис. 6); если же она попадает внутрь этой области, то

$$\omega(x, y, 0) = p \int_0^{2\pi} r(\lambda) \, d\lambda. \quad (6.5)$$

По этим формулам согласно (5.32) определяется проекция перемещения  $w$  точек граничной плоскости на ось  $z$ .

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых частных случаев.

2°. Полигональная область. Соединив точку  $P$  с  $n$  вершинами полигона, получим  $n$  треугольников  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$  с общей вершиной в  $P$ , основаниями которых служат стороны полигона. Вычисление  $\omega(x, y, z)$ , таким образом, сведется к вычислению интегралов по площадям  $\Omega_i$  и их последующему алгебраическому сложению.

Например, при расположении точки внутри  $\Omega$  (рис. 7, а) все эти интегралы складываются, если же  $P$  находится вне  $\Omega$ , как показано на рис. 7, б, то нужно из суммы интегралов по областям  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  (треугольники  $PAB, PBC, PCD$ ) вычесть интеграл по области  $\Omega_4$  (треугольник  $PDA$ ). Далее для вычисления удобно разбить каждый

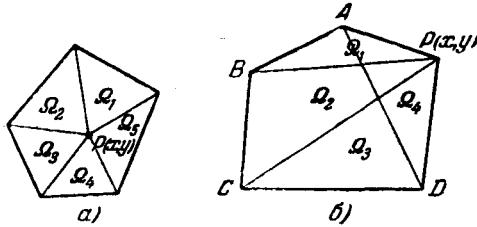


Рис. 7.

из треугольников  $\Omega_i$  высотой  $h_i$ , опущенной из вершины  $P$  на основание, на два прямоугольных треугольника  $\Omega'_i$  и  $\Omega''_i$ . Тогда интеграл по области  $\Omega_i$  представится так же, как алгебраическая сумма интегралов по  $\Omega'_i$  и  $\Omega''_i$  (рис. 8, а и б).

Итак, всё дело сводится к вычислению потенциала простого слоя постоянной плотности, распределённого по площади прямоугольного

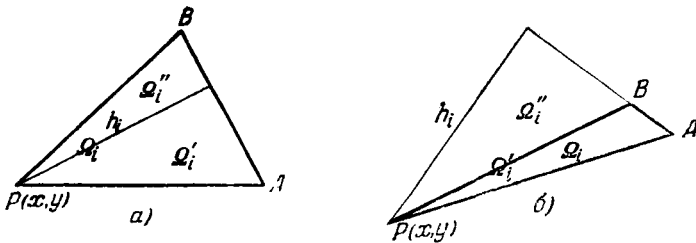


Рис. 8.

треугольника, в вершине острого угла которого  $\lambda_0$  расположена точка  $P(x, y, z)$ , а прилежащий к ней катет равен  $h$ . В формуле (6.3) имеем  $r_1(\lambda) = 0$  и  $r_2(\lambda) = \frac{h}{\cos \lambda}$ ; поэтому

$$\omega(x, y, z) = p \int_0^{\lambda_0} \left( \sqrt{\frac{h^2}{\cos^2 \lambda} + z^2} - z \right) d\lambda. \quad (6.6)$$

Неопределённый интеграл

$$J = \int \sqrt{h^2 + z^2 \cos^2 \lambda} \frac{d\lambda}{\cos \lambda}$$

вычисляется элементарно:

$$J = -z \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{1 + \beta^2 \cos^2 \lambda}{1 + \beta^2}} - \frac{h}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + \beta^2 \cos^2 \lambda} - \sin \lambda}{\sqrt{1 + \beta^2 \cos^2 \lambda} + \sin \lambda} + C, \quad (6.7)$$

где для краткости обозначено

$$\beta = \frac{z}{h}. \quad (6.8)$$

Таким образом, получаем:

$$\omega(x, y, z) = -ph \left[ \beta \left( \lambda_0 - \frac{\pi}{2} \right) + \beta \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{1 + \beta^2 \cos^2 \lambda_0}{1 + \beta^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + \beta^2 \cos^2 \lambda_0} - \sin \lambda_0}{\sqrt{1 + \beta^2 \cos^2 \lambda_0} + \sin \lambda_0} \right]. \quad (6.9)$$

Нетрудно проверить, что при  $z \rightarrow \infty$  это выражение стремится к нулю; при  $z = 0$  получаем:

$$\omega(x, y, 0) = \frac{ph}{2} \ln \frac{1 + \sin \lambda_0}{1 - \sin \lambda_0}; \quad (6.10)$$

вводя обозначение (лямбда-функция)

$$\Lambda(\lambda) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \lambda}{1 - \sin \lambda} = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2} \right), \quad (6.11)$$

можно также написать:

$$\omega(x, y, 0) = ph \Lambda(\lambda_0). \quad (6.12)$$

Из (6.9) получаем также:

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = -p \left[ \lambda_0 - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{1 + \beta^2 \cos^2 \lambda_0}{1 + \beta^2}} \right] \quad (6.13)$$

и далее

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = p \frac{\sin \lambda_0}{h(1 + \beta^2) \sqrt{1 + \beta^2 \cos^2 \lambda_0}}. \quad (6.14)$$

В качестве примера определим перемещение  $w$  точек равномерно нагруженной прямоугольной области. Располагая начало координат в центре прямоугольника и направляя оси  $x$  и  $y$  параллельно его сторонам ( $2a$  и  $2b$ ), по (5.32) и (6.12) получим (рис. 9):

$$w(x, y, 0) = \frac{(m-1)p}{2\pi m \bar{U}} \sum_{i=1}^8 h_i \Lambda(\lambda_i). \quad (6.15)$$

Значения  $h_i$  и  $\sin \lambda_i$  здесь будут:

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= a - x, & h_2 &= b - y, \\ \sin \lambda_1 &= \frac{h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}, & \sin \lambda_2 &= \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}, & h_3 &= a + x, \\ \sin \lambda_3 &= \frac{h_3}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}, & \sin \lambda_4 &= \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}} \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

и т. д.

Например, в центре прямоугольника

$$\omega(0, 0, 0) = \frac{(m-1)p}{\pi m G} \left[ a \ln \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + b}{\sqrt{a^2 + b^2} - b} + b \ln \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{\sqrt{a^2 + b^2} - a} \right], \quad (6.17)$$

в серединах его сторон

$$\left. \begin{aligned} \omega(a, 0, 0) &= \frac{(m-1)p}{2\pi m G} \left[ b \ln \frac{\sqrt{4a^2 + b^2} + 2a}{\sqrt{4a^2 + b^2} - 2a} + 2a \ln \frac{\sqrt{4a^2 + b^2} + b}{\sqrt{4a^2 + b^2} - b} \right], \\ \omega(0, b, 0) &= \frac{(m-1)p}{2\pi m G} \left[ a \ln \frac{\sqrt{a^2 + 4b^2} + 2b}{\sqrt{a^2 + 4b^2} - 2b} + 2b \ln \frac{\sqrt{a^2 + 4b^2} + a}{\sqrt{a^2 + 4b^2} - a} \right], \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

и в углах

$$\omega(a, b, 0) = \frac{(m-1)p}{2\pi m G} \left[ a \ln \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + b}{\sqrt{a^2 + a^2} - b} + b \ln \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{\sqrt{a^2 + b^2} - a} \right], \quad (6.19)$$

т. е. вдвое меньше, чем в центре. Все эти величины легко протабулировать по значению аргумента  $\frac{b}{a}$ .

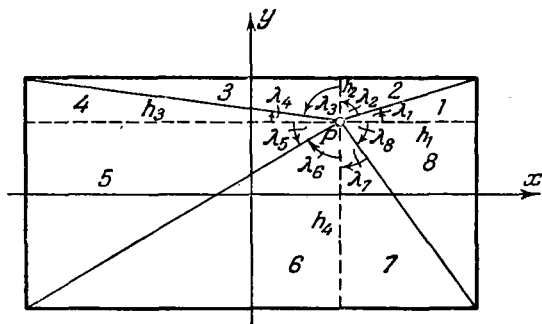


Рис. 9.

Рассмотрим второй пример. Найдём в случае загрузки по площади квадрата (со стороной  $2a$ ) нормальные напряжения в точках оси  $z$ , т. е. перпендикуляра к области загрузки в её центре.

Вследствие симметрии по (5.31) имеем:

$$\sigma_x(0, 0, z) = \sigma_y(0, 0, z) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{m+2}{m} \frac{\partial \omega(0, 0, z)}{\partial z} + z \frac{\partial^2 \omega(0, 0, z)}{\partial z^2} \right],$$

а по (5.29)

$$\tau_z(0, 0, z) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial \omega(0, 0, z)}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \omega(0, 0, z)}{\partial z^2} \right).$$

В рассматриваемом случае по (6.13) и (6.14)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega(0, 0, z)}{\partial z} &= 8\rho \left( \frac{\pi}{4} - \arcsin \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2} \zeta^2}{1 + \zeta^2}} \right), \\ \frac{\partial^2 \omega(0, 0, z)}{\partial z^2} &= \frac{4\sqrt{2}\rho}{a} \frac{1}{(1 + \zeta^2) \sqrt{1 + \frac{1}{2} \zeta^2}} \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

и, значит,

$$\left. \begin{aligned} \tau_z(0, 0, z) &= \rho \left[ 1 - \frac{4}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2} \zeta^2}{1 + \zeta^2}} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{\zeta}{(1 + \zeta^2) \sqrt{1 + \frac{1}{2} \zeta^2}} \right], \\ \sigma_x(0, 0, z) = \sigma_y(0, 0, z) &= \\ &= \rho \left[ \frac{m+2}{2m} \left( 1 - \frac{4}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2} \zeta^2}{1 + \zeta^2}} \right) + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\zeta}{(1 + \zeta^2) \sqrt{1 + \frac{1}{2} \zeta^2}} \right], \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

где  $\zeta = \frac{z}{a}$ .

Возвращаясь к общему случаю, вспомним, что для получения напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  и перемещений  $u$ ,  $v$  нужно знать также функцию  $\omega_1(x, y, z)$ . Существенных затруднений это не вызывает, ибо неопределённый интеграл

$$\int \omega dz$$

с помощью интегрирования по частям

$$\int \omega dz = z\omega - \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{1}{2} \int z^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} dz \quad (6.22)$$

после подстановки значения  $\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}$  по (6.14) вычисляется элементарно.

Чтобы получить  $\omega_1(x, y, z)$ , следует ещё подчинить выбор функции от  $h$  и  $\lambda_0$ , которую нужно добавить к (6.22), условию (5.23). Этих вычислений мы проводить не будем, так как само использование функции  $\omega_1(x, y, z)$ , хотя её получение несложно, сопровождается очень громоздкими выкладками; они в конечном счёте позволили бы определить вышеуказанные величины, имеющие в рассматриваемой



задаче второстепенное значение (по сравнению с напряжениями  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{yz}$  и перемещением  $w$ , определяемым лишь по значению  $\omega$ ).

3°. Круговая область. Центр окружности (радиуса  $a$ ), ограничивающей область нагружения, примем за начало координат. Интеграл (6.3) при произвольном расположении точки наблюдения  $M(x, y, z)$  не может быть выражен в конечной форме. Поэтому для вычисления потенциала простого слоя  $\omega(x, y, z)$ , равномерно распределённого по кругу, применён приём, основанный на следующих соображениях\*): гармоническая функция  $\omega(x, y, z)$  может быть представлена в форме ряда по сферическим функциям; вследствие симметрии вращения вокруг оси  $z$  этот ряд не может зависеть от азимутального угла  $\varphi$  и поэтому при  $R < a$  должен иметь вид

$$\begin{aligned} \omega(x, y, z) &= C_0 P_0(\mu) + C_1 R P_1(\mu) + C_2 R^2 P_2(\mu) + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n R^n P_n(\mu), \end{aligned} \quad (6.23)$$

где для краткости обозначено

$$\cos \vartheta = \mu \quad (6.24)$$

и  $P_n(\mu)$  представляет  $n$ -й полином Лежандра. При  $R > a$  представление функции  $\omega(x, y, z)$  в форме ряда по сферическим функциям будет:

$$\omega(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{R^{n+1}} P_n(\mu), \quad (6.25)$$

так как при  $R \rightarrow \infty$  эта функция должна обращаться в нуль не медленнее, чем  $\frac{1}{R}$ .

Остаётся определить коэффициенты  $C_n$  и  $D_n$ . Для этого заметим, что при  $\mu = 1$  (т. е. на положительной оси  $z$ ) из (6.23) и (6.25) следует:

$$\omega(0, 0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n P_n(1) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \quad (z < a), \quad (6.26)$$

$$\omega(0, 0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{z^{n+1}} \quad (z > 0). \quad (6.27)$$

Но значение функции  $\omega(x, y, z)$  в точках оси  $z$  может быть сразу найдено по (6.3); нужно положить в этой формуле  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = a$ ; тогда получим:

$$\omega(0, 0, z) = 2\pi p (\sqrt{a^2 + z^2} - z), \quad (6.28)$$

\*) А. Вебстер и Г. Сеге, Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, ГТТИ, 1934, ч. II, стр. 216.

и остаётся разложить это выражение в ряд по степеням  $z$  при  $z < a$  и по степеням  $\frac{1}{z}$  при  $z > a$ ; имеем:

$$\sqrt{a^2 + z^2} - z = a \left( 1 - \frac{z}{a} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{a^2} - \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{z^4}{a^4} + \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{z^6}{a^6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{z^8}{a^8} + \dots \right) \quad (z < a),$$

$$\sqrt{a^2 + z^2} - z = a \left( \frac{1}{2} \frac{a}{z} - \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{a^3}{z^3} + \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{a^5}{z^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{a^7}{z^7} + \dots \right) \quad (z > a).$$

Сравнение с (6.26) и (6.27) даёт теперь:

$$\omega(x, y, z) = 2\pi pa \left[ P_0(\mu) - \frac{R}{a} P_1(\mu) + \frac{1}{2} \frac{R^2}{a^2} P_2(\mu) - \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{R^4}{a^4} P_4(\mu) + \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{R^6}{a^6} P_6(\mu) - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{R^8}{a^8} P_8(\mu) + \dots \right] \quad (R < a), \quad (6.29)$$

$$\omega(x, y, z) = 2\pi pa \left[ \frac{1}{2} \frac{a}{R} P_0(\mu) - \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{a^3}{R^3} P_2(\mu) + \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{a^5}{R^5} P_4(\mu) - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{a^7}{R^7} P_6(\mu) + \dots \right] \quad (R > a). \quad (6.30)$$

Найдём, например, значение перемещения  $w$  внутри области нагружения. Следует принять  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\mu = 0$  в (6.29); тогда по (5.32) получим:

$$w(x, y, 0) = \frac{m-1}{mG} pa \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R}{a} \right)^{2n} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n)^2} \right], \quad (6.31)$$

ибо

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}.$$

Числовой коэффициент общего члена ряда (6.31) может быть записан в форме

$$\frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)]^2}{[2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n]^2 (2n-1)} = \frac{(2n)!^2}{2^{4n} (n!)^4 (2n-1)}.$$

Поэтому на контуре области нагружения, т. е. при  $R = a$ , получим:

$$w = \frac{m-1}{mG} pa \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!^2}{2^{4n} (n!)^4 (2n-1)} \right].$$

Ряд \*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n!)^2}{2^{4n} (n!)^4 (2n-1)}$$

сходится и имеет суммой

$$1 - \frac{2}{\pi}.$$

Итак,

$$(\omega)_{z=0, R=a} = \frac{2(m-1)pa}{\pi mG}. \quad (6.32)$$

В точках граничной плоскости вне области загрузки по (6.30) получим ( $R > a$ ,  $z = 0$ ):

$$\omega = \frac{m-1}{mG} pa \left\{ \frac{1}{2} \frac{a}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right]^2 \frac{1}{2n+2} \left( \frac{a}{R} \right)^{2n+1} \right\}. \quad (6.33)$$

Замечая ещё, что \*\*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right]^2 \frac{1}{2n+2} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2},$$

получим при  $R = a$  вышеприведённое выражение (6.32).

Значение  $\omega(x, y, z)$  в точках плоскости  $xu$  может быть, впрочем, просто найдено по (6.4). Примем сначала, что точка  $P$  находится вне загруженной области. Тогда в соответствии с рис. 10 имеем:

$$\begin{aligned} r_2(\lambda) - r_1(\lambda) &= QS = 2KS = \\ &= 2\sqrt{OS^2 - OK^2}; \end{aligned}$$

обозначая  $OP = R$  и замечая, что  $OK = R \sin \lambda$ , получим:

$$\begin{aligned} r_2(\lambda) - r_1(\lambda) &= \\ &= 2a \sqrt{1 - \frac{R^2}{a^2} \sin^2 \lambda} = \\ &= 2a \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \lambda}{\sin^2 \lambda_0}}, \end{aligned}$$

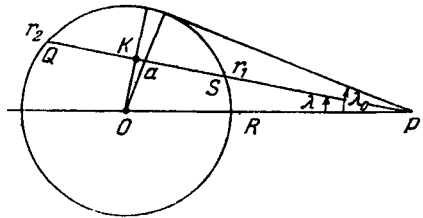


Рис. 10.

так как  $\sin \lambda_0 = \frac{a}{R}$ . Теперь по (6.4) при  $R > a$  получим:

$$\omega(x, y, 0) = 4pa \int_0^{\lambda_0} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \lambda}{\sin^2 \lambda_0}} d\lambda.$$

\*) И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, № 10, Гостехиздат, 1948, стр. 257.

\*\*) И. М. Рыжик, там же.

Вводим новую переменную интегрирования  $\psi$ , полагая

$$\sin \lambda = \sin \lambda_0 \sin \psi, \quad d\lambda = \frac{\sin \lambda_0 \cos \psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \lambda_0 \sin^2 \psi}} d\psi.$$

Тогда \*) ( $R > a$ )

$$\omega(x, y, 0) = 4p \frac{a^2}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \psi d\psi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2} \sin^2 \psi}} = 4pR \left[ E\left(\frac{a}{R}\right) - \left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right) K\left(\frac{a}{R}\right) \right], \quad (6.34)$$

где  $K$  и  $E$  — полные эллиптические интегралы первого и соответственно второго рода с модулем  $k = \frac{a}{R}$ .

При расположении точки наблюдения  $P$  внутри области нагружения ( $OP = R < a$ ) имеем (рис. 11) в формуле (6.5):

$$r(\lambda) = PS = KS - PK = \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \lambda} - R \cos \lambda,$$

и, замечая, что

$$\int_0^{\pi} \cos \lambda d\lambda = 0,$$

найдем ( $R < a$ ):

$$\begin{aligned} \omega(x, y, 0) &= 4pa \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{R^2}{a^2} \sin^2 \lambda} d\lambda = \\ &= 4paE\left(\frac{R}{a}\right). \end{aligned} \quad (6.35)$$

Перемещение  $w$  в центре нагруженной области по (5.32) будет:

$$w(0, 0, 0) = pa \frac{m-1}{mG}, \quad (6.36)$$

что, впрочем, получается и по (6.31). Оно в  $\frac{\pi}{2}$  раз больше (т. е. примерно на 57%), чем перемещение по окружности  $R = a$ .

Перейдем к вычислению функции  $\omega_1(x, y, z)$ . Предварительно заметим, что

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial z} = \frac{\partial \omega_1}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial \omega_1}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial z}.$$

Но мы имеем (введя цилиндрические координаты  $z, \rho, \varphi$ ):

$$R = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \mu = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}},$$

\*) И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, 1948, стр. 94, № 6.

и, значит,

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial z} = \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial R} + \frac{1 - \mu^2}{R} \frac{\partial \omega_1}{\partial \mu}. \quad (6.37)$$

Для последующего отметим также, что

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} = \sin \vartheta \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial R} - \frac{\mu}{R} \frac{\partial \omega_1}{\partial \mu} \right). \quad (6.38)$$

Задаваясь теперь при  $R < a$  представлением гармонической функции  $\omega_1(x, y, z)$  в форме ряда

$$\omega_1(x, y, z) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{R^n}{a^n} P_n(\mu) \quad (R < a), \quad (6.39)$$

по (6.37) получим:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial z} = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{R^{n-1}}{a^{n-1}} [n\mu P_n(\mu) + (1 - \mu^2) P'_n(\mu)]$$

или, применив известное рекуррентное соотношение для полиномов Лежандра,

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial z} = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} F_n \left( \frac{R}{a} \right)^{n-1} n P_{n-1}(\mu). \quad (6.40)$$

Теперь по (5.25) и (6.29) находим коэффициенты  $F_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Получаем ( $R < a$ ):

$$\begin{aligned} \omega_1(x, y, z) = & F_0 + 2\pi p a^2 \left[ \frac{R}{a} P_1(\mu) - \frac{1}{2} \left( \frac{R}{a} \right)^3 P_3(\mu) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2 \cdot 3} \left( \frac{R}{a} \right)^5 P_5(\mu) - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 5} \left( \frac{R}{a} \right)^7 P_7(\mu) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Постоянную  $F_0$  знать не требуется, так как нас могут интересовать только производные от функции  $\omega_1$ .

При  $R > a$  полагаем в соответствии с (5.23)

$$\omega_1(x, y, z) = p\pi a^2 \ln(R + z) + \sum_{n=0}^{\infty} E_n \left( \frac{a}{R} \right)^{n+1} P_n(\mu). \quad (6.42)$$

Тогда по (6.37) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial z} = & \frac{p\pi a^2}{R} + \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} E_n \left( \frac{a}{R} \right)^{n+2} \left[ -(n+1) \mu P_n(\mu) + (1 - \mu^2) P'_n(\mu) \right] = \\ = & \frac{p\pi a^2}{R} - \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} E_n (n+1) \left( \frac{a}{R} \right)^{n+2} P_{n+1}(\mu). \end{aligned} \quad (6.43)$$

Здесь также было использовано известное рекуррентное соотношение для полиномов Лежандра. Сравнение с (6.30) даёт теперь значения коэффициентов  $E_n$ ; находим ( $R > a$ ):

$$\omega_1(x, y, z) = 2\pi pa^2 \left[ \frac{1}{2} \ln(R+z) + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 2} \left(\frac{a}{R}\right)^3 P_1(\mu) - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4} \left(\frac{a}{R}\right)^4 P_3(\mu) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 6} \left(\frac{a}{R}\right)^6 P_5(\mu) - \dots \right]. \quad (6.44)$$

Найдём ещё частную производную  $\frac{\partial \omega_1}{\partial \rho}$ ; воспользовавшись (6.38), (6.41) и (6.44), а также рекуррентными соотношениями

$$\mu P'_n(\mu) - n P_n(\mu) = P'_{n-1}(\mu), \quad \mu P'_n(\mu) + (n+1) P_n(\mu) = P'_{n+1}(\mu),$$

получим:

при  $R < a$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} = 2\pi pa \sin \vartheta \left[ \frac{R}{2a} P'_1(\mu) - \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{R}{a}\right)^3 P'_3(\mu) + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 5} \left(\frac{R}{a}\right)^4 P'_4(\mu) - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \left(\frac{R}{a}\right)^6 P'_6(\mu) + \dots \right], \quad (6.45)$$

при  $R > a$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} = 2\pi pa \sin \vartheta \left[ \frac{1}{2} \frac{a}{R(1+\cos \vartheta)} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 2} \left(\frac{a}{R}\right)^3 P'_3(\mu) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4} \left(\frac{a}{R}\right)^5 P'_4(\mu) - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 6} \left(\frac{a}{R}\right)^7 P'_6(\mu) + \dots \right]. \quad (6.46)$$

По (5.27) теперь легко найти перемещение  $u_\rho$ ; в частности, для точек граничной плоскости

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \mu = 0, \quad P'_{2n}(0) = 0$$

и по (5.32) получим ( $z = 0$ ):

$$u_\rho = \begin{cases} -\frac{m-2}{4mG} pa \frac{R}{a} & (R < a), \\ -\frac{m-2}{4mG} pa \frac{a}{R} & (R > a). \end{cases} \quad (6.47)$$

Знание функций  $\omega$  и  $\omega_1$  позволяет теперь найти напряжения во всём полупространстве. В цилиндрических координатах они определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \tau_z &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right), & \tau_{z\rho} &= -\frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial z}, & \tau_{z\varphi} &= 0, \\ \tau_\rho &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{m-2}{m\rho} \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} + z \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) \right], & \tau_{\rho\varphi} &= 0, \\ \sigma_\varphi &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{2}{m} \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{m-2}{m\rho} \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} - \frac{z}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \rho} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.48)$$

Вычисление элементарно, но довольно громоздко; оно приводит к сложным выражениям в форме рядов, мало пригодных вследствие их недостаточной сходимости для практического расчёта. Наибольший интерес, без сомнения, представляет знание нормальных напряжений в точках оси  $z$  (в этих точках вследствие симметрии  $\sigma_x = \sigma_y$ , а касательные напряжения равны нулю); они получаются вполне элементарно по (5.29), (5.31) и (6.28). Очень простое вычисление по этим формулам даёт:

$$\sigma_z(0, 0, z) = -p \left[ 1 - \left( \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)^3 \right], \quad (6.49)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x(0, 0, z) = \sigma_y(0, 0, z) = \\ = \frac{1}{2} p \left[ -\frac{m+2}{m} + \frac{2(1+m)}{m} \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \left( \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)^3 \right]. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max}$  (равное модулю полуразности главных нормальных напряжений) в точках оси  $z$  будет:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_x - \sigma_z| = \frac{1}{2} p \left| \frac{m-2}{2m} + \frac{1+m}{m} \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{3}{2} \left( \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)^3 \right|. \quad (6.51)$$

Оно достигает максимального значения при

$$\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2(1+m)}{m}}, \quad \text{т. е.} \quad z = a \sqrt{\frac{2(m+1)}{7m-2}}.$$

Подставив это значение в (6.51), получим

$$(\tau_{\max})_{\max} = \frac{p}{2} \left[ \frac{m-2}{2m} + \frac{1}{9} \left( \frac{2(m+1)}{m} \right)^{3/2} \right]$$

и при  $\frac{1}{m} = 0,3$  найдём:

$$z = 0,64a, \quad (\tau_{\max})_{\max} = 0,33p. \quad (6.52)$$

Аналогичное вычисление можно проделать для случая равномерного нагружения по площади квадрата (со стороной  $2a$ ). По формулам (6.21) получим:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_x - \sigma_z| = \frac{p}{2} \left| -\frac{m-2}{2m} \left( 1 - \frac{4}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}\zeta^2}{1 + \zeta^2}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{3\sqrt{2}}{\pi} \frac{\zeta}{(1 + \zeta^2) \left( 1 + \frac{1}{2}\zeta^2 \right)^{1/2}} \right|, \end{aligned} \quad (6.53)$$

где  $\zeta = \frac{z}{a}$ . Условие обращения в нуль производной от этой величины приводит к уравнению

$$\frac{2(1+m)}{m} - \frac{6\zeta^2}{1+\zeta^2} - \frac{3\zeta^2}{2+\zeta^2} = 0,$$

из которого при  $\frac{1}{m} = 0,3$  получается глубина погружения (координата  $z$ ) точки, в которой наибольшее касательное напряжение принимает наибольшее значение:

$$z = \sqrt{0,5} a \approx 0,71a.$$

Это наибольшее значение оказывается равным, если вести вычисления с точностью до двух знаков, той же величине  $0,33\rho$ , что и в случае загрузки по кругу (следует в (6.53) подставить  $r^2=0,5$ ).

Заметим ещё, что максимальное касательное напряжение в центре загруженной области в обоих случаях (круга и квадрата) оказывается равным  $\frac{m-2}{4m}\rho = 0,1\rho$ .

### § 7. Неравномерное нагружение по эллиптической площадке

1°. Перейдём к рассмотрению случая неравномерного нагружения, причём ограничимся разысканием значения потенциала  $\omega(x, y, z)$  в точках загруженной области, т. е. вычислением интеграла

$$\omega(x, y, 0) = \int_{\Omega} \int_{\rho} \frac{p(x', y') d\sigma'}{\rho}, \quad \rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad (7.1)$$

при условии, что точка  $(x, y)$  расположена внутри  $\Omega$ . Вводя с помощью формул (6.2) полярную систему координат с началом в точке  $(x, y)$ , перепишем (7.1) в виде

$$\omega(x, y, 0) = \int_0^{2\pi} \Theta(x, y, \lambda) d\lambda, \quad (7.2)$$

где обозначено

$$\Theta(x, y, \lambda) = \int_0^{\rho_0(\lambda)} p(x', y') d\rho \quad (7.3)$$

и  $\rho_0(\lambda)$  представляет значение радиуса вектора  $\rho$  на контуре области загрузки.

В дальнейшем рассматривается случай площадки загрузки, ограниченной эллипсом с полуосями  $a, b$ . Введём обозначение

$$L = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \quad (7.4)$$

Очевидно,  $L$  обращается в нуль на эллипсе  $C_0$ , ограничивающем площадку загрузки, и принимает постоянное значение на всех эллипсах  $C$ , подобных и подобно расположенных эллипсу  $C_0$ . Будем считать, что нагрузка также имеет постоянное значение вдоль эллипса  $C$ , меняясь при переходе от одного эллипса к другому; итак,

$$p(x', y') = f(L'), \quad (7.5)$$



где

$$L' = 1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}. \quad (7.6)$$

По формулам преобразования (6.2) имеем:

$$L' = 1 - \frac{(x + \rho \cos \lambda)^2}{a^2} - \frac{(y + \rho \sin \lambda)^2}{b^2} = L - 2\rho\Phi_1 - \rho^2\Phi_2, \quad (7.7)$$

где обозначено

$$\Phi_1 = \frac{x \cos \lambda}{a^2} + \frac{y \sin \lambda}{b^2}, \quad \Phi_2 = \frac{\cos^2 \lambda}{a^2} + \frac{\sin^2 \lambda}{b^2}. \quad (7.8)$$

Из (7.7), беря положительный корень, найдём:

$$\rho = \frac{1}{\Phi_2} (-\Phi_1 + \sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_2(L - L')}), \quad (7.9)$$

откуда при фиксированных  $x, y, \lambda$  следует, что

$$d\rho = -\frac{1}{2} \frac{dL'}{\sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_2(L - L')}}. \quad (7.10)$$

Выражение (7.3) принимает вид

$$\Theta(x, y, \lambda) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{f(L') dL'}{\sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_2(L - L')}} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{f(L - \varepsilon) d\varepsilon}{\sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_2 \varepsilon}}. \quad (7.11)$$

Здесь учтено, что значениям  $\rho$ , равным нулю и  $\rho_0(\lambda)$ , соответствуют значения переменной  $L'$ , равные  $L$  и нулю. Перейдём к рассмотрению частных случаев.

2°. Нагрузка распределена по закону

$$f(L) = \frac{p_0}{\sqrt{L}}, \quad (7.12)$$

т. е. имеет минимальное значение в центре площадки и обращается в бесконечность на её контуре, причём равнодействующая сила

$$P = \int_{\Omega} \int p(x, y) do = p_0 \int_{\Omega} \int \frac{dx dy}{\sqrt{L}} = 2\pi p_0 ab \quad (7.13)$$

остается конечной (о вычислении интеграла см. ниже, п. 4°).

Интеграл (7.11) преобразуется к виду

$$\Theta(x, y, \lambda) = \frac{1}{2} p_0 \int_0^L \frac{d\varepsilon}{\sqrt{(L - \varepsilon)(\Phi_1^2 + \Phi_2 \varepsilon)}} = \frac{p_0}{2\sqrt{\Phi_2}} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s)(\Psi + s)}}, \quad (7.14)$$

где обозначено

$$\Psi = \frac{\Phi_1^2}{\Phi_2 L}. \quad (7.15)$$

Введём в рассмотрение интеграл \*)

$$U_{-1} = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s)(\Psi+s)}} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\Psi+s}{1-s}} \Big|_0^1 = \pi - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\Psi}. \quad (7.16)$$

Получаем:

$$\Theta(x, y, \lambda) = \frac{p_0 \pi}{2 \sqrt{\Phi_2}} - \frac{p_0}{\sqrt{\Phi_2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\Phi_1}{\sqrt{\Phi_2 L}}.$$

Последнее слагаемое представляет функцию, меняющую знак при замене  $\lambda$  на  $\lambda + \pi$ ; оно отпадает при вычислении интеграла (7.2), вследствие чего, сохраняя в выражении  $\Theta(x, y, \lambda)$  только те слагаемые, которые влияют на результат этого вычисления, можно записать:

$$\Theta(x, y, \lambda) = \frac{p_0 \pi}{2 \sqrt{\Phi_2}}, \quad (7.17)$$

причём точкой над знаком равенства отмечается условный смысл написанного соотношения.

По (7.2) получаем теперь:

$$\omega(x, y, 0) = \frac{p_0 \pi}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Phi_2}} = 2p_0 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\frac{\cos^2 \lambda}{a^2} + \frac{\sin^2 \lambda}{b^2}}};$$

после приведения интеграла к нормальной форме Лежандра найдём:

$$\omega(x, y, 0) = 2\pi p_0 b K(e), \quad (7.18)$$

причём модуль  $e$  эллиптического интеграла первого рода равен эксцентриситету эллипса

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (a > b). \quad (7.19)$$

Таким образом, перемещения

$$\omega(x, y, 0) = \frac{m-1}{m\sigma} p_0 b K(e) \quad (7.20)$$

оказываются одинаковыми для всех точек загруженной области; поэтому их можно осуществить, прижимая плоский торец жёсткого цилиндрического штампа эллиптического сечения к плоскости, ограничивающей упругое полупространство. Будучи нагружен осевой силой  $P$ , этот штамп вместе с прилегающими к нему частицами среды опустится на величину

$$\delta = \omega(x, y, 0) = \frac{m-1}{2m\sigma} \frac{P}{\pi a b} b K(e). \quad (7.21)$$

\*) Д в а й т, Таблицы интегралов и другие математические формулы, Изд-во иностр. литературы, 1948, формула 195.01.

Распределение давления по подошве штампа определяется по (7.12); как уже указывалось, напряжения  $\sigma_z$  становятся бесконечными в точках среды, прилегающих к контуру штампа.

3°. Рассмотрим теперь изменение нагрузки по закону Герца

$$p(x, y) = f(L) = p_0 \sqrt{L}. \quad (7.22)$$

В этом случае  $p_0$  представляет максимальное давление в центре площадки загрузки, в точках же контура площадки давление равно нулю. Равнодействующая сила определяется равенством

$$P = p_0 \int \int_{\Omega} \sqrt{L} dx dy = \frac{2\pi}{3} ab p_0, \quad (7.23)$$

из которого следует, что

$$p_0 = \frac{3p}{2\pi ab}, \quad (7.24)$$

т. е. что максимальное давление при распределении по закону Герца в полтора раза больше, чем среднее.

По (7.11) имеем:

$$\Theta(x, y, \lambda) = \frac{p_0}{2} \int_0^L \sqrt{\frac{L-\varepsilon}{\Phi_1^2 + \Phi_2^2 \varepsilon}} d\varepsilon = \frac{p_0 L}{2 \sqrt{\Phi_2}} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-s}{\Psi+s}} ds,$$

причём \*)

$$U_0 = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-s}{\Psi+s}} ds = \frac{\pi}{2} (1 + \Psi) - (1 + \Psi) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\Psi} - \sqrt{\Psi}. \quad (7.25)$$

Последние два члена, изменяющие знак при замене  $\lambda$  на  $\lambda + \pi$ , не влияют на величину интеграла (7.2). Поэтому имеет место соотношение

$$\Theta(x, y, \lambda) = \frac{p_0 \pi L}{4 \sqrt{\Phi_2}} (1 + \Psi) = \frac{p_0 \pi}{4} \left( \frac{L}{\sqrt{\Phi_2}} + \frac{\Phi_1^2}{\Phi_2 \sqrt{\Phi_2}} \right), \quad (7.26)$$

где точка указывает на тот же, что и в записи (7.17), условный смысл равенства. Получаем:

$$\begin{aligned} \omega(x, y, 0) = & p_0 \pi L \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Phi_2}} + \\ & + p_0 \pi \left[ \frac{x^2}{a^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \lambda}{\Phi_2 \sqrt{\Phi_2}} d\lambda + \frac{y^2}{b^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \lambda}{\Phi_2 \sqrt{\Phi_2}} d\lambda + \frac{1}{4} \frac{2xy}{a^2 b^2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \lambda \sin \lambda}{\Phi_2 \sqrt{\Phi_2}} d\lambda \right]. \end{aligned}$$

\*) Двайт, формула 195.04.

Последний интеграл равен нулю. Подставив значения  $L$  и  $\Phi_2$ , преобразуем полученное выражение к виду

$$\omega(x, y, 0) = p_0 \pi \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Phi_2}} - \frac{x^2}{a^2 b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \lambda d\lambda}{\Phi_2 \sqrt{\Phi_2}} - \frac{y^2}{a^2 b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \lambda d\lambda}{\Phi_2 \sqrt{\Phi_2}} \right]$$

и после приведения интегралов к нормальной форме Лежандра \*) найдём:

$$\omega(x, y, 0) = p_0 \pi b \left[ K(e) - \frac{x^2}{a^2} \frac{K(e) - E(e)}{e^2} - \frac{y^2}{a^2} \frac{E(e) - (1 - e^2)K(e)}{e^2(1 - e^2)} \right]. \quad (7.27)$$

Перемещение  $\omega(x, y, 0)$  в точках загруженной площадки по (5.32) может быть записано в виде

$$\omega(x, y, 0) = \delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2}, \quad (7.28)$$

где обозначено

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{m-1}{2m\bar{G}} p_0 b K(e), \\ \frac{1}{R_1} &= \frac{m-1}{m\bar{G}} b p_0 \frac{K(e) - E(e)}{a^2 e^2}, \\ \frac{1}{R_2} &= \frac{m-1}{m\bar{G}} b p_0 \frac{E(e) - (1 - e^2)K(e)}{a^2 e^2 (1 - e^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.29)$$

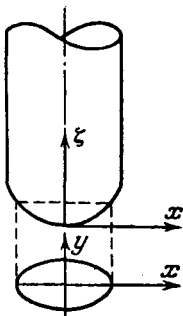


Рис. 12.

Из (7.29) следует, что рассматриваемый случай нагружения можно реализовать, если прижимать осевой силой  $P$  к упругому полупространству штамп эллиптического сечения, прижимающий конец которого очерчен по поверхности эллиптического параболоида (рис. 12)

$$\zeta = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}.$$

Штамп получает поступательное перемещение  $\delta$  вдоль своей оси, а перемещения по оси  $z$  частиц среды на поверхности соприкосновения со штампом будут равны

$$\omega(x, y, 0) = \delta - \zeta = \delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2},$$

что и требуется. Через  $\frac{1}{R_1}$  и  $\frac{1}{R_2}$  обозначены кривизны параболоида в нижней точке  $\zeta = 0, x = y = 0$ .

\*) А. М. Журавский, Справочник по эллиптическим функциям, Изд-во Акад. наук, 1941.

Эти величины, равно как и силу  $P$ , надо считать заданными; тогда эксцентриситет площадки распределения давления определится соотношением

$$\frac{R_2}{R_1} = (1 - e^2) \frac{K(e) - E(e)}{E(e) - (1 - e^2)K(e)}, \quad (7.30)$$

после чего по (7.24) и (7.29) могут быть определены неизвестные  $\delta$ ,  $a$  (или  $b$ ). Давление по поверхности соприкосания, которую с достаточным приближением можно отождествить с плоской эллиптической площадкой с полуосями  $a$  и  $b$ , распределено по закону Герца (7.22).

4°. Сказанное в двух предшествующих пунктах может быть обобщено на случай задания распределения давления по закону

$$f(L) = p_0 \left( \alpha_0 \sqrt{L} + \alpha_1 L^{3/2} + \alpha_2 L^{5/2} + \dots + \alpha_n L^{n + \frac{1}{2}} \right), \quad (7.31)$$

где  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  — постоянные коэффициенты. По (7.11) получим:

$$\Theta(x, y, \lambda) = \frac{p_0}{2} \sum_{k=0}^n \alpha_k \int_0^L \frac{(L - \varepsilon)^{k + \frac{1}{2}} d\varepsilon}{\sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_2 \varepsilon}} = \frac{p_0}{2 \sqrt{\Phi_2}} \sum_{k=0}^n \alpha_k L^{k+1} U_k, \quad (7.32)$$

где обозначено

$$U_k = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-s}{\Psi+s}} (1-s)^k ds. \quad (7.33)$$

Имеет место рекуррентное соотношение \*)

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{1}{k+1} \left[ -\sqrt{\Psi} + \frac{2k+1}{2} (1+\Psi) U_{k-1} \right] = \\ &= \frac{2k+1}{2(k+1)} (1+\Psi) U_{k-1}, \end{aligned} \quad (7.34)$$

где знак  $=$  имеет указанный выше смысл условного равенства. Применяя последовательно соотношение (7.34), получим, используя (7.25):

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)(2k+1)}{2^k k!} (1+\Psi)^k U_0 = \\ &= \frac{(2k+1)!}{2^{2k} (k!)^2} (1+\Psi)^{k+1} \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (7.35)$$

и выражение  $\Theta(x, y, \lambda)$  приобретёт вид

$$\Theta(x, y, \lambda) = \frac{p_0 \pi}{4 \sqrt{\Phi_2}} \sum_{k=0}^n \frac{(2k+1)! \alpha_k}{2^{2k} (k!)^2} \left( L + \frac{\Phi_1^2}{\Phi_2} \right)^{k+1}. \quad (7.36)$$

\*) Д в а й т, формула 195.09.

По (7.2) найдём:

$$\omega(x, y, 0) = \frac{p_0 \pi}{4} \sum_{k=0}^n \frac{(2k+1)! \alpha_k}{2^{2k} (k!)^2} \int_0^{2\pi} \left( L + \frac{\Phi_1^2}{\Phi_2} \right)^{k+1} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Phi_2}}. \quad (7.37)$$

Это выражение представляет полином степени  $(n+1)$  относительно  $x^2$  и  $y^2$  с коэффициентами, выражающимися через полные эллиптические интегралы первого и второго рода; коэффициенты при нечётных степенях  $x, y$  окажутся равными нулю — они представляются интегралами, обращающимися в нуль, так как соответствующие подинтегральные функции будут менять знак при замене  $\lambda$  на  $\lambda + \pi$ .

Выражение перемещения  $\omega(x, y, 0)$  в точках площадки соприкасания имеет вид

$$\omega(x, y, 0) = \frac{m-1}{8mJ} p_0 \sum_{k=0}^n \frac{(2k+1)! \alpha_k}{2^{2k} (k!)^2} \int_0^{2\pi} \left( L + \frac{\Phi_1^2}{\Phi_2} \right)^{k+1} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Phi_2}}. \quad (7.38)$$

Равнодействующая давлений определится из уравнения статики

$$P = p_0 \sum_{k=0}^n \alpha_k \int_{\Omega} \int_{\Omega} L^{k+\frac{1}{2}} d\sigma = p_0 \sum_{k=0}^n \alpha_k \int_{\Omega} \int_{\Omega} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{k+\frac{1}{2}} dx dy.$$

Для вычисления интегралов производим замену переменных

$$x = ar \cos \varphi, \quad y = br \sin \varphi$$

с якобианом  $J = abr$ . Пределы интегрирования по переменным  $r$  и  $\varphi$  будут соответственно  $(0, 1)$  и  $(0, 2\pi)$ . Получаем:

$$P = p_0 ab \sum_{k=0}^n \alpha_k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-r^2)^{k+\frac{1}{2}} r dr = 2\pi p_0 ab \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{2k+3}. \quad (7.39)$$

Свободный (не зависящий от  $x$  и  $y$ ) член выражения (7.38) легко находится; он равен

$$\delta = \frac{m-1}{8mJ} p_0 \sum_{k=0}^n \frac{(2k+1)! \alpha_k}{2^{2k} (k!)^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Phi_2}}$$

или

$$\delta = \frac{m-1}{4mJ} \frac{P}{\pi ab} K(e) \frac{\sum_{k=0}^n \frac{(2k+1)! \alpha_k}{2^{2k} (k!)^2}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{2k+3}}. \quad (7.40)$$

Выражение  $\omega(x, y, 0)$  может быть представлено в виде

$$\omega = \delta - \frac{P(m-1)}{mG\pi ab} b\varphi(x, y), \quad (7.41)$$

где  $\varphi(x, y)$  — полином степени  $(n+1)$  относительно  $x^2$  и  $y^2$ , не содержащий свободного члена

$$\varphi(x, y) = \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{m_1, m_2} \beta_{m_1, m_2} x^{2m_1} y^{2m_2},$$

причём суммирование ведётся по целым неотрицательным числам  $m_1$  и  $m_2$ , дающим в сумме  $s$ ; например, при  $s=1$  имеется два коэффициента  $\beta_{01}, \beta_{10}$ , при  $s=2$  — три коэффициента  $\beta_{20}, \beta_{11}, \beta_{02}$  и т. д. Всего полином содержит

$$2 + 3 + \dots + (n+2) = \frac{(n+1)(n+4)}{2} \quad (7.42)$$

коэффициентов  $\beta_{m_1, m_2}$ , выражающихся через эксцентриситет  $e$  и  $n$  отношений коэффициентов

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \dots, \frac{\alpha_n}{\alpha_0}. \quad (7.43)$$

Назначим два размера, характеризующих поверхность  $b\varphi(x, y)$ ; через отношение этих размеров определится эксцентриситет  $e$ , а по одному из них и отношению среднего давления  $\frac{P}{\pi ab}$  к модулю  $G$  найдём величину  $b$  (или  $a$ ). Назначение двух размеров потребует составления двух уравнений, связывающих коэффициенты  $\beta_{m_1, m_2}$ . Остающиеся

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+4) - 2 = \frac{1}{2}n(n+5)$$

коэффициентов будут зависеть от  $n$  произвольных параметров (7.43), варьируя которые, можно получать поверхности  $\varphi(x, y)$  различных форм. Каждая из выбранных поверхностей может быть принята за форму прижимающего конца жёсткого штампа эллиптического сечения. При действии на такой штамп осевой силы распределение давления по площадке соприкасания с упругим полупространством выразится формулой (7.31), в которой  $\epsilon_1, \dots, \alpha_n$  будут определены выбранной формой поверхности. Осевое перемещение штампа  $\delta$  найдётся по соотношению (7.40).

Приведённое решение основывается на предположении теории потенциала, гласящем, что значение потенциала в точках эллиптической пластинки представляется полиномом степени  $k + \frac{1}{2}$  от  $x^2$  и  $y^2$ , если плотность заряда изменяется пропорционально  $L^{k + \frac{1}{2}}$ .

Вычисление интегралов, входящих в выражение (7.37), значительно упрощается в случае круговой площадки соприкасания ( $a = b$ ). Тогда, полагая  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , получим:

$$\Phi_2 = \frac{1}{a^2}, \quad L + \frac{\Phi_1^3}{\Phi_2} = 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \sin^2(\varphi - \lambda), \quad (7.44)$$

откуда следует, что

$$\int_0^{2\pi} \left(L + \frac{\Phi_1^3}{\Phi_2}\right)^{k+1} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Phi_2}} = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \sin^2 \lambda\right)^{k+1} d\lambda = 2\pi a p_{k+1} \left(\frac{\rho^2}{a^2}\right), \quad (7.45)$$

причём полиномы

$$p_s(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - x \sin^2 \lambda)^s d\lambda \quad (7.46)$$

при  $s$  целом легко вычисляются:

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x, \quad p_2(x) = 1 - x + \frac{3}{8}x^2 \text{ и т. д.} \quad (7.47)$$

Выражение перемещения (7.38) принимает вид

$$w(x, y, 0) = \frac{m-1}{4mG} \rho_0 \pi a \sum_{k=0}^n \frac{(2k+1)!}{2^{2k} (k!)^2} \alpha_k p_{k+1} \left(\frac{\rho^2}{a^2}\right). \quad (7.48)$$

5°. В случае круговой площадки вычисление может быть доведено до конца и при предположении, что распределение нагрузки пропорционально целой степени величины  $L$ . Так при

$$p = p_0 L \quad (7.49)$$

по (7.11) имеем:

$$\Theta(x, y, \lambda) = \frac{1}{2} p_0 \int_0^L \frac{(L-\varepsilon) d\varepsilon}{\sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_2 \varepsilon}} = \frac{p_0}{2 \sqrt{\Phi_2}} L^{3/2} \int_0^1 \frac{1-s}{\sqrt{\Psi+s}} ds. \quad (7.50)$$

Заметив, что

$$\int_0^1 \frac{1-s}{\sqrt{\Psi+s}} ds = \frac{2}{3} \left[ \sqrt{\Psi+s} (1-s) + 2(1+\Psi) \sqrt{\Psi+s} \right] \Big|_0^1 \doteq \frac{4}{3} (1+\Psi)^{3/2},$$

причём отброшены слагаемые, дающие нуль при выполнении интегрирования (7.2), находим:

$$\Theta(x, y, \lambda) = \frac{2p_0}{3} \frac{1}{\sqrt{\Phi_2}} \left(L + \frac{\Phi_1^3}{\Phi_2}\right)^{3/2} = \frac{2p_0 a}{3} \left[1 - \frac{\rho^2}{a^2} \sin^2(\varphi - \lambda)\right]^{3/2}.$$



По (7.2) имеем теперь \*):

$$\begin{aligned}\omega(x, y, 0) &= \frac{8p_0a}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \sin^2 \lambda\right)^{3/2} d\lambda = \\ &= \frac{8}{9} p_0a \left[2 \left(2 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) E\left(\frac{\rho}{a}\right) - \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) K\left(\frac{\rho}{a}\right)\right].\end{aligned}\quad (7.51)$$

При равномерном распределении нагрузки получили бы

$$\begin{aligned}\Theta(x, y, \lambda) &= \frac{p_0}{2\sqrt{\Phi_2}} L^{1/2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{\Psi+s}} = \frac{p_0}{\sqrt{\Phi_2}} L^{1/2} \sqrt{\Psi+s} \Big|_0^1 \doteq \\ &= \frac{p_0}{\sqrt{\Phi_2}} \sqrt{L + \frac{\Phi_1^2}{\Phi_2}} = p_0a \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2} \sin^2(\varphi - \lambda)},\end{aligned}$$

и по (7.2) приходим к уже ранее найденному соотношению (6.35):

$$\omega(x, y, 0) = 4p_0a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2} \sin^2 \lambda} d\lambda = 4p_0a E\left(\frac{\rho}{a}\right).$$

### § 8. Напряжённое состояние в упругом полупространстве при заданных на границе внешних силах

1°. В § 5 был рассмотрен частный случай этой задачи, когда внешние силы перпендикулярны к граничной плоскости  $xu$ . Теперь остаётся рассмотреть случай сил, действующих в этой плоскости:

$$\text{при } z = 0, \quad \tau_{zx} = \tau_{zx}^0(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^0(x, y), \quad \sigma_z = 0. \quad (8.1)$$

Введём в рассмотрение функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , гармонические в полупространстве  $z > 0$  и такие, что значения их нормальных производных при  $z \rightarrow +0$  пропорциональны заданным значениям  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{yz}$  в точках границы:

$$G \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)_{z \rightarrow +0} = \begin{cases} \tau_{zx}^0(x, y) & \text{в области } \Omega, \\ 0 & \text{вне } \Omega, \end{cases} \quad (8.2)$$

$$G \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)_{z \rightarrow +0} = \begin{cases} \tau_{yz}^0(x, y) & \text{в области } \Omega, \\ 0 & \text{вне } \Omega, \end{cases} \quad (8.3)$$

где  $\Omega$  — область нагружения плоскости  $z = 0$

\*) А. М. Журавский, Справочник, стр. 38.

Мы видели выше [см. (5.18) и (5.21)], что эти функции могут быть представлены как потенциалы простых слоёв с плотностями, соответственно равными

$$-\frac{1}{2\pi G} \tau_{zx}^0 \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2\pi G} \tau_{yz}^0.$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{1}{2\pi G} \int_{\Omega} \int \frac{\tau_{zx}^0(x', y')}{R'} d\omega', \\ \varphi_2 &= -\frac{1}{2\pi G} \int_{\Omega} \int \frac{\tau_{yz}^0(x', y')}{R'} d\omega', \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

где

$$R' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} d\omega' = dx' dy'.$$

Ниже понадобится введение ещё пары гармонических функций:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= -\frac{1}{2\pi G} \int_{\Omega} \int \tau_{zx}^0(x', y') \ln(R' + z) d\omega', \\ \psi_2 &= -\frac{1}{2\pi G} \int_{\Omega} \int \tau_{yz}^0(x', y') \ln(R' + z') d\omega', \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

связанных с первыми очевидными соотношениями

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \varphi_1, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = \varphi_2. \quad (8.6)$$

Рассмотрим теперь гармонический вектор с проекциями  $u_0, v_0, w_0$ :

$$\Delta u_0 = 0, \quad \Delta v_0 = 0, \quad \Delta w_0 = 0.$$

Такой вектор по (9.5) главы 1 представляет частное решение уравнений теории упругости в перемещениях, если его дивергенция равна нулю:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0. \quad (8.7)$$

Соответствующие касательные напряжения  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{yz}$  будут:

$$\frac{1}{G} \tau_{zx} = \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \frac{1}{G} \tau_{yz} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial z}.$$

Потребуем, чтобы они принимали заданные значения (8.1) при  $z=0$ ; это по (8.2) и (8.3) приводит к условиям

$$\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}, \quad (8.8)$$

которые можно считать имеющими место во всём полупространстве  $z > 0$ , так как в обеих частях этих соотношений стоят гармонические функции. Итак, можно написать:

$$u_0 = \varphi_1 + \int_z^{\infty} \frac{\partial w_0}{\partial x} dz, \quad v_0 = \varphi_2 + \int_z^{\infty} \frac{\partial w_0}{\partial y} dz, \quad (8.9)$$

и остаётся удовлетворить ещё условию (8.7); оно даёт:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \int_z^{\infty} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) dz + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0$$

или

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \int_z^{\infty} \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} dz + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial w_0}{\partial z} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right), \quad (8.10)$$

так как  $\frac{\partial w_0}{\partial z}$  при  $z \rightarrow \infty$  должно стремиться к нулю.

По (8.6) теперь можно написать:

$$w_0 = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right). \quad (8.11)$$

Итак, получено частное решение, удовлетворяющее двум первым условиям (8.1) и имеющее по (8.9) и (8.11) вид

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \varphi_1 - \frac{1}{2} \int_z^{\infty} \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} \right) dz, \\ v_0 &= \varphi_2 - \frac{1}{2} \int_z^{\infty} \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \right) dz, \\ w_0 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

Последнее условие (8.1) — требование обращения в нуль нормального напряжения  $\sigma_z$  при  $z = 0$ , — конечно, не удовлетворено. Именно, соответствующее (8.12) нормальное напряжение вследствие (8.7) равно

$$\sigma_z = 2G \frac{\partial w_0}{\partial z} = -G \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right). \quad (8.13)$$

Поэтому остаётся к (8.12) добавить решение  $u^*$ ,  $v^*$ ,  $w^*$ , соответствующее крайевым условиям:

при  $z = 0$

$$\tau_{zx} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_z = G \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right)_{z=0}. \quad (8.14)$$

Но эта задача была полностью решена в § 5. Нужно ввести в рассмотрение гармоническую функцию  $\omega$ , которая согласно (5.33) находится по условию

$$G \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right)_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)_{z \rightarrow +0}. \quad (8.15)$$

Из него и (8.6) следует, что в полупространстве  $z > 0$

$$\omega = 2\pi G \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right). \quad (8.16)$$

По (5.25) далее получаем:

$$\omega_1 = -2\pi G \int_z^\infty \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) dz. \quad (8.17)$$

Соответствующие перемещения могут быть определены по (5.27):

$$\left. \begin{aligned} u^* &= -\frac{1}{2} z \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} \right) + \frac{m-2}{2m} \int_z^\infty \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} \right) dz, \\ v^* &= -\frac{1}{2} z \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \right) + \frac{m-2}{2m} \int_z^\infty \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \right) dz, \\ \omega^* &= \frac{m-1}{m} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} z \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

Складывая (8.12) и (8.18), найдём теперь решение поставленной задачи:

$$\left. \begin{aligned} u &= \varphi_1 - \frac{1}{2} z \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} \right) - \frac{1}{m} \int_z^\infty \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} \right) dz, \\ v &= \varphi_2 - \frac{1}{2} z \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{m} \int_z^\infty \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \right) dz, \\ \omega &= \frac{m-2}{2m} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} z \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$

Напряжения на площадках, перпендикулярных к оси  $z$ , будут:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= G \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right], \\ \tau_{yz} &= G \left[ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right], \\ \tau_z &= -Gz \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right), \end{aligned} \right\} \quad (8.20)$$

и по (8.2) и (8.3) легко проверить, что полученное решение удовлетворяет поставленным краевым условиям (8.1).

2°. В качестве примера рассмотрим действие сосредоточенной силы в плоскости, ограничивающей полупространство; располагая начало координат в точке приложения силы и направляя вдоль неё ось  $x$ , имеем:

$$\varphi_1 = \frac{S}{2\pi GR}, \quad \psi_1 = \frac{S}{2\pi G} \ln(R+z), \quad \varphi_2 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad (8.21)$$

причём перемена знака в выражениях  $\varphi_1$  и  $\psi_1$  [см. (8.4)] обусловлена тем, что касательное усилие, направленное по положительной оси  $x$ , надо считать отрицательным, так как внешняя нормаль к полупространству имеет направление отрицательной оси  $z$ .

Вычисляем далее:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= -\frac{Sx}{2\pi GR^3}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x} &= \frac{Sx}{2\pi GR(R+z)}, \\ \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} &= \frac{S}{2\pi G} \left[ \frac{1}{R(R+z)} - \frac{x^2(2R+z)}{R^3(R+z)^2} \right], & \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} &= -\frac{Sxy}{2\pi GR^3(R+z)^2}. \end{aligned}$$

Теперь имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} z \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} &= \frac{S}{4\pi G} \left[ \frac{1}{R} - \frac{x^2}{R^3} - \frac{1}{R+z} + \frac{x^2}{R(R+z)^2} \right], \\ \frac{1}{2} z \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} &= -\frac{Sxy}{4\pi G} \left( \frac{1}{R^3} - \frac{1}{R(R+z)^2} \right), \\ \int_z^\infty \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} dz &= \frac{S}{2\pi G} \left( \frac{1}{R+z} - \frac{x^2}{R(R+z)^2} \right), \\ \int_z^\infty \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} dz &= -\frac{Sxy}{2\pi G} \frac{1}{R(R+z)^2}, \end{aligned}$$

и подстановка в (8.19) даёт выражения перемещений

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{S}{4\pi G} \left[ \frac{1}{R} + \frac{x^2}{R^3} + \frac{m-2}{m} \left( \frac{1}{R+z} - \frac{x^2}{R(R+z)^2} \right) \right], \\ v &= \frac{Sxy}{4\pi G} \left[ \frac{1}{R^3} - \frac{m-2}{m} \frac{1}{R(R+z)^2} \right], \\ w &= \frac{S}{4\pi G} \left[ \frac{xz}{R^3} + \frac{m-2}{m} \frac{x}{R(R+z)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8.22)$$

В сферических координатах эти выражения могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} u_R &= \frac{S}{\pi j R} \left[ \frac{m-1}{m} \cos \varphi \sin \vartheta - \frac{m-2}{2m} \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{1 + \cos \vartheta} \right], \\ u_\vartheta &= \frac{S}{\pi j R} \left[ \frac{3m-4}{4m} \cos \varphi \cos \vartheta - \frac{m-2}{2m} \cos \varphi + \frac{m-2}{4m} \frac{\cos \varphi}{1 + \cos \vartheta} \right], \\ u_\varphi &= -\frac{S}{\pi j R} \left[ \frac{1}{4} \sin \varphi + \frac{m-2}{4m} \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \vartheta} \right]. \end{aligned} \right\} (8.23)$$

Рассматриваемое решение может быть представлено также в виде суммы трёх решений:

а) решения (1.26), соответствующего действию сосредоточенной силы в безграничной упругой среде,

$$\left. \begin{aligned} u_R &= D_1 \frac{\sin \vartheta \cos \varphi}{R}, & u_\vartheta &= D_1 \frac{3m-4}{4(m-1)} \frac{\cos \vartheta \cos \varphi}{R}, \\ u_\varphi &= -D_1 \frac{3m-4}{4(m-1)} \frac{\sin \varphi}{R} \end{aligned} \right\} (8.24)$$

при

$$D_1 = \frac{S(m-1)}{\pi j m}; \quad (8.25)$$

б) решения (4.14), соответствующего особой линии центров вращения,

$$u_R = D_2 \frac{\sin \vartheta \cos \varphi}{R(1 + \cos \vartheta)}, \quad u_\vartheta = D_2 \frac{\cos \varphi}{R}, \quad U_\varphi = -D_2 \frac{\sin \varphi}{R} \quad (8.26)$$

при

$$D_2 = -\frac{S}{\pi j} \frac{m-2}{2m}; \quad (8.27)$$

в) решения

$$u_R = 0, \quad u_\vartheta = -D_3 \frac{\cos \varphi}{R(1 + \cos \vartheta)}, \quad u_\varphi = D_3 \frac{\sin \varphi}{R(1 + \cos \vartheta)}, \quad (8.28)$$

где

$$D_3 = -\frac{S}{\pi j} \frac{m-2}{4m}. \quad (8.29)$$

Последнее решение можно было бы получить, рассматривая особенность, называемую «двойной линией центров расширения». Соответствующие перемещениям (8.28) напряжения будут:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= 0, & \sigma_\vartheta &= -\sigma_\varphi = -2GD_3 \frac{(1 - \cos \vartheta) \cos \varphi}{R^2(1 + \cos \vartheta) \sin \vartheta}, \\ \tau_{\vartheta\varphi} &= 2GD_3 \frac{(1 - \cos \vartheta) \sin \varphi}{R^2(1 + \cos \vartheta) \sin \vartheta}, & \tau_{R\varphi} &= -2GD_3 \frac{\sin \varphi}{R^2(1 + \cos \vartheta)}, \\ \tau_{R\vartheta} &= 2GD_3 \frac{\cos \varphi}{R^2(1 + \cos \vartheta)}. \end{aligned} \right\} (8.30)$$

Выражения напряжений, отвечающих перемещениям (8.24) и (8.26), приведены выше — см. (1.27) и (4.15). По этим формулам и (8.30) нетрудно составить выражения для напряжений в рассматриваемой задаче о сосредоточенной силе, действующей вдоль границы упругого полупространства.

3°. Имея решения (8.22) и (5.7), нетрудно составить выражения перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$  точек упругого полупространства, вызываемых действием сосредоточенной силы  $S$ , приложенной в точке плоскости, ограничивающей полупространство. Принимая эту точку за начало координат и обозначая через  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  проекции силы на оси координат (ось  $z$  направлена внутрь полупространства), придём к выражениям

$$\begin{aligned} 4\pi Gu &= S_x \left[ \frac{1}{R} + \frac{x^2}{R^3} + \frac{m-2}{m} \left( \frac{1}{R+z} - \frac{x^2}{R(R+z)^2} \right) \right] + \\ &+ S_y \left( \frac{xy}{R^3} - \frac{m-2}{m} \frac{xy}{R(R+z)^2} \right) + \\ &+ S_z \left( \frac{xz}{R^3} - \frac{m-2}{m} \frac{x}{R(R+z)} \right), \end{aligned} \quad (8.31)$$

$$\begin{aligned} 4\pi Gv &= S_x \left( \frac{xy}{R^3} - \frac{m-2}{m} \frac{xy}{R(R+z)^2} \right) + \\ &+ S_y \left[ \frac{1}{R} + \frac{y^2}{R^3} + \frac{m-2}{m} \left( \frac{1}{R+z} - \frac{y^2}{R(R+z)^2} \right) \right] + \\ &+ S_z \left( \frac{yz}{R^3} - \frac{m-2}{m} \frac{y}{R(R+z)} \right), \end{aligned} \quad (8.32)$$

$$\begin{aligned} 4\pi Gw &= S_x \left( \frac{xz}{R^3} + \frac{m-2}{m} \frac{x}{R(R+z)} \right) + \\ &+ S_y \left( \frac{yz}{R^3} + \frac{m-2}{m} \frac{y}{R(R+z)} \right) + \\ &+ S_z \left( \frac{2(m-1)}{m} \frac{1}{R} + \frac{z^2}{R^3} \right). \end{aligned} \quad (8.33)$$

Эти соотношения могут быть записаны в векторной форме:

$$\begin{aligned} 4\pi Gu &= \frac{3m-4}{m} \frac{S}{R} + \frac{R(S \cdot R)}{R^3} + \frac{2(m-2)}{m} (S \times k) \times \text{grad} \ln(R+z) - \\ &- \frac{m-2}{m} (S \cdot \text{grad}) \text{grad} [z \ln(R+z) - R], \end{aligned} \quad (8.34)$$

где  $k$  — единичный вектор оси  $z$ . Первые два слагаемых по (1.19) представляют действие сосредоточенной силы  $S$  в безграничном упругом пространстве; третье слагаемое согласно (4.7) является решением, соответствующим особой линии центров вращения, расположенных по отрицательной полуоси  $z$ . Наконец, последнее слагаемое выражает действие двойной линии центров расширения, также расположенной на отрицательной полуоси  $z$ .

Имеем:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{S} \times \mathbf{k}) \times \text{grad} \ln(R+z) &= \mathbf{k} [\mathbf{S} \cdot \text{grad} \ln(R+z)] - \\
 &\quad - \mathbf{S} [\mathbf{k} \cdot \text{grad} \ln(R+z)], \\
 \mathbf{k} \cdot \text{grad} \ln(R+z) &= \frac{\partial \ln(R+z)}{\partial z} = \frac{1}{R},
 \end{aligned}$$

вследствие чего выражение (8.34) может быть представлено также в виде

$$\begin{aligned}
 4\pi G u &= \frac{\mathbf{S}}{R} + \frac{\mathbf{R}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{R})}{R^3} + \\
 &\quad + \frac{m-2}{m} (\mathbf{S} \cdot \text{grad}) \{2\mathbf{k} \ln(R+z) - \text{grad} [z \ln(R+z) - R]\} \quad (8.35)
 \end{aligned}$$

или

$$4\pi G u = \frac{\mathbf{S}}{R} + \frac{\mathbf{R}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{R})}{R^3} + \frac{m-2}{m} (\mathbf{S} \cdot \text{grad}) \left[ \frac{i x + j y}{R+z} + \mathbf{k} \ln(R+z) \right]. \quad (8.36)$$

При действии распределённой по площади  $\Omega$  нагрузки  $\mathbf{F}_n(x, y)$  перемещения в упругом полупространстве определяются из соотношения

$$\begin{aligned}
 4\pi G u &= - \int_{\Omega} \int \left\{ \frac{\mathbf{F}'_n}{R'} + \frac{\mathbf{R}'(\mathbf{F}'_n \cdot \mathbf{R}')}{R'^3} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m-2}{m} (\mathbf{F}'_n \cdot \text{grad}) \left[ \frac{i(x-x')}{R'+z} + \frac{j(y-y')}{R'+z} + \mathbf{k} \ln(R'+z) \right] \right\} d\sigma', \quad (8.37)
 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{F}'_n = \mathbf{F}_n(x', y')$  — вектор, проекции которого на оси  $x, y, z$  равны соответствующим напряжениям  $\tau_{xy}^0(x', y')$ ,  $\tau_{yz}^0(x', y')$ ,  $\sigma_z^0(x', y')$  на площадке загрузки,  $\mathbf{R}'$  — вектор, соединяющий точку истока  $(x', y', 0)$  с точкой наблюдения  $(x, y, z)$ .

4°. В частном случае загрузки касательными усилиями  $t(x', y') = -\tau_{xz}^0(x', y')$ , действующими по оси  $x$ , выражения перемещений легко составить непосредственно по (8.22). Ограничиваясь рассмотрением перемещений точек загруженной площадки, получим:

$$\left. \begin{aligned}
 2\pi G u &= \int_{\Omega} \int \frac{t(x', y')}{\rho} d\sigma' - \frac{1}{m} \int_{\Omega} \int \frac{(y-y')^2}{\rho^3} t(x', y') d\sigma', \\
 2\pi G v &= \frac{1}{m} \int_{\Omega} \int \frac{(x-x')(y-y')}{\rho^3} t(x', y') d\sigma', \\
 2\pi G w &= \frac{m-2}{2m} \int_{\Omega} \int \frac{x-x'}{\rho^2} t(x', y') d\sigma',
 \end{aligned} \right\} \quad (8.38)$$

где

$$\rho^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2,$$



причём точка наблюдения  $(x, y)$  принадлежит области  $\Omega$ . Как в § 7, введя полярную систему координат  $\rho, \lambda$  с началом в точке наблюдения, получим:

$$2\pi Gu = \int_0^{2\pi} \Theta(x, y, \lambda) d\lambda - \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} \Theta(x, y, \lambda) \sin^2 \lambda d\lambda, \quad (8.39)$$

$$2\pi Gv = \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} \Theta(x, y, \lambda) \sin \lambda \cos \lambda d\lambda, \quad (8.40)$$

$$2\pi Gw = \frac{m-2}{2m} \int_0^{2\pi} \Theta(x, y, \lambda) \cos \lambda d\lambda, \quad (8.41)$$

причём  $\Theta(x, y, \lambda)$  определяется по (7.3):

$$\Theta(x, y, \lambda) = \int_0^{\rho_0(\lambda)} t(x', y') d\rho. \quad (8.42)$$

В случае эллиптической площадки нагружения следует при вычислении перемещений  $u, v$  удержать в выражении  $\Theta(x, y, \lambda)$  слагаемые, не изменяющие знака при замене  $\lambda$  на  $\lambda + \pi$ . Это позволяет распространить результаты вычисления § 7 на случай касательного нагружения. Так, предполагая, что усилия  $t(x, y)$  распределены по закону [см. (7.12)]

$$t(x, y) = \frac{t_0}{\sqrt{L}}, \quad (8.43)$$

причём их равнодействующая  $T$  по (7.13) равна  $2\pi abt_0$ , получим выражение (7.17) для  $\Theta(x, y, \lambda)$  и по (8.40) найдём:

$$Gu = t_0 \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Phi_2}} - \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \lambda d\lambda}{\sqrt{\Phi_2}} \right], \quad v = 0. \quad (8.44)$$

После приведения интегралов к нормальной форме Лежандра придём к соотношению:

$$u = \begin{cases} \frac{T}{4Ga} \chi(e), & a > b, \\ \frac{T}{4Gb} \chi(e), & a < b, \end{cases} \quad (8.45)$$

где введено обозначение

$$\chi(e) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left\{ K(e) + \frac{1}{me^2} [(1 - e^2) K(e) - E(e)] \right\}, & a > b, \\ \frac{2}{\pi} \left\{ K(e) - \frac{1}{me^2} [K(e) - E(e)] \right\}, & a < b. \end{cases} \quad (8.46)$$

Первый случай соответствует действию силы  $T$  по направлению большой полуоси эллипса, а второй — малой полуоси; во второй формуле (8.46) эксцентриситет  $e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$ . График зависимости величины  $\chi(e)$  от отношения  $a^2/b^2$  для трёх значений коэффициента Пуассона  $\frac{1}{m}$  приведён на рис. 13.

Перемещение  $u$  оказывается постоянным по всей площадке; поэтому, если при перемещении по плоскости, ограничивающей упругое

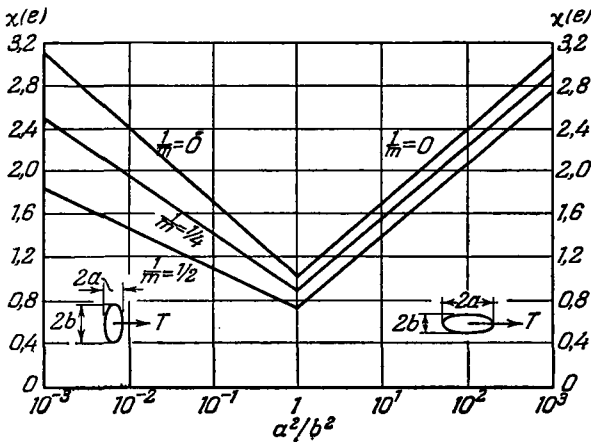


Рис. 13.

полупространство, жёсткого эллиптического штампа, прижатого его плоским торцом к этой плоскости, можно было бы предотвратить проскальзывание частиц среды относительно штампа, то было бы осуществлено распределение касательных напряжений на площадке соприкосновения по закону (8.43). Фактически проскальзывание в области, примыкающей к контуру площадки, должно иметь место, так как этот закон распределения касательных напряжений предполагает их неограниченное возрастание при приближении к контуру.

5°. Рассмотрим теперь случай распределения касательных напряжений по закону

$$t = t_0 \sqrt{L}. \quad (8.47)$$

Перемещения  $u$ ,  $v$  точек загруженной эллиптической площадки  $\Omega$  определим по (7.26), (8.39) и (8.40). Повторив преобразование, которое в § 7 привело к формуле (7.27), придём к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} 2Gu &= t_0 \left\{ \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Phi_2}} - \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \lambda d\lambda}{\sqrt{\Phi_2}} \right] - \frac{x^2}{a^2 b^2} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \lambda d\lambda}{\Phi_2 \sqrt{\Phi_2}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 \lambda d\lambda}{\Phi_2 \sqrt{\Phi_2}} \right] - \frac{y^2}{a^2 b^2} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \lambda d\lambda}{\Phi_2 \sqrt{\Phi_2}} - \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \lambda \sin^2 \lambda d\lambda}{\Phi_2 \sqrt{\Phi_2}} \right] \right\}, \quad (8.48) \\ 2Gv &= \frac{t_0}{m} \frac{2xy}{a^2 b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \lambda \sin^2 \lambda}{\Phi_2 \sqrt{\Phi_2}} d\lambda. \end{aligned} \right\}$$

В дальнейшем заменим максимальное касательное напряжение  $t_0$  его выражением через равнодействующую касательную силу  $T$ :

$$t_0 = \frac{3T}{2\pi ab}. \quad (8.49)$$

После приведения интегралов к нормальной форме Лежандра придём к приводимым ниже выражениям перемещений: при  $a > b$ , т. е. при действии силы по направлению большой полуоси эллипса,

$$u = \frac{3T}{4\pi G a} \left\{ \frac{\pi}{2} \chi(e) - \frac{x^2}{a^2} \left[ \frac{K(e) - E(e)}{e^2} + \frac{1}{m e^4} (2(1 - e^2) K(e) - (2 - e^2) E(e)) \right] - \frac{y^2}{b^2} \left[ \frac{E(e) - (1 - e^2) K(e)}{e^2} + \frac{1 - e^2}{m e^4} (2E(e) - (2 - e^2) K(e)) \right] \right\}, \quad (8.50)$$

$$v = -\frac{3T}{2\pi G m} \frac{xy}{a^2 b} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^4} [2E(e) - (2 - e^2) K(e)]; \quad (8.51)$$

если же сила  $T$  имеет направление малой полуоси ( $a < b$ ), то

$$u = \frac{3T}{4\pi G b} \left\{ \frac{\pi}{2} \chi(e) - \frac{x^2}{a^2} \left[ \frac{E(e) - (1 - e^2) K(e)}{e^2} + \frac{1}{m e^4} (2(1 - e^2) K(e) - (2 - e^2) E(e)) \right] - \frac{y^2}{b^2} \left[ \frac{K(e) - E(e)}{e^2} + \frac{1}{m e^4} (2E(e) - (2 - e^2) K(e)) \right] \right\}, \quad (8.52)$$

$$v = -\frac{3T}{2\pi G m} \frac{xy}{ab^2} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^4} [2E(e) - (2 - e^2) K(e)]. \quad (8.53)$$

В п. 3° § 7 было показано, что по поверхности соприкосновения штампа эллиптического поперечного сечения, прижатого концом, очерченным по поверхности эллиптического параболоида, к плоскости,

ограничивающей упругое полупространство, возникают нормальные напряжения  $P(x, y) = -\sigma_z^0$ , распределённые по закону Герца (7.22). Поверхность соприкосновения может быть принята при этом с достаточным приближением за эллиптическую площадку, эксцентриситет и полуоси которой определяются через радиусы кривизны параболоида в его наименьшей точке и прижимающую силу  $P$  с помощью соотношений (7.23), (7.29), (7.30).

Предположим теперь, что на штамп действует сила, направленная по оси  $x$  (с линией действия, расположенной в плоскости  $z = 0$ ) и равная по величине предельной величине силы трения

$$T = fP, \quad (8.54)$$

где  $f$  — коэффициент трения. Равновесие штампа будет сохранено за счёт касательных напряжений, создаваемых распределением сил трения, достигающих в каждой точке площадки соприкосновения своей предельной величины

$$t = fp \quad (\text{или } \tau_{xz}^0 = f\sigma_z^0). \quad (8.55)$$

Будем пренебрегать перемещениями  $u$ ,  $v$ , создаваемыми прижимающей силой  $P$ , а также перемещениями  $w$ , обусловленными действием касательной силы  $T$ . Тогда, сопоставляя (8.55) с (7.22) и (8.43), придём к заключению, что перемещения частиц, лежащих на площадке соприкосновения, вызванные действием силы  $T$ , равной предельному значению (8.54) силы трения, слагаются из перемещения штампа  $u_0$  под действием этой силы, равного перемещению центра площадки соприкосновения, и проскальзываний этих частиц относительно штампа, определяемых слагаемыми в выражениях (8.50) и (8.52), зависящими от  $x$  и  $y$ , а также перемещениями  $v$ .

Величина  $u_0$  определяется выражениями

$$u_0 = \begin{cases} \frac{3fP}{8Ga} \chi(e), & a > b, \\ \frac{3fP}{8Gb} \chi(e), & a < b, \end{cases} \quad (8.56)$$

причём  $\chi(e)$  имеет приведённое выше значение (8.45).

Величина  $fP$  представляет максимальное значение касательной силы, при которой ещё имеет место равновесие штампа. При действии же касательной силы

$$T < fP \quad (8.57)$$

касательные напряжения, распределённые по площади контакта на части её, примыкающей к контуру, достигнут предельной величины (8.55). В связи с этим разобьём площадку  $\Omega$  на «ядро»  $\Omega_1$ , представляющее площадку, ограниченную эллипсом  $L^* = 0$ , где

$$L^* = 1 - \frac{x^2}{a^2\lambda^2} - \frac{y^2}{b^2\lambda^2}, \quad (8.58)$$

и кольцо  $\Omega_2$  между этим эллипсом и эллипсом  $L = 0$ . Распределение касательных напряжений по площади  $\Omega$  зададим теперь соотношениями

$$t(x, y) = -\tau_{xz}^0 = \begin{cases} fp(x, y) = -f\alpha_2^0 & \text{на } \Omega_2, \\ fp(x, y) - t'_0 \sqrt{L^*} & \text{на } \Omega_1, \end{cases} \quad (8.59)$$

причём распределение нормальных напряжений следует закону (7.22) Очевидно, что задание (8.59) можно также представить в форме

$$t(x, y) = \begin{cases} fp(x, y) & \text{на } \Omega, \\ -t'_0 \sqrt{L^*} & \text{на } \Omega_1, \end{cases} \quad (8.60)$$

На поверхности кольца  $\Omega_2$  касательные напряжения достигают предельной величины; поэтому имеется проскальзывание частиц среды на этой части поверхности соприкосновения штампа с упругим полупространством. Наоборот, по площади ядра  $\Omega_1$  касательные напряжения не достигают их предельной величины, обусловленной силами трения, и по этой площади скольжение частиц должно отсутствовать. Это и позволит определить далее границу ядра  $\Omega_1$ , т. е. величину параметра  $\lambda$ .

Равнодействующая касательная сила, действующая на штамп, может быть выражена по (8.60):

$$\begin{aligned} T &= \iint_{\Omega} t(x, y) \, do = f \iint_{\Omega} p(x, y) \, do - t'_0 \iint_{\Omega_1} \sqrt{L^*} \, do = \\ &= fP - \frac{2\pi}{3} ab\lambda^2 t'_0; \end{aligned} \quad (8.61)$$

отсюда получим:

$$T' = \frac{2\pi}{3} t'_0 ab\lambda^2 = fP - T. \quad (8.62)$$

Теперь остаётся определить  $\lambda$  так, чтобы при совокупном действии сил  $fP$  и  $(-T')$  перемещения  $v$  точек ядра  $\Omega_1$  обращались в нуль (равно как и слагаемые перемещения  $u$ , зависящие от координат  $x, y$ ). Учитывая, что эксцентриситет  $e$  эллипса  $L^* = 0$  равен эксцентриситету эллипса  $L = 0$ , придём по (8.51) к соотношению

$$-\frac{fP}{a^2b} + \frac{T'}{a^2b\lambda^3} = 0 \quad \text{или} \quad fP - \frac{1}{\lambda^3} (fP - T) = 0, \quad (8.63)$$

откуда получим:

$$\lambda = \left(1 - \frac{T}{fP}\right)^{1/3}. \quad (8.64)$$

К этому же соотношению пришли бы, взяв для  $v$  выражение (8.53) или потребовав обращения в нуль в выражениях (8.50) и (8.52) слагаемых, зависящих от  $x, y$ .

Выражение перемещения  $u_0$  частиц упругой среды, расположенных на площади ядра  $\Omega_1$ , по (8.50), т. е. при  $a > b$ , будут теперь определяться равенством

$$u_0 = \frac{3fP}{8Ga} \chi(e) - \frac{3T'}{8Ga\lambda} \chi(e)$$

или

$$u_0 = \frac{3fP}{8Ga} \chi(e) \left[ 1 - \frac{1}{\lambda} \left( 1 - \frac{T}{fP} \right) \right] = \frac{3fP}{8Ga} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{T}{fP} \right)^{1/3} \right] \chi(e).$$

Точно так же вычисляется значение  $u$  при  $a < b$ . Итак, получаем:

$$u = \begin{cases} \frac{3fP}{8Ga} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{T}{fP} \right)^{1/3} \right] \chi(e), & a > b, \\ \frac{3fP}{8Gb} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{T}{fP} \right)^{1/3} \right] \chi(e), & a < b. \end{cases} \quad (8.65)$$

Эта величина определяет горизонтальное перемещение штампа, прижатого своим параболидоальным концом к упругой полуплоскости и нагруженного горизонтальной силой  $T$ , меньшей предельной величины силы трения  $fP$ . Штмп перемещается вместе с упруго-сдвигающимся ядром  $\Omega_1$  площадки соприкосновения; частицы на поверхности соприкосновения штампа  $\Omega$  с плоскостью, ограничивающей упругое полупространство, расположенные вне ядра  $\Omega_1$ , т. е. на кольце  $\Omega_2$ , проскальзывают относительно штампа. Распределение касательных усилий на поверхности соприкосновения определяется равенствами, следующими из (8.60), (8.62) и (8.65),

$$t(x, y) = \begin{cases} \frac{3fP}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} & \text{на } \Omega_2, \\ \frac{3fP}{2\pi ab} \left[ \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \sqrt{\left( 1 - \frac{T}{fP} \right)^{1/3} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right] & \text{на } \Omega_1. \end{cases} \quad (8.66)$$

## § 9. Сосредоточенная сила в упругом полупространстве

Начало координат расположим в некоторой точке плоскости, ограничивающей полупространство  $z > 0$ ; координаты точки приложения силы обозначим  $(0, 0, h)$  и рассмотрим случай, когда сила величины  $Q$  направлена вдоль положительной оси  $z$ .

Применим метод зеркального отображения; в точке  $(0, 0, -h)$  мысленно приложим силу, равную заданной, но направленную ей противоположно. Из соображений симметрии ясно, что при совокупном действии обеих сил на плоскости  $z = 0$  будут отсутствовать касательные напряжения  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{yz}$ , но появятся нормальные напряжения  $\sigma_z = \sigma_z^0(x, y)$ , которые могут быть легко определены по (1.23). Поэтому искомое решение мы получим, складывая три напряженных состояния:

а) напряжённое состояние, создаваемое в неограниченной упругой среде действием силы  $Q$ , приложенной в точке  $(0, 0, h)$ ;

б) напряжённое состояние, создаваемое действием силы такой же величины, направленной противоположно и приложенной в точке  $(0, 0, -h)$ ;

в) напряжённое состояние в упругом полупространстве  $z > 0$ , создаваемое нагрузкой, распределённой по плоскости  $z = 0$ , действующей нормально к ней и равной  $(-\sigma_z)$ .

Первое из этих напряжённых состояний получается при замене в формулах (1.22) и (1.23) буквы  $z$  на  $z - h$  и  $R$  на

$$R_1 = \sqrt{(z-h)^2 + x^2 + y^2} = \sqrt{(z-h)^2 + \rho^2}. \quad (9.1)$$

Второе получается при замене в указанных формулах  $z$  на  $z + h$ ,  $Q$  на  $(-Q)$  и  $R$  на

$$R_2 = \sqrt{(z+h)^2 + x^2 + y^2} = \sqrt{(z+h)^2 + \rho^2}. \quad (9.2)$$

Наконец, третье найдётся по формулам § 5, если определить гармоническую функцию  $\omega(x, y, z)$  из условия (5.34), приобретающего в рассматриваемом случае вид

$$\frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)_{z \rightarrow +0} = -\sigma_z^0(x, y). \quad (9.3)$$

При этом в соответствии со сказанным выше и по формулам (1.23) имеем:

$$\sigma_z^0(x, y) = \frac{Qh}{4\pi(m-1)} \left( \frac{m-2}{R_0^3} + \frac{3mh^2}{R_0^5} \right), \quad R_0 = \sqrt{h^2 + x^2 + y^2}. \quad (9.4)$$

Поэтому условие (9.3) приобретает вид

$$\left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)_{z \rightarrow +0} = -\frac{Qh}{2(m-1)} \left( \frac{m-2}{R_0^3} + \frac{3mh^2}{R_0^5} \right). \quad (9.5)$$

Рассмотрим гармоническую в полупространстве  $z > 0$  функцию

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= -\frac{Q}{2(m-1)} \left[ A \frac{z+h}{R_2^3} + B \left( \frac{1}{R_2^3} - \frac{3(z+h)^2}{R_2^5} \right) \right] = \\ &= \frac{Q}{2(m-1)} \left[ A \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R_2} \right) - B \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z+h}{R_2^3} \right) \right], \end{aligned} \quad (9.6)$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные.

При  $z = 0$  эта функция принимает значения

$$F(x, y, 0) = -\frac{Qh}{2(m-1)} \left[ \frac{A}{R_0^3} + \frac{B}{h} \left( \frac{1}{R_0^3} - \frac{3h^2}{R_0^5} \right) \right],$$

и достаточно принять

$$B = -mh, \quad A = 2(m-1), \quad (9.7)$$

чтобы краевые (на плоскости  $z = 0$ ) значения двух гармонических в полупространстве  $z > 0$  функций

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} \text{ и } F(x, y, z)$$

совпали; но это обозначает, что и при любом  $z > 0$

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = F(x, y, z) = Q \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R_2} \right) + \frac{mh}{2(m-1)} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z+h}{R_2^3} \right) \right], \quad (9.8)$$

отсюда в соответствии с (5.20) сразу же находим:

$$\omega = \frac{Q}{R_2} + \frac{mhQ}{2(m-1)} \frac{z+h}{R_2^3}. \quad (9.9)$$

Далее по (5.18) и (5.23) сразу же находим вторую гармоническую функцию  $\omega_1(x, y, z)$ , входящую в решение задачи

$$\omega_1 = Q \ln(R_2 + z + h) - \frac{Qmh}{2(m-1)} \frac{1}{R_2}. \quad (9.10)$$

Теперь можно составить по (1.22) и (5.27) выражения для перемещений

$$u_\rho = \frac{Qm\rho}{16\pi G(m-1)} \left( \frac{z-h}{R_1^3} - \frac{z+h}{R_2^3} \right) - \frac{1}{4\pi G} \left( z \frac{\partial \omega}{\partial \rho} + \frac{m-2}{m} \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} \right), \quad (9.11)$$

$$\omega = \frac{Qm}{16\pi G(m-1)} \left[ \frac{(z-h)^3}{R_1^3} - \frac{(z+h)^3}{R_2^3} + \frac{3m-4}{m} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] + \\ + \frac{m-1}{2\pi m G} \omega - \frac{z}{4\pi G} \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad (9.12)$$

где  $\omega$  и  $\omega_1$  определены выше — см. (9.9) и (9.10).

Легко составляются также выражения напряжений. Например,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{Q}{8\pi(m-1)} \left[ (m-2) \left( \frac{z-h}{R_1^3} - \frac{z+h}{R_2^3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 3m \left\{ \frac{(z-h)^3}{R_1^5} - \frac{(z+h)^3}{R_2^5} \right\} \right] + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right), \\ \tau_{z\rho} &= -\frac{Q\rho}{8\pi(m-1)} \left[ (m-2) \left( \frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 3m \left\{ \frac{(z-h)^2}{R_1^5} - \frac{(z+h)^2}{R_2^5} \right\} \right] - \frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 \omega}{\partial z \partial \rho}. \end{aligned} \right\} \quad (9.13)$$

При  $z = 0$  эти напряжения обращаются в нуль, что и требуется по условию задачи. С другой стороны, выражения (9.11)—(9.12) имеют в точке  $(0, 0, h)$  особенность, соответствующую приложению сосредоточенной силы; они удовлетворяют также уравнениям теории упругости в перемещениях, ибо представляют сумму частных решений этих уравнений.



Столь же просто находится решение задачи о действии на упругое полупространство силы, направление которой параллельно плоскости  $z = 0$ , ограничивающей полупространство. Координаты точки приложения силы  $S$ , как выше, назовём  $(0, 0, h)$ , а ось  $x$  направим параллельно силе.

Применяя метод зеркального отображения, приложим в точке  $(0, 0, -h)$  силу  $S_1$ , имеющую такую же величину  $S$  и то же направление, что  $S$ . При совокупном действии сил  $S$  и  $S_1$  в неограниченной упругой среде касательные напряжения на плоскости  $z = 0$  обратятся в нуль. Это следует из формул (1.23); действительно после замены в этих формулах местами букв  $x$  и  $z$  и подстановки  $z - h$  вместо  $z$  получим следующие значения касательных напряжений: от действия силы  $S$

$$\tau_{xz}^{(1)} = -\frac{S}{8\pi(m-1)} \frac{z-h}{R_1^3} \left( m-2 + \frac{3mx^2}{R_1^2} \right), \quad \tau_{yz}^{(1)} = -\frac{3Smxy(z-h)}{R_1^5} \quad (9.14)$$

и от действия силы  $S_1$  (при замене  $z$  на  $z+h$ )

$$\tau_{xz}^{(2)} = -\frac{S}{8\pi(m-1)} \frac{z+h}{R_2^3} \left( m-2 + \frac{3mx^2}{R_2^2} \right), \quad \tau_{yz}^{(2)} = -\frac{3Smxy(z+h)}{R_2^5}, \quad (9.15)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  определены по (9.1) и (9.2). При совокупном действии сил  $S$  и  $S_1$  будем иметь на плоскости  $z = 0$

$$(\tau_{xz})_{z=0} = (\tau_{xz}^{(1)} + \tau_{xz}^{(2)})_{z=0} = 0, \quad (\tau_{yz})_{z=0} = (\tau_{yz}^{(1)} + \tau_{yz}^{(2)})_{z=0} = 0, \quad (9.16)$$

что и требуется.

По (1.23) определяем также нормальные напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(1)} &= \frac{Sx}{8\pi(m-1)R_1^3} \left[ m-2 - \frac{3m(z-h)^2}{R_1^2} \right], \\ \sigma_z^{(2)} &= \frac{Sx}{8\pi(m-1)R_2^3} \left[ m-2 - \frac{3m(z+h)^2}{R_2^2} \right], \end{aligned} \quad (9.17)$$

откуда следует, что при действии сил  $S$  и  $S_1$  нормальные напряжения  $\sigma_z$  на плоскости  $z = 0$  оказываются равными

$$(\sigma_z)_{z=0} = \sigma_z^0(x, y) = \frac{Sx}{4\pi(m-1)R_0^3} \left( m-2 - \frac{3mh^2}{R_0^2} \right), \quad (9.18)$$

где  $R_0$  определено по (9.4). Для решения поставленной задачи следует на напряжённое состояние, определяемое действием двух сил  $S$  и  $S_1$ , в неограниченной упругой среде наложить напряжённое состояние в упругом полупространстве  $z > 0$ , вызываемое действием нормальных напряжений  $[-\sigma_z^0(x, y)]$ , распределённых по ограничивающей это полупространство плоскости  $z = 0$ . Эта задача была решена

в § 5; потенциал  $\omega(x, y, z)$  должен быть согласно (5.34) определен из краевого условия

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)_{z \rightarrow +} = -\frac{S}{2(m-1)} \left[ (m-2) \frac{x}{R_0^3} - \frac{3mh^2x}{R_0^5} \right]. \quad (9.19)$$

Рассмотрим гармоническую в полупространстве  $z > 0$  функцию  $\frac{1}{R_2}$ ; её производные

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R_2} = -\frac{x}{R_2^3}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \frac{1}{R_2} = \frac{3x(z+h)}{R_2^5}$$

также представляют гармонические функции. Замечая ещё, что

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\partial}{\partial z} \ln(R_2 + z + h),$$

можем переписать условие (9.19) в виде

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)_{z \rightarrow +0} = \frac{S}{2(m-1)} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[ (m-2) \frac{\partial \ln(R_2 + z + h)}{\partial x} + mh \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R_2} \right] \right\}_{z=0}, \quad (9.20)$$

откуда следует заключить, что во всей области  $z > 0$

$$\omega = \frac{S}{2(m-1)} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (m-2) \ln(R_2 + z + h) + \frac{mh}{R_2} \right]. \quad (9.21)$$

По (5.25) сразу же находим и потенциал  $\omega_1(x, y, z)$ :

$$\omega_1 = \frac{S}{2(m-1)} \frac{\partial}{\partial x} \{ (m-2) [(z+h) \ln(R_2 + z + h) - R_2] + mh \ln(R_2 + z + h) \}. \quad (9.22)$$

Значения перемещений могут быть определены теперь по (1.19 и (5.27). Полученные в этом параграфе результаты позволяют составить решение задачи о действии как угодно направленной силы, приложенной в точке упругого полупространства.

Принимая в найденном решении  $h=0$ , мы должны прийти к решению рассмотренной в § 8 задачи о действии касательной силы, приложенной в точке границы упругого полупространства. Действительно, в этом случае по (9.21) и (9.22) имеем:

$$\omega = \frac{S(m-2)}{2(m-1)} \frac{\partial \ln(R+z)}{\partial x}, \quad \omega_1 = \frac{S(m-2)}{2(m-1)} \frac{\partial}{\partial x} [z \ln(R+z) - R]. \quad (9.23)$$

Соответствующие этим потенциалам перемещения получаем по (5.27):

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\frac{S(m-2)}{4\pi Gm} \frac{\partial^2}{\partial x^2} z \ln(R+z) + \frac{S(m-2)^2}{8\pi Gm(m-1)} \left( \frac{1}{R} - \frac{x^2}{R^3} \right), \\ v_1 &= -\frac{S(m-2)}{4\pi Gm} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} z \ln(R+z) - \frac{S(m-2)^2}{8\pi Gm(m-1)} \frac{xy}{R^3}, \\ w_1 &= \frac{S(m-2)}{4\pi Gm} \frac{x}{R(R+z)} + \frac{S(m-2)}{8\pi G(m-1)} \frac{zx}{R^3}. \end{aligned} \right\} \quad (9.24)$$

К ним следует добавить перемещения, создаваемые силой  $2S$  в неограниченной упругой среде. По (1.19) эти перемещения равны

$$u_2 = \frac{S}{8\pi G(m-1)} \left( \frac{3m-4}{R} + \frac{mx^2}{R^3} \right), \quad v_2 = \frac{Sm}{8\pi G(m-1)} \frac{xy}{R^3},$$

$$w_2 = \frac{Sm}{8\pi G(m-1)} \frac{zx}{R^3}. \quad (9.25)$$

Заметив, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} z \ln(R+z) = \frac{1}{R} - \frac{x^2}{R^3} - \frac{1}{R+z} + \frac{x^2}{R(R+z)^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} z \ln(R+z) = -\frac{xy}{R^3} + \frac{xy}{R(R+z)^2},$$

и, сложив (9.24) с (9.25), придём снова к выражениям (8.22), что и требовалось.

### § 10. Задачи о равновесии упругого конуса

Полученные выше частные решения позволяют дать решение задачи об упругом равновесии конуса, нагруженного силой, приложенной к его вершине.

Вершину конуса примем за начало сферической системы координат; тогда на поверхности конуса угол  $\vartheta$  принимает заданное постоянное значение  $\alpha$ , равное половине угла раствора конуса. Надо потребовать выполнения краевых условий

$$\sigma_{\vartheta} = 0, \quad \tau_{R\vartheta} = 0, \quad \tau_{\vartheta\varphi} = 0 \quad \text{при } \vartheta = \alpha. \quad (10.1)$$

1°. Рассмотрим сначала случай силы  $F$ , действующей вдоль оси конуса — вдоль оси  $z$  (при  $F > 0$  конус сжат). Применим те же решения (1.25) и (4.13), которые были уже использованы в § 5 при решении задачи о действии сосредоточенной силы, нормальной к границе упругого полупространства; очевидно, что эта задача представляет частный случай, рассматриваемый при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

Последнее условие (10.1) удовлетворяется автоматически, а два первых приводят к единственному соотношению между постоянными  $Q$  и  $A$  в вышеуказанных формулах:

$$\frac{2GA}{1 + \cos \alpha} + \frac{Q(m-2)}{8\pi(m-1)} = 0, \quad \text{т. е. } 2GA = -\frac{Q(m-2)}{8\pi(m-1)}(1 + \cos \alpha). \quad (10.2)$$

Теперь по (1.25) и (4.13) получаем выражения напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \frac{Q(m-2)}{8\pi(m-1)R^2} \left( 1 + \cos \alpha - \frac{4m-2}{m-2} \cos \vartheta \right), \\ \sigma_{\vartheta} &= \frac{Q(m-2)}{8\pi(m-1)R^2} \frac{\cos \vartheta (\cos \vartheta - \cos \alpha)}{1 + \cos \vartheta}, \\ \sigma_{\varphi} &= \frac{Q(m-2)}{8\pi(m-1)R^2} \left( \frac{\cos \vartheta - \cos \alpha}{1 + \cos \vartheta} - 1 + \cos \vartheta \right), \\ \tau_{R\vartheta} &= \frac{Q(m-2)}{8\pi(m-1)R^2} \frac{\sin \vartheta (\cos \vartheta - \cos \alpha)}{1 + \cos \vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

Постоянная  $Q$  определяется из условия

$$F + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} R^2 \sin \vartheta (\sigma_R \cos \vartheta - \tau_{R\vartheta} \sin \vartheta) d\vartheta = 0, \quad (10.4)$$

откуда получаем:

$$Q = \frac{4F(m-1)}{m(1-\cos^3 \alpha) - (m-2)\cos \alpha(1-\cos \alpha)}. \quad (10.5)$$

2°. Перейдём к случаю силы, действующей вдоль оси  $x$ , перпендикулярно к оси конуса. Воспользуемся решениями (1.27), (4.15) и (8.30). Тогда краевые условия (10.1) приведут к системе трёх однородных уравнений для неизвестных  $Q$ ,  $C$ ,  $D_3$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q(m-2)}{8\pi(m-1)} \sin \alpha + 2GC \frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha} - 2GD_3 \frac{1-\cos \alpha}{(1+\cos \alpha) \sin \alpha} &= 0, \\ -\frac{Q(m-2)}{8\pi(m-1)} \cos \alpha - GC \frac{1+2\cos \alpha}{1+\cos \alpha} + 2GD_3 \frac{1}{1+\cos \alpha} &= 0, \\ -GC \frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha} + 2GD_3 \frac{1-\cos \alpha}{(1+\cos \alpha) \sin \alpha} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

Определитель этой системы равен нулю. Поэтому можно с точностью до неопределённого множителя  $A$  определить отличные от нуля значения постоянных  $Q$ ,  $C$ ,  $D_3$ ; вслед за этим  $A$  определится по условию равновесия

$$S + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} R^2 \sin \vartheta d\vartheta [\sigma_R \sin \vartheta \cos \varphi + \tau_{R\vartheta} \cos \vartheta \cos \varphi - \tau_{R\varphi} \sin \varphi] = 0. \quad (10.7)$$

Получаем:

$$\frac{Q(m-2)}{8\pi(m-1)} = A \frac{1-\cos \alpha}{(1+\cos \alpha) \sin \alpha}, \quad GC = -A \frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad 2GD_3 = -A \sin \alpha \quad (10.8)$$

и, значит,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \frac{A \sin \vartheta \cos \varphi}{R^2} \left[ -\frac{4m-2}{m-2} \frac{1-\cos \alpha}{(1+\cos \alpha) \sin \alpha} + \frac{2(1-\cos \alpha)}{\sin \alpha (1+\cos \vartheta)} \right], \\ \sigma_{\vartheta} &= \frac{A \sin \vartheta \cos \varphi}{R^2} \left[ \frac{1-\cos \alpha}{(1+\cos \alpha) \sin \alpha} - \frac{2(1-\cos \alpha)}{\sin \alpha (1+\cos \vartheta)} + \frac{\sin \alpha (1-\cos \vartheta)}{\sin^2 \vartheta (1+\cos \vartheta)} \right], \\ \sigma_{\varphi} &= \frac{A \sin \vartheta \cos \varphi}{R^2} \left[ \frac{1-\cos \alpha}{(1+\cos \alpha) \sin \alpha} - \frac{\sin \alpha (1-\cos \vartheta)}{\sin^2 \vartheta (1+\cos \vartheta)} \right], \\ \tau_{R\vartheta} &= \frac{A \cos \varphi}{R^2} \left[ -\frac{(1-\cos \alpha) \cos \vartheta}{(1+\cos \alpha) \sin \alpha} + \frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{2 \cos \vartheta + 1}{1+\cos \vartheta} - \frac{\sin \alpha}{1+\cos \vartheta} \right], \\ \tau_{R\varphi} &= \frac{A \sin \varphi}{R^2} \left[ \frac{1-\cos \alpha}{(1+\cos \alpha) \sin \alpha} - \frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{2 \cos \vartheta + 1}{1+\cos \vartheta} + \frac{\sin \alpha}{1+\cos \vartheta} \right], \\ \tau_{\vartheta\varphi} &= \frac{A \sin \varphi}{R^2 (1+\cos \vartheta)} \left[ \frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha} \sin \vartheta - \frac{1-\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \sin \alpha \right]. \end{aligned} \right\} \quad (10.9)$$

Вычислив теперь  $A$  из (10.7), найдём:

$$A = \frac{S(m-2)(1+\cos\alpha)\sin\alpha}{2\pi(1-\cos\alpha)^3(m+\cos\alpha)}. \quad (10.10)$$

3°. Имеющиеся в нашем распоряжении средства позволяют дать решение и более сложной задачи о равновесии полого конуса. Теперь вместо (10.1) следует удовлетворить краевым условиям:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \vartheta = \alpha \quad \sigma_{\vartheta} = 0, \quad \tau_{R\vartheta} = 0, \quad \tau_{\vartheta\varphi} = 0, \\ \text{при } \vartheta = \beta \quad \sigma_{\vartheta} = 0, \quad \tau_{R\vartheta} = 0, \quad \tau_{\vartheta\varphi} = 0. \end{array} \right\} \quad (10.11)$$

В случае силы, действующей вдоль оси конуса, нужно к решениям (1.25) и (4.13), которые были использованы выше, добавить ещё одно решение, соответствующее особой линии центров расширения, распределённых по положительной оси  $z$ . Ничто не препятствует применению этого решения, ибо в рассматриваемой теперь области оно непрерывно, так как положительная ось  $z$  исключена из этой области внутренней поверхностью полого конуса.

Указанное решение, конечно, сразу получается из формул (4.13), соответствующих особой линии центров расширения, распределённых по отрицательной оси  $z$ . Чтобы избежать ошибки в знаке, заменим в этих формулах  $\vartheta$  на  $\vartheta_1$ , а затем положим  $\vartheta_1 = \pi - \vartheta$ . Тогда, имея в виду, что

$$\tau_{R\vartheta_1} = -\tau_{R\vartheta}, \quad \sigma_{\vartheta_1} = \sigma_{\vartheta} \quad \text{и т. д.},$$

получим:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\vartheta} = -\frac{2GB}{R^2} \frac{\cos\vartheta}{1-\cos\vartheta}, \quad \tau_{R\vartheta} = -\frac{2GB}{R^2} \frac{\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta}, \\ \sigma_{\varphi} = \frac{2GB}{R^2} \frac{1}{1-\cos\vartheta}, \\ \sigma_R = -\frac{2GB}{R^2}, \quad \tau_{R\varphi} = 0, \quad \tau_{\vartheta\varphi} = 0. \end{array} \right\} \quad (10.12)$$

Два последних условия (10.11) удовлетворяются тождественно; далее, как и в случае сплошного конуса, оказывается достаточным удовлетворить лишь условиям для  $\sigma_{\vartheta}$  (на внешней и внутренней поверхностях конуса); тогда условия, налагаемые на  $\tau_{R\vartheta}$ , будут также соблюдены. Получаем два уравнения

$$\left. \begin{array}{l} \frac{Q(m-2)}{8\pi(m-1)} + \frac{2GA}{1+\cos\alpha} - \frac{2GB}{1-\cos\alpha} = 0, \\ \frac{Q(m-2)}{8\pi(m-1)} + \frac{2GA}{1+\cos\beta} - \frac{2GB}{1-\cos\beta} = 0. \end{array} \right\} \quad (10.13)$$

Из них получим:

$$2GA = -\frac{Q(m-2)}{16\pi(m-1)}(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta),$$

$$2GB = \frac{Q(m-2)}{16\pi(m-1)}(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta),$$

и искомое решение для напряжений будет:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \frac{Q(m-2)}{8\pi(m-1)R^2} \left[ -\frac{4m-2}{m-2} \cos\vartheta + \cos\alpha + \cos\beta \right], \\ \sigma_\vartheta &= \frac{Q(m-2)}{8\pi(m-1)R^2} \left[ 1 - \frac{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)}{2(1+\cos\vartheta)} - \frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{2(1-\cos\vartheta)} \right] \cos\vartheta, \\ \tau_{R\vartheta} &= \frac{Q(m-2)}{8\pi(m-1)R^2} \left[ 1 - \frac{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)}{2(1+\cos\vartheta)} - \frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{2(1-\cos\vartheta)} \right] \sin\vartheta, \\ \sigma_\varphi &= \frac{Q(m-2)}{8\pi(m-1)R^2} \left[ \cos\vartheta - \frac{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)}{2(1+\cos\vartheta)} + \frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{2(1-\cos\vartheta)} \right], \\ \tau_{R\varphi} &= \tau_{\vartheta\varphi} = 0. \end{aligned} \right\} (10.4)$$

При  $\beta = 0$  снова приходим к выражениям (10.3). Остаётся выразить постоянную  $Q$  через заданное значение осевой силы. Для этого надо воспользоваться уравнением равновесия (10.4), заменив нижний предел (нуль) интегрирования по  $\vartheta$  на  $\beta$ . Простое вычисление даёт:

$$Q = \frac{4F(m-1)}{m(\cos^2\beta - \cos^2\alpha) - (m-2)\cos\alpha\cos\beta(\cos\beta - \cos\alpha)}. \quad (10.15)$$

Это выражение при  $\beta = 0$  переходит в (10.5).

4°. Аналогично решается задача об изгибе полого конуса, создаваемом силой, перпендикулярной к его оси. К частным решениям, использованным в 2°, надо добавить аналогичные (4.15) и (8.30) решения, особой линией которых является положительная ось  $z$ .

Первое из них, соответствующее (4.15), будет:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= -\sigma_\vartheta = -2GC_1 \frac{\sin\vartheta \cos\varphi}{R^2(1-\cos\vartheta)}, \\ \sigma_\varphi &= 0, \quad \tau_{R\vartheta} = \frac{GC_1}{R^2} \left( 2 - \frac{1}{1-\cos\vartheta} \right) \cos\varphi, \\ \tau_{R\varphi} &= \frac{GC_1}{R^2} \left( 2 - \frac{1}{1-\cos\vartheta} \right) \sin\varphi, \quad \tau_{\vartheta\varphi} = GC_1 \frac{\sin\vartheta \sin\varphi}{R^2(1-\cos\vartheta)}. \end{aligned} \right\} (10.16)$$

Аналогично этому имеем решение, соответствующее (8.30),

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= 0, \quad \sigma_\vartheta = -\sigma_\varphi = -2GD_4 \frac{(1+\cos\vartheta)\cos\varphi}{R^2(1-\cos\vartheta)\sin\vartheta}, \\ \tau_{\vartheta\varphi} &= -2GD_4 \frac{(1+\cos\vartheta)\sin\varphi}{R^2(1-\cos\vartheta)\sin\vartheta}, \\ \tau_{R\varphi} &= -2GD_4 \frac{\sin\varphi}{R^2(1-\cos\vartheta)}, \quad \tau_{R\vartheta} = -2GD_4 \frac{\cos\varphi}{R^2(1-\cos\vartheta)}. \end{aligned} \right\} (10.17)$$

С помощью системы пяти частных решений — (1.27), (4.15), (10.16), (8.30) и (10.17) — составляем общее решение. Тогда краевые условия (10.11) дадут систему шести уравнений

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{Q(m-2)}{8\pi(m-1)} + \frac{2GC}{1+\cos\alpha} + \frac{2GC_1}{1-\cos\alpha} - \\
 & \qquad \qquad \qquad - \frac{2GD_3}{(1+\cos\alpha)^2} - \frac{2GD_4}{(1-\cos\alpha)^2} = 0, \\
 & \frac{Q(m-2)}{8\pi(m-1)} + \frac{2GC}{1+\cos\beta} + \frac{2GC_1}{1-\cos\beta} - \\
 & \qquad \qquad \qquad - \frac{2GD_3}{(1+\cos\beta)^2} - \frac{2GD_4}{(1-\cos\beta)^2} = 0, \\
 -\cos\alpha & \frac{Q(m-2)}{8\pi(m-1)} - \frac{GC(1+2\cos\alpha)}{1+\cos\alpha} + \frac{GC_1(1-2\cos\alpha)}{1-\cos\alpha} + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \frac{2GD_3}{1+\cos\alpha} - \frac{2GD_4}{1-\cos\alpha} = 0, \\
 -\cos\beta & \frac{Q(m-2)}{8\pi(m-1)} - \frac{GC(1+2\cos\beta)}{1+\cos\beta} + \frac{GC_1(1-2\cos\beta)}{1-\cos\beta} + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \frac{2GD_3}{1+\cos\beta} - \frac{2GD_4}{1-\cos\beta} = 0, \\
 & -\frac{GC}{1+\cos\alpha} + \frac{GC_1}{1-\cos\alpha} + \frac{2GD_3}{(1+\cos\alpha)^2} - \frac{2GD_4}{(1-\cos\alpha)^2} = 0, \\
 & -\frac{GC}{1+\cos\beta} + \frac{GC_1}{1-\cos\beta} + \frac{2GD_3}{(1+\cos\beta)^2} - \frac{2GD_4}{(1-\cos\beta)^2} = 0.
 \end{aligned} \right\} (10.18)$$

Два последних уравнения этой системы являются следствием четырёх первых; действительно, умножив первое (второе) уравнение на  $\cos\alpha$  ( $\cos\beta$ ) и сложив его с третьим (четвёртым), получим пятое (шестое) уравнение системы (10.18). Поэтому, выразив из четырёх уравнений (10.18), например из первого, второго, пятого и шестого, постоянные

$$GC, GC_1, 2GD_3, 2GD_4 \text{ через } \frac{Q(m-2)}{8\pi(m-1)}$$

и связав вслед за этим  $Q$  с помощью уравнения равновесия, аналогичного (10.7), с заданной силой  $S$ , приложенной в вершине конуса, получим решение рассматриваемой задачи.

**ПРИМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ К ГЛАВЕ 2**

Задача о действии сосредоточенной силы, приложенной в точке неограниченной упругой среды, излагаемая в § 1, была в 1848 г. рассмотрена В. Томсоном (Кельвиним) в мемуаре «Note on the Integration of the Equations of Equilibrium of an Elastic Solid» (W. Thomson, Mathematical and Physical Papers, vol. 1, Cambridge, 1882, стр. 97.) Позже Буссинек (J. Boussinesq) пришёл к этому решению и ряду других частных решений, соответствующих

особенностям более высокого порядка (сосредоточенный момент, центр расширения, двойная сила, линия центров расширения и центров вращения), рассмотренных в §§ 2—4. Работы Буссиника по теории упругости, опубликованные в ряде заметок, собраны в классическом его труде «Applications des potentiels a l'étude de l'équilibre et du mouvement de solides élastiques» (Paris, 1885).

Введение указанных особенностей в § 2 проведено методом, применяемым в электродинамике при рассмотрении потенциала системы точечных зарядов. См., например, Дж. А. Стрэттон «Теория электромагнетизма» (Гостехиздат, 1948). В теории упругости задача оказывается несколько более сложной, так как роль скалярной величины (заряда) переходит к вектору (силе). Формула (7.27) получена при учёте членов первого порядка в разложении потенциала  $\frac{Q}{R}$  в ряд; рассмотрение последующих членов сопряжено с введением тензоров более высокого ранга, чем второй.

Классическая задача о действии на упругое полупространство сосредоточенной силы, нормальной к его плоской границе, впервые рассматривалась Буссиником. Более общую задачу о напряжённом состоянии в упругом полупространстве, нагружённом по границе произвольной системой нормальных и касательных усилий, одновременно с Буссиником, основываясь на методе интегрирования Бетти, рассмотрел Черрути (V. Cerruti) в мемуаре «Ricerche intorno all'equilibrio de corpi elastici isotropi» (Atti della R. Accademia dei Lincei, Memoriae della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali 13, 1881—1882, стр. 81). Формулы (5.27) для случая нормального нагружения имеются в мемуаре Герца (H. Hertz), положившем начало рассмотрению контактных задач «Ueber die Berührung fester elastischer Körper» (Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle) 92, 1882, стр. 156). Вывод решения Буссиника с помощью функций П. Ф. Папковича был дан в нашей работе «Некоторые контактные задачи теории упругости» (Прикл. матем. и мех. 5, № 3, 1941, стр. 383). Решения Буссиника и Черрути воспроизведены в трактате А. Лява «Математическая теория упругости» (ОНТИ, 1935), далее цитируемом «А. Ляв».

Вычисления, относящиеся к определению напряжённого состояния в упругом полупространстве при равномерном и параболическом нагружении по круговой области, проведены в §§ 32—34 трактата Буссиника. В §§ 36—37 найден закон распределения нормального нагружения, при котором площадка нагружения остаётся плоской, т. е. решена (рассматриваемая в § 5 главы 5) контактная задача о действии жёсткого круглого штампа на упругое полупространство. Это же решение более сложным путём получил Черрути.

Наиболее полно задача о равномерном нормальном нагружении по круговой области (§ 6) рассмотрена в обширной работе Love «The stress produced in a semi-infinite Solid by pressure of part of the boundary» (Philosophical Transactions of the Royal Soc. of London, Ser. A, 228, 1929, стр. 377). Все производные по координатам от потенциалов

$$\iint \frac{do'}{R'}, \quad \iint \ln(R' + z) do',$$

необходимые для определения перемещений [см. формулы (5.27)] и напряжений, выражены в этой работе с помощью эллиптических интегралов. Подробно рассмотрен также случай нормального нагружения по прямоугольнику. Ряд литературных указаний даётся в «Теории упругости» С. П. Тимошенко (стр. 367), в которой приводится также вычисление перемещения  $w$  на границе полупространства внутри и вне круговой площадки нагружения. Отметим ещё, что подробное решение задачи о напряжённом состоянии в полупространстве, нагружённом по прямоугольной площадке на плоскости, ограничивающей полупространство, было дано В. Г. Короткиным в работе «Объёмная задача для упруго-изотропного полупространства» (Сборник Гидроэнергопроекта, № 4, ГОНТИ, 1938, стр. 52—85).



Содержание § 7 даёт некоторый подготовительный материал к главе 5, в которой рассмотрены контактные задачи теории упругости, а также к вычислению, проводимому в § 8. Применённый здесь способ разыскания нормального перемещения точек эллиптической площадки, нагруженной давлением по закону Герца и по более общему закону вида (7.31), несколько отличен по форме от метода, предложенного И. Я. Штаерманом в работе «Об одном обобщении задачи Герца» (Прикл. матем. и мех. 5, № 3, 1941, стр. 409), в которой подробно рассмотрен случай, соответствующий  $n = 1$  в формуле (7.31) и заданию некоторого числового значения постоянной  $\alpha_1 : \alpha_0$ .

В § 8 даётся, как нам представляется, наиболее простое решение задачи о действии на упругое полупространство произвольно распределённой и как угодно направленной нагрузки. Решение в векторной записи представлено формулами (8.34) и (8.37). Ср., например, изложение в оригинальной работе Черрути или в §§ 164—166 курса А. Лява. Вычисление п. 4 § 8 для случая загрузки касательными силами по эллиптической площадке в несколько ином виде дано в работе Миндлина (R. D. Mindlin «Compliance of Elastic Bodies», Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME 71, 1949, стр. 259). График, представленный на рис. 12, взят из этой работы. Вычисление п. 5 обобщает результаты, полученные Миндлином для круговой площадки.

§ 9 содержит пример применения метода изображений к задаче о действии сосредоточенной силы, приложенной в точке упругого полупространства. Разработка применения этого метода к задачам теории упругости принадлежит Сомильяна (C. Somigliana «Sul principio delle immagini di Lord Kelvin e le equazioni dell'Elasticita», Rendiconti dell'Accademia dei Lincei 5, 11<sup>a</sup>, 1902, стр. 145). Литература этого вопроса, разработанного преимущественно итальянскими авторами, указана в статье О. Tedone и А. Timpe, «Spezielle Ausführungen zur Statik elastischer Körper» (Encyklopedie der math. Wissenschaften IV, 2. II 1907, стр. 125). Решение задачи § 9 представляет наиболее простое применение метода Сомильяна. Впервые задачу о сосредоточенной силе, приложенной в точке упругого полупространства, рассмотрел Mindlin R. D. (Physics 7, 1936, стр. 195). Более общий случай загрузки полупространства  $z > 0$  нормальными силами, равномерно распределёнными по круговой площадке, расположенной на глубине  $h$  (в плоскости  $z = h$ ) под ограничивающей полупространство плоскостью, был рассмотрен в работе W. R. Dean, H. W. Parsons, I. N. Sneddon «A type of stress distribution on the surface of a semi — infinite elastic solid». (Proceedings of the Cambridge Phil. Soc., vol. 40, p. 1, 1944, стр. 5—19).

Задача о равновесии конуса, нагруженного в вершине, естественно примыкает по методу решения к материалу, излагаемому в главе о равновесии упругого полупространства. Решения, относящиеся к сплошному конусу, получены впервые Митчеллом (J. H. Michell «Some elementary distributions of Stresses in three Dimensions», Proceedings of the London Mathematical Society 32, 1900, стр. 23). Задача о растяжении и об изгибе полого конуса была иным методом рассмотрена Нейбером в работе, указанной в примечаниях к главе 1. Ряд задач о равновесии сплошного и полого конуса, нагруженного осесимметрично по его поверхности, рассмотрен Г. С. Шапиро в статье «О равновесии конуса и конической оболочки» (Прикл. матем. и мех. 8, 1944, стр. 332—336). Решая задачу в цилиндрических координатах  $z, r$ , автор задаётся бигармонической функцией напряжений в форме надлежащим образом выбранных полиномов от  $z$  и  $r$  и, вычислив по этой функции напряжения, определяет произвольные постоянные в решении по условиям загрузки боковой поверхности конуса. Особенно простым оказалось решение задачи о равновесии тяжёлого конуса с вертикальной осью. Столь же простое решение Г. С. Шапиро получил при решении аналогичной задачи для параболоида («Упругое равновесие параболоида вращения», Прикл. матем. и мех. 14, 1950, стр. 672—673).

## ГЛАВА 3

### РАВНОВЕСИЕ УПРУГОГО СЛОЯ

#### § 1. Постановка задачи. Растяжение и изгиб слоя

В этой главе будет рассмотрено равновесие упругого слоя, т. е. упругой среды, ограниченной двумя параллельными плоскостями (торцевыми плоскостями). Эта задача, являющаяся развитием и продолжением рассмотренной в предшествующей главе задачи о равновесии упругого полупространства, представляет интерес в нескольких отношениях. Во-первых, результаты решения некоторых частных случаев, например случая упругого слоя, покоящегося на жёстком основании, имеют непосредственное прикладное значение в строительной механике и фундаментастроении. Во-вторых, она интересна и по методу решения, так как даёт применение интеграла Фурье к нетривиальной задаче пространственной теории упругости. В-третьих, она имеет непосредственную связь с важной задачей о деформации толстой плиты, представляющей часть упругого слоя, ограниченного цилиндрической поверхностью с образующими, перпендикулярными к торцам слоя.

Речь будет идти о разыскании решений однородных уравнений теории упругости в перемещениях [см. (9.5) главы 1]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{m}{m-2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \Delta u &= 0, \\ \frac{m}{m-2} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \Delta v &= 0, \\ \frac{m}{m-2} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \Delta w &= 0 \\ \left( \vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) & \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

для области  $|z| < h$  при заданных краевых условиях на плоскостях  $z = -h$  и  $z = h$ , ограничивающих слой, и некоторых условиях на бесконечности, т. е. при  $(x, y) \rightarrow \infty$ . Плоскость  $xu$  считается расположенной в срединной плоскости слоя.

Мы будем рассматривать случай задания напряжений на торцах слоя:

$$\text{при } z = h: \quad \tau_{zx} = \tau_{zx}^+(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^+(x, y), \quad \sigma_z = \sigma_z^+(x, y), \quad (1.2)$$

$$\text{при } z = -h: \quad \tau_{zx} = \tau_{zx}^-(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^-(x, y), \quad \sigma_z = \sigma_z^-(x, y), \quad (1.3)$$

где  $\tau_{zx}^+, \dots, \sigma_z^-$  заданные функции координат точек границы. Искомые напряжения должны обращаться в нуль на бесконечности; характер убывания их может быть различен и зависит от задания нагрузок на плоскостях, ограничивающих слой.

Конечно, возможны и другие постановки краевых задач. Например, могут быть заданы перемещения на одной или обеих граничных плоскостях. Значительный интерес представляет задача о слое, покоящемся на жёстком, гладком основании; слой нагружен распределённым нормальным давлением по второй ограничивающей его плоскости. Решение этой задачи будет дано ниже; оно сводится к частному случаю задачи (1.2)—(1.3).

Следуя часто применяемому в строительной механике приёму, мы будем отдельно рассматривать случаи симметричного и кососимметричного нагружения слоя. Это, во-первых, сделает менее громоздкой запись формул; во-вторых, каждое из этих нагружений представляет самостоятельное значение, так как соответствует определённой характеру деформации слоя.

Мы вводим в рассмотрение величины:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1(x, y) &= \frac{1}{2}(\tau_{zx}^+ - \tau_{zx}^-), & \tau_2(x, y) &= \frac{1}{2}(\tau_{yz}^+ - \tau_{yz}^-), \\ q(x, y) &= \frac{1}{2}(\sigma_z^+ + \sigma_z^-), \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

$$\left. \begin{aligned} s_1(x, y) &= \frac{1}{2}(\tau_{zx}^+ + \tau_{zx}^-), & s_2(x, y) &= \frac{1}{2}(\tau_{yz}^+ + \tau_{yz}^-), \\ p(x, y) &= \frac{1}{2}(\sigma_z^+ - \sigma_z^-) \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

и с их помощью разбиваем краевую задачу (1.2)—(1.3) на две задачи — разыскание решений уравнений (1.1) по крайевым условиям:

$$(A) \quad \text{при } z = \pm h \quad \tau_{zx} = \pm \tau_1, \quad \tau_{yz} = \pm \tau_2, \quad \sigma_z = q, \quad (1.6)$$

$$(B) \quad \text{при } z = \pm h \quad \tau_{zx} = s_1, \quad \tau_{yz} = s_2, \quad \sigma_z = \pm p. \quad (1.7)$$

Ясно, что, складывая решения задач (A) и (B), получим решение исходной задачи (1.2)—(1.3).

В задаче (A) перемещения  $u$  и  $v$  являются чётными, а перемещение  $w$  нечётной функциями от  $z$ ; поэтому

$$(A) \quad \text{при } z = 0: \quad \frac{\partial u}{\partial z} = u'_0 = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = v' = 0, \quad w = w_0 = 0. \quad (1.8)$$

Наоборот, в задаче (Б) перемещения  $u$  и  $v$  нечётны, а  $w$  чётно относительно  $z$ ; поэтому

$$(Б) \text{ при } z=0: \quad u = u_0 = 0, \quad v = v_0 = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = w'_0 = 0. \quad (1.9)$$

Таким образом, в задаче (А) срединная плоскость испытывает растяжение (или сжатие), в задаче (Б) — изгиб, и естественно первую задачу назвать задачей растяжения (сжатия) слоя, а вторую — задачей изгиба.

Пусть, например, на слой действует сосредоточенная нормальная сила  $Q$ , приложенная в точке  $(0, 0, h)$  одного из торцов; разбиение

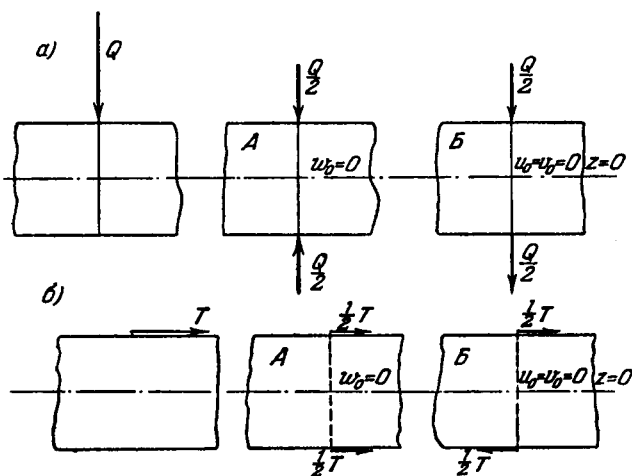


Рис. 14.

на задачи (А) и (Б) показано на рис. 14, а, из которого по соображению симметрии ясно видно, что в первом случае срединная плоскость, не изгибаясь ( $w_0 = 0$ ), будет растянута ( $u_0, v_0$  отличны от нуля), а во втором, — не растягиваясь и не сжимаясь ( $u_0 = v_0 = 0$ ), будет претерпевать изгиб ( $w_0 \neq 0$ ). Разбиение на задачи растяжения и изгиба для случая действия касательной к слою силы  $T$  показано на рис. 14, б.

Введённые выше шесть функций (от  $x$  и  $y$ ), именно перемещения точек срединной плоскости,

$$u_0, v_0, w_0$$

и значения при  $z = 0$  производных от перемещений  $u, v, w$ , обозначенные через

$$u'_0, v'_0, w'_0,$$

естественно оказываются основными величинами, от знания которых зависит решение задачи о слое. Поэтому в задаче о растяжении слоя речь будет идти о разыскании функций

$$(A) \quad u_0(x, y), \quad v_0(x, y), \quad w'_0(x, y), \quad (1.10)$$

а в задаче изгиба — функций

$$(B) \quad u'_0(x, y), \quad v'_0(x, y), \quad w_0(x, y). \quad (1.11)$$

Эти функции имеют производные всех порядков по  $x$  и  $y$ . Это следует из того, что решения уравнений теории упругости являются аналитическими функциями координат точек, расположенных внутри упругого тела, а срединная плоскость также целиком расположена внутри слоя.

## § 2. Символический способ составления решений

1°. Для решения краевых задач математической физики, относящихся к слою и к толстой плите (теплопроводности, теории потенциала и др.), оказывается весьма удобным применение символического способа записи решений соответствующих дифференциальных уравнений в частных производных. Особенно наглядно достоинства этого способа обнаруживаются в применении к столь сложной системе дифференциальных уравнений, как уравнения (1.1) теории упругости в перемещениях. Однако, чтобы дать представление о способе, удобно изложить его в применении к более простому случаю уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0. \quad (2.1)$$

Будем искать решение этого уравнения в форме ряда по степеням  $z$ :

$$F = \sum_{s=0}^{\infty} z^{2s} f_{2s}(x, y) + \sum_{s=0}^{\infty} z^{2s+1} f'_{2s}(x, y). \quad (2.2)$$

Нет нужды заботиться о сходимости этого ряда; он представляет лишь формальный аппарат для построения соответствующего решения, которое в конечном счёте будет представлено не степенным рядом, а определённым интегралом или в иной форме.

Надо подставить ряд (2.2) в уравнение (2.1). Тогда, обозначив оператор Лапласа от двух переменных  $x$  и  $y$  через

$$D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad (2.3)$$

где

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad (2.4)$$

и сделав соответствующую перегруппировку слагаемых, получим:

$$\sum_{s=0}^{\infty} z^{2s} [D^2 f_{2s}(x, y) + (2s + 1)(2s + 2) f_{2s+2}(x, y)] + \sum_{s=0}^{\infty} z^{2s+1} [D^2 f'_{2s}(x, y) + (2s + 2)(2s + 3) f'_{2s+2}(x, y)] = 0. \quad (2.5)$$

Приравниваем теперь нулю коэффициенты при  $z^{2s}$ :

$$D^2 f_0(x, y) + 1 \cdot 2 f_2(x, y) = 0,$$

$$D^2 f_2(x, y) + 3 \cdot 4 f_4(x, y) = 0,$$

.....

$$D^2 f_{2s}(x, y) + (2s + 1)(2s + 2) f_{2s+2} = 0 \quad (s = 0, 1, 2, \dots).$$

Таким образом,

$$f_2(x, y) = -\frac{1}{1 \cdot 2} D^2 f_0(x, y), \quad f_4(x, y) = \frac{1}{4!} D^4 f_0(x, y)$$

и вообще

$$f_{2s}(x, y) = \frac{(-1)^s}{(2s)!} D^{2s} f_0(x, y) \quad (s = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.6)$$

Аналогичным образом получим:

$$f'_{2s}(x, y) = \frac{(-1)^s}{(2s + 1)!} f'_0(x, y) \quad (s = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.7)$$

Итак, все коэффициенты ряда выразились через  $f_0(x, y)$  и  $f'_0(x, y)$ , т. е. через значение искомой функции  $F(x, y, z)$  и её производной  $\frac{\partial F}{\partial z}$  на срединной плоскости слоя (при  $z = 0$ ).

Полученный результат можно записать так:

$$F(x, y, z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s)!} (zD)^{2s} f_0(x, y) + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s + 1)!} \frac{1}{D} (zD)^{2s+1} f'_0(x, y). \quad (2.8)$$

Вспоминая теперь, что

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s)!} x^{2s} = \cos x, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s + 1)!} x^{2s+1} = \sin x,$$

получаем запись:

$$F(x, y, z) = \cos zD f_0(x, y) + \frac{\sin zD}{D} f'_0(x, y), \quad (2.9)$$

смысл которой сводится к следующему: нужно представить

$$\cos zD \quad \text{и} \quad \frac{1}{D} \sin zD$$

в форме рядов по степеням  $zD$  (они будут содержать, конечно, лишь чётные степени  $D$ ) и далее вернуть букве  $D^2$  значение оператора дифференцирования функций  $f_n(x, y)$  и  $f_0(x, y)$ , перед которыми она написана в выражении (2.9). Тогда получим как раз ряд (2.2).

Но, чтобы получить (2.9), вовсе не было нужды проделывать действия с рядами; можно было записать с самого начала уравнение (2.1) в форме

$$F'' + D'F = 0, \quad (2.10)$$

где штрихи обозначают дифференцирование по  $z$ , и, рассматривая символ  $D^2$  как число, составить решение этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$\text{при } z = 0 \quad F = f_0(x, y), \quad F' = f'_0(x, y). \quad (2.11)$$

Это решение как раз и будет (2.9). Вслед за его написанием надо его интерпретировать, как указано выше.

