

В. В. ШМИДТ

ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ СВЕРХПРОВОДНИКОВ

*Одобрено Министерством высшего
среднего специального образования СССР
как учебное пособие
для студентов физических
специальностей высших учебных заведений*



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1982

Мы старались избегать ситуаций, когда за словами «легко показать» скрываются нудные и громоздкие выкладки. Почти все результаты, данные в книге, выведены из «первых принципов» и читатель способен проследить за выводом от начала до конца. Мы всегда старались просто и быстро получить качественный результат, оценку по порядку величины, вместо того чтобы излагать сложные расчеты, ведущие к точному ответу.

При написании книги предполагалось, что читатель знаком с основами квантовой механики и физики металлов.

Первая глава носит вводный характер. В ней приводятся основные экспериментальные факты, дается краткий очерк развития теории сверхпроводимости и излагается термодинамика сверхпроводников. Вторая глава посвящена линейной электродинамике сверхпроводников на основе уравнений Лондонов. Основы теории сверхпроводимости Гинзбурга — Ландау — содержание третьей главы. В четвертой главе излагается физика слабой сверхпроводимости (эффектов Джозефсона). Здесь же дается описание основных принципов работы сверхпроводящих квантовых интерферометров (сквидов). Пятая глава посвящена проблемам сверхпроводников второго рода. В шестой главе дается изложение основных физических идей микроскопической теории сверхпроводимости Бардина — Купера — Шриффера. От читателя при этом требуется лишь самое минимальное знание основ квантовой механики. В этой главе дается представление об электрон-электронном взаимодействии через фононы, об основном состоянии сверхпроводника, об энергетической щели и ее зависимости от температуры. Показывается, как существование энергетической щели обуславливает возможность бездиссипативного тока. Заключение седьмая глава посвящена изучению некоторых неравновесных эффектов в сверхпроводниках.

Автор рад воспользоваться возможностью, чтобы искренне поблагодарить Д. А. Киржница, прочитавшего рукопись этой книги, за многие интересные замечания и дискуссии.

Автор приносит свою глубокую благодарность К. К. Лихареву за обсуждение некоторых вопросов физики сверхпроводников и за его конструктивную критику рукописи этой книги.

1981—82 гг.
Москва—Черноголовка

В. Шмидт

§ 1. Основные экспериментальные факты

1.1. Открытие сверхпроводимости. Сверхпроводимость была открыта в 1911 г. в Голландии в Лейденской лаборатории. Камерлинг Оннес, изучая зависимость электросопротивления ртути от температуры, обнаружил, что при температуре около 4 К сопротивление образца внезапно исчезло и не было обнаружено при всех достижимых температурах ниже этой [6]. Важно, что сопротивление исчезало не постепенно с уменьшением температуры, а сразу, скачком. Стало ясно, что образец перешел в какое-то новое, до тех пор не известное состояние, в котором он не имеет электрического сопротивления. Это явление было названо сверхпроводимостью.

Все попытки обнаружить хоть какие-то следы сопротивления у массивных сверхпроводников ни к чему не привели. Используя современные чувствительные приборы мы можем утверждать, что сопротивление сверхпроводников отсутствует по крайней мере на уровне 10^{-24} Ом·см. Для сравнения укажем, что удельное сопротивление очень чистой меди при температуре 4,2 К имеет порядок 10^{-9} Ом·см.

Вскоре после открытия сверхпроводимости ртути было обнаружено, что этим свойством обладают и некоторые другие металлы: олово, свинец, индий, алюминий, ниобий и др. Сверхпроводниками оказались и многие сплавы и интерметаллические соединения.

Температура, при которой происходит переход из нормального состояния в сверхпроводящее, называется критической и обозначается T_c . Очень скоро после открытия сверхпроводимости было обнаружено, что сверхпроводимость можно разрушить не только нагреванием образца, но и помещением его в сравнительно слабое магнитное поле. Это поле назвали критическим полем массивного материала и обозначили H_{cm} в отличие от критических полей пленок, тонких нитей, шариков и т. д.

Таблица 1.1 Критические температуры и критические магнитные поля элементов-сверхпроводников [7].

Элемент	T_c , К	$H_{cm}(0)$, Э
Al	$1,175 \pm 0,002$	$104,9 \pm 0,3$
Be	0,026	
Cd	$0,517 \pm 0,002$	28 ± 1
Ga	$1,083 \pm 0,001$	$59,2 \pm 0,3$
Hf	0,128	
Hg (α)	$4,154 \pm 0,001$	411 ± 2
Hg (β)	3,949	339
In	$3,408 \pm 0,001$	$281,5 \pm 2$
Ir	$0,1125 \pm 0,001$	$16 \pm 0,05$
La (α)	$4,88 \pm 0,02$	800 ± 10
La (β)	$6,30 \pm 0,1$	$1096, 1600$
Lu	0,1	< 400
Mo	$0,915 \pm 0,005$	96 ± 3
Nb	$9,25 \pm 0,02$	2060 ± 50
Os	$0,66 \pm 0,03$	70
Pa	1,4	
Pb	$7,196 \pm 0,006$	803 ± 1
Re	$1,697 \pm 0,006$	200 ± 5
Ru	$0,49 \pm 0,015$	69 ± 2
Sn	$3,722 \pm 0,001$	305 ± 2
Ta	$4,47 \pm 0,04$	829 ± 6
Tc	$7,8 \pm 0,01$	1410
Th	$1,38 \pm 0,02$	160 ± 3
Ti	$0,40 \pm 0,04$	56
Tl	$2,38 \pm 0,04$	178 ± 5
V	$5,40 \pm 0,05$	1408
W	$0,0154 \pm 0,0005$	$1,15 \pm 0,03$
Zn	$0,850 \pm 0,01$	$54 \pm 0,3$
Zr	$0,61 \pm 0,15$	47

Величины T_c и H_{cm} для элементов-сверхпроводников приведены в табл. 1.1.

Здесь $H_{cm}(0)$ — критическое поле, экстраполированное к абсолютному нулю температуры. Зависимость H_{cm} от температуры хорошо описывается эмпирической формулой

$$H_{cm}(T) = H_{cm}(0) [1 - (T/T_c)^2]. \quad (1.1)$$

Эта зависимость приведена на рис. 1.1. Этот рисунок по существу представляет собой фазовую диаграмму сверхпроводящего состояния в координатах (H, T) . Любая точка на этой плоскости, лежащая в заштрихованной области, соответствует сверхпроводящему состоянию.

1.2. Квантование магнитного потока. Электрический ток в массивном сверхпроводящем кольце может существовать неограниченно долго. При этом, конечно, никакого источника тока не требуется, так как сопротивление кольца равно нулю. Создать такой незатухающий ток можно следующим образом. Поместим кольцо при $T > T_c$ во внешнее магнитное поле, так чтобы магнитные силовые линии проходили через отверстие кольца. Переведем кольцо в сверхпроводящее состояние, т. е. понизим температуру ниже T_c , и выключим после этого источник магнитного поля. В первый момент выключения поля магнитный поток внутри начнет уменьшаться и, по закону электромагнитной индукции Фарадея, индуцирует в кольце ток, который уже не затухнет. Этот ток будет препятствовать уменьшению магнитного потока в кольце, т. е. будет теперь, после выключения внешнего источника магнитного поля, сам поддерживать поток в кольце на прежнем уровне. Действительно, если бы кольцо обладало каким-то сопротивлением R , то после выключения внешнего поля поток в кольце затух бы за время порядка L/R , где L — индуктивность кольца, но в сверхпроводящем кольце $R=0$, и такое затухание будет продолжаться бесконечно долго. Это значит, что в кольце оказался «замороженным» магнитный поток, а по кольцу циркулирует незатухающий ток. Это — так называемый сверхпроводящий ток, или сверхток.

На первый взгляд кажется, что величина «замороженного» в кольце магнитного потока может быть произвольной. Для исследования этого вопроса были поставлены эксперименты [8, 9], которые обогатили нас важнейшим экспериментальным фактом: магнитный поток в полем сверхпроводящем цилиндре может принимать только значения, кратные некоторой величине $\Phi_0 = 2,07 \cdot 10^{-2}$ Гс·см², которую называют квантом магнитного потока. Квант магнитного потока может быть выражен через фундаментальные константы: $\Phi_0 = \pi \hbar c / e$, где \hbar — постоянная

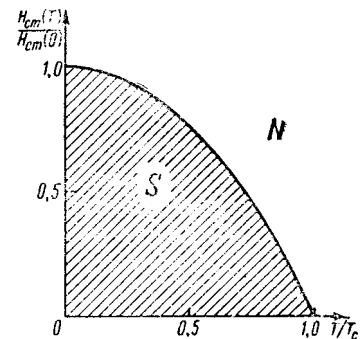


Рис. 1.1. Зависимость критического поля H_{cm} от температуры.

Планка, c — скорость света в вакууме, e — заряд электрона.

Конечно, эти исследования (1961 г.) были предприняты не случайно. Удивительно даже, что они не были проведены раньше, потому что уже к середине 30-х годов сложилось мнение, что сверхпроводимость — это квантовое явление.

1.3. Эффекты Джозефсона. Другим подтверждением того, что сверхпроводимость является квантовым эффектом, служат эффекты так называемой слабой сверхпроводимости, или эффекты Джозефсона [10]. Предсказанные в 1962 году, они вскоре были экспериментально обнаружены.

Под слабой сверхпроводимостью понимается такая ситуация, когда два сверхпроводника соединены между собой какой-либо слабой связью. Такой слабой связью может быть туннельный переход, тонкопленочное сужение, просто слабое касание двух сверхпроводников на малой площади и другие подобные «ослабления» сверхпроводимости контакта между двумя сверхпроводниками.

Различают два эффекта Джозефсона: стационарный и нестационарный.

Остановимся сперва на стационарном эффекте. Пропустим ток через слабую связь (или, иначе, через переход Джозефсона). Оказывается, что, если ток достаточно слабый, он протекает через слабую связь без сопротивления, даже если сама слабая связь сделана из несверхпроводящего материала, например в туннельном переходе — из изолятора. Здесь мы самым непосредственным образом сталкиваемся с важнейшим свойством сверхпроводника — согласованным, когерентным поведением его электронов. Электроны двух сверхпроводников с помощью слабой связи объединились в единый квантовый коллектив. То же можно сказать и по-другому. Волновая функция электронов с одной стороны слабой связи, проникнув через эту связь на другую сторону, проинтерферировала с «местной» волновой функцией электронов. В результате все сверхпроводящие электроны с обеих сторон слабой связи стали описываться единой волновой функцией. При этом слабая связь не должна сильно изменить волновые функции с двух сторон связи по сравнению с тем, какими они были до установления этой связи.

Еще более впечатляющим является нестационарный эффект Джозефсона. Увеличим постоянный ток через слабую связь настолько, чтобы на ней появилось некоторое

электрическое напряжение. Оказывается, что это напряжение, кроме постоянной составляющей V , будет иметь еще и переменную составляющую, осциллирующую с угловой частотой ω , причем

$$\hbar\omega = 2eV. \quad (1.2)$$

Фундаментальный эксперимент по прямому обнаружению этого излучения из джозефсоновского перехода, или, иначе, джозефсоновской генерации, был успешно проведен советскими физиками И. К. Янсоном, В. М. Свистуновым и И. М. Дмитриенко [11].

1.4. Эффект Мейсснера — Оксенфельда. Целых 22 года после открытия сверхпроводимости считалось, что сверхпроводник — это идеальный проводник, т. е. просто металл с нулевым удельным сопротивлением.

Рассмотрим, как должен вести себя такой идеальный проводник в слабом внешнем магнитном поле, которое еще не может разрушить его идеальную проводимость.

Пусть в исходном состоянии идеальный проводник охлажден ниже критической температуры и внешнее магнитное поле отсутствует. Внесем теперь такой идеальный проводник во внешнее магнитное поле. Из общих соображений легко установить, что это поле в наш образец не проникает, что схематически изображено на рис. 1.2, а. Действительно, сразу по появлении внешнего поля на поверхности идеального проводника возникает ток, создающий по правилу Ленца свое собственное магнитное поле, направленное навстречу приложенному, и полное поле в образце будет равно нулю.

Докажем это, воспользовавшись уравнениями Максвелла. При изменении индукции \mathbf{B} внутри образца должно возникнуть электрическое поле \mathbf{E} :

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

где c — скорость света в вакууме. Но в идеальном проводнике $\mathbf{E}=0$, так как $\mathbf{E}=\mathbf{j}\rho$, где ρ — удельное сопротивление, которое в нашем случае равно нулю, \mathbf{j} — плотность наведенного тока. Отсюда следует, что $\mathbf{B}=\text{const}$, но поскольку до внесения образца в поле $\mathbf{B}=0$, то ясно, что $\mathbf{B}=0$ и после внесения в поле. Это можно интерпретировать еще и так: поскольку $\rho=0$, время проникновения магнитного поля в идеальный проводник равно бесконечности.

Итак, внесенный во внешнее магнитное поле идеальный проводник имеет $\mathbf{V}=0$ в любой точке образца. Однако того же состояния (идеальный проводник при $T < T_c$ во внешнем магнитном поле) можно достигнуть и другим путем: сперва наложить внешнее поле на «теплый» образец, а затем охладить его до температуры $T < T_c$.

Электродинамика предсказывает для идеального проводника совершенно другой результат. Действительно, образец при $T > T_c$ имеет сопротивление и магнитное поле в него хорошо проникает. После охлаждения его ниже T_c поле останется в образце. Эта ситуация изображена на рис. 1.2, б.

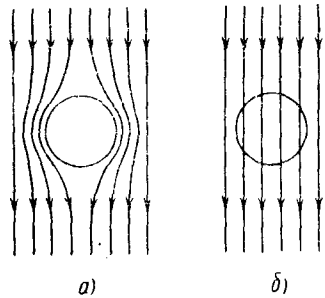


Рис. 1.2. Магнитное состояние идеального проводника при $T < T_c$, $H > 0$ зависит от предьстории: а) идеальный проводник внесен в магнитное поле при $T < T_c$, б) то же, но при $T > T_c$.

Обратите внимание на то, что во всех предыдущих рассуждениях мы всегда называли образец в состоянии $\rho=0$ идеальным проводником, а не сверхпроводником.

До 1933 г. считалось, что сверхпроводник — это и есть идеальный проводник. Но вот Мейсснер и Оксенфельд [12] поставили опыт и обнаружили, что это не так! Оказалось, что при $T < T_c$ поле в образце равно нулю всегда ($\mathbf{V}=0$), независимо от пути перехода к условию $T < T_c$ при наличии внешнего магнитного поля.

Это было чрезвычайно важное открытие. Ведь если $\mathbf{V}=0$ независимо от предьстории образца, то это равенство можно рассматривать как характеристику сверхпроводящего состояния, которое возникает при $H < H_{cm}$. Но тогда можно рассматривать переход в сверхпроводящее состояние как фазовый переход в новое фазовое состояние и использовать для исследования сверхпроводящей фазы вещества всю мощь термодинамического подхода.

Итак, сверхпроводящее состояние удовлетворяет уравнениям

$$\rho = 0, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{V} = 0. \quad (1.4)$$

По своим магнитным свойствам сверхпроводники делятся на сверхпроводники первого рода и сверхпроводники второго рода. К сверхпроводникам первого рода относятся все элементы-сверхпроводники кроме ниобия. Ниобий, сверхпроводящие сплавы и химические соединения являются сверхпроводниками второго рода.

Главное отличие этих двух групп сверхпроводников заключается в том, что они по-разному откликаются на внешнее магнитное поле. Эффект Мейсснера — Оксенфельда (§ 1) наблюдается у сверхпроводников первого рода.

2.1. Магнитные свойства сверхпроводников первого рода. Рассмотрим кривую намагничивания сверхпроводника. Пусть образец представляет собой длинный цилиндр, помещенный в продольное внешнее магнитное поле H_0 . С увеличением поля H_0 индукция внутри сверхпроводника не будет изменяться, она останется равной $\mathbf{V}=0$. Поэтому кривая намагничивания $B=B(H_0)$ будет иметь вид, изображенный на рис. 2.1, а. Когда H_0 станет равным H_{cm} , сверхпроводимость разрушится, поле проникнет в сверхпроводник и \mathbf{V} станет равным H_0 .

Магнитная индукция \mathbf{V} и напряженность поля H_0 связаны известным соотношением

$$\mathbf{V} = H_0 + 4\pi\mathbf{M}, \quad (2.1)$$

где \mathbf{M} — магнитный момент единицы объема образца. Часто кривую намагничивания строят в виде зависимости величины $-4\pi\mathbf{M}$ от H_0 . Эта зависимость приведена на рис. 2.1, б. Выведем основные магнитные свойства сверхпроводников первого рода из уравнений (1.3) и (1.4) [13].

1) Магнитные силовые линии вне сверхпроводника всегда касательны к его поверхности. Действительно, мы знаем из электродинамики, что магнитные силовые линии, т. е. линии вектора индукции \mathbf{V} непрерывны и замкнуты. Это можно сформулировать в виде уравнения

$$\text{div } \mathbf{V} = 0.$$

Отсюда следует, что нормальные составляющие вектора \mathbf{V} к поверхности любого материала внутри и снаружи должны быть равны. Но внутри сверхпроводника $\mathbf{V}^{(i)}=0$, следовательно, и нормальная компонента $\mathbf{V}_n^{(i)}=0$. Следовательно, нормальная компонента $\mathbf{V}_n^{(e)}$ вне сверхпроводника на его

поверхности тоже равна нулю. По равенство $\mathbf{B}_n^* = 0$ как раз и означает, что магнитные силовые линии касательны к поверхности сверхпроводника.

2) Следствием предыдущего свойства является то, что по поверхности сверхпроводника, находящегося во внешнем магнитном поле, всегда течет поверхностный электрический ток. Рис. 2.2 иллюстрирует это утверждение. Пусть H_0 — поле в данном месте поверхности сверхпроводника. Из уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{B} = (4\pi/c)\mathbf{j}$ следует, что внутри сверхпроводника нет объемного тока ($\mathbf{j} = 0$), так как $\mathbf{B} = 0$. Значит, возможен только поверхностный ток. Рассмотрим контур 1—2—3—4—1 на рис. 2.2 и возьмем циркуляцию $\oint \mathbf{B} d\mathbf{l}$ вектора \mathbf{B} по этому контуру. На участке 1—2, который параллелен поверхности сверхпроводника, $\int \mathbf{B} d\mathbf{l} = H_0 l_{12}$, где l_{12} —

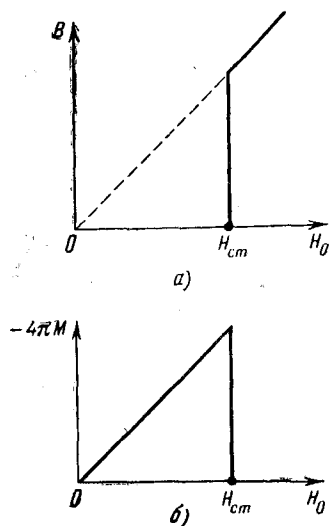


Рис. 2.1. а) Кривая намагничивания сверхпроводника, б) зависимость магнитного момента единицы объема M от H_0 в сверхпроводнике.

длина участка 1—2. Вклад от участков 2—3 и 1—4 равен нулю, так как из соображений симметрии можно утверждать, что вектор \mathbf{B} на этих участках ортогонален пути интегрирования. Вклад участка 3—4 тоже нулевой, так как $\mathbf{B} = 0$ внутри сверхпроводника.

Итак, $\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = H_0 l_{12}$. Но согласно уравнению Максвелла

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I,$$

где I — полный ток, протекающий через поверхность, ограниченную контуром 1—2—3—4—1. Отсюда следует, что перпендикулярно плоскости чертежа в направлении «от нас» (так, как это показано на рис. 2.2) по поверхности сверхпроводника течет поверхностный ток, линейная плотность которого $j_{\text{пов}}$ определяется из уравнения

$$H_0 l_{12} = \frac{4\pi}{c} j_{\text{пов}} l_{12}.$$

магнитным полем на поверхности сверхпроводника:

$$j_{\text{пов}} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{n}, \mathbf{H}_0], \quad (2.2)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности сверхпроводника.

Итак, поверхностный ток $j_{\text{пов}}$ полностью задан магнитным полем на поверхности сверхпроводника H_0 . Иными словами, поверхностный ток автоматически становится таким, чтобы его собственное магнитное поле внутри сверхпроводника было в точности равно и противоположно по

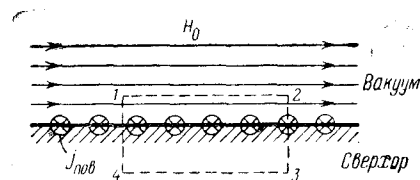


Рис. 2.2. По поверхности сверхпроводника, находящегося во внешнем магнитном поле, течет поверхностный ток.

направлению внешнему полю, что обеспечивает отсутствие результирующего поля внутри сверхпроводника ($\mathbf{B} = 0$).

3) Укажем на еще одно почти очевидное свойство: в односвязном*) сверхпроводнике токи по его поверхности текут только тогда, когда он находится во внешнем магнитном поле. Действительно, если поверхностные токи сохраняются и после отключения внешнего поля, то они создают свое поле в сверхпроводнике, что невозможно.

Задача 2.1. Какой ток течет по плоской поверхности свинца в полосе шириной 1 см, если образец находится в критическом поле при температуре 4,2 К?

Решение. Поверхностная плотность тока $j_{\text{пов}}$ определяется формулой (2.2). Поле H_0 нужно положить равным критическому для температуры 4,2 К согласно формуле (1.1). В результате получим $j_{\text{пов}} = 422$ А/см.

2.2. Промежуточное состояние. Мы уже знаем, что разрушение сверхпроводимости длинного цилиндра из сверхпроводника первого рода в однородном магнитном

*) Под односвязным телом понимается такое тело, в котором можно произвольный замкнутый контур стянуть в точку, не пересекая при этом ни где границ тела.

поле, параллельном цилиндру, произойдет тогда, когда это поле достигнет критического значения H_{cm} . Значительно более сложным будет процесс разрушения сверхпроводимости того же цилиндра, если его поместить в поперечное магнитное поле. То же можно сказать об эллипсоиде, шаре и других телах более сложной формы.

Рассмотрим, например, поведение сверхпроводящего шара, помещенного во внешнее магнитное поле (рис. 2.3).

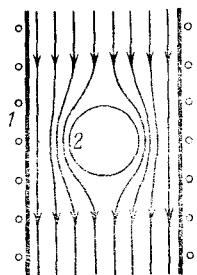


Рис. 2.3. Сверхпроводящий шар в однородном поле соленоида; 1 — обмотка соленоида, 2 — сверхпроводящий шар.

Поскольку магнитные силовые линии всегда касательны к поверхности сверхпроводника, то ясно, что на «экваторе» шара произойдет сгущение силовых линий, т. е. магнитное поле увеличится, а на «полюсах» шара поле будет отсутствовать. На далеком расстоянии от шара, куда не будет достигать возмущение поля, вносимое шаром, однородное внешнее поле H_0 будет меньше «экваториального».

Возникает естественный вопрос: «А что будет, когда поле на «экваторе» достигнет критического значения H_{cm} ?» Ясно, что при этом еще H_0 будет меньше H_{cm} и поэтому полный переход шара в нормальное состояние невозможен.

Но, с другой стороны, невозможно и полностью сверхпроводящее состояние шара, так как поле на «экваторе» уже достигло критического значения.

Разрешение этого противоречия заключается в том, что шар перейдет в так называемое промежуточное состояние, т. е. разобьется на сеть чередующихся областей сверхпроводящей и нормальной фаз. При этом граничные поверхности этих областей будут всегда параллельны магнитному полю, хотя в сечении, перпендикулярном полю, они могут образовывать фигуры весьма причудливой формы.

Пусть до перехода тела в промежуточное состояние максимальное поле на его поверхности (в случае шара — на «экваторе») равно H_m . При этом внешнее поле вдали от тела равно H_0 . Ясно, что $H_m > H_0$, ясно также, что H_m пропорционально H_0 , причем коэффициент пропорциональности зависит от формы тела. Запишем это в виде

$$H_m = \frac{H_0}{1-n}. \quad (2.3)$$

Значения n для тел различной формы приведены в нижеприведенной таблице *):

Геометрия образца	n
Цилиндр параллелен полю	0
Цилиндр перпендикулярен полю	1/2
Шар	1/3
Плоская пластинка, перпендикулярная полю	1

Используя эту таблицу, легко вычислить поле H_0 , при котором тело той или иной формы переходит в промежуточное состояние. Это происходит тогда, когда поле H_m достигает значения H_{cm} . Это значит, что сфера переходит в промежуточное состояние, когда согласно (2.3) внешнее поле H_0 достигает значения

$$H_0 = H_{cm} (1 - 1/3) = 2/3 H_{cm}.$$

Пластинка в перпендикулярном поле переходит в промежуточное состояние в любом, как угодно слабом поле H_0 . Это следует как из формулы (2.3) ($n=1$), так и из чисто физических соображений. Действительно, пусть пластинка в виде тонкого диска ориентирована перпендикулярно внешнему магнитному полю. Обтекание диска магнитными силовыми линиями приводит к большой их концентрации на краях диска. Чем больше будет радиус диска, тем больше эта концентрация, т. е. поле H_m . При бесконечном радиусе диска переход в промежуточное состояние происходит в бесконечно малом поле H_0 .

Пластинка в промежуточном состоянии изображена на рис. 2.4.

Рассмотрим теперь условия термодинамического равновесия для промежуточного состояния.

Покажем, что поле в нормальной фазе всегда равно критическому полю H_{cm} , а размеры нормальных областей d_n (см. рис. 2.4) автоматически подстраиваются так, чтобы поле там равнялось H_{cm} . Действительно, предположим, что поле в нормальной области больше H_{cm} . Тогда это поле должно будет разрушить сверхпроводимость соседних сверхпроводящих областей. Наоборот, если поле

*) Число n часто называют размагничивающим фактором.

в нормальной области меньше H_{cm} , то тогда эта нормальная область должна перейти в сверхпроводящее состояние. Поэтому устойчиво сосуществовать нормальные и сверхпроводящие области могут только при условии, что поле в нормальных областях равно H_{cm} .

Структура промежуточного состояния сверхпроводников в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, может быть весьма нерегулярной. Классические опыты по исследованию этой структуры у сверхпроводящего шара были выполнены советскими физиками А. И. Шальниковым и А. Г. Мешковским [14, 15], которые исследовали распределение магнитного поля в экваториальной плоскости шара с помощью тонкой висмутовой проволоочки.

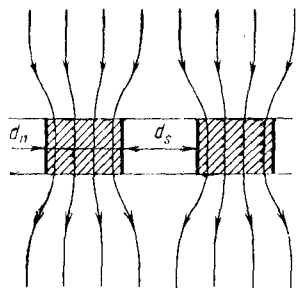


Рис. 2.4. Промежуточное состояние плоской сверхпроводящей пластины, расположенной перпендикулярно магнитному полю; d_s — размер сверхпроводящей области, d_n — размер нормальной области.

Для этого исследуемый шар разрезался по экватору, и затем обе его половинки располагались так, что между ними оставался очень узкий зазор, а внешнее поле было направлено перпендикулярно плоскости разреза. В этот зазор вводилась тонкая висмутовая проволоочка. При низкой температуре сопротивление проволоочки сильно зависит от магнитного поля, в которое она помещается. Передвигая этот висмутовый зонд, можно было изучить топографию магнитного потока в щели. Результат этого эксперимента приведен на рис. 2.5. Промежуточное состояние было исследовано и другими методами, например, с помощью фигур, полученных при напылении ферромагнитного порошка на сверхпроводящую поверхность (рис. 2.6).

Интересная и своеобразная картина промежуточного состояния возникает в цилиндрической проволоке при протекании по ней тока. Когда ток в проволоке достигнет такой величины, что его магнитное поле на поверхности проволоки станет равным критическому полю H_{cm} , начнется переход проволоки в промежуточное состояние.

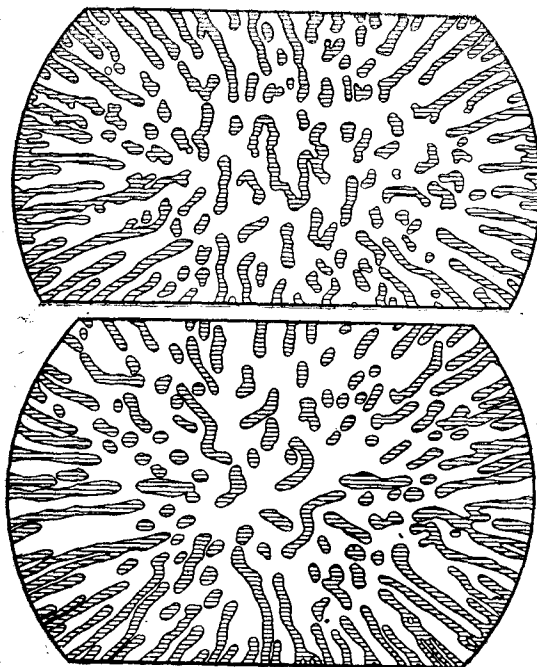
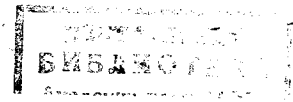


Рис. 2.5. Распределение сверхпроводящих и нормальных областей в оловянном шаре. Заштрихованы сверхпроводящие области [15].



Рис. 2.6. Промежуточное состояние монокристаллической оловянной фольги толщиной 29 мкм в перпендикулярном поле [16].



Распределение нормальных и сверхпроводящих (заштрихованы) областей для случая, когда ток больше критического, показано на рис. 2.7. В этом случае на поверхности проволоки появится полностью нормальный слой, толщина которого $(R - a)$ будет увеличиваться по мере превышения током своего критического значения.

2.3. Магнитные свойства сверхпроводников второго рода. В отличие от сверхпроводников первого рода сверхпроводники второго рода не обнаруживают эффекта Мейсснера—Оксенфельда. Магнитное поле в них проникает, но весьма своеобразно.

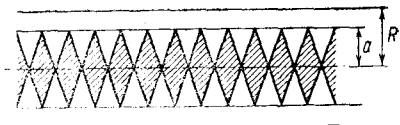


Рис. 2.7. Промежуточное состояние проволоки, по которой течет ток больший критического.

Возьмем длинный цилиндр из сверхпроводника второго рода и поместим его в продольное внешнее магнитное поле. Начнем увеличивать это поле от нуля. Тогда мы обнаружим, что сначала цилиндр полностью выталкивает это поле, т. е. индукция внутри цилиндра равна нулю. Это значит, что сперва обнаруживается эффект Мейсснера—Оксенфельда. Однако, начиная с некоторого поля (назовем его первым критическим полем и обозначим H_{c1}), внутри цилиндра начинает появляться конечная индукция B , которая увеличивается с увеличением внешнего поля H_0 . Так будет происходить до тех пор, пока среднее поле B внутри цилиндра не станет равным внешнему полю H_0 . Это произойдет при так называемом втором критическом поле H_{c2} , при котором наш цилиндр перейдет в нормальное состояние. Правда, даже при $H_0 > H_{c2}$ сверхпроводимость все-таки сохранится в тонком поверхностном слое. Но при $H_0 = 1,69 H_{c2}$ сверхпроводимость и этого поверхностного слоя окажется разрушенной. Это поле называют третьим критическим и обозначают H_{c3} .

Подробно физика сверхпроводников второго рода будет рассмотрена в гл. 5.

§ 3. Термодинамика сверхпроводников

3.1. Критическое поле массивного материала (критическое термодинамическое магнитное поле). Пусть длинный сверхпроводящий цилиндр из сверхпроводника первого рода помещен в однородное продольное поле H_0 . Найдем то значение этого поля, при котором произойдет разрушение сверхпроводимости, т. е. найдем H_{cm} .

Если $H_0 < H_{cm}$, то существует эффект Мейсснера—Оксенфельда, т. е. $B=0$, и магнитный момент единицы объема цилиндра M равен

$$M = -H_0/4\pi. \quad (3.1)$$

При изменении внешнего поля H_0 на величину dH_0 источник магнитного поля совершит работу над единицей объема сверхпроводника, равную

$$-M dH_0 = H_0 dH_0/4\pi. \quad (3.2)$$

Следовательно, при изменении поля от 0 до H_0 источник поля совершит работу

$$-\int_0^{H_0} M dH_0 = H_0^2/8\pi. \quad (3.3)$$

Эта работа запасена теперь в свободной энергии сверхпроводника, находящегося в магнитном поле H_0 . Таким образом, если плотность свободной энергии сверхпроводника в отсутствие магнитного поля равна F_{s0} , то плотность свободной энергии сверхпроводника в магнитном поле равна

$$F_{sH} = F_{s0} + H_0^2/8\pi. \quad (3.4)$$

Переход в нормальное состояние произойдет тогда, когда свободная энергия F_{sH} поднимется до уровня плотности свободной энергии нормального металла: $F_{sH} = F_n$ при $H_0 = H_{cm}$. Это значит, что

$$F_n - F_{s0} = H_{cm}^2/8\pi. \quad (3.5)$$

Из этой формулы следует, что критическое поле массивного материала является мерой того, насколько сверхпроводящее состояние является энергетически более выгодным, чем нормальное, т. е. насколько свободная энергия сверхпроводящего состояния меньше свободной энер-

гии нормального состояния. Поле H_{cm} часто называют критическим термодинамическим магнитным полем.

3.2. Энтропия сверхпроводника. Согласно первому началу термодинамики

$$\delta Q = \delta R + \delta U, \quad (3.6)$$

где δQ — приращение плотности тепловой энергии рассматриваемого тела, δR — работа, совершенная единицей объема этого тела над внешними телами, δU — приращение его внутренней энергии. По определению плотность свободной энергии F равна

$$F = U - TS, \quad (3.7)$$

где T — температура тела, S — плотность энтропии. Тогда

$$\delta F = \delta U - T \delta S - S \delta T.$$

Поскольку при обратимом процессе $\delta Q = T \delta S$, имеем

$$\delta U = T \delta S - \delta R, \quad (3.8)$$

$$\delta F = -\delta R - S \delta T. \quad (3.9)$$

Из (3.9) следует

$$S = -(\partial F / \partial T)_R. \quad (3.10)$$

Воспользуемся формулой (3.10), чтобы вычислить разность удельных энтропий сверхпроводящего и нормального состояний. Подставим для этого (3.5) в (3.10):

$$S_s - S_n = \frac{H_{cm}}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{cm}}{\partial T} \right)_R. \quad (3.11)$$

Формула (3.11) позволяет получить важные физические следствия:

1) Согласно теореме Нернста энтропия всех тел при $T = 0$ равна нулю. Поэтому $(\partial H_{cm} / \partial T)_{T=0} = 0$. Это значит, что кривая зависимости $H_{cm}(T)$ при $T = 0$ имеет нулевую производную.

2) Из эксперимента следует, что зависимость $H_{cm}(T)$ — это монотонно спадающая с увеличением T кривая (см. рис. 1.1), т. е. что во всем интервале температур от 0 до T_c величина $\partial H_{cm} / \partial T < 0$. Следовательно, в этом интервале температур $S_s < S_n$.

3) Поскольку при $T = T_c$ поле $H_{cm} = 0$, то $S_s = S_n$ при $T = T_c$. Схематически зависимость $S_s - S_n$ от температуры показана на рис. 3.1.

Мы можем сделать теперь весьма важные выводы.

1) Оказывается, сверхпроводящее состояние является чем-то более упорядоченным, чем нормальное, так как его энтропия меньше.

2) Переход при $T = T_c$ происходит без поглощения или выделения скрытой теплоты, так как $S_s = S_n$ при $T = T_c$. Следовательно, переход при $T = T_c$ — это фазовый переход второго рода.

3) При $T < T_c$ переход из сверхпроводящего состояния в нормальное происходит под действием магнитного поля. Поскольку при этом $S_s < S_n$, то при переходе происходит поглощение скрытой теплоты. Наоборот, при переходе из нормального в сверхпроводящее состояние скрытая теплота выделяется. Следовательно, все переходы в магнитном поле при $T < T_c$ являются фазовыми переходами первого рода.

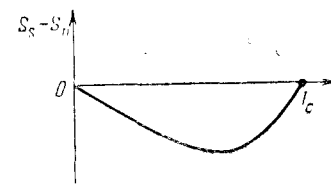


Рис. 3.1. Зависимость разности энтропий $S_s - S_n$ от температуры.

Удивительно, как несколько формул термодинамики и всего лишь один экспериментальный факт — зависимость H_{cm} от T (рис. 1.1) — позволяют сделать столь фундаментальные выводы! Ведь от понимания того, что сверхпроводящее состояние характеризуется большим порядком (меньшей энтропией), чем нормальное, лежит путь к пониманию того, что это — состояние с согласованным когерентным поведением электронов.

3.3. Теплоемкость. Поскольку удельную теплоемкость вещества можно определить формулой $C = T (\partial S / \partial T)$, разность удельных теплоемкостей сверхпроводящего и нормального состояний запишется в виде

$$C_s - C_n = \frac{T}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial H_{cm}}{\partial T} \right)^2 + H_{cm} \frac{\partial^2 H_{cm}}{\partial T^2} \right]. \quad (3.12)$$

При получении этой формулы мы продифференцировали формулу (3.11). Но при $T = T_c$ критическое поле $H_{cm} = 0$, поэтому

$$C_s - C_n = \frac{T_c}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{cm}}{\partial T} \right)_{T_c}^2. \quad (3.13)$$

Эта формула, известная как формула Рутгерса, показывает, что график зависимости теплоемкости от температуры

испытывает скачок при $T = T_c$. Формула Рутгерса дает величину этого скачка. График температурной зависимости теплоемкости приведен на рис. 3.2. При $T > T_c$ теплоемкость линейно зависит от температуры, как это бывает у обычных нормальных металлов (электронная теплоемкость).

Показанный на рис. 3.2 ход теплоемкости мы пока рассматриваем просто как экспериментальный факт, но то, что при $T < T_c$ существует точка, где продолжение прямой $C_n(T)$ пересекает кривую $C_s(T)$ — это следствие проведенных выше рассуждений. Действительно, в этой точке $C_s = C_n$, т. е. $\partial(S_s - S_n)/\partial T = 0$. Но согласно рис. 3.1 при $T < T_c$ такая точка обязательно должна существовать.

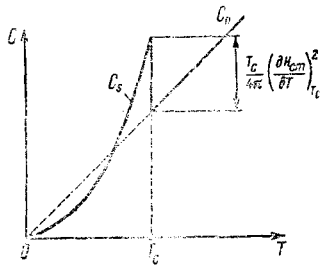


Рис. 3.2. Температурная зависимость теплоемкости сверхпроводника.

свойств любого вещества, в частности сверхпроводника. Все доказательства и подробности можно найти в [13].

Если тело находится во внешнем магнитном поле H_0 при заданных магнитной индукции внутри тела B и температуре, то при термодинамическом равновесии минимума достигает свободная энергия $\mathcal{F} = \int F dV$, где плотность свободной энергии F определена в (3.7). Иногда эту величину называют гельмгольцевской свободной энергией. Для многих расчетов такой потенциал неудобен, так как для тела, находящегося во внешнем магнитном поле, обычно задаются условия постоянства температуры и внешнего поля H_0 .

В этом случае термодинамическое равновесие наступает тогда, когда достигается минимума другой термодинамический потенциал — так называемая свободная энергия Гиббса \mathcal{G} , которая определяется следующим образом:

$$\mathcal{G} = \int G dV, \quad (3.14)$$

$$G = F - BH_0/4\pi. \quad (3.15)$$

Задача 3.1. Насколько понизится свободная энергия 1 см³ свинца при его переходе в сверхпроводящее состояние? Переход происходит в магнитном поле при температуре 4,2 К.

Решение. Разность свободных энергий определяется формулой (3.5). Величина H_{cm} при 4,2 К может быть вычислена по формуле (1.1). Используя данные таблицы 1.1, имеем окончательно $F_n - F_{s0} = 1,1 \cdot 10^4$ эрг/см³.

Задача 3.2. Какое количество теплоты выделится при переходе 1 см³ свинца в сверхпроводящее состояние в условиях задачи 3.1?

Решение. Выделившееся количество теплоты равно $Q = T(S_n - S_s)$. Используя формулы (1.1) и (3.11), получим $Q = 2,30 \cdot 10^4$ эрг.

Замечание. Формула (3.11) дает выражение разности энтропий через величину $(\partial H_{cm}/\partial T)_H$. В условиях данной задачи, когда фиксировано внешнее поле на бесконечности, сверхпроводник не совершает работу над внешними телами при изменении его температуры. Действительно, единственный вид работы над внешними телами для такого сверхпроводника — это излучение электромагнитной волны при изменении его внутреннего состояния. Но для этого нужно, чтобы интеграл вектора Пойнтинга $(c/4\pi) [EH]$ по поверхности сверхпроводника не равнялся нулю. Электрическое поле E может возникнуть только при изменении индукции B , но $B=0$, поэтому при изменении температуры сверхпроводника в магнитном поле излучения не происходит, значит, $(\partial H_{cm}/\partial T)_H = (\partial H_{cm}/\partial T)_H$, и можно пользоваться формулой (3.11).

Задача 3.3. Найти температуру, при которой у свинца теплоемкости нормальной и сверхпроводящей фаз оказываются равными.

Решение. Исследуя разность энтропий (3.11) на минимум, находим, что искомая температура равна $T_c/\sqrt{3} = 4,16$ К.

Задача 3.4. Найти критическое термодинамическое магнитное поле олова при температуре 3 К.

Ответ. 108 Э.

Задача 3.5. Найти скачок теплоемкости единицы объема свинца при критической температуре.

Ответ. $2,8 \cdot 10^4$ эрг/см³·К.

§ 4. Очерк развития теории сверхпроводимости

Первой теорией, успешно описавшей электродинамику сверхпроводников, была теория Лондонов (1935). Это была феноменологическая теория, т. е. в дополнение к уравнениям Максвелла были предложены уравнения электромагнитного поля в сверхпроводнике, из которых следовали его основные свойства: абсолютный диамагнетизм и отсутствие сопротивления постоянному току. В чем состоит микроскопический механизм сверхпроводимости на электронном уровне, не объяснялось, т. е. за рамками теории оставался ответ на вопрос: «Почему сверхпроводник ведет себя так, как это следует из уравнений Лондонов?».

Согласно теории Лондонов электроны в сверхпроводнике можно рассматривать как совокупность двух электронных коллективов: коллектив сверхпроводящих и нормальных электронов. Плотность сверхпроводящих электронов n_s должна уменьшаться с повышением температуры и обращаться в нуль при $T = T_c$. Наоборот, при $T = 0$ величина n_s должна равняться плотности всех свободных электронов металла. Это — формулировка так называемой двухжидкостной модели сверхпроводника. Ток сверхпроводящих электронов — это ток без сопротивления. Ясно, что постоянного электрического поля при этом в сверхпроводнике быть не может, так как в противном случае это привело бы к неограниченному ускорению коллектива сверхпроводящих электронов. Поэтому в стационарных условиях, когда электрического поля нет, нормальные электроны покоятся. Наоборот в переменном электрическом поле есть и ток сверхпроводящих электронов, и ток нормальной компоненты. При этом нормальный ток подчиняется обычному закону Ома.

Реальный сверхпроводник в этой модели можно моделировать эквивалентной схемой, в которой нормальное сопротивление и идеальный проводник соединены параллельно. Идеальный проводник при этом должен иметь некоторую индуктивность, с помощью которой можно моделировать инерциальные свойства сверхпроводящих электронов.

Предложенные Лондонами уравнения дали описание поведения сверхпроводящей компоненты электронной жидкости в постоянном и переменном электромагнитном полях. С их помощью удалось описать многие аспекты поведения сверхпроводников, но к концу 40-х годов стало ясно, что по крайней мере в одном вопросе теория Лондонов дает неверный ответ. Из этой теории следовало, что энергия границы раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами σ_{ns} у сверхпроводника в промежуточном состоянии отрицательна. Это значит, что во внешнем магнитном поле сверхпроводнику выгодно было бы расслоиться на возможно более мелкую сеть чередующихся областей нормальной и сверхпроводящей фаз, чтобы внутри сверхпроводника суммарная площадь границы раздела была как можно больше, так как ее энергия $\sigma_{ns} < 0$. Причем так должно было бы быть даже для длинного цилиндра в магнитном поле, параллельном его оси. Это противоречило результатам экспериментов того вре-

мени. Опыт показывал, что такое расслоение происходило только у тел с отличным от нуля размагничивающим фактором (промежуточное состояние, см. § 2), и размеры слоев оказывались достаточно большими (~ 1 мм, см. рис. 2.5), а это могло быть только при $\sigma_{ns} > 0$, что противоречило предсказаниям теории Лондонов.

Это противоречие было снято теорией В. Л. Гинзбурга и Л. Д. Ландау (теорией ГЛ), которая тоже была феноменологической теорией, но учитывающей квантовые эффекты. Необходимость учета квантовых эффектов сейчас станет ясной. Пусть существует некоторая волновая функция Ψ , квантомеханически описывающая поведение сверхпроводящих электронов. Тогда квадрат модуля этой функции (пропорциональный n_s) должен обращаться в нуль в нормальной фазе и, плавно увеличиваясь на NS -границе, достигать какого-то равновесного значения в сверхпроводящей фазе. Следовательно, на границе должен возникнуть градиент Ψ , но $|\nabla\Psi|^2$, как известно из квантовой механики, пропорционален плотности кинетической энергии. Это значит, что, учитывая квантовые эффекты, мы учитываем дополнительную положительную энергию, запасенную в NS -границе. Таким образом, учет квантовых эффектов открывал возможность получить $\sigma_{ns} > 0$.

Подробно обоснование и основы теории ГЛ будут рассмотрены в главе 3. Сейчас же отметим то главное, что определило огромное значение теории ГЛ во всей науке о сверхпроводимости.

Для описания поведения сверхпроводников была привлечена квантовая механика. Поведение всей совокупности сверхпроводящих электронов было описано волновой функцией $\Psi(\mathbf{r})$ от одной пространственной координаты (напомним, что, вообще говоря, волновая функция n электронов в металле есть функция n координат $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$). Этим устанавливалось когерентное, согласованное поведение всех сверхпроводящих электронов. Действительно, поведение одного электрона в стационарном состоянии описывается в квантовой механике функцией $\Psi(\mathbf{r})$. Если же n_s электронов (где n_s — плотность сверхпроводящих электронов — макроскопически большое число) ведут себя совершенно одинаково, согласованно, то понятно, что для описания их поведения достаточно той же самой волновой функции от одного переменного. Открывалась возможность предсказания существования многих необычайно красивых квантовых и

в то же время макроскопических эффектов сверхпроводимости.

Поскольку теория ГЛ была построена на основе теории фазовых переходов второго рода (теории Ландау), она оказалась справедливой лишь вблизи критической температуры сверхпроводника, т. е. в области $T_c - T \ll T_c$. Более подробно об области применимости теории ГЛ см. § 41.

Применив теорию ГЛ к изучению сверхпроводящих сплавов, А. А. Абрикосов (1957) создал теорию так называемых сверхпроводников второго рода. Оказывается, не всегда у сверхпроводников должно быть $\sigma_{ns} > 0$. Сверхпроводники с $\sigma_{ns} > 0$ — это сверхпроводники первого рода. Большинство сплавов и химических соединений, которые являются сверхпроводниками, имеют $\sigma_{ns} < 0$, и эти сверхпроводники являются сверхпроводниками второго рода. В сверхпроводниках второго рода эффект Мейснера отсутствует, и магнитное поле проникает внутрь сверхпроводника второго рода, но проникает очень своеобразно — в виде квантованных вихревых нитей (квантовый эффект в макромасштабе!). Сверхпроводимость в таких материалах может существовать до очень больших магнитных полей.

Однако ни теория Лондонов, ни теория ГЛ не давали ответа на вопрос, что же это за «сверхпроводящие электроны», описанию поведения которых и были посвящены эти теории. Прошло уже 46 лет с момента открытия сверхпроводимости, а понимания на микроскопическом уровне того, что такое сверхпроводник, все еще не было!

И вот в 1957 г. появилась работа Дж. Бардина, Л. Купера и Дж. Шриффера (теория БКШ), которая ответила и на этот вопрос. Большой вклад в решение этой задачи внес Н. Н. Боголюбов (1958), разработавший математический метод, который сейчас широко используется при изучении сверхпроводимости.

Решающий шаг в понимании микроскопического механизма сверхпроводимости был сделан Л. Купером (1956). Суть дела заключается в следующем. Пусть нормальный металл находится в основном состоянии, т. е. все состояния невзаимодействующих друг с другом электронов в k -пространстве внутри сферы Ферми заполнены, а все состояния вне этой сферы — пусты. Внесем еще пару электронов и расположим их в ячейках ($k \uparrow$) и ($-k \downarrow$) вблизи сферы Ферми (стрелками показано направление электронных спинов). Оказывается, что если

эти два электрона по какой-либо причине притягиваются друг к другу, то как бы ни было слабо это притяжение, они образуют связанное состояние. В пространстве это будет связанная пара электронов — куперовская пара.

В теории БКШ было показано, что учет электрон-фононного взаимодействия может при определенных условиях привести к притяжению между электронами. В результате часть электронов образует куперовские пары. Но такие пары обладают нулевым суммарным спином, и поэтому являются бозе-частицами (т. е. частицами, подчиняющимися статистике Бозе—Эйнштейна). Такие частицы обладают одним замечательным свойством: если температура системы ниже некоторой температуры T_c , они могут скапливаться на самом нижнем энергетическом уровне (в основном состоянии), причем чем больше их там соберется, тем труднее какой-либо из этих частиц выйти из этого состояния. Происходит бозе-конденсация. Все частицы, находящиеся в конденсате, описываются одной волновой функцией от одной пространственной переменной. Понятно, что течение такого конденсата должно быть сверхтекучим, бездиссипативным. Действительно, какой-либо из частиц конденсата теперь совсем не просто рассеяться на примесном атоме или каком-нибудь другом дефекте кристаллической решетки металла. Для этого ей нужно преодолеть «сопротивление» этому акту со стороны всех остальных частиц конденсата.

Таким образом, сверхпроводимость можно теперь представить себе так. При $T < T_c$ в сверхпроводнике существует конденсат куперовских пар. Этот конденсат обладает свойством сверхтекучести. Это значит, что электрический ток без сопротивления переносится в сверхпроводнике куперовскими парами, т. е. элементарный носитель тока имеет заряд $2e$.

Дальнейшее развитие микроскопическая теория сверхпроводимости получила в работах Л. П. Горькова (1958), который разработал метод решения модельной задачи БКШ с помощью функций Грина. Этим методом, в частности, ему удалось получить микроскопическую расшифровку всех феноменологических параметров теории ГЛ и указать ее область применимости (см. § 41).

Работами Горькова было закончено построение теории Гинзбурга—Ландау—Абрикосова—Горькова (Теории ГЛАГ), которая в 1966 году была удостоена Ленинской премии.

§ 5. Уравнения Лондонов

Для того чтобы понять, как ведет себя сверхпроводник, помещенный во внешнее электромагнитное поле, воспользуемся так называемой двухжидкостной моделью. Будем считать, что все свободные электроны сверхпроводника разделены на два коллектива: сверхпроводящие с плотностью n_s и нормальные с плотностью n_n . Плотность свободных электронов $n = n_s + n_n$. При изменении температуры от 0 до T_c величина n_s меняется от n до 0.

Начнем систематическое изучение свойств сверхпроводников в электромагнитном поле с самого простого случая. Мы предполагаем, что напряженности электрического и магнитного полей столь малы, что они не оказывают заметного влияния на плотность сверхпроводящих электронов, кроме того, предполагаем, что плотность n_s всюду одинакова, т. е. пренебрегаем пространственным изменением n_s .

Связь между электрическим полем, магнитным полем и током в этом случае линейная и дается уравнениями Ф. и Г. Лондонов [17].

5.1. Первое уравнение Лондонов. Запишем уравнение движения для единичного объема сверхпроводящих электронов, находящихся в электрическом поле:

$$n_s m \frac{dv_s}{dt} = n_s e E, \quad (5.1)$$

где m — масса электрона, e — его заряд, v_s — сверхтекучая скорость.

Учитывая, что плотность сверхтока (часто говорят сверхпроводящего тока) $j_s = n_s e v_s$, имеем

$$E = \frac{d}{dt} (\Lambda j_s). \quad (5.2)$$

Введено обозначение

$$\Lambda = m/n_s e^2. \quad (5.3)$$

Уравнение (5.2) — это просто второй закон Ньютона для сверхпроводящих электронов. Из этого уравнения следует, что в стационарном состоянии, когда $dj_s/dt = 0$, электрического поля в сверхпроводниках нет. Мы здесь, правда, не учитываем возможного пространственного изменения химического потенциала сверхпроводящих электронов. Такой эффект существует, например, в сверхпроводнике вблизи его границы с нормальным металлом, когда через эту границу идет ток. Подробнее об этом см. главу 7.

5.2. Второе уравнение Лондонов. Сейчас будет найдена связь между сверхтоком и магнитным полем в сверхпроводнике.

Обозначим напряженность истинного, микроскопического магнитного поля в данной точке сверхпроводника $\mathbf{H}(\mathbf{r})$. Здесь требуется некоторое разъяснение. В главе 1 было сказано, что магнитное поле в сверхпроводнике первого рода не проникает, что оно там равно нулю. Сейчас мы убедимся, что это верно лишь приблизительно. На небольшую глубину от поверхности тела (порядка $500 \div 1000 \text{ \AA}$) магнитное поле все же проникает. Наша задача как раз и состоит в том, чтобы выяснить, как меняется в пространстве это поле $\mathbf{H}(\mathbf{r})$.

Пусть свободная энергия сверхпроводника без магнитного поля и тока равна \mathcal{F}_{s0} . Плотность кинетической энергии сверхтока равна

$$W_{\text{кин}} = n_s m v_s^2 / 2 = m j_s^2 / 2 n_s e^2. \quad (5.4)$$

Учитывая уравнение Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s, \quad (5.5)$$

приводим выражение для $W_{\text{кин}}$ (5.4) к виду

$$W_{\text{кин}} = \frac{\lambda^2}{8\pi} (\text{rot } \mathbf{H})^2, \quad (5.6)$$

где введено обозначение

$$\lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}. \quad (5.7)$$

Плотность магнитной энергии в том же месте сверхпроводника равна, как известно, $H^2/8\pi$, поэтому свобод-

ной энергии всего сверхпроводника, с учетом кинетической энергии сверхтока и энергии магнитного поля, равна

$$\mathcal{F}_{sH} = \mathcal{F}_{s0} + \frac{1}{8\pi} \int [\mathbf{H}^2 + \lambda^2 (\text{rot } \mathbf{H})^2] dV. \quad (5.8)$$

Интегрирование ведется по всему объему сверхпроводника.

Решим теперь вариационную задачу: узнаем, какой вид функции $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ будет давать функционалу \mathcal{F}_{sH} минимальное значение. Оговоримся, что правильнее было бы ставить вопрос о минимизации свободной энергии Гиббса. Мы так и поступим при выводе уравнений Гинзбурга—Ландау (см. § 14). Результат, однако, не зависит от того, какой функционал исследуется на минимум: \mathcal{F}_{sH} или \mathcal{F}_{sH} . Поэтому мы будем варьировать \mathcal{F}_{sH} , что делать проще.

Итак, дадим функции $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ малую вариацию $\delta\mathbf{H}(\mathbf{r})$. Изменение \mathcal{F}_{sH} будет равно $\delta\mathcal{F}_{sH}$:

$$\delta\mathcal{F}_{sH} = \frac{1}{8\pi} \int (2\mathbf{H} \delta\mathbf{H} + 2\lambda^2 \text{rot } \mathbf{H} \text{rot } \delta\mathbf{H}) dV. \quad (5.9)$$

Искомая функция $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ — это такая функция, на которой \mathcal{F}_{sH} достигает минимума, т. е.

$$\delta\mathcal{F}_{sH} = 0. \quad (5.10)$$

Воспользовавшись тождеством

$$\mathbf{a} \text{ rot } \mathbf{b} = \mathbf{b} \text{ rot } \mathbf{a} - \text{div} [\mathbf{a}\mathbf{b}], \quad (5.11)$$

преобразуем (5.9) и (5.10) к виду

$$\int [\mathbf{H} + \lambda^2 (\text{rot rot } \mathbf{H})] \delta\mathbf{H} dV - \int \text{div} [\text{rot } \mathbf{H}, \delta\mathbf{H}] dV = 0. \quad (5.12)$$

Последний интеграл, однако, равен нулю. Действительно, воспользовавшись теоремой Гаусса, преобразуем последний

интеграл к виду $\oint [\text{rot } \mathbf{H}, \delta\mathbf{H}] dS$, где интеграл берется по поверхности сверхпроводника. Но поле на поверхности нам задано — это внешнее поле, поэтому там вариация $\delta\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0$.

Мы пришли к уравнению $\int (\mathbf{H} + \lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{H}) \delta\mathbf{H} dV = 0$.

При произвольной вариации $\delta\mathbf{H}(\mathbf{r})$ это уравнение может удовлетвориться, только если выражение в скобках равно нулю. Итак, мы получили уравнение для магнитного поля в сверхпроводнике:

$$\mathbf{H} + \lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{H} = 0. \quad (5.13)$$

Это и есть второе уравнение Лондонов. Его можно записать и по-другому. Используя уравнение Максвелла (5.5) и равенство $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$, легко получим из (5.13)

$$\mathbf{j}_s = -\frac{c}{4\pi\lambda^2} \mathbf{A}. \quad (5.14)$$

Перейти от (5.13) к (5.14) можно только при условии, что мы выбираем так называемую лондоновскую калибровку векторного потенциала

$$\text{div } \mathbf{A} = 0, \quad (5.15)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{n} = 0, \quad (5.16)$$

где \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности сверхпроводника.

Уравнение (5.15) совместно с (5.14) дает неразрывность линий сверхтока, отсутствие источников сверхтока, а (5.16) — невозможность сверхтоку течь через поверхность сверхпроводящего тела. Отсутствие внешних цепей и контактов, подводящих токи, конечно, предполагается.

Используя (5.3) и (5.7), уравнение (5.14) можно записать еще и в виде

$$\mathbf{j}_s = -\frac{1}{c\Lambda} \mathbf{A}, \quad (5.17)$$

$$\Lambda = 4\pi\lambda^2/c^2. \quad (5.18)$$

Второе уравнение Лондонов в виде (5.17) будет в дальнейшем нами часто использоваться.

§ 6. Глубина проникновения магнитного поля

Исследуем с помощью уравнений Лондонов вопрос о том, как проникает магнитное поле в сверхпроводник. Рассмотрим сверхпроводящее полупространство $x > 0$. Это значит, что поверхность сверхпроводника совпадает с плоскостью $x=0$. В направлении оси z наложено внешнее магнитное поле \mathbf{H}_0 . Для решения этой задачи воспользуемся уравнением (5.13). Учитывая, что $\text{rot rot } \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H}$, и учитывая симметрию задачи, уравнение (5.13) записывается в виде

$$d^2 H/dx^2 - \lambda^{-2} H = 0. \quad (6.1)$$

Граничные условия задачи: $H(0) = H_0$, $H(\infty) = 0$. Последнее граничное условие учитывает эффект Мейсснера—Оксенфельда. Решение этой задачи:

$$H = H_0 e^{-x/\lambda}. \quad (6.2)$$

Из этого решения следует, что магнитное поле убывает в глубину сверхпроводника. Характерная длина, на которой происходит ослабление поля в e раз, есть λ (рис. 6.1). Это и есть физический смысл величины λ , введенной формально формулой (5.7). Эта величина называется лондоновской глубиной проникновения магнитного поля:

$$\lambda = \left(\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} \right)^{1/2}. \quad (6.3)$$

На такую же величину убывает и экранирующий (мейснеровский) сверхток, текущий по поверхности. Дей-

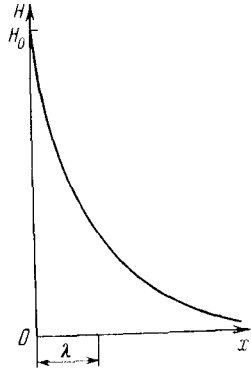


Рис. 6.1. Проникновение магнитного поля в массивный сверхпроводник. Поле на поверхности равно H_0 .

ствительно, $\mathbf{j}_s = (c/4\pi) \text{rot } \mathbf{H}$, что в нашей плоской геометрии дает $j_s = (c/4\pi) dH/dx$. Подставляя сюда (6.2), получим

$$j_s = \frac{cH_0}{4\pi\lambda} e^{-x/\lambda}. \quad (6.4)$$

Поскольку λ зависит от n_s , она зависит от температуры. Довольно хорошим приближением для температурной зависимости λ является эмпирическая формула

$$\lambda(T) = \frac{\lambda(0)}{(1 - (T/T_0)^4)^{1/2}}. \quad (6.5)$$

Оценим порядок величины $\lambda(0)$. При $T=0$ все электроны металла — сверхпроводящие, т. е. $n_s = n \approx 10^{22} \text{ см}^{-3}$. Подставляя в (6.3) это значение, а также $m \sim 10^{-27} \text{ г}$, $c \sim 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$, $e = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ абс. ед.}$, получим $\lambda(0) \sim 600 \text{ \AA}$.

Значения $\lambda(0)$ для некоторых сверхпроводников приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1 Лондоновская глубина проникновения для некоторых сверхпроводников [2]

Элемент	Al	Cd	Hg	In	Nb	Pb	Sn	Tl
$\lambda(0), \text{ \AA}$	500	1300	380—450 (анизотропия)	640	470	390	510	920

§ 7. Нелокальная электродинамика сверхпроводников

То, что говорилось до сих пор об электродинамике сверхпроводников, относилось к так называемой локальной электродинамике. Действительно, уравнение Лондонов (5.17) связывает плотность сверхтока \mathbf{j}_s (т. е. скорость движения носителей сверхтока \mathbf{v}_s) с векторным потенциалом \mathbf{A} в этой же точке. Поэтому, строго говоря, оно применимо, только если размеры носителей сверхтока существенно меньше характерной длины, на которой происходит изменение векторного потенциала, т. е. глубины проникновения λ . Носители сверхтока — это электронные пары. Обозначим размер пары ξ_0 . Оценка по порядку величины, которую мы проведем в главе 6, покажет, что для чистых металлов $\xi_0 \sim 10^{-4} \text{ см}$. С другой стороны, глубина проникновения $\lambda \sim 10^{-5} \div 10^{-6} \text{ см}$. Отсюда следует, что локальная лондоновская электродинамика к чистым сверхпроводникам не применима, потому что на размере ξ_0 магнитное поле должно сильно измениться.

Поэтому локальное уравнение (5.17) должно быть заменено на нелокальное, устанавливающее связь между скоростью частицы и магнитным полем, которое сильно меняется на размере частицы ξ_0 . Такую нелокальную связь предложил Пиппард [18] еще до появления микроскопической теории сверхпроводимости.

В общем виде нелокальная связь между \mathbf{j}_s и \mathbf{A} может быть записана в виде

$$\mathbf{j}_s(\mathbf{r}) = \int \hat{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{A}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (7.1)$$

где \hat{Q} — некоторый оператор, который, действуя на вектор \mathbf{A} , превращает его в вектор $\hat{Q}\mathbf{A}$. Радиус действия оператора $\hat{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ берется равным ξ_0 , т. е. $\hat{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ отличен от нуля только при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \leq \xi_0$. Так происходит усреднение действия вектора \mathbf{A} на частицу (носитель сверхтока)

больших размеров. Если этот размер устремить к нулю, то \hat{Q} превратится в δ -функцию, и мы вернемся к локальной электродинамике.

