



Digital Communications

WITH SPACE APPLICATIONS

edited by

SOLOMON W. GOLOMB

Professor of Electrical Engineering
and Mathematics,
University of Southern California

with contributions by

LEONARD D. BAUMERT

Senior Research Engineer,
Information Processing Group,
Jet Propulsion Laboratory

MAHLON F. EASTERLING

Chief, Communications
Systems Research Section,
Jet Propulsion Laboratory

JACK J. STIFFLER

Research Specialist,
Digital Communications Group,
Jet Propulsion Laboratory

ANDREW J. VITERBI

Assistant Professor of Engineering,
University of California, Los Angeles.

Prentice-Hall, Inc.
New Jersey, USA
1964 r.

Цифровые методы в космической связи

Под редакцией
С. ГОЛОМБА

Перевод с английского
под редакцией
В. И. Шляпоберского

Вступительная статья
А. П. Мановцева

ИЗДАТЕЛЬСТВО «СВЯЗЬ»
МОСКВА 1969

УДК 621.396.946

Переводчики:

В. Н. КУПРИЯНОВ, С. Л. ГЛАЗОВ

УДК 621.396.946

ЦИФРОВЫЕ МЕТОДЫ В КОСМИЧЕСКОЙ СВЯЗИ

под ред. *С. ГОЛОМБА*.

Перевод с английского

под ред. *В. И. ШЛЯПОБЕРСКОГО*

Книга написана коллективом специалистов Калифорнийского университета. В ней впервые рассматриваются вопросы, связанные с цифровыми системами космической связи, а именно: теория ортогональных кодов и переключающих цепей, общие вопросы теории связи в космосе, вопросы синхронизации кодовых последовательностей, способы построения самосинхронизирующихся кодов и т. д. Разбираются возможные пути практической реализации устройств цифровой космической связи.

Книга предназначена для связистов, занимающихся передачей цифровой информации по каналам связи и в особенности вопросами связи через искусственные спутники Земли, а также для специалистов по космической и обычной телеметрии и телеуправлению.

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ КОСМИЧЕСКОЙ СВЯЗИ

§ 1. Условия и особенности работы систем космической связи

Системы космической связи

Запуски первого искусственного спутника Земли (4 октября 1957 г.), первой космической ракеты в сторону Луны (2 января 1959 г.) и первой автоматической межпланетной станции в сторону планеты Венера (12 февраля 1961 г.), осуществленные в Советском Союзе, открыли новую эру в технике радиосвязи; дальности передачи информации стали исчисляться сотнями тысяч и сотнями миллионов километров. Системы космической связи, включающие в себя и системы радиотелеметрии, обеспечивают передачу с космических объектов («с борта») на пункты приема («на Землю») большого количества информации о состоянии и работе всех систем и агрегатов этих объектов (аппаратурная информация) и о результатах исследований (измерений, наблюдений) явлений и процессов, происходящих в космическом пространстве, на поверхности Луны и планет (научная информация). Задачи управления режимом работы космических объектов потребовали также создания радиолиний передачи командно-программной информации с Земли на борт». Естественно, что без успешной работы систем космической связи были бы невозможны летно-конструкторские испытания и отработка космических объектов, а также само достижение цели их запуска — получение научной информации.

В настоящее время в СССР и США реализованы и успешно работают следующие основные виды систем космической связи:

1. Системы связи «Земля—борт» и «борт—Земля» с искусственными спутниками Земли (ИСЗ) и орбитальными космическими кораблями.

2. Системы дальней космической связи с автоматическими межпланетными станциями, запускаемыми в сторону Луны и планет солнечной системы.

3. Системы наземно-космической связи, в которых ИСЗ используются для ретрансляции сигналов.

Создание этих систем связи требовало решения ряда очень сложных задач как в области теории, так и в части построения многих новых технических устройств и аппаратуры.

Большинство задач, которые приходилось решать создателям систем космической связи, не являются качественно новыми. В той или иной степени они решались и раньше в других системах связи. Однако числовые значения характеристик и параметров, которыми должны обладать космические системы связи, могли быть достигнуты лишь при использовании в ряде случаев качественно новых технических решений.

Для лучшего уяснения специфических условий работы систем космической связи и предъявляемых к ним требований рассмотрим три группы вопросов: энергетику космических радиолиний связи, занимаемые полосы частот, вид и уровень помех. Требования, предъявляемые к таким системам, проиллюстрируем численным примером. Пример взят для радиолинии «борт—Земля» систем дальней космической связи, в которых специфические условия их работы выявляются наиболее отчетливо.

Энергетика космических радиолиний

Энергетика радиолинии передачи информации без ретрансляции, работающей в укв диапазоне, в условиях прямой видимости может характеризоваться следующим соотношением:

$$S = \frac{S_{\text{пер}} G_{\text{пер}}}{4\pi R_D^2} A_{\text{эф.пр}} \frac{1}{B}, \quad (1)$$

где S — средняя мощность полезного сигнала на входе приемного устройства;

$S_{\text{пер}}$ — средняя мощность полезного сигнала, отдаваемая передатчиком в антенно-фидерное устройство;

$G_{\text{пер}}$ — коэффициент усиления передающей антенны в направлении приема;

R_D — дальность связи;

$A_{\text{эф.пр}}$ — эффективная площадь приемной антенны;

B — коэффициент, учитывающий потери мощности, обусловленные: неравномерностью диаграмм направленности передающей и приемной антенн, влиянием плазменных образований работающих реактивных двигателей космического объекта, влиянием ионосферы, поглощением в тропосфере и другими факторами.

Исследования соотношений вида (1) и помех, действующих на входе приемника (см. ниже), показали, что энергетические соотношения получаются наиболее благоприятными при использовании несущих частот $f_0 > 100$ Мгц. Для этих частот коэффициент потерь B определяется в основном типом бортовых антенн и при неработающих двигателях лежит в пределах $1,2 \div 2$.

Рассмотрим числовой пример для случая, когда частота несущих колебаний $f_0 = 1000$ Мгц (длина волны $\lambda = 30$ см) и дальность связи $R_D = 400$ млн. км. Такая дальность связи с некоторым запасом обеспечивает полет объекта на планету Марс.

Величина средней мощности бортового передатчика $S_{\text{пер}}$ ограничивается допустимыми весом аппаратуры и расходом источников питания; практически они невелики. Примем $S_{\text{пер}} = 10$ вт. При коэффициенте полезного действия порядка 10% (реального для данного диапазона волн) передатчик такой мощности будет потреблять электроэнергию около 100 вт по постоянному току. Для обеспечения такого расхода питания в районе Марса потребуется иметь солнечные батареи с площадью панелей около $2,5$ м².

Величина достижимого коэффициента усиления бортовой антенны $G_{\text{пер}}$ лимитируется размерами антенны и, главным образом, качеством стабилизации объекта. Возьмем для примера антенну с параболическим рефлектором диаметром $D_1 \approx 1,5$ м. Такая антенна в выбранном диапазоне может иметь коэффициент усиления $G_{\text{пер}} \approx 200$ и ширину диаграммы направленности $2\theta_1 \approx 12^\circ$.

Направленные бортовые антенны не обеспечивают связи с объектом при аварийных ситуациях. Поэтому желательно иметь также и всенаправленные антенны, для которых $G_{\text{пер}} \approx 0,5 \div 0,7$.

Из (1) видно, что при сравнительной малости энергетического потенциала ($S_{\text{пер}} G_{\text{пер}}$) и большой дальности связи (R_D) приемлемые значения мощности на входе приемника (S) могут быть получены лишь при условии использования высокоэффективных приемных антенн большой площади ($A_{\text{эф.пр}}$). Увеличение этой площади лимитируется точностью изготовления и удержания основных геометрических размеров антенны, уменьшением ширины диаграммы направленности, а также сложностью и громоздкостью сооружения.

Возьмем для примера $A_{\text{эф.пр}} = 600$ м². Такая антенна имеет ширину диаграммы направленности порядка $50'$ и представляет собой сложное техническое сооружение с подвижной частью, весящей много сотен тонн.

Естественно, что узкая диаграмма направленности ($50'$) требует точного прогнозирования угловых координат объекта к началу сеанса связи, а также достаточно совершенного привода, обеспечивающего слежение антенны за объектом в ходе сеанса связи.

Для выбранных числовых характеристик радиолинии из (1) имеем:
 а) при работе с направленной бортовой антенной

$$S = \frac{10 \cdot 200 \cdot 600}{4\pi \cdot 16 \cdot 10^{22} \cdot 2} \approx 3 \cdot 10^{-19} \text{ вт};$$

б) при работе со всенаправленной бортовой антенной

$$S = \frac{10 \cdot 0,7 \cdot 600}{4\pi \cdot 16 \cdot 10^{22} \cdot 2} \approx 1 \cdot 10^{-21} \text{ вт}.$$

Для сравнения следует заметить, что в обычных приемниках наземной радиосвязи мощность полезного сигнала $S = 10^{-13} \div 10^{-15}$ вт.

Таким образом, в радиолиниях дальней космической связи мы имеем дело с полезным сигналом, мощность которого в $10^3 \div 10^6$ раз меньше обычного.

Полосы частот, занимаемые радиолинией

Для работы радиолиний большое значение имеют полоса частот, занимаемая излучаемым сигналом, — Δf_s и ширина полосы пропускания радиотракта в сечении радиотракт—детектор (демодулятор) — W . Величина Δf_s важна с точки зрения занятости частотного диапазона в эфире, а W — для работы детектора и влияния помех.

Полоса частот Δf_s может быть разделена на две составляющие:

$$\Delta f_s = \Delta f_c + \Delta f_1, \quad (2)$$

где Δf_c — практическая ширина спектра полезного радиосигнала;

Δf_1 — изменение частоты радиосигнала, обусловленное нестабильностью частоты задающего генератора, эффектом Доплера, а также другими факторами (например, плазменными образованиями), которые обычно можно не учитывать.

Практическая ширина спектра полезного сигнала

$$\Delta f_c = \kappa_m F_m, \quad (3)$$

где F_m — ширина спектра модулирующего сигнала;

κ_m — коэффициент, зависящий от вида модуляции радиосигнала.

Для радиолиний дальней космической связи характерны использование цифровых методов передачи информации (см. ниже) и низкие скорости передачи информации $v_c = 1 \div 150 \frac{\text{дв. ед}}{\text{сек}}$. При простом двоичном кодировании сообщений и сигналов $F_m \approx 0,6 \div 100$ гц.

Если использовать, рассматриваемые в книге такие виды модуляции, как фазовая (ФМ) или балансная (БМ), то для них $\kappa_m = 2$ и тогда $\Delta f_c = 1,2 \div 200$ гц.

Изменение частоты радиосигнала можно оценить обычным способом:

$$\Delta f_1 \approx 2\nu_1 f_0. \quad (4)$$

Здесь

$$\nu_1 = \nu_{н1} + \nu_{д},$$

где $\nu_{н1}$ — относительная нестабильность передатчика;

$\nu_{д}$ — относительная нестабильность частоты, обусловленная эффектом Допплера.

Обычные средства кварцевой стабилизации, приемлемые для бортовой аппаратуры, позволяют получить $\nu_{н1} = 10^{-5} \div 10^{-6}$. Применение молекулярных эталонов частоты дает возможность уменьшить эти значения на несколько порядков.

Изменение частоты, обусловленное эффектом Допплера, зависит от скорости движения объекта, вращения Земли вокруг своей оси и вокруг Солнца, а при посадке объекта на планету — также и от вращения этой планеты вокруг своей оси и Солнца. Так, например, для радиальной скорости движения объекта $v_R = 9$ км/сек имеем: $\nu_{д} = \frac{9}{3 \cdot 10^8} = 0,3 \cdot 10^{-4}$.

Для объекта на поверхности Марса с учетом всех факторов $\nu_{д} \approx (0,2 \div 0,8) \cdot 10^{-4}$.

Как видим,

$$\left. \begin{array}{l} \nu_{д} \gg \nu_{н1} \\ \nu_1 \approx \nu_{д} \end{array} \right\}. \quad (5)$$

Это обстоятельство, т. е. большое влияние эффекта Допплера, является одной из важных особенностей космических радиолиний.

Для $\nu_{д} = 0,5 \cdot 10^{-4}$ согласно (4) и (5) $\Delta f_1 \approx 2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^9 = 10^5$ гц и, следовательно, $\Delta f_1 \gg \Delta f_c$, а $\Delta f_s \approx \Delta f_1 \approx 2\nu_{д} f_0$.

Если выбрать ширину полосы пропускания радиотракта равной $W \approx \Delta f_1$, то получим, что ширина полосы пропускания радиотракта W на несколько порядков превышает практическую ширину спектра Δf_c . При этом реальный детектор окажется поставленным в очень плохие условия, ибо мощность шумов на его входе будет недопустимо велика по сравнению с мощностью полезного сигнала (см. § 3 статьи).