2°. Обратимся теперь к уравнениям (1.1) теории упругости в перемещениях. Следуя указанному приёму, запишем их в форме

$$\left. \begin{aligned} u'' + \left( D^2 + \frac{m}{m-2} \partial_1^2 \right) u + \frac{m}{m-2} \partial_1 \partial_2 v + \frac{m}{m-2} \partial_1 \omega' &= 0, \\ v'' + \left( D^2 + \frac{m}{m-2} \partial_2^2 \right) v + \frac{m}{m-2} \partial_1 \partial_2 u + \frac{m}{m-2} \partial_2 \omega' &= 0, \\ \frac{2(m-1)}{m-2} \omega'' + \frac{m}{m-2} \partial_1 u' + \frac{m}{m-2} \partial_2 v' + D^2 \omega &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

и, рассматривая символы дифференцирования  $\partial_1$ ,  $\partial_2$ ,  $D^2$  как числа, проинтегрируем эту систему трёх обыкновенных дифференциальных уравнений (с независимой переменной  $z$ ) при начальных условиях: для задачи (А):

$$\text{при } z = 0 \quad u = u_0, \quad v = v_0, \quad \omega = 0, \quad u' = 0, \quad v' = 0, \quad \omega' = \omega', \quad (2.13)$$

и для задачи (Б):

$$\text{при } z = 0 \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \omega = \omega_0, \quad u' = u'_0, \quad v' = v'_0, \quad \omega' = 0. \quad (2.14)$$

Тогда несложное вычисление, на котором не стоит здесь останавливаться, в задаче (А) даст:

$$\left. \begin{aligned} u &= \cos zD u_0 - \frac{m}{2(m-2)} \frac{z \sin zD}{D} \partial_1 \vartheta_0, \\ v &= \cos zD v_0 - \frac{m}{2(m-2)} \frac{z \sin zD}{D} \partial_2 \vartheta_0, \\ \omega &= \frac{\sin zD}{D} \omega'_0 + \frac{m}{2(m-2)} \left( \frac{\sin zD}{D} - z \cos zD \right) \vartheta_0, \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

где обозначено

$$\vartheta_0 = \partial_1 u_0 + \partial_2 v_0 + \omega'_0. \quad (2.16)$$

В задаче (Б) получим:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\sin zD}{D} u'_0 - \frac{m}{4(m-1)} \left( \frac{\sin zD}{D^3} - \frac{z \cos zD}{D^2} \right) \partial_1 \vartheta'_0, \\ v &= \frac{\sin zD}{D} v'_0 - \frac{m}{4(m-1)} \left( \frac{\sin zD}{D^3} - \frac{z \cos zD}{D^2} \right) \partial_2 \vartheta'_0, \\ w &= \cos zD \omega_0 - \frac{m}{4(m-1)} \frac{z \sin zD}{D} \vartheta'_0, \end{aligned} \right\} (2.17)$$

причём

$$\vartheta'_0 = \partial_1 u'_0 + \partial_2 v'_0 - D^2 \omega_0. \quad (2.18)$$

Дальнейшие преобразования можно производить непосредственно по этим выражениям, не разворачивая их в ряды. Например, чтобы получить объёмное расширение, умножаем выражения  $u$  и  $v$  соответственно на  $\partial_1$  и  $\partial_2$ , а  $w$  дифференцируем по  $z$ ; складывая, получим:

$$(A) \quad \vartheta = \cos zD \vartheta_0, \quad (2.19)$$

$$(B) \quad \vartheta = \frac{m-2}{2(m-1)} \frac{\sin zD}{D} \vartheta'_0. \quad (2.20)$$

Заметим попутно, что сравнение этих выражений с (2.9) подтверждает, что  $\vartheta$  является гармонической функцией.

Выпишем ещё используемые ниже выражения напряжений на площадках, перпендикулярных оси  $z$ ; по (2.15) и (2.19) и формулам закона Гука получим: в задаче (А)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{G} \tau_{zx} &= -\frac{\sin zD}{D} (D^2 u'_0 - \partial_1 w'_0) - \frac{m}{m-2} z \cos zD \partial_1 \vartheta_0, \\ \frac{1}{G} \tau_{yz} &= -\frac{\sin zD}{D} (D^2 v'_0 - \partial_2 w'_0) - \frac{m}{m-2} z \cos zD \partial_2 \vartheta_0, \\ \frac{1}{G} \sigma_z &= 2 \cos zD \omega'_0 + \left( \frac{2}{m-2} \cos zD + \frac{m}{m-2} zD \sin zD \right) \vartheta_0 \end{aligned} \right\} (2.21)$$

и в задаче (Б)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{G} \tau_{zx} &= \cos zD (u'_0 + \partial_1 w_0) - \frac{m}{2(m-1)} \frac{z \sin zD}{D} \partial_1 \vartheta'_0, \\ \frac{1}{G} \tau_{yz} &= \cos zD (v'_0 + \partial_2 w_0) - \frac{m}{2(m-1)} \frac{z \sin zD}{D} \partial_2 \vartheta'_0, \\ \frac{1}{G} \sigma_z &= -2D \sin zD \omega_0 - \left[ \frac{m-2}{2(m-1)} \frac{\sin zD}{D} + \frac{m}{2(m-1)} z \cos zD \right] \vartheta'_0. \end{aligned} \right\} (2.22)$$

Отсюда и из (1.8) получаем, что в задаче растяжения (А) при  $z=0$

$$\tau_{zx} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \omega = 0. \quad (2.23)$$

Поэтому случай (А) соответствует задаче о слое толщины  $h$ , покоящемся на гладком, жёстком основании и нагруженном по плоскости  $z=h$  усилиями [см. (1.6)]

$$\tau_{zx} = \tau_1, \quad \tau_{yz} = \tau_2, \quad \sigma_z = q(x, y). \quad (2.24)$$



В задаче изгиба (Б) при  $z = 0$  имеем по (1.9) и (2.22):

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \sigma_z = 0. \quad (2.25)$$

Таким образом, и этой задаче можно дать физическое истолкование, правда, менее отчётливое, чем задаче растяжения: в условиях задачи (Б) находится слой толщины  $h$ , нижняя плоскость которого  $z = 0$  соединена с листом материала, нерастяжимым в своей плоскости, но не оказывающим никакого сопротивления изгибу, а верхняя  $z = h$  нагружена усилиями [см. (1.7)]

$$\tau_{zx} = s_1, \quad \tau_{yz} = s_2, \quad \sigma_z = p(x, y). \quad (2.26)$$

### § 3. Введение функций напряжений

1°. Основные неизвестные, от знания которых зависит решение задачи о равновесии упругого слоя, т. е. функции (1.10) для задачи растяжения и (1.11) для задачи изгиба, должны быть определены из краевых условий.

Рассмотрим сначала первую из этих задач. Чтобы записать краевые условия (1.6), полагаем  $z = h$  в (2.21); получающиеся соотношения будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} d_{11}u_0 + d_{12}v_0 + d_{13}\omega'_0 &= \frac{1}{G} \tau_1, \\ d_{21}u_0 + d_{22}v_0 + d_{23}\omega'_0 &= \frac{1}{G} \tau_2, \\ d_{31}u_0 + d_{32}v_0 + d_{33}\omega'_0 &= \frac{1}{G} q, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

где через  $d_{ik}$  обозначены операторы дифференцирования

$$\left. \begin{aligned} d_{11} &= -\left(D \sin hD + \frac{mh}{m-2} \cos hD \partial_1^3\right), \\ d_{22} &= -\left(D \sin hD + \frac{mh}{m-2} \cos hD \partial_2^3\right), \\ d_{12} = d_{21} &= -\frac{mh}{m-2} \cos hD \partial_1 \partial_2, \\ d_{33} &= \frac{2(m-1)}{m-2} \cos hD + \frac{mh}{m-2} D \sin hD, \\ d_{13} = \partial_1 d_3^* &, \quad d_{23} = \partial_2 d_3^*, \quad d_3^* = \frac{\sin hD}{D} - \frac{mh}{m-2} \cos hD, \\ d_{31} = \partial_1 d_3^{**} &, \quad d_{32} = \partial_2 d_3^{**}, \quad d_3^{**} = \frac{2}{m-2} \cos hD + \frac{mh}{m-2} D \sin hD. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Основываясь на том, что операторы дифференцирования  $\partial_1$ ,  $\partial_2$ ,  $D^2$  подчиняются тем же формальным правилам сложения и умножения, что и числа, мы выразим теперь функции  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $\omega'_0$  через три новые неизвестные функции напряжений

$$\gamma_1(x, y), \quad \gamma_2(x, y), \quad \gamma_3(x, y).$$

Для этого введём в рассмотрение оператор-определитель

$$Q = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}, \quad (3.3)$$

который в нашем случае равен

$$Q = \frac{2m}{m-2} hD^3 \sin hD \left( 1 + \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) \quad (3.4)$$

и, следовательно, является целой функцией от  $D^2$ .

Функции напряжений подчиним дифференциальным соотношениям

$$Q\gamma_{1.1} = \frac{1}{G} \tau_1, \quad Q\gamma_{2.2} = \frac{1}{G} \tau_2, \quad Q\gamma_{3.3} = \frac{1}{G} q; \quad (3.5)$$

способы определения их из этих соотношений будут изложены ниже (§ 4).

Теперь, назвав через  $Q_{ik}$  дифференциальный оператор, являющийся алгебраическим дополнением элемента  $d_{ik}$  определителя (3.3), можем записать выражения неизвестных  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  через функции напряжений

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= Q_{11}\gamma_{1.1} + Q_{21}\gamma_{2.2} + Q_{31}\gamma_{3.3}, \\ v_0 &= Q_{12}\gamma_{1.1} + Q_{22}\gamma_{2.2} + Q_{32}\gamma_{3.3}, \\ w_0 &= Q_{13}\gamma_{1.1} + Q_{23}\gamma_{2.2} + Q_{33}\gamma_{3.3}. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Действительно, подставив эти выражения, например, в первое уравнение (3.1), получим на основании известных свойств определителей первое соотношение (3.5).

Выражения операторов  $Q_{ik}$  будут:

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} &= -\frac{mh}{m-2} \left[ 2\partial_2^2 + \partial_1^2 \sin^2 hD + \frac{\sin 2hD}{hD} \left( D^2 - \frac{\partial_1^2}{m} \right) \right], \\ Q_{22} &= -\frac{mh}{m-2} \left[ 2\partial_1^2 + \partial_2^2 \sin^2 hD + \frac{\sin 2hD}{hD} \left( D^2 - \frac{\partial_2^2}{m} \right) \right], \\ Q_{21} &= Q_{12} = \frac{mh}{m-2} \left[ 1 + \cos^2 hD + \frac{1}{m} \frac{\sin 2hD}{hD} \right] \partial_1 \partial_2, \\ Q_{33} &= \left( \frac{\sin hD}{hD} + \frac{m}{m-2} \cos hD \right) hD^3 \sin hD, \\ Q_{31} &= \partial_1 Q_3^*, \quad Q_{32} = \partial_2 Q_3^*, \\ Q_3^* &= \left( \frac{\sin hD}{hD} - \frac{m}{m-2} \cos hD \right) hD \sin hD, \\ Q_{13} &= \partial_1 Q_3^{**}, \quad Q_{23} = \partial_2 Q_3^{**}, \\ Q_3^{**} &= \left( \frac{m}{m-2} hD \sin hD + \frac{2}{m-2} \cos hD \right) D \sin hD. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

2<sup>o</sup>. Соотношения (3.6) упрощаются при наличии только нормальной нагрузки; тогда  $\tau_1 = \tau_2 = 0$  и можно принять  $\chi_1 = \chi_2 = 0$ ; в формулах (3.6) останется лишь последний столбец. Но операторы  $Q$ ,  $Q_{31}$ ,  $Q_{32}$ ,  $Q_{33}$  содержат общий множитель  $hD \sin hD$ ; поэтому следует ввести вместо  $\gamma_3$  новую функцию напряжений

$$\chi = \frac{m}{m-2} hD \sin hD \gamma_3. \quad (3.8)$$

Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \left( \frac{m-2}{m} \frac{\sin hD}{hD} - \cos hD \right) \partial_1 \chi, \\ v_0 &= \left( \frac{m-2}{m} \frac{\sin hD}{hD} - \cos hD \right) \partial_2 \chi, \\ w' &= \left( \frac{m-2}{m} \frac{\sin hD}{hD} + \cos hD \right) D^2 \chi, \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

причём  $\chi$  должно быть определено из соотношения

$$\left( 1 + \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) D^2 \chi = \frac{1}{2J} q. \quad (3.10)$$

Подставив (3.9) в (2.15), выразим теперь через функцию  $\chi$  перемещения, а затем напряжения. Получающиеся формулы будут использованы в дальнейшем; чтобы избежать повторения записей, уместно здесь ввести некоторые обозначения; их целесообразность выяснится ниже. Именно, мы вводим в рассмотрение функции

$$\left. \begin{aligned} X_1(\gamma z, \gamma h) &= \operatorname{ch} \gamma h \operatorname{ch} \gamma z - \frac{z}{h} \operatorname{sh} \gamma z \operatorname{sh} \gamma h - \frac{m-2}{m} \operatorname{ch} \gamma z \frac{\operatorname{sh} \gamma h}{\gamma h}, \\ X_2(\gamma z, \gamma h) &= \frac{1}{h} \left[ \gamma h \operatorname{ch} \gamma h \operatorname{sh} \gamma z - \gamma z \operatorname{ch} \gamma z \operatorname{sh} \gamma h + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(m-1)}{m} \operatorname{sh} \gamma z \operatorname{sh} \gamma h \right], \\ X_3(\gamma z, \gamma h) &= \frac{1}{h} (\gamma h \operatorname{ch} \gamma h \operatorname{sh} \gamma z - \gamma z \operatorname{ch} \gamma z \operatorname{sh} \gamma h), \\ X_4(\gamma z, \gamma h) &= \operatorname{ch} \gamma h \operatorname{ch} \gamma z - \frac{z}{h} \operatorname{sh} \gamma h \operatorname{sh} \gamma z + \frac{\operatorname{ch} \gamma z \operatorname{sh} \gamma h}{\gamma h}, \\ X_5(\gamma z, \gamma h) &= -\operatorname{ch} \gamma h \operatorname{ch} \gamma z + \frac{z}{h} \operatorname{sh} \gamma h \operatorname{sh} \gamma z + \frac{\operatorname{ch} \gamma z \operatorname{sh} \gamma h}{\gamma h}. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

С помощью этих функций строим операторы от  $D^2$ :

$$X_k(zlD, hlD) \quad (k = 1, 2, \dots, 5), \quad (3.12)$$

получающиеся заменой числа  $\gamma$  на  $lD$  (где  $l = \sqrt{-1}$ ). Например,

$$X_1(zlD, hlD) = \cos hD \cos zD + \frac{z}{h} \sin zD \sin hD - \frac{m-2}{m} \cos zD \frac{\sin hD}{hD}$$

и т. д. Теперь получаем выражения перемещений

$$u = -\partial_1 X_1(ziD, hiD)\gamma, \quad v = -\partial_2 X_1(ziD, hiD)\gamma, \quad (3.13)$$

$$w = -X_2(ziD, hiD)\gamma \quad (3.14)$$

и напряжений

$$\tau_{zx} = -2G\partial_1 X_3(ziD, hiD)\gamma, \quad \tau_{yz} = -2G\partial_2 X_3(ziD, hiD)\gamma, \quad (3.15)$$

$$\sigma_z = 2GX_4(ziD, hiD)D^2\gamma, \quad (3.16)$$

$$\sigma_x = 2G[X_5(ziD, hiD)D^2 + \partial_2^2 X_1(ziD, hiD)]\gamma, \quad (3.17)$$

$$\sigma_y = 2G[X_5(ziD, hiD)D^2 + \partial_1^2 X_1(ziD, hiD)]\gamma, \quad (3.18)$$

$$\tau_{xy} = -2G\partial_1 \partial_2 X_1(ziD, hiD)\gamma. \quad (3.19)$$

3°. Другой случай упрощения соотношений (3.6) представится, когда заданные касательные усилия  $\tau_1$  и  $\tau_2$  являются частными производными одной и той же величины, которую обозначим  $\tau$ :

$$\tau_1 = \partial_1 \tau, \quad \tau_2 = \partial_2 \tau. \quad (3.20)$$

К этой задаче приходим, например, при действии на слой объёмных сил, имеющих потенциал (см. § 7).

Нормальную нагрузку, действие которой рассмотрено выше, теперь можно считать равной нулю. Полагаем в (3.6)

$$\gamma_1 = \partial_1 \bar{\gamma}, \quad \gamma_2 = \partial_2 \bar{\gamma}, \quad \gamma_3 = 0. \quad (3.21)$$

Тогда вместо двух первых уравнений (3.5) можно будет рассмотреть лишь одно

$$Q\bar{\gamma} = \frac{1}{G}\tau. \quad (3.22)$$

Далее по (3.6) получим:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= (\partial_1 Q_{11} + \partial_2 Q_{21})\bar{\gamma} = \\ &= -\partial_1 \left( hD \sin hD + \frac{2(m-1)}{m} \cos hD \right) \frac{m}{m-2} D \sin hD \bar{\gamma}, \\ v_0 &= (\partial_1 Q_{12} + \partial_2 Q_{22})\bar{\gamma} = \\ &= -\partial_2 \left( hD \sin hD + \frac{2(m-1)}{m} \cos hD \right) \frac{m}{m-2} D \sin hD \bar{\gamma}, \\ w'_0 &= (\partial_1 Q_{13} + \partial_2 Q_{23})\bar{\gamma} = \\ &= \left( hD \sin hD + \frac{2}{m} \cos hD \right) \frac{m}{m-2} D^3 \sin hD \bar{\gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Поэтому вводя в качестве новой функции напряжений величину

$$\chi^* = \frac{m}{m-2} D \sin hD \bar{\gamma}, \quad (3.24)$$

получим выражение основных неизвестных

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= -\partial_1 \left[ hD \sin hD + \frac{2(m-1)}{m} \cos hD \right] \chi^*, \\ v_0 &= -\partial_2 \left[ hD \sin hD + \frac{2(m-1)}{m} \cos hD \right] \chi^*, \\ w'_0 &= \left( hD \sin hD + \frac{2}{m} \cos hD \right) D^2 \chi^*, \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

причём функция  $\chi^*$  должна быть определена соотношением

$$\left( 1 + \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) D^2 \chi^* = \frac{\tau}{2Gh} \quad (3.26)$$

того же вида, что и (3.10).

Вычисление перемещений в любой точке слоя, как и выше, производится путём подстановки (3.25) в выражения (2.15). По перемещениям находятся далее напряжения. Мы не будем выписывать этих формул.

4°. Конечно, совершенно аналогично проводится вычисление в задаче изгиба: по (1.7) и (2.22) выписываем краевые условия в форме соотношений вида (3.1) и, пользуясь ими, выражаем искомые функции  $u'_0$ ,  $v'_0$ ,  $w_0$  через три функции напряжений  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$ ; получающиеся выражения будут иметь структуру; аналогичную (3.6), а функции напряжений определяются из дифференциальных соотношений типа [см. (3.7)]

$$Q^* \psi_1 = \frac{1}{G} s_1, \quad Q^* \psi_2 = \frac{1}{G} s_2, \quad Q^* \psi_3 = \frac{1}{G} p, \quad (3.27)$$

причём оператор-определитель будет [ср. (3.4)] иметь вид

$$Q^* = \frac{mh}{m-1} D^2 \left( 1 - \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) \cos hD. \quad (3.28)$$

Получающиеся соотношения упрощаются при наличии только нормальной нагрузки ( $s_1 = s_2 = 0$ )

$$\left. \begin{aligned} u'_0 &= -\partial_1 \left[ \frac{2(m-1)}{m} \cos hD + hD \sin hD \right] \psi, \\ v'_0 &= -\partial_2 \left[ \frac{2(m-1)}{m} \cos hD + hD \sin hD \right] \psi, \\ w_0 &= \left[ \frac{2(m-1)}{m} \cos hD - hD \sin hD \right] \psi, \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

где функция напряжений находится по уравнению

$$\left( 1 - \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) D^2 \psi = \frac{1}{2Gh} p. \quad (3.30)$$

Чтобы записать выражения перемещений и напряжений, как выше, вводим обозначения

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(\gamma z, hz) &= \frac{m-2}{m} \frac{\text{sh } \gamma z \text{ ch } \gamma h}{\gamma h} + \frac{z}{h} \text{ch } \gamma z \text{ ch } \gamma h - \text{sh } \gamma z \text{ sh } \gamma h, \\ \Psi_2(\gamma z, hz) &= \frac{2(m-1)}{m} \text{ch } \gamma z \text{ ch } \gamma h - \gamma z \text{ sh } \gamma z \text{ ch } \gamma h + \gamma h \text{ sh } \gamma h \text{ ch } \gamma z, \\ \Psi_3(\gamma z, hz) &= \frac{\text{sh } \gamma h}{\gamma h} \text{ch } \gamma z - \frac{z}{h} \frac{\text{sh } \gamma z}{\gamma h} \text{ch } \gamma h, \\ \Psi_4(\gamma z, hz) &= \frac{z}{h} \text{ch } \gamma z \text{ ch } \gamma h - \text{sh } \gamma z \text{ sh } \gamma h - \frac{\text{sh } \gamma z \text{ ch } \gamma h}{\gamma h}, \\ \Psi_5(\gamma z, hz) &= -\frac{z}{h} \text{ch } \gamma z \text{ ch } \gamma h + \text{sh } \gamma z \text{ sh } \gamma h - \frac{\text{sh } \gamma z \text{ ch } \gamma h}{\gamma h}. \end{aligned} \right\} (3.31)$$

Тогда выражения перемещений и напряжений будут:

$$\left. \begin{aligned} u &= -h \partial_1 \Psi_1(z i D, h i D) \psi, \\ v &= -h \partial_2 \Psi_1(z i D, h i D) \psi, \\ w &= \Psi_2(z i D, h i D) \psi, \\ \tau_{zx} &= -2Gh^2 \partial_1 \Psi_3(z i D, h i D) D^2 \psi, \\ \tau_{yz} &= -2Gh^2 \partial_2 \Psi_3(z i D, h i D) D^2 \psi, \\ \sigma_z &= 2Gh \Psi_4(z i D, h i D) D^2 \psi, \\ \sigma_x &= 2Gh [\Psi_5(z i D, h i D) D^2 + \partial_2^2 \Psi_1(z i D, h i D)] \psi, \\ \sigma_y &= 2Gh [\Psi_5(z i D, h i D) D^2 + \partial_1^2 \Psi_1(z i D, h i D)] \psi, \\ \tau_{xy} &= -2Gh \partial_1 \partial_2 \Psi_1(z i D, h i D) \psi. \end{aligned} \right\} (3.32)$$

5°. Проведём ещё вычисление для случая изгиба слоя, снова предполагая, что заданные касательные усилия  $s_1$  и  $s_2$  являются частными производными некоторой функции  $s$ :

$$s_1 = \partial_1 s, \quad s_2 = \partial_2 s, \quad (3.34)$$

а нормальное нагружение отсутствует, т. е.  $p = 0$ . Чтобы не повторять уже сказанного, воспользуемся в этом вычислении представлением перемещений через гармонические функции П. Ф. Папковича:

$$\begin{aligned} u &= B_1 - \frac{m}{4(m-1)} \frac{\partial}{\partial x} (xB_1 + yB_2 + zB_3 + B_0), \\ v &= B_2 - \frac{m}{4(m-1)} \frac{\partial}{\partial y} (xB_1 + yB_2 + zB_3 + B_0), \\ w &= B_3 - \frac{m}{4(m-1)} \frac{\partial}{\partial z} (xB_1 + yB_2 + zB_3 + B_0). \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае можно принять  $B_1 = B_2 = 0$ ; тогда эти формулы в изменённых обозначениях будут:

$$\left. \begin{aligned} u &= -z\partial_1 L + \partial_1 M, & v &= -z\partial_2 L + \partial_2 M, \\ \omega &= \frac{3m-4}{m} L - z \frac{\partial L}{\partial z} + \frac{\partial M}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

причём для задачи изгиба слоя гармоническая функция  $L$  чётна, а  $M$  — нечётна относительно  $z$ ; поэтому [см. (2.9)] можно написать:

$$L(x, y, z) = \cos zDL_0(x, y), \quad M(x, y, z) = \frac{\sin zD}{D} M'_0(x, y), \quad (3.36)$$

где  $L_0$  и  $M'_0$  — значения  $L$  и  $\frac{\partial M}{\partial z}$  на срединной плоскости ( $z = 0$ ).  
Получаем:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\partial_1 \left( z \cos zDL_0 - \frac{\sin zD}{D} M'_0 \right), \\ v &= -\partial_2 \left( z \cos zDL_0 - \frac{\sin zD}{D} M'_0 \right), \\ \omega &= \left( \frac{3m-4}{m} \cos zD + zD \sin zD \right) L_0 + \cos zDM'_0, \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

и далее

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= 2G\partial_1 \left[ \left( zD \sin zD + \frac{m-2}{m} \cos zD \right) L_0 + \cos zDM'_0 \right], \\ \tau_{yz} &= 2G\partial_2 \left[ \left( zD \sin zD + \frac{m-2}{m} \cos zD \right) L_0 + \cos zDM'_0 \right], \\ \sigma_z &= 2G \left[ \left( -\frac{2m-2}{m} D \sin zD + zD^2 \cos zD \right) L_0 - D \sin zDM'_0 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Краевые условия

$$\text{при } z = \pm h \quad \tau_{zx} = \partial_1 \tau, \quad \tau_{yz} = \partial_2 \tau, \quad \sigma_z = 0$$

теперь дают два соотношения для определения неизвестных функций  $L_0$  и  $M'_0$ :

$$\left. \begin{aligned} \left( hD \sin hD + \frac{m-2}{m} \cos hD \right) L_0 + \cos hDM'_0 &= \frac{1}{2G} \tau, \\ \left( -\frac{2m-2}{m} D \sin hD + hD^2 \cos hD \right) L_0 - D \sin hDM'_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Поэтому, вводя функцию напряжений  $\psi^*$  [ср. (3.30)]

$$\left( 1 - \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) D^2 \psi^* = \frac{\tau}{2Gh}, \quad (3.40)$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} L_0 &= D \sin hD\psi^*, \\ M'_0 &= \left( -\frac{2m-2}{m} D \sin hD + hD^2 \cos hD \right) \psi^*, \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

и далее по (3.37) получаем выражение перемещений и вслед за тем напряжений через функцию  $\psi^*$ .

6°. Переход к ортогональным криволинейным координатам.

Введём вместо декартовых координат  $x, y, z$ , через которые были выражены перемещения и напряжения, ортогональные криволинейные координаты  $q_1, q_2, z$ :

$$x = x(q_1, q_2), \quad y = y(q_1, q_2), \quad z = z. \quad (3.42)$$

Линии  $q_2 = \text{const}$  и  $q_1 = \text{const}$  представляют кривые, расположенные в плоскостях  $z = \text{const}$ . Единичные векторы (рис. 15) касательных к этим координатным линиям обозначим через  $e_1$  и  $e_2$ :

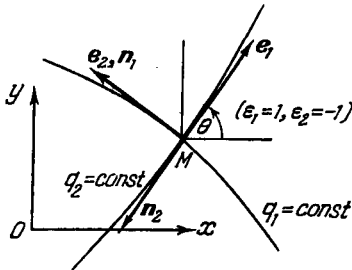


Рис. 15.

$$e_1 = \frac{\partial R}{\partial s_1}, \quad e_2 = \frac{\partial R}{\partial s_2}, \quad (3.43)$$

причём  $\delta s_1 = H_1 \delta q_1$ ,  $\delta s_2 = H_2 \delta q_2$  представляют элементы дуг координатных линий, а  $H_1, H_2$  — коэффициенты Ляме:

$$H_i \doteq \left| \frac{\partial R}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2}.$$

Очевидно, что  $H_3 = 1$ . Векторы  $e_1$  и  $e_2$  ориентированы друг относительно друга, как оси  $x$  и  $y$ . Через  $\theta$  обозначим угол, составляемый вектором  $e_1$  с осью  $x$ ; тогда

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \cos(e_1, x) = \cos(e_2, y) = \frac{\partial x}{\partial s_1} = \frac{\partial y}{\partial s_2}, \\ \sin \theta &= \cos(e_1, y) = -\cos(e_2, x) = \frac{\partial y}{\partial s_1} = -\frac{\partial x}{\partial s_2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

Пусть  $n_1$  и  $n_2$  обозначают единичные векторы главных нормалей к координатным линиям  $q_2 = \text{const}$  и  $q_1 = \text{const}$ ; имеем:

$$n_1 = \varepsilon_1 e_2, \quad n_2 = \varepsilon_2 e_1,$$

где  $\varepsilon_1 = \pm 1$  ( $\varepsilon_2 = \pm 1$ ), причём верхний знак берётся, когда вектор  $e_2$  ( $e_1$ ) направлен, как главная нормаль, т. е. в сторону вогнутости кривой  $q_2 = \text{const}$  ( $q_1 = \text{const}$ ), а нижний — противоположно главной нормали, т. е. в сторону выпуклости. На основании известных формул Френе (для плоской кривой)

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} = \frac{1}{\rho} n, \quad \frac{\partial n}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \tau$$



имеем теперь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_1}{\partial s_1} &= \frac{1}{\rho_1} e_1 e_2, & \frac{\partial e_2}{\partial s_1} &= -\frac{1}{\rho_1} e_1 e_1, \\ \frac{\partial e_1}{\partial s_2} &= -\frac{1}{\rho_2} e_2 e_2, & \frac{\partial e_2}{\partial s_2} &= \frac{1}{\rho_2} e_2 e_1, \end{aligned}$$

где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — радиусы кривизны координатных линий. По (6.22), (6.23) главы 1 получаем:

$$\frac{\varepsilon_1}{\rho_1} = -\frac{\partial \ln H_1}{\partial s_2}, \quad \frac{\varepsilon_2}{\rho_2} = -\frac{\partial \ln H_2}{\partial s_1}.$$

По определению кривизны имеем также

$$\frac{\varepsilon_1}{\rho_1} = \frac{\partial \theta}{\partial s_1}, \quad \frac{\varepsilon_2}{\rho_2} = -\frac{\partial \theta}{\partial s_2},$$

так что

$$\frac{\varepsilon_1}{\rho_1} = \frac{\partial \theta}{\partial s_1} = -\frac{\partial \ln H_1}{\partial s_2}, \quad -\frac{\varepsilon_2}{\rho_2} = \frac{\partial \theta}{\partial s_2} = \frac{\partial \ln H_2}{\partial s_1}. \quad (3.45)$$

Производная какой-либо функции от  $x$ ,  $y$  (или  $q_1$ ,  $q_2$ ) по направлениям  $e_1$ ,  $e_2$  определяется равенством

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(e_k, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(e_k, y). \quad (3.46)$$

Поэтому имеем, например,

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cos(e_1, x) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cos(e_1, y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cos \theta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \sin \theta.$$

Установим связь между этой величиной и  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial s_1}$ ; находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin \theta \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cos \theta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \sin \theta - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \theta \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s_2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} \frac{\partial \theta}{\partial x}. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} \frac{\partial \theta}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial s_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial s_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} \frac{\partial \theta}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

которые будут использованы ниже. Заметим ещё, что выражение операции  $D^2$ , т. е. лапласиана по двум переменным, согласно (6.42) главы 1 будет:

$$\begin{aligned} D^2\varphi &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} \end{aligned}$$

или в применяемых здесь обозначениях

$$D^2\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_2^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} \frac{\partial \theta}{\partial s_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} \frac{\partial \theta}{\partial s_1}, \quad (3.48)$$

Величины вида  $X_k(z_i D, h_i D) \gamma$ , через которые выражались перемещения и напряжения в задаче сжатия, равно как величины  $\Psi_k(z_i D, h_i D) \Psi$  в задаче изгиба, остаются неизменными (инвариантными) при переходе в плоскостях  $z = \text{const}$  от декартовых координат  $x, y$  к любым криволинейным  $q_1, q_2$ . Производные от этих величин по  $x, y$  (первые и вторые) должны быть при этом переходе к новым координатам заменены надлежащим образом составленными выражениями, содержащими производные по  $q_1, q_2$ . Следует отметить, что при вычислении в декартовых координатах было безразлично, писать ли

$$\partial_1 X_k(z_i D, h_i D) \gamma \quad \text{или} \quad X_k(z_i D, h_i D) \partial_1 \gamma;$$

замена же

$$\frac{\partial}{\partial q_1} X_k(z_i D, h_i D) \gamma \quad \text{на} \quad X_k(z_i D, h_i D) \frac{\partial \gamma}{\partial q_1}$$

была бы грубой ошибкой.

В дальнейшем всегда вычисляются выражения первого типа, представляющие производные инвариантных величин. Выражения второго типа, т. е. результаты применения инвариантной операции к величине, зависящей от выбора системы координат, не могут найти применения.

Формулы для перемещения  $w$  и напряжения  $\sigma_z$  содержат только операцию  $D^2$  и не изменяют своего вида при замене  $x, y$  криволинейными координатами  $q_1, q_2$ . При использовании этих формул лапласиан  $D^2$  вычисляется по его выражению (3.48).

Формулы для перемещений  $u, v$  и касательных напряжений  $\tau_{zx}$  и соответственно  $\tau_{yz}$  имеют структуру:

$$u = -\partial_1 \varphi, \quad v = -\partial_2 \varphi.$$

Поэтому проекция вектора перемещения на направление касательной  $e_1$  к координатной линии  $q_2 = \text{const}$  определяется соотношением

$$u_1 = u \cos \theta + v \sin \theta = - \left( \frac{\partial x}{\partial s_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \varphi}{\partial s_1}.$$

Таким образом, получаем:

$$u_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial s_1}, \quad u_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial s_2}, \quad (3.49)$$

и аналогично

$$\tau_{z1} = -\frac{\partial \varphi}{\partial s_1}, \quad \tau_{z2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial s_2}. \quad (3.50)$$

Например, в формулы (3.49) в случае сжатия слоя следует по (3.14) подставить  $\varphi = X_1(ziD, hiD) \gamma$ ; выражения касательных напряжений  $\tau_{z1}$  и  $\tau_{z2}$  в задаче изгиба слоя приобретают вид (3.50) после замены согласно (3.33) буквы  $\varphi$  на  $2Gh^3\Psi_y(ziD, hiD)\Psi$  и т. д.

Более сложно преобразование составляющих тензора напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ . Рассмотрение формул (3.17) — (3.19) и трёх последних формул (3.33) показывает, что выражения этих напряжений имеют вид

$$\sigma_x = S + \partial_2^2 T, \quad \sigma_y = R + \partial_1^2 T, \quad \tau_{xy} = -\partial_1 \partial_2 T. \quad (3.51)$$

где  $S$  и  $T$  инварианты относительно перехода от декартовых координат  $x, y$  к криволинейным  $q_1, q_2$ . Слагаемые  $S$  соответствуют равномерному растяжению по двум взаимно перпендикулярным направлениям

$$\sigma'_x = \sigma'_y = S, \quad \tau'_{xy} = 0$$

и не изменяют своего вида при переходе к другим произвольно ориентированным взаимно перпендикулярным направлениям  $e_1$  и  $e_2$ :

$$\sigma'_1 = \sigma'_2 = S, \quad \tau'_{12} = 0.$$

Остаётся составить формулы преобразования для составляющих напряжения

$$\sigma''_x = \partial_2^2 T, \quad \sigma''_y = \partial_1^2 T, \quad \tau''_{xy} = -\partial_1 \partial_2 T.$$

Через  $t''_i$  обозначим соответствующий им вектор напряжения на площадке, перпендикулярной к вектору  $e_i$ ; тогда

$$t''_{1x} = \sigma''_x \cos(e_1, x) + \tau''_{xy} \cos(e_1, y) = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \cos \theta - \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \sin \theta,$$

$$t''_{1y} = \tau''_{xy} \cos(e_1, x) + \sigma''_y \cos(e_1, y) = -\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \cos \theta + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \sin \theta.$$

По (3.44), (3.46) и (3.47) эти выражения преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} t''_{1x} &= \frac{\partial}{\partial s_2} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial s_2} + \frac{\partial T}{\partial s_1} \frac{\partial \theta}{\partial y}, \\ t''_{1y} &= -\frac{\partial}{\partial s_2} \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial s_2} - \frac{\partial T}{\partial s_1} \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

и аналогично

$$\left. \begin{aligned} t''_{2x} &= -\frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial s_1} + \frac{\partial T}{\partial s_2} \frac{\partial \theta}{\partial y}, \\ t''_{2y} &= \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial s_1} - \frac{\partial T}{\partial s_2} \frac{\partial \theta}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

Нормальное и касательное напряжения на площадке, перпендикулярной к  $e_1$ , теперь найдём из соотношений

$$\sigma_1'' = t''_{1x} \cos(e_1, x) + t''_{1y} \cos(e_1, y), \quad \tau_{12}'' = t''_{1x} \cos(e_2, x) + t''_{1y} \cos(e_2, y).$$

По (3.52) получаем:

$$\sigma_1'' = \frac{\partial y}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial s_2} + \frac{\partial x}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial s_2} + \frac{\partial T}{\partial s_1} \left( \frac{\partial y}{\partial s_2} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial s_2} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$$

или

$$\sigma_1'' = \frac{\partial^2 T}{\partial s_2^2} + \frac{\partial T}{\partial s_1} \frac{\partial \theta}{\partial s_2}.$$

Таким образом, приходим к формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= S + \frac{\partial^2 T}{\partial s_2^2} + \frac{\partial T}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \ln H_2}{\partial s_1}, & \tau_{12} &= -\frac{\partial^2 T}{\partial s_1 \partial s_2} + \frac{\partial T}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \ln H_1}{\partial s_2}, \\ \tau_{21} &= -\frac{\partial^2 T}{\partial s_2 \partial s_1} + \frac{\partial T}{\partial s_2} \frac{\partial \ln H_2}{\partial s_1}, & \sigma_2 &= S + \frac{\partial^2 T}{\partial s_1^2} + \frac{\partial T}{\partial s_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial s_2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

Напомним, что в этих формулах

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial s_1^2} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial T}{\partial q_1} \right), & \frac{\partial^2 T}{\partial s_2^2} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial T}{\partial q_2} \right), \\ \frac{\partial^2 T}{\partial s_1 \partial s_2} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial T}{\partial q_2} \right), & \frac{\partial^2 T}{\partial s_2 \partial s_1} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial T}{\partial q_1} \right), \end{aligned}$$

и нетрудно проверить, что

$$\tau_{12} = \tau_{21} = -\frac{1}{H_1 H_2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial q_1 \partial q_2} - \frac{\partial T}{\partial q_1} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1} \right). \quad (3.55)$$

7°. В качестве примера составим для задачи о сжатии слоя формулы в полярных координатах. Здесь  $H_\rho = 1$ ,  $H_\varphi = \rho$  и

$$D^2 = \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho + \frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi^2. \quad (3.56)$$

По (3.13)—(3.19) и (3.49), (3.50) и (3.54) получим: перемещения

$$\left. \begin{aligned} u_\rho &= -\partial_\rho X_1(zlD, hlD) \gamma, & u_\varphi &= \frac{1}{\rho} \partial_\varphi X_1(zlD, hlD) \gamma, \\ \omega &= -X_2(zlD, hlD) \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

напряжения на площадках, перпендикулярных оси  $z$ ,

$$\left. \begin{aligned} \tau_{pz} &= -2G \partial_\rho X_3(zlD, hlD) \chi, & \tau_{\varphi z} &= -\frac{2G}{\rho} \partial_\varphi X_3(zlD, hlD) \chi, \\ \sigma_z &= -2GX_4(zlD, hlD) D^2 \chi \end{aligned} \right\} (3.58)$$

и, наконец, напряжения на площадках, проходящих через ось  $z$ ,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= 2G \left[ X_5(zlD, hlD) D^2 + \left( \frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho \right) X_1(zlD, hlD) \right] \chi, \\ \sigma_\varphi &= 2G [X_5(zlD, hlD) D^2 + \partial_\rho^2 X_1(zlD, hlD)] \chi, \\ \tau_{\rho\varphi} &= -2G \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \partial_\varphi X_1(zlD, hlD) \chi. \end{aligned} \right\} (3.59)$$

При радиально-симметричном нагружении

$$q(x, y) = q(\sqrt{x^2 + y^2}) = q(\rho); \quad (3.60)$$

функция напряжений  $\chi$  будет зависеть также только от  $\rho$ . Отличны от нуля будут перемещения  $u_\rho$ ,  $w$  и напряжения  $\tau_{pz}$ ,  $\sigma_z$ ,  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\varphi$ ; их выражения получим по (3.57) — (3.60), вычеркнув производные по  $\varphi$ .

#### § 4. Определение функций напряжений

1°. Из сказанного в предшествующем параграфе следует, что решение задачи о слое целиком сводится к нахождению функций напряжений; зная последние и произведя над ними определённые дифференциальные операции, находим перемещения и напряжения в любой точке слоя.

Уравнения, служащие для определения функций напряжений, имеют, как мы видели, форму

$$F(D^2) \varphi(x, y) = f(x, y), \quad (4.1)$$

где  $\varphi$  — искомая,  $f$  — заданная функция, а  $F(D^2)$  — целая функция от  $D^2$ , т. е. функция представимая степенным рядом вида

$$F(D^2) = D^{2s} \sum_{k=0}^{\infty} a_k h^{2k} D^{2k} \quad (a_0 \neq 0). \quad (4.2)$$

Например, в задаче растяжения слоя [см. (3.10) и (3.26)]

$$F(D^2) = D^2 \left( 1 + \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) = 2D^2 \left( 1 - \frac{1}{3} h^2 D^2 + \frac{1}{15} h^4 D^4 - \dots \right), \quad (4.3)$$

а в задаче изгиба

$$F(D^2) = D^2 \left( 1 - \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) = \frac{2}{3} h^2 D^4 \left( 1 - \frac{1}{5} h^2 D^2 + \dots \right). \quad (4.4)$$

В первом случае  $s = 1$ , а во втором  $s = 2$ .

2°. Легко указать класс нагрузок, т. е. функций  $f(x, y)$  в уравнении (4.1), для которого разыскание функций напряжений  $\varphi(x, y)$  является совершенно очевидным. Это — полигармонические функции, т. е. функции, удовлетворяющие уравнению

$$D^{2N} f(x, y) = 0 \quad (4.5)$$

(гармонические при  $N=1$ , бигармонические при  $N=2$  и т. д.). В частности, полигармонической функцией является любой полином.

Из (4.2) легко заключить, что при условии (4.5) частным решением дифференциального уравнения (4.1) является  $(N+s)$ -гармоническая функция

$$D^{2(N+s)} \varphi(x, y) = 0. \quad (4.6)$$

Поэтому в разложении  $F(D^2)$  в ряд по степеням  $D^2$  следует удерживать лишь слагаемые до степени  $(N+s-1)$  включительно, и уравнение (4.1) приобретает вид

$$D^{2s} (a_0 + a_1 h^2 D^2 + a_2 h^4 D^4 + \dots + a_{N-1} h^{2(N-1)} D^{2(N-1)}) \varphi = f(x, y) \quad (4.7)$$

В дальнейшем введём вместо координат  $x, y$  новые независимые переменные

$$\zeta = x + iy, \quad \bar{\zeta} = x - iy$$

и будем рассматривать  $\varphi(x, y)$  и  $f(x, y)$  как функции этих переменных. Тогда

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}, \quad \partial_2 = i \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \right), \quad D^2 = 4 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}}, \quad (4.8)$$

и уравнение (4.5) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^{2N} f}{\partial \zeta^N \partial \bar{\zeta}^N} = 0, \quad (4.9)$$

откуда следует, что  $N$ -гармоническая функция  $f(x, y)$  может быть представлена в следующем общем виде:

$$f(x, y) = \frac{1}{4^N} \left[ \frac{\bar{\zeta}^{N-1}}{(N-1)!} f_1(\zeta) + \frac{\bar{\zeta}^{N-2}}{(N-2)!} f_2(\zeta) + \dots + \bar{\zeta} f_{N-1}(\zeta) + f_N(\zeta) + \frac{\zeta^{N-1}}{(N-1)!} \bar{f}_1(\bar{\zeta}) + \frac{\zeta^{N-2}}{(N-2)!} \bar{f}_2(\bar{\zeta}) + \dots + \zeta \bar{f}_{N-1}(\bar{\zeta}) + \bar{f}_N(\bar{\zeta}) \right]$$

или, короче,

$$f = \frac{1}{4^N} \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\zeta}^{N-\alpha}}{(N-\alpha)!} f_\alpha(\zeta) + *, \quad (4.10)$$

причём звёздочкой обозначено сопряжённое выражение, которое для краткости не выписывается. Здесь  $f_1(\zeta), \dots, f_N(\zeta)$  — некоторые аналитические функции,  $\bar{f}_1(\bar{\zeta}), \dots, \bar{f}_N(\bar{\zeta})$  — сопряжённые с ними функции. Любая  $N$ -гармоническая функция может быть представлена в виде (4.10); поэтому функции  $f_\alpha(\zeta)$  должны считаться заданными.

Искомая функция  $\varphi(x, y)$  также может быть записана в форме (4.10):

$$\varphi = \frac{1}{4^{N+s}} \sum_{\alpha=1}^{N+s} \frac{\bar{\zeta}^{N+s-\alpha}}{(N+s-\alpha)!} \varphi_\alpha(\zeta) + *, \quad (4.11)$$

и задача сводится к разысканию функций  $\varphi_\alpha(\zeta)$ .

Имеем:

$$D^{2s} \varphi = \frac{1}{4^s} \frac{\partial^{2s} \varphi}{\partial \zeta^s \partial \bar{\zeta}^s} = \frac{1}{4^N} \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\zeta}^{N-\alpha}}{(N-\alpha)!} \varphi_\alpha^{(s)}(\zeta) + *,$$

и далее

$$D^{2(s+k)} \varphi = \frac{1}{4^{N-k}} \sum_{\alpha=1}^{N-k} \frac{\bar{\zeta}^{N-\alpha-k}}{(N-\alpha-k)!} \varphi_\alpha^{(s+k)}(\zeta) + *. \quad (4.12)$$

Дифференциальное уравнение (4.7) теперь может быть записано в виде

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k h^{2k} D^{2(s+k)} \varphi = \frac{1}{4^N} \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\zeta}^{N-\alpha}}{(N-\alpha)!} f_\alpha(\zeta) + *, \quad (4.13)$$

и по (4.12) получаем:

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k (2h)^{2k} \sum_{\alpha=1}^{N-k} \frac{\bar{\zeta}^{N-\alpha-k}}{(N-\alpha-k)!} \varphi_\alpha^{(s+k)}(\zeta) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\zeta}^{N-\alpha}}{(N-\alpha)!} f_\alpha(\zeta). \quad (4.14)$$

Заменяв индекс суммирования  $\alpha$  на  $\alpha_1 - k$ , получим другую запись левой части:

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k (2h)^{2k} \sum_{\alpha_1=k+1}^N \frac{\bar{\zeta}^{N-\alpha_1}}{(N-\alpha_1)!} \varphi_{\alpha_1-k}^{(s+k)}(\zeta)$$

или, меняя порядок суммирования и возвращаясь к обозначению  $\alpha$  для индекса суммирования:

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\zeta}^{N-\alpha}}{(N-\alpha)!} \sum_{k=0}^{\alpha-1} (2h)^{2k} a_k \varphi_{\alpha-k}^{(s+k)}(\zeta),$$

Подставив это выражение в левую часть (4.14) и сравнивая члены, содержащие одинаковые степени  $\bar{\zeta}$ , приходим к соотношениям

$$\sum_{k=0}^{\alpha-1} (2h)^{2k} a_k \varphi_{\alpha-k}^{(s+k)}(\zeta) = f_\alpha(\zeta), \quad (4.15)$$

причём  $\alpha = 1, 2, \dots, N$ . При  $\alpha = 1$  находим:

$$a_0 \varphi_1^{(s)}(\zeta) = f_1(\zeta), \quad (4.16)$$

откуда следует, что

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{1}{a_0} \frac{1}{(s-1)!} \int_0^\zeta (\zeta - \xi)^{s-1} f_1(\xi) d\xi = \frac{1}{a_0} F_1(\zeta). \quad (4.17)$$

Из (4.15) находим также:

$$\sum_{k=0}^{\alpha-1} (2h)^{2k} a_k \varphi_{\alpha-k}^{(k)}(\zeta) = \frac{1}{(s-1)!} \int_0^\zeta (\zeta - \xi)^{s-1} f_\alpha(\xi) d\xi = F_\alpha(\zeta)$$

или, выделив в левой части первое слагаемое,

$$\varphi_\alpha(\zeta) = \frac{1}{a_0} F_\alpha(\zeta) - \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{\alpha-1} (2h)^{2k} a_k \varphi_{\alpha-k}^{(k)}(\zeta). \quad (4.18)$$

Определив  $\varphi_1(\zeta)$  по (4.17), найдём при  $\alpha = 2$  из (4.18)  $\varphi_2(\zeta)$ ; далее, зная  $\varphi_1(\zeta)$  и  $\varphi_2(\zeta)$  и полагая  $\alpha = 3$  в (4.18), получим  $\varphi_3(\zeta)$  и т. д. Таким образом, получим последовательно

$$\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta), \dots, \varphi_N(\zeta),$$

что и решает задачу разыскания частного решения  $\varphi(x, y)$  дифференциального уравнения (4.1). Функции  $\varphi_{N+1}(\zeta), \dots, \varphi_{N+s}(\zeta)$  в это частное решение не входят и могут не вводиться в рассмотрение.

3°. Изложенный в предыдущем пункте приём пригоден при любом порядке гармоничности левой части уравнения (4.1). В качестве примера примем, что нормальная нагрузка на грань слоя  $z = h$  задаётся бигармонической функцией  $p(x, y)$ , причём будем считать эту функцию положительной при сжатии.

Надо рассмотреть задачу о сжатии слоя силами  $\frac{1}{2} p(x, y)$  по граням  $z = \pm h$  и об изгибе её силами  $\pm \frac{1}{2} p(x, y)$  по этим граням.



Функции напряжений  $\chi$  и  $\psi$  по (3.10) и (3.30) должны быть определены из соотношений

$$\left(1 + \frac{\sin 2hD}{2hD}\right) D^2\chi = -\frac{1}{4G} p(x, y), \quad (4.19)$$

$$\left(1 - \frac{\sin 2hD}{2hD}\right) D^2\psi = -\frac{1}{4Gh} p(x, y), \quad (4.20)$$

откуда, учитывая (4.6), заключаем, что  $\chi$  следует искать как трёх-, а  $\psi$  — как четырёхгармоническую функцию:

$$D^6\chi = 0, \quad D^8\psi = 0. \quad (4.21)$$

Дифференциальное уравнение (4.7) приобретает вид: для сжатия

$$D^2\left(1 - \frac{1}{3} h^2 D^2\right)\chi = -\frac{p(x, y)}{8G} \quad (s = 1) \quad (4.22)$$

и для изгиба

$$D^4\left(1 - \frac{1}{5} h^2 D^2\right)\psi = -\frac{3}{8Gh^3} p(x, y) \quad (s = 2). \quad (4.23)$$

Полагаем согласно (4.10) и (4.11)

$$\left. \begin{aligned} 16p &= \bar{\zeta} p_1(\zeta) + p_2(\zeta) + *, \\ 64\chi &= \frac{1}{2} \bar{\zeta}^2 \chi_1(\zeta) + \bar{\zeta} \chi_2(\zeta) + *, \\ 256\psi &= \frac{1}{6} \bar{\zeta}^3 \psi_1(\zeta) + \frac{1}{2} \bar{\zeta}^2 \psi_2(\zeta) + *, \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

причём члены, содержащие  $\chi_3, \psi_3, \psi_4$ , могут быть опущены,

По (4.17) и (4.18) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \chi_1(\zeta) &= -\frac{1}{8G} \int_0^\zeta p_1(\xi) d\xi, \\ \chi_2(\zeta) &= -\frac{1}{8G} \left[ \int_0^\zeta p_2(\xi) d\xi + \frac{4}{3} h^2 p_1(\zeta) \right], \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

и следовательно,

$$\chi = -\frac{1}{512G} \left[ \frac{1}{2} \bar{\zeta}^2 \int_0^\zeta p_1(\xi) d\xi + \bar{\zeta} \int_0^\zeta p_2(\xi) d\xi + \frac{4}{3} h^2 \bar{\zeta} p_1(\zeta) \right] + *. \quad (4.26)$$

Аналогичное вычисление даёт для задачи изгиба

$$\psi = -\frac{3}{2048 J h^3} \left[ \frac{\bar{\zeta}^3}{6} \int_0^{\zeta} p_1(\xi) (\zeta - \xi) d\xi + \frac{\bar{\zeta}^3}{2} \int_0^{\zeta} p_2(\xi) (\zeta - \xi) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{2}{5} h^2 \bar{\zeta}^2 \int_0^{\zeta} p_1(\xi) d\xi \right] + * \quad (4.27)$$

4°. Рассмотрим теперь случай, когда нагрузка удовлетворяет дифференциальному уравнению свободных колебаний мембраны

$$D^2 f(x, y) = -\gamma^2 f(x, y), \quad (4.28)$$

где  $\gamma^2$  — постоянная (пропорциональная квадрату частоты рассматриваемой формы колебаний). Таковы, например, в декартовых координатах произведения тригонометрических функций вида

$$\cos \alpha x \cos \beta x, \quad \sin \alpha x \sin \beta x \quad \text{и т. д.} \quad (\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2)$$

или в комплексной форме

$$f(x, y) = e^{i(\alpha x + \beta y)}. \quad (4.29)$$

В полярных координатах это будут произведения вида

$$f(\rho, \varphi) = J_n(\gamma \rho) e^{in\varphi}, \quad (4.30)$$

где  $J_n(\gamma \rho)$  — бесселева функция порядка  $n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ). Действительно, в полярных координатах

$$D^2 = \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho + \frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi^2. \quad (4.31)$$

Но  $J_n(\gamma \rho)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left[ \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho + \left( \gamma^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \right] J_n(\gamma \rho) = 0 \quad (4.32)$$

и, значит,

$$D^2 J_n(\gamma \rho) e^{in\varphi} = e^{in\varphi} \left( \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho - \frac{n^2}{\rho^2} \right) J_n(\gamma \rho) = -\gamma^2 e^{in\varphi} J_n(\gamma \rho), \quad (4.33)$$

что и требовалось. В частности, при  $n = 0$

$$D^2 J_0(\gamma \rho) = -\gamma^2 J_0(\gamma \rho). \quad (4.34)$$

Из соотношения (4.28) сразу же следует, что

$$D^4 f(x, y) = (-\gamma^2)^2 f(x, y) \quad D^6 f(x, y) = (-\gamma^2)^3 f(x, y), \dots$$

и вообще

$$D^{2k} f(x, y) = (-\gamma^2)^k f(x, y). \quad (4.35)$$

Поэтому

$$F(D^2)f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^{2k}f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-\gamma^2)^k f(x, y)$$

и, значит,

$$F(D^2)f(x, y) = F(-\gamma^2)f(x, y), \quad (4.36)$$

т. е. применение оператора  $F(D^2)$  к функции, удовлетворяющей уравнению (4.28), сводится к умножению этой функции на  $F(-\gamma^2)$ , т. е. на результат замены в выражении  $F(D)^2$  лапласиана  $D^2$  числом  $(-\gamma^2)$ .

Полагаем теперь в (4.1)

$$\varphi(x, y) = Af(x, y),$$

где  $A$  — постоянная. Тогда

$$F(D^2)\varphi(x, y) = AF(-\gamma^2)f(x, y) = f(x, y)$$

и, значит,

$$A = \frac{1}{F(-\gamma^2)}, \quad \text{т. е.} \quad \varphi(x, y) = \frac{f(x, y)}{F(-\gamma^2)}. \quad (4.37)$$

Таково будет (конечно, частное) решение уравнения для функции напряжений, если его правая часть удовлетворяет дифференциальному уравнению колебаний мембраны. Заметим, что в задаче растяжения слоя

$$F(-\gamma^2) = -\gamma^2 \left(1 + \frac{\text{sh } 2\gamma h}{2\gamma h}\right) = -\frac{\gamma}{2h} (2h\gamma + \text{sh } 2h\gamma) = -\frac{\gamma}{2h} \Delta(\gamma h), \quad (4.38)$$

а в задаче изгиба

$$F(-\gamma^2) = -\gamma^2 \left(1 - \frac{\text{sh } 2\gamma h}{2\gamma h}\right) = -\frac{\gamma}{2h} (2h\gamma - \text{sh } 2\gamma h) = -\frac{\gamma}{2h} \Delta_1(\gamma h). \quad (4.39)$$

Обозначения  $\Delta(\gamma h)$  и  $\Delta_1(\gamma h)$  будут использованы ниже.

Поскольку  $\varphi(x, y)$  представлено в форме (4.37), также удовлетворяющей дифференциальному уравнению (4.28), вычисление любой операции вида

$$\Psi(ziD, hiD)\varphi(x, y), \quad (4.40)$$

с которым, как указано в § 3, надо иметь дело при переходе от функций напряжений к перемещениям и напряжениям, сводится к умножению  $\varphi$  на результат замены в (4.40) буквы  $iD$  числом  $\gamma$ ; таким образом,

$$\Psi(ziD, hiD)\varphi(x, y) = \Psi(\gamma z, \gamma h)\varphi(x, y). \quad (4.41)$$

5°. Предположим теперь, что нагрузка  $f(x, y)$  может быть представлена как конечная сумма или бесконечный ряд вида

$$f(x, y) = \sum_k c_k f_k(x, y), \quad (4.42)$$

где  $f_k(x, y)$  суть решения дифференциального уравнения колебаний мембраны

$$D^2 f_k(x, y) = -\gamma^2 f_k(x, y). \quad (4.43)$$

Тогда и функция напряжений  $\varphi(x, y)$  представится согласно (4.37) в форме такой же суммы

$$\varphi(x, y) = \sum_k \frac{c_k f_k(x, y)}{F(-\gamma_k^2)}. \quad (4.44)$$

Полученное решение имеет весьма общий характер, так как оно соответствует любым нагрузкам  $f(x, y)$ , представимым двойными тригонометрическими рядами. При нагружении по круговой области нагрузку следует представлять рядом вида

$$f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \sum_s \sum_n (A_{ns} \cos n\varphi + B_{ns} \sin n\varphi) J_n\left(\lambda_s \frac{\rho}{\rho_0}\right), \quad (4.45)$$

где  $\rho_0$  — радиус круга нагружения, а  $\lambda_s$  — положительные корни уравнения

$$J_n(\lambda) = 0. \quad (4.46)$$

Коэффициенты  $A_{ns}$  и  $B_{ns}$  определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} A_{ns} &= \frac{2}{\pi \rho_0^2 [J'_n(\lambda_s)]^2} \int_0^{\rho_0} \rho J_n\left(\lambda_s \frac{\rho}{\rho_0}\right) d\rho \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \cos n\varphi d\varphi, \\ B_{ns} &= \frac{2}{\pi \rho_0^2 [J'_n(\lambda_s)]^2} \int_0^{\rho_0} \rho J_n\left(\lambda_s \frac{\rho}{\rho_0}\right) d\rho \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sin n\varphi d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

(выражение  $A_{0s}$  нужно разделить на два).

Роль  $\gamma_s$  в соотношении (4.45) играют числа  $\frac{1}{\rho_0} \lambda_s$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) &= \\ &= \sum_s \sum_n \frac{1}{F\left(\frac{-\lambda_s^2}{\rho_0^2}\right)} (A_{ns} \cos n\varphi + B_{ns} \sin n\varphi) J_n\left(\frac{\lambda_s \rho}{\rho_0}\right). \end{aligned} \quad (4.48)$$

В частности, для радиально-симметричного нагружения

$$f(\rho) = \sum_s A_s J_0 \left( \lambda_s \frac{\rho}{\rho_0} \right), \quad (4.49)$$

где  $\lambda_s$  — положительные корни уравнения

$$J_0(\lambda) = 0, \quad (4.50)$$

и коэффициенты

$$A_s = \frac{2}{[J_1(\lambda_s)]^2 \rho_0^2} \int_0^{\rho_0} f(\rho) J_0 \left( \frac{\lambda_s \rho}{\rho_0} \right) \rho d\rho. \quad (4.51)$$

Тогда

$$\varphi(\rho) = \sum_s \frac{A_s}{F \left( \frac{-\lambda_s^2}{\rho^2} \right)} J_0 \left( \frac{\lambda_s \rho}{\rho_0} \right). \quad (4.52)$$

Значения  $\lambda_s$  и  $J_1(\lambda_s)$  приводятся во всех таблицах бесселевых функций.

6°. Сказанное в предыдущем пункте распространяется на случай представимости нагрузки  $f(x, y)$  не суммой, а интегралом, например интегралом Фурье

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta. \quad (4.53)$$

Здесь через  $\Psi(\alpha, \beta)$  обозначена трансформанта Фурье функции  $f(x, y)$ :

$$\Psi(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \int f(x, y) e^{-i(\alpha x + \beta y)} dx dy, \quad (4.54)$$

где  $\Omega$  — область нагружения (область, в которой  $f(x, y)$  отлична от нуля). Роль функций  $f_k(x, y)$  в ряде (4.42) играет функция  $e^{i(\alpha x + \beta y)}$ , удовлетворяющая, как выше указывалось, дифференциальному уравнению колебаний мембраны.

Аналогично (4.44) выражение функции напряжений в форме интеграла типа Фурье будет:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(\alpha, \beta)}{F(-\gamma^2)} e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta. \quad (4.55)$$

Рассмотрим ещё случай радиально-симметричного нагружения. Полагаем

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \alpha = \gamma \cos \psi, \quad \beta = \gamma \sin \psi \quad (4.56)$$

и заменим выражение

$$e^{\pm i(\alpha x + \beta y)} = e^{\pm i r \gamma \cos(\varphi - \psi)}$$

его представлением рядом Фурье

$$e^{\pm i r \gamma \cos(\varphi - \psi)} = J_0(\gamma r) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} (\pm i)^s J_s(\gamma r) \cos s(\varphi - \psi). \quad (4.57)$$

Интегрирование в (4.54) теперь надо вести по  $\rho$  в пределах  $(0, \rho_0)$ , а по  $\varphi$  в пределах  $(0, 2\pi)$ , где  $\rho_0$  — радиус круга загрузки. Элемент площади  $dx dy$  заменяется на  $\rho d\rho d\varphi$ . Используя разложение (4.57), получим теперь выражение трансформанты Фурье

$$\Psi(\alpha, \beta) = \int_0^{\rho_0} J_0(\gamma \rho) f(\rho) \rho d\rho = \Psi(\gamma) \quad (4.58)$$

и представление  $f(\rho)$  в форме интеграла Фурье — Ганкеля

$$f(\rho) = \int_0^{\infty} J_0(\gamma \rho) \Psi(\gamma) \gamma d\gamma. \quad (4.59)$$

Выражение функции напряжений  $\varphi(\rho)$  поэтому будет [ср. (4.55)]

$$\varphi(\rho) = \int_0^{\infty} \frac{\Psi(\gamma)}{r(-\gamma^2)} J_0(\gamma \rho) \gamma d\gamma. \quad (4.60)$$

Заметим, что во многих случаях интеграл или ряд для функции напряжений может оказаться расходящимся. Это, однако, не делает неприменимым предложенный способ решения, так как в разумно поставленной задаче перемещения и напряжения, вычисленные путём формального применения нужных дифференциальных операций над найденной указанным способом функцией напряжений, окажутся в конечном счёте представленными сходящимися интегралами (или рядами) даже и тогда, когда выражения для функций напряжений не сходятся. Но интерес представляют, конечно, сами эти величины — перемещения и напряжения, а не функция напряжений, имеющая только вспомогательное значение.

## § 5. Сжатие упругого слоя

Рассматривается равновесие упругого слоя, покоящегося на гладком упругом основании (плоскость  $z = 0$ ) и сжимаемого по верхней плоскости ( $z = h$ ) распределённой нормальной нагрузкой  $q(x, y)$ . В конце § 2 указывалось, что эта задача не отличается от задачи о сжатии упругого слоя удвоенной толщины, нагруженного теми же силами по обоим торцам  $z = \pm h$ .

1°. Ход решения задачи уже намечен выше. Надо начать с составления выражения для функции напряжений  $\chi$ ; она должна быть определена из уравнения (3.10), которое в нашем случае мы запишем, предполагая  $q > 0$  при сжатии, в виде

$$\left(1 + \frac{\sin 2hD}{2hD}\right) D^2 \chi = -\frac{q(x, y)}{2J}. \quad (5.1)$$

Найдя функцию  $\chi$  и произведя над ней операции, указываемые формулами (3.13)—(3.19), получим перемещения и напряжения, и, таким образом, задачу можно будет считать решённой.

Как указывалось в § 4, для определения  $\chi$  следует представить нагрузку в форме интеграла Фурье

$$q(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \quad (5.2)$$

где  $Q(\alpha, \beta)$  — трансформанта Фурье функции  $q(x, y)$ :

$$Q(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(x, y) e^{-i(\alpha x + \beta y)} dx dy. \quad (5.3)$$

Теперь, вспоминая правило, выражаемое формулой (4.55), а также воспользовавшись (4.38), получим:

$$\chi(x, y) = \frac{h}{2\pi J} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta)}{\gamma \Delta(\gamma h)} e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \quad (5.4)$$

где, напомним,  $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ . Этот интеграл расходится, так как знаменатель обращается при  $\gamma = 0$  в нуль, как  $\gamma^2$ . Но, как указывалось в конце § 4, на это обстоятельство можно не обращать внимания: получающиеся ниже с помощью функции напряжений  $\chi(x, y)$ , формально представленной интегралом (5.4), перемещения и напряжения представятся уже сходящимися интегралами. Впрочем, функцию напряжений можно представить и в форме интеграла

$$\chi(x, y) = \frac{h}{2\pi J} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta)}{\gamma \Delta(\gamma h)} (e^{i(\alpha x + \beta y)} - 1) d\alpha d\beta, \quad (5.4')$$

не являющегося интегралом Фурье, так как  $e^{i(\alpha x + \beta y)}$  не входит общим множителем в подинтегральное выражение. Последнее теперь при  $\gamma = 0$  обращается в бесконечность, как  $\frac{1}{\gamma}$ ; поэтому интеграл (5.4') сходится, что можно обнаружить, сделав переход к полярным координатам, при котором элемент площади  $d\alpha d\beta$  заменится на  $\gamma d\gamma d\psi$ .

Поскольку выражения (5.4') и (5.4) отличаются друг от друга только аддитивно входящей (бесконечно большой) постоянной

$$-\frac{h}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta)}{\gamma \Delta(\gamma h)} d\alpha d\beta,$$

оба они, во-первых, удовлетворяют уравнению (5.1) и, во-вторых, дают одинаковые выражения для перемещений и напряжений [см. (3.13)—(3.19)].

Теперь остаётся применить правило, выражаемое формулой (4.41); тогда по (3.13)—(3.14) получим перемещения

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{hl}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta) \alpha}{\gamma \Delta(\gamma h)} X_1(\gamma z) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \\ v &= -\frac{hl}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta) \beta}{\gamma \Delta(\gamma h)} X_1(\gamma z) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \\ w &= -\frac{h}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta)}{\gamma \Delta(\gamma h)} X_2(\gamma z) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Здесь и в последующем функции, вызванные выше [см. (3.11)] через  $X_k(\gamma z, \gamma h)$ , для сокращения записи обозначены  $X_k(\gamma z)$ .

Составим ещё по (3.15) и (3.16) выражения напряжений

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= -\frac{hl}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta) \alpha}{\gamma \Delta(\gamma h)} X_3(\gamma z) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \\ \tau_{yz} &= -\frac{hl}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta) \beta}{\gamma \Delta(\gamma h)} X_3(\gamma z) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \\ \sigma_z &= -\frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta) \gamma}{\Delta(\gamma h)} X_4(\gamma z) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

2°. Природа рассматриваемой механической задачи подсказывает, что сходимость интегралов, дающих перемещения и напряжения, может быть значительно усилена, если выделить из них слагаемые, соответствующие действию заданной нормальной нагрузки на упругое полупространство.

Рассмотрим упругое полупространство  $-\infty < z < h$ , нагруженное нормальной нагрузкой  $q(x, y)$  по плоскости  $z = h$ ; соответствующие перемещения  $u_1, v_1, w_1$  могут быть определены, как



было указано в § 5 главы 2, с помощью потенциалов  $\omega$  и  $\omega_1$ , которые теперь назовём  $\omega'$  и  $\omega'_1$ .

Точно так же могут быть определены через соответствующие потенциалы  $\omega''$  и  $\omega''_1$  перемещения  $u_2$ ,  $v_2$ ,  $w_2$  в полупространстве  $-h < z < \infty$ , нагруженном по плоскости  $z = -h$ .

Рассмотрим суммы этих перемещений

$$U = u_1 + u_2, \quad V = v_1 + v_2, \quad W = w_1 + w_2. \quad (5.7)$$

Их первое выражение будет нам известно через упомянутые потенциалы. Но эти потенциалы могут быть представлены интегралами Фурье, с помощью которых перемещениям (5.7) можно дать второе выражение, которое будет иметь структуру, аналогичную формулам (5.5). Поэтому выделение слагаемых, соответствующих загрузке полупространств, можно провести, если из перемещений (5.5) вычесть второе выражение перемещений (5.7) и прибавить к ним первое их выражение.

Нам надо представить в форме интеграла Фурье потенциал  $\omega$ :

$$\omega = \iint_{\Sigma} \frac{q(x', y')}{R'} dx' dy', \quad (5.8)$$

а для этого следует в такой же форме записать выражение

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + \zeta^2}}. \quad (5.9)$$

Будем исходить из доказываемого в теории бесселевых функций соотношения

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}} = \int_0^{\infty} J_0(\gamma \rho) e^{-\gamma \zeta} d\gamma \quad (\zeta > 0). \quad (5.10)$$

Из него и из (4.59) следует, что трансформантой Фурье функции  $\frac{1}{R}$  является

$$\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma \zeta},$$

и, значит, по (4.53)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + \zeta^2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma \zeta + i(\alpha x + \beta y)} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma}. \quad (5.11)$$

Можно написать теперь

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma \zeta + i[\alpha(x-x') + \beta(y-y')]} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma} \quad (5.12)$$

и далее

$$\begin{aligned} \omega(x, y, \zeta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{Q}} \int q(x', y') dx' dy' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma\zeta + i[\alpha(x-x') + \beta(y-y')]} \times \\ &\times \frac{d\alpha d\beta}{\gamma} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma\zeta + i(\alpha x + \beta y)} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma} \int_{\mathcal{Q}} \int q(x', y') e^{-i(\alpha x' + \beta y')} dx' dy'. \end{aligned}$$

Теперь по (5.3) получаем искомое представление

$$\omega(x, y, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma\zeta + i(\alpha x + \beta y)} \frac{Q(\alpha, \beta)}{\gamma} d\alpha d\beta. \quad (5.13)$$

По (5.18) и (5.25) главы 2 имеем:

$$\omega_1(x, y, \zeta) = \int_{\mathcal{Q}} \int \ln(R' + \zeta) q(x', y') dx' dy' = - \int_{\zeta}^{\infty} \omega d\zeta, \quad (5.14)$$

и представление этого потенциала в форме интеграла Фурье будет:

$$\omega_1 = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma\zeta + i(\alpha x + \beta y)} Q(\alpha, \beta) \frac{d\alpha d\beta}{\gamma^2}. \quad (5.15)$$

Этот интеграл не сходится, но формально вычисляемые по нему производные

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial y},$$

которые только и нужны нам, выражаются сходящимися интегралами.

Теперь вспомним выражения (5.27) главы 2 для перемещений точек упругого полупространства через потенциалы  $\omega$  и  $\omega_1$ :

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{4\pi J} \left( \zeta \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{m-2}{m} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right), \\ v &= -\frac{1}{4\pi J} \left( \zeta \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{m-2}{m} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right), \\ w &= -\frac{1}{4\pi J} \left( \zeta \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} - \frac{2(m-1)}{m} \omega \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Они по (5.13) и (5.15) преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{i}{4\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta) \alpha}{\gamma^2} \left( \gamma \zeta - \frac{m-2}{m} \right) e^{-\gamma \zeta + i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \\ v &= -\frac{i}{4\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta) \beta}{\gamma^2} \left( \gamma \zeta - \frac{m-2}{m} \right) e^{-\gamma \zeta + i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \\ w &= \frac{1}{4\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta)}{\gamma} \left( \gamma \zeta + \frac{2(m-1)}{m} \right) e^{-\gamma \zeta + i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta. \end{aligned} \right\} (5.17)$$

Полагая в этих формулах  $\zeta = h - z$ , получим перемещения  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $(-w_1)$ ; знак в последнем выражении изменён, так как оси  $z$  и  $\zeta$  имеют в этом случае противоположные направления. Точно так же, подставив  $\zeta = h + z$ , получим  $u_2$ ,  $v_2$ ,  $w_2$ . Таким образом, по (5.7) получаем, во-первых,

$$\left. \begin{aligned} U &= -\frac{1}{4\pi G} \left[ (h-z) \frac{\partial \omega'}{\partial x} + (h+z) \frac{\partial \omega''}{\partial x} + \frac{m-2}{m} \left( \frac{\partial \omega'_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega''_1}{\partial x} \right) \right], \\ V &= -\frac{1}{4\pi G} \left[ (h-z) \frac{\partial \omega'}{\partial y} + (h+z) \frac{\partial \omega''}{\partial y} + \frac{m-2}{m} \left( \frac{\partial \omega'_1}{\partial y} + \frac{\partial \omega''_1}{\partial y} \right) \right], \\ W &= -\frac{1}{4\pi G} \left[ (h-z) \frac{\partial \omega'}{\partial z} + (h+z) \frac{\partial \omega''}{\partial z} + \frac{2(m-1)}{m} (\omega' - \omega'') \right], \end{aligned} \right\} (5.18)$$

где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= \int_{\mathcal{Q}} \int \frac{q(x', y')}{R'_1} dx' dy', & \omega'' &= \int_{\mathcal{Q}} \int \frac{q(x', y')}{R'_2} dx' dy', \\ \omega'_1 &= \int_{\mathcal{Q}} \int \ln(R'_1 + h - z) q(x', y') dx' dy', \\ \omega''_1 &= \int_{\mathcal{Q}} \int \ln(R'_2 + h + z) q(x', y') dx' dy', \\ R'_1 &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (h-z)^2}, \\ R'_2 &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+h)^2}. \end{aligned} \right\} (5.19)$$

Во-вторых, эти же величины  $U$ ,  $V$ ,  $W$  выразятся формулами

$$\left. \begin{aligned} U &= -\frac{i}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta) \alpha}{\gamma^2} e^{i(\alpha x + \beta y)} \left( \gamma h \operatorname{ch} \gamma z - \gamma z \operatorname{sh} \gamma z - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m-2}{m} \operatorname{ch} \gamma z \right) e^{-\gamma h} d\alpha d\beta, \\ V &= -\frac{i}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta) \beta}{\gamma^2} e^{i(\alpha x + \beta y)} \left( \gamma h \operatorname{ch} \gamma z - \gamma z \operatorname{sh} \gamma z - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m-2}{m} \operatorname{ch} \gamma z \right) e^{-\gamma h} d\alpha d\beta, \\ W &= -\frac{1}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta)}{\gamma} e^{i(\alpha x + \beta y)} \left( \gamma h \operatorname{sh} \gamma z - \gamma z \operatorname{ch} \gamma z + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2m-2}{m} \operatorname{sh} \gamma z \right) e^{-\gamma h} d\alpha d\beta. \end{aligned} \right\} (5.20)$$

Остается из перемещений (5.5) вычесть эти выражения и прибавить равные величины (5.18); после простых преобразований получим:

$$\left. \begin{aligned} u &= U - \frac{ih}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta) \alpha}{\gamma \Delta(\gamma h)} X_1^*(\gamma z) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \\ v &= V - \frac{ih}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta) \beta}{\gamma \Delta(\gamma h)} X_1^*(\gamma z) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \\ w &= W - \frac{1}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta)}{\gamma \Delta(\gamma h)} X_2^*(\gamma z) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \end{aligned} \right\} (5.21)$$

где обозначено

$$\left. \begin{aligned} X_1^*(\gamma z) &= e^{-h\gamma} \left[ a(h\gamma) \operatorname{ch} \gamma z + b(h\gamma) \left( \frac{z}{h} \operatorname{sh} \gamma z + \frac{m-2}{m\gamma h} \operatorname{ch} \gamma z \right) \right], \\ X_2^*(\gamma z) &= e^{-h\gamma} \left[ h\gamma a(h\gamma) \operatorname{sh} \gamma z + b(h\gamma) \left( \gamma z \operatorname{ch} \gamma z - \frac{2m-2}{m} \operatorname{sh} \gamma z \right) \right], \\ a(h\gamma) &= e^{-h\gamma} \operatorname{ch} \gamma h - 2h\gamma, \quad b(h\gamma) = e^{-h\gamma} \operatorname{sh} \gamma h + 2h\gamma. \end{aligned} \right\} (5.22)$$

Интегралы (5.20) имеют тот же вид, что и (5.5). Существенное различие, обуславливающее их гораздо более быструю сходимость, состоит в том, что функции  $X_1^*$  и  $X_2^*$  гораздо медленнее, чем  $X_1$  и  $X_2$ , возрастают при стремлении параметра  $\gamma h$  к бесконечности; например,

при  $z = h$  эти функции возрастают как  $\gamma h$ , тогда как порядок возрастания  $X_1$  и  $X_2$  будет  $\gamma h e^{2\gamma h}$ .

Составим ещё выражения напряжений

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= T_{zx} - \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta) \alpha}{\gamma \Delta(\gamma h)} X_3^*(\gamma z) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \\ \tau_{yz} &= T_{yz} - \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta) \beta}{\gamma \Delta(\gamma h)} X_3^*(\gamma z) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \\ \sigma_z &= \Sigma_z - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta)}{\Delta(\gamma h)} X_4^*(\gamma z) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \end{aligned} \right\} (5.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} X_3^*(\gamma z) &= e^{-\gamma h} [\gamma h a (h\gamma) \operatorname{sh} \gamma z + b (h\gamma) \gamma z \operatorname{ch} \gamma z], \\ X_4^*(\gamma z) &= e^{-\gamma h} [\gamma h a (h\gamma) \operatorname{ch} \gamma z + (\gamma z \operatorname{sh} \gamma z - \operatorname{ch} \gamma z) b (h\gamma)] \end{aligned} \right\} (5.24)$$

и  $T_{zx}$ ,  $T_{yz}$ ,  $\Sigma_z$  — напряжения, соответствующие перемещениям  $U$ ,  $V$ ,  $W$ .

Рассмотрим, например, равномерное нагружение (интенсивности  $q_0$ ) по площади прямоугольника со сторонами  $2a$  и  $2b$ . Тогда по (4.54)

$$Q(\alpha, \beta) = \frac{q_0}{2\pi} \int_{-a}^a e^{-i\alpha x} dx \int_{-b}^b e^{-i\beta y} dy = \frac{2q_0}{\pi} \frac{\sin \alpha a \sin \beta b}{\alpha \beta}. \quad (5.25)$$

Чтобы представить формулы в вещественной форме, заменим при подстановке в (5.21)

$$e^{i(\alpha x + \beta y)} = \cos(\alpha x + \beta y) + i \sin(\alpha x + \beta y)$$

и учтём, что интеграл от нечётной функции в пределах  $(-\infty, \infty)$  даёт нуль. Получим:

$$\left. \begin{aligned} u &= U + \frac{2q_0 h}{\pi^2 G} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha a \sin \beta b}{\Delta(\gamma h) \beta \gamma} X_1^*(\gamma z) \sin \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta, \\ v &= V + \frac{2q_0 h}{\pi^2 G} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha a \sin \beta b}{\Delta(\gamma h) \gamma \alpha} X_1^*(\gamma z) \cos \alpha x \sin \beta y d\alpha d\beta, \\ w &= W - \frac{2q_0}{\pi^2 G} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha a \sin \beta b}{\Delta(\gamma h) \alpha \beta \gamma} X_2^*(\gamma z) \cos \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta. \end{aligned} \right\} (5.26)$$

Конечно, не представит труда и составление формул для напряжений.

3°. В случае радиально-симметричной нагрузки следует, конечно, перейти в вышеприведённых формулах к полярным координатам и проделать интегрирование по  $\psi$ . Получим:

$$\left. \begin{aligned} u_p &= U_p + \frac{h}{G} \int_0^{\infty} \frac{Q(\gamma)}{\Delta(\gamma h)} X_1^*(\gamma z) J_1(\gamma \rho) \gamma d\gamma, \\ w &= W - \frac{1}{G} \int_0^{\infty} \frac{Q(\gamma)}{\Delta(\gamma h)} X_2^*(\gamma z) J_0(\gamma \rho) d\gamma, \\ \tau_{z\rho} &= T_{z\rho} + 2 \int_0^{\infty} \frac{Q(\gamma)}{\Delta(\gamma h)} X_3^*(\gamma z) J_1(\gamma \rho) \gamma d\gamma, \\ \sigma_z &= \Sigma_z - 2 \int_0^{\infty} \frac{Q(\gamma)}{\Delta(\gamma h)} X_4^*(\gamma z) J_0(\gamma \rho) \gamma d\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

В частности, при равномерном нагружении интенсивности  $q_0$  по кругу радиуса  $\rho_0$  по (4.58) имеем:

$$Q(\gamma) = q_0 \int_0^{\rho_0} \rho J_0(\gamma \rho) d\rho = \frac{q_0 \rho_0}{\gamma} J_1(\gamma \rho_0). \quad (5.28)$$

Случай сосредоточенной силы  $Q_0$  получим отсюда предельным переходом, полагая

$$\rho_0 \rightarrow 0 \text{ и } \pi \rho_0^2 q_0 \rightarrow Q_0$$

и замечая, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{J_1(\gamma \rho)}{\gamma \rho} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, трансформанта Фурье, соответствующая действию сосредоточенной силы, равна

$$Q(\gamma) = \frac{Q_0}{2\pi}, \quad (5.29)$$

что можно было бы получить также из (5.25).

Итак, при сжатии слоя сосредоточенной силой

$$\left. \begin{aligned} u_p &= U_p + \frac{Q_0 h}{2\pi J} \int_0^\infty \frac{J_1(\gamma \rho)}{\Delta(\gamma h)} X_1^*(\gamma z) \gamma d\gamma, \\ w &= W - \frac{Q_0}{2\pi J} \int_0^\infty \frac{J_0(\gamma \rho)}{\Delta(\gamma h)} X_2^*(\gamma z) d\gamma, \\ \tau_{zp} &= T_{zp} + \frac{Q_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{J_1(\gamma \rho)}{\Delta(\gamma h)} X_3^*(\gamma z) \gamma d\gamma, \\ \sigma_z &= \Sigma_z - \frac{Q_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{J_0(\gamma \rho)}{\Delta(\gamma h)} X_4^*(\gamma z) \gamma d\gamma, \end{aligned} \right\} (5.30)$$

причём в этом случае

$$\left. \begin{aligned} U_p &= \frac{Q_0}{4\pi J} \left[ \rho \left( \frac{h-z}{R_1^3} + \frac{h+z}{R_2^3} \right) - \frac{m-2}{m\rho} \left( 2 - \frac{h-z}{R_1} - \frac{h+z}{R_2} \right) \right], \\ W &= -\frac{Q_0}{4\pi J} \left[ \frac{(h-z)^2}{R_1^3} - \frac{(h+z)^2}{R_2^3} + \frac{2(m-1)}{m} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right], \\ T_{zp} &= \frac{3Q_0 \rho}{2\pi} \left[ \frac{(h-z)^2}{R_1^5} - \frac{(h+z)^2}{R_2^5} \right], \\ \Sigma_z &= -\frac{3Q_0}{2\pi} \left[ \frac{(h-z)^3}{R_1^5} + \frac{(h+z)^3}{R_2^5} \right], \end{aligned} \right\} (5.31)$$

где

$$R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}, \quad R_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}.$$

Вычисление хорошо сходящихся интегралов в выражениях (5.30) проводится одним из способов численного интегрирования.

4°. Имея решение для сосредоточенной силы, можно с помощью обычного процесса суммирования вернуться к случаю распределённой нагрузки  $q(x, y)$ ; при этом получится решение, отличное по форме от (5.21). Пусть  $\Omega$  обозначает область загрузки на плоскости  $z = h$ ,  $(\rho, \varphi, z)$  — цилиндрические координаты точки наблюдения  $M$ ,  $\tilde{\omega}$  — расстояние от проекции  $P$  этой точки на плоскость  $z = h$  до точки приложения  $P'(\rho', \varphi')$  элементарной нагрузки  $q d\omega'$  (рис. 16). Очевидно, что

$$\tilde{\omega}^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi'). \quad (5.32)$$

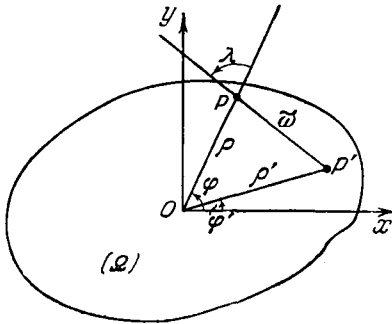
Перемещение  $w$  получим, заменив в интеграле (5.30)

$$Q_0 J_0(\gamma \rho) \text{ на } \int_{\Omega} \int q(\rho' \cos \varphi', \rho' \sin \varphi') J_0(\gamma \tilde{\omega}) \rho' d\rho' d\varphi'. \quad (5.33)$$

Элементарная нагрузка  $q d\omega'$  в точке  $P'$  создаёт в направлении  $P'P$  в точке  $M$  перемещение, которое получим, заменив в выражении (5.30) для  $u_p$

$$Q_0 J_1(\gamma \rho) \text{ на } q(\rho' \cos \varphi', \rho' \sin \varphi') J_1(\gamma \tilde{\omega}) \rho' d\rho' d\varphi'. \quad (5.34)$$

Это выражение теперь нужно спроектировать на направления  $\rho$  и  $\varphi$  цилиндрической системы координат в точке  $P$  (или  $M$ ); для этого следует его умножить на  $\cos \lambda$  и соответственно на  $\sin \lambda$ :



$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{\rho - \rho' \cos(\varphi - \varphi')}{\tilde{\omega}}, \\ \sin \lambda &= \frac{\rho' \sin(\varphi - \varphi')}{\tilde{\omega}} \end{aligned} \right\} (5.35)$$

( $\lambda$  — угол при вершине  $P$  в треугольнике  $PP'O$ ,  $O$  — начало координат). Итак, чтобы получить  $u_p$  и  $u_\varphi$ , надо заменить в интеграле (5.30) для  $u_p$ :

$$Q_0 J_1(\gamma \rho) \text{ на } \int_{\Omega} \int q(\rho' \cos \varphi', \rho' \sin \varphi') J_1(\gamma \tilde{\omega}) \frac{\rho - \rho' \cos(\varphi - \varphi')}{\tilde{\omega}} \rho' d\rho' d\varphi' \quad (5.36)$$

и соответственно на

$$\int_{\Omega} \int q(\rho' \cos \varphi', \rho' \sin \varphi') J_1(\gamma \tilde{\omega}) \frac{\rho' \sin(\varphi - \varphi')}{\tilde{\omega}} \rho' d\rho' d\varphi'. \quad (5.37)$$

При вычислении полученных интегралов следует использовать теорему сложения бесселевых функций

$$J_0(\gamma \tilde{\omega}) = J_0(\gamma \rho) J_0(\gamma \rho') + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\gamma \rho) J_n(\gamma \rho') \cos n(\varphi - \varphi') \quad (5.38)$$

и следствия из неё, получающиеся дифференцированием по  $\rho$  и по  $\varphi$ . Замечая, что

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \rho} = \frac{\rho - \rho' \cos(\varphi - \varphi')}{\tilde{\omega}}, \quad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \varphi} = \frac{\rho \rho' \sin(\varphi - \varphi')}{\tilde{\omega}} \quad (5.39)$$



и вспомнив соотношения

$$J'_n(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)], \quad \frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x),$$

получим:

$$J_1(\gamma\omega) \frac{\rho - \rho' \cos(\varphi - \varphi')}{\omega} = J_1(\gamma\rho) J_0(\gamma\rho') + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [J_{n+1}(\gamma\rho) - J_{n-1}(\gamma\rho)] J_n(\gamma\rho') \cos n(\varphi - \varphi'), \quad (5.40)$$

$$J_1(\gamma\tilde{\omega}) \frac{\rho' \sin(\varphi - \varphi')}{\omega} = \sum_{n=1}^{\infty} [J_{n+1}(\gamma\rho) + J_{n-1}(\gamma\rho)] J_n(\gamma\rho') \sin n(\varphi - \varphi'). \quad (5.41)$$

Далее следует представить нагрузку  $q$  ( $\rho' \cos \varphi'$ ,  $\rho' \sin \varphi'$ ) в форме ряда по  $\cos k\varphi'$  и  $\sin k\varphi'$ ; вычисление интегралов (5.33), (5.36) и (5.37) тогда не должно представить труда.

## § 6. Изгиб упругого слоя

1°. Рассматривается равновесие упругого слоя, нагруженного по торцовым поверхностям нормальными силами, направленными в одну сторону:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } z = h \quad \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_z = -p(x, y), \\ \text{при } z = -h \quad \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_z = p(x, y). \end{array} \right\} \quad (6.1)$$

Равновесие возможно при выполнении условий статики

$$\left. \begin{array}{l} \int_{\Omega} \int p(x, y) dx dy = 0, \\ \int_{\Omega} \int yp(x, y) dx dy = 0, \\ \int_{\Omega} \int xp(x, y) dx dy = 0, \end{array} \right\} \quad (6.2)$$

выражающих, что главный вектор и главные моменты относительно осей  $x$  и  $y$  системы внешних сил, приложенной к слою, равны нулю. Вследствие этих условий трансформанта Фурье

$$P(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \int e^{-i(\alpha x + \beta y)} p(x, y) dx dy$$

и её первые производные по  $\alpha$  и  $\beta$  при  $\alpha = \beta = 0$  обратятся в нуль:

$$\left. \begin{aligned} P(0, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \int_{\Omega} p(x, y) dx dy = 0, \\ \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\beta=0} &= \frac{-l}{2\pi} \int_{\Omega} \int_{\Omega} xp(x, y) dx dy = 0, \\ \left(\frac{\partial P}{\partial \beta}\right)_{\alpha=\beta=0} &= \frac{-l}{2\pi} \int_{\Omega} \int_{\Omega} yp(x, y) dx dy = 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

и разложение функции  $P(\alpha, \beta)$  в ряд Маклорена в области начала координат начнётся с членов второго порядка.

Рассмотрим, например, загрузку сосредоточенной силой  $P_0$  и противоположно направленной нагрузкой, распределённой по линии — окружности радиуса  $\rho_0$  с центром в точке приложения силы. Интенсивность нагрузки примем равной  $\frac{P_0}{2\pi\rho_0}$ . Ясно, что эта система сил уравновешена. Найдём её трансформанту Фурье  $P(\gamma)$ .

Для нагрузки интенсивности  $\rho_0$ , равномерно распределённой по площади круга, имеем по (5.28)

$$P(\gamma) = \frac{P_0 \rho_0}{\gamma} J_1(\gamma \rho_0).$$

Поэтому в случае нагрузки той же интенсивности, но распределённой по кольцу,

$$P(\gamma) = \frac{P_0}{\gamma} [\rho_0 J_1(\gamma \rho_0) - \rho_1 J_1(\gamma \rho_1)], \quad (6.4)$$

где  $\rho_0$  — внешний,  $\rho_1$  — внутренний радиус кольца. Предельный переход при  $\rho_0 - \rho_1 \rightarrow 0$ ,  $\pi\rho_0(\rho_0^2 - \rho_1^2) \rightarrow P_0$  даёт:

$$P(\gamma) = \frac{P_0}{2\pi} J_0(\gamma \rho_0) \quad (6.5)$$

— это трансформанта Фурье нагрузки, распределённой по окружности радиуса  $\rho_0$  с интенсивностью  $\frac{P_0}{2\pi\rho_0}$ . Выражение трансформанты, соответствующей загрузке сосредоточенной силой, было приведено выше [см. (5.29)]. Поэтому

$$P(\gamma) = \frac{P_0}{2\pi} [1 - J_0(\gamma \rho_0)] \quad (6.6)$$

представляет трансформанту Фурье для указанной выше уравновешенной системы сил. Заметим, что её разложение по степеням  $\gamma$  действительно начинается с  $\gamma^2$ .

2°. В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая радиально-симметричной уравновешенной нагрузки  $p(\rho)$ ; её трансформанту Фурье обозначим (как выше в частном случае) через  $P(\gamma)$ .

Нам нужно определить функцию напряжений  $\psi(x, y)$  из уравнения [см. (3.30)]

$$\left(1 - \frac{\sin 2hD}{2hD}\right) D^2\psi = -\frac{p(\rho)}{2Gh}. \quad (6.7)$$

По (4.60) и (4.39) сразу же получаем:

$$\psi = \frac{1}{G} \int_0^{\infty} \frac{P(\gamma) J_0(\gamma\rho)}{\Delta_1(\gamma h)} d\gamma.$$

Знаменатель этого выражения обращается при  $\gamma=0$  в нуль, как  $\gamma^3$ , и интеграл, конечно, расходится, так как числитель (для уравновешенной нагрузки) будет иметь при малых  $\gamma$  порядок  $\gamma^2$  (см. выше). Из структуры выражения  $\Psi_2(\gamma z, \gamma h)$  видно, что интеграл, дающий перемещение  $w(\rho, z)$ , также будет расходящимся [см. (3.31)]. Таким образом, функция  $w(\rho, z)$  непредставима интегралом Фурье — Ганкеля. Сходящимися интегралами выразятся перемещение  $u_\rho$  и производные  $\frac{\partial w}{\partial \rho}$  и  $\frac{\partial w}{\partial z}$  перемещения  $w$ . В выражение же  $w$ , получаемое непосредственно по функции напряжений  $\psi$ , аддитивно входит бесконечно большая постоянная, соответствующая перемещению слоя как твёрдого тела.

По (3.32) получаем:

$$u_\rho = \frac{h}{G} \int_0^{\infty} \frac{P(\gamma) J_1(\gamma\rho)}{\Delta_1(\gamma h)} \gamma \Psi_1(\gamma z) d\gamma, \quad (6.8)$$

где для краткости написано  $\Psi_1(\gamma z)$  вместо  $\Psi_1(\gamma z, \gamma h)$ . Далее имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \rho} &= -\frac{1}{G} \int_0^{\infty} \frac{P(\gamma) J_1(\gamma\rho)}{\Delta_1(\gamma h)} \gamma \Psi_2(\gamma z) d\gamma, \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{G} \int_0^{\infty} \frac{P(\gamma) J_0(\gamma\rho)}{\Delta_1(\gamma h)} \Psi_2'(\gamma z) d\gamma, \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

причём  $\Psi_2'(\gamma z)$  обозначает производную  $\Psi_2$  по её аргументу  $\gamma z$ :

$$\Psi_2'(\gamma z) = \frac{m-2}{m} \operatorname{sh} \gamma z \operatorname{ch} \gamma h - \gamma z \operatorname{ch} \gamma z \operatorname{ch} \gamma h + \gamma h \operatorname{sh} \gamma h \operatorname{sh} \gamma z. \quad (6.10)$$

Точно так же получаем выражения напряжений

$$\left. \begin{aligned} \tau_{z\rho} &= -2h^2 \int_0^\infty \frac{P(\gamma) J_1(\gamma\rho)}{\Delta_1(\gamma h)} \gamma^3 \Psi_3(\gamma z) d\gamma, \\ \sigma_z &= -2h \int_0^\infty \frac{P(\gamma) J_0(\gamma\rho)}{\Delta_1(\gamma h)} \gamma^2 \Psi_4(\gamma z) d\gamma, \\ \tau_\rho &= -2h \int_0^\infty \frac{\gamma^2 P(\gamma)}{\Delta_1(\gamma h)} \left[ J_0(\gamma\rho) \Psi_5(\gamma z) + \frac{J_1(\gamma\rho)}{\gamma\rho} \Psi_1(\gamma z) \right] d\gamma, \\ \sigma_\varphi &= -2h \int_0^\infty \frac{\gamma^2 P(\gamma)}{\Delta_1(\gamma h)} \left\{ J_0(\gamma\rho) \Psi_5(\gamma z) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ J_0(\gamma\rho) - \frac{J_1(\gamma\rho)}{\gamma\rho} \right] \Psi_1(\gamma z) \right\} d\gamma. \end{aligned} \right\} (6.11)$$

Из (6.9) следует, что  $w(\rho, z)$  должно иметь вид

$$w(\rho, z) = \frac{1}{G} \int_0^\infty [P(\gamma) J_0(\gamma\rho) \Psi_2(\gamma z) + C(\gamma)] \frac{d\gamma}{\Delta_1(\gamma h)}, \quad (6.12)$$

где  $C(\gamma)$  надо выбрать так, чтобы, во-первых, интеграл сходился и, во-вторых,  $w$  принимало заданное значение в фиксированной точке; например, чтобы

$$w(0, 0) = 0. \quad (6.13)$$

Получаем из этого условия:

$$C(\gamma) = -P(\gamma) J_0(0) \Psi_2(0) = -\frac{2m-2}{m} P(\gamma)$$

и, значит,

$$w(\rho, z) = \frac{1}{G} \int_0^\infty \frac{P(\gamma)}{\Delta_1(\gamma h)} \left[ J_0(\gamma\rho) \Psi_2(\gamma z) - \frac{2m-2}{m} \right] d\gamma. \quad (6.14)$$

Этот интеграл сходится, так как числитель в подынтегральном выражении обращается при  $\gamma = 0$  в нуль, как  $\gamma^4$ , а знаменатель — как  $\gamma^3$ . Он не является интегралом Фурье — Ганкеля, так как  $J_0(\gamma\rho)$  не входит в выражение под знаком интеграла, как общий множитель.

3°. Сходимость полученных интегралов может быть значительно усилена, если выделить из них слагаемые, соответствующие загрузению полупространств  $-\infty < z < h$  и  $-h < z < \infty$ . Необходимое вычисление было проведено в § 5; нужно его почти дословно повто-

ритель, изменив лишь знаки выражений  $u_2$ ,  $v_2$ ,  $w_2$ . Поэтому ограничимся приведением окончательных выражений для перемещений

$$\left. \begin{aligned} u_p &= U_p + \frac{h}{G} \int_0^{\infty} \frac{P(\gamma) J_1(\gamma\rho)}{\Delta_1(\gamma h)} \gamma \Psi_1^*(\gamma z) d\gamma, \\ \frac{\partial w}{\partial \rho} &= \frac{\partial W}{\partial \rho} - \frac{1}{G} \int_0^{\infty} \frac{P(\gamma) J_1(\gamma\rho)}{\Delta_1(\gamma h)} \gamma \Psi_2^*(\gamma z) d\gamma, \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{G} \int_0^{\infty} \frac{P(\gamma) J_0(\gamma\rho)}{\Delta_1(\gamma h)} \gamma \Psi_2^{*'}(\gamma z) d\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

Здесь обозначено:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1^*(\gamma z) &= e^{-h\gamma} \left[ a_1(h\gamma) \left( \frac{m-2}{m\gamma h} \operatorname{sh} \gamma z + \frac{z}{h} \operatorname{ch} \gamma z \right) + b_1(h\gamma) \operatorname{sh} \gamma z \right], \\ \Psi_2^*(\gamma z) &= e^{-h\gamma} \left[ a_1(h\gamma) \left( \frac{2m-2}{m} \operatorname{ch} \gamma z - \gamma z \operatorname{sh} \gamma z \right) - h\gamma b_1(h\gamma) \operatorname{ch} \gamma z \right], \\ \Psi_2^{*'}(\gamma z) &= e^{-h\gamma} \left[ a_1(h\gamma) \left( \frac{m-2}{m} \operatorname{sh} \gamma z - \gamma z \operatorname{sh} \gamma z \right) - h\gamma b_1(h\gamma) \operatorname{sh} \gamma z \right], \\ a_1(h\gamma) &= e^{-h\gamma} \operatorname{ch} \gamma h + 2h\gamma, \quad b_1(h\gamma) = e^{-h\gamma} \operatorname{sh} \gamma h - 2h\gamma, \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

а перемещения, соответствующие загрузению полупространств, равны

$$\left. \begin{aligned} U_p &= -\frac{1}{4\pi G} \left[ (h-z) \frac{\partial \omega'}{\partial \rho} - (h+z) \frac{\partial \omega''}{\partial \rho} + \frac{m-2}{m} \left( \frac{\partial \omega_1'}{\partial \rho} - \frac{\partial \omega_1''}{\partial \rho} \right) \right], \\ W &= -\frac{1}{4\pi G} \left[ (h-z) \frac{\partial \omega'}{\partial z} - (h+z) \frac{\partial \omega''}{\partial z} + \frac{2m-2}{m} (\omega' + \omega'') \right], \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

причём потенциалы  $\omega$  и  $\omega_1$  определяются по (5.19) с само собой разумеющейся заменой  $q(x', y')$  на  $p(\rho')$ .

По вышеприведённым значениям производных  $\frac{\partial w}{\partial z}$  и  $\frac{\partial w}{\partial \rho}$  можно получить для  $w$  выражение

$$w = W(\rho, z) - W(0, 0) + \frac{1}{G} \int_0^{\infty} \frac{P(\gamma)}{\Delta_1(\gamma h)} [J_0(\gamma\rho) \Psi_2^*(\gamma z) - \Psi_2^*(0)] d\gamma. \quad (6.18)$$

Интеграл сходится, а постоянные подобраны так, чтобы  $w$  обращалось в нуль в начале координат.

4°. Частный случай загрузки сосредоточенной силой  $P_0$  и уравновешивающей её нагрузкой по окружности радиуса  $\rho_0$  получается из вышеприведённых формул, если для  $P(\gamma)$  подставить значение (6.6).

Таким образом, мы получили всё необходимое для рассмотрения задачи о равновесии слоя, находящегося под действием сосредоточенной силы  $F$  на верхнем торце и опёртого по окружности на нижнем торце; реакция опоры представит в этом случае систему распределённых по окружности сил интенсивности  $\frac{F}{2\pi r_0}$ . Задача в соответствии со сказанным в § 1 этой главы разбивается на две: а) задачу о сжатии слоя сосредоточенными силами  $\frac{F}{2}$  и распределёнными нагрузками  $\frac{F}{4\pi r_0}$ , направленными сверху вниз на плоскости  $z = h$  и снизу вверх на противоположном торце  $z = -h$ ; б) задачу об изгибе слоя сосредоточенными силами  $\frac{F}{2}$  (действующими сверху вниз на обоих торцах) и распределёнными нагрузками  $\frac{F}{4\pi r_0}$  (действующими снизу вверх).

При этом нет нужды заботиться о выполнении условия обращения в нуль перемещения  $w$  в точках опорной окружности, так как это перемещение может быть определено лишь с точностью до постоянного слагаемого. В предложенном ходе решения предполагалось, конечно, что опора — гладкая, т. е. она не создаёт реакций в плоскости нижнего торца.

Символический способ записи решений уравнений теории упругости, конечно, не является необходимым средством рассмотрения вопросов, связанных с равновесием слоя. Можно было бы с самого начала решения этих уравнений искать в форме

$$\left. \begin{aligned} u &= U(z) e^{i(\alpha x + \beta y)}, \\ v &= V(z) e^{i(\alpha x + \beta y)}, \\ w &= W(z) e^{i(\alpha x + \beta y)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

Тогда для определения  $U$ ,  $V$ ,  $W$  получили бы систему трёх дифференциальных уравнений второго порядка; шесть произвольных постоянных, входящих в их решение, мы определили бы из условий на торцах, предполагая, что нагрузка пропорциональна  $e^{i(\alpha x + \beta y)}$ . Случай произвольной нагрузки, представимой интегралами Фурье, сводится к этому частному случаю, и таким путём получается вышеприведённое решение задачи, выраженное с помощью определённых интегралов.

Символический способ позволил просто и экономно организовать это вычисление, подсказывая на каждом этапе дальнейший ход выкладки. Однако наиболее отчётливо достоинства аппарата символической записи обнаруживаются в применении к приближённому решению задачи о толстой плите, где этот способ оказывается особенно просто применимым и быстро ведущим к цели.

§ 7. Действие объемных сил. Тепловые напряжения в слое

1°. Объемные силы  $K$  будем предполагать имеющими потенциал:

$$K = -\text{grad } \Pi(x, y, z). \quad (7.1)$$

Таковы, например, будут сила веса и центробежные силы; в первом случае

$$\Pi = \gamma z, \quad (7.2)$$

где  $\gamma$  — вес единицы объема, а вертикальная ось  $z$  предполагается, как и выше, нормальной к торцам слоя. Для центробежных сил при вращении вокруг оси  $z$

$$\Pi = -\frac{\gamma \omega^2}{2g}(x^2 + y^2). \quad (7.3)$$

Значительный интерес представляет также задача о тепловых напряжениях в слое. Напомним, что при неравномерном нагревании тела в выражения, связывающие нормальные напряжения с относительными удлинениями, должны быть внесены добавочные слагаемые, зависящие от температуры  $T$  [см. (13.11) главы 1]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left( \frac{\vartheta}{m-2} + \varepsilon_x - \frac{m+1}{m-2} \alpha T \right), \\ \sigma_y &= 2G \left( \frac{\vartheta}{m-2} + \varepsilon_y - \frac{m+1}{m-2} \alpha T \right), \\ \sigma_z &= 2G \left( \frac{\vartheta}{m-2} + \varepsilon_z - \frac{m+1}{m-2} \alpha T \right), \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

где, как обычно,

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (7.5)$$

Следствие этого в уравнениях равновесия в перемещениях (при отсутствии объемных сил), получающихся путём подстановки в уравнения статики сплошной среды

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad \text{и т. д.}$$

вместо напряжений их выражений через перемещения, появятся добавочные слагаемые, которые можно трактовать как объемные силы с потенциалом, пропорциональным температуре [см. (13.13) главы 1]:

$$\Pi = \frac{2\alpha G(m+1)}{m-2} T. \quad (7.6)$$

2°. Уравнениям равновесия в перемещениях

$$\frac{m}{m-2} \operatorname{grad} \vartheta + \Delta \mathbf{u} = \frac{1}{G} \operatorname{grad} \Pi \quad (7.7)$$

можно удовлетворить, полагая, что вектор перемещения  $\mathbf{u}$  является градиентным (безвихревым)

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2G} \operatorname{grad} \Phi, \quad (7.8)$$

и подчиняя выбор потенциала перемещений  $\Phi$  условию

$$\Delta \Phi = \frac{m-2}{m-1} \Pi. \quad (7.9)$$

Тогда касательные напряжения  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz}$  и нормальное напряжение  $\sigma_z$  будут:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}, \quad \tau_{yz} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z}, \quad \sigma_z = \frac{\Pi}{m-1} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \Pi - D^2 \Phi, \quad (7.10)$$

где, как и ранее,

$$D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Выражения трёх остальных напряжений будут:

$$\sigma_x = \Pi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \Pi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (7.10')$$

В случае слоя, подверженного действию объёмной силы (7.1) и не нагруженного по торцам, следует поэтому на решение (7.8) наложить решение краевой задачи:

$$\text{при } z = \pm h \quad \left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= -\partial_1 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=\pm h}, & \tau_{yz} &= -\partial_2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=\pm h}, \\ \sigma_z &= -\Pi(x, y, \pm h) + (D^2 \Phi)_{z=\pm h}. \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

В § 3 было показано, что вопрос приводится к построению функций напряжений  $\chi$ ,  $\chi^*$  [см. (3.10) и (3.26)] в задаче о растяжении и  $\psi$ ,  $\psi^*$  [см. (3.30) и (3.40)] в задаче изгиба слоя.

3°. Вычисление очень упрощается в случае силы веса. Тогда потенциал перемещений может быть взят в виде, зависящем лишь от  $z$ :

$$\Phi = \frac{m-2}{m-1} \frac{\gamma z^3}{6}, \quad (7.12)$$

краевые условия (7.12) будут при  $z = \pm h$

$$\tau_{zx} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_z = \mp \gamma h,$$

и нужно разыскать лишь одну функцию напряжений  $\psi$ . Согласно сказанному в начале § 4 и формулам (4.4) и (3.30) за эту функцию



можно принять любое частное решение уравнения

$$D^4\psi = -\frac{3\gamma}{4h^2\bar{G}}. \quad (7.13)$$

Ход вычисления указывался в § 4 и будет показан ниже на примере (§ 3 главы 4).

Значительное упрощение достигается также в задаче о вращении слоя. В этом случае по (7.3) и (7.9) можно взять потенциал перемещений  $\Phi$  в виде

$$\Phi = -\frac{m-2}{m-1} \frac{\gamma\omega^2}{32g} (x^2 + y^2)^2, \quad (7.14)$$

краевые условия (7.11) будут при  $z = \pm h$

$$\tau_{zx} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_z = \frac{\gamma\omega^2}{2g(m-1)} (x^2 + y^2). \quad (7.15)$$

Приходится определить одну лишь функцию напряжений  $\chi$ ; по (3.10) и (4.3) дело сводится к разысканию частного решения уравнения

$$D^2 \left( 1 - \frac{1}{3} h^2 D^2 \right) \chi = \frac{\gamma\omega^2}{8\bar{G}(m-1)g} (x^2 + y^2). \quad (7.16)$$

Дальнейшее вычисление приводится в § 3 главы 4.

4°. Остановимся теперь на задаче о тепловых напряжениях в ненагруженном слое. Прежде всего напомним, что соответствующие частному решению (7.8) нормальные напряжения следует согласно (7.4) определять по формулам

$$\tau_x = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}, \quad \tau_y = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}, \quad \sigma_z = -D^2\Phi \quad (7.17)$$

вместо (7.10) и (7.10'). В связи с этим изменятся и краевые условия (7.11) для решения, которое должно быть добавлено к (7.8); они теперь будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \text{при } z = \pm h \quad \tau_{zx} &= -\partial_1 \left( \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)_{z=\pm h}, & \tau_{yz} &= -\partial_2 \left( \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)_{z=\pm h}, \\ \sigma_z &= (D^2\Phi)_{z=\pm h}. \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

При установившемся тепловом режиме решение задачи разыскания напряжённого состояния можно существенно упростить. Распределение температуры в этом случае задаётся гармонической функцией; поэтому оно может быть представлено в форме (2.9)

$$T(x, y, z) = \cos zD T_0 + \frac{\sin zD}{D} T'_0, \quad (7.19)$$

где  $T_0$  и  $T'_0$  — зависят от  $x$  и  $y$  и должны быть найдены по условиям на торцах  $z = \pm h$ . В соответствии с (2.11) эти функции определяют значение температуры и её производной по  $z$  на серединной плоскости слоя.

Можно удовлетворить уравнениям равновесия, задавая перемещение в виде

$$u = -\frac{1}{2G} \partial_1 M(x, y, z), \quad v = -\frac{1}{2G} \partial_2 M(x, y, z), \quad w = \frac{1}{2G} \frac{\partial M}{\partial z}, \quad (7.20)$$

где  $M$  — надлежащим образом выбираемая (см. ниже) гармоническая функция, также представляемая в форме

$$M = \cos z D M_0 + \frac{\sin z D}{D} M'_0. \quad (7.21)$$

Следует обратить внимание, что задание перемещений (7.20) коренным образом отличается от (7.8): знак при производной по  $z$  (в выражении  $w$ ) взят противоположно знаку при производных по  $x$  и  $y$ . Вследствие этого напряжения  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{yz}$  тождественно равны нулю:

$$\tau_{zx} = 0, \quad \tau_{yz} = 0. \quad (7.22)$$

Мы удовлетворим поэтому третьему условию статики

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0,$$

если  $\sigma_z$  также будет нулём; поскольку в (7.4) входит добавочное слагаемое

$$-2G\alpha \frac{m+1}{m-2} T,$$

оказывается возможным удовлетворить и этому условию. В самом деле, имеем:

$$\vartheta = -\frac{1}{2G} \left( D^3 M - \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \right). \quad (7.23)$$

Но  $M$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$D^3 M + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} = 0, \quad (7.24)$$

и, значит,

$$\vartheta = -\frac{1}{G} D^3 M. \quad (7.25)$$

Теперь по (7.4) и (7.24) получаем:

$$\sigma_z = -\frac{m}{m-2} D^3 M - \frac{2G\alpha(m+1)}{m-2} T,$$

и надо определить  $M(x, y, z)$  из условия

$$D^3 M = -\frac{2G(m+1)}{m} T. \quad (7.26)$$

Достаточно для этого по (7.21) и (7.19) принять:

$$D^3 M_0 = -\frac{2G(m+1)}{m} \alpha T_0, \quad D^3 M'_0 = -\frac{2G(m+1)}{m} \alpha T'_0. \quad (7.27)$$

Остаётся составить выражения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  и проверить, что они удовлетворяют в свою очередь уравнениям равновесия; поскольку  $\tau_{yz}$  и  $\tau_{yz}$  равны нулю, это — уравнения плоской задачи

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (7.28)$$

По (7.4), (7.25) и (7.21) имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2}{m-2} D^2 M - \partial_1^2 M - \frac{2G\alpha(m+1)}{m-2} T = \\ &= -\frac{2}{m-2} D^2 M - (D^2 - \partial_2^2) M - \frac{2G\alpha(m+1)}{m-2} T, \end{aligned}$$

и из (7.26) следует, что

$$\sigma_x = \partial_2^2 M.$$

Аналогично получаем:

$$\sigma_y = \partial_1^2 M$$

и, далее,

$$\tau_{xy} = -\partial_1 \partial_2 M.$$

Как следовало ожидать, эти напряжения оказались выраженными через функцию напряжений  $M$  по формулам плоской задачи; поэтому уравнения статики (7.28) тождественно удовлетворяются.

Итак, задача о тепловых напряжениях в слое при установившемся тепловом режиме решается по формулам (7.20); оказывается, что при этом не возникает напряжений на площадках, параллельных срединной плоскости слоя, а напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  выражаются через функцию напряжений  $M$  (зависящую однако от  $z$ ):

$$\sigma_x = \partial_2^2 M, \quad \sigma_y = \partial_1^2 M, \quad \tau_{xy} = -\partial_1 \partial_2 M. \quad (7.29)$$

Эта гармоническая (по трём переменным  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) функция находится по (7.21), причём зависящие от  $x$  и  $y$  функции  $M_0$  и  $M'_0$  должны быть определены по уравнениям (7.27).

Заметим, что в решения этих уравнений аддитивно входят две произвольные гармонические функции  $M_0^*$  и  $M'^*$  от переменных  $x$ ,  $y$ :

$$D^2 M_0^* = 0, \quad D^2 M'^* = 0. \quad (7.30)$$

Они должны быть определены по условиям на бесконечности (при  $x$  и  $y \rightarrow \infty$ ).

Столь простого решения нельзя получить при неустановившемся тепловом режиме: если  $T$  не является гармонической функцией, то и уравнение (7.26) не допускает решения  $M$ , которое было бы гармоническим. В слое возникнут напряжения на площадках, перпендикулярных к оси  $z$ , и задачу следует решать, задаваясь потенциалом перемещений  $\Phi$ , как указывалось выше [см. (7.8) и краевые условия (7.18)].

5°. В качестве примера рассмотрим распределение температуры по закону

$$T = \frac{1}{K} \int_0^{\infty} \frac{Q(\gamma) J_0(\gamma\rho) \operatorname{sh} \gamma(z+h)}{\operatorname{ch} 2\gamma h} d\gamma. \quad (7.31)$$

Это — гармоническая функция в слое  $|z| < h$ ; при  $z = -h$

$$T = 0. \quad (7.32)$$

Далее имеем:

$$K \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=h} = \int_0^{\infty} Q(\gamma) J_0(\gamma\rho) \gamma d\gamma = q(\rho), \quad (7.33)$$

где  $q(\rho)$  — функция, трансформантой Фурье которой служит  $Q(\gamma)$  [см. (4.58)].

Таким образом, функция, представленная интегралом (7.31), даёт распределение температуры в слое, нижняя торцовая плоскость которого поддерживается при постоянной температуре (равной нулю), а по верхней — сообщается в единицу времени количество теплоты  $q(\rho)$  на единицу площади. В частности, в случае точечного теплового источника производительности  $Q_0$  в единицу времени по (5.29)

$$Q(\gamma) = \frac{Q_0}{2\pi},$$

и распределение температуры в слое будет:

$$T = \frac{Q_0}{2\pi K} \int_0^{\infty} \frac{J_0(\gamma\rho) \operatorname{sh} \gamma(z+h)}{\operatorname{ch} 2\gamma h} d\gamma. \quad (7.34)$$

По (7.26) теперь получаем:

$$M(x, y, z) = \frac{G\alpha(m+1)Q_0}{m\pi K} \int_0^{\infty} \frac{J_0(\gamma\rho) \operatorname{sh} \gamma(z+h) - \gamma(z+h)}{\gamma^2 \operatorname{ch} 2\gamma h} d\gamma, \quad (7.35)$$

причём слагаемое  $[-\gamma(z+h)]$  обеспечивает сходимость интеграла. Получаем:

$$\left. \begin{aligned} u_\rho &= A \int_0^{\infty} J_1(\gamma\rho) \operatorname{sh} \gamma(z+h) \frac{d\gamma}{\gamma \operatorname{ch} 2\gamma h}, \\ w &= A \int_0^{\infty} \frac{J_0(\gamma\rho) \operatorname{ch} \gamma(z+h) - 1}{\gamma \operatorname{ch} 2\gamma h} d\gamma, \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

где обозначено для краткости

$$A = \frac{\alpha Q_0 (m + 1)}{2\pi m K}. \quad (7.37)$$

Приводим также выражения напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_p &= -2GA \int_0^\infty \frac{J_1(\gamma\rho) \operatorname{sh} \gamma(z+h)}{\gamma\rho \operatorname{ch} 2h\gamma} d\gamma, \\ \sigma_\varphi &= 2GA \int_0^\infty \left[ \frac{J_1(\gamma\rho)}{\gamma\rho} - J_0(\gamma\rho) \right] \frac{\operatorname{sh} \gamma(z+h)}{\operatorname{ch} 2h\gamma} d\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (7.38)$$

Можно улучшить сходимость этих интегралов, замечая, что

$$\frac{1}{\operatorname{ch} 2\gamma h} = 2e^{-2\gamma h} - \frac{e^{-4\gamma h}}{\operatorname{ch} 2\gamma h}. \quad (7.39)$$

Выражение  $\sigma_p$ , например, при такой замене получит вид

$$\begin{aligned} \sigma_p &= -2GA \left\{ 2 \int_0^\infty \frac{J_1(\gamma\rho)}{\gamma\rho} [e^{-(h-z)\gamma} - e^{-(3h+z)\gamma}] d\gamma - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty \frac{J_1(\gamma\rho)}{\gamma\rho} e^{-4h\gamma} \frac{\operatorname{sh} \gamma(z+h)}{\operatorname{ch} 2h\gamma} d\gamma \right\}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Второй интеграл хорошо сходится при всех  $z$ , включая и  $z = h$ , а первый может быть вычислен с помощью известного соотношения

$$\int_0^\infty e^{-\zeta\gamma} \frac{J_1(\gamma\rho)}{\gamma} d\gamma = \frac{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2} - \zeta}{\rho}. \quad (7.41)$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= 2GA \int_0^\infty \frac{J_1(\gamma\rho)}{\gamma\rho} e^{-4\gamma h} \frac{\operatorname{sh} \gamma(z+h)}{\operatorname{ch} 2h\gamma} d\gamma - \\ &= \frac{8GA}{\rho^2} \left[ h+z + \frac{1}{2} \sqrt{\rho^2 + (h-z)^2} - \frac{1}{2} \sqrt{\rho^2 + (3h+z)^2} \right]. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Величина, стоящая в квадратных скобках при  $(h-z) > \rho$  представляется рядом по степеням  $\rho$ , первый член которого равен

$$\frac{1}{4} \rho^2 \left( \frac{1}{h-z} - \frac{1}{3h+z} \right).$$

Поэтому  $\sigma_p$  будет иметь конечное значение и на оси  $z$  (при  $\rho = 0$ ), исключая точку  $z = h$ .

Можно было бы получить выражение  $\sigma_r$  также в форме бесконечного ряда, заменяя  $\frac{1}{\operatorname{ch} 2\gamma h}$  разложением в ряд

$$\frac{1}{\operatorname{ch} 2\gamma h} = 2e^{-2\gamma h}(1 - e^{-4\gamma h} + e^{-8\gamma h} - \dots) \quad (7.43)$$

и используя при почленном интегрировании соотношение (7.41).

Этот же приём улучшения сходимости (или представления с помощью рядов) может быть применён и к интегралам в выражениях (7.36), (7.38). При этом используются представления (7.39) [или (7.43)] для  $\frac{1}{\operatorname{ch} 2\gamma h}$ , а также формулы

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\zeta\gamma} J_1(\gamma\rho) d\gamma &= \frac{1}{\rho} \left( 1 - \frac{\zeta}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}} \right), \\ \int_0^{\infty} e^{-\zeta\gamma} J_0(\gamma\rho) d\gamma &= \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.44)$$

Конечно, задача может считаться решённой лишь в той мере, в какой допустимо предположение о независимости упругих постоянных от температуры.

### ПРИМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ К ГЛАВЕ 3

Задача о равновесии упругого слоя была рассмотрена Дугаллом (Dougall) в работе «An Analytical Theory of the Equilibrium of an Isotropic Elastic Plate», (Trans. Roy. Soc. Edinburgh 41, № 1, 1904, стр. 8) и с помощью метода изображений О. Tedone в работе «Saggio di una teoria generale delle equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo» (Annali di Matematica pura et applicata, Ser IIIa, 10, 1904, стр. 13). См. также литературные указания в курсе Лява, стр. 254 и статью L. Orlando «Sulla deformazione di un solido isotropo limitato da due piani paralleli per tensione superficiali date» (Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, 19, 1905, стр. 66—80).

Символический приём составления частных решений уравнений теории упругости для слоя был предложен в работах автора «К задаче о равновесии пластины переменной толщины» (Труды Ленинградского индустриального института, № 6, 1936, стр. 57) и «К теории толстых плит» (Прикл. матем. и мех. 6, 1942, стр. 151). Близкое по методу решение задачи теплопроводности было дано в работе Я. Ф. Малкина «К задачам распределения температуры в плоских пластинках» (Прикл. матем. и мех., 2, 1938, стр. 317).

Численные результаты решения задачи о сжатии слоя сосредоточенной силой содержатся в статье Marguerre «Spannungsverteilung und Wellenausbreitung in der kontinuierlich gestützten Platte» (Ingenieur — Archiv 4, № 4, 1933, стр. 332). Случай нормальной нагрузки, равномерно распределённой по площади круга, рассмотрен в заметке I. С. Шапиро «О распределении напряжений в неограниченном слое» (Прикл. матем. и мех. 8, 1944, стр. 167) и в работе Снеддона (I. N. Sneddon) «The elastic stresses produced in a thick plate by the applications of pressure to its free surfaces» (Proceedings of the

Cambridge Phil. Soc. 42, № 3, 1946, стр. 260—271). В этой работе при вычислении интегралов вида (5.30) функция

$$f(u) = \frac{u}{u + \operatorname{sh} u}$$

аппроксимируется выражением

$$f_1(u) = \left(-1,55u + \frac{1}{2}\right)e^{-1,4u} + 2ue^{-u},$$

весьма мало отличающимся от  $f(u)$  при положительных значениях  $u$ . Используя ещё соотношение

$$\int_0^{\infty} u^n e^{-\lambda u} J_m(\rho u) du = \frac{(n-m)!}{(\lambda^2 + \rho^2)^{\frac{n+1}{2}}} P_n^{(m)}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \rho^2}}\right),$$

где  $P_n^{(m)}(x)$  — присоединённая функция Лежандра, автор получил приближённые выражения перемещений и напряжений точек слоя, находящегося под действием сосредоточенных сжимающих сил, в замкнутой форме. По этим выражениям и путём численного интегрирования были вычислены значения напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  при значениях числа Пуассона  $m = 4$  и  $m = 2$ , а также напряжения  $\sigma_z$  при  $z = 0; 0,125h; 0,25h; 0,375h$  при  $m = 4$ .

## ГЛАВА 4

### РАВНОВЕСИЕ ТОЛСТОЙ ПЛИТЫ

#### § 1. Однородные решения

Выше указывалось, что плитой мы называем часть слоя, ограниченную цилиндрической поверхностью  $C$  с образующими, перпендикулярными к торцевым плоскостям слоя; толщина последнего предполагается малой по сравнению с размерами в плане. В дальнейшем для краткости кривой  $C$  будем называть сечение цилиндрической поверхности  $C$  с серединной плоскостью ( $z = 0$ ) плиты; через  $\tau$  и  $n$  обозначим единичные векторы касательной и главной нормали этой кривой.

В задаче о равновесии плиты требуется удовлетворить не только краевым условиям на торцах, но и условиям на поверхности  $C$ . Поэтому, кроме решений, удовлетворяющих краевым условиям на торцах, необходимо располагать классом решений уравнений теории упругости, оставляющих торцы свободными от напряжений; эти решения будем называть однородными, а решения, удовлетворяющие условиям загрузки торцов, — неоднородными. Очевидно, что последними могут служить решения задачи о равновесии слоя, представленные выше в форме определённых интегралов. Но это не обязательно, так как во многих случаях неоднородные решения можно получить в более простой форме — рядов или же для некоторых классов нагрузок (полигармонических нагрузок, см. § 4 главы 3) в замкнутой форме. Однородные решения определяют напряжённое состояние плиты, создаваемое нагрузками, распределёнными по её боковой поверхности.

Сумма однородного и неоднородного решения, очевидно, удовлетворяет условиям нагружения торцов плиты, а произвол выбора однородных решений следует воспользоваться, чтобы удовлетворить краевым условиям на поверхности  $C$ . Эта задача очень сложна; поэтому приходится ограничиться выполнением «смягчённых» краевых условий. Мы требуем выполнения этих условий не в каждой точке поверхности  $C$ , а только на кривой  $C$  для средних по толщине плиты значений тех или иных величин.



Приемлемость такого решения оправдывается принципом Сен-Венана, согласно которому статически эквивалентные системы сил, распределённые по малой части  $S$  границы упругого тела, создают в теле системы напряжений, отличающиеся друг от друга только в непосредственной близости к месту загрузки  $S$ . На достаточном же удалении от этого места напряжения, создаваемые той и другой системой сил, практически одинаковы.

В рассматриваемом случае мы удовлетворяем строго краевым условиям на торцах плиты; боковая поверхность последней должна составлять лишь небольшую часть всей её границы. Тогда система напряжений на боковой поверхности, определяемая суммой неоднородного и однородного решений, может быть заменена ей статически эквивалентной совокупностью сил и моментов, и достаточно будет потребовать, чтобы эта система сил и моментов уравновешивала систему сил и моментов, статически эквивалентную внешней нагрузке на боковой поверхности плиты, в частности была равна нулю, если эта поверхность не нагружена. При задании на боковой поверхности перемещений (геометрические краевые условия) также можно довольствоваться выполнением краевых условий в некотором осереднении, например, требовать равенства средних значений заданных перемещений или их значений на кривой  $S$  тем же величинам, определяемым по сумме неоднородного и однородного решений. Тогда система сил и моментов, статически эквивалентная напряжениям на боковой поверхности, определяемым по решению задачи, будет уравновешена реакциями опорных закреплений, которые обеспечивают выполнение заданных геометрических требований. Таким образом, и в этом случае решение задачи соответствует требованию принципа Сен-Венана.

Применение принципа Сен-Венана будет давать тем более точное решение задачи, чем меньшую долю всей поверхности, ограничивающей плиту, составляет её боковая поверхность, т. е. для достаточно тонкой плиты. Для «кубообразного» тела решения, основанные на принципе Сен-Венана, конечно, становятся неприменимыми. Однако ни одного строгого решения задачи о толстой плите для нетривиальных случаев загрузки до сих пор не получено.

Техническая теория равновесия тонкой плиты, наоборот, представляет дальнейшее упрощение задачи о толстой плите в вышеуказанной постановке. В ней довольствуются не только приближённым выполнением краевых условий на боковой поверхности, но и решениями, частично противоречащими условиям сплошности.

Для решения задачи «в среднем» достаточно рассмотреть простейшие однородные решения, которые будем называть бигармоническими. Можно указать и более широкие классы однородных решений, но они могли бы понадобиться для более точного, чем для приближения в духе принципа Сен-Венана, решения задачи.

1°. Сжатие плиты. Вернёмся к уравнениям (3.5) главы 3, полагая, что их правые части равны нулю. Тогда из структуры

оператора  $Q$  [см. (3.4) главы 3] следует, что за  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  можно принять любые бигармонические функции

$$D^4\chi_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.1)$$

Введём далее бигармоническую функцию  $\chi^*$ :

$$\partial_1\chi_1 = \partial_2\chi_2 = \chi^*. \quad (1.2)$$

Заметим, что тогда

$$\partial_1 D^2\chi_1 = \partial_2 D^2\chi_2 = D^2\chi^*. \quad (1.3)$$

Но функции  $D^2\chi_1$  и  $D^2\chi_2$  — гармонические и из (1.2) следует, что они — сопряжённые, т. е. имеет место также равенство

$$\partial_2 D^2\chi_1 = -\partial_1 D^2\chi_2. \quad (1.4)$$

Величины  $u_0, v_0, w_0$  должны быть вычислены по (3.6) главы 3. Конечно, при этом в разложениях операторов  $Q_{ik}$  по степеням  $D^2$  не нужно вследствие (1.1) удерживать степени  $D^2$  выше первой. Используя обозначение (1.2), получаем (опускаем совершенно очевидные выкладки):

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \frac{2h}{m-2} \left[ 2(m+1) \partial_1 \chi^* - \frac{3m+4}{3} h^2 \partial_1 D^2 \chi^* - 2m D^2 \chi_1 - h \partial_1 D^2 \chi_3 \right], \\ v_0 &= \frac{2h}{m-2} \left[ 2(m+1) \partial_2 \chi^* - \frac{3m+4}{3} h^2 \partial_2 D^2 \chi^* - 2m D^2 \chi_2 - h \partial_2 D^2 \chi_3 \right], \\ w'_0 &= \frac{4h}{m-2} D^2 \chi^*. \end{aligned} \right\} (1.5)$$

Для сокращения письма введём обозначение

$$\frac{2(3m+4)}{3(m-2)} h^2 D^2 \chi^* + \frac{2h^2}{m-2} D^2 \chi_3 = -\frac{4(m+1)}{m-2} h\varphi. \quad (1.6)$$

Очевидно, что  $\varphi$  является гармонической функцией; формулы (1.5) получают вид

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \frac{4h(m+1)}{m-2} \partial_1 (\chi^* + \varphi) - \frac{4mh}{m-2} D^2 \chi_1, \\ v_0 &= \frac{4h(m+1)}{m-2} \partial_2 (\chi^* + \varphi) - \frac{4mh}{m-2} D^2 \chi_2, \\ w'_0 &= \frac{4h}{m-2} D^2 \chi^*. \end{aligned} \right\} (1.7)$$

Не нарушая общности, можно было бы в этих формулах откинуть гармоническую функцию  $\varphi$ , включив её как слагаемое в бигармоническую функцию  $\chi^*$ ; но удобнее пока сохранить предшествующую запись и распорядиться выбором  $\varphi$  в дальнейшем.