Пипшард предложил $\hat{Q}\mathbf{A}$ выбрать в виде

$$\hat{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{A}(\mathbf{r}') = -\frac{3n_s e^2}{4\pi m c \xi_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^3} (\mathbf{A}(\mathbf{r}'), \mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/\xi_0}. \quad (7.2)$$

В нелокальном случае закон проникновения магнитного поля в сверхпроводник отличается от экспоненциального, однако и в этом случае можно говорить о глубине проникновения магнитного поля, определив ее так:

$$\lambda = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty H dx. \quad (7.3)$$

Здесь H_0 — поле на поверхности полубесконечного сверхпроводника. Если поле уменьшается в глубь сверхпроводника экспоненциально, то это определение λ и предыдущие (см. (6.1) и (6.2)) совпадают.

Мы не будем решать нелокальную задачу, а покажем, как можно просто получить правильный ответ по порядку величины [4]. Допустим, что истинную зависимость $H(x)$, т. е. закон проникновения магнитного поля мы аппроксимируем экспонентой с новой глубиной проникновения. Обозначим эту глубину λ_P (пипшардовская глубина проникновения). Итак, на частицу диаметром ξ_0 векторный потенциал \mathbf{A} действует только на глубину $\lambda_P \ll \xi_0$. В результате частица участвует в создании плотности тока \mathbf{j}_s , но действие \mathbf{A} на частицу в нелокальном случае менее эффективно, ведь только доля частицы λ_P/ξ_0 «чувствует» действие вектор-потенциала \mathbf{A} . Соответственно и плотность тока будет меньше в ξ_0/λ_P раз. Подставив этот коэффициент в формулу (5.14), получим

$$\mathbf{j}_s = -\frac{c}{4\pi\lambda^2} \frac{\lambda_P}{\xi_0} \mathbf{A}. \quad (7.4)$$

Если это уравнение записать в виде

$$\mathbf{j}_s = -\frac{c}{4\pi\lambda_P^2} \mathbf{A}, \quad (7.5)$$

мы получим, как и хотели, экспоненциальный закон спада поля на глубине λ_P . Сравнение (7.4) и (7.5) дает $\lambda_P^2 =$

$$= \lambda^2 \xi_0 / \lambda_P, \text{ откуда оценка } \lambda_P \text{ по порядку величины будет } \lambda_P \approx (\lambda^2 \xi_0)^{1/2}. \quad (7.6)$$

Величина λ здесь по-прежнему определяется формулой (5.7). Из формулы (7.6) следует, что в случае $\lambda \ll \xi_0$ имеем $\lambda_P \gg \lambda$, т. е. нелокальная электродинамика предсказывает более глубокое проникновение магнитного поля, чем то, которое следует из локальной электродинамики. При этом, конечно, предполагается, что λ_P тоже удовлетворяет неравенству $\lambda_P \ll \xi_0$. Но так может быть не всегда даже у чистых металлов.

Типичным представителем сверхпроводников, хорошо описываемых нелокальными соотношениями (пипшардовских сверхпроводников), является Al. Наоборот, даже чистый Pb является лондоновским сверхпроводником.

С приближением T к T_c все сверхпроводники становятся лондоновскими, так как λ растет при $T \rightarrow T_c$, а ξ_0 от T не зависит.

Все, что говорилось до сих пор, относится к случаю чистого металла, т. е. такого, у которого длина свободного пробега электрона $l \gg \xi_0$. Если загрязнить металл примесными атомами, то может возникнуть ситуация, когда $l \ll \xi_0$. Такие металлы мы будем называть грязными. Сюда же относятся и сплавы. В очень грязных металлах роль размера электронной пары уже играет длина пробега l . Микроскопическая теория показывает, что для грязных сверхпроводников глубина проникновения магнитного поля $\lambda_g \approx \lambda (\xi_0/l)^{1/2}$ при $l \ll \xi_0$. Таким образом, сплавы хорошо описываются локальными лондоновскими уравнениями. В дальнейшем мы будем пользоваться локальными уравнениями.

§ 8. Квантовое обобщение уравнения Лондонов.

Квантование магнитного потока

8.1. Квантовое обобщение уравнения Лондонов.

В главе 1 уже говорилось о том, что элементарным носителем сверхтока является пара электронов, куперовская пара. При этом все пары находятся на одном энергетическом уровне, в одном квантовом состоянии, образуют конденсат. Волновая функция такой конденсатной частицы может быть записана в виде $\Psi(\mathbf{r}) = (n_s/2)^{1/2} e^{i\theta(\mathbf{r})}$, где θ — фаза волновой функции. В нормировке $\Psi(\mathbf{r})$ учтено, что плотность электронных пар равна $n_s/2$, где n_s — плотность сверхпроводящих электронов.

Если частица с массой $2m$ и с зарядом $2e$ движется в магнитном поле, то импульс частицы можно записать в виде

$$\hbar\nabla\theta = 2m\mathbf{v}_s + \frac{2e}{c}\mathbf{A}, \quad (8.1)$$

где \hbar — постоянная Планка. Действительно, в отсутствие магнитного поля плотность потока частиц $n_s\mathbf{v}_s/2$ можно записать в виде $(i\hbar/4m)(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi)$. Подставляя сюда выражение $\Psi(\mathbf{r}) = (n_s/2)^{1/2} e^{i\theta}$, получим $\hbar\nabla\theta = 2m\mathbf{v}_s$. Если частица движется в магнитном поле, то полный импульс $\hbar\nabla\theta$ есть сумма $2m\mathbf{v}$ -импульса и импульса $\frac{2e}{c}\mathbf{A}$, создаваемого магнитным полем.

Используя выражение для плотности сверхтока в виде

$$\mathbf{j}_s = n_s e \mathbf{v}_s, \quad (8.2)$$

и формулы (5.7) и (5.18), легко получим из (8.1) следующее обобщение второго уравнения Лондонов:

$$\mathbf{j}_s = \frac{1}{c\Lambda} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla\theta - \mathbf{A} \right). \quad (8.3)$$

Здесь введено обозначение $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$. Эта величина имеет размерность магнитного потока, а с ее физическим смыслом мы познакомимся в следующем пункте.

8.2. Квантование магнитного потока. Мы переходим к изучению очень интересного (и важного для различных технических применений сверхпроводимости) явления — квантования магнитного потока в сверхпроводниках.

Рассмотрим внутри массивного сверхпроводника цилиндрическую полость (рис. 8.1). Пусть сперва $T > T_c$, и сверхпроводник находится в нормальном состоянии. Наложим внешнее поле \mathbf{H}_0 параллельно образующей полости. Понижим температуру так, чтобы сверхпроводник перешел в сверхпроводящее состояние. Теперь поле из тела сверхпроводника будет вытеснено, а в полости будет заморожен некоторый магнитный поток. Этот поток будет создаваться сверхтоком, возникающим на внутренней поверхности полости. Найдем этот замороженный магнитный поток.

Рассмотрим контур C (рис. 8.1), который охватывает полость и проходит всюду внутри сверхпроводника на расстояниях от границы полости много больших λ . Тогда в любой точке этого контура сверхток $\mathbf{j}_s = 0$, и контурный

интеграл уравнения (8.3) по этому контуру сведется к выражению

$$\frac{\Phi_0}{2\pi} \oint_C \nabla\theta \, dl = \oint_C \mathbf{A} \, dl. \quad (8.4)$$

Учитывая, что

$$\oint_C \mathbf{A} \, dl = \Phi, \quad (8.5)$$

имеем

$$\Phi = (\Phi_0/2\pi) \oint_C \nabla\theta \, dl. \quad (8.6)$$

Здесь Φ — это полный магнитный поток, охватываемый контуром C . Отсюда сразу видно, что θ — многозначная

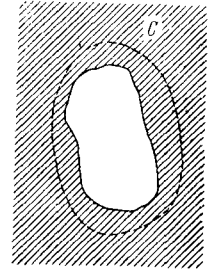


Рис. 8.1. В сплошном сверхпроводнике (заштриховано) имеется цилиндрическая полость. Контур C проходит всюду внутри сверхпроводника на больших по сравнению с λ расстояниях от границы полости.

функция; каждый раз при обходе вокруг отверстия она изменяется на некоторую величину. Но волновая функция Ψ должна быть однозначной. Поэтому мы должны потребовать, чтобы изменение θ при обходе вокруг отверстия с магнитным потоком было кратным $2\pi n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Действительно, добавление к $\theta(\mathbf{r})$ величины $2\pi n$ не изменяет функцию $\Psi(\mathbf{r}) = (n_s/2)^{1/2} e^{i\theta}$, так как $e^{i2\pi n} = 1$. Поэтому

$\oint_C \nabla\theta \, dl = 2\pi n$ и равенство (8.6) можно написать окончательно в виде

$$\Phi = n\Phi_0, \quad (8.7)$$

где

$$\Phi_0 = \frac{\pi\hbar c}{e} = \frac{hc}{2e}. \quad (8.8)$$

Из формулы (8.7) следует, что магнитный поток в полости (точнее — магнитный поток, охватываемый контуром C)

может принимать только значения, кратные минимально возможному потоку Φ_0 — кванту потока. Величина Φ_0 определяется формулой (8.8) и равняется

$$\Phi_0 = 2,07 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2.$$

Физически квантование магнитного потока имеет то же происхождение, что квантование орбит электронов в атоме. Нужно, чтобы волновая функция электронов, вращающихся по некоторому замкнутому контуру, имела целое число длин волн на длине этого контура.

Экспериментально квантование магнитного потока было обнаружено практически одновременно в США (Б. Дивер и В. Фербенк) [8] и в ФРГ (Р. Долл и М. Небауэр) [9] в 1961 г. Интересно отметить, что Ф. Лондон, предсказывая квантование магнитного потока, считал, что квант будет равен hc/e , т. е. предсказывал значение в два раза большее Φ_0 . Это и понятно, он считал, что элементарный заряд носителя сверхтока равен заряду электрона e . Опыт подтвердил правильность формулы (8.8). Таким образом, результаты опытов по изучению квантования магнитного потока явились прямым доказательством того, что сверхток переносится парами электронов.

Задача 8.1. В массивном сверхпроводнике имеется отверстие диаметром 0,1 мм, в котором захвачено 7 квантов магнитного потока. Определить напряженность магнитного поля в отверстии.

Ответ. $H = 1,84 \cdot 10^{-2}$ Э.

Задача 8.2. В массивном сверхпроводнике имеется цилиндрическое отверстие диаметром 2 см. В нем захвачено магнитное поле с напряженностью $H = 300$ Э. Найти величину векторного потенциала A на расстоянии $R = 2$ см от центра отверстия. Найти градиент фазы $\nabla\theta$ на этом же расстоянии R .

Ответ. $A = 75$ Гс·см, $\nabla\theta = 2,36 \cdot 10^9$ рад/см.

Задача 8.3. Рассматривается тонкая сверхпроводящая пленка толщины $d \ll \lambda$, нанесенная на поверхности диэлектрической нити. Радиус сечения нити равен R . Нить вынесена в продольное магнитное поле при комнатной температуре, и затем температура нити опущена ниже T_c . После этого внешнее магнитное поле выключается. Как квантуется магнитный поток, захваченный нитью с пленкой?

Решение. Поскольку $d \ll \lambda$, ток будет распределен по пленке однородно. Поэтому интегрирование выражения (8.3) по замкнутому круговому контуру радиуса R дает

$$\Phi = \Phi_0 n - \frac{2\pi mc R}{n_s e^2} j_s. \quad (8.9)$$

С другой стороны, магнитное поле внутри цилиндра и ток по поверхности цилиндра связаны соотношением

$$H = \frac{4\pi}{c} j_s d,$$

поэтому поток внутри цилиндра $\Phi = (4\pi^2/c) j_s d R^2$. Выражая отсюда j_s и подставляя в (8.9), имеем

$$\Phi = \Phi_0 n \left(1 + \frac{2\lambda^2}{Rd}\right)^{-1}.$$

Замечание. Если $Rd \gg 2\lambda^2$ квантование магнитного потока в тонкостенном цилиндре ($d \ll \lambda$) происходит так же, как и в массивном. В остальных случаях «квант потока» меньше Φ_0 .

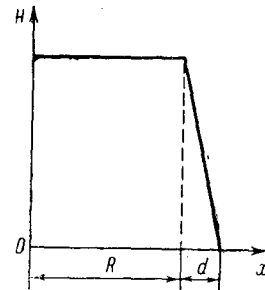


Рис. 8.2. Распределение магнитного поля, захваченного тонкостенным сверхпроводящим цилиндром.

Задача 8.4. Найти распределение магнитного поля в условиях предыдущей задачи.

Ответ. См. рис. 8.2.

§ 9. Распределение поля и тока в простейших конфигурациях сверхпроводников

9.1. Пластина в параллельном поле. Переходим к рассмотрению распределения поля и тока в некоторых простых конфигурациях. Начнем со случая, когда бесконечная пластина толщины d помещена в однородное параллельное пластине магнитное поле H_0 . Пусть плоскость $x=0$ проходит по центру пластины, поверхности пластины совпадают с плоскостями $x = \pm d/2$, магнитное поле направлено вдоль оси z .

Поле внутри пластины должно удовлетворять уравнению (5.13). Учитывая, что по соображениям симметрии поле H внутри пластины должно быть направлено вдоль оси z и зависеть только от x , уравнение (5.13) можно записать в виде

$$d^2 H/dx^2 - \lambda^{-2} H = 0 \quad (9.1)$$

с граничными условиями $H(\pm d/2) = H_0$.
Общее решение уравнения (9.1) имеет вид

$$H = H_1 \text{ch}(x/\lambda) + H_2 \text{sh}(x/\lambda), \quad (9.2)$$

где H_1 и H_2 — постоянные интегрирования. Подставляя в (9.2) граничные условия, получим и решим два алгебраических уравнения с двумя неизвестными (H_1 и H_2).

В результате имеем окончательно

$$H(x) = H_0 \frac{\text{ch}(x/\lambda)}{\text{ch}(d/2\lambda)}. \quad (9.3)$$

Плотность сверхтока в пластине можно найти, воспользовавшись (9.3) и уравнением Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = (4\pi/c) \mathbf{j}_s$:

$$j_s = -\frac{c}{4\pi} \frac{dH}{dx}. \quad (9.4)$$

В результате получим

$$j_s = -\frac{cH_0}{4\pi\lambda} \frac{\text{sh}(x/\lambda)}{\text{ch}(d/2\lambda)}. \quad (9.5)$$

Из (9.3) и (9.5) следует, что и магнитное поле, и ток про-

никают в глубь пластины только на глубину порядка λ , если пластина толстая ($d \gg \lambda$). Если же это тонкая пленка ($d \ll \lambda$), то, разлагая гиперболические функции по степеням малых параметров x/λ и $d/2\lambda$, получим в линейном приближении

$$H = H_0, \quad j_s = cH_0 x / (4\pi\lambda^2).$$

Это означает, что магнитное поле полностью проникает в пленку, а плотность сверхтока — линейная функция координаты.

Распределение поля и тока в пластине при $d \sim \lambda$ показано на рис. 9.1.

Токи текут по краям пластины так, чтобы созданное ими магнитное поле уничтожило внешнее поле H_0 в глубине пластины.

9.2. Пластина с током. В этом пункте рассмотрим случай, когда по бесконечной пластине течет заданный ток, а внешнее поле отсутствует. Пусть пластина будет такая же, как и в п. 9.1, а заданный ток течет в направлении оси y . При этом, конечно, предполагается, что ток распределен однородно вдоль оси z , т. е. краевые эффекты не учитываются.

Итак, в единичной полосе вдоль оси z течет ток I . На поверхностях пластины ($x = \pm d/2$) он создает магнитное поле $H(\pm d/2) = \mp H_I$. Подставляя эти граничные условия в общее решение (9.2), найдем поле в пластине:

$$H(x) = -H_I \frac{\text{sh}(x/\lambda)}{\text{sh}(d/2\lambda)}, \quad (9.6)$$

где $H_I = 2\pi I/c$.

Снова используя уравнение Максвелла (9.4), найдем распределение тока в пластине:

$$j_s(x) = \frac{cH_I}{4\pi\lambda} \frac{\text{ch}(x/\lambda)}{\text{sh}(d/2\lambda)}. \quad (9.7)$$

Из (9.6) и (9.7) следует, что и в этом случае поле и ток распределены только в поверхностном слое толщины λ , если $d \gg \lambda$. В случае же тонкой пленки ($d \ll \lambda$) ток течет по всему сечению пластины, а поле — линейная функция координат:

$$H = -H_I \cdot 2x/d, \quad j_s = \frac{cH_I}{2\pi d} = \frac{I}{d}.$$

Напомним, что однородный ток в бесконечной пластине создает вне этой пластины неубывающее однородное магнитное поле. Распределение тока и поля в пластине с током показано на рис. 9.2.

9.3. Пластина с током в однородном поперечном магнитном поле. Пусть пластина находится в однородном внешнем магнитном поле H_0 , направленном вдоль оси z , как в п. 9.1, и по пластине течет ток в направлении оси y , который однородно распределен вдоль оси z , как в п. 9.2. Полный ток через поперечное сечение единичной высоты равен I , он создает на поверхностях пластины ($x = \pm d/2$) поле $\mp H_I$. Такая суперпозиция условий двух предыдущих задач, в силу линейности уравнений Лондонов, должна привести к суперпозиции их решений.

Рассмотрим частный случай, когда $H_I = H_0$. Это значит, что внешнее поле H_0 будет полностью компенсировать поле тока с одной стороны пластины и удваивать его с другой стороны, что приведет к тому, что ток I теперь будет течь только по одной стороне пластины. Такую

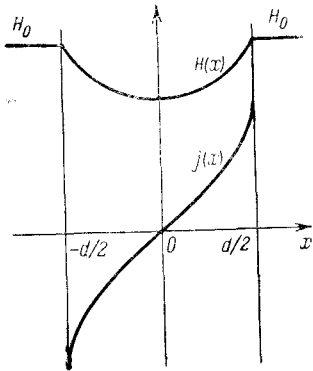


Рис. 9.1. Распределение магнитного поля и тока по сечению тонкой пленки, находящейся в однородном, параллельном магнитном поле.

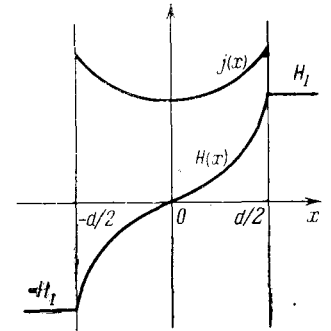


Рис. 9.2. Распределение магнитного поля и тока в тонкой пленке с заданным током.

ситуацию можно реализовать, создав внешнее поле H_0 посредством второй пластины с таким же током I , но противоположно направленным (рис. 9.3). Поле $H=2H_0$ между пластинами равно *) $H=(4\pi/c)I$. Можно считать, что это поле создано обоими токами. Ток I левой пластины создает всюду правее от пластины однородное поле $H_I=2\pi I/c$, направленное вверх, и такое же поле левее пластины, направленное вниз. Ток правой пластины, наоборот, создает поле H_I , направленное вниз справа от этой пластины и вверх слева от нее. Сложение этих

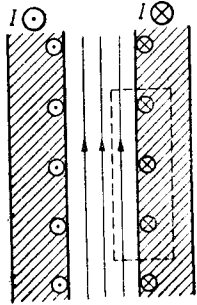


Рис. 9.3. Если в параллельных сверхпроводящих пластинах текут равные и противоположные токи, то магнитное поле этих токов будет «заперто» между пластинами.

полей приводит к полной компенсации полей справа и слева от пары пластин и к удвоению поля в промежутке между пластинами.

9.4. Пленка над экраном. В этом пункте мы рассмотрим очень важный для практики случай: пленка над полубесконечным сверхпроводящим пространством (экраном). Чтобы найти, как распределяется поле в такой системе, когда по пленке течет заданный ток, рассмотрим совсем простой случай.

Пусть над сверхпроводящим полупространством (экраном) находится прямой проводник с током вдоль оси y на некотором расстоянии a от поверхности экрана. Каково будет магнитное поле над экраном? Если бы экрана не было, то магнитные силовые линии были бы concentрическими окружностями с центром в месте расположения проводника с током.

*) По теореме Стокса $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = (4\pi/c)I$, где I — полный ток, пересекающий поверхность, ограниченную контуром, по которому берется контурный интеграл. Проведя интегрирование по штриховому контуру (рис. 9.3), получим $H = (4\pi/c)I$.

Поскольку силовые линии проникают в сверхпроводник не могут (эффект Мейсснера—Оксенфельда), ясно, что наличие экрана приведет к деформации поля.

Найдем это поле. В области $z > 0$ и вне проводника с током никаких токов нет, поэтому $\text{rot } \mathbf{H} = 0$. Это значит, что в этой области поле безвихревое, т. е. здесь можно ввести потенциал магнитного поля, удовлетворяющий уравнению Лапласа. С другой стороны, мы знаем, что магнитное поле на поверхности сверхпроводника всегда касательно к поверхности, т. е. $H_z(z=0) = 0$. Это граничное условие делает решение уравнения Лапласа однозначным.

Из сказанного следует, что правильное поле в области $z > 0$ можно найти очень просто методом изображений. Это будет поле, созданное двумя прямолинейными токами, равными и противоположными, которые теперь уже текут в пространстве без экрана. Один из токов находится на расстоянии a от плоскости $z=0$, а именно в точке $(0, a)$, а другой (изображение) — в точке $(0, -a)$. Действительно, в области $z > 0$ и вне провода с током поле по-прежнему удовлетворяет уравнению $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, а граничное условие $H_z(z=0) = 0$ выполняется автоматически благодаря симметрии задачи.

Таким образом, мы пришли к методу изображений, который сейчас применим для анализа поля, созданного сверхпроводящей пленкой, расположенной над сверхпроводящим экраном.

Итак, пусть пленка толщины $d > \lambda$ и ширины $w \gg \lambda$ расположена над сверхпроводящим полубесконечным экраном на расстоянии b от экрана. По пленке идет ток I . Найти распределение тока в пленке и в экране и магнитное поле между пленкой и экраном.

Воспользуемся методом изображений. Заменим действие экрана действием пленки-изображения, отстоящей от нашей пленки на расстоянии $2b$. По пленке-изображению тоже течет ток, но в противоположном направлении. Таким образом, мы пришли к задаче о распределении тока и поля в случае двух параллельных пленок с противоположными токами. Эта задача была рассмотрена в п. 9.3 (рис. 9.3). Поэтому мы сразу можем дать ответ: между пленкой и экраном возникает однородное магнитное

поле. $H_I = \frac{4\pi}{c} I/w$. Ток I в пленке будет сосредоточен только на нижней (обращенной к экрану) стороне пленки в слое $\sim \lambda$. Поле H_I между пленкой и экраном согласо-

ется по закону полного тока с током в экране. Этот ток сосредоточен в слое $\sim \lambda$ около поверхности экрана, и поверхностная плотность его равна I/w . Направление тока в экране противоположно направлению тока в пленке.

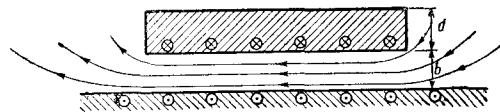


Рис. 9.4. Магнитное поле, созданное пленкой с током, расположенной над экраном.

Все это схематически изображено на рис. 9.4. Краевые эффекты в этих рассуждениях не учитывались. Точный расчет с учетом краевых эффектов [19] дает распределение магнитных полей, показанное на рис. 9.5.

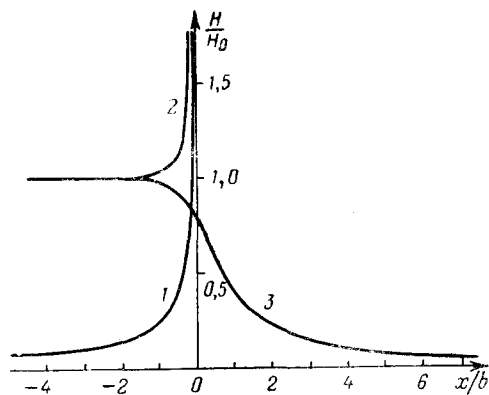


Рис. 9.5. Распределение магнитного поля вблизи края сверхпроводящей пленки с током, расположенной вблизи сверхпроводящего экрана: 1 — поле на верхней поверхности пленки, 2 — поле на нижней поверхности пленки, 3 — поле на поверхности экрана.

Полученная картина будет соответствовать действительности в том случае, если реальную пленку, играющую роль экрана, можно аппроксимировать полубесконечным экраном. Приведем пример, когда это сделать нельзя.

Пусть толстая сверхпроводящая пленка (толщина $d \geq \lambda$) ширины w и длины l нанесена на стеклянную подложку, $w \ll l$. После этого пленка была покрыта тон-

ким слоем изолятора толщиной b , причем $b \ll w$, а затем была нанесена другая сверхпроводящая пленка, тоже ширины w и длины намного большей l . По этой верхней пленке пропускался ток от внешнего источника. В пределах длины l обе пленки были параллельны друг другу и располагались одна над другой. Легко сообразить, что нижняя пленка никакого эффекта экранирования дать не может. Действительно, если по верхней пленке течет какой-то ток I , то в пространстве между пленками должно возникнуть магнитное поле. Это значит, что по нижней поверхности верхней пленки и по верхней поверхности нижней пленки должен течь одинаковый по величине

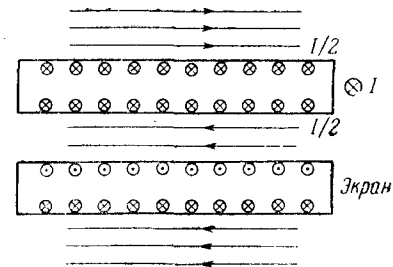


Рис. 9.6. Распределение поля и токов для случая двух близко и параллельно расположенных пленок. Верхняя пленка несет заданный ток I . В нижней пленке ток не задан.

поверхностный ток. Но длина нижней пленки конечна, и току, текущему по ее верхней поверхности, придется замкнуться по ее нижней поверхности (см. рис. 9.6). Это значит, что на нижней поверхности появится точно такое же поле, как и в промежутке между пленками. Более того, ток в верхней пленке разделится поровну между верхней и нижней поверхностями, как это показано на рис. 9.6. Таким образом, поле над, между и под нашей системой пленок будет такое же, как и в отсутствие нижней пленки, т. е. никакого эффекта экранирования она не создает.

9.5. Принцип замыкания. В современной сверхпроводниковой электронике, когда создаются сложные многоплановые системы, бывает довольно затруднительно сразу сообразить, как будут течь токи по пленкам и как будут распределены магнитные поля. Большую помощь здесь может оказать так называемый принцип замыкания [20]. Он применим к толстым пленкам, толщина которых превосходит глубину проникновения, а их длина и ширина существенно превосходят расстояния между пленками.

Сущность принципа сводится к следующему. По двум обращенным друг к другу поверхностям пленок, разделенных тонким слоем диэлектрика, могут течь лишь равные и противоположно направленные токи (действительно, поверхностный ток определяется магнитным полем на поверхности сверхпроводника, а магнитное поле в зазоре между пленками — общее для обеих пленок). Если зазор между пленками мал, то магнитный поток в этом зазоре будет тоже мал, и, выйдя на конце пленок из зазора, он создает пренебрежимо малое магнитное поле. Поэтому, пренебрегая этим краевым эффектом, можно утверждать, что остальные части пленочной системы «не знают» о существовании этого потока и «не заметят», если он пропадет. А пропасть он может в результате замыкания, соприкосновения двух сверхпроводящих поверхностей, обращенных друг к другу и несущих противоположные и равные токи.

Итак, сформулируем принцип замыкания [20]: если замкнуты (замкнуть) две обращенные друг к другу поверхности пленок в какой-либо сложной пленочной структуре, то это не повлияет на распределение токов во всех остальных участках структуры, кроме замкнутых поверхностей.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих этот принцип.

1. Найдем распределение токов в двух толстых одинаковых параллельных пленках, разделенных тонким зазором, если в первой пленке задан ток I_1 , а во второй — в ту же сторону ток I_2 . Замкнем эти две пленки. Получится одна, но с полным током $I_1 + I_2$, который равномерно распределится по двум наружным поверхностям замкнутых пленок. Итак, по каждой из этих поверхностей течет ток $(I_1 + I_2)/2$. Так мы сразу нашли наружные поверхностные токи нашей пленочной системы. Обозначим теперь ток, текущий по внутренним поверхностям пленок, через i . Поскольку полный ток в первой пленке задан равным I_1 , то $(I_1 + I_2)/2 + i = I_1$, т. е. $i = (I_1 - I_2)/2$. Все поверхностные токи нашей системы теперь полностью определены.

Заметим, что если $I_2 = 0$, то мы сразу получим результат, который показан на рис. 9.6 — отсутствие экранирующего действия пленки.

2. Если изолированный провод с током покрыт сверхпроводящей оболочкой, то оболочка не сможет экранировать поле тока. Действительно, замкнем внутреннюю

поверхность оболочки и поверхность провода. Весь ток провода пойдет по наружной поверхности оболочки и создаст магнитное поле в окружающем пространстве.

3. Найдем распределение токов в системе, образованной толстой сверхпроводящей пленкой с током, расположенной над массивным сверхпроводящим телом (рис. 9.7). В результате замыкания нижней поверхности пленки и верхней поверхности массивного бруска возникает система, распределение токов в которой мы можем нарисовать. Действительно, ток из пленки растечется по верхней поверхности сверхпроводящего бруска, но небольшая

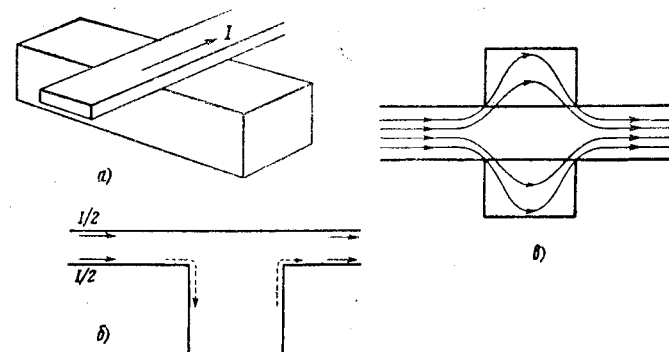


Рис. 9.7. Пленка с током отделена от плоской поверхности массивного сверхпроводника узким зазором: а) общий вид, б) вид сбоку после замыкания, в) вид в плане.

его доля пойдет вокруг бруска через его нижнюю поверхность. Плотность тока в верхней поверхности пленки резко уменьшится. Используя этот результат, теперь можно сказать, что в исходной, незамкнутой системе часть пленки, которая находится над бруском, будет нести заданный ток I главным образом по нижней поверхности. Такой же, но противоположно направленный ток пойдет по верхней поверхности бруска, находящейся непосредственно под пленкой. Затем этот ток растечется по верхней поверхности бруска и замкнется, а малая его часть замкнется на пути вокруг бруска.

Можно сделать вывод, что роль бруска в этой схеме приближается к роли полубесконечного экрана (см. рис. 9.5).

§ 10. Кинетическая индуктивность

Индуктивность какого-либо участка электрической цепи обычно определяется по величине энергии магнитного поля \mathcal{F}^m , возникающего при протекании заданного тока I по этому участку:

$$\mathcal{F}^m = \frac{1}{8\pi} \int H^2 dV = \frac{1}{2c^2} L^m I^2; \quad (10.1)$$

интеграл берется по всему пространству. Эту индуктивность мы будем называть магнитной или геометрической. Но при создании в участке цепи тока I часть энергии перешла еще и в кинетическую энергию \mathcal{F}^k носителей тока (электронов). С этой энергией можно ассоциировать так называемую кинетическую индуктивность участка цепи L^k :

$$\mathcal{F}^k = \int n \frac{mv^2}{2} dV = \frac{1}{2c^2} L^k I^2, \quad (10.2)$$

здесь n — концентрация носителей тока, m — масса одного носителя, v — скорость. Интегрирование ведется по объему проводника.

В случае, когда рассматриваемый участок цепи — нормальный, вклад от кинетической индуктивности в полное сопротивление участка очень мал по сравнению с его активным сопротивлением и им обычно пренебрегают. Учет кинетической индуктивности в нормальных проводниках может оказаться существенным при очень высоких частотах (больших 10^{13} Гц). Наоборот, в сверхпроводниках кинетическая индуктивность играет иногда важную роль.

Итак, плотность сверхтока $\mathbf{j}_s = n_s e v_s$. Тогда из формулы (10.2) получим следующее определение кинетической индуктивности сверхпроводника:

$$L^k = c^2 \Lambda \int j_s^2 dV / I^2, \quad (10.3)$$

где интеграл берется по объему сверхпроводника, а I — полный ток, текущий по сверхпроводнику.

Проиллюстрируем понятие кинетической индуктивности на конкретных примерах.

1. Рассмотрим сверхпроводник круглого сечения длины l и радиуса R . Пусть $R \gg \lambda$. Найдем кинетическую индуктивность нашего провода L^k . Если по проводу течет ток I , то он течет по поверхности провода. Плотность тока j_s на расстоянии r от центра провода равна

$j_s(x) = j_{s0} e^{-x/\lambda}$, где $x = R - r$, $j_{s0} = j_s(0)$. Полный ток $I = 2\pi R \lambda j_{s0}$. Подставляя эти данные в (10.3) и проводя интегрирование, получим $L^k = l\lambda/R$.

Введем теперь очень полезное для приложений понятие — индуктивность на квадрат: L_{\square} . Если рассматривается плоский проводник, то индуктивность его (так же, как и сопротивление) тем больше, чем больше его длина, и тем меньше, чем больше его ширина, поэтому индуктивность квадрата всегда одна и та же для данного проводника — будь это 1 км^2 или 1 мм^2 . Поскольку длина окружности поперечного сечения нашего провода равна $2\pi R$, то кинетическая индуктивность на квадрат будет равна

$$L_{\square}^k = 2\pi\lambda. \quad (10.4)$$

Если воспользоваться выражением (10.4) и найти ту часть магнитной индуктивности, которая связана с магнитным полем, проникшим в сверхпроводник, т. е. в слой $\sim \lambda$ у поверхности, то после элементарных расчетов получим то же самое значение:

$$L_{\square}^m = 2\pi\lambda. \quad (10.5)$$

Этот же результат будет справедлив и для плоской поверхности сверхпроводящего полупространства.

Полная индуктивность на квадрат λ -слоя поверхности массивного сверхпроводника равна сумме (10.4) и (10.5):

$$L_{\square} = 4\pi\lambda. \quad (10.6)$$

В СИ эта формула имеет вид $L_{\square} = \mu_0 \lambda$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. Как следует из (10.4—10.6), L_{\square} измеряется в см, а в СИ — в Гн, причем $1 \text{ см} = 10^{-9} \text{ Гн} = 1 \text{ нГн}$.

Поскольку L_{\square}^k для полупространства зависит только от глубины проникновения, можно сказать, что λ характеризует инерциальные свойства носителей сверхтока.

Если $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-6}$ см, то $L_{\square} = 4\pi\lambda = 6,3 \cdot 10^{-5} \text{ см} = 6,3 \cdot 10^{-14} \text{ Гн}$.

2. Рассмотрим кинетическую индуктивность тонкой сверхпроводящей пленки. Пусть толщина пленки $d \ll \lambda$, и поэтому ток в пленке будет распределен по толщине однородно. По ширине пленки рассмотрим малый участок ширины w , на котором ток будем считать распределенным однородно. Ограничив длину рассматриваемого участка

тоже величиной w , имеем для кинетической энергии сверхпроводящих электронов в этом участке выражение

$$\mathcal{F}_{\square}^* = \frac{\Lambda}{2} j_s^2 w^2 d.$$

Поскольку ток I по сечению участка предполагается однородным, то $j_s = I/wd$, откуда

$$\mathcal{F}_{\square}^* = \frac{1}{2d} \Lambda I^2 = \frac{1}{2d} \frac{4\pi\lambda^2}{c^2} I^2 = \frac{1}{2c^2} L_{\square}^* I^2.$$

Из последнего равенства сразу получим выражение для L_{\square}^* тонкой пленки:

$$L_{\square}^* = 4\pi\lambda^2/d. \quad (10.7)$$

Понятно, что в случае $d \ll \lambda$ кинетическая индуктивность может стать значительной.

Так, для тонкой пленки ($d \sim 10^{-6}$ см), имеющей глубину проникновения $\lambda = 3 \cdot 10^{-5}$ см, кинетическая индуктивность на квадрат будет, согласно (10.7), равна $L_{\square}^* \approx 10^{-2}$ см = 10^{-11} Гн.

3. Рассмотрим, наконец, случай толстой пленки над массивным сверхпроводящим экраном. Пусть расстояние между пленкой и плоскостью экрана равно b . Если по пленке идет некоторый ток, то в зазоре между пленкой и экраном появится некоторое магнитное поле. Вычисляя энергию этого магнитного поля в зазоре, найдем вклад в индуктивность пленки от этого поля: $L_{\square} = 4\pi b$. Но магнитное поле будет также проникать на глубину λ_1 в пленку и на глубину λ_2 в экран. Согласно (10.6) это проникновение дает дополнительный вклад в индуктивность всей системы, так что полная индуктивность пленки над экраном равна

$$L_{\square} = 4\pi(b + \lambda_1 + \lambda_2). \quad (10.8)$$

Отсюда видно, что для снижения индуктивности пленки ее надо располагать как можно ближе к экрану (уменьшать b), но уменьшать b существенно меньше λ_1 или λ_2 нет смысла, так как магнитная и кинетическая индуктивности в слое порядка глубины проникновения останутся и в пленке, и в экране.

§ 11. Комплексная проводимость сверхпроводника

В этом параграфе будет рассмотрена комплексная проводимость сверхпроводника, на плоскую поверхность которого падает электромагнитная волна. При этом мы предполагаем, что длина свободного пробега электронов l невелика, т. е. справедливо приближение нормального скин-эффекта. Иными словами, l достаточно мала, а частоты не столь велики, и поэтому l меньше глубины проникновения электромагнитного поля. При этом частота соударений электронов $\tau^{-1} = v_F/l \gg \omega$, где ω — частота электромагнитной волны, v_F — скорость электронов на поверхности Ферми.

В изложении этих вопросов мы будем частично следовать книге Ван-Дузера и Тернера [21].

Для вычисления проводимости сверхпроводника в высокочастотном поле воспользуемся двухжидкостной моделью, т. е. будем считать, что существуют нормальные электроны с плотностью n_n и сверхпроводящие с плотностью n_s , причем плотность электронов проводимости $n = n_s + n_n$.

Уравнением движения для сверхпроводящих электронов является первое уравнение Лондонов (5.2)

$$\mathbf{E} = \Lambda d\mathbf{j}_s/dt. \quad (11.1)$$

Для нормальных электронов можно написать

$$e\mathbf{E} = \frac{m}{n_n e} \frac{d\mathbf{j}_n}{\tau} = \frac{m}{n_n e} \frac{d\mathbf{j}_n}{dt}. \quad (11.2)$$

Здесь в левой части стоят силы, действующие на нормальные электроны: электрическое поле и усредненная «сила трения» из-за соударений, а справа — произведение массы на ускорение. Этот второй закон Ньютона для нормального электрона можно записать в виде

$$\mathbf{E} = \frac{n_s}{n_n} \Lambda \frac{d\mathbf{j}_n}{dt} + \frac{n_s}{n_n} \Lambda \frac{\mathbf{j}_n}{\tau}. \quad (11.3)$$

Предполагая, что $\mathbf{j}_s \sim e^{i\omega t}$, запишем (11.1) и (11.3) так:

$$\mathbf{j}_s = -i \frac{1}{\Lambda \omega} \mathbf{E}, \quad (11.4)$$

$$\mathbf{j}_n = \frac{n_n}{n_s} \frac{\tau}{\Lambda} \frac{1 - i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \mathbf{E}. \quad (11.5)$$

Полная плотность тока $\mathbf{j} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_n$, и мы имеем окончательно

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \sigma = \sigma_1 - i\sigma_2, \quad (11.6)$$

$$\sigma_1 = \frac{n_n}{n_s} \frac{\tau}{\Lambda} \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2}, \quad (11.7)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\Lambda\omega} \left[1 + \frac{n_n}{n_s} \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2} \right]. \quad (11.8)$$

Уравнения (11.6)–(11.8) дают комплексную проводимость сверхпроводника в высокочастотном поле.

§ 12. Скин-эффект и поверхностный импеданс

12.1. Нормальный скин-эффект. Известно, что если на поверхность нормального металла падает электромагнитная волна, то поле проникает внутрь на так называемую скин-глубину, или глубину скин-слоя. В этом пункте будет рассмотрен вопрос о проникновении поля в глубь сверхпроводника, на плоскую поверхность которого падает электромагнитная волна. Поверхность сверхпроводника совпадает с плоскостью $x=0$.

Запишем уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}, \quad (12.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (12.2)$$

Предполагая, что магнитное поле в сверхпроводнике $\mathbf{H} \sim e^{-i(kx-\omega t)}$ и беря еще раз rot от правой и левой частей (12.1), получим

$$-\nabla^2 \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (12.3)$$

Здесь мы, используя уравнение $\text{div } \mathbf{H} = 0$, воспользовались равенством $\text{rot rot } \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H}$. Подставляя в (12.3) $\mathbf{H} \sim e^{-i(kx-\omega t)}$, получим

$$k^2 = -i \frac{4\pi}{c^2} \sigma \omega, \quad (12.4)$$

откуда

$$k = (1 - i)/\delta, \quad (12.5)$$

где

$$\delta = \left(\frac{c^2}{2\pi\sigma\omega} \right)^{1/2}. \quad (12.6)$$

В принципе поставленная задача решена. Действительно, проникновение поля определяется величиной k , которая, согласно (12.5) и (12.6), выражается через найденную проводимость σ . Проведем некоторые упрощения. Будем считать, что температура не очень близка к T_c , так что выполняется неравенство $(n_n/n_s)(\omega\tau)^2 \ll 1$. Кроме того, конечно, всегда предполагается, что $\omega\tau \ll 1$. Тогда (11.7) и (11.8) дадут

$$\sigma = \frac{n_n}{n_s} \frac{\tau}{\Lambda} - i \frac{1}{\Lambda\omega}. \quad (12.7)$$

Подставив это выражение в (12.6), получим

$$\delta = \frac{\sqrt{2} \lambda}{\left(\frac{n_n}{n_s} \omega\tau - i \right)^{1/2}}. \quad (12.8)$$

Для малых частот, когда $(n_n/n_s)(\omega\tau) \ll 1$, имеем $\delta = \sqrt{2i}\lambda = \lambda(1+i)$. Подставляя это выражение в (12.5), получим $k = -i/\lambda$, т. е. $H \sim e^{-ikx} = e^{-x/\lambda}$, т. е., как и следовало ожидать, низкочастотное магнитное поле проникает в сверхпроводник, как и стационарное поле — на глубину проникновения λ . В общем же случае проникновение определяется формулами (12.5) и (12.8).

12.2. Поверхностный импеданс. По определению поверхностный импеданс равен

$$Z = \frac{4\pi}{c} \frac{E}{H}. \quad (12.9)$$

Это выражение имеет ясный физический смысл. Пусть на поверхности металла существуют переменные электрическое и магнитное поля, причем векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} касательны к поверхности и ортогональны друг к другу. Тогда $c\mathbf{H}/4\pi$ — это поверхностная плотность тока $\mathbf{j}_{\text{пов}}$, поэтому Z в (12.9) — это отношение $E/j_{\text{пов}}$, т. е. импеданс на квадрат поверхности металла.

Найдем теперь поверхностный импеданс сверхпроводника. Записывая снова магнитное поле в виде $\mathbf{H} \sim e^{-i(kx-\omega t)}$, приведем уравнение (12.1) к виду

$$ikH = \frac{4\pi}{c} \sigma E. \quad (12.10)$$

Тогда, согласно (12.9) и (12.5),

$$Z = \frac{ik}{\sigma} = \frac{1+i}{\sigma\delta}. \quad (12.11)$$

Подставляя сюда (12.6) и (12.7), получим

$$Z = R_{\square} + iX_{L\square}, \quad (12.12)$$

$$R_{\square} = \frac{2\pi\omega^2\lambda}{c^2} \frac{n_n}{n_s} \tau, \quad (12.13)$$

$$X_{L\square} = 4\pi\lambda\omega/c^2 = \omega L_{\square}/c^2. \quad (12.14)$$

Вещественная часть импеданса R_{\square} характеризует потери энергии на нагревание, а мнимая часть $X_{L\square}$ является индуктивным сопротивлением.

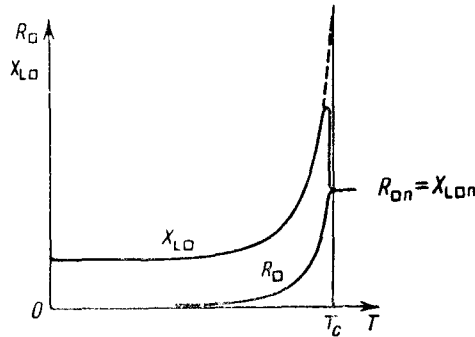


Рис. 12.1. Активная и реактивная части поверхностного импеданса в зависимости от температуры [22].

Выясним, как зависят от температуры R_{\square} и $X_{L\square}$. Воспользуемся для этого эмпирической зависимостью $\lambda \sim (1-t^4)^{-1/2}$, $t = T/T_c$. Поскольку $\lambda \sim n^{-1/2}$, имеем $n_s \sim 1-t^4$, или $n_s = n(1-t^4)$, где n — плотность свободных электронов металла. Тогда $n_n = nt^4$, таким образом,

$$R_{\square} \sim t^4/(1-t^4)^{3/2}, \quad X_{L\square} \sim (1-t^4)^{-1/2}. \quad (12.15)$$

Эти формулы хорошо (по крайней мере качественно) передают температурную зависимость активной и реактивной составляющих импеданса за исключением области температур около T_c . В этой области формулы (12.13) и (12.14) уже неверны. Действительно, при их выводе мы использовали формулу (12.7), полученную в предположении $(n_n/n_s)(\omega\tau)^2 \ll 1$, но как бы ни была мала частота,

при $T \rightarrow T_c$ плотность $n_s \rightarrow 0$, и неравенство нарушается. Поэтому при $T \rightarrow T_c$ из (11.8) имеем $\sigma = (n_n/n_s)\tau/\Lambda - i(n_n/n_s)(\omega\tau)^2/\Lambda\omega$. Пренебрегая здесь мнимой частью и подставляя это выражение и (12.5) в (12.11), получим

$$Z = \frac{2\pi}{c^2} \left(2\omega\tau \frac{n_n}{n_s}\right)^{1/2} \frac{\lambda}{\tau} (1+i) = \frac{1+i}{\sigma_n\delta_n}, \quad (12.16)$$

где σ_n и δ_n — проводимость и глубина скин-слоя нормального металла.

Из этого выражения следует, что R_{\square} и $X_{L\square}$ при $T \rightarrow T_c$ принимают одинаковое значение и теряют свою зависимость от температуры, так как $n_s^{1/2}\lambda = \text{const}$.

Зависимость R_{\square} и $X_{L\square}$ от температуры, даваемая двухжидкостной моделью, представлена на рис. 12.1.

§ 13. Введение

В теории Лондонов (гл. 2) не учитывались квантовые эффекты сверхпроводимости. Теория Гинзбурга—Ландау (ГЛ) [23] стала первой квантовой феноменологической теорией сверхпроводимости.

В теории должно быть учтено то, что сверхпроводящее состояние — более упорядоченное, чем нормальное, и что переход из одного в другое (в отсутствие магнитного поля) — это фазовый переход второго рода. Отсюда следовало, что в сверхпроводнике должен существовать какой-то параметр порядка, который отличен от нуля при $T < T_c$ и обращается в нуль при $T \geq T_c$. С другой стороны, для создания квантовой теории необходимо было ввести какую-то эффективную волновую функцию сверхпроводящих электронов $\Psi(\mathbf{r})$.

В. Л. Гинзбург и Л. Д. Ландау решили объединить эти две величины, решили рассматривать $\Psi(\mathbf{r})$ в качестве параметра порядка. Для этого потребовалась большая научная смелость и проникновенная физическая интуиция. В основу теории ГЛ положена разработанная Л. Д. Ландау теория фазовых переходов второго рода [24].

Согласно этой теории фазовый переход второго рода — это такой переход, при котором состояние тела меняется непрерывно, а его симметрия — скачком. При этом низкотемпературная фаза — менее симметричная фаза, т. е. фаза, обладающая большим порядком.

К фазовым переходам второго рода относятся переходы порядок—беспорядок в некоторых сплавах, ферромагнитный переход в точке Кюри, переход гелия в сверхтекучее состояние, переход металла в сверхпроводящее состояние.

Поясним теперь, как непрерывное изменение состояния тела может сопровождаться скачкообразным изменением его симметрии. Наиболее наглядно это видно на при-

мере следующего структурного перехода (явления упорядочения). Пусть атомы сортов A и B расположены в линейной цепочке и при достаточно высокой температуре вероятности заполнения узлов атомами A и B одинаковы (полный беспорядок, рис. 13.1, a). На рис. 13.1, b показана вероятность заполнения узлов атомами сорта A при $T < T_c$. Теперь атомы расположены в большем порядке — «через один». При прохождении через точку T_c появился и начал увеличиваться с понижением температуры параметр порядка η , а период структуры a изменился скачком при $T = T_c$ и стал равным $2a$.

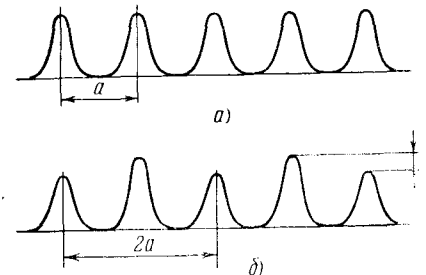


Рис. 13.1. Иллюстрация скачкообразного изменения симметрии при структурном фазовом переходе второго рода; a) вероятность найти атом сорта A в данной точке кристалла при $T > T_c$, b) то же при $T < T_c$.

Возвратимся к сверхпроводимости. В основе теории фазовых переходов второго рода Л. Д. Ландау лежит разложение свободной энергии по степеням параметра порядка, который мал вблизи точки перехода. Поскольку теория ГЛ основана на таком разложении, ясно, что область ее применимости ограничена близостью к критической температуре: $T_c - T \ll T_c$. Более подробно область применимости теории ГЛ дана в § 41.

Итак, будем считать волновую функцию сверхпроводящих электронов $\Psi(\mathbf{r})$ параметром порядка. Более того, теперь нам понятно, как удобно выбрать нормировку этой волновой функции. Пусть $|\Psi(\mathbf{r})|^2$ будет плотностью электронных куперовских пар, т. е.

$$|\Psi(\mathbf{r})|^2 = n_s/2. \quad (13.1)$$

Рассмотрим сперва самый простой случай — однородный сверхпроводник без внешнего магнитного поля.

Тогда Ψ не должна зависеть от \mathbf{r} и разложение свободной энергии по степеням $|\Psi|^2$ вблизи T_c дает выражение

$$F_{s0} = F_n + \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4. \quad (13.2)$$

Здесь F_{s0} — плотность свободной энергии сверхпроводника в отсутствие магнитного поля, F_n — плотность свободной энергии тела в нормальном состоянии, α и β — некоторые феноменологические коэффициенты разложения, характеризующие материал.

Найдем то значение $|\Psi|^2$, при котором свободная энергия однородного сверхпроводника F_{s0} достигает минимума. Это значение $|\Psi_0|^2$ будет решением уравнения

$$\frac{dF_{s0}}{d|\Psi|^2} = 0.$$

Подставляя сюда (13.2), после элементарных вычислений получим

$$|\Psi_0|^2 = -\alpha/\beta. \quad (13.3)$$

Подставляя (13.3) в (13.2), найдем разность

$$F_n - F_{s0} = \alpha^2/2\beta. \quad (13.4)$$

Но согласно формуле (3.5) эта разность равна $H_{cm}^2/8\pi$, откуда имеем

$$H_{cm}^2 = 4\pi\alpha^2/\beta. \quad (13.5)$$

Обсудим температурную зависимость коэффициентов α и β . Поскольку при $T = T_c$ параметр порядка должен быть равен нулю, а при $T < T_c$ — отличен от нуля, из (13.3) следует, что $\alpha = 0$ при $T = T_c$ и $\alpha < 0$ при $T < T_c$. Поэтому в первом порядке по $(T_c - T)$ можно записать

$$\alpha \sim (T - T_c). \quad (13.6)$$

Такая температурная зависимость α согласует вблизи T_c формулу (13.5) и эмпирическую формулу (1.1).

Коэффициент β положителен и от температуры не зависит. Действительно, согласно (13.3) при $T < T_c$ и $\alpha < 0$ положительное значение величины $|\Psi_0|^2$ может быть получено только при $\beta > 0$. С другой стороны, если $T > T_c$ и, согласно (13.6) $\alpha > 0$, то при $\beta > 0$ величина F_{s0} достигает минимума при $|\Psi_0|^2 = 0$, т. е., как и должно быть, сверхпроводящее состояние при $T > T_c$ отсутствует. Таким образом, при $T < T_c$ и $T > T_c$ параметр $\beta > 0$. Поэтому мы можем в первом по $(T_c - T)$ приближении считать, что $\beta = \text{const}$.

14.1. Плотность свободной энергии. Переходим теперь к рассмотрению общего случая неоднородного сверхпроводника, находящегося во внешнем магнитном поле.

Вблизи T_c разложение свободной энергии Гиббса по степеням Ψ можно записать так:

$$G_{sH} = G_n + \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| -i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A}\Psi \right|^2 + \frac{H^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{H}\mathbf{H}_0}{4\pi}, \quad (14.1)$$

G_n — плотность свободной энергии сверхпроводника в нормальном состоянии, \mathbf{H}_0 — напряженность внешнего однородного магнитного поля, в котором находится сверхпроводник. Предпоследнее слагаемое в (14.1) представляет собой просто плотность магнитной энергии, где \mathbf{H} — это точное микроскопическое поле в данной точке сверхпроводника. Слагаемое с градиентным членом — это плотность кинетической энергии сверхпроводящих электронов. Рассмотрим это слагаемое более подробно.

Плотность кинетической энергии частицы с массой m в квантовой механике записывается в виде

$$\frac{1}{2m} \left| -i\hbar\nabla\Psi \right|^2.$$

В случае, если частица имеет заряд e и движется в поле векторного потенциала \mathbf{A} , в выражении для плотности кинетической энергии, оператор $-i\hbar\nabla$ надо изменить:

$$-i\hbar\nabla \rightarrow -i\hbar\nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} = m\mathbf{v}.$$

Оператор скорости поэтому равен

$$\mathbf{v} = - (i\hbar/m) \nabla - (e/cm) \mathbf{A}.$$

Поскольку в выражение для плотности кинетической энергии входит именно скорость частицы \mathbf{v} , становится понятным выражение (14.1). Остается только сказать, что в этом выражении произведена замена $e \rightarrow 2e$, поскольку элементарный заряд носителя сверхтока равен $2e$. Соответственно под m^* в (14.1) понимается удвоенная масса свободного электрона.

14.2. Уравнения Гинзбурга—Ландау (ГЛ). Свободная энергия Гиббса всего сверхпроводника, согласно (14.1), равна

$$\mathcal{G}_{sH} = \mathcal{G}_n + \int \left[\alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{4m} \left| -i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A}\Psi \right|^2 + \frac{(\text{rot } \mathbf{A})^2}{8\pi} - \frac{\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_0}{4\pi} \right] dV, \quad (14.2)$$

где интегрирование ведется по всему объему сверхпроводника. Наша задача — найти такие уравнения относительно функций $\Psi(\mathbf{r})$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, решения которых, будучи подставлены в (14.2), давали бы минимальное значение \mathcal{G}_{sH} .

Для решения этой вариационной задачи будем сперва считать $\Psi(\mathbf{r})$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ неизменными, а проварьируем функцию $\Psi^*(\mathbf{r})$. Итак, решаем вариационную задачу

$$\delta_{\Psi^*} \mathcal{G}_{sH} = 0, \quad (14.3)$$

$$\delta_{\Psi^*} \mathcal{G}_{sH} = \int dV \left[\alpha \Psi \delta\Psi^* + \beta \Psi |\Psi|^2 \delta\Psi^* + \frac{1}{4m} \left(i\hbar\nabla \delta\Psi^* - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \delta\Psi^* \right) \left(-i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A}\Psi \right) \right]. \quad (14.4)$$

Вынести $\delta\Psi^*$ за квадратные скобки мешает только член $i\hbar\nabla\delta\Psi^*$. Пределаем такие преобразования. Обозначим

$$\varphi = \left(-i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A}\Psi \right).$$

Используя тождество

$$\nabla(\delta\Psi^*\varphi) = \varphi\nabla\delta\Psi^* + \delta\Psi^*\nabla\varphi,$$

имеем

$$\int dV \nabla\delta\Psi^*\varphi = - \int \delta\Psi^*\nabla\varphi dV + \int \nabla(\delta\Psi^*\varphi) dV. \quad (14.5)$$

Последний интеграл в этом равенстве по теореме Гаусса превращается в поверхностный интеграл:

$$\int \nabla(\delta\Psi^*\varphi) dV = \oint_S \delta\Psi^*\varphi dS.$$

Подставляя (14.5) в (14.4), а (14.4) в (14.3), получим

$$\delta_{\Psi^*} \mathcal{G}_{sH} = \int dV \left[\alpha \Psi + \beta \Psi |\Psi|^2 + \frac{1}{4m} \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi \right] \delta\Psi^* + \oint_S \left[-i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A}\Psi \right] \delta\Psi^* dS = 0.$$

Это выражение может быть равно нулю при произвольной функции $\delta\Psi^*$ только в том случае, если выражения в квадратных скобках равны нулю. Так мы получим первое уравнение теории ГЛ и граничное условие к нему:

$$\alpha\Psi + \beta\Psi |\Psi|^2 + \frac{1}{4m} \left(i\hbar\nabla + \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi = 0, \quad (14.6)$$

$$\left(i\hbar\nabla + \frac{2e}{c} \mathbf{A}\Psi \right) \mathbf{n} = 0,$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, нормальный к поверхности сверхпроводника. Легко проверить, что минимизация \mathcal{G}_{sH} по Ψ даст уравнение, комплексно сопряженное уравнению (14.6). Полученное уравнение есть уравнение относительно параметра порядка Ψ . У нас осталось еще одно переменное: \mathbf{A} . Чтобы найти уравнение для \mathbf{A} , минимизируем выражение (14.2) для \mathcal{G}_{sH} по \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{A}} \mathcal{G}_{sH} &= \int dV \left\{ \frac{1}{4m} \delta_{\mathbf{A}} \left[\left(i\hbar\nabla\Psi^* - \frac{2e}{c} \mathbf{A}\Psi^* \right) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(-i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A}\Psi \right) \right] + \frac{1}{4\pi} \text{rot } \mathbf{A} \text{ rot } \delta\mathbf{A} - \frac{\mathbf{H}_0}{4\pi} \text{rot } \delta\mathbf{A} \right\} = \\ &= \int \left\{ \frac{1}{4m} \left(-\frac{2e}{c} \Psi^* \delta\mathbf{A} \right) \left(-i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A}\Psi \right) + \frac{1}{4m} \left(i\hbar\nabla\Psi^* - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2e}{c} \mathbf{A}\Psi^* \right) \left(-\frac{2e}{c} \Psi \delta\mathbf{A} \right) + \frac{1}{4\pi} (\text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{H}_0) \text{rot } \delta\mathbf{A} \right\} dV. \quad (14.7) \end{aligned}$$

Из (14.7) следует, что вынести вариацию $\delta\mathbf{A}$ за фигурную скобку мешает член $(1/4\pi)(\text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{H}_0) \text{rot } \delta\mathbf{A}$. Воспользовавшись тождеством

$$\mathbf{a} \text{ rot } \mathbf{b} = \mathbf{b} \text{ rot } \mathbf{a} - \text{div} [\mathbf{a}\mathbf{b}], \quad (14.8)$$

проинтегрируем последнее слагаемое в (14.7):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int dV (\text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{H}_0) \text{rot } \delta\mathbf{A} &= \frac{1}{4\pi} \int dV \delta\mathbf{A} \text{rot rot } \mathbf{A} - \\ &- \frac{1}{4\pi} \oint dS [\delta\mathbf{A}, \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{H}_0]. \quad (14.9) \end{aligned}$$

При этом мы воспользовались теоремой Гаусса и перешли от объемного интеграла к поверхностному:

$$\int dV \text{div} [\delta\mathbf{A}, \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{H}_0] = \oint dS [\delta\mathbf{A}, \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{H}_0].$$

Но этот поверхностный интеграл равен нулю, так как магнитное поле на поверхности сверхпроводника задано, и поэтому $\delta\mathbf{A}|_S = 0$.

Подставляя теперь (14.9) без последнего члена в (14.7), производя элементарные преобразования и приравнявая вариацию свободной энергии нулю, получим

$$\delta_A \mathcal{E}_{sH} = \int dV \left[\frac{i\hbar e}{2mc} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) + \frac{2e^2}{mc^2} \mathbf{A} |\Psi|^2 + \frac{1}{4\pi} \text{rot rot } \mathbf{A} \right] \delta \mathbf{A} = 0. \quad (14.10)$$

Этот интеграл может быть равен нулю при любой вариации $\delta \mathbf{A}$ только в том случае, если выражение в фигурных скобках равно нулю. Это требование определяет второе уравнение теории ГЛ относительно векторного потенциала \mathbf{A} :

$$\mathbf{j}_s = -\frac{i\hbar e}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{2e^2}{mc} |\Psi|^2 \mathbf{A}, \quad (14.11)$$

где, согласно уравнению Максвелла, плотность тока \mathbf{j}_s в сверхпроводнике равна

$$\mathbf{j}_s = \frac{c}{4\pi} \text{rot rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (14.12)$$

Перейдем к безразмерной волновой функции $\psi(\mathbf{r})$, обозначив

$$\psi(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r})/\Psi_0, \quad (14.13)$$

где $\Psi_0^2 = n_s/2 = |\alpha|/\beta$.

Кроме того, введем следующие обозначения:

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{4m|\alpha|}, \quad (14.14)$$

$$\lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} = \frac{mc^2 \beta}{8\pi e^2 |\alpha|}. \quad (14.15)$$

Тогда уравнения ГЛ можно записать в более компактной и удобной форме:

$$\xi^2 \left(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right)^2 \psi - \psi + \psi |\psi|^2 = 0, \quad (14.16)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -i \frac{\Phi_0}{4\pi \lambda^2} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{|\psi|^2}{\lambda^2} \mathbf{A}. \quad (14.17)$$

Здесь $\Phi_0 = \pi \hbar c / e$ — квант потока (§ 8).

Представив волновую функцию ψ в виде $\psi = |\psi| e^{i\theta}$, второе уравнение ГЛ можно записать в следующей форме:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{|\psi|^2}{\lambda^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right). \quad (14.18)$$

Из (14.6) получим граничное условие для ψ . Если сверхпроводник граничит с вакуумом или каким-либо другим диэлектриком, таким условием будет

$$\left(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right) \mathbf{n} \psi = 0, \quad (14.19)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности сверхпроводника. Легко проверить с помощью формулы (14.11), что условие (14.19) обеспечивает выполнение естественного физического требования, чтобы сверхток через границу сверхпроводник — диэлектрик равнялся нулю. Однако этому же требованию равенства нулю нормальной компоненты тока на границе удовлетворяет и более общее равенство:

$$\left(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right) \mathbf{n} \psi = ia\psi, \quad (14.20)$$

где a — произвольное вещественное число. С помощью микротeorии сверхпроводимости можно показать, что условие (14.20) соответствует случаю, когда сверхпроводник граничит с нормальным металлом.