Влияние эффекта Допплера может быть уменьшено путем прогнозирования доплеровского сдвига частоты на основании измерения частоты в предшествующие сеансы связи и известного из небесной механики закона движения объекта. В таком случае

$$W = \Delta f_c + \Delta f_2,$$

где $\Delta f_2 = 2\nu_2 f_0$; $\nu_2 = \Delta \nu_1 + \nu_{н2}$;

$\Delta \nu_1$ — относительная ошибка в прогнозе частоты принимаемого сигнала;
 $\nu_{н2}$ — относительная нестабильность частоты гетеродинов приемника.

Потребуем, для примера, чтобы выполнялось условие

$$\Delta f_2 \leq 10 \Delta f_c; \quad (6)$$

тогда при $\Delta f_c = 1,2 \div 100$ гц имеем

$$\nu_2 = \frac{10(1,2 \div 100)}{2 \cdot 10^9} = 6 \cdot 10^{-9} \div 0,5 \cdot 10^{-6}.$$

Как видим, даже условие (6) может быть выполнено лишь при очень малой ошибке в прогнозе доплеровского сдвига частоты и высокой стабильности частоты бортового генератора и гетеродинов приемника. Для последних потребуется соответственно иметь $\nu_{н1} \approx 10^{-9}$ и $\nu_{н2} \approx 10^{-10} \div 10^{-11}$. Пусть $\nu_2 = 10^{-5}$, тогда для рассматриваемого примера $W \approx 2 \cdot 10^{-5} \cdot 10^6 = 20$ кГц.

Тип и уровень помех

Исследования условий работы радиолиний дальней космической связи показали, что для них характерна помеха типа «белый шум». Спектральная плотность мощности такой помехи (энергетический спектр) в полосе пропускания приемного устройства постоянна и определяется по формуле

$$N_0 = kT_{эф}, \quad (7)$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ дж/град — постоянная Больцмана;

$T_{эф}$ — суммарная шумовая температура всех источников помех.

Существенными источниками помех (шумов) являются антенно-фидерные устройства и первые усилительные каскады приемника (собственные шумы), а также внешние источники: Галактика, отдельные светила (радиояркие звезды, Солнце, Луна), атмосфера, Земля и наземные сооружения (при малых углах места линии приема) и др.

Основными источниками внутренних шумов являются первые усилительные каскады. Использование охлажденных параметрических и молекулярных усилителей позволило резко снизить температуру внутренних шумов до нескольких десятков и даже единиц градусов Кельвина. При этом существенное значение приобретают и внешние шумы. Выбор оптимального диапазона радиоволн собственно и определяется условием минимизации суммарной шумовой температуры источников помех, учетом кпд передающего устройства и эффективности передающей и приемной антенн [16].

В рассматриваемом примере ($f_0 = 1000 \text{ МГц}$) максимальная шумовая температура Галактики $T_{\text{эф-гал}} \approx 30^\circ\text{К}$ в очень узких интервалах угла места и времени суток. Шумовая температура атмосферы в зависимости от угла места равна $T_{\text{эф-атм}} \approx 1 \div 25^\circ\text{К}$.

Возьмем для примера суммарную шумовую температуру всех источников помех $T_{\text{эф}} = 50^\circ\text{К}$, тогда согласно (7) $N_0 = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 50 = 6,9 \cdot 10^{-22} \text{ вт/гц}$, а при $W = 20 \text{ кгц}$ мощность шумов на входе приемника будет $N = 6,9 \cdot 10^{-22} \cdot 20\,000 = 1,38 \cdot 10^{-18} \text{ вт}$. Соответственно получается, что отношение сигнал/шум по мощности на входе детектора равно:

а) при работе с направленной бортовой антенной

$$\frac{S}{N} = \frac{3 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-18}} \approx 0,22,$$

б) при работе с ненаправленной бортовой антенной

$$\frac{S}{N} = \frac{1 \cdot 10^{-21}}{1,38 \cdot 10^{-18}} \approx 0,7 \cdot 10^{-3}.$$

Общие выводы

Рассмотренный пример позволяет сформулировать характерные особенности радиолинии дальней космической связи:

1) передача информации возможна лишь при условии использования высокоэффективных приемных антенн с площадью, измеряемой сотнями квадратных метров;

2) мощность полезного сигнала на входе приемника (на предельных дальностях современных радиолиний) весьма мала — $10^{-19} \div 10^{-21} \text{ вт}$;

3) мощность сигнала на входе детектора может быть много меньше мощности шумов (сигнал «утопает» в шуме);

4) доплеровские сдвиги частоты имеют очень большие значения.

Для того чтобы при столь тяжелых условиях обеспечить передачу приемлемого количества информации, требуется решение ряда задач в области теории и практики ряда технических устройств (антенн, малошумящих усилителей, генераторов стабильных частот, устройств формирования и обработки сигналов и др.), а также в области общей теории связи. Последняя должна дать ответы на вопросы:

1. Каковы предельные возможности передачи информации при указанных условиях и как далеко отстоят от этих пределов основные характеристики реальных радиолиний?

2. Какие радиосигналы должны формироваться на передающей стороне и как они должны обрабатываться на приемной стороне, чтобы обеспечить передачу максимального количества информации по данной радиолинии?

3. Как нужно преобразовывать передаваемые сообщения — первичные сигналы, снимаемые с датчиковой (измерительной), фототелевизионной и другой бортовой аппаратуры, а также как должны обрабатываться сообщения, получаемые на выходе радиолинии, чтобы при выбранных характеристиках последней потребитель получал максимум интересующей его информации?

В соответствии с указанными группами вопросов в общей теории связи можно выделить три раздела:

- а) теорию информации,
- б) теорию сигналов,
- в) теорию сообщений.

Эти разделы хотя и связаны между собой, но имеют также и самостоятельное значение. Мы кратко остановимся на вопросах, рассматриваемых в этих разделах общей теории связи применительно к решению задач космической связи.

Приведенный выше числовой пример характеризует проблематику систем дальней космической связи.

В системах космической связи с орбитальными объектами дальность связи значительно меньше $R=3000\div 50\,000$ км. Однако ряд обстоятельств определяет напряженный энергетический режим и этих систем. К таким обстоятельствам относятся следующие:

1. Ряд космических объектов могут нести очень малый полезный груз, вследствие чего реализуемая мощность передающих устройств имеет иногда порядок лишь единиц и десятых долей ватта.

2. Многие орбитальные объекты не ориентируются и, следовательно, могут работать лишь с малоэффективными всенаправленными антеннами.

3. Не представляется возможным использовать приемные антенны большой эффективной площади ($A_{эф-пр}$), так как это экономически невыгодно (число таких антенн велико) и технически затруднительно ввиду больших угловых скоростей объектов.

4. Нежелательно и затруднительно использовать в наземных устройствах дорогостоящую аппаратуру прогнозирования доплеровских сдвигов частот и высокостабильные бортовые и наземные эталоны частот.

5. На входе приемных устройств этих радиолиний существенное значение могут иметь помехи, создаваемые другими наземными радиотехническими средствами.

Кроме того, для обслуживания орбитальных объектов часто необходимо иметь радиолинии со сравнительно большой пропускной способностью. И, наконец, так как число одновременно работающих радиолиний непрерывно растет, то существенное значение приобретает проблема экономии полосы занимаемых ими частот. Все эти обстоятельства определяют необходимость реализации и в системах связи с орбиталь-

ными космическими объектами всех возможностей, на которые указывает общая теория связи. Реализация таких возможностей и создание соответствующей аппаратуры несомненно способствуют общему прогрессу всех других систем связи.

§ 2. Вопросы теории информации

Теория информации содержит следующие важные для общей теории связи положения:

а) Устанавливает формализованную количественную меру информации.

б) Указывает на некоторые пути преобразования дискретных сообщений так, чтобы они не содержали избыточности, например, чтобы число двоичных символов в кодированных сообщениях равнялось числу содержащихся в них двоичных единиц информации (статистическое кодирование).

в) Устанавливает верхнюю, теоретически достижимую, границу скорости передачи без ошибок информации по каналу (пропускная способность каналов связи).

Основоположником теории информации является К. Шеннон [24]. Ряд положений К. Шеннона в математическом плане был уточнен и развит в трудах А. Я. Хинчина [23] и А. Файнштейна [18]. Фундаментальный вклад в теорию информации и, в частности, основы теории ϵ -энтропии внесен А. М. Колмогоровым [7]. Многие важнейшие вопросы теории информации нашли также отражение и развитие в работах А. А. Харкевича [21], М. С. Пинскера [14], С. Голдмана, Р. Л. Добрушина [5], Л. М. Финка [19] и других отечественных и зарубежных ученых.

Вопросы статистического кодирования можно рассматривать как раздел теории сообщений (см. § 3). Здесь мы остановимся кратко лишь на оценке пропускной способности каналов.

К. Шенноном доказано, что для канала, на входе которого действует помеха типа «белый шум», пропускная способность может быть оценена по формуле

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right), \quad (8)$$

где, как и ранее, W — ширина полосы пропускания радиотракта;
 S — средняя мощность полезного сигнала на входе приемника;
 N — средняя мощность шума на входе приемника (в полосе W).

Случай белого шума как раз характерен для линий дальней космической связи, и ф-ла (8) для них применима. Если отношение сигнал/шум на входе приемника весьма мало

$$\frac{S}{N} \ll 1, \quad (9)$$

то ф-ла (8) может быть приближенно представлена в виде $C \approx W \frac{S}{N} \times \log_2 e$. Учтем, что $N = N_0 W$, а $\log_2 e \approx 1,45$, тогда

$$C \approx \frac{1,45S}{N_0}. \quad (10)$$

Формула (10) имеет очень важное значение, она указывает, что для случая, когда отношение сигнал/шум на входе приемника очень мало [выполняется (9)], пропускная способность канала практически не зависит от ширины его полосы пропускания, а определяется лишь средней мощностью полезного сигнала и спектральной плотностью мощности шума (удельной мощностью шума).

Для примера, рассмотренного в § 1, имеем:

а) при работе с направленной бортовой антенной

$$C \approx \frac{1,45 \cdot 3 \cdot 10^{-19}}{6,9 \cdot 10^{-22}} \approx 630 \frac{\text{дв. ед}}{\text{сек}};$$

б) при работе со всенаправленной бортовой антенной

$$C \approx \frac{1,45 \cdot 1 \cdot 10^{-21}}{6,9 \cdot 10^{-22}} \approx 2,1 \frac{\text{дв. ед}}{\text{сек}}.$$

Полученные цифры очень интересны. Прежде всего, они указывают на возможность обеспечения дальней космической связи рассматриваемой радиолинией даже при работе со всенаправленной бортовой антенной. Однако при этом предельно достижимая скорость передачи информации мала и, следовательно, крайне необходимо, чтобы, во-первых, фактически реализуемая скорость передачи информации (реальная пропускная способность линии) была как можно ближе к предельной и, во-вторых, передаваемые сообщения должны быть таковы, чтобы эта пропускная способность использовалась наиболее эффективно. Решением этих задач (как отмечалось уже в § 1) и занимаются теория сигналов и теория сообщений.

§ 3. Вопросы теории сигналов

Общая задача теории сигналов может быть сформулирована в следующем виде. При заданных вероятностных характеристиках ансамбля передаваемых сообщений \vec{V} , виде помех $N(t)$ и характере взаимодейст-

вия помех с передаваемым полезным сигналом (радиосигналом) $X(t)$ необходимо отыскать:

а) оптимальный метод кодирования и модуляции сигналов на передающей стороне, т. е. преобразования

$$\vec{V} \rightarrow X(t); \quad (11)$$

б) оптимальный метод обработки принятого сигнала

$$Y(t) = X(t) \otimes N(t)$$

и декодирования его на приемной стороне, т. е. преобразования¹⁾

$$Y(t) \rightarrow \vec{Q}, \quad (12)$$

где \vec{Q} — сообщения, воспроизводимые на выходе радиолинии.

Оптимизация преобразований (11) и (12) должна производиться по критерию достижения предельно возможных значений скорости передачи информации R при заданной верности воспроизведения сообщений $F(\vec{Q}, \vec{V})$, т. е.

$$C - R = \min \quad (13)$$

при $F(\vec{Q}, \vec{V}) = F_0$.

Критерий (13) для ряда характерных случаев удобно заменить равносильными критериями

$$S = \min \quad (14)$$

при $F(\vec{Q}, \vec{V}) = F_0$, $W = W_0$ или

$$W = \min \quad (15)$$

при $F(\vec{Q}, \vec{V}) = F_0$, $S = S_0$, где W_0 и S_0 — некоторые фиксированные (выбранные) значения полосы пропускания линии и мощности полезного сигнала на входе приемного устройства.