Теперь по (2.15) главы 3 составляем выражения перемещений в любой точке слоя:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{4(m+1)}{m-2} h \partial_1 (\chi^* + \varphi) - \frac{4mh}{m-2} D^2 \gamma_1 - \frac{2hz^2}{m-2} \partial_1 D^2 \chi^*, \\ v &= \frac{4(m+1)}{m-2} h \partial_2 (\chi^* + \varphi) - \frac{4mh}{m-2} D^2 \gamma_2 - \frac{2hz^2}{m-2} \partial_2 D^2 \chi^*, \\ w &= \frac{4hz}{m-2} D^2 \chi^*. \end{aligned} \right\} (1.8)$$

Из них получаем напряжения

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_z = 0, \\ \frac{\sigma_x}{2J} &= -\frac{4h(m+1)}{m-2} \partial_2^2 \left( \chi^* + \varphi - \frac{z^2}{2(m+1)} D^2 \chi^* \right), \\ \frac{\sigma_y}{2J} &= -\frac{4h(m+1)}{m-2} \partial_1^2 \left( \chi^* + \varphi - \frac{z^2}{2(m+1)} D^2 \chi^* \right), \\ \frac{\tau_{xy}}{2J} &= \frac{4h(m+1)}{m-2} \partial_1 \partial_2 \left( \chi^* + \varphi - \frac{z^2}{2(m+1)} D^2 \chi^* \right). \end{aligned} \right\} (1.9)$$

Возьмём теперь

$$\varphi = \frac{h^2}{6(m+1)} D^3 \chi^* \quad (1.10)$$

и обозначим

$$-\frac{8Gh(m+1)}{m-2} \chi^* = \Phi. \quad (1.11)$$

Тогда найдем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \partial_2^2 \left[ \Phi + \frac{1}{2(m+1)} \left( \frac{h^2}{3} - z^2 \right) D^2 \Phi \right], \\ \sigma_y &= \partial_1^2 \left[ \Phi + \frac{1}{2(m+1)} \left( \frac{h^2}{3} - z^2 \right) D^2 \Phi \right], \\ \tau_{xy} &= -\partial_1 \partial_2 \left[ \Phi + \frac{1}{2(m+1)} \left( \frac{h^2}{3} - z^2 \right) D^2 \Phi \right]. \end{aligned} \right\} (1.12)$$

В новых обозначениях выражения (1.8) перемещений будут:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2J} \left[ \varphi_1 - \partial_1 \Phi - \frac{1}{2(m+1)} \left( \frac{h^2}{3} - z^2 \right) \partial_1 D^2 \Phi \right], \\ v &= \frac{1}{2J} \left[ \varphi_2 - \partial_2 \Phi - \frac{1}{2(m+1)} \left( \frac{h^2}{3} - z^2 \right) \partial_2 D^2 \Phi \right], \\ w &= -\frac{z}{2G(m+1)} D^2 \Phi, \end{aligned} \right\} (1.13)$$

причём сопряжённые гармонические функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ,

$$\varphi_1 = -\frac{8hmG}{m-2} D^2 \chi_1, \quad \varphi_2 = -\frac{8hmG}{m-2} D^2 \chi_2, \quad (1.14)$$

должны быть согласно (1.3), (1.4) и (1.11) определены по условиям

$$\partial_1 \varphi_1 = \partial_2 \varphi_2 = \frac{m}{m+1} D^2 \Phi, \quad \partial_2 \varphi_1 = -\partial_1 \varphi_2. \quad (1.15)$$

Поэтому

$$\varphi_1 + i\varphi_2 = \frac{m}{m+1} \int (D^2 \Phi + iS)(dx + i dy), \quad (1.16)$$

где  $S$  обозначает гармоническую функцию, сопряжённую с  $D^2 \Phi$ .

Средние значения напряжений  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$ ,  $\bar{\tau}_{xy}$  по толщине слоя, определяемые соотношениями

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_x dz, \quad \bar{\sigma}_y = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_y dz, \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \tau_{xy} dz, \quad (1.17)$$

оказываются равными

$$\bar{\sigma}_x = \partial_2^2 \Phi, \quad \bar{\sigma}_y = \partial_1^2 \Phi, \quad \bar{\tau}_{xy} = -\partial_1 \partial_2 \Phi. \quad (1.18)$$

Введённая функция  $\Phi$ , таким образом, оказывается функцией напряжений задачи о плоском напряжённом состоянии, называемой функцией Эри. Выражения напряжений в виде (1.12) представляют, в противоположность (1.18), точное решение уравнений теории упругости, учитывающее изменение напряжений по толщине плиты и строго удовлетворяющее условиям отсутствия нагружения на торцах плиты. Нагрузка, создающая это напряжённое состояние, осуществляется силами, распределёнными по боковой поверхности плиты симметрично относительно средней плоскости  $z = 0$ .

Выражения напряжений в ортогональных координатах по (3.54) главы 3 и (1.12) могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial s_2^2} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial s_1} \frac{\partial \ln H_2}{\partial s_1}, & \sigma_2 &= \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial s_1^2} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial s_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial s_2}, \\ \tau_{12} &= -\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial s_1 \partial s_2} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial s_1} \frac{\partial \ln H_1}{\partial s_2} = -\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial s_2 \partial s_1} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial s_2} \frac{\partial \ln H_2}{\partial s_1}, \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

где обозначено

$$\Phi^* = \Phi + \frac{1}{2(m+1)} \left( \frac{h^2}{3} - z^2 \right) D^2 \Phi. \quad (1.20)$$

Эти же формулы служат при замене  $\Phi^*$  на  $\Phi$  для вычисления средних значений напряжений.

Пусть, в частности, кривая  $q_1 = q_{10}$  является контуром  $C$ , ограничивающим плиту в плане; тогда можно принять  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}$  и  $\mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\tau}$  и линейные элементы  $\delta s_1$  и  $\delta s_2$  будут соответственно равны  $\delta n$  и  $\delta s$ , т. е. бесконечно малому отрезку нормали кривой и элементу дуги её. Получаем по (1.19) и (3.45) главы 3:

$$\sigma_n = \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial s^2} - \frac{\varepsilon_2}{\rho} \frac{\partial \Phi^*}{\partial n}, \quad \tau_{ns} = -\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial n \partial s} - \frac{\varepsilon_1}{\rho'} \frac{\partial \Phi^*}{\partial n}, \quad (1.21)$$

где  $\frac{1}{\rho}$  — кривизна кривой  $C$ ,  $\frac{1}{\rho'}$  — кривизна кривых, ортогональных контуру  $C$ , по которым производится отсчёт отрезков нормалей  $dn$ . Знаки  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  определяются в соответствии с правилом, указанным в § 3 главы 3. Формулы (1.21) дают значения нормальных и касательных напряжений, которые должны быть распределены по цилиндрической поверхности, ограничивающей плиту, чтобы осуществить рассмотренное напряжённое состояние.

2°. Изгиб плиты. Однородному уравнению, соответствующему (3.30) главы 3,

$$\left(1 - \frac{\sin 2hD}{2hD}\right) D^2\psi = \left(\frac{2}{3} h^2 D^4 + \dots\right) \psi = 0 \quad (1.22)$$

удовлетворяет любая бигармоническая функция  $\psi$ . Примем её за функцию напряжений. Тогда в разложениях операторов (3.29) главы 3 нужно будет отбросить степени  $D^3$  выше первой.

Чтобы приблизить применяемые ниже обозначения к обозначениям теории изгиба тонких плит, примем:

$$\psi = \frac{m}{2(m-1)} \left[ \omega_0^* + \frac{2m-1}{2(m-1)} h^2 D^2 \omega_0^* \right], \quad (1.23)$$

где  $\omega^*$  — бигармоническая функция, геометрическое значение которой сейчас выяснится. Действительно, по (3.29) главы 3

$$\begin{aligned} \omega_0 = \left[ \frac{2(m-1)}{m} \left( 1 - \frac{h^2 D^2}{2} \right) - h^2 D^2 \right] \psi = \omega_0^* + \frac{2m-1}{2(m-1)} h^2 D^2 \omega_0^* - \\ - \frac{1}{2} h^2 D^3 \omega_0^* - \frac{m}{2(m-1)} h^2 D^3 \omega_0^* = \omega_0^*, \quad (1.24) \end{aligned}$$

т. е.  $\omega_0^*$  в точности представляет прогиб срединной плоскости; последний в рассматриваемом однородном решении оказывается, таким образом, бигармонической функцией.

Теперь две другие формулы (3.29) главы 3 дают:

$$u'_0 = -\partial_1 \left( \omega_0 + \frac{m}{m-1} h^2 D^2 \omega_0 \right), \quad v'_0 = -\partial_2 \left( \omega_0 + \frac{m}{m-1} h^2 D^2 \omega_0 \right). \quad (1.25)$$

Обращаясь к (2.17) главы 3, получим перемещения любой точки слоя:

$$\left. \begin{aligned} u &= -z \partial_1 \omega_0 + \left( \frac{2m-1}{m-1} \frac{z^3}{6} - \frac{m}{m-1} h^2 z \right) \partial_1 D^2 \omega_0, \\ v &= -z \partial_2 \omega_0 + \left( \frac{2m-1}{m-1} \frac{z^3}{6} - \frac{m}{m-1} h^2 z \right) \partial_2 D^2 \omega_0, \\ w &= \omega_0 + \frac{z^2}{2(m-1)} D^2 \omega_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

По ним находим напряжения

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= -\frac{Gm}{m-1} (h^2 - z^2) \partial_1 D^2 \omega_0, \quad \tau_{yz} = -\frac{Gm}{m-1} (h^2 - z^2) \partial_2 D^2 \omega_0, \\ \sigma_z &= 0, \\ \sigma_x &= -\frac{2Gmz}{m-1} \left[ \partial_1^2 + \frac{1}{m} \partial_2^2 + \left( \frac{2m-1}{6m} z^2 - h^2 \right) \partial_2^2 D^2 \right] \omega_0, \\ \sigma_y &= -\frac{2Gmz}{m-1} \left[ \partial_2^2 + \frac{1}{m} \partial_1^2 + \left( \frac{2m-1}{6m} z^2 - h^2 \right) \partial_1^2 D^2 \right] \omega_0, \\ \tau_{xy} &= -\frac{2Gmz}{m-1} \left[ \frac{m-1}{m} \partial_1 \partial_2 - \left( \frac{2m-1}{6m} z^2 - h^2 \right) \partial_1 \partial_2 D^2 \right] \omega_0. \end{aligned} \right\} (1.27)$$

В теории изгиба плит рассматривают равнодействующие напряжений  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{yz}$  по толщине плиты

$$Q_x = \int_{-h}^h \tau_{zx} dz = -N \partial_1 D^2 \omega_0, \quad Q_y = \int_{-h}^h \tau_{yz} dz = -N \partial_2 D^2 \omega_0, \quad (1.28)$$

где через  $N$  обозначена величина

$$N = \frac{Gm}{m-1} \int_{-h}^h (h^2 - z^2) dz = \frac{4}{3} \frac{Gh^3 m}{m-1} = \frac{2}{3} \frac{Em^2 h^3}{m^2 - 1}, \quad (1.29)$$

называемая цилиндрической жёсткостью плиты.  $Q_x$  и  $Q_y$  называются перерезывающими силами. Они имеют размерность силы, делённой на длину.

Равнодействующие напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  по толщине плиты, конечно, равны нулю. Поэтому распределение напряжений  $\sigma_x$  и  $\tau_{xy}$  на площадке единичной длины и толщины  $2h$  в сечении плиты, перпендикулярном оси  $x$ , будет статически эквивалентно изгибающему моменту

$$G_x = \int_{-h}^h \sigma_x z dz = -N \left( \partial_1^2 + \frac{\partial_2^2}{m} - \frac{8m+1}{10m} h^2 \partial_2^2 D^2 \right) \omega_0 \quad (1.30)$$

и крутящему моменту

$$H_{xy} = \int_{-h}^h \tau_{xy} z dz = -N \left( \frac{m-1}{m} \partial_1 \partial_2 + \frac{8m+1}{10m} h^2 \partial_1 \partial_2 D^2 \right) \omega_0. \quad (1.31)$$

На площадке же, перпендикулярной оси  $y$ , будем иметь изгибающий момент

$$G_y = \int_{-h}^h \tau_y z dz = -N \left( \partial_z^2 + \frac{\partial_1^2}{m} - \frac{8m+1}{10m} h^2 \partial_1^2 D^2 \right) w_0 \quad (1.32)$$

и крутящий момент  $H_{yx} = H_{xy}$ .

Моменты  $G_x$ ,  $G_y$ ,  $H_{xy}$  имеют размерность силы. Из определения перерезывающих сил  $Q_x$ ,  $Q_y$  следует, что эти величины должны считаться положительными в том случае, когда они имеют направление положительной оси  $z$  на площадке, внешняя нормаль к которой направлена по положительной оси  $x$  или  $y$ . Моменты  $G_x$ ,  $G_y$ ,  $H_{xy}$

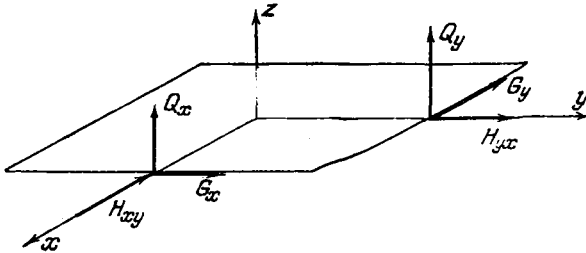


Рис. 17.

положительны, если они создаются напряжениями, положительными при  $z > 0$ . На рис. 17 указано направление положительных сил и моментов на площадках с нормальными, направленными по положительным осям  $x$  и  $y$ .

Уравнения статики легко выразить через перерезывающие силы и моменты; для этого умножим два первых уравнения статики сплошной среды при отсутствии объёмных сил на  $z dz$  и проинтегрируем их по  $z$  в пределах  $(-h, h)$ . Получим:

$$\int_{-h}^h \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} z dz + \int_{-h}^h \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} z dz + \int_{-h}^h \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} z dz = Q_x,$$

$$\int_{-h}^h \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} z dz + \int_{-h}^h \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} z dz + \int_{-h}^h \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} z dz = 0.$$

Имеем:

$$\int_{-h}^h \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} z dz = \tau_{xz} z \Big|_{-h}^h - \int_{-h}^h \tau_{xz} dz = -Q_x,$$

так как на торцах плиты ( $z = \pm h$ ) касательные напряжения отсутствуют.

По (1.28)—(1.32) получаем:

$$\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial H_{xy}}{\partial y} = Q_x, \quad \frac{\partial H_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} = Q_y. \quad (1.33)$$

Третье уравнение равновесия после умножения на  $dz$  и интегрирования в указанных пределах даёт:

$$\int_{-h}^h \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dz + \int_{-h}^h \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dz + \int_{-h}^h \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz = 0.$$

Мы рассматриваем случай изгиба плиты, нагружаемой только по боковой поверхности (однородные решения); поэтому  $\sigma_z$  на торцах плиты (и повсюду внутри неё) обращается в нуль; по (1.28) находим:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0. \quad (1.34)$$

Из (1.33) и (1.34) можно исключить перерезывающие силы. Получим соотношение:

$$\frac{\partial^2 G_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 G_y}{\partial y^2} = 0. \quad (1.35)$$

Подставив сюда выражения моментов, убедимся, что это соотношение будет соблюдено, если функция  $w_0(x, y)$  является бигармонической.

Выражения моментов (1.30)—(1.32) могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} G_x &= -ND^2 w_0 + \frac{m-1}{m} N \partial_2^2 \left( 1 + \frac{8m+1}{10(m-1)} h^2 D^2 \right) w_0, \\ G_y &= -ND^2 w_0 + \frac{m-1}{m} N \partial_1^2 \left( 1 + \frac{8m+1}{10(m-1)} h^2 D^2 \right) w_0, \\ H_{xy} &= -\frac{m-1}{m} N \partial_1 \partial_2 \left( 1 + \frac{8m+1}{10(m-1)} h^2 D^2 \right) w_0. \end{aligned} \right\} (1.36)$$

Моменты  $G_x$ ,  $G_y$ ,  $H_{xy}$  при переходе от одной координатной системы к другой преобразуются по тем же формулам, что и напряжения  $\sigma_x$ ,  $\tau_y$ ,  $\tau_{xy}$ . С другой стороны, формулы (1.36) имеют в точности ту же структуру, что и выражения напряжений (3.17)—(3.19) главы 3 в задаче о сжатии плиты. Поэтому выражения моментов в ортого-



нальных криволинейных координатах  $q_1, q_2$  можно записать в форме соотношений (3.54):

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= -ND^2\omega_0 + \\ &+ \frac{m-1}{m} N \left( \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} + \frac{\partial \ln H_2}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_1} \right) \left( 1 + \frac{8m+1}{10(m-1)} h^2 D^2 \right) \omega_0, \\ H_{12} &= -\frac{m-1}{m} N \left( \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{\partial \ln H_1}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial s_1} \right) \left( 1 + \frac{8m+1}{10(m-1)} h^2 D^2 \right) \omega_0. \end{aligned} \right\} (1.37)$$

Это — изгибающий и крутящий моменты на площадке, перпендикулярной к единичному вектору  $e_1$ ; на площадке, внешней нормалью которой является единичный вектор  $e_2$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} G_2 &= -ND^2\omega_0 + \frac{m-1}{m} N \left( \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} + \frac{\partial \ln H_1}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial s_2} \right) \left( 1 + \frac{8m+1}{10(m-1)} h^2 D^2 \right) \omega_0, \\ H_{21} = H_{12} &= -\frac{m-1}{m} N \left( \frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_1} - \frac{\partial \ln H_2}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} \right) \left( 1 + \frac{8m+1}{10(m-1)} h^2 D^2 \right) \omega_0. \end{aligned} \right\} (1.38)$$

Выражения перерезывающих сил на указанных площадках по (3.50) главы 3 имеют вид

$$Q_1 = -N \frac{\partial D^2 \omega_0}{\partial s_1}, \quad Q_2 = -N \frac{\partial D^2 \omega_0}{\partial s_2}. \quad (1.39)$$

По образцу формул (1.21) теперь записываем выражения изгибающего и крутящего момента, распределённых по контуру  $C$ , ограничивающему плиту в плане

$$\left. \begin{aligned} G_n &= -ND^2\omega_0 + \frac{m-1}{m} N \left( \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{\varepsilon_2}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} \right) \left( 1 + \frac{8m+1}{10(m-1)} h^2 D^2 \right) \omega_0, \\ H_{ns} &= -\frac{m-1}{m} N \left( \frac{\partial^2}{\partial n \partial s} + \frac{\varepsilon_1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial n} \right) \left( 1 + \frac{8m+1}{10(m-1)} h^2 D^2 \right) \omega_0. \end{aligned} \right\} (1.40)$$

Выражение перерезывающей силы, распределённой по этому контуру, имеет согласно (8.46) вид

$$Q_n = -N \frac{\partial D^2 \omega_0}{\partial n}. \quad (1.41)$$

Направления положительных сил и моментов показаны на рис. 18. Введя единичные векторы  $n, \tau, k$ , можем сказать, что в рассматриваемом напряжённом состоянии по цилиндрической поверхности, ограничивающей плиту, распределена система напряжений, статически эквивалентная распределению сил и моментов, определяемых векторами

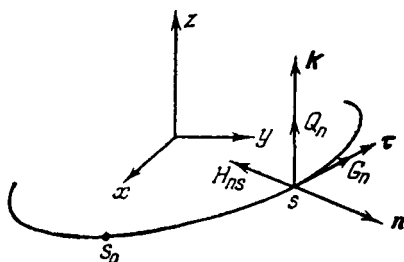


Рис. 18.

определяемых векторами

$$kQ_n, \quad \tau G_n, \quad -nH_{ns}. \quad (1.42)$$

Последнее выражение можно представить в форме

$$-nH_{ns} = -\tau \times kH_{ns} = -\frac{d}{ds}(R \times kH_{ns}) + R \times k \frac{\partial H_{ns}}{\partial s}, \quad (1.43)$$

где  $R$  — вектор-радиус точки контура  $C$ , так что

$$\tau = \frac{dR}{ds}.$$

Действие крутящих моментов, распределённых по дуге контура  $(s_0, s)$ , может быть представлено выражением момента относительно точки  $O$  — начала вектора  $R$ :

$$\begin{aligned} -\int_{s_0}^s nH_{ns} ds &= -\int_{s_0}^s d(R \times kH_{ns}) + \int_{s_0}^s R \times k \frac{\partial H_{ns}}{\partial s} ds = \\ &= -R(s) \times kH_{ns}(s) + R(s_0) \times kH_{ns}(s_0) + \int_{s_0}^s R \times k \frac{\partial H_{ns}}{\partial s} ds. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Но такой же момент относительно точки  $O$  дала бы система сил, состоящая из сосредоточенных сил  $[-kH_{ns}(s)]$  и  $kH_{ns}(s_0)$ , приложенных по концам рассматриваемой дуги, и непрерывного распределения вдоль этой дуги сил интенсивности  $k \frac{\partial H_{ns}}{\partial s}$  на единицу дуги; все эти силы имеют направление единичного вектора  $k$ , т. е. направление перерезывающих сил.

Отметив это, рассмотрим по отдельности две системы нагрузок, распределённых по участку  $(s_0, s)$  края плиты: систему (1.42) и систему, состоящую из двух сосредоточенных сил  $[-kH_{ns}(s)]$ ,  $kH_{ns}(s_0)$ , а также сил и моментов

$$k \left( Q_n + \frac{\partial H_{ns}}{\partial s} \right), \quad \tau G_n. \quad (1.45)$$

Главный вектор первой системы сил равен

$$V = k \int_{s_0}^s Q_n ds,$$

а второй системы

$$V' = k \int_{s_0}^s \left( Q_n + \frac{\partial H_{ns}}{\partial s} \right) ds - kH_{ns}(s) + kH_{ns}(s_0) = V.$$

Точно так же можно установить тождественность главных моментов систем сил (1.42) и (1.45) относительно произвольной точки  $O$ .

Действительно, для системы сил (1.42) он равен

$$m^{(0)} = \int_{s_0}^s \mathbf{R} \times \mathbf{k} Q_n ds + \int_{s_0}^s \tau G_n ds - \int_{s_0}^s \mathbf{n} H_{ns} ds,$$

или по (1.44)

$$m^{(0)} = \int_{s_0}^s \mathbf{R} \times \mathbf{k} \left( Q_n + \frac{\partial H_{ns}}{\partial s} \right) ds + \\ + \int_{s_0}^s \tau G_n ds - \mathbf{R}(s) \times \mathbf{k} H_{ns}(s) + \mathbf{R}(s_0) \times \mathbf{k} H_{ns}(s_0).$$

Такое же выражение получили бы, составив главный момент второй системы сил.

Итак, обе системы сил, распределённые по произвольно взятому участку края плиты, дают один и тот же главный вектор и главный момент, т. е. статически эквивалентны друг другу. Этот результат, составляющий содержание теоремы В. Томпсона, совместно с принципом Сен-Венана даёт основание при формулировании силовых краевых условий считать заданными по краю плиты изгибающий момент и величину

$$Q_n^* = Q_n + \frac{\partial H_{ns}}{\partial s}, \quad (1.46)$$

называемую обобщённой перерезывающей силой, а не три величины (1.42) по отдельности. А это позволяет довольствоваться бигармоническим однородным решением, так как бигармоническая функция может быть подчинена двум, но не трём краевым условиям на контуре области. Как указывалось выше, требование более строгого выполнения краевых условий, чем то, которое соответствует принципу Сен-Венана, привело бы к необходимости рассмотрения однородных решений, определяемых дифференциальными уравнениями, содержащими лапласианы более высокой степени, чем вторая. Всё необходимое для составления таких дифференциальных уравнений содержится в предшествующем изложении; однако проведение соответствующего исследования, в котором должны быть сформулированы краевые условия, строго соответствующие выбранному типу однородного решения, не входит в программу этой книги.

## § 2. Неоднородные решения

1°. Способ определения функций напряжения  $\chi$  и  $\psi$  в задачах сжатия и изгиба плиты, т. е. построения частных решений уравнений (3.10) и (3.30) главы 3, был для полигармонического (в частности полиномиального) загружения торцов плиты указан в § 4 главы 3.

Однако в тех случаях, когда нагрузка задана полиномом, этому общему методу следует предпочесть способ неопределённых коэффициентов. Для пояснения последнего рассмотрим задание нагрузки в форме полинома четвёртой степени

$$q = Ax^4 + Bx^2y^2 + Cy^4. \quad (2.1)$$

Речь идёт о построении частного решения уравнения сжатия плиты

$$Q(D^2)\chi = \left(1 + \frac{\sin 2hD}{2hD}\right) D^2\chi = \frac{1}{2G} (Ax^4 + Bx^2y^2 + Cy^4). \quad (2.2)$$

Нетрудно сообразить, что  $\chi$  следует искать в форме полинома шестой степени; он будет иметь вид

$$\chi = \frac{h^6}{G} \left[ A \left( \alpha \frac{x^2}{h^2} + \beta \frac{x^4}{h^4} + \gamma \frac{x^6}{h^6} \right) + B \left( \alpha_1 \frac{x^2y^2}{h^4} + \beta_1 \frac{x^4y^2 + x^2y^4}{h^6} + \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma_1 \frac{x^2 + y^2}{h^2} + \delta_1 \frac{x^6 + y^6}{h^6} \right) + C \left( \alpha \frac{y^2}{h^2} + \beta \frac{y^4}{h^4} + \gamma \frac{y^6}{h^6} \right) \right], \quad (2.3)$$

определению подлежат числовые коэффициенты  $\alpha, \dots, \delta_1$ .

В разложении оператора  $Q(D^2)$  следует сохранить слагаемые до третьей степени  $D^2$  включительно

$$Q(D^2) = 2 \left( 1 - \frac{h^2}{3} D^2 + \frac{1}{15} h^4 D^4 \right) D^2 + \dots \quad (2.4)$$

Вычисляем:

$$Qx^6 = 60x^4 - 240x^2h^2 + 96h^4, \quad Qx^4 = 24x^2 - 16h^2, \quad Qx^2 = 4, \\ Q(x^4y^2 + y^4x^2) = 4(x^4 + y^4) + 48x^2y^2 - 48h^2(x^2 + y^2) + \frac{192}{5}h^4 \text{ и т. д.}$$

Подстановка в (2.2) после простого вычисления даёт:

$$\alpha = \frac{2}{15}, \quad \beta = \frac{1}{12}, \quad \gamma = \frac{1}{120}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{12}, \quad \beta_1 = \frac{1}{96}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{45}, \quad \delta_1 = -\frac{1}{1440}. \quad (2.5)$$

Зная  $\chi$ , по (3.9) главы 3 находим  $u_0, v_0, w'_0$ , а затем по (2.15) главы 3 — перемещения в любой точке слоя. Конечно, в выражениях операторов, входящих в эти формулы, следует сохранить степени  $D^2$  до третьей включительно, но не выше. Можно также вычисление перемещений и напряжений вести непосредственно по формулам (3.13) — (3.19) главы 3, также удерживая в операторах  $X_k$  ( $izD, thD$ ) лишь члены до третьего порядка включительно относительно  $D^2$ .

2°. В качестве второго примера определим по уравнению (3.30) главы 3 функцию напряжений в задаче изгиба плиты, предполагая нагрузку  $p$  постоянной. Имеем:

$$\left( 1 - \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) D^2\psi = \frac{1}{2Gh} p \quad \text{или} \quad D^4\psi + \dots = \frac{3p}{4Gh^3}. \quad (2.6)$$

Можно искать  $\psi$  в виде

$$\psi = \frac{3p\alpha}{4h^3G} (x^2 + y^2)^2.$$

Но

$$D^2(x^2 + y^2)^2 = \left( \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho \right) \rho^4 = 16\rho^2, \quad D^4\rho^4 = 64 \quad (2.7)$$

и, значит,  $\alpha = \frac{1}{64}$ ,

$$\psi = \frac{3p}{256Gh^3} (x^2 + y^2)^2. \quad (2.8)$$

3°. В § 4 главы 3 были даны также указания о разыскании частного решения при нагружении по закону, выражающемуся произведением тригонометрических функций. Пусть, например, в задаче о сжатии плиты разыскивается функция напряжений  $\chi$  из уравнения

$$\left( 1 + \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) D^2\chi = \frac{1}{2G} q_0 \cos \alpha x \cos \beta y. \quad (2.9)$$

Тогда, замечая, что

$$D^2 \cos \alpha x \cos \beta y = -(\alpha^2 + \beta^2) \cos \alpha x \cos \beta y = -\gamma^2 \cos \alpha x \cos \beta y,$$

получим:

$$\chi = -\frac{q_0 h \cos \alpha x \cos \beta y}{G \gamma \Delta(\gamma h)}. \quad (2.10)$$

При радиально-симметричном нагружении нагрузку следует представить рядом (4.49) главы 3 по бесселевым функциям; тогда функция напряжений определится по (4.52) главы 3.

4°. Предполагая, что функция напряжений неоднородной задачи найдена, выразим через неё средние значения по толщине перемещений  $u$ ,  $v$  и напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , так как эти величины войдут в запись краевых условий на кривой  $C$ .

Для задачи сжатия дело сводится к вычислению интегралов типа

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^h X_k(tzD, thD) dz.$$

Например,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h} \int_{-h}^h X_1(tzD, thD) dz = \\ & = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \left( \cos hD \cos zD + \frac{z}{h} \sin zD \sin hD - \frac{m-2}{m} \cos zD \frac{\sin hD}{hD} \right) dz = \\ & = \frac{1}{m} \frac{1 - \cos 2hD}{h^2 D^2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Получаем:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u \, dz = -\frac{1}{m} \partial_1 \frac{1 - \cos 2hD}{h^2 D^2} \gamma, \\ \bar{v} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h v \, dz = -\frac{1}{m} \partial_2 \frac{1 - \cos 2hD}{h^2 D^2} \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

и, конечно,  $\bar{w} = 0$ .

Замечая ещё, что

$$\int_{-h}^h X_{\nu}(zID, hID) \, dz = 0, \quad (2.13)$$

по (3.17) — (3.19) главы 3 находим:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \frac{2G}{m} \partial_2^2 \frac{1 - \cos 2hD}{h^2 D^2} \gamma, \\ \bar{\tau}_{xy} &= -\frac{2G}{m} \partial_1 \partial_2 \frac{1 - \cos 2hD}{h^2 D^2} \gamma, \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{2G}{m} \partial_1^2 \frac{1 - \cos 2hD}{h^2 D^2} \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Формулы (2.12) и (2.14) можно записать, таким образом, в виде

$$\bar{u} = -\frac{1}{2G} \partial_1 \Phi_1, \quad \bar{v} = -\frac{1}{2G} \partial_2 \Phi_1, \quad (2.15)$$

$$\bar{\sigma}_x = \partial_2^2 \Phi_1, \quad \bar{\tau}_{xy} = -\partial_1 \partial_2 \Phi_1, \quad \bar{\sigma}_y = \partial_1^2 \Phi_1. \quad (2.16)$$

Здесь введена в рассмотрение функция

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{2G}{m} \frac{1 - \cos 2hD}{h^2 D^2} \gamma = \\ &= \frac{4G}{m} \left( 1 - \frac{h^2}{3} D^2 + \frac{2}{45} h^4 D^4 - \frac{1}{315} h^6 D^6 + \dots \right) \gamma. \end{aligned} \quad (2.17)$$

играющая роль функции напряжений в задаче о плоском напряжённом состоянии.

Введём в рассмотрение функцию

$$W = \Phi + \Phi_1, \quad (2.18)$$

где  $\Phi$  — бигармоническая функция, соответствующая однородному решению. Очевидно, что средние значения напряжений выражаются через  $W$  по формулам (1.18) или (2.16). Средние значения нормаль-

ного и касательного напряжения на контуре поэтому могут быть выражены формулами (1.21)

$$\bar{\sigma}_n = \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} - \frac{\varepsilon_2}{\rho} \frac{\partial W}{\partial n}, \quad \bar{\tau}_{ns} = -\frac{\partial^2 W}{\partial n \partial s} - \frac{\varepsilon_1}{\rho'} \frac{\partial W}{\partial n}. \quad (2.19)$$

При отсутствии закреплений, препятствующих свободному перемещению края сжимаемой плиты параллельно плоскости  $xu$ , величины  $\bar{\sigma}_n$  и  $\bar{\tau}_{ns}$  должны обратиться в нуль. Можно удовлетворить этим условиям, потребовав, чтобы

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0 \quad \text{на } C, \quad (2.20)$$

так как при обращении в нуль на контуре самой функции будут равны нулю и её производные по дуге контура. Первое условие (2.20) можно, конечно, заменить требованием  $W = \text{const}$  на  $C$ .

Введённая функция  $W$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$D^4 W = s(x, y), \quad (2.21)$$

где по (2.17)

$$s(x, y) = D^4 \Phi_1 = \frac{2G}{mh^2} D^3 (1 - \cos 2hD) \chi. \quad (2.22)$$

В теории изгиба тонких плит доказывается, что дифференциальным уравнением (2.21) при краевых условиях (2.20) определяется прогиб тонкой плиты с жёстко заделанным краем, нагруженной давлением, пропорциональным  $s(x, y)$ . Поэтому рассматриваемая задача о сжатии толстой плиты может в принятом приближении считаться решённой для тех областей, для которых известно решение упомянутой классической задачи об изгибе плиты.

Интересно отметить, что «нагрузка»  $s(x, y)$  обращается в нуль, если  $\chi$  — бигармоническая функция [см. (2.22)]. Это соответствует простейшим нагружениям плиты постоянным или линейно зависящим от  $x$  и  $y$  давлением  $q(x, y)$ . Тогда  $W = 0$ ,  $\Phi = -\Phi_1$  и величины  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$  и  $\bar{\tau}_{xy}$  обращаются в нуль по всему протяжению плиты.

Найдя из решения указанной краевой задачи  $W$ , получаем по (2.18) функцию напряжений  $\Phi$  однородной задачи. Вслед за этим по (1.12), (1.13), а также (3.13) — (3.19) главы 3 определяются перемещения и напряжения в любой точке плиты (а не только их средние значения).

Напомним ещё, что напряжения на площадках, перпендикулярных к оси  $z$ , в однородной задаче строго (а не в среднем) обращаются в нуль. Поэтому эти напряжения совершенно независимо от решения краевой задачи находятся с помощью функций напряжений неоднородного решения  $\chi$  по формулам (3.15) — (3.16) главы 3. В частности,

распределение нормальных напряжений  $\sigma_z$  на срединной плоскости найдём, положив  $z = 0$  в операторе  $X_4$ :

$$\sigma_z(x, y, 0) = 2G \left( \cos hD + \frac{\sin hD}{hD} \right) D^2 \gamma. \quad (2.23)$$

Вспоминая далее, что по определению функции напряжений [см. (3.10) главы 3]

$$\sigma_z(x, y, h) = 2G \left( 1 + \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) D^2 \gamma,$$

получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_z(x, y, h) - \sigma_z(x, y, 0) &= 2G(1 - \cos hD) \left( 1 - \frac{\sin hD}{hD} \right) D^2 \gamma = \\ &= 2G \left( 1 - \frac{h^2 D^2}{12} + \dots \right) \left( 1 - \frac{h^2 D^2}{20} + \dots \right) \frac{h^4}{12} D^6 \gamma. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Поэтому, если нагрузка  $q(x, y)$  представляет полином не выше третьей степени, т. е.  $\gamma$  является полиномом не выше пятой степени, то упругий слой передаёт давление без искажения на срединную плоскость. Следует, впрочем, напомнить, что условия по краю плиты удовлетворены лишь в среднем, вследствие чего сказанное справедливо в пределах применимости такого решения.

Средние значения напряжений  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{yz}$ , а также изгибающие и крутящий моменты  $G_x$ ,  $G_y$ ,  $H_{xy}$  в плите толщиной  $2h$ , сжимаемой по двум противоположным торцам, равны нулю. Но иначе обстоит дело в случае плиты толщиной  $h$ , покоящейся на гладком, жёстком основании. В этой задаче, добившись обращения в нуль средних значений напряжений  $\bar{\sigma}_n$  и  $\bar{\tau}_{ns}$ , мы оставляем на краю плиты систему сил, статически эквивалентную силе  $Q_n^*$  [см. (1.46)] и изгибающему моменту  $G_n$ . Поэтому состояние, соответствующее решению краевой задачи (2.21), может быть осуществлено (чем будет достигнуто плотное прилегание плиты к опорной плоскости, т. е. выполнение требования  $\psi = 0$  при  $z = 0$ ) при наличии опоры, препятствующей смещению края  $C$  перпендикулярно к срединной плоскости и воспринимающей указанные силу и момент. Эта опора не должна препятствовать смещению края, параллельному срединной плоскости.

Приводим формулы для перерезывающих сил и изгибающих и крутящего моментов. Они получаются по (3.15) — (3.19) главы 3 после выполнения интегрирования

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \int_0^h \tau_{zx} dz = -2G(1 - \cos hD) \left( 1 - \frac{\sin hD}{hD} \right) \partial_1 \gamma, \\ Q_y &= \int_0^h \tau_{yz} dz = -2G(1 - \cos hD) \left( 1 - \frac{\sin hD}{hD} \right) \partial_2 \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$



$$\left. \begin{aligned}
 G_x &= \int_0^h \tau_{xz} dz = -\frac{2G}{m} \frac{1 - \cos hD}{D^2} \left[ m\partial_1^2 \left( 1 - \frac{\sin hD}{hD} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2\partial_2^2 \left( \frac{\sin hD}{hD} - 1 - \cos hD \right) \right] \chi, \\
 G_y &= \int_0^h \tau_{yz} dz = -\frac{2G}{m} \frac{1 - \cos hD}{D^2} \left[ m\partial_2^2 \left( 1 - \frac{\sin hD}{hD} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2\partial_1^2 \left( \frac{\sin hD}{hD} - 1 - \cos hD \right) \right] \chi, \\
 H_{xy} &= \int_0^h \tau_{xy} z dz = -\frac{2G}{m} \frac{1 - \cos hD}{D^2} \partial_1 \partial_2 \left[ m \left( 1 - \frac{\sin hD}{hD} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - 2 \left( \frac{\sin hD}{hD} - 1 - \cos hD \right) \right] \chi.
 \end{aligned} \right\} (2.25)$$

Эти величины соответствуют неоднородному решению; для однородного решения, определяемого функцией  $\Phi$  по (1.12),

$$\left. \begin{aligned}
 G_x &= \frac{h^2}{2} \partial_2^2 \left[ \Phi - \frac{h^2}{12(m+1)} D^2 \Phi \right], \\
 G_y &= \frac{h^2}{2} \partial_1^2 \left[ \Phi - \frac{h^2}{12(m+1)} D^2 \Phi \right], \\
 H_{xy} &= -\frac{h^2}{2} \partial_1 \partial_2 \left[ \Phi - \frac{h^2}{12(m+1)} D^2 \Phi \right].
 \end{aligned} \right\} (2.26)$$

5°. Для постановки краевых условий в задаче изгиба следует иметь выражения перерезывающих сил и изгибающих и крутящего моментов через функцию напряжений  $\psi$  неоднородной задачи. Вычисление проводится по выражениям напряжений (3.33) главы 3; приводим его результаты:

перерезывающие силы:

$$\left. \begin{aligned}
 Q_x &= \int_{-h}^h \tau_{zx} dz = -\frac{3N}{h^2} \frac{m-1}{m} \partial_1 \left( 1 - \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) \psi, \\
 Q_y &= \int_{-h}^h \tau_{yz} dz = -\frac{3N}{h^2} \frac{m-1}{m} \partial_2 \left( 1 - \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) \psi;
 \end{aligned} \right\} (2.27)$$

изгибающие моменты:

$$\begin{aligned}
 G_x &= \int_{-h}^h \tau_{xz} dz = -\frac{3N(m-1)}{mh^2} \left\{ \left( \partial_1^2 + \frac{1}{m} \partial_2^2 \right) \frac{1}{D^2} \left( 1 - \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{m} \frac{\partial_2^2}{D^2} \left[ 3 \left( 1 - \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) - (1 - \cos 2hD) \right] \right\} \psi, \\
 G_y &= \int_{-h}^h \tau_{yz} dz = -\frac{3N(m-1)}{mh^2} \left\{ \left( \partial_2^2 + \frac{1}{m} \partial_1^2 \right) \frac{1}{D^2} \left( 1 - \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{m} \frac{\partial_1^2}{D^2} \left[ 3 \left( 1 - \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) - (1 - \cos 2hD) \right] \right\} \psi;
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

крутящий момент:

$$\begin{aligned}
 H_{xy} &= \int_{-h}^h \tau_{xy} z dz = -\frac{3N(m-1)}{mh^2} \partial_1 \partial_2 \left\{ \frac{m-1}{m} \frac{1}{D^2} \left( 1 - \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{mD^2} \left[ 3 \left( 1 - \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) - (1 - \cos 2hD) \right] \right\} \psi.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

При радиально-симметричном нагружении формулы будут иметь вид [ср. (3.58) и (3.59) главы 3]

$$\begin{aligned}
 Q_\rho &= -\frac{3N(m-1)}{mh^2} \partial_\rho \left( 1 - \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) \psi, \quad Q_\varphi = 0, \\
 G_\rho &= -\frac{3N(m-1)}{mh^2} \left\{ \left( \partial_\rho^2 + \frac{1}{m_\rho} \partial_\rho \right) \frac{1}{D^2} \left( 1 - \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{m_\rho} \partial_\rho \frac{1}{D^2} \left[ 3 \left( 1 - \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) - (1 - \cos 2hD) \right] \right\} \psi, \\
 G_\varphi &= -\frac{3N(m-1)}{mh^2} \left\{ \left( \frac{1}{\rho} \partial_\rho + \frac{1}{m} \partial_\rho^2 \right) \frac{1}{D^2} \left( 1 - \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{m} \partial_\rho^2 \frac{1}{D^2} \left[ 3 \left( 1 - \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) - (1 - \cos 2hD) \right] \right\} \psi, \quad H_{\rho\varphi} = 0,
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

и, как уже отмечалось, было бы ошибкой писать в другой последовательности, например

$$\left( 1 - \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) \partial_\rho \psi \quad \text{вместо} \quad \partial_\rho \left( 1 - \frac{\sin 2hD}{2hD} \right) \psi.$$

### § 3. Равновесие круглой толстой плиты

В двух предшествующих параграфах дано всё необходимое для рассмотрения отдельных частных задач о равновесии толстой плиты. Для пояснения хода расчёта рассмотрим несколько случаев загрузки круглой плиты.

1°. Круглая плита, опёртая по краю, равномерно нагруженная по верхнему торцу.

Задача разбивается на две: 1) сжатие плиты противоположно направленными нагрузками интенсивности  $\frac{1}{2}p$ , распределёнными по верхнему и нижнему торцам; 2) изгиб плиты теми же нагрузками, имеющими одинаковое направление на обоих торцах.

Задача о сжатии в данном случае вполне тривиальна; но мы приведём её решение, чтобы дать пример использования вышеприведённых формул, так как они в той же последовательности, хотя и с более сложными вычислениями, могли бы быть применены при любом полигармоническом законе нагружения.

По (3.10) главы 3

$$\left(1 + \frac{\sin 2hD}{2hD}\right) D^2 \gamma = 2D^2 \gamma + \dots = -\frac{p}{4G}, \quad (3.1)$$

находим частное решение (неоднородное решение)

$$\gamma = -\frac{p}{32G} (x^2 + y^2) \quad (3.2)$$

и по (2.17) — функцию  $\Phi_1$ :

$$\Phi_1 = -\frac{p}{8m} \left(x^2 + y^2 - \frac{4}{3} h^2\right). \quad (3.3)$$

В соответствии с замечанием в п. 4 § 2 в данном случае функция напряжений однородного решения

$$\Phi = -\Phi_1 = \frac{p}{8m} \left(x^2 + y^2 - \frac{4}{3} h^2\right). \quad (3.4)$$

При более сложных законах нагружения определение  $\Phi$  сводится к краевой задаче (2.20) — (2.21), которая для круговой области также просто решается; для других областей решение является, конечно, более сложным.

Поскольку  $\Phi$  и  $\gamma$  известны, задача может считаться решённой — дальнейшее вычисление ведётся по приведённым выше формулам. Найдём, например, перемещения. Они состоят из двух частей: части, соответствующей однородной задаче, вычисляемой по (1.13):

$$u_1 = -\frac{px}{8mG} + \frac{px}{4G(m+1)}, \quad v_1 = -\frac{py}{8mG} + \frac{py}{4G(m+1)}, \\ w_1 = -\frac{pz}{4mG(m+1)},$$

и части, определяемой по функции  $\gamma$  согласно формулам (3.13) — (3.14) главы 3; в данном случае в разложении оператора  $X_1$  по степеням  $D^2$  следует ограничиться лишь свободным членом, а оператора  $X_2$  — первой степенью  $D^2$ :

$$X_1(izD, ihD) = \frac{2}{m} + \dots, \quad X_2(izD, ihD) = -\frac{2(m-1)}{m} zD^2 + \dots$$

Поэтому

$$u_2 = \frac{px}{8mG}, \quad v_2 = \frac{py}{8mG}, \quad w_2 = -p \frac{m-1}{4mG} z.$$

Складывая эти выражения и делая замену

$$\frac{m}{2G(m+1)} = \frac{1}{E},$$

получим, как и следовало ожидать,

$$u = \frac{px}{2Em}, \quad v = \frac{py}{2Em}, \quad w = -\frac{pz}{2E}. \quad (3.5)$$

Более длинными, хотя также вполне элементарными в данном примере, являются вычисления, связанные с задачей изгиба. Функция напряжений неоднородного решения была определена выше, в примере 2° § 2. Следует лишь заменить в (2.8) букву  $p$  на  $(-\frac{1}{2}p)$ :

$$\psi = -\frac{3p}{512Gh^3} (x^2 + y^2)^2 = -\frac{3p}{512Gh^3} \rho^4. \quad (3.6)$$

Теперь по (3.29) главы 3 получаем выражение прогиба серединной плоскости

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \left[ \frac{2(m-1)}{m} \cos hD - hD \sin hD \right] \psi = \\ &= -\frac{p}{64N} \left( 1 - \frac{2m-1}{2m-2} h^2 D^2 + \frac{3m-1}{24(m-1)} h^4 D^4 + \dots \right) \rho^4 = \\ &= -\frac{p}{64N} \left( \rho^4 - 8\beta^2 h^2 \frac{2m-1}{m-1} + 8h^4 \frac{3m-1}{3(m-1)} \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $N$  — цилиндрическая жёсткость.

Далее по (2.31) находим изгибающий момент; получаем:

$$G_p = \frac{p}{16} \left( \frac{3m+1}{m} \rho^2 - \frac{8}{3} \frac{m+3}{m} h^2 \right). \quad (3.8)$$

Переходим к однородной задаче; в общем выражении радиально-симметричной бигармонической функции

$$\omega_0 = C_1 + C_2 \rho^2 + C_3 \ln \rho + C_4 \rho^2 \ln \rho \quad (3.9)$$

надо принять  $C_3 = C_4 = 0$ , так как перемещение и напряжение должно оставаться конечными на оси  $z$  (при  $\rho = 0$ ). Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  найдём из условий обращения в нуль перемещения  $\omega_0^*$  и изгибающего момента  $G_p^*$ , соответствующих сумме неоднородного и однородного решений. Существенным является, впрочем, только второе условие, дающее значение постоянной  $C_2$ , так как перемещение  $\omega_0^*$  может быть определено с точностью до аддитивной постоянной.

Переходя к полярным координатам в (1.37), имеем:

$$G_r = -N \left( \partial_r^2 + \frac{1}{m\rho} \partial_r - \frac{8m+1}{10m\rho} h^2 \partial_r D^2 \right) \omega_0 = -NC_2 \frac{2(m+1)}{m}, \quad (3.10)$$

и условия для определения  $C_1$  и  $C_2$  будут:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 \rho_0^2 - \frac{p}{64N} \left( \rho_0^4 - 8\rho_0^2 h^2 \frac{2m-1}{m-1} + 8h^4 \frac{3m-1}{3(m-1)} \right) &= 0, \\ -NC_2 \frac{2(m+1)}{m} + \frac{p}{16} \left( \frac{3m+1}{m} \rho_0^2 - \frac{8}{5} \frac{m+3}{m} h^2 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Окончательное выражение перемещения  $\omega_0^*$  срединной плоскости плиты оказывается равным

$$\omega_0^* = \frac{p}{64N} (\rho_0^2 - \rho^2) \left( \rho^2 - \frac{5m+1}{m+1} \rho_0^2 - \frac{8h^2}{5} \frac{8m^2+m+1}{m^2-1} \right). \quad (3.11)$$

В центре плиты (при  $\rho = 0, z = 0$ )

$$(\omega_0^*)_{\rho=0} = f = -\frac{p\rho_0^4}{64N} \left( \frac{5m+1}{m+1} + \frac{8h^2}{5\rho_0^2} \frac{8m^2+m+1}{m^2-1} \right). \quad (3.12)$$

Полагая здесь  $h = 0$ , найдём значение прогиба, получающееся в теории тонких плит:

$$f_1 = -\frac{p\rho_0^4}{64N} \frac{5m+1}{m+1}. \quad (3.13)$$

Отношение

$$\frac{f}{f_1} = 1 + \frac{8h^2}{5\rho_0^2} \frac{8m^2+m+1}{(5m+1)(m-1)} \quad (3.14)$$

при  $m = 3$  оказывается равным

$$1 + 3,8 \frac{h^2}{\rho_0^2},$$

т. е. при  $\frac{h}{\rho_0} = 0,1$  увеличение прогиба составляет примерно 4%. При больших значениях этого отношения будет сомнительной приемлемость самого решения, так как крайевым условиям на цилиндрической поверхности  $\rho = \rho_0$  мы удовлетворили лишь в среднем, а не точно.

Ещё меньше по сравнению с расчётом по теории тонких плит изменяются напряжения. Рассмотрим, например, напряжение  $\sigma_r^*$ . Оно вычисляется для неоднородного и однородного решений по (3.33) главы 3 и (1.27). Это вычисление даёт:

$$\sigma_r^* = -\frac{3pz}{32h^3} \left[ \frac{3m+1}{m} (\rho_0^2 - \rho^2) + \frac{4(2m+1)}{m} \left( \frac{z^2}{3} - \frac{h^2}{5} \right) \right] \quad (3.15)$$

и не обращается в нуль при  $\rho = \rho_0$ ; обращается в нуль на краю плиты изгибающий момент

$$G_\rho^* = \int_{-h}^h \sigma_\rho^* z dz = -\frac{3m+1}{m} \frac{p}{16} (\rho_0^2 - \rho^2), \quad (3.16)$$

чего и требуют поставленные краевые условия «в среднем».

Максимальное напряжение  $\sigma_\rho^*$  имеет место на оси плиты при  $z = \pm h$ :

$$(\sigma_\rho^*)_{\max} = \mp \frac{3p}{32h^3} \left( \frac{3m+1}{m} \rho_0^2 + \frac{8(2m+1)}{15m} h^2 \right), \quad (3.17)$$

и его отношение к максимальному напряжению, вычисляемому в теории тонких плит, равно

$$1 + \frac{8(2m+1)}{15(3m+1)} \frac{h^2}{\rho_0^2}.$$

При допустимых значениях  $\frac{h}{\rho_0}$  изменение очень мало. Вообще, при плавно изменяющихся нагрузках теория толстых плит не вносит существенных поправок в результаты расчёта по теории плит тонких. Эти поправки могут, однако, быть значительными в местах, где нагрузки резко меняются, например в области, примыкающей к точке приложения сосредоточенной силы.

2°. Круглая плита, заделанная по краю, под действием собственного веса.

Частное решение, соответствующее действию силы веса, находим по (7.8) и (7.12) главы 3:

$$u^{(1)} = 0, \quad v^{(1)} = 0, \quad w^{(1)} = \frac{(m-2)\gamma}{4G(m-1)} z^2, \quad (3.18)$$

и, значит,

$$\sigma_x^{(1)} = \sigma_y^{(1)} = \frac{\gamma z}{m-1}, \quad \sigma_z^{(1)} = \gamma z, \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{yz}^{(1)} = \tau_{zx}^{(1)} = 0. \quad (3.19)$$

Соответствующие изгибающие моменты равны

$$G_x^{(1)} = G_y^{(1)} = \frac{2\gamma h^3}{3(m-1)}. \quad (3.20)$$

Второе частное решение неоднородной задачи, определяемое функцией напряжения  $\psi$ , налагается, чтобы освободить торцы от действия изгибающей нагрузки; для определения служит уравнение (7.13) главы 3. Из него следует [ср. (3.6)]:

$$\psi = -\frac{3\gamma}{256Gh^2} \rho^4. \quad (3.21)$$

Наконец, чтобы удовлетворить в среднем условию на краю плиты  $\rho = \rho_0$ , следует наложить однородное решение, определяемое функцией  $\omega_0$ ; как и в предшествующем примере, она будет [ср. (3.9)]:

$$\omega_0 = C_1 + C_2 \rho^2. \quad (3.22)$$

Рассмотрим частный случай плиты, заделанной по краю:

$$\text{при } \rho = \rho_0 \quad \omega_0^* = 0, \quad \frac{\partial \omega_0^*}{\partial \rho} = 0, \quad (3.23)$$

где  $\omega_0^*$  — перемещение точек срединной плоскости (соответствующее сумме решений), а второе условие выражает, что касательная плоскость к изогнутой срединной поверхности остаётся горизонтальной по кругу  $\rho = \rho_0$ .

Дальнейшее вычисление в значительной мере повторяет то, которое было уже сделано выше. Приводим лишь окончательное выражение

$$\omega_0^* = -\frac{\gamma h}{32N} (\rho_0^2 - \rho^2)^2. \quad (3.24)$$

Такое же выражение получается в теории тонких плит для прогиба срединной плоскости под действием равномерно распределённой нормальной нагрузки  $p = 2\gamma h$  по верхнему торцу. Однако для других величин расчёты по теории толстых и тонких плит не совпадают. Например, в окончательном выражении изгибающего момента

$$G_\rho^* = \frac{\gamma h}{8} \left( \frac{3m+1}{m} \rho^2 - \frac{m+1}{m} \rho_0^2 \right) + \frac{\gamma h^3 (24m^2 + 23m + 3)}{30m(m-1)}, \quad (3.25)$$

получаемом по теории толстых плит, появляется добавочное слагаемое, пропорциональное  $\gamma h^3$ . Поэтому изгибающий момент на опоре ( $\rho = \rho_0$ ) оказывается здесь (при  $m = 3$ ) в  $1 + 6,4 \frac{h^2}{\rho^2}$  раз большим, чем в теории тонких плит.

3°. Вращающийся диск. Частное решение, соответствующее действию объёмной силы находится по потенциалу перемещений (7.14) главы 3. Соответствующие ему перемещения по (7.8) главы 3 будут:

$$u_\rho^{(1)} = -\frac{m-2}{16G(m-1)} \frac{\gamma \omega^2}{g} \rho^3, \quad \omega^{(1)} = 0, \quad (3.26)$$

а напряжения [см. (7.10) и (7.10') главы 3]:

$$\tau_\rho^{(1)} = -\frac{3m-2}{m-1} \frac{\gamma \omega^2}{8g} \rho^2, \quad \sigma_\rho^{(1)} = -\frac{m+2}{m-1} \frac{\gamma \omega^2}{8g} \rho^2, \quad \sigma_z^{(1)} = -\frac{\gamma \omega^2}{2g(m-1)} \rho^2 \quad (3.27)$$

(касательные напряжения равны нулю).

Функция напряжений неоднородной задачи  $\chi$  определяется по уравнению (7.16) главы 3 и оказывается равной

$$\chi = \frac{i\gamma\omega^2}{8G(m-1)g} \left( \frac{1}{16} \rho^4 + \frac{1}{3} h^2 \rho^2 \right). \quad (3.28)$$

По (3.13) — (3.19) главы 3, ограничиваясь нужными степенями  $D^2$  в разложении операторов  $X_k(zID, hiD)$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} u_\rho^{(2)} &= -\frac{\gamma\omega^2}{4gG(m-1)m} \left[ \frac{1}{4} \rho^3 + (m-1) \rho \left( z^2 - \frac{1}{3} h^2 \right) \right], \\ \omega^{(2)} &= \frac{\gamma\omega^2 z}{4gGm(m-1)} \left[ (m-1) \rho^2 + \frac{2}{3} (z^2 - h^2) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

и далее

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho^{(2)} &= \frac{\gamma\omega^2}{2g(m-1)m} \left[ \frac{1}{4} \rho^2 - (m+1) \left( z^2 - \frac{1}{3} h^2 \right) \right], \\ \sigma_\varphi^{(2)} &= \frac{\gamma\omega^2}{2g(m-1)m} \left[ \frac{3}{4} \rho^2 - (m+1) \left( z^2 - \frac{1}{3} h^2 \right) \right], \\ \sigma_z^{(2)} &= \frac{\gamma\omega^2}{2g(m-1)} \rho^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

Складывая полученные решения (3.26) и (3.27) с (3.29) и (3.30), получим частное решение задачи о равновесии плиты с незагруженными торцами, подверженной действию центробежной силы:

$$u_\rho^* = -\frac{\gamma\omega^2 \rho}{4gGm} \left[ \frac{1}{4} (m-1) z^2 - \frac{1}{3} h^2 \right], \quad \omega^* = \frac{\gamma\omega^2 z}{4gGm} \left[ \rho^2 + \frac{2(z^2 - h^2)}{3(m-1)} \right], \quad (3.31)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho^* &= -\frac{\gamma\omega^2}{2gm} \left[ \frac{3m+1}{4} \rho^2 + \frac{m+1}{m-1} \left( z^2 - \frac{1}{3} h^2 \right) \right], \\ \sigma_\varphi^* &= -\frac{\gamma\omega^2}{2gm} \left[ (m+3) \frac{\rho^2}{4} + \frac{m+1}{m-1} \left( z^2 - \frac{1}{3} h^2 \right) \right], \quad \sigma_z^* = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

В случае вращающегося круглого диска, край которого ( $\rho = \rho_0$ ) свободен, мы должны на это решение наложить однородное решение, оставляющее торцы диска свободными от нагружения, а его край нагруженным растягивающими усилиями, равными в среднем по величине и противоположными по направлению среднему значению при  $\rho = \rho_0$  напряжения  $\sigma_\rho^*$ :

$$\bar{\sigma}_\rho^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_\rho^* dz = -\frac{\gamma\omega^2}{8mg} (3m+1) \rho^2. \quad (3.33)$$



Бигармоническую функцию

$$\Phi = C\rho^2, \quad (3.34)$$

соответствующую этому однородному решению, надо по (1.19) найти из условия

$$\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} = 2C = \frac{\gamma \omega^2}{8mg} (3m+1) \rho_0^3. \quad (3.35)$$

Теперь по (1.13) и (1.16) находятся перемещения и напряжения, отвечающие этому однородному решению, а складывая их с (3.31) и (3.32), получаем решение задачи: перемещения

$$\left. \begin{aligned} u_\rho &= \frac{\gamma \omega^2 \rho}{16gGm} (m-1) \left[ \frac{3m+1}{m+1} \rho_0^2 - \rho^2 - \frac{4}{m-1} \left( z^2 - \frac{1}{3} h^2 \right) \right], \\ w &= \frac{\gamma \omega^2 z}{4gGm} \left[ \rho^2 - \frac{3m+1}{m+1} \frac{\rho_0^2}{2} - \frac{2(h^2 - z^2)}{3(m-1)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

и напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{\gamma \omega^2}{2gm} \left[ \frac{3m+1}{4} (\rho_0^2 - \rho^2) - \frac{m+1}{m-1} \left( z^2 - \frac{1}{3} h^2 \right) \right], \\ \tau_\varphi &= \frac{\gamma \omega^2}{2gm} \left[ \frac{3m+1}{4} (\rho^2 + \rho_0^2) - (m+1) \rho^2 - \frac{m+1}{m-1} \left( z^2 - \frac{1}{3} h^2 \right) \right], \\ \sigma_z &= 0, \quad \tau_{z\rho} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

В случае диска с центральным отверстием на решение (3.31), (3.32) надо наложить однородное бигармоническое решение, определяемое функцией напряжения,

$$\Phi = C_1 \rho^2 + C_2 \ln \rho. \quad (3.38)$$

Слагаемое  $C_2 \rho^2 \ln \rho$ , входящее в общее выражение радиально-симметричной бигармонической функции, отброшено, так как ему соответствующие перемещения согласно (1.16) не однозначны. Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  должны быть определены из условий на внешнем ( $\rho = \rho_0$ ) и внутреннем ( $\rho = \rho_1$ ) краях диска; например, если они свободны, то

$$\left. \begin{aligned} 2C_1 + \frac{C_2}{\rho_0^2} &= \frac{\gamma \omega^2}{8gm} (3m+1) \rho_0^2, \\ 2C_1 + \frac{C_2}{\rho_1^2} &= \frac{\gamma \omega^2}{8gm} (3m+1) \rho_1^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Вместо (10.37) получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\gamma \omega^2}{2gm} \left[ \frac{3m+1}{4} (\rho_0^2 - \rho^2) (\rho^2 - \rho_1^2) \frac{1}{\rho^2} - \frac{m+1}{m-1} \left( z^2 - \frac{1}{3} h^2 \right) \right], \\ \sigma_\varphi &= \frac{\gamma \omega^2}{2gm} \left[ \frac{3m+1}{4} (\rho_0^2 + \rho^2) (\rho^2 + \rho_1^2) \frac{1}{\rho^2} - (m+1) \rho^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m+1}{m-1} \left( z^2 - \frac{1}{3} h^2 \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

В выражение перемещения  $u_r$  добавляется слагаемое

$$-\frac{C_2}{2U\rho} = \frac{\gamma \omega^2}{16Jgm} (3m+1) \frac{\rho_0^2 \rho_1^2}{\rho^2}, \quad (3.41)$$

а перемещение  $w$  остаётся неизменным.

4°. Круглая плита, нагруженная сосредоточенной силой в центре верхнего торца ( $z = h, \rho = 0$ ), жёстко заделанная по краю.

Пользуясь лишь бигармоническими однородными решениями, мы можем удовлетворить краевым условиям не по всей ограничивающей плиту цилиндрической поверхности, а только на серединной окружности ( $\rho = \rho_0, z = 0$ ). Мы потребуем, чтобы на этой окружности, во-первых, обращались в нуль радиальное и осевое перемещения

$$\text{при } \rho = \rho_0: \quad u_r = 0, \quad w = 0 \quad (3.42)$$

и, во-вторых, — угол поворота края. Последнее требование можно сформулировать или в виде

$$\text{при } \rho = \rho_0 \quad \frac{\partial w}{\partial \rho} = 0, \quad (3.43)$$

или же

$$\text{при } \rho = \rho_0 \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0. \quad (3.44)$$

Мы остановимся далее на первом из них. Второе условие (3.42), конечно, несущественно, так как при наличии радиальной симметрии ему всегда можно удовлетворить, налагая жёсткое смещение по оси  $z$ .

Допустим сначала, что плита нагружена на верхнем торце по кругу радиуса  $\rho_1$  нагрузкой постоянной интенсивности  $\frac{Q}{\pi \rho_1^2}$ :

$$s(\rho) = \begin{cases} -\frac{Q}{\pi \rho_1^2} & \text{при } \rho < \rho_1, \\ 0 & \text{при } \rho > \rho_1 \end{cases} \quad (3.45)$$

(знак минус выражает, что мы считаем  $Q > 0$  при сжатии). Представим эту функцию в форме ряда (4.49) главы 3; его коэффициенты вычисляются по (4.51) главы 3 и будут:

$$A_s = -\frac{2Q}{\pi \rho_1^2 \rho_0^2 J_1^2(\lambda_s)} \int_0^{\rho_1} J_0\left(\lambda_s \frac{\rho}{\rho_0}\right) \rho \, d\rho = -\frac{2Q J_1\left(\frac{\lambda_s \rho_1}{\rho_0}\right)}{\pi \rho_0 \rho_1 \lambda_s J_1^2(\lambda_s)}. \quad (3.46)$$

Случай сосредоточенной силы получится при предельном переходе  $\rho_1 \rightarrow 0$ :

$$A_s = -\frac{Q}{\pi \rho_0^2} \frac{1}{J_1^2(\lambda_s)}. \quad (3.47)$$

Таким образом, нагрузка, соответствующая действию сосредоточенной силы, представляется рядом

$$s(\rho) = -\frac{Q}{\pi \rho_0^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\lambda_s \frac{\rho}{\rho_0}\right)}{J_1^2(\lambda_s)}, \quad (3.48)$$

конечно, расходящимся. Им можно пользоваться для получения имеющих смысл решений, выражающихся сходящимися рядами; подобно этому, решая задачу о слое, для представления нагрузки мы пользовались расходящимися интегралами.

Разбиваем теперь задачу на две: задачу сжатия и задачу изгиба. Нужно найти функции напряжений  $\gamma$  и  $\psi$  по (3.10) и (3.30) главы 3:

$$\left(1 + \frac{\sin 2hD}{2hD}\right) D^2 \gamma = -\frac{Q}{4\pi G \rho_0^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\lambda_s \frac{\rho}{\rho_0}\right)}{J_1^2(\lambda_s)}, \quad (3.49)$$

$$\left(1 - \frac{\sin 2hD}{2hD}\right) D^2 \psi = -\frac{Q}{4\pi G \rho_0^2 h} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\lambda_s \frac{\rho}{\rho_0}\right)}{J_1^2(\lambda_s)}. \quad (3.50)$$

Решения их составляем по (4.38), (4.39) и (4.52) главы 3:

$$\gamma = \frac{Qh}{2\pi G \rho_0} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\lambda_s \rho}{\rho_0}\right)}{\lambda_s J_1^2(\lambda_s) \Delta\left(\frac{\lambda_s h}{\rho_0}\right)}, \quad (3.51)$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi G \rho_0} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\lambda_s \rho}{\rho_0}\right)}{\lambda_s J_1^2(\lambda_s) \Delta_1\left(\frac{\lambda_s h}{\rho_0}\right)}. \quad (3.52)$$

В задаче сжатия нужно удовлетворить одному лишь краевому условию (3.42) для радиального смещения, так как осевое смещение  $w$  автоматически обращается в нуль на всей плоскости  $z = 0$ . Добавляя поэтому однородное решение с функцией напряжения

$$\Phi = C\rho^2, \quad (3.53)$$

найдем перемещения  $u_\rho$ , соответствующие  $\chi$  и  $\Phi$ , и потребуем, чтобы их сумма при  $\rho = \rho_0$  и  $z = 0$  обращалась в нуль:

$$\frac{Q}{2\pi G\rho_0} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\frac{\lambda_s h}{\rho_0} \operatorname{ch} \frac{\lambda_s h}{\rho_0} - \frac{m-2}{m} \operatorname{sh} \frac{\lambda_s h}{\rho_0}}{\lambda_s J_1(\lambda_s) \Delta\left(\frac{\lambda_s h}{\rho_0}\right)} + \frac{m-1}{(m+1)G} C\rho_0 = 0. \quad (3.54)$$

Здесь использованы формулы (3.57) главы 3 и (1.13). Найдя значение постоянной  $C$ , вычислим далее перемещения и напряжения; для этого придется обратиться к (3.13)—(3.19) главы 3, а также (1.12) и (1.13).

Например, распределение напряжения  $\sigma_z$  по плоскости  $z = 0$  будет:

$$\sigma_z(\rho, 0) = -\frac{Q}{\pi\rho_0^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\lambda_s \rho}{\rho_0}\right)}{J_1^2(\lambda_s) \Delta\left(\frac{\lambda_s h}{\rho_0}\right)} \left( \operatorname{sh} \frac{\lambda_s h}{\rho_0} + \frac{\lambda_s h}{\rho_0} \operatorname{ch} \frac{\lambda_s h}{\rho_0} \right). \quad (3.55)$$

В задаче изгиба существенно удовлетворить условию (3.43), тогда как первое условие (3.42) выполняется автоматически по (1.9) главы 3. Функцию  $w_0$ , которой определяется решение однородной задачи, зададим в виде

$$w_0 = D_1 + D_2 \rho^2 \quad (3.56)$$

и определим полный прогиб срединной плоскости  $w^*$  как сумму выражений (3.29) главы 3 и (3.56):

$$w_0^* = \frac{Q}{2\pi G_f 0} \sum_{s=1}^{\infty} \left[ \frac{2(m-1)}{m} \operatorname{ch} \frac{\lambda_s h}{\rho_0} + \frac{\lambda_s h}{\rho_0} \operatorname{sh} \frac{\lambda_s h}{\rho_0} \right] \frac{J_0\left(\frac{\lambda_s \rho}{\rho_0}\right)}{\lambda_s J_1^2(\lambda_s) \Delta_1\left(\frac{\lambda_s h}{\rho_0}\right)} + D_1 + D_2 \rho^2. \quad (3.57)$$

Требование обращения  $w_0^*$  в нуль при  $\rho = \rho_0$  по (4.30) главы 3 даёт:

$$D_1 = -D_2 \rho_0^2. \quad (3.58)$$

Далее из условия (3.43) получаем:

$$D_2 = \frac{Q}{4\pi G_f^2} \sum_{s=1}^{\infty} \left[ \frac{2(m-1)}{m} \operatorname{ch} \frac{\lambda_s h}{\rho_0} + \frac{\lambda_s h}{\rho_0} \operatorname{sh} \frac{\lambda_s h}{\rho_0} \right] \frac{1}{J_1(\lambda_s) \Delta_1\left(\frac{\lambda_s h}{\rho_0}\right)}. \quad (3.59)$$

Задачу можно считать решённой, так как теперь перемещения и напряжения находятся по (3.32), (3.33) главы 3, а также по (1.26) и (1.27). Ограничимся рассмотрением перемещения срединной плоскости и сравнением его со значением, получаемым в теории тонких плит. Имеем:

$$w_0^* = -\frac{Q}{2\pi G\rho_0} \sum_{s=1}^{\infty} \left[ \frac{2(m-1)}{m} \operatorname{ch} \frac{\lambda_s h}{\rho_0} + \frac{\lambda_s h}{\rho_0} \operatorname{sh} \frac{\lambda_s h}{\rho_0} \right] \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\rho_0^2} - \frac{J_0\left(\frac{\lambda_s \rho^2}{\rho_0}\right)}{\lambda_s J_1(\lambda_s)} \right] \frac{1}{J_1(\lambda_s) \Delta_1\left(\frac{\lambda_s h}{\rho_0}\right)}. \quad (3.60)$$

Для малых значений  $\frac{h}{\rho_0}$ , сохраняя в разложении по степеням этого параметра в выражении

$$\frac{1}{\Delta_1\left(\frac{\lambda_s h}{\rho_0}\right)} \left[ \frac{2(m-1)}{m} \operatorname{ch} \frac{\lambda_s h}{\rho_0} + \frac{\lambda_s h}{\rho_0} \operatorname{sh} \frac{\lambda_s h}{\rho_0} \right] \quad (3.61)$$

только главный член

$$-\frac{2(m-1)}{m} \frac{3}{4} \frac{\rho_0^3}{\lambda_s^3 h^3},$$

получим:

$$(w_0^*)_{h=0} = -\frac{Q\rho_0^2}{2\pi N} \left[ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2J_0\left(\frac{\lambda_s \rho^2}{\rho_0}\right)}{\lambda_s^4 J_1^2(\lambda_s)} - \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_s^3 J_1(\lambda_s)} \right]. \quad (3.62)$$

В теории изгиба тонких плит выражение прогиба срединной плоскости круглой плиты, нагруженной в центре и с защемлённым краем, даётся в виде

$$w_0^{**} = -\frac{Q\rho_0^2}{8\pi N} \left[ \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) \right]. \quad (3.63)$$

Можно убедиться в совпадении выражений (3.62) и (3.63), если разложить последнее выражение в ряд вида (4.49) главы 3. Полагая для сокращения  $x = \frac{\rho}{\rho_0}$ , по (4.51) главы 3 получим:

$$\frac{1}{2} (1 - x^2) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_s x)}{J_1^2(\lambda_s)} \left[ \int_0^1 x J_0(\lambda_s x) dx - \int_0^1 x^3 J_0(\lambda_s x) dx \right].$$

Первый из этих интегралов — табличный

$$\int x J_0(\lambda_s x) dx = \frac{x}{\lambda_s} J_1(\lambda_s x).$$

а второй находится интегрированием по частям

$$\int x^3 J_0(\lambda_g x) dx = \frac{x^3}{\lambda_g} J_1(\lambda_g x) - \frac{2x^2}{\lambda_g^2} J_2(\lambda_g x).$$

Теперь, используя соотношение

$$J_3(\lambda_g x) = -J_0(\lambda_g x) + \frac{2}{\lambda_g x} J_1(\lambda_g x), \quad (3.64)$$

получим:

$$\frac{1}{2}(1-x^2) = 4 \sum_{g=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_g x)}{\lambda_g^3 J_1(\lambda_g)} \quad (3.65)$$

и, в частности, при  $x=0$

$$\sum_{g=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_g^3 J_1(\lambda_g)} = \frac{1}{8}. \quad (3.66)$$

Это позволяет переписать (3.62) в виде

$$w_0^* = -\frac{Q\rho^2}{2\pi N} \sum_{g=1}^{\infty} \frac{2-\lambda_g J_1(\lambda_g)}{\lambda_g^4 J_1^2(\lambda_g)} J_0\left(\frac{\lambda_g \rho}{\rho_0}\right). \quad (3.67)$$

Далее, интегрируя по частям, находим значение интеграла

$$\begin{aligned} \lambda_g^4 \int x^3 \ln x J_0(\lambda_g x) dx &= \\ &= \lambda_g x J_1(\lambda_g x) (\lambda_g^2 x^2 \ln x - 2) - \lambda_g^2 x^2 J_2(\lambda_g x) (2 \ln x + 1) - 4J_0(\lambda_g x), \end{aligned}$$

откуда следует [см. (3.64)]:

$$\int_0^1 x^3 \ln x J_0(\lambda_g x) dx = \frac{4[1-\lambda_g J_1(\lambda_g)]}{\lambda_g^4} \quad (3.68)$$

и, значит,

$$x^2 \ln x = 8 \sum_{g=1}^{\infty} \frac{1-\lambda_g J_1(\lambda_g)}{\lambda_g^4 J_1^2(\lambda_g)} J_0(\lambda_g x). \quad (3.69)$$

С помощью этих представлений убеждаемся в совпадении выражений (3.67) и (3.63), что и требовалось.

#### § 4. Тепловые напряжения в плите

Мы рассмотрим случай установившегося теплового режима и линейно изменяющейся по толщине плиты температуры. Тогда

$$T = T_0(x, y) + zT_0'(x, y), \quad (4.1)$$

где  $T_0$  и  $T_0'$  — гармонические функции двух переменных  $x$  и  $y$ :

$$D^2 T_0 = 0, \quad D^2 T_0' = 0. \quad (4.2)$$

Вспоминая сказанное в § 7 главы 3, мы сводим задачу к нахождению гармонической функции  $M(x, y, z)$ , определяемой по (7.21) главы 3, причём  $M_0$  и  $M'_0$  должны быть найдены по (7.27). Но теперь из (4.2) следует, что  $M_0$  и  $M'_0$  будут функциями бигармоническими; поэтому в (7.21) главы 3 при разложении операторов

$$\cos zD \quad \text{и} \quad \frac{\sin zD}{D}$$

в ряд по степеням  $D^2$  можно ограничиться только первой степенью  $D^2$ ; получаем [см. (7.27) главы 3]:

$$M(x, y, z) = M_0 + zM'_0 + \frac{G\alpha(m+1)}{m} \left( z^3 T_0 + \frac{1}{3} z^3 T'_0 \right). \quad (4.3)$$

Рассмотрим по отдельности задачи растяжения и изгиба: первая соответствует распределению температуры, не зависящему от  $z$ , т. е. слагаемому  $T_0$  в (4.1), а вторая — температуре, изменяющейся пропорционально  $z$ , т. е. слагаемому  $zT'_0$  в том же выражении.

1°. Нужно найти  $M_0$  из уравнения (7.27) главы 3 при условии (4.2). Введём в рассмотрение гармоническую функцию  $S(x, y)$ , сопряжённую с  $T_0$ :

$$\partial_1 T_0 = \partial_2 S, \quad \partial_2 T_0 = -\partial_1 S. \quad (4.4)$$

Тогда

$$T_0 + iS$$

будет функцией комплексного переменного

$$\zeta = x + iy$$

(буква  $z$ , которой здесь обычно пользуются, занята). Составив теперь функцию

$$Q_1 + iQ_2 = \int (T_0 + iS) d\zeta, \quad (4.5)$$

будем иметь:

$$\partial_1 Q_1 = \partial_2 Q_2 = T_0, \quad \partial_2 Q_1 = -\partial_1 Q_2 = -S. \quad (4.6)$$

С помощью этих функций можем написать:

$$M_0 = -\frac{G\alpha(m+1)}{2m} [(xQ_1 + yQ_2) + M_0^*], \quad (4.7)$$

где  $M_0^*$  — гармоническая функция, которую определим ниже. Сказанное проверяется непосредственным вычислением:

$$\begin{aligned} D^2 M_0 &= -\frac{G\alpha(m+1)}{2m} [D^2 (xQ_1 + yQ_2) + D^2 M_0^*] = \\ &= -\frac{G\alpha(m+1)}{m} (\partial_1 Q_1 + \partial_2 Q_2) = -\frac{2G\alpha(m+1)}{m} T_0, \end{aligned}$$

что и требуется.

Таким образом, по (4.3) для задачи растяжения

$$M(x, y, z) = -\frac{G\alpha(m+1)}{2m}(xQ_1 + yQ_2 + M^* - 2z^2T_0), \quad (4.8)$$

и по (7.20) и (7.29) главы 3 получаем перемещения

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\alpha(m+1)}{4m}[Q_1 + xT_0 + yS + \partial_1(M_0^* - 2z^2T_0)], \\ v &= \frac{\alpha(m+1)}{4m}[Q_2 - xS + yT_0 + \partial_2(M_0^* - 2z^2T_0)], \\ w &= \frac{\alpha(m+1)}{m}zT_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

и напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{G\alpha(m+1)}{2m}[2T_0 - x\partial_1T_0 + y\partial_2T_0 + \partial_2^2(M_0^* - 2z^2T_0)], \\ \sigma_y &= -\frac{G\alpha(m+1)}{2m}[2T_0 + x\partial_1T_0 - y\partial_2T_0 + \partial_1^2(M_0^* - 2z^2T_0)], \\ \tau_{xy} &= \frac{G\alpha(m+1)}{2m}[x\partial_2T_0 + y\partial_1T_0 + \partial_1\partial_2(M_0^* - 2z^2T_0)], \\ \tau_{zx} &= 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Гармоническую функцию  $M_0^*$  выберем равной

$$M_0^* = \frac{2}{3}h^2T_0. \quad (4.11)$$

Тогда в выражения средних значений напряжений и перемещений по толщине плиты не войдут слагаемые, соответствующие члену

$$M_0^* - 2z^2T_0$$

в (4.8).

Остается добавить к полученному решению решение, определяемое бигармонической функцией напряжений  $\Phi$  однородной задачи (§ 1). В частном случае свободного края плиты надо потребовать, чтобы средние значения напряжений  $\sigma_n$  и  $\tau_{ns}$ , соответствующие сумме решений (4.9) и (1.13), были равны нулю. Здесь надо различать два случая.

Рассмотрим сначала случай, когда область, ограниченная кривой  $S$ , односвязна. Тогда можно принять за  $\Phi$  бигармоническую функцию

$$\Phi = \frac{G\alpha(m+1)}{2m}(xQ_1 + yQ_2) = -M_0 - \frac{G\alpha(m+1)}{2m}M_0^*, \quad (4.12)$$

так как тогда средние значения напряжений  $\sigma_n$  и  $\tau_{ns}$ , определяемые в соответствии с (1.18) по  $\Phi$ , будут равны по величине и по знаку противоположны средним значениям этих напряжений, определяемым по (4.10).



Складывая теперь напряжения (4.10) с напряжениями, вычисляемыми по (1.12), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -G\alpha \left( \frac{1}{3} h^2 - z^2 \right) \partial_2^2 T_0, \\ \tau_{xy} &= G\alpha \left( \frac{1}{3} h^2 - z^2 \right) \partial_1 \partial_2 T_0, \\ \sigma_y &= -G\alpha \left( \frac{1}{3} h^2 - z^2 \right) \partial_1^2 T_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Таким образом, в случае односвязной области средние значения тепловых напряжений, возникающих в плите со свободными краями при установившейся температуре, не зависящей от  $z$ , оказываются равными нулю.

Вычислим теперь по (1.13), (1.16) перемещения, соответствующие однородной функции напряжений (4.12); получим:

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha Q_1 - \frac{\alpha(m+1)}{4m} \left[ Q_1 + xT_0 + yS + \frac{2}{m+1} \left( \frac{1}{3} h^2 - z^2 \right) \partial_1 T_0 \right], \\ v &= \alpha Q_2 - \frac{\alpha(m+1)}{4m} \left[ Q_2 - xS + yT_0 + \frac{2}{m+1} \left( \frac{1}{3} h^2 - z^2 \right) \partial_2 T_0 \right], \\ w &= -\frac{\alpha z}{m} T_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Поэтому, складывая эти выражения с (4.9), найдём:

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha Q_1 + \frac{\alpha}{2} \left( \frac{1}{3} h^2 - z^2 \right) \partial_1 T_0, & v &= \alpha Q_2 + \frac{\alpha}{2} \left( \frac{1}{3} h^2 - z^2 \right) \partial_2 T_0, \\ w &= \alpha z T_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

Легко проверить по (4.6) и (7.4) главы 3, что этим перемещениям действительно соответствуют напряжения (4.13).

В случае многосвязной области  $Q_1$  и  $Q_2$  не будут однозначными функциями координат и решение, определяемое формулами (4.13), (4.15), должно быть существенно дополнено.

2°. Ограничимся рассмотрением плиты, снабжённой одним отверстием (рис. 19). В плане (в плоскости  $xу$ ) имеем кольцеобразную область  $G$ , ограниченную двумя замкнутыми кривыми — внешним контуром  $C_0$  и внутренним  $C_1$ . Края плиты, как выше, считаем ненагруженными. Начало координат плоскости  $\zeta = x + iy = \rho e^{i\theta}$  расположено внутри  $C_1$ , т. е. не принадлежит области  $G$ .

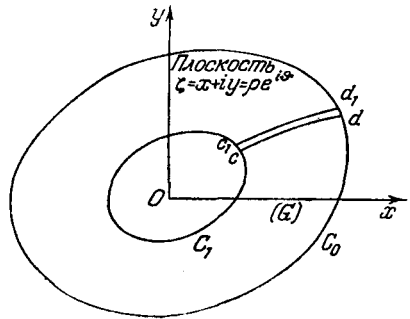


Рис. 19.

Необходимо выяснить характер многозначности функции  $Q_1 + iQ_2$ ; температура  $T_0(x, y)$  должна быть в области  $G$  однозначной функцией, но в её выражение может войти слагаемое вида  $A \ln \rho = A \ln |\zeta|$ . В этом нетрудно убедиться, рассматривая простейший случай радиально-симметричного распределения температуры в круговом кольце. Тогда решение уравнения Лапласа имеет вид

$$T_0 = C_0 + C_1 \ln \rho,$$

и при постоянных значениях  $t_0$  и  $t_1$  температуры на окружностях, ограничивающих кольцо, получим:

$$T = t_0 + \frac{t_1 - t_0}{\ln \frac{\rho_1}{\rho_0}} \ln \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (4.16)$$

Возвращаясь к общему случаю, рассмотрим функцию  $T_0 + iS$ ; в сопряжённую с  $T_0(x, y)$  гармоническую функцию  $S(x, y)$  войдёт слагаемое  $A\theta = A \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ , сопряжённое с  $A \ln \rho$ . Функция

$$T_0 + iS - A(\ln \rho + i\theta) = T_0 + iS - A \ln \zeta \quad (4.17)$$

будет однозначной и поэтому представимой в области  $G$  рядом Лорана ( $\rho$  и  $\theta$  обозначают полярные координаты); из этого ряда для последующего выделим слагаемое, содержащее  $\zeta^{-1}$ ; можно написать:

$$T_0 + iS = A \ln \zeta + \frac{\gamma}{\zeta} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \zeta^k, \quad (4.18)$$

причём  $\gamma$  и  $\gamma_k$  — комплексные постоянные и штрих указывает на пропуск члена, для которого  $k = -1$ . По (4.5) имеем:

$$Q_1 + iQ_2 = A\zeta \ln \zeta - A\zeta + \gamma \ln \zeta + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k+1} \zeta^{k+1}. \quad (4.19)$$

Формулы для перемещений  $u$ ,  $v$  по (4.15) могут быть записаны в виде

$$u_1 + iv_1 = \alpha (A\zeta \ln \zeta + \gamma \ln \zeta) + \alpha (Q_1 + iQ_2 - A\zeta \ln \zeta - \gamma \ln \zeta) + \frac{\alpha}{2} \left( \frac{h^2}{3} - z^2 \right) (\partial_1 + i\partial_2) T_0. \quad (4.20)$$

Неоднозначную часть этого выражения обозначим через  $u'_1 + iv'_1$ :

$$u'_1 + iv'_1 = \alpha (A\zeta \ln \zeta + \gamma \ln \zeta). \quad (4.21)$$

Функция  $T_0 + iS$ , определяемая по (4.18), конечна в области  $G$ ; чтобы она оставалась конечной и в случае односвязной области, в ней должно отсутствовать логарифмическое слагаемое, а также члены с отрицательными степенями  $\zeta$ ; иными словами в односвязной

области  $A = 0$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\gamma_k = 0$  (при  $k < 0$ ), и, следовательно,  $u'_1 + iv'_1 = 0$ . Решение (4.15) для односвязной области не нуждалось в дальнейшем рассмотрении. Но перемещение должно быть однозначным и в многосвязной области, и поэтому теперь (4.15) надо рассматривать как частное решение, на которое должно быть наложено ещё одно однородное решение. Последнее устранил многозначность перемещений и удовлетворит краевым условиям задачи. Обозначим через  $\Phi_2$  бигармоническую функцию напряжений, определяющую это решение. Соответствующее ей выражение перемещений  $u_2 + iv_2$  должно, таким образом, содержать неоднозначную часть

$$u'_2 + iv'_2 = -(u'_1 + iv'_1). \quad (4.22)$$

Этому же решению будут соответствовать напряжения, которые должны быть добавлены к напряжениям, определяемым по (4.13). Поскольку последние уже удовлетворяют краевым условиям задачи, средние значения нормальных и касательных напряжений, определяемые по функции напряжений  $\Phi_2$ , должны на контурах  $C_0$  и  $C_1$  быть равными нулю. Как было пояснено выше [ср. (2.20)], задача сводится к нахождению бигармонической функции, принимающей на контурах  $C_0$  и  $C_1$  постоянные значения, тогда как её нормальная производная обращается на этих контурах в нуль:

$$\Phi_2 = \text{const}, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \quad \text{на } C_0 \text{ и } C_1. \quad (4.23)$$

Вместе с тем, перемещения, определяемые по  $\Phi_2$ , должны содержать неоднозначную часть, имеющую заданное по (4.22) значение.

Задача, к рассмотрению которой мы пришли, называется задачей о дислокации. Чтобы объяснить происхождение напряжений в кольце, не подверженном действию внешних объёмных и поверхностных сил [см. (4.23)], представим себе, что из области  $G$  с помощью двух весьма близких разрезов по кривым  $cd$  и  $c_1d_1$ , которые можно считать конгруэнтными, удалён достаточно малый кусок  $cdc_1d_1$ . Разность значений угла  $\vartheta$  в соответственных точках берегов  $cd$  и  $c_1d_1$  разреза равна  $2\pi$ , и значения величины  $u'_2 + iv'_2$  на берегах разреза не равны, по условию, друг другу; на верхнем берегу  $c_1d_1$  она равна  $u_2^{-'} + iv_2^{-'}$ , а на нижнем  $cd$  имеет другое значение  $u_2^{+'} + iv_2^{+'}$ . Разность этих значений по (4.22) известна и равна

$$\begin{aligned} \Delta(u_2' + iv_2') &= (u_2^{+'} + iv_2^{+'}) - (u_2^{-'} + iv_2^{-'}) = -2\pi i \alpha (A' + \gamma) = \\ &= -2\pi i \alpha [A(x + iy) + \gamma' + i\gamma'']. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\Delta u_2' = 2\pi \alpha (\gamma'' + Ay), \quad \Delta v_2' = -2\pi \alpha (\gamma' + Ax) \quad (4.24)$$

и согласно формулам кинематики твёрдого тела  $\Delta u'_2$  и  $\Delta v'_2$  представляют проекции на оси  $x$  и  $y$  перемещения, которое должно быть сообщено берегу  $cd$ , чтобы привести его в совпадение с  $c_1d_1$ ; при этом  $2\pi\alpha\gamma''$  и  $(-2\pi\alpha\gamma')$  являются проекциями поступательного перемещения, а величина  $(-2\pi\alpha A)$  — углом поворота. В получившейся с помощью этого процесса «сшивания» кольцеобразной области и должно возникнуть напряжённое состояние, определяемое функцией напряжений  $\Phi_2$ .

Через  $\Phi'_2$  обозначим совокупность слагаемых этой функции, которой соответствует неоднозначная часть  $u'_2 + iv'_2$  перемещения  $u_2 + iv_2$ . Чтобы выяснить аналитический характер функции  $\Phi'_2$ , надо заметить, что её лапласиан  $D^2\Phi'_2$ , определяющий соответствующую часть суммы нормальных напряжений  $\sigma_x + \sigma_y$ , должен представлять однозначную гармоническую функцию. Называя через  $S'_2$  сопряжённую с  $D^2\Phi'_2$  гармоническую функцию, можно, руководствуясь полной аналогией с (4.18), написать:

$$D^2\Phi'_2 + iS'_2 = 8G\alpha \left( B \ln \zeta + \frac{\delta}{\zeta} \right), \quad (4.25)$$

причём  $B$  — вещественная,  $\delta$  — комплексная постоянная, а множитель  $8G\alpha$  введён для упрощения дальнейших соотношений. Задача состоит в установлении связи постоянных  $B$  и  $\delta$  с известными величинами  $A$  и  $\gamma$  — характеристиками дислокации.

Выше, в п. 1, было дано определение бигармонической функции  $M_0$  по известному значению её лапласиана, пропорционального значению гармонической функции  $T_0$ . Теперь роль  $M_0$  играет  $\Phi'_2$ , а роль  $T_0$  — её лапласиан  $D^2\Phi'_2$ . Поэтому, вводя подобно (4.5) функцию

$$\Theta_1 + i\Theta_2 = \int (D^2\Phi'_2 + iS'_2) d\zeta = 8G\alpha [B\zeta (\ln \zeta - 1) + \delta \ln \zeta], \quad (4.26)$$

получаем с помощью (4.7):

$$\begin{aligned} \Phi'_2 &= \frac{1}{4} (x\Theta_1 + y\Theta_2) = \\ &= \frac{1}{8} [(x - iy)(\Theta_1 + i\Theta_2) + (x + iy)(\Theta_1 - i\Theta_2)] = \\ &= G\alpha [B\zeta\bar{\zeta} (\ln \zeta + \ln \bar{\zeta} - 2) + \delta\bar{\zeta} \ln \zeta + \bar{\delta}\zeta \ln \bar{\zeta}], \end{aligned} \quad (4.27)$$

где чертой обозначены сопряжённые значения комплексных чисел.

Для упрощения дальнейшего вычисления запишем формулы (1.13) в виде

$$\begin{aligned} u'_2 + iv'_2 &= \frac{1}{2G} \left[ \varphi'_1 + i\varphi'_2 - (\partial_1 + i\partial_2) \Phi'_2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2(m+1)} \left( \frac{h^2}{3} - z^2 \right) (\partial_1 + i\partial_2) D^2\Phi'_2 \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Рассматривая  $\Phi_2'$  как функцию переменных  $\zeta$  и  $\bar{\zeta}$  и замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \right),$$

получим:

$$\partial_1 + i\partial_2 = 2 \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \partial_1 - i\partial_2 = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}, \quad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 = 4 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}}. \quad (4.29)$$

Поэтому

$$(\partial_1 + i\partial_2) \Phi_2' = 2 \frac{\partial \Phi_2'}{\partial \zeta} = 2G\alpha \left[ B\zeta (\ln \zeta + \ln \bar{\zeta}) - B\zeta + \delta \ln \zeta + \frac{\delta \bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} \right],$$

$$D^2 \Phi_2' = 4G\alpha \left[ B (\ln \zeta + \ln \bar{\zeta}) + \frac{\delta}{\zeta} + \frac{\delta}{\bar{\zeta}} \right],$$

$$(\partial_1 + i\partial_2) D^2 \Phi_2' = 8G\alpha \left( \frac{B}{\zeta} - \frac{\delta}{\zeta^2} \right).$$

Заметим ещё, что по (1.16) и (4.26)

$$\varphi_1 + i\varphi_2 = \frac{m}{m+1} (\Theta_1 + i\Theta_2) = \frac{8G\alpha}{m+1} [B\zeta (\ln \zeta - 1) + \delta \ln \zeta].$$

Остаётся подставить эти выражения в (4.28). При этом мы сохраним только слагаемые, дающие неоднозначные перемещения. Придём к выражению

$$u_2' + iv_2' = \alpha \left( \frac{3m-1}{m+1} B\zeta \ln \zeta - B\zeta \ln \bar{\zeta} + \frac{3m-1}{m+1} \delta \ln \zeta \right).$$

Заметим, что

$$B\zeta \ln \bar{\zeta} = -B\zeta \ln \zeta + B\zeta (\ln \zeta + \ln \bar{\zeta}) = -B\zeta \ln \zeta + 2B\zeta \ln \rho,$$

причём второе слагаемое однозначно в области  $G$  и в этом вычислении может быть отброшено. Получаем:

$$u_2' + iv_2' = \alpha \left( \frac{4m}{m+1} B\zeta \ln \zeta + \frac{3m-1}{m+1} \delta \ln \zeta \right), \quad (4.30)$$

откуда на основании (4.21) и (4.22) находим значения постоянных  $B$  и  $\delta$ :

$$B = -\frac{m+1}{4m} A, \quad \delta = -\frac{m+1}{3m-1} \gamma = -\frac{m+1}{3m-1} (\gamma' + i\gamma''). \quad (4.31)$$

В выражении  $\Phi_2'$  также отбрасывается слагаемое  $2B\zeta \bar{\zeta} = 2B\rho^2$ , так как оно может быть отнесено к той части бигармонической

функции, которой соответствует однозначная часть величины  $u_2 + iw_2$ . Получаем:

$$\begin{aligned} \Phi_2' &= -G\alpha \left[ \frac{m+1}{4m} A \bar{\zeta} (\ln \zeta + \ln \bar{\zeta}) + \frac{m+1}{3m-1} (\gamma \bar{\zeta} \ln \zeta + \bar{\gamma} \zeta \ln \bar{\zeta}) \right] = \\ &= -2G\alpha \left\{ \frac{m+1}{4m} A \rho^2 \ln \rho + \frac{m+1}{3m-1} [\gamma' (x \ln \rho + y \vartheta) + \gamma'' (y \ln \rho - x \vartheta)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

К этому выражению нужно добавить бигармоническую функцию  $U$ , такую, чтобы составляемые по ней согласно (1.13) выражения перемещений были однозначными в области  $G$ , причём сумма

$$\Phi_2 = \Phi_2' + U \quad (4.33)$$

должна удовлетворять краевым условиям (4.23).

3°. Простейшим примером может служить случай кругового кольца в предположении, что на концентрических окружностях  $C_0$  и  $C_1$  с радиусами  $\rho_0$  и  $\rho_1$ , ограничивающих кольцо, температура остаётся постоянной. Не нарушая общности, можно в формуле (4.16) отбросить постоянное слагаемое  $t_0$ , не создающее температурных напряжений (§ 13 главы 1). Сравнивая (4.16) и (4.18), находим:

$$A = \frac{t_1 - t_0}{\ln \frac{\rho_1}{\rho_0}}, \quad \gamma = 0. \quad (4.34)$$

Полагая

$$U = C_1 \rho^2 + C_2 \ln \rho \quad (4.35)$$

и замечая, что

$$\Phi_2' = -\frac{G\alpha(m+1)}{2m} \frac{t_1 - t_0}{\ln \frac{\rho_1}{\rho_0}} \rho^2 \ln \rho, \quad (4.36)$$

получим для определения  $C_1$  и  $C_2$  соотношения

$$(\bar{\sigma}_\rho)_{\rho=\rho_0} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} = 0, \quad (\bar{\sigma}_\rho)_{\rho=\rho_1} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_1} = 0, \quad (4.37)$$

выражающие два последних условия (4.23). Требование постоянства  $\Phi_2$  на  $C_0$  и  $C_1$  в рассматриваемом случае радиальной симметрии удовлетворяется тождественно. Находим:

$$\begin{aligned} \Phi_2 = \frac{G\alpha(m+1)}{2m} \frac{t_1 - t_0}{\ln \frac{\rho_1}{\rho_0}} \left[ \frac{1}{2} \rho^2 - \rho^2 \frac{\rho_0^2 \ln \rho_0 - \rho_1^2 \ln \rho_1}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - \right. \\ \left. - \frac{2\rho_0^2 \rho_1^2 \ln \frac{\rho_1}{\rho_0}}{\rho_1^2 - \rho_0^2} \ln \rho - \rho^2 \ln \rho \right]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Соответствующие этой функции напряжения вычисляются по (1.19). Сложив их с величинами, определяемыми по (4.13), придём к решению задачи о температурных напряжениях в толстой кольцевой плите, края которой свободны. Оно имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= K \left[ \rho_0^2 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \rho_1^2 \ln \frac{\rho_1}{\rho} - \frac{\rho_0^2 \rho_1^2}{\rho^2} \ln \frac{\rho_1}{\rho_0} - \left( \frac{h^2}{3} - z^2 \right) \frac{\rho_1^2 - \rho_0^2}{\rho^2} \frac{1}{m+1} \right], \\ \sigma_\theta &= K \left[ \rho_0^2 - \rho_1^2 + \rho_0^2 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \rho_1^2 \ln \frac{\rho_1}{\rho} + \frac{\rho_0^2 \rho_1^2}{\rho^2} \ln \frac{\rho_1}{\rho_0} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{h^2}{3} - z^2 \right) \frac{\rho_1^2 - \rho_0^2}{\rho^2} \frac{1}{m+1} \right], \end{aligned} \right\} (4.39)$$

где обозначено

$$K = \frac{G\alpha(m+1)}{m} \frac{t_1 - t_0}{(\rho_1^2 - \rho_0^2) \ln \frac{\rho_1}{\rho_0}}. \quad (4.40)$$

Выражения перемещений должны быть согласно (1.13) и (4.15) найдены из соотношений

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{1}{2J} \left[ \varphi_r - \partial_r \Phi_2 - \frac{1}{2(m+1)} \left( \frac{h^2}{3} - z^2 \right) \partial_r D^2 \Phi_2 \right] + \\ &\quad + \alpha Q_r + \frac{\alpha}{2} \left( \frac{h^2}{3} - z^2 \right) \partial_r T_0, \\ u_\theta &= \frac{1}{2J} \varphi_\theta + \alpha Q_\theta, \quad w = -\frac{z}{2J(m+1)} D^2 \Phi_2 + \alpha z T_0, \end{aligned} \right\} (4.41)$$

причём для вычисления  $\varphi_r$ ,  $\varphi_\theta$ ,  $Q_r$ ,  $Q_\theta$  проще всего использовать соотношения

$$\varphi_r + i\varphi_\theta = e^{-i\theta} (\varphi_1 + i\varphi_2), \quad Q_r + iQ_\theta = e^{-i\theta} (Q_1 + iQ_2). \quad (4.42)$$

В нашем случае

$$D^2 \Phi_2 = K \left( \rho_0^2 - \rho_1^2 + 2\rho_0^2 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + 2\rho_1^2 \ln \frac{\rho_1}{\rho} \right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi_r + i\varphi_\theta &= \frac{m e^{-i\theta}}{m+1} \int (D^2 \Phi_2 + iS_2) d\zeta = \\ &= \frac{m K e^{-i\theta}}{m+1} \int \left( \rho_0^2 - \rho_1^2 + 2\rho_0^2 \ln \frac{\zeta}{\rho_0} + 2\rho_1^2 \ln \frac{\rho_1}{\zeta} \right) d\zeta = \\ &= \frac{m K}{m+1} \zeta e^{-i\theta} \left( \rho_1^2 - \rho_0^2 + 2\rho_0^2 \ln \frac{\zeta}{\rho_0} + 2\rho_1^2 \ln \frac{\rho_1}{\zeta} \right) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\varphi_r = \frac{G\alpha(t_1 - t_0)}{\ln \frac{\rho_1}{\rho_0}} \rho \left( 1 + \frac{2\rho_0^2 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + 2\rho_1^2 \ln \frac{\rho_1}{\rho}}{\rho_1^2 - \rho_0^2} \right), \quad \varphi_\theta = -\frac{2G\alpha(t_1 - t_0)}{\ln \frac{\rho_1}{\rho_0}} \rho \theta.$$

Точно так же получаем:

$$Q_p = \frac{t_1 - t_0}{\ln \frac{\rho_1}{\rho_0}} \rho \left( \ln \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right), \quad Q_\delta = \frac{t_1 - t_0}{\ln \frac{\rho_1}{\rho_0}} \rho \delta.$$

Таким образом, как следовало ожидать,

$$u_\delta = \frac{1}{2J} \varphi_\delta + Q_\delta = 0. \quad (4.43)$$

Выражения перемещений  $u_p$  и  $w$  будут:

$$\left. \begin{aligned} u_p &= \frac{\alpha(t_1 - t_0)}{2 \ln \frac{\rho_1}{\rho_0}} \rho \left[ -1 + \frac{m-1}{m} \frac{\rho_0^3 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \rho_1^3 \ln \frac{\rho_1}{\rho}}{\rho_1^2 - \rho_0^2} + 2 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m+1}{m} \frac{\rho_0^3 \rho_1^3}{\rho^2 (\rho_1^2 - \rho_0^2)} \ln \frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{m+1}{m} \left( \frac{h^2}{3} - z^2 \right) \frac{1}{\rho^2} \right], \\ w &= \frac{\alpha(t_1 - t_0)}{2m \ln \frac{\rho_1}{\rho_0}} z \left( 1 - \frac{2\rho^3 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + 2\rho_1^3 \ln \frac{\rho_1}{\rho}}{\rho_1^2 - \rho_0^2} + 2m \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

4°. В задаче изгиба, создаваемого при установившемся тепловом режиме, когда температура изменяется пропорционально  $z$ , по (4.3) имеем:

$$M(x, y, z) = zM' + \frac{G\alpha(m+1)}{3m} z^3 T'_0, \quad (4.45)$$

где  $T'_0(x, y)$  — гармоническая функция, а  $M'_0(x, y)$  — бигармоническая, определяемая по (7.27) главы 3.

Наложим на решение, определяемое по (7.20) главы 3 через только что введённую функцию  $M$ , однородное решение (1.26), выбрав бигармоническую функцию  $w_0$  в форме

$$w_0 = -\frac{M'_0(x, y)}{2G} + h^2 f(x, y), \quad (4.46)$$

где  $f(x, y)$  — гармоническая функция, которую ниже определим. Тогда, складывая перемещения (7.20) главы 3 и (1.26) и учитывая (7.27) главы 3, получим частное решение вида

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\alpha(m+1)}{2(m-1)} \left( 2h^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right) \partial_1 T'_0 - h^2 z \partial_1 f, \\ v &= -\frac{\alpha(m+1)}{2(m-1)} \left( 2h^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right) \partial_2 T'_0 - h^2 z \partial_2 f, \\ w &= \frac{\alpha(m+1)}{2(m-1)} z^2 T' + h^2 f. \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$



Напряжения будут равны

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= -\frac{G\alpha(m+1)}{m-1}(h^2-z^2)\partial_1 T'_0, \\ \tau_{yz} &= -\frac{G\alpha(m+1)}{m-1}(h^2-z^2)\partial_3 T'_0, \quad \sigma_z = 0, \\ \sigma_x &= -\frac{2G\alpha(m+1)}{m-1}z\left[T'_0 + \left(\frac{1}{6}z^2 - h^2\right)\partial_3^2 T'_0\right] + 2Gzh^2\partial_3^2 f, \\ \sigma_y &= -\frac{2G\alpha(m+1)}{m-1}z\left[T'_0 + \left(\frac{1}{6}z^2 - h^2\right)\partial_1^2 T'_0\right] + 2Gzh^2\partial_1^2 f, \\ \tau_{xy} &= \frac{2G\alpha(m+1)}{m-1}\partial_1\partial_3\left(\frac{1}{6}z^3 - h^2z\right)T'_0 - 2Gzh^2\partial_1\partial_2 f. \end{aligned} \right\} (4.4)$$

Перемещения  $u$ ,  $v$  на срединной плоскости плиты и их средние значения по толщине обращаются в нуль при любом выборе функции  $f$ . Если последнюю принять равной нулю, то обратится в нуль и перемещение  $w$  на срединной плоскости. Таким образом, случай  $f=0$  соответствует жёсткой заделке края плиты по срединной линии  $C$ . Это следует из того, что соотношение

$$w(x, y, 0) = 0 \quad (4.49)$$

является частным решением, удовлетворяющим краевым условиям на  $C$ :

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0.$$

Отсутствие перемещений точек срединной плоскости следует объяснить в этом случае тем, что реакции опорных закреплений создают напряжения, предотвращающие в точности перемещения, которые должны были возникнуть вследствие нагревания плиты. Величины этих напряжений находим по (4.48) при  $f=0$ . На крайних волокнах (при  $z = \pm h$ ) получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \mp \frac{2G\alpha(m+1)}{m-1}h\left(T'_0 - \frac{5}{6}h^2\partial_3^2 T'_0\right), \\ \sigma_y &= \mp \frac{2G\alpha(m+1)}{m-1}h\left(T'_0 - \frac{5}{6}h^2\partial_1^2 T'_0\right), \\ \tau_{xy} &= \mp \frac{2G\alpha(m+1)}{m-1}\frac{5}{6}h^3\partial_1\partial_3 T'_0. \end{aligned} \right\} (4.50)$$

Можно было бы потребовать обращения в нуль среднего значения перемещения  $\bar{w}$ ; для этого следует принять:

$$f = -\frac{\alpha(m+1)}{6(m-1)}T'_0. \quad (4.51)$$

В формулах (4.50) получили бы вместо коэффициента  $\frac{5}{6}$  коэффициент  $\frac{2}{3}$ . Таким образом, для тонкой плиты в предположении, что градиент температуры  $T'$  не изменяется резко по протяжению плиты, указанные случаи мало отличаются друг от друга. Приближённо можно принять:

$$\sigma_x \approx \sigma_y \approx \mp \frac{Em}{2(m-1)} \alpha (T^+ - T_0^-), \quad (4.52)$$

где  $T_0^+ - T_0^- = 2hT'_0$  — разность температур граней  $z = h$  и  $z = -h$ .

5°. Таким образом, рассмотрение жёсткого закрепления края плиты не требует решения краевой задачи и, следовательно, введения однородного бигармонического решения  $w_0$ . Последнее становится необходимым для рассмотрения задач, соответствующих другим крайевым условиям. Мы остановимся на случае свободного края. Добавив к решению (4.47)—(4.48) однородное решение (1.26)—(1.27) и выбрав гармоническую функцию  $f$  равной

$$f = -\frac{9}{10} \frac{\alpha(m+1)}{m-1} T'_0 - \frac{8m+1}{10(m-1)} D^2 w_0, \quad (4.53)$$

получим выражения перерезывающих сил и моментов, не отличающиеся от тех, которые получаются в теории изгиба тонких плит:

$$\left. \begin{aligned} G_x &= -N \left( D^3 w_0 + \frac{m+1}{m} \alpha T'_0 \right) + N \frac{m-1}{m} \partial_2^3 w_0, \\ G_y &= -N \left( D^2 w_0 + \frac{m+1}{m} \alpha T'_0 \right) + N \frac{m-1}{m} \partial_1^3 w_0, \\ H_{xy} &= -N \frac{m-1}{m} \partial_1 \partial_2 w_0, \\ Q_x &= -N \partial_1 \left( D^3 w_0 + \frac{m+1}{m} \alpha T'_0 \right), \\ Q_y &= -N \partial_2 \left( D^3 w_0 + \frac{m+1}{m} \alpha T'_0 \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.54)$$

Однако в отличие от теории тонких плит  $w_0$  представляет не прогиб срединной плоскости, а его часть, соответствующую однородному решению; именно, по (4.47) и (4.53) имеем:

$$w|_{z=0} = w_0 - \alpha \frac{m+1}{m-1} \frac{9}{10} h^3 T'_0 - \frac{8m+1}{10(m-1)} h^2 D^2 w_0. \quad (4.55)$$

Среднее значение  $\bar{w}$  будет иметь несколько отличное значение: коэффициент  $\frac{9}{10}$  при втором слагаемом заменяется на  $\frac{11}{15}$ .

При  $T'_0 = \text{const}$  перерезывающие силы и моменты обращаются в нуль на всём протяжении плиты, если принять

$$\omega_0 = -\alpha T'_0 \frac{x^2 + y^2}{2} \quad (4.56)$$

и, следовательно,

$$\omega_{z=0} = -\alpha T'_0 \left( \frac{x^2 + y^2}{2} - 0,7h^2 \right). \quad (4.56')$$

Это даёт иллюстрацию известного положения, что при распределении температуры, линейно зависящем от координат, и при отсутствии закреплений, препятствующих перемещению края, в нагретом теле не возникают температурные напряжения.

В дальнейшем будет удобно вместо моментов  $G_x$ ,  $G_y$ ,  $H_{xy}$  рассматривать их линейные комбинации, аналогичные величинам, введённым Г. В. Колосовым в плоской задаче теории упругости:

$$\left. \begin{aligned} G_x + G_y &= -N \frac{m+1}{m} (D^2 \omega_0 + 2\alpha T'_0), \\ G_y - G_x - 2iH_{xy} &= N \frac{m-1}{m} (\partial_1 + i\partial_2)^2 \omega_0 = 4N \frac{m-1}{m} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \zeta^2} \end{aligned} \right\} (4.57)$$

Две последние формулы (4.54) запишем в виде

$$Q_x + iQ_y = -2N \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( D^2 \omega_0 + \frac{m+1}{m} \alpha T'_0 \right). \quad (4.57')$$

Здесь, как в § 4 главы 3, введены комплексные координаты  $\zeta$  и  $\bar{\zeta}$  и использовано соотношение (4.29).

Краевые условия для плиты со свободным краем выражают требования обращения в нуль изгибающего момента  $G_n$  и обобщённой перерезывающей силы  $Q_n^*$ . Последнее условие по (1.46) может быть заменено условием

$$H_{ns} + \int_0^s Q_n ds = C, \quad (4.58)$$

где  $C$  — постоянная. Оба краевых условия для свободного края поэтому могут быть записаны в виде

$$G_n + iH_{ns} + i \int_0^s Q_n ds = iC, \quad (4.59)$$

выражаемом далее через величины, определяемые по (4.57) и (4.57').

Через  $t_n$  назовём вектор напряжения на площадке края, нормаль к которой составляет угол  $\vartheta$  с осью  $x$ :

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{dy}{ds}, \quad \sin \vartheta = -\frac{dx}{ds}, \\ e^{i\vartheta} &= \frac{dy - i dx}{ds} = -i \frac{d\zeta}{ds}, \quad e^{-i\vartheta} = i \frac{d\bar{\zeta}}{ds}. \end{aligned} \right\} (4.60)$$

Имеем:

$$t_{nx} = \sigma_x \cos \vartheta + \tau_{xy} \sin \vartheta, \quad t_{ny} = \tau_{xy} \cos \vartheta + \sigma_y \sin \vartheta,$$

и легко проверить, что

$$t_{nx} + it_{ny} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) e^{i\vartheta} - \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x - 2i\tau_{xy}) e^{-i\vartheta}.$$

Замечая теперь, что

$$t_{nx} + it_{ny} = e^{i\vartheta}(\sigma_n + i\tau_{ns}),$$

где  $\sigma_n$  и  $\tau_{ns}$  — нормальное и касательное напряжения на рассматриваемой площадке, и воспользовавшись введённым выше определением моментов, придём к соотношению

$$G_n + iH_{ns} = \int_{-h}^h (\sigma_n + i\tau_{ns}) ds = \frac{1}{2}(G_x + G_y) - \frac{1}{2}(G_y - G_x - 2iH_{xy}) e^{-2i\vartheta}. \quad (4.61)$$

Краевое условие (4.59) теперь может быть записано в виде

$$(G_x + G_y) \frac{d\zeta}{ds} + (G_y - G_x - 2iH_{xy}) \frac{d\bar{\zeta}}{ds} + 2i \frac{d\zeta}{ds} \int_0^s Q_n ds = 2iC \frac{d\zeta}{ds}. \quad (4.62)$$

Искомая бигармоническая функция выражается согласно (4.10) главы 3 через две аналитические функции

$$4w_0 = \bar{\zeta} W_1(\zeta) + \zeta \bar{W}_1(\bar{\zeta}) + W_2(\zeta) + \bar{W}_2(\bar{\zeta}) \quad (4.63)$$

и в аналогичном виде представляется заданная гармоническая функция  $\alpha T'_0$ :

$$2\alpha T' = t(\zeta) + \bar{t}(\bar{\zeta}). \quad (4.64)$$

Получаем:

$$\left. \begin{aligned} G_x + G_y &= -N \frac{m+1}{m} [W'_1(\zeta) + \bar{W}'_1(\bar{\zeta}) + t(\zeta) + \bar{t}(\bar{\zeta})], \\ G_y - G_x - 2iH_{xy} &= N \frac{m-1}{m} [\zeta \bar{W}''_1(\bar{\zeta}) + \bar{W}''_2(\bar{\zeta})], \\ Q_x + iQ_y &= -2N \left[ \bar{W}''_1(\bar{\zeta}) + \frac{m+1}{2m} \bar{t}'(\bar{\zeta}) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.65)$$

Остаётся заметить, что

$$\begin{aligned} 2Q_n &= (Q_x + iQ_y) e^{-i\vartheta} + (Q_x - iQ_y) e^{i\vartheta} = \\ &= -2Ni \left\{ \left[ \bar{W}''_1(\bar{\zeta}) + \frac{m+1}{2m} \bar{t}'(\bar{\zeta}) \right] \frac{d\bar{\zeta}}{ds} - \left[ W''_1(\zeta) + \frac{m+1}{2m} t'(\zeta) \right] \frac{d\zeta}{ds} \right\} = \\ &= -2Ni \frac{d}{ds} \left\{ \bar{W}'_1(\bar{\zeta}) - W'_1(\zeta) + \frac{m+1}{2m} [\bar{t}(\bar{\zeta}) - t(\zeta)] \right\} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$2l \int_0^s Q_n ds = 2N \left\{ \bar{W}'_1(\bar{\zeta}) - W'_1(\zeta) + \frac{m+1}{2m} [t(\bar{\zeta}) - t(\zeta)] \right\}. \quad (4.66)$$

Подстановка в (4.62) теперь приводит к соотношению

$$\begin{aligned} -\frac{3m+1}{m} W'_1(\zeta) \frac{d\zeta}{ds} + \frac{m-1}{m} \left\{ \zeta \bar{W}''_1(\bar{\zeta}) + \bar{W}''_2(\bar{\zeta}) \frac{d\bar{\zeta}}{ds} + \bar{W}'_1(\bar{\zeta}) \frac{d\bar{\zeta}}{ds} \right\} = \\ = 2 \frac{m+1}{m} t(\zeta) \frac{d\zeta}{ds} + \frac{2lC}{N} \frac{d\zeta}{ds}, \quad (4.67) \end{aligned}$$

левая часть которого представляется в форме полной производной по дуге  $s$ :

$$-\frac{3m+1}{m} \frac{d}{ds} W_1(\zeta) + \frac{m-1}{m} \frac{d}{ds} [\zeta \bar{W}'_1(\bar{\zeta}) + \bar{W}'_2(\bar{\zeta})].$$

Поэтому, проинтегрировав обе части (4.67) по дуге  $s$ , приходим к следующей, наиболее простой записи краевого условия для свободного края плиты:

$$\begin{aligned} -4W_1(\zeta) + \frac{m-1}{m} [W_1(\zeta) + \zeta \bar{W}'_1(\bar{\zeta}) + \bar{W}'_2(\bar{\zeta})] = \\ = 2 \frac{m+1}{m} \int t(\zeta) d\zeta + \frac{2lC}{N} \zeta + C_1 + iC_2, \quad (4.68) \end{aligned}$$

что можно представить также в виде

$$-W_1(\zeta) + \frac{m-1}{m} \frac{\partial \omega_0}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{m+1}{2m} \int t(\zeta) d\zeta + \frac{iC}{2N} \zeta + \frac{1}{4} (C_1 + iC_2). \quad (4.69)$$

Наличие в правой части слагаемого  $\frac{iC}{2N} \zeta$  не изменяет выражения  $\omega_0$ ;

это следует из того, что, добавляя к  $W_1(\zeta)$  слагаемое  $\left(-\frac{iC}{2N} \zeta\right)$ , мы уничтожим соответствующие члены в левой и правой частях (4.69). С другой стороны, включение указанного слагаемого в  $W_1(\zeta)$  не сказывается, как видно из (4.63), на выражении  $\omega_0$ :

$$-\bar{\zeta} \frac{iC}{2N} \zeta + \zeta \frac{iC}{2N} \bar{\zeta} = 0.$$

Учёт постоянного слагаемого  $C_1 + iC_2$  в правой части (4.69) приводит к внесению в выражение перемещения  $\omega_0$  несущественных слагаемых, соответствующих перемещению плиты как твёрдого тела. Таким образом, запись краевых условий (4.69) и (4.68) может быть упрощена и приведена к виду

$$-W_1(\zeta) + \frac{m-1}{m} \frac{\partial \omega_0}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{m+1}{2m} \int t(\zeta) d\zeta. \quad (4.70)$$

В случае плиты, имеющей отверстие (начало координат помещаем внутри отверстия), в выражение  $\int t(\zeta) d\zeta$  войдут неоднозначные слагаемые вида [см. (4.19)]

$$A\zeta \ln \zeta + \gamma \ln \zeta, \quad (4.71)$$

где  $A$  — вещественная,  $\gamma$  — комплексная постоянная. Надо показать, что можно так распорядиться выбором неоднозначных частей, входящих в функции  $W_1(\zeta)$ ,  $W_2(\zeta)$ , чтобы  $w_0$  осталась однозначной функцией и вместе с тем уничтожились неоднозначные слагаемые в правой и левой частях соотношения (4.70).

Если предположить, что первое из этих условий удовлетворено, то однозначной функцией станет и производная функции  $w_0$  по  $\bar{\zeta}$ , входящая в левую часть (4.70). Отсюда следует, что  $W_1(\zeta)$  должно иметь вид

$$W_1(\zeta) = -\frac{m+1}{2m} (A\zeta \ln \zeta + \gamma \ln \zeta) + W_{10}(\zeta), \quad (4.72)$$

где  $W_{10}(\zeta)$  — однозначная функция, представимая рядом Лорана. Чтобы получить однозначное выражение  $w_0$ , достаточно взять

$$W_2(\zeta) = -\frac{m+1}{2m} (\bar{\gamma}\bar{\zeta} \ln \zeta + B \ln \zeta) + W_{20}(\zeta), \quad (4.73)$$

где  $B$  — вещественная постоянная. Тогда получим по (4.63):

$$w_0(x, y) = -\frac{m+1}{4m} [A\zeta\bar{\zeta} \ln \rho + (\bar{\gamma}\bar{\zeta} + \bar{\gamma}\zeta) \ln \rho + B \ln \rho] + \dots \quad (|\zeta| = \rho),$$

т. е. однозначное выражение. Краевая задача сводится к разысканию двух однозначных функций  $W_{10}(\zeta)$  и  $W_{20}(\zeta)$  по условию на контуре:

$$\begin{aligned} -W_{10}(\zeta) + \frac{m-1}{4m} [W_{10}(\zeta) + \zeta\bar{W}'_{10}(\bar{\zeta}) + \bar{W}'_{20}(\bar{\zeta})] = \\ = \frac{m+1}{2m} \left[ \int t(\zeta) d\zeta - (A\zeta \ln \zeta + \gamma \ln \zeta) \right] + \\ + \frac{m^2-1}{4m^2} \left[ (A\zeta + \gamma) \ln \rho + \frac{1}{2} \left( A\zeta + \frac{B}{\bar{\zeta}} \right) + \frac{1}{2} \left( \gamma + \bar{\gamma} \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right) \right]. \quad (4.74) \end{aligned}$$

Функции  $W_{10}(\zeta)$  и  $W_{20}(\zeta)$  определяются с помощью известного метода решения плоской задачи, предложенного Н. И. Мухелишвили.

Решив краевую задачу, найдём выражение бигармонического однородного решения  $w_0$  из соотношения

$$\begin{aligned} 4w_0 = -\frac{m+1}{m} [A\rho^2 \ln \rho + (\bar{\gamma}\bar{\zeta} + \bar{\gamma}\zeta + B) \ln \rho] + \\ + \bar{\zeta} W_{10}(\zeta) + \zeta\bar{W}_{10}(\bar{\zeta}) + W_{20}(\zeta) + \bar{W}_{20}(\bar{\zeta}). \quad (4.75) \end{aligned}$$

6°. Ограничимся рассмотрением простейшего примера круглой кольцевой плиты. Полагаем подобно (4.16)

$$\alpha T' = \alpha \frac{t'_1 - t'_0}{\ln \frac{\rho_1}{\rho_0}} \ln \frac{\rho}{\rho_0}; \quad (4.76)$$

тогда по (4.64) и (4.71)

$$t(\zeta) = \alpha \frac{t'_1 - t'_0}{\ln \frac{\rho_1}{\rho_0}} \ln \frac{\zeta}{\rho_0}, \quad A = \alpha \frac{t'_1 - t'_0}{\ln \frac{\rho_1}{\rho_0}}, \quad \gamma = 0, \quad (4.77)$$

и можно принять по (4.75)

$$\omega_0 = -\frac{m+1}{4m} (A\rho^2 + B) \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{1}{2} D\rho^2, \quad (4.78)$$

что соответствует выбору  $W_{10}(\zeta) = D\zeta$ ,  $W_{20}(\zeta) = 0$ .

Подстановка в (4.74) после некоторых упрощений приводит к соотношению

$$D + \frac{m-1}{4m} \frac{B}{\rho^2} = A \left( \frac{3m+1}{4m} - \frac{m-1}{2m} \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right), \quad (4.79)$$

которое должно быть выполнено при  $\rho = \rho_0$  и  $\rho = \rho_1$ . Определив постоянные  $B$  и  $D$ , по (4.78) получим:

$$\omega_0 = -A \frac{m+1}{4m} \left[ \rho^2 + \frac{2\rho_1^2 \rho_0^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} \ln \frac{\rho_1}{\rho_0} \right] \ln \frac{\rho}{\rho_0} - \rho^2 - \frac{1}{2} \frac{m-1}{m+1} \left( 1 - \frac{2\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} \ln \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) \rho^2, \quad (4.80)$$

и вычисление по формулам (4.54) с учётом (4.76) и (1.29) приводит к значениям изгибающих моментов, которые можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} G_\rho &= -\frac{1}{3} E h^3 A \left[ \ln \frac{\rho}{\rho_0} - \frac{\rho_1^2}{\rho^2} \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} \ln \frac{\rho_1}{\rho_0} \right], \\ G_\varphi &= -\frac{1}{3} E h^3 A \left[ 1 + \ln \frac{\rho}{\rho_0} - \frac{\rho_1^2}{\rho^2} \frac{\rho^2 + \rho_0^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} \ln \frac{\rho_1}{\rho_0} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.81)$$

Перерезывающие силы будут равны нулю. Момент  $G_\rho$  обращается в нуль при  $\rho = \rho_0$  и  $\rho = \rho_1$ , как и должно быть.

По (4.76) величина  $t'_1 - t'_0$  равна  $(T'_0)_{\rho=\rho_1}$ , т. е. разности градиентов температуры на краю  $\rho = \rho_1$ . Иными словами,

$$t'_1 - t'_0 = \frac{\Delta T^*}{2h},$$

где  $\Delta T^*$  равно разности температур торцов  $z = \pm h$  на указанном крае. Замечая ещё, что для тонкой плиты значения нормальных напряжений на крайних волокнах  $z = \pm h$  могут быть определены по формуле  $\sigma = \frac{3G}{2h^2}$ , где  $G$  — соответствующий изгибающий момент, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_p &= \mp \frac{1}{4} E\alpha \Delta T^* \left( \frac{\ln \frac{\rho}{\rho_0}}{\ln \frac{\rho_1}{\rho_0}} - \frac{\rho_1^2}{\rho^2} \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} \right), \\ \sigma_n &= \mp \frac{1}{4} E\alpha \Delta T^* \left( \frac{1 + \ln \frac{\rho}{\rho_0}}{\ln \frac{\rho_1}{\rho_0}} - \frac{\rho_1^2}{\rho^2} \frac{\rho^2 + \rho_0^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.82)$$

Более точные значения напряжений могут быть получены путём наложения на решение (4.48) однородного решения (1.27), в котором  $\omega_0$  определено по (4.80); функция  $f$  должна быть определена при этом по (4.53).

#### ПРИМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ В ГЛАВЕ 4

Теории толстых плит посвящены §§ 299—312 курса Лява; рассмотрены приёмы разыскания неоднородных решений при наиболее простых законах нагружения торцов плиты; в качестве однородного решения использовано бигармоническое решение. В книге С. П. Тимошенко «Пластинки и оболочки» (Гостехиздат, 1948) теория толстой плиты рассмотрена кратко в § 25.

Более общие законы нагружения торцов плиты рассмотрены в двух статьях Wolnowsky — Krieger «Die Spannungsverteilung in dicken elastischen Platten» (Ingenieur — Archiv 4, № 3, стр. 203 и № 4, стр. 315, 1933). Решение большого числа частных задач о равновесии плиты было дано Б. Г. Галеркиным в работах «Упругие прямоугольные и треугольные свободно опёртые толстые плиты, подверженные изгибу» (Собрание сочинений, т. 1, Изд-во Акад. наук СССР, 1952, стр. 322; впервые опубликовано в 1931 г.) и «Общее решение задачи о напряжениях и деформациях в толстой круглой плите и плите в виде кругового сектора» (там же, стр. 335; опубликовано впервые в 1932 г.).

Случай нагружения торцов изгибаемой плиты по гармоническому закону рассмотрен С. Г. Гутманом в работе «Расчёт толстых упругих плит под непрерывным распределённым давлением» (Известия научно-исследовательского института гидротехники 23, 1940, стр. 212). Дополнительные результаты содержатся в заметке того же автора «Расчёт толстых упругих плит под действием собственного веса» (там же 29, 1941, стр. 153). Метод решения задачи о толстой плите при полигармоническом нагружении её торцов дан В. И. Блохом в работе «К общей теории упругих толстых плит» (Инженерный сборник 18, 1954, стр. 61); там же имеется указание на неизвестную мне работу С. А. Алексеева, в которой рассмотрен тот же вопрос.

Литературные указания на ряд иностранных работ по теории толстых плит даны в указанных выше книгах Лява и Тимошенко.

В перечисленных работах в качестве однородного используется бигармоническое решение, что даёт возможность удовлетворить условиям на боко-



вой поверхности плиты лишь в смысле Сен-Венана. Попытка более строгого выполнения краевых условий была дана автором в указанной в примечаниях к главе 3 работе «К теории толстых плит» с помощью «однородных решений». Таковыми являются частные решения однородного уравнения

$$F(D^2)\varphi(x, y) = 0, \quad (*)$$

соответствующего уравнению (4.1) главы 3. Класс однородных решений легко определить. Для этого рассмотрим уравнение Гельмгольца

$$(D^2 + \gamma^2)\varphi(x, y) = 0. \quad (**)$$

Тогда

$$D^2\varphi = -\gamma^2\varphi, \quad D^4\varphi = (-\gamma^2)^2\varphi, \dots, D^{2s}\varphi = (-\gamma^2)^s\varphi$$

и, следовательно, для любой целой функции

$$F(D^2)\varphi(x, y) = F(-\gamma^2)\varphi(x, y),$$

откуда следует, что уравнению (\*) можно удовлетворить, если в уравнении Гельмгольца (\*\*) принять  $\gamma^2$  равным одному из корней трансцендентного уравнения

$$F(-\gamma^2) = 0.$$

В применении к задачам о растяжении слоя по (4.3) главы 3, значения  $\gamma^2$  являются корнями уравнения

$$1 + \frac{\text{sh } 2h\gamma}{2h\gamma} = 0,$$

а в задаче изгиба по (4.4) главы 4 соответствующее уравнение будет:

$$1 - \frac{\text{sh } 2h\gamma}{2h\gamma} = 0.$$

Все корни этих уравнений комплексны (исключая тривиальный нулевой корень второго уравнения). Однородные решения были получены при рассмотрении плоской задачи П. Ф. Папковичем в работе «Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы» (Докл. Акад. наук 32, № 4, 1940) и одновременно с ним Фадле (J. Fadle «Die Selbstspannungs-Eigenfunktionen der quadratischen Scheibe», Ingenieur Archiv, XI, № 4, 1940, стр. 125—149). В работе Фадле приведены значения корней вышеприведённых трансцендентных уравнений. Г. А. Гринберг в работе «О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закреплёнными кромками, и о некоторых его обобщениях» (Прикл. матем. и мех. 17, № 2, 1953, стр. 211—228) доказал возможность с помощью однородных решений строго удовлетворить краевым условиям в некотором классе плоских задач для прямоугольной области, а также задач об изгибе прямоугольной плиты. В случае толстой прямоугольной плиты задача является более сложной, так как на каждой из боковых сторон плиты должны быть выполнены три краевых условия.

Формулы (1.12) и (1.13), дающие выражения напряжений и перемещений в задаче о плоском напряжённом состоянии, строго удовлетворяющие уравнениям теории упругости в перемещениях, даны Нейбером («Концентрация напряжений», Гостехиздат, 1947, стр. 42).

Задача о равновесии толстой круглой плиты, которой посвящён § 3, более полно рассмотрена Клеммовым (С. А. Clemmow) в работе «Flexure of Thick Circular Plates» (Transactions of the Royal Soc. London, Ser. A, 112, 1926) для случая равномерной нагрузки, автором в указанной ранее статье для нагрузки сосредоточенной силой в центре и для общего случая осесимметричной нагрузки В. К. Прокоповым («Изгиб круглой плиты осесимметричной

нагрузкой», Прикл. матем. и мех. 14, 1950, стр. 527). Ряд задач о равновесии прямоугольной толстой упругой плиты при более строгом, чем в смысле Сен-Венана, выполнении краевых условий рассмотрен в неопубликованной диссертационной работе Е. М. Круга (Ленинградский политехнический институт, 1948). Для случая прямоугольной полосы этот же вопрос рассмотрен В. К. Прокоповым в статье «Об одной плоской задаче теории упругости для прямоугольной области» (Прикл. матем. и мех. 16, 1952, стр. 341). Задача о равновесии упругого слоя, снабжённого круговым отверстием, была рассмотрена в совместной работе Д. Ю. Айзенберга и Г. С. Шапиро «О распределении напряжений в неограниченном слое» (Инженерный сборник 7, 1950, стр. 65) для случая сжатия слоя давлением, равномерно распределённым по кольцу, концентрическому с отверстием. В работе «Three Dimensional Solution for the Stress Concentration Around a Circular Hole in a Plate of Arbitrary Thickness» (Journal of Applied Mech. 16, № 1, 1949, стр. 28—38) Sternberg и Sadowsky дают приближённое решение задачи о растяжении упругого слоя, снабжённого круговым отверстием. Ту же задачу рассмотрел Green в работе «Three Dimensional Stress Systems in Isotropic Plates» (Phil. Trans. of the Royal Soc. London, Ser. A, 825, 1948, стр. 561—597).

При рассмотрении задачи о тепловых напряжениях в плитах при установившемся и равномерном по толщине плиты распределении температуры использованы результаты Н. И. Мухелишвили («Некоторые основные задачи», §§ 45, 46). Там же можно найти указания на литературу по теории дислокации. Преобразование краевых условий в задаче об изгибе, возникающем при установившейся температуре, линейно изменяющейся по толщине плиты, осуществлённое в п. 5, было дано С. Г. Лехницким в работе «О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит» (Прикл. матем. и мех. 2, № 2, 1938, стр. 181). Ряд задач о тепловых напряжениях в плитах рассмотрен в указанной в примечаниях к гл. 1 работе Г. Н. Маслова.

Во многих местах текста использован метод введения комплексного переменного, в частности формул Колосова — Мухелишвили. Хорошо известно, что основным источником, в котором наиболее полно изложен этот метод, является указанный выше труд Н. И. Мухелишвили.

---

## ГЛАВА 5

### ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ

#### § 1. Постановка задачи о действии жёсткого штампа на упругое полупространство

К контактными задачам принадлежит обширный круг вопросов, относящихся к разысканию напряжённого состояния в прижатых друг к другу упругих телах. Простейшим случаем контактной задачи будет тот, когда одно из тел может рассматриваться как абсолютно твёрдое — жёсткий штамп, а вторым является упругое полупространство.