14.3. Градиентная инвариантность теории ГЛ. В уравнения ГЛ входит векторный потенциал \mathbf{A} . Но хорошо известно, что выбор \mathbf{A} неоднозначен. Действительно, переход к другому полю \mathbf{A}' по формуле

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla \varphi, \quad (14.21)$$

где $\varphi(\mathbf{r})$ — произвольная однозначная скалярная функция, не изменяет величины магнитного поля:

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A}',$$

так как

$$\text{rot } \nabla \varphi = 0.$$

Для того чтобы результаты теоретических расчетов не зависели от того или иного выбора вектор-потенциала \mathbf{A} , т. е., иначе говоря, были бы градиентно инвариантными, нужно, чтобы сами уравнения ГЛ удовлетворяли требованию градиентной инвариантности.

Легко проверить, что это требование выполняется в случае, если от переменных \mathbf{A} и ψ перейти к переменным \mathbf{A}' и ψ' по следующим формулам преобразования:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla \varphi, \quad (14.22)$$

$$\psi = \psi' \exp \left[i \frac{2\pi}{\Phi_0} \varphi(\mathbf{r}) \right]. \quad (14.23)$$

Проверим это для формулы (14.18).

Перейдем от A и ψ к A' и ψ' по формулам (14.2) и (14.23). Легко видеть, что второе уравнение ГЛ (14.18) останется неизменным:

$$\text{rot rot } A' = \frac{|\psi'|^2}{\lambda^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla\theta' - A' \right).$$

Аналогичным образом можно убедиться в градиентной инвариантности и первого уравнения ГЛ (14.16).

Из свойства градиентной инвариантности уравнений ГЛ следует один очень важный для будущего вывод: для односвязного сверхпроводника всегда можно выбрать такую калибровку вектор-потенциала A , чтобы $\psi(\mathbf{r})$ была вещественной функцией.

(Напомним, что под односвязным телом понимается такое тело, в котором можно произвольный замкнутый контур стянуть в точку, не пересекая при этом нигде границ тела. Иначе говоря, в односвязном теле нет сплошных отверстий. Тороид — пример двухсвязного тела.)

Требование односвязности здесь существенно потому, что в многосвязном сверхпроводнике фаза параметра порядка θ уже не является однозначной функцией, а может меняться на величину кратную 2π при обходе вокруг отверстия в сверхпроводнике. Поэтому $\theta(\mathbf{r})$ становится непригодной для соответствующей калибровки A .

§ 15. Два характерных масштаба длины в сверхпроводниках. Эффект близости

15.1. Длина когерентности и глубина проникновения. В предыдущем параграфе была введена чисто формально определенная величина ξ (14.14). Сейчас мы узнаем ее физический смысл.

Рассмотрим такой простой пример. На чистую плоскую поверхность сверхпроводника нанесена пленка нормального металла. Тогда локально около поверхности плотность сверхпроводящих электронов несколько понизится. Иными словами, значение параметра порядка $|\psi|$ на поверхности будет несколько отличаться от его равновесного значения в глубине сверхпроводника, где $|\psi|=1$. Каков тот характерный масштаб длины, на котором параметр порядка восстановится до единицы?

Направим ось x перпендикулярно к поверхности сверхпроводника (на поверхности $x=0$). Очевидно, изменение ψ может происходить только вдоль оси x , т. е. $\psi = \psi(x)$. Кроме того, поскольку мы рассматриваем односвязный

сверхпроводник, можем считать ψ вещественной функцией (см. § 14). Тогда первое уравнение ГЛ (14.16) примет следующий простой вид:

$$-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0. \quad (15.1)$$

Предположим, что слой нормального металла на поверхности такой тонкий, что значение ψ на поверхности очень мало отличается от 1, т. е.

$$\psi = 1 - \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \ll 1.$$

Подставляя это выражение для ψ в (15.1) и оставляя только линейные по $\varepsilon(x)$ члены, получим

$$\xi^2 d^2\varepsilon(x)/dx^2 - 2\varepsilon(x) = 0. \quad (15.2)$$

Учитывая, что при $x \rightarrow \infty$ функция $\psi \rightarrow 1$, имеем $\varepsilon(\infty) = 0$. Решение уравнения (15.2) очевидно:

$$\varepsilon = \varepsilon(0) e^{-\sqrt{2} x/\xi}.$$

Отсюда следует, что ξ — это и есть по порядку величины тот характерный масштаб, на котором происходит изменение параметра порядка ψ .

Эту длину называют длиной когерентности.

Другая величина, введенная в предыдущем параграфе, λ нам уже известна (§ 6). Это глубина проникновения слабого магнитного поля. Она так же, как и ξ , зависит от температуры;

$$\lambda^2 = mc^2\beta/(8\pi|\alpha|e^2), \quad (15.3)$$

$$\xi^2 = \hbar^2/(4m|\alpha|), \quad (15.4)$$

поскольку вблизи T_c имеем $|\alpha| \sim (T_c - T)$. Таким образом, вблизи T_c

$$\lambda \sim (T_c - T)^{-1/2}, \quad \xi \sim (T_c - T)^{-1/2}. \quad (15.5)$$

Во всем диапазоне температур $\lambda(T)$ хорошо аппроксимируется эмпирической формулой

$$\lambda(T) = \lambda(0)(1 - (T/T_c))^{-1/4}. \quad (15.6)$$

Значения $\lambda(0)$ для некоторых сверхпроводников были приведены в таблице 6.1. Используя нормировку (13.1) и формулу (13.3), убеждаемся, что глубина проникновения (15.3) совпадает с глубиной проникновения в (5.7).

С помощью $\lambda(T)$ и $\xi(T)$ можно ввести очень важную величину — параметр теории Гинзбурга—Ландау κ :

$$\kappa = \lambda/\xi. \quad (15.7)$$

Используя формулы (15.3), (15.4) и (15.7), получим другое выражение для κ :

$$\kappa = 2\sqrt{2} \frac{e}{\hbar c} \lambda^2 H_{cm}. \quad (15.8)$$

С помощью выражения для кванта магнитного потока $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$ легко получим отсюда очень полезную формулу:

$$\sqrt{2} H_{cm} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda\xi}. \quad (15.9)$$

Обсудим в заключение вопрос о влиянии магнитного поля на параметр порядка и на глубину проникновения.

Пусть $\kappa \ll 1$, т. е. $\lambda \ll \xi$. Сверхпроводящий образец занимает полупространство $x > 0$, а внешнее магнитное поле направлено вдоль оси z . Поскольку по предположению $\lambda \ll \xi$, магнитное поле проникает в образец лишь на небольшую по сравнению с ξ глубину. Это значит, что параметр порядка Ψ оказывается под воздействием магнитного поля лишь на глубине λ , а существенно измениться он может только на расстоянии ξ . Поэтому на основной части длины когерентности параметр порядка «не знает» о существовании магнитного поля и близок к $\Psi_0 = (|\alpha|/\beta)^{1/2}$. Следовательно, мы можем заключить, что в случае $\kappa \ll 1$ параметр порядка мало изменяется магнитным полем.

Отсюда сразу же следует, что и глубина проникновения магнитного поля, которая зависит от $|\Psi|^2$, тоже мало изменяется магнитным полем. Точный расчет показывает, что уменьшение модуля параметра порядка ψ вблизи поверхности образца во внешнем магнитном поле H_0 происходит на величину [23]

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \kappa \frac{H_0^2}{H_{cm}^2}.$$

Влияние внешнего магнитного поля на параметр порядка в случае $\lambda \gg \xi$ оказывается значительно более сильным и приводит к многим интересным и качественно новым эффектам. Об этом мы будем подробно говорить в будущем.

Задача 15.1. Свинцовый цилиндр находится при температуре 4,2 К в однородном магнитном поле, параллельном его оси. Поле на поверхности цилиндра равно $H_0 = 300$ Э. Найти плотность w магнитной энергии в свинце на расстоянии $x = 300$ Å от поверхности цилиндра. (Диаметр цилиндра много больше глубины проникновения слабого магнитного поля.)

Решение. Если $\lambda(0) = 390$ Å, то $\lambda(4,2) = 415$ Å. Магнитное поле на расстоянии 300 Å от поверхности будет равно $H = H_0 e^{-x/\lambda} = 145,6$ Э. Тогда $w = H^2/8\pi = 844$ эрг/см³.

Задача 15.2. Критическая температура свинца равна 7,18 К. Во сколько раз глубина проникновения λ при $T = 7,10$ К больше, чем глубина проникновения при $T = 4,2$ К. Оценить плотность сверхпроводящих электронов при $T = 7,10$ К.

Ответ. $\lambda(7,10)/\lambda(4,2) = 4,49$; $n_s(7,10) = 8,06 \cdot 10^{20}$ см⁻³.

15.2. Эффект близости. Очень ярко проявляется роль длины когерентности в случае хорошего контакта между нормальным металлом N и сверхпроводником S . Куперовские пары могут проникать из S в N и некоторое время там жить. Это приводит к тому, что какой-то слой нормального металла вблизи границы SN станет сверхпроводящим. Но проникновение пар из S в N приведет к уменьшению их плотности в S , т. е. параметр порядка ψ в сверхпроводнике вблизи NS -границы будет меньше 1 даже в отсутствие магнитного поля.

Это явление называется эффектом близости.

Рассмотрим наиболее простой случай. Пусть хороший контакт осуществлен между двумя сверхпроводниками, критические температуры которых (T_{cn} и T_{cs}) слегка различны: $T_{cs} > T_{cn}$, $T_{cs} - T_{cn} \ll T_{cn}$. Температура образца T выбрана такой, что выполняется неравенство $T_{cn} < T < T_{cs}$, т. е. материал с критической температурой T_{cn} находится в нормальном состоянии. Плоская граница между двумя материалами совпадает с плоскостью $x = 0$. Сверхпроводник занимает полупространство $x > 0$, нормальный металл — соответственно $x < 0$.

Поведение параметра порядка в S -области ($x > 0$) можно определить, решив первое уравнение ГЛ (14.16) в форме (15.1). Это уравнение интегрируется точно. Действительно, его первый интеграл имеет вид

$$-\xi^2 (d\psi/dx)^2 - \psi^2 + 1/2 \psi^4 = C, \quad (15.10)$$

где C — константа интегрирования. Поскольку при $x \rightarrow \infty$ имеем $(d\psi/dx) \rightarrow 0$, $\psi \rightarrow 1$, то $C = -1/2$. Подставляя это значение C в (15.10) и интегрируя, получим

$$\psi = \text{th}[(x - x_0)/\sqrt{2}\xi]. \quad (15.11)$$

Здесь x_0 — константа интегрирования, которая должна быть определена из граничного условия при $x=0$. Это условие (14.20) в нашем случае имеет вид

$$\frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{b}. \quad (15.12)$$

Величина b в общем случае должна быть вычислена с помощью микроскопической теории. Ее геометрический смысл ясен из рис. 15.1.

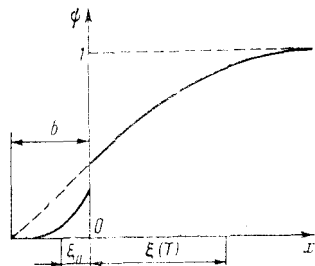


Рис. 15.1. Параметр порядка $\psi(x)$ вблизи границы между сверхпроводником ($x > 0$) и нормальным металлом ($x < 0$).

Подставив (15.11) в (15.12), найдем связь между константой интегрирования x_0 и величиной b :

$$-\text{sh}(\sqrt{2} x_0/\xi) = \sqrt{2} b/\xi.$$

Рассмотрим теперь поведение параметра порядка ψ в нормальной области ($x < 0$). Здесь мы тоже можем использовать (см., например, [25]) первое уравнение ГЛ. Действительно, согласно (13.6) коэффициент $\alpha_n \sim (T - T_{cn})$, т. е. $\alpha_n < 0$ при $T < T_{cn}$ и $\alpha_n > 0$ при $T > T_{cn}$. Поэтому первое уравнение ГЛ (14.6) в нашем случае для N -области и при условии $T - T_{cn} \ll T_{cn}$ будет иметь вид

$$-\xi_n^2 (d^2\psi/dx^2) + \psi + \psi^3 = 0,$$

где $\xi_n^2 = \hbar^2/4m\alpha_n$.

Параметр порядка в нормальной области мал ($\psi \ll 1$), поэтому можно пренебречь кубическим членом. В результате имеем

$$-\xi_n^2 (d^2\psi/dx^2) + \psi = 0.$$

Решение этого уравнения при условии $\psi \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$ будет

$$\psi = \psi_0 e^{-1|x|/\xi_n}. \quad (15.13)$$

Отсюда следует, что параметр порядка, экспоненциально затухая, проникает в N -область на глубину ξ_n . Поскольку T_{cn} и T_{cs} близки, можно считать ψ и $d\psi/dx$ непрерывными на NS -границе. Тогда из (15.13) имеем $b = \xi_n$.

В общем случае контакта сверхпроводника с истинно нормальным металлом ($T_{cn}=0$) применять уравнения ГЛ в нормальной области уже нельзя. Тем не менее качественно явление сохраняется: параметр порядка проникает на некоторую глубину ξ_n в нормальную область.

Расчет с использованием методов микроскопической теории сверхпроводимости дает следующие результаты [26].

В чистом N -металле, т. е. когда длина свободного пробега электрона $l_n \gg \xi_n$, длина когерентности будет равна

$$\xi_n = \frac{\hbar v_{Fn}}{2\pi k_B T}, \quad (15.14)$$

где v_{Fn} — скорость электрона на поверхности Ферми, k_B — постоянная Больцмана. При этом, однако, надо иметь в виду, что при $T \rightarrow 0$ затухание параметра порядка в глубину N -области становится не экспоненциальным, а значительно более медленным.

В «грязном» N -металле ($l_n \ll \xi_n$) длина когерентности будет

$$\xi_n = \left(\frac{\hbar v_{Fn} l_n}{6\pi k_B T} \right)^{1/2}. \quad (15.15)$$

Оценки по этим формулам дают для ξ_n значения в области $10^{-5} \div 10^{-4}$ см.

Поведение параметра порядка ψ в общем случае изображено на рис. 15.1. Величина b согласно [27] в «грязном» случае равна

$$b = \frac{\sigma_s}{\alpha_n} \xi_n, \quad (15.16)$$

где $\sigma_{s,n}$ — проводимости S - и N -областей, ξ_n определяется формулой (15.15), коэффициент α имеет порядок единицы. Точные значения α для разных ситуаций даны в [27].

Существование эффекта близости надежно подтверждено экспериментом.

Если на поверхность нормального металла нанести пленку сверхпроводника, то ее критическая температура понизится. Так в работе [28] была исследована система

из пленки Al (толщина 4400 \AA , $T_c = 1,2 \text{ К}$), покрытой пленкой Pb. При толщине свинцовой пленки $d(\text{Pb}) = 900 \text{ \AA}$ критическая температура системы T_c близка к критической температуре массивного свинца ($7,2 \text{ К}$), но при $d(\text{Pb}) = 600 \text{ \AA}$, T_c уже становится равным примерно $5,6 \text{ К}$, а при $d(\text{Pb}) = 200 \text{ \AA}$, $T_c = 1,6 \text{ К}$, т. е. приближается к критической температуре алюминия.

Эффект близости используется для создания джозефсоновских переходов типа SNS, когда фазовая когерентность между сверхпроводящими электродами устанавливается через нормальную прослойку, которая может быть достаточно толстой ($\sim 1 \text{ мкм}$).

§ 16. Энергия границы раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами

Мы уже знаем, что сверхпроводники первого и второго рода могут совершенно по-разному реагировать на внешнее магнитное поле. Это происходит потому, что энергия границы раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами σ_{ns} у сверхпроводников первого рода положительна, а у сверхпроводников второго рода отрицательна. Теперь мы можем понять причину этого. Оказывается, что в первом случае $\lambda < \xi$, а во втором случае $\lambda > \xi$. Более точно граница между сверхпроводниками первого и второго рода будет определена ниже. Начнем со сверхпроводника первого рода.

Итак, рассматривается плоская NS-граница сверхпроводника, находящегося в промежуточном состоянии. Пусть далеко слева от этой границы наблюдается чисто сверхпроводящее состояние, а далеко справа — нормальное. Граница расположена перпендикулярно оси x , магнитное поле приложено параллельно оси z . Поскольку мы рассматриваем левое сверхпроводящее полупространство, т. е. односвязный сверхпроводник, всегда можно выбрать так калибровку вектор-потенциала \mathbf{A} , что волновая функция теории ГЛ будет вещественной. Кроме того, в силу простой геометрии задачи, все переменные будут зависеть только от x , а вектор \mathbf{A} можно считать параллельным оси y . Начало координат $x=0$ выбрано в области границы.

Итак, формулируем исходные данные:

- 1) $\mathbf{H} = (0, 0, H(x))$,
- 2) $\psi = \psi(x)$ — вещественная функция,
- 3) $\mathbf{A} = (0, A(x), 0)$.

Учитывая это, исходные уравнения ГЛ (14.16) и (14.18) можно преобразовать к виду

$$-\xi^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \left(\frac{2\pi\xi}{\Phi_0}\right)^2 A^2 \psi - \psi + \psi^3 = 0, \quad (16.1)$$

$$d^2 A/dx^2 = (\psi^2/\lambda^2) A.$$

Легко проверить, что первый интеграл этих уравнений будет

$$\left[1 - \left(\frac{2\pi\xi A}{\Phi_0}\right)^2\right] \psi^2 - \frac{1}{2} \psi^4 + \left(\frac{2\pi\lambda\xi}{\Phi_0}\right)^2 \left(\frac{dA}{dx}\right)^2 + \xi^2 \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 = C, \quad (16.2)$$

где C — постоянная интегрирования. Если мы легко найдем из граничных условий: при $x \rightarrow -\infty$ $\psi \rightarrow 1$, $d\psi/dx \rightarrow 0$, $A \rightarrow 0$.

Действительно, далеко слева, т. е. при $x \rightarrow -\infty$, магнитное поле будет отсутствовать и волновая функция теории ГЛ будет стремиться к 1. Подставляя эти граничные условия в (16.2), получим $C = 1/2$. Отсюда, используя (15.9), окончательно имеем

$$\left[\left(\frac{2\pi\xi A}{\Phi_0}\right)^2 - 1\right] \psi^2 + \frac{1}{2} \psi^4 = \xi^2 \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \frac{H^2}{2H_{cm}^2} - \frac{1}{2}. \quad (16.3)$$

После такой предварительной подготовки перейдем непосредственно к вычислению энергии границы раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами, приходящейся на единицу площади. Но сперва немного физики. Когда мы будем рассматривать сверхпроводящий участок, надо будет точно определить, в каком внешнем магнитном поле он находится. Он является сверхпроводящим участком образца, находящегося в промежуточном состоянии. Следовательно, рядом с ним находится нормальный участок, по которому проходит магнитное поле напряженностью H_{cm} . Напоминаем, что именно эта напряженность автоматически устанавливается в нормальных частях сверхпроводника, находящегося в промежуточном состоянии.

Итак, внешнее поле по отношению к сверхпроводящему участку будет всегда равно H_{cm} . Запишем теперь плотность гиббсовской свободной энергии сверхпроводящего участка где-то далеко слева от NS-границы. Согласно формуле (3.15) имеем

$$G_s = F_{s0} - HH_{cm}/4\pi.$$

Поскольку далеко слева от NS -границы $H=0$, имеем $G_s = F_{s0}$, где F_{s0} — плотность свободной энергии сверхпроводника в отсутствие магнитного поля. Далеко справа от NS -границы, т. е. в нормальном металле, где существует поле H_{cm} , плотность свободной энергии будет равна

$$F = F_n + H_{cm}^2/8\pi,$$

где второе слагаемое просто дает плотность энергии магнитного поля.

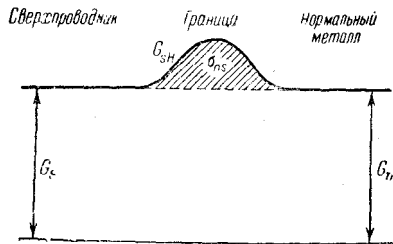


Рис. 16.1. Плотность гиббсовской свободной энергии сверхпроводника G_{sH} в области границы между нормальной и сверхпроводящей фазами.

Отсюда плотность гиббсовской свободной энергии в нормальном слое будет

$$G_n = F - HH_{cm}/4\pi = F_n + H_{cm}^2/8\pi - H_{cm}^2/4\pi = F_n - H_{cm}^2/8\pi = F_{s0}. \quad (16.4)$$

Здесь мы воспользовались условием, что в нормальном слое $H = H_{cm}$ и известным соотношением между F_n и F_{s0} (3.5):

$$F_n - F_{s0} = H_{cm}^2/8\pi.$$

Таким образом, мы пришли к тому результату, который и следовало ожидать: в условиях равновесия плотность гиббсовской свободной энергии далеко слева от границы равна соответствующей плотности далеко справа от границы.

А что же будет в области границы?

Схематический чертеж на рис. 16.1 дает ответ на этот вопрос.

Плотность гиббсовской свободной энергии может здесь отличаться от уровня G_n . Естественно тогда поверхностную энергию границы раздела σ_{ns} определить так:

$$\sigma_{ns} = \int_{-\infty}^{\infty} (G_{sH} - G_n) dx, \quad (16.5)$$

где

$$G_{sH} = F_{sH} - HH_{cm}/4\pi, \quad (16.6)$$

$$F_{sH} = F_n + \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \left[-|\psi|^2 + \frac{1}{2}|\psi|^4 + \xi^2 \left| i\nabla\psi + \frac{2\pi}{\Phi_0} A\psi \right|^2 + \frac{H^2}{8\pi} \right], \quad (16.7)$$

$$G_n = F_n - H_{cm}^2/8\pi. \quad (16.8)$$

Формула (16.6) следует из общей формулы для гиббсовской свободной энергии (H — напряженность магнитного поля в сверхпроводнике), формула (16.7) является основой для построения теории ГЛ, легко получается из (14.1), формула (16.8) получена ранее (см. (16.4)).

Подставляя (16.6)–(16.8) в (16.5), получим

$$\sigma_{ns} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \left[-|\psi|^2 + \frac{1}{2}|\psi|^4 + \xi^2 \left| i\nabla\psi + \frac{2\pi}{\Phi_0} A\psi \right|^2 + \frac{H^2}{8\pi} - \frac{HH_{cm}}{4\pi} + \frac{H_{cm}^2}{8\pi} \right] dx \right.$$

Поскольку $A = (0, A, 0)$, а ψ — вещественная функция, имеем

$$\sigma_{ns} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \left[-\psi^2 + \frac{1}{2}\psi^4 + \xi^2 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{2\pi\xi A}{\Phi_0} \right)^2 \psi^2 \right] + \frac{H^2}{8\pi} - \frac{HH_{cm}}{4\pi} + \frac{H_{cm}^2}{8\pi} \right\} dx.$$

Воспользуемся теперь формулой (16.3) и получим окончательно

$$\sigma_{ns} = \frac{H_{cm}^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\xi^2 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \frac{H(H - H_{cm})}{2H_{cm}^2} \right] dx. \quad (16.9)$$

Проанализируем полученный результат. Прежде всего отметим, что поле, проникшее в сверхпроводящую область, всегда меньше поля на ее границе, т. е. поля H_{cm} , поэтому второе слагаемое в квадратных скобках всегда отрицательно.

Теперь понятно, что в теории Лондонов $\sigma_{ns} < 0$, так как там не учитываются квантовые эффекты и слагаемое $\xi^2 (d\psi/dx)^2$ отсутствует.

Из (16.9) следует также, что теория ГЛ снимает эту трудность теории Лондонов. Учет квантовых эффектов приводит к появлению положительного слагаемого $\xi^2 (d\psi/dx)^2$, которое может обеспечить положительность энергии σ_{ns} .

Проведем теперь некоторые оценки. В области перехода от N - к S -фазе параметр порядка меняется от 0 до 1. Это изменение происходит на расстоянии порядка длины когерентности ξ . Поэтому $d\psi/dx \sim 1/\xi$ и $\xi^2 (d\psi/dx)^2 \sim 1$. Это слагаемое отлично от нуля в области границы на длине $x \sim \xi$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 (d\psi/dx)^2 dx \sim \xi. \quad (16.10)$$

Слагаемое $H(H - H_{cm})/2H_{cm}^2$ в области перехода достигает значения ~ -1 и обращается в нуль как в S -, так и в N -фазе. Область, где это слагаемое отлично от нуля, простирается на расстояние порядка глубины проникновения магнитного поля λ . Поэтому вклад этого слагаемого в интеграл в (16.9) будет $\sim (-\lambda)$.

Рассмотрим два предельных случая.

1) $\kappa \ll 1$, т. е. $\lambda \ll \xi$. Тогда, согласно (16.10), главный вклад в интеграл (16.9) дает градиентный член и

$$\sigma_{ns} \sim H_{cm}^2 \xi > 0.$$

Точный расчет интеграла (16.9) по теории ГЛ дает

$$\sigma_{ns} = 1,89 \frac{H_{cm}^2}{8\pi} \xi. \quad (16.11)$$

2) $\kappa \gg 1$, т. е. $\lambda \gg \xi$. Тогда главный вклад в интеграл (16.9) дает слагаемое $H(H - H_{cm})/2H_{cm}^2$ и энергия границы будет

$$\sigma_{ns} \sim -H_{cm}^2 \lambda.$$

Точный расчет дает

$$\sigma_{ns} = -\frac{H_{cm}^2}{8\pi} \lambda. \quad (16.12)$$

Теперь займемся физической интерпретацией полученных результатов.

1) Случай $\kappa \ll 1$, $\lambda \ll \xi$. На рис. 16.2 показано изменение параметра порядка ψ в области NS -границы и изменение магнитного поля. Первое происходит на расстоя-

нии ξ , а второе — на расстоянии λ . В этом случае возникает область толщиной $\sim \xi$, где параметр порядка уже достаточно мал, а магнитное поле отсутствует. Этот участок пользуется «привилегиями» сверхпроводника — свободен от магнитного поля, но по сравнению со сверхпроводником имеет очень малый параметр порядка, что должно увеличить энергию этого участка по сравнению с более далекими влево участками сверхпроводника. Другими словами, энергия этого участка больше энергии сверхпроводящих участков на ту величину энергии, которую нужно

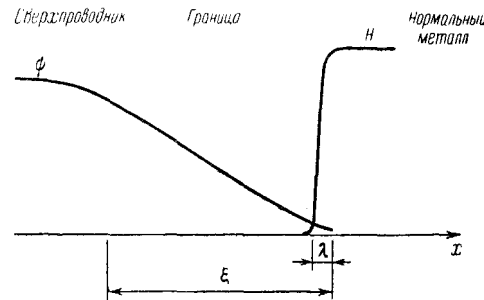


Рис. 16.2. Пространственное изменение параметра порядка ψ и магнитного поля H в области NS -границы для случая $\kappa \ll 1$.

было затратить, чтобы разорвать электронные (куперовские) пары в этой области, и тем самым понизить величину параметра порядка ψ . Плотность этой энергии равна $H_{cm}^2/8\pi$, а энергия участка имеет величину $\sim H_{cm}^2 \xi/8\pi$, что хорошо согласуется с формулой (16.11).

Немного по-другому это можно объяснить так. Для образования области с малой величиной ψ (т. е. близкой по энергии к энергии нормального металла) и свободной от магнитного поля нужно было совершить работу по удалению магнитного поля из этой области. Для этого надо было преодолеть давление магнитного поля $H_{cm}^2/8\pi$ и отодвинуть его границу вправо на расстояние ξ . При этом была совершена работа $(H_{cm}^2/8\pi)\xi$.

2) Случай $\kappa \gg 1$, $\lambda \gg \xi$. Функции $\psi(x)$ и $H(x)$ для этого случая показаны на рис. 16.3. Теперь ψ изменяется значительно быстрее, чем магнитное поле и возникает область $\sim \lambda$, в которой еще сохраняется и сравнительно высокое магнитное поле, и величина $\psi \sim 1$. Присутствие магнитного поля заставляет сравнивать этот участок с нормальным металлом. В отличие от последнего, электроны

в нем соединены в куперовские пары ($\psi \sim 1$) и поэтому его энергия меньше энергии правых нормальных областей на эту энергию конденсации. Поскольку размер этой области $\sim \lambda$, а плотность энергии конденсации равна $H_{cm}^2/8\pi$, ясно, что $\sigma_{ns} \sim -(H_{cm}^2/8\pi)\lambda$.

Посмотрев с другой точки зрения, можно сказать, что в случае $\kappa \gg 1$ в области NS -границы существует область $\sim \lambda$ с $\psi \sim 1$, в которую проникло магнитное поле. Это значит, что энергия всей системы уменьшилась на величину работы, которая была совершена при продвижении поля H_{cm} на расстояние λ .

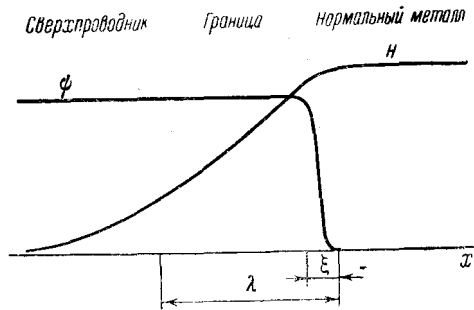


Рис. 16.3. Пространственное изменение параметра порядка ψ и магнитного поля H в области NS -границы для случая $\kappa \gg 1$.

Итак, подведем итог.

Если $\kappa \ll 1$, то $\sigma_{ns} > 0$. Такие материалы называются сверхпроводниками первого рода (СП1).

Если $\kappa \gg 1$, то $\sigma_{ns} < 0$. Такие материалы называются сверхпроводниками второго рода (СП2).

Ясно, что при каком-то значении $\kappa \sim 1$ энергия σ_{ns} должна обратиться в нуль. Точный расчет показывает, что это произойдет при $\kappa = 1/\sqrt{2}$.

Таким образом:

СП1	СП2
$\kappa < 1/\sqrt{2}$	$\kappa > 1/\sqrt{2}$
$\sigma_{ns} > 0$	$\sigma_{ns} < 0$

Задача 16.1. Сверхпроводящее олово при $T=0,9 T_c$ имеет $\lambda=8,70 \cdot 10^{-8}$ см и $\xi=4,35 \cdot 10^{-8}$ см. Найти энергию границы раздела нормальной и сверхпроводящих фаз σ_{ns} .

Решение. Поскольку $\lambda \ll \xi$, используем формулу (16.11). Находя H_{cm} из формулы (15.9) и подставляя в (16.11), получим $\sigma_{ns}=1,24 \cdot 10^{-2}$ эрг/см².

§ 17. Критическое поле тонкой пленки

Тонкая сверхпроводящая пленка, толщина которой меньше глубины проникновения, может сохранить сверхпроводимость в параллельном ей магнитном поле, даже если величина этого поля существенно больше H_{cm} . Магнитное поле, при котором ее проводимость пропадает, обозначим H_c .

Схема эксперимента представлена на рис. 17.1. На чистую поверхность стеклянной пластинки производится вакуумное распыление исследуемого материала. Затем к пленке подсоединяются токовые и потенциометрические провода измерительной схемы. Приготовленный так образец помещается в криостат и ориентируется так, чтобы внешнее магнитное поле было параллельно поверхности образца. Увеличивая внешнее магнитное поле, регистрируют момент появления сопротивления пленки. Это и будет критическое поле пленки. На рис. 17.2 приведены результаты эксперимента. Из вышеизложенного (§ 3) нам уже известно, что массивный сверхпроводник во внешнем магнитном поле, равном H_{cm} , совершает фазовый переход первого рода. Действительно, на толстых пленках согласно рис. 17.2 обнаружено явление переохладения. Это означает, что если пленка помещена в достаточно сильное магнитное поле так, что она находится в нормальном состоянии, то при уменьшении поля переход в сверхпроводящее состояние при поле, соответствующем равенству свободных энергий нормальной и сверхпроводящей фаз, может не произойти. Он может задержаться до более слабых полей — полей переохладения. Эти поля на рис. 17.2 указаны штриховой линией. Итак, мы видим, что с уменьшением толщины пленки переохладение становится все слабее, и, начиная с некоторой толщины, явление переохладения пропадает. Естественно предположить, что пленки этой толщины и более тонкие совершают при переходе в сверхпроводящее состояние фазовый переход второго рода.

Пусть толщина пленки $d \ll \xi, \lambda$. Это значит, что изменением величины ψ пленки можно пренебречь, а поле можно

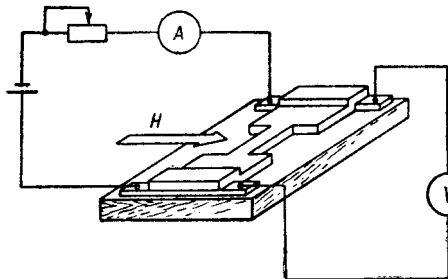


Рис. 17.1. Схема эксперимента по измерению критического магнитного поля пленки.

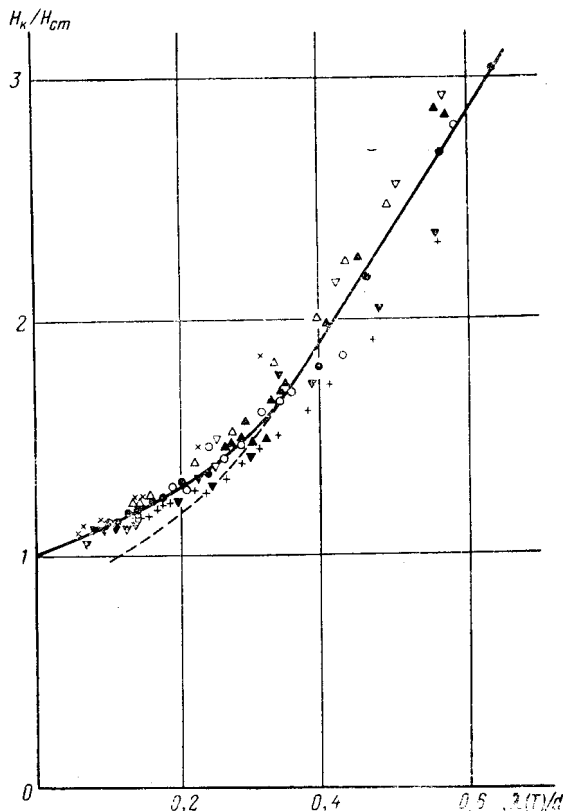


Рис. 17.2. Результаты эксперимента по измерению критического магнитного поля пленок олова различной толщины [29], d — толщина пленки. Сплошная линия — результат теории Гинзбурга-Ландау.

считать почти полностью проникшим в пленку. Мы предполагаем, что поверхности пленки совпадают с поверхностями $x = \pm d/2$. Поскольку пленка — тело односвязное, мы выбираем такую калибровку вектор-потенциала A , чтобы ψ была вещественным числом. Учитывая все это, запишем первое уравнение ГЛ в виде:

$$-(1 - (2\pi\xi A/\Phi_0)^2)\psi + \psi^3 = 0, \quad (17.1)$$

$$d^2 A/dx^2 = \psi^2 A. \quad (17.2)$$

При этом вектор A направлен вдоль оси y , на магнитное поле наложены граничные условия

$$H(\pm d/2) = H_0, \quad (17.3)$$

где H_0 — внешнее, параллельное поверхности пленки, магнитное поле. Решаем сперва уравнение (17.2):

$$A = A_1 \operatorname{ch}(\psi x/\lambda) + A_2 \operatorname{sh}(\psi x/\lambda),$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования.

Магнитное поле H в нашем случае находится простым дифференцированием A :

$$H = A_1(\psi/\lambda) \operatorname{sh}(\psi x/\lambda) + A_2(\psi/\lambda) \operatorname{ch}(\psi x/\lambda).$$

Удовлетворяя граничным условиям (17.3), находим

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{H_0 \lambda}{\psi \operatorname{ch}(\psi d/2\lambda)}.$$

Отсюда имеем

$$H = H_0 \frac{\operatorname{ch}(\psi x/\lambda)}{\operatorname{ch}(\psi d/2\lambda)}, \quad A = \frac{H_0 \lambda}{\psi} \frac{\operatorname{sh}(\psi x/\lambda)}{\operatorname{ch}(\psi d/2\lambda)}. \quad (17.4)$$

Применим теперь эти результаты к тонкой пленке ($d \ll \lambda$). В этом случае $\psi x/\lambda$ и $\psi d/2\lambda$ будут много меньше 1 и можно воспользоваться формулами разложения гиперболических функций в ряд Тейлора, ограничившись лишь линейными членами:

$$\operatorname{ch}(\psi d/2\lambda) = 1, \quad \operatorname{sh}(\psi x/\lambda) = \psi x/\lambda.$$

Подставляя эти разложения в (17.4), имеем: $A = H_0 x$ и из (17.1) получим

$$\psi^2 = 1 - (2\pi\xi/\Phi_0)^2 H_0^2 x^2.$$

Усредним это выражение по толщине пленки (проинтегрируем по x от $-d/2$ до $+d/2$):

$$\psi^2 d = d - H_0^2 \frac{1}{12} d^3 \left(\frac{2\pi\xi}{\Phi_0} \right)^2.$$

Учитывая формулу (15.9), получим окончательно зависимость величины параметра порядка в пленке от приложенного магнитного поля:

$$\psi^2 = 1 - \frac{1}{24} \frac{H_0^2 d^2}{H_{cm}^2 \lambda^2}.$$

Эта зависимость изображена на рис. 17.3. Мы видим, таким образом, что параметр порядка ψ в тонкой пленке сильно зависит от приложенного поля H_0 и плавно обращается в нуль при поле, равном $2\sqrt{6} H_{cm} \lambda/d$. Естественно это

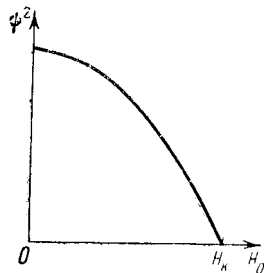


Рис. 17.3. Зависимость параметра порядка от внешнего параллельного магнитного поля H_0 в случае тонкой пленки ($d \ll \lambda$).

поле принять за критическое поле пленки H_k . Ясно, что при этом происходит фазовый переход второго рода.

Итак, критическое поле тонкой пленки толщины d в параллельном внешнем поле H_0 равно

$$H_k = 2\sqrt{6} H_{cm} \frac{\lambda}{d}. \quad (17.5)$$

Из этой формулы следует, что с уменьшением толщины пленки ее критическое поле увеличивается. Так, если толщина пленки на порядок меньше ее глубины проникновения, $\lambda/d \sim 10$, а $H_{cm} \sim 10^8$ Э, то $H_k \sim 40\,000$ Э. Физически это вполне понятно. Поскольку магнитное поле проникает в пленку, она имеет существенно меньший диамагнитный момент на единицу объема, чем массивный образец. Но малый диамагнитный момент во внешнем поле — это маленькая магнитная стрелка, ориентированная навстречу полю. Такая ситуация энергетически более выгодна, чем в случае большого диамагнитного момента.

Поэтому пленка оказывается во внешнем поле гораздо более устойчивой и может сохранить сверхпроводимость в полях существенно больших, чем массивный образец.

Задача 17.1. На стеклянную подложку нанесена оловянная пленка толщиной $d=1000$ Å. Пленка внесена во внешнее, параллельное пленке магнитное поле $H_0=10$ Э при температуре $T=0,9 T_c$. Найти поле в центре пленки и диамагнитный момент M_0 , приходящийся на единицу площади поверхности пленки.

Решение. Поскольку $\lambda(T=0,9 T_c)=870$ Å (см. условие задачи 16.1), имеем, согласно (17.4), $H(x=0)=8,55$ Э. Здесь предполагается, что параметр порядка ($\psi=1$) не изменился под влиянием магнитного поля, которое достаточно мало ($H_0 \ll H_{cm}(T=0,9 T_c) \approx 60$ Э).

Плотность диамагнитного момента $M(x)=(1/4\pi)(H(x)-H_0)$. Приняв, согласно (17.4), $H(x)=H_0(\operatorname{ch}(x/\lambda))/(\operatorname{ch}(d/2\lambda))$ и интегрируя момент по толщине пленки, находим M_0 :

$$M_0 = \frac{H_0 d}{4\pi} \left(\frac{2\lambda}{d} \operatorname{th} \frac{d}{2\lambda} - 1 \right). \quad (17.6)$$

Из этой формулы следует $M_0 = -7,74 \cdot 10^{-7}$ Гс·см.

Задача 17.2. Толстая оловянная пленка толщиной 1 мкм находится в параллельном ее поверхности магнитном поле при $T=0,9 T_c$. Найти критическое поле пленки H_k , предполагая, что параметр порядка ψ от поля не зависит и равен 1 (фазовый переход первого рода).

Решение. Из формулы (17.6) следует, что средняя плотность диамагнитного момента $M=(1/4\pi)H_0[(2\lambda/d)\operatorname{th}(d/2\lambda)-1]$. Работа, совершенная источником магнитного поля, равна

$$W(H_0) = - \int_0^{H_0} M dH_0.$$

Переход в нормальное состояние произойдет, когда эта работа станет равна $F_n - F_{s0} = H_{cm}^2/(8\pi)$. Отсюда

$$H_k = H_{cm} \left(1 - \frac{2\lambda}{d} \operatorname{th} \frac{d}{2\lambda} \right)^{-1/2}.$$

Учитывая, что $\lambda \ll d$, имеем $H_k = H_{cm}(1 + \lambda/d) = 1,087 H_{cm}$.

§ 18. Критический ток тонкой пленки

Теперь рассмотрим случай, когда пленка не находится во внешнем поле, но по ней течет некоторый ток I . При этом мы снова предполагаем, что поверхности пленки совпадают с плоскостями $x = \pm d/2$, ток течет в направлении оси y , и под током I мы понимаем полный ток в пленке, приходящейся на единицу длины вдоль оси z .

Этот ток будет создавать на поверхностях пленки магнитное поле H_I , таким образом, мы имеем следующие граничные условия:

$$H(\pm d/2) = \mp H_I. \quad (18.1)$$

Как и в предыдущем параграфе, мы используем односвязность пленки и выберем такую калибровку A , чтобы ψ было вещественным. Кроме того, предполагаем, что пленка тонкая: $d \ll \lambda, \xi$. Тогда изменением параметра порядка по толщине пленки можно пренебречь и мы приходим к уравнениям ГЛ в виде (17.1) и (17.2). Поэтому мы снова будем анализировать эти уравнения, но уже с граничными условиями (18.1). Общее решение уравнения (17.2) будет

$$A = A_1 \operatorname{ch}(\psi x/\lambda) + A_2 \operatorname{sh}(\psi x/\lambda).$$

Поскольку для нашей задачи $H = dA/dx$, имеем

$$H = (A_1 \psi/\lambda) \operatorname{sh}(\psi x/\lambda) + (A_2 \psi/\lambda) \operatorname{ch}(\psi x/\lambda).$$

Подставляя сюда граничные условия (18.1), получим два уравнения с двумя неизвестными (A_1 и A_2). Их решение будет

$$A_1 = \frac{\lambda H_I}{\psi \operatorname{sh}(\psi d/2\lambda)}, \quad A_2 = 0.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$H = H_I \frac{\operatorname{sh}(\psi x/\lambda)}{\operatorname{sh}(\psi d/2\lambda)}, \quad A = \frac{\lambda H_I \operatorname{ch}(\psi x/\lambda)}{\psi \operatorname{sh}(\psi d/2\lambda)}. \quad (18.2)$$

Учтем теперь малость толщины пленки, т. е. $\psi d \ll \lambda$. Это значит, что для A в (18.2) мы положим $\operatorname{ch}(\psi x/\lambda) \approx 1$, $\operatorname{sh}(\psi d/2\lambda) \approx \psi d/2\lambda$, т. е.

$$A = 2\lambda^2 H_I / \psi^2 d.$$

Подставляя это выражение в (17.1) и используя (15.9) получим

$$2\lambda^2 H_I^2 / (d^2 H_{cm}^2) = \psi^4 - \psi^6. \quad (18.3)$$

График зависимости величины H_I^2 от ψ^2 показан на рис. 18.1. «Жирной» линией выделена та часть графика, которая соответствует устойчивым состояниям. Действительно, когда никакого тока в пленке нет, уравнение (18.3) имеет два

решения: $\psi = 0$ и $\psi = 1$. Из общих соображений ясно, что в этом случае сверхпроводящее состояние ($\psi = 1$) является энергетически более выгодным и именно оно и будет реализовываться. Если мы включим очень слабый ток через пленку, то опять будут два решения уравнения (18.3): одно, соответствующее $\psi \leq 1$, другое, соответствующее $\psi \ll 1$. Из соображений непрерывности ясно, что именно первое решение соответствует устойчивому сверхпроводящему состоянию.

Какой же максимальный ток может пропустить пленка, находясь в сверхпроводящем состоянии?

Ответ непосредственно следует из графика на рис. 18.1. Это, очевидно, тот ток, который соответствует максимуму на

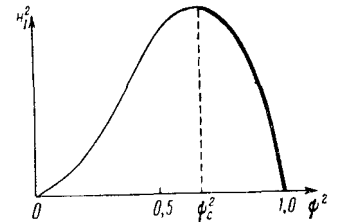


Рис. 18.1. Зависимость параметра порядка в тонкой сверхпроводящей пленке от пропускаемого через пластинку тока. «Жирная» область кривой соответствует устойчивой сверхпроводимости.

графике. Найдем этот ток. Для этого определим значение ψ_c , соответствующее максимуму величины H_I^2 :

$$\frac{d}{d\psi} (2\lambda^2 H_I^2 / d^2 H_{cm}^2) = 4\psi^3 - 6\psi^5 = 0,$$

отсюда $\psi_c^2 = 2/3$.

Следовательно,

$$H_{Ic} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} H_{cm} \frac{d}{\lambda}. \quad (18.4)$$

Из (18.4) легко получить среднюю по пленке критическую плотность тока j_c , воспользовавшись формулой $H_{Ic} = (4\pi/c) I_c$,

$$j_c = \frac{\sqrt{2}}{6\pi\sqrt{3}} \frac{c H_{cm}}{\lambda}. \quad (18.5)$$

Суммируем главные результаты этого параграфа.

1) Поле, созданное критическим током на поверхности пленки, оказывается пропорциональным ее толщине: $H_{Ic} \sim d$, т. е. падает с уменьшением толщины пленки, в то время, как критическое поле пленки $H_c \sim 1/d$, т. е. растет

с уменьшением толщины. Так, если $d/\lambda \sim 0,1$, а $H_{cm} = 1000$ Э, то $H_x \sim 4 \cdot 10^4$ Э, а $H_{I_c} \sim 30$ Э. Это значит, что для тонкой пленки разрушение сверхпроводимости током никак нельзя сводить к разрушению сверхпроводимости магнитным полем этого тока.

2. Критическая плотность тока j_c , согласно (18.5), не зависит от толщины пленки. Из этой формулы следует, что j_c просто является характеристикой токнесущей способности данного материала.

3) Отметим, наконец, еще один очень важный момент. Разрушение сверхпроводимости током не сопровождается каким-либо фазовым переходом. При этом мы, конечно, имеем в виду, что пленка с током хорошо омывается жидким гелием и все выделяющееся в ней тепло сразу отводится, т. е. ее температура остается равной температуре гелиевой ванны. В этом случае даже при токе I_c свободная энергия сверхпроводящего состояния все еще остается меньше свободной энергии нормального состояния.

Что же происходит при токе $I = I_c$? Почему по пленке не может течь бездиссипативно ток, больший критического?

Для ответа на эти вопросы воспользуемся анализом, который предложил Дж. Бардин. Поскольку пленка тонкая, энергией магнитного поля тока можно пренебречь и записать плотность свободной энергии пленки в виде

$$F_s = F_n - |\alpha| n_s + \frac{\beta}{2} n_s^2 + n_s \frac{m}{2} v_s^2.$$

Здесь n_s — плотность сверхпроводящих электронов, α и β — известные коэффициенты теории ГЛ, четвертое слагаемое дает кинетическую энергию сверхпроводящих электронов, v_s — скорость их упорядоченного движения, «сверхтекучая» скорость.

Зависимость равновесного значения $n_s(v_s)$ от величины v_s найдем из условия минимума свободной энергии при равновесии

$$\partial F_s / \partial n_s = -|\alpha| + \beta n_s + m v_s^2 / 2 = 0.$$

Отсюда сразу получим

$$n_s = (|\alpha| - m v_s^2 / 2) / \beta. \quad (18.6)$$

Плотность тока j_s в этом случае определяется известным выражением

$$j_s = n_s e v_s. \quad (18.7)$$

Зависимости $n_s(v_s)$ и $j_s(v_s)$, даваемые формулами (18.6) и (18.7), изображены на рис. 18.2. Снова та часть кривой $j_s(v_s)$, которая соответствует устойчивым состояниям, показана жирной линией. О чем говорит этот график? По мере увеличения плотности сверхпроводящего тока увеличивается скорость электронов. Но это сопровождается уменьшением их плотности $n_s(v_s)$. Происходит разрыв электронных пар. Возникает так называемое распаривание электронов. Наконец, наступает такое состояние, когда дальнейшего увеличения сверхпроводящего

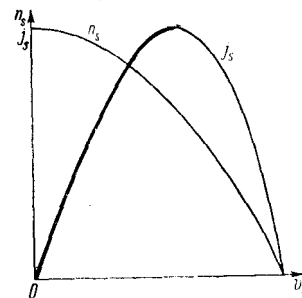


Рис. 18.2. Зависимость плотности сверхпроводящих электронов n_s и плотности сверхтока j_s в тонкой пленке от скорости движения сверхпроводящей компоненты электронной плотности.

тока произойти не может просто потому, что сильно снизилась плотность сверхпроводящих электронов. Не хватает носителей, чтобы перенести заданный ток. Этот критический ток и дается формулой (18.5). Часто его называют критическим током распаривания.

Задача 18.1. На стеклянную подложку нанесена свинцовая пленка толщины $d = 200$ Å. Глубина проникновения магнитного поля при $T = 0$ будет $\lambda(0) = 390$ Å, а критическое термодинамическое поле $H_{cm}(0) = 803$ Э. Найти напряженность магнитного поля на поверхности пленки, созданного критическим током. Сравнить с продольным критическим полем этой же пленки.

Ответ. $H_{I_c} = 12,5$ Э; $H_x = 1015$ Э.

Задача 18.2. Найти плотность критического тока пленки из предыдущей задачи.

Ответ. $j_c = 2,30 \cdot 10^8$ А/см².

Задача 18.3. Тонкая ($d \ll \lambda$) сверхпроводящая пленка индия имеет постоянную теории ГЛ $\kappa = 0,1$. Глубина проникновения $\lambda = 800$ Å. Найти критическую скорость сверхпроводящих электронов.

Решение. Критическая плотность тока определяется формулой (18.5), а критическая скорость — формулой (18.7). Используя (5.7) и (15.8), имеем

$$v_c = \hbar\lambda / (3\sqrt{3}m\lambda) = 2,81 \cdot 10^8 \text{ см/с.}$$

Задача 18.4. Сравнить плотность мейснеровского тока j_M на поверхности массивного сверхпроводника первого рода, когда он находится в критическом внешнем поле H_{cm} , с критической плотностью тока j_c тонкой пленки из того же материала.

Решение. Согласно (6.4) $j_M = cH_{cm}/4\pi\lambda$, откуда $j_M/j_c = 3\sqrt{3}/2\sqrt{2} = 1,837$. Плотность мейснеровского тока при поле H_{cm} на поверхности оказалась в 1,84 раза больше критического тока распаривания. Это произошло потому, что в формуле (6.5) не учтено уменьшение плотности сверхпроводящих электронов n_s в магнитном поле H_{cm} .

§ 19. Фазовая когерентность и виды слабых связей

В 1962 г. появилась статья [10] никому до этого неизвестного автора Б. Джозефсона, в которой теоретически предсказывалось существование двух удивительных эффектов. Эти эффекты следовало ожидать в туннельных сверхпроводящих контактах. Первый эффект заключается в том, что через туннельный переход* возможно протекание сверхпроводящего (бездиссипативного) тока (сверхтока). Предсказывалось, что критическое значение этого тока будет весьма причудливым образом зависеть от внешнего магнитного поля. Если ток через такой переход станет больше критического тока перехода, то переход станет источником высокочастотного электромагнитного излучения. Это — второй эффект Джозефсона.

Прошло совсем немного времени, и эти эффекты были действительно экспериментально обнаружены [11, 30]. Более того, скоро стало ясно, что эффекты Джозефсона присущи не только туннельным переходам, но и многим другим типам так называемой слабой связи, т. е. участкам сверхпроводящей цепи, в которых критический ток существенно подавлен, а размер участка — порядка длины когерентности [20, 31, 32].

В основе природы эффектов слабой сверхпроводимости лежат квантовые свойства сверхпроводящего состояния. Мы уже знаем, что сверхпроводящее состояние металла — это состояние, в котором существует бозе-конденсат, или, иначе, состояние, в котором электронные пары находятся на одном квантовом уровне и описываются общей для всех волновой функцией. Их поведение взаимообусловлено, они когерентны.

Представим себе теперь, что имеются два массивных куска одного и того же сверхпроводника при одной и

* О туннелировании электронов из одного сверхпроводника в другой через тонкий слой изолятора см. § 39.

той же температуре, полностью изолированные друг от друга. Поскольку оба куска находятся в сверхпроводящем состоянии — в каждом из них будет своя волновая функция сверхпроводника. Так как материалы и температуры обоих кусков одинаковы, модули обеих волновых функций должны совпадать. Этого нельзя сказать о фазах, которые могут быть произвольны. Но это так только до тех пор, пока куски изолированы друг от друга. Установив между этими кусками слабый контакт, т. е. сделаем так, чтобы контакт не мог радикально изменить состояния обеих половинок, а сыграл бы роль возмущения. Теперь возникнет единая волновая функция всего сверхпроводника, которую можно рассматривать как результат интерференции волновых функций двух половинок. Мы уже говорили, что амплитуды волновых функций обеих половинок были одинаковы еще до установления слабой связи. Согласование же фаз волновых функций — это уже результат образования слабой связи. Поэтому говорят, что в слабосвязанных сверхпроводниках устанавливается фазовая когерентность.

Здесь уместно отметить, что слабая связь между двумя сверхпроводниками — это просто удобное место для обнаружения интерференционных эффектов. Сами интерференционные эффекты в сверхпроводниках были известны задолго до открытия эффектов Джозефсона. Действительно, наиболее яркий тому пример — квантование магнитного потока в сверхпроводящем кольце. Замороженный в нем магнитный поток принимает квантованные значения потому, что квантуется сверхток, текущий по кольцу и создающий этот магнитный поток. Но квантование сверхтока в кольце — это типично интерференционный эффект. Ток может принимать только такие значения, при которых на длине кольца может уложиться целое число длин волн волновой функции сверхпроводящих электронов — полная аналогия с квантованием орбит электронов в атоме Бора.

Остановимся теперь на видах слабых связей. Прежде всего отметим устройства без концентрации тока. Так, в туннельных переходах (рис. 19.1, а) (с толщиной изоляционной прослойки около 2 нм) характерная плотность критического тока может иметь величину порядка нескольких десятков А/см², что на много порядков меньше критической плотности тока электродов.

В сэндвичах сверхпроводник — нормальный металл — сверхпроводник толщина нормальной прослойки может

достигать величины в несколько микрон (рис. 19.1, б). Волновые функции сверхпроводящих электронов проникают в нормальный металл за счет эффекта близости. В области их перекрытия возникает интерференция волновых функций, которая означает установление фазовой когерентности между электродами. Если амплитуда волновой функции сверхпроводника в области слабой связи мала, то и критический ток в этой области будет мал.

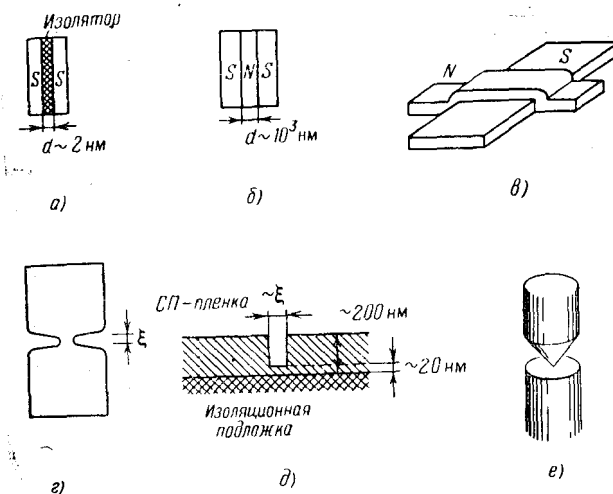


Рис. 19.1. Виды слабых связей: а) туннельный переход, б) сэндвич, в) нормальная пленка *N* локально понижает параметр порядка сверхпроводящей пленки *S*, г) мостик Дайема, вид в плане, д) мостик переменной толщины, продольный разрез, е) точечный контакт.

Того же эффекта можно добиться, помещая между двумя сверхпроводниками вместо слоя нормального металла слой легированного полупроводника или другого сверхпроводника с малой плотностью критического тока. Перекрытие узкой сверхпроводящей пленки узкой пленкой нормального металла (рис. 19.1, в) приводит за счет эффекта близости к уменьшению амплитуды волновой функции сверхпроводящих электронов в пленке в области перекрытия ее нормальным металлом. Это приводит к локальному уменьшению плотности критического тока, т. е. к появлению слабой связи.

В устройствах с концентрацией тока плотность критического тока в области слабой связи такая же, как и вне ее, но полный критический ток существенно меньше.

К таким устройствам относится пленка с сужением (мостик Дайема) (рис. 19.1, *з*), если размер сужения будет порядка длины когерентности ξ материала пленки. Мостик переменной толщины, пленочные берега которого имеют толщину порядка сотен нм, а пленка собственно мостика — десятки нм (рис. 19.1, *д*), и, наконец, точечный контакт, возникающий в результате слабого касания острого конца сверхпроводящей проволоки и плоского участка поверхности другого сверхпроводника (рис. 19.1, *е*) — тоже примеры слабых связей.

§ 20. Стационарный эффект Джозефсона

Переходим теперь к изучению первого эффекта Джозефсона — стационарного эффекта. Физически он заключается в том, что достаточно слабый ток течет через слабое звено бездиссипативно, т. е. при протекании такого тока на слабой связи не возникает падение напряжения. Поскольку рассматривается слабый ток, мы можем пренебречь создаваемым им магнитным полем. Поэтому можно сказать, что его плотность определяется градиентом фазы $\nabla\theta$ волновой функции сверхпроводящих электронов (согласно теории Гинзбурга—Ландау).

Характерное свойство слабой связи как раз заключается в том, что этот градиент очень велик внутри слабой связи по сравнению с величиной градиента фазы в сверхпроводниках, между которыми установлена слабая связь. (Будем называть их в дальнейшем «берегами».) Для туннельного перехода вообще нельзя говорить о градиенте фазы, а надо просто говорить о скачке фазы на переходе. Поэтому в дальнейшем всегда будем интересоваться скачком фазы φ на слабой связи:

$$\varphi = \theta_2 - \theta_1,$$

где θ_1 — фаза волновой функции сверхпроводящих электронов первого берега, а θ_2 — соответственно второго берега.

Теперь нам предстоит установить, как связаны между собой ток через слабую связь I_s и разность фаз берегов перехода φ .

Установим некоторые самые общие и почти очевидные соотношения.

1) Если ток через переход отсутствует, $I_s = 0$, то и разность фаз $\varphi = 0$.

2) В силу того, что изменение фазы θ одного из берегов на 2π ничего физически не изменяет, ясно, что функция $I_s(\varphi)$ — периодическая с периодом 2π , т. е. $I_s(\varphi) = I_s(\varphi + 2\pi)$.

3) Изменение знака тока должно изменить и знак разности фаз, поэтому $I_s(\varphi) = -I_s(-\varphi)$.

4) Последнее, несколько менее очевидное свойство гласит: $I_s(\pi) = 0$. Действительно*), предположим, что слабая связь имеет малую, но конечную длину и можно ввести понятие градиента фазы $\nabla\theta$ в слабой связи. При переходе по пунктирной линии (рис. 20.1, *а*) комплексный параметр

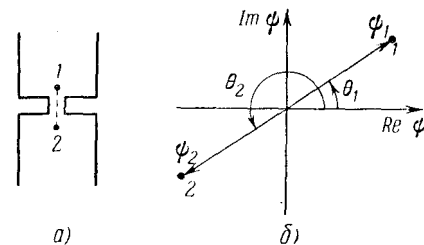


Рис. 20.1. *а*) Вид слабой связи (мостик Дайема). Градиент фазы $\nabla\theta$ берется вдоль пунктирной линии от точки 1 до точки 2; *б*) представление параметра порядка на комплексной плоскости. В слабой связи переход от точки 1 к точке 2 соответствует переходу в комплексной плоскости от ψ_1 к ψ_2 вдоль прямой $I=2$.

порядка будет меняться вдоль прямой, соединяющей точки ψ_1 и ψ_2 в плоскости комплексного переменного ψ (рис. 20.1, *б*). Ясно, что если $\varphi = \theta_2 - \theta_1$, то $\nabla\theta$ вдоль этой прямой равен нулю, а отсюда следует, что и ток $I_s = 0$. Здесь, конечно, возможно такое возражение. А что, если переход от ψ_1 к ψ_2 происходит не по указанной прямой, а, скажем, по полуокружности с радиусом $|\psi|$? В этом случае $\nabla\theta \neq 0$ и $I_s \neq 0$. Именно так все и происходит на самом деле в длинных тонких сверхпроводящих нитях. Но тогда, очевидно, возможны два пути перехода от ψ_1 к ψ_2 : с помощью левой полуокружности (движение против часовой стрелки) и с помощью правой полуокружности (по часовой стрелке). Градиенты $\nabla\theta$ при этом будут иметь разные знаки. Это означает, что $I_s(\varphi)$ теперь будет многозначной функцией. Такие переходы уже не являются джозефсоновскими по определению.

*) Приведенные ниже рассуждения принадлежат К. К. Лихареву.

Зададимся теперь таким вопросом: какой самый простой вид должна иметь функция $I_s(\varphi)$, имеющая свойства 1) — 4)? Нетрудно сообразить, что этим свойствам удовлетворяет функция $\sin \varphi$, и мы можем предположить, что

$$I_s(\varphi) = I_c \sin \varphi, \quad (20.1)$$

где I_c — максимальный бездиссипативный ток через переход, критический ток.

Сейчас мы докажем это предположение. Будут приведены даже два доказательства равенства (20.1). Первое, справедливое для туннельных переходов Джозефсона, принадлежит Фейнману [33], а второе, относящееся к коротким мостикам, заимствовано нами из работы Асламова и Ларкина [34].

Но сперва — небольшое напоминание из квантовой механики.

Эволюция квантовомеханической системы во времени определяется волновой функцией $\Psi(t)$, которая является решением уравнения Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi, \quad (20.2)$$

где \hat{H} — оператор Гамильтона рассматриваемой системы. Если эта система может находиться только в дискретных состояниях ψ_α (α — набор индексов, характеризующих данное дискретное состояние), то волновую функцию системы можно разложить по полному базису $\{\psi_\alpha\}$:

$$\Psi(t) = \sum_\alpha C_\alpha(t) \psi_\alpha. \quad (20.3)$$

Подстановка этого разложения в формулу (20.2) дает

$$i\hbar \frac{dC_\beta}{dt} = \sum_\alpha H_{\beta\alpha} C_\alpha(t). \quad (20.4)$$

Здесь

$$H_{\beta\alpha} = \int \psi_\beta^* \hat{H} \psi_\alpha dV.$$

Очевидно, что $H_{\beta\beta}$ — это энергия системы в состоянии ψ_β , а $H_{\beta\alpha}$ — матричный элемент, характеризующий вероятность перехода системы из состояния ψ_α в состояние ψ_β . Функция $C_\alpha(t)$ представляет собой амплитуду состояния ψ_α , а $|C_\alpha|^2$ — вероятность найти систему в состоянии ψ_α .