В этой общей постановке данная задача не нашла еще полного решения, хотя в настоящее время можно указать на некоторые пути такого решения. Однако для частных видов помех (например, белый шум) и сообщений указанную общую задачу теории сигналов можно

¹⁾ Здесь мы, следуя А. А. Харкевичу [21], используем термины «кодирование» и «формирование сигналов» (модуляция), а также «обработка сигналов (демодуляция)» и «декодирование», чтобы разделить логические дискретные операции идентификации от операций, связанных с преобразованием конкретных форм сигналов. Авторы книги используют лишь термины «кодирование» и «декодирование», обобщая их.

считать решенной. Исторически это решение получено путем исследования двух групп задач.

Группа А. Для известных способов формирования полезного сигнала $X(t)$ (видах кодирования и модуляции), вида помех и характера их взаимодействия с полезным сигналом отыскивается оптимальное преобразование (12), из условия обеспечения предельно достижимой верности воспроизведения, например,

$$F(\vec{Q}, \vec{V}) = \min, \quad (16)$$

где F — некоторая функция потерь, обусловленных тем, что

$$\vec{Q} \neq \vec{V}.$$

Группа В. Для выбранного способа преобразования (12) отыскиваются лучшие системы сигналов $X(t)$, обеспечивающие выполнение условия (14) или (15).

Основоположником современной теории сигналов является В. А. Котельников, который в своей докторской диссертации (1946 г.) сформулировал и решил ряд основных задач групп А и В, и эти решения в настоящее время являются классическими. Полученные им основные результаты были опубликованы в [8].

По задачам группы А Котельниковым рассмотрены и найдены решения для случая, когда на входе устройства обработки принимаемых сигналов действует аддитивная помеха типа «белый шум» и, следовательно, полоса пропускания радиотракта (линии) как бы неограниченно велика. При этом для передачи дискретных сообщений принимается известным априорное распределение их вероятности, а в (16) минимизируется вероятность ошибочного опознания сообщений (простая функция потерь). Когда сообщениями являются непрерывные величины или функции (колебания), в (16) минимизируется средняя квадратичная ошибка.

В. А. Котельников исследовал систему передачи дискретных сообщений V_i ($i=1, 2, \dots, M$) сигналами $x_i(t)$ ($i=1, 2, \dots$), структура которых и временные границы на приемной стороне априори известны. В этом случае приемное устройство должно включать в себя корреляторы, на выходе которых всякий раз в результате обработки сигналов выдаются значения

$$r_j = \int_{t_k}^{t_k+T} y(t) x_j(t) dt, \quad (17)$$

$$j = 1, 2, \dots, M,$$

где $y(t)$ — реализация принимаемой смеси полезного сигнала и шума $n(t)$, т. е. $y(t) = x_i(t) + n(t)$;

t_k — очередная (k -я) временная граница сигналов;
 T — длительность сигнала одного сообщения.

Опознавание сообщения (принятие решения) производится по значениям r_j и некоторым априорным сведениям. Так, в частности, если вероятности передачи различных сообщений одинаковы, то считается переданным то сообщение V_l , для которого

$$r_l > r_j, \quad j = 1, 2, \dots, j \neq l.$$

В дальнейшем было показано (и это очень важно), что в случае приема на фоне белого шума сигналов с известной структурой обработка вида (17) является достаточной и при любой другой функции потерь, т. е. зная r_j ($j=1, 2, \dots$), некоторые вероятностные характеристики сообщений V_i и функцию потерь (16), всегда можно сформулировать правило выбора решения.

В ряде других исследований [2, 3, 6, 19] рассмотрены случаи, когда структура принимаемого сигнала известна не полностью, например, неизвестна фаза высокочастотного заполнения или временные границы сообщений. Показано, что чем меньшими априорными сведениями о сигнале мы располагаем на приемной стороне, тем хуже будет верность воспроизведения сообщений или для обеспечения той же верности потребуется большая энергия полезного сигнала каждого сообщения.

Этот вывод теории сигналов весьма важен для систем космической связи, в которых априорные сведения о передаваемых сигналах должны использоваться при их обработке в максимальной степени. Однако нестабильность бортовых генераторов сигналов, а в основном эффект Допплера приводят к деформации передаваемого сигнала и вносят неопределенность в его структуру на приемной стороне. Так, в частности, доплеровские сдвиги частоты приводят к изменению частоты и фазы несущих колебаний и к сдвигам временных границ сообщений. Уменьшение неопределенности в сведениях о временной структуре принимаемого сигнала достигается путем создания систем (каналов) синхронизации (фазирования). Для обеспечения работы системы синхронизации требуется расходовать часть пропускной способности линии (часть мощности, полосы частот), однако в условиях работы космических линий всегда целесообразно израсходовать, как правило, небольшую часть пропускной способности канала на построение достаточно совершенной системы синхронизации и обеспечить обработку сигналов с практически известной структурой. Рассмотренные обстоятельства определяют большую роль синхронизации в космических линиях. Следует отметить, что построение каналов синхронизации в них существенно облегчается при сопряжении систем передачи информации с системами измерений параметров движения объекта (см. § 5).

Важнейшим выводом теории потенциальной помехоустойчивости является то, что в условиях действия белого шума и рассмотренной выше

идеальной обработки сигналов, вероятности неправильного принятия решения о том, какой сигнал $x_i(t)$ был передан (или значения любой другой функции потерь), не зависят от тонкой временной или спектральной структуры сигналов, а определяются лишь некоторыми интегральными показателями вида:

а) отношения энергии сигналов к удельной энергии шума

$$\alpha_i = \frac{S_i T}{N_0}, \quad (18)$$

где S_i — средняя мощность полезного сигнала $x_i(t)$;

б) коэффициентов взаимной корреляции сигналов¹⁾

$$\rho_{ij} = \frac{\int_0^T x_i(t) x_j(t) dt}{T \sqrt{S_i S_j}}, \quad (19)$$

$i, j = 1, 2, \dots$

Задаваясь системой сигналов и вероятностью неправильного опознания их — p_c , можно оценить требования к энергетическим показателям линии, т. е. определить минимальные значения средних мощностей принимаемого S и передаваемого $S_{\text{пер}}$ сигналов, при которых обеспечивается требуемая верность воспроизведения сообщений. Удобнее всего оперировать с удельным расходом энергии сигнала на одну двоичную единицу информации:

$$\beta = \frac{S}{N_0 R}. \quad (20)$$

Так как помехоустойчивость радиолинии зависит от интегральных показателей сигнала вида (18) и (19), то одни и те же энергетические показатели могут быть получены при использовании разных систем сигналов. Другими словами, требования к энергетике β и помехоустойчивости p_c не определяют однозначно структуру сигналов $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$. Для выбора последних должен быть принят во внимание ряд других факторов. Важнейшие из них: удельный расход полосы частот

$$\alpha_f = \frac{W}{R} \quad (21)$$

и простота аппаратной реализации схем кодирования, формирования, обработки и декодирования. Показатели (20) и (21) введены Сандерсом [15], аналогичные показатели введены и в [6].

¹⁾ В терминологии функционального анализа эти коэффициенты следует назвать скалярными произведениями. Коэффициент «взаимной корреляции», определяемый (19), нужно отличать от коэффициента взаимной корреляции (ковариации), вводимого в теории вероятности, и случайных функций.

Для передачи различных сообщений используется алфавит сигналов (символов) различных форм $x_i(t)$, $i=1, \dots, a$. Число таких различных сигналов a образует основание кода сигналов. Важными задачами теории связи является отыскание наилучшего с точки зрения указанных показателей алфавита сигналов для заданных условий работы радиолинии — задачи группы В.

В этой группе задач В. А. Котельниковым получен ряд важных результатов. Так, в частности, им показано, что если использовать сигналы с одинаковой энергией (мощностью $S_1=S_2=\dots=S_M=S$ и длительностью T), то:

а) при $a=2$ лучшие энергетические показатели ($\beta=\min$ при заданной вероятности ошибок ρ_c) дают противоположные сигналы, удовлетворяющие условию

$$x_2(t) = -x_1(t); \quad (22)$$

б) в общем случае лучшие показатели дают равноудаленные, оптимальные сигналы, для которых

$$\rho_{ij} = -\frac{1}{a-1}. \quad (23)$$

Сигналы, удовлетворяющие условию (23), в последующем получили наименование трансортгональных или симплексных. В. А. Котельниковым показано, как можно, выбрав любую систему a линейно независимых сигналов, сформировать a оптимальных (трансортгональных) сигналов. При $a=2$ условие (23) дает $\rho_{1,2}=-1$, что эквивалентно (22). При $a \gg 1$ $\rho_{ij} \approx 0$, т. е. оптимальные сигналы близки к ортогональным, для которых по определению

$$\rho_{ij} = 0 \quad (24)$$

при $i \neq j$.

Свойства оптимальных (трансортгональных) сигналов подробно исследовались в трудах К. А. Мешковского [11]. Сигналы эти могут быть построены множеством способов. Важно, очевидно, отобрать такие способы, которые при прочих равных условиях, обеспечили бы минимизацию удельного расхода полосы частот α_f и удовлетворяли требованию простоты аппаратурной реализации.

Задача построения наилучшей системы трансортгональных или ортогональных сигналов, обеспечивающих выполнение условия

$$\alpha_f = \min, \quad (25)$$

может быть поставлена и решена достаточно строго. Решение такой задачи для ортогональных сигналов [9] показало, что они должны иметь достаточно сложную форму, описываемую собственными функциями интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода, ядро которого опреде-

ляется амплитудно-частотной характеристикой тракта передачи и приема. Аппаратура для формирования таких сигналов сложна. Наиболее просто аппаратурно реализуются системы с сигналами, формируемыми из комбинации двух символов $c_0(t)$ и $c_1(t)$. Исследования дали, что если a ортогональных сигналов формировать из a противоположных символов $c_1(t) = -c_0(t)$, то по величине α_i они практически могут незначительно уступать наилучшей системе, обеспечивающей выполнение условия (25). Это положение распространяется и на трансортгональные сигналы. Таким образом, большое значение приобретают способы кодирования алфавита сигналов, формируемых из двоичных символов.

Исследование в этой области привели к тому, что схемы кодирования и декодирования таких сигналов получаются наиболее простыми при использовании так называемых псевдослучайных сигналов (m -последовательностей), которые подробно изучаются ниже. По своим свойствам они занимают промежуточное положение между ортогональными и оптимальными равноудаленными. Для них

$$\rho_{ij} = -\frac{1}{M} \quad (26)$$

при $i \neq j$.

Влияние выбора структуры сигналов на основные показатели линии хорошо иллюстрируются зависимостью $\beta = \beta(\alpha_i)$. На рис. 1 приведены некоторые примеры графиков этой зависимости¹⁾ при использовании кодирования (КИМ_{*a*}) с различным основанием a алфавита сигналов и различных видов модуляции несущих колебаний: амплитудной (АМ), балансной (БМ), фазовой (ФМ) и частотной (ЧМ). В системах КИМ_{*a*}—АМ, КИМ_{*a*}—БМ, КИМ_{*a*}—ФМ и КИМ_{*a*}—ЧМ различные сигналы алфавита (символы) формируются путем установки a различных значений модулируемого параметра (амплитуды, фазы или частоты). Форма импульсов модулирующего сигнала выбирается из условия (25) при обеспечении практически допустимых (мало влияющих на β или ρ_c) переходных искажений во временной и частотных областях [10]. Цифры у точек на кривых указывают значение основания кода сигналов (a). В системе КФИМ—АМ различные символы формируются путем установки радиоимпульса на a различных временных (фазовых) позициях в интервале, равном длительности символа [10]. Кривые для систем КИМ_{*a*}—ЧМ и КФИМ—АМ даны для случая, когда фаза несущих колебаний на приемной стороне неизвестна — некогерентный прием (*нек.*), а также когда эта фаза известна и сигналы точно ортогональны (*орт.*). Для системы КИМ₂—ЧМ отдельно показаны точки, соответствующие оптимальному выбору девиации частоты. Точка, помеченная *Теор.*, получена расчетом, а точка *Экс.* — экспериментально. В системе

¹⁾ Графики рассчитаны Н. Б. Резвцовым.