Плоскость, ограничивающую полупространство, примем за плоскость  $xOy$ , направив ось  $Oz$  внутрь полупространства. Основание, которым штамп прижат к полупространству, может быть или плоским (плоский штамп) или иметь форму выпуклой поверхности  $S$ . Со штампом свяжем систему осей  $\xi\eta\zeta$ , начало которой расположено на поверхности  $S$ , а ось  $\zeta$  направлена по нормали к этой поверхности внутрь штампа. В начальном состоянии, пока штамп не нагружен, начала систем осей  $O\xi\eta\zeta$  и  $Oxyz$  совпадают, равно как и оси  $\xi$  и  $x$ ,  $\eta$  и  $y$ , а оси  $\zeta$  и  $z$  имеют противоположные направления (рис. 20).

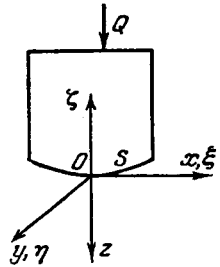


Рис. 20.

В системе осей  $\xi\eta\zeta$  уравнение поверхности  $S$  основания штампа представляется в форме

$$\zeta = \varphi(\xi, \eta), \quad (1.1)$$

причём при указанном выборе осей

$$\varphi(0, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_{\xi=\eta=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)_{\xi=\eta=0} = 0. \quad (1.2)$$

В случае плоского штампа уравнение плоскости его основания будет просто

$$\zeta = 0. \quad (1.3)$$

При нагружении штамп перемещается, погружаясь в деформируемую им упругую среду; величины, характеризующие перемещение

штампа, мы считаем при этом малыми того же порядка, что и перемещения части упругой среды.

Рассмотрим на плоскости  $xu$  область  $\Omega$ , содержащую точки, после деформации располагающиеся на смещённой поверхности  $S$  основания штампа. Будем называть эту плоскую область  $\Omega$  областью соприкосновения. Как всегда, краевые условия мы будем относить к недеформированной поверхности упругого тела, т. е. к плоскости  $z = 0$ ; считая основание штампа абсолютно гладким, можно краевые условия для касательных напряжений на всей плоскости  $z = 0$  записать в виде

$$\tau_{zx} = 0, \quad \tau_{yz} = 0. \quad (1.4)$$

Нормальные напряжения  $\sigma_z$  отсутствуют на плоскости  $z = 0$  вне области соприкосновения  $\Omega$ :

$$\sigma_z = 0. \quad (1.5)$$

В точках же области  $\Omega$  упругая среда подвергается действию сжимающей нагрузки  $p(x, y)$ , закон распределения которой заранее неизвестен и должен быть найден в результате решения задачи:

$$\text{при } z = 0 \quad \sigma_z = -p(x, y) \text{ внутри } \Omega. \quad (1.6)$$

Равновесие штампа при этих условиях возможно при действии на него силы  $Q$ , направленной параллельно оси  $z$ ; через  $x_0, y_0$  обозначим координаты точки пересечения линии действия этой силы с плоскостью  $xu$ . Тогда уравнения равновесия штампа будут:

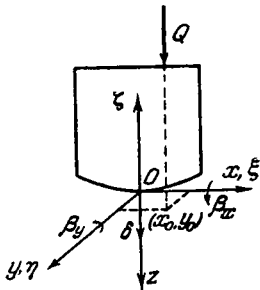


Рис. 21.

$$\left. \begin{aligned} Q &= \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy, \\ x_0 Q &= \iint_{\Omega} xp(x, y) dx dy, \\ y_0 Q &= \iint_{\Omega} yp(x, y) dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Остаётся составить краевое условие для перемещения  $w$  точек области  $\Omega$ ; оно может быть выражено через величины, определяющие перемещение штампа.

Под действием силы  $Q$  штамп переместится поступательно и совершит поворот. Поступательное перемещение  $\delta$  будет параллельно оси  $z$ , а поворот произойдёт вокруг некоторой оси, расположенной в плоскости  $xu$ ; проекции вектора поворота на оси  $x$  и  $y$  назовём через  $\beta_x, \beta_y$ . Через три величины  $\delta, \beta_x, \beta_y$  могут быть выражены перемещения точек поверхности  $S$  основания штампа; достаточно составить уравнение этой поверхности в системе осей  $xuz$ . Имеем

следующую таблицу косинусов между этими осями и осями  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , связанными со штампом (рис. 21)

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
$x$	1	0	$-\beta_y$
$y$	0	1	$\beta_x$
$z$	$-\beta_y$	$\beta_x$	-1

Несколько необычный вид этой таблицы объясняется тем, что системы осей  $xuz$  и  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  — разноимённые. Замечая ещё, что координаты начала системы  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  в системе  $xuz$  равны 0, 0,  $\delta$ , будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} x_s &= \xi - \beta_y \zeta = \xi - \beta_y \varphi(\xi, \eta), \\ y_s &= \eta + \beta_x \zeta = \eta + \beta_x \varphi(\xi, \eta), \\ z_s &= \delta - \beta_y \xi + \beta_x \eta - \zeta = \delta - \beta_y \xi + \beta_x \eta - \varphi(\xi, \eta). \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Таковы выражения координат точек поверхности  $S$  в системе осей  $xuz$ ; эти выражения можно значительно упростить, если пренебречь произведениями малых величин  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  и  $\varphi(\xi, \eta)$ ; тогда из первых двух уравнений (1.8) получим:

$$x_s = \xi, \quad y_s = \eta, \quad (1.9)$$

а третье примет вид

$$z_s = \delta - \beta_y x_s + \beta_x y_s - \varphi(x_s, y_s). \quad (1.10)$$

Назовём теперь через  $(x, y, 0)$  координаты точки области  $\Omega$ , которая при деформации совпадёт с точкой  $(x_s, y_s, z_s)$  поверхности  $S$ ; можно написать:

$$x_s = x + u, \quad y_s = y + v, \quad z_s = w, \quad (1.11)$$

где, как обычно,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  обозначают проекции перемещения при деформации тела. Таким образом, получаем:

$$u = \xi - x, \quad v = \eta - y, \quad (1.12)$$

$$w = \delta - \beta_y(x + u) + \beta_x(y + v) - \varphi(x + u, y + v). \quad (1.13)$$

В последнем уравнении пренебрегаем произведениями  $\beta_y u$  и  $\beta_x v$ , а также полагаем:

$$\varphi(x + u, y + v) \approx \varphi(x, y).$$

Таким образом, приходим к искомому краевому условию для перемещения  $w$ :

$$\text{при } z = 0 \quad w = \delta - \beta_y x + \beta_x y - \varphi(x, y) \quad (\text{внутри } \Omega). \quad (1.14)$$

Для плоского штампа это условие упрощается и принимает вид:

$$\text{при } z = 0 \quad w = \delta - \beta_y x + \beta_x y \quad (\text{внутри } \Omega). \quad (1.15)$$

Условия (1.12) позволяют определить, после того как задача будет решена, т. е. найдены перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , координаты  $(x, y)$  той точки области  $\Omega$ , которая при деформации заняла положение  $(\xi, \eta)$  на поверхности основания штампа.

Вопрос о действии штампа на упругое полупространство, таким образом, сведён к рассмотрению следующей задачи теории упругости со смешанными краевыми условиями: во-первых, обращаются в нуль касательные напряжения  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{yz}$  по всей плоскости  $z = 0$ ; во-вторых, вне области  $\Omega$  этой плоскости обращается в нуль нормальное напряжение  $\sigma_z$ ; в-третьих, задаётся значение нормального перемещения  $w$  точек области  $\Omega$ . В этом задании величины  $\beta_x$ ,  $\beta_y$ ,  $\delta$  заранее неизвестны и для их определения должны быть использованы уравнения равновесия штампа (1.7).

Сказанное можно интерпретировать так: точкам плоскости  $z = 0$ , принадлежащим области  $\Omega$ , сообщаются нормальные перемещения  $w$  по заданному закону [(1.14) или (1.15)], для чего по площади  $\Omega$  должно быть приложено нормальное давление  $p(x, y)$ , закон распределения которого заранее неизвестен. В образующую «впадину» затем вставляется штамп, который, чтобы сохранить равновесие, должен быть прижат вертикальной силой  $Q$ .

Если пренебречь искажением, вносимым поворотом, то область  $\Omega$  в случае плоского штампа определяется формой сечения штампа, нормального к оси  $\zeta$ . На контуре  $C$  этой области нормальное напряжение  $\sigma_z$  будет претерпевать разрыв непрерывности. Для неплюского штампа, поверхность которого не имеет угловых линий ( $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$  — непрерывны), контур области  $\Omega$  представляет кривую  $C$ , получающуюся в сечении поверхности штампа одной из плоскостей  $\zeta = \text{const}$ ; на этой кривой нормальное давление  $p(x, y)$  обращается в нуль, так что нормальное напряжение  $\sigma_z$  оказывается непрерывным на всей плоскости  $z = 0$ ; это требование должно быть поставлено, так как вследствие отсутствия на поверхности штампа угловой линии упругая среда будет плавно прилегать к основанию штампа.

Если  $x_C$  и  $y_C$  обозначают координаты точки на кривой  $C$ , то согласно сказанному в случае неплюского штампа

$$p(x_C, y_C) = 0. \quad (1.16)$$

Величина  $w(x_C, y_C)$  представит перемещение точек упругой среды вдоль контура области  $\Omega$ , а выражение

$$\delta_1 = \beta_y x_C - \beta_x y_C + \varphi(x_C, y_C) = \delta - w(x_C, y_C) \quad (1.17)$$

даёт величину, которую можно назвать погружением штампа в среду. Условие (1.14) на кривой  $C$  выражает, что перемещение штампа равно сумме его погружения в среду и перемещения последней.

Заметим, что штамп должен быть прижат к среде по всей поверхности соприкосновения, т. е. искомое решение должно удовлетворять условию

$$p(x, y) \geq 0, \quad (1.18)$$

причём равенство имеет место только на контуре  $C$  области  $\Omega$ . Условие (1.18) может быть выполнено, очевидно, лишь при некоторых ограничениях, накладываемых на расположение линии действия силы  $Q$ , прижимающей штамп к среде.

## § 2. Метод решения задачи о жёстком штампе

Мы видели в § 5 главы 2, что при отсутствии касательных напряжений  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{yz}$  на плоскости  $z=0$  задача о напряжённом состоянии в упругом полупространстве  $z > 0$  сводится к разысканию функции  $\omega(x, y, z)$ , гармонической повсюду, кроме области  $\Omega$  нормального загрузения, и обращаемой в нуль на бесконечности как

$$\frac{Q}{R} \quad \left( R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad Q = \int_{\Omega} p(x, y) dx dy \right). \quad (2.1)$$

Перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  определяются при этом по формулам (5.27) указанной главы:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{4\pi\mu} \left( z \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{m-2}{m} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right), \\ v &= -\frac{1}{4\pi\mu} \left( z \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{m-2}{m} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right), \\ w &= \frac{m-1}{2\pi\mu} \omega - \frac{1}{4\pi\mu} z \frac{\partial \omega}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

причём  $\omega_1(x, y, z)$  — гармоническая функция в полупространстве  $z > 0$ , выражающаяся через  $\omega(x, y, z)$ , с помощью соотношения

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial z} = \omega(x, y, z) \quad (2.3)$$

и на бесконечности возрастающая неограниченно, как

$$Q \ln(R + z). \quad (2.4)$$

Напряжения могут быть известным образом выражены через функции  $\omega$  и  $\omega_1$ . В частности, по (5.29) главы 2

$$\sigma_z = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right). \quad (2.5)$$

По (1.5) и (1.14) краевые условия, которыми определяется в задаче о штампе функция  $\omega(x, y, z)$ , поэтому формулируются так: при  $z = 0$  и вне области  $\Omega$

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0, \quad (2.6)$$

тогда как внутри этой области

$$\omega(x, y, 0) = \frac{2\pi m G}{m-1} [\delta - \beta_y x + \beta_x y - \varphi(x, y)], \quad (2.7)$$

причём для плоского штампа  $\varphi(x, y) = 0$ .

Как указывалось в главе 2, функцию  $\omega(x, y, z)$  можно определить как потенциал простого слоя плотности  $p(x, y)$ , распределённого по плоской области  $\Omega$ :

$$\omega(x, y, z) = \int_{\Omega} \int \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}}. \quad (2.8)$$

Эта гармоническая функция непрерывна во всём пространстве, включая область  $\Omega$ , и на бесконечности удовлетворяет требованию (2.1); её нормальная производная претерпевает разрыв непрерывности при переходе с одной стороны слоя на другую; при этом по (5.21) и (5.22) главы 2 имеем:

$$\left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)_{z \rightarrow \pm 0} = \begin{cases} \mp 2\pi p(x, y) & (x, y) \text{ внутри } \Omega, \\ 0 & (x, y) \text{ вне } \Omega. \end{cases} \quad (2.9)$$

Таким образом, определяя  $\omega(x, y, z)$  в форме потенциала простого слоя, мы удовлетворяем условию (2.6). Кроме того по (2.5) имеем:

$$\sigma_z = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)_{z \rightarrow +0} = -p(x, y) \quad (x, y) \text{ внутри } \Omega. \quad (2.10)$$

т. е. плотность  $p(x, y)$  представляет не что иное, как интенсивность распределения давления по площадке соприкасания штампа с упругой средой.

Вследствие непрерывности функции  $\omega(x, y, z)$  по (2.8) и (2.7) может быть для точек области  $\Omega$  составлено соотношение

$$\delta - \beta_y x + \beta_x y - \varphi(x, y) = \frac{m-1}{2\pi m G} \int_{\Omega} \int \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}}. \quad (2.11)$$



Таким образом, интенсивность распределения нормального давления по площадке соприкосновения определяется из решения полученного интегрального уравнения (2.11); постоянные  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  и  $\delta$  после этого находятся из уравнений равновесия штампа (1.7), а область  $\Omega$  — по условию (1.16). В случае плоского штампа эта область известна заранее и задаётся формой сечения штампа.

Нахождение функции  $\omega(x, y, z)$ , без которого решение задачи не было бы полным, сводится после определения плотности  $p(x, y)$  к вычислению интеграла (2.11), что сопряжено с преодолением некоторых новых затруднений (см. §§ 6—7 главы 2). От этого недостатка свободен излагаемый ниже метод решения, основанный на прямом построении гармонической функции  $\omega(x, y, z)$ , в ходе которого находится также значение плотности  $p(x, y)$ .

Идея этого метода состоит в следующем. Допустим, что разыскивается потенциал простого слоя, распределённого по некоторой замкнутой поверхности  $S_0$ , причём значение  $\omega_0(x, y, z)$  этого потенциала в точках поверхности  $S_0$  задано и представляет непрерывную функцию координат этих точек. Тогда, решив внутреннюю задачу Дирихле, найдём гармоническую внутри  $S_0$  функцию  $\omega_i(x, y, z)$ , такую, что

$$\omega_i(x, y, z) = \omega_0(x, y, z) \quad \text{на } S_0. \quad (2.12)$$

Точно так же из решения внешней задачи Дирихле определим другую гармоническую функцию  $\omega_e(x, y, z)$ , обращающуюся в нуль на бесконечности, как  $\frac{\text{const}}{R}$ , и принимающую на  $S_0$  те же значения

$$\omega_e(x, y, z) = \omega_0(x, y, z) \quad \text{на } S_0. \quad (2.13)$$

Таким образом, будет определена гармоническая во всём пространстве и непрерывная повсюду (включая поверхность  $S_0$ ) функция  $\omega(x, y, z)$ , обращающаяся в нуль на бесконечности, как  $\frac{\text{const}}{R}$ :

$$\omega(x, y, z) = \begin{cases} \omega_i(x, y, z) & \text{внутри } S_0, \\ \omega_e(x, y, z) & \text{вне } S_0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Первые производные функции  $\omega(x, y, z)$  будут непрерывны во всём пространстве, исключая поверхность  $S_0$ ; производные по направлениям, лежащим в касательной плоскости к  $S_0$ , по (2.12) и (2.13) также непрерывны, но нет никаких оснований полагать, что и нормальная производная  $\frac{\partial \omega}{\partial n}$  ( $n$  — внешняя нормаль к  $S_0$ ) также окажется непрерывной, т. е. что  $\frac{\partial \omega_e}{\partial n}$  и  $\frac{\partial \omega_i}{\partial n}$  будут равны друг другу. Величину разрыва нормальной производной обозначим ( $-4\pi p$ ):

$$\left( \frac{\partial \omega_e}{\partial n} - \frac{\partial \omega_i}{\partial n} \right)_{(x, y, z) \rightarrow S_0} = -4\pi p. \quad (2.15)$$

В теории потенциала доказывается, что  $\omega(x, y, z)$  действительно представляет при этих условиях потенциал простого слоя, распределённого по поверхности  $S_0$  с плотностью  $p$ .

Заметим, что если плоскость  $z = 0$  является плоскостью симметрии поверхности  $S_0$ , а заданное на  $S_0$  значение  $\omega_0$  гармонических функций  $\omega_i$  и  $\omega_e$  не зависит от  $z$ , то и функция  $p$ , определяющая плотность потенциала  $\omega$ , будет, очевидно, принимать одинаковые значения в точках поверхности  $S_0$ , отличающихся лишь знаком координаты  $z$ . В дальнейшем считаем, что это условие симметрии выполнено.

Теперь предположим, что рассматриваемая замкнутая поверхность  $S_0$  принадлежит семейству поверхностей  $S$ , зависящих от одного параметра  $s$  и деформирующихся с изменением этого параметра;  $S_0$  отвечает значению параметра  $s = s_0$ , а значению его, равному нулю, соответствует плоская пластинка — область  $\Omega$  плоскости  $z = 0$ , в которую вырождаются поверхности  $S$ ; при этом верхней и нижней сторонами пластинки соответствуют части поверхности  $S$ , на которых  $z \leq 0$  (ось  $z$  направлена внутрь полупространства, т. е. «вниз»). Называя теперь определяемую по (2.14) функцию  $\omega$  через  $\omega(x, y, z; s_0)$ , мы можем утверждать, что функция

$$\omega(x, y, z) = \lim_{s_0 \rightarrow 0} \omega(x, y, z; s_0) = \lim_{s_0 \rightarrow 0} \omega_e(x, y, z; s_0) \quad (2.16)$$

представит значение гармонической функции, принимающей в точках плоской области  $\Omega$  заданные значения  $\omega(x, y, 0)$  и являющейся потенциалом простого слоя, распределённого по этой области. Поэтому если  $\omega(x, y, 0)$  задать так, как это требуется, т. е. по (2.7), то  $\omega(x, y, z)$  будет искомой гармонической функцией, дающей решение задачи о жёстком штампе.

При стягивании поверхности  $S_0$  в плоскую пластинку на каждый элемент площади пластинки  $dx dy$  лягут два симметричных относительно плоскости  $z = 0$  элемента поверхности  $S_0$ ; плотность распределения простого слоя на пластинке окажется вдвое большей, чем его плотность на поверхности  $S_0$  при сколь угодно малом  $s_0$ . По (2.15) можно поэтому написать:

$$p(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{s_0 \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial \omega_e(x, y, z; s_0)}{\partial n} - \frac{\partial \omega_i(x, y, z; s_0)}{\partial n} \right]. \quad (2.17)$$

Эта формула определяет интенсивность распределения давления по поверхности соприкосновения штампа с упругой средой.

Эффективное проведение этого хода вычисления связано с возможностью указать криволинейную координатную систему, в числе замкнутых координатных поверхностей  $S$  которой имеется вырожденная поверхность — плоская область  $\Omega$ , снабжаемая «верхней» и «нижней» сторонами. Необходимо также располагать возможностью построения решений внешней и внутренней задачи Дирихле для поверх-

ностей  $S$  этой координатной системы. В том случае, когда плоская область  $\Omega$  ограничена эллипсом, такая координатная система хорошо известна — это общий случай эллиптических координат. Круговая область получается в специальном случае эллиптических координат — в так называемых координатах сплющенного эллипсоида вращения, рассматриваемых в § 3. Семейство софокусных эллиптических цилиндров, образующие которых параллельны оси  $y$ , позволяет рассмотреть случай плоской области  $\Omega$ , представляющей полосу в плоскости  $xu$ , ограниченную двумя прямыми, параллельными оси  $u$ . Если, в частности, перемещение  $\omega$  точек этой полосы одинаково для всех  $u$  (т. е.  $\omega$  не зависит от  $u$ ), то приходим к плоской контактной задаче. При этом следует рассматривать вместо (2.8) логарифмический потенциал простого слоя.

### § 3. Специальный случай эллиптических координат. Рыскание гармонических функций $\omega$ и $\omega_1$

1°. Областью соприкосновения  $\Omega$  в случае штампа, основание которого является поверхностью вращения, служит круговая площадка; радиус окружности, ограничивающей эту площадку, назовём  $a$ ; как говорилось выше, в случае плоского штампа  $a$  известно заранее — это радиус давящего цилиндрического штампа; для неплоского штампа величина  $a$  определяется в ходе решения задачи по (1.16), т. е. из условия непрерывности нормального напряжения  $\sigma_z$  на всей плоскости  $z = 0$ , ограничивающей полупространство.

Как уже указывалось, система криволинейных координат, в числе координатных поверхностей которой имеется плоская круговая площадка, представляет специальный случай эллиптических координат. Одним из семейств координатных поверхностей этой системы являются софокусные сплющенные эллипсоиды вращения; меридиональное сечение такого эллипсоида представляет эллипс, малая полуось которого направлена по оси вращения эллипсоида; эллипс вырождается в прямолинейный отрезок (расстояние между фокусами эллипса), когда эта малая полуось стремится к нулю, а сплющенный эллипсоид при этом обращается в круговую площадку.

В рассматриваемой системе криволинейных координат положение точки задаётся тремя параметрами  $s$ ,  $\mu$ ,  $\varphi$ , пределы изменения которых задаются неравенствами

$$0 \leq s \leq \infty, \quad -1 \leq \mu \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (3.1)$$

Декартовы координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  выражаются через эти параметры с помощью соотношений

$$x = a \sqrt{1+s^2} \sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi, \quad y = a \sqrt{1+s^2} \sqrt{1-\mu^2} \sin \varphi, \quad z = as\mu. \quad (3.2)$$

Мы будем также пользоваться цилиндрическими координатами, в которых угол азимута  $\varphi$  имеет то же значение, что и в рассматриваемой системе, а

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = a \sqrt{1 + s^2} \sqrt{1 - \mu^2}, \quad z = a s \mu. \quad (3.3)$$

Координатные поверхности  $s = \text{const}$  представляют сплюснутые эллипсоиды вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2(1 + s^2)} + \frac{z^2}{a^2 s^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{\rho^2}{1 + s^2} + \frac{z^2}{s^2} = a^2. \quad (3.4)$$

Положение точки  $M$  на поверхности эллипсоида  $s = s_0$  определяется координатами  $\mu$ ,  $\varphi$ ; полагая

$$\mu = \cos \vartheta, \quad (3.5)$$

мы можем сопоставить этому эллипсоиду единичную сферу и определять положение точки  $M$  на эллипсоиде сферическими координатами  $\vartheta$  и  $\varphi$  точки  $M^*$ , получающейся в пересечении луча, проведённого в  $M$  из центра эллипсоида, с единичной сферой. Таким образом, величина, заданная на эллипсоиде, может рассматриваться как функция сферических координат  $\mu$ ,  $\varphi$  (или  $\vartheta$  и  $\varphi$ ), и, значит, быть представленной рядом по сферическим функциям Лапласа (в частности, по полиномам Лежандра  $P_n(\mu)$ , если эта величина не зависит от  $\varphi$ ).

При  $s = 0$  имеем по (3.2):

$$x = a \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi, \quad y = a \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi, \quad z = 0 \quad (3.6)$$

или же

$$\rho = a \sqrt{1 - \mu^2} = a \sin \vartheta, \quad z = 0. \quad (3.7)$$

Для двух значений  $\mu$ , отличающихся знаком, получаем на плоскости  $z = 0$  одну и ту же точку; её можно рассматривать как принадлежащую двум сторонам этой плоскости: положительному (отрицательному)  $\mu$  соответствует точка, находящаяся со стороны положительных (отрицательных)  $z$ . Это следует из того, что  $s > 0$ , и следовательно,  $z$  имеет знак  $\mu$ , как бы ни было мало  $s$ .

Остаётся сказать, что по (3.7)  $\rho \leq a$ . Таким образом, при  $s = 0$  эллипсоид вырождается в круговую площадку, на которой можно различать верхнюю ( $\mu < 0$ ) и нижнюю ( $\mu > 0$ ) стороны. Радиус этой площадки равен  $a$  — радиусу фокальной окружности эллипсоидов  $s = \text{const}$ .

Координатные поверхности  $\mu = \text{const}$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2(1 - \mu^2)} - \frac{z^2}{a^2 \mu^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{\rho^2}{1 - \mu^2} - \frac{z^2}{\mu^2} = a^2 \quad (3.8)$$

представляют однополые гиперboloиды вращения, софокусные с эллипсоидами. Положение точки на гиперboloиде  $\mu = \text{const}$  задаётся

координатами  $s$  и  $\varphi$ . При  $\mu = 0$  гиперboloид вырождается в часть плоскости  $z = 0$  вне окружности радиуса  $a$ :

$$x = a\sqrt{1+s^2}\cos\varphi, \quad y = a\sqrt{1+s^2}\sin\varphi, \quad z = 0. \quad (3.9)$$

Положение точки на этой части плоскости может быть определено полярными координатами  $\rho = a\sqrt{1+s^2}$  и  $\varphi$ .

Наконец, координатные поверхности  $\varphi = \text{const}$  представляют меридиональные плоскости

$$y = x \operatorname{tg} \varphi, \quad (3.10)$$

проходящие через ось  $z$ .

Рассматриваемая система криволинейных координат  $s, \mu, \varphi$  ортогональна. Выражение элемента дуги в ней имеет вид

$$(d\sigma)^2 = H_s^2(ds)^2 + H_\mu^2(d\mu)^2 + H_\varphi^2(d\varphi)^2$$

и коэффициенты Ляме имеют значения

$$\left. \begin{aligned} H_s &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2} = a\sqrt{\frac{s^2 + \mu^2}{1 + s^2}}, \\ H_\mu &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2} = a\sqrt{\frac{s^2 + \mu^2}{1 - \mu^2}}, \\ H_\varphi &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = a\sqrt{(1 + s^2)(1 - \mu^2)}. \end{aligned} \right\} (3.11)$$

Уравнение Лапласа в этой системе криволинейных координат

$$\Delta\omega = \frac{1}{H_s H_\mu H_\varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{H_\mu H_\varphi}{H_s} \frac{\partial \omega}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{H_\varphi H_s}{H_\mu} \frac{\partial \omega}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{H_s H_\mu}{H_\varphi} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) \right] = 0 \quad (3.12)$$

имеет поэтому вид

$$\frac{\partial}{\partial s} (1 + s^2) \frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial \omega}{\partial \mu} + \left( \frac{s^2}{1 + s^2} + \frac{\mu^2}{1 - \mu^2} \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (3.13)$$

Для нашей цели можно ограничиться рассмотрением двух классов решений этого уравнения. Это, во-первых, решения, принимающие на поверхности эллипсоида  $s = s_0$  те же значения, которые на ней имеют сами координаты  $x$  и  $y$ :

$$x = a\sqrt{1+s_0^2}\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi, \quad y = a\sqrt{1+s_0^2}\sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi. \quad (3.14)$$

Во-вторых, мы рассмотрим решения, не зависящие от азимутального угла  $\varphi$ , т. е. решения, обладающие симметрией вращения.

2°. Решения первого класса обозначим  $\omega'$  и  $\omega''$ ; достаточно рассмотреть только первое ( $\omega'$ ), так как второе ( $\omega''$ ) получится простой заменой  $\cos\varphi$  на  $\sin\varphi$ . Следует, конечно, различать функции  $\omega'_s$  и  $\omega''_s$ , дающие решения внутренней и внешней задач Дирихле для эллипсоида  $s = s_0$ .

Гармонической функцией  $\omega'_i$ , принимающей на поверхности  $s = s_0$  те же значения, что и координата  $x$ , очевидно, является само  $x$ :

$$\omega'_i = x = a \sqrt{1 + s^2} \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi. \quad (3.15)$$

Сложнее определение  $\omega'_e$ . Поскольку эта функция на поверхности  $s = s_0$  должна принимать значение (3.14), естественно её выражение искать в виде

$$\omega'_e = a \sqrt{1 + s^2} S(s) \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi \quad (3.16)$$

и потребовать, чтобы это выражение, во-первых, удовлетворяло уравнению (3.13), во-вторых, обращалось в нуль на бесконечности:

$$S(\infty) = 0, \quad (3.17)$$

в-третьих, чтобы при  $s = s_0$  оно принимало то же значение, что координата  $x$ , т. е. чтобы

$$S(s_0) = 1. \quad (3.18)$$

Подставив (3.16) в (3.13), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции  $S(s)$ :

$$\frac{d}{ds} (1 + s^2) \frac{dS}{ds} - \left(1 + \frac{s^2}{1 + s^2}\right) S(s) = 0. \quad (3.19)$$

Но из (3.15) следует, что

$$S_1(s) = \sqrt{1 + s^2} \quad (3.20)$$

является частным решением этого уравнения. Поэтому его второе линейно независимое решение будет \*):

$$S_2(s) = CS_1(s) \int_s^\infty \frac{d\sigma}{(1 + \sigma^2) S_1^2(\sigma)} = C \sqrt{1 + s^2} \int_s^\infty \frac{d\sigma}{(1 + \sigma^2)^2}. \quad (3.21)$$

Верхний предел принят равным бесконечности, чтобы удовлетворить условию (3.17). Определив ещё постоянную  $C$  так, чтобы было выполнено условие (3.18), найдём:

$$S_2(s) = \sqrt{\frac{1 + s^2}{1 + s_0^2}} \frac{\psi(s)}{\psi(s_0)}, \quad (3.22)$$

где обозначено для краткости

$$\psi(s) = \frac{s}{1 + s^2} - \text{arc ctg } s. \quad (3.23)$$

\* В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1945, стр. 183.

Таким образом, получено выражение гармонической функции  $\omega'$ , решающей указанную выше внутреннюю и внешнюю задачу Дирихле для эллипсоида  $s = s_0$ :

$$\omega' = \begin{cases} \omega'_i = x = a \sqrt{1 + s^2} \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi & (s \leq s_0), \\ \omega'_e = a \sqrt{1 + s^2} \frac{\psi(s)}{\psi(s_0)} \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi = x \frac{\psi(s)}{\psi(s_0)} & (s \geq s_0). \end{cases} \quad (3.24)$$

При замене  $\cos \varphi$  на  $\sin \varphi$  (или  $x$  на  $y$ ) получаем  $\omega''$ .

Функция  $\omega'$  ( $\omega''$ ) представляет потенциал простого слоя, распределённого по поверхности эллипсоида  $s = s_0$ ; плотность  $p'$  ( $p''$ ) слоя определяется согласно (2.15) по значению разрыва нормальной производной на этой поверхности:

$$p' = -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial n} (\omega'_e - \omega'_i) \right]_{s=s_0} = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial n} x \left[ \frac{\psi(s)}{\psi(s_0)} - 1 \right] \right\}_{s=s_0}. \quad (3.25)$$

Но направление внешней нормали к эллипсоиду совпадает с направлением возрастания параметра  $s$  нашей координатной системы, и бесконечно малый отрезок нормали к эллипсоиду равен

$$\delta n = H_s \delta s = a \sqrt{\frac{s^2 + \mu^2}{1 + s^2}} \delta s. \quad (3.26)$$

Подстановка в (3.25) даёт:

$$\begin{aligned} p' &= -\frac{1}{4\pi a} \sqrt{\frac{1 + s_0^2}{s_0^2 + \mu^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} x \left[ \frac{\psi(s)}{\psi(s_0)} - 1 \right] \right\}_{s=s_0} = \\ &= -\frac{1}{4\pi a} \sqrt{\frac{1 + s_0^2}{s_0^2 + \mu^2}} \left\{ \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)_{s=s_0} \left[ \frac{\psi(s_0)}{\psi(s_0)} - 1 \right] + (x)_{s=s_0} \frac{\psi'(s_0)}{\psi(s_0)} \right\}. \end{aligned}$$

Проделав вычисление, получим:

$$p' = -\frac{(x)_{s=s_0}}{2\pi a \psi(s_0) \sqrt{(1 + s_0^2)^3 (s_0^2 + \mu^2)}}. \quad (3.27)$$

Выражение плотности  $p''$ , соответствующее потенциалу  $\omega''$ , получится при замене в (3.27) буквы  $x$  на  $y$ .

Перейдём теперь к пределу, полагая  $s_0 \rightarrow 0$ . Тогда, замечая, что

$$\psi(0) = -\frac{\pi}{2},$$

найдем гармоническую функцию  $\omega'$  ( $\omega''$ ), обращаясь в нуль на бесконечности и принимающую значение  $x$  ( $y$ ) на верхней и нижней стороне круговой площадки (3.6):

$$\omega' = -\frac{2}{\pi} x \psi(s), \quad \omega'' = -\frac{2}{\pi} y \psi(s). \quad (3.28)$$

Полагая в (3.27)  $s_0 = 0$  и удваивая согласно разъяснению в конце § 2 полученное выражение, найдём значение плотности

$$p' = \frac{2(x)_{s=0}}{\pi^2 a |\mu|}, \quad p'' = \frac{2(y)_{s=0}}{\pi^2 a |\mu|}. \quad (3.29)$$

Здесь следует писать  $|\mu|$ , а не  $\mu$ , так как  $\sqrt{s_0^2 + \mu^2}$  имеет положительное значение.

3°. Рассмотрим теперь второй класс решений — решения, не зависящие от  $\varphi$ . Нас будут при этом интересовать только решения, чётные относительно  $z$  и, значит, относительно  $\mu$ ; такие решения принимают одинаковые значения в точках, симметричных относительно плоскости  $z = 0$ .

На поверхности эллипсоида  $s = s_0$  искомая гармоническая функция зависит по сказанному только от  $\mu$  и чётна относительно  $\mu$ ; поэтому она может быть представлена рядом полиномов Лежандра чётного порядка:

$$\text{при } s = s_0 \quad \omega = \omega(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k P_{2k}(\mu). \quad (3.30)$$

Коэффициенты этого ряда определяются, как известно, по формулам

$$D_k = \frac{4k+1}{2} \int_{-1}^1 \omega(\mu) P_{2k}(\mu) d\mu = (4k+1) \int_0^1 \omega(\mu) P_{2k}(\mu) d\mu. \quad (3.31)$$

Уравнение Лапласа (3.13) в случае симметрии вращения имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial s} (1+s^2) \frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \mu} (1-\mu^2) \frac{\partial \omega}{\partial \mu} = 0. \quad (3.32)$$

Разыскивая его решение в форме

$$\omega = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \sigma_{2k}(s) P_{2k}(\mu) \quad (3.33)$$

и учитывая, что

$$\frac{d}{d\mu} (1-\mu^2) P'_{2k}(\mu) = -2k(2k+1) P_{2k}(\mu), \quad (3.34)$$

получим для определения функций  $\sigma_{2k}(s)$  обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{ds} (1+s^2) \sigma'_{2k}(s) - 2k(2k+1) \sigma_{2k}(s) = 0, \quad (3.35)$$

отличающееся от (3.34) заменой  $\mu$  на  $is$ . Поэтому одно из частных решений уравнения (3.35), назовём его  $p_{2k}(s)$ , является полиномом

$$p_{2k}(s) = (-1)^k P_{2k}(is) \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (3.36)$$



В частности,

$$p_0(s) = 1, p_2(s) = \frac{1}{2}(3s^2 + 1), p_4(s) = \frac{1}{8}(35s^4 + 30s^2 + 3) \text{ и т. д.} \quad (3.37)$$

Таким образом, решение внутренней задачи Дирихле будет:

$$\omega = \omega_i = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \frac{p_{2k}(s)}{p_{2k}(s_0)} P_{2k}(\mu). \quad (3.38)$$

Действительно, написанное выражение представляет гармоническую функцию внутри эллипсоида  $s = s_0$ , принимающую на поверхности этого эллипсоида заданные значения (3.30). Для решения внешней задачи Дирихле надо определить второе частное решение уравнения (3.35), обращающееся в нуль при  $s \rightarrow \infty$ . Это решение, назовём его  $q_{2k}(s)$ , будет [ср. (3.21)]:

$$q_{2k}(s) = p_{2k}(s) \int_s^{\infty} \frac{d\sigma}{(1 + \sigma^2) p_{2k}^3(\sigma)}. \quad (3.39)$$

В частности,

$$q_0(s) = \arctg s, \quad q_2(s) = p_2(s) \arctg s - \frac{3}{2} s. \quad (3.40)$$

Чтобы получить общее выражение, полагаем:

$$q_{2k}(s) = p_{2k}(s) \arctg s + \gamma_{2k}(s). \quad (3.41)$$

Подставляя это выражение в (3.35) и учитывая, что  $p_{2k}(s)$  удовлетворяет тому же уравнению, найдём дифференциальное уравнение для  $\gamma_{2k}(s)$ :

$$(1 + s^2) \gamma_{2k}''(s) + 2s \gamma_{2k}'(s) - 2k(2k + 1) \gamma_{2k}(s) = 2p_{2k}'(s). \quad (3.42)$$

Заметим теперь, что  $p_{2k}'(s)$  может быть выражено через полиномы  $p_1(s), p_2(s), \dots, p_{2k-1}(s)$  с помощью соотношения

$$p_{2k}'(s) = (4k - 1)p_{2k-1}(s) - (4k - 5)p_{2k-3}(s) + \dots + (-1)^{k-1} 3p_1(s), \quad (3.43)$$

которое может быть получено из соответствующего выражения производной полинома Лежандра через эти полиномы (см. § 3 главы 6). Имея это в виду, будем искать решение уравнения (3.42) в форме суммы по полиномам  $p_\nu(s)$ :

$$\gamma_{2k}(s) = A_1 p_{2k-1}(s) + A_3 p_{2k-3}(s) + \dots + A_{2k-1} p_1(s).$$

Для определения коэффициентов достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} (1 + s^2) p_\nu''(s) + 2s p_\nu'(s) - 2k(2k + 1) p_\nu(s) &= \\ &= [\nu(\nu + 1) - 2k(2k + 1)] p_\nu(s). \end{aligned}$$

Получим:

$$A_1 = -\frac{2(4k-1)}{2k(2k+1)-(2k-1)2k}, \quad A_3 = \frac{2(4k-5)}{2k(2k+1)-(2k-3)(2k-2)}, \dots$$

$$A_{2k-1} = \frac{(-1)^k 2 \cdot 3}{2k(2k+1)-2 \cdot 1},$$

и искомое выражение  $q_{2k}(s)$  будет:

$$q_{2k}(s) = p_{2k}(s) \operatorname{arc} \operatorname{ctg} s - \frac{2(4k-1)}{2k(2k+1)-(2k-1)2k} p_{2k-1}(s) +$$

$$+ \frac{2(4k-5)}{2k(2k+1)-(2k-3)(2k-2)} p_{2k-3}(s) - \dots$$

$$\dots + (-1)^k \frac{2 \cdot 3}{2k(2k+1)-1 \cdot 2} p_1(s). \quad (3.44)$$

Можно проверить, что это выражение обращается в нуль при  $s \rightarrow \infty$  и, следовательно, действительно даёт искомое частное решение уравнения (3.35). Для этого следует заменить  $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} s$  его разложением при  $s > 1$ :

$$\operatorname{arc} \operatorname{ctg} s = \frac{1}{s} - \frac{1}{3s^3} + \frac{1}{5s^5} - \frac{1}{7s^7} + \dots$$

При подстановке в (3.44) все слагаемые, содержащие степени  $s$  выше чем  $(-2k-1)$ , обратятся в нуль и выражение  $q_{2k}(s)$  примет вид \*)

$$q_{2k}(s) = \frac{(2k)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4k+1)} \left[ s^{-2k-1} - \frac{(2k+1)(2k+2)}{2(4k+3)} s^{-2k-3} + \right.$$

$$\left. + \frac{(2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4)}{2 \cdot 4 \cdot (4k+3)(4k+5)} s^{-2k-5} - \dots \right]. \quad (3.45)$$

Решение внешней задачи Дирихле, принимающее при  $s = s_0$  значение (3.30), теперь может быть записано в виде

$$\omega_e = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \frac{q_{2k}(s)}{q_{2k}(s_0)} P_{2k}(\mu). \quad (3.46)$$

В соответствии с (2.14) вводим теперь в рассмотрение функцию

$$\omega = \begin{cases} \omega_i = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \frac{p_{2k}(s)}{p_{2k}(s_0)} P_{2k}(\mu) & s \leq s_0, \\ \omega_e = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \frac{q_{2k}(s)}{q_{2k}(s_0)} P_{2k}(\mu) & s \geq s_0, \end{cases} \quad (3.47)$$

\*) Л а м б, Гидродинамика, Гостехиздат, 1947, стр. 181

являющуюся потенциалом простого слоя, распространённого по поверхности эллипсоида  $s = s_0$ . Плотность этого слоя согласно (2.15) и (3.26) будет:

$$p = -\frac{1}{4\pi a} \sqrt{\frac{1+s_0^2}{\mu^2+s_0^2}} \sum_{k=0}^{\infty} D_k P_{2k}(\mu) \left\{ \frac{d}{ds} \left[ \frac{q_{2k}(s)}{p_{2k}(s_0)} - \frac{p_{2k}(s)}{p_{2k}(s_0)} \right] \right\}_{s=s_0}.$$

По (3.39) имеем:

$$\begin{aligned} q'_{2k}(s) &= p'_{2k}(s) \int_s^{\infty} \frac{d\sigma}{(1+\sigma^2) p_{2k}^2(\sigma)} - \frac{1}{p_{2k}(s)(1+s^2)} = \\ &= \frac{p'_{2k}(s)}{p_{2k}(s)} q_{2k}(s) - \frac{1}{(1+s^2) p_{2k}(s)} \end{aligned}$$

и, значит,

$$\frac{q'_{2k}(s_0)}{q_{2k}(s_0)} - \frac{p'_{2k}(s_0)}{p_{2k}(s_0)} = -\frac{1}{p_{2k}(s_0) q_{2k}(s_0) (1+s_0^2)}.$$

Выражение для плотности слоя получает вид

$$p = \frac{1}{4\pi a \sqrt{(1+s_0^2)(\mu^2+s_0^2)}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k P_{2k}(\mu)}{p_{2k}(s_0) q_{2k}(s_0)}. \quad (3.48)$$

Остаётся в формулах (3.46) и (3.48) перейти к пределу  $s_0 \rightarrow 0$ , удвоив при этом значение плотности.

Замечая, что

$$p_{2k}(0) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2^k \cdot k!}, \quad q_{2k}(0) = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2^k \cdot k!} \quad (3.49)$$

и, в частности,

$$p_0(0) = 1, \quad q_0(0) = \frac{\pi}{2}, \quad (3.50)$$

найдем выражение потенциала

$$\omega = \omega_e = \frac{2}{\pi} \left[ D_0 \operatorname{arc} \operatorname{ctg} s + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \frac{2^k \cdot k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)} P_{2k}(\mu) q_{2k}(s) \right] \quad (3.51)$$

и выражение плотности

$$p = \frac{1}{\pi^2 a |\mu|} \left[ D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} (k!)^2}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)]^2} D_k P_{2k}(\mu) \right]. \quad (3.52)$$

Плотность будет иметь конечное значение при  $\mu = 0$ , если выражение в квадратных скобках не будет содержать члена, не зависящего от  $\mu$ :

$$D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} (k!)^2}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)]^2} D_k P_{2k}(0) = 0, \quad (3.53)$$

причём

$$P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2^k \cdot k!}. \quad (3.54)$$

При условии (3.53) выражение плотности можно представить в виде

$$p = -\frac{1}{\pi^2 a |\mu|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \cdot k! (-1)^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)} D_k \left[ 1 - \frac{P_{2k}(\mu)}{P_{2k}(0)} \right]. \quad (3.55)$$

Низшей степенью  $\mu$  в числителе будет вторая. Поэтому при  $\mu = 0$ , т. е. на окружности, ограничивающей круговую область  $\Omega$ , плотность  $p$  в соответствии с условием (1.16) обратится в нуль.

4°. Определение функции  $\omega_1$ . В формулы (2.2) для перемещений  $u$ ,  $v$ , а также в выражения напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  входит гармоническая функция  $\omega_1$ , определяемая по  $\omega$  с помощью соотношения (2.3) и по условию на бесконечности (2.4). Нет необходимости иметь выражение самой функции  $\omega_1$  — достаточно знать её производные по  $x$  и  $y$ , а в случае симметрии вращения, рассмотрением которого мы ограничимся, — лишь производную  $\frac{\partial \omega_1}{\partial \rho}$ .

Поскольку  $\omega_1$  не зависит от  $\varphi$ , то

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} = \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} \cos \varphi, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} \sin \varphi,$$

и функции  $\frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} \cos \varphi$ ,  $\frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} \sin \varphi$ , а значит, произведение  $\frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} e^{i\varphi}$ , будут гармоническими функциями. В наших переменных общее выражение гармонической функции, обращающейся в нуль на бесконечности и пропорциональной  $e^{im\varphi}$ , имеет вид

$$e^{im\varphi} \sum_{n=m}^{\infty} \varepsilon_n P_n^{(m)}(\mu) q_n^{(m)}(s),$$

где  $\varepsilon_n$  — постоянные,  $P_n^{(m)}(\mu)$  и  $q_n^{(m)}(s)$  — присоединённые функции

$$P_n^{(m)}(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n}{d\mu^m}, \quad q_n^{(m)}(s) = (1 + s^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m q_n(s)}{ds^m}. \quad (3.56)$$

Поэтому выражение  $\frac{\partial \omega_1}{\partial \rho}$  может быть записано в виде

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 + s^2} P'_n(\mu) q'_n(s), \quad (3.57)$$

и задача заключается в отыскании коэффициентов  $\varepsilon_n$  по заданному значению

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial z} = \sum_{k=1}^{\infty} D_k P_{2k}(\mu) \frac{q_{2k}(s)}{q_{2k}(s_0)} = \omega. \quad (3.58)$$

Заметим, что это выражение  $\omega$  отличается от (3.46) тем, что в нём отсутствует слагаемое

$$\omega^{(0)} = \frac{2}{\pi} D_0 \operatorname{arc} \operatorname{ctg} s. \quad (3.59)$$

Соответствующее ему выражение  $\omega_1^{(0)}$  будет определено особо по условию, аналогичному (3.58):

$$\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial z} = \omega^{(0)} = \frac{2}{\pi} D_0 \operatorname{arc} \operatorname{ctg} s. \quad (3.60)$$

По (3.3) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial s} &= as \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{1 + s^2}}, & \frac{\partial \rho}{\partial \mu} &= -a\mu \sqrt{\frac{1 + s^2}{1 - \mu^2}}, \\ \frac{\partial z}{\partial s} &= a\mu, & \frac{\partial z}{\partial \mu} &= as \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

и, значит,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial s} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} + \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = a \left( \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{1 + s^2}} s \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} + \mu \omega \right), \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial \mu} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \mu} + \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \mu} = a \left( -\sqrt{\frac{1 + s^2}{1 - \mu^2}} \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} + s \omega \right). \end{aligned}$$

После подстановки сюда выражения (3.57) получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{\partial \omega_1}{\partial s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n (1 - \mu^2) P'_n(\mu) s q'_n(s) + \mu \omega, \\ \frac{1}{a} \frac{\partial \omega_1}{\partial \mu} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \mu P'_n(\mu) (1 + s^2) q'_n(s) + s \omega. \end{aligned}$$

Выражая теперь, что

$$\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial s \partial \mu} = \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial \mu \partial s}$$

и используя дифференциальные уравнения

$$[(1 - \mu^2) P'_n(\mu)]' = -n(n+1) P_n(\mu),$$

$$[(1 + s^2) q'_n(s)]' = n(n+1) q_n(s),$$

получим:

$$\begin{aligned} s \left[ \frac{\partial \omega}{\partial s} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \varepsilon_n P_n(\mu) q'_n(s) \right] = \\ = \mu \left[ \frac{\partial \omega}{\partial \mu} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \varepsilon_n P'_n(\mu) q_n(s) \right]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Вместо  $\omega$  сюда надо подставить его выражение (3.58). Тогда сразу же станет очевидным, что можно удовлетворить соотношению (3.62), приняв  $\varepsilon_n = 0$  при  $n$  нечётном; при  $n = 2k$  получим:

$$\varepsilon_{2k} = - \frac{D_k}{q_{2k}(s_0) 2k(2k+1)}. \quad (3.63)$$

Не останавливаясь на ходе вывода, проверим теперь, что соотношению (3.60), а также условию на бесконечности вида (2.4) удовлетворяет функция

$$\omega_1^{(0)} = \frac{2}{\pi} D_0 a \left[ \mu (s \operatorname{arc} \operatorname{ctg} s - 1) + \ln(1 + \mu) + \frac{1}{2} \ln(1 + s^2) \right], \quad (3.64)$$

которая будет гармонической в полупространстве  $z > 0$ . В последнем убеждаемся, замечая, что первое слагаемое

$$\mu (s \operatorname{arc} \operatorname{ctg} s - 1) = -P_1(\mu) q_1(s)$$

является гармонической функцией, а второе и третье могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \ln(1 + \mu) + \frac{1}{2} \ln(1 + s^2) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \mu}{1 - \mu} + \frac{1}{2} \ln(1 + s^2) (1 - \mu^2) = \\ &= Q_0(\mu) + \ln \frac{p}{a} \end{aligned}$$

и, следовательно, также представляют сумму гармонических функций. (Через  $Q_0(\mu)$  обозначено второе частное решение уравнения Лежандра при  $n = 0$ .) Заметим ещё, что  $\omega_1^{(0)}$  не имеет особенностей при  $\mu > 0$ , т. е. при  $z > 0$ .

Заметим далее, что

$$\ln(R + z) = \ln(\sqrt{r^2 + z^2} + z) = \ln a (\sqrt{1 + s^2 - \mu^2} + s\mu)$$

и при достаточно большом  $s$

$$\ln(R + z) \sim \frac{1}{2} \ln as (1 + \mu).$$

Но такой же характер при больших значениях  $s$  имеет и  $\omega_1^{(0)}$ . Остаётся проверить выполнение условия (3.60) и вычислить  $\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial \rho}$ . Для этого надо знать производные

$$\frac{\partial s}{\partial z}, \quad \frac{\partial s}{\partial \rho}; \quad \frac{\partial \mu}{\partial z}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \rho}.$$

Исходим из соотношений (3.4) и (3.8). Например, продифференцировав первое по  $z$ , получим:

$$-\left[ \frac{\rho^2 s}{(1+s^2)^2} + \frac{z^2}{s^3} \right] \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{z}{s^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{z}{\left( \frac{\rho^2 s^2}{(1+s^2)^2} + \frac{z^2}{s^2} \right) s}$$

и аналогично найдём остальные производные. Возвратившись к переменным  $\mu$  и  $s$  по формулам (3.3), найдём:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial z} &= \frac{\mu(1+s^2)}{a(s^2+\mu^2)}, & \frac{\partial \mu}{\partial z} &= \frac{s(1-\mu^2)}{a(s^2+\mu^2)}, \\ \frac{\partial s}{\partial \rho} &= \frac{s\sqrt{(1-\mu^2)(1+s^2)}}{a(s^2+\mu^2)}, & \frac{\partial \mu}{\partial \rho} &= -\frac{\mu\sqrt{(1-\mu^2)(1+s^2)}}{a(s^2+\mu^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.65)$$

Теперь вычисляем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial z} &= \frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z} = \\ &= \frac{2D_0}{\pi(s^2+\mu^2)} \left[ \left\{ (s \operatorname{arc} \operatorname{ctg} s - 1) + \frac{1}{1+\mu} \right\} s(1-\mu^2) + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \mu \left( -\frac{s}{1+s^2} + \operatorname{arc} \operatorname{ctg} s \right) + \frac{s}{1+s^2} \right\} \mu(1+s^2) \right] = \frac{2D_0}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} s, \end{aligned}$$

что и требовалось. Далее получим:

$$\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial \rho} = \frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \rho} = \frac{2D_0}{\pi} \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}} \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}. \quad (3.66)$$

Из (3.63) и (3.66), таким образом, следует, что при задании  $\omega$  в виде (3.51) искомое выражение производной  $\frac{\partial \omega_1}{\partial \rho}$  будет:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} &= \frac{2}{\pi} \left[ D_0 \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}} \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1+s^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}(k-1)! D_k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k+1)} P'_{2k}(\mu) q'_{2k}(s) \right]. \quad (3.67) \end{aligned}$$

#### § 4. Плоский штамп с круговым основанием

Задача сводится к построению гармонической функции  $\omega(x, y, z)$ , представляющей потенциал простого слоя, распределённого по круговой поверхности основания штампа, причём на этой поверхности

потенциал принимает по (2.7) значение

$$\omega(x, y, 0) = \frac{2\pi Gm}{m-1} (\delta - \beta_y x + \beta_x y) \quad (x, y) \text{ внутри } \Omega. \quad (4.1)$$

Выражения потенциалов  $\omega'$ ,  $\omega''$ , обладающих требуемыми свойствами и принимающих на  $\Omega$  значения  $x$  и  $y$ , были даны выше [см. (3.28)]. Потенциал  $\omega^{(0)}$ , имеющий на  $\Omega$  постоянное значение, определяется первым слагаемым ряда (3.51). Таким образом, можно сразу же составить функцию  $\omega$  для краевого условия (4.1):

$$\omega = \frac{4mG}{m-1} [\delta \arcsin \frac{s}{a} + (\beta_y x - \beta_x y) \psi(s)], \quad (4.2)$$

причём  $\psi(s)$  определяется по (3.23).

Распределение давления по круговому основанию штампа получаем по (3.29) и (3.52):

$$p = \frac{2mG}{(m-1)\pi a |\mu|} [\delta - 2(\beta_y x - \beta_x y)], \quad (4.3)$$

причём

$$a |\mu| = \sqrt{a^2 - \rho^2} = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}. \quad (4.4)$$

Здесь  $a$  — радиус основания штампа, т. е. заданная величина.

Чтобы определить поступательное перемещение и углы поворота штампа, составим уравнения равновесия (1.7); введя полярные координаты, получим:

$$Q = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho p d\rho, \quad x_0 Q = \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^a \rho^2 p d\rho, \\ y_0 Q = \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^a \rho^2 p d\rho,$$

причём вместо  $p$  нужно подставить его значение (4.3). После простого вычисления найдём:

$$\delta = \frac{Q(m-1)}{4maG}, \quad \beta_y = -\frac{3}{8} \frac{Q(m-1)}{mGa^3} x_0, \\ \beta_x = \frac{3}{8} \frac{Q(m-1)}{mGa^3} y_0. \quad (4.5)$$

Подставив эти значения в (4.3), получим:

$$p = p_{cp} \frac{1 + \frac{3(x_0 x + y_0 y)}{a^2}}{2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}}}, \quad (4.6)$$

где  $p_{cp}$  — среднее давление по площади основания, равное

$$p_{cp} = \frac{Q}{\pi a^2}. \quad (4.7)$$



Давление  $p$  обращается в нуль на прямой

$$x_0x + y_0y + \frac{a^2}{3} = 0,$$

расстояние которой от начала координат равно

$$d = \frac{a^2}{3\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

Штамп будет прижат к упругому полупространству по всей поверхности соприкасания при условии

$$d \geq a, \quad \text{т. е.} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{a}{3}. \quad (4.8)$$

Линия действия силы  $Q$  должна проходить внутри цилиндра радиуса  $\frac{1}{3}a$ , концентрического со штампом. Только при этом условии полученное решение фактически реализуется.

Как показывает формула (4.6), давление  $p$ , равное половине среднего давления в центре штампа, возрастает неограниченно при приближении к контуру области нагружения, являющемуся угловой линией штампа. При наличии закругления по краю штампа кривая давления, поднимаясь от центра штампа, далее резко падает, обращаясь в нуль на границе области соприкасания \*).

Составим ещё выражение нормального к границе перемещения  $w$  в точках границы, т. е. плоскости  $z = 0$ . На поверхности соприкасания это перемещение задано — см. (1.15). Выразив  $\delta$ ,  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  по (4.5), получим:

$$w = \frac{Q(m-1)}{4maG} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{xx_0 + yy_0}{a^2} \right) \quad (\text{внутри } \Omega). \quad (4.9)$$

Вне круга соприкасания  $w$  определится по (4.2) и (2.2):

$$w = \frac{Q(m-1)}{4maG} \frac{2}{\pi} \left[ \arctg s - \frac{3}{2} \frac{xx_0 + yy_0}{a^2} \psi(s) \right], \quad (4.10)$$

причём  $s$  связано с координатами  $(x, y)$  с помощью соотношений (3.9).

## § 5. Неплоский штамп круговой в плане

1°. Ограничимся рассмотрением случая силы, приложенной по оси вращения поверхности основания штампа; тогда по симметрии

$$\beta_x = \beta_y = 0$$

\*) Поучительные графики распределения давления по области соприкасания центрально нагруженного плоского штампа с закругленным краем для различных значений параметра, характеризующего кривизну закругления, приведены на стр. 196 монографии И. Я. Штаермана (см. примечания к главе 5).

и выражение гармонической функции  $\omega$  на площадке соприкосания по (2.7) будет:

$$\omega = \frac{2\pi m G}{m-1} [\delta - \varphi(\rho)] = \frac{2\pi m G}{m-1} [\delta - \varphi(a \sqrt{1 - \mu^2})]. \quad (5.1)$$

Мы написали здесь  $\varphi(\rho)$  вместо  $\varphi(x, y)$ , так как основание штампа мы считаем в рассматриваемом случае поверхностью вращения. Через  $a$  обозначен (заранее неизвестный) радиус круговой площадки соприкосания штампа с плоскостью, ограничивающей полу-пространство.

В соответствии с (3.30) следует прежде всего представить (5.1) в форме ряда по полиномам Лежандра

$$\omega = \frac{2\pi m G}{m-1} \left[ C_0 P_0(\mu) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k P_{2k}(\mu) \right]. \quad (5.2)$$

Коэффициенты  $C_k$  вычисляются по формулам (3.31), которые в нашем случае будут иметь вид

$$C_0 = \delta - \int_0^1 \varphi(a \sqrt{1 - \mu^2}) d\mu = \delta - \int_0^a \frac{\varphi(\rho) \rho d\rho}{a \sqrt{a^2 - \rho^2}}, \quad (5.3)$$

$$C_k = -(4k+1) \int_0^1 \varphi(a \sqrt{1 - \mu^2}) P_{2k}(\mu) d\mu \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (5.4)$$

Конечно, в простейшем случае, когда  $\varphi(\rho)$  представляет полином от  $\rho^2$ , нет нужды прибегать к вычислению этих интегралов, так как коэффициенты представления  $\varphi(\rho)$  в форме конечной суммы полиномов  $P_{2k}(\mu)$  могут быть легко найдены, например, по методу неопределённых коэффициентов.

После того как коэффициенты  $C_k$  найдены, выражение потенциала  $\omega$  может быть составлено по формуле (3.51), которая теперь записывается в виде

$$\omega = \frac{4mG}{m-1} \left[ C_0 \operatorname{arc} \operatorname{ctg} s + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \cdot k! C_k}{1 \cdot 3 \dots (2k-1)} P_{2k}(\mu) q_{2k}(s) \right]. \quad (5.5)$$

Распределение давления по площадке соприкосания даётся формулой (3.52)

$$p = \frac{2mG}{\pi(m-1)a|\mu|} \left[ C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} \cdot (k!)^2 C_k}{[1 \cdot 3 \dots (2k-1)]^2} P_{2k}(\mu) \right]. \quad (5.6)$$

Замечая, что

$$\rho d\rho = -a^2 \mu d\mu,$$

по (1.7) составляем уравнение равновесия штампа

$$Q = 2\pi \int_0^a p\rho \, d\rho = 2\pi a^2 \int_0^1 p\mu \, d\mu.$$

Учитывая теперь соотношение

$$\int_0^1 P_{2k}(\mu) \, d\mu = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

по (5.3) получим:

$$Q = \frac{4mG}{m-1} C_0 a = \frac{4mG}{m-1} a \left[ \delta - \int_0^a \frac{\varphi(\rho) \rho \, d\rho}{a \sqrt{a^2 - \rho^2}} \right]. \quad (5.7)$$

Второе соотношение, связывающее  $a$  и  $\delta$ , получим, выражая непрерывность нормального давления на контуре круговой области соприкосания; найдём [ср. (3.53)]:

$$C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{(-1)^k 2^k \cdot k!}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)} = 0. \quad (5.8)$$

При этом условии выражение распределения давления (5.6) можно, учитывая (5.7), записать также в виде [ср. (3.55)]

$$p = -\frac{p_{\text{вп}}}{2C_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k \cdot k! C_k}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)} \left[ 1 - \frac{P_{2k}(\mu)}{P_{2k}(0)} \right] \frac{1}{|\mu|}, \quad (5.9)$$

где  $p_{\text{вп}}$  определяется, как и раньше, по (4.7).

Выражение  $\frac{\partial \omega_1}{\partial \rho}$  по (3.67) и (5.7) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} = \frac{Q}{a} & \left[ \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}} \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} - \right. \\ & \left. - \sqrt{(1-\mu^2)(1+s^2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1} (k-1)! C_k}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1) C_0} P'_{2k}(\mu) q'_{2k}(s) \right]. \quad (5.10) \end{aligned}$$

2°. Переходим к рассмотрению отдельных случаев задания формы поверхности штампа.

Допустим, что функция  $\varphi(\rho)$  представима рядом по целым степеням  $\rho$ ; тогда по (1.2) этот ряд начнётся с члена, содержащего  $\rho$  в степени не ниже, чем вторая,

$$\varphi(\rho) = \frac{1}{2} \varphi''(0) \rho^2 + \dots \quad (5.11)$$

Мы предположим, что  $\varphi''(0) \neq 0$ , т. е. что разложение (5.11) действительно содержит член второй степени; если ограничиться рассмотрением локального эффекта при малых погружениях штампа в среду, то в (5.11) можно ограничиться только написанным первым слагаемым; при этом  $\varphi''(0) = \frac{1}{R}$ , т. е. равно кривизне поверхности основания штампа в её вершине. Итак, полагаем:

$$\varphi(\rho) = \frac{\rho^2}{2R} = \frac{a^2}{2R} (1 - \mu^2). \quad (5.12)$$

Таким образом, в этом рассмотрении поверхность основания штампа аппроксимирована параболоидом вращения, имеющим в вершине ту же кривизну, что и штамп.

Остаётся заметить, что

$$1 - \mu^2 = -\frac{2}{3} P_0(\mu) + \frac{2}{3} P_2(\mu),$$

т. е. что

$$C_0 = \delta - \frac{a^2}{3R}, \quad C_1 = \frac{a^2}{3R}, \quad C_k = 0 \quad (k = 2, 3, \dots), \quad (5.13)$$

и применить составленные выше общие формулы. В первую очередь составляем уравнения (5.7) и (5.8), служащие для определения радиуса площадки соприкосновения  $a$  и перемещения штампа  $\delta$ :

$$a\delta - \frac{a^3}{3R} = \frac{m-1}{4mG} Q, \quad \delta = \frac{a^2}{R}. \quad (5.14)$$

Интересно отметить, что

$$\varphi(a) = \frac{a^2}{2R} = \frac{1}{2} \delta$$

и, значит, погружение штампа в среду равно в рассматриваемом случае половине его перемещения (см. конец § 1).

Из (5.14) получаем:

$$a = \left[ \frac{3}{8} \frac{Q(m-1)}{mG} R \right]^{1/3}, \quad \delta = \left[ \frac{3}{8} \frac{Q(m-1)}{mG \sqrt{R}} \right]^{2/3}. \quad (5.15)$$

Перемещение штампа, таким образом, не пропорционально силе; оно растёт медленнее, чем сила, что объясняется возрастанием площади соприкосновения при перемещении штампа.

Распределение давления получаем по (5.9):

$$p = \frac{3}{2} p_{cp} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}}. \quad (5.16)$$

Давление имеет максимальное значение в центре площадки соприкосновения и равно здесь  $1,5p_{cp}$ ; на окружности  $\rho = a$ , ограничивающей

площадку соприкасания, давление обращается в нуль. Эпюру распределения давления можно представить поверхностью полусферы, опирающейся на эту окружность, если выбрать масштаб ординат полусферы равным  $\frac{3Q}{2\pi a^3}$ .

3°. Выражение функции  $\omega$  по (5.5) и (5.7) будет:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{Q}{a} [\text{arc ctg } s + P_2(\mu) q_2(s)] = \\ &= \frac{Q}{a} \left[ \text{arc ctg } s + \frac{1}{4} (3\mu^2 - 1) \{ (3s^2 + 1) \text{arc ctg } s - 3s \} \right]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

По (2.2) теперь находим значение перемещения  $\omega$  в точках плоскости  $z = 0$ :

$$\omega = \frac{4\delta}{3\pi} \left[ \text{arc ctg } s + \frac{1}{4} (3\mu^2 - 1) \{ (3s^2 + 1) \text{arc ctg } s - 3s \} \right]. \quad (5.18)$$

Внутри площадки соприкасания  $s = 0$  и

$$\omega = \frac{\delta}{2} (1 + \mu^2) = \delta - \frac{\delta}{2} (1 - \mu^2) = \delta - \frac{a^2}{2R} (1 - \mu^2), \quad (5.19)$$

что и требуется. Вне загруженной области  $\mu = 0$  и (5.18) приводится к виду

$$\omega = \frac{\delta}{\pi} [(1 - s^2) \text{arc ctg } s + s]. \quad (5.20)$$

Таким образом, перемещение  $\omega$ , равное  $\delta$  в центре загруженной области, получает значение  $0,5\delta$  на её границе и  $\frac{1}{\pi} \delta$  на окружности радиуса  $\sqrt{2}a$  (при  $s = 1$ ).

Распределение напряжений в точках оси  $z$  вычисляем по (2.5) главы 5 и (5.31) главы 2:

$$\begin{aligned} \tau_z &= -\frac{3}{2} p_{\text{ср}} \frac{1}{1+s^2}, \\ \tau_x = \tau_y &= \frac{3}{4} p_{\text{ср}} \left[ \frac{2(m+1)}{m} (s \text{arc ctg } s - 1) + \frac{1}{1+s^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

В прилагаемой таблице 3 приведены подсчитанные по этим формулам (при  $m = \frac{10}{3}$ ) значения напряжений  $\tau_z$  и  $\tau_x$ , а также абсолютного значения их полуразности, дающей максимальное касательное напряжение  $\tau_{\text{max}}$ . Через  $p_{\text{max}}$  обозначено давление в центре площадки соприкасания ( $p_{\text{max}} = 1,5p_{\text{ср}}$ ). Как видно из таблицы, максимум макси-

мального касательного напряжения имеет место при  $z \approx 0,5a$  и равен  $0,31p_{\max}$ .

Таблица 3

$s = \frac{z}{a}$	0	0,25	0,50	0,75	1,00	1,50	2,00
$-\frac{\sigma_z}{p_{\max}}$	1	0,940	0,800	0,640	0,500	0,308	0,200
$-\frac{\sigma_{\varphi}}{p_{\max}}$	0,800	0,400	0,182	0,078	0,026	0,020	0,014
$\frac{\tau_{\max}}{p_{\max}}$	0,100	0,270	0,309	0,281	0,237	0,144	0,093

По (5.10) составляем теперь выражение

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} = \frac{Q}{a} \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1+s^2} \left\{ \frac{1}{(1+\mu)(1+s^2)} - \frac{1}{2} \mu \left[ 3(s \operatorname{arc} \operatorname{ctg} s - 1) + \frac{1}{1+s^2} \right] \right\}. \quad (5.22)$$

Теперь по (2.2) находим радиальное перемещение  $u_r$  точек граничной плоскости  $z=0$ : в области соприкасания со штампом ( $s=0$ )

$$u_r = -\frac{2(m-2)}{3\pi(m-1)} \delta \sqrt{1-\mu^2} \frac{1+\mu+\mu^2}{1+\mu} = -\frac{2(m-2)}{3\pi(m-1)} \delta \frac{1-\mu^3}{\sqrt{1-\mu^2}}$$

или

$$u_r = -\frac{2(m-2)}{3\pi(m-1)} \delta \frac{a}{\rho} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right)^{3/4} \right] \quad (5.23)$$

и вне этой области

$$u_r = -\frac{2(m-2)}{3\pi(m-1)} \delta \frac{a}{\rho}. \quad (5.24)$$

Здесь, как и ранее,  $\rho$  обозначает расстояние от центра площадки соприкасания, т. е.

$$\rho = a \sqrt{1-\mu^2} \quad \text{при } s=0 \quad \text{и} \quad \rho = a \sqrt{1+s^2} \quad \text{при } \mu=0.$$

На границе области соприкасания (при  $m = \frac{10}{3}$ ) получаем:

$$(u_r)_{\rho=a} = -0,122\delta. \quad (5.25)$$

Этот результат интересно сопоставить со случаем равномерного распределения давления по площади круга, рассмотренным в § 6 главы 2; по (6.47) и (6.36) указанной главы найдём:

$$(u_r)_{\rho=a} = -\frac{m-2}{4(m-1)} \omega(0, 0, 0) = -0,143\omega(0, 0, 0),$$

где  $\omega(0, 0, 0)$  — перемещение в центре круга.

Определим ещё напряжения  $\sigma_\rho$  и  $\tau_\varphi$  при  $z = 0$ . Вычисление проводится по (6.48) главы 2. Получим внутри области соприкосновения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_\rho}{p_{\max}} &= -\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}} + \frac{m-2}{3m} \frac{a^2}{\rho^2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right)^{3/2} \right], \\ \frac{\tau_\varphi}{p_{\max}} &= -\frac{2}{m} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}} - \frac{m-2}{3m} \frac{a^2}{\rho^2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right)^{3/2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

и вне неё

$$\frac{\sigma_\rho}{p_{\max}} = \frac{m-2}{3m} \frac{a^2}{\rho^2}, \quad \frac{\tau_\varphi}{p_{\max}} = -\frac{m-2}{3m} \frac{a^2}{\rho^2}. \quad (5.27)$$

По всей плоскости, ограничивающей полупространство, вне области нагружения отсутствуют нормальное напряжение  $\sigma_z$  и касательное напряжение  $\tau_{\rho z}$ , а напряжения  $\sigma_\rho$  и  $\tau_\varphi$  по (5.27) равны по величине и противоположны по знаку; таким образом, напряжённое состояние в точках этой области представляет чистый сдвиг.

В центре нагруженной области ( $\rho = 0$ ) получаем по (5.26):

$$\tau_\rho = \tau_\varphi = -p_{\max} \frac{m+2}{2m},$$

что следует также из (5.21). На границе области нагружения ( $\rho = a$ )

$$\sigma_\rho = -\tau_\varphi = \frac{m-2}{3m} p_{\max} \approx 0,133 p_{\max} \quad \left( m = \frac{10}{3} \right).$$

Этой же величине равно максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max}$  в точках окружности  $z = 0$ ,  $\rho = a$ . Оно значительно меньше вычисленного ранее максимального касательного напряжения в точке  $z \approx 0,5a$ .

## § 6. Плотное прилегание штампа

Мы предполагали выше, что разложение функции  $\varphi(\rho)$  в ряд по степеням  $\rho$  начиналось со слагаемых второй степени ( $\varphi''(0) \neq 0$ ). В задаче о плотном прилегании штампа, рассмотренной впервые И. Я. Штаерманом\*), возвышение точек поверхности штампа в начальном состоянии над плоскостью, ограничивающей полупространство, является величиной более высокого порядка малости относительно  $\rho$ , чем второго:

$$\varphi(\rho) = A\rho^{2n} + \dots = Aa^{2n} (1 - \mu^2)^n + \dots, \quad (6.1)$$

где  $n$  — целое число; чем больше  $n$ , тем на большем относительно участке штамп «плотно» прилегает к полупространству. При достаточно большом  $n$  результат исследования должен приближаться к случаю плоского штампа с закруглённым краем.

\*) См. литературу, указанную в упомянутой выше монографии И. Я. Штаермана, Контактная задача теории упругости, Гостехиздат, 1949.

Нам надо найти представление функции

$$\delta - \varphi(\rho) = \delta - Aa^{2n}(1 - \mu^2)^n$$

в форме ряда по полиномам Лежандра

$$\delta - Aa^{2n}(1 - \mu^2)^n = \delta P_0(\mu) - Aa^{2n} \{ I_0^{(n)} P_0(\mu) + I_1^{(n)} P_2(\mu) + \dots + I_n^{(n)} P_{2n}(\mu) \}. \quad (6.2)$$

Здесь по (5.3) и (5.4)

$$I_k^{(n)} = (4k + 1) \int_0^1 (1 - \mu^2)^n P_{2k}(\mu) d\mu \quad (k = 0, 1, \dots, (n)). \quad (6.3)$$

Вычисление этого интеграла, не зависящее от предположения о том, что  $n$  является целым числом, будет дано ниже. При целочисленных небольших  $n$  числа  $I_k^{(n)}$  находятся легко по методу неопределённых коэффициентов. Их значения для  $n = 1, 2, 3, 4$  даны в таблице 4.

Таблица 4

$n$	$I_0^{(n)}$	$I_1^{(n)}$	$I_2^{(n)}$	$I_3^{(n)}$	$I_4^{(n)}$
1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	—	—	—
2	$\frac{8}{15}$	$-\frac{16}{21}$	$\frac{8}{35}$	—	—
3	$\frac{16}{35}$	$-\frac{16}{21}$	$\frac{144}{385}$	$-\frac{16}{231}$	—
4	$\frac{128}{315}$	$-\frac{512}{693}$	$\frac{2304}{5005}$	$-\frac{512}{3465}$	$\frac{128}{6435}$

В общем случае при вычислении интеграла (6.3) исходим из соотношения

$$\frac{d}{d\mu}(1 - \mu^2) P'_{2k}(\mu) = -2k(2k + 1) P_{2k}(\mu),$$

умножая которое на  $(1 - \mu^2)^n$  и интегрируя по частям, получим:

$$I_k^{(n)} = -\frac{n(4k + 1)}{k(2k + 1)} \int_0^1 \mu P'_{2k}(\mu) (1 - \mu^2)^n d\mu.$$

Теперь, применив соотношение

$$\mu P'_{2k}(\mu) = P'_{2k+1}(\mu) - (2k + 1) P_{2k}(\mu),$$



можно написать:

$$(n - k) I_k^{(n)} = \frac{(4k + 1)n}{2k + 1} \int_0^1 P'_{2k+1}(\mu) (1 - \mu^2)^n d\mu.$$

Заменим здесь  $k$  на  $(k - 1)$ ; тогда

$$(n - k + 1) I_{k-1}^{(n)} = \frac{(4k - 3)n}{2k - 1} \int_0^1 P'_{2k-1}(\mu) (1 - \mu^2)^n d\mu.$$

Вспомним теперь, что

$$P'_{2k+1}(\mu) - P'_{2k-1}(\mu) = (4k + 1) P_{2k}(\mu).$$

Тогда из двух предшествующих соотношений получим рекуррентную формулу

$$I_k^{(n)} = -\frac{4k + 1}{4k - 3} \frac{(n - k + 1)(2k - 1)}{k(2n + 2k + 1)} I_{k-1}^{(n)}, \quad (6.4)$$

из которой последовательно найдём

$$I_k^{(n)} = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k - 1)(n - k + 1)(n - k + 2) \dots n}{k!(2n + 2k + 1)(2n + 2k - 1) \dots (2n + 3)} (4k + 1) I_0^{(n)}. \quad (6.5)$$

Остаётся вычислить  $I_0^{(n)}$ :

$$I_0^{(n)} = \int_0^1 (1 - \mu^2)^n d\mu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \theta d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(n + 1)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}. \quad (6.6)$$

Воспользовавшись обозначениями теории гамма-функций, теперь можем написать:

$$I_k^{(n)} = (-1)^k (4k + 1) \frac{1 \cdot 3 \dots (2k - 1)}{2^{k+1} k!} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma^2(n + 1)}{\Gamma\left(k + n + \frac{3}{2}\right) \Gamma(n - k + 1)}, \quad (6.7)$$

причём  $k = 0, 1, 2, \dots$ , а  $n$  может и не быть целым числом. Если же  $n$  — целое, то при  $k \geq n + 1$  по свойству гамма-функций

$$\frac{1}{\Gamma(n - k + 1)} = 0 \quad (6.8)$$

и числа  $I_k^{(n)}$  обращаются в нуль.

Имея разложение (6.2), по (5.7) и (5.8) получаем два уравнения для определения неизвестных  $a$  и  $\delta$  — радиуса площадки соприкосания

и перемещения штампа. Эти уравнения будут:

$$\left. \begin{aligned} \delta - Aa^{2n} \left[ I_0^{(n)} + \sum_{k=1}^n I_k^{(n)} \frac{(-1)^k 2^k k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)} \right] &= 0, \\ a(\delta - I_0^{(n)} Aa^{2n}) &= \frac{(m-1)Q}{4mG}. \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Из них находим:

$$a = \sigma_n \left[ \frac{(m-1)Q}{4mGA} \right]^{\frac{1}{2n+1}}, \quad \delta = \lambda_n A \left[ \frac{(m-1)Q}{4mGA} \right]^{\frac{2n}{2n+1}} = Aa^{2n} \sigma_n, \quad (6.10)$$

где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= (\beta_n)^{-\frac{1}{2n+1}}, & \beta_n &= \sum_{k=1}^n I_k^{(n)} \frac{(-1)^k 2^k k!}{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}, \\ \alpha_n &= I_0^{(n)} + \beta_n, & \lambda_n &= \alpha_n (\beta_n)^{-\frac{2n}{2n+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Значения этих коэффициентов приведены в таблице 5.

Таблица 5

$n$	$\alpha_n$	$\beta_n$	$\sigma_n$	$\lambda_n$
1	2	$\frac{4}{3}$	0,9086	1,652
2	$\frac{8}{3}$	$\frac{32}{15}$	0,8594	1,455
3	$\frac{16}{5}$	$\frac{96}{35}$	0,8658	1,350
4	$\frac{128}{35}$	$\frac{1024}{315}$	0,8772	1,284

Распределение давления по площадке соприкосновения находим по (5.9); получим:

$$p = \frac{p_{\text{ор}}}{2\beta_n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k 2^k k! I_k^{(n)}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)} \left[ 1 - \frac{P_{2k}(\mu)}{P_{2k}(0)} \right] \frac{1}{|\mu|}. \quad (6.12)$$

В центре площадки ( $\mu = 1$ ) найдём:

$$p = p_0 = p_{\text{ор}} \gamma_n, \quad \gamma_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\beta_n} \sum_{k=1}^n \frac{2^k (k!)^2}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)]^2} I_k^{(n)}. \quad (6.13)$$

Заменяя  $\mu^2$  его значением

$$\mu^2 = 1 - \frac{\rho^2}{a^2},$$

можем представить (6.12) также в виде \*)

$$p = p_{\text{ор}} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}} N_n \left( \frac{\rho^2}{a^2} \right), \quad (6.14)$$

где  $N_n$  — полином  $(n-1)$ -й степени относительно  $\frac{\rho^2}{a^2}$ . В частности,

$$\left. \begin{aligned} N_1(x) &= \frac{3}{2}, \\ N_2(x) &= \frac{5}{3} \left( x + \frac{1}{2} \right), \\ N_3(x) &= \frac{28}{15} \left( x^2 + \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} \right), \\ N_4(x) &= \frac{72}{35} \left( x^3 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} x + \frac{5}{16} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

При  $n=1$ , что соответствует случаю, рассмотренному в предшествующем параграфе, максимальное давление имеет место в центре площадки соприкасания. При  $n \geq 2$  максимум давления смещается к краю площадки и далее от места максимума давление падает, обращаясь в нуль на краю  $\rho=a$ . В прилагаемой таблице 6 даны значения  $p_0$ ,  $p_{\text{max}}$ , а также абсциссы  $\rho^*$  места расположения максимума.

Таблица 6

$n$	$\chi_n = \frac{p_0}{p_{\text{ор}}}$	$\frac{p_{\text{max}}}{p_{\text{ор}}}$	$\frac{\rho^*}{a}$
1	$\frac{3}{2} = 1,500$	1,500	0
2	$\frac{5}{6} = 0,834$	1,082	0,500
3	$\frac{7}{10} = 0,700$	1,096	0,656
4	$\frac{9}{14} = 0,643$	1,170	0,746

Давление в центре по мере увеличения  $n$  уменьшается, приближаясь к значению  $0,5 p_{\text{ор}}$ , соответствующему плоскому штампу;

\*) См. формулу (138) на стр. 167 монографии И. Я. Штаермана.

максимум давления при росте  $n$  перемещается к граничной окружности площадки соприкасания.

По (5.5) и (5.7) составим ещё выражение потенциала  $\omega$ :

$$\omega = \frac{Q}{a} \left[ \operatorname{arc} \operatorname{ctg} s - \frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^n \frac{2^k k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)} I_k^{(n)} q_{2k}(s) P_{2k}(\mu) \right]. \quad (6.16)$$

По (3.67) легко также написать выражение  $\frac{\partial \omega_1}{\partial \rho}$ ; далее не составит труда нахождение перемещений и напряжений в упругом полупространстве.

### § 7. Конический штамп

В случае конического штампа, вдавливаемого заострённым концом,

$$\varphi(\rho) = \rho \operatorname{ctg} \alpha = a \sqrt{1 - \mu^2} \operatorname{ctg} \sigma, \quad (7.1)$$

где  $2\alpha$  — угол при вершине конуса. Как указывалось, мы можем применить формулы § 6, которые, однако, теперь представляют бесконечные ряды, а не конечные суммы.

Начнём с вычисления постоянной  $\beta_{\frac{1}{2}}$ ; по (6.11) и (6.7) имеем:

$$\beta_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{\Gamma(k+2) \Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)}. \quad (7.2)$$

Имеем:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right) = \left(\frac{1}{2}-k\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right) = (-1)^k \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)},$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

и, значит,

$$\begin{aligned} \beta_{\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(k+2)} (-1)^k \frac{4k+1}{2k-1} = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2k-1} (-1)^k \int_0^1 x^{k-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} dx. \end{aligned}$$

Здесь использовано известное соотношение теории эйлеровых интегралов:

$$\frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (p > 0, q > 0).$$

Ряд (7.2) преобразуется, таким образом, к виду

$$\beta_{\frac{1}{2}} = \int_0^1 \sqrt{1-x} f(x) dx, \quad f(x) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (4k+1)}{2k-1} x^{k-\frac{1}{2}}$$

и может быть просто просуммирован. Имеем:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^{k-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k-\frac{1}{2}}}{2k-1} = \\ &= \frac{\sqrt{x}}{1+x} + \frac{3}{4} \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}(1+\xi)}. \end{aligned}$$

Подстановка в (7.3) даёт:

$$\beta_{\frac{1}{2}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{x} \sqrt{1-x}}{1+x} dx + \frac{3}{4} \int_0^1 \sqrt{1-x} dx \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}(1+\xi)}.$$

Во втором интеграле делаем перестановку пределов интегрирования

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \int_0^1 \sqrt{1-x} dx \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}(1+\xi)} &= \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}(1+\xi)} \int_{\xi}^1 \sqrt{1-x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-\xi) \sqrt{1-\xi}}{\sqrt{\xi}(1+\xi)} d\xi. \end{aligned}$$

Обозначая переменную интегрирования снова через  $x$ , найдём теперь:

$$\beta_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{(1+x)\sqrt{x}} (2x+1-x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, получаем по (6.11)

$$\beta_{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}, \quad \alpha_{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}, \quad \sigma_{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad \lambda_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}. \quad (7.3)$$

По (6.10) находим в случае конического штампа

$$a = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{m-1}{m} \frac{Q \operatorname{tg} \alpha}{G}}, \quad \delta = \frac{\pi}{2} a \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{m-1}{m} \frac{Q \operatorname{ctg} \alpha}{G}}. \quad (7.4)$$

Перейдём к вычислению распределения давления. После простого преобразования выражения (5.9) найдём:

$$\begin{aligned} p &= \frac{p_{\text{ср}}}{|\mu|} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4k+1) P_{2k}(\mu)}{(2k+2)(2k-1)} \right] = \\ &= \frac{p_{\text{ср}}}{|\mu|} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_{2k}(\mu)}{2k+2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{2k}(\mu)}{2k-1} \right]. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Полученные ряды можно просуммировать. Наиболее просто ведёт к цели следующий приём: исходим из известных соотношений

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu}(\mu) x^{\nu} = \frac{1}{r}, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu}(\mu) (-x)^{\nu} = \frac{1}{r'},$$

где

$$r = \sqrt{1 - 2x\mu + x^2}, \quad r' = \sqrt{1 + 2x\mu + x^2}.$$

Из них получаем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{2k}(\mu) x^{2k} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right), \quad \sum_{k=1}^{\infty} P_{2k}(\mu) x^{2k} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} - 2 \right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_{2k}(\mu)}{2k+2} &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{2k}(\mu) \int_0^1 x^{2k+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) dx, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{2k}(\mu)}{2k-1} &= \sum_{k=1}^{\infty} P_{2k}(\mu) \int_0^1 x^{2k-2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} - 2 \right) \frac{dx}{x^2}. \end{aligned}$$

Соответствующие неопределённые интегралы легко вычисляются и после перехода к пределу, связанного с подстановкой нижнего предела во втором интеграле, получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_{2k}(\mu)}{2k+2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{2k}(\mu)}{2k-1} = \frac{1}{2} \mu \ln \frac{1+\mu}{1-\mu}.$$

Распределение давления представляется, таким образом, простым выражением

$$p = \frac{1}{2} p_{\text{ср}} \ln \frac{1+\mu}{1-\mu}. \quad (7.6)$$

При  $\mu = 1$ , т. е. в центре площадки соприкосновения под остриём штампа, как следовало ожидать, давление оказывается бесконечным.

## § 8. Общий случай эллиптических координат \*)

1°. Рассмотрим эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2 \rho_0^2} + \frac{y^2}{a^2 (\rho_0^2 - e^2)} + \frac{z^2}{a^2 (\rho_0^2 - 1)} - 1 = 0 \quad (\rho_0 > 1 > e) \quad (8.1)$$

и семейство софокусных с ним поверхностей второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2 \sigma} + \frac{y^2}{a^2 (\sigma - e^2)} + \frac{z^2}{a^2 (\sigma - 1)} - 1 = 0, \quad (8.2)$$

где  $\sigma$  — переменный параметр. Считая  $(x, y, z)$  заданными числами, можно рассматривать (8.2) как кубическое уравнение относительно величины  $\sigma$ :

$$Q(\sigma) = \frac{P(\sigma)}{a^2 f(\sigma)} = 0, \quad (8.3)$$

где обозначено

$$P(\sigma) = x^2(\sigma - e^2)(\sigma - 1) + y^2(\sigma - 1)\sigma + z^2\sigma(\sigma - e^2) - a^2 f(\sigma), \quad (8.4)$$

$$f(\sigma) = \sigma(\sigma - e^2)(\sigma - 1). \quad (8.5)$$

Придавая  $\sigma$  положительные значения, получаем следующую таблицу чередования знаков полинома  $P(\sigma)$ :

$$P(0) > 0, \quad P(e^2) < 0, \quad P(1) > 0, \quad P(\infty) < 0. \quad (8.6)$$

Таким образом, корни  $P(\sigma)$  расположены в промежутках  $(0, e^2)$ ,  $(e^2, 1)$  и  $(1, \infty)$ . Обозначим их соответственно  $\nu^2$ ,  $\mu^2$ ,  $\rho^2$ :

$$0 \leq \nu^2 \leq e^2, \quad e^2 \leq \mu^2 \leq 1, \quad 1 \leq \rho^2 \leq \infty. \quad (8.7)$$

Таким образом, через каждую точку пространства проходят три софокусных поверхности: двуполый гиперboloид  $\nu = \text{const}$

$$\frac{x^2}{a^2 \nu^2} - \frac{y^2}{a^2 (e^2 - \nu^2)} - \frac{z^2}{a^2 (1 - \nu^2)} - 1 = 0, \quad (8.8)$$

однополый гиперboloид  $\mu = \text{const}$

$$\frac{x^2}{a^2 \mu^2} + \frac{y^2}{a^2 (\mu^2 - e^2)} - \frac{z^2}{a^2 (1 - \mu^2)} - 1 = 0, \quad (8.9)$$

и эллипсоид  $\rho = \text{const}$

$$\frac{x^2}{a^2 \rho^2} + \frac{y^2}{a^2 (\rho^2 - e^2)} + \frac{z^2}{a^2 (\rho^2 - 1)} - 1 = 0. \quad (8.10)$$

При указанном обозначении корней полином  $P(\sigma)$  можно записать в виде

$$P(\sigma) = -a^2(\sigma - \nu^2)(\sigma - \mu^2)(\sigma - \rho^2). \quad (8.11)$$

\*) В этом параграфе использована глава VI книги П. Аппеля, Фигуры равновесия вращающейся жидкой массы, ОНТИ, 1936.

Поэтому по (8.2) и (8.3) получаем основное тождество

$$\frac{x^2}{a^2\sigma} + \frac{y^2}{a^2(\sigma - e^2)} + \frac{z^2}{a^2(\sigma - 1)} - 1 = -\frac{(\sigma - \nu^2)(\sigma - \mu^2)(\sigma - \rho^2)}{f(\sigma)}, \quad (8.12)$$

из которого легко выразить  $x^2$ ,  $y^2$ ,  $z^2$  через введённые величины  $\nu$ ,  $\mu$ ,  $\rho$ . Так, умножая обе части (8.8) на  $\sigma$ , а затем полагая  $\sigma = 0$ , найдём  $x^2$ ; аналогично, путём умножения на  $\sigma - e^2$  и  $\sigma - 1$  и последующей замены  $\sigma$  на  $e^2$  и соответственно на 1 получим  $y^2$  и  $z^2$ . Это вычисление даёт:

$$\left. \begin{aligned} e^2x^2 &= a^2\rho^2\mu^2\nu^2, \\ (1 - e^2)e^2y^2 &= a^2(\rho^2 - e^2)(\mu^2 - e^2)(e^2 - \nu^2), \\ (1 - e^2)z^2 &= a^2(\rho^2 - 1)(1 - \mu^2)(1 - \nu^2). \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

Из сказанного следует, что по заданным координатам  $x$ ,  $y$ ,  $z$  точки  $M$  можно определить единственным образом три координатные поверхности (8.8) — (8.10), проходящие через эту точку; обратно, задав  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , можно по (8.13) определить с точностью до знака декартовы координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  точек пересечения соответствующих трёх координатных поверхностей в каждом из восьми октантов системы осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Числа  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  определяют криволинейную систему эллиптических координат. Положение точки на поверхности эллипсоида  $\rho = \text{const}$  определяется параметрами  $\mu$  и  $\nu$ , и заданная на ней функция может быть выражена через эти параметры. В частности, при  $\rho = 1$  получаем:

$$e^2x^2 = a^2\mu^2\nu^2, \quad e^2y^2 = a^2(\mu^2 - e^2)(e^2 - \nu^2), \quad z = 0. \quad (8.14)$$

Кривые  $\mu = \text{const}$  представляют эллипсы с полуосями  $a\mu$  и  $a\sqrt{\mu^2 - e^2}$ :

$$\frac{x^2}{a^2\mu^2} + \frac{y^2}{a^2(\mu^2 - e^2)} - 1 = 0, \quad (8.15)$$

и, поскольку  $e < |\mu| < 1$ , все эти эллипсы расположены между отрезком  $(ae, -ae)$  оси  $x$  и эллипсом  $E_0$  с полуосями  $a$  и  $a\sqrt{1 - e^2}$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} - 1 = 0 \quad (E_0). \quad (8.16)$$

Таким образом, эллипсоид  $\rho = \text{const}$  вырождается при  $\rho = 1$  в эллиптическую пластинку в плоскости  $z = 0$ , ограниченную эллипсом  $E_0$ , на котором  $\mu = 1$ .

Заметим ещё, что однополый гиперболоид (8.9), соответствующий  $\mu = 1$ , вырождается в часть плоскости  $z = 0$ , на которой

$$e^2x^2 = a^2\rho^2\nu^2, \quad e^2y^2 = a^2(\rho^2 - e^2)(e^2 - \nu^2). \quad (8.17)$$

Кривые  $\rho = \text{const}$  суть эллипсы с полуосями  $a\rho$  и  $a\sqrt{\rho^2 - 1}$ , которые охватывают эллипсы (8.15), так как  $\rho > 1$ . Итак, поверх-



ность  $\mu = 1$  представляет часть плоскости  $z = 0$ , внешнюю по отношению к эллипсу  $E_0$ . Этот эллипс представляет линию пересечения поверхностей  $\rho = 1$  и  $\mu = 1$ .

2°. Для написания уравнения Лапласа в эллиптических координатах нам понадобится выражение в этих координатах квадрата линейного элемента

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2.$$

По (8.13), составив логарифмические производные, получим:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\mu}{\mu} + \frac{d\nu}{\nu}, \\ \frac{dy}{y} &= \frac{\rho d\rho}{\rho^2 - e^2} + \frac{\mu d\mu}{\mu^2 - e^2} - \frac{\nu d\nu}{e^2 - \nu^2}, \\ \frac{dz}{z} &= \frac{\rho d\rho}{\rho^2 - 1} - \frac{\mu d\mu}{1 - \mu^2} - \frac{\nu d\nu}{1 - \nu^2}. \end{aligned}$$

Находим:

$$(ds)^2 = g_{\rho\rho} (d\rho)^2 + g_{\mu\mu} (d\mu)^2 + g_{\nu\nu} (d\nu)^2 + 2g_{\rho\mu} d\rho d\mu + 2g_{\mu\nu} d\mu d\nu + 2g_{\nu\rho} d\nu d\rho,$$

где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} g_{\rho\rho} &= H_\rho^2 = \left[ \frac{x^2}{\rho^4} + \frac{y^2}{(\rho^2 - e^2)^2} + \frac{z^2}{(\rho^2 - 1)^2} \right] \rho^2, \\ g_{\mu\mu} &= H_\mu^2 = \left[ \frac{x^2}{\mu^4} + \frac{y^2}{(\mu^2 - e^2)^2} + \frac{z^2}{(1 - \mu^2)^2} \right] \mu^2, \\ g_{\nu\nu} &= H_\nu^2 = \left[ \frac{x^2}{\nu^4} + \frac{y^2}{(e^2 - \nu^2)^2} + \frac{z^2}{(1 - \nu^2)^2} \right] \nu^2. \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

Не приводим выражений  $g_{\rho\mu}$ ,  $g_{\mu\nu}$ ,  $g_{\nu\rho}$ ; составив эти выражения и заменив в них  $x^2$ ,  $y^2$ ,  $z^2$  значениями (8.13), убедимся после простого вычисления, что

$$g_{\rho\mu} = g_{\mu\nu} = g_{\nu\rho} = 0, \quad (8.19)$$

т. е. что рассматриваемая система криволинейных координат ортогональна.

Для вычисления коэффициентов Ляме  $H_\rho$ ,  $H_\mu$ ,  $H_\nu$  в эллиптических координатах воспользуемся основным тождеством (8.12); продифференцировав его по  $\sigma$ , а затем, полагая последовательно  $\sigma = \rho^2$ ,  $\sigma = \mu^2$ ,  $\sigma = \nu^2$ , по (8.18) получим:

$$\left. \begin{aligned} H_\rho &= a \sqrt{\frac{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}{(\rho^2 - e^2)(\rho^2 - 1)}}, & H_\mu &= a \sqrt{\frac{(\rho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - e^2)(1 - \mu^2)}}, \\ H_\nu &= a \sqrt{\frac{(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(e^2 - \nu^2)(1 - \nu^2)}}. \end{aligned} \right\} \quad (8.20)$$

## Уравнение Лапласа

$$\Delta \omega = \frac{1}{H_\rho H_\mu H_\nu} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{H_\mu H_\nu}{H_\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{H_\nu H_\rho}{H_\mu} \frac{\partial \omega}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{H_\rho H_\mu}{H_\nu} \frac{\partial \omega}{\partial \nu} \right] = 0$$

теперь, после сокращения на общий множитель, получит вид

$$(\mu^2 - \nu^2) \Delta(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \Delta(\rho) \frac{\partial \omega}{\partial \rho} - (\nu^2 - \rho^2) \Delta_1(\mu) \frac{\partial}{\partial \mu} \Delta_1(\mu) \frac{\partial \omega}{\partial \mu} + (\rho^2 - \mu^2) \Delta(\nu) \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta(\nu) \frac{\partial \omega}{\partial \nu} = 0, \quad (8.21)$$

где обозначено

$$\left. \begin{aligned} \Delta(\rho) &= \sqrt{(\rho^2 - e^2)(\rho^2 - 1)}, \\ \Delta_1(\mu) &= \sqrt{(\mu^2 - e^2)(1 - \mu^2)}, \\ \Delta(\nu) &= \sqrt{(e^2 - \nu^2)(1 - \nu^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (8.22)$$

3°. Решение уравнения Лапласа будем искать в форме произведения Ляме — трёх множителей, каждый из которых зависит от одной лишь переменной

$$\omega = R(\rho) M(\mu) N(\nu). \quad (8.23)$$

Уравнение (8.21) даёт соотношение

$$\begin{aligned} &(\mu^2 - \nu^2) \frac{\Delta(\rho)}{R(\rho)} [\Delta(\rho) R'(\rho)]' - \\ &- (\nu^2 - \rho^2) \frac{\Delta_1(\mu)}{M(\mu)} [\Delta_1(\mu) M'(\mu)]' + (\rho^2 - \mu^2) \frac{\Delta(\nu)}{N(\nu)} [\Delta(\nu) N'(\nu)]' = 0. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Мы имеем очевидные тождества

$$\begin{aligned} &(\mu^2 - \nu^2) + (\nu^2 - \rho^2) + (\rho^2 - \mu^2) = 0, \\ &(\mu^2 - \nu^2) \rho^2 + (\nu^2 - \rho^2) \mu^2 + (\rho^2 - \mu^2) \nu^2 = 0, \end{aligned}$$

Из которых следует тождество более общего вида

$$(H\rho^2 + h)(\mu^2 - \nu^2) + (H\mu^2 + h)(\nu^2 - \rho^2) + (H\nu^2 + h)(\rho^2 - \mu^2) = 0, \quad (8.25)$$

в котором  $H$  и  $h$  — произвольные числа. Сравнение с (8.24) теперь показывает, что решение уравнения Лапласа (8.21) может быть взято в форме произведения Ляме (8.23), если определить  $R(\rho)$ ,  $M(\mu)$ ,  $N(\nu)$  из одноптипных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \Delta(\rho) [\Delta(\rho) R'(\rho)]' &= (H\rho^2 + h) R(\rho), \\ - \Delta_1(\mu) [\Delta_1(\mu) M'(\mu)]' &= (H\mu^2 + h) M(\mu), \\ \Delta(\nu) [\Delta(\nu) N'(\nu)]' &= (H\nu^2 + h) N(\nu). \end{aligned} \right\} \quad (8.26)$$

В дальнейшем будем называть гармоническими полиномами относительно  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , однородные или неоднородные, удовлетворяющие

уравнению Лапласа; существует, как известно,  $(2n + 1)$  однородных гармонических полиномов степени  $n$ . В теории функций Ляме доказывается, что произведение Ляме  $RMN$  приводится к гармоническим полиномам  $n$ -й степени, если в (8.26) принять постоянную  $H$  равной

$$H = n(n + 1). \quad (8.27)$$

Тогда при надлежащем выборе  $h$  можно получить  $(2n + 1)$  полиномов  $n$ -й степени.

Пусть  $F(x, y, z)$  — гармонический полином, представимый произведением Ляме:

$$F(x, y, z) = R(\rho) M(\mu) N(\nu). \quad (8.28)$$

На поверхности эллипсоида  $\rho = \rho_0$  эта функция принимает значение

$$[F(x, y, z)]_{\rho=\rho_0} = R(\rho_0) M(\mu) N(\nu), \quad (8.29)$$

причём  $x, y, z$  в левой части соотношения (8.29) связаны уравнением (8.1). Обозначим через  $S(\rho)$  решение уравнения [см. (8.26)]

$$\Delta(\rho) [\Delta(\rho) S'(\rho)]' = (H\rho^2 + h) S(\rho), \quad (8.30)$$

обращающееся в нуль при  $\rho \rightarrow \infty$ . Нам известно [ср. (3.21)], что такое решение имеет вид

$$S(\rho) = R(\rho) \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda) R^2(\lambda)} = R(\rho) \psi(\rho), \quad (8.31)$$

где обозначено

$$\psi(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda) R^2(\lambda)} = \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - e^2)(\lambda^2 - 1)} R^2(\lambda)}. \quad (8.32)$$

Функция

$$G = \frac{R(\rho_0)}{S(\rho_0)} S(\rho) M(\mu) N(\nu) \quad (8.33)$$

по предыдущему удовлетворяет уравнению Лапласа, принимает на поверхности эллипсоида  $\rho = \rho_0$  значение (8.29) и обращается в нуль на бесконечности. Выражение этой функции по (8.28) и (8.31) может быть также представлено в виде

$$G = \frac{\psi(\rho)}{\psi(\rho_0)} R(\rho) M(\mu) N(\nu) = \frac{\psi(\rho)}{\psi(\rho_0)} F(x, y, z). \quad (8.34)$$

Теперь по сказанному в § 2 [см. (2.14)] можно заключить, что потенциал простого слоя, распределённого по поверхности  $S_0$

эллипсоида  $\rho = \rho_0$ , принимающий на этой поверхности значение (8.29), представляется в виде

$$\omega = \begin{cases} F(x, y, z) = R(\rho) M(\mu) N(\nu) & \text{внутри } S_0, \\ F(x, y, z) \frac{\psi(\rho)}{\psi(\rho_0)} & \text{вне } S, \end{cases} \quad (8.35)$$

где  $\psi(\rho)$  определено по (8.32).

Плотность этого слоя находим по (2.15); заметим для этого, что

$$\delta n = H_p \delta \rho = a \sqrt{\frac{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}{(\rho^2 - e^2)(\rho^2 - 1)}} \delta \rho. \quad (8.36)$$

Поэтому получим:

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{4\pi a} \sqrt{\frac{(\rho_0^2 - e^2)(\rho_0^2 - 1)}{(\rho_0^2 - \mu^2)(\rho_0^2 - \nu^2)}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{\psi(\rho)}{\psi(\rho_0)} - 1 \right] F(x, y, z) \right\}_{\rho=\rho_0} = \\ &= -\frac{1}{4\pi a} \sqrt{\frac{(\rho_0^2 - e^2)(\rho_0^2 - 1)}{(\rho_0^2 - \mu^2)(\rho_0^2 - \nu^2)}} \frac{\psi'(\rho_0)}{\psi(\rho_0)} [F(x, y, z)]_{\rho=\rho_0}. \end{aligned} \quad (8.37)$$

Заменим здесь  $\psi'(\rho_0)$  его значением по (8.32)

$$\psi'(\rho_0) = \frac{-1}{R^2(\rho_0) \sqrt{(\rho_0^2 - e^2)(\rho_0^2 - 1)}}.$$

Тогда получим:

$$p = \frac{1}{4\pi a} \frac{[F(x, y, z)]_{\rho=\rho_0}}{\sqrt{(\rho_0^2 - \mu^2)(\rho_0^2 - \nu^2)} \psi(\rho_0) R^2(\rho_0)}. \quad (8.38)$$

Предполагая теперь, что  $[F(x, y, z)]_{\rho=\rho_0}$  чётно относительно  $z$ , положим  $\rho_0 = 1$ ; удваивая получающийся результат, найдём выражение плотности простого слоя, распределённого по эллиптической пластинке — части плоскости  $z = 0$ , ограниченной эллипсом (8.16). Это выражение будет:

$$p = \frac{1}{2\pi a} \frac{[F(x, y, 0)]_{\rho=1}}{\sqrt{(1 - \nu^2)(1 - \mu^2)} \psi(1) R^2(1)}. \quad (8.39)$$

На поверхности пластинки потенциал имеет значение

$$[\omega]_{\rho=1} = [F(x, y, 0)]_{\rho=1} = R(1) M(\mu) N(\nu) \quad (8.40)$$

и вне её даётся выражением

$$\omega = \frac{\psi(\rho)}{\psi(1)} F(x, y, z). \quad (8.41)$$

Заметим ещё, что по (8.10) при

$$\mu^2 \nu^2 = \frac{e^2 x^2}{a^2} \quad \mu^2 + \nu^2 = \frac{x^2 + y^2}{a^2} + e^2$$

и, значит,

$$(1 - \nu^2)(1 - \mu^2) = (1 - e^2) \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} \right).$$

Выражение плотности поэтому может быть записано в виде

$$\rho = \frac{1}{2\pi a \sqrt{1 - e^2}} \frac{[F(x, y, 0)]_{\rho=1}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)}} \psi(1) R^2(1)}. \quad (8.42)$$

На границе пластинки, т. е. на контуре эллипса (8.16), плотность становится бесконечной; она сохранит конечное значение и обратится в нуль в том случае, когда числитель выражения (8.42), т. е. полином  $[F(x, y, 0)]_{\rho=1}$ , содержит множитель

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)}. \quad (8.43)$$

4°. Перейдём к рассмотрению простейших частных случаев, когда  $F(x, y, z)$  является полиномом нулевой, первой и второй степени.

а)  $F(x, y, z) = 1$ , т. е. рассматривается полином нулевой степени ( $n = 0$ ). По (8.27) имеем  $H = 0$  и, взяв  $h = 0$ , можно удовлетворить уравнениям (8.26), приняв

$$R = M = N = 1. \quad (8.44)$$

По (8.32) функция  $\psi(\rho)$  выразится эллиптическим интегралом

$$\psi_0(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - e^2)(\lambda^2 - 1)}} = \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)}. \quad (8.45)$$

Выражения потенциала (8.41) и плотности (8.42) будут:

$$\omega_0 = \frac{\psi_0(\rho)}{\psi_0(1)}, \quad (8.46)$$

$$\rho_0 = \frac{1}{2\pi a \sqrt{1 - e^2}} \frac{1}{\psi_0(1) \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)}}}. \quad (8.47)$$

Функцию  $\psi_0(\rho)$  легко выразить с помощью подстановки  $\frac{1}{\lambda} = \sin \psi$  в форме эллиптического интеграла первого рода в нормальной форме Лежандра

$$\psi_0(\rho) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi}} = F(\varphi, e), \quad (8.48)$$

где обозначено

$$\frac{1}{\rho} = \sin \varphi, \quad \varphi = \arcsin \frac{1}{\rho} \quad (8.49)$$

и значение арксинуса заключено в промежутке  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Постоянная  $\psi_0(1)$  выражается полным эллиптическим интегралом первого рода при модуле  $e$ :

$$\psi_0(1) = F\left(\frac{\pi}{2}; e\right) = K(e). \quad (8.50)$$

б) Имеется три гармонических полинома первой степени, непосредственно выражающихся по (8.13) произведениями Ляме

$$\left. \begin{aligned} F_1^{(1)} &= x = \frac{a}{e} \rho \mu \nu, \\ F_1^{(2)} &= y = \frac{a}{e \sqrt{1-e^2}} \sqrt{(\rho^2 - e^2)(\mu^2 - e^2)(e^2 - \nu^2)}, \\ F_1^{(3)} &= z = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \sqrt{(\rho^2 - 1)(1 - \mu^2)(1 - \nu^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (8.51)$$

Нас будут интересовать только два первых полинома, не зависящих от  $z$ . Для них в соответствии с (8.28) следует принять:

$$R_1^{(1)}(\rho) = \rho, \quad R_1^{(2)}(\rho) = \sqrt{\rho^2 - e^2}. \quad (8.52)$$

Уравнения (8.26), в которых теперь  $H = 2$ , удовлетворяются, если принять  $h$  соответственно равными

$$h_1^{(1)} = -(1 + e^2), \quad h_1^{(2)} = -1.$$

По (8.32) получим теперь:

$$\psi_1^{(1)}(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2 \Delta(\lambda)}, \quad \psi_1^{(2)}(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2) \Delta(\lambda)}. \quad (8.53)$$

Эти интегралы с помощью указанной выше подстановки  $\frac{1}{\lambda} = \sin \psi$  преобразуются к виду, содержащему интегралы первого [см. (8.48)] и второго рода в форме Лежандра

$$E(\varphi, e) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi} d\psi. \quad (8.54)$$

Получаем:

$$\psi_1^{(1)}(\rho) = \frac{1}{e^2} [F(\varphi, e) - E(\varphi, e)], \quad (8.55)$$

$$\psi_1^{(2)}(\rho) = \frac{1}{e^2(1-e^2)} [E(\varphi, e) - (1-e^2)F(\varphi, e)] - \frac{1}{1-e^2} \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{\rho^2-1}{\rho^2-e^2}}. \quad (8.56)$$

Для последующего отметим ещё соотношение

$$\int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - 1) \Delta(\lambda)} = -\frac{E(\varphi, e)}{1-e^2} + \frac{1}{1-e^2} \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{\rho^2-e^2}{\rho^2-1}}. \quad (8.57)$$

В этих формулах  $\varphi$  имеет указанное выше значение (8.49). Постоянные  $\psi_1^{(1)}(1)$  и  $\psi_1^{(2)}(1)$  выражаются через полные эллиптические интегралы первого и второго рода  $\left[ E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) = E(e) \right]$ :

$$\left. \begin{aligned} \psi_1^{(1)}(1) &= \frac{K(e) - E(e)}{e^2} = D(e), \\ \psi_1^{(2)}(1) &= \frac{1}{e^2(1-e^2)} [E(e) - (1-e^2)K(e)] = \frac{B(e)}{1-e^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.58)$$

Обозначения  $D(e)$  и  $B(e)$  для указанных комбинаций интегралов первого и второго рода приняты в справочнике таблиц и формул Янке и Эмде; там же даны числовые таблицы этих величин\*).

Выражения потенциалов и плотностей, соответствующих полиномам  $F_1^{(1)} = x$  и  $F_1^{(2)} = y$ , будут:

$$\omega_1^{(1)} = x \frac{\psi_1^{(1)}(\rho)}{\psi_1^{(1)}(1)}, \quad \omega_1^{(2)} = y \frac{\psi_1^{(2)}(\rho)}{\psi_1^{(2)}(1)}, \quad (8.59)$$

$$\left. \begin{aligned} p_1^{(1)} &= \frac{1}{2\pi a} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-e^2} \psi_1^{(1)}(1) \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)}}}, \\ p_1^{(2)} &= \frac{1}{2\pi a} \frac{y}{(1-e^2)^{3/2} \psi_1^{(2)}(1) \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)}}}. \end{aligned} \right\} \quad (8.60)$$

в) Три из пяти гармонических полиномов второй степени, именно  $xу$ ,  $yz$ ,  $zx$ , непосредственно представимые произведениями Ляме, не будут нас интересовать. Ещё два таких полинома получим, определив в основном тождестве (8.12) постоянную  $\sigma$  так, чтобы левая часть его удовлетворяла уравнению Лапласа

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \frac{x^2}{\sigma} + \frac{y^2}{\sigma - e^2} + \frac{z^2}{\sigma - 1} - 1 \right) = 0.$$

Получим уравнение

$$3\sigma^2 - 2(1+e^2)\sigma + e^2 = 0, \quad (8.61)$$

имеющие два положительных корня

$$\sigma_1 = \frac{1+e^2}{3} + \beta, \quad \sigma_2 = \frac{1+e^2}{3} - \beta, \quad \beta = \frac{1}{3} \sqrt{1-e^2+e^4}. \quad (8.62)$$

Отметим ещё, что

$$\sigma_1 \sigma_2 = \frac{1}{3} e^2, \quad \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{2}{3} (1+e^2). \quad (8.63)$$

\*) Е. Янке и Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, Гостехиздат, 1948, стр. 184, 185.

Теперь из тождества (8.12) получим два гармонических полинома ( $l = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} F_2^{(l)}(x, y, z) &= \frac{x^2}{a^2\sigma_l} + \frac{y^2}{a^2(\sigma_l - e^2)} + \frac{z^2}{a^2(\sigma_l - 1)} - 1 = \\ &= -\frac{(\sigma_l - \rho^2)(\sigma_l - \mu^2)(\sigma_l - \nu^2)}{\sigma_l(\sigma_l - e^2)(\sigma_l - 1)}. \end{aligned} \quad (8.64)$$

Можно принять

$$R_2^{(l)}(\rho) = \sigma_l - \rho^2 \quad (l = 1, 2), \quad (8.65)$$

причём уравнение (8.26), в котором теперь  $H = 6$ , удовлетворится, если принять, что  $h_2^{(1)} = -6\sigma_2$ ,  $h_2^{(2)} = -6\sigma_1$ .

Выражения  $\psi_2^{(l)}(\rho)$  по (8.32) будут:

$$\psi_2^{(l)}(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\sigma_l - \lambda^2)^2 \Delta(\lambda)}. \quad (8.66)$$

Соответствующие потенциалы и плотности найдём по (8.41) и (8.42):

$$\omega_2^{(l)} = \frac{\psi_2^{(l)}(\rho)}{\psi_2^{(l)}(1)} \left[ \frac{x^2}{a^2\sigma_l} + \frac{y^2}{a^2(\sigma_l - e^2)} + \frac{z^2}{a^2(\sigma_l - 1)} - 1 \right], \quad (8.67)$$

$$\rho_2^{(l)} = \frac{1}{2\pi a \sqrt{1 - e^2(\sigma_l - 1)^2 \psi_2^{(l)}(1)}} \cdot \frac{\frac{x^2}{a^2\sigma_l} + \frac{y^2}{a^2(\sigma_l - e^2)} - 1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)}}}. \quad (8.68)$$

Выражения  $\psi_2^{(l)}(\rho)$  приводятся к нормальным формам Лежандра с помощью известных приёмов\*), причём результат не будет содержать интегралов третьего рода; это не является случайным, а представляет следствие некоторых свойств функций Ляме. Получаем:

$$\begin{aligned} 2f(\sigma_l)\psi_2^{(l)}(\rho) &= (1 - \sigma_l)F(\varphi, e) - E(\varphi, e) - \\ &\quad - \frac{\sigma_l}{\sigma_l - \rho^2} \frac{1}{\rho} \sqrt{(\rho^2 - 1)(\rho^2 - e^2)}, \end{aligned} \quad (8.69)$$

где через  $f(\sigma_l)$  обозначено произведение (8.5) при  $\sigma = \sigma_l$ .

5°. Плотности, соответствующие потенциалам  $\omega_2^{(l)}$ , обращаются в бесконечность на контуре эллипса  $E_0$  [см. (8.16)]. Но можно составить линейную комбинацию потенциалов  $\omega_0$ ,  $\omega_2^{(l)}$ , такую, чтобы соответствующая плотность была непрерывной. Обозначим этот потенциал через  $\omega$ :

$$\omega = C_0\omega_0 + C_2^{(1)}\omega_2^{(1)} + C_2^{(2)}\omega_2^{(2)}. \quad (8.70)$$

\*) А. Ф. Тимофеев, Интегрирование функций, Гостехиздат, 1948, стр. 185.



Выражение плотности будет:

$$p = \frac{1}{2\pi a \sqrt{1-e^2}} \left[ 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} \right]^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times \left[ \frac{C_0}{\psi_0(1)} + \frac{C_2^{(1)}}{(\sigma_1-1)^2 \psi_2^{(1)}(1)} \left( \frac{x^2}{a^2 \sigma_1} + \frac{y^2}{a^2(\sigma_1-e^2)} - 1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{C_2^{(2)}}{(\sigma_2-1)^2 \psi_2^{(2)}(1)} \left( \frac{x^2}{a^2 \sigma_2} + \frac{y^2}{a^2(\sigma_2-e^2)} - 1 \right) \right]. \quad (8.71)$$

Надо потребовать, чтобы полином второй степени в квадратных скобках только некоторым постоянным множителем  $C$  отличался от выражения (8.43), т. е. чтобы имело место тождество

$$\frac{C_0}{\psi_0(1)} + \frac{C_2^{(1)}}{(\sigma_1-1)^2 \psi_2^{(1)}(1)} \left( \frac{x^2}{a^2 \sigma_1} + \frac{y^2}{a^2(\sigma_1-e^2)} - 1 \right) + \frac{C_2^{(2)}}{(\sigma_2-1)^2 \psi_2^{(2)}(1)} \left( \frac{x^2}{a^2 \sigma_2} + \frac{y^2}{a^2(\sigma_2-e^2)} - 1 \right) = C \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} \right). \quad (8.72)$$

Тогда выражение плотности будет иметь вид

$$p = \frac{C}{2\pi a \sqrt{1-e^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)}}. \quad (8.73)$$

Из тождества (8.72) получаем систему уравнений, выражающих постоянные  $C_0$ ,  $C_2^{(1)}$ ,  $C_2^{(2)}$  через одну постоянную  $C$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_2^{(1)}}{(\sigma_1-1)^2 \psi_2^{(1)}(1)} \cdot \frac{1}{\sigma_1} + \frac{C_2^{(2)}}{(\sigma_2-1)^2 \psi_2^{(2)}(1)} \cdot \frac{1}{\sigma_2} &= -C, \\ \frac{C_2^{(1)}}{(\sigma_1-1)^2 \psi_2^{(1)}(1)} \cdot \frac{1}{\sigma_1-e^2} + \frac{C_2^{(2)}}{(\sigma_2-1)^2 \psi_2^{(2)}(1)} \cdot \frac{1}{\sigma_2-e^2} &= -\frac{C}{1-e^2}, \\ \frac{C_0}{\psi_0(1)} - \frac{C_2^{(1)}}{\psi_2^{(1)}(1)(\sigma_1-1)^2} - \frac{C_2^{(2)}}{\psi_2^{(2)}(1)(\sigma_2-1)^2} &= C. \end{aligned} \right\} \quad (8.74)$$

При решении этой системы воспользуемся определением и свойствами корней  $\sigma_i$  [см. (8.62) и (8.63)]. Получим:

$$C_2^{(1)} = -C \psi_2^{(1)}(1) \frac{e^4(\sigma_1-1)^2(\sigma_2-1)}{18\beta\sigma_2(\sigma_2-e^2)}, \quad C_2^{(2)} = C \psi_2^{(2)}(1) \frac{e^4(\sigma_2-1)^2(\sigma_1-1)}{18\beta\sigma_1(\sigma_1-e^2)}, \quad (8.75)$$

и подстановка в последнее соотношение (8.74) даёт:

$$C_0 = \frac{1}{3} C \psi_0(1). \quad (8.76)$$

Эти выражения коэффициентов подставляем в выражение потенциала (8.70); находим после простого вычисления

$$\omega = \frac{1}{3} C \left\{ \psi_0(\rho) + \frac{1}{2\rho} [f(\sigma_1) \psi_2^{(1)}(\rho) F_2^{(1)}(x, y, z) - f(\sigma_2) \psi_2^{(2)}(\rho) F_2^{(2)}(x, y, z)] \right\}.$$

Можно далее упростить это выражение, заменив  $\psi_0(\rho)$ ,  $\psi_2^{(i)}(\rho)$  их значениями (8.48) и (8.69). Тогда после некоторой перегруппировки слагаемых получим:

$$\omega = \frac{1}{2} C \left[ F(\varphi, e) - \frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{F(\varphi, e) - E(\varphi, e)}{e^2} - \frac{y^2}{a^2} \frac{E(\varphi, e) - (1 - e^2)F(\varphi, e)}{e^2(1 - e^2)} + \frac{z^2}{a^2} \frac{E(\varphi, e)}{1 - e^2} \right] + \frac{1}{3} C \frac{\sqrt{(\rho^2 - 1)(\rho^2 - e^2)}}{4\beta\rho} \left[ \frac{\sigma_1}{\rho^2 - \sigma_1} F_2^{(1)}(x, y, z) - \frac{\sigma_2}{\rho^2 - \sigma_2} F_2^{(2)}(x, y, z) \right]$$

или

$$\omega = \frac{1}{2} C \left\{ \left[ F(\varphi, e) - \frac{x^2}{a^2} \frac{F(\varphi, e) - E(\varphi, e)}{e^2} - \frac{y^2}{a^2} \frac{E(\varphi, e) - (1 - e^2)F(\varphi, e)}{e^2(1 - e^2)} + \frac{z^2}{a^2} \frac{E(\varphi, e)}{1 - e^2} \right] + \frac{\rho}{3\rho^4 - 2(1 + e^2)\rho^2 + e^2} \left[ \frac{x^2}{a^2\rho^2} + \frac{y^2(3\rho^2 - 1)}{a^2(1 - e^2)\rho^2} + \frac{z^2(e^2 - 3\rho^2)}{a^2(1 - e^2)\rho^2} - 1 \right] \right\} \quad (8.77)$$

Встречающиеся здесь комбинации эллиптических интегралов заменим их выражениями по (8.55) — (8.57). После всех упрощений найдём:

$$\omega = \frac{1}{2} C \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2\lambda^2} - \frac{y^2}{a^2(\lambda^2 - e^2)} - \frac{z^2}{a^2(\lambda^2 - 1)} \right) + \frac{1}{6} C \frac{\rho}{(\rho^2 - \sigma_1)(\rho^2 - \sigma_2)} \left( \frac{x^2}{a^2\rho^2} + \frac{y^2}{a^2(\rho^2 - e^2)} + \frac{z^2}{a^2(\rho^2 - 1)} - 1 \right).$$

Остаётся заметить, что в силу (8.10) слагаемое вне знака интеграла исчезает. Окончательно находим:

$$\omega = \frac{1}{2} C \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2\lambda^2} - \frac{y^2}{a^2(\lambda^2 - e^2)} - \frac{z^2}{a^2(\lambda^2 - 1)} \right). \quad (8.78)$$

Таково выражение потенциала простого слоя эллиптической пластинки в предположении, что плотность слоя изменяется по закону (8.73). К выражению (8.78) можно было бы прийти, рассматривая выражение объёмного потенциала эллипсоида постоянной плотности на внешнюю точку.

## § 9. Плоский эллиптический штамп

Задача сводится по (2.7) к определению потенциала  $\omega$  простого слоя, распределённого по эллиптической пластинке, при заданном на ней значении этого потенциала

$$\omega_0 = \frac{2\pi m G}{m-1} (\delta - \beta_y x + \beta_x y). \quad (9.1)$$

По (8.46) и (8.59) можно сразу написать:

$$\omega = \frac{2\pi m G}{m-1} \left[ \delta \frac{\psi_0(\rho)}{\psi_0(1)} - \beta_y x \frac{\psi_1^{(1)}(\rho)}{\psi_1^{(1)}(1)} + \beta_x y \frac{\psi_1^{(2)}(\rho)}{\psi_1^{(2)}(1)} \right]. \quad (9.2)$$

Выражение плотности, т. е. интенсивности распределения давления под основанием штампа, составляем по (8.47) и (8.60):

$$p = \frac{mG}{(m-1)a\sqrt{1-e^2}} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} \right)^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times \left[ \frac{\delta}{\psi_0(1)} - \frac{\beta_y x}{\psi_1^{(1)}(1)} + \frac{\beta_x y}{(1-e^2)\psi_1^{(2)}(1)} \right]. \quad (9.3)$$

Напомним, что  $a$  и  $a\sqrt{1-e^2}$  представляют полуоси пластинки. Для определения постоянных  $\delta$ ,  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  надо использовать уравнения равновесия (1.7). Вычисление интегралов можно упростить, если ввести преобразование переменных

$$x = as \cos \varphi, \quad y = a\sqrt{1-e^2} \sin \varphi$$

с якобианом  $J = a^2\sqrt{1-e^2}$ . Интегрированию по площади  $\Omega$ , ограниченной эллипсом (8.16), соответствуют пределы  $(0, 2\pi)$  и  $(0, 1)$  по переменным  $\varphi$  и  $s$ . Имеем:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \int \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} \right)^{-\frac{1}{2}} dx dy = \\ = a^2\sqrt{1-e^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{s ds}{\sqrt{1-s^2}} = 2\pi a^2\sqrt{1-e^2}, \\ \int_{\Omega} \int x^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} \right)^{-\frac{1}{2}} dx dy = \\ = a^4\sqrt{1-e^2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^1 \frac{s^3 ds}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{2\pi}{3} a^4\sqrt{1-e^2}, \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Sigma} \int y^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} \right)^{-\frac{1}{2}} dx dy = \\ = a^4 (1-e^2)^{3/4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^1 \frac{s^3 ds}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{2\pi}{3} a^4 (1-e^2)^{3/4}, \end{aligned} \right\} (9.4)$$

и далее находим [см. (8.50) и (8.58)]:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{Q(m-1)}{2\pi m G a} \psi_0(1) = \frac{Q(m-1)}{2\pi m G a} K(e), \\ \beta_x &= \frac{3Q(m-1)}{2\pi m G a^3} y_0 \psi_1^{(2)}(1) = \frac{3Q(m-1)y_0}{2\pi m G a^3} \frac{B(e)}{1-e^2}, \\ \beta_y &= -\frac{3Q(m-1)}{2\pi m G a^3} x_0 \psi_1^{(1)}(1) = -\frac{3Q(m-1)x_0}{2\pi m G a^3} D(e). \end{aligned} \right\} (9.5)$$

Выражение распределения давления теперь приводится к виду

$$p = \frac{1}{2} p_{op} \frac{1 + \frac{3xx_0}{a^2} + \frac{3yy_0}{a^2(1-e^2)}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)}}}, \quad (9.6)$$

где обозначено

$$p_{op} = \frac{Q}{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}. \quad (9.7)$$

Как и в случае круглого плоского штампа (§ 4), легко доказать, что штамп будет прижат к плоскости по всей поверхности соприкосновения, т. е.  $p$  будет положительным, если линия действия силы  $Q$  проходит внутри эллиптического цилиндра

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a\sqrt{1-e^2}}{3}\right)^2} - 1 = 0. \quad (9.8)$$

Выражению потенциала  $\omega$  можно по (9.2) и (9.5) дать вид

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{Q}{a} \left[ \psi_0(\rho) + \frac{3xx_0}{a^2} \psi_1^{(1)}(\rho) + \frac{3yy_0}{a^2} \psi_1^{(2)}(\rho) \right] = \\ &= \frac{Q}{a} \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} \left( 1 + \frac{3xx_0}{a^2\lambda^2} + \frac{3yy_0}{a^2(\lambda^2 - e^2)} \right). \end{aligned} \quad (9.9)$$

Параметр  $\rho$  связан с декартовыми координатами соотношением (8.10), дифференцируя которое, получим:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho^3 D^2}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho(\rho^2 - e^2) D^2}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{z}{\rho(\rho^2 - 1) D^2}, \quad (9.10)$$

где обозначено [см. (8.18) и (8.20)]:

$$D^2 = \frac{x^2}{\rho^4} + \frac{y^2}{(\rho^2 - e^2)^2} + \frac{z^2}{(\rho^2 - 1)^2} = a^2 \frac{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}{\rho^2(\rho^2 - e^2)(\rho^2 - 1)}. \quad (9.11)$$

Теперь получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial x} &= \frac{3x_0 Q}{a^3} \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2 \Delta(\lambda)} - \frac{Q}{a} \left( 1 + \frac{3xx_0}{a^2 \rho^2} + \frac{3yy_0}{a^2(\rho^2 - e^2)} \right) \frac{x}{\Delta(\rho) \rho^3 D^2}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \frac{3y_0 Q}{a^3} \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2) \Delta(\lambda)} - \frac{Q}{a} \left( 1 + \frac{3xx_0}{a^2 \rho^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3yy_0}{a^2(\rho^2 - e^2)} \right) \frac{z}{\Delta(\rho) \rho (\rho^2 - e^2) D^2}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial z} &= -\frac{Q}{a} \left( 1 + \frac{3xx_0}{a^2 \rho^2} + \frac{3yy_0}{a^2(\rho^2 - e^2)} \right) \frac{z}{\Delta(\rho) \rho (\rho^2 - 1) D^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

Для вычисления перемещений надо ещё знать значения частных производных по  $x$  и  $y$  от функции  $\omega_1$ , связанной с  $\omega$  соотношением (2.3), из которого следует, что

$$\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z \partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z \partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Поэтому искомые значения частных производных, обращаемые в нуль на бесконечности, будут:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} = - \int_z^{\infty} \frac{\partial \omega}{\partial x} dz, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial y} = - \int_z^{\infty} \frac{\partial \omega}{\partial y} dz, \quad (9.13)$$

где  $\frac{\partial \omega}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \omega}{\partial y}$  определены выше по (9.12).

Интегралы вида

$$- \int_z^{\infty} dz \int_{\rho}^{\infty} \gamma(\lambda) d\lambda$$

вычисляются по формуле

$$- \int_z^{\infty} dz \int_{\rho}^{\infty} \gamma(\lambda) d\lambda = \int_{\rho}^{\infty} [z - z(\lambda)] \gamma(\lambda) d\lambda, \quad (9.14)$$

в которой  $z(\lambda)$  находится по (8.10) при замене  $\rho$  на  $\lambda$ :

$$z(\lambda) = a \sqrt{\lambda^2 - 1} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2 \lambda^2} - \frac{y^2}{a^2(\lambda^2 - e^2)}}. \quad (9.15)$$

При постоянных  $x, y$  имеем далее по (8.10)

$$D^3 \rho d\rho = \frac{z dz}{\rho^2 - 1} \quad \text{или} \quad dz = \frac{\rho(\rho^2 - 1) D^2}{z} d\rho. \quad (9.16)$$

Поэтому, обозначая снова переменную интегрирования через  $\lambda$ , имеем:

$$\begin{aligned} \int_z^\infty f(x, y, \rho) \frac{dz}{D^3 \Delta(\rho)} &= \int_\rho^\infty \frac{f(x, y, \lambda) \lambda (\lambda^2 - 1)}{z(\lambda) \Delta(\lambda)} d\lambda = \\ &= \frac{1}{a} \int_\rho^\infty \frac{f(x, y, \lambda) \lambda d\lambda}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2 \lambda^2} - \frac{y^2}{a^2 (\lambda^2 - e^2)}} \sqrt{\lambda^2 - e^2}}. \end{aligned} \quad (9.17)$$

С помощью формул (9.14) и (9.17) теперь можно представить интегралы (9.13) в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} &= \frac{3x_0 Q}{a^3} \int_\rho^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 \Delta(\lambda)} [z - z(\lambda)] + \\ &+ \frac{Qx}{a^2} \int_\rho^\infty \left( 1 + \frac{3xx_0}{a^2 \lambda^2} + \frac{3yy_0}{a^2 (\lambda^2 - e^2)} \right) \frac{d\lambda}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 - e^2} \gamma(x, y, \lambda)}, \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial y} &= \frac{3y_0 Q}{a^3} \int_\rho^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2) \Delta(\lambda)} [z - z(\lambda)] + \\ &+ \frac{Qy}{a^2} \int_\rho^\infty \left( 1 + \frac{3xx_0}{a^2 \lambda^2} + \frac{3yy_0}{a^2 (\lambda^2 - e^2)} \right) \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2)^{3/2} \gamma(x, y, \lambda)}. \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

Здесь для краткости обозначено

$$\gamma(x, y, \lambda) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2 \lambda^2} - \frac{y^2}{a^2 (\lambda^2 - e^2)}}. \quad (9.19)$$

Теперь по (2.2) легко составить выражения перемещений точек упругого полупространства. Ограничимся написанием формул, относящихся к центрально нагруженному штампу ( $x_0 = y_0 = 0$ ). Получаем [см. (9.11)]:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{Qx}{4\pi G a^2} \left[ \frac{z \Delta(\rho)}{a \rho (\rho^2 - \mu^2) (\rho^2 - \nu^2)} - \frac{m-2}{m} \int_\rho^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 - e^2} \gamma(x, y, \lambda)} \right], \\ v &= \frac{Qy}{4\pi G a^2} \left[ \frac{z \rho \Delta(\rho)}{a (\rho^2 - e^2) (\rho^2 - \mu^2) (\rho^2 - \nu^2)} - \frac{m-2}{m} \int_\rho^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2)^{3/2} \gamma(x, y, \lambda)} \right], \\ w &= \frac{Qz}{4\pi G a^2} \frac{z \rho \Delta(\rho)^2}{a (\rho^2 - 1) (\rho^2 - \mu^2) (\rho^2 - \nu^2)} + \frac{m-1}{2\pi m G} \frac{Q}{a} \int_\rho^\infty \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)}. \end{aligned} \right\} \quad (9.20)$$

Интегралы, входящие в выражения  $u$ ,  $v$ , вычисляются элементарно.