Вернемся теперь к джозефсоновскому туннельному переходу. Пусть в общем случае ток через туннельный переход

столь велик ($I_s > I_c$), что на переходе возникла разность потенциалов V . Энергетическая схема такого перехода изображена на рис. 20.2. Будем рассматривать (согласно Фейнману [33]) систему сверхпроводящих электронов (куперовских пар) как двухуровневую квантовомеханическую систему, т. е. положим, что пара может находиться или на уровне 1, или на уровне 2. Ее энергия будет тогда соответственно H_{11} или H_{22} , причем $H_{11} = eV$,

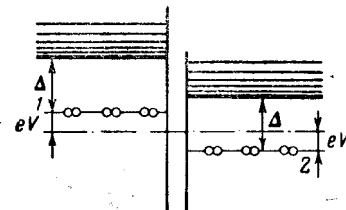


Рис. 20.2. Энергетическая схема туннельного джозефсоновского перехода, к которому приложено напряжение V . Уровни 1 и 2 разделены интервалом $2eV$.

$H_{22} = -eV$. Переход пары с уровня 1 на уровень 2 определяется величиной матричного элемента $H_{12} = H_{21} = K$. Уравнение (20.4) в этом случае будет иметь вид

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = eVC_1(t) + KC_2(t), \quad (20.5)$$

$$i\hbar \frac{dC_2}{dt} = KC_1(t) - eVC_2(t).$$

Здесь C_1 — амплитуда состояния пары на уровне 1, а $|C_1|^2$ нормируем так, что $|C_1|^2 = n_s$, где n_s — плотность сверхпроводящих электронов в сверхпроводящих обкладках перехода. Для простоты предполагаем, что обе обкладки сделаны из одного и того же материала. Представляя амплитуды C_1 и C_2 в виде

$$C_1 = \sqrt{n_s} e^{i\theta_1}, \quad C_2 = \sqrt{n_s} e^{i\theta_2}$$

и подставляя в уравнения (20.5), получим после разделения вещественной и мнимой частей следующие выражения:

$$\frac{dn_s}{dt} = \frac{2Kn_s}{\hbar} \sin \varphi, \quad (20.6)$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\frac{K}{\hbar} \cos \varphi - \frac{eV}{\hbar}, \quad (20.7)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\frac{K}{\hbar} \cos \varphi + \frac{eV}{\hbar}, \quad (20.8)$$

где $\varphi = \theta_2 - \theta_1$.

Ток через туннельный переход пропорционален dn_s/dt . Действительно, при включении тока, в первый момент протекания тока, плотность сверхпроводящих электронов начнет изменяться со скоростью dn_s/dt и возникнет ток $I_s \sim dn_s/dt$. Конечно, этот уход электронов из сверхпроводящей обкладки будет тотчас же компенсирован приходом новых электронов из источника тока, поскольку переход включен в замкнутую электрическую цепь, и концентрация n_s будет оставаться постоянной из-за электронейтральности всей системы. Однако для определения сверхтока достаточно принять, что $I_s \sim dn_s/dt$. Тогда из формулы (20.6) сразу получаем уравнение стационарного эффекта Джозефсона

$$I_s = I_c \sin \varphi. \quad (20.9)$$

Другой вывод этого равенства, применимый к коротким плеченым мостикам, был сделан Асламазовым и Ларкиным [34].

Пусть мостик (рис. 20.3) настолько короткий, что его длина $L \ll \xi$. Применим к такому мостику первое уравнение теории Гинзбурга—Ландау (14.16), которое в отсутствие магнитного поля примет вид

$$-\xi^2 \nabla^2 \psi - \psi + \psi |\psi|^2 = 0. \quad (20.10)$$

В нашем коротком мостике существенное изменение параметра порядка происходит на длине мостика L . Сделаем оценку величины $\nabla^2 \psi$ для этого случая:

$$\nabla^2 \psi \sim \psi / L^2.$$

С другой стороны, сама величина параметра порядка $|\psi| \sim 1$. Поэтому первый член в (20.10) будет главным, так как его порядок будет

$$\xi^2 / L^2 \gg 1,$$

а все остальные слагаемые ~ 1 . Поэтому уравнение (20.10) можно упростить:

$$\nabla^2 \psi = 0. \quad (20.11)$$

Пусть далеко от мостика в пленке 1 параметр порядка ψ равен

$$\psi = \psi_1 e^{i\theta_1},$$

а далеко от мостика в пленке 2

$$\psi = \psi_2 e^{i\theta_2}.$$

Здесь ψ_1, ψ_2, θ_1 и θ_2 — постоянные, не зависящие от координат. Ясно, что на самом мостике происходит интерференция этих двух волновых функций, и решение уравнения (20.11) ищем в виде

$$\psi = \psi_1 e^{i\theta_1} f(r) + \psi_2 e^{i\theta_2} (1 - f(r)), \quad (20.12)$$

причем $f(r) \rightarrow 1$ в глубине пленки 1 и $f(r) \rightarrow 0$ в глубине пленки 2.

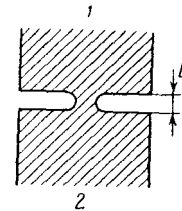


Рис. 20.3. Короткий мостик с длиной $L \ll \xi$ соединяет широкие пленки 1 и 2.

Подставляя (20.12) в (20.11), получим уравнение относительно $f(r)$:

$$\nabla^2 f(r) = 0.$$

Однако нам нет необходимости решать это уравнение. Достаточно знать, что решение существует, и перейти к вычислению сверхтока, который, согласно второму уравнению Гинзбурга—Ландау, можно записать в виде

$$j_s = \frac{|a| \hbar e}{\beta m} \text{Im} (\psi^* \nabla \psi).$$

Подставляя сюда формулу (20.12), получим после простых преобразований выражение для плотности сверхтока через мостик в виде

$$j = j_c \sin \varphi, \quad (20.13)$$

где $\varphi = \theta_1 - \theta_2$.

Таким образом, и для случая мостика мы снова приходим к тому же простому соотношению между сверхтоком и разностью фаз волновых функций сверхпроводников на «берегах» перехода.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что это соотношение выполняется.

§ 21. Нестационарный эффект Джозефсона

До сих пор рассматривался случай, когда ток через слабую связь был меньше критического тока этой слабой связи. Если ток, задаваемый внешним источником, пре-

высит критическое значение, на слабой связи появится напряжение V . К каким это приведет последствиям?

Поведение квантовомеханической системы определяется решением уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \quad (21.1)$$

где \hat{H} — гамильтониан системы.

Волновая функция стационарного состояния ψ_1 удовлетворяет уравнению

$$\hat{H}\psi_1 = E\psi_1,$$

где E — энергия этого стационарного состояния, $\psi = \psi_1 e^{i\theta(t)}$, причем ψ_1 не зависит от времени. Подставляя эту волновую функцию в (21.1), получим

$$-\hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} = E. \quad (21.2)$$

Если на слабой связи установилась разность потенциалов V , то это означает, что энергии куперовских пар в берегах перехода E_1 и E_2 связаны соотношением

$$E_1 - E_2 = 2eV, \quad (21.3)$$

так как заряд одной пары равен $2e$.

Подставляя (21.3) в (21.2), получим второе фундаментальное соотношение Джозефсона

$$2eV = \hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (21.4)$$

Точно то же самое соотношение получится, если из формулы (20.6) вычесть формулу (20.7).

Что же происходит с джозефсоновским переходом, когда по нему течет заданный извне постоянный ток $I > I_c$? Поскольку сверхток не может быть больше I_c , ясно, что теперь, кроме сверхтока, возникнет ток нормальной компоненты, т. е. возникнет ток одиночных электронов. Это высказывание сразу приводит нас к так называемой резистивной модели: рассматриваем джозефсоновский переход как параллельно включенные собственно джозефсоновский переход и нормальный участок (рис. 21.1). Полный ток I равен сумме нормального тока V/R и сверхтока $I_s = I_c \sin \varphi$:

$$I = I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eR} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (21.5)$$

где R — сопротивление перехода в нормальном состоянии. Это дифференциальное уравнение относительно функции $\varphi(t)$ элементарно интегрируется. Подставляя решение в (21.4), получим напряжение на переходе в виде

$$V(t) = R \frac{I^2 - I_c^2}{I + I_c \cos \omega t}, \quad (21.6)$$

$$\omega = \frac{2e}{\hbar} R \sqrt{I^2 - I_c^2}. \quad (21.7)$$

Так мы обнаруживаем удивительное свойство джозефсоновского перехода. Если заданный извне постоянный

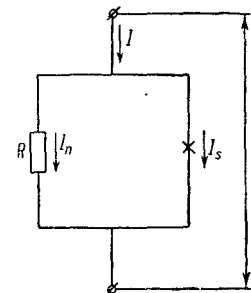


Рис. 21.1. Резистивная модель джозефсоновского перехода. Сверхток через собственно джозефсоновский переход равен $I_s = I_c \sin \varphi$.

ток I больше критического тока перехода, на нем возникает напряжение V , периодически зависящее от времени. Это явление получило название джозефсоновской генерации. Схематическая зависимость $V(t)$ от времени дана на рис. 21.2. Частота колебаний напряжения зависит от того, насколько превышает ток через переход I его критическое значение I_c (см. (21.7)).

Вольтметр постоянного тока, подключенный к переходу, покажет, конечно, среднее по периоду значение \bar{V} . Усреднение по времени формулы (21.6) дает

$$2e\bar{V} = \hbar\omega. \quad (21.8)$$

Эта формула имеет совершенно ясную интерпретацию. Если среднее расстояние по энергиям между уровнями куперовских пар в двух половинках перехода равно $2e\bar{V}$, то при переходе одной пары через область слабой связи такая энергия выделяется в виде кванта электромагнитного излучения.

Вольтамперная характеристика перехода, которая следует из формул (21.7) и (21.8), показана на рис. 21.3.

Здесь необходимо отметить, что соотношения (21.4) и (21.8) являются совершенно фундаментальными и точными. Многочисленные эксперименты подтвердили их с громадной точностью.

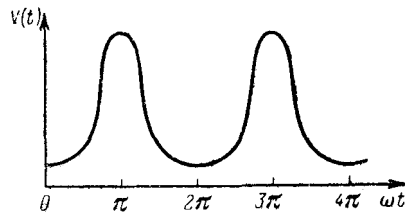


Рис. 21.2. Напряжение на переходе (джозефсоновская генерация).

Впервые джозефсоновская генерация наблюдалась советскими физиками И. К. Янсоном, В. М. Свистуновым и И. Д. Дмитренко [11] в 1964 г.

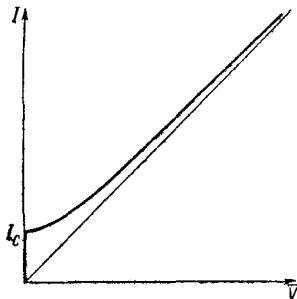


Рис. 21.3. Вольтамперная характеристика джозефсоновского перехода.

Задача 21.1. Два джозефсоновских перехода с критическими токами $I_{c1}=500$ мкА и $I_{c2}=700$ мкА включены параллельно в сверхпроводящую цепь. Полный ток через оба перехода равен 1 мА. Чему равны токи в каждом из переходов?

Решение. Поскольку переходы включены параллельно, разности фаз φ_1 и φ_2 на переходах будут равны. Поэтому токи по переходам распределяются пропорционально их критическим токам: $I_1=0,417$ мА, $I_2=0,583$ мА.

Задача 21.2. Найти разность между максимальным и минимальными значениями V на графике рис. 21.2.

Ответ. $V_{\max}-V_{\min}=2I_c R$.

Задача 21.3. Точечный контакт имеет критический ток $I_c=1$ мА и сопротивление в нормальном состоянии $R=2$ Ом. Найти величину постоянного напряжения на контакте \bar{V} и частоту джозефсоновской генерации ν , если через контакт течет ток $I=1,2$ мА.

Ответ. $\bar{V}=1,33$ мВ; $\nu=641$ ГГц.

Задача 21.4. Критический ток джозефсоновского перехода равен $I_c=100$ мкА. Через переход пропускается постоянный ток $I_0=70$ мкА и слабый переменный ток с амплитудой $I_1=2$ мкА и

частотой $\nu=10$ МГц, т. е. $I=I_0+I_1\sin 2\pi\nu t$. Найти напряжение на переходе, пользуясь СИ.

Решение. Разность фаз на переходе ищем в виде $\varphi=\varphi_0+\varphi_1$, где φ_0 — разность фаз, создаваемая постоянным током I_0 . Напряжение на переходе $V=(\Phi_0/2\pi)d\varphi/dt=(\Phi_0/2\pi)d\varphi_1/dt$, но $d\varphi_1/dt=(dI/dt)(dI/d\varphi_1)^{-1}$. Подставляя это выражение в выражение для V , получим

$$V = \frac{\Phi_0}{I_c \cos \varphi_0} \nu I_1 \sin(2\pi\nu t + \pi/2).$$

При условиях задачи амплитуда переменного напряжения будет 0,58 нВ.

Замечание. Из решения задачи следует, что напряжение V опережает по фазе ток через переход на угол $\pi/2$. Это значит, что переход ведет себя как индуктивность $L=\Phi_0/(2\pi I_c \cos \varphi_0)$.

§ 22. Отклик джозефсоновского перехода на внешнее магнитное поле

В этом параграфе мы ограничимся переходами, в которых нет концентрации тока, т. е. переходами типа сэндвич или туннельными переходами. Пусть, например, такой переход представляет собой две массивные сверхпроводящие пластинки, разделенные тонким слоем диэлектрика (рис. 22.1). Если такую систему поместить во внешнее магнитное поле, параллельное плоскости перехода, на внешней поверхности пластин возникнет экранирующий сверхток. Этот ток течет в слое порядка лондоновской глубины проникновения λ . Но при этом он должен пересечь плоскость джозефсоновского перехода, а плотность критического тока там очень мала (слабое место!). Поэтому, чтобы сохранить бездиссипативность течения, току приходится растекаться на значительной ширине в глубь перехода. Это и показано на рис. 22.1. Попробуем описать эту ситуацию математически.

22.1. Уравнение Феррелла—Прейнджа. Пусть ось x лежит в плоскости перехода, а магнитное поле направлено вдоль оси z . Область вдоль оси y , где протекает ток и существует магнитное поле, имеет размер d (см. рис. 22.1), причем $d=2\lambda+t$. Здесь t — толщина изоляционной прослойки туннельного перехода. Рассмотрим две близкие пары точек (1, 2; 3, 4) на переходе (рис. 22.2). Эти точки выбраны вне области, занятой магнитным полем, а расстояние между ними принято равным dx .

Обобщенный импульс для куперовской пары запишем в виде

$$\hbar\nabla\theta = 2m\nu + \frac{2e}{c} \mathbf{A}, \quad (22.1)$$

где θ — фаза волновой функции, v_s — скорость пары, m — масса электрона, e — его заряд, A — векторный потенциал магнитного поля. Проинтегрируем это уравнение

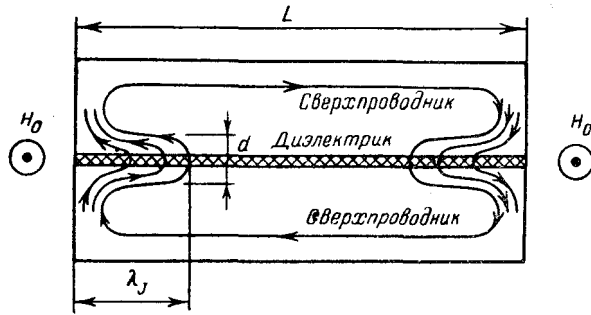


Рис. 22.1. Джозефсоновский туннельный переход, помещенный в магнитное поле H_0 . Показано распределение экранирующего (мейснеровского) тока.

по пунктирным участкам, показанным на рис. 22.2. Все точки этого контура находятся в области, где нет сверхтока, поэтому там $v_s = 0$:

$$\hbar \left[\int_1^3 \nabla \theta \, dl + \int_4^2 \nabla \theta \, dl \right] = \frac{2e}{c} \left[\int_1^3 A \, dl + \int_4^2 A \, dl \right]. \quad (22.2)$$

Расстояние d будем в дальнейшем считать пренебрежимо

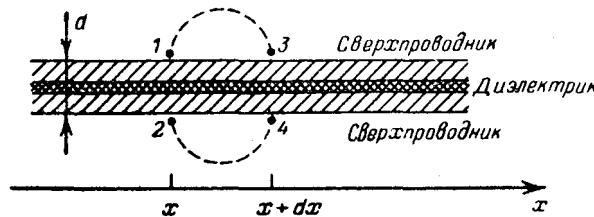


Рис. 22.2. Участок джозефсоновского перехода вблизи края перехода. Заштрихована область с магнитным полем.

малым. Тогда правую часть формулы (22.2) можно записать приближенно в виде

$$\frac{2e}{c} \oint A \, dl = \frac{2e}{c} d\Phi, \quad (22.3)$$

где $d\Phi$ — магнитный поток, охватываемый пунктирным контуром, если этот контур дополнить отрезками 3—4 и 2—1. Теперь, очевидно, после интегрирования левой части в (22.2), получим

$$\hbar(\theta_3 - \theta_1 + \theta_2 - \theta_4) = \frac{2e}{c} d\Phi.$$

Учитывая, что $\theta_3 - \theta_4 = \varphi(x + dx)$, а $\theta_1 - \theta_2 = \varphi(x)$, имеем

$$\varphi(x + dx) - \varphi(x) = \frac{2e}{\hbar c} d\Phi,$$

или

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{d\Phi}{dx}, \quad (22.4)$$

поскольку $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$.

Учитывая, что $(1/d) d\Phi/dx$ — это напряженность H магнитного поля в переходе в точке x в направлении оси z , имеем

$$H = \frac{\Phi_0}{2\pi d} \frac{d\varphi}{dx}. \quad (22.5)$$

Сверхток через переход в направлении оси y , согласно уравнениям Максвелла, равен

$$j_s = \frac{c}{4\pi} \frac{dH}{dx}.$$

Подставляя сюда (22.5) и учитывая основное джозефсоновское соотношение между током и разностью фаз: $j_s = j_c \sin \varphi$, имеем окончательно так называемое уравнение Феррелла—Прейнджа [35]

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \varphi, \quad (22.6)$$

где λ_J равно

$$\lambda_J = \left(\frac{c\Phi_0}{8\pi^2 j_c d} \right)^{1/2}. \quad (22.7)$$

Решение $\varphi(x)$ уравнения (22.6) должно описать распределение разности фаз вдоль перехода. Рассмотрим случай очень слабого внешнего поля $H_0 \ll \Phi_0 / (2\pi\lambda_J d)$. В этом случае токи через переход тоже будут слабы и

мала будет разность фаз φ . Поэтому уравнение (22.6) можно записать в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_J^2} \varphi,$$

которое элементарно решается:

$$\varphi(x) = \varphi(0) \exp(-x/\lambda_J). \quad (22.8)$$

Подставляя это решение в (22.5), найдем магнитное поле в переходе:

$$H(x) = H_0 \exp(-x/\lambda_J).$$

Отсюда видно, что величина λ_J , имеющая размерность длины, представляет собой глубину проникновения слабого магнитного поля в джозефсоновский переход.

В практических расчетах величины λ_J удобно пользоваться СИ, поэтому приведем формулу (22.7) также в этой системе:

$$\lambda_J = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0 j_c d} \right)^{1/2},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, $\Phi_0 = 2,07 \cdot 10^{-15}$ Вб, j_c — критическая плотность тока через переход в А/м², d выражено в м. Если принять, что $d \sim 10^{-5}$ см, $j_c \sim 10^2$ А/см², то λ_J оказывается порядка 0,1 мм, т. е. вполне макроскопической величиной.

22.2. Проникновение магнитного поля в переход. Джозефсоновские вихри. В предыдущем параграфе мы изучили случай слабого внешнего поля, которое проникает в переход на величину λ_J — джозефсоновскую глубину проникновения. А что будет, если мы начнем увеличивать внешнее поле? Оказывается, что поведение джозефсоновского перехода во внешнем магнитном поле во многом напоминает поведение сверхпроводника второго рода. Здесь тоже, когда внешнее поле превысит некоторое характерное поле перехода H_{c1} , внутрь перехода начнут проникать сверхпроводящие вихри, несущие квант магнитного потока Φ_0 , так называемые джозефсоновские вихри.

Действительно, одно из решений уравнения Феррелла—Прейнджа (22.6) имеет вид

$$\varphi_0(x) = 4 \operatorname{arctg} \exp(x/\lambda_J). \quad (22.9)$$

Прямой подстановкой нетрудно убедиться, что уравнение (22.6) этим решением удовлетворяется. Вид $\varphi_0(x)$, $d\varphi_0/dx \sim H$ и $d^2\varphi_0/dx^2 \sim j_c$ показан на рис. 22.3. Таким образом, джозефсоновский вихрь представляет собой так называемый солитон, единственный возбуждение широкого джозефсоновского перехода. Вдоль перехода вихрь имеет размер $\sim 2\lambda_J$, а поперек перехода (вдоль оси y) — размер $d \ll 2\lambda_J$.

Итак, начиная с поля H_{c1} , проникновение джозефсоновских вихрей в переход становится энергетически выгодным. Проникшие вихри образуют линейную цепочку, и контакт переходит в смешанное состояние. Пока — полная аналогия со сверхпроводником второго рода. Но полная ли? Оказывается — нет!

Все дело в том, что джозефсоновский вихрь, в отличие от абрикосовского (см. гл. 5) не имеет нормальной сердцевинки. А второе критическое поле в сверхпроводниках второго рода H_{c2} связано с существованием этой нормальной сердцевинки: сверхпроводимость пропадает, когда внешнее поле сжимает вихри настолько, что они начинают соприкасаться своими нормальными сердцевинами. Отсюда понятно, что для джозефсоновского перехода нет второго критического поля, хотя зависимость максимального тока перехода от магнитного поля, как мы вскоре увидим, может быть весьма причудливой.

Найдем теперь первое критическое поле перехода H_{c1} . Для этого надо рассмотреть свободную энергию перехода.

При нарастании тока через переход от нуля до величины j_c за время t в переходе запасается некоторая энергия. Отнесенная к единице площади перехода, она будет равна

$$w_J = \int_0^t j_c V dt. \quad (22.10)$$

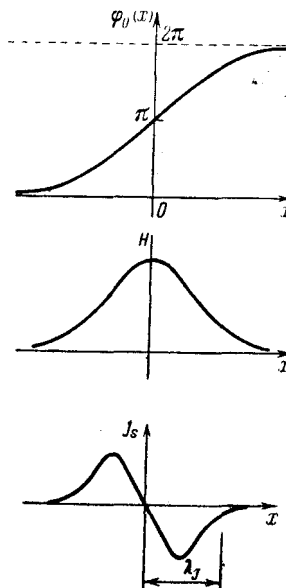


Рис. 22.3. Распределение разности фаз $\varphi_0(x)$, магнитного поля $H(x)$ и сверхтока $j_s(x)$ для джозефсоновского вихря.

Здесь V — это то напряжение, которое возникает на переходе в процессе нарастания тока согласно общей формуле (21.4). Подставляя сюда $j_s = j_c \sin \varphi$ и (21.4), после элементарного интегрирования, получим

$$w_J = \frac{\hbar}{2e} j_c (1 - \cos \varphi). \quad (22.11)$$

Нетрудно заметить, что джозефсоновский переход играет в этом случае роль нелинейной индуктивности, в которой и запасается эта энергия. Кроме этой энергии в переходе еще присутствует магнитная энергия, которая в пересчете на единицу площади перехода будет

$$w_H = \frac{H^2}{8\pi} d. \quad (22.12)$$

Суммируя w_J и w_H и интегрируя вдоль всей длины перехода L (рис. 22.1), получим полную свободную энергию перехода, отнесенную к единице его длины вдоль магнитного поля (вдоль оси z):

$$W = \int_0^L dx \left[\frac{H^2}{8\pi} d + \frac{\hbar}{2e} j_c (1 - \cos \varphi) \right].$$

Подставив сюда выражение для H из (22.5), можно превратить W в функционал относительно функции $\varphi(x)$:

$$W = \int_0^L dx \left[\frac{\Phi_0^2}{32\pi^2 d} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \frac{\hbar}{2e} j_c (1 - \cos \varphi) \right]. \quad (22.13)$$

Решая вариационную задачу на минимизацию этого функционала, снова приходим к уравнению Феррелла—Прейнджа (22.6).

Используя выражение (22.13), легко найти свободную энергию одиночного джозефсоновского вихря W_0 в бесконечном переходе. Для этого достаточно подставить выражение (22.9) для $\varphi_0(x)$ в (22.13) и проинтегрировать. В результате получим

$$W_0 = \frac{4\Phi_0 j_c}{\pi c} \lambda_J. \quad (22.14)$$

Если на переход наложено внешнее поле H_0 , гиббсовская свободная энергия одного джозефсоновского вихря в переходе будет, согласно (3.15), равна

$$\mathcal{G}_0 = W_0 - \Phi_0 H_0 / 4\pi. \quad (22.15)$$

Из этой формулы видно, что при достаточно слабом внешнем поле $\mathcal{G}_0 > 0$ и существование джозефсоновского вихря внутри перехода энергетически невыгодно. Первое критическое поле H_{c1} — это такое внешнее поле H_0 , при котором \mathcal{G}_0 становится равным нулю и, начиная с которого, существование вихря в переходе становится энергетически оправданным. Таким образом,

$$H_{c1} = \frac{2}{\pi^2} \frac{\Phi_0}{\lambda_J d}. \quad (22.16)$$

Очевидно, что это поле меньше поля в центре вихря $H(0)$, которое, согласно (22.9) и (22.5), равно

$$H(0) = \frac{\Phi_0}{\pi \lambda_J d}. \quad (22.17)$$

Поле $H(0)$ является полем перегрева мейсснеровского состояния перехода.

22.3. Максимальный бездиссипативный ток джозефсоновского перехода. Сильное магнитное поле. Рассмотрим теперь случай сильных магнитных полей:

$$H_0 \gg \frac{\Phi_0}{2\pi \lambda_J d}. \quad (22.18)$$

Кроме того, предположим, что размер перехода $L \ll 2\lambda_J$, т. е. мы можем пренебречь собственным магнитным полем сверхтока, текущего через переход, по сравнению с H_0 . Неравенство (22.18) можно интерпретировать как условие того, что цепочка джозефсоновских вихрей в переходе сильно сжата, т. е. расстояние между соседними вихрями много меньше величины λ_J . В этих условиях поле внутри перехода можно считать постоянным и равным внешнему полю H_0 . Тогда из формулы (22.5) следует, что

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2\pi d}{\Phi_0} H_0,$$

а интегрирование этого выражения дает

$$\varphi(x) = \frac{2\pi d}{\Phi_0} H_0 x + C, \quad (22.19)$$

где C — произвольная постоянная интегрирования. Подставляя (22.19) в джозефсоновское выражение для плотности тока (20.13), получим

$$j_x = j_c \sin \left(\frac{2\pi x}{a} + C \right), \quad (22.20)$$

где введено обозначение

$$a = \Phi_0 / H_0 d. \quad (22.21)$$

Из выражения (22.20) следует, что действительно в рассматриваемом случае в переходе существует плотно сжатая цепочка вихрей. Она схематически изображена на рис. 22.4, а, а распределение туннельного сверхтока — на рис. 22.4, б.

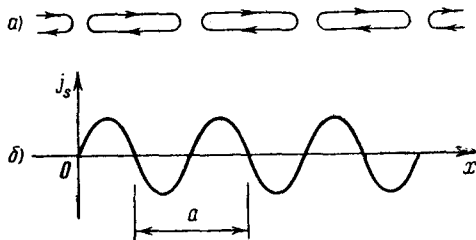


Рис. 22.4. а) Схематическое изображение смешанного состояния джозефсоновского туннельного перехода — плотно сжатая цепочка вихрей, б) распределение туннельного сверхтока через переход, которое при этом возникает.

Полный ток через переход можно найти, проинтегрировав j_s в (22.20) по x вдоль всего перехода:

$$I_s = j_0 \int_{-L/2}^{L/2} \sin(2\pi x/a + C) dx.$$

В результате интегрирования имеем

$$I_s = j_0 L \frac{\sin(\pi L/a)}{\pi L/a} \sin C. \quad (22.22)$$

Из этой формулы следует, что при заданном магнитном поле изменение полного тока перехода I_s (задаваемого внешним источником) влечет за собой изменение константы C . Она подстраивается под каждое данное значение полного тока. Ясно, что максимальный бездиссипативный полный ток через переход I_{\max} будет равен просто модулю величины, стоящей перед $\sin C$ в формуле (22.22):

$$I_{\max} = I_0 \left| \frac{\sin(\pi L/a)}{\pi L/a} \right|, \quad (22.23)$$

где мы обозначили

$$I_0 = j_0 L.$$

Формуле (22.23) можно придать более удобный вид, если учесть, что согласно (22.21)

$$\pi L/a = \pi \Phi / \Phi_0, \quad (22.24)$$

где через Φ мы обозначили полный магнитный поток

Рис. 22.5. Зависимость максимального бездиссипативного полного тока через джозефсоновский переход от внешнего магнитного поля, параллельного плоскости перехода.

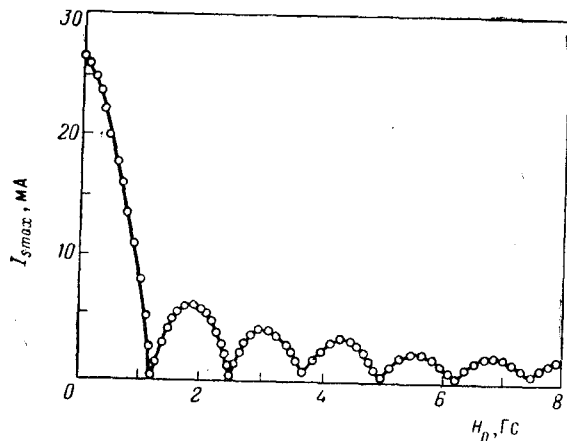
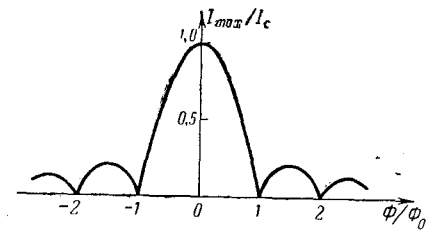


Рис. 22.6. Результаты экспериментального исследования зависимости максимального сверхтока через переход Sn—SnO_x—Sn от магнитного поля [36].

в нашем джозефсоновском переходе:

$$\Phi = H_0 L d.$$

Подставляя (22.24) в формулу (22.23), получим окончательно

$$I_{\max} = I_0 \left| \frac{\sin(\pi \Phi / \Phi_0)}{\pi \Phi / \Phi_0} \right|. \quad (22.25)$$

Зависимость I_{\max} от внешнего магнитного поля $H_0 = \Phi/(Ld)$ изображена на рис. 22.5. Из формулы (22.25) и из рисунка следует, что смешанное состояние в переходе совершенно неустойчиво (достаточно ничтожного внешнего тока, чтобы его разрушить), когда в переходе укладывается целое число квантов потока. Наоборот, оно наиболее устойчиво, когда магнитный поток в переходе равен полупцелому числу квантов потока. Формула (22.25) прекрасно подтверждается экспериментом [36] (рис. 22.6).

Задача 22.1. Найти критическое поле проникновения вихря в джозефсоновский туннельный переход H_{c1} и поле в центре этого вихря, если переход образован двумя свинцовыми пленками. Лондоновская глубина проникновения магнитного поля в свинец $\lambda = 400 \text{ \AA}$, критическая плотность тока перехода равна $j_c = 10 \text{ A/cm}^2$.

Ответ. $H_{c1} = 0,290 \text{ Э}$; $H(0) = 0,455 \text{ Э}$.

Задача 22.2. Пусть длина туннельного перехода, описанного в задаче 22.1, равна $L = 0,2 \text{ мм}$. При каком внешнем поле будут наблюдаться первые два максимума критического тока?

Ответ. Первый максимум будет при поле $H_1 = 1,85 \text{ Э}$, второй — при $H_2 = 3,18 \text{ Э}$.

§ 23. Сверхпроводящие квантовые интерферометры (сквиды)

В этом параграфе мы рассмотрим главные принципы работы так называемых сверхпроводящих квантовых интерферометров — сквидов. Это утвердившееся в русской научной и технической литературе слово возникло от английского сокращения SQUID (Superconducting Quantum Interference Device — сверхпроводящее квантовое интерференционное устройство). Эти чрезвычайно простые по конструкции сверхпроводящие устройства открыли совершенно новые горизонты в технике низкотемпературных измерений. С их помощью можно создать магнетометры с чувствительностью порядка 10^{-11} Гс, вольтметры с чувствительностью порядка 10^{-15} В и другие приборы уникальной чувствительности. Несомненно, что в ближайшие годы сфера применения сквидов будет расширяться.

Итак, что же такое сквид?

Различают два типа сквидов — двухконтактный сквид, или, как говорят, сквид на постоянном токе, и одноконтактный сквид, или, что то же самое — высокочастотный сквид.

23.1. Двухконтактный сквид. Это устройство представляет собой просто два джозефсоновских перехода, включенных параллельно (рис. 23.1). Включение осу-

ществляется массивными сверхпроводниками, которые вместе с джозефсоновскими переходами a и b образуют замкнутый контур (кольцо). Внутри этого кольца введена катушка, создающая магнитный поток. Мы хотим понять, как будет зависеть максимальный бездиссипативный ток I_{\max} через такое устройство от величины полного магнитного потока Φ , заключенного внутри кольца интерферометра. Выделим внутри кольца две пары точек (1, 2) и (3, 4), близких к переходам a и b , и соединим их пунктирным контуром, как показано на рис. 23.1. Проинтегрируем выражение (22.1) для обобщенного импульса

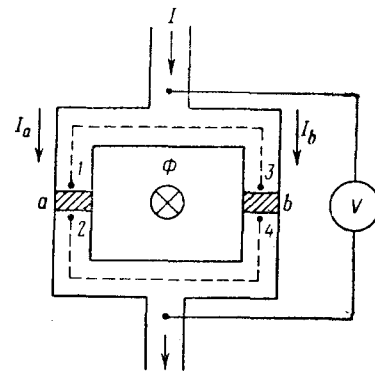


Рис. 23.1. Два джозефсоновских перехода a и b , включенные параллельно — сверхпроводящий интерферометр. В отверстие сквида введен некоторый магнитный поток Φ_0 .

куперовской пары от точки 1 до точки 3 и от точки 4 до точки 2. В результате получим*)

$$\theta_3 - \theta_1 + \theta_2 - \theta_4 = \frac{2e}{\hbar} \left(\int_1^3 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_4^2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right). \quad (23.1)$$

Слагаемое $2mv$, при интегрировании опущено, так как все точки пунктирного контура проходят в области сверхпроводника, далекой от края. Там сверхток отсутствует и $\mathbf{v}_s = 0$. Поскольку расстояния между точками 1 и 2 так же, как и между точками 3 и 4, малы по сравнению с длиной пунктирного контура, а векторный потенциал \mathbf{A} не имеет особенностей около джозефсоновских переходов, можно дополнить правую часть выражения (23.1) еще

*) В этом параграфе мы будем пользоваться Интернациональной Системой единиц (СИ).

Зависимость I_{\max} от внешнего магнитного поля $H_0 = \Phi/(Ld)$ изображена на рис. 22.5. Из формулы (22.25) и из рисунка следует, что смешанное состояние в переходе совершенно неустойчиво (достаточно ничтожного внешнего тока, чтобы его разрушить), когда в переходе укладывается целое число квантов потока. Наоборот, оно наиболее устойчиво, когда магнитный поток в переходе равен полуделому числу квантов потока. Формула (22.25) прекрасно подтверждается экспериментом [36] (рис. 22.6).

Задача 22.1. Найти критическое поле проникновения вихря в джозефсоновский туннельный переход H_{c1} и поле в центре этого вихря, если переход образован двумя свинцовыми пленками. Лондонская глубина проникновения магнитного поля в свинец $\lambda = 400 \text{ \AA}$, критическая плотность тока перехода равна $j_c = 10 \text{ A/cm}^2$.

Ответ. $H_{c1} = 0,290 \text{ Э}$; $H(0) = 0,455 \text{ Э}$.

Задача 22.2. Пусть длина туннельного перехода, описанного в задаче 22.1, равна $L = 0,2 \text{ мм}$. При каком внешнем поле будут наблюдаться первые два максимума критического тока?

Ответ. Первый максимум будет при поле $H_1 = 1,85 \text{ Э}$, второй — при $H_2 = 3,18 \text{ Э}$.

§ 23. Сверхпроводящие квантовые интерферометры (сквиды)

В этом параграфе мы рассмотрим главные принципы работы так называемых сверхпроводящих квантовых интерферометров — сквидов. Это утвердившееся в русской научной и технической литературе слово возникло от английского сокращения SQUID (Superconducting Quantum Interference Device — сверхпроводящее квантовое интерференционное устройство). Эти чрезвычайно простые по конструкции сверхпроводящие устройства открыли совершенно новые горизонты в технике низкотемпературных измерений. С их помощью можно создать магнетометры с чувствительностью порядка 10^{-11} Гс, вольтметры с чувствительностью порядка 10^{-15} В и другие приборы уникальной чувствительности. Несомненно, что в ближайшие годы сфера применения сквидов будет расширяться.

Итак, что же такое сквид?

Различают два типа сквидов — двухконтактный сквид, или, как говорят, сквид на постоянном токе, и одноконтактный сквид, или, что то же самое — высокочастотный сквид.

23.1. Двухконтактный сквид. Это устройство представляет собой просто два джозефсоновских перехода, включенных параллельно (рис. 23.1). Включение осу-

ществляется массивными сверхпроводниками, которые вместе с джозефсоновскими переходами a и b образуют замкнутый контур (кольцо). Внутри этого кольца введена катушка, создающая магнитный поток. Мы хотим понять, как будет зависеть максимальный бездиссипативный ток I_{\max} через такое устройство от величины полного магнитного потока Φ , заключенного внутри кольца интерферометра. Выделим внутри кольца две пары точек (1, 2) и (3, 4), близких к переходам a и b , и соединим их пунктирным контуром, как показано на рис. 23.1. Проинтегрируем выражение (22.1) для обобщенного импульса

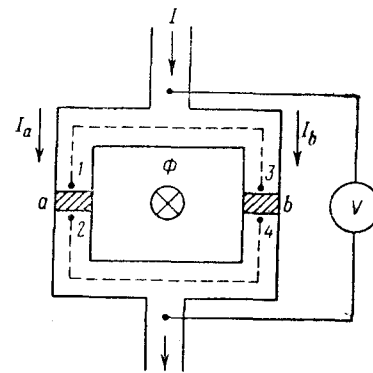


Рис. 23.1. Два джозефсоновских перехода a и b , включенные параллельно — сверхпроводящий интерферометр. В отверстие сквида введен некоторый магнитный поток Φ_e .

куперовской пары от точки 1 до точки 3 и от точки 4 до точки 2. В результате получим*)

$$\theta_3 - \theta_1 + \theta_2 - \theta_4 = \frac{2e}{\hbar} \left(\int_1^3 \mathbf{A} d\mathbf{l} + \int_4^2 \mathbf{A} d\mathbf{l} \right). \quad (23.1)$$

Слагаемое $2m\mathbf{v}_s$ при интегрировании опущено, так как все точки пунктирного контура проходят в области сверхпроводника, далекой от края. Там сверхток отсутствует и $\mathbf{v}_s = 0$. Поскольку расстояния между точками 1 и 2 так же, как и между точками 3 и 4, малы по сравнению с длиной пунктирного контура, а векторный потенциал \mathbf{A} не имеет особенностей около джозефсоновских переходов, можно дополнить правую часть выражения (23.1) еще

*) В этом параграфе мы будем пользоваться Интернациональной Системой единиц (СИ).

и интегралом по участкам 3—4 и 2—1. В результате получим

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{2e}{\hbar} \oint A dl,$$

т. е.

$$\varphi_a - \varphi_b = 2\pi\Phi/\Phi_0, \quad (23.2)$$

где Φ — полный магнитный поток, охватываемый кольцом интерферометра, $\varphi_a = \theta_2 - \theta_1$, $\varphi_b = \theta_4 - \theta_3$, а $\Phi_0 = \pi\hbar/e$ — квант магнитного потока.

Так как согласно (20.1) ток через переход a равен

$$I_a = I_c \sin \varphi_a,$$

а через переход b

$$I_b = I_c \sin \varphi_b$$

(мы предполагаем, что оба перехода одинаковы, с одним и тем же критическим током I_c), полный ток I через интерферометр будет равен сумме токов I_a и I_b :

$$I = I_c (\sin \varphi_a + \sin \varphi_b). \quad (23.3)$$

Учитывая, что $\sin \varphi_a + \sin \varphi_b = 2 \sin [(\varphi_a + \varphi_b)/2] \cos [(\varphi_a - \varphi_b)/2]$, и используя формулу (23.2), преобразуем формулу (23.3) к виду

$$I = 2I_c \cos \frac{\pi\Phi}{\Phi_0} \sin \left(\varphi_b + \frac{\pi\Phi}{\Phi_0} \right). \quad (23.4)$$

При заданном полном магнитном потоке через кольцо интерферометра Φ единственным параметром, который

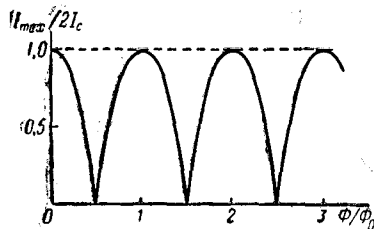


Рис. 23.2. Зависимость максимального тока через двухконтактный интерферометр от полного магнитного потока в его кольце.

подстраивается под заданный полный ток интерферометра I , является, согласно (23.4), величина φ_b . Отсюда (как и при выводе формулы (22.23)) следует, что максимальный бездиссипативный ток интерферометра равен

$$I_{\max} = 2I_c |\cos(\pi\Phi/\Phi_0)|. \quad (23.5)$$

Эта зависимость I_{\max} от Φ представлена на рис. 23.2. Видно, что наиболее устойчиво сверхпроводящее состояние кольца по отношению к внешнему току I будет в случаях, когда полный магнитный поток через интерферометр Φ будет равен целому числу квантов потока Φ_0 . Наоборот, случай, когда Φ равно полужелому числу квантов потока, соответствует неустойчивому сверхпроводящему состоянию: достаточно приложить к интерферометру ничтожный ток I , чтобы прибор перешел в резистивное состояние, и чтобы вольтметр (см. рис. 23.4) обнаружил напряжение на интерферометре.

Подчеркнем, что Φ — это полный поток в кольце интерферометра. Поток, созданный непосредственно катушкой, введенной в интерферометр Φ_s , связан с Φ простым соотношением

$$\Phi = \Phi_s - LI_s,$$

где L — индуктивность кольца интерферометра, I_s — экранирующий ток, текущий по интерферометру. Критический ток интерферометра зависит от Φ_s тоже периодически и тоже с периодом Φ_0 . Эта зависимость показана на рис. 23.3.

Подробный анализ работы двухконтактного сквида приведен в работе Кларка [37].

Двухконтактный сквид может быть использован как прибор необычайно высокой чувствительности во всех случаях, когда изменение наблюдаемой величины можно преобразовать в изменение магнитного потока. Ограничение чувствительности, определяемое лишь тепловыми шумами джозефсоновских переходов, по теоретическим оценкам может быть порядка нескольких единиц на $10^{-5} \Phi_0$, если время измерения будет не меньше 1 секунды. Это означает, что открывается возможность чувствовать изменения магнитного поля порядка 10^{-10} — 10^{-11} Гс. Для

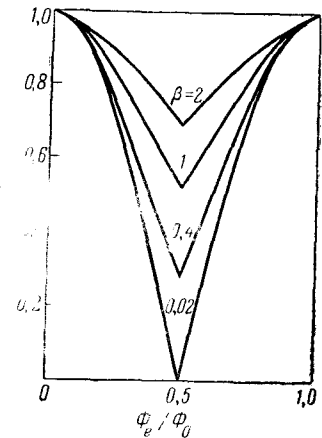


Рис. 23.3. Зависимость критического тока двухконтактного сквида от внешнего потока при разных значениях параметра $\beta = 2LI_c/\Phi_0$ [37].

сравнения укажем, что магнитное поле Земли имеет величину около 0,5 Гс.

23.2. Одноконтактный сквид. Главным элементом одноконтактного сквида является сверхпроводящее кольцо, замкнутое джозефсоновским переходом. Выделим пару точек (1, 2) вблизи перехода, как показано на рис. 23.4, и соединим их штриховым контуром, все точки которого лежат внутри массивного сверхпроводника и удалены от краев сверхпроводника на расстояния большие по сравнению с глубиной проникновения λ . Это значит, что в любой точке пунктирного контура сверхток равен нулю, т. е. сверхтекущая скорость v_s отсутствует.

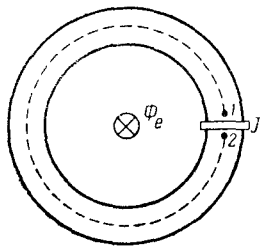


Рис. 23.4. Одноконтактный сквид: сверхпроводящее кольцо, замкнутое джозефсоновским переходом J . Внутри кольца введена катушка, создающая внешний поток Φ_e .

Вернемся теперь снова к выражению для обобщенного импульса куперовской пары (22.1) и проинтегрируем его по пунктирному контуру от точки 1 до точки 2. Учитывая, что $v_s = 0$, имеем

$$\hbar(\theta_2 - \theta_1) = 2e \int_1^2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (23.6)$$

Расстояние между точками 1 и 2 через переход значительно меньше расстояния между этими же точками по пунктирному контуру, а векторный потенциал \mathbf{A} никаких особенностей в области J не имеет. Поэтому правая часть формулы (23.6) существенно не изменится, если ее до-

полнить интегралом $\int_2^1 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$, проходящим через переход J .

Тогда (23.6) можно будет переписать в виде

$$\hbar\varphi = 2e \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (23.7)$$

где φ — разность фаз на джозефсоновском переходе J . Формула (23.7) легко преобразуется к виду

$$\varphi = 2\pi\Phi/\Phi_0, \quad (23.8)$$

где Φ — полный магнитный поток, охваченный кольцом одноконтактного сквида.

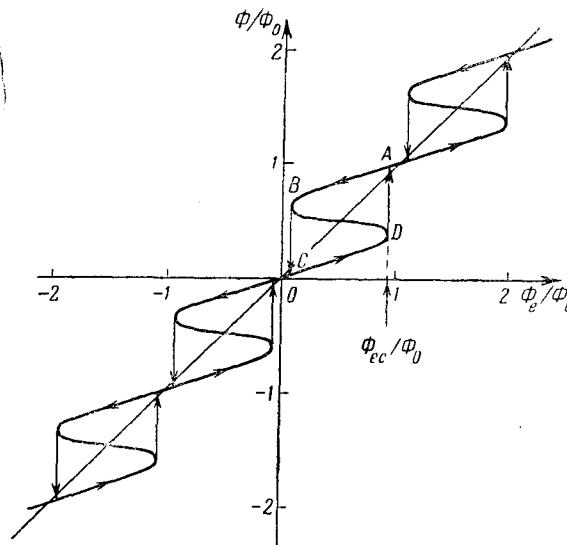


Рис. 23.5. Зависимость полного магнитного потока Φ в кольце одноконтактного интерферометра от внешнего потока Φ_e , введенного в это кольцо.

Но полный поток Φ отличается от внешнего потока Φ_e , созданного катушкой в кольце, на величину, которая создается экранирующим током I_s , текущим по кольцу:

$$\Phi = \Phi_e - LI_s, \quad (23.9)$$

где L — индуктивность кольца. Поскольку этот экранирующий ток проходит по кольцу и по переходу, он связан с разностью фаз волновой функции сверхпроводящих электронов на переходе φ известным соотношением (20.1), которое вместе с (23.8) и (23.9) дает

$$\Phi_e = \Phi + LI_s \sin(2\pi\Phi/\Phi_0). \quad (23.10)$$

Эту формулу можно рассматривать как неявное выражение для зависимости полного потока Φ от внешнего потока Φ_e . Графически эта зависимость изображена на рис. 23.5.

Обсудим теперь физическую сторону дела. Начинаем увеличивать внешний поток Φ_e (т. е. ток в катушке, которая вставлена в кольцо сквида). Немедленно в кольце возникает экранирующий ток I_s , который создает свой собственный поток, частично компенсирующий внешний поток Φ_e . Поэтому полный, результирующий поток Φ будет меньше Φ_e . Почему компенсация только частичная? Если бы кольцо было сплошным, без слабой связи — компенсация была бы полной и Φ равнялось бы нулю. Это можно представить себе и немного по-другому.

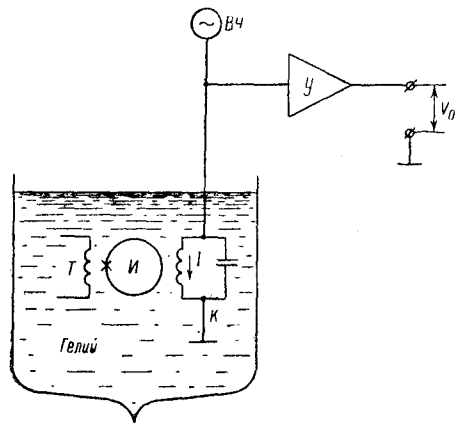


Рис. 23.6. Принципиальная блок-схема ВЧ сквида. ВЧ — высокочастотный генератор тока (с большим внутренним сопротивлением), У — усилитель высокой частоты, И — кольцо интерферометра с джозефсоновским переходом, Т — вторичная катушка трансформатора потока, К — ВЧ резонансный контур.

Для задания внешнего потока Φ_e совсем не обязательно вводить катушку с током внутрь кольца интерферометра (это просто практически удобнее). Можно, наоборот, считать, что кольцо внесено во внешнее однородное поле, и тогда Φ_e — это просто произведение магнитной индукции этого внешнего поля на площадь кольца (предполагается, конечно, что плоскость кольца перпендикулярна внешнему магнитному полю). Теперь понятно, что если кольцо сплошное, без слабой связи, то полный поток Φ в нем равен нулю, а наличие слабой связи приводит к появлению такого места в кольце, через которое внешнее магнитное поле частично проникает внутрь кольца. Экранировка оказывается неполной.

При дальнейшем увеличении внешнего потока Φ_e увеличивается и экранирующий ток. Он достигает критического значения при внешнем потоке Φ_{ec} (рис. 23.5). В этот момент (точка D на рис. 23.5) система становится неустойчивой и скачком переходит в следующее квантовое состояние (точка A на рис. 23.5). При этом полный маг-

нитный поток кольца оказывается больше внешнего потока, и экранирующий ток изменяет свое направление (т. е. становится намагничивающим). Однако мы видим, что при дальнейшем увеличении Φ_e , когда внешний поток станет равен кванту потока Φ_0 , полный поток тоже станет равен кванту потока и экранирующий ток исчезнет — ситуация вполне аналогичная случаю, когда $\Phi_e = 0$ (см. рис. 23.5). При дальнейшем увеличении Φ_e с периодичностью Φ_0 все процессы будут повторяться. При уменьшении Φ_e скачки будут происходить из точки B и аналогичных ей точек. Таким образом, циклическое изменение

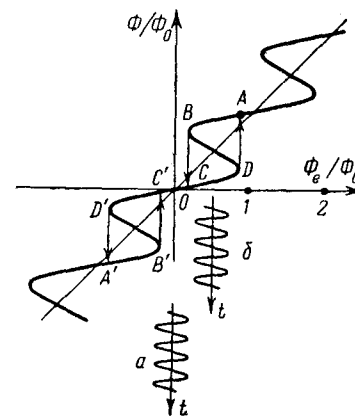


Рис. 23.7. Изменение внешнего потока со временем: а) при нулевом потоке, созданном входной катушкой ($\Phi_T = 0$), б) при $\Phi_T = \Phi_0/2$.

внешнего потока Φ_e может сопровождаться гистерезисным циклом $CDA BC$. Площадь этой гистерезисной петли пропорциональна выделившейся в контакте энергии.

Того, что мы знаем теперь о свойствах сверхпроводящего кольца, замкнутого на джозефсоновский переход, достаточно, чтобы понять, как работает высокочастотный (ВЧ) сквид. Его принципиальная блок-схема изображена на рис. 23.6. ВЧ генератор с очень большим внутренним сопротивлением (генератор тока) питает ток на частоте ν резонансный контур К. (Очень употребительны устройства, в которых $\nu \approx 10 \div 20$ МГц. Однако существуют и значительно более высокочастотные сквиды с рабочей частотой в несколько ГГц.) Катушка этого контура индуктивно связана с кольцом интерферометра И. Усилитель У усиливает ВЧ напряжение, которое падает на контуре К. Это усиленное напряжение V_0 и есть выход прибора. Вход прибора — это катушка Т, тоже индуктивно связанная с кольцом И.

Выясним прежде всего, как зависит выход V_0 от величины тока I через индуктивность контура K . Пусть ток входной катушки T равен нулю. Тогда внешний поток Φ_e создается только катушкой контура K и колеблется с частотой ν . Это показано на рис. 23.7, на графике a . Синусоидальное изменение потока Φ_e вызовет соответствующее изменение полного потока Φ (см. рис. 23.7), что приведет в конечном счете к появлению некоторого ВЧ напряжения V_0 на выходе схемы. Увеличение тока накачки I пропорционально увеличит амплитуду Φ_e и соответственно Φ и V_0 . Таким образом, мы имеем линейную зависимость V_0

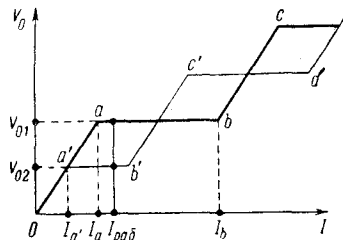


Рис. 23.8. ВЧ вольт-амперная характеристика сквида, жирная линия — входной поток $\Phi_T = 0$ (кривая $Oabc \dots$), тонкая линия — $\Phi_T = \Phi_0/2$ (кривая $Oa'b'c'd' \dots$).

от I (начальный участок Oa ВЧ вольт-амперной характеристики, рис. 23.8). Но так будет продолжаться только до тех пор, пока ток контура I не достигнет такой величины, что амплитуда Φ_e станет равной критической величине (см. рис. 23.5). В этот момент произойдет скачок полного потока, на графике зависимости Φ от Φ_e изображающая точка опишет петлю гистерезиса, выделится тепло, пропорциональное площади этой петли, на это потребуется много энергии, которая будет забрана из контура K . Амплитуда тока I резко упадет и в течение сравнительно долгого времени (много периодов ВЧ колебаний) эта амплитуда будет «дорастать» до своей прежней величины. Увеличение амплитуды тока накачки от ВЧ генератора теперь не может привести к увеличению выходного напряжения V_0 , так как все описанные только что процессы будут повторяться. Разница будет лишь в том, что восстановление амплитуды тока контура I будет происходить быстрее, за меньшее число ВЧ периодов. Это значит, что мы вышли на горизонтальный участок ab вольт-амперной характеристики (рис. 23.8). Наконец, при некотором токе ВЧ накачки ток контура I достигнет такой величины (I_b), когда за время одного периода ВЧ генератор восстанавливает энергию контура K , которую этот контур отдал кольцу интерферометра для

двух гистерезисных циклов $DABC$ и $D'A'B'C'$. Только теперь дальнейшее увеличение амплитуды тока контура I (соответственно — внешнего потока Φ_e) приведет к увеличению полного потока Φ и выходного напряжения V_0 . Это увеличение будет продолжаться до тех пор, пока амплитуда Φ_e не достигнет второго критического значения. Как только это произойдет, вновь возникнут гистерезисные потери и весь описанный выше процесс повторится. На вольт-амперной характеристике появится второе плато.

Теперь нам надо рассмотреть случай, когда входная катушка T обтекается током и создает постоянный магнитный поток, равный $\Phi_T = \Phi_0/2$. В этом случае зависимость V_0 от времени представлена графиком b на

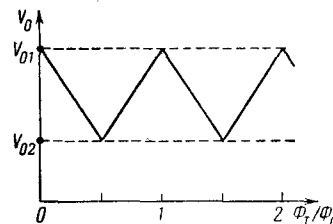


Рис. 23.9. Зависимость выходного ВЧ напряжения V_0 от постоянного потока Φ_T , созданного входной катушкой T .

рис. 23.7. Ясно, что критическое значение $\Phi_{e,c}$ будет теперь достигнуто при значительно меньшем токе контура $I = I_a$, по сравнению со случаем $\Phi_T = 0$ (в том случае $\Phi_{e,c}$ достигалось при $I = I_a$, рис. 23.8). Кроме того, теперь и длина первого плато должна быть в два раза короче, так как теперь генератор должен восстановить энергию контура, ушедшую только на один гистерезисный цикл. Однако последующие плато на вольт-амперной характеристике вновь будут длинные, так как вновь нужно будет восстанавливать энергию пары гистерезисных циклов.

Переходим теперь к завершающему этапу анализа работы ВЧ сквида. Дадим прибору некоторый ВЧ ток накачки, так чтобы рабочая точка по току соответствовала величине $I_{раб}$ (см. рис. 23.8). Если $\Phi_T = 0$, на выходе будет напряжение V_{01} , если $\Phi_T = \Phi_0/2$ — выходное напряжение будет V_{02} . А как будет меняться напряжение V_0 , если мы будем менять входной поток Φ_T от 0 до $\Phi_0/2$? Нетрудно сообразить, что мы будем иметь плавное уменьшение V_0 от V_{01} до V_{02} . Но если $\Phi_T = \Phi_0$, то, согласно рис. 23.7, должна возникнуть ситуация, полностью ана-

логичная случаю $\Phi_T=0$, и выход будет снова равен V_{01} . В результате мы приходим к так называемой «треугольной» зависимости выходного напряжения V_0 от входного потока Φ_T (рис. 23.9). Из этого графика следует, что наша схема чувствует изменения измеряемого потока Φ_T

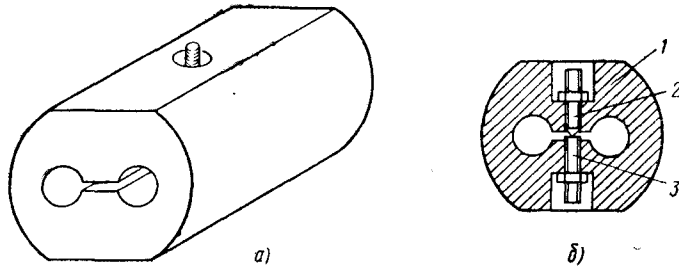


Рис. 23.10. Одноконтактный сквид конструкции Циммермана а) общий вид, б) разрез по центральной плоскости: 1 — ниобиевый корпус, 2 — заостренный ниобиевый вмят, 3 — ниобиевый винт.

с чувствительностью много лучшей одного кванта потока. Теоретический анализ чувствительности современных ВЧ сквидов показал, что возможно создание приборов с чувствительностью порядка $10^{-5} \Phi_0$ при времени измерения не меньше 1 секунды.

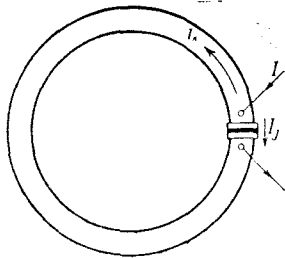


Рис. 23.11. К задаче 23.2. Внешний источник тока задает полный ток I , часть которого I_k идет по кольцу, а часть I_J — через джозефсоновский переход.

Наиболее практически удобным (и наиболее распространенным) оказался одноконтактный сквид конструкции Циммермана (рис. 23.10). Джозефсоновский переход в нем выполнен в виде точечного прижимного контакта. Приемная катушка T и катушка индуктивности контура K (см. рис. 23.6) вводятся в два отверстия сквида.

Задача 23.1. Индуктивность кольца одноконтактного интерферометра равна $2 \cdot 10^{-9}$ Гн. До какой величины нужно уменьшить критический ток перехода, чтобы зависимость Φ от Φ_0 стала безгистерезисной?

Ответ. Если критический ток перехода меньше величины $\Phi_0/(2\pi L) = 0,165$ мкА, зависимость Φ от Φ_0 будет безгистерезисной.

Задача 23.2. Джозефсоновский SNS-переход с критическим током $I_c = 1$ мкА замыкает сверхпроводящее кольцо с индуктивностью $L = 10^{-9}$ Гн. Внешний источник задает полный ток, часть которого ($I_k = 0,4$ мкА) течет по кольцу, а часть (I_J) — через джозефсоновский переход (рис. 23.11). Найти полный ток I .

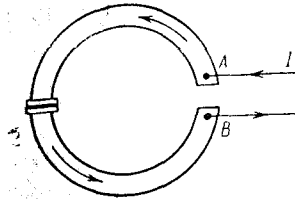


Рис. 23.12. К задаче 23.3.

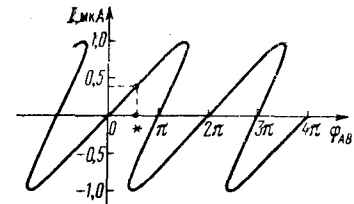


Рис. 23.13. Ответ к задаче 23.3. Зависимость тока от разности фаз точек А и В. Звездочкой отмечена искомая разность фаз $\varphi_{AB} = 1,60$ рад.

Решение. Разность фаз на переходе φ определяет величину тока по кольцу: $\varphi = 2\pi LI_k/\Phi_0$, а ток через переход равен $I_J = I_c \sin \varphi$. Полный ток $I = 1,34$ мкА.

Задача 23.3. Сверхпроводящее кольцо, индуктивность которого $L = 10^{-9}$ Гн, замкнуто на джозефсоновский SNS-переход с критическим током $I_c = 1$ мкА. На противоположной стороне кольца (см. рис. 23.12) сделан разрез, к которому подключен источник тока, создающий в кольце ток $I = 0,4$ мкА. Чему равна разность фаз волновой функции φ_{AB} между точками А и В? Построить график зависимости тока от разности фаз φ_{AB} .

Ответ: $\varphi_{AB} = 1,60$ рад, см. рис. 23.13.

§ 24. Применения слабой сверхпроводимости

Рассмотренное в этой главе удивительно красивое физическое явление — слабая сверхпроводимость — нашло множество способов практического использования. Рассмотрим некоторые из них.

Мы уже знаем, что если через джозефсоновский переход пропускать ток, больший критического, напряжение на переходе будет иметь переменную составляющую. Частота этой составляющей будет определяться соотношением (21.8). Нетрудно сообразить, что если теперь переход поместить во внешнее высокочастотное поле, то, если частота этого поля совпадает с частотой джозефсоновской генерации, должен возникнуть какой-то резонанс. И действительно, в этом случае вольтамперная характе-

ристика для усредненных значений тока и напряжения будет иметь вид ступенчатой кривой (рис. 24.1), а расстояния между ступеньками в точности равны $\hbar \omega / 2e$. Поскольку измерение частоты может быть произведено с очень высокой точностью, а величины \hbar и e являются мировыми постоянными, расстояние между ступеньками тока на вольтамперной характеристике может быть очень точно определено. Это и есть принцип создания стандарта единицы электрического напряжения — вольты.