КИМ_α—ФМ (*пшс*) используются двоичные псевдошумовые сигналы, в которых для формирования α сигналов алфавита производится циклическая перестановка двоичных символов (см. ниже). Значения β для оснований α , показанных на графике, получены путем интерполяции

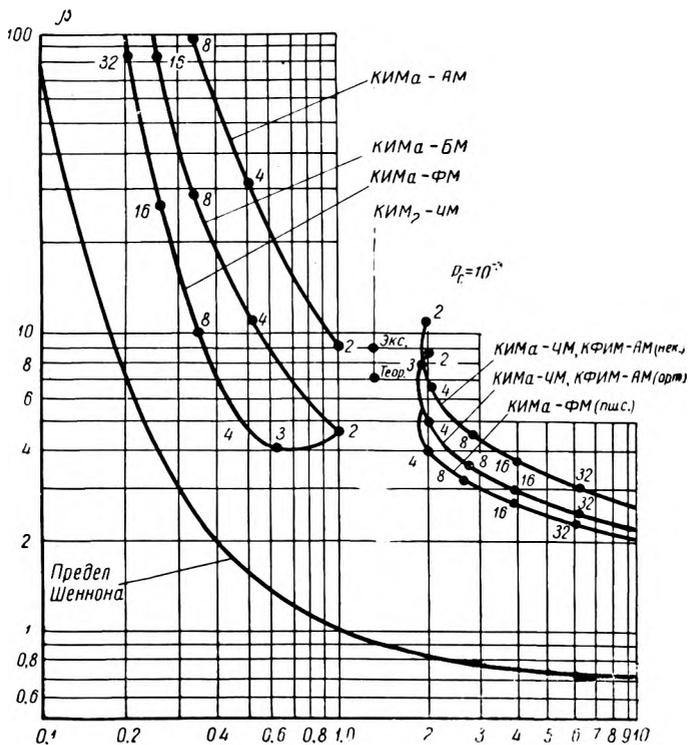


Рис 1. Графики зависимости удельного расхода энергии полезного сигнала β от удельного расхода полосы частот для различных цифровых систем передачи информации

по близким, реализуемым в *пшс* основаниям. Кривые построены для идеальной обработки сигналов при равной априорной вероятности их передачи и вероятности неправильного опознания $p_c = 10^{-3}$.

Еще Котельниковым [8] показано, что во многих случаях реальные методы обработки сигналов дают близкие результаты. Более поздние теоретические и экспериментальные исследования [12, 10, 16] подтвердили это положение.

На рис. 1 приведены также предельно достижимые по Шеннону значения β , которые находятся из (8), (20) и (21) для случая, когда $R=C$:

$$\beta = \alpha_f \left(2^{\frac{1}{\alpha_f}} - 1 \right). \quad (27)$$

Из рассмотрения кривых рис. 1 видно, что приближение значения β к шенноновскому пределу возможно лишь при использовании алфавита ортогональных символов с высоким основанием a или алфавита сигналов, близких к оптимальным (трансортогональным), образуемых из последовательности двучных символов.

Отметим еще, что если сопоставить (10) и (20), то получим, что при $\frac{S}{N} \ll 1$

$$\eta_{ин} = \frac{0,69}{\beta}, \quad (28)$$

где $\eta_{ин} = \frac{R}{C}$ — информационный кпд линии. В общем случае

$$\eta_{ин} = \frac{1}{\alpha_f \log_2 \left(1 + \frac{\beta}{\alpha_f} \right)}. \quad (29)$$

Для систем, графики $\beta = \beta(\alpha_f)$ которых приведены на рис. 1, информационный кпд $\eta_{ин} \leq 0,34$.

Итак, идеальная обработка принимаемых сигналов и оптимизация их структуры являются условием необходимым, но недостаточным для хорошего использования пропускной способности линии. Скорость передачи информации R может быть приближена к пропускной способности линии C , если применить алфавит сигналов, близких к оптимальным, с высоким основанием a .

§ 4. Вопросы теории сообщений

Система связи (радиолиния) может быть рационально построена и использована, если ее информационные характеристики согласуются с характеристиками источников и запросами потребителей информации. Таким образом, требуется рассмотрение работы системы связи в общей информационной системе, которую она обслуживает.

На рис. 2 приведена примерная структурная схема такой информационной системы. Сечения $I-I'$ отделяют в ней устройства, принадлежащие системе связи (радиолинии), а сечения $II-II'$ — радиоканалу. Двойными стрелками показаны связи с несколькими выходами и входами, а стрелки с одной линией — с одним выходом и входом.

Источниками информации в такой системе, как правило, являются различные преобразующие устройства: датчики, микрофоны, оптико-телевизионные устройства и т. п. Воздействие источников информации \vec{L} проявляется в формировании первичных сигналов, характеризующих дискретные события, протекание непрерывных процессов или состояние

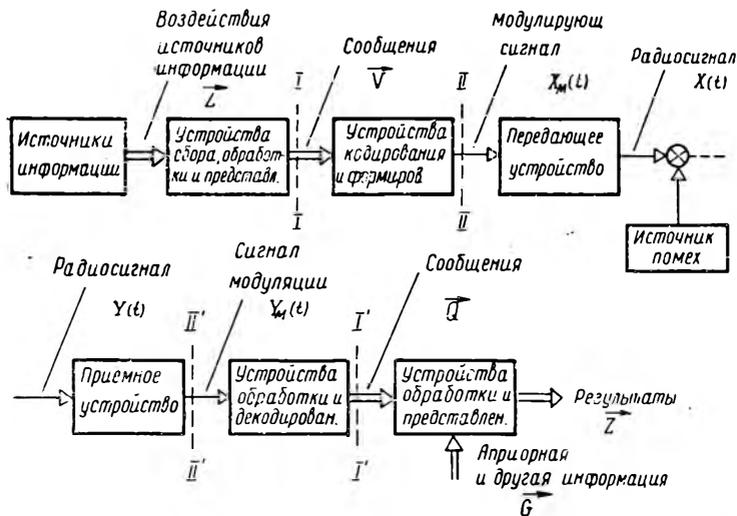


Рис. 2. Примерная функциональная схема информационной системы, обслуживаемой системой связи I—I' с радиоканалом II—II'

некоторой совокупности исследуемых или наблюдаемых объектов. Математическое воздействие \vec{L} может быть описано совокупностью случайных величин

$$\vec{L} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_M \end{bmatrix} \quad (30)$$

или совокупностью случайных непрерывных или решетчатых функций

$$\vec{L} = \begin{bmatrix} L_1(t) \\ \vdots \\ L_M(t) \end{bmatrix}. \quad (31)$$

При использовании системы связи с цифровым методом передачи информации воздействия \vec{L} должны быть преобразованы в сообщения \vec{V} , характеризуемые совокупностью координат V_v , $v=1, \dots, N$, т. е.

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Каждая координата V_v , $v=1, \dots, N$, должна принимать лишь конечное множество значений. Эти значения устанавливаются заранее (масштабируются) и для простоты в последующем могут быть просто пронумерованы. Преобразование

$$\vec{L} \rightarrow \vec{V} \quad (33)$$

выполняет устройство обработки и представления на передающей стороне. Задачей последующих устройств является сопоставить сообщению \vec{V} некоторый сигнал $X(t)$, включающий в себя определенным образом выбранную комбинацию (последовательность) сигналов алфавита $x_i(t)$. Это преобразование

$$\vec{V} \rightarrow X(t), \quad (34)$$

как правило, выполняется в два этапа, — вначале формируется модулирующий $X_M(t)$, а потом радиосигнал $X(t)$.

На приемной стороне выполняются обратные преобразования: искаженного помехой сигнала $Y(t)$ в сообщения \vec{Q} на выходе системы связи, т. е.

$$Y(t) \rightarrow \vec{Q}, \quad (35)$$

а затем сообщений \vec{Q} — в результаты измерений или наблюдений (совокупность сообщений) \vec{Z} , выдаваемых потребителю (результат). Преобразование

$$\vec{Q} \rightarrow \vec{Z} \quad (36)$$

выполняется специальными устройствами обработки сообщений и представления их.

Преобразования (33) — (36) можно записать в форме:

$$\vec{V} = A\vec{L}, \quad (37)$$

$$X(t) = K\vec{V}, \quad (38)$$

$$\vec{Q} = DY(t), \quad (39)$$

$$\vec{Z} = B\vec{Q}. \quad (40)$$

где A и B — операторы представления и обработки сообщений;
 K — оператор кодирования и формирования сигналов;
 D — оператор обработки и декодирования сигналов.

Задачей теории сигналов является выбор оптимальных операторов K и D , а теории сообщений — A и B .

Рассмотрим, как должны быть согласованы эти операторы и каковы предъявляемые к ним основные требования.

Для обеспечения унификации аппаратуры и снижения ее стоимости оказывается целесообразным при отыскании оптимальных операторов K и D исходить из некоторых типовых (идеализированных) источников информации и операторы K и D выбирать из условий (14) или (15). Как показано в § 3, для этого нужно использовать по возможности лучшие алфавиты сигналов.

Если допустимые вероятности ошибок в опознании сигналов малы ($p_c < 10^{-2}$), а это так обычно и бывает, то из общих соотношений теории информации следует, что при выбранном алфавите сигналов максимальная скорость передачи информации равна

$$R \approx \frac{\log_2 \alpha}{T}. \quad (41)$$

Такая скорость может быть достигнута лишь в случае, если различные сигналы алфавита $x_i(t)$ во множестве передаваемых сигналов статистически независимы и априорные вероятности их одинаковы. Эти условия и определяют требования к типовому источнику информации. Поскольку реальные источники информации имеют разнообразные статистические характеристики, то устройство обработки и представления должно обеспечить статистическое согласование характеристик источников информации с указанными требованиями.

Таким образом, первым требованием к оператору представления A в (37) является формирование сообщений \vec{V} , которые при реализуемых в данной системе связи способах кодирования сигналов (оператор K) обеспечивали бы приближение скорости передачи информации к значению, даваемому соотношением (41). Вторым требованием к оператору A является учет запросов потребителей и обеспечение необходимой верности представляемых ему результатов \vec{Z} .

Здесь нужно обратить внимание, прежде всего, на характер результатов \vec{Z} , интересующих потребителя, и, следовательно, на связь \vec{Z} с воздействием источников информации \vec{L} . Обозначим через \vec{Z}_0 идеальный результат, интересующий потребителя, который может быть получен путем непосредственной обработки \vec{L} системой, не вносящей никаких дополнительных искажений и ошибок. Пусть

$$\vec{Z}_0 = \Phi \vec{L}, \quad (42)$$

где Φ — некоторый оператор, который мы называем целевым. В частном случае это может быть единичный оператор $\Phi = E$ и тогда $\vec{Z}_0 = \vec{L}$. Например, если \vec{L} есть некоторый первичный сигнал на выходе датчика с линейной характеристикой преобразования измеряемого параметра α , т. е. $\vec{L} = L(t) = \kappa \alpha(t)$, то потребитель может довольствоваться воспроизведением $L(t)$. В других случаях потребителя может не интересовать воспроизведение $L(t)$, а лишь некоторые показатели или преобразования этой функции, например экстремальные значения, моменты t_{μ} , когда $L(t_{\mu}) = 0$, спектральные и другие характеристики. Таким образом, в общем случае целевой оператор отличается от единичного — $\Phi \neq E$.

Требование максимального ограничения объема передаваемой информации, аппаратурные погрешности и действие помех обуславливают то, что результаты, выдаваемые потребителю \vec{Z} , отличаются от идеальных, т. е. $\vec{Z} \neq \vec{Z}_0$. Это отличие также может характеризоваться некоторой функцией потерь

$$F = F(\vec{Z}, \vec{Z}_0). \quad (43)$$

Следовательно, выбор оператора A должен обеспечивать допустимый уровень потерь в (43) при передаче минимального количества сигналов алфавита. Оператор B в (40) должен соответственно выбираться из условия минимизации потерь (43), которые имеют место при обработке искаженных сообщений \vec{Q} .

Необходимо отметить, что реализуемые уже на сегодня системы связи достаточно совершенны и, как показано в § 3, выбор лучших операторов K и D в (38), (39) может позволить увеличить скорость передачи информации R лишь в 3—5 раз. В то же время совершенствование устройств обработки и представления сообщений, т. е. рациональный выбор операторов A и B в (37) и (40), может позволить снизить требования к R на несколько порядков.

Если воздействие источников информации \vec{L} описывается (30) и L_1, \dots, L_M — случайные величины, принимающие ограниченное множество дискретных значений, т. е. имеют место лишь дискретные события, то выбор оператора A в (37) решается методами теории статистического кодирования. В частном случае для упрощения бортовой аппаратуры A может быть единичным оператором. Если же \vec{L} описывается (31), то задача сильно усложняется. Решение ее может быть разделено на 3 этапа:

а) дискретизация, когда \vec{L} вида (31), рассматриваемое из некотором интервале T_0 , приводится к виду, аналогичному (30),

$$\begin{bmatrix} L_1(t) \\ \vdots \\ L_M(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \vdots \\ \Lambda_s \end{bmatrix}, \quad (44)$$

где $\Lambda_1, \dots, \Lambda_s$ — случайные величины, которые могут принимать любое значение в некотором непрерывном интервале;

б) квантование, которое сводится к сопоставлению каждого Λ_j , $j=1, \dots, s$, некоторому квантованному значению $\Lambda_{j\text{кв}}$, т. е.

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \vdots \\ \Lambda_s \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \Lambda_{1\text{кв}} \\ \vdots \\ \Lambda_{s\text{кв}} \end{bmatrix}, \quad (45)$$

в) кодирование

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{1\text{кв}} \\ \vdots \\ \Lambda_{s\text{кв}} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Решение задачи оптимальной дискретизации с учетом целевого оператора и характеристик системы связи является наиболее сложным.