Выражение объёмного расширения по (2.2) имеет вид

$$\vartheta = \frac{m-2}{2\pi m G} \frac{\partial \omega}{\partial z} \quad (9.21)$$

и, значит,

$$\vartheta = -\frac{Q(m-2)}{2\pi m G a^2} \frac{z \rho \Delta(\rho)}{a(\rho^2-1)(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)}. \quad (9.22)$$

В точках, лежащих на оси  $z$ , по (8.3) имеем  $\nu=0$ ,  $\mu=e$  и, значит,

$$z = a \sqrt{\rho^2-1}. \quad (9.23)$$

Нетрудно видеть, что в этих точках сдвиги (и, значит, касательные напряжения) обращаются в нуль. Для вычисления нормальных напряжений находим (при  $x=y=0$ ):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi G a^2} \left[ \frac{\rho^2-1}{\rho^3 \sqrt{\rho^2-e^2}} - \frac{m-2}{m} \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2-e^2}} \right], \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{Q}{4\pi G a^2} \left[ \frac{\rho^2-1}{\rho (\rho^2-e^2)^{3/2}} - \frac{m-2}{m} \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2-e^2)^{3/2}} \right], \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial \omega}{\partial z} = -\frac{Q}{4\pi G a^2} \left[ \frac{\rho^2-1}{\rho^3 \sqrt{\rho^2-e^2}} + \frac{\rho^2-1}{\rho (\rho^2-e^2)^{3/2}} \right] - \frac{m-2}{4\pi m G \pi a^2} \cdot \frac{Q}{\rho \sqrt{\rho^2-e^2}}, \\ &\quad \vartheta = -\frac{Q(m-2)}{2\pi m G a^2} \frac{1}{\rho \sqrt{\rho^2-e^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.24)$$

Остаётся заметить, что

$$\int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2-e^2}} = \frac{1}{e^2} \left( 1 - \frac{\sqrt{\rho^2-e^2}}{\rho} \right), \quad \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2-e^2)^{3/2}} = \frac{1}{e^2} \left( \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2-e^2}} - 1 \right). \quad (9.25)$$

Таким образом, нормальные напряжения в точках оси  $z$  будут:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2} p_{\text{вп}} \sqrt{\frac{1-e^2}{\rho^2-e^2}} \left[ \frac{m-2}{m e^2} (\rho - \sqrt{\rho^2-e^2}) - \frac{1}{\rho^3} \right], \\ \sigma_y &= \frac{1}{2} p_{\text{вп}} \frac{\sqrt{1-e^2}}{\rho} \left[ \frac{m-2}{m e^2} (\rho - \sqrt{\rho^2-e^2}) - \frac{1-e^2}{(\rho^2-e^2)^{3/2}} \right], \\ \sigma_z &= -\frac{1}{2} p_{\text{вп}} \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{1-e^2}{\rho^2-e^2}} \left[ \frac{\rho^2-1}{\rho^2} + \frac{\rho^2-1}{\rho^2-e^2} + 1 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9.26)$$

Получение числовых результатов теперь уже не составит труда. Интересно отметить, что, как следует из (9.20), напряжения во всём полупространстве выражаются через элементарные функции, тогда как для нахождения перемещения  $\omega$  требуется вычисление эллиптического интеграла.

### § 10. Неплоский, эллиптический в плане штамп

Разложение в степенной ряд уравнения поверхности основания штампа начинается по (1.2) со слагаемых второй степени

$$\zeta = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \right)_0 \xi^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} \right)_0 \xi \eta + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right)_0 \eta^2 \right] + \dots \quad (10.1)$$

При надлежащем выборе направлений осей  $\xi$ ,  $\eta$  слагаемое, содержащее произведение  $\xi\eta$ , может быть сделано равным нулю. Тогда получим:

$$\zeta = \frac{\xi^2}{2R_1} + \frac{\eta^2}{2R_2} + \dots \quad (10.2)$$

Здесь  $\frac{1}{R_1}$  и  $\frac{1}{R_2}$  обозначают кривизны главных нормальных сечений поверхности в точке касания её с плоскостью, ограничивающей полупространство. Можно принять, что  $R_1 > R_2$ .

Рассматривая локальные эффекты, мы ограничимся в уравнении (10.2) только написанными членами второго порядка. Тогда при приложении к штампу прижимающей силы, линия действия которой совпадает с осью  $z$ , краевое условие для потенциала  $\omega$  будет иметь вид: при  $z = 0$  и внутри области  $\Omega$

$$\omega = \frac{2\pi m G}{m-1} \left( \delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \right). \quad (10.3)$$

Мы предполагаем, что обе кривизны  $\frac{1}{R_1}$  и  $\frac{1}{R_2}$  положительны, т. е. что поверхность основания штампа выпуклая; тогда сечения этой поверхности плоскостями  $\zeta = \text{const}$  будут эллипсами, а область соприкасания  $\Omega$  — эллиптическая площадка; уравнение эллипса  $E_0$ , ограничивающего эту площадку, будет иметь вид (8.16), причём большая полуось  $a$  и эксцентриситет  $e$  заранее неизвестны.

Поскольку мы требуем непрерывности нормального напряжения  $\sigma_z$  по ограничивающей полупространство плоскости  $z = 0$ , интенсивность распределения давления по площадке соприкасания должна обращаться в нуль на эллипсе  $E_0$ . С другой стороны, значение потенциала  $\omega$  на площадке соприкасания (при  $z = 0$  и  $\rho = 1$ ) задаётся квадратичной функцией (10.3); но такой же вид имеет при  $\rho = 1$  выражение (8.78). Поэтому распределение давления следует задать в форме (8.73),



причём коэффициент  $C$  надо определить по условию равновесия штампа (1.7). Получим (см. аналогичное вычисление в § 9):

$$Q = \frac{C}{2\pi a \sqrt{1-e^2}} 2\pi a^2 \sqrt{1-e^2} \int_0^1 \sqrt{1-s^2} s ds = \frac{1}{3} aC, \quad C = \frac{3Q}{a}. \quad (10.4)$$

Подставив это значение в (8.73), найдём распределение давления

$$p = \frac{3Q}{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)}} = \frac{3}{2} p_{\text{ор}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)}}. \quad (10.5)$$

Таким образом, давление в центре площадки соприкосания равно  $1,5$  среднего давления ( $p_{\text{ор}}$ ); эпюру распределения давления можно представить поверхностью полуэллипсоида, опирающегося на площадку соприкосания по эллипсу  $E_0$ .

Выражение потенциала  $\omega$  получаем по (8.78) и (10.4):

$$\omega = \frac{3Q}{2a} \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} \left[ 1 - \frac{x^2}{a^2\lambda^2} - \frac{y^2}{a^2(\lambda^2-e^2)} - \frac{z^2}{a^2(\lambda^2-1)} \right]. \quad (10.6)$$

Постоянные  $a$  и  $e$  находим по условию (10.3). Используя ещё (8.58), найдём:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi mG}{m-1} \left( \delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \right) &= \frac{3Q}{2a} \int_1^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} \left[ 1 - \frac{x^2}{a^2\lambda^2} - \frac{y^2}{a^2(\lambda^2-e^2)} \right] = \\ &= \frac{3Q}{2a} \left[ K(e) - \frac{x^2}{a^2} D(e) - \frac{y^2}{a^2} \frac{B(e)}{1-e^2} \right]. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Отсюда, приравнявая свободные члены и коэффициенты при  $x^2$  и  $y^2$ , получим три соотношения:

$$\delta = \frac{3Q(m-1)}{4\pi mGa} K(e), \quad \frac{1}{R_1} = \frac{3Q(m-1)}{2\pi mGa^3} D(e), \quad \frac{1}{R_2} = \frac{3Q(m-1)}{2\pi mGa^3} \cdot \frac{B(e)}{1-e^2}, \quad (10.8)$$

служащие для определения  $\delta$ ,  $a$ ,  $e$ .

Сначала находим эксцентриситет  $e$  из уравнения

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{(1-e^2)D(e)}{B(e)} = \frac{(1-e^2)[K(e)-E(e)]}{E(e)-(1-e^2)K(e)}. \quad (10.9)$$

После этого можно определить значения  $a$  и  $\delta$ :

$$a = \sqrt[3]{\frac{3Q(m-1)R_1}{2\pi mG} D(e)}, \quad \delta = \frac{3Q(m-1)}{4\pi mG} K(e) \sqrt[3]{\frac{2\pi mG}{3Q(m-1)R_1 D(e)}}, \quad (10.10)$$

Эти выражения можно представить также в следующей форме:

$$a = \left( \frac{Q(m-1)}{mG} R_1 \right)^{\frac{1}{3}} \alpha_a, \quad \delta = \left( \frac{Q(m-1)}{mG \sqrt{R_1}} \right)^{\frac{2}{3}} \sigma_b, \quad (10.11)$$

где обозначено

$$\alpha_a = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi} D(e)}, \quad \alpha_b = \sqrt[3]{\frac{9}{32\pi^2 D(e)}} K(e). \quad (10.12)$$

В частности, при  $e = 0$  имеем  $D(0) = \frac{\pi}{4}$ ,  $K(0) = \frac{\pi}{2}$ , и мы возвращаемся к формулам (5.15).

В прилагаемой таблице (таблица 7) для некоторых значений квадрата эксцентриситета  $e^2$  приведены значения  $\frac{R_2}{R_1}$  и коэффициентов  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$ . Пользуясь этой таблицей по заданному отношению кривизн, находим путём интерполирования  $e^2$  и далее коэффициенты  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$ , т. е. полуось эллиптической площадки соприкосновения и перемещение штампа  $\delta$ .

На рис. 22 приведён график зависимости  $\frac{R_2}{R_1}$  от  $e^2$ .

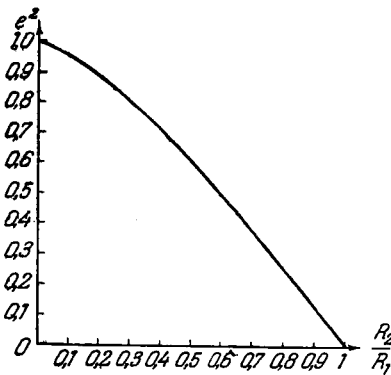


Рис. 22.

Переходим к вычислению перемещений. Прежде всего находим частные производные от  $\omega$ ; по (10.6) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial x} &= -\frac{3Qx}{a^3} \int_p^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 \Delta(\lambda)}, & \frac{\partial \omega}{\partial y} &= -\frac{3Qy}{a^3} \int_p^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2) \Delta(\lambda)}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial z} &= -\frac{3Qz}{a^3} \int_p^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - 1) \Delta(\lambda)}. \end{aligned} \right\} (10.13)$$

При этом учтено соотношение (8.10), вследствие которого производная интеграла (10.6) по нижнему пределу обратится в нуль.

Теперь по (9.13) и (9.14) сразу же получаем:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} = -\frac{3Qx}{a^3} \int_p^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 \Delta(\lambda)} [z - z(\lambda)], \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial y} = -\frac{3Qy}{a^3} \int_p^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2) \Delta(\lambda)} [z - z(\lambda)]. \quad (10.14)$$

Таблица 7

$e^2$	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{R_2}{R_1}$	1	0,963	0,925	0,885	0,846	0,806	0,765	0,724	0,682	0,637	0,594
$\alpha_a$	0,722	0,726	0,731	0,736	0,741	0,747	0,753	0,760	0,767	0,775	0,783
$\alpha_b$	0,520	0,523	0,526	0,530	0,534	0,538	0,543	0,547	0,553	0,559	0,565
$e^2$	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$\frac{R_2}{R_1}$	0,594	0,549	0,502	0,454	0,405	0,353	0,297	0,238	0,174	0,101	0
$\alpha_a$	0,783	0,793	0,803	0,815	0,829	0,844	0,863	0,888	0,921	0,975	—
$\alpha_b$	0,565	0,571	0,580	0,589	0,597	0,609	0,623	0,642	0,668	0,713	—

Выражения перемещений по (2.2) будут:

$$\left. \begin{aligned}
 u &= \frac{3Qx}{4\pi G a^3} \left\{ z \int_p^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 \Delta(\lambda)} + \frac{m-2}{m} \int_p^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 \Delta(\lambda)} [z - z(\lambda)] \right\}, \\
 v &= \frac{3Qy}{4\pi G a^3} \left\{ z \int_p^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2) \Delta(\lambda)} + \frac{m-2}{m} \int_p^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2) \Delta(\lambda)} [z - z(\lambda)] \right\}, \\
 w &= \frac{3Q(m-1)}{4\pi m G a} \int_p^\infty \left[ 1 - \frac{x^2}{a^2 \lambda^2} - \frac{y^2}{a^2 (\lambda^2 - e^2)} - \frac{z^2}{a^2 (\lambda^2 - 1)} \right] \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} + \\
 &\quad + \frac{3Qz^2}{4\pi G a^3} \int_p^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - 1) \Delta(\lambda)},
 \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

причём  $z(\lambda)$  определяется по (9.15). Объёмное расширение по (9.21) и (10.13) будет:

$$\vartheta = -\frac{3Qz(m-2)}{2\pi m G a^3} \int_p^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - 1) \Delta(\lambda)}. \quad (10.16)$$

Интегралы вида

$$\int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2 \Delta(\lambda)}, \quad \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2) \Delta(\lambda)},$$

$$\int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - 1) \Delta(\lambda)}, \quad \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)}$$

вычисляются по (8.55) — (8.57) и (8.48). Интегралы

$$\left. \begin{aligned} \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2 \Delta(\lambda)} z(\lambda) &= a \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 - e^2}} \gamma(x, y; \lambda), \\ \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2) \Delta(\lambda)} z(\lambda) &= a \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2)^{3/2}} \gamma(x, y; \lambda) \end{aligned} \right\} (10.17)$$

выражаются через элементарные функции.

Определение напряжений \*). Имея выражения перемещений (10.15), можно найти значения напряжений в точках упругого полупространства. Мы ограничимся проведением вычисления для точек оси  $z$  и точек площадки соприкосновения.

В точках оси  $z$  (т. е. при  $x = y = 0$ ) имеются только нормальные напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ . По (10.15) находим:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{3Q}{4\pi G a^2} \left[ \frac{2(m-1)}{m} \sqrt{\rho^2 - 1} \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2 \Delta(\lambda)} - \frac{m-2}{m} \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 - e^2}} \right], \\ \varepsilon_y &= \frac{3Q}{4\pi G a^2} \left[ \frac{2(m-1)}{m} \sqrt{\rho^2 - 1} \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2) \Delta(\lambda)} - \frac{m-2}{m} \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2)^{3/2}} \right], \\ \varepsilon_z &= \frac{3Q \sqrt{\rho^2 - 1}}{2\pi G a^2 m} \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - 1) \Delta(\lambda)} - \frac{3Q}{4\pi G a^2 \rho \sqrt{\rho^2 - e^2}}, \end{aligned} \right\} (10.18)$$

причём использованы вышеприведённые соотношения (9.10), (9.11) и

\*) См. Н. М. Беляев, Местные напряжения при сжатии упругих тел. Сборник «Инженерные сооружения и строительная механика», Изд-во «Путь», Ленинград, 1924.

(9.23). Нормальные напряжения будут:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sqrt{1-e^2} p_{\max} \left[ \frac{2(m-1)}{m} \sqrt{\rho^2-1} \frac{F-E}{e^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{2}{m} \sqrt{\rho^2-1} \frac{E}{1-e^2} - \frac{2}{m(1-e^2)} \frac{\sqrt{\rho^2-e^2}}{\rho} - \frac{m-2}{me^2} \frac{\rho - \sqrt{\rho^2-e^2}}{\rho} \right], \\ \sigma_y &= \sqrt{1-e^2} p_{\max} \left[ \frac{2(m-1)}{m} \sqrt{\rho^2-1} \frac{E-(1-e^2)F}{e^2(1-e^2)} + \right. \\ &+ \left. \frac{2}{m} \sqrt{\rho^2-1} \frac{E}{1-e^2} - \frac{2(m-1)}{m(1-e^2)} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\rho^2-1}{\sqrt{\rho^2-e^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{m(1-e^2)} \frac{\sqrt{\rho^2-e^2}}{\rho} - \frac{m-2}{me^2} \frac{\rho - \sqrt{\rho^2-e^2}}{\sqrt{\rho^2-e^2}} \right], \\ \sigma_z &= -p_{\max} \frac{\sqrt{1-e^2}}{\rho \sqrt{\rho^2-e^2}}. \end{aligned} \right\} (10.19)$$

Здесь

$$p_{\max} = \frac{3}{2} p_{\text{ср}} = \frac{3}{2} \frac{Q}{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} \quad (10.20)$$

— давление в центре площадки соприкосновения. Для краткости написано:

$$E = E(\varphi, e), \quad F = F(\varphi, e), \quad \varphi = \arcsin \frac{1}{\rho}. \quad (10.21)$$

Напомним также, что

$$z = a \sqrt{\rho^2-1}. \quad (10.22)$$

Получение числовых результатов с помощью таблиц эллиптических интегралов теперь не представляет труда.

Выражение суммы нормальных напряжений имеет вид

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{2(m+1)}{m \sqrt{1-e^2}} p_{\max} \left[ \sqrt{\rho^2-1} E - \frac{\sqrt{\rho^2-e^2}}{\rho} \right]. \quad (10.23)$$

В центре площадки соприкосновения (при  $\rho = 1$ ) получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{p_{\max}}{m} \left[ 2 + (m-2) \frac{\sqrt{1-e^2}(1-\sqrt{1-e^2})}{e^2} \right] = \\ &= -\frac{p_{\max}}{m} \left[ 2 + (m-2) \frac{b}{a+b} \right], \\ \sigma_y &= -\frac{p_{\max}}{m} \left[ 2 + (m-2) \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e^2} \right] = \\ &= -\frac{p_{\max}}{m} \left[ 2 + (m-2) \frac{a}{a+b} \right], \\ \sigma_z &= -p_{\max}. \end{aligned} \right\} (10.24)$$

где  $b = a\sqrt{1-e^2}$  — малая полуось эллипса, ограничивающего площадку соприкасания.

Площадка соприкасания. По условию здесь отсутствуют касательные напряжения  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{yz}$ , а нормальное напряжение  $\sigma_z$  определяется по (10.5). Остается определить напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ; для этого достаточно знать перемещения  $u$ ,  $v$  также только в точках площадки соприкасания и значение на ней объемного расширения. По (10.15) имеем при  $z = 0$  и  $\rho = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{3Qx}{4\pi Ga^2} \frac{m-2}{m} \int_1^\infty \gamma(x, y; \lambda) \frac{d\lambda}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 - e^2}} = \\ &= \frac{Q(m-2)}{4\pi mG} \frac{\partial}{\partial x} \int_1^\infty \gamma^8(x, y; \lambda) \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - e^2}}, \\ v &= -\frac{3Qy}{4\pi Ga^2} \frac{m-2}{m} \int_1^\infty \gamma(x, y; \lambda) \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{Q(m-2)}{4\pi mG} \frac{\partial}{\partial y} \int_1^\infty \gamma^8(x, y; \lambda) \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - e^2}}, \end{aligned} \right\} (10.25)$$

где  $\gamma(x, y; \lambda)$  определено по (9.19):

$$\gamma(x, y; \lambda) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2\lambda^2} - \frac{y^2}{a^2(\lambda^2 - e^2)}}. \quad (10.26)$$

Объемное расширение находим по (10.16), заменив интеграл в этой формуле его значением (8.57), а величину  $z$  — по (8.13). Тогда после сокращения на множитель  $\sqrt{\rho^2 - 1}$  можно будет принять  $\rho = 1$  и сделать замену [ср. вывод формулы (8.42)]

$$\begin{aligned} (1 - \mu^2)(1 - \nu^2) &= \\ &= \sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)}} = \sqrt{1 - e^2} \gamma(x, y; 1). \end{aligned}$$

Получаем:

$$\vartheta = -\frac{m-2}{mG} p_{\max} \gamma(x, y; 1). \quad (10.27)$$

Выражения напряжений приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{Q(m-2)}{2\pi m} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{2}{m} p_{\max} \gamma(x, y; 1), \\ \sigma_y &= \frac{Q(m-2)}{2\pi m} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{2}{m} p_{\max} \gamma(x, y; 1), \\ \tau_{xy} &= \frac{Q(m-2)}{2\pi m} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_z = -p_{\max} \gamma(x, y; 1). \end{aligned} \right\} (10.28)$$

Здесь обозначено

$$\Phi = \int_1^{\infty} \gamma^3(x, y; \lambda) \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - e^2}}. \quad (10.29)$$

Выражение суммы нормальных напряжений имеет вид

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 2G \frac{m+1}{m-2} \vartheta = -\frac{2(m+1)}{m} p_{\max} \gamma(x, y; 1).$$

Поэтому

$$\sigma_x + \sigma_y = -p_{\max} \frac{m+2}{m} \gamma(x, y; 1)$$

и, значит,

$$\sigma_y = -\frac{Q(m-2)}{2\pi m} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -p_{\max} \gamma(x, y; 1). \quad (10.30)$$

Таким образом, остаётся найти значения интегралов

$$\int_1^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - e^2}} \frac{\partial^2 (\gamma^3)}{\partial x^2}, \quad \int_1^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - e^2}} \frac{\partial^2 (\gamma^3)}{\partial x \partial y}.$$

Имеем:

$$\frac{\partial^2 (\gamma^3)}{\partial x^2} = -\frac{3\gamma}{a^2 \lambda^2} + \frac{3x^2}{\gamma a^4 \lambda^4}, \quad \frac{\partial^2 (\gamma^3)}{\partial x \partial y} = \frac{3xy}{a^4 \lambda^2 (\lambda^2 - e^2) \gamma}.$$

Для вычисления интегралов удобно перейти к эллиптическим координатам  $\mu$ ,  $\nu$  на площадке соприкосновения [см. (8.14)]. Имеем:

$$\gamma(x, y; \lambda) = \sqrt{\frac{(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}{\lambda^2(\lambda^2 - e^2)}}, \quad (10.31)$$

и после соответствующих подстановок в (10.28) найдём:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = & -\frac{2}{m} p_{\max} \gamma(x, y; 1) - \frac{m-2}{m} p_{\max} \sqrt{1-e^2} \times \\ & \times \left[ \int_1^{\infty} \frac{\lambda d\lambda}{\lambda^4 (\lambda^2 - e^2)} \sqrt{(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)} - \right. \\ & \left. - \frac{\mu^2 \nu^2}{e^2} \int_1^{\infty} \frac{\lambda d\lambda}{\lambda^4 \sqrt{(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}} \right], \\ \tau_{xy} = & \frac{m-2}{m} p_{\max} \frac{xy}{a^2} \int_1^{\infty} \frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2 (\lambda^2 - e^2) \sqrt{(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}}. \end{aligned} \right\} \quad (10.32)$$

Подинтегральные выражения приводятся к рациональному виду с помощью подстановки

$$\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - \nu^2} = u^2,$$

причём пределами интегрирования по переменной  $u$  будут:

$$\sqrt{\frac{1 - \mu^2}{1 - \nu^2}}, 1.$$

Проделав вычисление интегралов, получим:

$$\begin{aligned} \sigma_x = & -\frac{2}{m} p_{\max} \gamma(x, y; 1) - \frac{m-2}{me^2} p_{\max} \sqrt{1-e^2} \times \\ & \times \left\{ 1 - \sqrt{1-e^2} \gamma(x, y; 1) - \frac{x}{2ae} \ln \left| \frac{\mu + \nu}{\mu - \nu} \cdot \frac{\mu \sqrt{1-\nu^2} - \nu \sqrt{1-\mu^2}}{\mu \sqrt{1-\nu^2} + \nu \sqrt{1-\mu^2}} \right| - \right. \\ & \left. - \frac{y}{ae} \left[ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{e^2 - \nu^2}{\mu^2 - e^2}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{(e^2 - \nu^2)(1-\mu^2)}{(\mu^2 - e^2)(1-\nu^2)}} \right] \right\}, \\ \tau_{xy} = & -\frac{m-2}{me^2} p_{\max} \sqrt{1-e^2} \frac{xy}{a^2} \times \\ & \times \left\{ \frac{a}{2ex} \ln \left| \frac{\mu + \nu}{\mu - \nu} \cdot \frac{\mu \sqrt{1-\nu^2} - \nu \sqrt{1-\mu^2}}{\mu \sqrt{1-\nu^2} + \nu \sqrt{1-\mu^2}} \right| - \right. \\ & \left. - \frac{a}{ye} \left[ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{e^2 - \nu^2}{\mu^2 - e^2}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{(e^2 - \nu^2)(1-\mu^2)}{(\mu^2 - e^2)(1-\nu^2)}} \right] \right\}. \quad (10.33) \end{aligned}$$

Частично мы вернулись с помощью (8.14) к обозначениям в декартовых координатах. Напряжение  $\sigma_y$  теперь найдём по (10.30).

На контуре площадки соприкосновения, т. е. на эллипсе (8.16), имеем  $\gamma(x, y; 1) = 0$  и  $\mu = 1$ ; но (8.14) в точках этого контура имеем, рассматривая дугу, расположенную в первом квадранте,

$$\nu = \frac{ex}{a}, \quad \sqrt{e^2 - \nu^2} = \frac{ey}{a \sqrt{1-e^2}}. \quad (10.34)$$

Таким образом, находим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = -\sigma_y = & -\frac{m-2}{me^2} p_{\max} \sqrt{1-e^2} \left[ 1 - \frac{x}{2ae} \ln \left| \frac{a+ex}{a-ex} \right| - \right. \\ & \left. - \frac{y}{ae} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{ey}{a(1-e^2)} \right], \\ \tau_{xy} = & -\frac{m-2}{me^2} p_{\max} \sqrt{1-e^2} \frac{xy}{a^2} \left[ \frac{a}{2ex} \ln \left| \frac{a+ex}{a-ex} \right| - \right. \\ & \left. - \frac{a}{ey} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{ey}{a(1-e^2)} \right], \end{aligned} \right\} \quad (10.35)$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$



В частности, в конце большой полуоси эллипса ( $x = a, y = 0$ )

$$\sigma_x = -\sigma_y = -\frac{m-2}{me^2} \sqrt{1-e^2} p_{\max} \left[ 1 - \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} \right] \quad (10.36)$$

и остальные напряжения отсутствуют. Точно так же в конце малой полуоси ( $x = 0, y = a \sqrt{1-e^2}$ ) имеются только нормальные напряжения

$$\sigma_x = -\sigma_y = -p_{\max} \frac{m-2}{me^2} \sqrt{1-e^2} \left[ 1 - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \right]. \quad (10.37)$$

По (10.33), (10.30) и (10.28) получаем для нормальных напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  в центре площадки соприкасания найденные выше выражения (10.24).

Вычисление максимальных касательных напряжений на площадке соприкасания. В центре площадки по (10.24) имеем:

$$\left. \begin{aligned} 2\tau_1^{(0)} &= |\tau_z - \tau_x| = \frac{m-2}{m} p_{\max} \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{e^2}, \\ 2\tau_2^{(0)} &= |\tau_y - \tau_z| = \frac{m-2}{m} p_{\max} \frac{\sqrt{1-e^2}(1 - \sqrt{1-e^2})}{e^2}, \\ 2\tau_3^{(0)} &= |\sigma_x - \sigma_y| = \frac{m-2}{m} p_{\max} \frac{(1 - \sqrt{1-e^2})^2}{e^2}. \end{aligned} \right\} \quad (10.38)$$

Наибольшим из этих трёх напряжений является, очевидно,

$$2\tau_1^{(0)} = \frac{m-2}{m} p_{\max} f_1(e), \quad f_1(e) = \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{e^2}. \quad (10.39)$$

Максимальные касательные напряжения в конце большой и малой полуосей по (10.36) и (10.37) соответственно будут:

$$\left. \begin{aligned} 2\tau_3^{(a)} &= |\sigma_x - \sigma_y| = \frac{m-2}{m} p_{\max} f_2(e), \\ f_2(e) &= \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e^2} \left( \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} - 1 \right), \end{aligned} \right\} \quad (10.40)$$

$$\left. \begin{aligned} 2\tau_3^{(b)} &= |\sigma_x - \sigma_y| = \frac{m-2}{m} p_{\max} f_3(e), \\ f_3(e) &= \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e^2} \left( 1 - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10.41)$$

Нетрудно проверить, что

$$f_2(e) > f_3(e),$$

Таблица 8

$e^2$	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$f_1(e)$	0,500	0,506	0,513	0,520	0,528	0,536	0,545	0,554	0,563	0,574	0,585
$f_2(e)$	0,667	0,670	0,673	0,676	0,679	0,683	0,687	0,689	0,692	0,695	0,697
$e^2$	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$f_1(e)$	0,585	0,598	0,612	0,628	0,646	0,666	0,691	0,721	0,760	0,817	1,00
$f_2(e)$	0,697	0,698	0,699	0,700	0,699	0,694	0,686	0,671	0,644	0,582	0

причём разность этих величин, весьма малая при малых  $e$ , растёт вместе с ростом  $e$ . Поэтому сравнению подлежат величины макси-

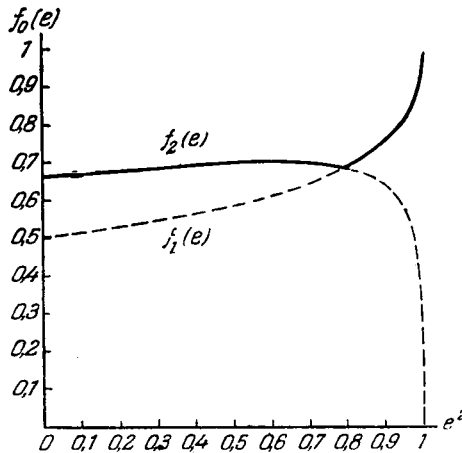


Рис. 23.

мальных касательных напряжений  $\tau_1^{(0)}$  и  $\tau_3^{(a)}$ . Вычисление показывает, что

$$\left. \begin{aligned} f_2(e) > f_1(e) & \text{ при } 0 < e^2 < 0,79, \\ f_2(e) < f_1(e) & \text{ при } 0,79 < e^2 < 1. \end{aligned} \right\} \quad (10.42)$$

Приводим таблицу 8 значений функций  $f_1(e)$  и  $f_2(e)$ . С помощью таблицы 8 построен график функции (рис. 23)

$$\frac{2m}{m-2} \frac{\tau_{\max}}{p_{\max}} = f_0(e) = \begin{cases} f_2(e) & 0 < e^2 < 0,79, \\ f_1(e) & 0,79 < e^2 < 1, \end{cases} \quad (10.43)$$

Ординаты этого графика позволяют определить величину максимального касательного напряжения на площадке соприкосновения. Предварительно с помощью графика рис. 22 и таблицы 7 по заданному отношению  $\frac{R_2}{R_1}$  находим квадрат эксцентриситета  $e$  и большую полуось  $a$ ;  $p_{\max}$  находится по известному значению прижимающей силы  $Q$  из (10.20).

### § 11. Сжатие упругих тел (задача Герца)

1°. Два упругих тела, ограниченных выпуклыми поверхностями  $S_1$  и  $S_2$ , соприкасаются в точке  $O$ . Принимая эту точку за начало координат, проведём оси  $z_1$  и  $z_2$ , перпендикулярные к общей касательной плоскости  $\Pi$  поверхностей  $S_1$  и  $S_2$ , внутрь каждого из тел. Оси  $x_1(x_2)$  и  $y_1(y_2)$  системы  $Ox_1y_1z_1(Ox_2y_2z_2)$ , связанной с первым (вторым) телом, направим в плоскости  $\Pi$  по главным нормальным сечениям поверхности  $S_1(S_2)$ . В этих системах осей уравнения поверхностей  $S_1$  и  $S_2$  в окрестности точки соприкосновения  $O$  могут быть представлены в виде

$$z_1 = \frac{x_1^2}{2R_1'} + \frac{y_1^2}{2R_2'} + \dots, \quad z_2 = \frac{x_2^2}{2R_1''} + \frac{y_2^2}{2R_2''} + \dots, \quad (11.1)$$

где  $\frac{1}{R_1'}$  и  $\frac{1}{R_2'}$  — главные кривизны поверхности  $S_1$  в точке  $O$ , положительные, если соответствующий центр кривизны расположен внутри тела, т. е. на положительной оси  $z_1$ . Аналогичное значение имеют величины  $\frac{1}{R_1''}$  и  $\frac{1}{R_2''}$  для поверхности  $S_2$ . В дальнейшем ограничимся рассмотрением локальных явлений в области контакта. Это позволяет учитывать в уравнениях (11.1) только написанные явно слагаемые.

Расстояние между двумя точками  $M_1$  и  $M_2$ , расположенными на одном перпендикуляре к плоскости  $\Pi$ , до деформации равно

$$z = z_1 + z_2 = \frac{x_1^2}{2R_1'} + \frac{y_1^2}{2R_2'} + \frac{x_2^2}{2R_1''} + \frac{y_2^2}{2R_2''}, \quad (11.2)$$

и очевидно, что  $z$  должно быть положительным. На рис. 24, а и 24, б показаны два возможных расположения поверхностей  $S_1$  и  $S_2$ , соответствующие внешнему и внутреннему соприкосновению их.

Расположим в плоскости  $\Pi$  ещё одну систему осей  $x, y$ , причём через  $\omega_1$  и  $\omega_2$  обозначим углы, составляемые осями  $x_1$  и  $x_2$  с осью  $x$ ; очевидно, что разность (рис. 25)

$$\alpha = \omega_2 - \omega_1 \quad (11.3)$$

представит угол между осями  $x_1$  и  $x_2$  (отсчитываемый от  $x_1$  к  $x_2$ ).

Можно написать формулы преобразования координат

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x \cos \omega_1 + y \sin \omega_1, & x_2 &= x \cos \omega_2 + y \sin \omega_2, \\ y_1 &= -x \sin \omega_1 + y \cos \omega_1, & y_2 &= -x \sin \omega_2 + y \cos \omega_2. \end{aligned} \right\} (11.4)$$

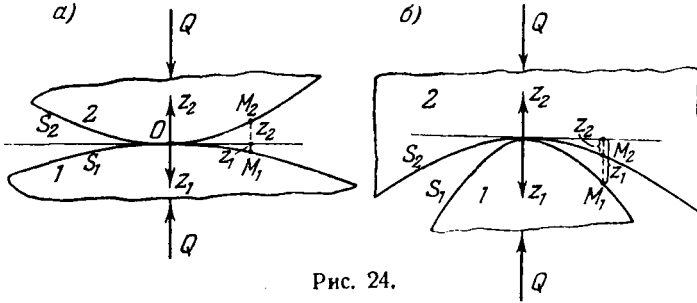


Рис. 24.

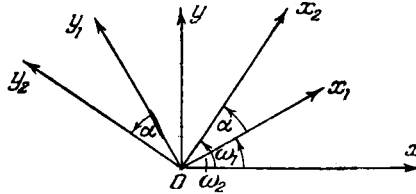


Рис. 25.

Тогда выражение  $z$  представится в виде

$$z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2} + \frac{1}{2} xy (g_1 \sin 2\omega_1 + g_2 \sin 2\omega_2), \quad (11.5)$$

где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \frac{\cos^2 \omega_1}{R'_1} + \frac{\sin^2 \omega_1}{R'_2} + \frac{\cos^2 \omega_2}{R''_1} + \frac{\sin^2 \omega_2}{R''_2}, \\ \frac{1}{R_2} &= \frac{\sin^2 \omega_1}{R'_1} + \frac{\cos^2 \omega_1}{R'_2} + \frac{\sin^2 \omega_2}{R''_1} + \frac{\cos^2 \omega_2}{R''_2}, \\ g_1 &= \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2}, & g_2 &= \frac{1}{R''_1} - \frac{1}{R''_2}. \end{aligned} \right\} (11.6)$$

Положим далее

$$\omega_1 = \omega - \frac{\alpha}{2}, \quad \omega_2 = \omega + \frac{\alpha}{2} \quad (11.7)$$

и для сокращения напомним:

$$2H_1 = \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2}, \quad 2H_2 = \frac{1}{R''_1} + \frac{1}{R''_2}. \quad (11.8)$$

Очевидно, что  $H_1$  и  $H_2$  обозначают средние кривизны поверхностей  $S_1$  и  $S_2$  в точке  $O$ . Теперь из (11.6) получим:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 2(H_1 + H_2). \quad (11.9)$$

Неизвестную величину  $\omega$  подберём так, чтобы в выражении (11.5) обратить в нуль слагаемое, содержащее произведение  $xу$ :

$$\begin{aligned} g_1 \sin 2\omega_1 + g_2 \sin 2\omega_2 = \\ = (g_1 + g_2) \sin 2\omega \cos \alpha - (g_1 - g_2) \cos 2\omega \sin \alpha = 0. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Тогда (11.5) примет вид

$$z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}, \quad (11.11)$$

причём коэффициенты  $\frac{1}{R_1}$  и  $\frac{1}{R_2}$  в силу (11.6) и (11.7) будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= H_1 + H_2 + \frac{1}{2} [(g_1 + g_2) \cos 2\omega \cos \alpha + (g_1 - g_2) \sin 2\omega \sin \alpha], \\ \frac{1}{R_2} &= H_1 + H_2 - \frac{1}{2} [(g_1 + g_2) \cos 2\omega \cos \alpha + (g_1 - g_2) \sin 2\omega \sin \alpha]. \end{aligned} \right\} \quad (11.12)$$

Переписывая теперь (11.10) и первое соотношение (11.12) в виде двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} (g_1 + g_2) \sin 2\omega \cos \alpha - (g_1 - g_2) \cos 2\omega \sin \alpha &= 0, \\ (g_1 - g_2) \sin 2\omega \sin \alpha + (g_1 + g_2) \cos 2\omega \cos \alpha &= \\ &= 2 \left( \frac{1}{R_1} - H_1 - H_2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (11.13)$$

и определяя из них  $\sin 2\omega$  и  $\cos 2\omega$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\omega &= \frac{2}{\Delta^2} \left( \frac{1}{R_1} - H_1 - H_2 \right) (g_1 - g_2) \sin \alpha, \\ \cos 2\omega &= \frac{2}{\Delta^2} \left( \frac{1}{R_1} - H_1 - H_2 \right) (g_1 + g_2) \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (11.14)$$

где обозначено

$$\Delta^2 = (g_1 + g_2)^2 \cos^2 \alpha + (g_1 - g_2)^2 \sin^2 \alpha = g_1^2 + g_2^2 + 2g_1g_2 \cos 2\alpha. \quad (11.15)$$

Неизвестную  $\frac{1}{R_1}$  найдём по условию  $\sin^2 2\omega + \cos^2 2\omega = 1$ . Получим:

$$\frac{1}{R_1} = H_1 + H_2 \pm \frac{1}{2} \Delta$$

и, значит, по (11.9)

$$\frac{1}{R_2} = H_1 + H_2 \mp \frac{1}{2} \Delta.$$

Называя через  $R_1$  бóльшую из двух величин  $R_1$  и  $R_2$ , можем написать:

$$\frac{1}{R_1} = H_1 + H_2 - \frac{1}{2} \Delta, \quad \frac{1}{R_2} = H_1 + H_2 + \frac{1}{2} \Delta. \quad (11.16)$$

Теперь по (11.14) получаем также:

$$\sin 2\omega = -\frac{g_1 - g_2}{\Delta} \sin \alpha, \quad \cos 2\omega = -\frac{g_1 + g_2}{\Delta} \cos \alpha. \quad (11.17)$$

Таким образом, определена система осей  $x, y$ , в которых квадратичная форма (11.5) приведена к сумме квадратов (11.11), а также

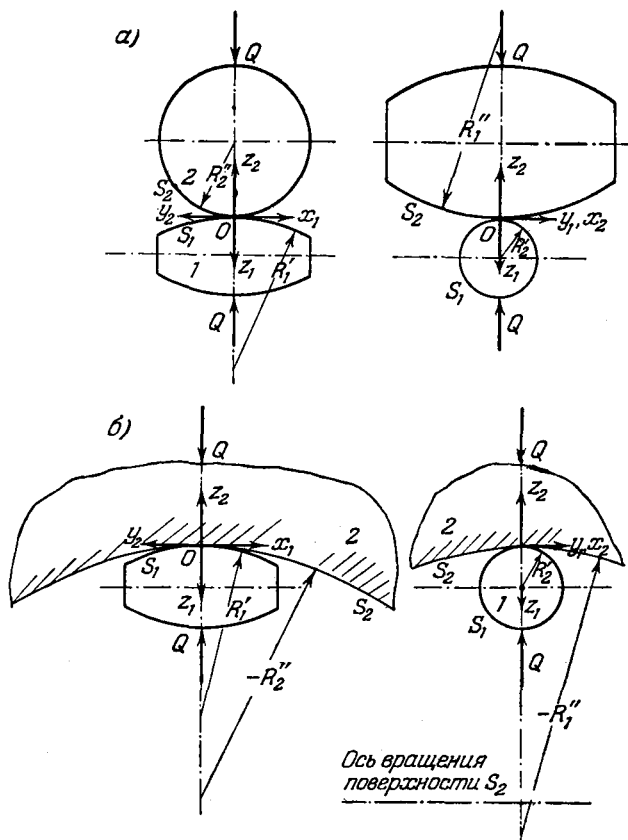


Рис. 26.

найлены коэффициенты этой формы  $\frac{1}{R_1}$  и  $\frac{1}{R_2}$ . Оба они положительны, так как  $z > 0$  при любых значениях  $x$  и  $y$ .

2°. Рассмотрим некоторые частные случаи соприкосновения тел.

а) Поверхности  $S_1$  и  $S_2$  суть поверхности вращения с параллельными осями. Соприкасание может быть внешним (рис. 26, а) и внутренним (рис. 26, б). Имеем  $\alpha = 0$ , и по (11.15), (11.16)

$$\Delta = \left| \frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_2'} + \frac{1}{R_1''} - \frac{1}{R_2''} \right|.$$

Пусть

$$\Delta = \frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2''} - \frac{1}{R_1''}.$$

Тогда по (11.16) и (11.17) получим:

$$\omega' = 0, \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_1''}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_2'} + \frac{1}{R_2''}. \quad (11.18)$$

Если же

$$\Delta = \frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_2'} + \frac{1}{R_1''} - \frac{1}{R_2''},$$

то

$$\omega = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2'} + \frac{1}{R_2''}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_1''}. \quad (11.19)$$

В обоих случаях  $R_1$  является большей из двух величин  $R_1$  и  $R_2$ .

б) Поверхности  $S_1$  и  $S_2$  — поверхности вращения с осями, расположенными накрест. Случай внешнего соприкосновения показан на рис. 27, а, случай внутреннего — на рис. 27, б.

Теперь  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  и по (11.15)

$$\Delta = |g_1 - g_2| = \left| \frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_1''} + \frac{1}{R_2''} \right|.$$

Полагая

$$\Delta = \frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_1''} + \frac{1}{R_2''},$$

получим:

$$\omega = \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2'} + \frac{1}{R_1''}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2''}. \quad (11.20)$$

Если же

$$\Delta = \frac{1}{R_2'} + \frac{1}{R_1''} - \frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_2''},$$

то

$$\omega = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2''}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_2'} + \frac{1}{R_1''}. \quad (11.21)$$

в)  $S_1$  и  $S_2$  представляют поверхности вращения вокруг оси  $z$  — линии действия прижимающих сил. Тогда

$$\frac{1}{R_1'} = \frac{1}{R_2'} = \frac{1}{R'} \quad \text{и} \quad \frac{1}{R_1''} = \frac{1}{R_2''} = \frac{1}{R''}. \quad (11.22)$$

Угол  $\alpha$  произволен, и по (11.6) получаем  $g_1 = g_2 = 0$ , т. е.  $\Delta = 0$ . При внешнем соприкосании получаем:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}. \quad (11.23)$$

Эта же формула остаётся справедливой и при внутреннем соприкосании, но тогда бóльшая из двух величин  $R'$  и  $R''$  отрицательна.

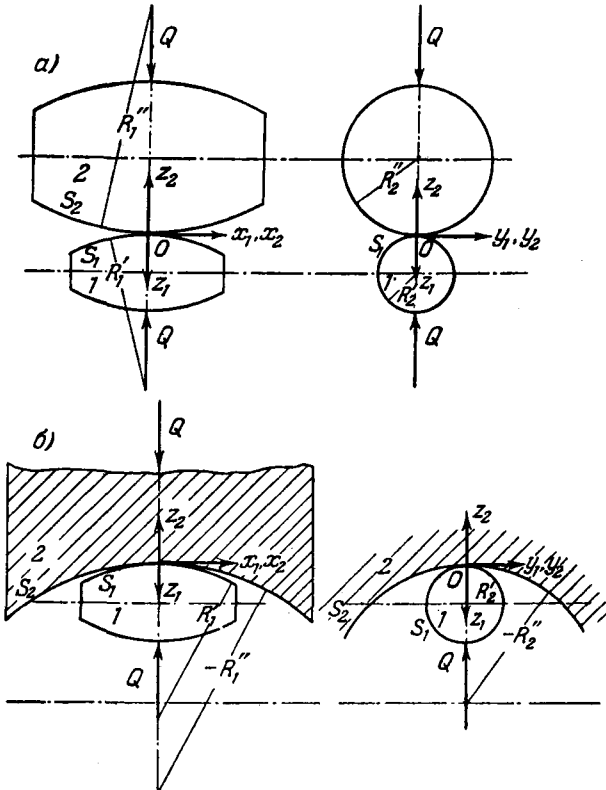


Рис. 27.

Приведём несколько простых примеров.

Два шара, соприкасающихся извне, радиусов  $R'$  и  $R''$ . По (11.18) или (11.20) или (11.23) имеем:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}. \quad (11.24)$$

Шар радиуса  $R'$  в сферической полости радиуса  $R''$ :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R''}. \quad (11.25)$$



Два цилиндра радиусов  $a$  и  $b$  с накрест расположенными осями; по (11.20) получим:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{b} \quad (a > b). \quad (11.26)$$

Шар радиуса  $R$  (поверхность  $S_2$ ) и цилиндр ( $S_1$ ) радиуса  $r$  (внешнее соприкосновение); по (11.21) имеем:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r}, \quad (11.27)$$

причём оси ( $x$ ,  $y$ ) имеют направления образующей цилиндра и перпендикуляра к ней. Конечно, тот же результат получим по (11.18)

Шар ( $S_1$ ) радиуса  $R$  в цилиндрическом желобе ( $S_2$ ) радиуса  $r > R_2$ . По (11.21) имеем:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}, \quad (11.28)$$

Ось  $x$  направлена по перпендикуляру к образующей цилиндра.

3°. Рассматриваемые упругие тела прижимаются друг к другу силами  $Q$ , линия действия которых перпендикулярна к общей касательной плоскости  $\Pi$  и проходит через точку  $O$ . Тела под действием сил  $Q$  деформируются в области, примыкающей к месту контакта, и сближаются друг с другом. Назовём  $(-\delta_1)$  и  $(-\delta_2)$  проекции поступательного перемещения первого и второго тел на оси  $z_1$  и соответственно  $z_2$  (которые, напомним, направлены внутрь соответствующих тел). Можно также определить  $\delta_1$  и  $\delta_2$  как перемещения точек первого и второго тел, достаточно удалённых от места контакта, в направлении сил  $Q$ . Сумму

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 \quad (11.29)$$

назовём сближением тел.

Рассмотрим теперь две точки  $M_1$  и  $M_2$  первого и второго тел, расположенные на общем перпендикуляре (оси  $z$ ) к плоскости  $\Pi$  в области, примыкающей к точке  $O$ . Координаты этих точек в системах осей  $Oz_1x$  и  $Oz_2x$  до деформации будут соответственно  $(z_1, x, y)$  и  $(z_2, x, y)$ . Вследствие деформации тел точки  $M_1$  и  $M_2$  получат перемещения, проекции которых на оси  $z_1$  и  $z_2$  обозначены соответственно  $w_1$  и  $w_2$ . Одновременно точки  $M_1$  и  $M_2$  сместятся вместе с соответствующими телами и после деформации займут положения  $M'_1$  и  $M'_2$ ; координаты точек  $M'_1$  и  $M'_2$  (нас интересуют только координаты  $z$ ) после деформации будут:

$$z'_1 = z_1 + w_1 - \delta_1, \quad z'_2 = z_2 + w_2 - \delta_2. \quad (11.30)$$

Расстояние  $\overline{M'_1M'_2}$  поэтому окажется равным

$$z' = z'_1 + z'_2 = z_1 + z_2 + w_1 + w_2 - (\delta_1 + \delta_2) \quad (11.31)$$

или по (11.2), (11.11) и (11.29)

$$z' = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2} + \omega_1 + \omega_2 - \delta. \quad (11.32)$$

Для тех точек  $M_1$  и  $M_2$  первого и второго тел, которые после деформации вступят в соприкосновение, это расстояние будет равно нулю. Для прочих точек вблизи места контакта оно положительно. Таким образом, поверхность контакта мы можем определить как геометрическое место точек, в которых

$$z' = 0, \quad \text{т. е.} \quad \omega_1 + \omega_2 = \delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2}. \quad (11.33)$$

Вне площади контакта

$$z' > 0, \quad \text{т. е.} \quad \omega_1 + \omega_2 > \delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2}. \quad (11.34)$$

По поверхности контакта действует нормальное давление, интенсивность которого обозначим через  $p$ . Касательные напряжения на поверхности контакта будем считать отсутствующими. Далее предполагается, что без большой ошибки можно при рассмотрении напряжённого состояния заменить соприкасающиеся тела в области, прилегающей к месту контакта их, двумя упругими полупространствами, прижатыми друг к другу на площадке  $\Omega$ , расположенной в разделяющей полупространства плоскости  $\Pi$  (касательной плоскости поверхностей  $S_1$  и  $S_2$  в точке  $O$ ); на этой плоскости  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 0$ . На контуре  $\bar{E}_0$  площадки  $\Omega$  интенсивность давления  $p$  обращается в нуль, а величина  $\omega_1 + \omega_2$  имеет постоянное значение, т. е. по (11.33)

$$\delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} = \text{const}. \quad (11.35)$$

Поэтому контуром  $E_0$  служит эллипс, осями которого являются оси  $x$  и  $y$ , определённые выше. Большая полуось этого эллипса  $a$  (расположенная по оси  $x$ ) и эксцентриситет  $e$  будут определены далее.

Напряжённое состояние в каждом из полупространств определяется (§ 2) с помощью функции  $\omega^{(i)}(x, y, z_i)$  (где  $i = 1, 2$ ), являющейся потенциалом простого слоя, распределённого по плоской площадке  $\Omega$ , с интенсивностью  $p(x, y)$ . По (2.8) имеем:

$$\omega^{(i)}(x, y, z_i) = \int_{\Omega} \int \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z_i^2}}, \quad (11.36)$$

и можно ограничиться рассмотрением одного лишь потенциала

$$\omega(x, y, z) = \int_{\Omega} \int \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}}, \quad (11.37)$$

считая  $z$  положительным в каждом из полупространств. При вычислении же перемещений по формулам (2.2), конечно, следует упру-

гим постоянным  $G$  и  $m$  придавать соответствующие значения:  $G_1, m_1$  и  $G_2, m_2$ .

Выразим теперь условие (11.33) на площадке соприкасания через функцию  $\omega$ . Имеем по (2.2) на площадке  $\Omega$

$$\omega_1 = \frac{m_1 - 1}{2\pi m_1 G_1} \omega, \quad \omega_2 = \frac{m_2 - 1}{2\pi m_2 G_2} \omega \quad (11.38)$$

и, следовательно, на  $\Omega$

$$\omega = \frac{2\pi}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \left( \delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \right), \quad (11.39)$$

где обозначено

$$\vartheta_i = \frac{m_i - 1}{m_i G_i}. \quad (11.40)$$

Потенциал  $\omega$  должен быть определён по условию (11.39) на площадке  $\Omega$  и условию обращения в нуль плотности  $p$  на контуре этой площадки. Но условие (11.39) отличается от условия (10.3), из которого мы исходим при решении задачи об эллиптическом штампе, лишь заменой величины

$$\frac{m-1}{mG} \quad \text{на} \quad \vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{m_1-1}{m_1 G_1} + \frac{m_2-1}{m_2 G_2}. \quad (11.41)$$

В остальном обе задачи тождественны, и можно непосредственно перенести полученные ранее результаты на интересующий нас случай сжатия упругих тел.

4°. Из сказанного выше следует такой ход решения задачи о соприкасании упругих тел.

а) По формулам (11.16), (11.15), (11.6) находим по заданным кривизнам  $\frac{1}{R_1'}$ ,  $\frac{1}{R_2'}$  и  $\frac{1}{R_1''}$ ,  $\frac{1}{R_2''}$  и углу  $\alpha$  величины  $\frac{1}{R_1}$  и  $\frac{1}{R_2}$ , а также направления осей  $x$ ,  $y$  (угол  $\omega$ ).

б) Из соотношения (10.9) путём интерполирования или по графику рис. 22 находим эксцентриситет  $e$  эллипса, ограничивающего площадку соприкасания.

в) С помощью коэффициентов  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$ , вычисляемых по (10.12) или по таблице 7, находим большую полуось эллипса и сближение тел [ср. (10.11) и (11.41)];

$$a = [QR_1(\vartheta_1 + \vartheta_2)]^{1/2} \alpha_a, \quad \delta = \left[ \frac{Q}{\sqrt{R_1}} (\vartheta_1 + \vartheta_2) \right]^{3/2} \alpha_b. \quad (11.42)$$

г) Распределение давления по площадке соприкасания находим по (10.5), а функцию  $\omega$  по (10.6).

д) Перемещения определяются по (10.15) с заменой  $m, G$  на  $m_i, G_i$  ( $i = 1, 2$ ). При вычислении напряжений в точках оси  $z$  по (10.24), а также в точках площадки соприкасания по (10.33)  $m$  заменяется

на  $m_1$ . Максимальное касательное напряжение на площадке соприкасания находится согласно (10.43) по графику рис. 23 при соответствующем значении числа Пуассона  $m$ .

Заметим ещё, что в случае сжатия тел вращения (и в более общем случае, когда оказывается  $R_1 = R_2$ ) вычисление радиуса  $a$  площадки соприкасания и сближения  $\delta$  производится по формулам [см. (5.15)]

$$a = \left[ \frac{3}{8} Q (\vartheta_1 + \vartheta_2) R \right]^{1/3} \quad \delta = \left[ \frac{3}{8} \frac{Q}{\sqrt{R}} (\vartheta_1 + \vartheta_2) \right]^{2/3}. \quad (11.43)$$

Напряжения также находятся по формулам § 5.

### ПРИМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ К ГЛАВЕ 5

Впервые пространственная контактная задача была поставлена и решена Г. Герцем в мемуаре, упомянутом в примечаниях к главе 2. В работе Герца даны формулы, позволяющие найти распределение давления по площадке контакта, размеры этой площадки и сближение прижатых друг к другу тел. Ему же принадлежит теория удара, основанная на зависимости реакции между соударяющимися телами от их сближения  $\delta$ , определяемой по второй формуле (11.42).

Экспериментальная проверка теории Герца, а также вычисления, связанные с нахождением распределения напряжений и перемещений в соприкасающихся телах, проводились рядом авторов. В работе А. Н. Динника «Удар и сжатие упругих тел» (Избранные труды, т. 1, Изд-во Акад. наук УССР, 1952; впервые опубликована в 1909 г.), кроме экспериментального исследования явления удара, проведено вычисление распределения напряжений в телах, соприкасающихся по круговой площадке. Распределение напряжений в общем случае эллиптической площадки соприкасания впервые (насколько известно автору) рассмотрено Н. М. Беляевым в работе «Местные напряжения при сжатии упругих тел» (Сборник статей «Инженерные сооружения и строительная механика», изд-во «Путь», Ленинград, 1924). Подробные литературные указания на работы, опубликованные до 1909 г., имеются в упомянутом труде А. Н. Динника. Решение новых контактных задач, именно задач о плотном прилегании упругих тел (см. § 6), было впервые дано И. Я. Штаерманом в 1939 г. Работы И. Я. Штаермана вновь возбудили интерес к пространственным контактным задачам и вызвали многочисленные новые исследования.

Подробное изложение работ И. Я. Штаермана дано в его монографии «Контактная задача теории упругости» (Гостехиздат, 1949). Очерк развития работ по контактным задачам и подробная библиография их даны в книге Л. А. Галина «Контактные задачи теории упругости» (Гостехиздат, 1953). Наличие недавно изданных трудов И. Я. Штаермана и Л. А. Галина делает излишним изложение в настоящей книге многочисленных важных результатов этих двух авторов. Изложение пространственной контактной задачи в главе 5, основывающееся на статье автора «Некоторые контактные задачи теории упругости» (Прикл. матем. и мех. 5, № 3, 1941, стр. 383), преследовало цель дать единообразный приём рассмотрения как классической задачи Герца, так и задачи о плотном прилегании. Нам представляется, что этот приём, заключающийся в прямом построении потенциала  $\omega$ , является наиболее простым и прямо ведущим к решению как рассмотренных в главе 5 задач, так и других, им подобных.

Способ решения интегрального уравнения (2.11), приведённого в § 2, в случае, когда область контакта ограничена эллипсом и, в частности, окружностью, а  $\varphi(x, y)$  является полиномом, был дан И. Я. Штаерманом в указанной выше его книге. Для плоского прямоугольного штампа приближённое решение, получение которого потребовало, повидимому, громадного вычислительного труда, было дано И. М. Горбуновым-Посадовым в работе «Расчёт балок и плит на упругом полупространстве» (Прикл. матем. и мех. 4, № 3, 1940, стр. 60). Библиографию других работ того же автора см. в книге Л. А. Галина.

Задача о плоском штампе с круговым основанием (§ 4), как указывалось в примечаниях главы 2, впервые рассмотрена Буссинеском для случая центрально нагружённого штампа. Для нецентрально нагружённого штампа решение было дано В. М. Абрамовым в работе «Исследование случая несимметричного давления штампа круглого сечения на упругое полупространство» (Доклады Акад. наук 23, 1939, § 8, стр. 759—763). Решение В. М. Абрамова, основанное на рассмотрении интегрального уравнения (2.11) при  $\varphi(x, y) = 0$ , весьма сложно и требует знания некоторых специальных свойств бесселевых функций.

Результаты подробных вычислений напряжений, возникающих в упругом полупространстве под действием прижатого к нему центрально нагружённого жёсткого штампа, даны в работе Sneddon'a «Boussinesq Problem for a flat-ended Cylinder» (Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 42, № 2, 1946, стр. 29). Даны таблицы для определения напряжений  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$  при  $m = 4$  при значениях координат  $0 < \frac{r}{a} < 3$  и  $0 < \frac{z}{a} < 1,4$ .

Задача о коническом штампе (§ 7) рассмотрена в монографии И. Я. Штаермана, а также в работе А. Е. Н. Love «Boussinesq Problem for a Rigid Cone» (The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series, 10, 1939, № 39, стр. 161—179).

Решение задачи о нецентрально нагружённом плоском эллиптическом штампе (§ 9) было дано в нашей работе «Исследование случая несимметричного давления плоского штампа эллиптического сечения на упругое полупространство» (Доклады Акад. наук СССР 21 № 8, 1939, стр. 759).

Результаты, относящиеся к распределению напряжений (§ 10), имеются в указанной выше работе Н. М. Беляева.

Из новых исследований по контактной пространственной задаче следует указать на упомянутую в примечаниях к главе 2 работу Миндлина, на статью В. И. Моссаковского «Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий» (Прикл. матем. и мех. 18, № 2, 1954, стр. 187), на заметку того же автора «Применение теоремы взаимности к определению суммарных сил и моментов в пространственных контактных задачах» (там же 17, № 4, 1953, стр. 477) и на работу М. Я. Леонова «Общая задача о давлении кругового штампа на упругое полупространство» (там же, № 1, стр. 87).

Заметим ещё, что изложение задачи Герца приводится во многих учебных руководствах по теории упругости (Лява, С. П. Тимошенко, Л. С. Лейбензона и др).

## ГЛАВА 6

### ДЕФОРМАЦИЯ СИММЕТРИЧНО НАГРУЖЁННОЙ УПРУГОЙ СФЕРЫ

#### § 1. Общая форма решения задачи о равновесии симметрично нагружённого тела вращения

Мы исходим из решения уравнений теории упругости в форме, предложенной П. Ф. Папковичем:

$$\mathbf{u} = \frac{4(m-1)}{m} \mathbf{B} - \text{grad}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{B} + B_0). \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{B}$  — гармонический вектор,  $B_0$  — гармонический скаляр:

$$\Delta B_x = 0, \quad \Delta B_y = 0, \quad \Delta B_z = 0, \quad \Delta B_0 = 0. \quad (1.2)$$

Если ввести цилиндрические координаты  $\rho, \varphi, z$  ( $z$  — ось вращения) и обозначить через  $B_\rho, B_\varphi, B_z$  проекции  $\mathbf{B}$  на соответствующие координатные направления, то можно написать:

$$B_x = B_\rho \cos \varphi - B_\varphi \sin \varphi, \quad B_y = B_\rho \sin \varphi + B_\varphi \cos \varphi \quad (1.3)$$

или

$$B_x + iB_y = (B_\rho + iB_\varphi) e^{i\varphi}. \quad (1.4)$$

В случае симметрично нагружённого тела вращения явление деформации одинаково протекает во всех меридиональных плоскостях  $\varphi = \text{const}$ ; поэтому скаляр  $B_0$ , а также проекции

$$B_\rho, B_\varphi, B_z$$

вектора  $\mathbf{B}$  не должны зависеть от  $\varphi$ , и из (1.4) следует, что

$$B_\rho = B_\rho(\rho, z), \quad B_\varphi = B_\varphi(\rho, z) \quad (1.5)$$

будут коэффициентами при  $e^{i\varphi}$  в выражении гармонической функции

$$\Delta(B_\rho e^{i\varphi}) = 0, \quad \Delta(B_\varphi e^{i\varphi}) = 0. \quad (1.6)$$

Обращаясь к решению (1.1), имеем далее по (1.3)

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{B} = xB_x + yB_y + zB_z = \rho B_\rho + zB_z \quad (1.7)$$

и, значит, проекции вектора перемещения  $\mathbf{u}$  на координатные направления  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$  выразятся формулами

$$\left. \begin{aligned} u_\rho &= \frac{4(m-1)}{m} B_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho + z B_z + B_0), \\ u_\varphi &= \frac{4(m-1)}{m} B_\varphi, \\ \omega &= \frac{4(m-1)}{m} B_z - \frac{\partial}{\partial z} (\rho B_\rho + z B_z + B_0). \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Составляющая градиента от величины

$$\rho B_\rho + z B_z + B_0$$

по направлению  $\varphi$  равна нулю, так как эта величина от  $\varphi$  не зависит. Поэтому перемещение  $u_\varphi$  в (1.8) оказалось пропорциональным  $B_\varphi$ , т. е. представляет функцию, произведение которой на  $e^{i\varphi}$  (на  $\cos \varphi$  или  $\sin \varphi$ ) является гармонической функцией [см. (1.6)].

Задача о равновесии симметрично нагруженного тела вращения, таким образом, распалась на две самостоятельные и не зависящие друг от друга задачи: во-первых, задачу кручения, связанную с определением  $u_\varphi$  по краевым условиям, наложенным или на это перемещение, или на выражающиеся только через него (когда  $u_\rho$  и  $\omega$  не зависят от  $\varphi$ ) напряжения  $\tau_{\rho\varphi}$ ,  $\tau_{z\varphi}$ ; во-вторых, задачу о деформации в меридиональной плоскости, когда искомыми величинами являются составляющие перемещения  $u_\rho$  и  $\omega$  и напряжения  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_z$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\tau_{z\rho}$ .

Задача о кручении тела вращения не рассматривается в этой книге. Мы обратимся ко второй задаче и рассмотрим её в применении к симметрично нагруженной сфере, а в главе 7 — к случаю симметрично нагруженного цилиндра. Естественно ввести в плоскости меридиана полярные координаты  $R$ ,  $\vartheta$ ; тогда  $R$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$  будут сферическими координатами точки. Отсчитывая угол  $\vartheta$  от оси  $z$  — от полюса сферы, имеем:

$$\rho = R \sin \vartheta, \quad z = R \cos \vartheta \quad (1.9)$$

и, значит,

$$\rho B_\rho + z B_z = R (B_\rho \sin \vartheta + B_z \cos \vartheta) = R B_R, \quad (1.10)$$

где  $B_R$  — проекция вектора  $\mathbf{B}$  на направление  $\mathbf{R}$ . Теперь по (1.1) получим выражения проекций перемещения  $\mathbf{u}$  на оси сферической системы координат в виде

$$\left. \begin{aligned} u_R &= \frac{4(m-1)}{m} B_R - \frac{\partial}{\partial R} (R B_R + B_0), \\ u_\vartheta &= \frac{4(m-1)}{m} B_\vartheta - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (R B_R + B_0). \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Напомним, что ни  $B_R$ , ни  $B_\vartheta$  не являются гармоническими функциями. Но они с помощью формул

$$B_R = B_\rho \sin \vartheta + B_z \cos \vartheta, \quad B_\vartheta = B_\rho \cos \vartheta - B_z \sin \vartheta \quad (1.12)$$

могут быть выражены через гармоническую функцию  $B_z$  и через функцию  $B_p$ , также не являющуюся гармонической, а представляющей коэффициент при  $e^{i\varphi}$  в выражении гармонической функции, пропорциональной  $e^{i\varphi}$ .

Приведём ещё формулы, дающие выражение деформаций и объёмного расширения в сферических координатах, когда  $u_R$  и  $u_\vartheta$  не зависят от  $\varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_R &= \frac{\partial u_R}{\partial R}, & \varepsilon_\vartheta &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{R} u_R, & \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{R} (u_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta + u_R), \\ \gamma_{R\vartheta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \vartheta} + R \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{u_\vartheta}{R} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

$$\Delta = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 u_R) + \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (u_\vartheta \sin \vartheta). \quad (1.14)$$

Объёмное расширение обозначено через  $\Delta$ , так как буква  $\vartheta$  — ранее принятое обозначение для него — теперь использована для наименования одной из сферических координат.

## § 2. Выражения перемещений и напряжений через объёмные сферические функции

1°. Напомним, что объёмная сферическая гармоническая функция, не зависящая от  $\varphi$ , представляется в форме одного из произведений вида

$$R^n P_n(\mu), \quad \frac{1}{R^{n+1}} P_n(\mu) \quad (\cos \vartheta = \mu), \quad (2.1)$$

где  $n$  принимает целочисленные значения ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), а  $P_n(\mu)$  обозначает полином Лежандра  $n$ -го порядка.

Каждая из этих функций удовлетворяет уравнению Лапласа; первая остаётся конечной и непрерывной (вместе со своими производными по  $R$  и  $\vartheta$ ) внутри некоторой сферы (при  $R \leq R_0$ ), а вторая — вне такой сферы (при  $R \geq R_0$ ) и обращается в нуль при  $R \rightarrow \infty$ .

Объёмная сферическая гармоническая функция, пропорциональная  $e^{i\varphi}$ , представляется соответственно в форме одного из произведений

$$\left. \begin{aligned} R^n \frac{dP_n}{d\mu} e^{i\varphi} &= -R^n P'_n(\mu) \sin \vartheta e^{i\varphi}, \\ \frac{1}{R^{n+1}} \frac{dP_n}{d\mu} e^{i\varphi} &= -\frac{1}{R^{n+1}} P'_n(\mu) \sin \vartheta e^{i\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

(штрихом здесь и далее обозначены производные по  $\mu = \cos \vartheta$ ).



По (1.12) теперь можно для внутренней задачи написать (для любого  $n = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$\left. \begin{aligned} B_R &= R^n \left( A \frac{dP_n}{d\vartheta} \sin \vartheta + A^* \mu P_n \right) = \\ &= R^n [(\mu^2 - 1) A P'_n(\mu) + A^* P_n(\mu) \mu], \\ B_\vartheta &= R^n \left( A \frac{dP_n}{d\vartheta} \mu - A^* P_n \sin \vartheta \right) = \\ &= -R^n \sin \vartheta [A \mu P'_n(\mu) + A^* P_n(\mu)], \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

где  $A$  и  $A^*$  — некоторые постоянные. Но одна из четырёх гармонических функций в решении П. Ф. Папковича (1.1) может быть, без риска нанести ущерб общности решения, выбрана произвольно. Этим мы воспользуемся, чтобы получить выражения  $B_R$  и  $B_\vartheta$  в наиболее удобной для последующего применения форме. Именно, оказывается возможным так распорядиться выбором постоянной  $A^*$ , чтобы  $B_R$  и  $B_\vartheta$  для данного  $n$  оказались пропорциональными соответственно  $P_{n-1}(\mu)$  и  $\frac{dP_{n-1}}{d\vartheta}$ .

Если принять далее

$$B_0 = -BR^{n-1}P_{n-1}(\mu), \quad (2.4)$$

где  $B$  — новая постоянная, то из структуры выражений для перемещений, а также деформаций и объёмного расширения [см. (1.11), (1.13), (1.14)] будет следовать, что  $u_R$ ,  $\sigma_R$  окажутся пропорциональными  $P_{n-1}(\mu)$ , а  $u_\vartheta$  и  $\tau_{R\vartheta}$  — производной  $\frac{dP_{n-1}}{d\vartheta}$ . Но это как раз и облегчит существенно решение краевых задач для сферы.

Возвращаясь поэтому к (2.3), воспользуемся соотношениями:

$$(\mu^2 - 1) P'_n(\mu) = n(\mu P_n - P_{n-1}), \quad \mu P'_n(\mu) = nP_n + P'_{n-1}.$$

Тогда получим из (2.3):

$$\left. \begin{aligned} B_R &= R^n [-AnP_{n-1} + \mu P_n(An + A^*)], \\ B_\vartheta &= -R^n [AP'_{n-1} + P_n(An + A^*) \sin \vartheta]. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Таким образом, достаточно принять

$$An + A^* = 0. \quad (2.6)$$

Получим:

$$B_R = -AnR^n P_{n-1}(\mu), \quad B_\vartheta = -AR^n P'_{n-1}(\mu) \sin \vartheta = AR^n \frac{dP_{n-1}}{d\vartheta} \quad (2.7)$$

или, заменив здесь и в (2.4)  $n$  на  $(n+1)$ ,

$$B_R = -A(n+1)R^{n+1}P_n(\mu), \quad B_\vartheta = AR^{n+1} \frac{dP_n}{d\vartheta}, \quad B_0 = -BR^n P_n. \quad (2.8)$$

2°. По (1.11) получаем теперь выражения перемещений требуемого вида:

$$\left. \begin{aligned} u_R &= \left[ AR^{n+1} (n+1) \left( n - 2 + \frac{4}{m} \right) + BR^{n-1} n \right] P_n(\mu), \\ u_\vartheta &= \left[ AR^{n+1} \left( n + 5 - \frac{4}{m} \right) + BR^{n-1} \right] \frac{dP_n}{d\vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Аналогичное вычисление можно провести для случая внешней задачи; но в нём нет нужды — необходимые формулы можно сразу получить из (2.9), заменив в них

$$n \text{ на } -(n+1) \quad (2.10)$$

и замечая, что выражению

$$P_{-(n+1)}(\mu)$$

можно при этом приписать тот же индекс  $n$ :

$$P_{-(n+1)}(\mu) = P_n(\mu). \quad (2.11)$$

Это следует, например, из того обстоятельства, что дифференциальное уравнение полиномов Лежандра

$$(\mu^2 - 1)P_n''(\mu) + 2\mu P_n'(\mu) = n(n+1)P_n(\mu) \quad (2.12)$$

не изменяет при указанной замене своего вида.

Таким образом, находим:

$$\left. \begin{aligned} u_R &= \left[ \frac{C}{R^n} n \left( n + 3 - \frac{4}{m} \right) - \frac{D(n+1)}{R^{n+2}} \right] P_n(\mu), \\ u_\vartheta &= \left[ \frac{C}{R^n} \left( -n + 4 - \frac{4}{m} \right) + \frac{D}{R^{n+2}} \right] \frac{dP_n}{d\vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Теперь по (1.13) находим деформации и далее по ним — напряжения. Получаем формулы для внутренней задачи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_R &= \left[ A(n+1) \left( n^2 - n - 2 - \frac{2}{m} \right) R^n + Bn(n-1)R^{n-2} \right] P_n(\mu), \\ \frac{1}{2G} \tau_{R\vartheta} &= \left[ A \left( n^2 + 2n - 1 + \frac{2}{m} \right) R^n + B(n-1)R^{n-2} \right] \frac{dP_n}{d\vartheta}, \\ \frac{1}{2G} \sigma_\vartheta &= - \left[ A \left( n^2 + 4n + 2 + \frac{2}{m} \right) (n+1) R^n + Bn^2 R^{n-2} \right] P_n(\mu) - \\ &\quad - \left[ A \left( n + 5 - \frac{4}{m} \right) R^n + BR^{n-2} \right] \frac{dP_n}{d\vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta, \\ \frac{1}{2G} \tau_{\varphi} &= \left[ A(n+1) \left( n - 2 - \frac{2}{m} - \frac{4n}{m} \right) R^n + BnR^{n-2} \right] P_n(\mu) + \\ &\quad + \left[ A \left( n + 5 - \frac{4}{m} \right) R^n + BR^{n-2} \right] \frac{dP_n}{d\vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

для внешней задачи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_R &= \left[ -\frac{Cn}{R^{n+1}} \left( n^2 + 3n - \frac{2}{m} \right) + \frac{D(n+1)(n+2)}{R^{n+3}} \right] P_n(\mu), \\ \frac{1}{2G} \tau_{R\theta} &= \left[ \frac{C}{R^{n+1}} \left( n^2 - 2 + \frac{2}{m} \right) - \frac{D(n+2)}{R^{n+3}} \right] \frac{dP_n}{d\theta}, \\ \frac{1}{2G} \tau_\theta &= \left[ \frac{Cn}{R^{n+1}} \left( n^2 - 2n - 1 + \frac{2}{m} \right) - \frac{D(n+1)^2}{R^{n+3}} \right] P_n - \\ &\quad - \left[ \frac{C}{R^{n+1}} \left( -n + 4 - \frac{4}{m} \right) + \frac{D}{R^{n+3}} \right] \frac{dP_n}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta, \\ \frac{1}{2G} \tau_\varphi &= \left[ \frac{Cn}{R^{n+1}} \left( n + 3 - \frac{4n}{m} - \frac{2}{m} \right) - \frac{D(n+1)}{R^{n+3}} \right] P_n + \\ &\quad + \left[ \frac{C}{R^{n+1}} \left( -n + 4 - \frac{4}{m} \right) + \frac{D}{R^{n+3}} \right] \frac{dP_n}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \right\} (2.15)$$

Отметим ещё формулы для объёмного расширения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= -\frac{2(m-2)}{m} (2n+3)(n+1) AR^n P_n(\mu) \\ \text{для внутренней задачи и} \\ \Delta &= -\frac{2(m-2)}{m} (2n-1)n CR^{-(n+1)} P_n(\mu) \end{aligned} \right\} (2.16)$$

— для внешней. Как и следовало ожидать,  $\Delta$  оказалось гармонической функцией.

Все вышеприведённые формулы пригодны для любого целочисленного значения  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

3°. Для каждого  $n \geq 2$  мы построили, таким образом, четыре частных решения, характеризуемые постоянными  $A, B, C, D$ , которым мы в случае нужды будем приписывать индекс  $n$ . Система напряжений, соответствующих этим решениям, распределённых по любой сфере  $R = R_0$ , статически эквивалентна нулю. Достаточно убедиться, что обращается в нуль проекция главного вектора на ось  $z$ :

$$\begin{aligned} Z^* &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (\sigma_R \cos \theta - \tau_{R\theta} \sin \theta) R_0^2 \sin \theta d\theta = \\ &= 2\pi R_0^3 \int_{-1}^1 (\mu \tau_R - \sin \theta \tau_{R\theta}) d\mu, \end{aligned} \quad (2.17)$$

так как обращение в нуль проекций его на две другие оси ( $x$  и  $y$ ), а также моментов относительно осей  $x, y, z$  непосредственно следует из независимости напряжений от угла  $\varphi$ .

Обращаясь к (2.17) и вспоминая, что  $\sigma_R$  и  $\tau_{R\vartheta}$  (при фиксированном  $R = R_0$ ) пропорциональны  $P_n(\mu)$ , а также  $\frac{dP_n}{d\vartheta}$ , мы должны вычислить интегралы:

$$\int_{-1}^1 \mu P_n(\mu) d\mu = \int_{-1}^1 P_1(\mu) P_n(\mu) d\mu, \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dP_n}{d\vartheta} \sin \vartheta d\mu &= \int_{-1}^1 n(\mu P_n - P_{n-1}) d\mu = \\ &= n \int_{-1}^1 P_1(\mu) P_n(\mu) d\mu - n \int_{-1}^1 P_0(\mu) P_{n-1}(\mu) d\mu. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Но они обращаются в нуль при  $n \geq 2$  вследствие ортогональности полиномов Лежандра:

$$\int_{-1}^1 P_m(\mu) P_n(\mu) d\mu = 0 \quad (m \neq n), \quad (2.20)$$

что и доказывает эквивалентность нулю полученной системы напряжений при  $n \geq 2$ .

Конечно, сказанное сохраняет силу и при  $n = 0$ ; но в этом случае никакого вычисления не требуется, так как  $\tau_{R\vartheta} = 0$ , а распределение  $\sigma_R$  по поверхности сферы  $R = R_0$  обладает центральной симметрией ( $\sigma_R$  зависит только от  $R$ , но не от  $\vartheta$ ). Отметим ещё, что при  $n = 0$  мы получаем не четыре, а два частных решения — одно для внутренней задачи, а другое — для внешней; они в наших обозначениях будут:

$$\begin{aligned} u_R &= -2A_0 \frac{m-2}{m} R, \quad u_\vartheta = 0, \\ \sigma_R = \sigma_\vartheta = \sigma_\varphi &= -4GA_0 \frac{m+1}{m}, \quad \tau_{R\vartheta} = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

и соответственно

$$\begin{aligned} u_R &= -\frac{D_0}{R^2}, \quad u_\vartheta = 0, \quad \sigma_R = \frac{4GD_0}{R^3}, \\ \sigma_\vartheta = \sigma_\varphi &= -\frac{2GD_0}{R^3}, \quad \tau_{R\vartheta} = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Остаётся ещё рассмотреть случай  $n = 1$ . Для внутренней задачи имеем частное решение

$$u_R = -2A_1 \frac{m-4}{m} R^2 \cos \vartheta, \quad u_\vartheta = -2A_1 \frac{3m-2}{m} R^2 \sin \vartheta \quad (2.23)$$

с соответствующими напряжениями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= -8GA_1 \frac{m+1}{m} R \cos \vartheta, & \tau_{R\vartheta} &= -\frac{4GA_1(m+1)}{m} R \sin \vartheta, \\ \sigma_\vartheta &= \sigma_\varphi = -16GA_1 \frac{m+1}{m} R \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} (2.24)$$

Главный вектор напряжений  $\sigma_R$  и  $\tau_{R\vartheta}$  на любой поверхности  $R = R_0$  здесь также оказывается равным нулю:

$$\begin{aligned} Z^* &= 2\pi \int_0^\pi (\sigma_R \cos \vartheta - \tau_{R\vartheta} \sin \vartheta) R_0^3 \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= -8\pi GR_0^3 A_1 \frac{m+1}{m} \int_0^\pi (2 \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= -8\pi GR_0^3 A_1 \frac{m+1}{m} \int_{-1}^1 (3\mu^2 - 1) d\mu = 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Второе частное решение для  $n = 1$  в случае внутренней задачи

$$u_R = B_1 \cos \vartheta, \quad u_\vartheta = -B_1 \sin \vartheta \quad (2.26)$$

представляет жёсткое смещение, и нетрудно проверить по (2.14), что соответствующие ему напряжения будут нулями.

Обратимся теперь к формулам внешней задачи. Здесь мы имеем решение

$$u_R = \frac{4C_1(m-1)}{m} \frac{\cos \vartheta}{R}, \quad u_\vartheta = -\frac{(3m-4)C_1}{m} \frac{\sin \vartheta}{R} \quad (2.27)$$

с напряжениями

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= -\frac{4G(2m-1)C_1}{m} \frac{\cos \vartheta}{R^2}, & \tau_{R\vartheta} &= \frac{2G(m-2)C_1}{m} \frac{\sin \vartheta}{R^2}, \\ \sigma_\vartheta &= \sigma_\varphi = \frac{2G(m-2)C_1}{m} \frac{\cos \vartheta}{R^2}. \end{aligned} \right\} (2.28)$$

По (2.17) в этом случае получаем:

$$Z^* = -\frac{16\pi GC_1(m-1)}{m}, \quad \text{т. е.} \quad C_1 = -\frac{mZ^*}{16\pi G(m-1)}. \quad (2.29)$$

Постоянная  $C_1$ , таким образом, выражается через главный вектор напряжений, распределённых по поверхности сферической полости; конечно, постоянная  $C_1$  оказалась не зависящей от радиуса полости.

Остаётся ещё одно решение, соответствующее  $n = 1$  во внешней задаче:

$$u_R = -\frac{2D_1 \cos \vartheta}{R^3}, \quad u_\vartheta = -\frac{D_1 \sin \vartheta}{R^3}, \quad (2.30)$$

$$\sigma_R = \frac{12GD_1}{R^4} \cos \vartheta, \quad \tau_{R\vartheta} = \frac{6GD_1}{R^4} \sin \vartheta, \quad \sigma_\vartheta = \tau_\varphi = -\frac{6GD_1}{R^4} \cos \vartheta. \quad (2.31)$$

Величина  $Z^*$  в этом случае будет нулём [ср. (2.25)].

4°. В дальнейшем будем рассматривать краевые задачи, относящиеся к заданию напряжений  $\sigma_R$  и  $\tau_{R\vartheta}$  на поверхности  $R = R_0$ ; аналогично можно было бы заняться рассмотрением случая задания перемещений, но он менее интересен для приложений.

Здесь мы имеем три категории задач: внутренняя задача для сплошной сферы; внешняя задача для упругого пространства вне сферической полости; наконец, задача о равновесии сферического слоя — полой сферы, ограниченной сферическими поверхностями  $R = R_1$  (внутренний радиус) и  $R = R_0$  (внешний радиус).

Внутренняя задача. Заданы внешние нагрузки на поверхности  $R = R_0$

$$\sigma_R = \sigma(\vartheta), \quad \tau_{R\vartheta} = \tau(\vartheta), \quad (2.32)$$

причём  $\sigma$  и  $\tau$  считаются положительными, когда нагрузки направлены в сторону возрастания  $R$  (от центра сферы) и соответственно  $\vartheta$ . Эти функции мы представляем в форме рядов вида

$$\sigma(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n P_n(\mu), \quad \tau(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \frac{dP_n}{d\vartheta} = -\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \frac{dP_n}{d\mu} \sin \vartheta. \quad (2.33)$$

Коэффициенты этих рядов определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi \sigma(\vartheta) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta, \\ \tau_n &= \frac{2n+1}{2n(n+1)} \int_0^\pi \tau(\vartheta) \frac{dP_n}{d\vartheta} \sin \vartheta \, d\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Это следует из приводимой в курсах анализа общей формулы, дающей разложение произвольной функции  $f(\vartheta, \varphi)$ , заданной на сфере, в ряд по сферическим функциям:

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n (A_{n\nu} \cos \nu\varphi + B_{n\nu} \sin \nu\varphi) P_n^{(\nu)}(\mu), \quad (2.35)$$

где  $P_n^{(\nu)}(\mu)$  — присоединённая функция Лежандра

$$P_n^{(\nu)}(\mu) = \sin^{\nu} \vartheta \frac{d^{\nu} P_n(\mu)}{(d \cos \vartheta)^{\nu}} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n) \quad (2.36)$$

и, в частности (что уже использовано выше),

$$P_n^{(1)}(\mu) = \sin \vartheta \frac{dP_n}{d\mu} = -\frac{dP_n}{d\vartheta}. \quad (2.37)$$

Коэффициенты  $A_{n\nu}$  и  $B_{n\nu}$  здесь определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} A_{n\nu} &= \frac{(n-\nu)!}{(n+\nu)!} \frac{2n+1}{2\lambda_{\nu}\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f(\vartheta, \varphi) \cos^{\nu} \varphi P_n^{(\nu)}(\mu) \sin \vartheta d\vartheta, \\ B_{n\nu} &= \frac{(n-\nu)!}{(n+\nu)!} \frac{2n+1}{2\lambda_{\nu}\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f(\vartheta, \varphi) \sin^{\nu} \varphi P_n^{(\nu)}(\mu) \sin \vartheta d\vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

где  $\lambda_0 = 2$  и  $\lambda_{\nu} = 1$  при  $\nu \neq 0$ .

Полагая в этих формулах  $f(\vartheta, \varphi)$  равной сначала  $\sigma(\vartheta)$  и в другой раз  $\tau(\vartheta) \cos \varphi$ , получим соответственно первый и второй ряды (2.33).

Чтобы поставленная задача могла иметь решение, необходимо, чтобы внешние нагрузки представляли уравновешенную систему сил, т. е. чтобы

$$Z^* = 2\pi R_0^3 \int_0^{\pi} (\sigma(\vartheta) \cos \vartheta - \tau(\vartheta) \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = 0.$$

Подставляя сюда выражения  $\sigma$  и  $\tau$  в форме рядов (2.33), получим [см. также (2.4)]:

$$\begin{aligned} Z^* &= 2\pi R_0^3 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \left[ \sigma_n P_n(\cos \vartheta) \cos \vartheta - \tau_n \frac{dP_n}{d\vartheta} \sin \vartheta \right] \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= 2\pi R_0^3 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^1 \{ \sigma_n \mu P_n(\mu) - n \tau_n [\mu P_n(\mu) - P_{n-1}(\mu)] \} d\mu. \end{aligned}$$

Отличным от нуля может оказаться лишь слагаемое, соответствующее  $n = 1$ :

$$Z^* = 2\pi R_0^3 \left[ \sigma_1 \int_{-1}^1 \mu^3 d\mu - \tau_1 \int_{-1}^1 (\mu^2 - 1) d\mu \right] = \frac{4\pi R_0^3}{3} (\sigma_1 + 2\tau_1), \quad (2.39)$$

и условие уравновешенности будет удовлетворено, если

$$\sigma_1 + 2\tau_1 = 0. \quad (2.40)$$

Обратно, выразив здесь коэффициенты  $\sigma_1$  и  $\tau_1$  по (2.34), вернёмся к условию (2.39).

При условии (2.40) мы можем теперь определить постоянную  $A_1$  в решении (2.23):

$$A_1 = -\frac{m\sigma_1}{8GR_0(m+1)} = \frac{m\tau_1}{4GR_0(m+1)}. \quad (2.41)$$

Постоянная  $A_0$  в решении (2.21) находится по соотношению

$$A_0 = -\frac{m\sigma_0}{4G(m+1)} \quad (2.42)$$

(напомним, что  $\tau_0 = 0$ ).

Для определения каждой из постоянных  $A_n$  и  $B_n$  (при  $n \geq 2$ ) получаем систему уравнений [см. (2.14)]

$$\left. \begin{aligned} A_n(n+1)\left(n^2 - n - 2 - \frac{2}{m}\right)R_0^n + B_n n(n-1)R_0^{n-2} &= \frac{\sigma_n}{2G}, \\ A_n\left(n^2 + 2n - 1 + \frac{2}{m}\right)R_0^n + B_n(n-1)R_0^{n-2} &= \frac{\tau_n}{2G} \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

с определителем

$$D_n = -2(n-1)\left[n(n-1) + \frac{m+1}{m}(2n+1)\right]R_0^{2(n-1)}, \quad (2.44)$$

отличным от нуля (при  $n = 2, 3, \dots$ ). Поэтому внутренняя задача о равновесии сферы, подверженной действию уравновешенной симметричной (не зависящей от  $\varphi$ ) нагрузки, представимой рядами (2.33), решена полностью.

Внешняя задача. Краевые условия записываются в той же форме (2.32), но надо помнить, что теперь  $\sigma(\vartheta)$  и  $\tau(\vartheta)$  считаются положительными, если соответствующие силы направлены противоположно положительным координатным направлениям  $R$  и  $\vartheta$ .

Представляя теперь  $\sigma$  и  $\tau$  в форме рядов (2.33), получим на основании (2.15) для определения коэффициентов  $D_n$  и  $C_n$  при  $n = 1, 2, 3, \dots$  систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} -\frac{C_n n}{R_0^{n+1}}\left(n^2 + 3n - \frac{2}{m}\right) + \frac{D_n(n+1)(n+2)}{R_0^{n+3}} &= \frac{\sigma_n}{2G}, \\ \frac{C_n}{R_0^{n+1}}\left(n^2 - 2 + \frac{2}{m}\right) - \frac{D_n(n+2)}{R_0^{n+3}} &= \frac{\tau_n}{2G} \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

с определителем

$$D = 2(n+2)\left[(n+2)(n+1) - \frac{m+1}{m}(2n+1)\right]R_0^{2n+4}, \quad (2.46)$$



отличным от нуля для всех указанных значений  $n$ . В частности, при  $n = 1$  получаем:

$$C_1 = -\frac{(\sigma_1 + 2\tau_1) m R_0^2}{12G(m-1)}, \quad D_1 = \frac{R_0^4}{36G} \left( \sigma_1 \frac{m-2}{m-1} - 2\tau_1 \frac{2m-1}{m-1} \right). \quad (2.47)$$

Из (2.29) можно теперь выразить проекцию на ось  $z$  главного вектора напряжений  $\sigma_R$  и  $\tau_{R\vartheta}$ , действующих по поверхности любой сферы:

$$Z = \frac{4\pi}{3} (\sigma_1 + 2\tau_1) R_0^2. \quad (2.48)$$

Это же выражение было получено выше [см. (2.39)], при вычислении главного вектора  $Z^*$  внешних нагрузок  $\sigma(\vartheta)$  и  $\tau(\vartheta)$ ; надо лишь иметь в виду, что в выражении  $Z^*$  следует изменить знак, так как теперь (для внешней задачи) положительные направления  $\sigma(\vartheta)$  и  $\tau(\vartheta)$  изменены на прямо противоположные; получим, как и требуется,

$$Z + Z^* = 0. \quad (2.49)$$

Для  $n = 0$  во внешней задаче по (2.22) находим:

$$D_0 = \frac{\sigma_0 R_0^3}{4G}. \quad (2.50)$$

Полая сфера (сферический слой). Краевые условия записываются в форме

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } R = R_0 \quad \sigma_R = \sigma^{(e)}(\vartheta), \quad \tau_{R\vartheta} = \tau^{(e)}(\vartheta), \\ \text{при } R = R_1 \quad \sigma_R = \sigma^{(i)}(\vartheta), \quad \tau_{R\vartheta} = \tau^{(i)}(\vartheta). \end{array} \right\} \quad (2.51)$$

Внешние нагрузки должны представлять уравновешенную систему сил

$$\begin{aligned} Z^* &= 2\pi R_0^2 \int_0^\pi (\sigma^{(e)} \cos \vartheta - \tau^{(e)} \sin \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta - \\ &\quad - 2\pi R_1^2 \int_0^\pi (\sigma^{(i)} \cos \vartheta - \tau^{(i)} \sin \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta = 0, \end{aligned} \quad (2.52)$$

откуда, как и выше, получим:

$$R_0^2 (\sigma_1^{(e)} + 2\tau_1^{(e)}) - R_1^2 (\sigma_1^{(i)} + 2\tau_1^{(i)}) = 0. \quad (2.53)$$

Система четырёх уравнений, служащая для определения трёх коэффициентов  $A_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  [см. (2.14) и (2.15)],

$$\left. \begin{aligned} -4A_1 \frac{m+1}{m} R_0 - \frac{2C_1}{R_0^2} \frac{2m-1}{m} + \frac{6D_1}{R_0^4} &= \frac{1}{2G} \sigma_1^{(e)}, \\ 2A_1 \frac{m+1}{m} R_0 - \frac{C_1}{R_0^2} \frac{m-2}{m} - \frac{3D_1}{R_0^4} &= \frac{1}{2G} \tau_1^{(e)}, \\ -4A_1 \frac{m+1}{m} R_1 - \frac{2C_1}{R_1^2} \frac{2m-1}{m} + \frac{6D_1}{R_1^4} &= \frac{1}{2G} \sigma_1^{(i)}, \\ 2A_1 \frac{m+1}{m} R_1 - \frac{C_1}{R_1^2} \frac{m-2}{m} - \frac{3D_1}{R_1^4} &= \frac{1}{2G} \tau_1^{(i)} \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

будет иметь решение; это следует из того, что определитель

$$D = \begin{vmatrix} -4 \frac{m+1}{m} R_0 & -\frac{2}{R_0^2} \frac{2m-1}{m} & \frac{6}{R_0^4} & -\frac{1}{2G} \sigma_1^{(e)} \\ 2 \frac{m+1}{m} R_0 & -\frac{1}{R_0^2} \frac{m-2}{m} & -\frac{3}{R_0^4} & -\frac{1}{2G} \tau_1^{(e)} \\ -4 \frac{m+1}{m} R_1 & -\frac{2}{R_1^2} \frac{2m-1}{m} & \frac{6}{R_1^4} & -\frac{1}{2G} \sigma_1^{(i)} \\ 2 \frac{m+1}{m} R_1 & -\frac{1}{R_1^2} \frac{m-2}{m} & -\frac{3}{R_1^4} & -\frac{1}{2G} \tau_1^{(i)} \end{vmatrix}, \quad (2.55)$$

равный

$$D = \frac{R_0^5 - R_1^5}{2m^2 R_0^6 R_1^6 G} 36(m^2 - 1) [R_0^2 (\sigma_1^{(e)} + 2\tau_1^{(e)}) - R_1^2 (\sigma_1^{(i)} + 2\tau_1^{(i)})], \quad (2.56)$$

при условии (2.53) обратится в нуль.

Из (2.54) теперь получим:

$$C_1 = -\frac{mR_0^2}{12G(m-1)} (\sigma_1^{(e)} + 2\tau_1^{(e)}) = -\frac{mR_1^2}{12G(m-1)} (\sigma_1^{(i)} + 2\tau_1^{(i)}) \quad (2.57)$$

и далее

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{m}{8G(m+1)(R_0^5 - R_1^5)} \left[ \sigma_1^{(e)} R_0^4 - \sigma_1^{(i)} R_1^4 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2m-1}{3(m-1)} R_0^2 (R_0^3 - R_1^3) (\sigma_1^{(e)} + 2\tau_1^{(e)}) \right], \\ D_1 &= \frac{R_1^4 R_0^4}{12G(R_0^5 - R_1^5)} \left[ -\sigma_1^{(e)} R_1 + \sigma_1^{(i)} R_0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2m-1}{3(m-1)} \frac{R_0^3 - R_1^3}{R_1^2} (\sigma_1^{(e)} + 2\tau_1^{(e)}) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

Соотношения упрощаются, если главный вектор внешних нагрузок обращается в нуль на каждой из поверхностей  $R = R_0$  и  $R = R_1$ ; тогда

$$\sigma_1^{(e)} + 2\tau_1^{(e)} = 0, \quad \sigma_1^{(i)} + 2\tau_1^{(i)} = 0 \quad (2.59)$$

и далее

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 0, \\ A_1 &= -\frac{m(\sigma_1^{(e)}R_0^4 - \sigma_1^{(i)}R_1^4)}{8G(m+1)(R_0^5 - R_1^5)}, \\ D_1 &= \frac{R_1^4R_0^4}{12G(R_0^5 - R_1^5)}(-\sigma_1^{(e)}R_1 + \sigma_1^{(i)}R_0). \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

Для определения коэффициентов  $A_0$  и  $D_0$ , соответствующих  $n = 0$ , получаем по (2.14) и (2.15) два уравнения:

$$-2A_0 \frac{m+1}{m} + \frac{2D_0}{R_0^3} = \frac{\sigma_0^{(e)}}{2G}, \quad -2A_0 \frac{m+1}{m} + \frac{2D_0}{R_1^3} = \frac{\sigma_0^{(i)}}{2G}, \quad (2.61)$$

из которых найдём формулы, содержащие решение задачи Ляме для полой сферы,

$$A_0 = -\frac{m(\sigma_0^{(e)}R_0^3 - \sigma_0^{(i)}R_1^3)}{4G(m+1)(R_0^3 - R_1^3)}, \quad D_0 = -\frac{R_0^3R_1^3(\sigma_0^{(e)} - \sigma_0^{(i)})}{4G(R_0^3 - R_1^3)}. \quad (2.62)$$

Далее для каждого  $n \geq 2$  коэффициенты  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  определяются из системы четырёх уравнений, которые составляются по (2.14) и (2.15); нужно для этого выразить, что коэффициенты при  $P_n$  и  $\frac{dP_n}{d\vartheta}$  в выражениях напряжений  $\sigma_R$  и  $\tau_{R\vartheta}$  при определённом  $n$  обращаются в  $\sigma_n^{(e)}$  и  $\tau_n^{(e)}$  при  $R = R_0$  и соответственно в  $\sigma_n^{(i)}$  и  $\tau_n^{(i)}$  при  $R = R_1$ . Определитель этой системы четырёх уравнений, вычисление которого вследствие его громоздкости не приводим, будет при любом целочисленном  $n$  отличным от нуля. Таким образом, задача может считаться решённой.

### § 3. Частное решение, соответствующее объёмным силам

1°. Мы рассмотрим случай сил, имеющих потенциал. Уравнения равновесия в перемещениях

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{m}{m-2} \text{grad div } \mathbf{u} = -\frac{1}{G} \mathbf{K} = \frac{1}{G} \text{grad } \Pi \quad (3.1)$$

можно удовлетворить, вводя потенциал перемещений

$$\mathbf{u} = \frac{1}{G} \text{grad } \gamma, \quad (3.2)$$

определяемый, как показывает подстановка в (3.1), из уравнения

$$\Delta\chi = \frac{m-2}{2(m-1)} \Pi. \quad (3.3)$$

Рассмотрим далее два частных случая.

2°. Потенциал  $\Pi$  зависит только от  $R$ :

$$\Pi = \Pi(R). \quad (3.4)$$

Тогда потенциал перемещения  $\chi$  также будет зависеть только от  $R$ ; получаем:

$$\Delta\chi = \chi''(R) + \frac{2}{R} \chi'(R) = \frac{1}{R^2} [R^2 \chi'(R)]' = \frac{m-2}{2(m-1)} \Pi(R), \quad (3.5)$$

откуда найдём:

$$\chi(R) = \frac{m-2}{2(m-1)} \int_0^R \frac{dR}{R^2} \int_0^R R^2 \Pi(R) dR \quad (3.6)$$

и, значит,

$$u_R = \frac{1}{G} \chi'(R) = \frac{m-2}{2G(m-1)} \int_0^R R^2 \Pi(R) dR, \quad u_\theta = 0. \quad (3.7)$$

Соответствующие напряжения будут:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \Pi(R) - \frac{2(m-2)}{(m-1)R^3} \int_0^R R^2 \Pi(R) dR, & \tau_{R\theta} &= 0, \\ \sigma_\theta &= \sigma_\varphi = \frac{\Pi(R)}{m-1} + \frac{m-2}{(m-1)R^3} \int_0^R R^2 \Pi(R) dR. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Если поверхность сферы  $R=R_0$  свободна, то, присоединяя (в случае внутренней задачи) к этому решению решение (2.21), найдём перемещения

$$\left. \begin{aligned} u_R &= -\frac{m-2}{2G(m+1)} \left[ \Pi(R_0) - \frac{2(m-2)}{m-1} \frac{1}{R_0^3} \int_0^{R_0} R^2 \Pi(R) dR \right] R + \\ &\quad + \frac{m-2}{2G(m-1)R^2} \int_0^R R^2 \Pi(R) dR, \\ u_\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

и напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \Pi(R) - \Pi(R_0) - \frac{m-2}{m-1} \left[ \frac{2}{R^3} \int_0^R R^2 \Pi(R) dR - \frac{2}{R_0^3} \int_0^{R_0} R^2 \Pi(R) dR \right], \\ \tau_{R\theta} &= 0, \\ \sigma_\theta = \sigma_\varphi &= \frac{\Pi(R)}{m-1} - \Pi(R_0) + \frac{m-2}{m-1} \left[ \frac{1}{R^3} \int_0^R R^2 \Pi(R) dR + \frac{2}{R_0^3} \int_0^{R_0} R^2 \Pi(R) dR \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Чтобы найти напряжения в центре сферы, вычисляем интеграл  $\int_0^R R^2 \Pi(R) dR = \int_0^R R^2 [\Pi(0) + R\Pi'(0) + \dots] dR = \frac{1}{3} R^3 \Pi(0) + \dots$ , где невыписанные слагаемые будут относительно  $R$  степени не ниже четвёртой; получаем (при  $R=0$ ):

$$\sigma_R^0 = \sigma_\theta^0 = \sigma_\varphi^0 = \frac{m+1}{3(m-1)} \Pi(0) - \Pi(R_0) + \frac{2(m-2)}{(m-1)R_0^3} \int_0^{R_0} R^2 \Pi(R) dR. \quad (3.11)$$

3°. Потенциал  $\Pi$  — гармоническая функция. Представим его (рассматриваем внутреннюю задачу) в виде суммы гармонических полиномов

$$\Pi = \Sigma \Pi_n(x, y, z). \quad (3.12)$$

Однородный гармонический полином  $\Pi_n$  степени  $n$  в интересующем нас случае симметрии вращения вокруг оси  $z$  может быть также представлен в форме

$$\Pi_n(x, y, z) = E_n R^n P_n(\mu). \quad (3.13)$$

Решение уравнения (3.3), соответствующее слагаемому  $\Pi_n$  в сумме (3.12), следует искать в форме

$$\chi_n = F_n R^2 \Pi_n, \quad (3.14)$$

где постоянная  $F_n$  подлежит определению. Имеем:

$$\begin{aligned} \Delta R^2 \Pi_n &= \Pi_n \Delta R^2 + R^2 \Delta \Pi_n + 2 \left( \frac{\partial R^2}{\partial x} \frac{\partial \Pi_n}{\partial x} + \frac{\partial R^2}{\partial y} \frac{\partial \Pi_n}{\partial y} + \frac{\partial R^2}{\partial z} \frac{\partial \Pi_n}{\partial z} \right) = \\ &= 6 \Pi_n + 4 \left( x \frac{\partial \Pi_n}{\partial x} + y \frac{\partial \Pi_n}{\partial y} + z \frac{\partial \Pi_n}{\partial z} \right) = 2(2n+3) \Pi_n. \end{aligned}$$

Мы применим здесь известную теорему Эйлера об однородных функциях. Подстановка в (3.3) теперь даёт:

$$\chi_n = \frac{(m-2) E_n}{4(m-1)(2n+3)} R^{n+2} P_n(\mu) \quad (3.15)$$

и, значит,

$$u_R = \frac{(m-2)(n+2)}{4(m-1)(2n+3)} E_n R^{n+1} P_n(\mu), \quad u_\vartheta = \frac{(m-2) E_n}{4(m-1)(2n+3)} R^{n+1} \frac{dP_n}{d\vartheta}. \quad (3.16)$$

Соответствующие напряжения будут:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \frac{E_n}{2(m-1)(2n+3)} [4n+6 + \\ &\quad + (n+2)(n+1)(m-2)] R^n P_n, \\ \tau_{R\vartheta} &= \frac{E_n(m-2)(n+1)}{2(m-1)(2n+3)} R^n \frac{dP_n}{d\vartheta}, \\ \sigma_\vartheta &= \frac{E_n}{2(m-1)(2n+3)} [4n+6 + (2-n^2)(m-2)] R^n P_n - \\ &\quad - \frac{(m-2) E_n}{2(m-1)(2n+3)} R^n \frac{dP_n}{d\vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta, \\ \sigma_\varphi &= \frac{E_n}{2(m-1)(2n+3)} [4n+6 + (n+2)(m-2)] R^n P_n + \\ &\quad + \frac{(m-2) E_n}{2(m-1)(2n+3)} R^n \frac{dP_n}{d\vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Если поверхность сферы свободна, то на это решение надо наложить решение (2.9), (2.14), определив постоянные  $A_n$  и  $B_n$  из системы (2.43); в последней надо заменить  $\sigma_n$  и  $\tau_n$  соответственно на  $(-\sigma_R)_{R=R_0}$  и  $(-\tau_{R\vartheta})_{R=R_0}$  из формул (3.17).

#### § 4. Рассмотрение простейших частных задач

1°. Задача Ляме — требуется определить напряжённое состояние в полой сфере, подверженной действию равномерных внутреннего давления  $p_1$  и внешнего давления  $p_0$ .

Выше указывалось уже, что решение задачи даётся формулами (2.62); надо лишь в последних сделать замены

$$\sigma_0^{(e)} = (\sigma_R)_{R=R_0} = -p_0, \quad \sigma_0^{(i)} = (\tau_R)_{R=R_1} = -p_1. \quad (4.1)$$

Тогда

$$A_0 = \frac{m}{4G(m+1)} \frac{p_0 R_0^3 - p_1 R_1^3}{R_0^3 - R_1^3}, \quad D_0 = \frac{(p_0 - p_1) R_0^3 R_1^3}{4G(R_0^3 - R_1^3)}. \quad (4.2)$$

По (2.21) и (2.22) находим решение:

$$\left. \begin{aligned} u_R &= -\frac{m-2}{2J(m+1)} \frac{p_0 R_0^3 - p_1 R_1^3}{R_0^3 - R_1^3} R - \frac{(p_0 - p_1) R_0^3 R_1^3}{4J(R_0^3 - R_1^3) R^2}, & u_\theta &= 0, \\ \tau_R &= -p_0 \frac{R_0^3 (R^3 - R_1^3)}{(R_0^3 - R_1^3) R^3} - p_1 \frac{R_1^3 (R_0^3 - R^3)}{R^3 (R_0^3 - R_1^3)}, & \tau_{R\theta} &= 0, \\ \sigma_\theta &= \sigma_\varphi = -p_0 \frac{R_0^3 (2R^3 + R_1^3)}{2(R_0^3 - R_1^3) R^3} + p_1 \frac{R_1^3 (2R^3 + R_0^3)}{2R^3 (R_0^3 - R_1^3)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

2°. Гравитирующий шар. На любую частицу упругого шара действует притяжение других частиц его по закону Ньютона. Известно из теории потенциала, что равнодействующая притяжений направлена по радиусу шара к центру и по величине пропорциональна этому радиусу:

$$K = -CR.$$

Постоянная  $C$  определяется из условия, что на поверхности шара ( $R = R_0$ ) объёмная сила имеет заданную величину  $\gamma$ . Это (если рассматривается Земля), очевидно, вес единицы объёма. Итак,

$$K = -\frac{\gamma}{R_0} R = -\text{grad } \Pi, \quad \Pi = \frac{\gamma R^2}{2R_0}. \quad (4.4)$$

Поверхность шара принимается свободной от напряжений. Радиальное перемещение находится по (3.9):

$$u_R = -\frac{\gamma R_0 R (m-2)}{20G(m-1)} \left( \frac{3m-1}{m+1} - \frac{R^2}{R_0^2} \right). \quad (4.5)$$

Далее можно по (3.10) найти напряжения. Ограничимся выражением напряжения в центре шара; оно вычисляется по (3.11):

$$\sigma_R^0 = \sigma_\theta^0 = \sigma_\varphi^0 = -\frac{3m-1}{10(m-1)} \gamma R_0. \quad (4.6)$$

Для земного шара ( $\gamma = 5,53 \text{ г/см}^3$ ,  $R_0 = 6,37 \cdot 10^8 \text{ см}$ ) напряжение, вычисляемое по приведённой формуле, оказывается чрезвычайно большим; это указывает на невозможность применения обычных методов линейной теории упругости к рассматриваемой задаче.

3°. Концентрация напряжений в окрестности сферической полости. Рассматривается напряжённое состояние в упругом пространстве вне сферической полости радиуса  $R = R_0$ ; предполагается, что на достаточно большом расстоянии от полости ( $R \rightarrow \infty$ ) среда испытывает растяжение (напряжение  $\sigma_z^\infty = p$ ). Решение задачи преследует цель выяснить, как влияет наличие сферической раковины в подвергнутом растяжению образце на распределение напряжений в нём.

На достаточном удалении от центра полости напряжённое состояние задаётся составляющей  $\sigma_z = \sigma_z^\infty = p$  или в сферических координатах

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R^\infty &= \sigma_z^\infty \cos^2 \vartheta = p \cos^2 \vartheta, \quad \sigma_\vartheta^\infty = p \sin^2 \vartheta, \\ \tau_{R\vartheta}^\infty &= -p \sin \vartheta \cos \vartheta, \quad \sigma_\varphi^\infty = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Но на поверхности полости должны отсутствовать напряжения  $\sigma_R$  и  $\tau_{R\vartheta}$ . Поэтому на решение (4.7) надо наложить напряжённое состояние, обращающееся в нуль при  $R \rightarrow \infty$  и такое, что для него

$$\text{при } R = R_0 \quad \sigma_R = -\sigma_R^\infty, \quad \tau_{R\vartheta} = -\tau_{R\vartheta}^\infty. \quad (4.8)$$

Речь идёт, таким образом, о внешней задаче (2.49), причём представление «нагрузок»  $\sigma(\vartheta)$  и  $\tau(\vartheta)$  в форме рядов (2.33) в данном случае имеет весьма простой вид:

$$\sigma(\vartheta) = -p \cos^2 \vartheta = -\frac{1}{3} p - \frac{2}{3} p P_2(\mu), \quad \tau(\vartheta) = p \cos \vartheta \sin \vartheta = -\frac{1}{3} p \frac{dP_2}{d\vartheta}. \quad (4.9)$$

Решение, соответствующее постоянному слагаемому ( $n = 0$ ) в выражении  $\sigma(\vartheta)$ , даётся формулами (2.22), в которых постоянная  $D_0$  должна быть определена из условия (2.50)

$$\frac{4GD_0}{R_0^3} = -\frac{1}{3} p, \quad \text{т. е.} \quad D_0 = -\frac{pR_0^3}{12G} \quad (4.10)$$

Далее в уравнениях (2.45) имеем  $n = 2$  и  $\sigma_2 = -\frac{2}{3} p$ ,  $\tau_2 = -\frac{p}{3}$ ; поэтому

$$\left. \begin{aligned} -\frac{4C_2}{mR_0^3} (5m - 1) + \frac{12D_2}{R_0^5} &= -\frac{p}{3G}, \\ \frac{2C_2}{mR_0^3} (m + 1) - \frac{4D_2}{R_0^5} &= -\frac{p}{6G}. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Отсюда получаем:

$$C_2 = \frac{5p}{12G} \frac{mR_0^3}{7m - 5}, \quad D_2 = \frac{p}{2G} \frac{mR_0^5}{7m - 5}, \quad (4.12)$$

и эти значения постоянных должны быть внесены в выражения (2.13) и (2.15), дающие перемещения и напряжения во внешней задаче.

Задача может считаться решённой: нужно наложить решения (4.7), (2.22) и (2.15). Не выписывая формул, имеющих довольно громоздкий вид, приведём сравнительно простые выражения напряже-



ний  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_\varphi$  на поверхности полости (при  $R = R_0$ ), представляющие, очевидно, наибольший интерес:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \left[ \frac{2p}{3} - \frac{2}{3} p P_2(\mu) \right] + \left( \frac{p}{6} \right) + \\ &+ \left\{ \frac{p}{3(7m-5)} \left[ (-32m+10) P_2 - (8m-10) \frac{dP_2}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta \right] \right\}, \\ \sigma_\varphi &= \left( \frac{p}{6} \right) + \left\{ \frac{p}{3(7m-5)} \left[ (16m-50) P_2 + (8m-10) \frac{dP_2}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta \right] \right\}. \end{aligned}$$

Скобки поставлены, чтобы отделить друг от друга каждое из трёх упомянутых решений. Получаем ( $R = R_0$ ):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{p}{2} \frac{27m-15}{7m-5} - p \frac{15m}{7m-5} \cos^2 \theta, \\ \sigma_\varphi &= \frac{p}{2} \frac{15-3m}{7m-5} - p \frac{15}{7m-5} \cos^2 \theta. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

В частности, при  $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\sigma_\theta = \sigma_z = \frac{27m-15}{2(7m-5)} p \approx 2,07p, \quad \sigma_\varphi = \frac{15-3m}{2(7m-5)} p \approx 0,19p \quad (m=3).$$

При  $\theta = 0$

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi = -\frac{3m+15}{2(7m-5)} p \approx -0,75p.$$

Максимальное напряжение имеет место на экваторе полости (в сечении, перпендикулярном к направлению растяжения), оно в 2,07 раза больше, чем номинальное напряжение  $p$ . Сжимающее напряжение в полюсах сферы составляет 0,75 $p$ . Концентрация напряжений имеет резко выраженный местный характер. Это видно из выражения напряжения  $\sigma_z = \sigma_\theta$  при  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (и при любом  $R > R_0$ ):

$$\sigma_z = \sigma_\theta = p \left[ 1 + \frac{4m-5}{2(7m-5)} \frac{R_0^3}{R^3} + \frac{9m}{2(7m-5)} \frac{R_0^5}{R^5} \right]. \quad (4.14)$$

Из него при  $R = R_0$  получается, конечно, вышеприведённое значение 2,07 $p$ , а уже при  $R = 2R_0$  оно падает до 1,03 $p$ .

4°. Рассмотрим теперь случай сферической полости в упругом теле, подверженном действию чистого сдвига в плоскости меридиана  $\varphi = 0$  (плоскости  $xz$ )<sup>\*</sup>. Можно представить себе, что на достаточном удалении от полости создано напряжённое состояние

$$\sigma_z^\infty = p, \quad \sigma_x^\infty = -p, \quad (4.15)$$

<sup>\*</sup> См. также конец § 4 главы 8.

эквивалентное действию касательных напряжений той же интенсивности

$$\tau_{x'z'}^{\infty} = p, \quad (4.16)$$

причём оси  $x'$ ,  $z'$  получаются поворотом осей  $x$ ,  $z$  на угол  $45^\circ$  в их плоскости.

Напряжённое состояние в этом случае можно рассматривать как результат наложения двух напряжённых состояний, каждое из которых получается при нагружении, симметричном относительно оси  $z$  (и соответственно  $x$ ). Но это результирующее напряжённое состояние само не будет осесимметричным. Мы ограничимся рассмотрением его на поверхности полости (при  $R = R_0$ ).

Для первого нагружения ( $\sigma_z^{\infty} = p$ ) решение задачи приведено выше; оно даётся формулами (4.13), которые мы теперь запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\vartheta_1}^{(1)} &= \frac{p}{2} \frac{27m-15}{7m-5} - p \frac{15m}{7m-5} \cos^2 \vartheta_1, \\ \sigma_{\varphi_1}^{(1)} &= \frac{p}{2} \frac{15-3m}{7m-5} - p \frac{15}{7m-5} \cos^2 \vartheta_1. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Напомним, что здесь через  $\vartheta_1$  и  $\varphi_1$  обозначены сферические координаты, когда за полюс принята точка пересечения сферы с осью  $z$ ; угол  $\vartheta_1$  отсчитывается от полюса вдоль большого круга, получающегося в пересечении поверхности сферы с плоскостью, содержащей ось  $z$  и образующей угол  $\varphi_1$  с плоскостью  $xz$  (рис. 28).

Аналогично для второго нагружения ( $\sigma_x^{\infty} = -p$ ) можно написать:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\vartheta_2}^{(2)} &= -\frac{p}{2} \frac{27m-15}{7m-5} + p \frac{15m}{7m-5} \cos^2 \vartheta_2, \\ \sigma_{\varphi_2}^{(2)} &= -\frac{p}{2} \frac{15-3m}{7m-5} + p \frac{15}{7m-5} \cos^2 \vartheta_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

Ясно, что здесь введена вторая система сферических координат; в ней ось  $x$  играет ту же роль, что  $z$  в первой системе. Таким образом, положение точки  $M$  на сфере определено в двух системах сферических координат; связь между ними легко получить, применив основные соотношения сферической тригонометрии к треугольнику  $Mzx$  со стороной  $\widehat{zx} = \frac{\pi}{2}$ :

$$\cos \vartheta_2 = \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1, \quad \cos \chi = -\frac{\cos \vartheta_1 \cos \varphi_1}{\sin \vartheta_2}, \quad \sin \gamma = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \vartheta_2}. \quad (4.19)$$

На том же рисунке показано расположение координатных направлений  $[\vartheta_1, \varphi_1]$ ,  $[\vartheta_2, \varphi_2]$  первой и второй систем в плоскости  $PL$ , касательной к сфере в точке  $M$ .

Конечно, чтобы сложить напряжённые состояния (4.17) и (4.18), нужно выразить их в одной системе осей, например в осях первой

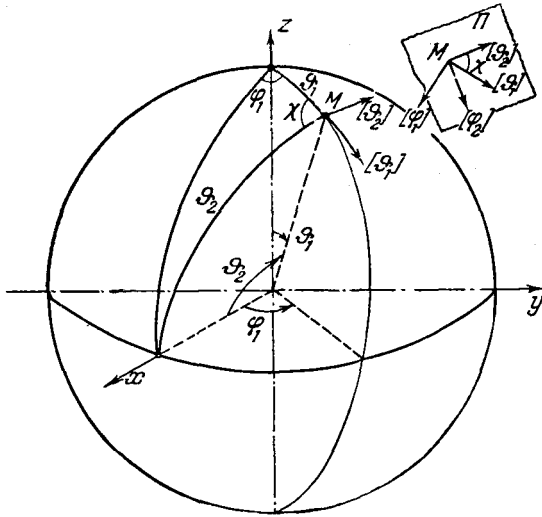


Рис. 28.

системы; составляем поэтому выражения напряжений второго нагружения в системе осей  $[\theta_1, \varphi_1]$ :

$$\sigma_{\theta_1}^{(2)} = \sigma_{\theta_2}^{(2)} \cos^2 \chi + \sigma_{\varphi_2}^{(2)} \sin^2 \chi, \quad \sigma_{\varphi_1}^{(2)} = \sigma_{\theta_2}^{(2)} \sin^2 \chi + \sigma_{\varphi_2}^{(2)} \cos^2 \chi. \quad (4.20)$$

В результирующем напряжённом состоянии

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta_1} &= \sigma_{\theta_1}^{(1)} + \sigma_{\theta_1}^{(2)} = \sigma_{\theta_1}^{(1)} + \sigma_{\theta_2}^{(2)} \cos^2 \chi + \sigma_{\varphi_2}^{(2)} \sin^2 \chi, \\ \sigma_{\varphi_1} &= \sigma_{\varphi_1}^{(1)} + \sigma_{\varphi_1}^{(2)} = \sigma_{\varphi_1}^{(1)} + \sigma_{\theta_2}^{(2)} \sin^2 \chi + \sigma_{\varphi_2}^{(2)} \cos^2 \chi, \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

и дальнейшее вычисление проводится по (4.17) — (4.19). Ограничимся вычислением полуразности главных нормальных напряжений

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{2} (\sigma_{\theta_1} - \sigma_{\varphi_1}) = \frac{1}{2} (\sigma_{\theta_1}^{(1)} - \sigma_{\varphi_1}^{(1)}) + \frac{1}{2} (\sigma_{\theta_2}^{(2)} - \sigma_{\varphi_2}^{(2)}) \cos 2\chi = \\ &= \tau^{(1)} + \tau^{(2)} \cos 2\chi. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Очень простое вычисление даёт:

$$\tau^{(1)} = \frac{15(m-1)}{2(7m-5)} p \sin^2 \theta_1, \quad \tau^{(2)} = -\frac{15(m-1)}{2(7m-5)} p \sin^2 \theta_2 \quad (4.23)$$

и, значит,

$$\tau = \frac{15(m-1)}{2(7m-5)} p (\sin^2 \theta_1 - \cos 2\chi \sin^2 \theta_2). \quad (4.24)$$

Ясно, что для разыскания максимума  $\tau$  надо принять  $\cos 2\chi = -1$ , т. е.  $\chi = \frac{\pi}{2}$ ; но тогда

$$\tau = \frac{15(m-1)}{2(7m-5)} p (\sin^2 \vartheta_1 + \sin^2 \vartheta_2), \quad (4.25)$$

и максимум будет при  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$ ; он равен

$$\tau^{(\max)} = \frac{15(m-1)}{(7m-5)} p \approx 1,875p \quad (m=3) \quad (4.26)$$

и достигается в точке с координатами  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$  [см. (4.19)], т. е. в концах диаметра шара, перпендикулярного к плоскости сдвига (плоскости  $xz$ ). Но тогда и  $\varphi_2 = \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$ . В этой точке по (4.21), (4.17), (4.18)

$$\sigma_{\vartheta_1} = \sigma_{\vartheta_1}^{(1)} + \sigma_{\varphi_1}^{(2)} = \frac{15(m-1)}{7m-5} p, \quad \sigma_{\varphi_1} = \sigma_{\varphi_1}^{(1)} + \sigma_{\vartheta_1}^{(2)} = -\frac{15(m-1)}{7m-5} p. \quad (4.27)$$

Они имеют противоположные знаки, поэтому  $\sigma_R = 0$  будет средним по величине нормальным напряжением и полученное значение  $\tau^{(\max)}$  будет максимальным касательным напряжением в рассматриваемой точке.

## § 5. Вращающийся шар

1°. Потенциал центробежных сил

$$\Pi = -\frac{\gamma\omega^2}{2g}(x^2 + y^2)$$

представляем в виде суммы слагаемых

$$\Pi = -\frac{\gamma\omega^2}{3g} R^2 + \frac{\gamma\omega^2}{3g} R^2 P_2(\mu). \quad (5.1)$$

Решение, соответствующее первому слагаемому, оставляющее поверхность сферы свободной от нагружения, даётся формулами (3.9) и (3.10)

$$\left. \begin{aligned} u_R^{(1)} &= \frac{\gamma\omega^2(m-2)R}{30Gg(m-1)} \left( \frac{3m-1}{m+1} R_0^2 - R^2 \right), & u_{\vartheta}^{(1)} &= 0, \\ \sigma_R^{(1)} &= \frac{\gamma\omega^2}{15g} \frac{3m-1}{m-1} (R_0^2 - R^2), & \tau_{R\vartheta}^{(1)} &= 0, \\ \sigma_{\vartheta}^{(1)} &= \sigma_{\varphi}^{(1)} = \frac{\gamma\omega^2}{15g} \frac{3m-1}{m-1} \left( R_0^2 - \frac{m+3}{3m-1} R^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Частное решение, соответствующее второму слагаемому в выражении потенциала, составляется по (3.16) и (3.17) для  $n=2$ . Зна-

чения напряжений  $\sigma_R$  и  $\tau_{R\theta}$  на поверхности сферы, даваемые этим решением, будут при  $R = R_0$ :

$$\sigma_R^{(2)*} = \frac{\gamma\omega^2 R_0^2}{42g(m-1)} (12m-10) P_2, \quad \tau_{R\theta}^{(2)*} = \frac{3(m-2)\gamma\omega^2}{42(m-1)g} R_0^2 \frac{dP_2}{d\theta}. \quad (5.3)$$

Нужно наложить решение (2.9), (2.14) с двумя постоянными  $A_2, B_2$ , чтобы снять эти напряжения. Постоянные должны быть определены из (2.43) при  $n = 2$ :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{6}{m} A_2 R_0^2 + 2B_2 &= -\frac{\gamma\omega^2 R_0^2}{84Gg(m-1)} (12m-10), \\ \frac{7m+2}{m} A_2 R_0^2 + B_2 &= -\frac{\gamma\omega^2 R_0^2}{84Jg(m-1)} (3m-6). \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Получаем:

$$A_2 = \frac{\gamma\omega^2 (3m+1)m}{84gG(m-1)(7m+5)}, \quad B_2 = -\frac{(3m+2)\gamma\omega^2 R_0^2}{6g(7m+5)G}, \quad (5.5)$$

и задачу можно считать решённой: нужно сложить решения (5.2), (3.16), (3.17) и (2.9), (2.14).

Найдём, в частности, напряжение в центре сферы: нужно сложить напряжения (5.2), соответствующие частному решению, и напряжения от решения, снабжённого постоянной  $B_2$ , остальные слагаемые при  $R = 0$  обратятся в нуль. По (5.2), (2.14) и (5.5) найдём:

$$\sigma_\varphi = \frac{\gamma\omega^2}{15g} \frac{3m-1}{m-1} R_0^2 - \frac{\gamma\omega^2}{3g} \frac{3m+2}{7m+5} R_0^2 \left( 2P_2 + \frac{dP_2}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta \right).$$

Величина в скобках

$$2P_2 + \frac{dP_2}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta = -1$$

и не зависит от  $\theta$ . Замечая ещё, что по всем направлениям в экваториальной плоскости напряжения одинаковы, можем теперь написать:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\gamma\omega^2 R_0^2}{3g} \left( \frac{3m-1}{5(m-1)} + \frac{3m+2}{7m+5} \right). \quad (5.6)$$

Далее получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\gamma\omega^2}{15g} \frac{3m-1}{m-1} R_0^2 - \frac{2\gamma\omega^2}{3g} \frac{3m+2}{7m+5} R_0^2 [P_2(\mu)]_{\mu=1} = \\ &= -\frac{\gamma\omega^2}{3g} \left( \frac{6m+4}{7m+5} - \frac{3m-1}{5(m-1)} \right) R_0^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Это напряжение будет сжимающим. Найдём ещё перемещение  $u_R$  в полюсах сферы и на экваторе; наложение указанных решений даёт:

$$\left. \begin{aligned} (u_R)_{\vartheta=0} &= -\frac{\gamma\omega^2 R_0^3}{3g\bar{G}} \left( \frac{2m+1}{7m+5} - \frac{m-2}{5(m+1)} \right), \\ (u_R)_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} &= \frac{\gamma\omega^2 R_0^3}{3g\bar{G}} \left( \frac{2m+1}{2(7m+5)} + \frac{m-2}{5(m+1)} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Если применить первую формулу (5.8) к Земле, то, задаваясь сжатием у полюсов  $\epsilon_R = \frac{1}{300}$ , получим  $G = 2,6 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$  (при  $m=3$ )—это примерно то же значение модуля сдвига, что для стекла.

2°. Более сложны вычисления в случае полой сферы. Решение получается наложением частного решения (5.2) и (3.16)—(3.17), соответствующего действию центробежных сил, и решений внутренней и внешней задачи, определяемых постоянными  $A_0, D_0, A_2, B_2, C_2, D_2$ . Общее решение должно удовлетворять, конечно, условиям обращения в нуль напряжений  $\sigma_R$  и  $\tau_{R\vartheta}$  при  $R=R_0$  (на внешней поверхности сферы) и при  $R=R_1$  (на её внутренней поверхности).

Для нахождения постоянных  $A_0$  и  $D_0$  служат уравнения [см. (2.61) и (5.2)]

$$\left. \begin{aligned} -2A_0 \frac{m+1}{m} + \frac{2D_0}{R_0^3} &= 0, \\ -2A_0 \frac{m+1}{m} + \frac{2D_0}{R_1^3} &= -\frac{\gamma\omega^2}{15g} \frac{3m-1}{m-1} (R_0^2 - R_1^2). \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Остальные постоянные нужно определить из системы, состоящей из уравнений [ср. (5.4)]

$$\left. \begin{aligned} -\frac{6}{m} A_2 R_0^2 + 2B_2 - \frac{4C_2(5m-1)}{mR_0^3} + \frac{12D_2}{R_0^5} &= -\frac{\gamma\omega^2 R_0^2(12m-10)}{84Gg(m-1)}, \\ \frac{7m+2}{m} A_2 R_0^2 + B_2 + \frac{2C_2(m+1)}{mR_0^3} - \frac{4D_2}{R_0^5} &= -\frac{\gamma\omega^2 R_0^2(3m-6)}{84Gg(m-1)} \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

и ещё из двух уравнений, получающихся из (5.10) при замене  $R_0$  на  $R_1$ .

### § 6. Внутренняя задача для сферы

1°. Вернёмся к уже рассмотренной в § 2 задаче о равновесии упругой сферы, находящейся под действием распределённой по её поверхности уравновешенной нагрузки. Чтобы не усложнять выкла-

док, ограничимся лишь случаем нормальной нагрузки. Тогда краевые условия будут:

$$\text{при } R = R_0 \quad \sigma_R = \sigma(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n P_n(\mu), \quad \mu = \cos \vartheta, \quad (6.1)$$

$$\tau_{R\vartheta} = 0, \quad (6.2)$$

причём согласно (2.33)

$$\sigma_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 \sigma(\vartheta_1) P_n(\mu_1) d\mu_1. \quad (6.3)$$

Напомним, что при уравновешенной нагрузке по (2.40)

$$\sigma_1 = 0. \quad (6.4)$$

Для постоянного нормального давления, соответствующего слагаемому  $\sigma_0$  ряда (6.1), решение даётся формулами (2.42) и (2.21)

$$u_R^0 = \frac{(m-2)\sigma_0}{2G(m+1)} R, \quad u_{\vartheta}^0 = 0. \quad (6.5)$$

При  $n \geq 2$  коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$ , определяющие решение задачи, находятся по уравнениям (2.43), в которых надо принять  $\tau_n = 0$ :

$$A_n = -\frac{\sigma_n}{4GR_0^n \Delta}, \quad B_n = \frac{\sigma_n}{4GR_0^{n-2} \Delta} \cdot \frac{n^2 + 2n - 1 + \frac{2}{m}}{n-1}, \quad (6.6)$$

где обозначено

$$\Delta = n(n-1) + (2n+1) \frac{m+1}{m}. \quad (6.7)$$

Теперь по (2.9) находим перемещения; отбрасывая слагаемое, соответствующее  $n=0$ , мы запишем эти перемещения в форме

$$\left. \begin{aligned} u_R &= \frac{R}{8G} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\sigma_n}{2n+1} (L_n x^n + M_n x^{n-2}) P_n(\mu), \\ u_{\vartheta} &= \frac{R}{8G} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\sigma_n}{2n+1} (Q_n x^n + S_n x^{n-2}) \frac{dP_n}{d\vartheta}, \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

где обозначено

$$\left. \begin{aligned} L_n &= -\frac{1}{\Delta} (2n+1)(n+1) \left( n - 2 + \frac{4}{m} \right), \\ M_n &= \frac{1}{\Delta} (2n+1) \left( n^2 + 2n - 1 + \frac{2}{m} \right) \frac{n}{n-1}, \\ Q_n &= -\frac{1}{\Delta} (2n+1) \left( n + 5 - \frac{4}{m} \right), \\ S_n &= \frac{M_n}{n} \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

и

$$x = \frac{R}{R_0}. \quad (6.10)$$

Здесь в каждом коэффициенте ряда (6.8) выделен множитель  $(2n+1)$ . Смысл этого выяснится позже.

Формально задачу можно считать решённой, но сходимость полученных рядов будет удовлетворительной только при плавном законе нагружения сферы. Наибольший же интерес могут представить как раз случаи нагружения, резко меняющегося по поверхности сферы, каково, например, нагружение постоянной интенсивности по части поверхности сферы, нагружение сосредоточенной в вершине силой и т. п. Для таких случаев формальное решение в виде рядов практически непригодно (в последнем примере ряд расходится на поверхности сферы), а представить эти ряды в приемлемой конечной форме нельзя.

Выходом из положения является приём разбиения рядов на совокупность рядов, медленно сходящихся, и на сравнительно хорошо сходящийся остаток. Дело заключается в том, что эти медленно сходящиеся ряды можно выделить так, чтобы они допускали представление в замкнутом виде. В общем случае это будет представление в форме определённого интеграла, аналогичного интегралу Пуассона, с помощью которого строится решение задачи Дирихле для сферы. Для некоторых же частных загрузений суммирование этой медленно сходящейся части оказывается возможным в конечном виде.