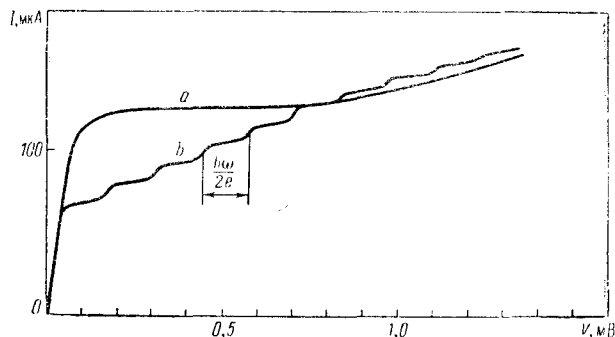


Рис. 24.1. Вольтамперная характеристика джозефсоновского перехода: а) без внешнего ВЧ электромагнитного поля, б) ВЧ поле включено. Начальный участок вольтамперной характеристики не совпадает с осью ординат, потому что на самописец подавалось напряжение с джозефсоновского перехода и включенного с ним последовательно участка нормальной пленки [38].

Сверхпроводящие квантовые интерферометры (сквиды) используются прежде всего как магнетометры. Им доступны для регистрации изменения магнитного поля порядка 10^{-10} Гс при ширине полосы пропускания устройства, равной 1 Гц. Напомним, что уровень магнитного поля Земли составляет 0,5 Гс. Ясно, что использование столь чувствительных приборов открывает совершенно новые возможности в разных областях науки: геологии, геофизике, биофизике и др. Так, например, в последние годы начались исследования магнитных полей сердца человека — так называемых магнитных кардиограмм. Оказалось, что они несут большую информацию о сердечной патологии, чем привычные электрокардиограммы. По-видимому, магнитные кардиограммы в ближайшие годы начнут использоваться для более точной диагностики сердечной патологии.

Использование сквида в качестве нуля-прибора в обычной мостиковой схеме позволяет создать вольтметр с чувствительностью около 10^{-15} В. Такие приборы уже используются в физических лабораториях. Уже сейчас джозефсоновские элементы используются в различного рода СВЧ приборах для приема и преобразования электромагнитного излучения в микроволновом диапазоне. В частности, существует опыт использования джозефсоновского перехода в качестве чувствительного элемента в радиотелескопе.

Укажем, наконец, на возможность использования джозефсоновских переходов в качестве элементов памяти и логических элементов в электронных вычислительных устройствах. Их применение в ЭВМ позволит увеличить быстродействие машин и уменьшит затрачиваемую мощность.

Несомненно, что практическое использование слабой сверхпроводимости будет в ближайшие годы расширяться и вряд ли сейчас можно предсказать, какие удивительные результаты от этого последуют.

§ 25. Введение

Впервые термин «сверхпроводник второго рода» был введен А. А. Абрикосовым [39] в его классической работе (1957), в которой на базе теории ГЛ была дана последовательная феноменологическая теория сверхпроводников второго рода и объяснены их магнитные свойства. Развитие физики сверхпроводников в последующие годы блестяще подтвердило теоретические предсказания.

Здесь мы сталкиваемся со случаем, когда развитие очень мощного направления в физике сверхпроводников было предопределено теоретической работой. Больше того, сначала эта работа была встречена с некоторым недоверием, настолько необычны были ее предсказания. Только через несколько лет, когда оказалось, что сложное поведение в магнитном поле сверхпроводящих сплавов и химических соединений можно объяснить с единой точки зрения, когда получили объяснение огромные критические поля некоторых сплавов и соединений, теория Абрикосова получила всеобщее признание.

Мы уже знаем, что у сверхпроводников второго рода энергия границы раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами $\sigma_{ns} < 0$. Это значит, что при определенных условиях им энергетически выгодно расслоиться в магнитном поле на области нормальной и сверхпроводящей фазы.

Действительно, кривая намагничивания длинного цилиндра из сверхпроводника второго рода в параллельном поле имеет вид, изображенный на рис. 25.1. Пока внешнее поле $H_0 < H_{c1}$, среднее поле внутри образца $B=0$. Однако при $H_{c1} < H_0 < H_{c2}$ внутри сверхпроводника появляется магнитное поле B , но оно меньше поля H_0 , и сверхпроводимость все еще существует. При поле $H_0 = H_{c2}$ среднее поле B становится равным H_0 и сверхпроводимость в объеме пропадает. Таким образом, у сверхпроводников второго рода отсутствует эффект Мейснера—Оксенфельда.

Проникновение магнитного поля в сверхпроводник второго рода происходит весьма своеобразно — в виде квантованных вихревых нитей. Каждая такая нить (или вихрь) имеет нормальную сердцевину, которая представляет собой длинный тонкий нормальный цилиндр, вытянутый вдоль направления внешнего магнитного поля. Параметр порядка ψ в нем равен нулю. Радиус этого цилиндра — порядка длины когерентности ξ . Вокруг этого нормального цилиндра течет незатухающий сверхпроводящий ток (сверхток), ориентированный так, чтобы создаваемое им магнитное поле было направлено вдоль нормальной сердцевины и совпадало по направлению с внешним магнитным полем. Вихревой ток захватывает область радиуса порядка λ — глубины проникновения. Это может быть область, существенно превышающая размер ξ , так как у сверхпроводников второго рода может быть $\lambda \gg \xi$.

Один вихрь несет один квант магнитного потока. Проникновение вихрей в сверхпроводник становится энергетически выгодным при $H_0 > H_{c1}$. При этом вихри,

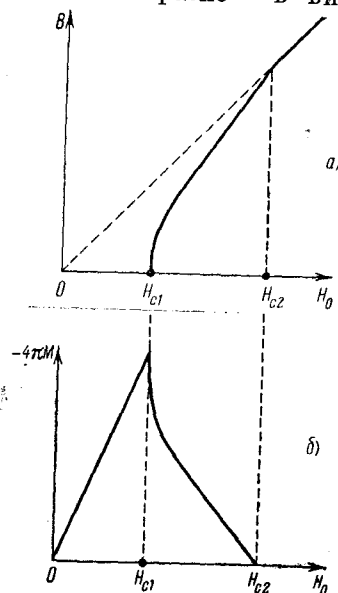
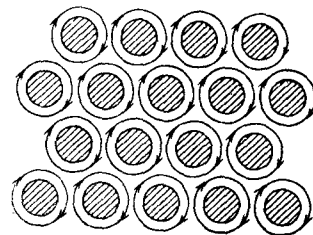


Рис. 25.1. Кривые намагничивания сверхпроводника второго рода: а) зависимость магнитной индукции B от внешнего поля H_0 , б) зависимость плотности магнитного момента M от H_0 .

Рис. 25.2. Смешанное состояние сверхпроводника второго рода. Сверхпроводящие вихри образуют правильную треугольную решетку. Сердцевины вихрей нормальны (заштрихованы).



проникнув в сверхпроводник, располагаются друг от друга на расстоянии $\sim \lambda$, образуя в поперечном сечении правильную треугольную решетку (рис. 25.2).

Возникает смешанное состояние, т. е. состояние, которое можно охарактеризовать частичным проникновением магнитного поля в образец. При этом в образце существуют вихревые нити. Это состояние наблюдается в интервале полей от H_{c1} (первое критическое поле) до H_{c2} (второе критическое поле).

Возникнув при поле H_{c1} вихревая решетка продолжает существовать и в более сильных полях H_0 . При этом ее период уменьшается, плотность вихрей увеличивается. Наконец, при поле H_{c2} их плотность становится так велика, что расстояние между ближайшими вихрями, т. е. период решетки, становится порядка ξ . Это значит, что

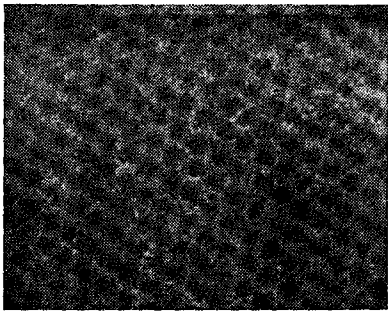


Рис. 25.3. Картина смешанного состояния ниобия, полученная с помощью электронного микроскопа [40].

вихри соприкасаются своими нормальными сердцевинами и параметр порядка ψ обращается в нуль по всему объему образца. Происходит фазовый переход второго рода в нормальное состояние.

Существование смешанного состояния в сверхпроводниках второго рода было надежно подтверждено экспериментально. Кроме различных косвенных подтверждений существуют блестящие прямые эксперименты, поставленные немецкими физиками Эссманом и Тройблом [40]. Они нанесли тонкую органическую пленку на торцевую поверхность сверхпроводящего цилиндра из сверхпроводника второго рода и перевели его в смешанное состояние, наложив магнитное поле. Затем они напылили на торцевую поверхность тонкий слой ферромагнитного порошка. Частицы порошка оседали на поверхность более густо в местах выхода магнитных силовых линий, т. е. в центрах вихрей. Отделив затем органическую пленку от сверхпроводника и поместив ее в электронный микроскоп, они получили возможность любоваться картиной смешанного состояния в сверхпроводнике второго рода (рис. 25.3).

§ 26. Поле одиночного вихря

Переходим к систематическому изучению смешанного состояния. Начнем с наиболее простой задачи — рассмотрим одиночный вихрь.

Итак, одиночный вихрь, помещенный в безграничный сверхпроводник, представляет собой нормальную сердцевину радиуса $\sim \xi$ и область вихревых токов, простирающуюся на расстояние $\sim \lambda$.

Пусть постоянная теории ГЛ $\kappa \gg 1$. Значит, $\lambda \gg \xi$. На расстоянии $r \gg \xi$ имеем $|\psi|^2 = 1$. Будем заниматься именно этой частью вихря.

Уравнение ГЛ для вектора-потенциала (14.18) можно (учитывая, что $|\psi|^2 = 1$) записать в виде

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right). \quad (26.1)$$

Учитывая, что $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{H}$, получим из (26.1)

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right). \quad (26.2)$$

Взяв rot от обеих частей этого уравнения, получим

$$\mathbf{H} + \lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{H} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \text{rot } \nabla \theta. \quad (26.3)$$

В любой точке вихря, кроме его центра, $\text{rot } \nabla \theta = 0$, так как ротор от градиента любой функции равен нулю. Но в центре вихря находится особая точка. Там $|\nabla \theta| \rightarrow \infty$. Чтобы понять, что такое $\text{rot } \nabla \theta$ в центре вихря, возьмем интеграл от этого выражения по поверхности круга некоторого небольшого радиуса с центром в центре вихря:

$$\oint_{\odot} \text{rot } \nabla \theta \, dS.$$

По теореме Стокса

$$\oint_{\odot} \text{rot } \nabla \theta \, dS = \oint \nabla \theta \, dl,$$

где контурный интеграл берется по контуру нашего круга. Поскольку при обходе вокруг центра вихря фаза изменяется на 2π (каждый вихрь несет один квант магнитного потока), имеем равенство

$$\oint_{\odot} \text{rot } \nabla \theta \, dS = 2\pi. \quad (26.4)$$

Итак, $\text{rot } \nabla\theta$ — это такая функция, которая всюду кроме центра вихря равна нулю. В центре вихря она равна бесконечности, но ее интеграл, согласно (26.4), равен 2π . Это полностью аналогично поведению δ -функции, и мы можем записать следующее равенство:

$$\text{rot } \nabla\theta = 2\pi\delta(\mathbf{r}) \mathbf{e}_v,$$

где \mathbf{e}_v — единичный вектор, направленный вдоль вихря. В результате вместо (26.3) мы имеем следующее уравнение:

$$\mathbf{H} + \lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{H} = \Phi_0 \delta(\mathbf{r}) \mathbf{e}_v. \quad (26.5)$$

Граничное условие для этого уравнения: $H(\infty) = 0$. Решение этого уравнения:

$$H = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0(r/\lambda), \quad (26.6)$$

где K_0 — функция Макдональда, или функция Ганкеля от мнимого аргумента.

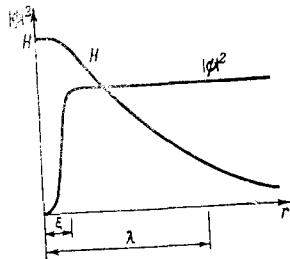


Рис. 26.1. Одиночный вихрь в бесконечном сверхпроводнике. Распределение параметра порядка и создаваемого вихрем магнитного поля.

Напомним асимптотическое поведение этой функции:

$$K_0(z) \sim \begin{cases} \ln(1/z) & \text{при } z \ll 1, \\ e^{-z}/z^{1/2} & \text{при } z \gg 1. \end{cases} \quad (26.7)$$

Таким образом, функция K_0 логарифмически расходуется при малых значениях аргумента и экспоненциально стремится к нулю при больших. Из формул (26.6) и (26.7) следует, что в центре вихря магнитное поле стремится к бесконечности. В действительности, однако, это не так, поскольку эти формулы уже не справедливы вблизи нормальной сердцевины вихря (радиуса $\sim \xi$). Поэтому поле вихря в его центре можно получить с логарифмической

точностью, обрезав логарифмическую расходимость формулы (26.6) на радиусе $r = \xi$:

$$H(0) \approx \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln \kappa. \quad (26.8)$$

Более точно, учитывая изменение $\psi(r)$ в области сердцевины вихря, величину $H(0)$ можно получить, численно проинтегрировав уравнения ГЛ [39]:

$$H(0) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} (\ln \kappa - 0,18). \quad (26.9)$$

Поправка мало существенна, так как вообще весь расчет ведется в предположении, что $\kappa \gg 1$.

Графически пространственное изменение поля одиночного вихря изображено на рис. 26.1.

§ 27. Первое критическое поле

Найдем первое критическое поле H_{c1} , т. е. то внешнее поле, при котором впервые становится энергетически выгодным существование вихря внутри сверхпроводника второго рода.

Для этого надо сперва найти свободную энергию вихря, точнее — свободную энергию сверхпроводника с вихрем ϵ , отсчитанную от свободной энергии сверхпроводника без вихря. Будет рассматриваться случай $\kappa \gg 1$, т. е. $\lambda \gg \xi$. Это — типично лондоновский случай, когда поправки за счет $\nabla\psi$ не существенны и поэтому можно воспользоваться лондоновским выражением для свободной энергии (5.8):

$$\epsilon = \frac{1}{8\pi} \int [H^2 + \lambda^2 (\text{rot } \mathbf{H})^2] dV, \quad (27.1)$$

где интеграл берется по пространству между двумя бесконечными параллельными плоскостями, перпендикулярными вихревой нити и отстоящими на единичном расстоянии друг от друга. Выражение (27.1) — это просто сумма магнитной и кинетической энергии сверхпроводящих электронов вихря на единицу его длины. Воспользовавшись формулой

$$(\text{rot } \mathbf{H})^2 = \mathbf{H} \text{ rot rot } \mathbf{H} - \text{div} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}],$$

имеем

$$\epsilon = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H}(\mathbf{H} + \lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{H}) dV - \lambda^2 \int \text{div} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}] dV.$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса, преобразуем второй интеграл в поверхностный:

$$\int \text{div} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}] dV = \oint [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}] d\mathbf{S},$$

где поверхностный интеграл берется по бесконечно удаленной поверхности, и по плоскостям $z=0$ и $z=1$ (предполагается, что вихрь направлен вдоль оси z). Поскольку вектор \mathbf{H} перпендикулярен плоскостям $z=0$ и $z=1$, то вектор $[\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}]$ лежит в плоскостях $z=0$ и $z=1$, а вектор $d\mathbf{S}$ им перпендикулярен, поэтому подынтегральное выражение на этих плоскостях равно нулю. С другой стороны, $H \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, поэтому подынтегральное выражение равно нулю и на бесконечно удаленной поверхности. Поэтому

$$\int \text{div} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}] dV = 0$$

и

$$\epsilon = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H}(\mathbf{H} + \lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{H}) dV.$$

Учитывая, что \mathbf{H} должно удовлетворять уравнению (26.5), имеем

$$\epsilon = \frac{\Phi_0}{8\pi} H(0). \quad (27.2)$$

Подставив сюда (26.8), получим

$$\epsilon = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln \kappa. \quad (27.3)$$

При выводе этой формулы мы не учли дополнительный малый вклад в энергию вихря, который возникает за счет того, что сердцевина вихря нормальная. Действительно, плотность свободной энергии сердцевин больше плотности энергии окружающей ее среды на величину $F_n - F_{s0} = H_{cm}^2/8\pi$, т. е. на величину энергии конденсации. Поэтому дополнительная, неучтенная в формуле (27.3) энергия равна $(H_{cm}^2/8\pi) \pi \xi^2$, если радиус нормальной сердцевин

вихря принять равным ξ . Используя формулу (15.9), нетрудно показать, что эта энергия равна

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ll \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln \kappa.$$

Более точный учет вклада от энергии конденсации нормальной сердцевин дает следующую окончательную формулу для энергии вихревой нити:

$$\epsilon = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 (\ln \kappa + 0,08). \quad (27.3')$$

Итак, из последней формулы следует, что энергия одиночного вихря положительна, т. е. без внешнего поля вихрю энергетически невыгодно оставаться внутри сверхпроводника. Следовательно, если на массивный сверхпроводник второго рода наложить слабое магнитное поле, вихри еще не образуются — невыгодно. Будет обычное мейснеровское состояние, как и в сверхпроводнике первого рода. Найдем, при каком же поле станет впервые выгодным образование вихрей в сверхпроводнике второго рода.

Мы уже знаем, что для сверхпроводника в заданном внешнем магнитном поле в состоянии равновесия минимальной будет гиббсовская свободная энергия \mathcal{G} , которая для единицы длины вихря будет равна

$$\mathcal{G} = \epsilon - \int \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}_0}{4\pi} dV, \quad (27.4)$$

где \mathbf{H}_0 — внешнее магнитное поле, а свободная энергия единицы длины вихря равна ϵ .

Действительно, согласно (3.15), плотность гиббсовской свободной энергии равна

$$G = F - \mathbf{B}\mathbf{H}_0/4\pi,$$

где F — плотность свободной энергии. Поскольку \mathbf{H}_0 — это внешнее магнитное поле, его можно вынести за знак интеграла в (27.4). Тогда, в силу того, что вихрь несет один квант магнитного потока Φ_0 , имеем

$$\mathcal{G} = \epsilon - \Phi_0 H_0/4\pi. \quad (27.5)$$

Из этой формулы ясно видно, что для достаточно слабого внешнего поля H_0 имеем $\mathcal{G} > 0$ и образование вихря энергетически невыгодно. Но существует такое поле H_{c1} ,

начиная с которого \mathcal{F} становится отрицательным, т. е. вихрь становится энергетически выгодным образованием. Из (27.5) следует, что

$$H_{c1} = 4\pi\epsilon/\Phi_0. \quad (27.6)$$

Воспользовавшись формулой (27.3'), получим первое критическое поле сверхпроводника второго рода:

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} (\ln \kappa + 0,08). \quad (27.7)$$

Сравнивая формулы (27.7) и (26.8), видим, что первое критическое поле примерно в 2 раза меньше поля в центре одиночного вихря.

Подчеркнем еще раз, что эти оценки справедливы для сверхпроводников с $\kappa \gg 1$ и имеют логарифмическую точность.

Поле H_{c1} — сравнительно слабое поле. Действительно, пусть $\kappa \sim 100$, $H_{cm} \sim 10^3$ Э, тогда $H_{c1} \sim 30$ Э.

§ 28. Взаимодействие вихрей

В предыдущем параграфе были рассмотрены свойства одиночного вихря. Но в смешанном состоянии их много и они сильно друг с другом взаимодействуют. Наша задача — понять, как они взаимодействуют.

Для этого рассмотрим пару параллельных вихрей одного направления в безграничном сверхпроводнике. Пусть, как и раньше, $\kappa \gg 1$. Пока расстояние между ними больше λ , они не «чувствуют» друг друга. Но вот расстояние сократилось до величины меньшей λ . Тогда сердцевина первого вихря оказывается в области сверхтоков второго вихря и наоборот. Эта ситуация изображена на рис. 28.1. Из этого рисунка видно, что скорости сверхтекучей компоненты электронной жидкости справа от первого вихря и слева от второго складываются, а между вихрями — вычитаются. Это значит, что в области, непосредственно примыкающей к сердцевине первого вихря (справа от нее), давление по закону Бернулли меньше, чем слева от сердцевины. Следовательно, на сердцевину первого вихря действует разность бернуллиевских давлений слева направо. Проведя аналогичное рассмотрение для второго вихря, увидим, что одноименные параллельные вихри отталкиваются. При этом сила взаимодействия оказывается приложенной только к нормальной сердцевине.

Приведем теперь расчет силы взаимодействия двух вихрей. Пусть координаты сердцевины вихрей 1 и 2 будут соответственно \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Согласно (5.8) энергия системы двух вихрей в сверхпроводнике, отсчитанная от энергии этого же сверхпроводника без вихрей, равна

$$\mathcal{F} = \frac{1}{8\pi} \int [H^2 + \lambda^2 (\text{rot } \mathbf{H})^2] dV. \quad (28.1)$$

Здесь \mathbf{H} — полное магнитное поле, созданное системой двух вихрей. Это поле должно удовлетворять уравнению,

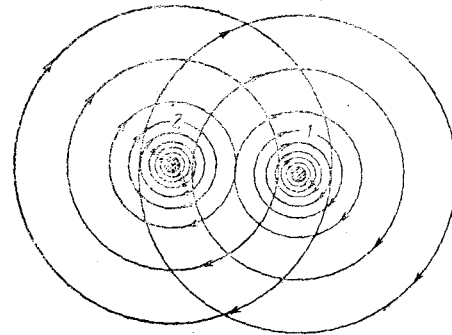


Рис. 28.1. Взаимодействие параллельных одноименных вихрей.

которое для системы двух вихрей (по аналогии с уравнением (26.5)), будет

$$\mathbf{H} + \lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{H} = \Phi_0 [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)] \mathbf{e}_z.$$

Проведя в точности все преобразования предыдущего параграфа, которые были проделаны при выводе энергии одиночного вихря, получим из (28.1) следующее выражение:

$$\mathcal{F} = \frac{\Phi_0}{8\pi} (H(\mathbf{r}_1) + H(\mathbf{r}_2)). \quad (28.2)$$

Здесь $H(\mathbf{r}_1)$ — это поле в центре первого вихря. Оно состоит из поля, созданного в этом центре самим первым вихрем и из поля $H_{12}(x)$, созданного там вторым вихрем, действующим от первого на расстоянии $x = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. То же можно сказать и о поле $H(\mathbf{r}_2)$.

начиная с которого \mathcal{E} становится отрицательным, т. е. вихрь становится энергетически выгодным образованием. Из (27.5) следует, что

$$H_{c1} = 4\pi\epsilon/\Phi_0. \quad (27.6)$$

Воспользовавшись формулой (27.3'), получим первое критическое поле сверхпроводника второго рода:

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} (\ln x + 0,08). \quad (27.7)$$

Сравнивая формулы (27.7) и (26.8), видим, что первое критическое поле примерно в 2 раза меньше поля в центре одиночного вихря.

Подчеркнем еще раз, что эти оценки справедливы для сверхпроводников с $x \gg 1$ и имеют логарифмическую точность.

Поле H_{c1} — сравнительно слабое поле. Действительно, пусть $x \sim 100$, $H_{cm} \sim 10^3$ Э, тогда $H_{c1} \sim 30$ Э.

§ 28. Взаимодействие вихрей

В предыдущем параграфе были рассмотрены свойства одиночного вихря. Но в смешанном состоянии их много и они сильно друг с другом взаимодействуют. Наша задача — понять, как они взаимодействуют.

Для этого рассмотрим пару параллельных вихрей одного направления в безграничном сверхпроводнике. Пусть, как и раньше, $x \gg 1$. Пока расстояние между ними больше λ , они не «чувствуют» друг друга. Но вот расстояние сократилось до величины меньшей λ . Тогда сердцевина первого вихря оказывается в области сверхтоков другого вихря и наоборот. Эта ситуация изображена на рис. 28.1. Из этого рисунка видно, что скорости сверхтекучей компоненты электронной жидкости справа от первого вихря и слева от второго складываются, а между вихрями — вычитаются. Это значит, что в области, непосредственно примыкающей к сердцевине первого вихря (справа от нее), давление по закону Бернулли меньше, чем слева от сердцевины. Следовательно, на сердцевину первого вихря действует разность бернуллиевских давлений слева направо. Проведя аналогичное рассмотрение для второго вихря, увидим, что одноименные параллельные вихри отталкиваются. При этом сила взаимодействия оказывается приложенной только к нормальной сердцевине.

Приведем теперь расчет силы взаимодействия двух вихрей. Пусть координаты сердцевины вихрей 1 и 2 будут соответственно \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Согласно (5.8) энергия системы двух вихрей в сверхпроводнике, отсчитанная от энергии этого же сверхпроводника без вихрей, равна

$$\mathcal{F} = \frac{1}{8\pi} \int [H^2 + \lambda^2 (\text{rot } \mathbf{H})^2] dV. \quad (28.1)$$

Здесь \mathbf{H} — полное магнитное поле, созданное системой двух вихрей. Это поле должно удовлетворять уравнению,

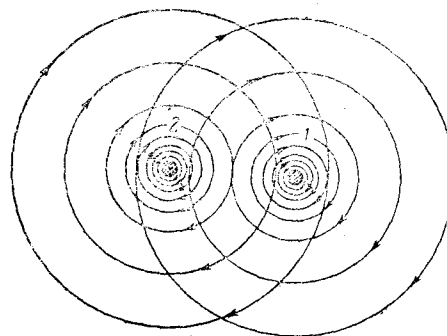


Рис. 28.1. Взаимодействие параллельных одноименных вихрей.

которое для системы двух вихрей (по аналогии с уравнением (26.5)), будет

$$\mathbf{H} + \lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{H} = \Phi_0 [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)] \mathbf{e}_z.$$

Проведя в точности все преобразования предыдущего параграфа, которые были проделаны при выводе энергии одиночного вихря, получим из (28.1) следующее выражение:

$$\mathcal{F} = \frac{\Phi_0}{8\pi} (H(\mathbf{r}_1) + H(\mathbf{r}_2)). \quad (28.2)$$

Поле $H(\mathbf{r}_1)$ — это поле в центре первого вихря. Оно состоит из поля, созданного в этом центре самим первым вихрем и из поля $H_{12}(x)$, созданного там вторым вихрем, отстоящим от первого на расстоянии $x = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. То же можно сказать и о поле $H(\mathbf{r}_2)$.

Тогда из (28.2) следует, что

$$\mathcal{F} = 2\varepsilon + \frac{\Phi_0}{8\pi} 2H_{12}(x), \quad (28.3)$$

где ε — энергия одиночного вихря, определяемая формулой (27.3').

Смысл формулы (28.3) очевиден: первое слагаемое — энергия двух невзаимодействующих вихрей, второе слагаемое — энергия их взаимодействия. Обозначим ее через $U(x)$:

$$U(x) = \frac{\Phi_0 H_{12}(x)}{4\pi}. \quad (28.4)$$

Сила взаимодействия двух вихрей, приходящаяся на единицу их длины, очевидно, равна

$$f = -\frac{dU}{dx} = -\frac{\Phi_0}{4\pi} \frac{dH_{12}}{dx}.$$

Учитывая, что для двух параллельных вихрей, согласно уравнениям Максвелла,

$$\frac{dH_{12}}{dx} = \frac{4\pi}{c} j_{12}(x),$$

где $j_{12}(x)$ — плотность тока, наведенного первым вихрем в точке, где находится сердцевина второго вихря (или наоборот), имеем

$$|f| = \frac{1}{c} j_{12} \Phi_0. \quad (28.5)$$

Эта формула справедлива и в значительно более общем случае: если вихрь обтекается каким-то сторонним током j , то на единицу длины его сердцевины действует сила (ее часто называют «силой Лоренца»)

$$f_L = \frac{1}{c} [j\Phi_0], \quad (28.6)$$

где j — плотность стороннего тока в месте, где расположена сердцевина вихря, $\Phi_0 = e_s \Phi_0$.

Задача 28.1. Два параллельных сверхпроводящих вихря закреплены в точках a и b в безграничном сверхпроводнике на расстоянии d друг от друга (рис. 28.2). Третий вихрь того же знака

может двигаться вдоль штриховой линии, проведенной перпендикулярно отрезку ab через его середину. Найти силу, действующую на этот вихрь, когда он находится на расстоянии x от линии ab . Все расстояния между вихрями значительно меньше λ , а $x \gg 1$.

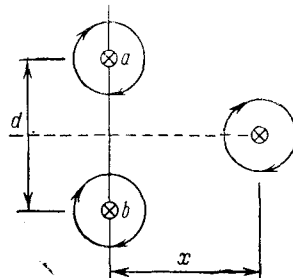


Рис. 28.2. К задаче 28.1. Два вихря закреплены на расстоянии d . Третий вихрь может двигаться вдоль штриховой линии.

Решение. Поскольку магнитное поле, созданное одним вихрем на расстоянии r ($r \ll \lambda$) от него, равно согласно (26.6) и (26.7)

$$H = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{r},$$

плотность созданного этим вихрем тока в точке на расстоянии r от центра будет

$$j = \frac{c}{4\pi} \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2 r}.$$

Используя теперь (28.6), получим окончательно, что вихрь будет отталкиваться от линии ab с силой

$$f = \frac{\Phi_0^2}{4\pi^2\lambda^2} \frac{x}{x^2 + (d/2)^2},$$

направленной вдоль штриховой линии.

§ 29. Второе критическое поле

В однородном сверхпроводнике второго рода смешанное состояние характеризуется правильной, обычно треугольной, вихревой решеткой. По мере увеличения внешнего поля период решетки уменьшается, и когда он уменьшается до величины порядка длины когерентности ξ , происходит фазовый переход второго рода из смешанного состояния в нормальное. Это происходит, когда внешнее поле достигает значения второго критического поля H_{c2} .

Не проводя точного расчета, мы можем оценить порядок величины H_{c2} на основании следующих соображений. Для двух рядом расположенных вихрей, находящихся на расстоянии ξ друг от друга, это расстояние ξ будет шири-

Тогда плотность тока будет $j = (c/4\pi) dH/dr$. Это дает

$$|j| = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \frac{cH_{cm}}{\lambda}.$$

Замечание. Из этого результата следует, что плотность тока на расстоянии ξ от центра вихря имеет порядок тока распаривания (ср. с (18.5)).

Задача 29.4. Сверхпроводящий сплав имеет $H_{c2} = 150$ кЭ, $\kappa = 96$. Найти энергию одиночного вихря. Сравнить с энергией конденсации в сердцевине вихря.

Решение. Зная H_{c2} , находим $\xi = 4,69 \cdot 10^{-7}$ см. Отсюда, зная κ , находим $\lambda = 4,50 \cdot 10^{-8}$ см. Теперь, используя (27.3), имеем $\epsilon = 6,12 \cdot 10^{-7}$ эрг/см. Сердцевина вихря нормальная, поэтому плотность ее энергии больше плотности энергии окружающей среды на величину $H_{cm}^2/8\pi$. Поэтому энергия сердцевинки равна $H_{cm}^2 \xi^2/8$, если считать радиус сердцевинки равным ξ . Эта энергия в нашей задаче равна $3,33 \cdot 10^{-8}$ эрг/см, т. е. во много раз меньше электромагнитной энергии вихря ϵ .

§ 30. Обратимый магнитный момент сверхпроводника второго рода

Найдем выражение для магнитного момента единицы объема сверхпроводника второго рода, когда он находится в смешанном состоянии и когда внешнее поле $H_0 \gg H_{c1}$. Иными словами, мы будем искать зависимость $M(H_0)$.

Эту задачу, конечно, можно было бы решать обычным способом, варьируя энергию системы и находя равновесное значение магнитного момента. Но мы применим один несколько искусственный прием, который позволит нам существенно сократить выкладки.

Пусть массивный цилиндр из сверхпроводника второго рода, образующая которого параллельна оси z , помещен в продольное магнитное поле H_0 . Пусть длина когерентности ξ зависит от координаты x и пусть (для определенности) она монотонно возрастает с увеличением x . Глубина проникновения λ от x не зависит. Это значит, что H_{c2} станет тоже зависеть от x и будет уменьшаться с увеличением x . При таких условиях плотность магнитного потока (или индукция) B тоже станет функцией x , а это значит, что по объему образца пойдет ток в направлении оси y :

$$j = \frac{c}{4\pi} \frac{dB}{dx}.$$

Но $B = H_0 + 4\pi M$, поэтому ясно, что $M = M(x)$, т. е.

$$j = c dM/dx.$$

ной сверхпроводящего промежутка между двумя нормальными сердцевинами. Грубо говоря — это тонкая пленка толщины ξ . Но в § 17 было показано, что тонкая пленка во внешнем параллельном магнитном поле совершает фазовый переход второго рода в нормальное состояние при поле $H_{c2} \sim H_{cm} \lambda/d$, где d — толщина пленки. Если же, как в нашем случае, пленка имеет толщину ξ , то можно ожидать, что переход в нормальное состояние произойдет при внешнем поле, равном $\sim H_{cm} \lambda/\xi$. Это и есть простая оценка второго критического поля:

$$H_{c2} \sim \kappa H_{cm}. \quad (29.1)$$

Точный расчет добавляет только численный коэффициент $\sqrt{2}$ [39]:

$$H_{c2} = \sqrt{2} \kappa H_{cm}. \quad (29.2)$$

Второе критическое поле может достигать значительных величин. Так, при $\kappa \sim 100$ и $H_{cm} \sim 10^3$ Э имеем $H_{c2} \sim 10^5$ Э.

Используя формулу (15.9) $\sqrt{2} H_{cm} = \Phi_0/2\pi\lambda\xi$, формулу (29.2) и выражение для $\kappa = \lambda/\xi$, легко получим

$$\Phi_0 = 2\pi\xi^2 H_{c2}. \quad (29.3)$$

Эта формула очень удобна для определения длины когерентности ξ . Действительно, формула связывает ξ с легко экспериментально измеряемой величиной — вторым критическим полем.

Задача 29.1. Второе критическое поле сверхпроводящего сплава равно 30 кЭ, а его критическое термодинамическое поле равно 1500 Э. Чему равна глубина проникновения магнитного поля у этого сплава?

$$\text{Ответ. } \lambda = \frac{1}{H_{cm}} \sqrt{\frac{\Phi_0 H_{c2}}{4\pi}} = 1,48 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

Задача 29.2. Сверхпроводящий сплав ниобий — тантал имеет $H_{c2} = 4000$ Э и $\kappa = 3$. Оценить первое критическое поле.

$$\text{Ответ. } H_{c1} = 244 \text{ Э.}$$

Задача 29.3. Найти плотность вихревого тока на расстоянии $r = \xi$ от центра одиночного вихря в сверхпроводнике с $\kappa \gg 1$.

Решение. Поскольку $\xi \ll \lambda$, поле на расстоянии $r \sim \xi$ согласно (26.6) и (15.9) равно

$$H(r) = \frac{\sqrt{2} H_{cm}}{\kappa} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right).$$

Но тогда на каждый вихрь действует сила Лоренца

$$f_L = \frac{1}{c} j \Phi_0 = \Phi_0 \frac{dM}{dx}. \quad (30.1)$$

С другой стороны, ясно, что система вихрей находится в равновесии, поэтому сила f_L должна быть уравновешена какой-то другой силой. Происхождение этой второй силы совершенно понятно: если $\xi = \xi(x)$, то и собственная энергия вихря ε тоже становится функцией x , но тогда ясно, что на вихрь будет действовать сила $-\nabla \varepsilon$, где (см. (27.3))

$$\varepsilon = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln x = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln \frac{\lambda}{\xi}. \quad (30.2)$$

Дифференцируя (30.2) и приравнявая правой части (30.1), получим условие равновесия:

$$\Phi_0 \frac{dM}{dx} = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{dx}.$$

Интегрирование этого выражения дает

$$M = \frac{\Phi_0}{16\pi^2\lambda^2} \ln \frac{\xi}{l}, \quad (30.3)$$

где l — константа интегрирования, имеющая размерность длины.

Мы ищем зависимость $M(H_0)$. В (30.3) единственная величина, зависящая от H_0 , — это l . Найдем эту зависимость так. Поскольку ξ монотонно возрастает с увеличением x , а H_{c2} монотонно падает, то ясно, что в некоторой точке x_0 поле H_{c2} станет равным внешнему полю H_0 . Это значит, что в этом месте $M(x_0) = 0$, т. е. $l = \xi(x_0)$. С другой стороны, нам известна формула, связывающая ξ и H_{c2} (29.3). Применяя ее к точке x_0 , имеем

$$2\pi l^2 H_0 = \Phi_0,$$

откуда легко находим отношение ξ/l :

$$\xi/l = (H_0/H_{c2})^{1/2}. \quad (30.4)$$

Подставляя (30.4) в (30.3), имеем

$$M = - \frac{\Phi_0}{16\pi^2\lambda^2} \ln \left(\frac{H_{c2}}{H_0} \right)^{1/2},$$

или

$$M = - \frac{\Phi_0}{32\pi^2\lambda^2} \ln \frac{H_{c2}}{H_0}. \quad (30.5)$$

Отсюда можно получить зависимость $B(H_0)$:

$$B = H_0 - \frac{\Phi_0}{8\pi\lambda^2} \ln \frac{H_{c2}}{H_0}. \quad (30.6)$$

Полученные формулы справедливы при условии $x \gg 1$ и верны с логарифмической точностью. Используем эти формулы, чтобы рассмотреть зависимость $M(H_0)$ для полей H_0 близких к H_{c2} . Представив H_{c2}/H_0 в виде

$$\frac{H_{c2} - H_0}{H_0} + 1,$$

получим вместо (30.5)

$$M = - \frac{\Phi_0}{32\pi^2\lambda^2} \ln \left(1 + \frac{H_{c2} - H_0}{H_0} \right) \approx - \frac{\Phi_0}{32\pi^2\lambda^2} \frac{H_{c2} - H_0}{H_0}.$$

Используя (29.3), имеем

$$-4\pi M = \frac{H_{c2} - H_0}{4x^2}. \quad (30.7)$$

Таким образом, получено линейное уменьшение $|M|$ при $H_0 \rightarrow H_{c2}$. А. А. Абрикосовым [39] был проведен точный расчет $M(H_0)$ для этой области полей и получен следующий результат:

$$-4\pi M = \frac{H_{c2} - H_0}{1,16(2x^2 - 1)}. \quad (30.8)$$

Легко видеть, что при $x \gg 1$ можно пренебречь единицей в круглых скобках, и тогда точная формула (30.8) отличается от приближенной (30.7) только коэффициентом ~ 1 .

Разъясним вопрос, который может вызвать недоумение. Что такое H_{cm} для сверхпроводника второго рода? В сверхпроводнике первого рода — это критическое поле массивного материала. В этом поле сверхпроводник переходит в нормальное состояние. А что же происходит со сверхпроводником второго рода в поле H_{cm} ? Ответ состоит в том, что ничего особенного со сверхпроводником второго рода в поле H_{cm} не происходит. На кривой намагничивания точка $H_0 = H_{cm}$ никак не выделена. Для сверхпроводника второго рода величину H_{cm} надо рассматривать просто как меру выгодности сверхпроводя-

ицею состоянию по сравнению с нормальным для данного материала в отсутствие магнитного поля:

$$F_n - F_{s0} = H_{cm}^2 / 8\pi.$$

Эту же мысль можно пояснить по-другому. Переход сверхпроводника второго рода в нормальное состояние произойдет тогда, когда на его намагничивание будет затрачена работа, равная $F_n - F_{s0}$:

$$- \int_0^{H_{c2}} M dH_0 = H_{cm}^2 / 8\pi.$$

Отсюда получим следующее определение H_{cm} для сверхпроводника второго рода:

$$H_{cm}^2 = 2 \int_0^{H_{c2}} (H_0 - B(H_0)) dH_0. \quad (30.9)$$

Задача 30.1. Сверхпроводящий сплав имеет $H_{c2} = 50$ кЭ, $\kappa = 60$. Вычислить магнитный момент единицы объема M при внешнем поле $H_0 = 10$ кЭ.
 Ответ. $M = -0,445$ Гс.

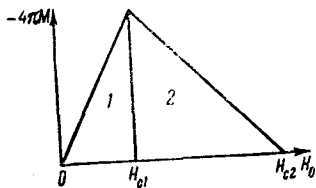


Рис. 30.1. Приближение кривой намагничивания двумя треугольниками. Треугольник (1) определен равенством $-4\pi M = H_0$, треугольник (2) равенством $-4\pi M = (H_{c2} - H_0) / [1,16(2\kappa^2 - 1)]$.

Задача 30.2. Второе критическое поле сверхпроводящего сплава ниобий—таптал равно 4000 Э, а $\kappa = 3$. Аппроксимируя кривую намагничивания сплава $-4\pi M(H_0)$ двумя треугольниками, как показано на рис. 30.1, оцените первое критическое поле H_{c1} , критическое термодинамическое поле H_{cm} . Сравните H_{c1} с ответом задачи 29.2, а H_{cm} с точным значением этой величины.

Решение. Из рис. 30.1 ясно, что H_{c1} является решением уравнения $H_{c1} = k(H_{c2} - H_{c1})$, где $k^{-1} = 1,16(2\kappa^2 - 1)$. Отсюда $H_{c1} = 193$ Э. Из формулы (30.9) следует возможность оценить H_{cm} по площади под кривой намагничивания. Такая оценка дает $H_{cm} = [k/(1+k)]^{1/2} H_{c2} = 879$ Э. Точное значение находится по формуле (29.2): $H_{cm} = 942$ Э.

§ 31. Поверхностная сверхпроводимость. Третье критическое поле

Если внешнее магнитное поле H_0 уменьшается от значения $H_0 > H_{c2}$, то в тот момент, когда H_0 становится чуть меньшим H_{c2} , во всем объеме сверхпроводника второго рода возникают зародыши сверхпроводимости, появляется плотно упакованная решетка вихрей. При этом параметр порядка ψ мал ($|\psi| \ll 1$). Происходит фазовый переход второго рода из нормального состояния ($H_0 > H_{c2}$) в смешанное состояние ($H_0 \leq H_{c2}$).

Рассмотрим зародыш сверхпроводимости, о котором только что говорилось. Это — участок ширины порядка

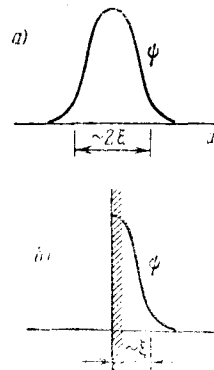


Рис. 31.1. а) волновая функция ψ зародыша сверхпроводящего состояния в неограниченном сверхпроводнике, размер зародыша $\sim 2\xi$, б) то же для случая сверхпроводящего полупространства, размер зародыша $\sim \xi$.

$2\xi(T)$ между двумя нормальными сердцевинами двух соседних вихрей. Действительно, если радиус нормальной сердцевины мы принимаем равным ξ , то при плотной упаковке вихрей расстояние между их центрами будет $\sim 2\xi$. Зависимость параметра порядка от координаты на линии, соединяющей центры вихрей, схематично показана на рис. 31.1, а. В этом сечении зародыш имеет вид колоколообразной кривой. Так будет возникать сверхпроводимость при поле H_{c2} в объеме сверхпроводника второго рода.

Оказывается, однако, что на поверхности сверхпроводника, там где она параллельна внешнему полю, сверхпроводимость может существовать и при более высоких полях.

Итак, рассматривается полубесконечное сверхпроводящее пространство, занимающее область $x > 0$. Таким образом, плоскость $x = 0$ является границей нашего сверхпроводника. Внешнее магнитное поле H_0 параллельно

оси z . В сверхпроводнике с поверхностью на плоскости $x=0$ можно ожидать, что зародыш, образовавшийся вблизи поверхности, будет иметь эффективную ширину порядка $\xi(T)$, так как на поверхности $d\psi/dx=0$. На рис. 31.1, б схематически изображен зародыш вблизи поверхности. Но из формулы (17.5) для критического поля тонкой пленки известно, что уменьшение размеров пленки увеличивает ее критическое поле. Поэтому во втором случае — зародыша вблизи поверхности — можно ожидать большего критического поля образования такого зародыша (приблизительно в два раза). Это новое критическое поле мы будем называть третьим критическим полем или критическим полем поверхностной сверхпроводимости и будем обозначать H_{c3} . Машинный расчет показал [41], что

$$H_{c3} = 1,69H_{c2}. \quad (31.1)$$

Итак, подведем некоторые итоги. Из проведенных рассуждений следует, что при уменьшении внешнего магнитного поля, когда оно достигает значения H_{c3} , на поверхности сверхпроводника возникает тонкий сверхпроводящий слой. Толщина этого слоя имеет порядок $\xi(T)$. Внутри сверхпроводника сохраняется нормальное состояние и магнитное поле, равное внешнему полю. В поверхностном сверхпроводящем слое магнитное поле будет несколько ослаблено, как это бывает у тонких сверхпроводящих пленок во внешнем параллельном поле. Это означает, что по внешней и внутренней поверхностям сверхпроводящего слоя текут токи в противоположных направлениях.

Что будет происходить с поверхностным сверхпроводящим слоем по мере дальнейшего уменьшения внешнего поля ниже H_{c3} ? Расчеты показали, что по мере уменьшения поля будет увеличиваться модуль параметра порядка и увеличиваться ширина сверхпроводящего слоя Δ . На рисунках 31.2 и 31.3 показаны полевые зависимости модуля параметра порядка f_0 на поверхности сверхпроводника и ширины сверхпроводящего поверхностного слоя Δ при разных значениях параметра κ .

Покрытие поверхности сверхпроводника нормальным металлом снижает H_{c3} до величины очень близкой к H_{c2} .

Интересно отметить, что явление поверхностной сверхпроводимости может наблюдаться и у некоторых сверхпроводников первого рода. Действительно, во всех наших рассуждениях нигде не предполагалось, что $\kappa > 1/\sqrt{2}$,

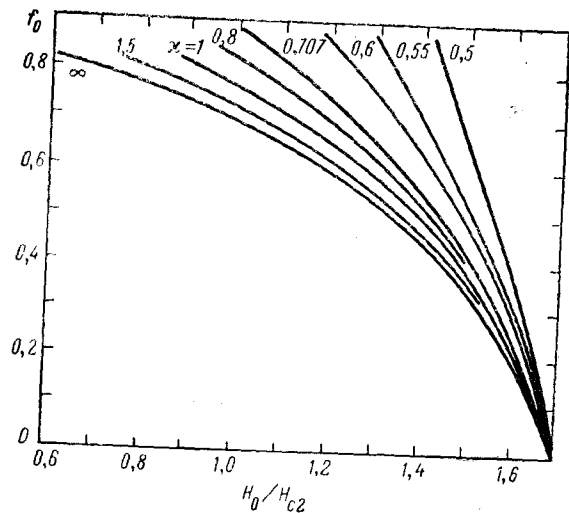


Рис. 31.2. Зависимость модуля параметра порядка f_0 на поверхности сверхпроводника от внешнего магнитного поля при различных значениях κ [42].

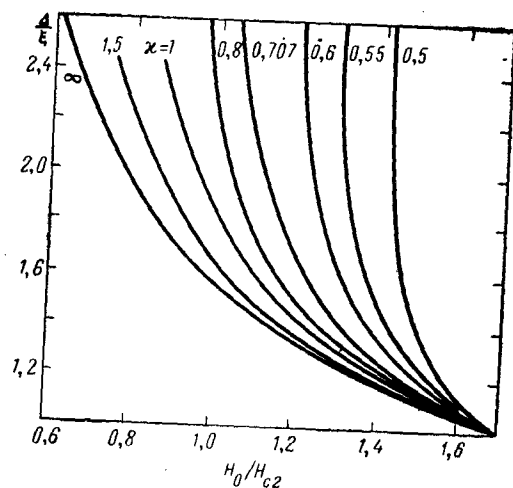


Рис. 31.3. Зависимость ширины сверхпроводящего слоя Δ от внешнего магнитного поля при различных значениях κ [42].

и при этом получилось, что $H_{c3} = 1,69 H_{c2} = 1,69\sqrt{2} \times H_{cm}$. Поверхностная сверхпроводимость возникает в том случае, если H_{c3} будет больше H_{cm} , т. е. если

$$1,69\sqrt{2} \times H_{cm} > H_{cm}. \quad (31.2)$$

Таким образом, поверхностная сверхпроводимость может возникнуть у сверхпроводника первого рода, если

$$\kappa > 1/1,69\sqrt{2} = 0,42.$$

Задача 31.1. Найти третье критическое поле сверхпроводящего сплава, имеющего критическое термодинамическое поле $H_{cm} = 900$ Э и глубину проникновения $\lambda = 2500$ Å.

Ответ. $H_{c3} = 51\,900$ Э.

Задача 31.2. Найти третье критическое поле сверхпроводника, имеющего длину когерентности $\xi = 90$ Å.

Ответ. $H_{c3} = 68\,700$ Э.

§ 32. Поверхностный барьер. Перегрев мейснеровского состояния

До сих пор мы рассматривали термодинамически равновесные ситуации. Так, например, считалось, что если при первом критическом поле становится энергетически выгодным проникновение вихрей в сверхпроводник второго рода, то вихри действительно туда проникают при этом поле.

Однако более внимательный анализ показывает, что для проникновения вихрей внутрь им нужно преодолеть некоторый энергетический барьер у поверхности сверхпроводника.

Рассмотрим плоскую идеально гладкую поверхность сверхпроводника и одиночный вихрь внутри образца, параллельный этой поверхности. Для удобства расчетов будем предполагать, что $\kappa \gg 1$. Внешнее поле предположим пока равным нулю. Гиббсовская свободная энергия \mathcal{G} такого сверхпроводника с вихрем изображена на рис. 32.1 как функция расстояния x_0 от сердцевинки вихря до поверхности. Из этого рисунка следует прежде всего, что такой одиночный вихрь без внешнего поля, как и следовало ожидать, будет неустойчивым и что на достаточно больших расстояниях от поверхности \mathcal{G} будет просто равна свободной энергии одиночного вихря ϵ . Здесь и ниже энергия сверхпроводника с вихрем отсчитывается от энергии сверхпроводника без вихря.

Поясним теперь, почему функция $\mathcal{G}(x_0)$ имеет такой вид. Если $x_0 < \lambda$, то линии токов вихря можно изобразить так, как показано на рис. 32.2, откуда видно, что слева от сердцевинки сверхтекучая скорость больше, чем справа, поэтому на сердцевину вихря будет действовать разность бернуллиевских давлений. Это приведет к появлению силы, действующей на вихрь в сторону к поверхности. Итак, взаимодействие вихря с поверхностью приводит

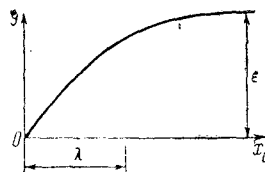


Рис. 32.1. Зависимость гиббсовской свободной энергии сверхпроводника с вихрем от расстояния между вихрем и поверхностью.

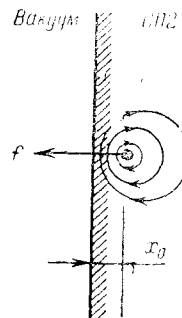


Рис. 32.2. Линии тока вихря вблизи поверхности сверхпроводника.

к его притяжению к поверхности. Ясно, что ту же силу $f(x_0)$ можно было бы получить, просто взяв производную

$$f = -d\mathcal{G}/dx_0. \quad (32.1)$$

Этим и объясняется та форма зависимости $\mathcal{G}(x_0)$, которая изображена на рис. 32.1.

Для нахождения силы притяжения вихря к поверхности мы воспользуемся так называемым методом изображений. Поскольку предполагается, что $\kappa \gg 1$, поле, созданное вихрем, удовлетворяет линейному уравнению (26.5). При этом поле, созданное вихрем на поверхности сверхпроводника, всегда равно нулю (это можно доказать точно так же, как доказывается равенство нулю поля длинного соленоида вне этого соленоида). Таким образом, мы стоим перед линейным уравнением (26.5) с нулевым граничным условием на поверхности. Для линейных задач можно применять принцип суперпозиции. Заменяем поэтому нашу задачу другой, ей эквивалентной. Рассмотрим безграничный сверхпроводник с двумя вихрями противоположного знака, расположенными в точках $\pm x_0$. Ясно, что в силу

симметрии задачи поле на поверхности $x=0$ всюду равно нулю, а при $x > 0$ должно выполняться уравнение (26.5). В силу однозначности решения дифференциального уравнения, поле, созданное этими двумя вихрями в полупространстве $x > 0$, в точности равно полю, созданному одним вихрем, находящимся в точке x_0 , когда он расположен вблизи реальной поверхности сверхпроводника, совпадающей с плоскостью $x=0$.

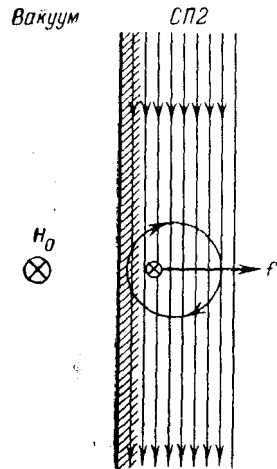


Рис. 32.3. Мейснеровский ток, созданный внешним полем H_0 , отталкивает вихрь от поверхности.

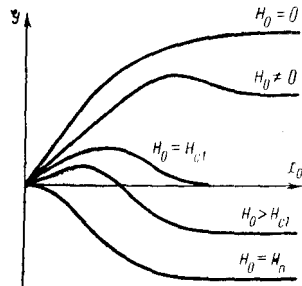


Рис. 32.4. Гиббсовская свободная энергия одиночного вихря как функция его расстояния до поверхности при разных значениях H_0 .

Теперь легко понять, что взаимодействие вихря с поверхностью (притяжение) можно трактовать и как взаимодействие вихря со своим изображением (притяжение, так как вихрь — изображение имеет противоположный знак).

Включим теперь внешнее поле H_0 параллельно поверхности сверхпроводника, как это показано на рис. 32.3. Сразу по поверхности пойдет мейснеровский ток, который, взаимодействуя с вихрем, начнет отталкивать его от поверхности. В результате, с одной стороны, вихрь притягивается к поверхности своим собственным изображением, с другой стороны — отталкивается от поверхности мейснеровским током. Вид гиббсовской свободной энергии вихря в этом случае показан на рис. 32.4. Видно, что при $H_0 < H_{c1}$ возможно метастабильное состояние вихря

в сверхпроводнике, когда энергетически пребывать вихрю в сверхпроводнике невыгодно, но для выхода надо преодолеть энергетический барьер. По имени физиков, впервые рассмотревших такой барьер, он носит название барьера Бина—Ливингстона [43].

При $H_0 = H_{c1}$ (см. рис. 32.4) вихрю впервые при увеличении поля становится энергетически выгодно существовать в сверхпроводнике, но проникновению вихря в сверхпроводник мешает барьер Бина—Ливингстона. Продолжаем увеличивать поле H_0 . Барьер понижается, но все еще существует, вихрь все еще не может проникнуть в сверхпроводник, по-прежнему (уже теперь метастабильно) существует мейснеровское состояние. В этом случае говорят о перегреве мейснеровского состояния.

Барьер пропадает лишь при некотором поле $H_0 = H_n$, которое называется полем перегрева мейснеровского состояния.

Рассчитаем это поле перегрева. Пусть сердцевина вихря находится в точке x_0 . Сила, которая притягивает его к поверхности — это сила изображения, т. е. сила взаимодействия между вихрем и током, создаваемым изображением. Согласно (28.6) имеем

$$f_{\text{изобр}} = \frac{1}{c} \frac{c}{4\pi} \frac{dH_v}{dx} \Phi_0, \quad (32.2)$$

где H_v — поле, создаваемое вихрем — изображением, а $(c/4\pi)(dH_v/dx)$ — ток изображения в точке $x = x_0$. Сила взаимодействия между вихрем и мейснеровским током равна

$$f_M = \frac{1}{c} \frac{c}{4\pi} \frac{H_0}{\lambda} e^{-x/\lambda} \Phi_0, \quad (32.3)$$

поскольку $(c/4\pi)(H_0/\lambda) e^{-x/\lambda}$ — это плотность тока в мейснеровском состоянии.

Гиббсовская свободная энергия

$$\mathcal{G} = - \int f dx, \quad (32.4)$$

где $f = f_M + f_{\text{изобр}}$ — полная сила, действующая на вихрь.

Подставляя (32.2) и (32.3) в (32.4) и интегрируя, получим

$$\mathcal{G}(x_0) = - \frac{\Phi_0}{4\pi} H_0(2x_0) + \frac{\Phi_0}{4\pi} H_0 e^{-x_0/\lambda} + \text{const.} \quad (32.5)$$

В этой формуле стоит $H_v(2x_0)$, так как это — поле, созданное в точке x_0 вихрем — изображением, удаленным от этой точки на расстояние $2x_0$. Остается определить константу интегрирования. При $x_0 \rightarrow \infty$ первые два члена в (32.5) обращаются в нуль. С другой стороны, при $x_0 \rightarrow \infty$ величина \mathcal{G} становится просто гиббсовской свободной энергией одиночного вихря в безграничном сверхпроводнике, которая определяется выражением (27.5). Используя формулы (27.5) и (27.6), получим выражение для константы интегрирования в (32.5) в виде

$$\text{const} = \mathcal{G}(\infty) = \frac{\Phi_0}{4\pi} (H_{c1} - H_0),$$

откуда

$$\mathcal{G} = \frac{\Phi_0}{4\pi} [H_0 e^{-x_0/\lambda} - H_v(2x_0) + H_{c1} - H_0]. \quad (32.6)$$

Нетрудно проверить, что эта формула дает ту серию кривых $\mathcal{G}(x_0)$ при разных значениях H_0 , которая изображена на рис. 32.4.

Поле перегрева мейсснеровского состояния H_n можно определить из условия, очевидного из рис. 32.4,

$$d\mathcal{G}/dx_0|_{x_0=0} = 0. \quad (32.7)$$

Подставляя в это уравнение выражение для \mathcal{G} (32.6) и используя формулы (26.6) и (26.7), получим

$$H_n \approx H_{cm}. \quad (32.8)$$

При получении этой формулы при дифференцировании $H_v(2x_0)$ возникла расходимость в точке $x_0=0$. Это произошло потому, что при $x_0=0$ все рассмотрение становится неверным, так как мы не учитывали пространственные изменения параметра порядка ψ . Обойти эту трудность можно, считая, что вихрь выходит на поверхность не при $x_0=0$, а при $x_0=\xi$, когда вихрь выйдет на поверхность своей сердцевинкой. В этом предположении и получена формула (32.8). Точный расчет, проведенный Де Женом, подтвердил эту оценку:

$$H_n = H_{cm}. \quad (32.9)$$

Существование барьера Бина—Ливингстона доказано экспериментально. Прежде всего этот барьер проявляется в небольшом гистерезисе кривой намагничивания однородного сверхпроводника второго рода вблизи H_{c1} . Схематический пример такой кривой показан на рис. 32.5.

От этого гистерезиса не удастся освободиться никакими мерами по улучшению объемной однородности сверхпроводника.

Известны также и прямые эксперименты по измерению критического поля перегрева мейсснеровского состояния H_n . Так, Де Блуа и де Сорбо [44] исследовали образцы ниобия с небольшой примесью кислорода и сплавы ниобий — тантал. Если образцы имели хорошую гладкую поверхность, полученную с помощью электрополировки, то для первого образца были получены следующие данные: $H_{c1}=580$ Э, $H_{c2}=7000$ Э, $H_{cm}=1360$ Э, $H_n=1330$ Э, а для второго образца $H_{c1}=110$ Э, $H_{c2}=1600$ Э, $H_{cm}=310$ Э, $H_n=180-320$ Э. Сопоставление этих данных показывает, что формула (32.9) достаточно надежно подтверждается экспериментом.

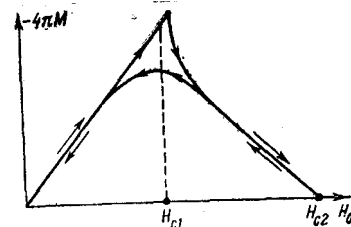


Рис. 32.5. Гистерезис кривой намагничивания, обусловленный поверхностным барьером.

Во многих случаях, однако, барьер Бина—Ливингстона проявляется слабо. Так, в сверхпроводники с шероховатой поверхностью проникновение вихрей происходит при $H_0 < H_n$.

Определим теперь величину магнитного потока, создаваемого вихрем, расположенным вблизи и параллельно плоскости поверхности сверхпроводника. Из общей формулы для гиббсовской свободной энергии следует, что гиббсовская свободная энергия сверхпроводника с вихрем равна

$$\mathcal{G} = \mathcal{F} - \Phi H_0 / 4\pi, \quad (32.10)$$

где \mathcal{F} — свободная энергия сверхпроводника с вихрем (не зависящая от внешнего поля H_0), Φ — магнитный поток вихря, расположенного вблизи поверхности. С другой стороны, эта же величина \mathcal{G} дается формулой (32.6). Выделяя в этой формуле, члены, зависящие от H_0 , и сравнивая их с (32.10), получим выражение для потока вихря, расположенного около поверхности:

$$\Phi = \Phi_0 (1 - e^{-x_0/\lambda}). \quad (32.11)$$

Из этой формулы следует, что магнитный поток, создаваемый вихрем, стремится к нулю по мере приближения вихря

к поверхности сверхпроводника. Это легко понять. Полный магнитный поток вихря можно записать в виде

$$\Phi = \int H dS,$$

где интегрирование ведется по полуплоскости $z=0$, $x > 0$, а H — это истинное поле, созданное вихрем. Но это поле можно рассматривать как суперпозицию полей самого вихря и его изображения, а поле изображения имеет противоположное направление. В результате имеем

$$\Phi < \Phi_0.$$

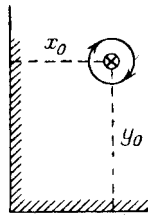


Рис. 32.6. К задаче 32.2.

Задача 32.1. Найти силу притяжения вихря к плоской поверхности сверхпроводника, если вихрь параллелен поверхности, находится от нее на расстоянии $l=500 \text{ \AA}$, а глубина проникновения равна $\lambda=3000 \text{ \AA}$.

Ответ. $f = (\Phi_0/4\pi\lambda)^2/l = 6,03 \cdot 10^{-2} \text{ дин/см}^2$.

Задача 32.2. Одиночный вихрь помещен вблизи поверхности сверхпроводника, которая образует прямой двугранный угол (рис. 32.6).

Найти результирующую силу, действующую на вихрь, со стороны поверхности, если $\lambda=1500 \text{ \AA}$, $x_0=400 \text{ \AA}$, $y_0=600 \text{ \AA}$.

Ответ. $f_x = -2,08 \cdot 10^{-1} \text{ дин/см}$, $f_y = -6,20 \cdot 10^{-2} \text{ дин/см}$.

Задача 32.3. Найти силу взаимодействия вихря с мейсснеровским током, если вихрь параллелен плоской поверхности и находится от нее на расстоянии $l=400 \text{ \AA}$. Сверхпроводник находится во внешнем поле $H_0=50 \text{ Э}$, $\lambda=1000 \text{ \AA}$.

Ответ. $f = (\Phi_0 H_0 / 4\pi\lambda) e^{-l/\lambda} = 5,52 \cdot 10^{-2} \text{ дин/см}$.

Задача 32.4. Найти поле перегрева мейсснеровского состояния, если $\kappa=24$, $\lambda=2000 \text{ \AA}$.

Ответ. $H_H = \Phi_0 \kappa / 2\sqrt{2}\pi\lambda^2 = 1,40 \cdot 10^3 \text{ Э}$.

§ 33. Критический ток в сверхпроводниках второго рода. Критическое состояние

Если сверхпроводник второго рода находится в смешанном состоянии и в направлении, перпендикулярном вихрям, идет транспортный ток (т. е. ток, созданный каким-то внешним источником), то на вихри действует сила Лоренца. Если бы сверхпроводник был совершенно однороден, бездефектен, то при любой, сколь угодно малой силе Лоренца, вихри бы начали свое движение под действием этой силы.