Можно показать, что если известны достаточно хорошие оценки матрицы вторых моментных функций \vec{L} , то при среднеквадратической функции потерь эффективное решение находится методами функционального анализа с использованием свойств обобщенных рядов Фурье в гильбертовых пространствах. Во многих случаях эффективные решения находятся путем использования адаптационных методов.

Естественно, что выбор оптимальных операторов A в (37) и B в (40) должен производиться совместно. Развитие микроэлектронной техники позволит реализовать в бортовых устройствах все более сложные операторы A и тем сильнее разгрузить системы связи либо по тем же системам связи передавать значительно больше информации, интересующей потребителя.

§ 5. Измерение параметров движения космического объекта

Задачи исследования космического пространства и управления космическим объектом требуют знания текущих координат объекта и скорости его движения. Измерение указанных параметров производится

методами, развитыми в радиолокационной технике. В последней используется измерение параметров отраженного или ретранслированного сигнала. При больших удалениях приемлемые энергетические показатели могут быть получены лишь использованием ретрансляции сигналов, что и применяется на практике.

Ретранслированный сигнал отличается от излученного масштабом и положением во времени. Так, если излученный сигнал обозначить $x(t)$, то ретранслированный будет

$$x_p(t) = \kappa x(t - \Delta t),$$

где $\Delta t = \frac{2R_D}{c}$ — временная задержка;

R_D — дальность;

c — скорость распространения электромагнитных волн;

κ — некоторая, практически постоянная величина.

Таким образом, измерение дальности сводится к измерению Δt , измерение радиальной скорости объекта $v_R = \frac{dR_D}{dt}$ сводится к измерению производной $\frac{d\Delta t}{dt} = -2\frac{v_R}{c}$, измерение угловых координат — к измерению значений Δt на нескольких пространственноразнесенных пунктах приема.

Если излученный сигнал содержит гармоническую составляющую $x_a = a \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$, то ретранслированный сигнал будет

$$x_{ap} = \kappa a \cos(2\pi f_0 t + \varphi), \quad (47)$$

где $\varphi = -\frac{2\pi f_0 R_D}{c} + \varphi_0$. В таком случае измерение дальности R_D сводится к измерению фазы φ у ретранслированного сигнала, а измерение радиальной скорости — к измерению изменения его частоты, так как

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{2v_R}{c} f_0,$$

т. е. к измерению доплеровского сдвига.

Итак, система измерения параметров движения объекта имеет то общее с системой передачи информации, что информация, интересующая потребителя, содержится лишь в значении модулируемых параметров сигнала. Отличие системы измерения параметров движения состоит лишь в том, что в ней модулируемыми параметрами могут быть только фаза и частота.

Искажение сигналов помехами приводит к ошибкам в оценках φ и Δf и соответственно к ошибкам в измерениях R_D , v_R и угловых координат объекта.

Фиксирование временного положения сигнала наиболее просто аппаратно решается при использовании импульсных сигналов. По этому пути и пошла вначале вся радиолокационная техника.

Теория оптимальной обработки и оценки фазового положения и частоты сигналов, развитая в [2, 8, 20] и других трудах, позволила найти предельно достижимые точности измерения параметров движения. Эта теория определила, что для приемлемой точности измерения энергии сигнала на интервале времени измерения $T_{\text{и}}$, а точнее, значение параметра $\alpha = \frac{ST_{\text{и}}}{N_0}$ должно быть достаточно большим, т. е. $\alpha \gg 1$.

В § 1 показано, что на дальностях, с которыми имеет дело космическая техника, мощность полезного сигнала на входе приемника очень малá, следовательно, приемлемые значения энергии могут быть получены лишь в течение сравнительно больших интервалов времени.

Так, например, если потребовать значение $\alpha \geq 10$, то для случая, рассмотренного в § 1, получим, что при работе с ненаправленной бортовой антенной необходимо, чтобы интервал измерения (накопления энергии) удовлетворял условию

$$T_{\text{и}} \geq 10 \frac{6,9 \cdot 10^{-22}}{10^{-21}} = 6,9 \text{ сек.}$$

За это время при $v_R = 4 \text{ км/сек}$ дальность изменится на $\Delta R_D > 4 \cdot 6,9 = 27,6 \text{ км}$, что может превосходить допустимую ошибку в измерении дальности. Таким образом, малая мощность полезного сигнала и, следовательно, необходимость накопления энергии сигнала на большом интервале времени, в течение которого существенно изменяется измеряемый параметр, требует специальных методов обработки ретранслированных сигналов и сообщений, получаемых в результате этой обработки, с максимальным учетом всей априорной информации о законе движения объекта.

Необходимость накопления энергии полезного сигнала на значительных интервалах времени, а также худшие весовые и энергетические показатели импульсных передатчиков, по сравнению с передатчиками непрерывного излучения, повлекли за собой отказ от импульсных сигналов для измерения дальности и использование в космических системах сигналов с непрерывным излучением.

Теория оптимальной обработки аддитивной смеси полезного сигнала и белого шума показала, что погрешность в измерении дальности (фазового положения сигнала) будет тем меньшей, чем лучше удовлетворяются следующие требования к нормированной автокорреляцион-

ной функции периодической последовательности сигналов с длительностью T :

$$\rho(\tau) = \frac{1}{TE_x} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt, \quad (48)$$

где $E_x = \int_0^T x^2(t) dt$ — энергия сигнала:

а) на возможно малом интервале времени Δt_k величина $\rho(\tau)$ должна резко изменяться от некоторого малого значения до единицы и обратно (острый автокорреляционный пик),

б) величина $\rho(\tau)$ на интервале $T - \Delta t_k$ должна быть по возможности малой.

При $T \rightarrow \infty$ этим требованиям идеально удовлетворяют реализации белого шума. При конечном T можно взять конечный отрезок такой реализации. Однако аппаратурно воспроизводить такие сигналы затруднительно. Исследования указали, что псевдошумовые последовательности (*пшс*), образуемые из бинарных сигналов $c_0(t)$ и $c_1(t)$, обладают в смысле указанных требований очень хорошими свойствами и в то же время очень просто реализуются аппаратурно. Изучению свойств таких последовательностей уделено большое внимание в монографии. Существенно, что эти сигналы имеют цифровую структуру (состоят из двоичных символов) и, следовательно, близки к сигналам, используемым в цифровых системах передачи информации.

При измерении дальности возникает дополнительная задача неоднозначности. Так как фаза периодической последовательности может быть измерена лишь с точностью до периода T , то дальность, оцененная по измерению Δt , имеет неопределенность

$$\Delta_n R_D = \kappa \frac{cT}{2}, \quad (49)$$

$$\kappa = 1, 2, \dots$$

Если мы потребуем, чтобы $\Delta_n R_D > R_D$, то получим, что должно выполняться условие

$$T > \frac{2R_D}{c}. \quad (50)$$

Для рассмотренного в § 1 примера (50) дает $T > \frac{2 \cdot 400 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} \approx 2666$ сек. Это время недопустимо велико, поэтому условие (50) заменяют более легким:

$$T > \frac{2\Delta R_{D \text{ пр}}}{c}, \quad (51)$$

где $\Delta R_{D \text{ пр}}$ — ошибка в прогнозировании R_D .

Приняв, например, $\Delta R_{D \text{ пр}} = 3 \cdot 10^5$ км, что соответствует приведенной погрешности $\frac{\Delta R_{D \text{ пр}}}{R_D} = 7,5\%$, получим из (51), что

$$T > \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^6} = 2 \text{ сек.}$$

Как видим, и в этом случае величина T может быть значительной и сигнал должен состоять из большого числа символов, ибо длительность одного символа определяет ошибку в измерении R_D . Возникает проблема рационального построения (кодирования) таких сигналов, обеспечивающего решение задачи однозначности и уменьшение времени измерения. Эти способы также подробно изучаются в книге «Цифровые методы в космической связи».

В заключение отметим, что указанная выше общность систем измерения параметров движения и систем передачи информации обусловила близость оптимальных структур сигналов в них, а следовательно, и целесообразность аппаратурного совмещения. Совмещения оказываются чрезвычайно плодотворными особенно с точки зрения экономии веса бортовой аппаратуры и затрат на наземные антенные сооружения.

Кроме того, измерение таких параметров сигнала, как фаза несущих колебаний и соответствующее отслеживание частоты и фазы этих колебаний, а также отслеживание фазы модулирующего сигнала (необходимое в системе измерения дальности), оказывается чрезвычайно важным и для системы передачи информации, так как оно необходимо для реализации когерентного приема (синхронного детектирования) и для работы системы символьной и групповой синхронизации.

§ 6. О содержании книги

Предлагаемая читателю в русском переводе книга «Цифровые методы в космической связи» написана группой сотрудников Лаборатории реактивной техники (движения) фирмы «Прентис Холл», Нью-Джерси.

Общее редактирование книги, а также написание гл. 1 осуществлено Соломоном У. Голомбом, профессором электроники и математики Южно-Калифорнийского университета. Главы 2 и 4, а также приложения 2 и 3 написаны Леонардом В. Баумерто, старшим инженером-исследователем группы обработки информации; гл. 3 и 7, а также приложение 4 — Андрэ Д. Витерби, помощником профессора по инженерным разработкам Калифорнийского университета в Лос-Анжелесе; гл. 5 и 6 — Мелом Ф. Истерлингом, начальником исследовательской части систем связи; гл. 8 и приложение 1 — Джеком Д. Стиффлером, специалистом-исследователем группы связи дискретных сигналов.

Из изложенного в предыдущих параграфах этой статьи видно, что теория и практика космической связи охватывают огромный круг вопросов, рассматривать которые в одной книге не представляется возможным. Из этого большого круга авторы отобрали весьма интересные и важные для современных и перспективных систем вопросы использования оптимальных, в условиях белого шума, и близких к ним сигналов, образуемых путем кодирования последовательности двоичных символов. При этом рассматриваются общие свойства таких сигналов (гл. 1 и 4), способы их генерирования (гл. 2) и модуляции несущих колебаний (гл. 5), использование в системах измерения дальности (гл. 6) и передачи информации (гл. 7), а также в системах групповой синхронизации (гл. 8). Авторы счастливо избегают излишней математизации, умело и на хорошем уровне преподносят материал в форме и объеме, необходимом как для уяснения основных результатов теории, так и для использования этих результатов в инженерной практике. Таким образом, материал не требует каких-либо специальных разъяснений и здесь мы лишь используем возможность привести дополнительные соображения, а также обратить внимание читателя на некоторые моменты.

К тем преимуществам цифровой связи, которые сформулированы в гл. 2, хотелось бы добавить: существенное уменьшение влияния аппаратных погрешностей и возможность обеспечения точностей, практически недостижимых в других (аналоговых) системах; облегчается связь с устройствами обработки (ЭЦВМ) и хранения информации; существенно уменьшаются дополнительные ошибки (шумы), обусловленные записью, считыванием и ретрансляцией сообщений, и, наконец, при прочих равных условиях в системах с высокой точностью экономичнее расходуется полоса частот, предоставляемая каналу. Заслуживает внимания проводимое в гл. 1 выделение двух этапов процесса связи: обнаружение (поиск) и процесс функционирования, а также четкая формулировка статистических тестов (критериев), которым удовлетворяют псевдослучайные последовательности.

Материал, излагаемый в гл. 3 (энергетические спектры и корреляционные функции), читатель найдет во многих работах отечественных авторов, в частности, он обстоятельно изложен в книгах, указанных в примечаниях редактора. Следует отметить полезность введения в радиотехнических приложениях автокорреляционной функции по формуле (3.4) с переходом к (3.9). Такое определение согласно Н. Виннеру может быть отнесено не только к случайным, но и к широкому классу регулярных процессов, и тем самым понятие энергетического спектра распространяется и на регулярные процессы. Последние могут даже иметь конечную длительность T , тогда их средняя мощность определяется по (3.8).

В гл. 4 изучаются сигналы, формируемые из двоичных символов и обладающие особыми корреляционными свойствами. Формулируется

и доказывается ряд важных теорем и, в частности, устанавливается нижняя граница коэффициента корреляции в трансортгональных кодах.

Для лучшего понимания этого и последующего материала необходимо обратить внимание на связь между функциями автокорреляции, вводимыми для ω -мерных векторов в гл. 4 и для сигналов в гл. 3.

Для ω -мерных векторов функция автокорреляции равна

$$\rho_x(j) = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{\omega} x_i x_{i+j}, \quad (52)$$

где $x_{\omega+k} = x_k$ и составляющие векторов x_i могут принимать лишь два разных значения, например $x_i = 1$ или $x_i = -1$.

Для периодической последовательности сигналов $x(t)$ с периодом T автокорреляционная функция запишется в виде

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t + \tau) dt. \quad (53)$$

Пусть $x(t)$ состоит из ω двоичных символов $c_0(t)$ и $c_1(t) = -c_0(t)$, причем $c_0(t) \equiv 0$ при $t < 0$ и $t > \tau_c$, где $\tau_c = \frac{T}{\omega}$ — длительность символа.