2°. Разбиение рядов на две указанные части делается так: представляем коэффициенты  $L_n, \dots, S_n$  в форме

$$\left. \begin{aligned} L_n &= -(2n+1) + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n+1} + \frac{\alpha_2}{(n+1)(n+2)} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\alpha_q}{(n+1)\dots(n+q)} + L_n^{(q+1)}, \\ M_n &= (2n+1) + \beta_0 + \frac{\beta_1}{n+1} + \frac{\beta_2}{(n+1)(n+2)} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\beta_q}{(n+1)\dots(n+q)} + M_n^{(q+1)}, \\ Q_n &= -2 + \frac{\gamma_1}{n+1} + \frac{\gamma_2}{(n+1)(n+2)} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\gamma_q}{(n+1)\dots(n+q)} + Q_n^{(q+1)}, \\ S_n &= 2 + \frac{\delta_1}{n+1} + \frac{\delta_2}{(n+1)(n+2)} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\delta_q}{(n+1)\dots(n+q)} + S_n^{(q+1)}. \end{aligned} \right\} (6.11)$$



Вычисление коэффициентов  $\alpha_s, \dots, \delta_s$  и остатков  $L_n^{(q+1)}, \dots, S_n^{(q+1)}$  производится процессом последовательного деления. Например, для коэффициента  $L_n$  имеем:

$$L_n^{(1)} = L_n + (2n+1) = \frac{m-1}{m\Delta} (2n+1)(2n+3)$$

и далее

$$\alpha_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n^{(1)} = \frac{4(m-1)}{m},$$

$$L_n^{(1)} = L_n^{(0)} - \alpha_0 = \frac{m-1}{m^2\Delta} [4n(m-2) - m - 4],$$

$$\alpha_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)L_n^{(1)} = \frac{4(m-1)(m-2)}{m^2},$$

$$L_n^{(2)} = L_n^{(1)} - \frac{\alpha_1}{n+1} = -\frac{m-1}{m^3\Delta(n+1)} [n(m^2+12m-16) + (5m^2-8)],$$

$$\alpha_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)(n+2)L_n^{(2)} = -\frac{m-1}{m^3} (m^2+12m-16),$$

$$L_n^{(3)} = L_n^{(2)} - \frac{\alpha_2}{(n+1)(n+2)} = -\frac{m-1}{m^4(n+1)(n+2)\Delta} [(6m^3+10m^2-48m+32)n + 9m^3-13m^2-12m+16]$$

и т. д. Таким образом, получаем, ограничиваясь  $q=2$ :

$$\left. \begin{aligned} L_n &= -(2n+1) + \frac{4(m-1)}{m} + \\ &+ \frac{4(m-2)(m-1)}{m^2(n+1)} - \frac{(m-1)(m^2+12m-16)}{m^3(n+1)(n+2)} + L_n^{(3)}, \\ M_n^* &= (2n+1) + \frac{4(m-1)}{m} - \frac{4(m-2)}{m^2(n+1)} + \\ &+ \frac{m^3+5m^2+12m-16}{m^3(n+1)(n+2)} + M_n^{(3)}, \\ Q_n &= -2 - \frac{3(3m-4)}{m(n+1)} - \frac{3(m^2-8m+8)}{m^2(n+1)(n+2)} + Q_n^{(3)}, \\ S_n &= 2 + \frac{5m-4}{m(n+1)} + \frac{5m^2-8m+8}{m^2(n+1)(n+2)} + S_n^{(3)}, \end{aligned} \right\} (6.12)$$

причём выражение остатков будет:

$$\left. \begin{aligned}
 L_n^{(8)} &= -\frac{m-1}{m^4(n+1)(n+2)\Delta} [(6m^3 + 10m^2 - 48m + 32)n + \\
 &\quad + 9m^3 - 13m^2 - 12m + 16], \\
 M_n^{(8)} &= \frac{1}{m^4(n-1)(n+1)(n+2)\Delta} [(8m^4 + 18m^3 + 2m^2 - 48m + 32)n^2 + \\
 &\quad + (17m^4 + 18m^3 - 19m^2 + 36m - 16)n + \\
 &\quad + (11m^4 + 17m^2 + 12m - 16)], \\
 Q_n^{(8)} &= \frac{1}{m^3(n+1)(n+2)\Delta} [(3m^3 + 33m^2 - 84m + 48)(n+2) + \\
 &\quad + 9(m-1)(m^2 - 8m + 8)], \\
 S_n^{(8)} &= \frac{1}{m^3(n-1)(n+1)(n+2)\Delta} [(11m^3 - 11m^2 + 28m - 16)(n+2)^2 + \\
 &\quad + (-36m^3 + 84m^2 - 132m + 72)(n+2) + \\
 &\quad + 9(m-1)(5m^2 - 8m + 8)].
 \end{aligned} \right\} (6.13)$$

3°. Эти выражения коэффициентов будут использованы при рассмотрении задачи о равновесии сферы, подверженной действию сосредоточенной силы в полкусе. В общем случае нагружения мы ограничимся выделением из выражений коэффициентов  $L_n, \dots, S_n$  лишь слагаемых

$$\left. \begin{aligned}
 L_n &= -(2n+1) + \frac{4(m-1)}{m} + L_n^{(1)}, \\
 M_n &= (2n+1) + \frac{4(m-1)}{m} + M_n^{(1)}, \\
 Q_n &= -2 + Q_n^{(1)}, \\
 S_n &= 2 + S_n^{(1)}
 \end{aligned} \right\} (6.14)$$

Остатки  $L_n^{(1)}, \dots, S_n^{(1)}$  при  $n \rightarrow \infty$  стремятся к нулю, как  $\frac{1}{n}$ .

Выражения рядов (6.8) принимают теперь форму

$$u_R = u_R^* + u_R^{(1)}, \quad u_\theta = u_\theta^* + u_\theta^{(1)}, \quad (6.15)$$

где  $u_R^{(1)}$  и  $u_\theta^{(1)}$  получаются из (6.8) при замене  $L_n, \dots, S_n$  остатками

$L_n^{(1)}, \dots, S_n^{(1)}$ , а слагаемые  $u_R^*$ ,  $u_\theta^*$  выражаются рядами

$$\left. \begin{aligned} u_R^* &= \frac{R}{8G} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\sigma_n}{2n+1} \left[ (2n+1)(x^{n-2} - x^n) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4(m-1)}{m} (x^{n-2} + x^n) \right] P_n(\mu), \\ u_\theta^* &= \frac{R}{4G} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\sigma_n}{2n+1} (x^{n-2} - x^n) \frac{dP_n}{d\theta}. \end{aligned} \right\} (6.16)$$

Для суммирования этих рядов заменяем  $\sigma_n$  их значениями (6.3); тогда

$$\left. \begin{aligned} u_R^* &= \frac{R}{8G} \int_{-1}^1 \sigma(\theta_1) d\mu_1 \sum_{n=2}^{\infty} P_n(\mu_1) P_n(\mu) \left[ (2n+1)(x^{n-2} - x^n) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4(m-1)}{m} (x^{n-2} + x^n) \right], \\ u_\theta^* &= \frac{R}{4G} \int_{-1}^1 \sigma(\theta_1) d\mu_1 \sum_{n=2}^{\infty} P_n(\mu_1) \frac{dP_n}{d\theta} (x^{n-2} - x^n). \end{aligned} \right\} (6.17)$$

Теперь воспользуемся известным соотношением теории сферических функций

$$P_n(\lambda) = \sum_{k=0}^n {}^* \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\cos \theta) P_n^{(k)}(\cos \theta_1) \cos k\varphi, \quad (6.18)$$

в котором

$$\lambda = \cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \cos \varphi \quad (6.19)$$

и звёздочка при знаке суммы указывает, что в слагаемом  $k=0$  следует отбросить множитель 2. Из (6.18) получаем нужную нам формулу

$$P_n(\mu) P_n(\mu_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n(\lambda) d\varphi. \quad (6.20)$$

Дифференцируя это выражение по  $\theta$ , найдём также:

$$\frac{dP_n}{d\theta} P_n(\mu_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n'(\lambda) (-\sin \theta \cos \theta_1 + \cos \theta \sin \theta_1 \cos \varphi) d\varphi. \quad (6.21)$$

Теперь, после подстановки этих выражений в (6.17), получим:

$$\left. \begin{aligned} u_R^* &= \frac{R}{16\pi G} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 \sigma(\vartheta_1) d\mu_1 \sum_{n=2}^{\infty} P_n(\lambda) \left[ (2n+1)(x^{n-2} - x^n) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4(m-1)}{m}(x^n + x^{n-2}) \right], \\ u_\theta^* &= \frac{R}{8\pi G} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 \sigma(\vartheta_1) d\mu_1 \sum_{n=2}^{\infty} P_n'(\lambda) (-\sin \vartheta \cos \vartheta_1 + \\ &\quad + \cos \vartheta \sin \vartheta_1 \cos \varphi)(x^{n-2} - x^n). \end{aligned} \right\} (6.22)$$

Переходим к вычислению рядов в выражениях (6.22). Сначала найдём для этого суммы рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\lambda) x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\lambda) x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(\lambda) x^n. \quad (6.23)$$

Первая из них общеизвестна:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\lambda) x^n = \frac{1}{s}, \quad s = \sqrt{1+x^2-2x\lambda}. \quad (6.24)$$

Вторая получается так: дифференцируя (6.24) по  $x$ , находим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n P_n(\lambda) x^{n-1} = -\frac{x-\lambda}{s^3}$$

и, значит,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\lambda) x^n = -\frac{2x(x-\lambda)}{s^3} + \frac{1}{s} = \frac{1-x^2}{s^3}. \quad (6.25)$$

Третья сумма (6.23) получается из (6.24) дифференцированием по  $\lambda$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(\lambda) x^n = \frac{x}{s^3}. \quad (6.26)$$

Таким образом, получаем:

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^n P_n(\lambda) = \frac{1}{s} - 1 - x\lambda, \quad (6.24')$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^n (2n+1) P_n(\lambda) = \frac{1-x^2}{s^3} - 1 - 3x\lambda, \quad (6.25')$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^n P_n'(\lambda) = \frac{x}{s^3} - x. \quad (6.26')$$

Подстановка в (6.22) теперь даёт:

$$\left. \begin{aligned} u_R^* &= \frac{R}{16\pi G} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 \sigma(\vartheta_1) d\mu_1 \left[ \frac{1-x^2}{x^2} \left( \frac{1-x^2}{s^3} - 1 - 3\lambda x \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4(m-1)}{m} \frac{1+x^2}{x^2} \left( \frac{1}{s} - 1 - x\lambda \right) \right], \\ u_\vartheta^* &= \frac{R}{8\pi G} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 \sigma(\vartheta_1) d\mu_1 \left( -\sin \vartheta \cos \vartheta_1 + \right. \\ &\quad \left. + \cos \vartheta \sin \vartheta_1 \cos \varphi \right) \frac{1-x^2}{x} \left( \frac{1}{s^3} - 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

4°. Интегрирование по  $\varphi$  может быть выполнено. Для этого заменяем

$$\varphi = \pi - 2\psi, \quad \cos \varphi = -\cos 2\psi \quad (6.28)$$

и преобразуем выражение  $s$ :

$$\begin{aligned} s^2 &= 1 + x^2 - 2x\lambda = 1 + x^2 - 2x \cos \vartheta \cos \vartheta_1 + 2x \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \cos 2\psi = \\ &= 1 + x^2 - 2x \cos(\vartheta + \vartheta_1) - 4x \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \sin^2 \psi. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Далее полагаем:

$$s_1^2 = 1 + x^2 - 2x \cos(\vartheta + \vartheta_1), \quad s_2^2 = 1 + x^2 - 2x \cos(\vartheta - \vartheta_1); \quad (6.30)$$

так что

$$4x \sin \vartheta_1 \sin \vartheta = s_1^2 - s_2^2 \quad (6.31)$$

и, значит,

$$s = s_1 \sqrt{1 - \frac{s_1^2 - s_2^2}{s_1^2} \sin^2 \psi} = s_1 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}, \quad (6.32)$$

где через  $k^2$  обозначена величина

$$k^2 = \frac{s_1^2 - s_2^2}{s_1^2}. \quad (6.33)$$

Таким образом, интегралы, входящие в выражение  $u_R^*$ , определяются через полные эллиптические интегралы первого и второго рода от модуля  $k$ :

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{s} &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{s} = \frac{4}{s_1} K(k), \\ \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{s^3} &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{s^3} = \frac{4}{s_1 s_2^2} E(k). \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

В последнем случае было использовано соотношение

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{(1 - k^2 \sin^2 \psi)^{3/2}} = \frac{E(k)}{k'^2}, \quad k'^2 = 1 - k^2 = \frac{s_2^2}{s_1^2}. \quad (6.35)$$

Остаётся ещё вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{s^3} d\varphi &= -2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\psi}{s^3} d\psi = -\frac{4}{s_1^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2 \sin^2 \psi}{(1 - k^2 \sin^2 \psi)^{3/2}} d\psi = \\ &= -\frac{4}{s_1^3} \frac{E(k)}{k'^2} + \frac{8}{s_1^3} \left( \frac{1}{k^2 k'^2} E(k) - \frac{1}{k^2} K(k) \right) \end{aligned}$$

и, значит,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{s^3} d\varphi = -\frac{4}{s_1 s_2^2} E(k) + \frac{8}{s_1 (s_1^2 - s_2^2)} \left[ \frac{s_1^2}{s_2^2} E(k) - K(k) \right]. \quad (6.36)$$

Произведя теперь нужные подстановки в (6.27), получим:

$$\begin{aligned} u_R^* &= \frac{R_0}{8Gx} \int_0^{\pi} \frac{\sigma(\vartheta_1)}{s_1} \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 \times \\ &\quad \times \left\{ (1 - x^2) \left[ (1 - x^2) \frac{2E(k)}{\pi s_2^2} - s_1 (1 + 3x \cos \vartheta \cos \vartheta_1) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4(m-1)}{m} (1 + x^2) \left[ \frac{2K(k)}{\pi} - s_1 (1 + x \cos \vartheta \cos \vartheta_1) \right] \right\}, \quad (6.37) \\ u_{\vartheta}^* &= -\frac{R_0(1-x^2)}{4G} \int_0^{\pi} \frac{\sigma(\vartheta_1)}{s_1} \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 \left\{ \sin \vartheta \cos \vartheta_1 \left[ \frac{2E(k)}{\pi s_2^2} - s_1 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \cos \vartheta \sin \vartheta_1 \left[ \frac{2E(k)}{\pi s_2^2} - \frac{4}{\pi (s_1^2 - s_2^2)} \left( \frac{s_1^2}{s_2^2} E(k) - K(k) \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, суммирование рядов, получающихся при выделении из коэффициентов  $L_n, \dots, S_n$  основных слагаемых (6.14), оказалось сравнительно простым. К сожалению, дальше этот процесс сопряжён со значительными трудностями; так, если бы мы удержали в (6.14) также слагаемые порядка  $\frac{1}{n+1}$ , то пришли бы при интегрировании по переменной  $\varphi$  к эллиптическим интегралам третьего рода и интегралам от полных эллиптических интегралов первого рода по переменной  $x$ , через которую выражается их модуль  $k$ .

5°. В качестве примера рассмотрим задачу о равновесии сферы, нагруженной по экватору равномерно распределённым давлением  $q$  на единицу длины («опоясанный шар»).

Нагрузку, распределённую по линии, следует, конечно, рассматривать как предельное значение некоторой поверхностной нагрузки. Последнюю задаём так:

$$\sigma(\vartheta) = \begin{cases} 0 & 0 < \vartheta < \vartheta_0 - \varepsilon, \\ p_0 & \vartheta_0 - \varepsilon < \vartheta < \vartheta_0, \\ 0 & \vartheta_0 < \vartheta < \pi. \end{cases} \quad (6.38)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi P_n(\cos \vartheta) \sigma(\vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta = \\ &= \frac{2n+1}{2} p_0 \int_{\vartheta_0-\varepsilon}^{\vartheta_0} P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Этот интеграл легко вычислить, если использовать соотношение

$$(2n+1) P_n(\mu) = P'_{n+1}(\mu) - P'_{n-1}(\mu). \quad (6.40)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{1}{2} p_0 \{ [P_{n+1}(\cos(\vartheta_0 - \varepsilon)) - P_{n+1}(\cos \vartheta_0)] - \\ &\quad - [P_{n-1}(\cos(\vartheta_0 - \varepsilon)) - P_{n-1}(\cos \vartheta_0)] \}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Мы получили разложение в ряд по сферическим функциям нормальной нагрузки, принимающей постоянное значение  $\sigma_0$  на части поверхности сферы и обращаемой в нуль на остальной поверхности.

При достаточно малом  $\varepsilon$  нагрузка на элементарной площадке  $R_0^2 \varepsilon \sin \vartheta_0 \, d\varphi$  будет  $p_0 R_0^2 \varepsilon \sin \vartheta_0 \, d\varphi$ . Поэтому, обозначая через  $q$  погонную нагрузку на единицу длины параллельного круга  $\vartheta = \vartheta_0$ , можно написать:

$$p_0 R_0^2 \varepsilon \sin \vartheta_0 \, d\varphi = q R_0 \sin \vartheta_0 \, d\varphi, \quad \text{т. е.} \quad p_0 \varepsilon = \frac{q}{R_0}. \quad (6.42)$$

Поэтому, сделав предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим:

$$\sigma_n = \frac{q}{2R_0} \sin \vartheta_0 [P'_{n+1}(\cos \vartheta_0) - P'_{n-1}(\cos \vartheta_0)]$$

или, применив снова (6.40),

$$\sigma_n = \frac{q}{R_0} \frac{2n+1}{2} P_n(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0. \quad (6.43)$$

Этот же результат можно было бы получить сразу, заменив в (6.39) переменную интегрирования на  $\vartheta_0$ ,  $p_0 d\vartheta$  на  $p_0 \varepsilon$  [см. (6.42)] и отбросив знак интеграла.

При нагружении по экватору  $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ , и мы получаем:

$$\sigma_n = \frac{2n+1}{2} \frac{q}{R_0} P_n(0),$$

т. е.

$$\sigma_0 = \frac{q}{2R_0}, \quad \tau_1 = 0, \quad (6.44)$$

и далее

$$\frac{2\sigma_n}{2n+1} = \begin{cases} 0 & n = 2k+1, \\ \frac{q}{R_0} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \dots 2k} & n = 2k, \end{cases} \quad (6.45)$$

где  $k = 1, 2, \dots$

Мы рассмотрим лишь перемещение  $u_R$  на поверхности сферы ( $x = 1$ ). В соответствии со сказанным выше оно состоит из трёх слагаемых: слагаемого (6.5), соответствующего постоянному члену  $\sigma_0$  разложения в ряд (6.1):

$$(u_R^0)_{x=1} = \frac{m-2}{4G(m+1)} q \quad (6.46)$$

и слагаемых  $u_R^{(1)}$ ,  $u_R^*$ . Первое из них найдём, заменив в (6.8) коэффициенты  $L_n$  и  $M_n$  на  $L_n^{(1)}$  и  $M_n^{(1)}$ , определяемые по (6.14). Получим:

$$(u_R^{(1)})_{x=1} = \frac{q}{8G} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \dots 2k} (L_{2k}^{(1)} + M_{2k}^{(1)}) P_{2k}(\mu). \quad (6.47)$$

По (6.14) и (6.9)

$$L_n^{(1)} + M_n^{(1)} = L_n + M_n - \frac{8(m-1)}{m} = \frac{2}{m^2(n-1)\Delta} [n^2(2m^2 - 8m + 8) + n(-2m^2 + 9m - 4) + 3m^2 + 2m - 4]. \quad (6.48)$$

Поэтому, полагая  $m = 3$ , получим:

$$\begin{aligned} (u_R^{(1)})_{x=1} &= \frac{q}{12G} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \dots 2k} \frac{8k^2 + 10k + 29}{(2k-1)(12k^2 + 10k + 4)} P_{2k}(\mu) = \\ &= -\frac{q}{12G} [0,905P_2(\mu) - 0,1405P_4(\mu) + 0,0576P_6(\mu) - \\ &\quad - 0,0326P_8(\mu) + 0,0215P_{10}(\mu) - \dots]. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Остаётся по (6.37) составить выражение  $u_R^*$ . В соответствии со сказанным выше отбрасываем в этом выражении знак интеграла и заменяем  $\vartheta_1$  на  $\frac{\pi}{2}$ , а  $\sigma(\vartheta_1) d\vartheta_1$  на  $\frac{q}{R_0}$ . Получаем (при  $x = 1$ ):

$$(u_R^*)_{x=1} = -\frac{q(m-1)}{mG} \left[ 1 - \frac{2}{\pi s_1} K(k) \right], \quad (6.50)$$



причём в соответствии с (6.30) и (6.33)

$$k = \sqrt{\frac{2 \sin \vartheta}{1 + \sin \vartheta}}, \quad s_1 = \sqrt{2(1 + \sin \vartheta)}. \quad (6.51)$$

Конечно, при  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ , т. е. в месте приложения сосредоточенной нагрузки,  $(u_R^*)_{x=1}$  претерпевает разрыв непрерывности, обращаясь в бесконечность, так как при  $k \rightarrow 1$

$$K(k) = \ln \frac{4}{k'} + \frac{1^2}{2^2} \left( \ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} \right) k'^2 + \dots, \quad (6.52)$$

где  $k' = \sqrt{1 - k^2}$  — дополнительный модуль. Но уже на небольшом расстоянии от экватора  $K(k)$  примет конечное и небольшое численное значение. Если бы мы не выделили из выражения  $u_R$  слагаемого  $u_R^*$ , мы вместо достаточно хорошо сходящегося ряда (6.49) получили бы при  $x = 1$  (на поверхности сферы) расходящийся ряд и задача не могла бы быть решена.

Для вычисления удобно подвергнуть выражение  $K(k)$  преобразованию Ландена

$$K(k) = (1 + k_1) K(k_1), \quad (6.53)$$

где

$$k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'} = \frac{\sqrt{1 + \sin \vartheta} - \sqrt{1 - \sin \vartheta}}{\sqrt{1 + \sin \vartheta} + \sqrt{1 - \sin \vartheta}} = \frac{1 - \sqrt{\cos^2 \vartheta}}{\sin \vartheta} = \frac{1 - |\cos \vartheta|}{\sin \vartheta}$$

и, значит,

$$k_1 = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} & \text{при } 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} & \text{при } \frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi. \end{cases} \quad (6.54)$$

Таким образом, получаем при  $\vartheta < \frac{\pi}{2}$ :

$$(u_R^*)_{x=1} = -\frac{q(m-1)}{mG} \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \left( 1 + \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right) \frac{K\left(\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}\right)}{\sqrt{2(1 + \sin \vartheta)}} \right]. \quad (6.55)$$

При  $\vartheta > \frac{\pi}{2}$  эта величина принимает те же значения (6.55) в точках, симметрично расположенных относительно плоскости экватора.

Полное перемещение  $(u_R)_{x=1}$  получим, складывая выражения (6.46), (6.49) и (6.55). В частности, при  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$  (в полюсах сферы) получаем:

$$(u_R)_{\substack{R=R_0 \\ \vartheta=0; \pi}} = \frac{q}{G} \left( 0,062 - \frac{0,811}{12} - \frac{2}{3} \cdot 0,293 \right) = -0,200 \frac{q}{G}, \quad (6.56)$$

причём принято  $m = 3$ . Необходимо напомнить, что при сжатии  $q < 0$ . Итак, диаметр шара, сжимаемого по экватору, перпендикулярный к плоскости экватора, увеличивает (при  $m = 3$ ) свою длину на

$$\delta = 0,400 \frac{|q|}{G}. \quad (6.57)$$

6°. Вычисление напряжений было бы сопряжено с необходимостью повторить всё предшествующее вычисление; нельзя исходить из полученных выражений для перемещений, так как при дифференцировании выражений  $u_R^{(1)}$ ,  $u_\theta^{(1)}$  мы пришли бы к очень плохо сходящимся при  $x < 1$  и расходящимся на поверхности шара рядам. Поэтому следует заново составить, пользуясь выражениями (6.6) коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$ , по (2.14) формулы для напряжений, произвести в их коэффициентах выделение по крайней мере не убывающих с ростом номера  $n$  слагаемых и просуммировать соответствующие ряды.

Интересно отметить, что напряжения в центре шара находятся непосредственно, без всяких выкладок. Действительно, из (2.14) видно, что при  $R = 0$  не обращаются в нуль только слагаемые, соответствующие коэффициентам  $B_2$  и  $A_0$ ; поэтому [см. (2.21) и (6.6)] напряжения в центре будут [ср. § 5 (5.6), (5.7)]:

$$\sigma_\varphi = \sigma_x = \sigma_y = -\frac{7m+2}{7m+5} \frac{\sigma_2}{2} + \sigma_0, \quad (\sigma_R)_{\mu=1} = \sigma_z = \frac{7m+2}{7m+5} \sigma_2 + \sigma_0, \quad (6.58)$$

и, в частности, в задаче о сфере, сжимаемой по экватору согласно (6.45), получим:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{63m+30}{8(7m+5)} \frac{q}{R_0}, \quad \sigma_z = -\frac{21m}{4(7m+5)} \frac{q}{R_0} \quad (6.59)$$

(при сжатии  $q < 0$ ).

## § 7. Сжатие упругого шара сосредоточенными силами

Сосредоточенные силы  $Z$ , сжимающие шар, приложены в его полюсах. Рассмотрим сначала равномерно распределённую нагрузку  $\sigma(\vartheta)$  по части сферы, примыкающей к полюсу  $\vartheta = 0$  и ограниченной параллельным кругом  $\vartheta = \varepsilon$ :

$$\sigma(\vartheta) = \begin{cases} p_0 & \text{при } 0 < \vartheta < \varepsilon, \\ 0 & \text{при } \varepsilon < \vartheta < \pi. \end{cases}$$

Коэффициенты разложения этой функции в ряд по полиномам Лежандра по (6.41) будут:

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(1)} &= \frac{1}{2} p_0 \{ [P_{n+1}(1) - P_{n+1}(\cos \varepsilon)] - [P_{n-1}(1) - P_{n-1}(\cos \varepsilon)] \} = \\ &= \frac{1}{2} p_0 [P_{n-1}(\cos \varepsilon) - P_{n+1}(\cos \varepsilon)]. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Площадь, по которой распределена нагрузка, при достаточно малом  $\varepsilon$  приближённо равна  $\pi R_0^2 \varepsilon^2$ ; надо совершить в (7.1) предельный переход, полагая  $\varepsilon \rightarrow 0$  и

$$\pi R_0^2 \varepsilon^2 p_0 \rightarrow Z.$$

Таким образом,

$$\sigma_n^{(1)} = \frac{Z}{2\pi R_0^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P_{n-1}(\cos \varepsilon) - P_{n+1}(\cos \varepsilon)}{\varepsilon^2}.$$

Применяя известное правило раскрытия неопределённости и пользуясь (6.40), найдём:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P_{n-1}(\cos \varepsilon) - P_{n+1}(\cos \varepsilon)}{\varepsilon^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{dP_{n-1}(\cos \varepsilon)}{d \cos \varepsilon} - \frac{dP_{n+1}(\cos \varepsilon)}{d \cos \varepsilon}}{2\varepsilon} \frac{d \cos \varepsilon}{d\varepsilon} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} [P'_{n+1}(1) - P'_{n-1}(1)] = \frac{2n+1}{2} P_n(1) = \frac{2n+1}{2}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\sigma_n^{(1)} = \frac{Z}{4\pi R_0^2} (2n+1).$$

К этому же результату можно прийти по (6.43), рассматривая сосредоточенную в полюсе  $\vartheta = 0$  силу  $Z$  как предельный случай нагрузки по окружности радиуса  $R_0 \varepsilon$  малого круга  $\vartheta = \varepsilon$ ; погонная интенсивность этой нагрузки  $q = \frac{Z}{2\pi R_0 \varepsilon}$ , и по (6.43) получаем:

$$\sigma_n^{(1)} = \frac{Z}{2\pi R_0^2} \frac{2n+1}{2} P_n(1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{Z}{4\pi R_0^2} (2n+1).$$

Для сосредоточенной силы в полюсе  $\vartheta = \pi$  аналогично получим:

$$\sigma_n^{(2)} = \frac{Z}{2\pi R_0^2} \frac{2n+1}{2} P_n(-1) = \frac{Z}{4\pi R_0^2} (2n+1) (-1)^n.$$

Таким образом, коэффициенты разложения в ряд по полиномам Лежандра функции нагрузки, соответствующей приложению сосредоточенных сил в полюсах  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$ , будут:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_n^{(1)} + \sigma_n^{(2)} = \frac{Z}{4\pi R_0^2} (2n+1) [1 + (-1)^n] = \\ &= \begin{cases} 0 & n = 1, 3, 5, \dots, \\ \frac{Z}{2\pi R_0^2} (2n+1) & n = 0, 2, 4, \dots \end{cases} \quad (7.2) \end{aligned}$$

Ряд, выражающий эту нагрузку,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n P_n(\mu) = \frac{Z}{\pi R_0^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k+1}{2} P_{2k}(\mu) \quad (7.3)$$

расходится, но это не может служить препятствием для получения решения в рядах, которые будут сходиться внутри сферы ( $x < 1$ ) и на её поверхности повсюду, кроме полюсов.

Прежде всего выделяем решение, соответствующее свободному члену этого ряда; по (6.5) оно будет:

$$u_R^0 = \frac{(m-2)Z}{4\pi G R_0(m+1)} x, \quad u_\theta^0 = 0. \quad (7.4)$$

Остающуюся часть решения надо разбить на две части: во-первых, на часть  $u_R^{(3)}$ ,  $u_\theta^{(3)}$ , соответствующую замене в (6.8) коэффициентов  $L_n, \dots, S_n$  остатками  $L_n^{(3)}, \dots, S_n^{(3)}$ , выражения которых даются формулами (6.13); во-вторых, на часть  $u_R^*$ ,  $u_\theta^*$ , определяемую рядами, которые мы должны просуммировать. Эти ряды мы первоначально запишем в форме (6.16), дополнив их слагаемыми, имеющими порядки  $\frac{1}{n+1}$  и  $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ . Получим, воспользовавшись (7.2):

$$\left. \begin{aligned} u_R^* &= \frac{Zx}{8G\pi R_0} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (4k+1)(x^{2k-2} - x^{2k}) + \frac{4(m-1)}{m}(x^{2k} + x^{2k-2}) + \right. \\ &+ \frac{1}{2k+1}(\alpha_1 x^{2k} + \beta_1 x^{2k-2}) + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}(\gamma_2 x^{2k} + \beta_2 x^{2k-2}) \left. \right\} P_{2k}(\mu), \\ u_\theta^* &= -\frac{Zx \sin \theta}{8G\pi R_0} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2(x^{2k-2} - x^{2k}) + \frac{1}{2k+1}(\gamma_1 x^{2k} + \delta_1 x^{2k-2}) + \right. \\ &+ \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}(\gamma_2 x^{2k} + \delta_2 x^{2k-2}) \left. \right\} P'_{2k}(\mu). \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Значения числовых коэффициентов  $\alpha_1, \dots, \delta_2$  (зависящих только от числа Пуассона  $m$ ) даются в формулах (6.12).

Суммирование этих рядов не более сложно, чем соответствующих рядов в § 6. Имеем:

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} (4k+1) x^{2k} P_{2k}(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x^n P_n(\mu) + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-x)^n P_n(\mu),$$

и, значит, по (6.25)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (4k+1) P_{2k}(\mu) x^{2k} = \frac{1-x^2}{2s^3} + \frac{1-x^2}{2s_*^3}, \quad (7.6)$$

где  $s$  имеет прежнее значение ( $\lambda$  заменено на  $\mu$ ), а  $s_*$  получается из  $s$  заменой  $x$  на  $-x$ :

$$s_* = \sqrt{1+x^2+2x\mu}. \quad (7.7)$$

Мы получили первую нужную нам сумму:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (4k+1)(x^{2k-2} - x^{2k}) P_{2k}(\mu) = \frac{1-x^2}{2x^2} \left( \frac{1-x^2}{s^3} + \frac{1-x^2}{s_*^2} - 2 \right). \quad (7.8)$$

Точно так же найдём, применив (6.24):

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x^{2k} + x^{2k-2}) P_{2k}(\mu) = \frac{1+x^2}{2x^2} \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{s_*} - 2 \right). \quad (7.9)$$

Для последующего вычисления нужно ещё знать суммы рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} P_n(\mu), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)} P_n(\mu). \quad (7.10)$$

Они получаются, конечно, интегрированием ряда (6.24):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} P_n(\mu) &= \int_0^x \frac{dx}{s} = \ln \left| \frac{s+x-\mu}{1-\mu} \right|, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} P_n(\mu) &= \int_0^x dx \int_0^x \frac{dx}{s} = \\ &= (x-\mu) \ln \left| \frac{s+x-\mu}{1-\mu} \right| + 1-s. \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Отсюда, как выше, находим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} (\alpha_1 x^{2k} + \beta_1 x^{2k-2}) P_{2k}(\mu) &= \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\beta_1}{x^3} \right) \left[ \ln \left| \frac{s+x-\mu}{s_*-x-\mu} \right| - 2x \right] \end{aligned} \quad (7.12)$$

и далее

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_2 x^{2k} + \beta_2 x^{2k-2}}{(2k+1)(2k+2)} P_{2k}(\mu) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\beta_2}{x^4} \right) \left[ (x-\mu) \ln \left| \frac{s+x-\mu}{1-\mu} \right| - \right. \\ &\left. - (x+\mu) \ln \left| \frac{s_*-x-\mu}{1-\mu} \right| + 2-s-s_*-x^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Остаётся вычислить суммы, входящие в выражение  $u_0^*$ . По (6.26) получим сначала

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} (x^{2k-2} - x^{2k}) P'_{2k}(\mu) = \frac{1-x^2}{x} \left( \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s_*^3} \right). \quad (7.14)$$

Интегрируя далее (6.26), имеем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} P'_n(\mu) = \int_0^x \frac{x dx}{s^3} = \frac{\mu x + s - 1}{(1 - \mu^2)s}. \quad (7.15)$$

Вторичное интегрирование даёт:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} P'_n(\mu) = \frac{\mu s + x - \mu}{1 - \mu^2} - \ln \left| \frac{s + x - \mu}{1 - \mu} \right|. \quad (7.16)$$

Теперь находим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_1 x^{2k} + \delta_1 x^{2k-2}}{2k+1} P'_{2k}(\mu) = \frac{1}{2x} \left( \gamma_1 + \frac{\delta_1}{x^2} \right) \left[ \frac{\mu x - 1}{(1 - \mu^2)s} + \frac{\mu x + 1}{(1 - \mu^2)s_*} \right]. \quad (7.17)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P'_{2k}(\mu)}{(2k+1)(2k+2)} (\gamma_2 x^{2k} + \delta_2 x^{2k-2}) = \frac{1}{2x^2} \left( \gamma_2 + \frac{\delta_2}{x^2} \right) \left[ \frac{\mu(s-1)}{1 - \mu^2} + \frac{\mu(s_* - 1)}{1 - \mu^2} - \ln \frac{(s+x-\mu)(s_* - x - \mu)}{(1 - \mu)^2} \right]. \quad (7.18)$$

Сделав теперь соответствующие подстановки, получим выражения перемещений

$$u_{II} = \frac{(m-2)Zx}{4G(m+1)\pi R_0} + \frac{Zx}{8\pi G R_0} \left\{ \frac{1-x^2}{2x^2} \left( \frac{1-x^2}{s^3} + \frac{1-x^2}{s_*^3} - 2 \right) + \frac{4(m-1)}{m} \frac{1+x^2}{2x^2} \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{s_*} - 2 \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\beta_1}{x^3} \right) \left( \ln \frac{s+x-\mu}{s_*-x-\mu} - 2x \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\beta_2}{x^4} \right) \left[ (x-\mu) \ln \left| \frac{s+x-\mu}{1-\mu} \right| - (x+\mu) \ln \left| \frac{s_*-x-\mu}{1-\mu} \right| + 2 - s - s_* - x^2 \right] + \sum_{k=1}^{\infty} (L_{2k}^{(3)} x^{2k} + M_{2k}^{(3)} x^{2k-2}) P_{2k}(\mu) \right\}, \quad (7.19)$$

$$u_{\Phi} = -\frac{Zx \sin \Phi}{8\pi G R_0} \left\{ \frac{1-x^2}{x} \left( \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s_*^3} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_1}{x} + \frac{\delta_1}{x^3} \right) \left[ \frac{\mu x - 1}{(1 - \mu^2)s} + \frac{\mu x + 1}{(1 - \mu^2)s_*} \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_2}{x^2} + \frac{\delta_2}{x^4} \right) \left[ \frac{\mu(s+s_*-2)}{1 - \mu^2} - \ln \frac{(s+x-\mu)(s_*-x-\mu)}{(1 - \mu)^2} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} (Q_{2k}^{(3)} x^{2k} + S_{2k}^{(3)} x^{2k-2}) P'_{2k}(\mu) \right\}. \quad (7.20)$$

На поверхности сферы

$$x = 1, \quad s = 2 \sin \frac{\Phi}{2}, \quad s_* = 2 \cos \frac{\Phi}{2} \quad (7.21)$$

и выражения перемещений значительно упрощаются:

$$\begin{aligned}
 (u_R)_{x=1} = & \frac{(m-2)Z}{4G(m+1)\pi R_0} + \frac{Z}{4\pi GR_0} \left\{ \frac{m-1}{m} \left( \frac{1}{\sin \frac{\vartheta}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\vartheta}{2}} - 4 \right) + \right. \\
 & + \frac{(m-2)^2}{m^2} \left( \ln \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi-\vartheta}{4} - 2 \right) - \\
 & - \frac{3m^2 - 20m + 16}{m^3} \left( \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \ln \frac{1 + \sin \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}} + \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \ln \frac{1 + \cos \frac{\vartheta}{2}}{\cos \frac{\vartheta}{2}} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} - \sin \frac{\vartheta}{2} - \cos \frac{\vartheta}{2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_{2k}^{(3)} + M_{2k}^{(3)}}{2} P_{2k}(\mu) \left. \right\}, \quad (7.22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (u_{\vartheta})_{x=1} = & \frac{Z}{4\pi GR_0} \left\{ \frac{m-2}{m} \frac{\cos \frac{\vartheta}{2} - \sin \frac{\vartheta}{2}}{\sin \vartheta} + \frac{m^2 + 8m - 8}{m^2} \times \right. \\
 & \times \left[ \left( 1 - \cos \frac{\vartheta}{2} - \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{1}{2} \sin \vartheta \ln \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} \frac{1 + \sin \frac{\vartheta}{2}}{1 + \cos \frac{\vartheta}{2}} \right] + \\
 & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_{2k}^{(3)} + S_{2k}^{(3)}}{2} \frac{dP_{2k}(\cos \vartheta)}{d\vartheta} \right\}. \quad (7.23)
 \end{aligned}$$

Входящие сюда коэффициенты имеют выражения

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{2} (L_n^{(3)} + M_n^{(3)}) &= \frac{1}{m^4 (n-1)(n+1)(n+2) \Delta} [(m^4 + 7m^3 + \\
 & + 30m^2 - 64m + 32)n^2 + (7m^4 + 22m^3 - 39m^2 + 44m - 16)n + \\
 & + 10m^4 - 11m^3 + 9m^2 + 20m - 16], \\
 \frac{1}{2} (S_n^{(3)} + Q_n^{(3)}) &= \frac{1}{m^3 (n-1)(n+1)(n+2) \Delta} [(7m^3 + 11m^2 - \\
 & - 28m + 16)(n+2)^2 + (-18m^3 - 48m^2 + 132m - 72)(n+2) + \\
 & + 9(m-1)(m^2 + 8m - 8)].
 \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

Их числовые значения (при  $m=3$ ) приводятся в табличке

$n$	2	4	6	8	10
$\frac{1}{2} (L_n^{(3)} + M_n^{(3)})$	0,476	0,0595	0,0185	0,0084	0,0042
$\frac{1}{2} (S_n^{(3)} + Q_n^{(3)})$	0,570	0,0825	0,0273	0,0123	0,0066

Изменение длины диаметра шара оказывается равным

$$\delta = 2(u_R)_{\varphi=1} = -0,127 \frac{Z}{GR_0} \quad (7.25)$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}$$

( $Z < 0$  при сжатии).

Для оценки этого результата интересно указать, что цилиндр высоты и диаметра  $2R_0$ , сжатый силами  $Z$ , равномерно распределёнными по поверхностям торцов, увеличит свой диаметр на

$$\delta' = \frac{2R_0 Z}{\pi E m R_0^3} = \frac{Z}{GR_0} 0,0795. \quad (7.26)$$

Напряжения в центре шара можно определить по (6.58), причём в рассматриваемом случае по (7.2)

$$\sigma_0 = \frac{Z}{2\pi R_0^2}, \quad \sigma_2 = \frac{5Z}{2\pi R_0^2}.$$

Получим:

$$\sigma_x = -\frac{Z}{4\pi R_0^2} \frac{21m}{7m+5}, \quad \sigma_z = \frac{Z}{2\pi R_0^2} \frac{42m+15}{7m+5}$$

и при  $m = 3$

$$\sigma_x = \frac{|Z|}{\pi R_0^2} 0,605, \quad \sigma_z = -\frac{|Z|}{\pi R_0^2} 2,71.$$

## § 8. Равновесие тяжёлой сферы

Рассмотрим в заключение задачу о напряжённом состоянии в тяжёлой сфере, опирающейся на жёсткое горизонтальное основание. Действующими силами являются: объёмная сила веса и реакция основания

$$Z = -\frac{4}{3} \pi R_0^3 \gamma, \quad (8.1)$$

приложенная в нижнем полюсе ( $\vartheta = \pi$ ) сферы. Знак минус указывает, что усилие  $Z$  — сжимающее;  $\gamma$  обозначает вес единицы объёма материала. Коэффициенты в представлении нагрузки  $Z$  в форме ряда (расходящегося) по сферическим функциям согласно (7.2) будут:

$$\sigma_n = (-1)^n \frac{2n+1}{2} \frac{Z}{2\pi R_0^2} = \frac{2n+1}{3} (-1)^{n-1} \gamma R_0. \quad (8.2)$$

В частности,

$$\sigma_0 = -\frac{1}{3} \gamma R_0, \quad \sigma_1 = \gamma R_0. \quad (8.3)$$



Выражение потенциала силы веса, очевидно, имеет вид

$$\Pi = \gamma z = \gamma R \cos \vartheta = \gamma R P_1(\mu). \quad (8.4)$$

Поэтому по (3.16) и (3.17) частное решение будет: перемещения

$$u_R = \frac{3(m-2)\gamma}{20(m-1)G} R^2 \cos \vartheta, \quad u_\vartheta = -\frac{(m-2)\gamma}{20(m-1)G} R^2 \sin \vartheta; \quad (8.5)$$

напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \frac{3m-1}{5(m-1)} \gamma R \cos \vartheta, & \tau_{R\vartheta} &= -\frac{(m-2)\gamma}{5(m-1)} R \sin \vartheta, \\ \sigma_\vartheta &= \sigma_\varphi = \frac{m+3}{5(m-1)} \gamma R \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Поверхность сферы  $R = R_0$  повсюду, кроме полюса  $\vartheta = \pi$ , должна быть свободна от напряжений. Поэтому коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  при  $n \geq 2$  в разложении решения, которое следует наложить на частное решение (8.5) — (8.6), должны быть определены из уравнений (2.43), в которых  $\tau_n = 0$ , а  $\sigma_n$  определяются выражениями (8.2). При  $n = 1$  в этих уравнениях надо принять [см. (8.3) и (8.6)]:

$$\sigma_1 = \gamma R_0 - \frac{3m-1}{5(m-1)} \gamma R_0 = \frac{2(m-2)}{5(m-1)} \gamma R_0, \quad \tau_1 = -\frac{m-2}{5(m-1)} \gamma R_0. \quad (8.7)$$

(Напомним, что  $\tau_n$  — коэффициент в разложении касательной нагрузки в ряд по функциям  $\frac{dP_n}{d\vartheta}$  и что, в частности,  $\frac{dP_1}{d\vartheta} = -\sin \vartheta$ .) Условие уравновешенности внешних нагрузок (2.40) удовлетворяется, и по (2.41) получаем:

$$A_1 = -\frac{m(m-2)\gamma}{20(m^2-1)G}, \quad (8.8)$$

и соответствующее решение по (2.23) будет:

$$u_R = \frac{\gamma(m-2)(m-4)}{10(m^2-1)G} R^2 \cos \vartheta, \quad u_\vartheta = \frac{(3m-2)(m-2)}{10(m^2-1)G} R^2 \sin \vartheta \quad (8.9)$$

с напряжениями [см. (2.24)]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \frac{2}{5} \frac{m-2}{m-1} \gamma R \cos \vartheta, & \tau_{R\vartheta} &= \frac{1}{5} \frac{(m-2)\gamma}{m-1} R \sin \vartheta, \\ \sigma_\vartheta &= \sigma_\varphi = \frac{4}{5} \frac{(m-2)\gamma}{m-1} R \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

Постоянному слагаемому  $\sigma_0$  в разложении нагрузки, определяемой усилием  $Z$ , по (2.42) и (2.21) соответствует решение

$$u_R = -\frac{\gamma R_0}{6} \frac{m-2}{G(m+1)} R, \quad u_\vartheta = 0. \quad (8.11)$$

Для  $n \geq 2$  решения уравнений (2.43) даются формулами (6.8); в нашем случае по (8.2) они принимают вид

$$\left. \begin{aligned} u_R &= -\frac{\gamma R_0 R}{12G} \sum_{n=2}^{\infty} (L_n x^n + M_n x^{n-2}) (-1)^n P_n(\mu), \\ u_\theta &= -\frac{\gamma R_0 R}{12G} \sum_{n=2}^{\infty} (Q_n x^n + S_n x^{n-2}) (-1)^n \frac{dP_n}{d\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

Как указано выше, из этих рядов могут быть отделены медленно сходящиеся слагаемые  $u_R^*$  и  $u_\theta^*$ :

$$u_R = u_R^* + u_R^{(3)}, \quad u_\theta = u_\theta^* + u_\theta^{(3)}. \quad (8.13)$$

Здесь  $u_R^{(3)}$  и  $u_\theta^{(3)}$  получаются из (8.12) при замене коэффициентов  $L_n, \dots, S_n$  «остатками»  $L_n^{(3)}, \dots, S_n^{(3)}$ , а  $u_R^*$  и  $u_\theta^*$  обозначают суммы рядов

$$\left. \begin{aligned} u_R^* &= -\frac{\gamma R_0^2}{12Gx} \left\{ (1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^n (2n+1) P_n(\mu) + \right. \\ &+ \frac{4(m-1)}{m} (1+x^2) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^n P_n(\mu) + (\alpha_1 x^2 + \beta_1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1} P_n(\mu) + \\ &\quad \left. + (\alpha_2 x^2 + \beta_2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)(n+2)} P_n(\mu) \right\}, \\ u_\theta^* &= \frac{\gamma R_0^2 \sin \theta}{12Gx} \left\{ 2(1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^n P'_n(\mu) + (\gamma_1 x^2 + \delta_1) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n (-1)^n}{n+1} P'_n(\mu) + (\gamma_2 x^2 + \delta_2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)(n+2)} P'_n(\mu) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

Эти суммы находятся, как указано в §§ 6 и 7:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (2n+1) (-x)^n P_n(\mu) = \frac{1-x^2}{s_*^3} - 1 + 3x\mu, \quad (8.15)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-x)^n P_n(\mu) = \frac{1}{s_*} - 1 + x\mu, \quad (8.16)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n+1} P_n(\mu) = -\frac{1}{x} \left[ \ln \left| \frac{s_* - x - \mu}{1 - \mu} \right| + x - \frac{1}{2} x^2 \mu \right], \quad (8.17)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(n+1)(n+2)} P_n(\mu) = \frac{1}{x^2} \left[ -(x+\mu) \ln \left| \frac{s_* - x - \mu}{1 - \mu} \right| + 1 - s_* - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 \mu \right], \quad (8.18)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-x)^n P'_n(\mu) = -\frac{x}{s_*^3} + x, \quad (8.19)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n+1} P'_n(\mu) = \frac{1}{x} \left[ \frac{\mu x - s_* + 1}{(1 - \mu^2) s_*} + \frac{1}{2} x^2 \right], \quad (8.20)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(n+1)(n+2)} P'_n(\mu) &= \\ &= \frac{1}{x^2} \left[ \frac{\mu s_* - x - \mu}{1 - \mu^2} - \ln \left| \frac{s_* - x - \mu}{1 - \mu} \right| + \frac{1}{6} x^3 \right]. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Решение задачи получим теперь, подставив эти выражения в (8.14) и складывая полученные выражения с (8.11), (8.5), (8.9) и (8.12), причём в последних формулах следует заменить коэффициенты  $L_n, \dots, S_n$  выражениями  $L_n^{(3)}, \dots, S_n^{(3)}$ , определяемыми по (6.13).

### § 9. Напряжённое состояние в окрестности эллипсоидальной полости

1°. В заключение рассмотрим задачу, хотя и не имеющую прямого отношения к предмету настоящей главы, но являющуюся естественным обобщением рассмотренной в § 4 задачи о напряжённом состоянии в окрестности сферической полости.

Мы рассматриваем упругую среду, ограниченную изнутри поверхностью трёхосного эллипсоида

$$\frac{x^2}{\rho_0^2} + \frac{y^2}{\rho_0^2 - e^2} + \frac{z^2}{\rho_0^2 - 1} - a^2 = 0 \quad (0 < e < 1 < \rho_0) \quad (9.1)$$

с полуосями  $a\rho_0, a\sqrt{\rho_0^2 - e^2}, a\sqrt{\rho_0^2 - 1}$ . Предполагается, что на достаточно большом удалении от эллипсоидальной полости имеет место однородное напряжённое состояние; последнее определяется заданием главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , причём главные оси напряжения мы считаем параллельными осям эллипсоида. Требуется определить напряжённое состояние в окрестности полости.

Решение уравнений равновесия теории упругости мы, как и ранее, выражаем через четыре гармонические функции Папковича—Нейбера [ср. (10.10) главы 1]:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2G} \left( \frac{4(m-1)}{m} B_x - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right), \\ v &= \frac{1}{2G} \left( \frac{4(m-1)}{m} B_y - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right), \\ w &= \frac{1}{2G} \left( \frac{4(m-1)}{m} B_z - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right), \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

где обозначено

$$\Phi = B_0 + xB_x + yB_y + zB_z. \quad (9.3)$$

Проекции  $t_{nx}$ ,  $t_{ny}$ ,  $t_{nz}$  вектора напряжения на площадке, нормаль которой задаётся направляющими косинусами  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$ , могут быть выражены через эти гармонические функции по формулам [ср. (10.17) главы 1]

$$\left. \begin{aligned} t_{nx} &= n_x \operatorname{div} \mathbf{B} + \frac{m-2}{m} \left( \frac{\partial B_x}{\partial n} + \frac{\partial B_y}{\partial x} n_y - \frac{\partial B_y}{\partial y} n_x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial B_z}{\partial x} n_z - \frac{\partial B_z}{\partial z} n_x \right) - \\ &\quad - x \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial B_x}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial B_y}{\partial x} - z \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial B_0}{\partial x}, \\ t_{ny} &= n_y \operatorname{div} \mathbf{B} + \frac{m-2}{m} \left( \frac{\partial B_y}{\partial n} + \frac{\partial B_z}{\partial y} n_z - \frac{\partial B_z}{\partial z} n_y + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial B_x}{\partial y} n_x - \frac{\partial B_x}{\partial x} n_y \right) - \\ &\quad - x \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial B_x}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial B_y}{\partial y} - z \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial B_0}{\partial y}, \\ t_{nz} &= n_z \operatorname{div} \mathbf{B} + \frac{m-2}{m} \left( \frac{\partial B_z}{\partial n} + \frac{\partial B_x}{\partial z} n_x - \frac{\partial B_x}{\partial x} n_z + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial B_y}{\partial z} n_y - \frac{\partial B_y}{\partial y} n_z \right) - \\ &\quad - x \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial B_x}{\partial z} - y \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial B_y}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial B_0}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Напряжённое состояние в упругой среде можно представить как сумму двух напряжённых состояний: вышеуказанного однородного напряжённого состояния, определяемого заданием напряжений на бесконечности, и добавочного напряжённого состояния, разыскиваемого с помощью введённых гармонических функций. На поверхности эллипсоидальной полости внешние силы отсутствуют; поэтому вектор на-

пряжения в точках этой поверхности, определяемый наложением указанных напряжённых состояний, должен быть равным нулю. Мы удовлетворим этому условию, положив величины  $t_{nx}$ ,  $t_{ny}$ ,  $t_{nz}$  в левых частях формул (9.4) равными

$$t_{nx} = -\sigma_1 n_x, \quad t_{ny} = -\sigma_2 n_y, \quad t_{nz} = -\sigma_3 n_z. \quad (9.5)$$

Кроме условий (9.4), должны быть выполнены условия на бесконечности: добавочные напряжения должны на бесконечности обращаться в нуль. Этому условию мы удовлетворим, приняв за  $B_0$ ,  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$  гармонические функции, обращающиеся в нуль при  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$ .

2°. На поверхности эллипсоида (9.1) имеем:

$$n_x = \frac{x}{\rho_0^3 D_0}, \quad n_y = \frac{y}{(\rho_0^2 - e^2) D_0}, \quad n_z = \frac{z}{(\rho_0^2 - 1) D_0}, \quad (9.6)$$

$$D_0^3 = \frac{x^2}{\rho_0^4} + \frac{y^2}{(\rho_0^2 - e^2)^2} + \frac{z^2}{(\rho_0^2 - 1)^2}. \quad (9.7)$$

Введём в рассмотрение (глава 5, § 8) функцию  $\rho(x, y, z)$ , равную наибольшему (и большему чем 1) корню уравнения

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - e^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - 1} - a^2 = 0. \quad (9.8)$$

Тогда имеют место формулы дифференцирования [ср. (9.10) и (9.11) главы 5]

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \frac{x}{\rho}, \quad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{y\rho}{\rho^2 - e^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{z\rho}{\rho^2 - 1}, \quad (9.9)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho^3 D^2}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho(\rho^2 - e^2) D^2}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{z}{\rho(\rho^2 - 1) D^2}, \quad (9.10)$$

причём

$$D^2 = \frac{x^2}{\rho^4} + \frac{y^2}{(\rho^2 - e^2)^2} + \frac{z^2}{(\rho^2 - 1)^2}. \quad (9.11)$$

Поэтому получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D^2}{\partial \rho} = & -4\rho \left[ \frac{x^2}{\rho^6} + \frac{y^2}{(\rho^2 - e^2)^3} + \frac{z^2}{(\rho^2 - 1)^3} \right] + \\ & + \left[ \frac{2x}{\rho^4} \cdot \frac{x}{\rho} + \frac{2y}{(\rho^2 - e^2)^2} \cdot \frac{y\rho}{\rho^2 - e^2} + \frac{2z}{(\rho^2 - 1)^2} \cdot \frac{z\rho}{\rho^2 - 1} \right] \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial D^2}{\partial \rho} = -2\rho \left[ \frac{x^2}{\rho^6} + \frac{y^2}{(\rho^2 - e^2)^3} + \frac{z^2}{(\rho^2 - 1)^3} \right]. \quad (9.12)$$

Выражение производной по нормали к поверхности эллипсоида от функции  $\varphi(x, y, z)$  может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} n_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} n_z = \\ &= \frac{1}{\rho_0 D_0} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{x}{\rho_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{y \rho_0}{\rho_0^2 - e^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{z \rho_0}{\rho_0^2 - 1} \right) = \\ &= \frac{1}{\rho_0 D_0} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{\rho_0 D_0} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0}. \quad (9.13)$$

3°. Напомним, что простейшие произведения Ляме, являющиеся гармоническими функциями, обращающимися в нуль на бесконечности, имеют форму (§ 8 главы 5)

$$\psi_0(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)}, \quad \Delta(\lambda) = \sqrt{(\lambda^2 - e^2)(\lambda^2 - 1)}, \quad (9.14)$$

$$\left. \begin{aligned} x\psi_1(\rho) &= x \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2 \Delta(\lambda)}, & y\psi_2(\rho) &= y \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2) \Delta(\lambda)}, \\ z\psi_3(\rho) &= z \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - 1) \Delta(\lambda)}. \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

Гармонической и также обращающейся в нуль на бесконечности является функция (8.78) главы 5

$$\begin{aligned} \omega(x, y, z) &= x^2 \psi_1(\rho) + y^2 \psi_2(\rho) + z^2 \psi_3(\rho) - a^2 \psi_0(\rho) = \\ &= \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} \left( \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - e^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - 1} - a^2 \right), \end{aligned} \quad (9.16)$$

представляющая потенциал притяжения однородного эллипсоида на внешнюю точку.

Перечисленные гармонические функции мы выбираем в качестве функций, входящих в решение Папковича — Нейбера (9.1),

$$B_x = A_1 x \psi_1(\rho), \quad B_y = A_2 y \psi_2(\rho), \quad B_z = A_3 z \psi_3(\rho), \quad (9.17)$$

$$B_0 = A_4 a^2 \psi_0(\rho) + \frac{1}{2} A_5 \omega(x, y, z). \quad (9.18)$$

В дальнейшем будет показано, что постоянные  $A_1, \dots, A_5$  могут быть подобраны так, чтобы краевые условия (9.4) были выполнены.

С помощью формул (9.6)—(9.12) и соотношений

$$\left. \begin{aligned} \psi'_1(\rho) &= -\frac{1}{\rho^2 \Delta(\rho)}, & \psi'_2(\rho) &= -\frac{1}{(\rho^2 - e^2) \Delta(\rho)}, \\ \psi'_3(\rho) &= -\frac{1}{(\rho^2 - 1) \Delta(\rho)}, & \psi'_0(\rho) &= -\frac{1}{\Delta(\rho)}, \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi''_1(\rho) &= \frac{2\rho}{\rho^4 \Delta(\rho)} + \frac{\psi''(\rho)}{\rho^2}, & \psi''_2(\rho) &= \frac{2\rho}{(\rho^2 - e^2)^2 \Delta(\rho)} + \frac{\psi''_0(\rho)}{\rho^2 - e^2}, \\ \psi''_3(\rho) &= \frac{2\rho}{(\rho^2 - 1)^2 \Delta(\rho)} + \frac{\psi''_0(\rho)}{\rho^2 - 1}, & \psi''_0(\rho) &= \frac{2\rho \left( \rho^2 - \frac{1 + e^2}{2} \right)}{\Delta^3(\rho)} \end{aligned} \right\} \quad (9.20)$$

следует провести вычисление выражений, входящих в равенства (9.4). Прделав эти довольно длительные, но вполне элементарные действия, придём к условиям

$$\begin{aligned} D_0 t_{nx} &= \frac{x}{\rho_0} \left[ \frac{2(m-1)}{m} A_1 \frac{\psi_1(\rho_0)}{\rho_0} + \frac{2}{m} A_2 \frac{\psi_2(\rho_0)}{\rho_0} + \frac{2}{m} A_3 \frac{\psi_3(\rho_0)}{\rho_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{m} A_4 \frac{1}{\rho_0^2 \Delta(\rho_0)} - A_5 \frac{\psi_1(\rho_0)}{\rho_0} + \frac{A_5}{\rho_0^2 \Delta(\rho_0)} \right] - \\ &\quad - \frac{2}{\rho_0^4 \Delta^3(\rho_0)} \frac{x}{\rho_0 D_0^4} \left\{ \rho_0^2 \Delta^2(\rho_0) D_0^2 \left[ A_1 \frac{x^2}{\rho_0^4} + A_2 \frac{y^2}{(\rho_0^2 - e^2)^2} + A_3 \frac{z^2}{(\rho_0^2 - 1)^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \gamma_1(\rho_0) D_0^2 - \rho_0^2 \Delta^2(\rho_0) \left( \frac{x^2}{\rho_0^6} + \frac{y^2}{(\rho_0^2 - e^2)^3} + \frac{z^2}{(\rho_0^2 - 1)^3} \right) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( A_1 \frac{x^2}{\rho_0^2} + A_2 \frac{y^2}{\rho_0^2 - e^2} + A_3 \frac{z^2}{\rho_0^2 - 1} + A_4 a^2 \right) \right\}, \quad (9.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_0 t_{ny} &= \frac{y \rho_0}{\rho_0^2 - e^2} \left[ \frac{2}{m} A_1 \frac{\psi_1(\rho_0)}{\rho_0} + \frac{2(m-1)}{m} A_2 \frac{\psi_2(\rho_0)}{\rho_0} + \frac{2}{m} A_3 \frac{\psi_3(\rho_0)}{\rho_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{m} A_4 \frac{1}{(\rho_0^2 - e^2) \Delta(\rho_0)} - A_5 \frac{\psi_2(\rho_0)}{\rho_0} + \frac{A_5}{(\rho_0^2 - e^2) \Delta(\rho_0)} \right] - \\ &\quad - \frac{2}{\rho_0^4 \Delta^3(\rho_0)} \frac{y \rho_0}{(\rho_0^2 - e^2) D_0^4} \left\{ \rho_0^2 \Delta^2(\rho_0) D_0^2 \left[ A_1 \frac{x^2}{\rho_0^4} + A_2 \frac{y^2}{(\rho_0^2 - e^2)^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + A_3 \frac{z^2}{(\rho_0^2 - 1)^2} \right] + \left[ \gamma_2(\rho_0) D_0^2 - \rho_0^2 \Delta^2(\rho_0) \left( \frac{x^2}{\rho_0^6} + \frac{y^2}{(\rho_0^2 - e^2)^3} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{z^2}{(\rho_0^2 - 1)^3} \right) \right] \left( A_1 \frac{x^2}{\rho_0^2} + A_2 \frac{y^2}{\rho_0^2 - e^2} + A_3 \frac{z^2}{\rho_0^2 - 1} + A_4 a^2 \right) \right\}, \quad (9.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_0 t_{nz} = & \frac{z\rho_0}{\rho_0^3 - 1} \left[ \frac{2}{m} A_1 \frac{\psi_1(\rho_0)}{\rho_0} + \frac{2}{m} A_2 \frac{\psi_2(\rho_0)}{\rho_0} + \frac{2(m-1)}{m} A_3 \frac{\psi_3(\rho_0)}{\rho_0} + \right. \\
 & \left. + \frac{2}{m} A_3 \frac{1}{(\rho_0^3 - 1) \Delta(\rho_0)} - A_5 \frac{\psi_3(\rho_0)}{\rho_0} + \frac{A_5}{(\rho_0^3 - 1) \Delta(\rho_0)} \right] - \\
 & - \frac{2}{\rho_0^4 \Delta^3(\rho_0) (\rho_0^3 - 1) D_0^4} \left\{ \rho_0^2 \Delta^3(\rho_0) D_0^3 \left[ A_1 \frac{x^2}{\rho_0^4} + A_2 \frac{y^2}{(\rho_0^2 - e^2)^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + A_3 \frac{z^2}{(\rho_0^2 - 1)^2} \right] + \left[ \chi_3(\rho_0) D_0^3 - \rho_0^2 \Delta^2(\rho_0) \left( \frac{x^2}{\rho_0^6} + \frac{y^2}{(\rho_0^2 - e^2)^3} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{z^2}{(\rho_0^2 - 1)^3} \right) \right] \left( A_1 \frac{x^2}{\rho_0^2} + A_2 \frac{y^2}{\rho_0^2 - e^2} + A_3 \frac{z^2}{\rho_0^2 - 1} + A_4 a^2 \right) \right\}, \quad (9.23)
 \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned}
 \chi_1(\rho) &= 2\rho^4 - \frac{3}{2}(1 + e^2)\rho^2 + e^2, \\
 \chi_2(\rho) &= 2\rho^4 - \left( \frac{3}{2} + e^2 \right) \rho^2 + \frac{e^2}{2}, \\
 \chi_3(\rho) &= 2\rho^4 - \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \rho^2 + \frac{e^2}{2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (9.24)$$

Первые группы слагаемых в правых частях выражений (9.21)—(9.23) представляют произведения множителей

$$\frac{x}{\rho_0}, \quad \frac{y\rho_0}{\rho_0^2 - e^2}, \quad \frac{z\rho_0}{\rho_0^2 - 1}$$

на величины, имеющие постоянные значения на поверхности эллипсоида. Величины в фигурных скобках являются квадратичными функциями от  $x^2$ ,  $y^2$ ,  $z^2$ . Покажем, что коэффициенты  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$  можно подобрать так, чтобы эти функции нацело разделились на  $D_0^4$ . Тогда и вторые группы слагаемых приобретут ту же структуру, что и первые, т. е. окажутся произведениями упомянутых множителей на постоянные величины.

Итак, следует потребовать для  $i = 1, 2, 3$  выполнения равенств

$$\begin{aligned}
 & \rho_0^2 \Delta^2(\rho_0) D_0^3 \left( A_1 \frac{x^2}{\rho_0^4} + A_2 \frac{y^2}{(\rho_0^2 - e^2)^2} + A_3 \frac{z^2}{(\rho_0^2 - 1)^2} \right) + \left[ \chi_i(\rho_0) D_0^3 - \right. \\
 & \left. - \rho_0^2 \Delta^2(\rho_0) \left( \frac{x^2}{\rho_0^6} + \frac{y^2}{(\rho_0^2 - e^2)^3} + \frac{z^2}{(\rho_0^2 - 1)^3} \right) \right] \left( A_1 \frac{x^2}{\rho_0^2} + A_2 \frac{y^2}{\rho_0^2 - e^2} + \right. \\
 & \left. + A_3 \frac{z^2}{\rho_0^2 - 1} + A_4 a^2 \right) = \\
 & = M_i(\rho_0) D_0^4 = M_i(\rho_0) D_0^4 - A_4 \left( \frac{x^2}{\rho_0^2} + \frac{y^2}{\rho_0^2 - e^2} + \frac{z^2}{\rho_0^2 - 1} - a^2 \right) \times \\
 & \times \left[ \chi_i(\rho_0) D_0^3 - \rho_0^2 \Delta^2(\rho_0) \left( \frac{x^2}{\rho_0^6} + \frac{y^2}{(\rho_0^2 - e^2)^3} + \frac{z^2}{(\rho_0^2 - 1)^3} \right) \right], \quad (9.25)
 \end{aligned}$$



причём последнюю строку можно написать, учитывая (9.1). Переписав (9.25) в виде

$$\begin{aligned} & \rho_0^2 \Delta^2(\rho_0) D_0^3 \left( A_1 \frac{x^2}{\rho_0^4} + A_2 \frac{y^2}{(\rho_0^2 - e^2)^2} + A_3 \frac{z^2}{(\rho_0^2 - 1)^2} \right) + \\ & + \left[ \chi_i(\rho_0) D_0^3 - \rho_0^2 \Delta^2(\rho_0) \left( \frac{x^2}{\rho_0^6} + \frac{y^2}{(\rho_0^2 - e^2)^3} + \frac{z^2}{(\rho_0^2 - 1)^3} \right) \right] \left[ (A_1 + A_4) \frac{x^2}{\rho_0^3} + \right. \\ & \left. + (A_2 + A_4) \frac{y^2}{\rho_0^2 - e^2} + (A_3 + A_4) \frac{z^2}{\rho_0^2 - 1} \right] = M_i(\rho_0) D_0^4 \quad (9.26) \end{aligned}$$

и выбрав коэффициенты  $A_1, A_2, A_3$  по условиям

$$A_1 = \frac{A}{\rho_0^3} - A_4, \quad A_2 = \frac{A}{\rho_0^2 - e^2} - A_4, \quad A_3 = \frac{A}{\rho_0^2 - 1} - A_4, \quad (9.27)$$

получим соотношение

$$\begin{aligned} & \rho_0^2 \Delta^2(\rho_0) D_0^3 A \left( \frac{x^2}{\rho_0^6} + \frac{y^2}{(\rho_0^2 - e^2)^3} + \frac{z^2}{(\rho_0^2 - 1)^3} \right) - \rho_0^2 \Delta^2(\rho_0) A_4 D_0^4 + \\ & + A \chi_i(\rho_0) D_0^4 - \rho_0^2 \Delta^2(\rho_0) A \left( \frac{x^2}{\rho_0^6} + \frac{y^2}{(\rho_0^2 - e^2)^3} + \frac{z^2}{(\rho_0^2 - 1)^3} \right) = \\ & = M_i(\rho_0) D_0^4 \end{aligned}$$

и окончательно

$$M_i(\rho_0) = A \chi_i(\rho_0) - \rho_0^2 \Delta^2(\rho_0) A_4. \quad (9.28)$$

Соотношения (9.21)—(9.23) теперь будут содержать три произвольные постоянные  $A, A_4, A_5$  и примут вид

$$\begin{aligned} D_0 t_{nx} = & \frac{x}{\rho_0^3} \left\{ A \left[ \frac{2(m-1)}{m} \frac{\psi_1(\rho_0)}{\rho_0^3} + \frac{2}{m} \frac{\psi_2(\rho_0)}{\rho_0^2 - e^2} + \frac{2}{m} \frac{\psi_3(\rho_0)}{\rho_0^2 - 1} + \right. \right. \\ & \left. + \frac{2}{m} \frac{1}{\rho_0^3 \Delta(\rho_0)} - \frac{2\chi_1(\rho_0)}{\rho_0^3 \Delta^3(\rho_0)} \right] - A_4 \left[ \frac{2(m-1)}{m} \psi_1(\rho_0) + \frac{2}{m} \psi_2(\rho_0) + \right. \\ & \left. + \frac{2}{m} \psi_3(\rho_0) - \frac{2(m-1)}{m} \frac{1}{\rho_0 \Delta(\rho_0)} \right] - A_5 \left[ \psi_1(\rho_0) - \frac{1}{\rho_0 \Delta(\rho_0)} \right] \left. \right\}, \quad (9.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_0 t_{ny} = & \frac{y}{\rho_0^2 - e^2} \left\{ A \left[ \frac{2(m-1)}{m} \frac{\psi_2(\rho_0)}{\rho_0^2 - e^2} + \frac{2}{m} \frac{\psi_1(\rho_0)}{\rho_0^3} + \frac{2}{m} \frac{\psi_3(\rho_0)}{\rho_0^2 - 1} + \right. \right. \\ & \left. + \frac{2}{m} \frac{\rho_0}{(\rho_0^2 - e^2)^2 \Delta(\rho_0)} - \frac{2\chi_2(\rho_0)}{\rho_0^3 \Delta^3(\rho_0)} \right] - A_4 \left[ \frac{2(m-1)}{m} \psi_2(\rho_0) + \frac{2}{m} \psi_3(\rho_0) + \right. \\ & \left. + \frac{2}{m} \psi_1(\rho_0) + \frac{2}{m} \frac{\rho_0}{(\rho_0^2 - e^2) \Delta(\rho_0)} - \frac{2}{\rho_0 \Delta(\rho_0)} \right] - \\ & \left. - A_5 \left[ \psi_2(\rho_0) - \frac{\rho_0}{(\rho_0^2 - e^2) \Delta(\rho_0)} \right] \right\}, \quad (9.30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_0 t_{nz} = & \frac{z}{\rho_0^2 - 1} \left\{ A \left[ \frac{2(m-1)}{m} \frac{\psi_3(\rho_0)}{\rho_0^2 - 1} + \frac{2}{m} \frac{\psi_2(\rho_0)}{\rho_0^2 - e^2} + \frac{2}{m} \frac{\psi_1(\rho_0)}{\rho_0^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2}{m} \frac{\rho_0}{(\rho_0^2 - 1)^2 \Delta(\rho_0)} - \frac{2\chi_3(\rho_0)}{\rho_0^3 \Delta^3(\rho_0)} \right] - A_4 \left[ \frac{2(m-1)}{m} \psi_3(\rho_0) + \frac{2}{m} \psi_1(\rho_0) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2}{m} \psi_2(\rho_0) + \frac{2}{m} \frac{\rho_0}{(\rho_0^2 - 1)\Delta(\rho_0)} - \frac{2}{\rho_0 \Delta(\rho_0)} \right] - \right. \\
 & \left. - A_5 \left[ \psi_3(\rho_0) - \frac{\rho_0}{(\rho_0^2 - 1)\Delta(\rho_0)} \right] \right\}. \quad (9.31)
 \end{aligned}$$

Воспользовавшись теперь соотношениями (9.5) и (9.6), получим для определения трёх коэффициентов  $A$ ,  $A_4$ ,  $A_5$  систему трёх уравнений вида

$$\left. \begin{aligned}
 A p_{11}(\rho_0) + A_4 p_{12}(\rho_0) + A_5 p_{13}(\rho_0) &= -\sigma_1, \\
 A p_{21}(\rho_0) + A_4 p_{22}(\rho_0) + A_5 p_{23}(\rho_0) &= -\sigma_2, \\
 A p_{31}(\rho_0) + A_4 p_{32}(\rho_0) + A_5 p_{33}(\rho_0) &= -\sigma_3.
 \end{aligned} \right\} \quad (9.32)$$

Значения коэффициентов  $p_{ik}(\rho_0)$  приведены в уравнениях (9.29)—(9.31), и нет необходимости их заново выписывать.

Для получения числовых результатов следует по заданным значениям отношений осей эллипсоидальной полости определить  $\rho_0$ ,  $e$ . Функции  $\psi_0(\rho)$ ,  $\psi_i(\rho)$  выражаются через эллиптические интегралы первого и второго рода с помощью формул (8.48) и (8.55)—(8.57) главы 5. Таким образом, могут быть вычислены коэффициенты  $p_{ik}(\rho_0)$ , а вслед за ними и  $A$ ,  $A_4$ ,  $A_5$ . Выражения функций Папковича — Нейбера по (9.27) и (9.18) после этого запишутся в форме

$$\left. \begin{aligned}
 B_x &= x \left( \frac{A}{\rho_0^2} - A_4 \right) \psi_1(\rho), \\
 B_y &= y \left( \frac{A}{\rho_0^2 - e^2} - A_4 \right) \psi_2(\rho), \\
 B_z &= z \left( \frac{A}{\rho_0^2 - 1} - A_4 \right) \psi_3(\rho), \\
 B_0 &= A_4 a^2 \psi_0(\rho) + \frac{1}{2} A_5 \omega(x, y, z).
 \end{aligned} \right\} \quad (9.33)$$

Задачу можно считать решённой. Числовые выкладки, которые нужно проделать, чтобы получить значения напряжений, громоздки, но вполне элементарны.

## ПРИМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ К ГЛАВЕ 6

Первое общее решение задачи о равновесии упругой сферы принадлежит Ляме (G. Lamé); оно изложено в его известном сочинении «*Leçons sur les courbures curvilignes et leurs divers applications*» (Paris, 1859). В качестве примера кратко рассматривается случай загрузки, симметричного относительно оси, и даётся решение задачи о равновесии сферической оболочки, нагруженной изнутри и извне равномерно распределённым давлением, известной под именем задачи Ляме для сферы.

Перечисление частных решений, относящихся к задаче о полой симметрично нагруженной сфере, дано в работе Б. Г. Галеркина «Равновесие упругой сферической оболочки» (Прикл. матем. и мех. **6**, 1942, стр. 487). В работе автора «Равновесие упругой симметрично нагруженной сферической оболочки» (там же **7**, 1943, стр. 393) дано, сверх того, построение класса решений, могущих служить для решения задач о равновесии упругого тела, ограниченного двумя концентрическими сферами и срезами по коническим поверхностям с вершиной в центре сфер.

С помощью решений Папковича—Нейбера задача о полой сфере рассмотрена в статье Штернберга, Эйбэнкса и Садовского (E. Sternberg, R. A. Eubanks, M. Sadowsky) «On the axisymmetric Problem of Elasticity for a Region, bounded by two concentric Spheres» (Труды конгресса по прикладной механике в США, 1953). Приведены выражения коэффициентов рядов, дающих выражения перемещений и напряжений, через коэффициенты разложенной заданных нормального и касательного напряжений на поверхностях, ограничивающих полую сферу. В качестве примера рассмотрена задача о концентрации напряжений в окрестности сферической полости (см. § 4). Впервые последнюю задачу рассмотрел Саутвелл (Southwell) в работе «On the Concentration of Stress in the Neighborhood of a Small Spherical Flaw» (Phil. Mag., Ser. 7, vol. 1, 1926, стр. 71). Задача о распределении напряжений вокруг сферической полости в случае чистого сдвига (§ 4, п 4) рассмотрена Лармором (Larmor) в статье «The Influence of Flaws and Air-cavities on the Strength of Materials» (Phil. Mag., Ser. 5, vol. 33, 1892, стр. 70). Относительно других простейших задач, рассмотренных в §§ 3—5, см. Ляв, §§ 173—180.

Задача о сжатии сферы сосредоточенными силами, приложенными в полюсах сферы, в последние годы рассматривалась дважды. Во-первых, обширную статью на эту тему опубликовал К. Вебер (C. Weber) «Kugel mit normalgerichteten Einzelkräften» (Zeitsch. für angew. Math. und Mechanik **32**, № 6, 1952, стр. 186). К сожалению, эта весьма интересная по методу решения и с мастерством изложенная работа содержит ошибку в вычислении, делающую необходимым пересчёт формул. Во-вторых, надо указать на очень подробное исследование Штернберга и Розенталя (E. Sternberg, F. Rosenthal) «The Elastic Sphere under Concentrated Loads» (Journal of Applied Mechanics **19**, № 4, стр. 413, 1952). Решение, предложенное этими авторами, составлено из двух групп слагаемых. Первая группа представляет решения, имеющие особенности в полюсах сферы и дающие систему напряжений, статически эквивалентную действию сосредоточенной силы и представляющую предельный переход от нагрузки, равномерно распределённой по участкам поверхности, примыкающим к полюсам сферы. Вторая группа слагаемых представляет бесконечный ряд решений вида (2.9), коэффициенты которого определяются по условию обращения в нуль касательных и нормальных напряжений на поверхности сферы, определяемых решениями первой группы. Вычисленные значения напряжений  $\sigma_z$  в плоскости экватора хорошо совпали с результатами измерений Фрохта с помощью пространственного оптического метода.

Медленно сходящиеся и расходящиеся на поверхности сферы ряды, выделяемые из общего решения в форме ряда, в нашем решении (§ 7) представляют комбинации решений, имеющих особенности в полюсах сферы.

В перечне литературы к упомянутой статье Штернберга и др. указано, что допускающий сравнительно несложную возможность доведения до числовых результатов способ решения задачи о равновесии поллой симметрично нагружённой сферы дан в работе Фичера (G. Fichera) «Sul calcolo delle deformazioni, dotate di simmetria assiale, di una strato sferico elastica» (Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Ser. 8, vol. 6, 1949, стр. 583).

Литературные указания, относящиеся к задаче о равновесии сферы при произвольном нагружении, см. в главе 8.

Задача о напряжённом состоянии в окрестности эллипсоидальной полости (§ 9) была рассмотрена Садовским и Штернбергом (M. A. Sadovsky and E. Sternberg) в работе «Stress Concentration around a Triaxial Ellipsoidal Cavity» (Journal of Applied Mechanics 16, № 2, 1949, стр. 149). В этой работе использованы криволинейные эллиптические координаты (см. § 8 главы 5) и решение выражено через эллиптические функции Якоби от этих координат. Для определения постоянных по краевым условиям была получена система 16 уравнений с пятью неизвестными, оказавшаяся совместной и приведённая к пяти уравнениям с таким же числом неизвестных. Изложенное в § 9 решение в декартовых координатах, содержащее эллиптические интегралы, но не эллиптические функции, и требующее решения трёх уравнений, дано в заметке автора «Напряжённое состояние вокруг эллипсоидальной полости» (Доклады Акад. наук СССР 87, № 5, 1952, стр. 709). Получение этого сравнительно простого решения стало возможным после того, как ознакомление с указанной работой Садовского и Штернберга убедило в возможности выразить решение через гармонические функции (9.17) и (9.18). Функции (9.17) представляют запись в форме произведений Ляме трёх частных решений, применённых Садовским и Штернбергом, а функции  $\psi_0$  и  $\omega$  — линейные комбинации двух других использованных ими решений. Существенным является введение потенциала  $\omega$ , весьма упростившее решение задачи.

Частные случаи задачи об эллипсоидальной полости в упругом теле (полость в форме вытянутого или сплюснутого эллипсоида вращения) рассматривались рядом авторов. См. книгу Нейбера «Концентрация напряжений» (Гостехиздат, 1947).

---

## ДЕФОРМАЦИЯ СИММЕТРИЧНО НАГРУЖЁННОГО УПРУГОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

### § 1. Обзор содержания главы. Исходные соотношения

Как и в предшествующих главах, мы будем исходить из решения уравнений теории упругости в перемещениях в форме П.-Ф. Папковича. В применении к вопросу о деформации симметрично нагружённого тела вращения, не сопровождающейся кручением, это решение, как было показано в главе 6, даёт выражения проекций перемещения точек упругого тела на оси цилиндрической системы координат (радиального перемещения  $u$  и осевого  $w$ ) через три функции  $B_0$ ,  $B_p$ ,  $B_z$ , не зависящие от угловой координаты (азимута  $\varphi$ ). Функции  $B_0$ ,  $B_z$ , а также  $B_p e^{i\varphi}$  являются гармоническими. Решение сохранит достаточную общность, если одну из трёх функций  $B_0$ ,  $B_p$ ,  $B_z$  принять равной нулю. В дальнейшем при рассмотрении большинства задач мы примем  $B_z = 0$ ; при построении частных решений задачи в форме полиномов будет удобнее сохранить в решении П. Ф. Папковича функции  $B_0$ ,  $B_z$  и принять  $B_p = 0$ .

Ниже рассматриваются задачи о напряжённом состоянии цилиндра, подверженного действию нагрузок, распределённых по поверхности цилиндра. Аналогично могут быть рассмотрены краевые задачи, относящиеся к перемещениям.

Сравнительно просто находится решение краевых задач для цилиндра бесконечной длины или тех задач, относящихся к цилиндру конечной длины, когда можно довольствоваться выполнением краевых условий только на боковой поверхности цилиндра, не заботясь об условиях на торцах или удовлетворяя им в духе принципа Сен-Венана.

Не нарушая общности, можно считать, что система напряжений, получающихся на торцах (или распределённых по торцам) цилиндра, статически эквивалентна нулю; действительно, при симметричном нагружении эта система напряжений могла бы оказаться статически эквивалентной лишь осевой силе; тогда не представило бы труда путём наложения элементарного решения, соответствующего

равномерному распределению по торцу нормальных напряжений надлежащего знака, получить на торце статически эквивалентную нулю систему напряжений. Таким образом, решение, удовлетворяющее краевым условиям на боковой поверхности, легко подчинить условиям на торцах в смысле принципа Сен-Венана. Однако не всегда можно довольствоваться таким решением; например, наличие на торце системы напряжений, статически эквивалентной нулю, может оказать существенное влияние на распределение напряжений в средних сечениях сравнительно короткого («кубообразного») цилиндра. В других случаях может представлять интерес знание местных напряжений в примыкающей к торцу части цилиндра.

Краевые задачи, которые здесь возникают, весьма сложны, и если не говорить о некоторых тривиальных случаях, то неизвестно ни одного решения, которое полностью и строго удовлетворяло бы всем краевым условиям на боковой поверхности и на торцах цилиндра \*). Подойти к решению этой задачи с той или иной степенью приближения можно, используя «класс однородных решений» уравнений теории упругости. В случае цилиндра мы так называем решения, оставляющие боковую поверхность цилиндра свободной от нагрузок. Очевидно, что наложение решений этого класса на решение задачи, удовлетворяющее уже краевым условиям для напряжений на боковой поверхности цилиндра, ни в какой мере не повлияет на выполнение этих условий. Поэтому однородные решения могут быть использованы, чтобы удовлетворить условиям на торцах. К сожалению, строгое решение этой последней задачи встречается, как будет видно из дальнейшего, повидимому, непреодолимые трудности. Приближённое же решение может быть получено и не одним способом; оно требует большого вычислительного труда, который, впрочем, должен быть затрачен один раз и навсегда.

Заметим, что можно исходить из класса однородных решений, оставляющих свободными от напряжений торцы цилиндра, а не его боковую поверхность. Этот класс решений следует применять при рассмотрении задачи о толстой круглой плите.

Краевые задачи, относящиеся к случаю полого цилиндра, решаются с помощью тех же методов, что и для сплошного цилиндра. Однако вычислительные трудности настолько возрастают, что нам пришлось отказаться от систематического рассмотрения задач о полом цилиндра, несмотря на их значительную практическую важность.

В соответствии со сказанным в содержание настоящей главы войдут следующие вопросы. В этом параграфе будут приведены

---

\*) В. К. Прокопов дал решение задачи о цилиндре, удовлетворяющее краевым условиям на боковой поверхности и условиям для нормальных напряжений на торцах цилиндра. Условия, относящиеся к касательным напряжениям на торцах, однако, остаются невыполненными. См. работу, указанную в конце главы.

основные формулы, дающие выражения решений через функции П. Ф. Папковича и выражения этих функций в цилиндрических координатах. В § 2 приводится решение элементарных задач — задачи о растяжении цилиндра и задачи Ляме о напряжённом состоянии цилиндра (полого и сплошного), подверженного действию равномерно распределённого давления по боковой поверхности. Также элементарными приёмами, как будет показано в § 3, может быть рассмотрена задача в случае нагружения цилиндра (полого и сплошного) нормальными и касательными нагрузками, распределёнными по боковой поверхности и полиномиально зависящими от  $z$  (координаты, отсчитываемой по оси цилиндра). Конечно, с помощью этих решений удовлетворяются условия лишь на боковой поверхности, но не на торцах. В § 4 даётся подготовительный материал: приводится решение задачи о сплошном цилиндре, нагружённом по боковой поверхности по синусоидальному закону; постоянные, входящие в это решение, определяются из системы линейных уравнений, определитель которой может обратиться в нуль при некоторых значениях входящего в него параметра  $\beta$ . Этими значениями параметра соответствуют частные решения, оставляющие боковую поверхность цилиндра свободной от нагружения, т. е. как раз класс однородных решений, о котором говорилось выше. Будут указаны значения корней упомянутого определителя и приведена формула, дающая их асимптотическое представление при больших значениях номера  $s$ . Пример, показывающий ход решения задачи о напряжённом состоянии в цилиндре конечной длины при задании нагрузки по боковой поверхности в форме тригонометрического ряда, приведён в § 5. В § 6 рассмотрена задача о нагружении бесконечного цилиндра по участку конечной длины нормальным давлением постоянной интенсивности. Решение этой задачи сразу же находится в форме интеграла типа Фурье, и сущность дела состоит в указании способа вычисления этого интеграла. Оказывается возможным преодолеть встречающиеся затруднения с помощью контурного интегрирования и получить формулы весьма простого вида, числовые коэффициенты в которых, выражающиеся через корни  $\beta_s$  упомянутого определителя и некоторые функции этих корней, могут быть вычислены раз навсегда. Решение § 6 при переходе к предельному случаю бесконечно малого участка загрузки и соответственно бесконечно возрастающей интенсивности нормальной нагрузки приводит к задаче об «опоясанном» цилиндре; имея же решение последней задачи, легко представить в форме определённого интеграла решение, относящееся к произвольному нормальному нагружению. Эти две задачи рассмотрены в § 7. Наконец, в § 8 рассматривается вопрос о выполнении краевых условий на торцах цилиндра; вычисление подробно проводится в случае полубесконечного цилиндра; оно заключается в наложении однородных решений, подбираемых по условию минимума среднего квадратичного уклонения получающихся на торцах нормальных и касательных напряжений от их заданных значений.

Выражения в цилиндрических координатах перемещений точек упругого тела в осесимметричной задаче имеют вид

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{4(m-1)}{m} B_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho + z B_z + B_0), \\ w &= \frac{4(m-1)}{m} B_z - \frac{\partial}{\partial z} (\rho B_\rho + z B_z + B_0). \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Через  $u$  обозначено радиальное, через  $w$  — осевое перемещение. При построении частных решений методом разделения переменных мы примем  $B_z = 0$ . Функция  $B_\rho e^{i\varphi}$  удовлетворяет уравнению Лапласа; поэтому  $B_\rho$  должно быть определено из уравнения

$$\frac{\partial^2 B_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial B_\rho}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} B_\rho + \frac{\partial^2 B_\rho}{\partial z^2} = 0. \quad (1.2)$$

Функция  $B_0$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 B_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial B_0}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2} = 0. \quad (1.3)$$

Для упрощения последующих записей вместо  $\rho$  и  $z$  вводим безразмерные переменные

$$x = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \zeta = \frac{z}{\rho_0}, \quad (1.4)$$

где  $\rho_0$  — радиус цилиндра.

Частное решение уравнений (1.2) и (1.3) возьмём в виде

$$B_\rho = f(x) \cos \beta \zeta, \quad B_0 = \rho_0 g(x) \cos \beta \zeta, \quad (1.5)$$

где  $\beta$  — пока неопределённый параметр; множитель  $\rho_0$  введём в выражение  $B_0$  с целью придать одинаковую размерность функциям  $f(x)$  и  $g(x)$ , что также упростит запись последующих формул.

Подставив (1.5) в (1.2) и (1.3), получим дифференциальные уравнения

$$\left. \begin{aligned} f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) - \left( \beta^2 + \frac{1}{x^2} \right) f(x) &= 0, \\ g''(x) + \frac{1}{x} g'(x) - \beta^2 g(x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Решение выражается через цилиндрические функции

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= C_1 I_1(\beta x) + C_2 K_1(\beta x), \\ g(x) &= D_1 I_0(\beta x) + D_2 K_0(\beta x). \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Здесь  $I_n(\beta x) = i^{-n} J_n(i\beta x)$  — бесселева функция от аргумента  $i\beta x$ ,  $K_n(\beta x)$  — функция Макдональда. Последняя обращается в бесконечность при  $x=0$ , т. е. на оси цилиндра. Поэтому при рассмотрении задачи о сплошном цилиндре следует принять  $C_2 = D_2 = 0$ .



По (1.1) составляем выражения радиального и осевого перемещений

$$\left. \begin{aligned} u &= \left[ \frac{3m-4}{m} f(x) - x f'(x) - g'(x) \right] \cos \beta z, \\ w &= [x f(x) + g(x)] \beta \sin \beta z. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

При подстановке сюда выражений  $f(x)$  и  $g(x)$  следует иметь в виду формулы дифференцирования

$$\frac{dI_0(\beta x)}{dx} = \beta I_1(\beta x), \quad \frac{dI_1(\beta x)}{dx} = \beta I_0(\beta x) - \frac{1}{x} I_1(\beta x), \quad (1.9)$$

$$\frac{dK_0(\beta x)}{dx} = -\beta K_1(\beta x), \quad \frac{dK_1(\beta x)}{dx} = -\beta K_0(\beta x) - \frac{1}{x} K_1(\beta x). \quad (1.10)$$

Напомним выражения деформаций и объемного расширения в цилиндрических координатах

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{\rho}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{\rho z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho}, \quad (1.11)$$

$$\delta = \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (1.12)$$

При подстановке выражений перемещений (1.8) следует исключить вторые производные  $f''(x)$  и  $g''(x)$  с помощью дифференциальных уравнений (1.6). Для объемного расширения получим выражение

$$\delta = \frac{2(m-2)}{m\rho_0} \left[ f'(x) + \frac{1}{x} f(x) \right] \cos \beta z.$$

Напряжения выражаются по формулам закона Гука

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= 2G \left( \frac{\delta}{m-2} + \frac{\partial u}{\partial \rho} \right), & \sigma_\varphi &= 2G \left( \frac{\delta}{m-2} + \frac{u}{\rho} \right), \\ \sigma_z &= 2G \left( \frac{\delta}{m-2} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), & \tau_{\rho z} &= G \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Проделав вычисление, получим формулы

$$\frac{\rho_0}{2G} \sigma_\rho = \left[ \frac{3m-2}{m} f'(x) - \left( \beta^2 x + \frac{m-2}{m} \frac{1}{x} \right) f(x) + \right. \\ \left. + \frac{1}{x} g'(x) - \beta^2 g(x) \right] \cos \beta z, \quad (1.14)$$

$$\frac{\rho_0}{2G} \sigma_\varphi = \left[ \frac{3m-2}{m} \frac{1}{x} f(x) - \frac{m-2}{m} f'(x) - \frac{1}{x} g'(x) \right] \cos \beta z, \quad (1.15)$$

$$\frac{\rho_0}{2G} \sigma_z = \left[ \left( \frac{2}{m} \frac{1}{x} + \beta^2 x \right) f(x) + \frac{2}{m} f'(x) + \beta^2 g(x) \right] \cos \beta z, \quad (1.16)$$

$$\frac{\rho_0}{2G} \tau_{\rho z} = \left[ x f'(x) - \frac{m-2}{m} f(x) + g'(x) \right] \beta \sin \beta z. \quad (1.17)$$

Эти выражения, конечно, должны удовлетворять уравнениям статики

$$\frac{\partial}{\partial x}(x\tau_r) - \tau_\varphi + \frac{\partial}{\partial \zeta}(x\tau_{r\zeta}) = 0, \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x\tau_{r\zeta}) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(x\sigma_z) = 0. \quad (1.19)$$

Из последнего уравнения легко получить выражение равнодействующего растягивающего усилия

$$Z = 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_0} \tau_z \rho \, d\rho = 2\pi\rho_0^2 \int_{x_1}^1 \tau_z x \, dx, \quad (1.20)$$

где  $\rho_1 = x_1\rho_0$  — внутренний радиус полого цилиндра. Получаем:

$$\frac{dZ}{d\zeta} = -2\pi\rho_0^3 \int_{x_1}^1 \frac{\partial}{\partial x}(x\tau_{r\zeta}) \, dx = -2\pi\rho_0^3 [(\tau_{r\zeta})_{x=1} - x_1(\tau_{r\zeta})_{x=x_1}] \quad (1.21)$$

и, значит,

$$Z = Z_0 - 2\pi\rho_0^3 \int_{\zeta_0}^{\zeta} [(\tau_{r\zeta})_{x=1} - x_1(\tau_{r\zeta})_{x=x_1}] \, d\zeta, \quad (1.22)$$

причём через  $Z_0$  обозначено растягивающее усилие в сечении  $\zeta = \zeta_0$ .

Приведённые выше выражения перемещений и напряжений соответствуют, как это видно из выражений (1.14) и (1.17), случаю симметричной задачи, т. е. чётного нормального и нечётного касательного нагружений боковой поверхности цилиндра. Косимметричной задачей назовём случай нечётного нормального и чётного касательного нагружения. Формулы, относящиеся к этой задаче, получим, заменив в (1.8) и (1.14) — (1.17)  $\cos \beta'_\zeta$  и  $\sin \beta'_\zeta$  соответственно на  $\sin \beta'_\zeta$  и  $(-\cos \beta'_\zeta)$ . Система частных решений, наиболее удобная при рассмотрении задачи о полубесконечном цилиндре, получится, если, располагая начало отсчёта координаты  $\zeta$  в торцовом сечении цилиндра, заменить в указанных формулах  $\cos \beta'_\zeta$  и  $\sin \beta'_\zeta$  соответственно на  $e^{i\beta'_\zeta}$  и  $(-ie^{i\beta'_\zeta})$ .

## § 2. Элементарные решения

1°. Растяжение цилиндра равномерно распределёнными по торцам нормальными напряжениями.

Отлично от нуля только нормальное напряжение  $\sigma_z$ :

$$\tau_r = 0, \quad \tau_\varphi = 0, \quad \tau_{r\zeta} = 0, \quad \sigma_z = \sigma_0. \quad (2.1)$$

Выражения деформаций будут:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\varphi = -\frac{\sigma_0}{Em}, \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_0}{E}, \quad \gamma_{r\zeta} = 0. \quad (2.2)$$

По ним находим перемещения

$$u = -\frac{\sigma_0 \rho}{Em} = -\frac{\sigma_0 \rho_0}{2G(m+1)} x, \quad w = \frac{\sigma_0 z}{E} = \frac{m \sigma_0 \rho_0}{2G(m+1)} z. \quad (2.3)$$

2°. Цилиндр под действием нормального давления, равномерно распределённого по боковой поверхности (задача Ляме).

Краевые условия на боковой поверхности записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_\rho)_{x=1} &= -p_0, & (\sigma_\rho)_{x=x_1} &= -p_1, \\ (\tau_{\rho z})_{x=1} &= 0, & (\tau_{\rho z})_{x=x_1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Здесь  $p_0$  и  $p_1$  постоянны по всей длине цилиндра. Поэтому можно удовлетворить краевым условиям, разыскивая решения задачи, не зависящие от  $z$ , т. е. полагая  $\beta = 0$  в решениях § 1. Тогда по (1.17) окажется, что  $\tau_{\rho z} = 0$ , что также согласуется с краевыми условиями.

В решении (1.8) можно отбросить слагаемое, соответствующее функции  $B_0$ , т. е. принять  $g(x) = 0$ . Сохранение этого слагаемого ничего не изменило бы в результатах решения, но усложнило бы их получение.

При  $\beta = 0$  уравнение (1.6) для  $f(x)$  интегрируется элементарно и даёт:

$$f(x) = C_1 x + \frac{C_2}{x}. \quad (2.5)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  находим по краевым условиям (2.4) для нормального напряжения  $\sigma_\rho$ ; при составлении этих условий можно использовать выражения (1.14), положив  $\beta = 0$ ,  $g(x) = 0$ . Получим два уравнения

$$\begin{aligned} \frac{3m-2}{m} (C_1 - C_2) - \frac{m-2}{m} (C_1 + C_2) &= -\frac{\rho_0 \rho_0}{2G}, \\ \frac{3m-2}{m} \left( C_1 - \frac{C_2}{x_1^2} \right) - \frac{m-2}{m} \left( C_1 + \frac{C_2}{x_1^2} \right) &= -\frac{\rho_1 \rho_0}{2G}. \end{aligned}$$

Найдя отсюда  $C_1$  и  $C_2$ , по (1.8) получим перемещения

$$u = \frac{\rho_0}{2G} \left[ \frac{m-2}{m} \frac{\rho_1 x_1^3 - p_0}{1-x_1^2} x + \frac{\rho_1 - p_0}{1-x_1^2} \frac{x_1^2}{x} \right], \quad w = 0. \quad (2.6)$$

Далее находим напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{1}{1-x_1^2} \left( \frac{x^2-1}{x^2} \rho_1 x_1^3 - p_0 \frac{x^2-x_1^2}{x^2} \right), \\ \sigma_\varphi &= \frac{1}{1-x_1^2} \left( \frac{x^2+1}{x^2} \rho_1 x_1^3 - p_0 \frac{x^2+x_1^2}{x^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

$$\sigma_z = \frac{2}{m(1-x_1^2)} (\rho_1 x_1^3 - p_0), \quad \tau_{\rho z} = 0. \quad (2.8)$$

Полученное напряжённое состояние реализуется в упругом цилиндре, подверженном равномерному давлению снаружи и изнутри и помещённом между двумя неподвижными абсолютно жёсткими и гладкими стенками, не допускающими продольного перемещения точек на торцах цилиндра ( $w = 0$ ), но не препятствующими их радиальному перемещению ( $\tau_{rz} = 0$ ). Реакции этих стенок создают равномерно распределённое по торцу нормальное напряжение  $\sigma_z$ .

Случай цилиндра, края которого могут свободно перемещаться ( $\sigma_z = 0$ ,  $w \neq 0$ ), может быть получен из вышеприведённых решений: следует на решение (2.6) наложить равномерное растяжение, подобрав в (2.1) постоянную  $\tau_0$  так, чтобы нормальные напряжения  $\sigma_z$ , вычисляемые по (2.1) и (2.8), давали в сумме нуль; найдём:

$$\tau_0 = -\frac{2}{m} \frac{p_1 x_1^3 - p_0}{1 - x_1^2}. \quad (2.9)$$

Подставив это значение  $\tau_0$  в (2.3) и сложив получающиеся выражения перемещений  $s$  (2.6), получим:

$$u = \frac{p_0}{2G} \left[ \frac{m-1}{m+1} \frac{p_1 x_1^3 - p_0}{1 - x_1^2} x + \frac{p_1 - p_0}{1 - x_1^2} \frac{x_1^3}{x} \right], \quad (2.10)$$

$$w = -\frac{p_0}{G(m+1)} \frac{p_1 x_1^2 - p_0}{1 - x_1^2} r. \quad (2.11)$$

Напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi$  сохраняют прежние значения (2.7), а напряжения  $\sigma_z$  и  $\tau_{rz}$  будут отсутствовать. Перемещения (2.10), (2.11) реализуются в цилиндре со свободными торцами, подверженном действию равномерно распределённых нормальных давлений  $p_0$  и  $p_1$  снаружи и изнутри.

В случае сплошного свободного цилиндра, сжатого снаружи равномерно распределённым нормальным давлением  $p_0$ , найдём:

$$u = -\frac{p_0 r_0}{2G} \frac{m-1}{m+1} x, \quad w = \frac{p_0 r_0}{G(m+1)} r. \quad (2.12)$$

Напряжения в этом случае по (2.7)—(2.9) будут:

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = -p_0, \quad \sigma_z = 0, \quad \tau_{rz} = 0. \quad (2.13)$$

### § 3. Полиномиальные решения задачи о равновесии цилиндра

1°. Решения уравнения Лапласа в цилиндрических координатах в форме полиномов и произведений полинома на  $\ln r$ .

Известно, что выражение

$$R^n P_n(\mu) \quad (\mu = \cos \vartheta), \quad (3.1)$$

в котором  $P_n(\mu)$  —  $n$ -й полином Лежандра, даёт в сферических координатах представление гармонической функции, являющейся однородным полиномом степени  $n$  относительно переменных  $z = R \cos \vartheta$  и  $\rho = R \sin \vartheta$ .

Таким образом, сделав в выражении (3.1) замену переменных

$$\zeta = R\mu, \quad R^2 = x^2 + \zeta^2, \quad (3.2)$$

соответствующую переходу от сферических координат к цилиндрическим  $x, \zeta$  (мы ввели по (1.4) безразмерные координаты), получим в интересующем нас случае симметрии вращения решение уравнения Лапласа в форме однородного гармонического полинома  $n$ -й степени от переменных  $x, \zeta$ :

$$\varphi_n(x, \zeta) = R^n P_n(\mu). \quad (3.3)$$

В частности,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \zeta, \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}(2\zeta^2 - x^2), \quad \varphi_3 = \frac{1}{2}(2\zeta^3 - 3\zeta x^2), \\ \varphi_4 &= \frac{1}{8}(8\zeta^4 - 24\zeta^2 x^2 + 3x^4) \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Эти решения применяются при рассмотрении задач, относящихся к сплошному цилиндру. Более сложный класс решений уравнения Лапласа, который должен быть добавлен к предшествующему в задачах о полом цилиндре, может быть представлен в виде

$$\psi_n(x, \zeta) = \varphi_n(x, \zeta) \ln x + \gamma_n(x, \zeta), \quad (3.5)$$

причём слагаемое  $\gamma_n(x, \zeta)$  должно быть определено по условию обращения в нуль лапласиана от  $\psi_n$ . Иными словами,  $\gamma_n(x, \zeta)$  должно быть частным решением уравнения

$$\Delta \gamma_n(x, \zeta) = -\Delta \varphi_n(x, \zeta) \ln x. \quad (3.6)$$

Вспомнив выражение лапласиана произведения двух функций

$$\Delta F_1 F_2 = F_2 \Delta F_1 + F_1 \Delta F_2 + 2 \operatorname{grad} F_1 \cdot \operatorname{grad} F_2,$$

получим, возвращаясь временно к сферическим координатам:

$$\Delta \varphi_n(x, \zeta) \ln x = 2 \left( \frac{\partial \varphi_n}{\partial R} \frac{\partial \ln x}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \vartheta} \frac{\partial \ln x}{\partial \vartheta} \right),$$

так как

$$\Delta \varphi_n = 0, \quad \Delta \ln x = 0.$$

Заметив далее, что

$$\ln x = \ln R + \ln \sin \vartheta, \quad \frac{\partial \ln x}{\partial R} = \frac{1}{R}, \quad \frac{\partial \ln x}{\partial \vartheta} = \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta},$$

и подставив вместо  $\varphi_n$  его значение (3.3), найдём:

$$\Delta \varphi_n(x, \zeta) \ln x = 2R^{n-2} [nP_n(\mu) - \mu P_n'(\mu)] = -2R^{n-2} P_{n-1}'(\mu).$$

Уравнение (3.6) принимает вид

$$\Delta \gamma_n(x, \zeta) = 2R^{n-2} P'_{n-1}(\mu). \quad (3.7)$$

Полагаем теперь

$$\gamma_n = R^n S_n(\mu) \quad (3.8)$$

и, следовательно,

$$\Delta \gamma_n = R^{n-2} [(1 - \mu^2) S_n''(\mu) - 2\mu S_n'(\mu) + n(n+1) S_n(\mu)]. \quad (3.9)$$

Функция  $S_n(\mu)$ , таким образом, должна быть решением уравнения

$$(1 - \mu^2) S_n''(\mu) - 2\mu S_n'(\mu) + n(n+1) S_n(\mu) = 2P'_{n-1}(\mu), \quad (3.10)$$

правая часть которого представляет полином степени  $(n-2)$  относительно  $\mu$ . В форме такого полинома будем также искать  $S_n(\mu)$ . Методом неопределённых коэффициентов легко найдём:

$$S_1(\mu) = 0, \quad S_2(\mu) = \frac{1}{3}, \quad S_3(\mu) = \frac{3}{5}\mu, \quad S_4(\mu) = \frac{15}{14}\mu^2 - \frac{9}{35}. \quad (3.11)$$

Соответствующие гармонические функции  $\psi_n(x, \zeta)$  по (3.5) и (3.8) будут:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(x, \zeta) &= \zeta \ln x, \\ \psi_2(x, \zeta) &= \frac{1}{2}(2\zeta^2 - x^2) \ln x + \frac{1}{3}(x^2 + \zeta^2), \\ \psi_3(x, \zeta) &= \frac{1}{2}(2\zeta^3 - 3\zeta x^2) \ln x + \frac{3}{5}\zeta(\zeta^2 + x^2), \\ \psi_4(x, \zeta) &= \frac{1}{8}(8\zeta^4 - 24\zeta^2 x^2 + 3x^4) \ln x + \frac{57}{70}\zeta^4 + \frac{39}{70}x^2\zeta^2 - \frac{9}{35}x^4, \\ &\text{и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Сюда надо присоединить ещё функцию

$$\psi_0(x, \zeta) = \ln x, \quad (3.13)$$

также являющуюся очевидным решением уравнения Лапласа.

Общее выражение полиномов  $S_n(\mu)$  оказывается довольно сложным. Его можно получить, представив правую часть уравнения (3.10) в форме суммы полиномов Лежандра до порядка  $(n-2)$  включительно. Это представление имеет вид

$$\left. \begin{aligned} P'_{n-1}(\mu) &= (2n-3)P_{n-2}(\mu) + (2n-7)P_{n-4}(\mu) + \dots \\ &\quad \dots + 9P_4(\mu) + 5P_2(\mu) + P_0(\mu) \quad (n \text{ чётно}), \\ P'_{n-1}(\mu) &= (2n-3)P_{n-2}(\mu) + (2n-7)P_{n-4}(\mu) + \dots \\ &\quad \dots + 11P_5(\mu) + 7P_3(\mu) + 3P_1(\mu) \quad (n \text{ нечётно}) \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Заметим далее, что  $P_\nu(\mu)$  удовлетворяет уравнению Лежандра

$$(1 - \mu^2) P''_\nu(\mu) - 2\mu P'_\nu(\mu) + \nu(\nu + 1) P_\nu(\mu) = 0$$

и, значит,

$$\begin{aligned} (1 - \mu^2) P''_\nu(\mu) - 2\mu P'_\nu(\mu) + n(n + 1) P_\nu(\mu) &= \\ &= [n(n + 1) - \nu(\nu + 1)] P_\nu(\mu). \end{aligned}$$

Таким образом, можно найти представление  $S_n(\mu)$  в форме суммы полиномов Лежандра: при  $n$  чётном

$$\begin{aligned} S_n(\mu) &= \frac{2(2n-3)}{n(n+1)-(n-2)(n-1)} P_{n-2}(\mu) + \\ &+ \frac{2(2n-7)}{n(n+1)-(n-4)(n-3)} P_{n-4}(\mu) + \dots + \frac{2 \cdot 9}{n(n+1)-4 \cdot 5} P_4(\mu) + \\ &+ \frac{2 \cdot 5}{n(n+1)-2 \cdot 3} P_2(\mu) + \frac{2 \cdot 1}{n(n+1)} P_0(\mu) \end{aligned} \quad (3.15)$$

и при  $n$  нечётном

$$\begin{aligned} S_n(\mu) &= \frac{2(2n-3)}{n(n+1)-(n-2)(n-1)} P_{n-2}(\mu) + \\ &+ \frac{2(2n-7)}{n(n+1)-(n-4)(n-3)} P_{n-4}(\mu) + \dots + \frac{2 \cdot 11}{n(n+1)-5 \cdot 6} P_5(\mu) + \\ &+ \frac{2 \cdot 7}{n(n+1)-3 \cdot 4} P_3(\mu) + \frac{2 \cdot 3}{n(n+1)-1 \cdot 2} P_1(\mu). \end{aligned} \quad (3.15a)$$

2°. Применение к задаче о равновесии цилиндра. Гармонические функции  $\varphi_n(x, \zeta)$  и  $\psi_n(x, \zeta)$  могут быть приняты за функцию  $B_0$  и  $B_z$  в решении П. Ф. Папковича (1.1). Функцию  $B_p$  в этом случае следует принять равной нулю. Конечно, в задачах, относящихся к сплошному цилиндру, следует вводить в рассмотрение только гармонические функции  $\varphi_n(x, \zeta)$ .

С помощью этого класса решений можно удовлетворить условиям нагружения боковой поверхности цилиндра ( $x = 1$  и  $x = x_1$ ) нормальными и касательными усилиями, распределение которых задаётся полиномами по степеням  $\zeta$ .

В качестве примера рассмотрим задачу о нагружении цилиндра нормальными давлениями, линейно распределёнными по его внешней и внутренней поверхностям:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } x = 1 \quad \sigma_p &= -q_0 \zeta, \quad \tau_{pz} = 0, \\ \text{при } x = x_1 \quad \sigma_p &= -q_1 \zeta, \quad \tau_{pz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Можно удовлетворить этим условиям, взяв в качестве функций П. Ф. Папковича выражения

$$B_0 = A\varphi_3(x, \zeta) + B\psi_1(x, \zeta), \quad B_z = C\varphi_2(x, \zeta) + D\psi_0(x, \zeta). \quad (3.17)$$

Вычислив по (1.1) перемещения, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} u &= 3Ax\zeta - B \frac{\zeta}{x} + Cx\zeta - D \frac{\zeta}{x}, \\ \frac{1}{\rho_0} w &= -A \left( 3\zeta^2 - \frac{3}{2} x^2 \right) - B \ln x + C \left( \frac{m-4}{m} \zeta^2 - \frac{3m-4}{2m} x^2 \right) + \\ &\quad + D \frac{3m-4}{m} \ln x. \end{aligned} \right\} (3.18)$$

Определив постоянные по условиям (3.16), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2G}{\rho_0} u &= -\frac{m-1}{m+1} \frac{q_0 - q_1 x_1^2}{1-x_1^2} x\zeta - \frac{x_1^2 (q_0 - q_1)}{1-x_1^2} \frac{\zeta}{x}, \\ \frac{2G}{\rho_0} w &= \frac{1}{m+1} \frac{q_0 - q_1 x_1^2}{1-x_1^2} \left[ \zeta^2 + \frac{1}{2} (m-1) x^2 \right] + \frac{(q_0 - q_1) x_1^2}{1-x_1^2} \ln x. \end{aligned} \right\} (3.19)$$

Вычислив по этим выражениям напряжения, найдём:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= -\frac{\zeta}{1-x_1^2} \left[ q_0 \left( 1 - \frac{x_1^2}{x^2} \right) - q_1 x_1^2 \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) \right], \\ \sigma_\varphi &= -\frac{\zeta}{1-x_1^2} \left[ q_0 \left( 1 + \frac{x_1^2}{x^2} \right) - q_1 x_1^2 \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) \right], \\ \tau_{\rho z} &= 0, \quad \sigma_z = 0. \end{aligned} \right\} (3.20)$$

Найденное решение, таким образом, соответствует отсутствию загрузки торцов цилиндра. Заметим, что проинтегрировав (3.20) по  $\zeta$ , получим (после замены  $q_0$  и  $q_1$  на  $p_0$  и  $p_1$ ) решение Ляме.

С помощью решения (3.18) может быть также рассмотрен случай загрузки касательными нагрузками постоянной интенсивности:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } x=1 \quad \sigma_\rho &= 0, \quad \tau_{\rho z} = \tau_0, \\ \text{при } x=x_1 \quad \sigma_\rho &= 0, \quad \tau_{\rho z} = -\tau_1 \end{aligned} \right\} (3.21)$$

( $\tau_0$  и  $\tau_1$  положительны, если они направлены по положительной оси  $\zeta$ ).  
Определив постоянные, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2G}{\rho_0} u &= \frac{2(\tau_0 + x_1 \tau)}{(m+1)(1-x_1^2)} x\zeta, \\ \frac{2G}{\rho_0} w &= -\frac{(\tau_0 + x_1 \tau)}{(m+1)(1-x_1^2)} m (\zeta^2 - x^2) - \frac{2(\tau_0 x_1^2 + \tau_1 x_1)}{1-x_1^2} \ln x. \end{aligned} \right\} (3.22)$$



Соответствующие напряжения будут:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 0, \quad \sigma_\varphi = 0, \\ \tau_{rz} &= \frac{\tau_0 + \tau_1 x_1}{1 - x_1^2} x - \frac{\tau_0 x_1^2 + \tau_1 x_1}{1 - x_1^2} \frac{1}{x}, \\ \sigma_z &= -\frac{2(\tau_0 + \tau_1 x_1)}{1 - x_1^2} \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Такое напряжённое состояние приближённо осуществляется в средней части упругого цилиндра длины  $L$ , торец которого  $\zeta = 0$  не подвержен действию нормальных сил, а по торцу  $\zeta = \frac{L}{\rho_0}$  приложены сжимающие напряжения, проекция равнодействующей которых на ось цилиндра равна [ср. (1.22)]

$$Z = -2\rho_0 L (\tau_0 + x_1 \tau_1). \quad (3.24)$$

#### § 4. Синусоидальное нагружение боковой поверхности цилиндра. Однородные решения

Рассмотрим задачу о деформации сплошного упругого цилиндра при заданных на боковой поверхности нормальных и касательных напряжениях

$$\text{при } x = 1 \quad \tau_r = -p_0 \cos \beta \zeta, \quad \tau_{rz} = q_0 \sin \beta \zeta. \quad (4.1)$$

Решение этой задачи даст исходные формулы, которые позволят рассмотреть более общие случаи нагружения.

Как было отмечено, при рассмотрении деформации сплошного цилиндра следует принять:

$$f(x) = C_1 I_1(\beta x), \quad g(x) = D_1 J_0(\beta x). \quad (4.2)$$

Поэтому, учитывая соотношения (1.9), по (1.14) и (1.17) получим следующее выражение крайевых условий:

$$\left. \begin{aligned} C_1 \left[ \frac{3m-2}{m} \beta J_0(\beta) - \left( \frac{4(m-1)}{m} + \beta^2 \right) I_1(\beta) \right] + \\ + D_1 \beta [I_1(\beta) - \beta J_0(\beta)] = -\frac{\rho_0 p_0}{2G}, \\ C_1 \left[ \beta J_0(\beta) - \frac{2(m-1)}{m} I_1(\beta) \right] + D_1 \beta I_1(\beta) = \frac{q_0 \rho_0}{2G\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Определитель этой системы равен

$$\Delta(\beta) = \beta \psi(\beta), \quad \psi(\beta) = \beta^2 [I_0^2(\beta) - I_1^2(\beta)] - \frac{2(m-1)}{m} I_1^2(\beta) \quad (4.4)$$

и значения постоянных  $C_1$  и  $D_1$  будут:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{p_0 \rho_0}{2G} \frac{I_1(\beta)}{\psi(\beta)} - \frac{q_0 \rho_0}{2G\beta} \frac{I_1(\beta) - \beta I_0(\beta)}{\psi(\beta)}, \\ D_1 &= \frac{p_0 \rho_0}{2G} \frac{I_0(\beta) - \frac{2(m-1)}{m\beta} I_1(\beta)}{\psi(\beta)} + \\ &+ \frac{q_0 \rho_0}{2G\beta} \frac{\frac{3m-2}{m} I_0(\beta) - \left[ \frac{4(m-1)}{m\beta} + \beta \right] I_1(\beta)}{\psi(\beta)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Подставив эти значения постоянных в (1.8), найдём выражения перемещений:

$$\begin{aligned} u(x, \zeta) &= -\frac{p_0 \rho_0}{2G\psi(\beta)} \left[ \frac{2(m-1)}{m} I_1(\beta) I_1(\beta x) + \beta I_0(\beta) I_1(\beta x) - \right. \\ &\quad \left. - \beta x I_1(\beta) I_0(\beta x) \right] \cos \beta \zeta + \\ &+ \frac{q_0 \rho_0}{2G\psi(\beta)} \left[ \beta I_1(\beta x) I_1(\beta) + \frac{m-2}{m} I_0(\beta) I_1(\beta x) + \right. \\ &\quad \left. + \{ I_1(\beta) - \beta I_0(\beta) \} x I_0(\beta x) \right] \cos \beta \zeta, \quad (4.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(x, \zeta) &= -\frac{p_0 \rho_0}{2G\psi(\beta)} \left[ \frac{2(m-1)}{m} I_1(\beta) I_0(\beta x) + \right. \\ &\quad \left. + I_1(\beta) \beta x I_1(\beta x) - \beta I_0(\beta) I_0(\beta x) \right] \sin \beta \zeta + \\ &+ \frac{q_0 \rho_0}{2G\psi(\beta)} \left[ I_0(\beta) \beta x I_1(\beta x) + \frac{3m-2}{m} I_0(\beta) I_0(\beta x) - I_1(\beta) x I_1(\beta x) - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{4(m-1)}{m\beta} + \beta \right) I_1(\beta) I_0(\beta x) \right] \sin \beta \zeta. \quad (4.7) \end{aligned}$$

Приведём ещё используемое ниже выражение объёмного расширения

$$\delta = \frac{m-2}{mG\psi(\beta)} \left[ -p_0 \beta I_1(\beta) + q_0 \{ \beta I_0(\beta) - I_1(\beta) \} \right] I_0(\beta x) \cos \beta \zeta. \quad (4.8)$$

В случае полого цилиндра пришлось бы определять четыре постоянные  $C_1, D_1, C_2, D_2$  из четырёх линейных уравнений, составляемых по краевым условиям для нормальных и касательных напряжений на внешней и внутренней поверхностях цилиндра. Это громоздкое вычисление мы не будем проводить. Формулы (4.6) — (4.8) будут исходными при рассмотрении задач в §§ 5—7.

Корни функции  $\psi(\beta)$ . При отсутствии внешней нагрузки на боковой поверхности цилиндра правые части уравнений (4.3) будут нулями и постоянные  $C_1$  и  $D_1$  будут иметь отличные от нуля значения при условии обращения в нуль определителя  $\Delta(\beta)$ , т. е. для значений  $\beta = \beta_s$ , являющихся корнями уравнения

$$\psi(\beta) = 0. \quad (4.9)$$

Дадим представление  $\psi(\beta)$  в форме степенного ряда. Для этого используем выражение произведения двух бесселевых функций целочисленного порядка

$$I_m(\beta) I_n(\beta) = \left(\frac{\beta}{2}\right)^{m+n} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(m+n+2s)!}{s!(m+s)!(n+s)!(m+n+s)!} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{2s}, \quad (4.10)$$

из которого, в частности, получаются ряды для  $I_1^2(\beta)$  и  $I_0^2(\beta)$ , подставив которые в (4.4), получим:

$$\psi(\beta) = \beta^2 \sum_{s=0}^{\infty} \left[ 1 - \frac{m-1}{m} \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} \right] \frac{(2s)!}{(s+1)!(s!)^2} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{2s}. \quad (4.11)$$

Величина, стоящая в скобках, при  $m > 2$  положительна при всех целых  $s$ ; поэтому функция  $\psi(\beta)$  не имеет корней при вещественных  $\beta$ , за исключением очевидного двойного нулевого корня. Чтобы убедиться, что она не имеет и чисто мнимых корней, положим  $\beta = i\gamma$ ; тогда, группируя слагаемые ряда попарно, убедимся, что  $\psi(\beta)$  принимает только отрицательные значения при вещественных  $\gamma$ .

Таким образом, функция  $\psi(\beta)$  может иметь только комплексные корни; но, поскольку эта функция чётна, а коэффициенты её разложения в ряд вещественны, эти корни распадаются на четыре группы: если

$$\beta_s = \gamma_s + i\delta_s \quad (\gamma_s > 0, \delta_s > 0) \quad (4.12)$$

— корень уравнения (4.9), то корнями будут также

$$\beta_s^* = -\gamma_s + i\delta_s \quad (4.12')$$

и сопряжённые числа

$$\bar{\beta}_s = \gamma_s - i\delta_s, \quad (4.13)$$

$$\bar{\beta}_s^* = -\gamma_s - i\delta_s. \quad (4.13')$$

В таблице 9 приведены значения первых трёх корней  $\beta_s$ , расположенных в первой четверти плоскости  $\beta$ ; там же даны некоторые функции этих корней, знание которых будет полезно в дальнейшем. Число Пуассона  $m$  принято равным 4.

Таблица 9

$s$	$\beta_s$	$I_0(\beta_s)$	$I_1(\beta_s)$	$\lambda_s = \frac{I_0(\beta_s)}{I_1(\beta_s)}$	$\lambda_s \beta_s$	$\psi'(\beta_s)$
1	$1,367 + 2,698 i$	$-0,4695 + 0,7269 i$	$-0,5453 + 0,7233 i$	$0,9528 - 0,0692 i$	$1,489 + 2,476 i$	$2,85 - 1,48 i$
2	$1,558 + 6,060 i$	$0,4853 - 0,5576 i$	$0,4937 - 0,5794 i$	$0,9712 + 0,0102 i$	$1,451 + 5,901 i$	$8,22 - 0,84 i$
3	$1,818 + 9,320 i$	$-0,567 + 0,562 i$	$-0,568 + 0,563 i$	$0,997 + 0,000 i$	$1,812 + 9,29 i$	$12,06 - 1,56 i$

Последний столбец таблицы содержит значения производной  $\psi'(\beta_s)$  при  $\beta = \beta_s$ . Выражение этой производной имеет вид

$$\psi'(\beta) = 2\beta I_0^2(\beta) - \frac{4(m-1)}{m} I_1(\beta) \left[ I_0(\beta) - \frac{I_1(\beta)}{\beta} \right]. \quad (4.14)$$

В последующем обозначим (см. таблицу)

$$\lambda_s = \frac{I_0(\beta_s)}{I_1(\beta_s)}. \quad (4.15)$$

Тогда уравнение (4.9) можно будет представить в форме

$$\frac{2(m-1)}{m} = \beta_s^2 (\lambda_s^2 - 1), \quad (4.16)$$

а выражению производной  $\psi'(\beta)$  придать вид

$$\psi'(\beta_s) = 2\beta_s I_1^2(\beta_s) \left[ 1 - \frac{2(m-1)}{m\beta_s} \lambda_s + \frac{4(m-1)}{m\beta_s^2} \right]. \quad (4.17)$$

Из таблицы 9 следует, что  $\beta_3 = 9,496$ . Поэтому для  $s > 3$  достаточную точность должны дать асимптотические представления функций Бесселя. Эти представления при  $I_m \beta > 0$  с точностью до слагаемых порядка  $\beta^{-2}$  включительно имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} I_0(\beta) &\sim \frac{e^\beta}{\sqrt{2\pi\beta}} \left( 1 + \frac{1}{8\beta} + \frac{9}{128\beta^2} \right) + \frac{ie^{-\beta}}{\sqrt{2\pi\beta}} \left( 1 - \frac{1}{8\beta} + \frac{9}{128\beta^2} \right), \\ I_1(\beta) &\sim \frac{e^\beta}{\sqrt{2\pi\beta}} \left( 1 - \frac{3}{8\beta} - \frac{15}{128\beta^2} \right) - \frac{ie^{-\beta}}{\sqrt{2\pi\beta}} \left( 1 + \frac{3}{8\beta} - \frac{15}{128\beta^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

С помощью этих разложений по (4.4) найдём:

$$\psi(\beta) \sim \frac{1}{2\pi} \left\{ e^{2\beta} + e^{-2\beta} + 4i\beta + \frac{1}{\beta} \left[ \frac{1}{4} - \frac{2(m-1)}{m} \right] e^{2\beta} (1 - ie^{-2\beta})^2 \right\}. \quad (4.19)$$

Отсюда может быть найдено асимптотическое выражение корней

$$\beta_n \sim n\pi i + \frac{1}{2} \ln 4n\pi - i \left[ \frac{\ln 4n\pi}{4n\pi} - \frac{1}{2n\pi} \left( \frac{1}{4} - \frac{2(m-1)}{m} \right) \right], \quad (4.20)$$

удовлетворяющее уравнению (4.9) с точностью до величин порядка  $n^{-1} \ln n$ . Пренебрегая членами этого порядка, можно записать уравнение (4.9) в виде

$$\psi(\beta_n) \sim \frac{1}{2\pi} \left[ e^{2\beta_n} + 4i\beta_n + \frac{e^{2\beta_n}}{\beta_n} \left( \frac{1}{4} - \frac{2(m-1)}{m} \right) \right] = 0 \quad (4.21)$$

или же

$$1 + 4i\beta_n e^{-2\beta_n} + \frac{1}{\beta_n} \left( \frac{1}{4} - \frac{2(m-1)}{m} \right) = 0. \quad (4.22)$$

При значении  $e^{-2\beta_n}$ , определяемом из этого соотношения, асимптотические выражения величин

$$I_0(\beta_n), I_1(\beta_n), \lambda_n, \psi'(\beta_n)$$

будут:

$$\left. \begin{aligned} I_0(\beta_n) &\sim \frac{e^{\beta_n}}{\sqrt{2\pi\beta_n}} \left[ 1 - \frac{1}{8\beta_n} + \left( \frac{5}{128} + \frac{m-1}{2m} \right) \frac{1}{\beta_n^2} \right], \\ I_1(\beta_n) &\sim \frac{e^{\beta_n}}{\sqrt{2\pi\beta_n}} \left[ 1 - \frac{1}{8\beta_n} + \left( \frac{5}{128} - \frac{m-1}{2m} \right) \frac{1}{\beta_n^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

$$\lambda_n \sim 1 + \frac{m-1}{m\beta_n^2}, \quad \psi'(\beta_n) \sim 2\beta_n I_1^2(\beta_n) \left( 1 - \frac{2(m-1)}{m\beta_n} \right). \quad (4.24)$$

Точность этих выражений соответствует точности формулы (4.20), дающей асимптотическое распределение корней. Заметим, что асимптотическое выражение для  $\lambda_n$  можно было бы получить также и из уравнения (4.16).

Однородные решения. Возвращаемся к рассмотрению однородных решений, т. е. решений уравнений равновесия для сплошного цилиндра, не нагруженного по боковой поверхности. Из второго уравнения (4.3) выражаем зависимость между постоянными  $D_1$  и  $C_1$ :

$$D_1 = \left( \frac{2(m-1)}{m\beta_s} - \lambda_s \right) C_1. \quad (4.25)$$

Постоянная  $C_1$  остаётся произвольной. Для упрощения в последующем будем писать:

$$C_1 = \frac{L_s}{\beta_s I_1(\beta_s)} = \frac{M_s + iN_s}{\beta_s I_1(\beta_s)}. \quad (4.26)$$

По (1.8) и (4.2) теперь составим выражения перемещений, соответствующих однородным решениям. При этом заменим  $\cos \beta_s \zeta$  и  $\sin \beta_s \zeta$  соответственно на  $e^{i\beta_s \zeta}$  и  $(-ie^{i\beta_s \zeta})$ . Получим:

$$u_s = L_s u(x, \beta_s) e^{i\beta_s \zeta}, \quad w_s = L_s w(x, \beta_s) e^{i\beta_s \zeta}, \quad (4.27)$$

где обозначено для краткости

$$\left. \begin{aligned} u(x, \beta_s) &= \frac{1}{I_1(\beta_s)} \left[ -x I_0(\beta_s x) + \left( \frac{2(m-1)}{m\beta_s} + \lambda_s \right) I_1(\beta_s x) \right], \\ w(x, \beta_s) &= -\frac{i}{I_1(\beta_s)} \left[ x I_1(\beta_s x) + \left( \frac{2(m-1)}{m\beta_s} - \lambda_s \right) I_0(\beta_s x) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

В этой же форме записываем выражения напряжений в однородных решениях:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho_0}{2G} \sigma_r &= L_s \sigma_r(x, \beta_s) e^{i\beta_s \zeta}, & \frac{\rho_0}{2G} \sigma_\varphi &= L_s \sigma_\varphi(x, \beta_s) e^{i\beta_s \zeta}, \\ \frac{\rho_0}{2G} \sigma_z &= L_s \sigma_z(x, \beta_s) e^{i\beta_s \zeta}, & \frac{\rho_0}{2G} \sigma_{rz} &= L_s \tau_{rz}(x, \beta_s) e^{i\beta_s \zeta}, \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

где обозначено:

$$\sigma_r(x, \beta_s) = \frac{1}{I_1(\beta_s)} \left[ I_0(\beta_s x) (1 + \beta_s \lambda_s) - \frac{I_1(\beta_s x)}{x} \left( \frac{2(m-1)}{m\beta_s} + \lambda_s + \beta_s x^2 \right) \right], \quad (4.30)$$

$$\sigma_\varphi(x, \beta_s) = \frac{1}{I_1(\beta_s)} \left[ -\frac{m-2}{m} I_0(\beta_s x) + \frac{I_1(\beta_s x)}{x} \left( \frac{2(m-1)}{m\beta_s} + \lambda_s \right) \right], \quad (4.31)$$

$$\sigma_z(x, \beta_s) = \frac{1}{I_1(\beta_s)} [2 - \beta_s \lambda_s] I_0(\beta_s x) + x \beta_s I_1(\beta_s x), \quad (4.32)$$

$$\tau_{rz}(x, \beta_s) = -\frac{i}{I_1(\beta_s)} \beta_s [x I_0(\beta_s x) - \lambda_s I_1(\beta_s x)]. \quad (4.33)$$

Значения этих функций на оси цилиндра и на его поверхности будут:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(0, \beta_s) = \sigma_\varphi(0, \beta_s) &= \frac{1}{I_1(\beta_s)} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{2} \beta_s \lambda_s \right), \\ \sigma_z(0, \beta_s) &= \frac{2 - \beta_s \lambda_s}{I_1(\beta_s)}, \quad \tau_{rz}(0, \beta_s) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(1, \beta_s) &= 0, \quad \sigma_\varphi(1, \beta_s) = \frac{2}{m} \lambda_s + \frac{2(m-1)}{m\beta_s}, \\ \sigma_z(1, \beta_s) &= 2\lambda_s - \frac{2(m-1)}{m\beta_s}, \quad \tau_{rz}(1, \beta_s) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Отделим в полученных решениях вещественную и мнимые части. Условимся обозначать:

$$u(x, \beta_s) = u^{(s, r)} + i u^{(s, i)}, \quad w(x, \beta_s) = w^{(s, r)} + i w^{(s, i)} \quad (4.36)$$

и т. д. Тогда, взяв вещественную часть выражений (4.27), получим:

$$\left. \begin{aligned} u_s &= \left\{ \begin{aligned} &M_s [u^{(s, r)} \cos \gamma_s \zeta - u^{(s, i)} \sin \gamma_s \zeta] - \\ &N_s [u^{(s, r)} \sin \gamma_s \zeta + u^{(s, i)} \cos \gamma_s \zeta] \} e^{-\delta_s \zeta}, \\ w_s &= \left\{ \begin{aligned} &M_s [w^{(s, r)} \cos \gamma_s \zeta - w^{(s, i)} \sin \gamma_s \zeta] - \\ &N_s [w^{(s, r)} \sin \gamma_s \zeta + w^{(s, i)} \cos \gamma_s \zeta] \} e^{-\delta_s \zeta}. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

Выражения, отличающиеся только перестановкой и знаком постоянных, мы получили бы, взяв мнимую часть  $u_s$  и  $w_s$ . Таким образом, для каждого корня  $\beta_s$ , расположенного в первом квадранте плоскости  $\beta$ , получаем два вещественных частных однородных решения, соответствующих независимым постоянным  $M_s$  и  $N_s$ . Наличие в выражениях (4.37) множителя  $e^{-\delta_s \zeta}$  указывает, что эти решения затухают от края цилиндра  $\zeta = 0$ . Быстрота затухания возрастает с номером решения, при  $s = 1$  имеем  $\delta_1 = 2,698$  (см. таблицу 9), а при больших  $s$ , по (4.20),  $\delta_s \sim s\pi$ , т. е. затухание будет очень сильным.