В § 35 будет показано, что такое движение сопровождается диссипацией энергии. Это означает, что у такого

абсолютно однородного образца критический ток равен нулю.

В неоднородном сверхпроводнике второго рода, когда существуют разные виды дефектов (границы зерен, включения другой фазы, дислокационные стенки, скопления дислокаций, поры и т. п.), вихри могут на них закрепиться. Тогда требуется уже конечный транспортный ток для начала движения вихрей. Этот ток создает такую силу Лоренца, действующую на вихри, которой достаточно для отрыва вихрей от дефектов. Эти дефекты часто называются центрами пиннинга, а закрепление на них вихрей — пиннингом*). Плотность тока, при котором начинается отрыв вихрей от центров пиннинга, называется критической плотностью тока j_c .

Критическая плотность тока может очень сильно (на несколько порядков) меняться в результате термомеханической обработки материала, так как является чрезвычайно структурно чувствительным свойством. При этом критическая температура T_c и второе критическое поле H_{c2} могут практически не измениться. У некоторых сверхпроводников, предназначенных для использования в сверхпроводящих магнитах или других сверхпроводящих устройствах, величина критического тока может достигать значений порядка 10^6 А/см^2 .

Рассмотрим механизм протекания критического тока через сверхпроводник второго рода, в котором имеется много центров пиннинга. Для того чтобы транспортный ток шел по всему сечению сверхпроводника, необходимо, чтобы существовало неоднородное распределение вихрей. Действительно, плотность полного тока, текущего в данном месте, равна

$$\mathbf{j}_{\text{тп}} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{B}, \quad (33.1)$$

но $\mathbf{B} = \Phi_0 n$ — среднее поле в данном месте, т. е. напряженность магнитного поля, усредненная по области, размер которой намного больше расстояния между вихрями, n — средняя плотность вихрей в данном месте. Из (33.1) следует, что $\mathbf{j}_{\text{тп}}$ отличен от нуля в данном месте, если плотность вихрей $n = n(\mathbf{r})$.

Теперь нам надо понять, как возникает такое состоя-

* От английского слова pin — булавка. Дословно pinning — это прищипливание.

ние, когда по всему сечению сверхпроводника устанавливается критическая плотность тока.

Пусть бесконечная пластина толщины d содержит очень много дефектов, на которых сверхпроводящие вихри могут

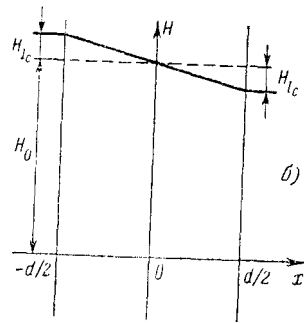
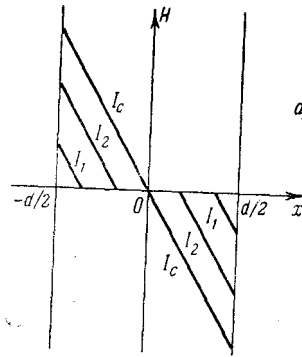


Рис. 33.1. Распределение поля в пластине (толщины d) с центрами пиннинга, когда по пластине течет ток I : а) внешнее поле отсутствует, $I_1 < I_2 < I_c$ — токи в пластине, б) случай пластины с током и во внешнем поле. Показано распределение в критическом состоянии.

через пластину равном I_1 (на единицу высоты пластины вдоль оси z).

Увеличим теперь ток до величины I_2 . Вихри, сохранив критический градиент плотности (∇n), продвинулись ближе к центру. Теперь только центральная часть пластины

хорошо закрепляться, при этом $d \gg \lambda$. Поверхности пластины совпадают с плоскостями $x = \pm d/2$. Внешнее магнитное поле H_0 пока отсутствует. Начнем пропускать транспортный ток через пластину (в направлении оси y). Сначала, как и у бездефектного сверхпроводника, ток пойдет по поверхности пластины (эффект Мейсснера—Оксенфельда). Когда поле, созданное током на поверхностях, H_I превысит поле H_{c1} материала пластины, внутрь пластины проникнут вихри. Они будут иметь разные направления на противоположных сторонах. Но далеко внутрь они не проникнут, так как закрепляются на неоднородностях пластины. При этом возникает градиент их плотности. Ясно, что это будет максимально возможный градиент, т. е. такой, который обеспечивает протекание критического тока. Итак, некоторая область вблизи поверхностей пластины будет нести критический ток, а остальная часть пластины вообще тока нести не будет. Это схематически изображено на рис. 33.1, а, где показано распределение магнитного поля внутри пластины при токе

свободна от транспортного тока, а остальная часть пластины несет ток, плотность которого равна критической. Если продолжать увеличивать ток через пластину, мы придем к такому току I_c , когда в любой точке пластины плотность тока будет критической. Все это изображено на рис. 33.1, а.

Такое состояние, когда в любом месте поперечного сечения пластины течет критический ток, называется критическим состоянием.

Наложим теперь внешнее магнитное поле H_0 , параллельное поверхности пластины и перпендикулярное току, т. е. поле H_0 параллельно оси z . Предположим, что $H_0 \gg H_I$. Тогда распределение тока в пластине в критическом состоянии будет таким, как показано на рис. 33.1, б. Пренебрегая небольшой разницей в полях $H_0 + H_I$ и $H_0 - H_I$, можно считать, что все точки проводника находятся в поле H_0 . Плотность критического тока в поле H_0 меньше, чем в отсутствие поля, поэтому критический градиент плотности вихрей меньше.

Действительно, если сила Лоренца, действующая на единицу длины вихря, равна $f_L = j_{tr} \Phi_0 / c$, то сила Лоренца, отнесенная к единице объема равна $F_L = j_{tr} B / c$, поскольку суммарная длина всех вихрей в единице объема равна $n = B / \Phi_0$. Эта сила уравнивается в стационарном состоянии силой закрепления вихрей на неоднородностях. Пусть удельная сила закрепления (пиннинга) вихрей в единице объема равна F_p . Тогда критический ток должен удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{c} j_c B = F_p. \quad (33.2)$$

Если предположить, что F_p не зависит от внешнего поля H_0 , то получим $j_c \sim B^{-1}$. Такая зависимость критического тока от внешнего поля наблюдалась во многих экспериментах.

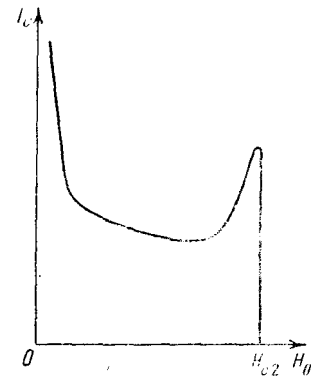


Рис. 33.2. Зависимость критического тока от поперечного магнитного поля. Виден сильный пик-эффект при $H_0 \approx H_{c2}$.

Если дефекты структуры сверхпроводника, т. е. центры пиннинга, распределены хаотично, то абсолютно жесткая решетка вихрей на них не может закрепиться. Чтобы это стало понятно, сдвинем мысленно такую решетку на малое расстояние в направлении действия силы Лоренца. Очевидно, что энергия системы при этом не изменяется, так как новое хаотическое расположение центров пиннинга относительно жесткой вихревой решетки ничем не отличается в принципе от старого. А раз нет изменения энергии, то нет и возвращающей силы, нет и пиннинга.

Совсем другая картина возникает, если предположить, что решетка вихрей — это упругая среда. Тогда вихри каждый раз будут подстраиваться к данному хаотическому распределению центров пиннинга так, чтобы вся система вихрей имела минимум энергии. Поэтому теперь уже будет нужно некоторое усилие, чтобы, сдвинув вихри, превзойти предел возвращающей силы и оторвать их от центров пиннинга. Ясно, поэтому, что чем «мягче» решетка вихрей, чем она податливее, тем больше сила пиннинга.

Расчеты [45] показали, что модули упругости вихревой решетки уменьшаются при $H_0 \rightarrow H_{c2}$. Решетка становится мягче, а пиннинг сильнее. Это приводит к довольно часто наблюдаемому пику критического тока при $H_0 \sim H_{c2}$ (рис. 33.2).

§ 34. Взаимодействие вихрей с центрами пиннинга

Существует очень много видов дефектов, с которыми взаимодействуют сверхпроводящие вихри, и это взаимодействие обеспечивает высокие значения критического тока. В этом параграфе мы познакомимся с простейшими дефектами и рассмотрим физический механизм взаимодействия с ними сверхпроводящих вихрей. Необходимо, однако, учитывать, что не всякие дефекты эффективно взаимодействуют с вихрями. Так, вакансии, одиночные примесные атомы и подобные «мелкие» дефекты неэффективны. Это и понятно, ведь характерный размер вихря — длина когерентности — намного превосходит атомный размер — характерный размер такого «мелкого» дефекта. Вихрь просто «не замечает» такие мелочи. Наоборот, структурные дефекты с размерами $\sim \xi$ и больше являются весьма эффективными и могут обеспечить большие плотности критического тока.

34.1. Взаимодействие вихрей с плоской поверхностью сверхпроводника.

Рассмотрим для определенности плоскую идеально однородную пластину из сверхпроводника второго рода толщиной $d \gg \lambda$. Внешнее магнитное поле H_0 направлено параллельно плоскости пластины, причем $\kappa \gg 1$, $H_{c1} \ll H_0 \ll H_{c2}$. Это значит, что в пластине существует треугольная вихревая решетка, причем, период решетки $a \ll d$. Подробный расчет показывает, что крайний вихревой ряд находится от края пластины на расстоянии $\sim a$ и что a с достаточно хорошей точностью можно считать постоянным по всей пластине.

При включении слабого транспортного тока вдоль пластины перпендикулярно магнитному полю, на одной из сторон пластины возникает магнитное поле $H_0 + H_I$, а на другой — соответственно $H_0 - H_I$, где H_I — поле, созданное транспортным током. Нам уже известно, что устойчивого состояния с градиентом плотностей вихрей в однородном сверхпроводнике не может быть, поэтому реакцией всей вихревой структуры на такой транспортный ток должно быть жесткое смещение всей структуры как единого целого в направлении силы Лоренца. Поскольку вихри до смещения находились в состоянии устойчивого равновесия, после достаточно малого смещения должна возникнуть возвращающая сила. Вся структура будет упруго смещена на некоторое расстояние, определяемое равенством силы Лоренца и возвращающей силы. Если сила Лоренца сможет вопреки возвращающей силе сдвинуть вихри на расстояние $\sim a$, то вихри будут двигаться уже непрерывно. Действительно, теперь с одной стороны пластинки крайний вихревой ряд выходит на край и уничтожается своим изображением, а с другой стороны пластинки — уходит на расстояние $\sim a$ и оставляет место для вхождения в пластинку нового вихревого ряда. Этот новый ряд незамедлительно в нее войдет и вся структура под влиянием того же транспортного тока снова сместится на расстояние $\sim a$ и т. д. Отсюда можно заключить, что транспортный ток, который вызывает смещение структуры на величину $\sim a$, естественно назвать критическим.

В состоянии термодинамического равновесия по поверхности сверхпроводника протекает ток намагничивания I_M , определяемый разностью между полем H_0 на поверхности и средним полем B внутри

$$I_M = \frac{c}{4\pi} |B - H_0| = cM.$$

Плотность тока намагничивания можно записать в виде

$$j_M = \frac{c|M|}{\lambda} e^{-x/\lambda}, \quad (34.1)$$

где x — расстояние данной точки от края пластины. На вихрь, находящийся на расстоянии x от края, действует, таким образом, сила Лоренца

$$f_M = \frac{1}{c} j_M \Phi_0 = \frac{|M| \Phi_0}{\lambda} e^{-x/\lambda}.$$

Если вихрь сместился на малое расстояние δx , то f_M изменилась на величину δf_M :

$$|\delta f_M| = \frac{M \Phi_0}{\lambda^2} e^{-x/\lambda} \delta x.$$

Сила f_M действует только на вихри, находящиеся на расстоянии $\sim \lambda$ от края, поэтому полное изменение силы, действующей на вихри, при смещении их на расстояние δx будет

$$\frac{|M| \Phi_0}{\lambda^2} \delta x \frac{\lambda}{a}.$$

Если теперь умножить это выражение на количество вихрей, лежащих на единичном отрезке вдоль направления транспортного тока, т. е. на $1/a$, и умножить на 2, чтобы учесть существование другого края пластины, то мы получим окончательное выражение для возвращающей силы $F_{\text{возвр}}$, приходящейся на единицу поверхности пластины,

$$F_{\text{возвр}} = \frac{2|M|\Phi_0}{\lambda a^2} \delta x. \quad (34.2)$$

Учитывая, что $a^2 \approx \Phi_0/B$, имеем

$$F_{\text{возвр}} = \frac{2|M|B}{\lambda} \delta x. \quad (34.3)$$

Условием равновесия, как мы уже отмечали, будет равенство этой силы силе Лоренца, тоже отнесенной к единице поверхности пластины

$$\mathcal{F}_L = \frac{1}{c} I_{\text{тр}} B, \quad (34.4)$$

где $I_{\text{тр}}$ — это транспортный ток, текущий по пластине и отнесенный к единице длины пластины в направлении,

перпендикулярном току. Транспортный ток достигает критического значения, когда δx становится равным $a \approx (\Phi_0/B)^{1/2}$. Подставляя это выражение в (34.3) и приравняв выражению (34.4), получим

$$I_c = \frac{2c|M|\sqrt{\Phi_0}}{\lambda\sqrt{B}}. \quad (34.5)$$

Средняя по сечению пластины плотность критического тока будет

$$J_c = \frac{2c|M|\sqrt{\Phi_0}}{\lambda\sqrt{B}d}. \quad (34.6)$$

Эта формула хорошо подтверждена экспериментом.

Итак, подведем некоторые итоги. Обрисуем кратко, как мы теперь себе представляем протекание транспортного тока по пластине, находящейся в смешанном состоянии. Если ток меньше критического, то вихревая структура как единое целое упруго смещается на некоторое расстояние $\delta x < a$ под действием силы Лоренца. При этом сила Лоренца уравнивается возникшей возвращающей силой и вихревая решетка становится неподвижной. Период решетки всюду постоянен, поэтому в объеме пластины транспортный ток равен нулю. Следовательно, транспортный ток течет только вдоль поверхностей пластины в слое порядка глубины проникновения λ .

Оценим величину предельного транспортного тока, т. е. критический ток. Пусть $H_{c1} \sim 100$ Э, $H_{c2} \sim 10^5$ Э, $B \sim 10^4$ Гс, $\lambda \sim 10^{-5}$ см, $d \sim 10^{-4}$ см. Оценка для $|M|$ дает величину ~ 1 Гс. Подставляя эти значения в формулу (34.6), имеем

$$J_c \sim 10^5 \text{ А/см}^2.$$

Таким образом, даже однородные сверхпроводящие пластины в смешанном состоянии способны нести значительный транспортный ток. А теперь представим себе, что толстая массивная сверхпроводящая пластина представляет собой набор таких тонких сверхпроводящих пластин, отделенных друг от друга слоем диэлектрика или нормального металла. Теперь транспортный ток может течь по каждой из этих пластин (конечно, каждый раз в слое $\sim \lambda$ около краев этих пластин), и в целом по всему сечению нашего композитного сверхпроводника будет идти большой транспортный ток.

Формула (34.6) нашла надежное экспериментальное подтверждение в работе Кемпбелла, Иветса и Дью-Хьюза

[46], в которой изучалось взаимодействие вихревых нитей с частицами нормальной фазы в эвтектическом сплаве Pb—Bi.

34.2. Взаимодействие вихря с полостью в сверхпроводнике. Пусть в безграничном сверхпроводнике имеется дефект в виде цилиндрической полости. Как взаимодействует с такой полостью одиночный вихрь, расположенный параллельно полости?

Пусть диаметр полости d удовлетворяет неравенству, $d > \xi(T)$. В этом случае оценка энергии взаимодействия проводится совсем просто. Если вихрь находится далеко от полости, то в его сердцевине (диаметра $\sim 2\xi$) сосредоточена положительная энергия (относительно состояния сверхпроводника без вихря), так как сердцевина вихря нормальна, а свободная энергия нормального состояния больше энергии сверхпроводящего состояния на величину $H_{cm}^2/8\pi$ на каждую единицу объема. Значит, в сердцевине вихря на каждую единицу его длины сосредоточена энергия, по порядку величины равная

$$\frac{H_{cm}^2}{8\pi} \pi \xi^2. \quad (34.7)$$

Если же вихрь проходит через полость, т. е. просто захвачен полостью, то у него нет нормальной сердцевины и, соответственно, энергия всей системы меньше на величину (34.7). Отсюда следует, что вихрь притягивается к полости. Силу взаимодействия на единицу длины f_p легко найдем, если учтем, что энергия меняется на величину (34.7) при смещении вихря около края полости на расстояние $\sim \xi$:

$$f_p \approx H_{cm}^2 \xi / 8. \quad (34.8)$$

Если в сверхпроводнике имеется не цилиндрическая полость, а пора в виде приблизительно шаровой полости (размер d), то силу закрепления вихря на полости f_{pd} получим из (34.8)

$$f_{pd} \approx H_{cm}^2 \xi d / 8. \quad (34.9)$$

Чтобы оценить, насколько эта сила велика, найдем, какой ток нужно пропустить перпендикулярно вихрю, чтобы он создал силу Лоренца, которая преодолела бы эту силу f_{pd} .

Сила Лоренца, приходящаяся на единицу длины вихря, как известно, равна $j\Phi_0/c$. Следовательно, на часть длины

вихря, которая взаимодействует с дефектом, придется сила $j\Phi_0 d/c$. Приравнявая ее силе f_{pd} (34.9), получим

$$j = \frac{cH_{cm}^2}{8\Phi_0} \xi. \quad (34.10)$$

Поскольку $H_{cm} = \Phi_0/2\sqrt{2}\pi\lambda\xi$ (см. (15.9)), легко получим из (34.10)

$$j = \frac{cH_{cm}}{16\sqrt{2}\pi\lambda}.$$

Сравнивая эту формулу с критическим током распаривания, который мы изучали в § 18, мы увидим, что получили величину того же порядка. Таким образом, чтобы оторвать вихрь от поры, нужно пропустить максимально возможный для сверхпроводника ток.

Если внутри сверхпроводника будут присутствовать микроскопические включения диэлектрика, то все предыдущие рассуждения сохранят свою силу. Если же это будут включения другого несверхпроводящего металла, то и в этом случае рассуждения останутся справедливыми (по крайней мере, по порядку величины), если размер включений будет больше ξ . Действительно, так называемый эффект близости существен, грубо говоря, только на расстояниях порядка ξ от границы. Таким образом, различные нормальные включения являются весьма эффективными центрами закрепления вихрей в сверхпроводнике, т. е. центрами пиннинга. Этим свойством широко пользуются на практике, когда с помощью металлургической обработки добиваются существенного увеличения токонесущей способности сверхпроводящего материала.

Рассмотрим пример сплава Nb—Ti, который используется во многих сверхпроводящих устройствах, где требуются большие критические токи. Закаленную с 800°C проволоку сплава подвергают кратковременному (~ 30 минут) отжигу при температуре около 400°C . При этом сверхпроводящая матрица β -фазы начинает распадаться с выделением микроскопических включений несверхпроводящей α -фазы. В результате критический ток возрастает на несколько порядков.

Кроме перечисленных дефектов, эффективными центрами пиннинга являются также дислокации, дислокационные ячейки, границы зерен, границы между двумя различными сверхпроводниками.

Задача 34.1. Идеально однородная пластинка имеет ширину $l=5$ мм и находится во внешнем магнитном поле $H_0 \approx B=18$ кГс,

параллельном широкой стороне и перпендикулярном току, $H_{c2} = 75$ кЭ, $H_{c1} = 130$ Э. Оценить критический ток пластинки.

Решение. Используя формулы (27.7) и (29.3), находим $\kappa = 31$. Из (27.7) находим $\lambda = 2,4 \cdot 10^{-5}$ см. Аппроксимируя кривую намагничивания $|M|$ двумя треугольниками (рис. 30.1) и используя формулу (34.5), имеем окончательно

$$I_0 = \frac{2c\sqrt{\Phi_0}l}{\lambda\sqrt{B}} \frac{H_{c1}}{4\pi} \frac{H_{c2} - B}{H_{c2} - H_{c1}} \approx 13A.$$

§ 35. Резистивное состояние

Рассмотрим теперь, что происходит, когда сила Лоренца, созданная транспортным током, превзойдет силу пиннинга, и вихри придут в движение, т. е. когда начнется течение вихрей поперек транспортного тока.

Мы сейчас покажем, что в этом случае возникнет диссипация энергии, возникнет электрическое сопротивление. Поэтому такое состояние называется резистивным.

Возникшее течение магнитного поля создает по закону электромагнитной индукции Фарадея электрическое поле E . Это поле будет направлено по току*). Это значит, что в объеме сверхпроводника возникает диссипация энергии $Ej_{тр}$. Пусть установившаяся скорость течения вихрей в направлении силы Лоренца, т. е. перпендикулярно току и магнитному полю, будет v_L . Работа в единицу времени, затраченная внешним источником на это передвижение вихрей, будет равна $F_L v_L$, где F_L — плотность силы Лоренца. Ясно, что это и есть та энергия, которая выделяется в единицу объема в единицу времени, т. е.

$$F_L v_L = E j_{тр}. \quad (35.1)$$

Учитывая, что $F_L = j_{тр} B / c$, получим

$$E = B v_L / c. \quad (35.2)$$

Удельное сопротивление сверхпроводника, которое возникает при течении магнитного потока в направлении поперек транспортного тока, называется сопротивлением течения потока (flux-flow) и обозначается ρ_f :

$$\rho_f = E / j_{тр}. \quad (35.3)$$

*) В этих рассуждениях мы пренебрегли влиянием эффекта Холла.

Поскольку движение вихрей сопровождается, как мы видим, выделением энергии, можно считать, что вихри движутся в вязкой среде, и ввести некоторый коэффициент вязкости η по обычной формуле

$$f_{трения} = -\eta v_L,$$

где $f_{трения}$ — это сила трения, которую испытывает один вихрь, движущийся со скоростью v_L . Пренебрегая массой вихря, имеем уравнение движения вихря в виде

$$f_{трения} + f_L = 0.$$

Переходя к силам, действующим в единице объема, получим

$$\frac{B}{\Phi_0} \eta v_L = \frac{1}{c} B j_{тр}. \quad (35.4)$$

Используя теперь формулы (35.2) и (35.3), преобразуем (35.4) к виду

$$\rho_f = \Phi_0 B / c^2 \eta. \quad (35.5)$$

Если η не зависит от магнитного поля, то ρ_f будет линейной функцией B . При низких температурах эксперимент действительно дает такую зависимость ρ_f от поля.

Используя результаты эксперимента для $T \rightarrow 0$, имеем

$$\rho_n = \Phi_0 H_{c2} / c^2 \eta,$$

что может служить для определения значения коэффициента вязкости η при низких температурах:

$$\eta = H_{c2}(0) \Phi_0 / c^2 \rho_n. \quad (35.6)$$

Здесь ρ_n — это удельное сопротивление сверхпроводника в нормальном состоянии.

Интересно оценить порядок скорости движения вихрей в реальной экспериментальной ситуации. Пусть в сверхпроводнике, находящемся в резистивном состоянии, возникло электрическое поле $E \sim 10^{-6}$ В/см при индукции $B \sim 10^4$ Гс. Тогда согласно (35.2) имеем

$$v_L = \frac{cE}{B} = 3 \cdot 10^{10} \frac{10^{-6}}{300} \cdot \frac{1}{10^4} = 10^{-2} \text{ см/с}.$$

Вольтамперная характеристика сверхпроводника в резистивном состоянии показана на рис. 35.1. Она начинается с некоторого значения тока (критического тока) и

при малых напряжениях имеет нелинейный характер. В этой нелинейной области в сверхпроводнике еще нет сплошного установившегося течения вихрей. Они случайным образом перескакивают от одного центра пиннинга к другому, это область ползучести, крипа вихревой структуры.

При больших токах вольтамперная характеристика становится линейной. Здесь уже имеет место течение вихревой структуры как целого.

Существуют два определения критического тока. Ток, при котором начинается срыв вихрей с центров пиннинга,

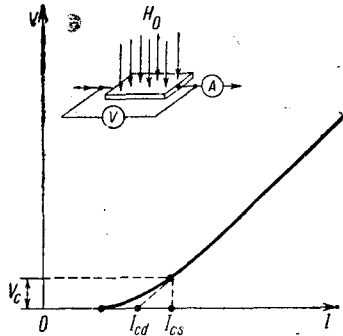


Рис. 35.1. Вольтамперная характеристика сверхпроводника второго рода со структурными дефектами. Показано два разных способа определения критического тока: I_{cs} — статический критический ток, I_{cd} — динамический.

т. е. ток I_{cs} , с которого начинается вольтамперная характеристика, называется статическим критическим током. Его определение зависит от чувствительности того вольтметра, с помощью которого замечают первые признаки напряжения (обычно $\sim 10^{-6}$ В) на образце. Были проведены специальные эксперименты [47], чтобы выяснить, насколько зависит определение критического тока от уровня чувствительности вольтметра. Оказалось, что при внешнем поле $H_0 \ll H_{c2}$ увеличение чувствительности на много порядков очень несущественно изменяет определение критического тока.

Другое определение критического тока — динамический критический ток I_{cd} . Этот ток определяется по экстраполяции прямолинейного участка вольтамперной характеристики до пересечения с осью токов.

Отметим, в заключение, некоторую общность, которую можно усмотреть между джозефсоновским переходом в режиме джозефсоновской генерации и сверхпроводником второго рода в резистивном состоянии [48].

Пусть массивный сверхпроводник второго рода находится в резистивном состоянии со средней индукцией B . Примем для простоты (это никак не ограничивает общность наших рассуждений), что вихри образуют квадратную решетку (рис. 35.2).

Протекающий транспортный ток I создает силу Лоренца, под влиянием которой вся вихревая структура движется со скоростью v_L .

При этом в сверхпроводнике возникает электрическое поле

$$E = \frac{1}{c} B v_L,$$

а средняя разность потенциалов \bar{V} на длине a периода вихревой решетки (см. рис. 35.2) будет равна

$$\bar{V} = \frac{a}{c} B v_L. \quad (35.7)$$

Ясно, что смещение вихревой решетки трансляционно симметрично с периодом a , поэтому можно ожидать, что в напряжении V будет присутствовать переменная составляющая с частотой

$$\omega = 2\pi \frac{v_L}{a}. \quad (35.8)$$

Выражая отсюда v_L и подставляя в (35.7), имеем

$$\bar{V} = \omega B a^2 / 2\pi c.$$

Но $B a^2$ — это магнитный поток, связанный с одним вихрем, т. е. квант потока Φ_0 ($\Phi_0 = \pi \hbar c / e$). Отсюда

$$\bar{V} = \hbar \omega / 2e,$$

т. е. получается формула (21.8).

В сверхпроводнике второго рода, находящихся в резистивном состоянии, такую генерацию трудно обнаружить потому, что из-за структурных неоднородностей

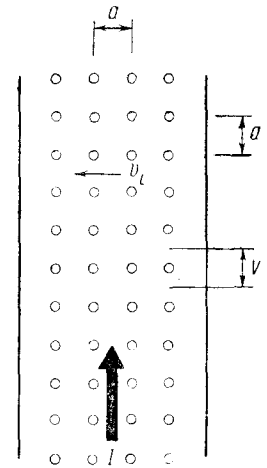


Рис. 35.2. Вихревая структура в сверхпроводнике второго рода движется под действием силы Лоренца со скоростью v_L .

сверхпроводника вихревая решетка движется не как единое целое, ламинарно, а весьма хаотичным образом, турбулентно. Однако если специально позаботиться об упорядочении движения решетки, можно наблюдать явления, характерные для нестационарного эффекта Джозефсона [49].

Задача 35.1. Оценить сопротивление течения потока ρ_f , если внешнее поле $H_0 = 5 \cdot 10^3$ Э, $T_c = 10$ К, $H_{c2}(T = 4,2 \text{ К}) = 40$ кЭ, остаточное удельное сопротивление образца в нормальном состоянии $\rho_n = 3 \cdot 10^{-5}$ Ом·см.

Решение. Из формул (35.5) и (35.6) следует, что $\rho_f = \rho_n B / H_{c2}(0)$. Принимая приближенно $H_{c2}(T) = H_{c2}(0) (1 - T^2/T_c^2)$ и $B = H_0$ имеем $\rho_f = 3 \cdot 10^{-6}$ Ом·см.

Задача 35.2. С какой скоростью v_L движутся вихри в проволоке, находящейся в резистивном состоянии, если проволока длиной $l = 8$ см находится в магнитном поле $B = 5$ Т и при этом на ней падает напряжение $U = 15$ мкВ.

Ответ. $v_L = U/lB = 3,75 \cdot 10^{-5}$ м/с.

§ 36. Введение. Электрон-фононное взаимодействие

Механизм явления сверхпроводимости стал понятен лишь спустя 46 лет после открытия сверхпроводимости, когда Бардин, Купер и Шриффер опубликовали свою теорию (теория БКШ) [50].

Чтобы понять, с какими трудностями столкнулись теоретики, достаточно сделать такие оценки. Разница между свободными энергиями нормального металла и сверхпроводника, приходящаяся на 1 см^3 равна, как мы знаем, величине $H_{cm}^2/8\pi \sim 10^5$ эрг/см³, если $H_{cm} \sim 10^3$ Э. В 1 см^3 содержится приблизительно 10^{22} электронов проводимости. Значит, за сверхпроводимость отвечает энергия примерно $10^5/10^{22} = 10^{-17}$ эрг/электрон $\sim 10^{-5}$ эВ/электрон. Эту энергию нужно сравнить с кулоновской энергией взаимодействия ~ 1 эВ, пренебрежение которой не мешает прекрасно описать многие свойства металла методами современной квантовой теории металлов. Таким образом, предстояло объяснить упорядоченное поведение электронов, когда соответствующая энергия на много порядков меньше энергии других взаимодействий, которыми обычно пренебрегают.

Первый намек на природу механизма сверхпроводимости был получен с открытием изотоп-эффекта. Явление заключается в том, что разные изотопы одного и того же сверхпроводящего металла имеют разные критические температуры T_c , причем выполняется такая зависимость:

$$T_c M^a = \text{const.}$$

Степень a оказывается для большинства элементов близкой к 0,5.

Таким образом, стало понятно, что ионная решетка металла активно участвует в создании сверхпроводящего состояния. Теоретический анализ показал, что взаимодей-

ствие между электронами и колебаниями кристаллической решетки может вызвать дополнительное взаимодействие между электронами. При определенных условиях это взаимодействие будет давать притяжение между электронами. Если такое притяжение окажется сильнее кулоновского отталкивания, то в металле возникает эффективное притяжение электронов, результатом которого будет сверхпроводящее состояние.

Постараемся понять сперва, как взаимодействуют между собой электроны через колебания решетки. Кванты колебаний кристаллической решетки (фононы) характеризуются энергией $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ и волновым вектором \mathbf{q} .

Рассмотрим металл при $T=0$. Ясно, что никаких фононов при абсолютном нуле нет. Как же тогда происходит взаимодействие между электронами через фононы?

Свободный электрон металла с волновым вектором \mathbf{k}_1 распространяется по кристаллу. В какой-то момент времени он возбудил колебание решетки. Иначе это можно сказать так: в какой-то момент времени он испустил фонон (которого до этого момента не существовало) и перешел в какое-то другое состояние \mathbf{k}'_1 . Волновой вектор рожденного фонона пусть будет \mathbf{q} . При этом должен выполняться закон сохранения импульса

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{q}.$$

Почти в тот же момент времени этот фонон окажется поглощенным другим электроном \mathbf{k}_2 , который в результате такого столкновения перейдет в состояние \mathbf{k}'_2 . Что же получилось? Сначала были два электрона в состояниях \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , в конце эти электроны оказались в состояниях \mathbf{k}'_1 и \mathbf{k}'_2 . Значит, произошло рассеяние электронов \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 друг на друга, причем

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2.$$

Но такое рассеяние двух частиц может происходить только в том случае, если они взаимодействуют. Отсюда мы и делаем вывод, что процесс, который мы можем изобразить диаграммой рис. 36.1, описывает эффективное взаимодействие между электронами. Теперь поговорим о знаке этого взаимодействия. В момент, когда электрон переходит из состояния \mathbf{k}_1 в состояние \mathbf{k}'_1 , возникает колебание электронной плотности с частотой $\omega = (\bar{\epsilon}_{\mathbf{k}_1} - \bar{\epsilon}_{\mathbf{k}'_1})/\hbar$, где $\bar{\epsilon}_{\mathbf{k}_1}$ и $\bar{\epsilon}_{\mathbf{k}'_1}$ — соответственно энергии электрона в состояниях \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}'_1 ($\bar{\epsilon}_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m$). Предположим, что в результате та-

кого колебания электронной плотности в данном месте произошло локальное увеличение плотности электронов. Ионы начнут притягиваться к этому месту и, обладая большой массой, даже после того, как скомпенсируют избыток электронов, будут продолжать свое первоначальное движение и произойдет перекомпенсация. Теперь в этом месте появился уже избыточный положительный заряд. Тогда вторая частица с импульсом \mathbf{k}_2 начинает притягиваться к этому месту с перекомпенсированным локальным увеличением электронной плотности. Так возникает эффективное притяжение между частицами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 . Из проведенных рассуждений нетрудно сделать вывод,

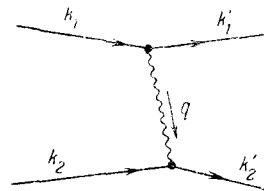


Рис. 36.1. Диаграмма, иллюстрирующая взаимодействие между двумя электронами посредством испускания и поглощения фонона с импульсом $\hbar\mathbf{q}$.

что такое притяжение может возникнуть, только если колебания решетки (рассматриваемые как вынужденные) происходят в фазе с вынуждающей силой (колебаниями электронной плотности с частотой $\omega = (\bar{\epsilon}_{\mathbf{k}_1} - \bar{\epsilon}_{\mathbf{k}_2})/\hbar$). Но это будет только в случае, когда частота вынуждающей силы ω меньше собственной частоты ионной системы. Такой характерной частотой является дебаевская частота ω_D , т. е. максимально возможная*), поэтому условие притяжения формулируется так: $\omega < \omega_D$.

Действительно, рассмотрим простой осциллятор с массой m и собственной частотой колебаний ω_0 , который испытывает действие вынуждающей силы $f e^{i\omega t}$. Уравнение движения такой системы будет

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} e^{i\omega t}. \quad (36.1)$$

Ищем решение в виде $x = x_0 e^{i\omega t}$. Подставляя его в (36.1), имеем

$$x_0 = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

*) Существование предельной частоты колебаний атомов в кристалле легко понять: бессмысленно говорить о звуковой волне в кристалле, у которой длина волны меньше периода кристаллической решетки. Таким образом, существование минимальной длины волны очевидно. Отсюда сразу следует существование предельной частоты.

Отсюда следует, что, пока $\omega^2 < \omega_0^2$, колебания $x = x_0 e^{i\omega t}$ происходят в фазе с вынуждающей силой f . В противном случае колебания будут происходить в противофазе.

Вернемся теперь к нашим электронам. Чтобы электрон мог перейти из состояния k_1 в состояние k_1' , последнее должно быть свободно (принцип Паули!). Такое возможно лишь вблизи поверхности Ферми, которую мы представляем себе в виде сферы радиуса k_F в k -пространстве.

Вот теперь мы можем сформулировать закон взаимодействия электронов через фононы, который лежит в основе теории БКШ: электроны, энергии которых отличаются от

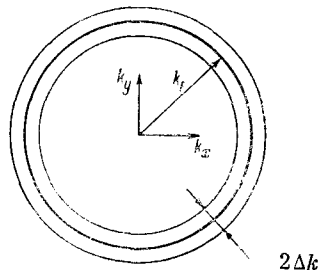


Рис. 36.2. Взаимодействуют через фононы по модели БКШ только электроны, лежащие в слое $2\Delta k$ около поверхности Ферми.

энергии электрона на поверхности Ферми не больше чем на величину $\hbar\omega_D$, притягиваются друг к другу. Энергия их взаимодействия равна $-V$. Все остальные электроны не взаимодействуют.

Запишем матричный элемент взаимодействия электронов в виде

$$V_{k'k} = \begin{cases} -V, & |\tilde{\epsilon}_k - \epsilon_F| \leq \hbar\omega_D, & |\tilde{\epsilon}_{k'} - \epsilon_F| \leq \hbar\omega_D, \\ 0, & |\tilde{\epsilon}_k - \epsilon_F| > \hbar\omega_D, & |\tilde{\epsilon}_{k'} - \epsilon_F| > \hbar\omega_D. \end{cases} \quad (36.2)$$

Таким образом, в модели БКШ притягиваются только электроны, лежащие в узком сферическом слое около поверхности Ферми, толщина которого $2\Delta k$ соответствует дебаевской энергии (рис. 36.2):

$$\Delta k/k_F \sim \hbar\omega_D/\epsilon_F, \quad \epsilon_F = \hbar^2 k_F^2/2m.$$

§ 37. Основное состояние сверхпроводника

37.1. Распределение электронов в основном состоянии. В этом параграфе мы должны будем понять, в каком состоянии находится сверхпроводник, когда $T=0$, т. е. найти состояние, соответствующее минимальной энергии сверхпроводника.

Здесь уместно напомнить некоторые основные положения квантовой механики, которые нам в дальнейшем понадобятся. Пусть $\psi_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ — полная система функций, если n пробегает какой-то набор значений, которыми мы нумеруем эти функции. Тогда любую волновую функцию $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ можно разложить по системе ψ_n :

$$\Psi = \sum_n a_n \psi_n, \quad (37.1)$$

a_n мы будем называть амплитудой состояния ψ_n , а $|a_n|^2$ даст нам вероятность обнаружить систему в состоянии ψ_n .

Пусть теперь оператор Гамильтона \hat{H} равен

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{кин}} + \hat{V}, \quad (37.2)$$

где $\hat{H}_{\text{кин}}$ — оператор кинетической энергии, \hat{V} — оператор энергии взаимодействия. Тогда среднее значение энергии \bar{E} в состоянии Ψ можно записать в виде

$$\bar{E} = \int \Psi^* \hat{H} \Psi d\tau, \quad (37.3)$$

интегрирование ведется по всем N переменным. Подставляя в (37.3) формулы (37.1) и (37.2), имеем

$$\bar{E} = \bar{E}_{\text{кин}} + \bar{V},$$

где

$$\bar{V} = \int \Psi^* \hat{V} \Psi d\tau = \int \sum_n a_n^* \psi_n^* \hat{V} \sum_m a_m \psi_m d\tau = \sum_{n,m} a_n^* a_m V_{nm}. \quad (37.4)$$

Выражение V_{nm} называется матричным элементом перехода из состояния ψ_m в состояние ψ_n :

$$V_{nm} = \int \psi_n^* \hat{V} \psi_m d\tau. \quad (37.5)$$

Возвращаемся к обсуждению основного состояния сверхпроводника. В нормальном металле основное состояние хорошо известно. При $T=0$ наименьшей энергии соответствует состояние, когда все электроны в импульсном пространстве (k -пространстве) занимают состояния, лежащие внутри поверхности Ферми, а все состояния вне этой поверхности свободны. Действительно, очевидно, что этому соответствует минимальная кинетическая энергия. А потенциальной энергии в этой модели просто нет. Включим теперь энергию взаимодействия между электронами, которая обсуждалась в предыдущем параграфе.

Поскольку она дает эффективное притяжение между электронами, то она будет давать отрицательный вклад и понижать общую энергию системы. Но для этого должна быть обеспечена возможность рассеяния электронов из состояния $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ в состояние $(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2)$. Ясно, что такое рассеяние окажется возможным лишь, если состояние $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ будет сначала заполнено, а состояние $(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2)$ будет сначала пусто.

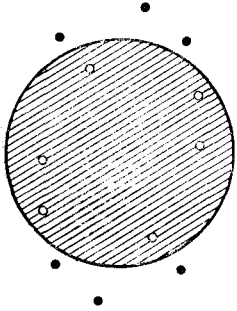


Рис. 37.1. Схематическое изображение состояния, полная энергия которого может оказаться меньше энергии состояния, в котором все ячейки k -пространства под сферой Ферми заняты, а над ней — свободны.

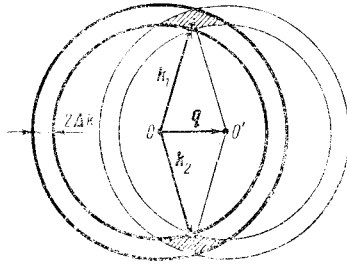


Рис. 37.2. Если спариваются электроны, имеющие суммарный импульс q , то во взаимодействии участвуют лишь те электроны, которые заполняют заштрихованную часть k -пространства.

Поэтому минимальной энергии при $T=0$ перестает соответствовать полностью заполненная сфера Ферми в k -пространстве.

Природа идет на некоторый проигрыш в кинетической энергии в надежде отыграться на энергии потенциальной. Теперь минимальной полной энергии будет соответствовать состояние с «размазанной» поверхностью Ферми, т. е. состояние, в котором над поверхностью Ферми некоторые ячейки k -пространства заполнены, в то время как некоторые ячейки, лежащие под поверхностью Ферми, оказываются пустыми. При этом, как мы сейчас покажем, заполнение ячеек должно происходить попарно, т. е. если ячейка $\mathbf{k}\uparrow$ заполнена, то и ячейка $-\mathbf{k}\downarrow$ тоже должна быть заполнена, стрелками обозначены направления электронных спинов. Совершенно то же самое надо сказать о пустых ячейках. Это схематически изображено на рис. 37.1. Объясним теперь, почему наиболее выгодным спариванием

электронов будет такое, когда в паре оказываются электроны с противоположными импульсами.

При переходе пары электронов $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \rightarrow (\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2)$ должен выполняться закон сохранения импульса $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2$, а суммирование в формуле (37.4) распространяется на все возможные такие переходы. Ясно, что чем больше окажется таких разрешенных переходов, тем больше должен быть отрицательный вклад \bar{V} в среднюю энергию \bar{E} сверхпроводника. Пусть, например, $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{q}$, как это изображено на рис. 37.2. Тогда, как это видно из рисунка, участвовать в переходах могут только те электроны, которые занимают ячейки заштрихованного участка k -пространства. Начнем уменьшать q . Заштрихованная область будет увеличиваться. При $q=0$ вклад в уменьшение средней энергии будут давать все электроны, состояния которых лежат в полосе шириной $\sim 2\hbar\omega_D$ по энергии около поверхности Ферми в k -пространстве.

Представим себе теперь всю возможную совокупность состояний подобных тому, которое изображено на рис. 37.1. Заномеруем их индексом n . Они образуют полную систему функций, по которым можно разложить волновую функцию основного состояния сверхпроводника Ψ . Что означает на этом языке рассеяние друг на друге пары электронов $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ (спиновые индексы мы опускаем) в состояние $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')$? Это означает переход из состояния ψ_n , в котором ячейки $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ заняты и $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')$ свободны, в другое состояние ψ_m , которое полностью подобно состоянию ψ_n за двумя только исключениями: в состоянии ψ_m ячейки $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ свободны, а $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')$ заняты.

Введем теперь в рассмотрение некоторую функцию $v_{\mathbf{k}}^2$ волнового вектора \mathbf{k} . Пусть это будет вероятность того, что пара состояний $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ занята. Тогда амплитуду состояния, в котором ячейки $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ заняты, а $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')$ свободны, можно записать в виде

$$a_n = [v_{\mathbf{k}}^2 (1 - v_{\mathbf{k}'}^2)]^{1/2} = v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'}, \quad \text{где} \quad u_{\mathbf{k}}^2 = 1 - v_{\mathbf{k}}^2.$$

Аналогично амплитуда состояния ψ_m , в котором ячейки $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ стали пустыми, а ячейки $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')$ заполнились, будет

$$a_m = v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}.$$

Используя (37.4), мы можем теперь записать полную энергию сверхпроводника в состоянии, описываемом распределением $v_{\mathbf{k}}^2$, в виде

$$E_s = \sum_{\mathbf{k}} 2\varepsilon_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'}. \quad (37.6)$$

Первое слагаемое здесь дает полную кинетическую энергию системы, $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ — энергия электрона в ячейке \mathbf{k} , отсчитанная от энергии Ферми, т. е.

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m - \hbar^2 k_F^2 / 2m = \bar{\varepsilon}_{\mathbf{k}} - \varepsilon_F.$$

Второе слагаемое согласно (37.4) есть средняя потенциальная энергия взаимодействия электронов, где матричный элемент $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ определяется формулой (36.2).

Теперь надо найти такую функцию $v_{\mathbf{k}}$, которая будет минимизировать полную энергию E_s . Это значит, что $v_{\mathbf{k}}$ должна удовлетворять уравнению

$$\partial E_s / \partial v_{\mathbf{k}}^2 = 0.$$

Подставив сюда (37.6) и (36.2), получим

$$2\varepsilon_{\mathbf{k}} - V \frac{1 - 2v_{\mathbf{k}}^2}{v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}} \sum_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'} = 0,$$

откуда

$$\frac{v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}}{1 - 2v_{\mathbf{k}}^2} = \frac{\Delta_0}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}}, \quad (37.7)$$

где

$$\Delta_0 = V \sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}. \quad (37.8)$$

Штрих при знаке суммы означает, что суммирование ведется только по тем состояниям \mathbf{k} , которые лежат в сферическом слое около поверхности Ферми, где отличен от нуля матричный элемент $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ (36.2).

Выражая $v_{\mathbf{k}}^2$ из (37.7), имеем квадратное уравнение относительно $v_{\mathbf{k}}^2$:

$$v_{\mathbf{k}}^4 - v_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2 / 4E_{\mathbf{k}}^2 = 0,$$

где

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2}. \quad (37.9)$$

Тогда

$$v_{\mathbf{k}}^2 = 1/2 (1 - \varepsilon_{\mathbf{k}} / E_{\mathbf{k}}). \quad (37.10)$$

В этом равенстве мы поставим знак «минус», так как из физических соображений $v_{\mathbf{k}}^2$ должна стремиться к 1, а $\varepsilon_{\mathbf{k}} \rightarrow E_{\mathbf{k}}$ при $\mathbf{k} \rightarrow 0$.

График зависимости $v_{\mathbf{k}}^2$ от k изображен на рис. 37.3. Видно, что минимума полная энергия системы достигает

тогда, когда распределение электронов около поверхности Ферми «размазано» на некотором интервале энергий $\sim 2\Delta_0$. Еще раз подчеркнем, что это происходит при абсолютном нуле температур! Таково основное состояние сверхпроводника.

37.2. Энергия основного состояния. Найдем теперь энергию основного состояния сверхпроводника. Для этого

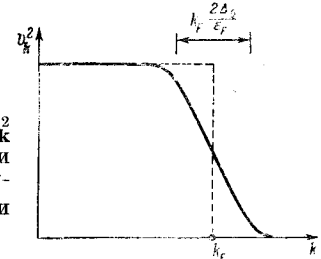


Рис. 37.3. Зависимость $v_{\mathbf{k}}^2$ от k . На уровне Ферми $\varepsilon_{\mathbf{k}} = 0$. Область «размазанности» $v_{\mathbf{k}}^2$ по энергии равна $2\Delta_0$.

вычислим сперва величину Δ_0 . Подставим выражение для $v_{\mathbf{k}}^2$ (37.10) в (37.8):

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= V \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) \right]^{1/2} = \\ &= \frac{V}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{E_{\mathbf{k}}^2 - \varepsilon_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}^2} \right)^{1/2} = \frac{V\Delta_0}{2} \sum_{\mathbf{k}} (\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Здесь мы учли определение $E_{\mathbf{k}}$ (37.9).

Таким образом, мы приходим к уравнению относительно Δ_0 в виде

$$1 = \frac{V}{2} \sum_{\mathbf{k}} (\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2)^{-1/2}. \quad (37.11)$$

Если мы перейдем от суммирования по \mathbf{k} к интегрированию по энергии ε по формуле

$$\sum_{\mathbf{k}} \dots = \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \dots N(\varepsilon) d\varepsilon,$$

где $N(\varepsilon)$ — плотность состояний около энергии ε , то уравнение (37.11) превратится в уравнение

$$1 = \frac{N(0)V}{2} \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} (\varepsilon^2 + \Delta_0^2)^{-1/2} d\varepsilon. \quad (37.12)$$

Здесь $N(0)$ — плотность состояний около уровня Ферми (напоминаем, что энергия ε отсчитывается от уровня Ферми *). Поскольку подинтегральная функция в (37.12) четная и интегрирование ведется в симметричных пределах, имеем из (37.12)

$$1 = N(0) V \int_0^{\hbar\omega_D} (\varepsilon^2 + \Delta_0^2)^{-1/2} d\varepsilon.$$

Этот интеграл элементарно интегрируется, в результате получаем

$$1/N(0) V = \text{Arsh}(\hbar\omega_D/\Delta_0), \quad (37.13)$$

или

$$\hbar\omega_D/\Delta_0 = \text{sh}(1/N(0) V).$$

Поскольку $N(0)V$ для большинства сверхпроводников имеет величину порядка 0,3 или меньше, можно легко получить приближенное равенство:

$$\Delta_0 \approx 2\hbar\omega_D \exp(-1/N(0) V). \quad (37.14)$$

Оценим величину Δ_0 : дебаевская температура $\hbar\omega_D \sim 400$ К, $N(0)V \sim 0,3$, тогда $\Delta_0 \sim 4$ К. Здесь мы энергии $\hbar\omega_D$ и Δ_0 выражаем в кельвинах.

Перейдем теперь к вычислению энергии основного состояния сверхпроводника. Общее выражение E_s для этой энергии дается формулой (37.6). Энергия основного состояния образца в нормальном состоянии, когда взаимодействие между электронами выключено и они заполняют все состояния под уровнем Ферми, дается формулой

$$E_n = \sum_{k < k_F} 2\varepsilon_k. \quad (37.15)$$

Здесь суммирование ведется сразу по парам состояний $(k, -k)$, поэтому и появился коэффициент 2.

Энергию основного состояния сверхпроводника будем теперь отсчитывать от энергии основного состояния нормального металла, т. е. найдем величину

$$W = E_s - E_n.$$

*) При переходе к формуле (37.12) мы учли, что интегрирование ведется по малому интервалу энергий ($2\hbar\omega_D$) по сравнению с фермиевской энергией ε_F . Поэтому можно считать, что плотность состояний $N(\varepsilon)$ мало меняется на этом интервале и равна своему значению на уровне Ферми $N(0)$.

Используя (37.6) и (37.15), имеем

$$W = \sum_{k < k_F} 2\varepsilon_k (v_k^2 - 1) + \sum_{k > k_F} 2\varepsilon_k v_k^2 - V \sum'_{kk'} v_k u_k v_{k'} u_{k'}. \quad (37.16)$$

Штрих у последней суммы означает, что суммирование ведется в k -пространстве по слою в интервале $\pm \hbar\omega_D$ около поверхности Ферми.

Подставляя сюда выражение для v_k^2 (37.10), после элементарных преобразований получим

$$W = \sum_{k < k_F} |\varepsilon_k| (1 - |\varepsilon_k|/E_k) + \sum_{k > k_F} \varepsilon_k (1 - \varepsilon_k/E_k) - V \sum'_{kk'} v_k u_k v_{k'} u_{k'} = 2 \sum_{k > k_F} \varepsilon_k (1 - \varepsilon_k/E_k) - V \sum'_{kk'} v_k u_k v_{k'} u_{k'}.$$

Учитывая определение Δ_0 (37.8), находим

$$\sum'_{kk'} v_k u_k v_{k'} u_{k'} = \Delta_0^2/V^2.$$

Отсюда легко получаем

$$W = 2 \sum_{k > k_F} \varepsilon_k (1 - \varepsilon_k/E_k) - \Delta_0^2/V.$$

Переходя от суммирования к интегрированию, имеем

$$W = 2N(0) \int_0^{\hbar\omega_D} \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2}}\right) d\varepsilon - \frac{\Delta_0^2}{V}.$$

После интегрирования получим

$$W = N(0) \Delta_0^2 \left\{ \left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0}\right)^2 - \frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0} \left[1 + \left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0}\right)^2\right]^{1/2} + \text{Arsh} \frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0} \right\} - \frac{\Delta_0^2}{V}.$$

Используя равенство (37.13) и неравенство $\hbar\omega_D \gg \Delta_0$, имеем окончательно

$$W = -\frac{1}{2} N(0) \Delta_0^2. \quad (37.17)$$

Мы видим, таким образом, что разность W между энергиями сверхпроводящего и нормального состояний при $T=0$ оказывается отрицательной, т. е. сверхпроводящее

состояние энергетически более выгодно. А это значит, что именно такое состояние и будет реализовываться природой.

В самом начале курса было установлено, что разность свободных энергий нормальной и сверхпроводящей фаз равна $H_{cm}^2/8\pi$, где H_{cm} — критическое термодинамическое поле. Отсюда сразу следует, что при $T=0$ должно выполняться следующее соотношение:

$$\frac{H_{cm}^2(0)}{8\pi} = \frac{1}{2} N(0) \Delta_0^2,$$

или

$$H_{cm}(0) = \Delta_0 \sqrt{4\pi N(0)}. \quad (37.18)$$

Мы получили, таким образом, термодинамическое критическое поле при $T=0$, выраженное через характерные параметры сверхпроводника — параметры его электронного спектра и электрон-фононного взаимодействия.

Проверим, насколько разумными окажутся численные оценки порядков величин, даваемые формулой (37.18). В 1 см^3 металла содержится $\sim 10^{22}$ электронов, а зона проводимости имеет ширину $\sim 10 \text{ эВ} = 10 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$, следовательно, оценка плотности состояний дает $N(0) \sim 10^{22}/10 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \sim 10^{33} \text{ эрг}^{-1} \text{ см}^{-3}$. Согласно предыдущим оценкам $\Delta_0 \sim 10 \text{ К} \sim 10^{-15} \text{ эрг}$. Отсюда сразу получим $H_{cm} \sim 10^{-15} (10^{34})^{1/2} = 100 \text{ Э}$. Это вполне разумная оценка критического поля.

§ 38. Спектр элементарных возбуждений сверхпроводника

38.1. Энергетическая щель. Сейчас мы познакомимся с одним из важнейших понятий микроскопической теории сверхпроводимости — с энергетической щелью в спектре элементарных возбуждений сверхпроводника.

Для этого зафиксируем наше внимание на какой-либо произвольной паре состояний $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$ в импульсном пространстве сверхпроводника, находящегося в основном состоянии. Какой вклад в полную энергию вносит эта пара? Обозначим этот вклад через $w_{\mathbf{q}}$. Из (37.6) сразу видно, что

$$w_{\mathbf{q}} = 2\varepsilon_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}}^2 - 2V v_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}. \quad (38.1)$$

Действительно, первое слагаемое здесь — кинетическая энергия пары $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$, а второе слагаемое — вклад в отри-

цательную часть энергии основного состояния, происходящий от того, что рассматриваемая пара участвует во всевозможных процессах взаимодействия, при которых она переходит в любые другие состояния $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ и наоборот — когда любые другие пары $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ переходят в наше выделенное для рассмотрения состояние $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$. Коэффициент 2 во втором слагаемом появился потому, что пара $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$ в сумме (37.6) встретится дважды — один раз при суммировании по \mathbf{k} , другой раз — при суммировании по \mathbf{k}' . Учитывая теперь выражение (37.8) для Δ_0 и формулы (37.9) и (37.10), получим

$$\begin{aligned} w_{\mathbf{q}} &= 2\varepsilon_{\mathbf{q}}^{1/2} (1 - \varepsilon_{\mathbf{q}}/E_{\mathbf{q}}) - 2 [1/4 (1 - \varepsilon_{\mathbf{q}}^2/E_{\mathbf{q}}^2)]^{1/2} \Delta_0 = \\ &= \varepsilon_{\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{q}}^2/E_{\mathbf{q}} - \Delta_0^2/E_{\mathbf{q}} = \varepsilon_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (38.2)$$

Воспользуемся теперь полученным выражением. Предположим, что в основном состоянии сверхпроводника пара состояний $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$ заведомо пуста. Введем в такой сверхпроводник один внешний электрон и поместим его в состояние \mathbf{q} . Какова будет теперь энергия системы? Поскольку мы ввели один электрон в состояние \mathbf{q} , то значит теперь пара состояний $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$ не может участвовать в процессах рассеяния, т. е. не может давать вклад в энергию основного состояния сверхпроводника. Этот вклад мы только что вычислили, он равен $w_{\mathbf{q}}$. Следовательно, энергия сверхпроводника с одним «лишним» электроном в состоянии \mathbf{q} будет

$$W_{\mathbf{q}} = W - w_{\mathbf{q}} + \varepsilon_{\mathbf{q}}. \quad (38.3)$$

Этот «лишний» неспаренный электрон мы будем называть элементарным возбуждением нашей системы, или квази-частицей. В формуле (38.3) W — энергия основного состояния сверхпроводника, а третье слагаемое учитывает просто кинетическую энергию нашего «лишнего» электрона. Подставляя (38.2) в (38.3), имеем

$$W_{\mathbf{q}} = W + E_{\mathbf{q}}. \quad (38.4)$$

Мы получили очень важную формулу. Поскольку, согласно (37.9),

$$E_{\mathbf{q}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{q}}^2 + \Delta_0^2},$$

ясно, что, добавляя один электрон к сверхпроводнику, находящемуся в основном состоянии, мы повышаем энергию системы минимум на величину Δ_0 (в том случае, если

$\varepsilon_q=0$, т. е. если состояние q находится на поверхности Ферми). Это значит, что спектр элементарных возбуждений сверхпроводника отделен от энергетического уровня, соответствующего основному состоянию сверхпроводника, энергетической щелью.

Действительно, вновь вернемся к сверхпроводнику в основном состоянии. Пусть в результате какого-то внешнего воздействия один из электронов пары (q , $-q$) переведен в соседнюю ячейку k -пространства. Напомним, что поскольку рассматривается основное состояние сверхпроводника, первоначально все ячейки в k -пространстве были

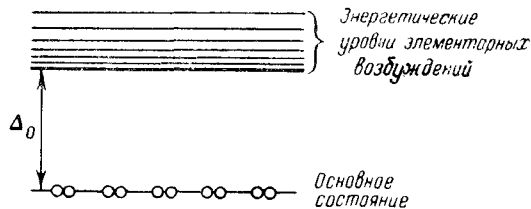


Рис. 38.1. Энергетическая щель Δ_0 отделяет область энергетических уровней элементарных возбуждений от уровня основного состояния (уровня конденсации электронных пар).

или попарно заполнены, или попарно пусты. Перевод одного из электронов пары (q , $-q$) в соседнюю ячейку означает появление двух неспаренных (возбужденных) электронов: один остается в одном из состояний (q , $-q$), а второй появляется в соседней ячейке и, конечно, не имеет парного себе в противоположной точке k -пространства. Согласно только что проведенному рассуждению на такой разрыв пары требуется энергия минимум $2\Delta_0$. Это можно схематически изобразить с помощью диаграммы (рис. 38.1). Все парные состояния сконденсированы на уровне, характеризующем основное состояние сверхпроводника. Лишний электрон на этом уровне оказаться не может и должен занять первый незанятый уровень спектра элементарных возбуждений. При разрыве пары оба электрона пары должны подняться на уровни спектра элементарных возбуждений, и поэтому должна быть затрачена энергия большая $2\Delta_0$.

Существование энергетической щели является очень важным свойством сверхпроводника и объясняет многие закономерности его поведения.

38.2. Плотность состояний элементарных возбуждений сверхпроводника и длина когерентности. На рис. 38.1 была схематически показана нижняя часть спектра элементарных возбуждений сверхпроводника. Используя формулу (37.9), легко получить выражение для плотности состояний в спектре элементарных возбуждений сверхпроводника. Действительно, E_k — это энергия элементарного возбуждения (см. формулу (38.4)), т. е. это величина,

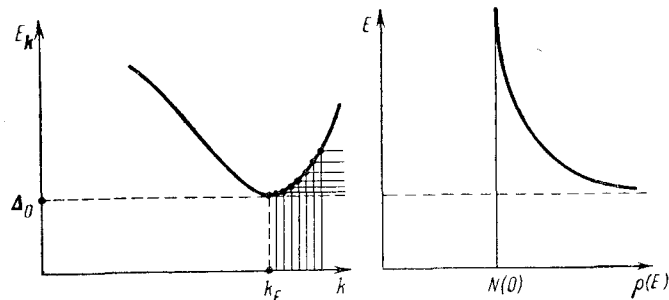


Рис. 38.2. Спектр элементарных возбуждений сверхпроводника E_k и плотность состояний $\rho(E)$.

на которую увеличивается энергия системы, если к сверхпроводнику добавляется электрон с импульсом k , причем

$$E_k = \sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_0^2} = \sqrt{(\hbar^2 k^2 / 2m - \hbar^2 k_F^2 / 2m)^2 + \Delta_0^2}.$$

Зависимость E_k от k , которая следует из приведенной выше формулы, изображена на рис. 38.2. Уже из рисунка видно, что уровни элементарных возбуждений сверхпроводника сгущаются при $E_k \rightarrow \Delta_0$. Плотность состояний или число энергетических уровней, приходящихся на единичный интервал энергии и на 1 см^3 материала, очевидно, равна

$$\rho(E) = d\nu/dE,$$

где $d\nu$ — число уровней в энергетическом интервале dE около уровня E . Но $d\nu/d\varepsilon$ — это плотность состояний около уровня Ферми для металла в нормальном состоянии, т. е.

$$d\nu/d\varepsilon = N(0).$$

Поэтому

$$\rho(E) = \frac{d\nu}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dE} = N(0) \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta_0^2}}. \quad (38.5)$$

Последняя формула показывает, что, действительно, плотность состояний для элементарных возбуждений сверхпроводника $\rho(E) \rightarrow \infty$ при $E \rightarrow \Delta_0$. Эта ситуация изображена на рис. 38.2.

Рассмотрим теперь, как микроскопическая теория сверхпроводимости позволяет оценить длину когерентности сверхпроводника. Волновая функция основного состояния сверхпроводника нами уже рассматривалась в п. 37.1. Основное состояние может быть изображено распределением спаренных электронов в k -пространстве, что дается функцией v_k^2 . График зависимости v_k^2 от k представлен на рис. 37.3. Видно, что область k -пространства, где функция v_k^2 испытывает сильные изменения, имеет порядок

$$\Delta k \sim 2\Delta_0 \frac{k_F}{v_F}.$$

Отсюда следует, что область Δx в x -пространстве, где волновая функция основного состояния сверхпроводника будет существенно изменяться, должна определяться соотношением

$$\Delta x \Delta k \sim 1.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta x \sim \frac{v_F^2}{2\Delta_0 k_F} = \frac{1}{2\Delta_0 k_F} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar p_F}{4\Delta_0 m} = \frac{\hbar v_F}{4\Delta_0}. \quad (38.6)$$

Здесь p_F — импульс электрона на поверхности Ферми, v_F — фермиевская скорость электрона. Но по самому смыслу Δx — это как раз та величина, которую при изучении теории Гинзбурга—Ландау мы называли длиной когерентности ξ . Поэтому мы теперь можем говорить, что из (38.6) следует оценка для длины когерентности ξ_0 при $T=0$:

$$\xi_0 \sim \hbar v_F / 4\Delta_0. \quad (38.7)$$

Скоро будет показано, что $\Delta_0 \sim k_B T_c$, где k_B — постоянная Больцмана, T_c — критическая температура. Точный расчет дает

$$\xi_0 = 0,18 \hbar v_F / k_B T_c. \quad (38.8)$$

Эту величину ξ_0 можно также рассматривать как размер электронной пары, для оценки которого можно принять, что $v_F \sim 10^8$ см/с, $T_c \sim 1$ К, тогда

$$\xi_0 \approx 0,18 \frac{10^{-27} \cdot 10^8}{1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 1} \sim 10^{-4} \text{ см.}$$

Это очень большое, вполне макроскопическое расстояние.