Сигнал $x(t)$ можно записать в форме $x(t) = \sum_{i=1}^{\omega} x_i c_0(t - i \tau_c)$. Подставляя это значение $x(t)$ в (53) и учитывая свойства $c_0(t)$, получим

$$R_x(j \tau_c) = \frac{E_c}{\tau_c} \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{\omega} x_i x_{i+j}, \quad (54)$$

где $E_c = \int_0^{\tau_c} c_0^2(t) dt$ — энергия одного символа.

Легко видеть, что правые части (54) и (52) отличаются лишь постоянным множителем, что несущественно. Повторяя это же рассуждение, мы получим аналогичные соотношения и для функций взаимной корреляции между ω -мерными векторами x , y и сигналами $x(t)$, $y(t)$. Именно наличие таких простых отношений пропорциональности и дает нам возможность заменить изучение функций автокорреляции и взаимной корреляции между сигналами, образуемыми последовательностью двоичных (противоположных) символов, изучением свойств соответствующих функций для многомерных векторов.

В гл. 5 дополнительно изучаются корреляционные свойства двоичных последовательностей и рассматриваются вопросы модуляции несущих колебаний псевдослучайными последовательностями. Следует подчеркнуть, что все рассмотрение ведется для идеализированного случая, когда форма символов псевдослучайной последовательности строго прямоугольная. Если взять реальную форму символов, то некоторые выводы следует скорректировать. Например, для реальных символов спектры сигналов при балансной и фазовой модуляции несколько отличны, но ширина этих спектров практически одинакова. Вообще выбор формы двоичных символов существенно влияет на спектры сигналов. При изучении модулированных несущих колебаний здесь рассматриваются лишь амплитудные спектры и не выявляется ряд обстоятельств, рассматриваемых при изучении энергетических спектров. Рассмотрение энергетических спектров модулирующих двоичных сигналов (видеосигналов) не приводит ни к каким выводам без продолжения оценки влияния их на модулированные радиосигналы.

В гл. 7 (когерентная связь по непрерывному гауссовскому каналу) заслуживает внимания ряд интересных моментов: получение общего соотношения (7.11) для вычисления правильного приема сигнала в гауссовом канале при использовании произвольного алфавита из M сигналов с одинаковой энергией, простая оценка минимальной полосы частот, занимаемой каналом, доказательства того положения, что с увеличением объема алфавита ортогональных, биортогональных и трансортогональных сигналов скорость передачи информации стремится к шенноновскому пределу.

По поводу оценки ширины полосы канала необходимо только дополнительно сказать, что исходным у автора является требование ортогональности сигналов $x_{\alpha}^{(i)}(t)$ и $x_{\beta}^{(j)}(t)$ разных каналов, т. е. выполнение условия

$$\int_0^T x_{\alpha}^{(i)}(t) x_{\beta}^{(j)}(t) dt = 0, \quad (55)$$

которое затем распространяется на сигналы отдельных символов и приводится к виду (7.12):

$$\int_0^{\frac{\tau}{n}} s_r(t) s'_M(t) dt = 0. \quad (56)$$

Требование выполнения (55) и (56) для исключения взаимных помех разных каналов является достаточным, если эти каналы фазированы, что может быть, например, если они относятся к одной линии связи (каналы на разных поднесущих колебаниях), если же для разделения

каналов используется частотная селекция, то условия (55) и (56) недостаточны, ибо, как известно, они не гарантируют сосредоточения спектров сигналов в разных полосах частот.

Строгая теоретическая оценка практической ширины спектра является довольно неблагоприятной задачей. Выполненные оценки, а также эксперимент подтверждают, что практическая ширина спектра частот канала с балансной или фазовой модуляцией может быть близкой к значению $\frac{n}{2T}$, полученному в результате приближенного анализа.

В заключение нужно подчеркнуть, что книга содержит и ряд других моментов, интересных для специалистов. Хотя материал отдельных глав несколько обособлен и имеются некоторые повторения, в целом книга будет полезной и для читателя, впервые знакомящегося с данным кругом идей и результатами исследований.

*Доктор технических наук, профессор
А. П. МАНОВЦЕВ*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга посвящена цифровым системам космической связи. В доступной и наглядной форме излагаются современные теоретические положения, лежащие в основе работы этих систем. Книга рассчитана на читателя, имеющего общую инженерную подготовку.

При любом полном рассмотрении принципов цифровых систем космической связи используются, по крайней мере, три достаточно самостоятельные теоретические дисциплины. Одна из них — собственно *теория связи*, в которой особое внимание уделяется статистическим характеристикам сигналов и шумов и которая позволяет осуществить синтез оптимального приемника. Зная структуру приемника, можно перейти к определению цифровых сигналов, оптимальных для данного канала и выбранной процедуры приема. Эту задачу решает *математическая теория ортогональных кодов*, техническая реализация которых основана на использовании некоторых результатов *теории переключательных цепей*.

Основные положения трех указанных дисциплин излагаются в первых пяти главах. В них включен только такой материал, который имеет отношение к вопросам космической связи. Главы 6 и 7 посвящены методам измерения дальности до космических аппаратов и эффективной передаче телеметрических данных из космоса. Обычно при изучении системы космической телеметрии главное внимание уделяется вопросам *эффективности* связи. Однако важной является также проблема синхронизации кодовых слов, которой посвящена гл. 8. В ней описываются методы нахождения среди большого числа одинаково эффективных телеметрических кодов, таких, которые обеспечивают быстрое установление синхронизации кодовых слов.

Ценность книги не ограничивается пересчисленным. Исключительно эффективные методы генерирования последовательностей с произвольным наперед заданным периодом, описываемые в гл. 2, могут оказаться полезными не только для специалистов по технике связи, но и для работников, занимающихся разнообразными цифровыми системами.

Самостоятельный интерес представляет обзор корреляционных и спектральных методов анализа сигналов и шумов, приводимый в гл. 3. В гл. 4 подробно излагаются свойства и методы генерирования псевдослучайных последовательностей. Хорошо проиллюстрированная гл. 5 посвящена рассмотрению фазовой модуляции высокочастотного колебания двоичными, в том числе псевдослучайными, последовательностями.

Полезный материал представлен в четырех приложениях. В них приводятся: таблица для построения простых цифровых схем, формирующих последовательности с периодом от 4 до 2047 элементов; список логических функций для генерирования оптимальных дальномерных кодов малой и средней длины; подробные таблицы, характеризующие помехоустойчивость ортогональных и биортогональных кодов большого объема при различных значениях отношения сигнал/шум.

Данная книга является результатом поистине коллективного труда. Хотя первоначально главы писались отдельными авторами, однако мы все вместе читали, обсуждали и редактировали материал на всех этапах работы, стараясь добиться при этом единства цели и взглядов, а также обозначений и терминологии. Большую и конкретную помощь оказал нам д-р Л. Р. Велч из Института оборонных исследований в Принстоне, который внимательно просмотрел рукопись и сделал ряд критических замечаний. Мы глубоко признательны Лаборатории реактивной техники и ее директору д-ру В. Пикерингу не только за разрешение выпустить представленный здесь материал в виде книги, но и за активную поддержку этой идеи. Кроме того, мы хотим выразить благодарность д-ру Э. Речтину, помощнику директора Лаборатории реактивной техники и В. К. Виктору, руководителю Отдела дальней связи, которые поддерживали и направляли нашу работу. Мы признательны миссис Д. Джекоб и миссис Д. Лафферти за тщательную подготовку рукописи, а также мистеру Р. Холлу, выполнившему весь графический материал.

С. У. ГОЛОМБ

ВВЕДЕНИЕ В ЦИФРОВУЮ СВЯЗЬ

§ 1.1. Состояние техники цифровой связи

Последнее десятилетие характеризуется все большим проникновением средств цифровой техники во многие области радиоэлектроники. Существуют веские причины, вызвавшие эту тенденцию, которая несомненно сохранится и в будущем.

Достигнуты серьезные успехи в улучшении характеристик цифровых элементов и коренным образом усовершенствована технология их изготовления. В результате стало возможным создание аппаратуры с высокими показателями надежности и миниатюризации, способной обеспечить значительные скорости и точности обработки данных. В цифровых устройствах, как правило, не возникает проблем калибровки. На них можно возлагать решение задач, которые с помощью других средств были бы невыполнимы.

Специфика космической связи заставляет все чаще обращаться к средствам и методам цифровой техники. Это объясняется, во-первых, тем, что космические системы должны надежно работать в течение длительных промежутков времени, измеряемых месяцами и годами. Во-вторых, передача данных из космоса и слежение за космическими аппаратами должны осуществляться с высокой точностью. И наконец, большинство известных способов достижения теоретических границ эффективности связи или приближения к ним наиболее просто реализуется на базе цифрового, т. е. дискретного кодирования.

§ 1.2. Статистическая теория связи, кодирование и теория переключательных цепей

До недавнего времени проектирование систем связи было скорее искусством, чем наукой. Поворотным моментом стали работы Винера, Шеннона, Фано и др. (середина сороковых годов), положившие начало *статистической теории связи*¹⁾. Не отвечая на вопросы о путях и способах технической реализации аппаратуры, эта теория позволяет вычислить эффективность конкретной системы связи, а также определить максимально возможную эффективность систем связи вообще.

Для широкого класса задач при определенных знаниях или допущениях относительно статистики шумов стало возможным нахождение условий оптимального приема и построение оптимальной аппаратуры: приемников, фильтров, детекторов, обнаружителей и т. п.

После того как определена схема оптимального приемника, на передний план выступает *теория кодирования*. Ее задача — при известной статистике шумов и известной схеме приемника выбрать такое множество передаваемых сигналов, чтобы правдоподобие правильного декодирования принимаемых сообщений было максимальным. Для дискретного канала это приводит к кодам Шеннона-Фано-Хаффмена; для дискретного канала с дискретным шумом — к кодам, исправляющим ошибки. Последние были исследованы Хэммингом. Большой вклад в их изучение внесли Рид, Мюллер, Голей и др. В 1954 г. коды, исправляющие ошибки, были систематизированы Д. Слепяном. В дальнейшем были предложены новые типы таких кодов, причем особенно большое значение среди них имеют коды Боуза-Чоудхури. Для каналов с *непрерывным*, в частности, с «белым» гауссовским шумом в оптимальном приемнике используется *корреляционный* метод обнаружения сигналов, и задачей теории кодирования в этом случае является поиск сигналов, максимально некоррелированных между собой. Именно этому случаю и посвящена настоящая книга.

Задача кодирования наиболее просто решается при использовании цифровых, т. е. дискретных, сигналов. Поэтому основное внимание в книге уделяется дискретным сигналам, искаженным непрерывным шумом. Наиболее эффективные методы кодирования для канала с непрерывным шумом предполагают применение различных видов ортогональных, биортогональных и трансортгональных кодов.

¹⁾ Большой вклад в создание и развитие статистической теории связи внесли советские ученые Б. А. Котельников, Р. Л. Добрушин, А. А. Харкевич, В. Н. Сифоров, М. С. Пинскер, В. С. Цыбаков, Б. Р. Левин, А. М. Яглом, Л. М. Финк и др. (прим. ред.; здесь и далее имеются в виду примечания редактора перевода).

В настоящее время имеется мало систем связи, использующих высокоэффективные цифровые коды, даже те, которые давно известны¹⁾. Однако недавние успехи в создании надежных и миниатюрных элементов привели к возможности технической реализации теоретически оптимальных кодирующих и декодирующих устройств. Эффективные способы построения кодеров и декодеров основаны на теоремах и методах теории переключаемых цепей, и там, где наглядность изложения этого требует, они будут приведены в необходимом объеме.

Основной задачей настоящей книги является ознакомление с принципами работы оптимальных систем дальней космической связи и изложение основ построения цифровой аппаратуры, используемой в этих системах.

Из предыдущего ясно, что для изучения цифровых (дискретных) систем связи необходимо знание, с одной стороны, теории обнаружения и выделения сигналов и, с другой стороны, методов теории переключаемых цепей, позволяющих реализовывать требуемые способы кодирования и декодирования. Поэтому следующие параграфы этой главы посвящены ознакомлению с основными принципами обнаружения и выделения сигналов, а также краткому описанию схем на сдвигающих регистрах и их использованию в качестве генераторов псевдослучайных последовательностей.

Сдвигающие регистры являются чрезвычайно простыми и эффективными устройствами для генерирования двоичных последовательностей. В частности, с их помощью могут быть получены последовательности с корреляционными свойствами, очень удобными для целей космической связи.

§ 1.3. Основные принципы обнаружения сигналов и передачи информации

Ортогональность

В прошлом основным математическим аппаратом теории радиосвязи был анализ Фурье. Обычно радиочастотный сигнал рассматривался как линейная комбинация синусоидальных колебаний, а под модуляцией понимался процесс передачи информации с помощью изменения одного из трех параметров (амплитуды, частоты или фазы) синусоидального колебания.