Решения, затухающие от края  $\zeta = l$  (где  $L = \rho_0 l$  — длина цилиндра), получим, заменив в (4.27) множитель  $e^{i\beta_s \zeta}$  на  $e^{i\beta_s \zeta_1}$ , где  $\zeta_1 = l - \zeta$ , и изменив знак  $\omega$ . Следует изменить при этом также знак выражения  $\tau_{\rho z}$ . Заметим ещё, что использование групп корней  $\beta_s$ , расположенных в остальных квадрантах плоскости  $\beta$ , не приведёт к решениям, отличным от указанных; для каждого  $\beta_s$  получается, таким образом, четыре независимых вещественных решения; два из них затухают от торца  $\zeta = 0$  и два — от торца  $\zeta_1 = 0$ .

В § 8 приведены таблицы, облегчающие вычисление однородных решений.

### § 5. Деформация цилиндра конечной длины, нагруженного по боковой поверхности. Метод тригонометрических рядов

В § 4 приведены выражения перемещений точек цилиндра при задании на его боковой поверхности нормальных и касательных нагрузок, распределённых по закону косинуса и соответственно синуса. Наложение этих решений позволяет рассмотреть задачу в случае произвольного нагружения, симметричного относительно среднего сечения ( $\zeta = 0$ ) цилиндра. Случай кососимметричного нагружения также не потребовал бы новых приёмов решения. Можно было бы использовать те же формулы (4.6), (4.7), заменив в них, как было указано уже,  $\cos \beta \zeta$  и  $\sin \beta \zeta$  соответственно на  $\sin \beta \zeta$  и  $(-\cos \beta \zeta)$ .

При симметричном нагружении крайевые условия на боковой поверхности цилиндра можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r)_{x=1} &= -p(\zeta) = -p_0 - \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cos \frac{k\pi\zeta}{l}, \\ (\tau_{r\zeta})_{x=1} &= q(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin \frac{k\pi\zeta}{l}, \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

где  $l = \frac{L}{\rho_0}$  и начало координат взято в среднем сечении ( $2L$  — длина цилиндра). Решение, соответствующее постоянному слагаемому ( $-p_0$ ), определяется по формулам задачи Ляме (§ 2). Перемещения, отвечающие слагаемым

$$-p_k \cos \frac{k\pi\zeta}{l}, \quad q_k \sin \frac{k\pi\zeta}{l}$$

в выражении нагрузки, даются формулами (4.6), (4.7), в которых следует параметр  $\beta$  заменить на

$$\frac{k\pi}{l} = s_{k*} \quad (5.2)$$

а коэффициенты  $p_0$  и  $q_0$  — соответственно на  $p_k$  и  $q_k$ .

Сумма получающихся решений даст искомое решение задачи о деформации цилиндра, боковая поверхность которого нагружена по закону (5.1). При этом слагаемые выражений  $w$  и  $\tau_{pz}$  будут пропорциональны  $\sin \frac{k\pi\zeta}{l}$  и, значит, при  $\zeta = \pm l$

$$w(x, \pm l) = 0, \quad \tau_{pz}(x, \pm l) = 0 \quad (0 \leq x \leq l).$$

Полученное решение, таким образом, соответствует наличию на торце лишь нормальных напряжений, распределённых так, что при деформации торец остаётся плоским. Как уже говорилось выше, можно, налагая элементарное решение, отвечающее равномерному распределению нормальных напряжений по торцу, получить на торце систему нормальных напряжений, статически эквивалентную нулю. Тогда решение, построенное указанным образом, даст в соответствии с принципом Сен-Венана распределение напряжений, которое на достаточном удалении от торцов действительно реализуется в упругом цилиндре при нагружении его по принятому закону (5.1).

Ход вычисления покажем на примере цилиндра, нагружённого растягивающими касательными усилиями  $\tau$ , равномерно распределёнными с интенсивностью  $q$  по участкам боковой поверхности

$$\zeta_0 < \zeta < (\zeta_0 + b) \quad \text{и} \quad -\zeta_0 > \zeta > -(\zeta_0 + b).$$

Можно считать, что в условиях такой схемы загрузки работает цилиндрический образец, испытываемый на растяжение, когда растягивающее усилие величины

$$P = 2\pi r_0^2 qb \quad (5.3)$$

передаётся образцу, снабжённому цилиндрическими выступами высоты  $b$  (заплевками), с помощью кольцевых захватов; распределение касательных напряжений по поверхности, отделяющей заплевки от тела стержня, приближённо можно считать равномерным. Нормальные напряжения на этой поверхности отсутствуют.

Таким образом, краевые условия в рассматриваемом случае будут:

$$\text{при } x = 1 \quad \sigma_p = 0, \quad \tau_{pz} = \tau(\zeta), \quad (5.4)$$

где  $\tau(\zeta)$  — нечётная функция, задаваемая при  $0 \leq \zeta \leq l$  следующим образом:

$$\tau(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \zeta \leq \zeta_0, \\ q & \text{при } \zeta_0 < \zeta < \zeta_0 + b, \\ 0 & \text{при } \zeta_0 + b < \zeta \leq l, \end{cases} \quad (5.5)$$



Коэффициенты её разложения в ряд вида (5.1) по синусам будут:

$$q_k = \frac{2}{l} \int_0^l \tau(\zeta) \sin \frac{k\pi\zeta}{l} d\zeta = \frac{2q}{l} \int_{\zeta_0}^{\zeta_0+b} \sin \frac{k\pi}{l} \zeta \cdot d\zeta = \\ = \frac{2q}{k\pi} [\cos s_k \zeta_0 - \cos s_k (\zeta_0 + b)]. \quad (5.6)$$

Выражение нормального напряжения  $\sigma_z$ , вычисляемое по (4.7) и (4.8), имеет вид (при  $p_0 = 0$ ):

$$\sigma_z = \frac{q_0}{\psi(\beta)} \left\{ I_0(\beta x) \left[ 3\beta I_0(\beta) - \frac{2(2m-1)}{m} I_1(\beta) - \beta^2 I_1(\beta) \right] + \right. \\ \left. + \beta x I_1(\beta x) [\beta I_0(\beta) - I_1(\beta)] \right\} \cos \beta \zeta. \quad (5.7)$$

Сделав в ней указанные выше замены, получим в нашем случае:

$$\sigma_z = \frac{2q}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} [\cos s_k \zeta_0 - \cos s_k (\zeta_0 + b)] \cdot S_z(x; s_k) \cos s_k \zeta \right\} + \sigma_0, \quad (5.8)$$

где обозначено

$$S_z(x, s) = \frac{1}{\psi(s)} \left\{ I_0(sx) \left[ 3s I_0(s) - \frac{2(2m-1)}{m} I_1(s) - s^2 I_1(s) \right] + \right. \\ \left. + sx I_1(sx) [s I_0(s) - I_1(s)] \right\}. \quad (5.9)$$

Добавочное слагаемое  $\sigma_0$ , соответствующее равномерному распределению нормальных напряжений  $\sigma_z$ , определим по условию статической эквивалентности системы нормальных напряжений  $\sigma_z$  в среднем сечении цилиндра ( $\zeta = 0$ ) заданной растягивающей силе:

$$(Z)_{\zeta=0} = 2\pi\rho_0^2 \int_0^1 (\sigma_z)_{\zeta=0} \dot{x} dx = 2\pi\rho^2 qb = P. \quad (5.10)$$

Тогда нормальные напряжения  $\sigma_z$  в торцевом сечении цилиндра  $\zeta = l$  представят систему, статически эквивалентную нулю:

$$(Z)_{\zeta=l} = 2\pi\rho_0^2 \int_0^1 (\sigma_z)_{\zeta=l} x dx = 0.$$

Отсюда получаем выражение постоянной  $\sigma_0$ :

$$\sigma_0 = qb - \int_0^1 [(\sigma_z^*)_{\zeta=0} + (\sigma_z^*)_{\zeta=l}] x dx, \quad (5.11)$$

где через  $\sigma_z^*$  обозначена часть выражения (5.8), определяемая бесконечным рядом.

При вычислении интегралов воспользуемся формулами

$$\int_0^1 x I_0(sx) dx = \frac{1}{s} I_1(s), \quad \int_0^1 x^2 I_1(sx) dx = \frac{1}{s} I_0(s) - \frac{2}{s^2} I_1(s).$$

Тогда получим:

$$\int_0^1 x S_z(x; s) dx = \frac{s}{\psi(s)} [I_0^2(s) - I_1^2(s)] - \frac{2(m-1)}{ms\psi(s)} I_1^2(s) = \frac{1}{s}$$

и, значит,

$$\begin{aligned} \int_0^1 [(\tau_z^*)_{\zeta=0} + (\tau_z^*)_{\zeta=l}] x dx &= \frac{2q}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^k}{ks_k} [\cos s_k \zeta_0 - \cos s_k (\zeta_0 + b)] = \\ &= \frac{ql}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \left[ \cos \frac{2\pi\nu\zeta_0}{l} - \cos \frac{2\pi\nu(\zeta_0 + b)}{l} \right]. \end{aligned}$$

Применив далее известный ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu x}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4} \quad (0 < x < 2\pi),$$

после подстановки в (5.11) получим:

$$\tau_0 = \frac{qb}{l} (2\zeta_0 + b). \quad (5.12)$$

Назовём через  $\sigma_m$  среднее значение нормального напряжения  $\sigma_z$ ; очевидно, что в сечениях  $|\zeta| > \zeta_0 + b$  оно равно нулю, а при  $|\zeta| < \zeta_0$

$$\sigma_m = \frac{P}{\pi\rho_0^2} = 2qb. \quad (5.13)$$

Распределение напряжений  $\sigma_z$  в среднем сечении цилиндра ( $\zeta=0$ ), таким образом, определяется формулой

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_m} = \frac{2\zeta_0 + b}{2l} + \frac{1}{\pi b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [\cos s_k \zeta_0 - \cos s_k (\zeta_0 + b)] S_z(x; s_k). \quad (5.14)$$

В примере, рассмотренном Л. Файлоном, было взято

$$l = \frac{\pi}{2}, \quad b = \zeta_0 = \frac{l}{3}.$$

По формуле (5.14) имеем:

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_m} = \frac{1}{2} + \frac{12}{\pi^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \sin \frac{(2\nu+1)\pi}{6} S_z(x; 4\nu+2). \quad (5.15)$$

Наихудшая сходимость ряда имеет место при  $x=1$ ; покажем ход численного расчёта в этом наименее благоприятном случае.

При  $\nu \geq 2$  аргумент бесселевых функций  $I_0$  и  $I_1$  будет  $\geq 10$  и для вычисления можно пользоваться асимптотическими представлениями

$$I_0(\beta) \sim \frac{e^\beta}{\sqrt{2\pi\beta}} \left( 1 + \frac{1}{8\beta} + \frac{9}{128\beta^2} + \dots \right),$$

$$I_1(\beta) \sim \frac{e^\beta}{\sqrt{2\pi\beta}} \left( 1 - \frac{3}{8\beta} - \frac{15}{128\beta^2} + \dots \right);$$

подстановка в выражение  $S_z(1; 4\nu+2)$  даёт:

$$S_z(1; 4\nu+2) \sim 2 + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \right) \frac{1}{2\nu+1} + \dots = \tilde{S}_z(1; 4\nu+2).$$

По (5.15) получаем (полагаем  $m=4$ ):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sigma_z}{\sigma_m} \right)_{x=1} &= \frac{1}{2} + \frac{12}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} [S_z(1; 2) - \tilde{S}_z(1; 2)] - \frac{1}{3} [S_z(1; 6) - \tilde{S}_z(1; 6)] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \sin \frac{(2\nu+1)\pi}{6} \tilde{S}_z(1; 4\nu+2) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{12}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} [S_z(1; 2) - 2,75] - \frac{1}{3} [S_z(1; 6) - 2,25] + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \sin \frac{(2\nu+1)\pi}{6} + \frac{3}{4} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^2} \sin \frac{(2\nu+1)\pi}{6} \right\}. \end{aligned}$$

Суммы рядов вычисляются по формулам

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \sin (2\nu+1)x = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right),$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^2} \sin (2\nu+1)x = \frac{\pi x}{4},$$

а числа  $S_z(1; 2)$ ,  $S_z(1; 6)$  — по таблицам функций  $I_0$  и  $I_1$ . Получаем после подстановки чисел:

$$\left( \frac{\sigma_z}{\sigma_m} \right)_{x=1} \approx 1,13 \text{ (по Файлону 1,117).}$$

Приводим вычисленную Л. Файлоном таблицу 10, дающую распределение нормальных напряжений  $\sigma_z$ .

Таблица 10

Отношение  $\frac{\sigma_z}{\sigma_m}$ 

$\zeta/l$	$x = 0$	$x = 0,2$	$x = 0,4$	$x = 0,6$	$x = 1$
0	0,689	0,719	0,810	0,962	1,117
0,1	0,673	0,700	0,786	0,937	1,163
0,2	0,631	0,652	0,720	0,859	1,344
0,3	0,582	0,594	0,637	0,737	2,022
0,4	0,539	0,545	0,565	0,617	1,368

Последняя строка таблицы даёт распределение напряжений в сечении, расположенном в загруженной части цилиндра.

Из таблицы отчётливо видно, что распределение нормальных напряжений  $\sigma_z$  выравнивается по мере удаления от места загрузки. Но даже в среднем сечении ( $\zeta = 0$ ) нормальное напряжение изменяется в пределах от 69 до 112% от среднего значения. Это объясняется тем, что в рассмотренном расчётном случае цилиндр загружен по значительной части ( $\frac{1}{3}$ ) своей боковой поверхности.

### § 6. Деформация бесконечного цилиндра, нагруженного по участку боковой поверхности. Применение интеграла Фурье

Начнём с рассмотрения нормального нагружения постоянной интенсивности  $p_0$  по участку длины  $2t = 2br_0$  поверхности цилиндра. Обобщение результатов на случай произвольной нормальной нагрузки, как будет показано в § 7, не представит труда.

Краевые условия записываются, таким образом, в виде:

$$\text{при } x = 1 \quad \sigma_r = -p(\zeta), \quad \tau_{rz} = 0, \quad (6.1)$$

где функция  $p(\zeta)$  задаётся соотношениями

$$p(\zeta) = \begin{cases} p_0 & \text{при } |\zeta| < b, \\ 0 & \text{при } |\zeta| > b \end{cases} \quad (6.2)$$

и может быть представлена интегралом Фурье

$$p(\zeta) = \int_0^{\infty} P(\beta) \cos \beta \zeta d\beta, \quad (6.3)$$

где  $P(\beta)$  — трансформанта Фурье — определяется по известной формуле

$$P(\beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p(\zeta) \cos \beta \zeta d\zeta = \frac{2p_0}{\pi} \int_0^b \cos \beta \zeta d\zeta = \frac{2p_0}{\pi} \frac{\sin \beta b}{\beta}.$$

По (4.6) — (4.8) находим выражение перемещений  $u$ ,  $w$  и объёмного расширения в форме интегралов Фурье:

$$u(x, \zeta) = -\frac{p_0 p_0}{\pi G} \int_0^{\infty} \left[ \frac{2(m-1)}{m} I_1(\beta) I_1(\beta x) + \beta I_0(\beta) I_1(\beta x) - \beta x I_1(\beta) I_0(\beta x) \right] \frac{\sin \beta b}{\beta \psi(\beta)} \cos \beta \zeta d\beta, \quad (6.4)$$

$$w(x, \zeta) = -\frac{p_0 p_0}{\pi G} \int_0^{\infty} \left[ \frac{2(m-1)}{m} I_1(\beta) I_0(\beta x) + \beta x I_1(\beta) I_1(\beta x) - \beta I_0(\beta) I_0(\beta x) \right] \frac{\sin \beta b}{\beta \psi(\beta)} \sin \beta \zeta d\beta, \quad (6.5)$$

$$\vartheta(x, \zeta) = -\frac{2(m-2)}{m\pi G} p_0 \int_0^{\infty} I_1(\beta) I_0(\beta x) \frac{\sin \beta b}{\psi(\beta)} \cos \beta \zeta d\beta. \quad (6.6)$$

Формальное составление выражения решения, таким образом, конечно, не составило труда. Важной и непростой задачей является нахождение способа вычисления интегралов, который не только допускал бы получение численных результатов, но и давал достаточно наглядное представление о напряжённом состоянии цилиндра. Мы ограничимся рассмотрением величин, характеризующих это состояние в точках оси цилиндра и его поверхности, т. е. при  $x=0$  и  $x=1$ . Вычисление при любом  $x$  может быть проведено тем же методом.

На поверхности цилиндра в первую очередь следует определить величины

$$u(1, \zeta), \quad \vartheta(1, \zeta). \quad (6.7)$$

Напряжение  $\sigma_r(1, \zeta)$  известно по краевым условиям; поэтому из соотношений

$$\sigma_r = 2G \left( \frac{\vartheta}{m-2} + \varepsilon_r \right), \quad \vartheta = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}$$

найдем  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\varphi$  и далее

$$\varepsilon_z = \vartheta - \varepsilon_\varphi - \varepsilon_r. \quad (6.8)$$

Таким образом, по величинам (6.7) могут быть найдены нормальные напряжения

$$\sigma_\varphi(1, \zeta), \quad \sigma_z(1, \zeta). \quad (6.9)$$

На оси цилиндра мы будем вычислять величины

$$\varepsilon_{\varphi}(0, \zeta) = \left( \frac{u}{\rho} \right)_{\rho \rightarrow 0}, \quad \vartheta(0, \zeta). \quad (6.10)$$

Деформацию  $\varepsilon_z$  найдём также по (6.8), используя очевидное соотношение  $\varepsilon_{\varphi}(0, \zeta) = \varepsilon_{\rho}(0, \zeta)$ . Это позволит по (6.10) найти

$$\sigma_{\varphi}(0, \zeta) = \sigma_{\rho}(0, \zeta), \quad \sigma_z(0, \zeta). \quad (6.11)$$

Запись выражений (6.7) и (6.10) в форме определённых интегралов получается непосредственно по (6.4) и (6.6). Мы сделаем в этих интегралах замену

$$\sin \beta b \cos \beta \zeta = \frac{1}{2} [\sin \beta (b + \zeta) + \varepsilon \sin \beta |b - \zeta|], \quad (6.12)$$

где через  $\varepsilon$  обозначена величина, равная\*)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= 1 && \text{при } b > \zeta, \text{ т. е. внутри участка загрузки,} \\ \varepsilon &= -1 && \text{при } b < \zeta, \text{ т. е. вне участка загрузки,} \\ \varepsilon &= 0 && \text{при } b = \zeta, \text{ т. е. на границе участка загрузки.} \end{aligned} \right\} (6.13)$$

Определение величин (6.7) и (6.10) сведётся к вычислению четырёх однотипных интегралов

$$I_i(\lambda) = \int_0^{\infty} f_i^*(\beta) \sin \beta \lambda d\beta, \quad (6.14)$$

где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} f_1^*(\beta) &= \frac{I_1^2(\beta)}{\beta \psi(\beta)}, & f_2^*(\beta) &= \frac{I_0(\beta) I_1(\beta)}{\psi(\beta)}, \\ f_3^*(\beta) &= \frac{I_1(\beta)}{\psi(\beta)}, & f_4^*(\beta) &= \frac{I_0(\beta) \beta}{\psi(\beta)}. \end{aligned} \right\} (6.14')$$

Указанные величины выражаются через эти интегралы по формулам

$$u(1, \zeta) = -\frac{p_0 \sigma_0}{\pi G} \frac{m-1}{m} [I_1(b+\zeta) + \varepsilon I_1(|b-\zeta|)], \quad (6.15)$$

$$\vartheta(1, \zeta) = -\frac{p_0(m-2)}{\pi G m} [I_2(b+\zeta) + \varepsilon I_2(|b-\zeta|)], \quad (6.16)$$

$$\varepsilon_{\varphi}(0, \zeta) = -\frac{p_0}{4\pi G} \left\{ -\frac{2}{m} [I_3(b+\zeta) + \varepsilon I_3(|b-\zeta|)] + I_4(b+\zeta) + \varepsilon I_4(|b-\zeta|) \right\}, \quad (6.17)$$

$$\vartheta(0, \zeta) = -\frac{p_0(m-2)}{\pi G m} [I_3(b+\zeta) + \varepsilon I_3(|b-\zeta|)]. \quad (6.18)$$

\*) По симметрии задачи можно ограничиться рассмотрением части цилиндра, в которой  $\zeta > 0$ .

Равнодействующая нормальных напряжений  $\sigma_z$ , соответствующих частному решению (4.6) — (4.7) при  $q_0 = 0$ , равна нулю, что легко установить вычислением по формуле (1.20). Это же имеет место и в рассматриваемом сейчас решении, так как оно представляет результат наложения указанных частных решений. Поэтому выражения (6.15) — (6.18) при  $b \rightarrow \infty$  (и, значит,  $\varepsilon = 1$ ) должны принимать значения (2.12) — (2.13), соответствующие решению задачи Ляме для сплошного цилиндра со свободными торцами:

$$u(1, \zeta)_{b \rightarrow \infty} = -\frac{\rho_0 \rho_0}{2J} \frac{m-1}{m+1}, \quad \vartheta(1, \zeta)_{b \rightarrow \infty} = -\frac{m-2}{G(m+1)} p_0, \quad (6.19)$$

$$\vartheta(0, \zeta)_{b \rightarrow \infty} = -\frac{m-2}{G(m+1)} p_0, \quad \varepsilon_\varphi(0, \zeta)_{b \rightarrow \infty} = -\frac{m-1}{2J(m+1)} p_0. \quad (6.20)$$

Из сказанного можно определить значения при  $\lambda \rightarrow \infty$  интегралов (6.14)

$$H_1(\infty) = \frac{\pi m}{4(m+1)}, \quad H_2(\infty) = H_3(\infty) = \frac{\pi m}{2(m+1)}, \quad H_4(\infty) = \frac{\pi m}{m+1}. \quad (6.21)$$

Это позволяет придать более отчётливую форму соотношениям (6.15) — (6.18); вместо (6.14) вводим в рассмотрение интегралы

$$j_i(\lambda) = \frac{H_i(\lambda)}{H_i(\infty)} = \int_0^\infty f_i(\beta) \sin \beta \lambda d\beta, \quad (6.22)$$

где по (6.14') и (6.21)

$$\left. \begin{aligned} f_1(\beta) &= \frac{4(m+1)}{\pi m} \frac{I_1^2(\beta)}{\beta \psi(\beta)}, & f_2(\beta) &= \frac{2(m+1)}{\pi m} \frac{I_0(\beta) I_1(\beta)}{\psi(\beta)}, \\ f_3(\beta) &= \frac{2(m+1)}{\pi m} \frac{I_1(\beta)}{\psi(\beta)}, & f_4(\beta) &= \frac{m+1}{\pi m} \frac{I_0(\beta) \beta}{\psi(\beta)}. \end{aligned} \right\} (6.23)$$

Обозначим для краткости

$$j_i(\zeta, b) = \frac{1}{2} [j_i(b + \zeta) + \varepsilon j_i(|b - \zeta|)]. \quad (6.24)$$

По (6.22) функция  $j_i(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  имеет пределом единицу; поэтому из (6.24) и определения величины  $\varepsilon$  следует, что

$$j_i(\zeta, \infty) = 1, \quad j_i(\infty, b) = 0. \quad (6.25)$$

Выражения основных величин (6.7) и (6.10) теперь могут быть представлены в виде

$$\frac{u(1, \zeta)}{u^*} = j_1(\zeta, b), \quad \frac{\vartheta(1, \zeta)}{\vartheta^*} = j_2(\zeta, b), \quad (6.26)$$

$$\frac{\varepsilon_\varphi(0, \zeta)}{\varepsilon_\varphi^*} = \frac{m}{m-1} \left[ j_4(\zeta, b) - \frac{1}{m} j_3(\zeta, b) \right], \quad \frac{\vartheta(0, \zeta)}{\vartheta^*} = j_3(\zeta, b). \quad (6.27)$$

Звёздочками обозначены соответствующие величины в решении Ляме, определяемые по (6.19), (6.20).

Проделав теперь вычисление, ход которого был намечен выше, легко найдём также выражения нормальных напряжений (6.9) и (6.11) на поверхности и оси цилиндра.

На поверхности цилиндра выражение нормального напряжения  $\sigma_p(1, \zeta)$ , задаваемое краевым условием (6.1)—(6.2), может быть представлено разрывным множителем

$$\sigma_p(1, \zeta) = -\frac{2p_0}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \beta b \cos \beta \zeta \frac{d\beta}{\beta}.$$

В принятой нами форме это можно записать так:

$$\frac{\sigma_p(1, \zeta)}{\sigma_p^*} = j_0(\zeta, b), \quad \sigma_p^* = -p_0, \quad (6.28)$$

где обозначено

$$j_0(\lambda) = \int_0^{\infty} f_0(\beta) \sin \beta \lambda \, d\beta, \quad f_0(\beta) = \frac{2}{\pi \beta}. \quad (6.29)$$

Получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_z(1, \zeta)}{p_0} &= j_0(\zeta, b) - \frac{2m}{m+1} j_2(\zeta, b) + \frac{m-1}{m+1} j_1(\zeta, b), \\ \frac{\sigma_\varphi(1, \zeta)}{\sigma_\varphi^*} &= \frac{2}{m+1} j_2(\zeta, b) + \frac{m-1}{m+1} j_1(\zeta, b), \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

где  $\sigma_\varphi^* = -p_0$  (решение Ляме).

На оси цилиндра ( $x = 0$ ) получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_p(0, \zeta)}{\sigma_p^*} &= \frac{\sigma_\varphi(0, \zeta)}{\sigma_\varphi^*} = -\frac{m}{m+1} j_4(\zeta, b) + \frac{1}{m+1} j_3(\zeta, b), \\ \frac{\sigma_z(0, \zeta)}{p_0} &= \frac{2m}{m+1} [j_4(\zeta, b) - j_3(\zeta, b)]: \end{aligned} \right\} \quad (6.31)$$

При  $\zeta \rightarrow \infty$  все рассматриваемые величины должны стремиться к нулю. Если же длина участка загрузки неограниченно возрастает, т. е.  $b \rightarrow \infty$ , то они должны стремиться к их значениям в задаче Ляме. Из (6.25) видно, что полученные выражения удовлетворяют этим условиям.

Вычисление интегралов  $j_k(\lambda)$ . Задача, которую мы рассматриваем, таким образом, сведена к вычислению четырёх интегралов (6.22). Функции  $f_k(\beta)$ , стоящие под знаком этих интегралов, нечётны

$$f_k(\beta) = -f_k(-\beta) \quad (6.32)$$



и имеют при  $\beta = 0$  простой полюс. По (4.11)

$$\left[ \frac{\psi(\beta)}{\beta^2} \right]_{\beta \rightarrow 0} = \frac{m+1}{2m},$$

известно также, что

$$[I_0(\beta)]_{\beta=0} = 1, \quad \left[ \frac{I_1(\beta)}{\beta} \right]_{\beta \rightarrow 0} = \frac{1}{2}.$$

Из (6.23) следует теперь, что вычеты функций  $f_k(\beta)$  в полюсе  $\beta = 0$  равны между собой и равны

$$r^{(k)} = r_0 = \frac{2}{\pi}. \quad (6.33)$$

Полюсами функций  $f_k(\beta)$  в верхней полуплоскости  $\beta$  являются также корни (4.12) и (4.12') функции  $\psi(\beta)$ , расположенные в этой полуплоскости:

$$\beta_s = \pm \gamma_s + i\delta_s \quad (\gamma_s > 0, \delta_s > 0). \quad (6.34)$$

Вычеты в этих полюсах будут:

$$\left. \begin{aligned} r_s^{(1)} &= \frac{4(m+1)}{\pi m} \frac{I_1^2(\beta_s)}{\beta_s \psi'(\beta_s)}, & r_s^{(2)} &= \frac{2(m+1)}{\pi m} \frac{I_0(\beta_s) I_1(\beta_s)}{\psi'(\beta_s)}, \\ r_s^{(3)} &= \frac{2(m+1)}{\pi m} \frac{I_1(\beta_s)}{\psi'(\beta_s)}, & r_s^{(4)} &= \frac{m+1}{\pi m} \frac{I_0(\beta_s) \beta_s}{\psi'(\beta_s)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

На полуокружности  $\Gamma$  радиуса  $|\beta| = R$ , проведённой в верхней полуплоскости и не проходящей через корни  $\beta_s$  знаменателя  $\psi(\beta)$ , функции  $f_k(\beta)$  ограничены при всех значениях  $\arg \beta$  ( $0 \leq \arg \beta \leq \pi$ ) и при  $R \rightarrow \infty$  стремятся к нулю. Поэтому на основании известной леммы Жордана

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f_k(\beta) e^{i\beta\lambda} d\beta = 0 \quad (\lambda > 0). \quad (6.36)$$

Рассмотрим интеграл по замкнутому контуру  $C$ , составленному из части вещественной оси  $(\eta, R)$ , полуокружности  $\Gamma$ , части вещественной оси  $(-R, -\eta)$  и полуокружности  $\gamma$  радиуса  $\eta$  в верхней полуплоскости

$$\int_C f_k(\beta) e^{i\beta\lambda} d\beta = \int_{\eta}^R + \int_{\Gamma} + \int_{-R}^{-\eta} + \int_{\gamma}. \quad (6.37)$$

Число  $\eta$  берётся таким, что все числа  $\beta_s$  расположены вне  $\gamma$ , т. е.  $\eta < |\beta_s|$ ; по теореме Коши о вычетах

$$\int_C f_k(\beta) e^{i\beta\lambda} d\beta = 2\pi i \sum^* r_s^{(k)} e^{i\beta_s \lambda}, \quad (6.38)$$

где суммирование проводится по всем полюсам (6.34), расположенным внутри  $C$ .

Рассмотрим теперь отдельные слагаемые интеграла (6.37). По свойству нечётности функций  $f_k(\beta)$ , выражаемому равенством (6.32), имеем:

$$\int_{-R}^{-\gamma} f_k(\beta) e^{i\beta\lambda} d\beta = \int_{\gamma}^R f_k(-\beta) e^{-i\beta\lambda} d\beta = - \int_{\gamma}^R f_k(\beta) e^{-i\beta\lambda} d\beta$$

и, значит,

$$\int_{\gamma}^R f_k(\beta) e^{i\beta\lambda} d\beta + \int_{-R}^{-\gamma} f_k(\beta) e^{i\beta\lambda} d\beta = 2i \int_{\gamma}^R f_k(\beta) \sin \beta\lambda d\beta. \quad (6.39)$$

Главная часть разложения в ряд Лорана функции  $f_k(\beta)$  в области начала координат имеет вид  $\frac{r_0}{\beta}$ . Поэтому интеграл в выражении (6.37) по полуокружности  $\gamma$ , проходимой в отрицательном направлении, будет равен

$$\int_{\gamma} f_k(\beta) e^{i\beta\lambda} d\beta = -\frac{1}{2} \cdot 2\pi i r_0 + O(\eta) = -2i + O(\eta), \quad (6.40)$$

где слагаемое  $O(\eta)$  при  $\eta \rightarrow 0$  стремится к нулю.

Подстановка в (6.37) и (6.38) теперь даёт

$$2i \int_{\gamma}^R f_k(\beta) \sin \lambda\beta d\beta = 2\pi i \sum_{\gamma}^* r_s^{(k)} e^{i\beta_s \lambda} + 2i - \int_{\gamma} f_k(\beta) e^{i\beta\lambda} d\beta - O(\eta).$$

Остаётся перейти к пределу  $\eta \rightarrow 0$  и  $R \rightarrow \infty$ . Тогда по (6.36) получим:

$$j_k(\lambda) = \int_0^{\infty} f_k(\beta) \sin \beta\lambda d\beta = 1 + \pi \sum r_s^{(k)} e^{i\beta_s \lambda}, \quad (6.41)$$

Из выражений (6.35) следует, что  $r_s^{(k)}$  являются чётными функциями  $\beta_s$ , т. е. равны для корней  $\beta_s$ , расположенных во втором и четвёртом квадрантах; но корни  $\beta_s$  первого и четвёртого квадрантов и соответствующие им вычеты являются комплексными и сопряжёнными числами. Значит, таковыми же будут вычеты по корням первого и второго квадрантов; поэтому в развёрнутой форме выражение (6.41) имеет вид

$$j_k(\lambda) = 1 + \pi \left[ \sum_{s=1}^{\infty} r_s^{(k)} e^{i(\gamma_s + i\delta_s)\lambda} + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{r}_s^{(k)} e^{i(-\gamma_s + i\delta_s)\lambda} \right]$$

или

$$j_k(\lambda) = 1 + 2\pi \sum_{s=1}^{\infty} e^{-\delta_s \lambda} \operatorname{Re} r_s^{(k)} e^{i\gamma_s \lambda}. \quad (6.42)$$

причём  $r_s^{(k)}$  обозначают вычеты только по корням (4.12), расположенным в первом квадранте.

Обозначим

$$\frac{2\pi m}{m+1} r_s^{(k)} = A_s^{(k)} - iB_s^{(k)} \quad (k = 1, 2, 3, 4; s = 1, 2, 3, \dots), \quad (6.43)$$

т. е. по (6.35)

$$\left. \begin{aligned} A_s^{(1)} - iB_s^{(1)} &= \frac{8r_1^2(\beta_s)}{\beta_s \psi'(\beta_s)}, & A_s^{(2)} - iB_s^{(2)} &= \frac{4r_0(\beta_s) r_1(\beta_s)}{\psi'(\beta_s)}, \\ A_s^{(3)} - iB_s^{(3)} &= \frac{4r_1(\beta_s)}{\psi'(\beta_s)}, & A_s^{(4)} - iB_s^{(4)} &= \frac{2\beta_s r_0(\beta_s)}{\psi'(\beta_s)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.44)$$

Выражения функций  $j_k(\lambda)$  примут вид

$$j_k(\lambda) = 1 + \frac{m+1}{m} \sum_{s=1}^{\infty} e^{-\delta_s \lambda} (A_s^{(k)} \cos \gamma_s \lambda + B_s^{(k)} \sin \gamma_s \lambda). \quad (6.45)$$

Коэффициенты  $A_s^{(k)}$  и  $B_s^{(k)}$  вычисляются один раз навсегда. Для  $s = 1, 2, 3$  они помещены в таблице 11, составленной по данным таблицы 9. При  $s > 3$  на основании формул (4.23) и (4.24) легко получить асимптотические выражения этих коэффициентов. Напомним, что числа  $\delta_s$  и  $\gamma_s$  также приведены в таблице 9, а их асимптотические значения даются формулой (4.20).

Таблица 11

$s$	$A_s^{(1)} - iB_s^{(1)}$	$A_s^{(2)} - iB_s^{(2)}$	$A_s^{(3)} - iB_s^{(3)}$	$A_s^{(4)} - iB_s^{(4)}$
1	-0,531-0,419 $i$	0,124-0,969 $i$	-1,019+0,487 $i$	-1,362-0,899 $i$
2	-0,088-0,017 $i$	-0,013-0,272 $i$	0,266-0,254 $i$	0,945+0,601 $i$
3	-0,042-0,014 $i$	0,029-0,207 $i$	-0,209+0,160 $i$	-0,935-0,825 $i$

Разыскание чисел этой таблицы сопряжено с затруднениями, вызванными, во-первых, тем, что значения функций  $I_0$  и  $I_1$  приходится брать для аргументов в местах, где рельеф этих функций резко изменяется; во-вторых, происходит накопление погрешностей вследствие неустраняемого появления разностей близких величин. Поэтому, хотя вычисление велось с четырьмя знаками, для чего в промежуточных вычислениях бралось пять и более знаков, в числах таблицы возможна ошибка в третьем знаке после запятой.

Асимптотические представления коэффициентов имеют вид

$$\left. \begin{aligned} A_s^{(1)} - iB_s^{(1)} &\sim \frac{4}{\beta_s^2} \left( 1 + \frac{2(m-1)}{m\beta_s} \right), \\ A_s^{(2)} - iB_s^{(2)} &\sim \frac{2}{\beta_s} \left( 1 + \frac{2(m-1)}{m\beta_s} \right), \\ A_s^{(3)} - iB_s^{(3)} &\sim \frac{2}{\beta_s I_1(\beta_s)} \left( 1 + \frac{2(m-1)}{m\beta_s} \right), \\ A_s^{(4)} - iB_s^{(4)} &\sim \frac{1}{I_1(\beta_s)} \left( 1 + \frac{2(m-1)}{m\beta_s} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.46)$$

Основные слагаемые вещественных частей этих выражений будут:

$$\left. \begin{aligned} A_s^{(1)} &\sim -\frac{4}{\pi^2 s^2}, & A_s^{(2)} &\sim \frac{\ln 4\pi s}{\pi^2 s^2}, \\ A_s^{(3)} &\sim \frac{(-1)^s}{\sqrt{\pi s}}, & A_s^{(4)} &\sim \frac{(-1)^s \sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.47)$$

Здесь при вычислении использовано асимптотическое представление

$$I_0(\beta_s) \sim I_1(\beta_s) \sim \frac{1-i}{\sqrt{\pi}} (-1)^s, \quad (6.48)$$

получающееся по (4.20) и (4.23).

По (6.24) и (6.45) составим теперь выражения величин  $j_k(\zeta, b)$ ; получим:

а) внутри участка загрузки ( $\varepsilon = 1, b > \zeta$ ):

$$\begin{aligned} j_k(\zeta, b) = 1 + \frac{m+1}{2m} \sum_{s=1}^{\infty} \{ & A_s^{(k)} [e^{-\delta_s \zeta} \cos \gamma_s(b+\zeta) + e^{\delta_s \zeta} \cos \gamma_s(b-\zeta)] + \\ & + B_s^{(k)} [e^{-\delta_s \zeta} \sin \gamma_s(b+\zeta) + e^{\delta_s \zeta} \sin \gamma_s(b-\zeta)] \} e^{-\delta_s b}, \end{aligned} \quad (6.49)$$

б) вне участка загрузки ( $\varepsilon = -1, b < \zeta$ ):

$$\begin{aligned} j_k(\zeta, b) = \frac{m+1}{2m} \sum_{s=1}^{\infty} \{ & A_s^{(k)} [e^{-\delta_s b} \cos \gamma_s(b+\zeta) - e^{\delta_s b} \cos \gamma_s(\zeta-b)] + \\ & + B_s^{(k)} [e^{-\delta_s b} \sin \gamma_s(b+\zeta) - e^{\delta_s b} \sin \gamma_s(\zeta-b)] \} e^{-\delta_s \zeta}, \end{aligned} \quad (6.50)$$

в) на границе участка загрузки ( $\varepsilon = 0, b = \zeta$ ):

$$j_k(b, b) = \frac{1}{2} + \frac{m+1}{2m} \sum_{s=1}^{\infty} (A_s^{(k)} \cos 2\gamma_s b + B_s^{(k)} \sin 2\gamma_s b) e^{-2\delta_s b}. \quad (6.51)$$

При переходе через границу участка загрузки, таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} j_k(b-0, b) - j_k(b, b) &= j_k(b, b) - j_k(b+0, b) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{m+1}{m} \sum_{s=1}^{\infty} A_s^{(k)} \right] = \frac{1}{2} j_k(0). \end{aligned} \quad (6.52)$$

Радиальное перемещение  $u(1, \zeta)$  на поверхности цилиндра, а также все интересующие нас величины на его оси остаются непрерывными при  $\zeta = b$ . Из (6.52) следует поэтому, что

$$j_1(0) = 0, \quad j_3(0) = 0, \quad j_4(0) = 0. \quad (6.53)$$

Приведённые выше численные данные достаточно хорошо удовлетворяют этим соотношениям. Так, для  $k = 1$  имеем:

$$j_1(0) = 1 + \frac{m+1}{m} \left[ A_1^{(1)} + A_2^{(1)} + A_3^{(1)} + \sum_{s=4}^{\infty} A_s^{(1)} \right].$$

Заменим под знаком суммы числа  $A_s^{(1)}$  первым слагаемым их асимптотических представлений [см. (6.47)]; тогда получим:

$$j_1(0) = 1 - \frac{m+1}{m} \left[ 0,531 + 0,088 + 0,042 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{s=4}^{\infty} \frac{1}{s^2} \right].$$

Вспоминая, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} = \frac{\pi}{6},$$

найдем:

$$j_1(0) \approx 1 - \frac{m+1}{m} 0,78,$$

что при  $m = 4$  даёт  $j_1(0) \approx 0,025$  вместо нуля; т. е. достаточно хорошее совпадение, если учесть, что при  $s \geq 4$  мы вместо истинных значений  $A_s^{(1)}$  использовали главные члены их асимптотических представлений. Аналогичное вычисление проводим при  $k = 3$ :

$$\begin{aligned} j_3(0) &\approx 1 + \frac{m+1}{m} \left[ -1,019 + 0,266 - 0,209 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=4}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s} \right] \approx -0,06 \\ &\quad \left( \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s} = \ln 2 \approx 0,693 \right). \end{aligned}$$

Числа  $A_s^{(8)}$  убывают значительно медленнее, чем  $A_s^{(1)}$ . Этим объясняется худшее приближение вычисленной суммы к нулю, чем в предыдущем случае. Удержав в асимптотическом представлении  $A_s^{(8)}$  ещё одно слагаемое, получили бы более близкое к нулю значение  $j_3(0)$ .

Проводя таким же образом вычисление  $j_4(0)$ , придём к расходящемуся ряду вида [см. последнюю формулу (6.47)]

$$1 - 1 + 1 - \dots$$

Таким образом, выражение  $j_4(0)$  не имеет смысла; определяя его как  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} j_4(\lambda)$ , придём к эйлерову значению суммы вышеприведённого ряда

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s = \frac{1}{2}.$$

Получаем:

$$j_4(0) = 1 + \frac{m+1}{m} \left[ -1,362 + 0,945 - 0,935 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{s=4}^{\infty} (-1)^s \right] \approx -0,09,$$

что при столь грубой оценке значений слагаемых, начиная с  $s = 4$ , может считаться достаточно хорошим совпадением.

Объёмное расширение  $\vartheta(1, \zeta)$  на поверхности цилиндра не должно оставаться непрерывным при  $\zeta = b$ , так как в этом месте нормальное напряжение  $\sigma_p(1, \zeta)$  по условию претерпевает разрыв; из (6.30) вследствие непрерывности  $j_1(\zeta, b)$  следует также, что и напряжение  $\sigma_\varphi(1, \zeta)$  разрывно при  $\zeta = b$ . Но нормальное напряжение  $\sigma_z(1, \zeta)$  должно при  $\zeta = b$  оставаться непрерывным; в противном случае  $\frac{\partial \tau_{pz}}{\partial x}$  при  $x = 1$  и  $\zeta = b$  обратилось бы в бесконечность. Поэтому разрывы непрерывности двух слагаемых выражения  $\sigma_z(1, \zeta)$  должны друг друга компенсировать. Замечая далее, что

$$j_0(b-0, b) - j_0(b, b) = j_0(b, b) - j_0(b, b+0) = \frac{1}{2},$$

получим по (6.30), (6.52) и (6.53):

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_0} [\sigma_z(1, b-0) - \sigma_z(1, b)] &= \frac{1}{p_0} [\sigma_z(1, b) - \sigma_z(1, b+0)] = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2m}{m+1} \cdot \frac{1}{2} j_2(0) + \frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{1}{2} j_1(0) = \frac{1}{2} - \frac{m}{m+1} j_2(0). \end{aligned}$$

Таким образом, условие непрерывности  $\sigma_z(1, \zeta)$  приводит к равенству

$$\frac{1}{2} - \frac{m}{m+1} j_2(0) = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{s=1}^{\infty} A_s^{(8)} = \frac{m}{m+1} - \frac{1}{2} = 0,3. \quad (6.54)$$

Вычисление даёт:

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s^{(2)} \approx 0,124 - 0,013 + 0,029 + \frac{1}{\pi^2} \sum_{s=4}^{\infty} \frac{\ln 4\pi s}{s^2} \approx 0,28.$$

(Сумма ряда  $\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\ln s}{s^2}$  вычисляется с помощью формулы Эйлера — Маклорена и оказывается приближённо равной 0,935.) Приближение к истинному значению (6.54) получилось достаточным при той степени точности, с какой велось вычисление.

Приведённые выражения дают полное решение задачи об определении величин (6.7), (6.9), (6.11) и (6.12) на поверхности цилиндра и на его оси; простые формулы, полученные для этих величин, отчётливо выражают затухание напряжённого состояния в мере удаления по оси цилиндра от места загрузки и позволяют дать численную оценку отклонения на участке загрузки от решения задачи Ляме. Величина этого отклонения зависит от относительной длины  $b$  этого участка и уменьшается с ростом последней.

Составим, например, выражения нормальных напряжений  $\sigma_p = \sigma_\varphi$  на оси цилиндра. Надо использовать формулы (6.49)—(6.51), а также (6.31) и численные данные таблицы 9 и третьего и четвертого столбцов таблицы 11. При  $m = 4$  получим:

а) на участке загрузки

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_p(0, \zeta)}{\sigma_p^*} &= \frac{\sigma_\varphi(0, \zeta)}{\sigma_\varphi^*} = 1 + \\ &+ e^{-2,698(b+\zeta)} [-0,809 \cos 1,367(b+\zeta) + 0,389 \sin 1,367(b+\zeta)] + \\ &+ e^{-2,698(b-\zeta)} [-0,809 \cos 1,367(b-\zeta) + 0,389 \sin 1,367(b-\zeta)] + \\ &+ e^{-6,060(b+\zeta)} [0,506 \cos 1,558(b+\zeta) - 0,268 \sin 1,558(b+\zeta)] + \\ &+ e^{-6,060(b-\zeta)} [0,506 \cos 1,558(b-\zeta) - 0,268 \sin 1,558(b-\zeta)] + \\ &+ e^{-9,82(b+\zeta)} [-0,494 \cos 1,818(b+\zeta) - 0,393 \sin 1,818(b+\zeta)] + \\ &+ e^{-9,82(b-\zeta)} [-0,494 \cos 1,818(b-\zeta) - \\ &- 0,393 \sin 1,818 \sin(b-\zeta)] + \dots, \quad (6.55) \end{aligned}$$

б) вне участка загрузки

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_p(0, \zeta)}{\sigma_p^*} &= \frac{\sigma_\varphi(0, \zeta)}{\sigma_\varphi^*} = \\ &= e^{-2,698(b+\zeta)} [-0,809 \cos 1,367(b+\zeta) + 0,389 \sin 1,367(b+\zeta)] - \\ &- e^{-2,698(\zeta-b)} [-0,809 \cos 1,367(\zeta-b) + 0,389 \sin 1,367(\zeta-b)] + \\ &+ e^{-6,060(\zeta+b)} [0,506 \cos 1,558(b+\zeta) - 0,268 \sin 1,558(b+\zeta)] - \\ &- e^{-6,060(\zeta-b)} [0,506 \cos 1,558(\zeta-b) - 0,268 \sin 1,558(\zeta-b)] + \dots \quad (6.56) \end{aligned}$$

в) на границе участка загрузки

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_p(0, b)}{\sigma_p^*} &= \frac{\sigma_\varphi(0, b)}{\sigma_\varphi^*} = \\ &= \frac{1}{2} + e^{-5,396b} (-0,809 \cos 2,734b + 0,389 \sin 2,734b) + \\ &+ e^{-12,12b} (0,506 \cos 3,116b - 0,268 \sin 3,116b) + \dots, \quad (6.57) \end{aligned}$$

причём переход через эту границу происходит непрерывно [см. (6.53)].

Числовые коэффициенты в этих выражениях определены согласно (6.31) из формул:

коэффициенты при косинусах

$$\frac{m}{2m} A_s^{(4)} + \frac{1}{2m} A_s^{(3)},$$

коэффициенты при синусах

$$\frac{m}{2m} B_s^{(4)} + \frac{1}{2m} B_s^{(3)}.$$

В середине участка загрузки ( $\zeta = 0$ ) по (6.55) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_p(0, 0)}{\sigma_p^*} &= \frac{\sigma_\varphi(0, 0)}{\sigma_\varphi^*} = \\ &= 1 + e^{-2,698b} (-1,618 \cos 1,367b + 0,778 \sin 1,367b) + \\ &+ e^{-6,6b} (1,012 \cos 1,558b - 0,536 \sin 1,558b) + \dots \quad (6.58) \end{aligned}$$

Первое слагаемое (1) соответствует решению Ляме, а остальные члены представляют искажение, вносимое конечностью участка загрузки. Например, если длина этого участка составляет  $0,1\rho_0$  ( $b = 0,1$ ), то

$$\sigma_p(0, 0) = \sigma_\varphi(0, 0) \approx -p(1 - 0,973),$$

тогда как при  $b = 1$  искажение резко уменьшается:

$$\sigma_p(0, 0) = \sigma_\varphi(0, 0) \approx -p(1 - 0,028).$$

### § 7. «Опоясанный цилиндр». Нормальное нагружение боковой поверхности по произвольному закону

От решения предшествующего параграфа легко перейти с помощью предельного перехода к рассмотрению случая нормального нагружения цилиндра по окружности, представляющей сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной к его оси. Это — задача об «опоясанном цилиндре».

При нагружении, рассмотренном в § 6, на участок нагруженной поверхности цилиндра, соответствующий центральному углу  $d\varphi$ ,



действует сила  $2bp_0\rho_0^2 d\varphi$ . Приравняв это выражение величине  $P_0\rho_0 d\varphi$ , получим:

$$\frac{P_0}{\rho_0} = 2bp_0. \quad (7.1)$$

К задаче об «опоясанном цилиндре» придём, полагая, что  $2b \rightarrow 0$ ,  $\rho_0 \rightarrow \infty$ , но произведение этих величин остаётся конечным и определяется по (7.1); тогда  $P_0$  представит погонную нормальную нагрузку (нагрузку на единицу длины) по окружности цилиндра.

Предельный переход надо произвести в формуле (6.50), относящейся к случаю  $\zeta > b$ . Разделив выражение, стоящее в этой формуле слева, на  $\frac{P_0}{\rho_0\rho_0}$ , а стоящее справа — на равную величину  $2b$ , получим:

$$j_k(\zeta, b) \frac{\rho_0\rho_0}{P_0} = \frac{m+1}{2m} \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \frac{A_s^{(k)}}{2b} [e^{-\delta_s b} \cos \gamma_s(\zeta+b) - e^{\delta_s b} \cos \gamma_s(\zeta-b)] + \right. \\ \left. + \frac{B_s^{(k)}}{2b} [e^{-\delta_s b} \sin \gamma_s(\zeta+b) - e^{\delta_s b} \sin \gamma_s(\zeta-b)] \right\} e^{-\delta_s \zeta}. \quad (7.2)$$

Назовём через  $\omega_k(\zeta)$  функцию, получающуюся в правой части после перехода к пределу  $2b \rightarrow 0$ :

$$\omega_k(\zeta) = -\frac{m+1}{2m} \sum_{s=1}^{\infty} (a_s^{(k)} \cos \gamma_s \zeta + b_s^{(k)} \sin \gamma_s \zeta) e^{-\delta_s \zeta}, \quad (7.3)$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} a_s^{(k)} &= \delta_s A_s^{(k)} - \gamma_s B_s^{(k)} = \operatorname{Im} \beta_s (A_s^{(k)} - iB_s^{(k)}), \\ b_s^{(k)} &= \gamma_s A_s^{(k)} + \delta_s B_s^{(k)} = \operatorname{Re} \beta_s (A_s^{(k)} - iB_s^{(k)}). \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Наличие множителя  $\frac{\rho_0\rho_0}{P}$  в левой части (7.2) показывает, что при составлении по формулам (6.26), (6.27), (6.30) и (6.31) \*) выражений  $u(1, \zeta)$ ,  $\vartheta(1, \zeta)$  и т. д. следует в величинах  $u^*$ ,  $\vartheta^*$  и т. д., относящихся к решению Ляме, заменить  $p_0$  на  $\frac{P_0}{\rho_0}$ . Например,

$$\frac{u(1, \zeta)}{u_0} = \omega_1(\zeta), \quad \frac{\sigma_p(0, \zeta)}{\sigma_{p0}} = \frac{m}{m+1} \omega_4(\zeta) + \frac{1}{m+1} \omega_3(\zeta)$$

и т. д., где [ср. (6.19), (6.20)]

$$u_0 = -\frac{P_0}{2G} \frac{m-1}{m+1}, \quad \sigma_{p0} = -\frac{P_0}{\rho_0} \text{ и т. д.}$$

\*) Величину  $j_0(\zeta, b)$  в (6.30) надо принять равной нулю.

Значения коэффициентов (для  $s = 1, 2, 3$ )

$$a_s^{(k)} - ib_s^{(k)} = -i\beta_s (A_s^{(k)} - iB_s^{(k)}) \quad (7.4')$$

приведены в таблице 12. По (6.46) легко получить их асимптотические представления при больших значениях номера  $s$ .

Таблица 12

$s$	$a_s^{(1)} - ib_s^{(1)}$	$a_s^{(2)} - ib_s^{(2)}$	$a_s^{(3)} - ib_s^{(3)}$	$a_s^{(4)} - ib_s^{(4)}$
1	$-2,006 - 0,404 i$	$-0,991 - 2,783 i$	$-2,083 + 2,707 i$	$-4,904 - 0,563 i$
2	$-0,559 + 0,034 i$	$-0,503 - 1,628 i$	$1,216 - 1,953 i$	$6,66 + 2,17 i$
3	$-0,416 - 0,0580 i$	$-0,107 - 1,981 i$	$-1,657 + 1,871 i$	$-10,21 - 5,99 i$

В выражениях (7.3) начало отсчёта координаты  $\zeta$  помещено в нагруженном сечении, причём  $\zeta$  считается положительным. Формулы, пригодные для вычисления также при отрицательных  $\zeta$ , получим, заменив  $\zeta$  в (7.3) на  $|\zeta|$ . Если нагружено сечение  $\zeta'$ , то аргументом в (7.3) служит расстояние до этого сечения  $|\zeta - \zeta'|$ .

Теперь легко составить выражения, дающие решение задачи о напряжённом состоянии в цилиндре при произвольном законе нормального нагружения боковой поверхности:

$$\text{при } x = 1 \quad \tau_{rz} = 0, \quad \sigma_z = \begin{cases} -p_0 \psi(\zeta) & \zeta_1 < \zeta < \zeta_2, \\ 0 & \zeta_1 > \zeta, \zeta_2 < \zeta. \end{cases} \quad (7.5)$$

Здесь для удобства введён масштабный множитель  $p_0$ ; можно за  $p_0$  принять, например, среднее значение нагрузки на участке нагружения. Если теперь составить функции ( $k = 1, 2, 3, 4$ )

$$\Omega_k(\zeta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \psi(\zeta') \omega_k(|\zeta - \zeta'|) d\zeta', \quad (7.6)$$

то, заменив ими величины  $j_k(\zeta, b)$  в формулах § 6, получим выражения радиального перемещения и нормальных напряжений на поверхности цилиндра и его оси \*) при произвольном нагружении. При этом знаменатели в левых частях формул представят решение Ляме, рассчитанное для нормальной нагрузки, равной введённому выше масштабному множителю.

\*) При этом в (6.28) и (6.30) следует  $j_0(\zeta, b)$  заменить на  $\psi(\zeta)$ .

В развёрнутом виде выражения функций  $\Omega_k(\zeta)$  записываются так:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \zeta < \zeta_1 \quad \Omega_k(\zeta) &= \int_{\zeta_1 - \zeta}^{\zeta_1 - \zeta} \psi(\zeta' + \zeta) \omega_k(\zeta') d\zeta', \\ \text{при } \zeta_1 < \zeta < \zeta_2 \quad \Omega_k(\zeta) &= \int_0^{\zeta - \zeta_1} \psi(\zeta - \zeta') \omega_k(\zeta') d\zeta' + \\ &+ \int_0^{\zeta_2 - \zeta} \psi(\zeta' + \zeta) \omega_k(\zeta') d\zeta', \\ \text{при } \zeta > \zeta_2 \quad \Omega_k(\zeta) &= \int_{\zeta - \zeta_2}^{\zeta_2 - \zeta_1} \psi(\zeta - \zeta') \omega_k(\zeta') d\zeta'. \end{aligned} \right\} (7.7)$$

В частности, полагая  $\psi(\zeta) = 1$ ,  $\zeta_2 = -\zeta_1 = b$ , вновь получим решения § 6, относящиеся к случаю равномерного нагружения участка боковой поверхности цилиндра, т. е.  $\Omega_k(\zeta) = j_k(\zeta, b)$ . По (7.7) легко составить также выражения функций  $\Omega_k(\zeta)$  при линейном нагружении участка боковой поверхности, пользуясь которыми и аппроксимируя полигонально закон нагружения, можно записать решение задачи в удобной для вычисления форме.

### § 8. Касательное нагружение по участку боковой поверхности

1°. Метод интеграла Фурье и последующего контурного интегрирования, использованный в § 6 для решения задачи о нормальном нагружении участка боковой поверхности цилиндра, может быть с успехом применён и к случаю касательного нагружения. Остановимся на задаче, рассмотренной в § 5 с помощью тригонометрических рядов. Краевые условия задаются в виде:

$$\text{при } x = 1 \quad \sigma_p = 0, \quad \tau_{px} = \tau(\zeta), \quad (8.1)$$

причём  $\tau(\zeta)$  — нечётная функция  $\zeta$ , определяемая соотношениями (5.5). Её представление с помощью интеграла Фурье имеет вид

$$\tau(\zeta) = \int_0^\infty Q(\beta) \sin \beta \zeta d\beta, \quad (8.2)$$

причём трансформанта Фурье  $Q(\beta)$  определяется по соотношению

$$\begin{aligned} Q(\beta) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tau(\zeta) \sin \beta \zeta d\zeta = \frac{2q}{\pi} \int_{\zeta_1}^{\zeta_0 + b} \sin \beta \zeta d\zeta = \\ &= \frac{2q}{\pi \beta} [\cos \beta \zeta_0 - \cos \beta (\zeta_0 + b)]. \end{aligned} \quad (8.3)$$

По (4.6)—(4.8) можно составить выражения радиального и осевого перемещений, а также объёмного расширения, а по ним выражения напряжений. Приведём здесь формулу для нормального напряжения  $\sigma_z$ :

$$\sigma_z(x, \zeta) = \frac{2q}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[ 3I_0(\beta) - \frac{2(2m-1)}{m\beta} I_1(\beta) - \beta I_1(\beta) \right] I_0(\beta x) + \right. \\ \left. + [\beta I_0(\beta) - I_1(\beta)] x I_1(\beta x) \right\} [\cos \beta \zeta_0 - \cos \beta (\zeta_0 + b)] \frac{\cos \beta \zeta}{\psi(\beta)} d\beta. \quad (8.4)$$

В рассматриваемом случае, когда цилиндр растягивается касательными силами, равномерно распределёнными по двум участкам

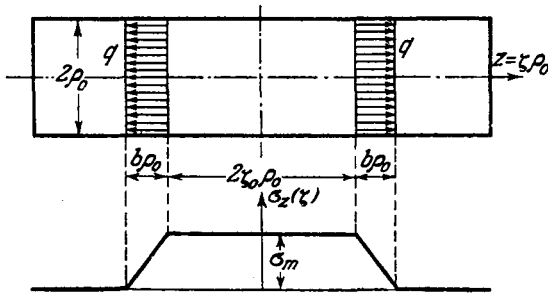


Рис. 29.

длины  $t = b\rho_0$  его боковой поверхности (рис. 29), среднее по площади значение нормального напряжения  $\sigma_z$ , которое мы обозначим через  $\bar{\sigma}_z(\zeta)$ , изменяется по закону, определяемому графиком, показанным на рис. 29 снизу; эта чётная функция от  $\zeta$  при  $\zeta > 0$  имеет значения

$$\bar{\sigma}_z(\zeta) = \begin{cases} \sigma_m & \text{при } 0 \leq \zeta \leq \zeta_0, \\ \sigma_m \left(1 - \frac{\zeta - \zeta_0}{b}\right) & \text{при } \zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_0 + b, \\ 0 & \text{при } \zeta_0 + b \leq \zeta < \infty, \end{cases} \quad (8.5)$$

причём  $\sigma_m$  обозначает расчётное напряжение, т. е. частное от деления растягивающей силы  $P = 2\pi\rho_0^2 b q$  на площадь поперечного сечения цилиндра:

$$\sigma_m = \frac{P}{\pi\rho_0^2} = 2bq. \quad (8.6)$$

Представление  $\bar{\sigma}_z(\zeta)$  с помощью интеграла Фурье поэтому имеет вид

$$\bar{\sigma}_z(\zeta) = \int_0^{\infty} S(\beta) \cos \beta \zeta d\beta, \quad (8.7)$$

причём

$$S(\beta) = \frac{2\sigma_m}{\pi} \left[ \int_0^{\zeta_0} \cos \beta \zeta \, d\zeta + \int_{\zeta_0}^{\zeta_0+b} \left(1 - \frac{\zeta - \zeta_0}{b}\right) \cos \beta \zeta \, d\zeta \right],$$

и простое вычисление даёт

$$S(\beta) = \frac{2\sigma_m}{\pi b \beta^2} [\cos \beta \zeta_0 - \cos \beta (\zeta_0 + b)]. \quad (8.8)$$

Добавляя к выражению (8.4) величину  $\bar{\sigma}_z(\zeta)$  и вычитая из него равную величину, выраженную с помощью интеграла Фурье (8.7), получим теперь:

$$\frac{\sigma_z(x, \zeta)}{\sigma_m} = j_0(\zeta) + \frac{1}{\pi b} \int_0^{\infty} \left\{ \left[ 3I_0(\beta) - \frac{2(2m-1)}{m\beta} I_1(\beta) - \beta I_1(\beta) \right] \frac{I_0(\beta x)}{\psi(\beta)} + \right. \\ \left. + [\beta I_0(\beta) - I_1(\beta)] \frac{x I_1(\beta x)}{\psi(\beta)} - \frac{2}{\beta^2} \right\} [\cos \beta \zeta_0 - \cos \beta (\zeta_0 + b)] \cos \beta \zeta \, d\beta, \quad (8.9)$$

где обозначено:

$$j_0(\zeta) = \frac{\bar{\sigma}_z(\zeta)}{\sigma_m} = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \zeta \leq \zeta_0, \\ 1 - \frac{\zeta - \zeta_0}{b} & \text{при } \zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_0 + b, \\ 0 & \text{при } \zeta_0 + b \leq \zeta < \infty. \end{cases} \quad (8.10)$$

Таким образом, из выражения нормального напряжения  $\bar{\sigma}_z(x, \zeta)$  выделено слагаемое, соответствующее его среднему значению  $\bar{\sigma}_z(\zeta) = \sigma_m j_0(\zeta)$  по площади сечения стержня; слагаемое в формуле (8.9), выражаемое определённым интегралом, представляет добавочную систему  $\sigma_z^*(x, \zeta)$  нормальных напряжений, статически эквивалентную нулю и характеризующую отклонение истинного распределения нормальных напряжений от их среднего значения.

Ограничимся рассмотрением величины  $\sigma_z$  на оси цилиндра и на его поверхности. Имеем:

$$\frac{\sigma_z(1, \zeta)}{\sigma_m} = j_0(\zeta) + \frac{1}{\pi b} \int_0^{\infty} \left\{ \left[ 3I_0^2(\beta) - \frac{2(2m-1)}{m\beta} I_0(\beta) I_1(\beta) - I_1^2(\beta) \right] \frac{1}{\psi(\beta)} - \right. \\ \left. - \frac{2}{\beta^2} \right\} [\cos \beta \zeta_0 - \cos \beta (\zeta_0 + b)] \cos \beta \zeta \, d\beta,$$

$$\frac{\sigma_z(0, \zeta)}{\sigma_m} = j_0(\zeta) + \frac{1}{\pi b} \int_0^{\infty} \left\{ \left[ 3I_0(\beta) - \frac{2(2m-1)}{m\beta} I_1(\beta) - \beta I_1(\beta) \right] \frac{1}{\psi(\beta)} - \right. \\ \left. - \frac{2}{\beta^2} \right\} [\cos \beta \zeta_0 - \cos \beta (\zeta_0 + b)] \cos \beta \zeta \, d\beta.$$

В первом интеграле, используя (4.4), сделаем замену

$$-\frac{I_1^2(\beta)}{\psi(\beta)} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{2(m-1)}{m\beta^2} \frac{I_1^2(\beta)}{\psi(\beta)} - \frac{I_0^2(\beta)}{\psi(\beta)}$$

и после некоторой перегруппировки слагаемых запишем предыдущие выражения в виде

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_m(1, \zeta)}{\sigma_m} = & j_0(\zeta) + \frac{1}{\pi b} \int_0^\infty \left\{ 2 \left[ \frac{I_0^2(\beta)}{\psi(\beta)} - \frac{2m}{(m+1)\beta^2} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{2m-1}{m} \left[ \frac{2I_1(\beta)I_0(\beta)}{\beta\psi(\beta)} - \frac{2m}{(m+1)\beta^2} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{m-1}{2m} \left[ \frac{4I_1^2(\beta)}{\beta^2\psi(\beta)} - \frac{2m}{(m+1)\beta^2} \right] \right\} [\cos \beta\zeta_0 - \cos \beta(\zeta_0 + b)] \cos \beta\zeta \, d\beta, \quad (8.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_m(0, \zeta)}{\sigma_m} = & j_0(\zeta) + \frac{1}{\pi b} \int_0^\infty \left\{ 3 \left[ \frac{I_0(\beta)}{\psi(\beta)} - \frac{2m}{(m+1)\beta^2} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{2m-1}{m} \left[ \frac{2I_1(\beta)}{\beta\psi(\beta)} - \frac{2m}{(m+1)\beta^2} \right] - \left[ \frac{\beta I_1(\beta)}{\psi(\beta)} \right] \right\} \times \\ & \times [\cos \beta\zeta_0 - \cos \beta(\zeta_0 + b)] \cos \beta\zeta \, d\beta. \quad (8.12) \end{aligned}$$

Если вспомнить, что

$$\left[ \frac{\psi(\beta)}{\beta^2} \right]_{\beta \rightarrow 0} = \frac{m+1}{2m}, \quad [I_0(\beta)]_{\beta=0} = 1, \quad \left[ \frac{I_1(\beta)}{\beta} \right]_{\beta \rightarrow 0} = \frac{1}{2},$$

то легко понять, что при такой записи каждая из функций, стоящих в квадратных скобках в формулах (8.11) и (8.12), будет иметь конечное значение при  $\beta = 0$ ; иными словами, точка  $\beta = 0$  не является полюсом этих функций.

2°. Используя соотношение

$$\cos \beta m \cos \beta n = \frac{1}{2} [\cos \beta(m+n) + \cos \beta(m-n)],$$

введём в рассмотрение интегралы вида

$$j_k(\lambda) = \int_0^\infty f_k(\lambda) \cos \beta\lambda \, d\beta \quad (k = 1, 2, \dots, 6), \quad (8.13)$$

причём  $\lambda$  считается положительным и приняты обозначения

$$\left. \begin{aligned} f_1(\beta) &= \frac{4(m+1)}{\pi m} \frac{I_1^2(\beta)}{\beta^2\psi(\beta)} - \frac{2}{\pi\beta^2}, & f_4(\beta) &= \frac{m+1}{\pi m} \frac{I_0(\beta)}{\psi(\beta)} - \frac{2}{\pi\beta^2}, \\ f_2(\beta) &= \frac{2(m+1)}{\pi m} \frac{I_0(\beta)I_1(\beta)}{\beta\psi(\beta)} - \frac{2}{\pi\beta^2}, & f_5(\beta) &= \frac{m+1}{\pi m} \frac{\beta I_1(\beta)}{\psi(\beta)}, \\ f_3(\beta) &= \frac{2(m+1)}{\pi m} \frac{I_1(\beta)}{\beta\psi(\beta)} - \frac{2}{\pi\beta^2}, & f_6(\beta) &= \frac{m+1}{\pi m} \frac{2I_0^2(\beta)}{\psi(\beta)} - \frac{4}{\pi\beta^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

Тогда, положив для краткости (при  $k = 1, 2, \dots, 6$ )

$$j_k^*(\zeta) = j_k(\zeta_0 + \zeta) + j_k(|\zeta_0 - \zeta|) - j_k(\zeta_0 + b + \zeta) - j_k(|\zeta_0 + b - \zeta|), \quad (8.15)$$

приведём выражения (8.11) и (8.12) к виду

$$\frac{\sigma_s(1, \zeta)}{\sigma_m} = j_0(\zeta) + \frac{1}{2b} \frac{m}{m+1} \left[ j_6^*(\zeta) - \frac{2m-1}{m} j_2^*(\zeta) + \frac{m-1}{2m} j_1^*(\zeta) \right], \quad (8.16)$$

$$\frac{\sigma_s(0, \zeta)}{\sigma_m} = j_0(\zeta) + \frac{1}{2b} \frac{m}{m+1} \left[ 3j_4^*(\zeta) - \frac{2m-1}{m} j_8^*(\zeta) - j_6^*(\zeta) \right]. \quad (8.17)$$

Остаётся провести вычисление интегралов (8.13). Поскольку  $f_k(\beta)$  — чётные функции, имеем\*):

$$\int_0^{\infty} f_k(\beta) \cos \beta \lambda \, d\beta = \pi l \sum r_s^{(k)} e^{i\beta_s \lambda}, \quad (8.18)$$

где  $r_s^{(k)}$  — вычеты  $f_k(\beta)$  по полюсам, расположенным в верхней полуплоскости  $\beta$ , являющиеся нечётными функциями  $\beta_s$ ; как и в § 6, полученное выражение преобразуется к виду

$$\pi l \sum r_s^{(k)} e^{i\beta_s \lambda} = -2\pi \sum_{s=1}^{\infty} e^{-\delta_s \lambda} \operatorname{Im} r_s^{(k)} e^{i\gamma_s \lambda},$$

причём суммирование в правой части этого соотношения ведётся по полюсам, расположенным только в первом квадранте ( $\delta_s > 0, \gamma_s > 0$ ). Величины  $r_s^{(k)}$  имеют значения

$$r_s^{(k)} = \lim_{\beta \rightarrow \beta_s} (\beta - \beta_s) f_k(\beta)$$

и по (8.14) равны

$$r_s^{(1)} = \frac{4(m+1)}{\pi m} \frac{I_1^2(\beta_s)}{\beta_s^2 \psi'(\beta_s)}, \quad r_s^{(4)} = \frac{m+1}{\pi m} \frac{J_0(\beta_s)}{\psi'(\beta_s)} \quad (8.19)$$

и т. д. Поэтому, если обозначить:

$$\frac{2\pi m}{m+1} r_s^{(k)} = -(C_s^{(k)} + iD_s^{(k)}),$$

то формулы, дающие значения интегралов (8.18), примут вид

$$j_k(\lambda) = \frac{m+1}{m} \sum_{s=1}^{\infty} e^{-\delta_s \lambda} (C_s^{(k)} \sin \gamma_s \lambda + D_s^{(k)} \cos \gamma_s \lambda), \quad (8.20)$$

\* ) См., например, Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, т. 1, Гостехиздат, 1933, стр. 154.

причём числа  $C_j^{(k)}$  и  $D_j^{(k)}$  определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} C_j^{(1)} + iD_j^{(1)} &= -\frac{8I_1^2(\beta_s)}{\beta_s^3 \psi'(\beta_s)}, & C_j^{(4)} + iD_j^{(4)} &= -\frac{2I_0(\beta_s)}{\psi'(\beta_s)}, \\ C_j^{(2)} + iD_j^{(2)} &= -\frac{4I_0(\beta_s)I_1(\beta_s)}{\beta_s \psi'(\beta_s)}, & C_j^{(5)} + iD_j^{(5)} &= -\frac{2\beta_s I_1(\beta_s)}{\psi'(\beta_s)}, \\ C_j^{(3)} + iD_j^{(3)} &= -\frac{4I_1(\beta_s)}{\beta_s \psi'(\beta_s)}, & C_j^{(6)} + iD_j^{(6)} &= -\frac{4I_0^2(\beta_s)}{\psi'(\beta_s)}. \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

3°. Аналогичным образом можно определить другие величины на оси цилиндра и на его поверхности. Формулы, служащие для их вычисления, имеют вид:

на поверхности цилиндра

$$\frac{\sigma_z(1, \zeta)}{\sigma_m} = j_0(\zeta) + \frac{1}{b} \frac{m}{m+1} \left( \frac{m-1}{m} \tilde{j}_1 + \tilde{j}_2 \right), \quad (8.22)$$

$$\frac{\sigma_\varphi(1, \zeta)}{\sigma_m} = \frac{1}{b} \frac{1}{m+1} [\tilde{j}_2 - (m-1)\tilde{j}_1], \quad (8.23)$$

$$\frac{\vartheta(1, \zeta)}{\vartheta^*} = j_0(\zeta) + \frac{1}{b} \tilde{j}_2, \quad (8.24)$$

$$\frac{u(1, \zeta)}{u^*|_{x=1}} = j_0(\zeta) + \frac{1}{b} (m-1)\tilde{j}_1, \quad (8.25)$$

на его оси

$$\frac{\sigma_z(0, \zeta)}{\sigma_m} = j_0(\zeta) + \frac{1}{b} \frac{m}{m+1} \left( \frac{1}{m} \tilde{j}_3 + \tilde{j}_4 - \tilde{j}_5 \right), \quad (8.26)$$

$$\frac{\sigma_\varphi(0, \zeta)}{\sigma_m} = \frac{\sigma_\rho(0, \zeta)}{\sigma_m} = \frac{1}{b} \frac{m}{2(m+1)} \left[ \frac{1}{m} (\tilde{j}_4 - \tilde{j}_3) + \tilde{j}_5 \right], \quad (8.27)$$

$$\frac{\vartheta(0, \zeta)}{\vartheta^*} = j_0(\zeta) + \frac{1}{b} \tilde{j}_4(\zeta), \quad (8.28)$$

$$\frac{\varepsilon_\varphi(0, \zeta)}{\varepsilon_\varphi^*} = \frac{\varepsilon_\rho(0, \zeta)}{\varepsilon_\rho^*} = j_0(\zeta) + \frac{1}{2b} (\tilde{j}_3 + \tilde{j}_4 - m\tilde{j}_5). \quad (8.29)$$

Здесь звёздочками обозначены величины, соответствующие равномерному растяжению:

$$u^* = -\frac{\rho_0 x}{2G(m+1)} \sigma_m, \quad \vartheta^* = \frac{m-2}{2G(m+1)} \sigma_m, \quad \varepsilon_\rho^* = \varepsilon_\varphi^* = -\frac{\sigma_m}{2G(m+1)}. \quad (8.30)$$

Величины  $\tilde{j}_k$ , где  $k = 1, 2, \dots, 5$ , представляют линейные комбинации ранее введённых величин  $J_k^*$ :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{j}_1 &= \frac{1}{4} J_1^* - \frac{1}{2} J_2^*, & \tilde{j}_2 &= \frac{1}{2} (J_6^* - J_2^*), & \tilde{j}_3 &= \frac{1}{2} J_3^*, \\ \tilde{j}_4 &= J_4^* - \frac{1}{2} J_3^*, & \tilde{j}_5 &= \frac{1}{2} (J_3^* - J_4^* + J_5^*). \end{aligned} \right\} \quad (8.31)$$



В развёрнутой форме эти выражения записываются в виде

$$\begin{aligned} \tilde{j}_k = \frac{m+1}{2m} \sum_{s=1}^{\infty} \{ & \tilde{C}_s^{(k)} [e^{-\delta_s(\zeta_0+\zeta)} \sin \gamma_s(\zeta_0+\zeta) + e^{-\delta_s|\zeta_0-\zeta|} \sin \gamma_s|\zeta_0-\zeta| - \\ & - e^{-\delta_s(\zeta_0+b+\zeta)} \sin \gamma_s(\zeta_0+b+\zeta) - e^{-\delta_s|\zeta_0+b-\zeta|} \sin \gamma_s|\zeta_0+b-\zeta|] + \\ & + \tilde{D}_s^{(k)} [e^{-\delta_s(\zeta_0+\zeta)} \cos \gamma_s(\zeta_0+\zeta) + e^{-\delta_s|\zeta_0-\zeta|} \cos \gamma_s|\zeta_0-\zeta| - \\ & - e^{-\delta_s(\zeta_0+b+\zeta)} \cos \gamma_s(\zeta_0+b+\zeta) - e^{-\delta_s|\zeta_0+b-\zeta|} \cos \gamma_s|\zeta_0+b-\zeta|] \}, \end{aligned} \quad (8.32)$$

причём  $k = 1, 2, \dots, 5$ . Коэффициенты  $\tilde{C}_s^{(k)} + i\tilde{D}_s^{(k)}$  представляют линейные комбинации ранее введённых коэффициентов  $C_s^{(k)} + iD_s^{(k)}$ . Они вычисляются один раз навсегда (при принятом значении числа Пуассона  $m = 4$ ; их величины даны в таблице 13.

Т а б л и ц а 13

$s$	$\tilde{C}_s^{(1)} + i\tilde{D}_s^{(1)}$	$\tilde{C}_s^{(2)} + i\tilde{D}_s^{(2)}$	$\tilde{C}_s^{(3)} + i\tilde{D}_s^{(3)}$	$\tilde{C}_s^{(4)} + i\tilde{D}_s^{(4)}$	$\tilde{C}_s^{(5)} + i\tilde{D}_s^{(5)}$
1	-0,165-0,228 $i$	-0,318+0,751 $i$	0,009-0,373 $i$	0,929-0,161 $i$	0,892+0,935 $i$
2	-0,040-0,015 $i$	-0,033+0,255 $i$	0,029+0,051 $i$	-0,291+0,193 $i$	-0,819-0,679 $i$
3	-0,018-0,009 $i$	-0,048+0,201 $i$	-0,012-0,025 $i$	0,220-0,135 $i$	0,818+0,884 $i$
4	-0,012-0,003 $i$	-0,018+0,158 $i$	0,009+0,013 $i$	-0,155+0,125 $i$	-0,927-0,830 $i$
5	-0,008-0,002 $i$	-0,013+0,127 $i$	-0,006-0,008 $i$	0,124-0,102 $i$	0,914+0,853 $i$
6	-0,006-0,001 $i$	-0,010+0,105 $i$	0,004+0,006 $i$	-0,102+0,086 $i$	-0,912-0,859 $i$

Пользуясь формулами (8.22), а также данными таблиц 13 и 9, составим в качестве примера выражение нормального напряжения на оси цилиндра (при  $m = 4$ ):

до участка нагружения ( $\zeta < \zeta_0$ )

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_z(1, \zeta)}{\sigma_m} = 1 + \frac{1}{2b} \{ & -0,442 [e^{-2,698(\zeta_0+\zeta)} \sin 1,367(\zeta_0+\zeta) + \\ & + e^{-2,698(\zeta_0-\zeta)} \sin 1,367(\zeta_0-\zeta) - e^{-2,698(\zeta_0+b+\zeta)} \sin 1,367(\zeta_0+b+\zeta) - \\ & - e^{-2,698(\zeta_0+b-\zeta)} \sin 1,367(\zeta_0+b-\zeta)] + \\ & + 0,580 [e^{-2,698(\zeta_0+\zeta)} \cos 1,367(\zeta_0+\zeta) + e^{-2,698(\zeta_0-\zeta)} \cos 1,367(\zeta_0-\zeta) - \\ & - e^{-2,698(\zeta_0+b+\zeta)} \cos 1,367(\zeta_0+b+\zeta) - \\ & - e^{-2,698(\zeta_0+b-\zeta)} \cos 1,367(\zeta_0+b-\zeta)] + \dots \}; \end{aligned}$$

на участке нагружения ( $\zeta_0 < \zeta < \zeta_0 + b$ )

$$\frac{\sigma_z(1, \zeta)}{\sigma_m} = \left(1 - \frac{\zeta - \zeta_0}{b}\right) + \frac{1}{2b} \left\{ -0,442 [e^{-2,698(\zeta + \zeta_0)} \sin 1,367(\zeta + \zeta_0) + e^{-2,698(\zeta - \zeta_0)} \sin 1,367(\zeta - \zeta_0) - e^{-2,698(\zeta_0 + b + \zeta)} \sin 1,367(\zeta_0 + b + \zeta) - e^{-2,698(\zeta_0 + b - \zeta)} \sin 1,367(\zeta_0 + b - \zeta)] + 0,580 [e^{-2,698(\zeta + \zeta_0)} \cos 1,367(\zeta + \zeta_0) + e^{-2,698(\zeta - \zeta_0)} \cos 1,367(\zeta - \zeta_0) - e^{-2,698(\zeta_0 + b + \zeta)} \cos 1,367(\zeta_0 + b + \zeta) - e^{-2,698(\zeta_0 + b - \zeta)} \cos 1,367(\zeta_0 + b - \zeta)] + \dots \right\},$$

за участком нагружения ( $\zeta_0 + b < \zeta$ )

$$\frac{\sigma_z(1, \zeta)}{\sigma_m} = \frac{1}{2b} \left\{ -0,442 [e^{-2,698(\zeta + \zeta_0)} \sin 1,367(\zeta + \zeta_0) + e^{-2,698(\zeta - \zeta_0)} \sin 1,367(\zeta - \zeta_0) - e^{-2,698(\zeta + \zeta_0 + b)} \sin 1,367(\zeta + \zeta_0 + b) - e^{-2,698(\zeta - \zeta_0 - b)} \sin 1,367(\zeta - \zeta_0 - b)] + 0,580 [e^{-2,698(\zeta + \zeta_0)} \cos 1,367(\zeta + \zeta_0) + e^{-2,698(\zeta - \zeta_0)} \cos 1,367(\zeta - \zeta_0) - e^{-2,698(\zeta + \zeta_0 + b)} \cos 1,367(\zeta + \zeta_0 + b) - e^{-2,698(\zeta - \zeta_0 - b)} \cos 1,367(\zeta - \zeta_0 - b)] + \dots \right\}.$$

Мы выписали только первый член ряда. Числа  $-0,442$  и  $0,580$  получены на основании (8.22):

$$-0,442 = \frac{m-1}{m} \tilde{C}_1^{(1)} + \tilde{C}_1^{(2)}, \quad 0,580 = \frac{m-1}{m} \tilde{D}_1^{(1)} + \tilde{D}_1^{(2)};$$

аналогично вычисляются остальные коэффициенты ряда.

Первое слагаемое в полученных формулах соответствует элементарному решению, которое мы получили бы, решая задачу методами сопротивления материалов, т. е. предполагая, что нормальные напряжения равномерно распределены по сечению. Следующие слагаемые позволяют определить искажения, вносимые способом приложения нагрузки. Эти искажения убывают при росте величины  $b$ , характеризующей длину участка загрузки, и по мере удаления от этого участка.

4°. Перейдём к рассмотрению предельного случая исчезающе малой длины участка загрузки, т. е. к рассмотрению задачи о растяжении цилиндра касательными силами, направленными противоположно, распределёнными по двум окружностям, находящимся на расстоянии  $2\zeta_0\rho_0$  друг от друга. Интенсивность касательного усилия на единицу длины дуги окружности обозначим через  $S$ . Тогда равнодействующая растягивающая сила  $P = 2\pi\rho_0 S$  и расчётное напряжение должны быть определены по формуле

$$\sigma_m = \frac{P}{\pi\rho_0^2} = \frac{2S}{\rho_0}. \quad (8.33)$$

В выражениях  $\frac{\tilde{f}_k}{b}$  надо совершить предельный переход, полагая  $b \rightarrow 0$ . Обозначим в дальнейшем

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}_k}{b} = \omega_k \quad (k = 1, 2, \dots, 5). \quad (8.34)$$

Заметим ещё, что при  $b \rightarrow 0$  величина  $j_0(\zeta)$  обращается в функцию, равную 1 при  $\zeta < \zeta_0$  и нулю при  $\zeta > \zeta_0$ . Эту функцию обозначим через  $\omega_0(\zeta)$ . Вместо (8.22), (8.23) и т. д. получаем формулы

$$\frac{\sigma_z(1, \zeta)}{\sigma_m} = \omega_0(\zeta) + \frac{m}{m+1} \left( \frac{m-1}{m} \omega_1 + \omega_2 \right), \quad (8.35)$$

$$\frac{\sigma_\varphi(1, \zeta)}{\sigma_m} = \frac{1}{m+1} [\omega_2 - (m-1)\omega_1], \quad (8.36)$$

$$\frac{\sigma_z(0, \zeta)}{\delta_m} = \omega_0(\zeta) + \frac{m}{m+1} \left( \frac{1}{m} \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 \right), \quad (8.37)$$

$$\frac{\sigma_\varphi(0, \zeta)}{\sigma_m} = \frac{\sigma_p(0, \zeta)}{\sigma_m} = \frac{m}{2(m+1)} \left[ \frac{1}{m} (\omega_4 - \omega_3) + \omega_5 \right]. \quad (8.38)$$

Обратившись к выражениям (8.32), найдём:

$$\begin{aligned} \omega_k = -\frac{1}{2} \frac{m+1}{m} \sum_{s=1}^{\infty} \{ & \tilde{C}_s^{(k)} \frac{d}{db} [e^{-\delta_s(\zeta_0+b+\zeta)} \sin \gamma_s(\zeta_0+b+\zeta) + \\ & + e^{-\delta_s|\zeta_0+b-\zeta|} \sin \gamma_s|\zeta_0+b-\zeta|] + \\ & + D_s^{(k)} \frac{d}{db} [e^{-\delta_s(\zeta_0+b+\zeta)} \cos \gamma_s(\zeta_0+b+\zeta) + \\ & + e^{-\delta_s|\zeta_0+b-\zeta|} \cos \gamma_s|\zeta_0+b-\zeta|] \}_{b=0}, \end{aligned}$$

и, проделав вычисление, получим:

$$\begin{aligned} \omega_k = \frac{1}{2} \frac{m+1}{m} \sum_{s=1}^{\infty} \{ & \tilde{C}_s^{(k)} [e^{-\delta_s(\zeta_0+\zeta)} \cos \gamma_s(\zeta_0+\zeta) + \\ & + \{e^{-\delta_s|\zeta_0-\zeta|} \cos \gamma_s(\zeta_0-\zeta)\} \text{sign}(\zeta_0-\zeta)] + \\ & + \tilde{d}_s^{(k)} [e^{-\delta_s(\zeta_0+\zeta)} \sin \gamma_s(\zeta_0+\zeta) + e^{-\delta_s|\zeta_0-\zeta|} \sin \gamma_s(\zeta_0-\zeta)] \}, \quad (8.39) \end{aligned}$$

где

$$\text{sign}(\zeta_0 - \zeta) = \begin{cases} 1 & \text{при } \zeta_0 > \zeta, \\ -1 & \text{при } \zeta_0 < \zeta \end{cases}$$

и где введены обозначения коэффициентов

$$\tilde{c}_s^{(k)} = \tilde{D}_s^{(k)} \delta_s - \tilde{C}_s^{(k)} \gamma_s, \quad \tilde{d}_s^{(k)} = \tilde{D}_s^{(k)} \gamma_s + \tilde{C}_s^{(k)} \delta_s. \quad (8.40)$$

Таблица 14 содержит численные значения этих коэффициентов

Таблица 14

$s$	$\tilde{c}_y^{(1)} + i \tilde{d}_y^{(1)}$	$\tilde{c}_y^{(2)} + i \tilde{d}_y^{(2)}$	$\tilde{c}_y^{(3)} + i \tilde{d}_y^{(3)}$	$\tilde{c}_y^{(4)} + i \tilde{d}_y^{(4)}$	$\tilde{c}_y^{(5)} + i \tilde{d}_y^{(5)}$
1	$-0,390 - 0,760 i$	$2,462 + 0,166 i$	$-1,019 - 0,487 i$	$-1,705 + 2,285 i$	$1,303 + 3,684 i$
2	$-0,031 - 0,264 i$	$1,600 + 0,199 i$	$0,266 + 0,254 i$	$1,624 - 1,456 i$	$-2,840 - 6,027 i$
3	$-0,050 - 0,200 i$	$1,959 - 0,096 i$	$-0,209 - 0,160 i$	$-1,661 + 1,810 i$	$6,754 + 9,229 i$
4	$-0,018 - 0,158 i$	$2,003 + 0,080 i$	$0,146 + 0,139 i$	$1,872 - 1,687 i$	$-8,558 - 13,209 i$
5	$-0,013 - 0,126 i$	$2,002 + 0,064 i$	$-0,118 - 0,110 i$	$-1,840 + 1,722 i$	$11,436 + 16,070 i$
6	$-0,010 - 0,105 i$	$2,032 + 0,054 i$	$0,098 + 0,091 i$	$1,832 - 1,729 i$	$-14,181 - 18,984 i$

Таблица 15

$\zeta_0$	$\frac{\sigma_p(0,0)}{\sigma_m} = \frac{\sigma_\varphi(0,0)}{\sigma_m}$	$\frac{\sigma_z(0,0)}{\sigma_m}$	$\frac{\sigma_z(1,0)}{\sigma_m}$
$\frac{\pi}{18} = 0,1745$	0,201	0,066	3,530
$\frac{\pi}{9} = 0,3491$	0,315	0,204	1,928
$\frac{\pi}{6} = 0,5236$	0,325	0,406	1,388
$\frac{2\pi}{9} = 0,6981$	0,269	0,612	1,152
$\frac{5\pi}{18} = 0,8727$	0,195	0,778	1,042
$\frac{\pi}{3} = 1,0472$	0,127	0,891	0,994
$\frac{7\pi}{18} = 1,2217$	0,077	0,957	0,977
$\frac{4\pi}{9} = 1,3963$	0,043	0,992	0,974
$\frac{\pi}{2} = 1,5708$	0,022	1,007	0,978

С помощью полученных формул произведён расчёт напряжений на поверхности и на оси цилиндра в его среднем сечении ( $\zeta = 0$ ) при различных значениях  $\zeta_0$ . Результаты вычисления приведены в таблице 15; они указывают на весьма сильное отклонение распределения напряжённого состояния от равномерного распределения напряжений при малых значениях  $\zeta_0$ . Однако при расстоянии между окружностями, по которым распределены растягивающие силы, равном  $\frac{1}{2} \pi d$ , где  $d$  — диаметр цилиндра, что соответствует  $\zeta_0 = \frac{1}{2} \pi$ , нормальное напряжение на оси цилиндра больше его среднего значения только на 0,7%; на поверхности цилиндра это отклонение достигает 2,2%. Напряжения  $\sigma_p$  и  $\sigma_\varphi$  на оси цилиндра достигают 2,2% от расчётного напряжения  $\sigma_m$ .

### § 9. Краевые условия на торцах цилиндра

В § 4 этой главы был введён в рассмотрение класс однородных решений задачи о цилиндре. Так были названы решения, оставляющие боковую поверхность цилиндра свободной от нагружения. Однородные решения могут быть использованы для приближённого выполнения краевых условий на торцах цилиндра, так как наложение их не вносит никаких изменений в условия нагружения боковой поверхности цилиндра.

Мы ограничимся рассмотрением случая полубесконечного цилиндра, т. е. будем предполагать, что длина цилиндра столь велика, что искажение, вносимое невыполнением краевых условий на одном из торцов, является пренебрежимо малым в области, прилегающей к другому торцу цилиндра. Допустимость такого предположения для цилиндра, т. е. тела, размер которого в осевом направлении имеет в худшем случае тот же порядок, что диаметр, вполне оправдывается быстротой затухания (см. § 4) однородных решений. Надо ещё отметить, что предлагаемый способ решения можно было бы распространить и на задачи, относящиеся к толстой круглой плите, когда желательно удовлетворить одновременно краевым условиям на обоих торцах; но ход вычисления при этом должен настолько усложниться, что лучше искать решение, строго удовлетворяющее условиям на торцах и приближённо на боковой поверхности. Такое решение может быть построено с помощью класса однородных решений задачи об упругом слое.

Выражения однородных решений были приведены в § 4. Если обозначить [ср. (4.36)] вещественную и мнимую часть определяемых по (4.32) и (4.33) функций  $\sigma_z(x, \beta_s)$  и  $\tau_{\theta z}(x, \beta_s)$  соответственно через

$$\sigma_z^{(s, r)}, \tau_{\theta z}^{(s, r)} \quad \text{и} \quad \sigma_z^{(s, i)}, \tau_{\theta z}^{(s, i)},$$

то согласно (4.29) выражения нормального и касательного напряжения на торце  $\zeta = 0$ , соответствующие  $s$ -й паре вещественных

однородных решений, будут:

$$\left. \begin{aligned} M_s \sigma_z^{(s, r)} - N_s \sigma_z^{(s, i)}, \\ M_s \tau_{\rho z}^{(s, r)} - N_s \tau_{\rho z}^{(s, i)}. \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

Краевые условия на торце  $z = 0$  записываются в виде

$$\zeta = 0, \quad \sigma_z = F(x), \quad \tau_{\rho z} = -\Phi(x), \quad (9.2)$$

где функции  $F(x)$  и  $\Phi(x)$  задаются законом нагружения торца; при этом  $F(x) > 0$ , если внешняя нормальная нагрузка является растягивающей, а  $\Phi(x) > 0$ , если касательные нагрузки направлены в сторону возрастания  $x$ .

Распределение нормальных нагрузок на торце предполагается статически эквивалентным нулю, т. е.

$$\int_0^1 x F(x) dx = 0. \quad (9.3)$$

Такое предположение не ограничивает общности рассмотрения, так как можно наложить элементарное решение, соответствующее растяжению цилиндра равномерно распределённой по торцу нормальной нагрузкой, подобрав интенсивность её так, чтобы условие (9.3) было выполнено.

Таким образом, задача состоит в одновременном представлении двух заданных функций  $F(x)$  и  $\Phi(x)$  рядами вида

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \sum_{s=1}^{\infty} [M_s \sigma_z^{(s, r)} - N_s \sigma_z^{(s, i)}], \\ \Phi(x) &= - \sum_{s=1}^{\infty} [M_s \tau_{\rho z}^{(s, r)} - N_s \tau_{\rho z}^{(s, i)}]. \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

При приближённом решении задачи мы, сохраняя в правых частях (9.4) конечное число  $n$  слагаемых, введём в рассмотрение величину, которую назовём квадратичным отклонением по площади торца:

$$\begin{aligned} \Psi(M_1, M_2, \dots, M_n, N_1, N_2, \dots, N_n) &= \\ &= \int_0^1 \left\{ \left[ F(x) - \sum_{s=1}^n (M_s \sigma_z^{(s, r)} - N_s \sigma_z^{(s, i)}) \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \Phi(x) + \sum_{s=1}^n (M_s \tau_{\rho z}^{(s, r)} - N_s \tau_{\rho z}^{(s, i)}) \right]^2 \right\} x dx. \quad (9.5) \end{aligned}$$

Коэффициенты  $M_s$  и  $N_s$  ( $s = 1, 2, \dots, n$ ) определим из условия минимума квадратичного отклонения; это приводит к системе линей-

ных уравнений

$$\frac{\partial \Psi}{\partial M_k} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial N_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (9.6)$$

Введём обозначения:

$$\left. \begin{aligned} A_{sk} &= \int_0^1 (\sigma_z^{(s, r)} \sigma_z^{(k, r)} + \tau_{zp}^{(s, r)} \tau_{zp}^{(k, r)}) x dx, \\ B_{sk} &= - \int_0^1 (\sigma_z^{(s, \vartheta)} \sigma_z^{(k, r)} + \tau_{zp}^{(s, \vartheta)} \tau_{zp}^{(k, r)}) x dx, \\ C_{sk} &= \int_0^1 (\sigma_z^{(s, \vartheta)} \sigma_z^{(k, \vartheta)} + \tau_{zp}^{(s, \vartheta)} \tau_{zp}^{(k, \vartheta)}) x dx, \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_k &= \int_0^1 [F(x) \sigma_z^{(k, r)} - \Phi(x) \tau_{zp}^{(k, r)}] x dx, \\ \psi_k &= - \int_0^1 [F(x) \sigma_z^{(k, \vartheta)} - \Phi(x) \tau_{zp}^{(k, \vartheta)}] x dx. \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

Тогда уравнения (9.6) получат вид

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^n (A_{sk} M_s + B_{sk} N_s) &= \varphi_k, \\ \sum_{s=1}^n (B_{ks} M_s + C_{sk} N_s) &= \psi_k, \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

причём  $k = 1, 2, \dots, n$ . Коэффициенты  $A_{sk}, \dots, C_{sk}$  могут быть вычислены раз навсегда. Чтобы облегчить это вычисление, введём в рассмотрение интегралы

$$\left. \begin{aligned} J_+(a, b) &= \int_0^1 [\sigma_z(x, a) \sigma_z(x, b) + \tau_{zp}(x, a) \tau_{zp}(x, b)] x dx, \\ J_-(a, b) &= \int_0^1 [\sigma_z(x, a) \sigma_z(x, b) - \tau_{zp}(x, a) \tau_{zp}(x, b)] x dx, \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

где в соответствии с (4.32) и (4.33) обозначено:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z(x, a) &= \frac{1}{I_1(a)} [(2 - a\lambda_a) J_0(ax) + ax J_1(ax)], \\ \tau_{zp}(x, a) &= - \frac{ia}{I_1(a)} [x J_0(ax) - \lambda_a J_1(ax)], \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

причём [ср. (4.15)]

$$\lambda_a = \frac{I_0(a)}{I_1(a)}. \quad (9.12)$$

Вычисление величин  $J_{\pm}(a, b)$  приведено ниже. Коэффициенты системы уравнений (9.9) выражаются через неё по формулам

$$\left. \begin{aligned} A_{sk} &= \frac{1}{4} [J_+(\beta_s, \beta_k) + J_+(\bar{\beta}_s, \bar{\beta}_k) + J_-(\beta_s, \bar{\beta}_k) + J_-(\bar{\beta}_s, \beta_k)], \\ B_{sk} &= \frac{i}{4} [J_+(\beta_s, \beta_k) - J_+(\bar{\beta}_s, \bar{\beta}_k) + J_-(\beta_s, \bar{\beta}_k) - J_-(\bar{\beta}_s, \beta_k)], \\ C_{sk} &= \frac{1}{4} [-J_+(\beta_s, \beta_k) - J_+(\bar{\beta}_s, \bar{\beta}_k) + J_-(\beta_s, \bar{\beta}_k) + J_-(\bar{\beta}_s, \beta_k)]. \end{aligned} \right\} (9.13)$$

Заметим ещё, что

$$\varphi_k - i\psi_k = \int_0^1 [F(x) \sigma_z(x, \beta_k) - \Phi(x) \tau_{zp}(x, \beta_k)] x dx. \quad (9.14)$$

Вычисление интегралов  $J_{\pm}(a, b)$ . Развёрнутое выражение этих величин имеет вид

$$\begin{aligned} J_{\pm}(a, b) &= [4 - 2(a\lambda_a + b\lambda_b) + ab\lambda_a\lambda_b] i_{00}^{(1)}(a, b) \mp \\ &\mp ab\lambda_a\lambda_b i_{11}^{(1)}(a, b) + (2b - \lambda_a ab \pm \lambda_b ab) i_{01}(a, b) + (2a - \lambda_b ab \pm \\ &\pm \lambda_a ab) i_{10}(a, b) \mp ab i_{00}^{(3)}(a, b) + ab i_{11}^{(3)}(a, b), \end{aligned} \quad (9.15)$$

причём обозначено:

$$\left. \begin{aligned} I_1(a) I_1(b) i_{00}^{(1)}(a, b) &= \int_0^1 I_0(ax) I_0(bx) x dx, \\ I_1(a) I_1(b) i_{11}^{(1)}(a, b) &= \int_0^1 I_1(ax) I_1(bx) x dx, \\ I_1(a) I_1(b) i_{01}(a, b) &= \int_0^1 I_0(ax) I_1(bx) x^2 dx, \\ I_1(a) I_1(b) i_{10}(a, b) &= \int_0^1 I_1(ax) I_0(bx) x^2 dx, \\ I_1(a) I_1(b) i_{00}^{(3)}(a, b) &= \int_0^1 I_0(ax) I_0(bx) x^3 dx, \\ I_1(a) I_1(b) i_{11}^{(3)}(a, b) &= \int_0^1 I_1(ax) I_1(bx) x^3 dx. \end{aligned} \right\} (9.16)$$



Первые два интеграла вычисляются с помощью табличных неопределённых интегралов

$$\left. \begin{aligned} \int I_0(ax)I_0(bx) x dx &= \frac{1}{a^2 - b^2} [axI_1(ax)I_0(bx) - bxI_0(ax)I_1(bx)], \\ \int I_1(ax)I_1(bx) x dx &= \frac{1}{a^2 - b^2} [axI_0(ax)I_1(bx) - bxI_1(ax)I_0(bx)]. \end{aligned} \right\} (9.17)$$

Неопределённые интегралы, соответствующие величинам  $i_{01}(a, b)$  и  $i_{10}(a, b)$ , находятся из соотношений

$$\left. \begin{aligned} b \int I_0(ax)I_1(bx) x^2 dx + a \int I_1(ax)I_0(bx) x^2 dx &= \\ &= x^2 I_0(ax)I_0(bx) - 2 \int I_0(ax)I_0(bx) x dx, \\ a \int I_0(ax)I_1(bx) x^2 dx + b \int I_1(ax)I_0(bx) x^2 dx &= x^2 I_1(ax)I_1(bx), \end{aligned} \right\} (9.18)$$

проверяемых непосредственным дифференцированием. Наконец, последние два интеграла (9.16) вычисляются из соотношений

$$\left. \begin{aligned} a \int x^3 I_0(ax)I_0(bx) dx + b \int x^3 I_1(ax)I_1(bx) dx &= \\ &= x^3 I_1(ax)I_0(bx) - 2 \int x^2 I_1(ax)I_0(bx) dx, \\ b \int x^3 I_0(ax)I_0(bx) dx + a \int x^3 I_1(ax)I_1(bx) dx &= \\ &= x^3 I_0(ax)I_1(bx) - 2 \int x^2 I_0(ax)I_1(bx) dx, \end{aligned} \right\} (9.19)$$

правые части которых содержат интегралы, определяемые по (9.18).

Таким образом, находим:

$$\left. \begin{aligned} i_{00}^{(1)}(a, b) &= \frac{a\lambda_b - b\lambda_a}{a^2 - b^2}, \\ i_{11}^{(1)}(a, b) &= \frac{a\lambda_a - b\lambda_b}{a^2 - b^2}, \\ i_{01}(a, b) &= \frac{1}{a^2 - b^2} [a - b\lambda_a\lambda_b + 2bi_{00}^{(1)}(a, b)], \\ i_{10}(a, b) &= \frac{1}{a^2 - b^2} [a\lambda_a\lambda_b - b - 2ai_{00}^{(1)}(a, b)], \\ i_{00}^{(3)}(a, b) &= \frac{1}{a^2 - b^2} [a\lambda_b - b\lambda_a - 2ai_{10}(a, b) + 2bi_{01}(a, b)], \\ i_{11}^{(3)}(a, b) &= \frac{1}{a^2 - b^2} [a\lambda_a - b\lambda_b - 2ai_{01}(a, b) + 2bi_{10}(a, b)]. \end{aligned} \right\} (9.20)$$

После подстановки в (9.15) найдём:

$$\left. \begin{aligned} J_+(a, b) &= \frac{2ab}{(a+b)(a-b)^2} \left[ a(\lambda_a^2 - 1) + b(\lambda_b^2 - 1) - \frac{2(a\lambda_b - b\lambda_a)}{a-b} \right], \\ J_-(a, b) &= \frac{2ab}{(a+b)^2(a-b)} \left[ a(\lambda_a^2 - 1) - b(\lambda_b^2 - 1) + \frac{2(a\lambda_b - b\lambda_a)}{a+b} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9.21)$$

Эти выражения при  $a = b$  приобретают неопределённый вид. Учитывая, что

$$\frac{d\lambda_a}{da} = \frac{d}{da} \frac{I_0(a)}{I_1(a)} = 1 - \lambda_a^2 + \frac{\lambda_a}{a}, \quad (9.22)$$

раскрываем неопределённость. Получим:

$$\left. \begin{aligned} J_+(a, a) &= \frac{1}{6} a [14\lambda_a(1 - \lambda_a^2) + \\ &+ 2a(1 - \lambda_a^2)^2 - 4a\lambda_a^2(1 - \lambda_a^2) + \frac{12\lambda_a^2}{a} - \frac{2}{a} - 4\lambda_a^3], \\ J_-(a, a) &= 2\lambda_a^2 - 1 + a\lambda_a(1 - \lambda_a^2). \end{aligned} \right\} \quad (9.23)$$

Полагаем теперь  $a = \beta_s$  и  $b = \beta_k$ . Тогда, используя соотношения (4.16), найдём (при  $m = 4$ ) по (9.21):

$$\left. \begin{aligned} J_+(\beta_s, \beta_k) &= \frac{4}{(\beta_s - \beta_k)^2} \left[ \frac{3}{4} - \frac{\beta_s \beta_k (\beta_s \lambda_k - \beta_k \lambda_s)}{\beta_s^2 - \beta_k^2} \right], \\ J_-(\beta_s, \beta_k) &= \frac{4}{(\beta_s + \beta_k)^2} \left[ -\frac{3}{4} + \frac{\beta_s \beta_k (\beta_s \lambda_k - \beta_k \lambda_s)}{\beta_s^2 - \beta_k^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9.24)$$

При  $a = b = \beta_s$  по (9.23) получим:

$$\left. \begin{aligned} J_+(\beta_s, \beta_s) &= -\frac{2}{3} \beta_s \lambda_s + 2,667 - 4,5 \frac{\lambda_s}{\beta_s} + \frac{5,25}{\beta_s^2}, \\ J_-(\beta_s, \beta_s) &= 1 - \frac{3}{2} \frac{\beta_s}{\lambda_s} + \frac{3}{\beta_s^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.25)$$

Таким образом, найдены необходимые формулы, служащие для определения коэффициентов системы уравнений (9.9). Вычисление было проведено для  $n = 2$ ; получается система уравнений

$$\left. \begin{aligned} 1,077 M_1 - 0,2571 M_2 + 0,401 N_1 - 0,05085 N_2 &= \varphi_1, \\ -0,2571 M_1 + 3,051 M_2 - 0,525 N_1 + 1,662 N_2 &= \varphi_2, \\ 0,401 M_1 - 0,525 M_2 + 0,2915 N_1 - 0,2678 N_2 &= \psi_1, \\ -0,05085 M_1 + 1,662 M_2 - 0,2678 N_1 + 1,650 N_2 &= \psi_2. \end{aligned} \right\} \quad (9.26)$$

Решение этой системы будет:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= 2,391 \varphi_1 - 0,4256 \varphi_2 - 4,222 \psi_1 - 0,1829 \psi_2, \\ M_2 &= -0,4256 \varphi_1 + 0,9730 \varphi_2 + 1,675 \psi_1 - 0,7215 \psi_2, \\ N_1 &= -4,222 \varphi_1 + 1,675 \varphi_2 + 12,44 \psi_1 + 0,2018 \psi_2, \\ N_2 &= -0,1831 \varphi_1 - 0,7215 \varphi_2 + 0,2018 \psi_1 + 1,360 \psi_2. \end{aligned} \right\} (9.27)$$

Определив по этим формулам в каждой частной задаче, т. е. по известным значениям величин  $\varphi_s$  и  $\psi_s$ , коэффициенты  $M_s$  и  $N_s$

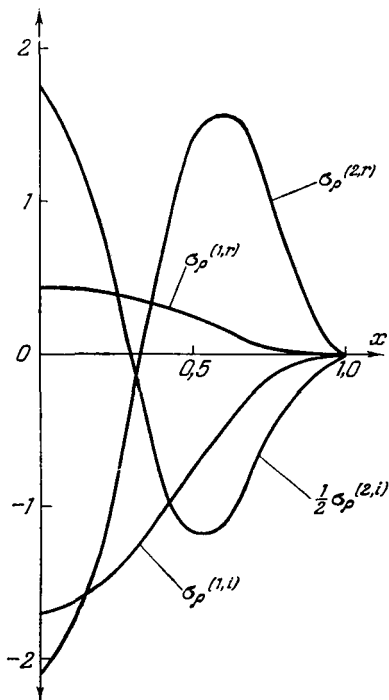


Рис. 30.

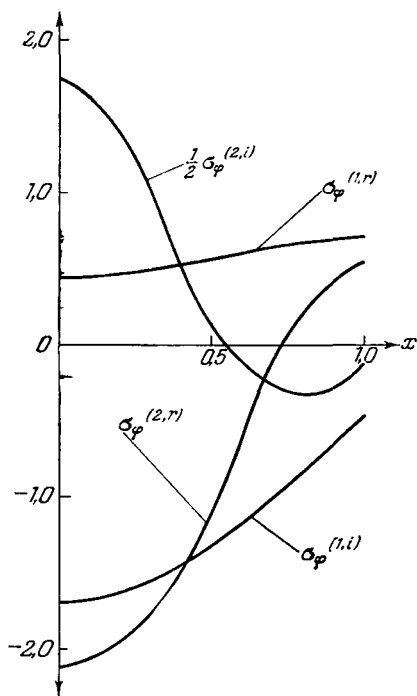


Рис. 31.

найдем для  $s = 1$  и  $2$  вещественные однородные решения по их выражениям вида (4.37). Для облегчения вычисления в таблицах 17 приведены для нескольких значений  $x$  значения функций

$$\sigma_p(x, \beta_s) = \sigma_p^{(s,r)} + i\sigma_p^{(s,i)}, \quad \sigma_\varphi(x, \beta_s) = \sigma_\varphi^{(s,r)} + i\sigma_\varphi^{(s,i)} \text{ и т. д.}$$

В таблице 16 даны значения функций  $I_0(\beta_s x)$  и  $I_1(\beta_s x)$  (при  $s = 1, 2$ ), использованные при составлении таблиц 17. На рис. 30—35 изображены графики функций, приведенных в таблице 17.

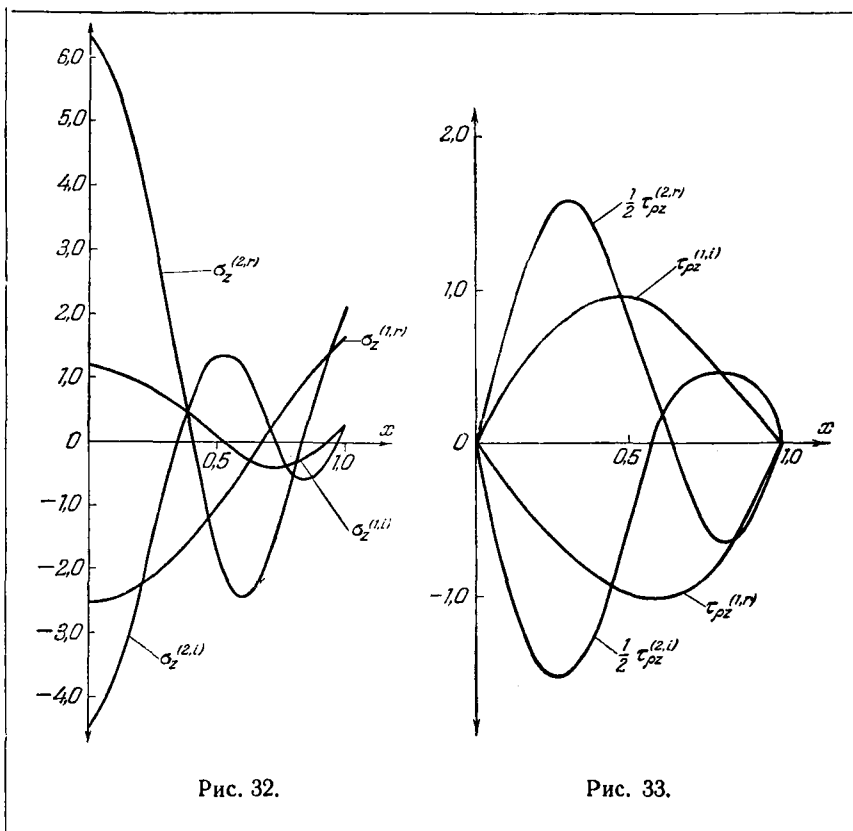


Таблица 16

$x$	$I_0(\beta_1 x)$	$I_1(\beta_1 x)$	$I_0(\beta_2 x)$	$I_1(\beta_2 x)$
0	1	0	1	0
0,2	$0,9452 + 0,07180 i$	$0,1230 + 0,2675 i$	$0,6776 + 0,1584 i$	$0,0794 + 0,5193 i$
0,3	$0,8752 + 0,1551 i$	$0,1600 + 0,3960 i$	$0,331 + 0,280 i$	$0,0040 + 0,627 i$
0,6	$0,4760 + 0,5078 i$	$0,0785 + 0,7162 i$	$-0,589 + 0,0727 i$	$-0,439 + 0,0599 i$
0,8	$0,04951 + 0,7017 i$	$-0,1704 + 0,8090 i$	$-0,3618 - 0,4973 i$	$-0,2326 - 0,5937 i$
1,0	$-0,4695 + 0,7269 i$	$-0,5453 + 0,7233 i$	$0,4853 - 0,5576 i$	$0,4937 - 0,5794 i$

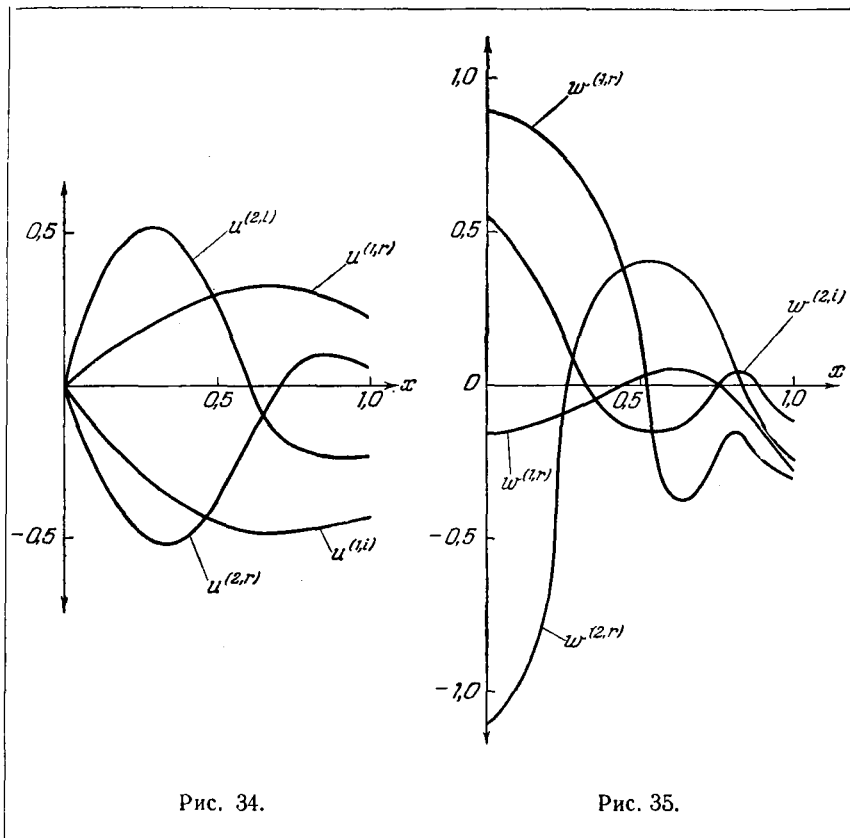


Таблица 17а

$x$	$\sigma_p^{(1,r)} + \varepsilon\sigma_p^{(1,i)}$	$\sigma_p^{(2,r)} + \varepsilon\sigma_p^{(2,i)}$	$\sigma_\varphi^{(1,r)} + \varepsilon\sigma_\varphi^{(1,i)}$	$\sigma_\varphi^{(2,r)} + \varepsilon\sigma_\varphi^{(2,i)}$
0	0,4302—1,699 $\varepsilon$	-2,119+3,490 $\varepsilon$	0,4302—1,699 $\varepsilon$	-2,119+3,490 $\varepsilon$
0,2	0,403—1,517 $\varepsilon$	-1,247+1,658 $\varepsilon$	0,4571—1,638 $\varepsilon$	-1,959+2,784 $\varepsilon$
0,3	0,368—1,309 $\varepsilon$	-0,34—0,02 $\varepsilon$	0,485—1,562 $\varepsilon$	-1,75+2,024 $\varepsilon$
0,6	0,172—0,485 $\varepsilon$	1,58—2,233 $\varepsilon$	0,6053—1,185 $\varepsilon$	-0,602—0,244 $\varepsilon$
0,8	0,014—0,081 $\varepsilon$	0,721—0,746 $\varepsilon$	0,676—0,843 $\varepsilon$	0,2103—0,6687 $\varepsilon$
1,0	0	0	0,7004—0,4769 $\varepsilon$	0,5456—0,2271 $\varepsilon$

Т а б л и ц а 176

$x$	$\sigma_z^{(1,r)} + i\sigma_z^{(1,i)}$	$\sigma_z^{(2,r)} + i\sigma_z^{(2,i)}$	$\tau_{\rho z}^{(1,r)} + i\tau_{\rho z}^{(1,i)}$	$\tau_{\rho z}^{(2,r)} + i\tau_{\rho z}^{(2,i)}$
0	$-2,522 + 1,195 i$	$6,369 - 4,479 i$	0	0
0,2	$-2,273 + 0,952 i$	$4,252 - 2,410 i$	$-0,5007 + 0,6171 i$	$2,669 - 2,880 i$
0,3	$-1,966 + 0,685 i$	$2,092 - 0,581 i$	$-0,7186 + 0,8357 i$	$3,17 - 3,04 i$
0,6	$-0,450 - 0,221 i$	$-2,42 + 1,17 i$	$-1,030 + 0,8790 i$	$0,54 + 0,28 i$
0,8	$0,776 - 0,351 i$	$-0,456 - 0,551 i$	$-0,7628 + 0,4486 i$	$-1,325 + 0,889 i$
1,0	$1,681 + 0,303 i$	$2,151 + 0,335 i$	0	0

Т а б л и ц а 17в

$x$	$u^{(1,r)} + iu^{(1,i)}$	$u^{(2,r)} + iu^{(2,i)}$	$w^{(1,r)} + iw^{(1,i)}$	$w^{(2,r)} + iw^{(2,i)}$
0	0	0	$0,8906 - 0,1552 i$	$-1,118 + 0,5443 i$
0,2	$0,1478 - 0,2394 i$	$-0,4335 + 0,4759 i$	$0,7953 - 0,1139 i$	$-0,7377 + 0,2753 i$
0,3	$0,2124 - 0,3376 i$	$-0,524 + 0,522 i$	$0,6819 - 0,0707 i$	$0,1756 + 0,0306 i$
0,6	$0,3240 - 0,4836 i$	$-0,190 + 0,011 i$	$-0,358 + 0,051 i$	$0,388 - 0,137 i$
0,8	$0,3059 - 0,4706 i$	$0,0927 - 0,2208 i$	$-0,1568 - 0,0441 i$	$0,0794 + 0,0462 i$
1,0	$0,2241 - 0,4422 i$	$0,0600 - 0,2322 i$	$-0,3050 - 0,2799 i$	$-0,2448 - 0,1173 i$

## ПРИМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ К ГЛАВЕ 7

Формы общего решения задачи о равновесии тел вращения рассматривались в работах Вангерина (A. Wangerin) «Über das Problem elastischer Rotationskörper» (Archiv für Math. und Phys. 55, 1873, стр. 113), Иеруша (Jerisch) «Allgemeine Integration der Elastizitätsgleichungen für die Schwingungen und das Gleichgewicht isotroper Rotationskörper» (Journ. für die reine und angew. Mathematik, 104 1889, стр. 117) и В. А. Стеклова «О равновесии упругих тел вращения» (Сообщения Харьковского математического общества, 1892).

Рассмотрению задачи о равновесии упругого круглого цилиндра в общем случае нагружения посвящены работы Похгаммера (L. Pochhammer) «Beitrag zur Theorie der Biegung des Kreiscylinders» (Journ. für die reine und angew. Math. 81, 1876, стр. 33), Кри (Chree) «The Equations of an Isotropic Elastic Solid in Polar and Cylindrical Coordinates, their Solution and Application» (Cambridge Phil. Transactions 14, 1889, стр. 250) и В. А. Стеклова «О равновесии упругих цилиндрических тел» (Сообщения Харьковского математиче-

ского общества, 1891). В этих работах рассматривался общий случай загрузки, и целью исследования было обобщение и уточнение для случая кругового цилиндра теории изгиба стержней Сен-Венана и Клебша.

Случай симметричного нагружения, которому посвящена глава 7, рассмотрен в работе М. А. Шиффа «Sur l'équilibre d'un cylindre élastique» (Journ. de Math. pures et appliquées, Ser. 3, t. 9, 1883, стр. 407). В этой статье было получено трансцендентное уравнение (4.9), записанное в форме бесконечного ряда, но не было сделано попытки решения его и не были получены рассмотренные в главе 7 комплексные однородные решения. К соответствующему уравнению для случая полого цилиндра пришёл В. А. Стеклов в первой из указанных выше работ; он также не обратил внимания на то, что корни этого уравнения и соответствующие им решения комплексны.

В работе Файлона (L. Filon) «On the Elastic Equilibrium of Circular Cylinders under certain practical Systems of Loads» (Phil. Transactions of the Royal Soc. London, Ser. A, 198, 1902, стр. 147—233) дано весьма обстоятельное, снабжённое большим количеством числовых результатов и графиков рассмотрение с помощью тригонометрических рядов нескольких задач о равновесии симметрично нагружённого цилиндра по его боковой поверхности (см. § 5). Изложение некоторых результатов Файлона дано в курсе С. П. Тимошенко (стр. 386—389).

В изложении § 4 воспроизведены с несущественными дополнениями результаты, полученные в диссертационной работе В. К. Прокопова (Ленинградский политехнический институт, 1948), частично опубликованные им в статье «Осесимметричная задача теории упругости для изотропного цилиндра» (Труды Ленинградского политехнического института, № 2, 1950). Из этой работы, в частности, взяты числовые результаты, собранные в таблице 9. Получение их потребовало большого труда, так как таблицы бесселевых функций  $J_0(z)$  и  $J_1(z)$  от комплексного аргумента, помещённые во втором томе «Теории бесселевых функций» Ватсона\*, для значений  $|z|$  до 10 и  $\arg z$  через  $5^\circ$  не могли обеспечить необходимой точности вычисления корней  $\xi$ . В. К. Прокопов провёл вычисление, основываясь непосредственно на выражении  $\psi(\xi)$  в форме ряда (4.11), а при больших  $|\xi|$  — на асимптотическом представлении  $\psi(\xi)$ . Число Пуассона  $m$  было принято равным 4.

Задаче, рассмотренной в §§ 6—7, посвящена работа автора «Напряжённое состояние в упругом цилиндре, нагружённом по боковой поверхности» (Инженерный сборник 17, 1953, стр. 43). Она рассматривалась также на основе малоубедительных и приближённых представлений в книге А. Феппля и Л. Феппля «Сила и деформация», т. II, стр. 176 (русский перевод, ОНТИ, 1936). Решение в тригонометрических рядах, содержащее ряд числовых таблиц и графиков, опубликовал М. W. Barton («The Circular Cylinder with a Band of uniform Pressure on finite Length of the Surface», Jour. of Applied Mechanics 8, № 3, 1941, стр. 97—104).

Расчёты, относящиеся к случаю касательного нагружения (§ 8), взяты из работы П. З. Лифшица «Напряжённое состояние в круглом цилиндре, нагружённом по боковой поверхности касательными усилиями» (Публикуется в Известиях ОНТ Акад. наук СССР.) О применении метода интеграла Фурье, использованного в §§ 6—8, к задаче о равновесии кругового цилиндра, нагружённого по боковой поверхности, имеется краткое указание на стр. 488—491 книги Э. Кокера и Л. Файлона «Оптический метод исследования напряжений» (ОНТИ, 1936). Числа первых двух столбцов таблицы 15 взяты из этого труда. Остальные данные таблицы 15, а также таблиц 13 и 14 приведены в указанной работе П. З. Лифшица.

\*) Впервые менее подробные таблицы (для интервала по аргументу независимой переменной в  $10^\circ$ ) были составлены А. Н. Динником (Таблицы бесселевых функций нулевого и первого порядка от комплексного аргумента, Журнал Русского физико-химического общества, 1923.).

Получением числовых данных, приведённых в § 9, автор обязан В. И. Розенблюму. Задача, связанная с выполнением краевых условий на торцах цилиндра (§ 9), иным методом была рассмотрена в указанной выше работе В. К. Прокопова, показавшего, что использование однородных решений позволяет полностью удовлетворить условиям на торцах для нормальных напряжений  $\sigma_z$ ; условия для касательных напряжений  $\tau_{rz}$ , однако, остаются невыполненными.

Задачи, относящиеся к полому цилиндру, представляют большой практический интерес. Однако получение эффективных решений, которые можно было бы довести до числовых результатов при практически приемлемой затрате труда, сопряжено с большими затруднениями. Некоторые численные результаты, с которыми сравнивают данные приближённых расчётов, опубликованы Г. С. Шапиро в заметке «О сжатии бесконечного полого цилиндра давлением, приложенным на участке боковой поверхности» (Прикл. матем. и мех. 7, № 5, 1943, стр. 379). Решение задач о равновесии полого цилиндра в форме рядов опубликовано Б. Г. Галеркиным в статье «Упругое равновесие полого кругового цилиндра и части цилиндра» (Собрание сочинений, т. 1, 1952, стр. 342; впервые опубликовано в 1933 г.). Весьма обстоятельное рассмотрение задачи об осесимметрично нагружённом по боковой поверхности полом цилиндре приведено В. К. Прокоповым в работе «Равновесие упругого толстостенного осесимметричного цилиндра» (Прикл. матем. и мех. 12, № 2, 1949, стр. 135—144). В этой работе получено трансцендентное уравнение, определяющее однородные решения в случае полого цилиндра, и составлены сами эти решения. Они использованы для получения в случае, когда отношение толщины стенки цилиндра к его радиусу мало, уточнённой теории цилиндрической оболочки.

Существенное практическое значение задачи об учёте влияния торцев на напряжённое состояние в полом круговом цилиндре и трудность, с которой сопряжено строгое рассмотрение этой задачи, вызвали необходимость разработки приближённого метода её решения. Наиболее обстоятельно этот вопрос разработан В. Л. Бидерманом в главе XV «Расчёт симметрично нагружённых цилиндрических деталей» книги «Основы современных методов расчёта на прочность в машиностроении» (Машгиз, 1950).

Задачам о кручении тела вращения, которые не рассматриваются в настоящей книге, посвящена монография К. В. Соляник-Красса «Кручение валов переменного сечения» (Гостехиздат, 1948), в которой приведены также подробные литературные указания.



## ГЛАВА 8

### ОБЩАЯ ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ УПРУГОЙ СФЕРЫ

#### § 1. Постановка задачи. Некоторые свойства объёмных сферических функций

В главе 6 мы рассмотрели прямой метод представления перемещений в форме рядов по симметричным пространственным гармоническим функциям вида  $R^n P_n(\mu)$  задачу о равновесии симметрично нагруженной сферы. Это рассмотрение позволило довести до конца вычисление в некоторых представляющих интерес для приложений случаях, но не исчерпало всего богатства содержания классической задачи о сфере, имеющей в теории упругости значительную историю и замечательной по остроумию применённых для решения её методов.

Поэтому в настоящей главе будет подвергнута исследованию общая задача о равновесии сферы, причём для упрощения дела мы будем идти от частных случаев к более общим: вначале мы займёмся сплошной сферой и решим относящиеся к ней краевые задачи о разыскании равновесия при задании на поверхности сферы, во-первых, перемещений и, во-вторых, поверхностных усилий. Найдя эти решения, мы простым приёмом перейдём от них к случаю сферической полости в упругой среде, когда на поверхности полости заданы или перемещения, или усилия. Гораздо более трудными становятся эти краевые задачи в случае полой сферы; однако при некотором усложнении вычислений и небольшом видоизменении хода рассуждения оказывается возможным перенести и на эти задачи те же приёмы, которые были применены при рассмотрении упомянутых выше более простых случаев.

В дальнейшем будут использованы некоторые свойства пространственных гармонических функций; поэтому будет уместно о них вкратце напомнить.

Пространственная гармоническая функция  $\varphi(x, y, z)$  внутри любой сферы (при  $R < R_0$ ) может быть представлена рядом по однородным гармоническим полиномам  $\varphi_n(x, y, z)$ :

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x, y, z). \quad (1.1)$$

Однородный гармонический полином  $\varphi_n(x, y, z)$  степени  $n$  может быть представлен также в виде произведения

$$\varphi_n(x, y, z) = R^n Y_n(\vartheta, \varphi), \quad (1.2)$$

где  $Y_n(\vartheta, \varphi)$  — поверхностная сферическая функция  $n$ -го порядка, представляемая в форме

$$Y_n(\vartheta, \varphi) = \sum_{m=0}^n P_n^{(m)}(\mu) (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) \quad (1.3)$$

$$(\mu = \cos \vartheta)$$

и, следовательно, содержащая  $(2n+1)$  произвольных постоянных  $a_{n0}, \dots, a_{nn}, b_{n1}, \dots, b_{nn}$ .

Функция  $\Phi(x, y, z)$ , гармоническая вне сферы (при  $R > R_0$ ) и обращающаяся в нуль на бесконечности, также представима в форме ряда по однородным гармоническим функциям  $\varphi_{-n-1}(x, y, z)$ :

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{-n-1}(x, y, z).$$

Однородная гармоническая функция  $\varphi_{-n-1}(x, y, z)$  порядка  $[-(n+1)]$  может быть подобно (1.2) записана в форме

$$\varphi_{-n-1}(x, y, z) = \frac{1}{R^{n+1}} Y_n(\vartheta, \varphi). \quad (1.4)$$

Таким образом, имея гармонический полином  $\varphi(x, y, z)$   $n$ -й степени, можем с его помощью составить однородную гармоническую функцию

$$\varphi_{-n-1}(x, y, z) = \frac{1}{R^{2n+1}} \varphi_n(x, y, z) \quad (1.5)$$

и обратно

$$\varphi_n(x, y, z) = R^{2n+1} \varphi_{-n-1}(x, y, z),$$

т. е. однородный гармонический полином  $\varphi_n(x, y, z)$  степени  $n$  можно образовать из однородной гармонической функции  $(-n-1)$ -го порядка.

Производная гармонической функции представляет функцию также гармоническую. Поэтому функция

$$\frac{\partial \varphi_n(x, y, z)}{\partial x}$$

будет однородным гармоническим полиномом  $(n-1)$ -й степени; значит, она представима в виде

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = R^{n-1} Y_{n-1}(\vartheta, \varphi), \quad (1.6)$$

где  $Y_{n-1}(\vartheta, \varphi)$  — некоторая поверхностная сферическая функция  $(n-1)$ -го порядка, связь которой с  $Y_n(\vartheta, \varphi)$  в формуле (1.2) нас сейчас не интересует. Точно так же

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{-n-1} = \frac{1}{R^{n+2}} Y_{n+1}(\vartheta, \varphi). \quad (1.7)$$

Гармоническим однородным вектором  $n$ -й степени будем называть вектор  $B_n$ , проекции которого на оси декартовой системы координат  $x, y, z$  суть однородные гармонические полиномы. По сказанному выше примером такого вектора может служить  $\text{grad } \varphi_{n+1}(x, y, z)$ , где  $\varphi_{n+1}(x, y, z)$  — однородный гармонический полином  $(n+1)$ -й степени. Наоборот, по гармоническому однородному вектору  $B_{n+1}$   $(n+1)$ -й степени можно образовать однородный гармонический полином  $n$ -й степени  $\text{div } B_{n+1}$  и однородный гармонический вектор  $n$ -й степени  $\text{rot } B_{n+1}$ .

Мы будем рассматривать также однородные гармонические (вне сферы  $R = R_0$ , т. е. при  $R > R_0$ ) векторы  $(-n-1)$ -го порядка  $B_{-n-1}$ . Таков, например,  $\text{grad } \varphi_{-n}$ , тогда как  $\text{div } B_{-n-1}$  представляет однородную гармоническую функцию  $(-n-2)$ -го порядка, а  $\text{rot } B_{-n-1}$  — такой же вектор.

Однородный гармонический вектор  $n$ -й степени, очевидно, представим в виде

$$B_n = R^n Y_n(\vartheta, \varphi), \quad (1.8)$$

где  $Y_n(\vartheta, \varphi)$  — обозначение поверхностного сферического вектора  $n$ -го порядка. Точно так же

$$B_{-n-1} = \frac{1}{R^{n+1}} Y_n(\vartheta, \varphi). \quad (1.9)$$

Имея вектор  $B_n$ , образуем с его помощью вектор

$$\frac{1}{R^{2n+1}} B_n.$$

Тогда функция

$$\text{div } \frac{B_n}{R^{2n+1}}$$

будет однородной гармонической порядка  $(-n-2)$  и, значит, представима в форме

$$\text{div } \frac{B_n}{R^{2n+1}} = \frac{1}{R^{n+2}} Y_{n+1}(\vartheta, \varphi).$$

Поэтому

$$R^{2n+3} \text{div } \frac{B_n}{R^{2n+1}}$$

будет однородной гармонической функцией степени  $(n+1)$ , а

$$\text{grad } R^{2n+3} \text{div } \frac{B_n}{R^{2n+1}} \quad (1.10)$$

— однородным гармоническим вектором  $n$ -й степени.