Задача 38.1. Во сколько раз плотность состояний в спектре элементарных возбуждений сверхпроводника больше плотности состояний электронов в нормальном металле около уровня Ферми для энергий возбуждений E , равных соответственно $1,01 \Delta_0$; $1,5 \Delta_0$; $2,0 \Delta_0$?

Ответ. $\rho/N(0) = 7,12$; $1,34$; $1,15$.

38.3. Зависимость величины энергетической щели от температуры. Энергетическая щель Δ уменьшается с повышением температуры (обозначение Δ_0 мы сохраним только для случая $T=0$). Это можно легко понять. Как мы уже знаем, для разрыва пары и создания двух элементарных возбуждений требуется затратить энергию 2Δ . Если температура сверхпроводника T такова, что $k_B T \sim 2\Delta$, то ясно, что уже много электронных пар будет разорвано под влиянием теплового воздействия и соответственно в k -пространстве будет уже много ячеек заполнено элементарными возбуждениями (одиночными электронами). Но это значит, что эти состояния в k -пространстве уже не будут участвовать во взаимных переходах пар и, соответственно, не будут участвовать в общем понижении энергии сверхпроводника, т. е. энергия сверхпроводника повысится. Эти же состояния, очевидно, не будут теперь участвовать и в формировании щели (см. (37.8)). Отсюда следует, что чем больше будет разорванных пар, тем больше элементарных возбуждений и тем меньше щель.

Теперь проведем количественный анализ.

Поскольку элементарные возбуждения подчиняются статистике Ферми—Дирака, вероятность заполнения состояния k одиночным электроном равна

$$f_k = \frac{1}{\exp(E_k/k_B T) + 1}, \quad (38.9)$$

где E_k — энергия элементарного возбуждения. Легко видеть, что $f_k \ll 1$ при $k_B T \ll E_k$, $f_k \approx 1/2$ при $k_B T \gg E_k$. Если хотя бы одно из состояний (k) или ($-k$) заполнено, то пара состояний (k , $-k$) не может участвовать в создании сверх-

проводящего состояния. Вероятность этого равна $2f_{\mathbf{k}}$. Отсюда следует, что вероятность того, что пара состояний $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ может участвовать в рассеяниях, т. е. годится для участия в создании сверхпроводящего состояния, равна $1 - 2f_{\mathbf{k}}$.

Тогда выражение для полной энергии сверхпроводника при $T \neq 0$ может быть записано в виде (см. § 37)

$$W = \sum_{\mathbf{k}} 2|\epsilon_{\mathbf{k}}|f_{\mathbf{k}} + 2 \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}}(1 - 2f_{\mathbf{k}})v_{\mathbf{k}}^2 - \\ - V \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}'}u_{\mathbf{k}'}(1 - 2f_{\mathbf{k}})(1 - 2f_{\mathbf{k}'}). \quad (38.10)$$

Здесь первое слагаемое — кинетическая энергия элементарных возбуждений, второе слагаемое — кинетическая энергия сверхпроводящих электронов, последний член — энергия взаимодействия сверхпроводящих электронов через фононы, которая и приводит к созданию сверхпроводящего состояния. Последние два множителя учитывают вероятность такого взаимодействия.

Плотность свободной энергии сверхпроводника равна

$$F = W - TS, \quad (38.11)$$

где S — энтропия материала. Функции $v_{\mathbf{k}}^2$, характеризующие распределение сверхпроводящих электронов по импульсам и соответствующие термодинамическому равновесию, определим из условия минимальности плотности свободной энергии F :

$$\partial F / \partial (v_{\mathbf{k}}^2) = 0. \quad (38.12)$$

Подставляя в (38.12) формулы (38.11) и (38.10), получим

$$\frac{v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}}}{1 - 2v_{\mathbf{k}}^2} = \frac{\Delta}{2\epsilon_{\mathbf{k}}}, \quad (38.13)$$

где

$$\Delta = V \sum_{\mathbf{k}}' v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}}(1 - 2f_{\mathbf{k}}). \quad (38.14)$$

Формула (38.14) дает выражение для зависимости щели от температуры. При $T \rightarrow 0$ щель $\Delta \rightarrow \Delta(0)$, где $\Delta(0) = \Delta_p$ — щель при $T = 0$, полученная ранее (37.8),

Из (38.14) находим уравнение для щели. Для этого, как и в (37.10), запишем $v_{\mathbf{k}}^2$ в виде

$$v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{\mathbf{k}}/E_{\mathbf{k}}),$$

где

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\epsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2(T)}.$$

Тогда уравнение (38.14) примет вид

$$\Delta = V \sum_{\mathbf{k}}' \frac{\Delta}{2E_{\mathbf{k}}} \left(1 - \frac{2}{\exp(E_{\mathbf{k}}/k_{\text{B}}T) + 1}\right).$$

Переходя от суммирования к интегрированию, после сложных преобразований получим

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_{\text{D}}} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}} \operatorname{th} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}}{2k_{\text{B}}T}. \quad (38.15)$$

Эта формула дает в неявной форме зависимость щели от температуры. Эта зависимость изображена на рис. 38.3.

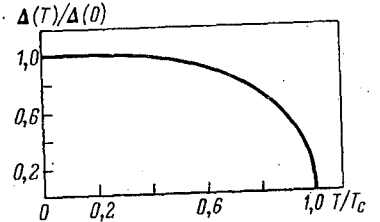


Рис. 38.3. Зависимость энергетической щели от температуры согласно теории БКШ.

Вблизи T_c зависимость щели от температуры определяется формулой $\Delta \sim (T_c - T)^{1/2}$. Из (38.15) можно теперь найти явное выражение для критической температуры T_c . Действительно, при $T = T_c$ щель $\Delta = 0$, поэтому, если написать в (38.15) T_c вместо T и положить $\Delta = 0$, мы получим уравнение относительно T_c :

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_{\text{D}}} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2k_{\text{B}}T_c}. \quad (38.16)$$

Проведя интегрирование, получим

$$k_{\text{B}}T_c = 1,14\hbar\omega_{\text{D}}e^{-1/N(0)V}, \quad (38.17)$$

С другой стороны, нам уже известно (37.14), что

$$\Delta_0 = 2\hbar\omega_D e^{-1/N(0)V}.$$

Отсюда сразу находим

$$2\Delta_0 = 3,52k_B T_c. \quad (38.18)$$

Эти соотношения находятся в хорошем количественном согласии с многочисленными экспериментами. Обсудим еще раз физический смысл полученных результатов.

Под влиянием тепла некоторые пары разрушаются и возникают неспаренные электроны, или нормальные электроны, или элементарные возбуждения. Это просто разные названия одного и того же физического объекта. Заполняя какие-то ячейки k -пространства, эти одиночные электроны исключают соответствующие ячейки (и парные им) из суммы (37.8), которая определяет щель Δ . В результате щель сужается. Нормальное состояние достигается тогда, когда Δ становится равной нулю. Это позволяет определить критическую температуру согласно (38.17).

Замечательно, что формула (38.17) дает объяснение изотоп-эффекта. Напомним, что изотоп-эффект заключается в том, что критическая температура разных изотопов одного и того же сверхпроводящего элемента определяется эмпирической формулой

$$T_c M^{1/2} = \text{const},$$

где M — масса атома изотопа. Поскольку дебаевская частота

$$\omega_D \sim M^{-1/2},$$

то из (38.17) сразу следует изотоп-эффект.

Задача 38.2. Определить константу связи $g = N(0)V$ для олова, если $T_c = 3,74$ К, а дебаевская температура равна $\Theta_D = 195$ К.

Решение. Используя формулу (38.17), получим $g = 0,245$.

Задача 38.3. Критическая температура смеси изотопов ртути со средним атомным весом 199,7 г равна 4,161 К. На сколько и в какую сторону изменится критическая температура для смеси со средним атомным весом 200,7 г.

Ответ. Понизится на 0,01 К.

Задача 38.4. Туннельный эксперимент (см. § 39) дал для индия значение энергетической щели $\Delta_0 = 5,3 \cdot 10^{-4}$ эВ. Какой должна быть согласно теории БКШ критическая температура индия? Сравнить с T_c индия 3,37 К.

Ответ. $T_c = 2\Delta_0 / (3,52 k_B) = 3,49$ К.

§ 39. Туннельные эффекты в сверхпроводниках

Наиболее прямое измерение энергетической щели в сверхпроводниках может быть проведено с помощью туннельных экспериментов. Эту методику разработал Гевер в 1960 г. [51]. В принципе она очень проста (рис. 39.1). На стеклянную пластинку с заранее подготовленными контактами наносится узкая полоска пленки первого металла. Затем эта полоска окисляется так, чтобы пленка оказалась покрытой слоем изолирующего окисла толщиной в несколько десятков ангстрем (барьерный слой). После этого

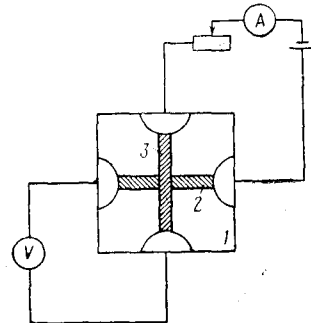


Рис. 39.1. Схема эксперимента для изучения туннельного эффекта: 1 — стеклянная пластинка, 2 — пленка первого металла, 3 — пленка второго металла.

в поперечном направлении наносится узкая полоска пленки второго металла. Место пересечения этих двух полосок (площадью ~ 1 мм²) и представляет собой туннельный переход. Исследование заключается в изучении вольт-амперной характеристики такого перехода. Физика дела заключается в том, что здесь используется специфическое квантомеханическое свойство электрона проходить тонкие потенциальные барьеры (в данном случае — слой окисла) посредством так называемого туннельного перехода.

Обсудим теперь, какой вид будут иметь вольтамперные характеристики для разных случаев туннельных переходов.

Простейший случай — когда и первый и второй металлы — нормальные металлы. При установлении контакта между металлами их уровни Ферми уравниваются за счет возникновения контактной разности потенциалов. Энергетическая диаграмма изображена на рис. 39.2, а. Если теперь на туннельный переход подать разность потенциалов V (рис. 39, 2, б), то уровни Ферми металлов разойдутся на величину eV , и возникнет туннельный ток. Если предположить, что плотность состояний в интересующей нас области энергий остается постоянной ($N(0)$),

то из рис. 39, 2, б ясно, что сила тока будет пропорциональна eV , т. е. будет выполняться закон Ома.

Рассмотрим теперь случай, когда первый металл — нормальный, а второй — сверхпроводник. Мы уже знаем, какой вид имеет спектр элементарных возбуждений сверхпроводника (рис. 38.1 и рис. 38.2). Энергия элементарных возбуждений отсчитывается от уровня основного состояния сверхпроводника. В нормальном металле энергия элементарного возбуждения отсчитывается от уровня Ферми. Поэтому при создании туннельного контакта между

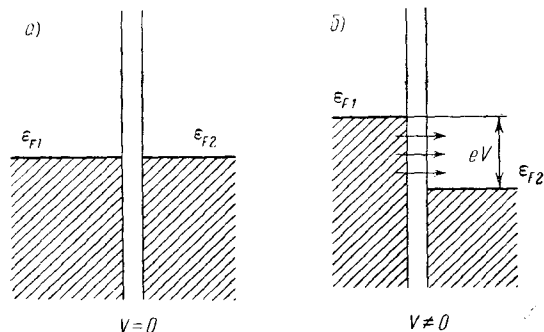


Рис. 39.2. Энергетическая диаграмма для случая контакта двух нормальных металлов: а) $V=0$, б) $V \neq 0$, идет туннельный ток $\sim eV$.

нормальным металлом и сверхпроводником за счет контактной разности потенциалов должны уравниваться уровень Ферми нормального металла и уровень основного состояния сверхпроводника. Именно это состояние изображено на рис. 39, 3, а.

Рассмотрим сперва случай, когда $T=0$.

Приложим к туннельному переходу некоторую разность потенциалов V . Пусть в результате этого уровень Ферми нормального металла поднялся над уровнем основного состояния сверхпроводника на величину eV . Из рис. 39.3, б ясно, что туннельный ток электронов из N в S может начаться только тогда, когда величина eV станет равной энергетической щели Δ в S или превзойдет ее. Тот же результат получится, если поменять полярность приложенного к переходу напряжения. Теперь туннелирование электрона из S в N будет происходить тогда, когда окажется энергетически допустимым разрыв электронной пары в S , т. е. когда энергия, выделявшаяся при туннелировании одного электрона пары окажется достаточной,

чтобы закинуть второй электрон этой пары в область разрешенных энергий для одиночных электронов, т. е. выше щели (см. рис. 39.3, в).

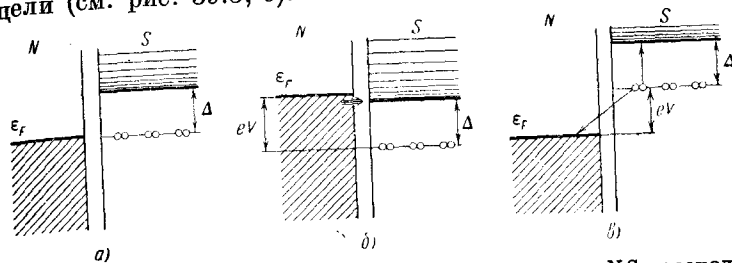


Рис. 39.3. Энергетическая диаграмма для туннельного NS -перехода: а) $V=0$, уровень ϵ_F противостоит уровню основного состояния сверхпроводника, б) $V \neq 0$, $|eV| > \Delta$, идет туннельный ток электронов из N в S , в) $V \neq 0$, $|eV| > \Delta$, идет туннельный ток электронов из S в N .

Таким образом, вольтамперная характеристика такого туннельного перехода будет нечетной функцией V . Она изображена на рис. 39.4.

В случае, если $T \neq 0$, то, как нетрудно сообразить, вольтамперная характеристика будет несколько размазанной.

Переходим к рассмотрению туннельных эффектов, когда оба металла (S_1 и S_2) являются сверхпроводниками. Здесь случаи $T=0$ и $T \neq 0$ различаются принципиально.

Сперва рассмотрим случай $T=0$. Согласно рис. 39.5 туннельный ток может возникнуть только тогда, когда

к туннельному переходу будет приложено напряжение $V > (\Delta_1 + \Delta_2)/e$. Действительно, только в этом случае возможен процесс, изображенный на этом рисунке: электронная пара в S_1 разрывается, один из электронов этой пары туннелирует в S_2 с выделением энергии равной или большей, чем Δ_1 . При этом второй электрон разорванной пары, поглощая эту энергию, возбуждается в состоянии спектра квазичастиц S_1 .

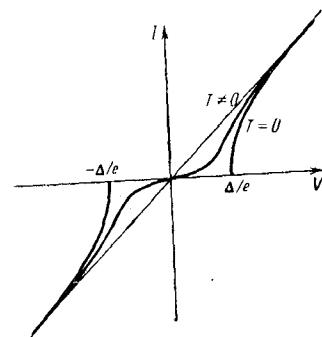


Рис. 39.4. Вольтамперная характеристика туннельного NS -перехода.

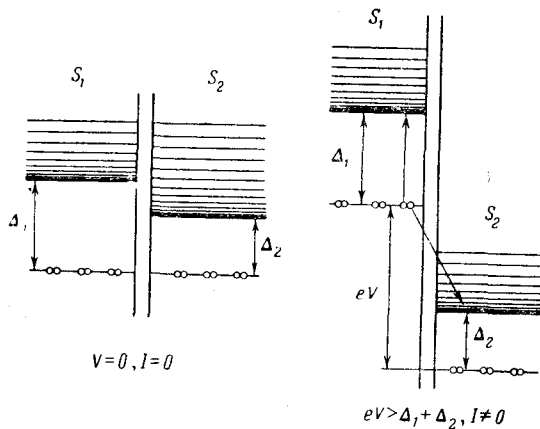


Рис. 39.5. Энергетические диаграммы для туннельного перехода S_1S_2 , $T=0$.

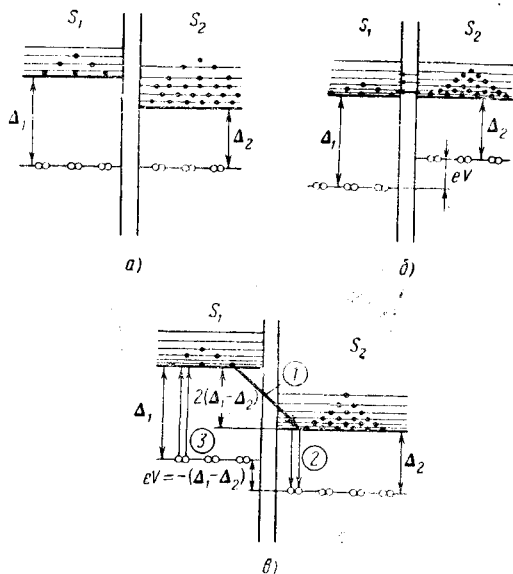


Рис. 39.6. Туннелирование между двумя сверхпроводниками при $T \neq 0$: а) $V=0$, концентрация возбуждений с одинаковой энергией в S_1 и S_2 одинакова, поэтому ток равен нулю; б) $eV = \Delta_1 - \Delta_2$, ток обусловлен переходом возбужденных частиц из S_2 в S_1 ; в) $eV = -(\Delta_1 - \Delta_2)$, возбужденная частица переходит из S_1 в S_2 (процесс 1), объединившись с электронами в S_2 , она образует пару и попадает на основной уровень (процесс 2), выделившей энергии $2\Delta_1$ достаточно для разрыва пары в S_1 (процесс 3).

Для реального случая, когда $T \neq 0$, картина будет несколько более сложной. Теперь в каждом из сверхпроводников имеется какое-то количество возбужденных одиночных электронов, равновесное количество которых определяется температурой.

Энергетические диаграммы туннельного перехода в этом случае изображены на рис. 39.6. Количество возбуждений в данной области спектра схематично изображается количеством точек на данном энергетическом уровне. Видно, что если $V=0$ (рис. 39.6, а), то, несмотря

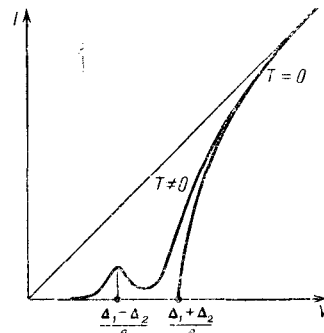


Рис. 39.7. Вольтамперная характеристика туннельного перехода S_1S_2 .

на то, что щели в S_1 и S_2 разные, количество возбуждений на противостоящих друг другу уровнях в S_1 и S_2 будет одинаково. Поэтому количество частиц, туннелирующих из S_1 в S_2 будет равно тому же числу частиц, туннелирующих из S_2 в S_1 , т. е. как это и должно быть, в равновесных условиях полный туннельный ток $I=0$.

Если теперь приложить даже небольшое напряжение V , то равновесие нарушится и возникнет ток квазичастиц из одного сверхпроводника в другой. Не будем, однако, забывать, что плотность состояний квазичастиц в сверхпроводнике имеет особенность при $E = \Delta$ (см. (38.5) и рис. (38.2)). Поэтому если приложить к переходу разность потенциалов V такую, что $eV = \Delta_1 - \Delta_2$ (рис. 39.6, б), то друг против друга окажутся области с плотностью состояний $\rho = \infty$ и в S_1 , и в S_2 . Естественно, это вызовет большой всплеск туннельного тока. Дальнейшее увеличение V приведет к тому, что уровни с $\rho = \infty$ разойдутся и полный туннельный ток уменьшится. Отсюда можно сделать вывод, что при $V = (\Delta_1 - \Delta_2)/e$ на вольтамперной характеристике должен наблюдаться максимум тока (рис. 39.7). При изменении знака V возникнет диаграмма, изображенная на рис. 39.6, в. Здесь тоже возникнет

всплеск тока при $|V| = (\Delta_1 - \Delta_2)/e$. Таким образом, и в случае контакта двух сверхпроводников вольтамперная характеристика будет нечетной функцией напряжения V .

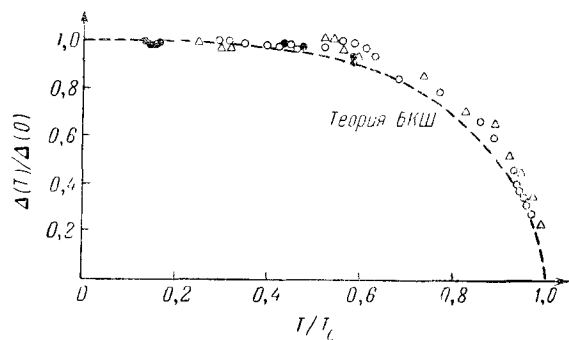


Рис. 39.8. Экспериментальные результаты изучения температурной зависимости энергетической щели в индии (светлые кружки), олове (треугольники) и свинце (черные кружки). Штриховая линия — зависимость $\Delta(T)$ согласно теории БКШ.

В заключение приведем результат туннельного эксперимента Гевера и Мегерле [52] по изучению величины энергетической щели в различных сверхпроводниках и ее зависимости от температуры (рис. 39.8). Штриховой линией показана зависимость, следующая из теории Бардина—Купера—Шриффера.

§ 40. Незатухающий ток и эффект Мейсснера—Оксенфельда

В этой главе были изложены основы современных представлений о природе сверхпроводящего состояния. Было описано основное состояние сверхпроводника, исследован спектр элементарных возбуждений, доказано существование энергетической щели. Но у читателя давно, по-видимому, возник вопрос: «А где доказательство того, что все, что было изложено, имеет хоть какое-то отношение к сверхпроводимости?». Ведь, в конце концов, все, что мы сейчас знаем по микроскопической теории сверхпроводимости, сводится к следующему.

Наличие электрон-фононного взаимодействия в некоторых металлах может привести к эффективному притяжению электронов металла друг к другу. Это приводит

к понижению энергии основного состояния, которое теперь представляет собой размазанное около поверхности Ферми распределение электронов в k -пространстве. Спектр элементарных возбуждений такого материала имеет энергетическую щель, т. е. первые разрешенные уровни спектра элементарных возбуждений отделены от уровня основного состояния энергетической щелью. Но мы до сих пор никак не показали, что материал, обладающий этими свойствами, — сверхпроводник.

Сейчас мы покажем, как из существования энергетической щели следует возможность незатухающего тока — основного свойства сверхпроводника. Для того чтобы это лучше понять, обратимся сперва к нормальному металлу. Нас будет интересовать распределение электронов нормального металла в k -пространстве, когда по металлу идет постоянный ток. Если тока нет, то при $T=0$ все электроны заполняют состояния внутри сферы Ферми, и все состояния вне этой сферы пусты. Создадим в металле электрическое поле (пусть в направлении оси x), тогда электроны начнут ускоряться в этом направлении, а ускоренному движению электронов в x -пространстве будет отвечать равномерное движение с постоянной скоростью электронов в k -пространстве. В результате вся сфера Ферми начнет с постоянной скоростью перемещаться в k -пространство в направлении оси k_x . Так будет происходить до тех пор, пока мы можем пренебрегать процессами соударений электронов с примесями и дефектами кристаллической решетки. Если эти процессы учесть, то окажется, что в результате рассеяния электроны, имеющие максимальное значение компоненты импульса k_x , будут перекидываться в свободные ячейки k -пространства и, в конце концов, возникнет динамическое равновесие. Это значит, что, несмотря на электрическое поле и равномерное движение электронов в k -пространстве в направлении оси k_x , рассеяние на дефектах приводит к тому, что в целом распределение электронов в k -пространстве становится стационарным. Сфера Ферми оказывается несколько сдвинутой относительно начала координат, что естественно для токового состояния. Рассеяние электронов приводит к передаче энергии решетке, к разогреву проводника.

Теперь рассмотрим сверхпроводник. Ток в сверхпроводнике (в отсутствие электрического поля!) может возникнуть, если все электронные пары будут иметь один и тот же импульс K . Пусть ток течет вдоль оси x сверхпро-

проводника, т. е. $\mathbf{K} = (K, 0, 0)$. Это значит, что «размазанная» сфера Ферми будет сдвинута в k -пространстве на величину $K/2$ в направлении оси k_x . Это схематически изображено на рис. 40.1. Проследим за поведением показанной там электронной пары (1, 2), имеющей импульсы $(k_F + K/2, 0, 0)$. Электрону 1, имеющему наибольшую кинетическую энергию $(\hbar^2/2m)(k_F + K/2)^2$, конечно, было бы выгодно перейти в свободную ячейку где-нибудь

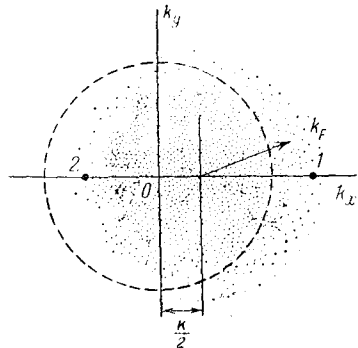


Рис. 40.1. Токовое состояние в сверхпроводнике. Вся «размазанная» сфера Ферми сдвинута на $K/2$.

около электрона 2. При этом энергия системы понизится на величину

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left(k_F + \frac{K}{2}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \left(k_F - \frac{K}{2}\right)^2 = \frac{\hbar^2}{m} k_F K.$$

Но тогда пара (1, 2) будет разрушена, и, как мы уже знаем, энергия системы повысится на 2Δ , где Δ — энергетическая щель, m — масса электрона, k_F — радиус сферы Ферми.

Отсюда ясно, что при достаточно маленьких токах (достаточно малых K) выигрыш в энергии $\hbar^2 k_F K/m$ не может компенсировать проигрыш 2Δ и пара разрываться не будет. Конечно, в целом такое состояние энергетически менее выгодно, чем состояние без тока ($K=0$), но оно может оказаться метастабильным и существовать бесконечно долго. Примером тому служит замкнутое сверхпроводящее кольцо с током. Разрушение такого состояния начнется тогда, когда разрыв пар станет энергетически оправданным. Правильную оценку мы получим, если напишем

$$\hbar^2 k_F K_c/m \approx 2\Delta,$$

где K_c — критический импульс пары. Следовательно, критический импульс пары равен

$$P_c = \hbar K_c \approx 2m\Delta/p_F = 2\Delta/v_F, \quad (40.1)$$

здесь v_F — скорость электрона на поверхности Ферми. Оценим, какой плотности тока соответствует такой критический импульс. Поскольку критическая скорость пары

$$v_c = P_c/2m, \quad (40.2)$$

то критическая плотность тока, согласно (40.1) и (40.2), будет

$$j_c = n_s e v_c = n_s e \frac{\Delta}{m v_F}, \quad (40.3)$$

где n_s — плотность сверхпроводящих электронов, которая при $T=0$ просто равна электронной плотности металла. Выражая n_s через лондоновскую глубину проникновения магнитного поля λ , согласно (5.7), и Δ_0 через длину когерентности ξ_0 , согласно (38.7), получим окончательно плотность критического тока при $T=0$ в виде

$$j_c = \frac{\hbar c^2}{16\pi e} \frac{1}{\lambda^2 \xi_0}. \quad (40.4)$$

Оценим порядок получившейся величины. Пусть $\lambda \sim 10^{-5}$ см, $\xi_0 \sim 10^{-4}$ см, тогда

$$j_c \sim \frac{10^{-27} (3 \cdot 10^{10})^2}{16\pi \cdot 4,8 \cdot 10^{-10}} \frac{1}{(10^{-5})^2 10^{-4}} \sim 4 \cdot 10^{15} \text{ абс. ед.}$$

Учитывая, что 1А содержит $3 \cdot 10^9$ абс. ед. силы тока, имеем

$$j_c = \frac{4 \cdot 10^{15}}{3 \cdot 10^9} \approx 1,3 \cdot 10^6 \text{ А/см}^2.$$

Выразим критическую плотность тока j_c в формуле (40.3) через $H_{cm}(0)$ и λ . Воспользовавшись выражением для плотности состояний у поверхности Ферми $N(0) = k_F m / (\pi^2 \hbar^2)$, формулой (37.18), выражением для электронной плотности $n_s = k_F^3 / 3\pi^2$ и формулой (38.7), получим

$$j_c = \frac{1}{\sqrt{3} 4\pi} \frac{c H_{cm}(0)}{\lambda}. \quad (40.5)$$

Интересно сравнить результат (40.5) с плотностью критического тока, полученной в теории Гинзбурга—Ландау

параметру порядка Ψ теории ГЛ. Действительно, точный результат таков:

$$\Psi_p = \left[\frac{7\zeta(3) m v_F^2 N(0)}{2\pi^2 k_B^2 T_c^2} \right]^{1/2} \Delta(r), \quad \zeta(3) \approx 1,202,$$

$$\Psi_d = \left[\frac{\pi m v_F N(0) l}{12 \hbar k_B T_c} \right]^{1/2} \Delta(\mathbf{r}),$$

здесь $\zeta(x)$ — функция Римана.

При $T \rightarrow T_c$ имеем

$$\Delta(T) = \left(\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} \right)^{1/2} k_B T_c (1 - T/T_c)^{1/2},$$

или

$$\Delta(T) \approx 3,1 k_B T_c (1 - T/T_c)^{1/2}.$$

Длина когерентности и глубина проникновения магнитного поля равны соответственно

$$\xi_p = 0,74 \xi_0 (1 - T/T_c)^{-1/2},$$

$$\xi_d = 0,85 (\xi_0 l)^{1/2} (1 - T/T_c)^{-1/2},$$

$$\lambda_p = \frac{\lambda(0)}{\sqrt{2}} (1 - T/T_c)^{-1/2},$$

$$\lambda_d = 0,615 \lambda(0) (\xi_0/l)^{1/2} (1 - T/T_c)^{-1/2},$$

$$\lambda^2(0) = \frac{3c^2}{8\pi e^2 v_F^2 N(0)}.$$

Коэффициенты α и β разложения свободной энергии по степеням параметра Ψ в теории ГЛ:

$$\alpha_p = 1,83 \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\xi_0^2} \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right), \quad \alpha_d = 1,36 \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\xi_0 l} \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right),$$

$$\beta_p = 0,35 \frac{1}{N(0)} \left(\frac{\hbar^2}{2m\xi_0^2} \right)^2 \frac{1}{(k_B T_c)^2},$$

$$\beta_d = 0,2 \frac{1}{N(0)} \left(\frac{\hbar^2}{2m\xi_0 l} \right)^2 \frac{1}{(k_B T_c)^2}.$$

Параметр теории ГЛ:

$$\kappa_p = 0,96 \lambda(0)/\xi_0, \quad \kappa_d = 0,725 \lambda(0)/l.$$

Установим теперь область применимости уравнений теории ГЛ. В разложении (14.1) плотности гиббсовской свободной энергии $G_{св}$ по степеням $|\i\hbar \nabla \Psi - (2e/c) A \Psi|^2$ учтен только первый член. Это означает, что предполагаются медленные изменения Ψ и A на расстояниях, сравнимых с характерным размером неоднородности в сверхпроводнике, т. е. с размером куперовской пары.

В случае чистого сверхпроводника, когда длина свободного пробега электрона $l \gg \xi_0$, имеем поэтому следующее условие применимости теории ГЛ: $\xi(T), \lambda(T) \gg \xi_0$. Поскольку $\xi(T) \sim \xi_0 (1 - T/T_c)^{-1/2}$, то при $T \sim T_c$ величина $\xi(T)$ всегда больше ξ_0 , и первое условие применимости удовлетворяется автоматически.

Рассмотрим второе условие: $\lambda(T) \gg \xi_0$. Это есть требование справедливости локальной электродинамики, требование того, чтобы сверхпроводник был лондоновским. Поскольку $\lambda(T) \sim \lambda(0) (1 - T/T_c)^{-1/2}$, а $\lambda(0) \sim \lambda(0)/\xi_0$, условие $\lambda(T) \gg \xi_0$ превращается в условие

$$\kappa^2 \gg 1 - T/T_c. \quad (41.1)$$

Это довольно жесткое условие, поскольку в сверхпроводниках первого рода κ может быть малой величиной. Так, $\kappa(\text{Al}) = 0,01$, $\kappa(\text{Pb}) = 0,23$.

В «грязных» сверхпроводниках ($l \ll \xi_0$) область применимости теории ГЛ значительно шире. Теперь характерный масштаб неоднородности — это длина свободного пробега l , поэтому условия применимости теории ГЛ имеют вид $\xi(T), \lambda(T) \gg l$. Поскольку $\xi(T) \sim (\xi_0 l)^{1/2} \times (1 - T/T_c)^{-1/2}$, условие $\xi(T) \gg l$ принимает вид $\xi_0/l \gg 1 - T/T_c$. Но поскольку $\xi_0 \gg l$, то это условие гораздо шире общего условия справедливости теории Ландау фазовых переходов второго рода: $T_c - T \ll T_c$.

Рассмотрим второе условие: $\lambda(T) \gg l$. Учитывая, что в грязном случае $\lambda(T) \sim \lambda(0) (\xi_0/l)^{1/2} (1 - T/T_c)^{-1/2}$ и $\lambda(0) \sim \lambda(0)/l$, второе условие можно записать в виде $\kappa^2 (\xi_0/l) \gg 1 - T/T_c$. Если $\kappa \sim 1$, то снова это условие значительно шире общего условия $T_c - T \ll T_c$.

Итак, в случае грязного сверхпроводника (сплава) теория ГЛ справедлива в весьма широких температурных пределах (по крайней мере качественно), а количественно — при условии $T_c - T \ll T_c$.

Вопрос о том, что происходит со сверхпроводником, когда он выведен из равновесия, как он релаксирует к равновесному состоянию, обсуждается в очень многих работах последнего времени. Сейчас — это, по-видимому, один из самых актуальных вопросов физики сверхпроводников.

В чем же дело? Почему проблема изучения неравновесных свойств сверхпроводников вдруг оказалась столь важной и интересной? Думается, что это произошло, потому что в сверхпроводнике существуют «разные коллективы» электронов: сверхпроводящие электроны, электроноподобные возбуждения, дырки. То, что стало понятно после появления теории БКШ, относилось к случаю, когда эти «коллективы» находились в равновесии друг с другом, да вдобавок еще и с решеткой. Картина становится значительно богаче, если равновесие нарушить. Понимая, как протекает процесс установления равновесия, мы значительно лучше начинаем понимать самые основы теории, вырабатываем более адекватные природе представления. Кроме того, нельзя упускать из виду, что многие успешно работающие устройства криогенной электроники функционируют в условиях далеких от равновесия, и поэтому изучение неравновесных процессов имеет еще и чисто прикладное значение.

В этой главе мы рассмотрим несколько случаев, когда неравновесное состояние сверхпроводника становится определяющим для протекающих в нем физических процессов.

§ 42. Квазичастицы: электроны и дырки

В главе 6 мы уже говорили об элементарных возбуждениях (квазичастицах) в сверхпроводниках. Теперь мы уточним это понятие.

Начнем с нормального металла. Основное состояние (без элементарных возбуждений, при $T=0$) — это такое,

при котором все свободные электроны металла заполняют все ячейки k -пространства внутри сферы Ферми, а все ячейки вне этой сферы свободны. Введем теперь в нормальный металл один лишний электрон. Он займет какую-то ячейку k в k -пространстве ($k > k_F$, где k_F — радиус сферы Ферми), и энергия всей системы электронов увеличится на $\hbar^2(k^2 - k_F^2)/2m$. При этом мы условимся отсчитывать энергию от энергии Ферми $\hbar^2 k_F^2/2m$. Это и будет энергия элементарного возбуждения. А импульс всей системы будет равен k . Это и будет импульс элементарного возбуждения.

Снова рассмотрим основное состояние нормального металла, удалив теперь оттуда один электрон из ячейки k ($k \ll k_F$). Такое состояние тоже можно рассматривать как элементарное возбуждение системы, так как энергия этого состояния больше энергии основного состояния оставшейся системы электронов на величину $\hbar^2(k_F^2 - k^2)/2m$. Действительно, основное состояние получится, если взять один электрон из ячейки на поверхности Ферми и положить его в пустую ячейку k . Импульс такого элементарного возбуждения равен импульсу всей системы электронов, т. е. равен $-k$. Это элементарное возбуждение (квазичастица) ведет себя подобно положительному заряду и называется дыркой. Энергетический спектр элементарных возбуждений нормального металла показан на рис. 42.1 тонкими прямыми линиями.

В сверхпроводнике все будет несколько сложнее. Мы уже знаем (гл. 6), что в сверхпроводнике основное состояние характеризуется функцией u_k^2 , которая представляет собой вероятность заполнения электронами парных ячеек ($k, -k$). Вид этой функции показан на рис. 37.3. Введем в сверхпроводник один лишний электрон. Он займет какую-то свободную ячейку k -пространства, причем ячейка $-k$ остается свободной. Но теперь в сверхпроводнике эта ячейка k может быть как вне, так и внутри сферы Ферми. Ведь и в основном состоянии некоторые ячейки с $k < k_F$ остаются пустыми! Итак мы видим, что электроноподобная квазичастица в сверхпроводнике может иметь импульс k как больший, так и меньший k_F .

Если же мы удалим один электрон из сверхпроводника, находящегося в основном состоянии, скажем, из ячейки $-k$, то в сверхпроводнике будет один неспаренный электрон в ячейке k . Такая квазичастица ведет себя как дырка, но теперь опять k может быть как больше, так и меньше k_F .

Ясно поэтому, что возбуждение в сверхпроводнике, когда ячейка k занята, а ячейка $-k$ свободна, обладает

одновременно как свойствами электрона, так и дырки. Все дело в вероятности того или другого состояния. Образование дырки должно быть пропорционально вероятности того, что ячейка k заполнена сверхпроводящим электроном, т. е. величине v_k^2 , а образование электроноподобной квазичастицы — вероятности того, что ячейка свободна в основном состоянии, т. е. величине $u_k^2 = 1 - v_k^2$.

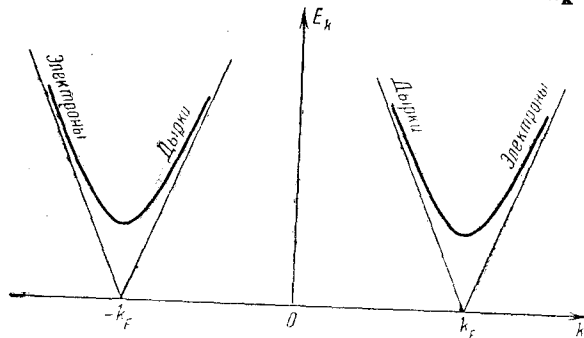


Рис. 42.1. Энергетический спектр частиц в сверхпроводнике. Тонкими прямыми линиями показан спектр нормального металла.

Можно сказать, что в сверхпроводнике квазичастица типа электрон (почти в чистом виде) — это квазичастица с импульсом k , если $|k - k_F| / k_F \gg \Delta / \varepsilon_F$, $k > k_F$. А почти в чистом виде дырка — это возбуждение с импульсом k , удовлетворяющим тому же неравенству, но при $k < k_F$.

Электронная и дырочная ветви спектра квазичастиц в сверхпроводнике показаны на рис. 42.1. Остается добавить, что скорость распространения квазичастицы в реальном пространстве — это групповая скорость, которая, как известно, равна

$$s_k = \frac{dE_k}{dp_k} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE_k}{dk}.$$

Поэтому для $k > 0$ (см. рис. 42.1) дырки движутся налево, а электроны направо.

§ 43. Заряд квазичастицы в сверхпроводнике

Итак, квазичастица в сверхпроводнике — это элементарное возбуждение, которое является в какой-то степени электроном и в какой-то степени дыркой. Причем если двигаться по кривой спектра элементарных воз-

буждений, то переход от электрона к дырке будет происходить непрерывно. Уже это рассуждение наводит на мысль, что квазичастице надо приписать дробный электрический заряд. Здесь мы будем следовать работе Петика и Смита [55], которые, по-видимому, первыми пришли к такому представлению. Мы сейчас увидим, насколько это удобно и как это облегчает качественное рассмотрение неравновесных процессов в сверхпроводниках. Для простоты условимся считать в дальнейшем заряд электрона равным +1. Иными словами, мы в дальнейшем будем все заряды измерять в относительных единицах, приняв за единицу заряда заряд электрона.

Рассмотрим сверхпроводник, находящийся при некоторой конечной температуре, когда имеются как спаренные (сверхпроводящие) электроны, так и элементарные возбуждения. Пусть последние распределены по ячейкам k -пространства, согласно функции распределения f_k , т. е. f_k — это вероятность того, что возбужденный электрон заполнит ячейку k . Поскольку вероятность того, что до этого она была свободна от сверхпроводящего электрона, есть u_k^2 , то полная вероятность обнаружить в ячейке k возбужденный электрон равна $f_k u_k^2$. С другой стороны, эта ячейка может быть заполнена электроном, принадлежащим к сверхпроводящим электронам. Для этого должны быть одновременно выполнены два условия: первое — в этой ячейке нет электрона, создающего возбуждение (вероятность этого равна $1 - f_k$), и второе — здесь есть сверхпроводящий электрон (вероятность равна v_k^2). Итак, полная вероятность обнаружить в ячейке электрон, принадлежащий сверхпроводящему коллективу, равна $(1 - f_k) v_k^2$. Поэтому полный заряд, находящийся в ячейке k , равен $f_k u_k^2 + (1 - f_k) v_k^2$. Отсюда полный заряд всех электронов сверхпроводника равен

$$Q_{\text{полн}} = \sum_k f_k u_k^2 + \sum_k (1 - f_k) v_k^2. \quad (43.1)$$

Пусть в результате какого-то внешнего воздействия изменилось как распределение квазичастиц (на величину δf_k), так и распределение сверхпроводящих электронов (на величину δv_k^2). В результате произошло изменение полного заряда электронов сверхпроводника на величину

$$\delta Q_{\text{полн}} = \sum_k (u_k^2 - v_k^2) \delta f_k + \sum_k (1 - 2f_k) \delta v_k^2. \quad (43.2)$$

Первое слагаемое здесь — это, очевидно, изменение полного заряда квазичастиц. Конкретно: вероятность пребывания квазичастицы в ячейке k изменилась на величину δf_k . В результате заряд этой ячейки изменился на $(u_k^2 - v_k^2) \delta f_k$. Ясно, что тогда величина

$$q_k = u_k^2 - v_k^2 \quad (43.3)$$

играет роль заряда квазичастицы, имеющей импульс k . Согласно (37.10)

$$v_k^2 = 1/2(1 - \epsilon_k/E_k). \quad (43.4)$$

Тогда

$$u_k^2 = 1/2(1 + \epsilon_k/E_k). \quad (43.5)$$

Откуда

$$q_k = \epsilon_k/E_k = \epsilon_k/(\epsilon_k^2 + \Delta^2)^{1/2}. \quad (43.6)$$

Зависимость q_k от k изображена на рис. 43.1. Таким образом, оказывается, что заряд квазичастицы может принимать любое значение от $+1$ (чистый электрон) до -1 (чистая дырка). Все зависит от того, в какой ячейке k -пространства находится квазичастица.

Довольно странный на первый взгляд результат! Внезем в сверхпроводник один лишний электрон и поместим его в ячейку k .

Сверхпроводник в целом получил заряд $+1$ (напомним, что это и есть, по нашему условию, заряд электрона), а в ячейке k оказался заряд q_k . Куда же девалась разница $1 - q_k$? Ведь полный заряд должен сохраниться! Ответ состоит в том, что заряд $1 - q_k$ ушел к сверхпроводящим электронам и их заряд при этом увеличился. Этим учитывается такой процесс. Электрон вносится в сверхпроводник. Он забирает парный себе электрон, принадлежащий конденсату*), из ячейки $-k$, и эта пара попадает в конденсат,

*) Весь коллектив сверхпроводящих электронов, которые описываются единой волновой функцией, мы называем конденсатом. Это, однако, не совсем точно. Оказаться на самом низком энергетическом уровне (т. е. перейти в бозе-конденсат в строгом понимании этого слова) могут не все электронные пары, которые являются бозе-частицами. Часть таких бозевских частиц из-за взаимодействия между собой должны образовать систему надконденсатных частиц. Однако и конденсатные, и надконденсатные частицы все вместе образуют коллектив сверхпроводящих электронов. Надконденсатные частицы ни в коем случае нельзя рассматривать как элементарные возбуждения.

но тогда электрон в ячейке k оказывается лишним партнером, т. е. образуется дырка.

Таким образом, между возбуждениями в сверхпроводнике и конденсатом существует теснейшая связь. При уста-

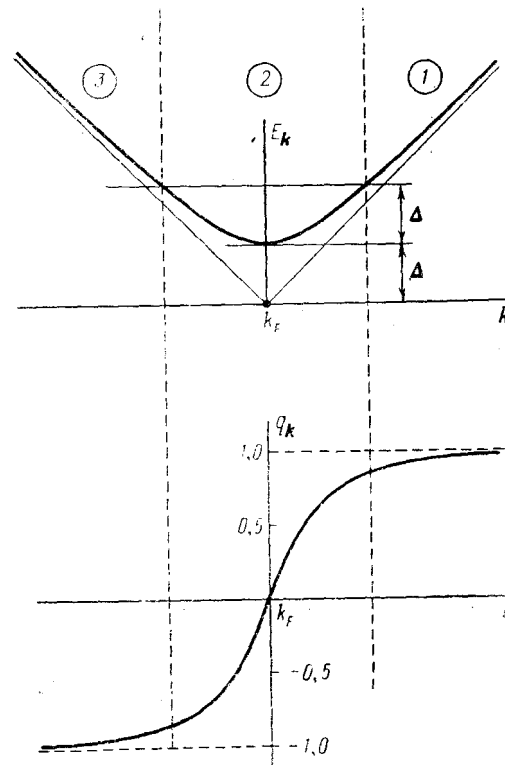


Рис. 43.1. Энергетический спектр квазичастиц в сверхпроводнике E_k и их заряд q_k . В области 1 заряд квазичастиц очень близок к $+1$, в области 3 — к -1 , а в области 2 заряд q_k принимает любые значения от $+1$ до -1 .

новлении равновесия эти две системы нельзя рассматривать как независимые. При переходах возбуждений из одних ячеек k -пространства в другие меняется их заряд q_k , а следовательно, и заряд конденсата, т. е. число электронов в конденсате.

§ 44. Время релаксации заряда квазичастиц

Попробуем теперь оценить время, в течение которого происходит релаксация заряда квазичастиц, т. е. время установления равновесного заряда в системе квазичастиц, если предварительно какое-то возмущение вывело его из равновесия. На этом этапе мы предполагаем, что полное количество квазичастиц остается неизменным. Тогда элементарным актом релаксации заряда является переход квазичастицы из одной ячейки k -пространства в другую. Но это должно сопровождаться излучением или поглощением фононов. Пусть время релаксации будет τ_E . Обратная величина τ_E^{-1} представляет собой частоту неупругих столкновений электронов с фононами в металле и не зависит от того, находится металл в нормальном состоянии или сверхпроводящем. Эта частота имеет порядок величины [56]

$$\tau_E^{-1} \sim \frac{k_B T}{\hbar} \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^2,$$

где k_B — постоянная Больцмана, Θ_D — дебаевская температура металла. Пусть температура сверхпроводника близка к T_c . Это значит, что $\Delta \ll k_B T_c$. Возникает вопрос: все ли электрон-фононные столкновения приведут к релаксации заряда? Очевидно — нет. Действительно, если до столкновения электрон находился в области 1 (см. рис. 43.1), и конечное его состояние тоже находится в области 1, то изменения заряда квазичастицы практически не произошло. То же можно сказать относительно области 3. Иное дело — электроны, находящиеся в области 2. Их переходы в результате электрон-фононных столкновений меняют заряд квазичастицы на величину порядка единицы. При температуре T доля возбуждений, лежащих в области 2, по сравнению с общим количеством возбуждений будет иметь порядок $\Delta/k_B T$, так как по определению область 2 — это область, в которой энергия возбуждений E_k лежит в интервале $\Delta \leq E_k \leq 2\Delta$. Поэтому частота переходов, меняющих заряд квазичастиц на величину порядка единицы, равна

$$\tau_Q^{-1} \sim \frac{\Delta}{k_B T} \tau_E^{-1}.$$

Точный расчет времени релаксации заряда квазичастиц при $T \approx T_c$ [57] дает

$$\tau_Q = \frac{4}{\pi} \frac{k_B T_c}{\Delta} \tau_E. \quad (44.1)$$

Из этой формулы следует, что время релаксации заряда квазичастиц расходится при $T \rightarrow T_c$. Приведем некоторые характерные значения: времена энергетической релаксации τ_E имеют порядок около 10^{-10} с. Так, для олова можно принять $\tau_E = 3 \cdot 10^{-10}$ с, а для свинца $\tau_E = 10^{-11}$ с. Приведенные значения τ_E взяты при критических температурах указанных материалов. Время релаксации заряда квазичастиц может оказаться значительно больше. Все зависит от того, как близко мы подойдем к критической температуре.

Задача 44.1. Найти время релаксации заряда квазичастиц в олове, если температура олова ниже критической температуры (3,8 К) на 0,01 К.

Ответ. Используя выражение для щели (при $T \approx T_c$) $\Delta(T) = 1,74\Delta(0)(1 - T/T_c)^{1/2}$, получим для олова $\tau_Q \approx 2,4 \cdot 10^{-9}$ с.

§ 45. Андреевское отражение

Перейдем теперь к изучению того, как происходит переход нормального тока в сверхток. Попробуем разобраться в том, какие процессы происходят на границе нормальный металл—сверхпроводник, как далеко от этой границы происходит процесс преобразования нормального тока в сверхток.

Оговорим прежде всего, что мы понимаем под словом «граница». В наиболее чистом виде это будет граница между нормальной и сверхпроводящей фазами в сверхпроводнике, находящемся в промежуточном состоянии. Параметр порядка — щель — будет иметь максимальное значение $\Delta(T)$ в глубине сверхпроводника и равняться нулю в глубине нормальной области. Переход от одного значения к другому произойдет на длине когерентности $\xi(T)$. Эту переходную область мы и будем называть NS -границей. В случае механического контакта между двумя металлами — нормальным и сверхпроводником — качественно все будет так же. Если $T \approx T_c$, то ширина границы ($\xi(T)$) достаточно велика. Тогда мы можем провести следующее рассмотрение. Нас будет интересовать, что произойдет с электроном нормального металла, энергия которого меньше величины энергетической щели сверхпроводника, когда этот электрон налетает на NS -границу со стороны нормального металла. Это схематически изображено на рис. 45.1. По мере приближения к сверхпроводящей области электрон нормального металла, находясь в точке x , оказывается уже в сверхпроводящей области, но с малой

величиной щели $\Delta(x)$. При этом он становится электроноподобной квазичастицей сверхпроводника, и будет занимать ячейку k -пространства, соответствующую его энергии E_k . В следующий момент, оказавшись в другой точке границы, более близкой к сверхпроводящей области, электрон окажется в области сверхпроводника с большей величиной щели, что приведет к его перемещению в новую ячейку k -пространства, более близкую к k_F .

Это приводит к уменьшению заряда такой квазичастицы. Итак, электроноподобное возбуждение, налетая

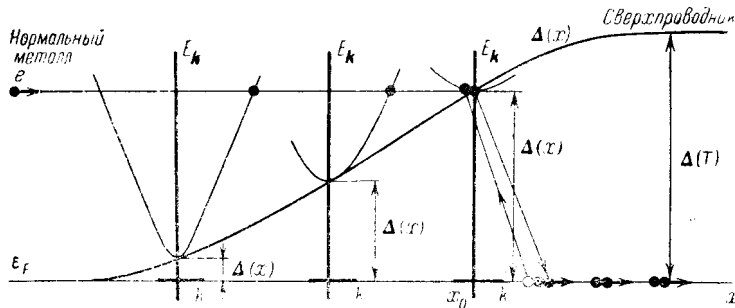


Рис. 45.1. Иллюстрация процесса андреевского отражения. Попав в область NS -границы, квазичастица (электрон) перемещается из одной ячейки k -пространства в другую, постепенно меняя свой заряд по мере приближения к сверхпроводящей области.

из нормального металла на NS -границу, постепенно уменьшает свой заряд. Из рис. 45.1 понятно, что, дойдя до точки x_0 , в которой величина щели равняется энергии квазичастицы, последняя должна будет иметь импульс равный k_F , нулевую групповую скорость и, согласно (43.6), нулевой заряд ($q_{k_F} = 0$). В этой точке возбуждение отражается от границы и переходит на левую, дырочную ветвь спектра элементарных возбуждений. Его групповая скорость будет теперь направлена влево, т. е. от сверхпроводника к нормальному металлу, а заряд уже будет отрицательный. Но движение отрицательного заряда налево эквивалентно движению положительного заряда направо. Поэтому рассмотренное отражение приводит к переносу заряда из нормального металла в сверхпроводник, т. е. к течению электрического тока.

Этот процесс был впервые теоретически предсказан А. Ф. Андреевым [58] и поэтому называется андреевским отражением.

Уменьшение заряда квазичастицы по мере ее приближения к сверхпроводящей области ясно указывает на то, что и конденсат оказывается вовлеченным в процесс андреевского отражения. Заряд квазичастицы не пропадает, а передается конденсату! А физически это означает, что на границе налетающая квазичастица находит себе парную частицу и вместе с ней переходит в конденсат, а образовавшаяся дырка возвращается в нормальный металл. Так происходит переход через NS -границу той части электрического тока, который переносится возбуждениями с энергией, меньшей энергии щели $\Delta(T)$. Процесс преобразования нормального тока в сверхток происходит внутри области $\sim \xi(T)$. Совсем по-другому будут вести себя возбуждения с энергией $E_k > \Delta(T)$. Как мы скоро увидим, они могут проникать внутрь сверхпроводника на расстояния, значительно превышающие длину когерентности $\xi(T)$.

§ 46. Разбаланс заселенностей ветвей спектра элементарных возбуждений и электрическое поле в сверхпроводнике

В условиях равновесия электронная и дырочная ветви спектра элементарных возбуждений сверхпроводника заселены квазичастицами симметрично. Поэтому в равновесном сверхпроводнике число электронных квазичастиц равно числу дырок, и суммарный заряд равен нулю. Кроме того, в равновесном сверхпроводнике функция распределения квазичастиц — это функция распределения Ферми

$$f_k = \frac{1}{\exp(E_k/k_B T) + 1}.$$

В результате каких-либо внешних воздействий равновесное распределение квазичастиц может нарушиться. Если, например, сверхпроводник подвергается электромагнитному облучению, то симметрия в распределении электронов и дырок по ветвям не нарушается. Просто квазичастицы, поглощая электромагнитную энергию, переходят на более высокие энергетические уровни. При этом может измениться величина энергетической щели. Подобные типы неравновесных процессов мы здесь не будем рассматривать.

Равновесие будет также нарушено вблизи границы с нормальным металлом, если оттуда идет поток электро-

нов. Действительно, электроны с энергией $E_{\mathbf{k}} > \Delta$ (T) проникают в сверхпроводник и занимают ячейки \mathbf{k} -пространства, принадлежащие электронной ветви спектра. В этом случае возникает разбаланс заселенностей двух ветвей. Наша задача теперь — понять, к каким последствиям приводит разбаланс заселенностей, как и на каких характерных расстояниях он релаксирует.

Существование разбаланса заселенностей, очевидно, приводит к появлению конечного заряда квазичастиц Q в данном месте сверхпроводника:

$$Q = \sum_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}},$$

где $f_{\mathbf{k}}$ — какая-то (в общем случае — неравновесная) функция распределения электронов по ячейкам \mathbf{k} -пространства.

Но суммарный заряд всех электронов сверхпроводника в каждой точке должен быть одинаковым и равным по абсолютной величине заряду ионов кристаллической решетки. Этим обеспечивается электронейтральность материала. Таким образом, если в данном месте заряд квазичастиц увеличился на величину Q , то на такую же величину должен уменьшиться заряд конденсата. Это вызывает изменение функции распределения сверхпроводящих электронов $v_{\mathbf{k}}^2$. На рис. 46.1 штриховой линией показано старое распределение $v_{\mathbf{k}}^2$, соответствующее равновесному случаю, когда $Q=0$ и когда химический потенциал сверхпроводящих электронов μ_s совпадает с энергией Ферми металла *). Поскольку площадь под кривой $v_{\mathbf{k}}^2$ пропорциональна числу сверхпроводящих электронов, их уменьшение должно вызвать смещение границы распределения влево, т. е. уменьшение химического потенциала μ_s на величину $\epsilon_F - \mu_s$. Новое распределение $v_{\mathbf{k}}^2$ показано на рис. 46.1 сплошной линией. Теперь мы можем легко подсчитать количество энергетических уровней, освободившихся от сверхпроводящих электронов: $2N(0)(\epsilon_F - \mu_s)$, где $N(0)$ — плотность состояний на уровне Ферми, а коэффициент 2 учитывает, что на каждом энергетическом

*) Функция распределения конденсатных электронов в равновесном случае тоже будет иметь вид $v_{\mathbf{k}}^2 = (1 - \epsilon_{\mathbf{k}}/E_{\mathbf{k}})/2$, но $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2/2m - \mu_s$ и $E_{\mathbf{k}} = (\epsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2)^{1/2}$, т. е. мы считаем, что конденсат успевает подстроиться под данное неравновесное распределение квазичастиц. Легко проследить, что появление разбаланса заселенностей ветвей не изменяет величину энергетической щели.

уровне находятся два электрона с противоположными спинами. Отсюда сразу следует, что конденсат потерял заряд

$$Q = 2N(0)(\epsilon_F - \mu_s), \quad (46.1)$$

который перешел к квазичастицам.

Посмотрим, к каким последствиям это приведет.

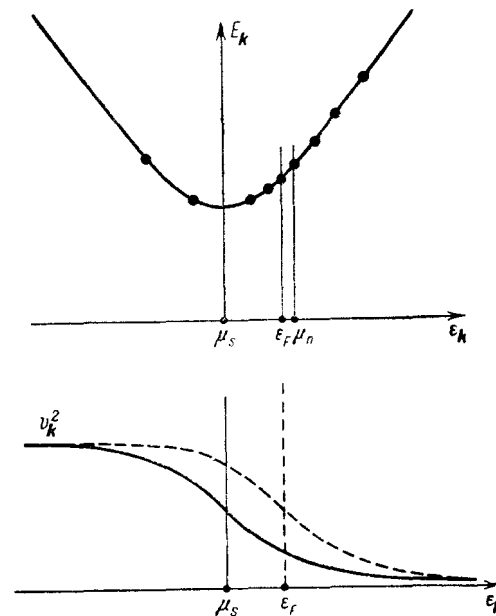


Рис. 46.1. Неравновесное распределение сверхпроводящих электронов $v_{\mathbf{k}}^2$ и спектр квазичастиц в сверхпроводнике $E_{\mathbf{k}}$ в неравновесном состоянии. Штриховой линией показано равновесное распределение $v_{\mathbf{k}}^2$, когда $\mu_s = \epsilon_F$. Щель Δ сохранила свое значение, химический потенциал μ_s стал больше ϵ_F .

Поскольку неравновесный заряд квазичастиц Q будет функцией пространственной координаты x , ясно, что и неравновесный химический потенциал сверхпроводящих электронов μ_s тоже будет, согласно (46.1), функцией x . Но это означает, что в сверхпроводнике возможно существование электрического поля E , которое тем не менее не будет ускорять конденсат. Действительно, в самом общем

виде уравнение движения для сверхпроводящего электрона можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(mv_s) = -\frac{e}{c}\dot{\mathbf{A}} - e\nabla\varphi - \nabla\mu_s. \quad (46.2)$$

Здесь e — заряд электрона, m — его масса, v_s — сверхтекущая скорость конденсата, φ — электростатический потенциал, \mathbf{A} — векторный потенциал, точка означает дифференцирование по времени. В стационарных условиях $d(mv_s)/dt = \dot{\mathbf{A}} = 0$, поэтому сверхпроводящие электроны не ускоряются. Но это означает, что в стационарных условиях в сверхпроводнике должен быть постоянным в пространстве электрохимический потенциал сверхпроводящих электронов $\varphi_{\text{экс}}$.

$$\varphi_{\text{экс}} = e\varphi + \mu_s = \text{const}. \quad (46.3)$$

Это, однако, не исключает существования электрического поля, которое, согласно (46.3), будет равно

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \frac{1}{e}\nabla\mu_s.$$

Используя (46.1), имеем

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{2eN(0)}\nabla Q. \quad (46.4)$$

Итак, мы приходим к выводу, что в неравновесных условиях, при наличии градиента заряда квазичастиц сверхпроводника, в нем возникает электрическое поле, которое, в то же время, не будет ускорять конденсат, так как компенсируется градиентом химического потенциала сверхпроводящих электронов. Подчеркнем еще раз, что на сверхпроводящие электроны действует градиент электрохимического потенциала сверхпроводящих электронов $\Delta\varphi_{\text{экс}}$, который, согласно (46.3), равен нулю.

Существование в данном месте сверхпроводника стационарного, но неравновесного заряда квазичастиц с плотностью Q означает, что в данное место непрерывно идет поток квазичастиц, приносящих некоторый заряд, который в то же время релаксирует, переходя в конденсат. Это условие выражается простым соотношением:

$$\text{div } \mathbf{j}_n = -eQ/\tau_Q, \quad (46.5)$$

где \mathbf{j}_n — нормальная компонента полного тока. Это соотношение справедливо приближенно, когда щель мала

($\Delta \ll k_B T_c$), т. е. когда температура близка к критической. Более строго этот вопрос рассматривается в [55]. В этом же приближении, когда $T \approx T_c$, мы можем пренебречь изменением химического потенциала квазичастиц по сравнению с изменением химического потенциала сверхпроводящих электронов, т. е. $\epsilon_F - \mu_s \gg \mu_n - \epsilon_F$ (см. рис. 46.1). Действительно, при $T \approx T_c$ в конденсате электронов мало, а коллектив нормальных электронов велик. Поэтому удаление некоторого количества электронов из конденсата и перенос их в коллектив нормальных электронов приведет к значительно более сильному изменению свойств конденсата (уменьшение μ_s), чем свойств коллектива нормальных электронов.

Учитывая это, можно написать закон Ома для возмущений в обычной форме:

$$\mathbf{j}_n = \sigma \mathbf{E},$$

где σ — нормальная проводимость при низких температурах: $\sigma^{-1} = \rho_{\text{ост}}$, где $\rho_{\text{ост}}$ — остаточное удельное сопротивление*). Беря дивергенцию от правой и левой частей этого равенства и подставляя сюда формулы (46.4) и (46.5), получим

$$\nabla^2 Q = \frac{1}{\lambda_Q^2} Q, \quad (46.6)$$

где

$$\lambda_Q^2 = \frac{\sigma \tau_Q}{2e^2 N(0)}. \quad (46.7)$$

Поскольку проводимость нормального металла σ можно записать в виде**)

$$\sigma = \frac{2}{3} e^2 N(0) l v_F,$$

где l — длина свободного пробега электрона, а v_F — скорость электрона на поверхности Ферми, имеем окончательно

$$\lambda_Q = \left(\frac{l v_F \tau_Q}{3} \right)^{1/2} = (D \tau_Q)^{1/2}, \quad (46.8)$$

где D — коэффициент диффузии для электронов, $D = l v_F / 3$.