В последние годы все большее внимание уделяется так называемой *цифровой (дискретной)* связи. В этом параграфе под цифровым

¹⁾ Это объясняется сложностью технической реализации таких кодов (прим. ред.).

(дискретным) сигналом будет пониматься последовательность цифр 1 и 0 или 1 и -1 . Практически же для представления цифрового сигнала используются либо серии импульсов, в которых цифре 1 соответствует наличие, а цифре 0 — отсутствие импульса, либо высокочастотный синусоидальный сигнал, начальная фаза которого на каждом единичном промежутке времени может равняться $+90^\circ$, что соответствует цифре 1, и -90° , что соответствует цифре 0. С классической точки зрения первый случай соответствует амплитудно-импульсной модуляции, в то время, как второй случай может рассматриваться как фазовая или балансная модуляция синусоидального колебания.

При переходе от исследования синусоидальных колебаний к исследованию двоичных последовательностей некоторые моменты приобретают особое значение.

Одним из важных свойств синусоидальных колебаний является взаимная ортогональность всех гармоник $\sin nx$ основной частоты $\sin x$ в интервале изменения x от 0 до 2π . $\sin x$ ортогонален также двум своим фазовым сдвигам: $\cos x$ и $-\cos x$. В большинстве систем связи свойство ортогональности является одним из наиболее желательных признаков сигналов.

В терминах статистики ортогональность означает *некоррелированность*. При кодировании набора сообщений для передачи через канал связи желательно, чтобы в закодированном виде эти сообщения возможно больше отличались друг от друга. Это приблизительно и достигается в случае *ортогональности*, т. е. некоррелированности. В дальнейшем будет показано, что если необходимо закодировать два или несколько сообщений, то можно достигнуть отрицательной корреляции между ними; однако, когда число сообщений увеличивается, значения отрицательных коэффициентов корреляции стремятся к нулю.

Значительная часть этой книги посвящена вопросам существования и формирования ортогональных и трансортогональных множеств кодовых слов. Существуют простые верхние границы для параметров рассматриваемых множеств, однако вследствие комбинаторных ограничений эти границы достижимы не всегда.

В особых случаях циклические фазовые сдвиги одной и той же последовательности формируют приблизительно ортогональный набор кодовых слов. Особенно широко это используется при радиолокационном измерении дальности, когда расхождение во времени, т. е. фазовый сдвиг между переданным и отраженным сигналами, прямо пропорционально дальности.

Здесь возможные принимаемые сообщения представляют собой фазовые сдвиги передаваемого сигнала, и идеальным является случай, когда различные фазовые сдвиги отличаются друг от друга возможно больше. Вопросы существования и формирования таких последовательностей рассматриваются в гл. 4, а их использование для измерения

дальности — в гл. 5 и 6. Одним из наиболее интересных свойств рассматриваемых дальномерных систем является их способность устанавливать синхронизацию между передаваемым и принимаемым сигналами за очень короткий промежуток времени, даже при межпланетных расстояниях.

Основным требованием, предъявляемым к кодовым словам, является возможно большее различие их между собой. С точки зрения синхронизации эти слова не должны быть фазовыми сдвигами друг относительно друга. В гл. 7 и 8 ортогональные и биортогональные телеметрические коды оцениваются с позиций теории информации. В пределе, когда число кодовых слов возрастает, теоретическая граница скорости передачи информации через канал с помехами при конкретных значениях отношения сигнал/шум действительно достижима. Более того, приведенная оценка «затраты» пропускной способности канала для достижения синхронизации таких кодов показывает, что она может быть произвольно малой при соответствующем построении системы связи.

Два этапа процесса связи

В работе любой системы связи можно выделить два основных этапа: начало работы и передача информации. Например, в телефонии такими этапами являются *набор номера* и *переговоры*, существенно отличающиеся друг от друга. На первом этапе с помощью сложного переключения цепей из большого числа возможных абонентов выбирается один требуемый. На втором этапе происходит передача звуковых сигналов между двумя оконечными точками, и основной целью является обеспечение эффективности и качества воспроизведения.

Определение местоположения цели и установление контакта с ней входят в задачу *обнаружения* (поиска) сигнала, в то время как последующая передача информации относится к задаче *эффективного функционирования*.

Обычно задача обнаружения сигнала решается в многомерном пространстве. При приеме сигналов со спутника Земли ось приемной антенны, прежде всего, должна быть совмещена с направлением на спутник, что предполагает обнаружение его по двум сферическим координатам (обычно это — азимут и угол места или восхождение и склонение в зависимости от вида опорного механизма антенны). Кроме того, приемник должен быть настроен на определенную частоту, что означает обнаружение еще одной координаты спутника — места в соответствующем диапазоне частотного спектра. При когерентном приеме и при измерении дальности до цели требуется также *определение фазы*. Таким образом, приходим к задаче обнаружения сигнала в четырехмерном пространстве (два угла, частота и фаза). В терминологии классической

механики это означает, что необходимо найти четыре из шести координат фазового пространства, а именно, три сферические координаты положения и радиальную скорость.

Во многих случаях при рассмотрении задачи обнаружения сигнала удобно искусственно ввести многомерность. Так, можно считать, что в телефонном номере АН-3-2197 координата АН выбрана из некоторого «коммутаторного пространства», а цифры «3-2197» — из пятимерного пространства десятичных чисел. В действительности же более естественно считать весь номер представленным в семимерном пространстве, причем отдельными координатами являются (А, Н, 3, 2, 1, 9, 7) или, учитывая соответствие букв цифрам (1, 8, 3, 2, 1, 9, 7).

По существу, задачей обнаружения является игра «Двадцать вопросов». Из «пространства» огромного числа объектов должен быть выделен один конкретный объект. Очевидно, было бы неэффективно приписывать всем объектам порядковые номера и затем осуществлять поиск, спрашивая: «Первый?», «Второй?», «Третий?» и т. д. Гораздо более эффективно было бы спрашивать так: «В какой половине: первой или второй?», «В какой четверти: четной или нечетной?» и т. д. Если бы удалось найти двадцать независимых характеристик объектов, таких, что наличие и отсутствие каждой характеристики было бы равновероятно, то оптимальная стратегия игры «Двадцать вопросов» стала бы очевидной. В этом случае последовательность вопросов выглядела бы так: «Обладает ли искомым объект свойством А?», «Обладает ли искомым объект свойством В?», «Обладает ли искомым объект свойством С?» и т. д. Полный набор из двадцати ответов был бы достаточен для выбора одного объекта из миллиона возможных.

Данную совокупность ответов можно рассматривать как двадцать *координат* объекта, причем каждая координата выбрана из множества, элементами которого являются ответы «Да» и «Нет». В гл. 6 будет описана система измерения дальности, в которой используются сигналы, позволяющие искусственно разбить процесс поиска по фазе на различные независимые этапы и, следовательно, приблизительно реализовать оптимальную стратегию игры «Двадцать вопросов».

На этапе передачи информации в системе связи осуществляется кодирование сообщений, поступающих в канал связи, где на них накладывается шум с определенными статистическими свойствами. При приеме стремятся возможно полнее устранить влияние этого шума и восстановить с возможно большей степенью вероятности переданное сообщение. Когда известны статистические характеристики шума в канале, в принципе, становится возможным определить метод приема сообщений, который минимизирует ошибку, вносимую шумом, относительно любого из возможных критериев.

С аналитической точки зрения удобнее всего предположить, что шум в канале является гауссовским и белым. Хотя такое допущение

часто неверно, однако для условий космической связи все теоретические и экспериментальные данные подтверждают его справедливость. Теория показывает, что в этом случае наилучшая с точки зрения критерия максимального правдоподобия процедура выделения сообщения состоит в сравнении принятого сигнала со всеми возможными передаваемыми сообщениями. Для этого вычисляются соответствующие коэффициенты корреляции, или ковариации. Считается, что было послано то сообщение, которое наиболее сильно коррелировано с принятым сигналом.

Хотя при заданной статистике шума можно определить наилучшую схему приемника, однако, зная метод приема, необходимо еще отыскать наилучшее семейство передаваемых сообщений. Это и составляет суть задачи кодирования для рассматриваемого канала. Очевидно, задача заключается в выборе сообщений, *возможно больше отличающихся друг от друга*. Для корреляционного приема отыскание наилучшего семейства сводится к обеспечению возможно большей взаимной *некоррелированности* сообщений.

В гл. 4 вводятся и рассматриваются некоторые родственные семейства кодов с очень хорошими корреляционными свойствами. Анализ системы связи, в которой передача информации осуществляется с помощью таких кодов, а выделение сообщений выполняется на основе принципа максимальной корреляции, приводится в гл. 7. Этот анализ, использующий информационно-теоретический подход и критерии Шеннона, устанавливает, что в пределе при достаточном увеличении длины слова с помощью этих кодов можно достигнуть максимальной возможную пропускную способность канала при конкретных значениях отношения сигнал/шум.

Для системы измерения дальности, описываемой в гл. 6, главной задачей является определение начальной фазы опорного сигнала, что, по существу, и представляет задачу обнаружения сигнала. Слежение за изменением начальной фазы принимаемого сигнала при сопровождении цели относится к задаче *эффективного функционирования*. На этом этапе скорость передачи информации значительно ниже, чем на этапе обнаружения. Поэтому в гл. 6 при рассмотрении систем измерения дальности основное внимание уделяется обнаружению сигнала, хотя достаточное внимание уделяется также вопросам сопровождения цели. Обратная ситуация наблюдается в космической телеметрии, когда основная цель состоит в передаче большого количества данных на Землю в течение длительных периодов времени. В этом случае главной будет задача эффективного функционирования, а задача обнаружения сигналов отступает на второй план и к ней относятся как к неизбежному злу. Поэтому в гл. 7 основное внимание уделяется кодам, обеспечивающим наилучшие показатели с точки зрения критерия эффективного функционирования. Однако гл. 8 целиком посвящена изучению методов выбора среди всех телеметрических кодов, эквивалентных с точки

зрения критерия эффективного функционирования, тех, которые обеспечивают наивысшую эффективность при решении задачи обнаружения ¹⁾).

Решение задачи обнаружения сигналов в телеметрии связано в основном с применением *самосинхронизирующихся кодов* и, в частности, *кодов без запятой*.

§ 1.4. Псевдослучайные последовательности

Критерии, определяющие случайность и псевдослучайность последовательностей

Строго говоря, утверждение о том, что конечная последовательность чисел, цифр или событий любого рода случайна, относится не к фактическому виду последовательности, а к способу ее получения. Случайным, например, является процесс подбрасывания монеты, отдельные результаты которого не могут быть предсказаны заранее, но соответствуют некоторому распределению вероятностей. Любую последовательность событий, сформированных таким способом, не совсем точно можно назвать *случайной*. Однако важно понимать, что когда последовательность называют случайной, то имеют в виду не характер и свойства последовательности *апостериори*, а *априорные* условия ее формирования. Следовательно, довольно бессмысленно спрашивать: «Является ли число 7 случайным?» или «Является ли набор цифр 1110010 случайной двоичной последовательностью?». Если последовательность 1110010 получена в результате случайного процесса такого, как подбрасывание монеты (орел — 1, решка — 0), то в этом частном случае она случайна. Если же она получена с помощью детерминированного устройства такого, как сдвигающий регистр, то она, разумеется, не случайна, даже если и «выглядит» таковой.

Выше указывалось, что термин «случайность» относится к *априорным* условиям формирования последовательности. Однако могут быть предложены статистические тесты для определения степени правдоподобности гипотезы о том, что конкретная последовательность сформирована в результате определенного случайного процесса. Последовательность, проходящая через набор таких тестов, может быть определена как *псевдослучайная*. Это — апостериорный критерий, который не является ни необходимым, ни достаточным условием истинной случайности. Например, покерная комбинация флеш—рояль будет случайной, если она появилась в ходе честной игры, хотя она, несомненно, не прошла бы ни через какие тесты на псевдослучайность. И наоборот, самая маловажная комбинация карт, проходящая через все разумные тесты

¹⁾ Здесь под обнаружением понимается установление синхронизации кодовых слов (прим. ред.).

на случайность, не случайна, если она появилась в результате преднамеренных действий. Короче говоря, если задан набор тестов на случайность, то всегда можно предложить детерминированный процесс для генерирования псевдослучайной последовательности, которая пройдет через все указанные тесты.

Одним из наиболее простых и эффективных устройств генерирования детерминированных последовательностей единиц и нулей для целей цифровой связи является *сдвигающий регистр*. Более того, существует важный класс довольно простых сдвигающих регистров, формирующих последовательности, которые проходят через многие из наиболее очевидных тестов на случайность. Хотя эти последовательности называются *псевдослучайными*, не надо забывать, что в действительности они *детерминированные* и, следовательно, *не случайные*.