Эту операцию сопоставления однородному гармоническому вектору  $B_n$ , имеющему степень  $n$ , такого же вектора (1.10) будем обозначать

$$K(B_n) = \text{grad } R^{2n+3} \text{div} \frac{B_n}{R^{2n+1}}. \quad (1.11)$$

Другая (более простая) операция сопоставления однородному гармоническому вектору  $n$ -й степени  $B_n$  такого же вектора, которая ниже используется, определяется так:

$$T(B_n) = R^{2n+1} \text{grad} \frac{1}{R^{2n-1}} \text{div} B_n. \quad (1.12)$$

Действительно,  $\text{div} B_n$  — гармонический однородный полином  $(n-1)$ -й степени, при делении которого на  $R^{2n-1}$  получаем однородную гармоническую функцию  $(-n)$ -го порядка; градиент последней даст однородный гармонический вектор  $(-n-1)$ -го порядка, а его произведение на  $R^{2n+1}$  — однородный гармонический вектор  $n$ -й степени.

Аналогичным образом, исходя из однородного гармонического вектора  $(-n-1)$ -го порядка, можно образовать векторы

$$K(B_{-n-1}) = \text{grad} \frac{1}{R^{2n-1}} \text{div} R^{2n+1} B_{-n-1}, \quad (1.13)$$

$$T(B_{-n-1}) = \frac{1}{R^{2n+1}} \text{grad} R^{2n+3} \text{div} B_{-n-1}. \quad (1.14)$$

Формально эти операции получаются из (1.11) и (1.12) при замене  $n$  на  $(-n-1)$ .

Ниже неоднократно используется ещё соотношение, справедливое для любой однородной функции с показателем однородности  $n$ :

$$x \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = n \varphi_n. \quad (1.15)$$

Оно может быть записано также в виде

$$R \cdot \text{grad} \varphi_n = n \varphi_n, \quad (1.16)$$

где точка обозначает скалярное умножение, а  $R$  — вектор-радиус точки  $(x, y, z)$ . Соотношение (1.16) остаётся справедливым при любом, а не только целом положительном  $n$ ; например,

$$R \cdot \text{grad} \varphi_{-n-1} = -(n+1) \varphi_{-n-1}. \quad (1.17)$$

Напомним ещё операцию дифференцирования вектора  $A$  по направлению другого вектора,  $C$  обозначаемую через  $(C \cdot \text{grad}) A$ . Проекция этого вектора, например на ось  $x$ , даёт формулой

$$C_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + C_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + C_z \frac{\partial A_x}{\partial z}.$$

Отсюда следует, что для произвольного вектора

$$(\mathbf{C} \cdot \text{grad}) \mathbf{R} = \mathbf{C} \quad (1.18)$$

и что по (1.16)

$$(\mathbf{R} \cdot \text{grad}) \mathbf{B}_n = n \mathbf{B}_n, \quad (1.19)$$

где  $\mathbf{B}_n$  — однородный вектор с показателем однородности  $n$  (а не обязательно гармонической степени  $n$ ).

Из определений (1.11) и (1.13) векторов  $\mathbf{K}(\mathbf{B}_n)$  и  $\mathbf{K}(\mathbf{B}_{-n-1})$  как градиентных и гармонических следует, что

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{K}(\mathbf{B}_n) &= 0, & \text{div } \mathbf{K}(\mathbf{B}_n) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{K}(\mathbf{B}_{-n-1}) &= 0, & \text{div } \mathbf{K}(\mathbf{B}_{-n-1}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Вычислим теперь эти операции от вектора  $\mathbf{T}(\mathbf{B}_n)$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{T}(\mathbf{B}_n) &= \text{div } R^{2n+1} \text{grad } \frac{\text{div } \mathbf{B}_n}{R^{2n-1}} = \\ &= \text{grad } R^{2n+1} \cdot \text{grad } \frac{\text{div } \mathbf{B}_n}{R^{2n-1}} + R^{2n+1} \text{div grad } \frac{\text{div } \mathbf{B}_n}{R^{2n-1}}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Мы воспользовались формулой для вычисления дивергенции произведения скаляра  $\varphi$  на вектор  $\mathbf{A}$ :

$$\text{div } \varphi \mathbf{A} = \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{A} + \varphi \text{div } \mathbf{A}. \quad (1.23)$$

Второе слагаемое в (1.22) обращается в нуль, так как под знаком оператора Лапласа  $\Delta = \text{div grad}$  стоит гармоническая функция. Далее мы имеем:

$$\text{grad } R^{2n+1} = (2n+1) R^{2n} \text{grad } R = (2n+1) R^{2n-1} \mathbf{R},$$

так как

$$\text{grad } R = \frac{1}{R} \mathbf{R}.$$

Возвращаясь к (1.22), получаем по (1.16):

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{T}(\mathbf{B}_n) &= (2n+1) R^{2n-1} \mathbf{R} \cdot \text{grad } \frac{\text{div } \mathbf{B}_n}{R^{2n-1}} = \\ &= -(2n+1) n \text{div } \mathbf{B}_n, \end{aligned} \quad (1.24)$$

так как под знаком градиента стоит однородная гармоническая функция порядка  $(-n)$ .

Заменяя  $n$  на  $(-n-1)$ , получим:

$$\text{div } \mathbf{T}(\mathbf{B}_{-n-1}) = -(n+1)(2n+1) \text{div } \mathbf{B}_{-n-1}. \quad (1.25)$$

Применив теперь формулу

$$\text{rot } \varphi \mathbf{A} = \text{grad } \varphi \times \mathbf{A} + \varphi \text{rot } \mathbf{A} \quad (1.26)$$

к вектору  $\mathbf{T}(\mathbf{B}_n)$ , получим:

$$\text{rot } \mathbf{T}(\mathbf{B}_n) = \text{rot} \left( R^{2n+1} \text{grad } \frac{\text{div } \mathbf{B}_n}{R^{2n-1}} \right) = \text{grad } R^{2n+1} \times \text{grad } \frac{\text{div } \mathbf{B}_n}{R^{2n-1}},$$

так как второе слагаемое в нашем случае будет нулём (ротор от градиента). Итак,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} T(\mathbf{B}_n) &= (2n+1) R^{2n-1} \mathbf{R} \times \operatorname{grad} \frac{\operatorname{div} \mathbf{B}_n}{R^{2n-1}} = \\ &= (2n+1) R^{2n-1} \mathbf{R} \times \left[ \frac{1}{R^{2n-1}} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_n - \frac{2n-1}{R^{2n-3}} \mathbf{R} \operatorname{div} \mathbf{B}_n \right] = \\ &= (2n+1) \mathbf{R} \times \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_n, \end{aligned}$$

так как второе слагаемое по умножении векторно на  $\mathbf{R}$  даёт нуль. Итак,

$$\operatorname{rot} T(\mathbf{B}_n) = (2n+1) \mathbf{R} \times \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_n \quad (1.27)$$

и при замене  $n$  на  $(-n-1)$

$$\operatorname{rot} T(\mathbf{B}_{-n-1}) = -(2n+1) \mathbf{R} \times \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_{-n-1}. \quad (1.28)$$

Представим далее операции  $\mathbf{K}(\mathbf{B}_n)$  и  $T(\mathbf{B}_n)$  в раскрытом виде. Имеем по (1.11):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{B}_n) &= \operatorname{grad} R^{2n+3} \operatorname{div} \frac{\mathbf{B}_n}{R^{2n+1}} = \\ &= \operatorname{grad} R^{2n+3} \left[ -(2n+1) \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_n}{R^{2n+3}} + \frac{1}{R^{2n+1}} \operatorname{div} \mathbf{B}_n \right] = \\ &= \operatorname{grad} [-(2n+1) \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_n + R^2 \operatorname{div} \mathbf{B}_n] \end{aligned}$$

и окончательно

$$\mathbf{K}(\mathbf{B}_n) = -(2n+1) \operatorname{grad} \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_n + 2\mathbf{R} \operatorname{div} \mathbf{B}_n + R^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_n. \quad (1.29)$$

Аналогично найдём:

$$T(\mathbf{B}_n) = -(2n-1) \mathbf{R} \operatorname{div} \mathbf{B}_n + R^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_n. \quad (1.30)$$

Заменяв  $n$  на  $(-n-1)$ , получим также:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{B}_{-n-1}) &= (2n+1) \operatorname{grad} \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_{-n-1} + 2\mathbf{R} \operatorname{div} \mathbf{B}_{-n-1} + \\ &\quad + R^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_{-n-1} \end{aligned} \quad (1.31)$$

и

$$T(\mathbf{B}_{-n-1}) = (2n+3) \mathbf{R} \operatorname{div} \mathbf{B}_{-n-1} + R^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_{-n-1}. \quad (1.32)$$

Исключив из (1.29) и (1.30) величину  $\mathbf{R} \operatorname{div} \mathbf{B}_n$ , получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_n &= \\ &= -\frac{1}{2n+1} \left[ \mathbf{K}(\mathbf{B}_n) + \frac{2}{2n-1} T(\mathbf{B}_n) \right] + \frac{1}{2n-1} R^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_n. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Имеем также аналогичную формулу

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_{-n-1} &= \\ &= \frac{1}{2n+1} \left[ \mathbf{K}(\mathbf{B}_{-n-1}) - \frac{2}{2n+3} T(\mathbf{B}_{-n-1}) \right] - \frac{1}{2n+3} R^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_{-n-1}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Значение соотношений (1.33) и (1.34) состоит в том, что с их помощью из выражения негармонического вектора  $\text{grad } R \cdot \mathbf{B}_n$  выделены гармонические слагаемые (в квадратных скобках), представляющие однородные векторы степени  $n$  (соответственно  $(-n-1)$ -го порядка) и негармоническая часть  $R^2 \text{grad div } \mathbf{B}_n$  (или  $R^2 \text{grad div } \mathbf{B}_{-n-1}$ ).

## § 2. Краевые задачи для сплошной сферы. Случай заданных на поверхности сферы перемещений

Гармонический вектор  $\mathbf{B}$  и гармонический скаляр  $B^{(0)}$  в решении П. Ф. Папковича представим в форме рядов вида

$$\mathbf{B} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{B}_n, \quad B^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(0)}. \quad (2.1)$$

Здесь  $\mathbf{B}_n$  — однородный гармонический вектор степени  $n$ , а  $B_n^{(0)}$  — однородный гармонический скаляр степени  $(n-1)$ .

Выражение вектора перемещения будет иметь поэтому форму

$$\mathbf{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{u}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{4(m-1)}{m} \mathbf{B}_n - \text{grad } R \cdot \mathbf{B}_n - \text{grad } B_n^{(0)} \right], \quad (2.2)$$

где через  $\mathbf{u}_n$  обозначен для краткости вектор, стоящий в квадратных скобках:

$$\mathbf{u}_n = \frac{4(m-1)}{m} \mathbf{B}_n - \text{grad } R \cdot \mathbf{B}_n - \text{grad } B_n^{(0)}. \quad (2.3)$$

Воспользовавшись формулой (1.33), можно также написать:

$$\mathbf{u}_n = \left[ \frac{4(m-1)}{m} \mathbf{B}_n + \frac{1}{2n+1} \mathbf{K}(\mathbf{B}_n) + \frac{2}{4n^2-1} \mathbf{T}(\mathbf{B}_n) \right] - \left\{ \frac{1}{2n-1} R^2 \text{grad div } \mathbf{B}_n + \text{grad } B_n^{(0)} \right\}. \quad (2.4)$$

В квадратных скобках стоит однородный гармонический вектор  $n$ -й степени, который обозначим через  $\mathbf{U}_n$ :

$$\mathbf{U}_n = \frac{4(m-1)}{m} \mathbf{B}_n + \frac{1}{2n+1} \mathbf{K}(\mathbf{B}_n) + \frac{2}{4n^2-1} \mathbf{T}(\mathbf{B}_n), \quad (2.5)$$

и обозначим через  $\mathbf{U}$  сумму ряда

$$\mathbf{U} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{U}_n, \quad (2.6)$$

представляющую гармонический вектор.

Распорядимся теперь скаляром  $B_n^{(0)}$  так, чтобы на поверхности сферы  $R = R_0$  слагаемое в фигурных скобках в формуле (2.4)

обратилось в нуль. Заметим для этого, что  $\text{grad div } \mathbf{B}_n$  как гармонический вектор  $(n-2)$ -й степени при  $R = R_0$  будет иметь значение

$$R_0^{n-2} (R^{-n+2} \text{grad div } \mathbf{B}_n), \quad (2.7)$$

причём множитель в скобках по (1.2) представляет поверхностный сферический вектор типа  $Y_{n-2}^{(\theta, \varphi)}$  и, конечно, от  $R$  не зависит. Точно так же на поверхности сферы

$$(\text{grad } B_{n-1}^{(0)})_{R=R_0} = R_0^{n-2} (R^{-n+2} \text{grad } B_{n-1}^{(0)}). \quad (2.8)$$

Поэтому

$$\left\{ \frac{1}{2n-1} R^2 \text{grad div } \mathbf{B}_n + \text{grad } B_{n-1}^{(0)} \right\}_{R=R_0} = \\ = \frac{1}{2n-1} R_0^n (R^{-n+2} \text{grad div } \mathbf{B}_n) + R_0^{n-2} (R^{-n+2} \text{grad } B_{n-1}^{(0)}) = 0$$

и, значит,

$$-\frac{R_0^2}{2n-1} R^{-n+2} \text{grad div } \mathbf{B}_n = R^{-n+2} \text{grad } B_{n-1}^{(0)}. \quad (2.9)$$

Из этого равенства двух поверхностных сферических векторов  $(n-2)$ -го порядка следует равенство соответствующих пространственных гармонических векторов  $(n-2)$ -й степени  $-\frac{R_0^2}{2n-1} \text{grad div } \mathbf{B}_n$  и  $\text{grad } B_{n-1}^{(0)}$ , иными словами, множители  $R^{-n+2}$  в соотношении (2.9) могут быть откинута.

Итак,

$$\text{grad } B_{n-1}^{(0)} = -\frac{R_0^2}{2n-1} \text{grad div } \mathbf{B}_n \quad (2.10)$$

и, значит,

$$B_{n-1}^{(0)} = -\frac{R_0^2}{2n-1} \text{div } \mathbf{B}_n. \quad (2.11)$$

Выражение (2.4) теперь принимает вид

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{U}_n + \frac{1}{2n-1} (R_0^2 - R^2) \text{grad div } \mathbf{B}_n. \quad (2.12)$$

На поверхности сферы  $R = R_0$ , по предположению, заданы перемещения, т. е. значение вектора  $(\mathbf{u})_{R=R_0}$ . Представляя это задание в форме ряда по поверхностным сферическим векторам, будем иметь:

$$(\mathbf{u}_n)_{R=R_0} = \mathbf{Y}_n^{(\theta, \varphi)}. \quad (2.13)$$

Но по (2.12)

$$(\mathbf{u}_n)_{R=R_0} = (\mathbf{U}_n)_{R=R_0} = \mathbf{Y}_n^{(\theta, \varphi)} \quad (2.14)$$

и гармонический вектор  $\mathbf{U}_n$  степени  $n$  при  $R \leq R_0$  определится соотношением

$$\mathbf{U}_n = \left(\frac{R}{R_0}\right)^n \mathbf{Y}_n^{(\theta, \varphi)}, \quad (2.15)$$



т. е. будет известен. По (2.6) известен также гармонический вектор  $U$ . Выражение вектора перемещения  $u$ , принимающего при  $R = R_0$  те же значения, что и вектор  $U$ , найдём по (2.2) и (2.12):

$$u = U + (R_0^2 - R^2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\text{grad div } B_n}{2n-1} \quad (2.16)$$

( $\text{grad div } B_n$  при  $n = 0$  и  $n = 1$  обращается в нуль и соответствующие слагаемые отпадают), и остаётся, пользуясь (2.5) выразить  $\text{div } B_n$  через известный гармонический вектор  $U_n$ . Для этого воспользуемся приведёнными выше соотношениями (1.20) и (1.24)

$$\text{div } U_n = \left[ \frac{4(m-1)}{m} - \frac{2n(2n+1)}{4n^2-1} \right] \text{div } B_n$$

и, значит,

$$\text{div } B_n = \frac{(2n-1)m}{2[2(m-1)(2n-1) - mn]} \text{div } U_n. \quad (2.17)$$

В окончательной форме решение задачи будет:

$$u = U + \frac{1}{2}(R_0^2 - R^2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{m}{(3m-4)n - 2m + 2} \text{grad div } U_n. \quad (2.18)$$

Здесь  $U$  — гармонический внутри сферы  $R < R_0$  вектор, принимающий на поверхности сферы  $R = R_0$  те же заданные значения, что и искомый вектор перемещения  $u$ .

### § 3. Случай заданных на поверхности сферы усилий

Вычисление несколько усложняется, так как прежде всего необходимо дать выражение вектора напряжения  $P_r$  на любой поверхности  $R = \text{const}$ , концентрической с поверхностью, ограничивающей сферу. Воспользуемся формулой (9.10) главы 1:

$$P_r = 2G \left[ \frac{r \text{ div } u}{m-2} + (r \cdot \text{grad}) u + \frac{1}{2} r \times \text{rot } u \right], \quad (3.1)$$

в которой единичный вектор нормали  $r$  определяется по очевидному соотношению

$$r = \frac{1}{R} R. \quad (3.2)$$

Получаем:

$$\frac{R P_r}{2G} = \frac{1}{m-2} R \text{ div } u + (R \cdot \text{grad}) u + \frac{1}{2} R \times \text{rot } u. \quad (3.3)$$

Из решения в форме П. Ф. Папковича

$$u = \frac{4(m-1)}{m} B - \text{grad}(R \cdot B + B^{(0)})$$

получаем:

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{4(m-1)}{m} \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{2(m-2)}{m} \operatorname{div} \mathbf{B}. \quad (3.4)$$

Представляя искомый вектор перемещения в форме ряда (2.2), каждое слагаемое которого записываем в виде (2.4), имеем далее в соответствии с правилом (1.19) вычисления операции  $(\mathbf{R} \cdot \operatorname{grad})$  над вектором с показателем однородности  $n$ :

$$(\mathbf{R} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u}_n = \left[ \frac{4(m-1)}{m} n \mathbf{B}_n + \frac{n}{2n+1} \mathbf{K}(\mathbf{B}_n) + \frac{2n}{4n^2-1} \mathbf{T}(\mathbf{B}_n) \right] - \left\{ \frac{n}{2n-1} R^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_n + (n-2) \operatorname{grad} \mathbf{B}_n^{(0)} \right\}. \quad (3.5)$$

Полагая ещё

$$R \mathbf{P}_r = \sum_{n=0}^{\infty} R \mathbf{P}_r^{(n)},$$

получим теперь:

$$\frac{R}{2G} \mathbf{P}_r^{(n)} = \frac{2}{m} R \operatorname{div} \mathbf{B}_n + \frac{2(m-1)}{m} R \times \operatorname{rot} \mathbf{B}_n + (\mathbf{R} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u}_n, \quad (3.6)$$

причём последнее слагаемое должно быть заменено по (3.5).

Слагаемые, содержащие  $R \operatorname{div} \mathbf{B}_n$  и  $R \times \operatorname{rot} \mathbf{B}_n$ , представляют негармонические векторы. Их можно выразить через негармонический вектор  $R^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_n$  и гармонические части. По (1.30) сразу имеем:

$$R \operatorname{div} \mathbf{B}_n = -\frac{1}{2n-1} \mathbf{T}(\mathbf{B}_n) + \frac{R^2}{2n-1} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_n. \quad (3.7)$$

Далее по известной формуле, дающей выражение градиента скалярного произведения, имеем:

$$\operatorname{grad} \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_n = (\mathbf{R} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{B}_n + (\mathbf{B}_n \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{R} + \mathbf{R} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}_n + \mathbf{B}_n \times \operatorname{rot} \mathbf{R}$$

и, значит, по (1.18) и (1.19)

$$\mathbf{R} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}_n = \operatorname{grad} \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_n - (n+1) \mathbf{B}_n. \quad (3.8)$$

Вектор  $\operatorname{grad} \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_n$  заменяем по (1.29) и (3.7), получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}_n = & -\frac{1}{2n+1} \mathbf{K}(\mathbf{B}_n) - \frac{2}{4n^2-1} \mathbf{T}(\mathbf{B}_n) + \\ & + \frac{R^2}{2n-1} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_n - (n+1) \mathbf{B}_n. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Теперь, после подстановки в (3.6), находим:

$$\begin{aligned} \frac{R}{2G} \mathbf{P}_r^{(n)} = & \left\{ \frac{2(m-1)}{m} (n-1) \mathbf{B}_n + \frac{n-2+\frac{2}{m}}{2n+1} \mathbf{K}(\mathbf{B}_n) + \right. \\ & \left. + \frac{2}{4n^2-1} \left[ n \left( 1 - \frac{2}{m} \right) - 2 + \frac{1}{m} \right] \mathbf{T}(\mathbf{B}_n) \right\} - \\ & - (n-2) \left[ \frac{R^2}{2n-1} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_n + \operatorname{grad} \mathbf{B}_n^{(0)} \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

По заданию нам известно значение  $R_0(\mathbf{P}_r)_{R=R_0}$  вектора  $R\mathbf{P}_r$  на поверхности сферы. Представим его в форме ряда по поверхностным сферическим функциям

$$R_0(\mathbf{P}_r)_{R=R_0} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi). \quad (3.11)$$

Введём поэтому в рассмотрение гармонический вектор  $\mathbf{\Pi}_r$ , принимающий на поверхности  $R = R_0$  сферы те же значения, что и вектор  $R\mathbf{P}_r$ :

$$\mathbf{\Pi}_r = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{R_0}\right)^n Y_n(\theta, \varphi). \quad (3.12)$$

Как в § 2, подчиним выбор гармонического скаляра  $B^{(0)}$  в решении П. Ф. Папковича требованию

$$B_{n-1}^{(0)} = -\frac{R^2}{2n-1} \operatorname{div} \mathbf{B}_n. \quad (3.13)$$

Тогда соотношению (3.10) и краевым условиям мы удовлетворим приняв, что

$$\frac{R}{2G} \mathbf{P}_r = \frac{1}{2G} \mathbf{\Pi}_r + (R_0^2 - R^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2}{2n-1} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_n, \quad (3.14)$$

и определив однородный гармонический вектор  $\mathbf{B}_n$   $n$ -й степени соотношением

$$\begin{aligned} \frac{2(m-1)}{m} (n-1) \mathbf{B}_n + \frac{n-2 + \frac{2}{m}}{2n+1} \mathbf{K}(\mathbf{B}_n) + \\ + \frac{2}{4n^2-1} \left[ n \left(1 - \frac{2}{m}\right) - 2 + \frac{1}{m} \right] \mathbf{T}(\mathbf{B}_n) = \frac{1}{2G} \mathbf{\Pi}_r^{(n)}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

в котором  $\mathbf{\Pi}_r^{(n)}$  — также однородный гармонический вектор той же степени  $n$ , определяемый по краевым условиям; по (3.12)

$$\mathbf{\Pi}_r^{(n)} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^n Y_n(\theta, \varphi).$$

Значение  $\operatorname{div} \mathbf{B}_n$  надо найти по (3.15); вспомнив (1.20) и (1.24), получим:

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_n = \frac{m(2n-1)}{4G[mn^2 - (m-2)n + m - 1]} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}_r^{(n)}. \quad (3.16)$$

Подстановка в (3.14) даёт теперь выражение вектора напряжения на любой сферической поверхности  $R = \text{const}$ :

$$\mathbf{P}_r = \frac{1}{R} \mathbf{\Pi}_r + \frac{R_0^2 - R^2}{2R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(n-2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}_r^{(n)}}{mn^2 - (m-2)n + m - 1}. \quad (3.17)$$

Система внешних сил, приложенных к шару, должна быть уравновешенной, т. е. должны обращаться в нуль её главный вектор

$$\mathbf{V} = \int_{\Sigma_0} \int (\mathbf{P}_r)_{R=R_0} R_0^2 d\sigma^* = R_0 \int_{\Sigma_0} \int \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Y}_n(\vartheta, \varphi) d\sigma^* = 0 \quad (3.18)$$

и её главный момент

$$\mathbf{M} = R_0^3 \int_{\Sigma_0} \int \mathbf{r} \times (\mathbf{P}_r)_{R=R_0} d\sigma^* = R_0^2 \int_{\Sigma_0} \int \mathbf{r} \times \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Y}_n d\sigma^* = 0. \quad (3.19)$$

Через  $d\sigma^*$  обозначен телесный угол, под которым виден элемент поверхности сферы из её центра,  $\Sigma_0$  — поверхность сферы единичного радиуса. Интеграл по поверхности сферы от произведения двух поверхностных сферических функций  $Z_m$  и  $Z_n$  различных порядков равен нулю:

$$\int_{\Sigma_0} \int Z_m Z_n d\sigma^* = 0. \quad (3.20)$$

Поэтому в интеграле (3.18), который может быть записан в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Sigma_0} \int \mathbf{Y}_n Z_0 d\sigma^*,$$

исчезнут все слагаемые, кроме постоянного  $\mathbf{Y}_0$ . Итак,

$$\mathbf{V} = R_0 \mathbf{Y}_0 4\pi = 0, \quad \mathbf{Y}_0 = 0, \quad (3.21)$$

т. е. в разложении (3.11) и, значит, в решении (3.17), отсутствует член, соответствующий  $n = 0$ .

Единичный вектор  $\mathbf{r}$  является поверхностным сферическим вектором первого порядка; поэтому согласно (3.20) в интеграле (3.19) выпадут все слагаемые, для которых  $n \neq 1$  и, значит,

$$\mathbf{M} = R_0 \int_{\Sigma} \int \mathbf{r} \times \mathbf{Y}_1 d\sigma^* = 0. \quad (3.22)$$

Формулу Гаусса — Остроградского, дающую преобразование поверхностного интеграла в объёмный, можно записать в виде

$$\int_s \int \mathbf{n} \times \mathbf{A} d\sigma = \int_V \int \int \text{rot } \mathbf{A} d\tau.$$

В нашем случае  $\mathbf{n} = \mathbf{r}$  и вектор, обращающийся в  $\mathbf{Y}_1$  на поверхности единичной сферы, равен  $R\mathbf{Y}_1 = R_0 \Pi_r^{(1)}$ . Получаем:

$$\mathbf{M} = R_0^3 \int_{V_0} \int \int \text{rot } \Pi_r^{(1)} d\tau = 0,$$

где  $d\tau$  — элемент объёма единичной сферы ( $V_0$ ). Но  $\Pi_r^{(1)}$  представляет вектор, проекции которого на оси декартовой системы являются линейными функциями координат; поэтому  $\text{rot } \Pi_r^{(1)}$  — постоянный вектор и предыдущее соотношение приобретает вид

$$M = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \text{rot } \Pi_r^{(1)} = 0. \quad (3.23)$$

Отсюда следует, что

$$\Pi_r^{(1)} = R P_r^{(1)} = \text{grad } H, \quad (3.24)$$

где  $H$  — некоторая квадратичная форма от  $x, y, z$ . Итак, во-первых, в разложении внешней нагрузки в ряд по поверхностным сферическим функциям должен отсутствовать постоянный член, во-вторых, член первого порядка не может быть взят произвольно, а должен удовлетворять условию (3.24).

Возвращаясь к решению (3.17), перепишем его в виде

$$P_r = \frac{1}{R} \Pi_r + \frac{R_0^2 - R^2}{2R} \sum_{n=1}^{\infty} m \frac{(n-2) \text{grad div } \Pi_r^{(n)}}{mn^2 - (m-2)n + m - 1} \quad (3.25)$$

и найдём значение  $P_r$  при  $R = 0$ , т. е. в центре сферы. Для этого заметим, что  $\Pi_r^{(0)} = 0$  и первое слагаемое в (3.25) даёт

$$\left( \frac{\Pi_r^{(1)}}{R} \right)_{R=0} = \frac{1}{R_0} Y_1 = P_r^{(1)}.$$

Далее имеем:

$$\text{grad div } \Pi_r^{(1)} = 0,$$

так как  $\Pi_r^{(1)}$  линейно зависит от координат; слагаемое, соответствующее  $n = 2$ , исчезает вследствие наличия множителя  $(n - 2)$  под знаком суммы в разложении (3.25); третий член этой суммы будет пропорционален  $R$ , так как вектор  $\Pi_r^{(3)}$  имеет множителем  $R^3$ ; члены же, для которых  $n > 3$ , по разделении на  $R$ , стоящее в знаменателе перед знаком суммы, будут содержать множителем  $R$  в положительной степени и обратятся в нуль при  $R = 0$ . Получаем:

$$(P_r)_{R=0} = P_r^{(1)} + \frac{mR_0^2}{2(7m+5)} \left( \frac{\text{grad div } \Pi_r^{(3)}}{R} \right)_{R=0} \quad (3.26)$$

Таким образом, напряжение в центре сферы остаётся конечным; для определения  $P_r$  в центре сферы достаточно знать первый и третий члены разложения (3.11) внешней нагрузки в ряд по поверхностным сферическим функциям.

Выше, определив  $\text{div } B$ , мы получили возможность найти значение вектора напряжения  $P_r$  на любой сферической поверхности  $R = \text{const}$ .

Чтобы завершить решение задачи, следует найти вектор перемещения  $\mathbf{u}$ , для чего необходимо знать не только  $\operatorname{div} \mathbf{B}$ , но и сам вектор  $\mathbf{B}$ .

Ход вычисления такой: вычисляем  $\operatorname{rot} \mathbf{B}_n$  по (3.15), используя (1.20) и (1.27). Окажется [см. (1.27)], что  $\operatorname{rot} \mathbf{B}_n$  выразится через  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_n$  и, следовательно, определится по (3.16) через данные задачи, т. е. через вектор  $\mathbf{\Pi}_r^{(n)}$ . Затем, возвращаясь к выражению (3.15) вектора  $\mathbf{B}_n$ , подставим в него вместо  $\mathbf{K}(\mathbf{B}_n)$  и  $\mathbf{T}(\mathbf{B}_n)$  их развёрнутые выражения (1.29) и (1.30), причём выразим  $\operatorname{grad} \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_n$  по (3.8) через  $\mathbf{R} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}_n$  и  $\mathbf{B}_n$ . Заменяя  $\operatorname{rot} \mathbf{B}_n$  его значением, найденным ранее, получим в результате выражение вектора  $\mathbf{B}_n$  через  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_n$  и, значит, по (3.16) через  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}_r^{(n)}$ . Всё это вычисление, кроме некоторой длины, не представляет затруднений. Найдём:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_n = \frac{m}{4G(m-1)(n-1)} \left[ \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}_r^{(n)} - \frac{m(n-2) - 2n + 1}{mn^2 - (m-2)n + m - 1} \mathbf{R} \times \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}_r^{(n)} \right], \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_n = & \frac{m}{4G(3m-4-mn)n} \left[ 2\mathbf{\Pi}_r^{(n)} - \frac{2m-2-nm}{(m-1)(n-1)} \mathbf{R} \times \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}_r^{(n)} + \right. \\ & \left. + \frac{(2n-1)(nm-4m+4) + m(n-2)(2m-2-mn)}{(m-1)[mn^2 - (m-2)n + m - 1]} \mathbf{R} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}_r^{(n)} + \right. \\ & \left. + \frac{(n-m+1)(n-2)m + (2n-1)(2m-2-nm)}{(m-1)(n-1)[mn^2 - (m-2)n + m - 1]} R^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}_r^{(n)} \right]. \quad (3.28) \end{aligned}$$

Присутствие в знаменателе некоторых слагаемых множителя  $(n-1)$  не приводит к бесконечным значениям  $\operatorname{rot} \mathbf{B}_1$  или  $\mathbf{B}_1$ , так как эти слагаемые, содержащие или  $\operatorname{rot} \mathbf{\Pi}_r^{(1)}$ , обращающийся в нуль по (3.23), или  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}_r^{(1)}$  равный нулю следует отбросить. Заметим также, что и наличие множителя  $n$  в знаменателе выражения  $\mathbf{B}_n$  не является опасным, так как  $\mathbf{B}_0$  — постоянный член, соответствующий  $\mathbf{\Pi}_r^{(0)}$ , отсутствует по (3.21) в разложении гармонического вектора  $\mathbf{\Pi}_r$  в ряд по однородным пространственным сферическим векторам  $\mathbf{\Pi}_r^{(n)}$ .

Теперь в решение П. Ф. Папковича (2.2) надо подставить выражения (3.13), (3.27) и (3.28), заменив предварительно  $\operatorname{grad} \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_n$  по (3.8). Получим:

$$\begin{aligned} 2Gu = & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \mathbf{\Pi}_r^{(n)} - \frac{1}{n(n-1)} \mathbf{R} \times \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}_r^{(n)} + \right. \\ & \left. + \frac{(m-4)n - 2(m-1)}{n[mn^2 - (m-2)n + m - 1]} \mathbf{R} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}_r^{(n)} + \right. \\ & \left. + \frac{2n-1+m}{n(n-1)[mn^2 - (m-2)n + m - 1]} R^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}_r^{(n)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (R_0^2 - R^2) \frac{m}{mn^2 - (m-2)n + m - 1} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}_r^{(n)} \right\}. \quad (3.29) \end{aligned}$$

Это выражение даёт решение задачи о равновесии упругой сплошной сферы, находящейся под действием уравновешенной системы внешних сил. Гармонический вектор  $\Pi_r$ , через который выражено перемещение  $u$ , определяется из решения задачи Дирихле для сферы по известному на поверхности сферы значению  $(R\mathbf{P}_r)_{R=R_0}$  этого вектора (причём  $(\mathbf{P}_r)_{R=R_0}$  — вектор внешней поверхностной силы).

Конечно, по заданным внешним силам перемещение  $u$  может быть определено с точностью до слагаемых, соответствующих перемещению сферы как твёрдого тела; эти слагаемые могут быть добавлены к (3.29).

В качестве примера рассмотрим действие на сферу уравновешенной системы сосредоточенных сил  $\mathbf{Q}_i (i = 1, 2, \dots, N)$ , приложенных в точках поверхности  $R = R_0$ , вектор-радиусы которых обозначим  $R_0\mathbf{r}_i$ .

Условия равновесия этой системы сил имеют вид

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{Q}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{Q}_i = 0. \quad (3.30)$$

Через вектор-радиус  $R_0\mathbf{r}_i$  точки приложения силы  $\mathbf{Q}_i$  и линию действия этой силы проведём плоскость, пересечение которой с поверхностью сферы определит меридиональную плоскость  $\pi_i^0$ ; положение любой другой меридиональной плоскости  $\pi_i$ , пересекающей сферу в точке приложения силы  $\mathbf{Q}_i$  и ей диаметрально противоположной точке, можно определить углом этой плоскости с  $\pi_i^0$ . Положение точки  $M$  в плоскости меридиана  $\pi_i$  определится радиусом  $R$  и углом  $\theta_i$ , составляемым этим радиусом с вектором  $\mathbf{r}_i$ . Если через  $\mathbf{R} = R\mathbf{r}$  назвать вектор-радиус точки  $M$ , то будем иметь:

$$\gamma_i = \cos \theta_i = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i. \quad (3.31)$$

Разложение в ряд по сферическим поверхностным векторам, которые в данном случае выражаются через полиномы Лежандра от аргумента  $\gamma_i$ , вектора, представляющего сосредоточенную силу  $\mathbf{Q}_i$ , можно получить, как указано в §§ 6 и 7 главы 6, путём предельного перехода; рассматриваем разложение в ряд вектор-функции

$$\mathbf{Q}_i(\theta_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } \varepsilon_i < \theta_i < \pi, \\ \frac{\mathbf{Q}_i}{\pi R_0^2 \varepsilon_i^2} & \text{при } 0 < \theta_i < \varepsilon_i \end{cases}$$

и затем полагаем  $\varepsilon_i \rightarrow 0$ . По (7.2) главы 6 получаем расходящийся ряд

$$\frac{\mathbf{Q}_i}{2\pi R_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(\gamma_i) = (\mathbf{P}_r^{(i)})_{R=R_0}, \quad (3.32)$$

по которому строим согласно (3.12) гармонический вектор

$$\Pi_r^{[i]} = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_r^{[i](n)},$$

представленный внутри сферы (при  $R < R_0$ ) сходящимся рядом

$$\Pi_r^{[i]} = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_r^{[i](n)} = \frac{Q_i}{2\pi R_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \left(\frac{R}{R_0}\right)^n P_n(\gamma_i). \quad (3.33)$$

Гармонический вектор  $\Pi_r$ , соответствующий нагружению рассматриваемой системой сил, будет:

$$\Pi_r = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_r^{(n)} = \sum_{i=1}^N \Pi_r^{[i]} = \frac{1}{4\pi R_0} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{R}{R_0}\right)^n \sum_{i=1}^N Q_i P_n(\gamma_i), \quad (3.34)$$

так что

$$\Pi_r^{(n)} = \frac{2n+1}{4\pi R_0^{n+1}} R^n \sum_{i=1}^N Q_i P_n(\gamma_i). \quad (3.35)$$

Заметим, что по первому условию равновесия (3.30) вектор  $\Pi_r^{(0)} = 0$ . Здесь для каждой из сил  $Q_i$ , входящих в систему, введена особая координатная система с полюсом в точке приложения этой силы. Можно ввести фиксированную координатную систему, в которой координаты точки приложения силы (точки истока) будут  $R_0, \vartheta_i, \varphi_i$ , а координаты любой точки (точки наблюдения)  $R, \vartheta, \varphi$ ; тогда по известной формуле сферической тригонометрии

$$\gamma_i = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i = \cos \vartheta \cos \vartheta_i + \sin \vartheta \sin \vartheta_i \cos(\varphi - \varphi_i). \quad (3.36)$$

Надо вычислить для составления по (3.29) выражения вектора  $\mathbf{u}$  следующие операции от  $\Pi_r^{(n)}$ :

$$\text{rot } \Pi_r^{(n)}, \quad \text{div } \Pi_r^{(n)}, \quad \mathbf{R} \times \text{rot } \Pi_r^{(n)}, \quad \mathbf{R} \text{ div } \Pi_r^{(n)}, \quad \text{grad div } \Pi_r^{(n)}.$$

Предварительно заметим, что

$$\text{grad } \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i = \text{grad } \frac{1}{R} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_i) = -\frac{1}{R^3} \mathbf{R} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_i) + \frac{1}{R} \mathbf{r}_i = \frac{1}{R} (\mathbf{r}_i - \gamma_i \mathbf{r}). \quad (3.37)$$

Теперь получаем:

$$\begin{aligned} \text{rot } \Pi_r^{(n)} &= \frac{2n+1}{4\pi R_0^{n+1}} \text{grad } R^n \sum_{i=1}^N P_n(\gamma_i) \times \mathbf{Q}_i = \\ &= \frac{2n+1}{4\pi R_0^{n+1}} \left[ nR^{n-1} \sum_{i=1}^N P_n(\gamma_i) \mathbf{r} \times \mathbf{Q}_i + R^{n-1} \sum_{i=1}^N P_n'(\gamma_i) (\mathbf{r}_i - \mathbf{r} \gamma_i) \times \mathbf{Q}_i \right], \end{aligned}$$



так как по (3.37)

$$\text{grad } P_n(\gamma_i) = P'_n(\gamma_i) \text{grad } \gamma_i = P'_n(\gamma_i)(r_i - r_{\gamma_i}). \quad (3.38)$$

Вспомяная далее, что

$$nP_n(\gamma_i) - \gamma_i P'_n(\gamma_i) = -P'_{n-1}(\gamma_i), \quad (3.39)$$

получим теперь:

$$\text{rot } \Pi_r^{(n)} = \frac{2n+1}{4\pi R_0^{n+1}} R^{n-1} \sum_{i=1}^N [P'_n(\gamma_i) r_i - P'_{n-1}(\gamma_i) r] \times Q_i. \quad (3.40)$$

При  $n=1$  это выражение в силу второго условия равновесия (3.30) обратится в нуль.

Аналогично получим:

$$\text{div } \Pi_r^{(n)} = \frac{2n+1}{4\pi R_0^{n+1}} R^{n-1} \sum_{i=1}^N [P'_n(\gamma_i) r_i - P'_{n-1}(\gamma_i) r] \cdot Q_i. \quad (3.41)$$

Переходя к вычислению величин

$$R \times \text{rot } \Pi_r^{(n)}, \quad R \text{ div } \Pi_r^{(n)},$$

отметим соотношения

$$\left. \begin{aligned} r(r \cdot Q_i) &= Q_i + r \times (r \times Q_i), \\ r(r_i \cdot Q_i) &= Q_i \gamma_i + r_i \times (r \times Q_i). \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Тогда, снова применив (3.39), найдём:

$$\left. \begin{aligned} R \times \text{rot } \Pi_r^{(n)} &= -n \Pi_r^{(n)} + \\ &+ \frac{2n+1}{4\pi R_0^{n+1}} R^n \sum_{i=1}^N [P'_n(\gamma_i) r_i - P'_{n-1}(\gamma_i) r] (r \cdot Q_i), \\ R \text{ div } \Pi_r^{(n)} &= n \Pi_r^{(n)} + \\ &+ \frac{2n+1}{4\pi R_0^{n+1}} R^n \sum_{i=1}^N [P'_n(\gamma_i) r_i - P'_{n-1}(\gamma_i) r] \times (r \times Q_i). \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

Аналогично вычисляется  $\text{grad div } \Pi_r^{(n)}$ ; используя те же соотношения (3.42), а также тождество

$$P'_n - 2\gamma P'_{n-1} + P'_{n-2} = P_{n-1} \quad (3.44)$$

и тождество, получающееся из него дифференцированием

$$P''_n - 2\gamma P''_{n-1} + P''_{n-2} = 3P'_{n-1}, \quad (3.45)$$

найдем:

$$\begin{aligned} \text{grad div } \Pi_r^{(n)} &= \frac{2n+1}{4\pi R_0^{n+1}} R^{n-2} \left\{ 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}_i P'_{n-1}(\gamma_i) + \right. \\ &+ \sum_{i=1}^N \{P''_{n-2}(\gamma_i) \mathbf{r} - P''_{n-1}(\gamma_i) \mathbf{r}_i\} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{Q}_i) - \\ &\left. - \sum_{i=1}^N [P''_{n-1}(\gamma_i) \mathbf{r} - P''_n(\gamma_i) \mathbf{r}_i] \times (\mathbf{r}_i \times \mathbf{Q}_i) \right\}. \quad (3.46) \end{aligned}$$

Выражение вектора перемещения принимает вид

$$\begin{aligned} 8\pi G R_0 \mathbf{u} &= \sum_{i=1}^N \left\{ \mathbf{Q}_i \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} \left(\frac{R}{R_0}\right)^n P_n(\gamma_i) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \left(\frac{R}{R_0}\right)^n P_n(\gamma_i) + \right. \right. \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)[(m-4)n-2(m-1)]}{mn^2-(m-2)n+m-1} \left(\frac{R}{R_0}\right)^n P_n(\gamma_i) + \\ &+ 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n+1)P'_{n-1}(\gamma_i)}{mn^2-(m-2)n+m-1} \left\{ \frac{2n-1-m}{n(n-1)} \left(\frac{R}{R_0}\right)^n + \frac{m}{2} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{n-2} - \frac{m}{2} \left(\frac{R}{R_0}\right)^n \right\} \Big] - \\ &- \mathbf{r} \cdot \mathbf{Q}_i \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n-1)} \left(\frac{R}{R_0}\right)^n \{P'_n(\gamma_i) \mathbf{r}_i - P'_{n-1}(\gamma_i) \mathbf{r}\} - \\ &- (\mathbf{r} \times \mathbf{Q}_i) \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)[(m-4)n-2(m-1)]}{n[mn^2-(m-2)n+m-1]} \left(\frac{R}{R_0}\right)^n \{P'_n(\gamma_i) \mathbf{r}_i - \\ &- P'_{n-1}(\gamma_i) \mathbf{r}\} - (\mathbf{r} \times \mathbf{Q}_i) \times \\ &\times \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{mn^2-(m-2)n+(m-1)} \left\{ \frac{2n-1+m}{n(n-1)} \left(\frac{R}{R_0}\right)^n + \frac{m}{2} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{n-2} - \right. \\ &\left. - \frac{m}{2} \left(\frac{R}{R_0}\right)^n \right\} \{P''_{n-2}(\gamma_i) \mathbf{r} - P''_{n-1}(\gamma_i) \mathbf{r}_i\} + \\ &+ (\mathbf{r}_i \times \mathbf{Q}_i) \times \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{mn^2-(m-2)n+m-1} \left\{ \frac{2n-1+m}{n(n-1)} \left(\frac{R}{R_0}\right)^n + \frac{m}{2} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{n-2} - \right. \\ &\left. - \frac{m}{2} \left(\frac{R}{R_0}\right)^n \right\} \{P''_{n-1}(\gamma_i) \mathbf{r} - P''_n(\gamma_i) \mathbf{r}_i\} \Big\}. \quad (3.47) \end{aligned}$$

Заметим ещё, что по (6.25) главы 6

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{R}{R_0}\right)^n P_n(\gamma_i) = \frac{R_0(R_0^2 - R^2)}{(R^2 + R_0^2 - 2RR_0\gamma_i)^{3/2}}.$$

Способами, указанными в §§ 6 и 7 главы 6, можно просуммировать также ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} \left(\frac{R}{R_0}\right)^n P_n(\gamma_i), \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n-1)} \left(\frac{R}{R_0}\right)^n P_n(\gamma_i) \text{ и т. д.}$$

Таким образом, из рядов в выражении (3.47) могут быть выделены в конечной форме медленно сходящиеся части; остающиеся после такого выделения ряды будут быстро сходиться. Заметим ещё, что знание решения для произвольного распределения сосредоточенных сил позволяет составить решение, соответствующее нагрузке, распределённой по произвольному закону. Соответствующие суммы (по  $i$  от 1 до  $N$ ) должны быть при этом заменены интегралами.

#### § 4. Решение краевых задач для сферической полости в неограниченной упругой среде

Решения этих краевых задач получаются сразу из полученных выше формул, относящихся к сплошной сфере, путём замены в них индекса суммирования  $n$  на  $(-n-1)$ .

Таким образом, при задании на поверхности полости вектора перемещения  $\mathbf{u}$

$$(\mathbf{u})_{R=R_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Y}_n(\vartheta, \varphi) \quad (4.1)$$

составляем гармонический вне полости (при  $R > R_0$ ) вектор

$$\mathbf{U} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{n+1} \mathbf{Y}_n(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{U}_{-n-1}. \quad (4.2)$$

С помощью этого вектора строится по (2.18) решение для вектора перемещения

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} - \frac{1}{2} (R_0^2 - R^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{U}_{-n-1}}{(3m-4)(n+1) + 2m-2}. \quad (4.3)$$

Если на поверхности полости  $R = R_0$  дан вектор внешних усилий  $(\mathbf{P}_r)_{R=R_0}$ , то составляем его разложение в ряд по поверхностным сферическим векторам

$$R_0 (\mathbf{P}_r)_{R=R_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Y}_n(\vartheta, \varphi) \quad (4.4)$$

и строим гармонический вне сферы (при  $R > R_0$ ) вектор

$$\Pi_r = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_r^{-n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{n+1} Y_n(\vartheta, \varphi), \quad (4.5)$$

принимающий при  $R = R_0$  заданное значение (4.4).

Тогда по (3.17) может быть найден вектор напряжения  $P_r$  на любой сферической поверхности, концентрической с полостью

$$P_r = \frac{1}{R} \Pi_r - \frac{R_0^2 - R^2}{2R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(n+3) \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi_r^{-n-1}}{mn^2 + (3m-2)n + 3(m-1)}. \quad (4.6)$$

Форма этого решения не налагает, как это было в случае сплошной сферы, ограничений на внешние силы по поверхности полости  $R = R_0$  — последние могут представлять и неуравновешенную систему сил. Входящие в (4.6) члены разложения вектора  $\Pi_r$ , соответствующие  $n=0$  и  $n=1$ , дают напряжения, обращающиеся в нуль при  $R \rightarrow \infty$ , но дающие отличные от нуля главный вектор и главный момент, уравнивающие главный вектор и главный момент заданной на поверхности полости нагрузки.

Выражение вектора перемещения  $u$  найдём по (3.29):

$$\begin{aligned} 2Gu = - \sum_{n=0}^{\infty} & \left[ \frac{1}{n+1} \Pi_r^{-n-1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} R \times \operatorname{rot} \Pi_r^{-n-1} - \right. \\ & - \frac{(m-4)(n+1) + 2(m-1)}{(n+1)[mn^2 + (3m-2)n + 3(m-1)]} R \operatorname{div} \Pi_r^{-n-1} + \\ & + \frac{2n+3-m}{(n+1)(n+2)[mn^2 + (3m-2)n + 3(m-1)]} R^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi_r^{-n-1} + \\ & \left. + \frac{1}{2} (R^2 - R_0^2) \frac{m \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi_r^{-n-1}}{mn^2 + (3m-2)n + 3(m-1)} \right]. \quad (4.7) \end{aligned}$$

В качестве примера вернёмся к рассмотренной ранее задаче (§ 4 главы 6) о концентрации напряжений в области сферической полости, когда напряжённое состояние на бесконечности (при отсутствии полости) представляет чистый сдвиг:

$$\text{при } R \rightarrow \infty \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^{\infty}, \quad (4.8)$$

а все остальные составляющие тензора напряжения равны нулю.

Результирующее напряжённое состояние (будем его отличать звёздочками) представится в виде суммы напряжённого состояния на

бесконечности и возникающего напряжённого состояния, имеющего местный характер:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^* & \tau_{xy}^* & \tau_{xz}^* \\ \tau_{xy}^* & \sigma_y^* & \tau_{yz}^* \\ \tau_{xz}^* & \tau_{yz}^* & \sigma_z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \tau_{xy}^\infty & 0 \\ \tau_{xy}^\infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

На поверхности полости (при  $R = R_0$ ) обращается в нуль вектор результирующего напряжения

$$(\mathbf{P}_r^*)_{R=R_0} = (\mathbf{P}_r + \mathbf{P}_r^\infty)_{R=R_0} = 0$$

или

$$(X_r^*)_{R=R_0} = (X_r + X_r^\infty)_{R=R_0} = 0, \quad (Y_r^*)_{R=R_0} = (Y_r + Y_r^\infty)_{R=R_0} = 0,$$

$$(Z_r^*)_{R=R_0} = (Z_r + Z_r^\infty)_{R=R_0} = 0.$$

Но

$$(X_r^\infty)_{R=R_0} = \sigma_x^\infty \frac{x}{R_0} + \tau_{xy}^\infty \frac{y}{R_0} + \tau_{xz}^\infty \frac{z}{R_0} = \frac{\tau_{xy}^\infty}{R_0} y,$$

$$(Y_r^\infty)_{R=R_0} = \frac{\tau_{xy}^\infty}{R_0} x, \quad (Z_r^\infty)_{R=R_0} = 0$$

и, значит,

$$\begin{aligned} (R\mathbf{P}_r)_{R=R_0} &= -\tau_{xy}^\infty (y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}) = \\ &= -\tau_{xy}^\infty R_0 (\mathbf{i} \sin \varphi \sin \vartheta + \mathbf{j} \cos \varphi \sin \vartheta) = \mathbf{Y}_1(\vartheta, \varphi). \end{aligned}$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче

$$\begin{aligned} \Pi_r &= \Pi_r^{-2} = -\tau_{xy}^\infty \frac{R_0^3}{R^2} (\mathbf{i} \sin \varphi \sin \vartheta + \mathbf{j} \cos \varphi \sin \vartheta) = \\ &= -\tau_{xy}^\infty \frac{R_0^3}{R^3} (\mathbf{i}y + \mathbf{j}x). \end{aligned} \quad (4.10)$$

По (4.7) получаем вектор перемещения

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{\tau_{xy}^\infty R_0^3}{4G} \left[ \mathbf{Q} + \frac{1}{3} \mathbf{R} \times \text{rot } \mathbf{Q} - \frac{4m-10}{7m-5} R \text{div } \mathbf{Q} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{5-m}{3(7m-5)} R^2 \text{grad div } \mathbf{Q} + (R^2 - R_0^2) \frac{m}{7m-5} \text{grad div } \mathbf{Q} \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

где обозначено для краткости

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{R^2} (y\mathbf{i} + x\mathbf{j}). \quad (4.12)$$

Входящие в (4.11) дифференциальные операции над вектором  $Q$  имеют значения

$$\begin{aligned} \operatorname{div} Q &= -6 \frac{xy}{R^5}, \quad \operatorname{rot} Q = \frac{3}{R^5} [xzi - yzj - (x^2 - y^2)k], \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} Q &= \frac{6}{R^7} [(4x^2 - y^2 - z^2)yi + (4y^2 - x^2 - z^2)xj + 5xyzk], \\ R \operatorname{div} Q &= -\frac{6xy}{R^5} (xi + yj + zk), \\ R \times \operatorname{rot} Q &= \frac{3}{R^5} [y(-x^2 + y^2 + z^2)i + x(x^2 - y^2 + z^2)j - 2xyzk]. \end{aligned}$$

Остаётся сделать подстановку этих выражений в (4.10). Получаем:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\tau_{xy}^\infty R_0^3}{2G(7m-5)} \frac{y}{R^5} \left[ \left( 20m - 10 - \frac{12mR_0^2}{R^2} \right) x^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( 5m - 10 + \frac{3mR_0^2}{R^2} \right) (y^2 + z^2) \right], \\ v &= \frac{\tau_{xy}^\infty R_0^3}{2G(7m-5)} \frac{x}{R^5} \left[ \left( 20m - 10 - \frac{12mR_0^2}{R^2} \right) y^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( 5m - 10 + \frac{3mR_0^2}{R^2} \right) (z^2 + x^2) \right], \\ w &= \frac{\tau_{xy}^\infty R_0^3 m}{2G(7m-5)} \frac{15xyz}{R^5} \left( 1 - \frac{R_0^2}{R^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

По полученным перемещениям далее находятся напряжения, которые должны быть наложены, как указывается соотношением (4.9), на напряжённое состояние (4.8).

### § 5. Равновесие упругой полой сферы при заданных на границах перемещениях

Рассмотрение более сложных, чем предшествующие, краевых задач, относящихся к полой сфере, начнём с относительно простого случая задания перемещений: на ограничивающих полую сферу концентрических сферических поверхностях  $R = R_0$  и  $R = R_1$  заданы значения вектора перемещения  $u$ :

$$(u)_{R=R_0} = u^{(0)}, \quad (u)_{R=R_1} = u^{(1)}. \quad (5.1)$$

Эти краевые данные представим в виде разложения по поверхностным сферическим векторам

$$u^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(0)}, \quad u^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(1)} \quad (5.2)$$

и построим гармонический внутри полой сферы вектор  $U$ , который на поверхностях  $R = R_0$  и  $R = R_1$  принимает те же значения, что и искомый вектор перемещения  $u$ . Выражение вектора  $U$  легко находится в виде ряда по пространственным гармоническим однородным векторам:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n + \sum_{n=0}^{\infty} U_{-n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n. \quad (5.3)$$

Краевые условия для векторов  $U_n$  и  $U_{-n-1}$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} R_0^n (R^{-n} U_n) + R_0^{-n-1} (R^{n+1} U_{-n-1}) &= Y_n^{(0)}, \\ R_1^n (R^{-n} U_n) + R_1^{-n-1} (R^{n+1} U_{-n-1}) &= Y_n^{(1)}, \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

где  $R^{-n} U_n$ ,  $R^{n+1} U_{-n-1}$  — поверхностные сферические векторы  $n$ -го порядка. Решив эти уравнения, получим:

$$\left. \begin{aligned} U_n &= \frac{R_0^{n+1} Y_n^{(0)} - R_1^{n+1} Y_n^{(1)}}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} R^n, \\ U_{-n-1} &= -\frac{R_1^n Y_n^{(0)} - R_0^n Y_n^{(1)}}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \left(\frac{R_0 R_1}{R}\right)^{n+1}. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Отметим, что при замене в выражении  $U_n$  индекса  $n$  на  $(-n-1)$  получаем  $U_{-n-1}$ , если условимся считать  $Y_n^{(0)}$  и  $Y_n^{(1)}$  равными  $Y_{-n-1}^{(0)}$ ,  $Y_{-n-1}^{(1)}$  соответственно.

Вектор П. Ф. Палковича  $B$  также представим в форме разложения по пространственным однородным гармоническим векторам  $B_n$  и  $B_{-n-1}$ :

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} B_n + \sum_{n=0}^{\infty} B_{-n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n. \quad (5.6)$$

В таком же виде представим и скаляр  $B^{(0)}$ :

$$B^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{-n}^{(0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{n-1}^{(0)}. \quad (5.7)$$

Искомый вектор перемещения  $u$  может быть выражен теперь в форме [ср. (2.4)]

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{4(m-1)}{m} B_n + \frac{1}{2n+1} K(B_n) + \frac{2}{4n^2-1} T(B_n) \right] - \\ &\quad - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2n-1} R^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} B_n + \operatorname{grad} B_{n-1}^{(0)} \right]. \quad (5.8) \end{aligned}$$

Во второй сумме заменим индекс суммирования  $n$  на  $(n+2)$ ; тогда получим:

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{4(m-1)}{m} B_n + \frac{1}{2n+1} K(B_n) + \frac{2}{4n^2-1} T(B_n) \right] - \left[ \frac{1}{2n+3} R^2 \text{grad div } B_{n+2} + \text{grad } B_{n+1}^{(0)} \right] \right\}. \quad (5.9)$$

Вследствие произведённой перегруппировки в каждое слагаемое  $u_n$  этой суммы войдут члены, которые, исключая  $R^2 \text{grad div } B_{n+2}$ , будут пространственными гармоническими векторами одинакового порядка  $n$ ;  $\text{grad div } B_{n+2}$  также является таким вектором.

При  $R = R_0$  значение вектора  $u_n$  будет поэтому

$$(u_n)_{R=R_0} = R_0^n \left\{ R^{-n} \left[ \frac{4(m-1)}{m} B_n + \frac{1}{2n+1} K(B_n) + \frac{2}{4n^2-1} T(B_n) - \text{grad } B_{n+1}^{(0)} \right] - \frac{R_0^2}{2n+3} R^{-n} \text{grad div } B_{n+2} \right\}. \quad (5.10)$$

Конечно, значение  $u_n$  при  $R = R_1$  запишется так же: нужно лишь в (5.10) заменить  $R_0$  на  $R_1$ . В выражении (5.10) величина в фигурных скобках представляет поверхностный сферический вектор  $n$ -го порядка.

Краевое условие

$$(u_n)_{R=R_0} = (U_n)_{R=R_0} \quad (5.11)$$

мы можем теперь записать в форме

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_0^n \left\{ R^{-n} \left[ \frac{4(m-1)}{m} B_n + \frac{1}{2n+1} K(B_n) + \frac{2}{4n^2-1} T(B_n) - \text{grad } B_{n+1}^{(0)} - U_n \right] \right\} = R_0^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{R_0^n}{2n+3} (R^{-n} \text{grad div } B_{n+2}). \quad (5.12)$$

Краевое условие при  $R = R_1$  получится отсюда при замене  $R_0$  на  $R_1$ .

Чтобы выделить из этих сумм поверхностные сферические векторы одного и того же порядка  $n_0$ , нужно взять слагаемые, соответствующие значениям  $n = n_0$  и  $n = -(n_0 + 1)$ . Поэтому, сравнивая в правой и левой частях (5.12) поверхностные функции одного и того же порядка  $n_0$ , придём для каждого  $n_0 = 0, 1, 2, \dots$



к уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{R_0^n}{R^n} \left[ \frac{4(m-1)}{m} B_n + \frac{1}{2n+1} K(B_n) + \frac{2}{4n^2-1} T(B_n) - \text{grad } B_{n+1}^{(0)} - U_n \right] + \\ & + \frac{R^{n+1}}{R_0^{n+1}} \left[ \frac{4(m-1)}{m} B_{-n-1} - \frac{1}{2n+1} K(B_{-n-1}) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{(2n+3)(2n+1)} T(B_{-n-1}) - \text{grad } B_{-n}^{(0)} - U_{-n-1} \right] = \\ & = \frac{R_0^2}{2n+3} \left( \frac{R_0}{R} \right)^n \text{grad div } B_{n+2} - \frac{R_0^2}{2n-1} \left( \frac{R}{R_0} \right)^{n+1} \text{grad div } B_{-n+1}. \quad (5.13) \end{aligned}$$

Мы здесь написали снова  $n$  вместо  $n_0$ . Из этого уравнения и второго, получающегося при замене  $R_0$  на  $R_1$ , легко находятся значения величин в квадратных скобках

$$\begin{aligned} & \frac{4(m-1)}{m} B_n + \frac{1}{2n+1} K(B_n) + \frac{2}{(2n+1)(2n-1)} T(B_n) - \\ & - \text{grad } B_{n+1}^{(0)} - U_n = \frac{R_0^{2n+3} - R_1^{2n+3}}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \frac{\text{grad div } B_{n+2}}{2n+3} - \\ & - \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \frac{R^{2n+1}}{2n-1} \text{grad div } B_{-n+1}, \quad (5.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{4(m-1)}{m} B_{-n-1} - \frac{1}{2n+1} K(B_{-n-1}) + \\ & + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} T(B_{-n-1}) - \text{grad } B_{-n}^{(0)} - U_{-n-1} = \\ & = - \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \frac{1}{2n+3} \left( \frac{R_0 R_1}{R} \right)^{2n+1} \text{grad div } B_{n+2} - \\ & - \frac{(R_0 R_1)^2 (R_0^{2n-1} - R_1^{2n-1})}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \frac{\text{grad div } B_{-n+1}}{2n-1}. \quad (5.15) \end{aligned}$$

Следует обратить внимание на то, что в обеих частях этих равенств стоят пространственные гармонические векторы одинакового порядка.

В (5.14) это будут пространственные гармонические векторы  $n$ -й степени; это становится видным и в отношении вектора

$$R^{2n+1} \text{grad div } B_{-n+1},$$

если заметить, что  $\text{grad div } B_{-n+1}$  представляет пространственный гармонический вектор вида  $R^{-n-1} Y_n$ ; поэтому его произведение на  $R^{2n+1}$  будет иметь вид пространственного гармонического вектора

$n$ -й степени  $R^n \mathbf{Y}_n$ . Точно так же пространственным гармоническим вектором порядка  $[-(n+1)]$  будет вектор

$$\frac{\text{grad div } \mathbf{B}_{n+2}}{R^{2n+1}},$$

как и все другие члены уравнения (5.15).

Отметим ещё, что (5.15) получается из (5.14), если в этом последнем уравнении заменить  $n$  на  $(-n-1)$ .

Можно несколько упростить соотношение (5.14), выбрав градиентный вектор  $\text{grad } \mathbf{B}_{n+1}^{(0)}$  равным градиентному же вектору в правой части:

$$-\text{grad } \mathbf{B}_{n+1}^{(0)} = \frac{R_0^{2n+3} - R_1^{2n+3}}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \frac{\text{grad div } \mathbf{B}_{n+2}}{2n+3}. \quad (5.16)$$

Такое же приравнивание градиентных векторов сделаем в (5.15). Поэтому соотношение (5.16) будет выполняться при всех положительных и отрицательных  $n$ .

Теперь соотношения (5.14) и (5.15) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{4(m-1)}{m} \mathbf{B}_n + \frac{1}{2n+1} \mathbf{K}(\mathbf{B}_n) + \frac{2}{(2n+1)(2n-1)} \mathbf{T}(\mathbf{B}_n) + \\ + \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \cdot \frac{R^{2n+1}}{2n-1} \text{grad div } \mathbf{B}_{-n+1} = \mathbf{U}_n, \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{4(m-1)}{m} \mathbf{B}_{-n-1} - \frac{1}{2n+1} \mathbf{K}(\mathbf{B}_{-n-1}) + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} \mathbf{T}(\mathbf{B}_{-n-1}) + \\ + \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \left( \frac{R_0 R_1}{R} \right)^{2n+1} \frac{1}{2n+3} \text{grad div } \mathbf{B}_{n+2} = \mathbf{U}_{-n-1}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Конечно, (5.18) можно получить из (5.17) путём замены  $n$  на  $(-n-1)$ .

Прежде чем перейти к рассмотрению соотношений (5.17) и (5.18), которые послужат для выражения векторов  $\mathbf{B}_n$  через известные векторы  $\mathbf{U}_n$ , заметим, что выражению (5.9) искомого вектора перемещения  $\mathbf{u}$  на основании (5.3), (5.16) и (5.17) теперь можно дать вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mathbf{U} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+3} \left[ R^2 - \frac{R_0^{2n+3} - R_1^{2n+3}}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \right] \text{grad div } \mathbf{B}_{n+2} - \\ - (R_0^2 - R_1^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \frac{R^{2n+1}}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \text{grad div } \mathbf{B}_{-n+1}. \end{aligned}$$

Во второй сумме  $n$  заменим на  $(-n-1)$ . Тогда, объединив вторую сумму с первой, получим:

$$u = U - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+3} \left[ R^2 - \frac{R_0^{2n+3} - R_1^{2n+3}}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} + \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \left( \frac{R_0 R_1}{R} \right)^{2n+1} \right] \text{grad div } \mathbf{B}_{n+2}.$$

Можно ещё заменить индекс суммирования  $n$  на  $n-2$ . Тогда получим:

$$u = U - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left[ R^2 - \frac{R_0^{2n-1} - R_1^{2n-1}}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} + \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} \left( \frac{R_0 R_1}{R} \right)^{2n-3} \right] \text{grad div } \mathbf{B}_n. \quad (5.19)$$

Величина в квадратных скобках под знаком суммы при  $R = R_0$  и  $R = R_1$ , как и требуется, обращается в нуль; таким образом, написанное выражение удовлетворяет краевым условиям.

Из (5.19) следует ещё, что знание самого вектора  $\mathbf{B}_n$  излишне; достаточно найти его дивергенцию. Для вычисления  $\text{div } \mathbf{B}_n$  обратимся к (5.17). Получим, вспомнив (1.20) и (1.24) и (1.16):

$$\left( \frac{4(m-1)}{m} - \frac{2n}{2n-1} \right) \text{div } \mathbf{B}_n - \frac{R_0^3 - R_1^3}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \frac{(2n+1)n}{2n-1} R^{2n-1} \text{div } \mathbf{B}_{-n+1} = \text{div } U_n. \quad (5.20)$$

При этом вычислении было использовано

$$\begin{aligned} \text{div } R^{2n+1} \text{grad div } \mathbf{B}_{-n+1} &= (2n+1) R^{2n-1} \mathbf{R} \cdot \text{grad div } \mathbf{B}_{-n+1} = \\ &= -(2n+1) n R^{2n-1} \text{div } \mathbf{B}_{-n+1}, \end{aligned}$$

так как  $\text{div } \mathbf{B}_{-n+1}$  — однородная функция с показателем порядка однородности  $(-n)$ .

Аналогичным образом из (5.18) вычислим  $\text{div } \mathbf{B}_{-n-1}$ . Впрочем, результат этого вычисления можно написать сразу, сделав в (5.20) замену  $n$  на  $(-n-1)$ ; получим:

$$\left[ \frac{4(m-1)}{m} - \frac{2(n+1)}{2n+3} \right] \text{div } \mathbf{B}_{-n-1} - \frac{R_0^3 - R_1^3}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+3)R^2} \left( \frac{R_0 R_1}{R} \right)^{2n+1} \text{div } \mathbf{B}_{n+2} = \text{div } U_{-n-1}. \quad (5.21)$$

Если в этом уравнении сделать замену  $(n+2)$  на  $n$ , то неизвестными, в него входящими, станут  $\operatorname{div} \mathbf{B}_{-n+1}$  и  $\operatorname{div} \mathbf{B}_n$ ; но эти же неизвестные входят в (5.20). Итак, мы пришли к двум уравнениям, которые для ясности выпишем рядом

$$\left. \begin{aligned} & \left( \frac{4(m-1)}{m} - \frac{2n}{2n-1} \right) \operatorname{div} \mathbf{B}_n - \\ & \quad - \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \frac{n(2n+1)}{2n-1} R^{2n-1} \operatorname{div} \mathbf{B}_{-n+1} = \operatorname{div} \mathbf{U}_n, \\ & \frac{(R_0^2 - R_1^2)(R_0 R_1)^{2n-3}}{(R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}) R^{2n-1}} \frac{(2n-3)(n-1)}{2n-1} \operatorname{div} \mathbf{B}_n + \\ & \quad + \left[ \frac{4(m-1)}{m} - \frac{2(n-1)}{2n-1} \right] \operatorname{div} \mathbf{B}_{-n+1} = \operatorname{div} \mathbf{U}_{-n+1}. \end{aligned} \right\} (5.22)$$

Определитель этой системы обозначим  $\Delta_n$ :

$$\Delta_n = \left[ \frac{4(m-1)}{m} - \frac{2n}{2n-1} \right] \left[ \frac{4(m-1)}{m} - \frac{2(n-1)}{2n-1} \right] - \frac{(R_0^2 - R_1^2)^2 (R_0 R_1)^{2n-3}}{(R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3})(R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1})} \frac{(n-1)n(2n-3)(2n+1)}{(2n-1)^2}, \quad (5.23)$$

и заметим, что он не изменит своей величины при замене  $n$  на  $(-n+1)$ :

$$\Delta_n = \Delta_{-n+1}. \quad (5.24)$$

Из системы уравнений (5.22) получаем:

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_n = \frac{1}{\Delta_n} \left[ \frac{4(m-1)}{m} - \frac{2(n-1)}{2n-1} \right] \operatorname{div} \mathbf{U}_n + \frac{1}{\Delta_{-n+1}} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \frac{(2n+1)n}{2n-1} R^{2n-1} \operatorname{div} \mathbf{U}_{-n+1}. \quad (5.25)$$

Как и следовало ожидать,  $\operatorname{div} \mathbf{B}_n$  оказался однородной гармонической функцией степени  $(n-1)$ .

Остаётся это выражение  $\operatorname{div} \mathbf{B}_n$  подставить в (5.19); сумма в этой формуле при этом разобьётся на две суммы: одну, заключающую  $\operatorname{div} \mathbf{U}_n$ , и вторую, в которую войдёт  $\operatorname{div} \mathbf{U}_{-n+1}$ . В последней сумме будет удобно заменить индекс суммирования  $n$  на  $(-n+1)$ . Тогда,

имея в виду (5.24), получим, объединив обе суммы в одну:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} = \mathbf{U} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\Delta_n} \left\{ \left( \frac{4(m-1)}{m} - \frac{2(n-1)}{2n-1} \right) \left[ R^2 - \frac{R_0^{2n-1} - R_1^{2n-1}}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} \left( \frac{R_0 R_1}{R} \right)^{2n-3} \right] \text{grad div } \mathbf{U}_n - \right. \\
 \left. - \frac{(R_0^2 - R_1^2)(R_0 R_1)^{2n-3}}{R_1^{2n-3} - R_1^{2n-3}} \frac{(2n-3)(n-1)}{2n-1} \left[ R^2 - \frac{R_0^{2n-1} - R_1^{2n-1}}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} (R_0 R_1)^2 - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} R^{2n+1} \right] \text{grad } \frac{\text{div } \mathbf{U}_n}{R^{2n-1}} \right\}. \quad (5.26)
 \end{aligned}$$

Это выражение, дающее представление вектора перемещений  $\mathbf{u}$  через гармонический вектор  $\mathbf{U}$ , непосредственно определяемый по крайевым условиям, и является искомым решением.

Проверим, что величина под знаком суммы обратится в нуль, если перемещение, сообщаемое поллой сфере, представляет перемещение твёрдого тела; тогда получим:

$$(\mathbf{u})_{R=R_0} = \mathbf{u}_0 + \frac{R_0}{R} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}),$$

$$(\mathbf{u})_{R=R_1} = \mathbf{u}_0 + \frac{R_1}{R} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}),$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  — малый угол поворота,  $\mathbf{u}_0$  — вектор перемещения центра сферы.

Это — поверхностные сферические функции нулевого и первого порядка; поэтому согласно (5.3)

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_{-1} + \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_{-2}$$

и по (5.5) получаем:

$$\mathbf{U}_0 = \frac{R_0 - R_1}{R_0 - R_1} \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{U}_{-1} = -\frac{u_0 - u_0}{R_0 - R_1} \frac{R_0 R_1}{R} = 0,$$

$$\mathbf{U}_1 = \frac{R_0^3 - R_1^3}{R_0^3 - R_1^3} \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}}{R} R = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}, \quad \mathbf{U}_{-2} = -\frac{R_1 R_0 - R_0 R_1}{R_0^3 - R_1^3} \frac{(R_0 R_1)^2}{R^3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = 0.$$

Таким образом, во всей области  $R_0 \leq R \leq R_1$  гармонический вектор  $\mathbf{U}$  будет:

$$\mathbf{U} = \mathbf{u}_0 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}),$$

и отличными от нуля оказываются лишь векторы  $\mathbf{U}_0$  и  $\mathbf{U}_1$ , дивергенция каждого из которых, однако, равна нулю. Поэтому в (5.26) остаётся лишь первый член, и, как и следовало ожидать, получим:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}. \quad (5.27)$$

Рассмотрим в качестве примера случай, когда одна из поверхностей (пусть  $R = R_1$ ) закреплена неподвижно, а другой ( $R = R_0$ ) сообщается поворот  $\omega$ :

$$(\mathbf{u})_{R=R_0} = \frac{R_0}{R} (\omega \times \mathbf{R}), \quad (\mathbf{u})_{R=R_1} = 0.$$

Теперь отличны от нуля  $U_1$  и  $U_{-2}$ :

$$U_1 = \frac{R_0^3}{R_0^3 - R_1^3} (\omega \times \mathbf{R}), \quad U_{-2} = -\frac{(R_1 R_0)^3 \omega \times \mathbf{R}}{R_0^3 - R_1^3 R^3}, \quad (5.28)$$

и гармонический вектор  $U$  будет:

$$U = \frac{\omega \times \mathbf{R}}{R_0^3 - R_1^3} R_0^3 \left(1 - \frac{R_1^3}{R^3}\right). \quad (5.29)$$

Заметим, что и в этом случае

$$\operatorname{div} U_1 = 0,$$

$$\operatorname{div} U_{-2} = -\frac{(R_1 R_0)^3}{R_0^3 - R_1^3} \left[ -\frac{3}{R^5} \mathbf{R} \cdot (\omega \times \mathbf{R}) + \frac{1}{R^3} \operatorname{div} (\omega \times \mathbf{R}) \right] = 0,$$

т. е. сумма в выражении (5.26) исчезнет. Получаем:

$$\mathbf{u} = U = \frac{\omega \times \mathbf{R}}{R_0^3 - R_1^3} R_0^3 \left(1 - \frac{R_1^3}{R^3}\right). \quad (5.30)$$

Вектор  $\mathbf{u}$  оказался гармоническим с дивергенцией, равной нулю; отсюда без всякой проверки следует, что уравнения равновесия в перемещениях при отсутствии объёмных сил

$$\frac{m}{m-2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} = 0$$

тождественно удовлетворяются.

Определим значение вектора напряжения  $\mathbf{P}_r$ . Для этого по (3.3) надо найти  $\mathbf{R} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}$  и  $(\mathbf{R} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u}$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{u} &= \frac{R_0^3}{R_0^3 - R_1^3} \left\{ 2\omega - R_1^3 \left[ \frac{2\omega}{R^3} - \frac{3}{R^5} \mathbf{R} \times (\omega \times \mathbf{R}) \right] \right\} = \\ &= \frac{R_0^3}{R_0^3 - R_1^3} \left\{ 2\omega - R_1^3 \left[ \frac{2\omega}{R^3} - \frac{3\omega}{R^3} + \frac{3}{R^5} \mathbf{R} (\omega \cdot \mathbf{R}) \right] \right\} \end{aligned}$$

и окончательно

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{R_0^3}{R_0^3 - R_1^3} \left[ \omega \left( 2 + \frac{R_1^3}{R^3} \right) - \frac{3R_1^3}{R^5} \mathbf{R} (\omega \cdot \mathbf{R}) \right].$$

Мы воспользовались при этом вычислении тем, что

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = 2\boldsymbol{\omega},$$

и формулой, дающей ротор произведения скаляра  $\varphi$  на вектор  $\mathbf{A}$ :

$$\operatorname{rot} \varphi \mathbf{A} = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{A}.$$

Замечая далее, что векторы  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$  и  $\frac{1}{R^3}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$  имеют показатели однородности 1 и  $(-2)$ , получаем по (1.19)

$$(\mathbf{R} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u} = \frac{R_0^3}{R_0^3 - R_1^3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \left( 1 + \frac{2R_1^3}{R^3} \right).$$

Теперь по (3.3) найдём:

$$\mathbf{P}_r = 3G \frac{R_0^3 R_1^3}{R_0^3 - R_1^3} \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}}{R^4}. \quad (5.31)$$

Этот вектор перпендикулярен к  $\mathbf{R}$ , т. е.  $\sigma_R = 0$ , и на поверхностях  $R = \text{const}$  возникают только касательные напряжения, направленные по малым кругам, лежащим в плоскостях, перпендикулярных к  $\boldsymbol{\omega}$ . Этот результат можно было предвидеть заранее.

Легко подсчитать вращающий момент  $\mathbf{M}$ , который должен быть приложен к полному шару, чтобы сообщить указанное смещение:

$$\mathbf{M} = \int \int (\mathbf{R} \times \mathbf{P}_r) d\sigma = 3G \frac{R_0^3 R_1^3}{R_0^3 - R_1^3} \frac{1}{R^2} \int_{\Sigma_0} \int \mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) d\sigma^*.$$

Здесь  $\Sigma_0$  — поверхность единичной сферы,  $d\sigma^* = \frac{d\sigma}{R^2}$  — элемент поверхности (телесный угол) этой сферы. Разложив двойное векторное произведение, найдём далее:

$$\mathbf{M} = \frac{3GR_0^3 R_1^3}{R_0^3 - R_1^3} \int_{\Sigma_0} \int [\boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})] d\sigma^*,$$

где  $\mathbf{r}$  — вектор-радиус единичной сферы. Остаётся заметить, что

$$\int_{\Sigma_0} \int \boldsymbol{\omega} d\sigma^* = 4\pi\boldsymbol{\omega},$$

$$\int_{\Sigma_0} \int \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) d\sigma^* = \int \int \int \operatorname{grad} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R} d\tau = \boldsymbol{\omega} \int \int \int d\tau = \frac{4\pi}{3} \boldsymbol{\omega}.$$

Здесь использована формула преобразования поверхностного интеграла в объёмный, распространяемый по объёму единичной сферы;

$\omega \cdot R$  представляет значение внутри единичной сферы величины, которая на её поверхности равна  $\omega \cdot r$ . Окончательно находим:

$$M = \frac{8\pi G R_0^3 R_1^3}{R_0^3 - R_1^3} \omega. \quad (5.32)$$

Более сложные результаты получим в случае, когда одна из поверхностей (пусть  $R = R_1$ ) закреплена, а другой ( $R = R_0$ ) сообщается одинаковое во всех точках смещение  $u_0$ ; теперь отличны от нуля  $U_0$  и  $U_{-1}$ :

$$U_0 = \frac{R_0}{R_0 - R_1} u_0, \quad U_{-1} = -\frac{u_0 R_0}{R_0 - R_1} \frac{R_1}{R},$$

и, значит,

$$U = \frac{R_0 u_0}{R_0 - R_1} \left(1 - \frac{R_1}{R}\right).$$

В сумме, входящей в (5.26), надо удержать слагаемое, соответствующее  $n = -1$ , так как  $\operatorname{div} U_0 = 0$ . При этом

$$\operatorname{div} U_{-1} = \frac{R_0 R_1}{R_0 - R_1} \frac{R \cdot u_0}{R^3}$$

и далее

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} U_{-1} = \frac{R_0 R_1}{R_0 - R_1} \left[ \frac{u_0}{R^3} - \frac{3}{R^5} R (R \cdot u_0) \right],$$

$$\operatorname{grad} R^3 \operatorname{div} U_{-1} = \frac{R_0 R_1}{R_0 - R_1} u_0.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} u = & \frac{R_0 u_0}{R_0 - R_1} \left(1 - \frac{R_1}{R}\right) + \frac{R_0 R_1}{3\Delta_{-1}(R_0 - R_1)} \left\{ \left[ \frac{4(m-1)}{m} - \frac{4}{3} \right] \times \right. \\ & \times \left[ R^2 - \frac{R_0^3 - R_1^3}{R_0^5 - R_1^5} (R_0 R_1)^2 - \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^5 - R_1^5} R^5 \right] \left[ \frac{u_0}{R^3} - \frac{3}{R^5} R (R \cdot u_0) \right] - \\ & \left. - \frac{10}{3} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^5 - R_1^5} \left[ R^2 - \frac{R_0^3 - R_1^3}{R_0 - R_1} + \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0 - R_1} \frac{R_0 R_1}{R} \right] u_0 \right\}, \quad (5.33) \end{aligned}$$

где обозначено [см. (5.23)]

$$\Delta_{-1} = \left[ \frac{4(m-1)}{m} - \frac{4}{3} \right] \left[ \frac{4(m-1)}{m} - \frac{2}{3} \right] - \frac{10}{9} \frac{R_0 R_1 (R_0^2 - R_1^2)^2}{(R_0 - R_1)(R_0^5 - R_1^5)}. \quad (5.34)$$

## § 6. Равновесие упругой полый сферы при заданных на границах усилиях

Вычисления становятся более громоздкими, чем в предшествующем случае, когда были заданы перемещения, но новых принципиальных моментов решение задачи не содержит.

Как и в § 3, обозначим через  $P_r$  значение вектора напряжений на площадке любой сферической поверхности  $R = \text{const}$ ; заданы



значения этого вектора на поверхностях  $R = R_0$  и  $R = R_1$ , ограничивающих полую сферу. Эти значения представим в форме разложений по поверхностным сферическим функциям [ср. (3.11)]:

$$R_0(\mathbf{P}_r)_{R=R_0} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(0)}, \quad R_1(\mathbf{P}_r)_{R=R_1} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(1)}. \quad (6.1)$$

Введём далее в рассмотрение гармонический внутри полой сферы вектор  $\mathbf{\Pi}_r$ , принимающий на поверхностях  $R = R_0$  и  $R = R_1$  те же значения (6.1), что и вектор  $R\mathbf{P}_r$ . Представляя  $\mathbf{\Pi}_r$  в форме ряда по гармоническим пространственным однородным векторам

$$\mathbf{\Pi}_r = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{\Pi}_r^{(n)} + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{\Pi}_r^{(-n-1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{\Pi}_r^{(n)}, \quad (6.2)$$

получим [ср. (5.5)]:

$$\mathbf{\Pi}_r^{(n)} = \frac{R_0^{n+1} Y_n^{(0)} - R_1^{n+1} Y_n^{(1)}}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} R^n, \quad \mathbf{\Pi}_r^{(-n-1)} = -\frac{R_1^n Y_n^{(0)} - R_0^n Y_n^{(1)}}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \left(\frac{R_0 R_1}{R}\right)^{n+1}. \quad (6.3)$$

Как в § 5, надо отметить, что при формальной замене  $n$  на  $(-n-1)$  выражение  $\mathbf{\Pi}_r^{(n)}$  переходит в  $\mathbf{\Pi}_r^{(-n-1)}$ , если принять, что  $Y_n^{(0)} = Y_{-n-1}^{(0)}$ ,  $Y_n^{(1)} = Y_{-n-1}^{(1)}$ .

Исходя из решения уравнений теории упругости в форме П. Ф. Папковича, повторим те же вычисления, которые привели от (3.3) к выражению (3.10). Получим:

$$\begin{aligned} \frac{R}{2G} \mathbf{P}_r = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{2(m-1)}{m} (n-1) \mathbf{B}_n + \frac{n-2+\frac{2}{m}}{2n+1} \mathbf{K}(\mathbf{B}_n) + \right. \\ & \left. + \frac{2}{4n^2-1} \left[ n \left( 1 - \frac{2}{m} \right) - 2 + \frac{1}{m} \right] \mathbf{T}(\mathbf{B}_n) \right\} - \\ - \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n-2) & \left[ \frac{R^2}{2n-1} \text{grad div } \mathbf{B}_n + \text{grad } \mathbf{B}_{n-1}^{(0)} \right] = \frac{R}{2G} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}_r^{(n)}. \quad (6.4) \end{aligned}$$

Во второй сумме, как в § 5, заменим индекс суммирования  $n$  на  $(n+2)$ ; тогда

$$\begin{aligned} \frac{R}{2G} \mathbf{P}_r = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{2(m-1)}{m} (n-1) \mathbf{B}_n + \right. \\ & \left. + \frac{n-2+\frac{2}{m}}{2n+1} \mathbf{K}(\mathbf{B}_n) + \frac{2 \left[ n \left( 1 - \frac{2}{m} \right) - 2 + \frac{1}{m} \right]}{4n^2-1} \mathbf{T}(\mathbf{B}_n) - \right. \\ & \left. - n \left[ \frac{R^2}{2n+3} \text{grad div } \mathbf{B}_{n+2} + \text{grad } \mathbf{B}_{n+1}^{(0)} \right] \right\}. \quad (6.5) \end{aligned}$$

Как и в § 5, краевые условия

$$\left(\frac{R}{2G} P_r\right)_{\substack{R=R_0 \\ R=R_1}} = \frac{1}{2G} (\Pi_r)_{\substack{R=R_0 \\ R=R_1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2G} (\Pi_r^{(n)})_{\substack{R=R_0 \\ R=R_1}}$$

теперь можно будет записать в форме: при  $R = R_0$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_0^n R^{-n} \left\{ \frac{2(m-1)}{m} (n-1) B_n + \frac{n-2 + \frac{2}{m}}{2n+1} K(B_n) + \right. \\ \left. + \frac{2 \left[ n \left( 1 - \frac{2}{m} \right) - 2 + \frac{1}{m} \right]}{4n^2 - 1} T(B_n) - n \operatorname{grad} B_{n+1}^{(0)} - \frac{1}{2G} \Pi_r^{(n)} \right\} = \\ = R_0^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{2n+3} R_0^n R^{-n} \operatorname{grad} \operatorname{div} B_{n+2}; \quad (6.6) \end{aligned}$$

второе уравнение получится из этого при замене  $R_0$  на  $R_1$ .

Произведение величины, стоящей в фигурных скобках, на  $R^{-n_0}$ , а также  $R^{-n_0} \operatorname{grad} \operatorname{div} B_{n_0+3}$  представляют поверхностные гармонические векторы порядка  $n_0$ . Поверхностные гармонические векторы этого же порядка  $n_0$  представляют и члены сумм, соответствующие значению индекса суммирования  $n = -(n_0 + 1)$ . Приравнявая в левой и правой частях (6.6) поверхностные сферические векторы одного и того же порядка, получаем таким образом (отбрасываем нулик при  $n$ ) по умножении обеих частей на  $R_0^{-n} R^n$  [ср. (5.13)]:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{2(m-1)}{m} (n-1) B_n + \frac{n-2 + \frac{2}{m}}{2n+1} K(B_n) + \frac{2}{4n^2-1} \left[ n \left( 1 - \frac{2}{m} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 + \frac{1}{m} \right] T(B_n) - n \operatorname{grad} B_{n+1}^{(0)} - \frac{1}{2G} \Pi_r^{(n)} \right\} + \frac{1}{R_0^{2n+1}} \times \\ \times \left\{ - \frac{2(m-1)}{m} (n+2) R^{2n+1} B_{-n-1} + \frac{n+3 - \frac{2}{m}}{2n+1} R^{2n+1} K(B_{-n-1}) - \right. \\ \left. - \frac{2R^{2n+1}}{(2n+1)(2n+3)} \left[ (n+1) \left( 1 - \frac{2}{m} \right) + 2 - \frac{1}{m} \right] T(B_{-n-1}) + \right. \\ \left. + (n+1) R^{2n+1} \operatorname{grad} B_{-n}^{(0)} - R^{2n+1} \frac{1}{2G} \Pi_r^{(-n-1)} \right\} = \\ = \frac{nR_0^2}{2n+3} \operatorname{grad} \operatorname{div} B_{n+2} + \frac{n+1}{2n-1} R_0^2 \left( \frac{R}{R_0} \right)^{2n+1} \operatorname{grad} \operatorname{div} B_{-n+1}. \quad (6.7) \end{aligned}$$

Второе уравнение получим из написанного, заменив  $R_0$  на  $R_1$ ; далее решим эти уравнения относительно совокупностей величин, заключённых в фигурные скобки, представляющих однородные пространственные гармонические векторы  $n$ -й степени. Легко найдём:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2(m-1)}{m} (n-1) \mathbf{B}_n + \frac{n-2+\frac{2}{m}}{2n+1} (\mathbf{B}_n) + \frac{2 \left[ n \left( 1 - \frac{2}{m} \right) - 2 + \frac{1}{m} \right]}{(2n-1)(2n+1)} \times \\ & \times \mathbf{T}(\mathbf{B}_n) - n \operatorname{grad} B_{n+1}^{(0)} - \frac{1}{2G} \mathbf{II}_r^{(n)} = \frac{n}{2n+3} \frac{R_0^{2n+3} - R_1^{2n+3}}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \times \\ & \times \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_{n+2} + \frac{n+1}{2n-1} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} R^{2n+1} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_{-n+1}, \\ & - \frac{2(m-1)}{m} (n+2) \mathbf{B}_{-n+1} + \frac{n+3-\frac{2}{m}}{2n+1} \mathbf{K}(\mathbf{B}_{-n+1}) - \\ & - \frac{2 \left[ (n+1) \left( 1 - \frac{2}{m} \right) + 2 - \frac{1}{m} \right]}{(2n+3)(2n+1)} \mathbf{T}(\mathbf{B}_{-n+1}) + (n+1) \operatorname{grad} B_{-n}^{(0)} - \\ & - \frac{1}{2G} \mathbf{II}_r^{(-n-1)} = \frac{n+1}{2n-1} \frac{R_0^{2n-1} - R_1^{2n-1}}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} R_0^2 R_1^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_{-n+1} - \\ & - \frac{n}{2n+3} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \left( \frac{R_0 R_1}{R} \right)^{2n+1} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_{n+2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Второе соотношение получается из первого при замене  $n$  на  $(-n-1)$ .

Градиентные векторы  $\operatorname{grad} B_{n+1}^{(0)}$ ,  $\operatorname{grad} B_{-n}^{(0)}$  выберем равными соответствующим градиентным векторам в правых частях (6.8):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{grad} B_{n+1}^{(0)} &= - \frac{1}{2n+3} \frac{R_0^{2n+3} - R_1^{2n+3}}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_{n+2}, \\ \operatorname{grad} B_{-n}^{(0)} &= \frac{1}{2n-1} \frac{R_0^{2n-1} - R_1^{2n-1}}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} R_0^2 R_1^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_{-n+1}. \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Эти соотношения, таким образом, справедливы при всех целых (положительных и отрицательных)  $n$ .

Выражения (6.8) дают:

$$\begin{aligned}
 & \frac{2(m-1)}{m} (n-1) \mathbf{B}_n + \frac{n-2 + \frac{2}{m}}{2n+1} \mathbf{K}(\mathbf{B}_n) + \\
 & \quad + \frac{2 \left[ n \left( 1 - \frac{2}{m} \right) - 2 + \frac{1}{m} \right]}{(2n-1)(2n+1)} \mathbf{T}(\mathbf{B}_n) = \\
 & = \frac{1}{2G} \mathbf{\Pi}_r^{(n)} + \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \frac{n+1}{2n-1} R^{2n+1} \text{grad div } \mathbf{B}_{-n+1}, \\
 & \quad - \frac{2(m-1)}{m} (n+2) \mathbf{B}_{-n-1} + \frac{n+3 - \frac{2}{m}}{2n+1} \mathbf{K}(\mathbf{B}_{-n-1}) - \\
 & \quad - \frac{2 \left[ (n+1) \left( 1 - \frac{2}{m} \right) + 2 - \frac{1}{m} \right]}{(2n+3)(2n+1)} \mathbf{T}(\mathbf{B}_{-n-1}) = \\
 & = \frac{1}{2G} \mathbf{\Pi}_r^{(-n-1)} - \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \frac{n}{2n+3} \left( \frac{R_0 R_1}{R} \right)^{2n+1} \text{grad div } \mathbf{B}_{n+2}.
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Выражение (6.5) вектора  $R\mathbf{P}_r$  может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2G} R\mathbf{P}_r = & \frac{1}{2G} \mathbf{\Pi}_r + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n+1}{2n-1} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} R^{2n+1} \text{grad div } \mathbf{B}_{-n+1} - \\
 & - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{2n+3} \left( R^2 - \frac{R_0^{2n+3} - R_1^{2n+3}}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \right) \text{grad div } \mathbf{B}_{n+2}.
 \end{aligned}$$

Для упрощения этой записи заменим в первой сумме индекс суммирования  $n$  на  $(-n+1)$ , а во второй  $n$  на  $n-2$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2G} R\mathbf{P}_r = & \frac{1}{2G} \mathbf{\Pi}_r - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n-2}{2n-1} \left[ R^2 - \frac{R_0^{2n-1} - R_1^{2n-1}}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} + \right. \\
 & \left. + \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} \left( \frac{R_0 R_1}{R} \right)^{2n-3} \right] \text{grad div } \mathbf{B}_n. \tag{6.11}
 \end{aligned}$$

Остаётся найти вектор  $\mathbf{B}_n$ , для чего возвращаемся к уравнениям (6.10). Перепишем эти уравнения, заменив во втором  $(n+2)$  на  $n$ :

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{2(m-1)}{m} (n-1) \mathbf{B}_n + \frac{n-2 + \frac{2}{m}}{2n+1} K(\mathbf{B}_n) + \frac{2 \left[ n \left( 1 - \frac{2}{m} \right) - 2 + \frac{1}{m} \right]}{(2n-1)(2n+1)} \times \\
 & \times T(\mathbf{B}_n) - \frac{n+1}{2n-1} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} R^{2n+1} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_{-n+1} = \frac{1}{2G} \mathbf{\Pi}_r^{(n)}, \\
 & \frac{n-2}{2n-1} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} \left( \frac{R_0 R_1}{R} \right)^{2n-3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_n - \frac{2(m-1)}{m} n \mathbf{B}_{-n+1} + \\
 & + \frac{n+1 - \frac{2}{m}}{2n-3} K(\mathbf{B}_{-n+1}) - \frac{2 \left[ (n-1) \left( 1 - \frac{2}{m} \right) + 2 - \frac{1}{m} \right]}{(2n-1)(2n-3)} T(\mathbf{B}_{-n+1}) = \\
 & = \frac{1}{2G} \mathbf{\Pi}_r^{(-n+1)}
 \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Из этой системы двух уравнений должны быть найдены неизвестные векторы  $\mathbf{B}_n$  и  $\mathbf{B}_{-n+1}$ .

Вычисляем операцию  $\operatorname{div}$  от обеих частей этих уравнений. Надо использовать формулы (1.20) и (1.24). Получим:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{2[mn^2 - (m-2)n + m - 1]}{(2n-1)m} \operatorname{div} \mathbf{B}_n + \frac{(n+1)(2n+1)n}{2n-1} \times \\
 & \times \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} R^{2n-1} \operatorname{div} \mathbf{B}_{-n+1} = \frac{1}{2G} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}_r^{(n)}, \\
 & \frac{(2n-3)(n-2)(n-1)}{(2n-1)} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} \frac{(R_0 R_1)^{2n-3}}{R^{2n-1}} \operatorname{div} \mathbf{B}_n - \\
 & - \frac{2[m(n-1)^2 + (m-2)(n-1) + m - 1]}{(2n-1)m} \operatorname{div} \mathbf{B}_{-n+1} = \\
 & = \frac{1}{2G} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}_r^{(-n+1)}.
 \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

Второе уравнение получается из первого при замене  $n$  на  $(-n+1)$ . Определитель этой системы будет:

$$\begin{aligned}
 D_n = D_{-n+1} = & \frac{1}{(2n-1)^2} \left\{ (n-2)(n-1)n(n+1)(2n-3)(2n+1) \times \right. \\
 & \times \frac{(R_0^2 - R_1^2)^2 (R_0 R_1)^{2n-3}}{(R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1})(R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3})} - \frac{4}{m^2} [mn^2 - (m-2)n + m - 1] \times \\
 & \left. \times [m(n-1)^2 + (m-2)(n-1) + m - 1] \right\}, \quad (6.14)
 \end{aligned}$$

и выражение  $\operatorname{div} \mathbf{B}_n$  приведётся к виду

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{B}_n = & -\frac{1}{2GD_n} \left\{ \frac{2[m(n-1)^2 + (m-2)(n-1) + m - 1]}{(2n-1)m} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}_r^{(n)} + \right. \\
 & \left. + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2n-1} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} R^{2n-1} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}_r^{(-n+1)} \right\}. \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

Остается подставить это выражение в (6.11). Сумма в этой формуле разобьётся на две, которые мы объединим в одну путём замены индекса суммирования. Получим:

$$\begin{aligned}
 RP_r = \Pi_r + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n-2}{D_n^*} \left\{ 2 \left[ (n-1)^2 + \frac{m-2}{m} (n-1) + \frac{m-1}{m} \right] \left[ R^2 - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{R_0^{2n-1} - R_1^{2n-1}}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} + \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} \left( \frac{R_0 R_1}{R} \right)^{2n-3} \right] \text{grad div } \Pi_r^{(n)} - \right. \\
 \left. - (n-1)(n+1)(2n-3) \left[ R^2 - \frac{R_0^{2n-1} - R_1^{2n-1}}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} (R_0 R_1)^2 - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{(R_0^2 - R_1^2) R^{2n+1}}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \right] \frac{(R_0^2 - R_1^2) (R_0 R_1)^{2n-3}}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} \text{grad } \frac{\text{div } \Pi_r^{(n)}}{R^{2n-1}} \right\}, \quad (6.16)
 \end{aligned}$$

где обозначено:

$$D_n^* = (2n-1)^2 D_n. \quad (6.17)$$

Таким образом определён вектор напряжения на площадке, принадлежащей любой сферической поверхности  $R = \text{const}$ , через гармонический вектор  $\Pi_r$ , который находится непосредственно по крайевым данным. Проведённое вычисление не превосходит по трудности того, которое было проведено для нахождения вектора перемещений в задаче о полой сфере при заданных на её границах перемещениях. Но в последнем случае решение задачи следовало считать найденным после того, как было получено выражение (5.26) для вектора  $u$ . В рассматриваемой же задаче знание  $P_r$ , т. е. напряжений  $\sigma_R$ ,  $\tau_{R\theta}$ ,  $\tau_{R\varphi}$ , ещё не определяет тензора напряжений. Поэтому надо преодолеть некоторые вычислительные трудности, связанные с определением вектора перемещений  $u$ , по которому найдутся остальные напряжения.

Прежде чем переходить к разысканию вектора  $u$ , заметим, что из полученных выше результатов легко находится сумма нормальных напряжений: действительно, из решения в форме П. Ф. Папковича следует, что

$$\text{div } u = \frac{2(m-2)}{m} \text{div } B = \frac{2(m-2)}{m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{div } B_n$$

и, значит,

$$\sigma_R + \sigma_\theta + \sigma_\varphi = 2G \frac{m+1}{m-2} \text{div } u = \frac{4G(m+1)}{m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{div } B_n.$$

Подставив сюда значение  $\operatorname{div} B_n$  по (6.15), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_R + \sigma_\theta + \sigma_\varphi = & -\frac{2(m+1)}{m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2n-1}{D_n^*} \left\{ [(n-1)^2 + \frac{m-2}{m}(n-1) + \right. \\ & \left. + \frac{m-1}{m}] 2 \operatorname{div} \Pi_r^{(n)} - \right. \\ & \left. - \frac{(n-1)(n-2)(2n+3)}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} (R_0^3 - R_1^3) (R_0 R_1)^{2n-3} \times \operatorname{div} \frac{\Pi_r^{(n)}}{R^{2n-1}} \right\}. \quad (6.18) \end{aligned}$$

Заметим ещё, что внешние силы, приложенные к поверхностям, ограничивающим полую сферу, должны удовлетворять условиям статики: обращаются в нуль их главный вектор

$$V = \int_{\Sigma_0} \int [R_0^3 (\mathbf{P}_r)_{R=R_0} - R_1^3 (\mathbf{P}_r)_{R=R_1}] do^* = 0 \quad (6.19)$$

и главный момент

$$M = \int_{\Sigma_0} \int \mathbf{r} \times [R_0^3 (\mathbf{P}_r)_{R=R_0} - R_1^3 (\mathbf{P}_r)_{R=R_1}] do^* = 0. \quad (6.20)$$

Здесь интегрирование перенесено на поверхность единичной сферы  $\Sigma_0$ ; через  $\mathbf{r} = \frac{1}{R_1} \mathbf{R}_1 = \frac{1}{R_0} \mathbf{R}_0$  обозначен вектор-радиус точек поверхности единичной сферы,  $do^*$  — элемент площади на ней.

При подстановке вместо  $(\mathbf{P}_r)_{R=R_0}$  и  $(\mathbf{P}_r)_{R=R_1}$  их значений в форме рядов в первом интеграле выпадут все слагаемые, кроме  $Y_0^{(0)}$ ,  $Y_0^{(1)}$ , а во втором — все, кроме  $Y_1^{(0)}$ ,  $Y_1^{(1)}$ .

Получим вместо (6.19):

$$\begin{aligned} V = \int_{\Sigma_0} \int (R_0 Y_0^{(0)} - R_1 Y_0^{(1)}) do^* &= (R_0 - R_1) \int_{\Sigma_0} \int \Pi_r^{(0)} do^* = \\ &= 4\pi (R_0 - R_1) \Pi_r^{(0)} = 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$\Pi_r^{(0)} = 0, \quad (6.21)$$

и в разложении в ряд гармонической функции  $\Pi_r$  должно отсутствовать постоянное слагаемое.

Аналогично преобразуем (6.20):

$$\begin{aligned} M = \int_{\Sigma_0} \int \mathbf{r} \times [R_0^3 (\mathbf{P}_r)_{R=R_0} - R_1^3 (\mathbf{P}_r)_{R=R_1}] do^* &= \\ = \int_{\Sigma_0} \int \mathbf{r} \times (R_0^3 Y_1^{(0)} - R_1^3 Y_1^{(1)}) do^*. \end{aligned}$$

Под знаком интеграла стоит значение на поверхности единичной сферы  $\Sigma_0$  функции, которая внутри этой сферы принимает значение

$$R(R_0^2 Y_1^{(0)} - R_1^2 Y_1^{(1)}) = (R_0^3 - R_1^3) \Pi_r^{(1)}$$

[см. (6.3)]. Поэтому

$$\begin{aligned} M &= \int_{\Sigma_0} \int r \times (R_0^2 Y_1^{(0)} - R_1^2 Y_1^{(1)}) do^* = \\ &= (R_0^3 - R_1^3) \int \int \int \text{rot } \Pi_r^{(1)} d\tau, \end{aligned}$$

где интегрирование распространено по объёму единичной сферы; но  $\text{rot } \Pi_r^{(1)}$  — постоянный вектор и, значит,

$$M = \frac{4\pi}{3} (R_0^3 - R_1^3) \text{rot } \Pi_r^{(1)} = 0.$$

Это показывает, что вектор  $\Pi_r^{(1)}$  должен быть градиентным:

$$\Pi_r^{(1)} = \text{grad } H, \quad (6.22)$$

причём  $H$  — некоторая квадратичная форма переменных  $x, y, z$ .

Переходим к составлению выражения вектора перемещения. В формуле (6.12) заменяем векторы  $K(B_n)$  и  $T(B_n)$  их развёрнутыми выражениями (1.29) и (1.30), причём  $\text{grad } R \cdot B_n$  заменим по (3.8). Тогда получим соотношение, связывающее  $B_n$ ,  $R \times \text{rot } B_n$  и операции над  $\text{div } B_n$ :

$$\begin{aligned} -n \left( n - 3 + \frac{4}{m} \right) B_n - \left( n - 2 + \frac{2}{m} \right) R \times \text{rot } B_n + \frac{2}{m} R \text{div } B_n + \\ + \frac{n-2}{2n-1} R^2 \text{grad div } B_n = \\ = \frac{\Pi_r^{(n)}}{2G} + \frac{n+1}{2n-1} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} R^{2n+1} \text{grad div } B_{-n+1}. \quad (6.23) \end{aligned}$$

Взяв  $\text{rot}$  от обеих частей этого выражения, получим:

$$\begin{aligned} 2 \frac{m-1}{m} (n-1) \text{rot } B_n + 2 \left( \frac{n-2}{2n-1} - \frac{1}{m} \right) R \times \text{grad div } B_n = \\ = \frac{1}{2G} \text{rot } \Pi_r^{(n)} + \frac{(n+1)(2n+1)}{2n-1} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} R^{2n-1} R \times \\ \times \text{grad div } B_{-n+1}. \quad (6.24) \end{aligned}$$



Решение в форме П. Ф. Папковича представляется в виде

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n,$$

$$u_n = \frac{4(m-1)}{m} B_n - \text{grad } R \cdot B_n - \text{grad } B_n^{(0)}.$$

Заменив  $\text{grad } R \cdot B_n$  по (3.8), а  $\text{grad } B_n^{(0)}$  по (6.9), можем написать также:

$$u_n = -\left(n - 3 + \frac{4}{m}\right) B_n - R \times \text{rot } B_n + \\ + \frac{1}{2n-1} \frac{R_0^{2n-1} - R_1^{2n-1}}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} \text{grad div } B_n. \quad (6.25)$$

Остаётся исключить из этого выражения с помощью (6.23), (6.24) векторы  $B_n$  и  $R \times \text{rot } B_n$ . Тогда  $u_n$  выразится через операции над  $\text{div } B_n$  и  $\text{div } B_{-n+1}$ . В членах, содержащих последнюю величину, при суммировании заменим индекс  $n$  на  $(-n+1)$ . Тогда придём к выражению

$$u = \frac{1}{2G} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{n} \Pi_r^{(n)} - \frac{1}{n(n-1)} R \times \text{rot } \Pi_r^{(n)} \right] - \\ - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left\{ R^2 - \frac{R_0^{2n-1} - R_1^{2n-1}}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} + \frac{R_0^3 - R_1^3}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} \left( \frac{R_0 R_1}{R} \right)^{2n-3} \right\} \times \\ \times \text{grad div } B_n + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)} \left[ \frac{2n+m-1}{m(n-1)} R^2 + \right. \\ \left. + (2n-3) \frac{R_0^3 - R_1^3}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} \left( \frac{R_0 R_1}{R} \right)^{2n-3} \right] \text{grad div } B_n + \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)} \left[ \frac{2}{m} \{n(m-4) - 2m + 2\} - \right. \\ \left. - (n-2)(2n-3) \frac{R_0^3 - R_1^3}{(R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}) R^2} \left( \frac{R_0 R_1}{R} \right)^{2n-3} \right] R \text{div } B_n. \quad (6.26)$$

Задачу можно считать решённой, так как значение  $\text{div } B_n$  было выше найдено через исходные данные, т. е. через  $\Pi_r^{(n)}$  и  $\Pi_r^{(-n+1)}$ ;

нужно лишь сделать подстановку (6.15) в (6.26). Получим:

$$\begin{aligned}
 2Gu = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\Pi_r^{(n)}}{n} - \frac{R \times \text{rot } \Pi_r^{(n)}}{n(n-1)} \right] + \\
 & + \frac{2}{m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{D_n^*} [m(n-1)^2 + (m-2)(n-1) + m-1] \left[ R^2 - \frac{R_0^{2n-1} - R_1^{2n-1}}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{R_0^3 - R_1^3}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} \left( \frac{R_0 R_1}{R} \right)^{2n-3} \right] \text{grad div } \Pi_r^{(n)} + \\
 & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(n-1)(n-2)(2n-3)}{D_n^*} \frac{R_0^3 - R_1^3}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} (R_0 R_1)^{2n-3} \times \\
 & \times \left[ R^2 - \frac{R_0^{2n-1} - R_1^{2n-1}}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} R_0^3 R_1^3 - \frac{R_0^3 - R_1^3}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} R^{2n+1} \right] \text{grad } \frac{\text{div } \Pi_r^{(n)}}{R^{2n-1}} - \\
 & - \frac{4}{m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n D_n^*} [m(n-1)^2 + (m-2)(n-1) + m-1] \left[ \frac{2n+m-1}{m(n-1)} R^2 + \right. \\
 & \quad \left. + (2n-3) \frac{R_0^3 - R_1^3}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} \left( \frac{R_0 R_1}{R} \right)^{2n-3} \right] \text{grad div } \Pi_r^{(n)} + \\
 & + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(n-2)(2n-3)(R_0^3 - R_1^3)(R_0 R_1)^{2n-3}}{D_n^* R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} \left[ \frac{2n-m-1}{mn} R^2 + \right. \\
 & \quad \left. + (2n+1) \frac{R_0^3 - R_1^3}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} R^{2n+1} \right] \text{grad } \frac{\text{div } \Pi_r^{(n)}}{R^{2n-1}} - \\
 & - \frac{2}{m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n D_n^*} [m(n-1)^2 + (m-2)(n-1) + m-1] \left[ \frac{2}{m} (nm-4n-2m+2) - \right. \\
 & \quad \left. - (n-2)(2n-3) \frac{(R_0^3 - R_1^3)(R_0 R_1)^{2n-3}}{(R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}) R^{2n-1}} \right] R \text{div } \Pi_r^{(n)} - \\
 & - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(n-2)(2n-3)}{D_n^*} \left[ \frac{2}{m} \{ (n-1)(m-4) + 2m-2 \} - \right. \\
 & \quad \left. - (n+1)(2n+1) \frac{R_0^3 - R_1^3}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} R^{2n-1} \right] \times \\
 & \times \frac{R_0^3 - R_1^3}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} \frac{(R_0 R_1)^{2n-3}}{R^{2n-1}} R \text{div } \Pi_r^{(n)}. \quad (6.27)
 \end{aligned}$$

Каждая сумма в этой формуле разбивается на две:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} + \sum_{n=-1}^{-\infty}.$$

Но  $\Pi_r^0 = 0$ , и первая сумма может быть распространена на значения  $n$  от 1 до бесконечности. Во второй сумме индекс суммирования  $n$  заменим на  $(-n_1 - 1)$ . Тогда пределы суммирования по  $n_1$  будут нуль и бесконечность. В соответствии с этим разбиением сумм можно и вектор  $u$  представить как сумму двух векторов:  $u^+$  и  $u^-$ . Выражение  $u^+$  получим, переписав (6.27) и распространив суммирование по  $n$  от 1 до бесконечности. Выражение  $u^-$  будет:

$$\begin{aligned}
 2Gu^- = & - \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{n+1} \Pi_r^{(-n-1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} R \times \text{rot} \Pi_r^{(-n-1)} \right] + \\
 & + \frac{2}{m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{D_{-n-1}^*} [m(n+2)^2 - (m-2)(n+2) + (m-1)] \times \\
 & \times \left[ R^2 - \frac{R_0^{2n+3} - R_1^{2n+3}}{R_0^{2n+5} - R_1^{2n+5}} R_0^2 R_1^2 - \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+5} - R_1^{2n+5}} R^{2n+5} \right] \text{grad div} \Pi_r^{(-n-1)} + \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+3)(2n+5)}{D_{-n-1}^*} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+5} - R_1^{2n+5}} \left[ R^2 - \frac{R_0^{2n+3} - R_1^{2n+3}}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \left( \frac{R_0 R_1}{R} \right)^{2n+1} \right] \text{grad} R^{2n+3} \text{div} \Pi_r^{(-n-1)} + \\
 & + \frac{4}{m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1) D_{-n-1}^*} [m(n+2)^2 - (m-2)(n+2) + m-1] \times \\
 & \times \left[ \frac{2n+3-m}{m(n+2)} R^2 + (2n+5) \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+5} - R_1^{2n+5}} R^{2n+5} \right] \text{grad div} \Pi_r^{(-n-1)} - \\
 & - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)(2n+5)}{D_{-n-1}^*} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+5} - R_1^{2n+5}} \left[ \frac{2n+3+m}{m(n+1)} R^2 + \right. \\
 & \quad \left. + (2n+1) \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \left( \frac{R_0 R_1}{R} \right)^{2n+1} \right] \text{grad} R^{2n+3} \text{div} \Pi_r^{(-n-1)} - \\
 & - \frac{2}{m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1) D_{-n-1}^*} [m(n+2)^2 - (m-2)(n+2) + (m-1)] \times \\
 & \times \left[ \frac{2}{m} \{ (m-4)(n+1) + 2m-2 \} - (n+3)(2n+5) \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+5} - R_1^{2n+5}} R^{2n+3} \right] \times \\
 & \times R \text{div} \Pi_r^{(-n-1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)(2n+5)}{D_{-n-1}^*} \left[ \frac{2}{m} \{ (n+2)(m-4) - 2m+2 \} - \right. \\
 & \quad \left. - n(2n+1) \frac{(R_0^2 - R_1^2)(R_0 R_1)^{2n+1}}{(R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}) R^{2n+3}} \right] \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+5} - R_1^{2n+5}} R^{2n+3} R \text{div} \Pi_r^{(-n-1)},
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

Для сферической полости  $\Pi_r^{(n)} = 0$  при  $n = 1, 2, \dots$  и слагаемое  $u^+$  в выражении  $u$  отпадает; сделав же в выражении (6.28) для  $u^-$  предельный переход  $R_1 \rightarrow \infty$ , придём к ранее полученному выражению (4.7) вектора перемещения в случае сферической полости. Для сплошной сферы обращаются в нуль векторы  $\Pi_r^{(-n-1)}$  и отпадает выражение  $u^-$ ; предельный переход при  $R_1 \rightarrow 0$  в выражении  $u^+$  также приводит к соотношению (3.29), дающему вектор перемещения в случае сплошной сферы.

Имея представление сосредоточенной силы в форме ряда (3.32), легко составить по (6.3) выражения гармонических векторов  $\Pi_r^{(n)}$  и  $\Pi_r^{(-n-1)}$ , соответствующие произвольной уравновешенной системе сосредоточенных сил. Чтобы получить решение задачи о полой сфере, следует эти выражения подставить в (6.27), предварительно вычислив, как указано в конце § 3, операции  $\text{rot } \Pi_r^{(n)}$ ,  $\text{div } \Pi_r^{(n)}$  и т. д. Однако в противоположность случаю сплошной сферы выделение из этих рядов медленно сходящихся частей представило бы значительные затруднения.

## ПРИМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ К ГЛАВЕ 8

Как указывалось в примечаниях к главе 6, задача о равновесии упругой сферы (сплошной и полой) была впервые рассмотрена в классическом сочинении Ляме по теории криволинейных координат.

Решение Ляме построено в сферических координатах. Предполагая, что заданные на внутренней и внешней поверхностях ( $R = R_0$  и  $R = R_1$ ) напряжения  $\sigma_R$ ,  $\tau_{R\vartheta}$ ,  $\tau_{R\varphi}$  представлены в форме двойных рядов по произведениям присоединённых функций Лежандра  $P_n^{(m)}(\cos \vartheta)$  и тригонометрических функций  $\cos m\varphi$  и  $\sin m\varphi$  (причём  $m = 0, 1, \dots, n$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Ляме указывает способ построения двойных рядов, определяющих по этим условиям вектор перемещения, удовлетворяющий уравнениям равновесия теории упругости в перемещениях. Неопределённые коэффициенты, входящие в выражения слагаемых  $u_R^{(m,n)}$ ,  $u_\vartheta^{(m,n)}$ ,  $u_\varphi^{(m,n)}$  этих рядов, могут быть определены из системы двенадцати линейных алгебраических уравнений для каждой комбинации  $(n, m)$ ; в частном случае симметрии вращения, т. е. при  $m = 0$ , число этих уравнений уменьшается до шести.

После Ляме задача о равновесии сферы и полой сферы была рассмотрена Вильямом Томсоном (W. Thomson) в мемуаре «Dynamical Problems regarding Elastic Spheroidal Shells and Spheroids of Incompressible Liquid» (Mathematical and Phys. Papers, vol. 3, стр. 351, 1892; опубликовано впервые в 1863 г.). Это решение воспроизведено во второй части известного «Трактата по натуральной философии» В. Томсона и П. Тэта (Treatise on Natural Philosophy, vol. I, part II, 1883). С некоторым видоизменением наиболее простой случай сплошной сферы изложен в курсе Лява, а также в курсе Л. С. Лейбензона и в книге Е. Треффца «Математическая теория упругости» (ОНТИ, 1934).

В. Томсон, пользуясь декартовыми координатами, исходит из представления решения уравнений теории упругости в перемещениях через три гармонические функции, которые он разыскивает в форме рядов по пространственным гармоническим полиномам  $\varphi_n(x, y, z)$ . В противоположность Ляме каждый из таких полиномов Томсон определяет целиком по краевым

условиям, представляемым в рядах сферических функций Лапласа  $Y_n(\theta, \varphi)$ . Особенно просто доводится до конца в такой форме решение для приводимого теперь во многих учебниках случая сплошной сферы при заданных на её поверхности перемещениях; несколько более сложным оказывается случай задания напряжений по поверхности. Томсону удалось довести до конца также решение задачи о полой сфере с заданными перемещениями, но для этой же задачи при задании напряжений он ограничился лишь указанием хода составления уравнений, решение которых позволило бы построить указанные выше ряды.

В главе 8 мы, следуя методу В. Томсона, исходя из решения уравнений теории упругости в форме, предложенной П. Ф. Папковичем; наличие четвёртой гармонической функции в этом решении позволяет упростить ход решения и уменьшить объём вычислений; сокращению записей и возможности представить результаты в достаточно отчётливой форме способствует векторная форма, в которой проведено решение. Содержание §§ 5 и 6 было опубликовано в нашей работе «Равновесие упругой полой сферы» (Прикл. матем. и мех. 17, № 3, 1953, стр. 311).

Задача о равновесии упругой сферы рассматривалась также О. Тедоне в работе, указанной в примечании к главе 3, а также Сомильяна «Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo limitato da una o due superfici sferiche» (Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Scienze Fisiche e Matem., Ser. I, 1887, стр. 100) и Чеппути «Sulla deformazione di un involucro sferico isotropo per date forze agenti sulle due superfici limitate» (Atti della Reale Accademia dei Lincei, Mem. della Classe di Sc. Fisiche, Matematiche e Naturali, 1891).

Интересное приложение задачи о равновесии полой сферы содержится в статье Л. С. Лейбензона «О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек» (Собрание трудов, т. 1, Изд-во Акад. наук СССР, 1951, стр. 50; впервые опубликовано в Учёных записках Юрьевского университета, т. 1).

Формула (4.7) § 4 может служить, как указал Г. Ю. Джанелидзе, после перехода к пределу  $R_0 \rightarrow 0$  для оценки быстроты затухания возмущений, вызванных приложением особенностей различной природы (см. §§ 2—3 главы 2).

---

## ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абрамов В. М. 325  
Айзенберг Д. Ю. 250  
Алексеев С. А. 248  
Аппель П. 287
- Бартон 439  
Бельтрами 57  
Беляев Н. Н. 308, 324, 325  
Бидерман В. Л. 440  
Блинчиков Т. Н. 69  
Блох В. И. 69, 248  
Буссинеск 62, 87, 143, 144
- Вангерин 438  
Вебер К. 379  
Вебстер А. 105  
Власов В. З. 69  
Войновский-Кригер 248
- Галёркин Б. Г. 62, 248, 379, 440  
Галин Л. А. 324, 325  
Герц Г. 115, 144, 324  
Горбунов-Посадов И. М. 325  
Грин 250  
Гринберг Г. А. 249  
Гук 43  
Гутман С. Г. 248
- Джанелидзе Г. Ю. 69, 70, 485  
Дин 145  
Динник А. Н. 324, 439  
Журавский А. М. 116, 121
- Иериш 438
- Клеммов 249  
Кокер Э. 439
- Колосов Г. В. 243  
Корн 63, 70  
Короткин В. Г. 144  
Кочин Н. Е. 68  
Коши 11  
Кри 438  
Круг Е. М. 250  
Крутков Ю. А. 69, 70
- Ламб 266  
Ланден 361  
Лармор 379  
Лебедев Н. Н. 70  
Лейбензон Л. С. 68, 325, 484, 485  
Леонов М. Я. 325  
Лехницкий С. Г. 250  
Лифшиц П. З. 439  
Ляв А. 144, 198, 248, 325  
Ляме 379, 384, 387
- Майзель В. М. 70  
Максвелл 28  
Малкин Я. Ф. 198  
Маркерр 198  
Маслов Г. Н. 70, 250  
Миндлин 145, 325  
Митчелл 57, 145  
Морера 28  
Моссаковский В. И. 325  
Мухелишвили Н. И. 69, 246, 250
- Нейбер 51, 69, 145, 249
- Орландо 198
- Папкович П. Ф. 51, 68, 69, 249, 381, 484

- Парсонс 145  
Похгаммер 438  
Прокопов В. К. 249, 250, 382, 439, 440  
Розенблюм В. И. 440  
Розенталь 379  
Садовский М. 70, 250, 379, 380  
Саутвелл 379  
Сеге Г. 105  
Сен-Венан 23, 201  
Слободянский М. Г. 69  
Снеддон 145, 198, 325  
Соляник-Красса К. В. 440  
Сомильяна 145, 485  
Стеклов В. А. 438, 439  
Степанов В. В. 262  
Стреттон Дж. А. 144  
Тедоне О. 145, 198, 485  
Тер-Мкртычан Л. Н. 69  
Тимофеев А. Ф. 296  
Тимошенко С. П. 68, 70, 144, 248, 325, 439  
Тимп 145  
Томсон В. 143, 484  
Треффтц Е. 484  
Тэт П. 484  
Фадле 249  
Файлон Л. 439  
Фепплъ А. 439  
Фепплъ Л. 439  
Филоненко-Бородич М. М. 68, 70  
Фичера 380  
Черрути 144, 145, 485  
Шапиро Г. С. 70, 145, 198, 250, 440  
Шефер 70  
Шифф М. А. 439  
Штаерман И. Я. 145, 273, 279, 283, 324, 325  
Штернберг Е. 70, 250, 379, 380  
Эйбенкс 379  
Эри 204
-

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Вектор гармонический однородный 443  
— напряжения 10  
— Папковича 51  
— перемещения 15, 24  
— —, представление в форме Корна 63  
Взаимность касательных напряжений 14
- Герца задача 315 и д.  
Градиент вектора 16, 20, 35  
— скаляра 35  
— тензора 57  
Гука обобщённый закон 43, 45
- Девiator тензора 21  
Дельта-символ Кронекера 30  
Деформация 15 и д.  
— аксиально-симметричная 41  
— бесконечного цилиндра, нагружённого по боковой поверхности 404  
— кручения 41  
— меридиональная 41  
— цилиндра конечной длины, нагружённого по боковой поверхности 399  
Диада 17  
Дивергенция вектора перемещения 17  
— тензора 12  
— — напряжений 36  
Диск вращающийся 223  
Дислокация 235
- Жёсткость плиты цилиндрическая 206
- Зависимости Ляме 33, 41  
— Сен-Венана 23
- Задача Герца 315 и д.  
— контактная пространственная 250 и д.  
— краевая для сплошной сферы 447 и д.  
— — для полой сферы 337, 462, 472  
— — для сферической полости в неограниченной среде 459  
— Ляме 85  
— — для сферы 342  
— — для цилиндра 387  
— о дислокации 235  
Закон Герца 315  
— Гука обобщённый 43, 45
- Изгиб плиты 205, 212  
— полого конуса 142  
— упругого слоя 146 и д., 157 и д., 185 и д.  
Инвариант тензора линейный (первый) 17  
Индекс немой 31
- Конус упругий, нагружённый силой, приложенной к вершине 139  
Концентрация напряжений в окрестности сферической полости 343, 460  
Координаты криволинейные 29, 36 и д.  
— цилиндрические 38  
— эллиптические 259, 287  
Коши соотношения 11  
Коэффициент объёмного сжатия 43  
— Пуассона 45  
Коэффициенты Ляме 30  
Кристоффеля символ 31  
Кронекера дельта-символ 30



- Лямбда-функция 102
- Лапласиан в криволинейных координатах 35
- Леви-Чивита символ 30
- Линия координатная 29
- центров вращения 86
- — расширения 86
- — — двойная 126
- Ляме зависимости 31, 41
- задача 85, 342, 387
- коэффициенты 30
- произведение 290
- Модуль нормальной упругости (модуль Юнга) 44
- сдвига 43
- Момент изгибающий 206
- крутящий 206
- сосредоточенный 81
- Набла-оператор 20, 34
- Нагружение по эллиптической площадке неравномерное 112
- Нагрузка распределённая, нормальная к граничной плоскости упругого полупространства 89 и д.
- Напряжение касательное 9
- нормальное 9
- Напряжения тепловые 64
- — в плите 230
- — в упругом слое 191
- Операции, дифференциальные от диады 34
- над тензорами 17
- Определение перемещения по тензору деформации 22
- Особенность распределённая 86
- точечная 71
- Остроградского-Гаусса формула 12, 452
- Папковича скаляр 51
- Перемещение 15
- Плита толстая 200 и д.
- — круглая 218 и д.
- Плита толстая круглая, заделанная по краю, под действием собственного веса 222
- — — , — — — , нагружённая сосредоточенной силой в центре верхнего торца 226
- — — , опёртая по краю, равномерно нагружённая по верхнему торцу 219
- — — , тепловые напряжения в ней 230 и д.
- Поверхность координатная 29
- Полином гармонический однородный 291, 442
- Полость сферическая в неограниченной упругой среде 459
- — в упругом теле, подверженном действию чистого сдвига в плоскости меридиана 345
- эллипсоидальная 371
- Полупространство упругое 89 и д.
- Полупрямая центров расширения 86
- Потенциал векторный 61
- простого слоя 93, 266, 298
- скалярный 61
- Представление тензора диадное 17
- Прилегание штампа плотное 279
- Принцип Сен-Венана 201
- Произведение Ляме 290
- тензора на вектор 10
- Пуассона коэффициент 45
- число 44
- Равновесие элементарного тетраэдра 11
- Растяжение упругого слоя 146 и д.
- цилиндра нормальными напряжениями 386
- Расширение объёмное 17
- Решение задачи о цилиндре однородное 429
- — — — полиномиальное 388
- — — — элементарное 386
- элементарное второго типа 87
- Решения однородные для толстой плиты 200
- Ротор вектора 36

- Ротор тензора 20
- Сближение тел 321
- Сдвиг 16, 37
- Сен-Венана зависимости 23  
— принцип 201
- Сжатие упругих тел 315  
— упругого слоя 174 и д.  
— — шара сосредоточенными силами 362  
— упругой плиты 201
- Сила двойная 78, 81  
— объёмная 11  
— — в упругом слое 191  
— перерезывающая 206  
— — обобщённая 211  
— поверхностная 11  
— сосредоточенная в неограниченной упругой среде 71  
— — в упругом полупространстве 134  
— —, нормальная к граничной плоскости упругого полупространства 89 и д.
- Символ Кристоффеля второго рода 31  
— Кронекера 30  
— Леви-Чивита 30
- Симметричность тензора напряжений 14
- Симметрия аксиальная 40
- Система сил, распределённых в малом объёме 81
- Скаляр Папковича 51
- Скобки волнистые 31
- След тензора 17
- Слой упругий 146 и д.  
— —, действие объёмных сил, имеющих потенциал 156  
— — сферический 337
- Соотношения Коши 11
- Состояние, напряжённое в окрестности эллипсоидальной полости 371  
— статически возможное 14  
— натуральное 15
- Способ символический записи решений дифференциальных уравнений в частных производных 149
- Среда упругая неограниченная 71 и д.
- Сфера вращающаяся 348  
— гравитирующая 343  
— нагружённая по экватору равномерно распределённым давлением 359  
—, общая задача о равновесии 441 и д.  
— под действием системы сосредоточенных сил 455  
— поляя при заданных на границе перемещениях 462  
— — — — — усилиях 472  
— симметрично нагружённая 326 и д.  
— тяжёлая 368 и д.
- Тело вращения симметрично нагружённое 328 и д.
- Тензор деформации 16  
— единичный 21  
— напряжения 9  
— —, выражение через вектор и скаляр Папковича 52  
— производный вектора по вектору 15  
— системы сил 82  
— транспонированный 18  
— функций напряжений 28
- Теорема взаимности касательных напряжений 14  
— Томпсона 211
- Точки особые 76 и д.
- Трансформанта Фурье 173
- Удлинение относительное 16, 37
- Умножение вектора дладное 17  
— диады на вектор 19  
— тензора на вектор 19
- Уравнения равновесия на поверхности 12, 14  
— — сплошной среды 13, 36, 38  
— теории упругости в перемещениях 46, 48, 49  
— — — в напряжениях 55
- Условие сплошности 23, 37  
— — в форме Бельтрами-Митчелла 57
- Формула Остроградского-Гаусса 12, 452

- Формулы деривационные 30, 32  
 — Френе 160  
 Функция гармоническая объёмная 328  
   441 и д.  
 — Ляме 291  
 — напряжений 26, 153, 165  
 — — Максвелла 28  
 — — Морера 28  
 — — Эри 204  
 — сферическая объёмная 441 и д.  
 — — поверхностная 442 и д.  
 — полигармоническая 166  
  
 Центр вращения 84, 86  
 — расширения 80, 81, 84  
 Цилиндр круговой симметрично вы-  
 грузенный 381 и д., 400  
 — «опоясанный» 416  
  
 Часть тензора шаровая 21  
 Число Пуассона 44  
  
 Шар вращающийся 348  
 — гравитирующий 343  
 Штамп жёсткий 250  
 — — на упругом полупространстве 251  
 — — цилиндрический эллиптического  
   сечения 114  
 — конический 284  
 — неплоский эллиптический в плане  
   116, 304  
 — плоский 251  
 — — с круговым основанием 271  
 — плоский эллиптический 299  
  
 Эри функция напряжений 204  
  
 Юнга модуль 44

*Лурье Анатолий Исаакович.*  
Пространственные задачи теории упругости.

Редактор *О. С. Горбачёва.*  
Техн. редактор *Н. А. Тумаркина.*  
Корректор *Л. О. Сечейко.*

---

Сдано в набор 5/V 1955 г. Подписано к печати 12/VIII 1955 г. Бумага 60×92/16.  
Физ. печ. л. 30,75. Условн. печ. л. 30,75.  
Уч.-изд. л. 31,17. Тираж 5 000 экз. Т-04979.  
Цена книги 17 р. 60 к. Заказ № 367.

---

Государственное издательство  
Технико-теоретической литературы  
Москва, В-71, Б. Калужская, 15.

---

Министерство культуры СССР. Главное  
управление полиграфической промышленности.  
4-я тип. им. Евг. Соколовой. Ленинград,  
Измайловский пр., 29.

### Опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
38	Таблица, нижняя клетка справа	$\left( \frac{\partial P_2 H_2}{\partial q_1} - \right.$	$\left( \frac{\partial P_{23} H_2}{\partial q_1} - \right.$
57	4 сн.	$\left. \left\{ \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{1}{H_\alpha} \left[ \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}}{\partial q_\alpha} + \right. \right. \right.$	$\left. \left. \left\{ \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{1}{H_\alpha} \left[ \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}}{\partial q_\sigma} + \right. \right. \right.$
57	3 сн.	$\left. \left. \left. \frac{1}{H_\gamma} \left( \frac{\sigma}{\alpha\sigma} \right) \left[ \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}}{\partial q_\alpha} + \right. \right. \right.$	$\left. \left. \left. \frac{1}{H_\gamma} \left( \frac{\sigma}{\alpha\sigma} \right) \left[ \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}}{\partial q_\sigma} + \right. \right. \right.$
167	11 св.	$\frac{1}{4^8}$	$4^8$
297	8 св.	$C_b^{(1)}$	$C_2^{(1)}$
353	4 св.	$L_n^{( )}$	$L_n^{(0)}$
353	6 св.	$L_n^{( )}$	$L_n^{(0)}$
396	10 св.	$\beta_3$	$ \beta_3 $
396	12 св.	$I_m \beta$	$\text{Im } \beta$