*) Остаточное удельное сопротивление проводника — это удельное сопротивление, экстраполированное к абсолютному нулю температуры.

**) См., например, [4].

Рассмотрим теперь самый простой случай. Пусть образом будет настолько тонкая проволока, что задачу можно считать одномерной. Направим ось x вдоль проволоки и будем считать материал проволоки нормальным для $x < 0$ и сверхпроводящим для $x > 0$. Пусть по проволоке течет ток в положительном направлении оси x . Тогда уравнение (46.6) примет вид

$$\frac{d^2 Q}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_Q^2} Q. \quad (46.9)$$

Ясно, что далеко от границы (при $x \rightarrow \infty$) $Q \rightarrow 0$, так как там будет просто равновесный сверхпроводник без какого-либо заряда квазичастиц. Тогда решением уравнения (46.9) будет функция

$$Q \sim e^{-x/\lambda_Q}. \quad (46.10)$$

Соответственно в сверхпроводнике возникнет электрическое поле, которое, согласно (46.4), будет

$$E = E_0 \exp(-x/\lambda_Q), \quad (46.11)$$

где E_0 — электрическое поле на границе. Если пренебречь андреевским отражением, а при $T \approx T_c$ это можно сделать, поле E_0 на границе будет равно электрическому полю в нормальном металле, т. е. при $x < 0$.

Таким образом, λ_Q имеет смысл глубины проникновения электрического поля в сверхпроводник. Согласно (46.11) электрическое поле экспоненциально затухает на расстоянии λ_Q от границы. Оценим глубину проникновения электрического поля. Согласно (46.7) $\lambda_Q \sim \tau_Q^{1/2}$, а τ_Q , согласно (44.1), пропорционально Δ^{-1} . Поскольку $\Delta \sim (1 - T/T_c)^{1/2}$, имеем

$$\lambda_Q \sim (1 - T/T_c)^{-1/4}, \quad (46.12)$$

т. е. λ_Q расходится при $T \rightarrow T_c$. Таким образом, при достаточной близости к критической температуре, электрическое поле может проникнуть в сверхпроводник на большое расстояние. Поскольку характерным значением для τ_Q является величина порядка $10^{-9} \div 10^{-10}$ с, то для $v_F \sim 10^8$ см/с и, скажем, для $l \sim 10^{-5}$ см имеем $\lambda_Q \sim 1 \div 10$ мкм, т. е. глубина проникновения электрического поля может превзойти все характерные длины сверхпроводника. Если не подходить слишком близко к T_c , то можно получить $\lambda_Q \gg \xi(T)$.

Итак, подведем итоги. Если через границу между нормальным металлом и сверхпроводником течет электрический ток, то в сверхпроводнике возникает электрическое поле. Оно затухает от границы в глубину сверхпроводника на расстоянии λ_Q , которое может быть макроскопически большим. В этой области существует дивергенция нормального тока $\nabla \mathbf{j}_n$ (см. (46.5)). Но полный ток $\mathbf{j} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_n$ (где \mathbf{j}_s — плотность сверхтока), конечно, в стационарных условиях не имеет дивергенции. Поэтому имеем

$$\nabla \mathbf{j}_n = -\nabla \mathbf{j}_s,$$

т. е. в области сверхпроводника длиной λ_Q вблизи границы с нормальным металлом происходит преобразование нормального тока в сверхток. Это можно интерпретировать еще и так. Согласно рис. 46.1 в этой «неравновесной» области $\mu_n > \mu_s$. Поэтому можно сказать, что здесь идет «химическая реакция» по превращению вещества с химическим потенциалом μ_n в вещество с химическим потенциалом μ_s .

Все рассмотрение этого параграфа относится к случаю, когда поток электронов идет из нормального металла в сверхпроводник. Однако вся картина оказывается симметричной при обращении направления тока. Только теперь из нормального металла на сверхпроводник налетают дырки, а отражаются по-андреевски электроноподобные квазичастицы. А разбаланс заряда элементарных возбуждений сверхпроводника в области порядка λ_Q около границы такой, что заселенность дырочной ветви больше, чем электронной.

Задача 46.1.

Исходя из требования электронейтральности, было получено существование электрического поля E в сверхпроводнике вблизи его границы с нормальным металлом, если через эту границу идет электрический ток. Согласно (46.11) $\text{div } E \neq 0$. Но тогда в области порядка λ_Q около границы должна существовать объемная плотность электрического заряда ρ , определяемая уравнением Пуассона $\text{div } E = 4\pi\rho$. Не противоречит ли это исходному предположению об электронейтральности?

Решение. Покажем, что объемная плотность заряда ρ , которая действительно возникнет в переходной области размером λ_Q , будет на много порядков меньше объемной плотности заряда квазичастиц eQ . Уравнение Пуассона можно написать приближенно в виде $E/\lambda_Q \sim 4\pi\rho$, или $\rho \sim E/(4\pi\lambda_Q)$. С другой стороны, согласно (46.5), $Q \sim j_n \tau_Q / (e\lambda_Q) = \tau_Q E / (e\lambda_Q)$, откуда $\rho / (eQ) \sim (4\pi\tau_Q e)^{-1} = -(8\pi\tau_Q^2 N(0) v_F / 3)^{-1}$. Если принять, что $\tau_Q \sim 10^{-10}$ с, $N(0) \sim 10^{23}$ эрг $^{-1}$ см $^{-3}$, $l \sim 10^{-5}$ см, $v_F \sim 10^8$ см/с, то даже в этом случае будет $\rho / (eQ) \sim 10^{-5}$.

§ 47. Экспериментальное исследование неравновесного состояния сверхпроводника около NS -границы

47.1. Опыты Ю и Мерсеро. В этом разделе будут описаны результаты необычайно изящных экспериментов Ю и Мерсеро [59]. Этими опытами было однозначно показано, что, действительно, в области сверхпроводника, прилегающей к границе с нормальным металлом, когда через эту границу идет электрический ток, электрохимические потенциалы сверхпроводящих электронов и нормальных электронов отличаются друг от друга.

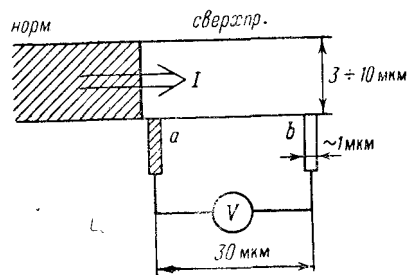


Рис. 47.1. Схема опыта Ю и Мерсеро [59]. Потенциометрические выводы a и b подсоединены к вольтметру. Если a — нормальный вывод, вольтметр показывает разность электрохимических потенциалов квазичастиц и конденсата. Если a — сверхпроводящий вывод, вольтметр ничего не показывает. Показания вольтметра не зависят от того, является вывод b нормальным или сверхпроводящим.

Пленка тантала толщиной около 250 \AA имеет критическую температуру около $4,1 \text{ K}$. Если часть этой пленки с помощью процесса анодизации сделать более тонкой (около 100 \AA), то критическая температура этой части пленки упадет до $3,5 \text{ K}$. Если температура пленки будет лежать между $3,5 \text{ K}$ и $4,1 \text{ K}$, то одна часть пленки будет нормальной, а другая сверхпроводящей. Если теперь пропустить ток через пленку, то, согласно (46.3), электрохимический потенциал сверхпроводящих электронов $\varphi_{\text{св}}$ будет постоянным в пространстве. Поэтому сверхпроводящие потенциометрические выводы a и b (рис. 47.1) подадут на зажимы вольтметра равные электрохимические потенциалы, и вольтметр ничего не покажет. Если, однако, потенциометрический вывод a , непосредственно прилегающий к NS -границе, сделать из нормального металла, то он подаст на левый зажим вольтметра электрохимический потенциал нормальных электронов, который здесь отличается от $\varphi_{\text{св}}$. Это отличие релаксирует на расстоянии λ_0 от границы. Если расстояние между выводами a и b больше λ_0 , то вывод b подаст на правый зажим вольтметра электрохимический потенциал сверхпроводящих электро-

нов (который здесь, в условиях равновесных, равен электрохимическому потенциалу квазичастиц). В результате вольтметр покажет разность между электрохимическими потенциалами нормальных и сверхпроводящих электронов в непосредственной близости от NS -границы.

Результат эксперимента, когда вывод a — нормальный, показан на рис. 47.2.

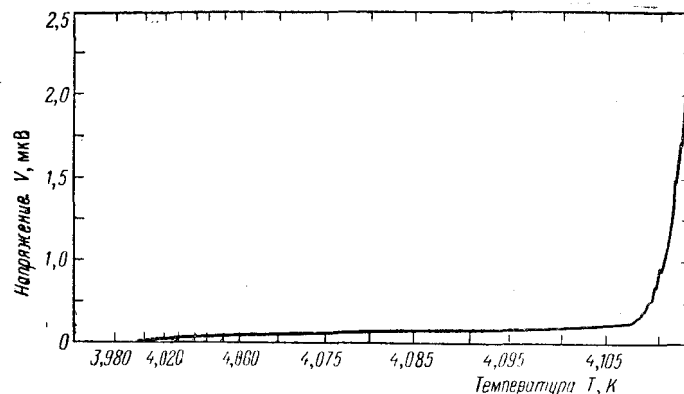


Рис. 47.2. Результат опыта Ю и Мерсеро [59]. Вольтметр измеряет разность электрохимических потенциалов сверхпроводящих и нормальных электронов в области неравновесности.

Однако наиболее элегантным оказался следующий эксперимент тех же авторов. Расположив оба потенциометрических вывода в неравновесной области сверхпроводника близко друг от друга (как показано на рис. 47.3), но так, чтобы к NS -границе прилегал сверхпроводящий вывод b , а нормальный вывод a был бы несколько удален от границы, Ю и Мерсеро наблюдали изменение знака показаний вольтметра при том же направлении тока через пленку.

Результаты этих опытов прекрасно подтверждают основные представления, развитые в предыдущих параграфах.

Действительно, если, как показано на рисунке 47.3, ток в пленке течет из S в N , то в неравновесной области сверхпроводника около границы происходит «химическая реакция»: сверхпроводящие электроны \rightarrow нормальные электроны, т. е. химический потенциал μ_s в этой области больше химического потенциала μ_n . Поэтому ток в вольтметре пойдет от вывода b к выводу a (как показано на

рис. 47.3). По этой же причине ток в вольтметре тоже пойдет от b к a , и показания вольтметра изменят знак.

47.2. Избыточное сопротивление NS -границы. Другим интересным проявлением неравновесных процессов, возникающих в сверхпроводнике вблизи NS -границы, когда через эту границу течет ток, является избыточное электрическое сопротивление этой границы. Это очень легко

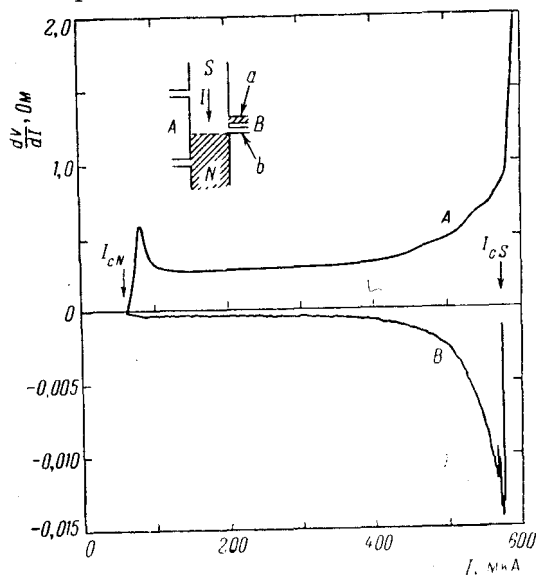


Рис. 47.3. Результаты опыта Ю и Мерсеро [59]: дифференциальное сопротивление как функция тока через пленку. Напряжение между выводами B имеет знак противоположный знаку напряжения между выводами A . Ток идет от сверхпроводящего вывода к нормальному (заштрихован).

понять физически. Действительно, рассмотрим для определенности случай, когда поток электронов идет из нормального металла N в сверхпроводник S . Те электроны в N , энергия которых меньше щели $\Delta(T)$ в S , отражатся по-андреевски, и их ток превратится в ток сверхпроводящих электронных пар. Это произойдет на расстоянии $\xi(T)$ от границы, и никакого вклада в сопротивление этот процесс не даст. Иное дело — те электроны в N , энергия которых больше щели $\Delta(T)$. Они, попадая в S , оказываются на электронной ветви спектра элементарных возбуждений сверхпроводника. Как было показано в предыдущем параграфе, это влечет за собой появление разбаланса за-

ряда квазичастиц Q и появление электрического поля E , которое затухает на расстоянии λ_Q в глубь сверхпроводника. Однако существование электрического поля в области λ_Q сверхпроводника около NS -границы означает, что эта область дает вклад в общее падение напряжения, т. е. в полное сопротивление цепи. Это и будет так называемое избыточное сопротивление NS -границы. Если бы все электроны, переносящие ток, испытывали ускорение под действием этого электрического поля, то избыточное сопротивление было бы просто равно

$$R_{\text{изб}} = \rho \lambda_Q / S,$$

где ρ — удельное сопротивление сверхпроводника в нормальном состоянии, а S — площадь его поперечного сечения. Учтем, однако, теперь, что не все электроны ускоряются под действием поля E . Действительно, те электроны, которые находятся в конденсате, как мы уже видели, под действием поля E не ускоряются, так как действие поля E в точности скомпенсировано действием градиента химического потенциала сверхпроводящих электронов $\nabla \mu_s$. Этим свойством будут обладать все электроны, идущие из N в S , с энергией, меньшей энергии щели $\Delta(T)$ (отражаются по-андреевски), а также доля квазичастиц с энергией $E_k \geq \Delta(T)$. Эта доля определяется тем обстоятельством, что инжектированный из N в S электрон, оказавшись в S и имея заряд q_k , «потерял» часть заряда $1 - q_k$, которая ушла в конденсат. Эта часть заряда проходит NS -границу по-андреевски. Именно эта часть заряда $1 - q_k$ и не участвует в создании избыточного сопротивления. Поэтому избыточное сопротивление следует писать в виде

$$R_{\text{изб}} = Z(T) \rho \lambda_Q / S,$$

где коэффициент $Z(T)$ учитывает последнее обстоятельство, т. е. это доля всех электронов, которые переходят NS -границу не по-андреевски. Ясно, что при $T \rightarrow 0$ все электроны идут через NS -границу по-андреевски и $Z(T \rightarrow 0) \rightarrow 0$. Наоборот, при $T \rightarrow T_c$ имеем $\Delta(T) \rightarrow 0$, и подавляющее большинство электронов идут через NS -границу не по-андреевски, т. е. с созданием сопротивления. При этом $Z(T \rightarrow T_c) \rightarrow 1$. Поэтому $R_{\text{изб}}(T)$ будет представлять собой монотонную функцию температуры*):

$$R_{\text{изб}}(T \rightarrow 0) = 0, \quad R_{\text{изб}}(T \rightarrow T_c) = \rho \lambda_Q / S.$$

*) Расчету $Z(T)$ посвящено несколько теоретических работ. См., например, работы [61, 62].

Температурная зависимость $R_{\text{изб}}$ в последнем случае ($T \rightarrow T_c$) определяется температурной зависимостью λ_Q (46.12):

$$\lambda_Q \sim (1 - T/T_c)^{-1/2}.$$

Этот вывод неплохо согласуется с экспериментом.

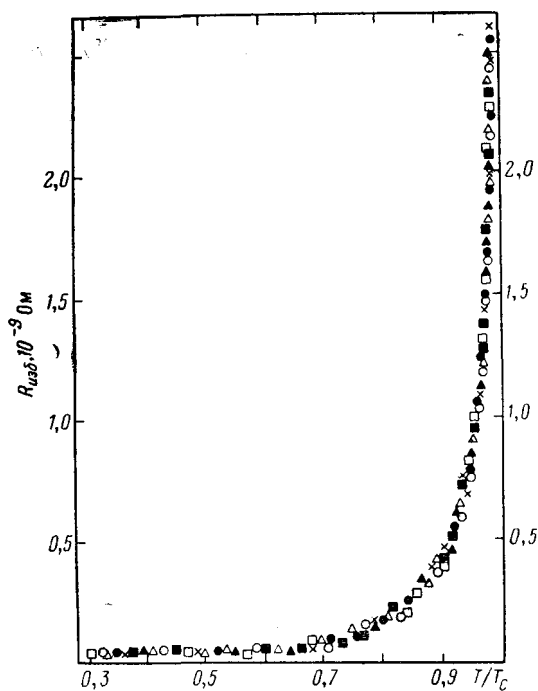


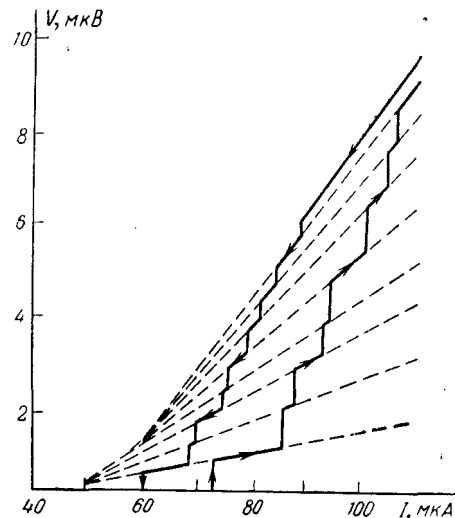
Рис. 47.4. Температурная зависимость избыточного сопротивления NS -границы в сэндвичах $Ta-Cu-Ta$ [60] по семи образцам.

В качестве примера на рис. 47.4 приведены результаты опытов с семью разными образцами типа SNS . По оси ординат отложено избыточное сопротивление NS -границы.

47.3. Центры проскальзывания фазы. В предыдущих параграфах этой главы были рассмотрены стационарные неравновесные процессы. Сейчас мы познакомимся с нестационарными неравновесными процессами.

В § 18, где рассматривался критический ток в тонкой пленке, было показано, что при критическом токе расплавления не происходит фазового перехода в нормальное состояние. Было показано, что при $I = I_c$ просто становится недостаточно сверхпроводящих носителей (т. е. куперовских пар), готовых перенести заданный ток I . Значит, при $I > I_c$ возникает какое-то специфическое резистивное состояние, с которым мы сейчас и познакомимся.

Рис. 47.5. Вольт-амперная характеристика монокристаллической оловянной нити: длина 0,8 мм, площадь поперечного сечения 1,93 мкм² [63].



Обратимся сперва к результатам эксперимента. Наиболее удобно это резистивное состояние изучать на квазиодномерных объектах, т. е. на тонких длинных сверхпроводящих нитях, диаметр которых $d \ll \xi(T)$. В этом случае размер нити столь мал, что в ней не сможет поместиться абрикосовый вихрь с нормальной сердцевинкой (радиуса $\sim \xi(T)$), и изучаемое резистивное состояние не будет маскироваться эффектами, характерными для резистивного состояния в сверхпроводниках второго рода. На рис. 47.5 приведена вольт-амперная характеристика тонкого монокристаллического вискера из олова. Видно, что напряжение на проводнике нарастает ступенями, причем после каждого скачка напряжения сопротивление образца (наклон характеристики) увеличивается.

Такое поведение образцов в резистивном режиме объясняется моделью, предложенной Скутчолом, Бисли и Тинкхамом [64]. Это так называемая модель центров проскальзывания фазы.

Представим себе, что в каком-то месте нити критический ток немного меньше, чем в других местах этой нити. Тогда при увеличении тока через нить именно в этом месте будет впервые достигнут критический ток. При дальнейшем увеличении тока возникает движение нормальных электронов, а это приводит к появлению электрического поля, которое ускорит сверхпроводящие электроны до критической скорости. Пары распадутся, модуль параметра порядка $|\psi|$ в этом месте станет равным нулю, весь ток будет переноситься только нормальной компонентой. Но образование электронных пар по-прежнему выгодно, поэтому снова возникает $|\psi|$, снова часть тока будет переноситься сверхпроводящими электронами, т. е. сверхтоком, и весь процесс будет повторяться. При каждом таком цикле разность фаз волновых функций сверхпроводящих электронов с обеих сторон от рассматриваемого места будет меняться на 2π , и поэтому это место называется центром проскальзывания фазы. Размер этого центра — это, конечно, размер области, в которой происходит пульсация $|\psi|$, т. е. $\sim 2\xi(T)$.

В момент, когда $|\psi|=0$, эта область находится в нормальном состоянии, и поэтому электрическое поле проникает в прилегающие к ней области сверхпроводника на расстояние $\sim \lambda_D$ (см. § 46). Поэтому при возникновении одного центра проскальзывания фазы, появляется сопротивление $\rho \cdot 2\lambda_D/S$, где ρ — удельное сопротивление материала нити, S — площадь ее поперечного сечения. Падение напряжения на этом сопротивлении будет давать только нормальная компонента тока $I_n = I - I_s$. Усредним это выражение по времени. I — заданный постоянный ток и от времени не зависит. Сверхток I_s пульсирует во времени между I_0 и нулем. Примем поэтому, что $\bar{I}_s = \beta I_0$, где $\beta \sim 0,5$. Тогда для среднего напряжения на одном центре проскальзывания фазы имеем

$$\bar{V} = 2\lambda_D \rho (I - \beta I_0) / S. \quad (47.1)$$

Эта формула, несмотря на свою простоту, хорошо описывает результаты экспериментов.

При дальнейшем увеличении тока появится второй центр проскальзывания фазы, потом третий и т. д. Каждый раз при появлении такого центра будет скачком увеличиваться полное напряжение на нити, и крутизна вольт-амперной характеристики будет увеличиваться, так как каждый раз будут включаться все новые и новые резистивные участки. Все это можно проследить на рис. 47.5.

§ 48. Неравновесное усиление сверхпроводимости

В этом параграфе будет рассмотрен случай, когда отклонение от равновесной функции распределения является симметричным, т. е. неравновесное распределение квазичастиц на обеих ветвях спектра элементарных возбуждений одинаково. Теперь, в противоположность всем ранее рассмотренным случаям неравновесных процессов, отклонение от равновесия сопровождается изменением энергетической щели Δ .

Создание симметричного неравновесного распределения можно осуществить, скажем, посредством электромагнитного облучения сверхпроводника на частоте $\omega < 2\Delta/\hbar$. Тогда энергии квантов, падающих на сверхпроводник, будет недостаточно для разрыва пар, но хватит, чтобы переместить элементарные возбуждения на более высокие уровни спектра элементарных возбуждений. Такое неравновесное распределение квазичастиц должно привести к увеличению щели и к повышению критической температуры.

Действительно, освобождая нижние уровни спектра элементарных возбуждений, мы открываем возможность электронным парам конденсата совершать переходы в эти состояния k -пространства, и тем самым увеличиваем число слагаемых в сумме (38.14), определяющей энергетическую щель. Существует ряд экспериментальных результатов, подтверждающих эти представления. Так, в работе [65] было обнаружено увеличение критического тока сверхпроводящих мостиков, подвергаемых облучению на сверхвысоких частотах. Теоретическое рассмотрение этих эффектов содержится в работах Элиашберга [66].

§ 49. Термоэлектрический эффект в сверхпроводниках

Долгое время считалось, что в сверхпроводниках термоэлектрические эффекты отсутствуют. Однако это не так. Чтобы разобраться в этом, рассмотрим сперва обычный термоэлектрический эффект в нормальном металле.

Пусть два конца массивного куска нормального металла имеют разные температуры T_1 и T_2 , т. е. внутри металла существует градиент температуры ∇T . Это значит, что на свободные электроны металла действует сила, стремящаяся переместить электроны от более нагретого конца к более холодному. Но накопление противополож-

ных зарядов на противоположных концах образца приводит к появлению электрического поля внутри образца, которое будет действовать на электроны в противоположном направлении (от холодного конца к нагретому). В стационарных условиях эти силы уравниваются, и между концами образца устанавливается постоянная разность потенциалов V , которая и называется термоэлектродвижущей силой (термоэдс):

$$V = \alpha(T_1 - T_2),$$

здесь α — абсолютная дифференциальная термоэдс металла.

Процесс переноса тепла в сверхпроводнике сопровождается совсем другими электронными явлениями*). Пусть опять два конца массивного куска металла, на этот раз сверхпроводника, находятся при разных температурах T_1 и T_2 . Снова под действием градиента температуры ∇T нормальные возбуждения сверхпроводника будут испытывать силу, которая создаст ток нормальных возбуждений:

$$\mathbf{j}_n = \sigma \alpha \nabla T, \quad (49.1)$$

где σ — проводимость сверхпроводника в нормальном состоянии. В ответ немедленно возникнет противоток сверхпроводящей компоненты \mathbf{j}_s , который полностью компенсирует нормальный ток \mathbf{j}_n . Действительно, согласно (49.1), ток \mathbf{j}_n — потенциальный ток, т. е. $\text{rot } \mathbf{j}_n = 0$. Это значит, что если полный ток \mathbf{j} равен

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_n + \mathbf{j}_s,$$

то $\text{rot } \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{j}_s$. Сверхток \mathbf{j}_s должен удовлетворять в стационарных условиях уравнению Лондонов. Взяв rot от обеих частей (5.17), получим

$$\text{rot } \Delta \mathbf{j}_s = -\frac{1}{c} \mathbf{H},$$

значит, в нашем случае справедливо уравнение

$$\text{rot } \Delta \mathbf{j} = -\frac{1}{c} \mathbf{H}. \quad (49.2)$$

*) См. обзор [67].

Используя теперь уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ и $\text{div } \mathbf{H} = 0$, мы приходим к хорошо известному уравнению для магнитного поля:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{H},$$

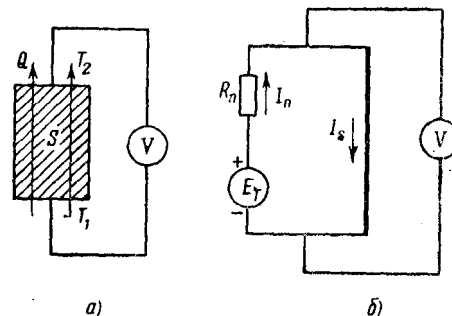
из которого следует эффект Мейсснера—Оксенфельда. Таким образом, и при потоке тепла через сверхпроводник полный ток в глубине массивного однородного изотропного сверхпроводника должен равняться нулю:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_n + \mathbf{j}_s = 0,$$

т. е. $\mathbf{j}_n = -\mathbf{j}_s$.

Это значит, что нормальные возбуждения сверхпроводника, гонимые градиентом температуры, подходя к краю

Рис. 49.1. а) Сверхпроводник, через который идет поток тепла Q , $T_1 > T_2$. б) эквивалентная схема сверхпроводника, концы которого имеют разную температуру. R_n — сопротивление образца в нормальном состоянии, E_T — термоэдс, действующая на нормальные возбуждения.



сверхпроводника, превращаются в сверхпроводящие носители, т. е. электронные пары, и текут обратно, образуя противоток \mathbf{j}_s . Очень наглядно этот процесс можно изобразить с помощью эквивалентной схемы (рис. 49.1). Будем считать, что нормальные возбуждения испытывают действие электродвижущей силы E_T , созданной разностью температур:

$$E_T = \alpha(T_1 - T_2).$$

Под действием этой эдс в цепи возникает ток $I_n = E_T/R_n$, который протекает обратно по сверхпроводящему участку в виде сверхтока I_s . Теперь понятно, что вольтметр, показанный на рис. 49.1, ничего не покажет, так как он за-

шунтирован сверхтоком. Этим и объясняется, почему долгое время считалось, что в сверхпроводнике термоэлектрические эффекты отсутствуют.

§ 50. Сверхпроводящая «термопара» и магнитный поток, индуцированный потоком тепла

Сейчас мы увидим, что термоэлектрические эффекты в сверхпроводниках все-таки можно наблюдать. Рассмотрим два массивных сверхпроводника из разных материалов, которые приведены в контакт друг с другом и образуют замкнутый контур, как показано на рис. 50.1. Пусть области контактов находятся при разных температурах T_1 и T_2 .

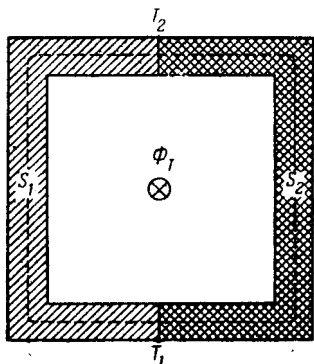


Рис. 50.1. Сверхпроводящая «термопара». Во внутренней полости возникает магнитный поток Φ_T , пропорциональный разности температур $(T_1 - T_2)$.

В каждой из половинок S_1 и S_2 возникает свой ток $\mathbf{j}_n = \sigma \alpha \nabla T$. Ответный сверхток в глубине сверхпроводника $\mathbf{j}_s = -\mathbf{j}_n$ и, согласно второму уравнению Гинзбурга—Ландау (14.18), может быть записан в виде

$$\mathbf{j}_s = \frac{\hbar n_s e}{2m} \nabla \theta - \frac{e^2}{mc} n_s \mathbf{A}, \quad (50.1)$$

где n_s — плотность сверхпроводящих электронов, e и m — соответственно заряд и масса свободного электрона, θ — фаза волновой функции теории ГЛ, \mathbf{A} — векторный потенциал.

Учитывая (49.1), имеем

$$\nabla \theta = \frac{2m}{\hbar n_s e} (-\sigma \alpha \nabla T) + \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A}. \quad (50.2)$$

Проинтегрируем теперь это уравнение по штриховому контуру (рис. 50.1), проходящему внутри нашего биметал-

лического сверхпроводящего кольца далеко (по сравнению с глубиной проникновения λ) от его краев. Требование однозначности волновой функции теории Гинзбурга—Ландау приводит к известному уже равенству:

$$\oint \nabla \theta dl = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (50.3)$$

Интегрируя правую часть равенства (50.2) и используя (50.3), имеем

$$2\pi n = -\frac{2m}{\hbar e} \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\sigma_1 \alpha_1}{n_{s1}} - \frac{\sigma_2 \alpha_2}{n_{s2}} \right) dT + \frac{2\pi \Phi}{\Phi_0}.$$

Это значит, что полный магнитный поток внутри нашего биметаллического кольца можно представить в виде

$$\Phi = \Phi_0 n + \Phi_T, \quad (50.4)$$

где

$$\Phi_T = \Phi_0 \frac{m}{\pi e \hbar} \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\sigma_1 \alpha_1}{n_{s1}} - \frac{\sigma_2 \alpha_2}{n_{s2}} \right) dT. \quad (50.5)$$

Индексы 1 и 2 в подинтегральном выражении относятся соответственно к сверхпроводникам S_1 и S_2 .

Из выражений (50.4) и (50.5) следует, что даже в том случае, когда в биметаллическом кольце нет замороженного магнитного потока, т. е. $n=0$, все равно при приложении разности температур к местам контактов S_1 и S_2 внутри кольца возникнет индуцированный магнитный поток Φ_T . Этот поток создается сверхтоком, который возникает на внутренней поверхности биметаллического кольца. Если в интервале температур $T_1 < T < T_2$ величины σ , α и n_s можно считать не зависящими от температуры, формула (50.5) упрощается:

$$\Phi_T = \Phi_0 \frac{m}{\pi e \hbar} \left(\frac{\sigma_1 \alpha_1}{n_{s1}} - \frac{\sigma_2 \alpha_2}{n_{s2}} \right) \Delta T,$$

где $\Delta T = T_2 - T_1$.

Если предположить, что $\sigma \sim 10^7$ (Ом·м)⁻¹, $\alpha \sim 10^{-6}$ В/К, $n_s \sim 10^{28}$ м⁻³, то для $\Phi_T/\Delta T$ получим величину порядка $10^{-5} \Phi_0$ на кельвин. Измерение такого потока находится на пределе возможности сквида.

При приближении к T_c эффект будет увеличиваться, так как плотность сверхпроводящих электронов при этом

стремится к нулю. Подобные эксперименты были проведены [68, 69], и, действительно, наблюдался магнитный поток Φ_T , индуцированный градиентом температуры в биметаллическом кольце. Величина его, однако, оказалась существенно больше теоретической оценки. Причины такого расхождения пока неясны.

§ 51. Термоэлектрические эффекты в джозефсоновских переходах

В джозефсоновских переходах можно наблюдать сильные и интересные термоэлектрические явления. Наиболее ярко они проявляются в переходах типа сверхпроводник—нормальный металл—сверхпроводник (*SNS*). Как будет видно из дальнейшего, это связано с тем, что в таком типе джозефсоновских переходов фазовая когерентность двух сверхпроводящих обкладок может осуществляться через довольно толстый слой нормальной прослойки (~ 10 мкм). Это приводит к очень малому значению характерного напряжения перехода V_c . В этом параграфе мы сперва рассмотрим поведение такого *SNS*-перехода, когда его *S*-обкладки находятся при разных температурах, или, иными словами, когда через такой переход идет поток тепла. Затем, в заключение, будут обсуждены некоторые термоэлектрические явления, когда такой переход с потоком тепла находится еще и в магнитном поле.

51.1. Джозефсоновский *SNS*-переход в потоке тепла. Пусть джозефсоновский переход типа *SNS* помещен в поток тепла (рис. 51.1, а). Снова зададимся вопросом: «Что покажет вольтметр, подключенный к такому совершенно автономному переходу?» Эквивалентная схема этого перехода подскажет ответ (рис. 51.1, б). Здесь в эквивалентную схему джозефсоновского перехода (рис. 21.1) включен источник термоэдс $E_T = \alpha(T_1 - T_2)$, где α — абсолютная дифференциальная термоэдс материала нормальной прослойки, а T_1 и T_2 — температуры сверхпроводящих обкладок в местах, непосредственно примыкающих к нормальной прослойке. Из рис. 51.1, б очевидно, что термоэдс E_T создаст в замкнутой цепи ток, который течет по нормальному участку в виде нормального тока I_n , а по собственно джозефсоновскому участку — в виде сверхтока $I_s = I_c \sin \varphi$, где φ — разность фаз волновой функции сверхпроводящих электронов у *S*-обкладок перехода. Здесь I_c — критический ток перехода.

Напряжение V_{AB} между точками *A* и *B* (рис. 51.1, б) должно удовлетворять уравнению

$$E_T - I_n R_n = V_{AB}, \quad (51.1)$$

где R_n — сопротивление нормального слоя. С другой стороны, для точек *A* и *B* должен выполняться первый закон Кирхгофа:

$$I_n = I_s. \quad (51.2)$$

Наконец, для участка цепи с джозефсоновским током

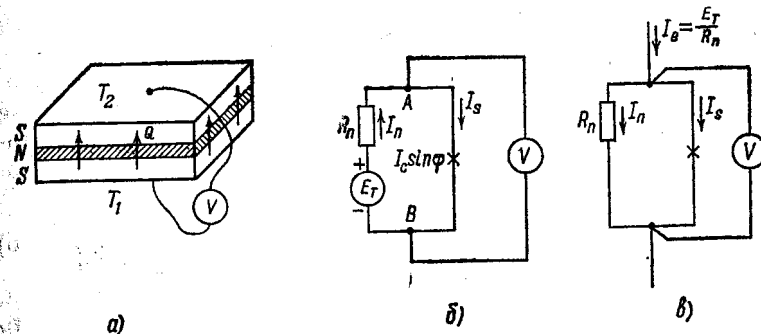


Рис. 51.1. а) *SNS*-джозефсоновский переход в потоке тепла. Перепад температур на нормальной прослойке равен $(T_1 - T_2)$. б) эквивалентная схема такого перехода, E_T — термоэдс, генерируемая потоком тепла в нормальной прослойке; в) схема, соответствующая уравнению (51.5).

должны быть справедливы известные соотношения Джозефсона

$$I_s = I_c \sin \varphi, \quad (51.3)$$

$$2eV_{AB} = \hbar \frac{d\varphi}{dt}. \quad (51.4)$$

Уравнения (51.1)—(51.4) полностью определяют нашу задачу. Они элементарно сводятся к уравнению

$$\frac{\hbar}{2eR_n} \frac{d\varphi}{dt} + I_c \sin \varphi = \frac{E_T}{R_n}. \quad (51.5)$$

Но это уравнение — хорошо известное нам уравнение джозефсоновского перехода в резистивной модели (рис. 51.1, в), когда в переход вводится от внешнего источника некоторый ток (в данном случае равный E_T/R_n), который распределяется по двум ветвям: собственно джо-

зедфсоновской ($I_c \sin \varphi$) и по нормальному участку ($\frac{\hbar}{2eR_n} \frac{d\varphi}{dt}$). При этом температуры S -обкладок, конечно, равны. Поведение такой системы хорошо известно (см. § 21). Если внешний ток меньше I_c , он течет только по сверхпроводящему, т. е. джозефсоновскому, участку, и напряжения между точками A и B нет. Вольтметр ничего не покажет. Если же этот ток станет больше I_c , то на переходе возникнет пульсирующее напряжение с частотой $\omega = 2e\bar{V}_{AB}/\hbar$, где \bar{V}_{AB} — постоянная составляющая этого пульсирующего напряжения, которую и показывает вольтметр.

Теперь мы можем полностью описать поведение джозефсоновского SNS -перехода, находящегося в потоке тепла. До тех пор пока разность температур на двух сторонах нормальной прослойки $\Delta T = T_1 - T_2$ меньше некоторой критической величины

$$\Delta T_c = V_c/\alpha = I_c R_n/\alpha, \quad (51.6)$$

вольтметр, подключенный к сверхпроводящим обкладкам, ничего не покажет. Если же ΔT станет больше ΔT_c , то переход начнет генерировать пульсирующее напряжение, частота которого ω будет равна, согласно (21.7),

$$\omega = \frac{2e}{\hbar} R_n [(\alpha \Delta T/R_n)^2 - I_c^2]^{1/2}. \quad (51.7)$$

Такая генерация под влиянием потока тепла еще никем не наблюдалась. Эти термоэлектрические явления были предсказаны в работе Аронова и Гальперина [70].

Из выражения (51.6) ясно, что такие эффекты можно было бы наблюдать, если бы удалось сделать критическую разность температур ΔT_c существенно малой. Но для этого должно быть малым характерное напряжение перехода $V_c = I_c R_n$. Нетрудно сделать SNS -переход с $V_c \sim 10^{-13}$ В. Считая $\alpha \sim 10^{-8}$ В/К, имеем $\Delta T_c \sim 10^{-5}$ К. Такую разность температур, конечно, нетрудно получить.

Экспериментальное исследование термоэлектрических эффектов в джозефсоновских SNS -переходах [71] полностью подтвердило изложенные выше представления.

51.2. Влияние магнитного поля на термоэлектрические явления в джозефсоновских SNS -переходах. Пусть теперь джозефсоновский SNS -переход, находящийся в потоке тепла, помещен в магнитное поле, параллельное его поверхности (плоскость xz). В этом случае мы можем ока-

заться свидетелями интересных и красивых явлений. Действительно, учтем протяженность перехода, скажем, вдоль оси x . Его размер в этом направлении пусть будет равен w . Тепловой поток направлен перпендикулярно переходу вдоль оси y , а магнитное поле — вдоль оси z . Для распределенного вдоль оси x перехода тоже нетрудно начертить эквивалентную схему (рис. 51.2, а). Здесь L — это суммарная индуктивность обеих сверхпроводящих обкладок перехода, приходящаяся на единицу их площади, I_x — ток, текущий в направлении оси x в полосе единичной ширины.

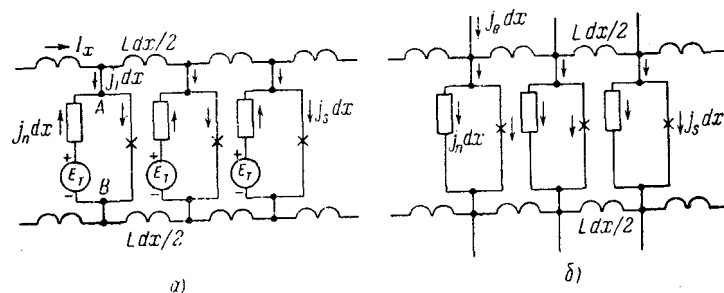


Рис. 51.2. а) эквивалентная схема протяженного SNS -джозефсоновского перехода, через который идет поток тепла, б) другой вид эквивалентной схемы того же перехода. Источник термоэдс E_T заменен равномерно распределенным током j_e .

Подобно тому, как от эквивалентной схемы рис. 51.1, б мы перешли к схеме 51.1, а, здесь тоже можно от схемы 51.2, а перейти к эквивалентной схеме, изображенной на рис. 51.2, б, которая представляет собой эквивалентную схему протяженного джозефсоновского перехода с однородной температурой (т. е. без теплового потока), но с однородно введенным в него током от внешнего источника с плотностью $j_e = E_T/R_n$. Здесь R_n — сопротивление нормальной прослойки, приходящееся на единицу ее площади. Поведение такого объекта во внешнем магнитном поле, параллельном оси y , нам хорошо известно (см. § 22). Поэтому сразу можно предсказать [72], что критическая разность температур ΔT_c , при которой появляется напряжение на переходе, будет немонотонно зависеть от магнитного поля. В идеальном случае должна была бы наблюдаться такая зависимость (см. (22.25)):

$$\Delta T_c = \frac{j_e R_n}{\alpha} \left| \frac{\sin(\pi\Phi/\Phi_0)}{\pi\Phi/\Phi_0} \right|, \quad (51.8)$$

где $\Phi = B_0 wd$. Здесь B_0 — магнитная индукция внешнего поля, w — размер перехода в направлении оси x , d — толщина нормального слоя. Подобные эксперименты были поставлены [57] и полностью подтвердили эти предсказания.

Был изготовлен джозефсоновский SNS-переход тантал—медь—тантал с толщиной медной прослойки около 10^{-8} см. Сопротивление нормального участка было около 10^{-9} Ом, а критический ток перехода — около 10^{-4} А. Таким образом, характерное напряжение перехода V_0 было

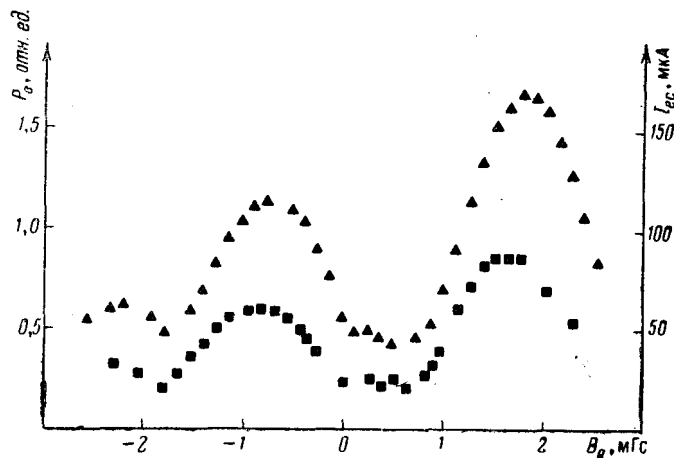


Рис. 51.3. Результат эксперимента [73] по изучению магнитно-термоэлектрического эффекта в джозефсоновском переходе типа SNS.

около 10^{-13} В. Напряжение на переходе измерялось с помощью ВЧ сквида. Разность температур двух сторон нормального слоя ΔT была, очевидно, пропорциональна установившемуся тепловому потоку через переход, т. е. выделяющейся из нагревателя мощности. Критической разности температур ΔT_c соответствовала критическая мощность нагревателя P_c . На рис. 51.3 показан результат измерения критической мощности P_c в зависимости от внешнего магнитного поля, наложенного на переход параллельно его плоскости (верхняя кривая). Нижняя кривая дает зависимость максимального бездиссипативного тока через тот же переход от внешнего магнитного поля, когда все части перехода имеют одну и ту же температуру. Если подобрать масштаб P_c или I_{max} так, чтобы эти два

графика совпали хотя бы в одной точке, то окажется, что они совпадут и во всех остальных точках. Этим доказываются справедливость приведенных выше соображений.

Итак сформулируем основные результаты.

Напряжение термоэлектрического происхождения появляется на джозефсоновском SNS-переходе, начиная с некоторого порогового значения потока тепла через переход. Такое критическое значение потока тепла есть немонотонная функция магнитного поля. Это — тепловой аналог стационарного эффекта Джозефсона.

Есть полная уверенность, что должен существовать тепловой аналог и нестационарного эффекта Джозефсона, а именно, стационарный поток тепла через SNS-переход должен индуцировать джозефсоновскую генерацию, т. е. переменное во времени напряжение на переходе. Нет никакого сомнения, что в ближайшее время этот эффект будет экспериментально обнаружен.

1. Роуз-Инс А., Родерик Е. Введение в физику сверхпроводимости. — М.: Мир, 1972.
2. Линтон Э. Сверхпроводимость. — М.: Мир, 1971.
3. Тинкхам М. Введение в сверхпроводимость. — М.: Атомиздат, 1980.
4. Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. — М.: Мир, 1968.
5. Тилли Д. Р., Тилли Дж. Сверхтекучесть и сверхпроводимость. — М.: Мир, 1977.
6. Kamerlingh Onnes H. — Leiden Comm., 1911, v. 122b, p. 124.
7. Roberts B. W. — Journ. Phys. Chem. Ref. Data, 1976, v. 5, p. 581.
8. Deaver B. S., Jr., Fairbank W. M. — Phys. Rev. Lett., 1961, v. 7, p. 43.
9. Doll R., Näbauer M. — Phys. Rev. Lett., 1961, v. 7, p. 51.
10. Josephson B. D. — Phys. Lett., 1962, v. 1, p. 251.
11. Янсон И. К., Сеистунов В. М., Дмитренко И. М. — ЖЭТФ, 1965, т. 48, с. 976.
12. Meissner W., Ochsenfeld R. — Naturwiss., 1933, v. 21, p. 787.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1972.
14. Мешковский А. Г., Шальников А. И. — ЖЭТФ, 1947, т. 17, с. 851.
15. Мешковский А. Г. — ЖЭТФ, 1949, т. 19, с. 1.
16. Bodmer A., Essmann V., Trauble H. — Phys. Status Solidi, 1972, v. (a) 13, p. 471.
17. London F., London H. — Proc. Roy. Soc., 1935, v. A149, p. 71.
18. Pippard A. B. — Proc. Roy. Soc., 1953, v. A216, p. 547.
19. Newhouse V. L., Bretter J. W., Edwards H. H. — Proc. IRE, 1960, v. 48, p. 1395.
20. Лихарев К. К., Ульрих Б. Т. Системы с джозефсоновскими контактами. Основы теории. — М.: Изд-во МГУ, 1978.
21. Van Duzer T., Turner C. W. Principles of Superconductive Devices and Circuits. — N. Y.: Elsevier, 1981.
22. Gittleman J. I., Rosenblum B. — Proc. IEEE, 1964, v. 52, p. 1138.
23. Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д. — ЖЭТФ, 1950, т. 20, с. 1064.
24. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. — 3-е изд., доп. — М.: Наука, 1976, ч. 1.
25. Лихарев К. К., Якобсон Л. А. — ЖТФ, 1975, т. 45, с. 1503.
26. Deutscher G., De Gennes P. G. — Superconductivity/ Ed. Parks R. D. — N. Y.: Marcel Dekker, Inc., 1969, v. 2, p. 1005.
27. Ivanov Z. G., Kupriyanov M. Yu., Likharev K. K., Snigirev O. V. — Journal de Physique, 1978, v. C-6, p. 556.
28. Hauser J. J., Theuerer H. C. — Phys. Lett., 1965, v. 14, p. 270.
29. Завааруцкий Н. В. — ДАН СССР, 1951, т. 78, с. 665.
30. Shapiro S. — Phys. Rev. Lett., 1963, v. 11, p. 80.
31. Likharev K. K. — Rev. Mod. Phys., 1979, v. 51, p. 101.
32. Солимар Л. Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применение. — М.: Мир, 1974.
33. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. — М.: Мир, 1967, т. 9.
34. Асламазов Л. Г., Ларкин А. И. — Письма ЖЭТФ, 1965, т. 48, с. 976.
35. Ferrell R., Prange R. — Phys. Rev. Lett., 1963, v. 10, p. 479.
36. Langenberg D. N., Scalapino D. J., Taylor B. N. — Proc. IEEE, 1966, v. 54, p. 560.
37. Кларк Дж. — В сб.: Слабая сверхпроводимость/ Под ред. Б. Б. Шварца и С. Фонера. — М.: Мир, 1980, с. 7.
38. Hartfuss H. J., Gundlach K. H., Schmidt V. V. — Journ. Appl. Phys., 1981, v. 52, p. 5411.
39. Абрикосов А. А. — ЖЭТФ, 1957, т. 32, с. 1442.
40. Essmann V., Trauble H. — Phys. Lett., 1967, v. 24A, p. 526.
41. Saint James D., De Gennes P. G. — Phys. Lett., 1963, v. 7, p. 306.
42. Сан-Жам Д., Сарма Г., Томас Е. Сверхпроводимость второго рода. — М.: Мир, 1970.
43. Bean C. P., Livingston J. D. — Phys. Rev. Lett., 1964, v. 12, p. 14.
44. De Blois R. W., De Sorbo W. — Phys. Rev. Lett., 1964, v. 12, p. 499.
45. Brandt E. H. — Journ. of Low Temp. Phys., 1977, p. 709. — Phys. Status Solidi, 1976, v. b77, p. 551.
46. Campbell A. M., Evetts J. E., Dew-Hughes D. — Phil. Mag., 1968, v. 18, p. 313.
47. Osborn K. E., Rose-Innes A. C. — Phil. Mag., 1973, v. 27, p. 683.
48. Кулик И. О., Янсон И. К. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. — М.: Наука, 1970.
49. Martinoli P. — Phys. Rev., 1978, v. B17, p. 1175.
50. Бардин Дж., Купер Л., Шриффер Дж. — В сб.: Теория сверхпроводимости/ Под ред. Н. Н. Боголюбова. — М.: ИЛ, 1960, с. 103.
51. Giaever I. — Phys. Rev. Lett., 1960, v. 5, p. 147.
52. Giaever I., Megerle K. — Phys. Rev., 1961, v. 122, p. 1101.
53. London F. — Proc. Roy. Soc., 1935, v. A152, p. 24. — Phys. Rev., 1948, v. 74, p. 562.
54. Горьков Л. П. — ЖЭТФ, 1959, т. 36, с. 1918.
55. Pethick C. J., Smith H. — Annals of Physics, 1979, v. 119, p. 133.
56. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. — М.: Наука, 1979, с. 413.
57. Schmid A., Schön G. — Journ. of Low Temp. Phys., 1975, v. 20, p. 207.
58. Андреев А. Ф. — ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 182.
59. Yu M. L., Mercereau J. E. — Phys. Rev., 1975, v. B12, p. 4909.
60. Ryazanov V. V., Ermolaeva L. A., Schmidt V. V. — Journ. of Low Temp. Phys., 1981, v. 45, No 5/6.
61. Артемько С. Н., Волков А. Ф. — УФН, 1979, т. 128, с. 3.
62. Hsiang T. Y., Clarke J. — Phys. Rev., 1980, v. B21, p. 945.
63. Meyer J., v. Minnigerode G. — Phys. Lett., 1972, v. 38A, p. 529.
64. Skocpol W. J., Beasley M. R., Tinkham M. — Journ. of Low Temp. Phys., 1974, v. 16, p. 145.

65. Wyatt A. F. G., Dmitriev V. M., Moore W. S., Sheard F. W. — Phys. Rev. Lett., 1966, v. 16, p. 1166.
 66. Eliashberg G. M. — Journ. of Low Temp. Phys., 1973, v. 10, p. 449.
 67. Гинзбург В. Л., Жарков Г. Ф. — УФН, 1978, т. 125, с. 49.
 68. Заварицкий Н. В. — Письма ЖЭТФ, 1974, т. 19, с. 205.
 69. Van Harlingen D. J., Heide D. F., Garland J. C. — Phys. Rev., 1980, v. B21, p. 1842.
 70. Аронов А. Г., Гальперин Ю. М. — Письма ЖЭТФ, 1974, т. 19, с. 281.
 71. Карцовник М. В., Рязанов В. В., Шмидт В. В. — Письма ЖЭТФ, 1981, т. 33, с. 373.
 72. Шмидт В. В. — Письма ЖЭТФ, 1981, т. 104, с. 33.
 73. Ruzanov V. V., Schmidt V. V. — Solid State Commun., 1981, v. 40, p. 1055.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Френковское отражение 203
- Ф-конденсат 27, 87, 200
- Ф-конденсация 27
- Ф-частицы 200
- Взаимодействие вихрей 130
- Вихревая решетка 123
- Вихри в сверхпроводнике второго рода 123
- Время релаксации заряда квазиэлектрон 202
- Энергетическая релаксация 202
- Вихря проникновения магнитного поля (лондоновская) 32, 5
- — — (пиппардовская) 34
- — — электрического поля 210
- Джоузефсоновская генерация 97
- Джоузефсоновские вихри 102
- Вихря когерентности 65, 178
- Параметры квазичастиц 200, 206, 207
- Объемное сопротивление 215
- Эффект Стоунера 163, 182
- Дифференциальные эффекты в сверхпроводниках 88
- Квазичастицы (электроны и дырки) 196
- , заряд 200, 206, 207
- , спектр 197
- Квант магнитного потока 7, 38
- Квантование магнитного потока 7, 36, 88
- Квантованная вихревая нить 123
- Кинетическая индуктивность 48
- — тонкой сверхпроводящей пленки 49
- Когерентность сверхпроводящих электронов 25
- Комплексная проводимость сверхпроводника 51
- Конденсат 27, 200
- Критическая плотность тока 83, 149, 155
- температура 5, 181
- Критический ток сверхпроводника второго рода динамический 160
- — — — статический 160
- — тонкой пленки 81
- Критическое магнитное поле 5
- — — массивного материала 19, 137
- — — сверхпроводника второго рода (второе) 124, 133
- — — — — (первое) 124, 127, 130
- — — термодинамическое 19, 137
- — — тонкой пленки 80
- — — третья* (поверхностной сверхпроводимости) 140
- состояние 151
- Куперовская электронная пара 27, 200
- Магнитное поле одиночного вихря 125

Магнитный момент сверхпроводника второго рода 135
Магнитный поток вихря 147
— —, индуцированный потоком тепла 222
Метод изображений 43

Надконденсатные частицы 200
Незатухающий ток в сверхпроводнике 188
Нелокальная электродинамика сверхпроводников 33

Опыты Ю и Мерсеро 212
Основное состояние сверхпроводника 167
— — —, распределение электронов 171
— — —, энергия 172

Параметр теории Гинзбурга—Ландау 66
Первое критическое поле джозефсоновского перехода 103
Пиннинг 149
Пленка сверхпроводящая над сверхпроводящим экраном 42
Плотность состояний сверхпроводника 177
Поверхностная сверхпроводимость 139
— —, критическое поле 140
Поверхностный импеданс сверхпроводника 53
— сверхток 12
— энергетический барьер (Бина—Ливингстона) 145
Поле перегрева мейссенеровского состояния 145
Принцип замыкания 46
Промежуточное состояние 13, 14
— — в проволоке с током 16
— —, структура 16

Разбаланс заселенностей спектра возбуждений сверхпроводника 206
Размагничивающий фактор 15
Резистивное состояние 158

Сверхпроводники второго рода 11, 122
— первого рода 11
Сверхпроводящая «термопара» 222
Свободная энергия вихря 127
— — Гельмгольца 222
— — Гиббса 22
Сила Лоренца взаимодействия вихря с током 132
Сквид (сверхпроводящий квантовый интерферометр) 108
— двухконтактный 108
— одноконтактный 112
— — конструкции Циммермана 118
Скин-эффект 52
Слабая сверхпроводимость 8, 119
Слабая связь 8, 88
Смешанное состояние 124
Спектр элементарных возбуждений сверхпроводника 177

Теория Гинзбурга — Ландау 25, 56
— — —, второе уравнение 62
— — —, градиентная инвариантность 63
— — —, первое уравнение 61
— — —, пределы применимости 195
— — —, связь с микротеорией 193
Теплоемкость сверхпроводника 21
Термоэлектрические эффекты в джозефсоновских переходах 224
Термоэлектрический эффект в сверхпроводниках 219
Туннельные эффекты 183

Уравнения Лондонов 28
Усиление сверхпроводимости 219

Фазовая когерентность 87, 88, 89
Фазовый переход второго рода 56

Химический потенциал квазичастиц 209
— сверхпроводящих электронов 206

Читры пиннинга 149
проскальзывания фазы 1217

Электронные пары (куперовские) 27, 200
Элементарные возбуждения сверхпроводника 177, 197, 198
— —, спектр 177

Энергетическая щель 174, 176
— —, зависимость от температуры 179
Энергия границы раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами 70
Энтропия сверхпроводника 20
Эффект близости 67
Эффект Джозефсона нестационарный 8, 95
— — стационарный 8, 90
Эффективное взаимодействие электронов через фононы 164, 166
Эффект Мейсснера — Оксенфельда 9, 188, 192
Эффекты Джозефсона 8, 87

Предисловие	3
Глава 1. Введение	5
§ 1. Основные экспериментальные факты	5
1.1. Открытие сверхпроводимости (5). 1.2. Квантование магнитного потока (7). 1.3. Эффекты Джозефсона (8). 1.4. Эффект Мейсснера—Оксенфельда (9).	
§ 2. Магнитные свойства сверхпроводников	11
2.1. Магнитные свойства сверхпроводников первого рода (11). 2.2. Промежуточное состояние (13). 2.3. Магнитные свойства сверхпроводников второго рода (18).	
§ 3. Термодинамика сверхпроводников	19
3.1. Критическое поле массивного материала (критическое термодинамическое магнитное поле) (19). 3.2. Энтропия сверхпроводника (20). 3.3. Теплоемкость (21). 3.4. Свободная энергия (22).	
§ 4. Очерк развития теории сверхпроводимости	23
Глава 2. Линейная электродинамика сверхпроводников	28
§ 5. Уравнения Лондонов	28
5.1. Первое уравнение Лондонов (28). 5.2. Второе уравнение Лондонов (29).	
§ 6. Глубина проникновения магнитного поля	31
§ 7. Нелокальная электродинамика сверхпроводников	33
§ 8. Квантовое обобщение уравнения Лондонов. Квантование магнитного потока	35
8.1. Квантовое обобщение уравнения Лондонов (35). 8.2. Квантование магнитного потока (36).	
§ 9. Распределение поля и тока в простейших конфигурациях сверхпроводников	39
9.1. Пластина в параллельном поле (39). 9.2. Пластина с током (40). 9.3. Пластина с током в однородном поперечном магнитном поле (41). 9.4. Пленка над экраном (42). 9.5. Принцип замыкания (45).	
§ 10. Кинетическая индуктивность	48
§ 11. Комплексная проводимость сверхпроводника	51
§ 12. Скин-эффект и поверхностный импеданс	52
12.1. Нормальный скин-эффект (52). 12.2. Поверхностный импеданс (53).	
Глава 3. Теория сверхпроводимости Гинзбурга—Ландау	56
§ 13. Введение	56
§ 14. Уравнения теории Гинзбурга—Ландау	59

14.1. Плотность свободной энергии (59). 14.2. Уравнения Гинзбурга—Ландау (ГЛ) (60). 14.3. Градиентная инвариантность теории ГЛ (63).	
§ 15. Два характерных масштаба длины в сверхпроводниках. Эффект близости	64
15.1. Длина когерентности и глубина проникновения (64). 15.2. Эффект близости (67).	
§ 16. Энергия границы раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами	70
§ 17. Критическое поле тонкой пленки	77
§ 18. Критический ток тонкой пленки	81
Глава 4. Слабая сверхпроводимость	87
§ 19. Фазовая когерентность и виды слабых связей	87
§ 20. Стационарный эффект Джозефсона	90
§ 21. Нестационарный эффект Джозефсона	95
§ 22. Отклик джозефсоновского перехода на внешнее магнитное поле	99
22.1. Уравнение Феррелла—Прейнджа (99). 22.2. Проникновение магнитного поля в переход. Джозефсоновские вихри (102). 22.3. Максимальный бездиссипативный ток джозефсоновского перехода. Сильное магнитное поле (105).	
§ 23. Сверхпроводящие квантовые интерферометры (сквиды)	108
23.1. Двухконтактный сквид (108). 23.2. Одноконтактный сквид (112).	
§ 24. Применения слабой сверхпроводимости	119
Глава 5. Сверхпроводники второго рода	122
§ 25. Введение	122
§ 26. Поле одиночного вихря	125
§ 27. Первое критическое поле	127
§ 28. Взаимодействие вихрей	130
§ 29. Второе критическое поле	133
§ 30. Обратимый магнитный момент сверхпроводника второго рода	135
§ 31. Поверхностная сверхпроводимость. Третье критическое поле	139
§ 32. Поверхностный барьер. Перегрев мейсснеровского состояния	142
§ 33. Критический ток в сверхпроводниках второго рода. Критическое состояние	148
§ 34. Взаимодействие вихрей с центрами пиннинга	152
34.1. Взаимодействие вихрей с плоской поверхностью сверхпроводника (153). 34.2. Взаимодействие вихря с полостью в сверхпроводнике (156).	
§ 35. Резистивное состояние	158
Глава 6. Микроскопическая теория сверхпроводимости	163
§ 36. Введение. Электрон-фононное взаимодействие	163
§ 37. Основное состояние сверхпроводника	166
37.1. Распределение электронов в основном состоянии (166). 37.2. Энергия основного состояния (171).	
§ 38. Спектр элементарных возбуждений сверхпроводника	174
38.1. Энергетическая щель (174). 38.2. Плотность со-	

	стояний элементарных возбуждений сверхпроводника и длина когерентности (177). 38.3. Зависимость энергетической щели от температуры (179).	
§ 39.	Туннельные эффекты в сверхпроводниках	183
§ 40.	Незатухающий ток и эффект Мейсснера—Оксенфельда	188
§ 41.	Связь микротемпературы с теорией Гинзбурга—Ландау	193
Г л а в а 7. Некоторые неравновесные эффекты в сверхпроводниках		
§ 42.	Квазичастицы: электроны и дырки	196
§ 43.	Заряд квазичастицы в сверхпроводнике	198
§ 44.	Время релаксации заряда квазичастиц	202
§ 45.	Андреевское отражение	203
§ 46.	Разбаланс заселенностей ветвей спектра элементарных возбуждений и электрическое поле в сверхпроводнике	205
§ 47.	Экспериментальное исследование неравновесного состояния сверхпроводника около NS -границы.	212
	47.1. Опыты Ю и Мерсеро (212). 47.2. Избыточное сопротивление NS -границы (214). 47.3. Центры проскальзывания фазы (216).	
§ 48.	Неравновесное усиление сверхпроводимости	219
§ 49.	Термоэлектрический эффект в сверхпроводниках	219
§ 50.	Сверхпроводящая «термопара» и магнитный поток, индуцированный потоком тепла	222
§ 51.	Термоэлектрические эффекты в джозефсоновских переходах	224
	51.1. Джозефсоновский SNS -переход в потоке тепла (224). 51.2. Влияние магнитного поля на термоэлектрические явления в джозефсоновских SNS -переходах (226).	
Литература		230
Предметный указатель		233

Вадим Васильевич Шмидт

ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ СВЕРХПРОВОДНИКОВ

Редактор *В. Я. Дубнова.*

Технический редактор *С. Я. Шкляр.*

Корректоры *Т. С. Вайсберг, Л. С. Сомова.*

ИБ № 11963

Сдано в набор 03.05.82. Подписано к печати 10.09.82. Т-16786. Формат $84 \times 108^{1/2}$. Бумага тип. № 1. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 12,6. Уч.-изд. л. 12,49. Тираж 10500 экз. Заказ № 1415. Цена 40 коп.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая типография издательства «Наука»
199034, Ленинград, В-34, 9 линия, 12