Последовательности, вырабатываемые сдвигающими регистрами

n -разрядным сдвигающим регистром называется устройство, состоящее из n последовательно соединенных двоичных элементов памяти, состояние которых передается (сдвигается) на последующие элементы

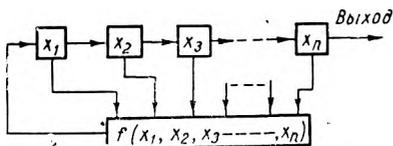


Рис. 1.1. Функциональная схема n -разрядного сдвигающего регистра с логической обратной связью

под действием тактовых импульсов. Чтобы после n тактовых импульсов регистр не оказался «пустым», в схему может быть введен элемент обратной связи, осуществляющий логическую операцию над содержимым n разрядов регистра!). Полученный результат поступает в первый разряд. Общая функциональная схема такого сдвигающего регистра с обратной связью приведена на рис. 1.1.

Например, если $n=3$, функция обратной связи имеет вид $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3$ и начальное состояние регистра 001, то он последовательно принимает состояния 001, 100, 110, 111, 011, 101, 010, 001...²⁾. В этом случае восьмое состояние совпадает с первым, т. е. периодичность работы схемы равна 7. С выхода снимается последовательность 1001110, повторяющаяся с периодом, равным 7 элементам.

Последовательности, образуемые с помощью схемы, изображенной на рис. 1.1, применимы для широкого класса задач кодирования. Фактически таким способом при соответствующем выборе n , f и начально-

¹⁾ В общем случае элемент обратной связи является переключательным устройством, реализующим любую логическую операцию над двоичными переменными (прим. ред.).

²⁾ Здесь на элемент обратной связи, являющийся сумматором по модулю 2, поданы выходы с первого и третьего разрядов регистра (прим. ред.).

го состояния сдвигающего регистра может быть получена *любая* наперед заданная двоичная последовательность. Однако для многих целей к схеме, изображенной на рис. 1.1, удобнее добавить «*выходную логику*» $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, как показано на рис. 1.2.

Основным преимуществом последней схемы является то, что «внутренняя логика» $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и сдвигающий регистр могут быть использованы для формирования некоторой последовательности с требуемым периодом p , а внешняя, или выходная, логика может видоизменить ее в любую другую, последовательность с тем же периодом. Удобные алгоритмы для получения наперед заданных последовательностей с помощью описанных выше схем приведены в гл. 2.

Наиболее распространены и хорошо изучены регистры с линейной обратной связью, в которых $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (см. рис. 1.1) представляет собой функцию проверки на четность нескольких или всех n ее аргументов¹⁾. В вышеприведенном примере функция $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 + x_1x_3$ линейна, так как она является функцией проверки на четность x_1 и x_3 . Функция равна 1, когда их сумма нечетна, и 0, когда четна.

Последовательность на выходе n -разрядного сдвигающего регистра с обратной связью в конечном счете всегда периодична, причем ее период p не превышает 2^n . В случае линейного сдвигающего регистра наибольший период равен $2^n - 1$ и любая выходная последовательность, имеющая такой период, называется линейной *последовательностью максимальной длины*. Именно таковой является последовательность 1001110 с периодом $p = 7 = 2^3 - 1$.

Для каждого значения n существуют линейные последовательности максимальной длины. Они являются псевдослучайными в том смысле, что удовлетворяют следующим трем критериям случайности:

критерий 1 (свойство уравниваемости): в каждом периоде последовательности число «1» отличается от числа «0» не более чем на единицу;

критерий 2 (свойство серий²⁾): в течение периода последовательности половина серий единиц и нулей имеет длину 1, одна четверть — 2,

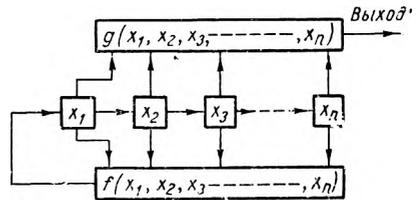


Рис. 1.2. Функциональная схема генератора последовательности с внешней логикой

¹⁾ Такая функция линейна в смысле линейной алгебры над полем двух элементов. Она существенно отлична от так называемых пороговых логических функций, которые в литературе иногда также называются линейными. Парадоксально, но единственной функцией двух переменных, не являющейся пороговой, является функция проверки на четность. Таким образом, в данном случае оба определения линейности диаметрально противоположны.

²⁾ Серией называется последовательность одинаковых цифр (прим. ред.)

одна восьмая — 3 и т. д. до тех пор, пока это продолжение имеет смысл;

критерий 3 (свойство корреляции): если последовательность почленно сравнивать с любым ее циклическим сдвигом в течение периода этой последовательности, то число совпадений отличается от числа несовпадений не больше чем на единицу.

Пример. На рис. 1.3 последовательность генерируется четырехразрядным сдвигающим регистром и логическая обратная связь представляет собой функцию проверки на четность содержимого третьего и четвертого разрядов: x_3 и x_4 (здесь она обозначена \oplus и известна также под названиями «исключенное ИЛИ», «сумма по модулю 2», «функция полусумматора»¹⁾). Если начальное состояние сдвигающего регистра 1000 (считая на рис. 1.3 слева направо), то он последовательно примет следующие состояния: 1000, 0100, 0010, 1001, 1100, 0110, 1011, 0101, 1010, 1101, 1110, 1111, 0111, 0011, 0001, 1000. Выходная последовательность (последние цифры каждого состояния) имеет вид 000100110101111 и ее период равен 15.

Критерий 1 удовлетворяется, так как число единиц в последовательности равно 8, а число нулей равно 7 и «неуравновешенность» не превышает допустимой величины.

Критерий 2 удовлетворяется, так как среди восьми серий (необходимо, чтобы половину всех серий составляли серии единиц и половину — серии нулей, так как серии обоих видов должны чередоваться) половина имеет длину 1 (две серии единиц и две серии нулей), четверть — длину 2 (одна серия единиц и одна серия нулей), одна восьмая — длину 3 (одна серия из трех нулей).

При подбрасывании «идеальной монеты» критерий 1 означает, что орел и решка выпадают приблизительно одинаково часто. Критерий 2 соответствует утверждению, что после выпадения орла (или решки) n раз подряд вероятность того, что при следующем подбрасывании выпадет орел (или решка), равна половине. И, наконец, критерий 3 означает независимость испытаний: значение результатов предыдущих подбрасываний не дает никакой информации относительно результатов текущих подбрасываний. Если в приведенном примере сдвинуть последовательность на один элемент и затем произвести почленное сравнение

000100110101111

001001101011110,

то можно видеть, что в этих двух строках элементы совпадают между собой 7 раз и не совпадают 8 раз, т. е. критерий 3 удовлетворяется. Более того, если сдвигать последовательность на любое число элементов от одного до четырнадцати включительно и затем производить почленное сравнение, то всегда получим семь совпадений и восемь несовпадений.

Подобный результат справедлив не только для данного примера, но и для любой линейной последовательности максимальной длины. Дей-

¹⁾ Учитывая обозначения предыдущего приема; $x_3 \oplus x_4 = x_3 \bar{x}_4 + x_3 \bar{x}_4$ (прим. ред.).

ствительно, в результате проверки на четность такой последовательности и ее циклической перестановки образуется новая циклическая перестановка исходной последовательности:

$$\oplus \begin{array}{r} 000100110101111 \\ 001001101011110 \\ \hline 00110101110001 \end{array}$$

Следовательно, число несовпадений (единицы в результирующей последовательности) превышает число совпадений (нули в результирующей последовательности) на единицу, что равно разности между количеством единиц и нулей в исходной последовательности. Свойство, заключающееся в том, что *при почленной проверке на четность некоторой последовательности со своей циклической перестановкой образуется новая циклическая перестановка той же последовательности*, является отличительным признаком линейных последовательностей максимальной длины¹⁾.

Таким образом, все линейные последовательности максимальной длины хотя и являются детерминированными, однако проходят некоторые из основных тестов на случайность.

Действительно, почти полная уравновешенность единиц и нулей в последовательностях, характер распределения длин серий в них, их кажущаяся статистическая независимость служат серьезным основанием для того, чтобы рассматривать эти последовательности как истинно случайные. Одним словом, можно с одинаковой уверенностью утверждать, что последовательность 000100110101111 получена либо при подбрасывании монеты, либо с помощью сдвигающего регистра, изображенного на рис. 1.3.

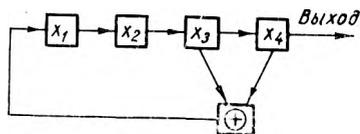


Рис. 1.3. Генератор линейной последовательности максимальной длины

§ 1.5. Использование последовательностей, вырабатываемых сдвигающими регистрами

Генераторы скрытых кодов. Шифровка

Последовательность, вырабатываемую сдвигающим регистром, было предложено использовать в качестве «ключа» шифров. Тогда шифровка заключается в сложении по модулю 2 передаваемого сообщения,

¹⁾ Доказательство приводится в гл. 2.

записанного с помощью двоичных цифр, с этой последовательностью, а расшифровка — в сложении по модулю 2 закодированного сообщения и ключевой последовательности. Данный тип шифра является лишь одним из многих классических способов шифровки, где последовательность, вырабатываемая сдвигающим регистром, играет роль ключа.

Многоадресное кодирование. Различные участки длинной последовательности, вырабатываемой сдвигающим регистром, могут служить в качестве отличительных адресов для большого числа абонентов, самолетов, подстанций и т. п. Эти адреса можно использовать для опознавания объектов или обеспечения систематической связи корреспондентов с базовой станцией. Подобная система, в которой каждой из 64 удаленных метеостанций поставлены в соответствие 10-элементные отрезки последовательности длины 1023, была установлена для изучения количества осадков в окрестностях Калькутты.

Генераторы эффективных кодов. Коды, исправляющие ошибки

Известно большое количество схем, построенных на основе линейных сдвигающих регистров для генерирования кодов, исправляющих ошибки. Согласно терминологии Слепяна все эти коды могут быть определены как циклические, групповые, с проверкой на четность¹⁾.

Формирование помехоустойчивых сигналов. В радиолокационных дальномерах, работающих при значительных уровнях шумов, для модуляции импульсных посылок или непрерывных колебаний выгодно использовать последовательность максимальной длины. Автокорреляционная функция таких сигналов может быть выделена, несмотря на очень малые отношения сигнал/шум на входе. (Точное значение пороговых отношений сигнал/шум зависит от времени интегрирования в корреляторе.) В работах Линкольновской лаборатории Массачусетского технологического института, проведившихся в 1959 и 1961 гг., для определения расстояния до Венеры использовалась последовательность максимальной длины с числом элементов $2^{13}-1=8191$, которая осуществляла амплитудную модуляцию серии импульсов. В системе измерения дальности, разработанной Лабораторией реактивной техники (JPL), для уменьшения времени обнаружения сигналов применяется последовательность, являющаяся логической комбинацией нескольких коротких последовательностей. Эта комбинарованная последовательность осуществляет фазовую модуляцию непрерывного несущего колебания.

¹⁾ Построение таких кодов описано в книгах: У. У. Питерсона «Коды, исправляющие ошибки». Изд-во «Мир», 1964; А. П. Удалова, Б. А. Супруна «Избыточное кодирование при передаче информации двоичными кодами». Изд-во «Связь», 1964 (прим. ред.).

Генераторы последовательностей с заданными свойствами и заданным периодом

Доказано, что используя n -разрядный сдвигающий регистр и соответствующим образом выбирая логику обратной связи, можно получить последовательность любой длины p в пределах от 1 до 2^n включительно. В гл. 2 описан простой способ нахождения функции обратной связи для этого случая. Часто такие схемы используются как делители частоты в синхронных цифровых системах.

Генераторы заданных последовательностей. Целесообразно исследовать возможность использования сдвигающего регистра в качестве устройства памяти для хранения наперед заданной последовательности. Это может быть осуществлено либо с помощью *внутренней*, либо с помощью *внешней* логики, как было объяснено выше. В обоих случаях необходимо доопределить частично заполненную таблицу истинности таким образом, чтобы минимизировать сложность результирующего логического выражения. Существует ряд вычислительных программ для решения данной задачи, причем некоторые из них успешно используют тот факт, что требуемые последовательности вырабатываются сдвигающими регистрами.

Таким образом, с помощью сдвигающих регистров с обратной связью можно запоминать данные самого различного вида.

Математические модели. Генераторы случайных двоичных чисел

Сдвигающий регистр может использоваться для приближенного моделирования опыта по подбрасыванию монеты, несмотря на то, что он является сугубо детерминированным устройством.

Уже давно предлагается аксиоматизация статистик, основанных на последовательностях длины 2^n , в которых каждая n -элементная комбинация встречается только один раз (последовательности Брюжнэ, вырабатываемые сдвигающими регистрами). Более того, часто предлагается применять сдвигающие регистры в качестве генераторов случайных чисел при решении задач методом Монте-Карло.

Конечные машины Тьюринга. Сдвигающий регистр с обратной связью является простейшим нетривиальным примером машины с конечными состояниями без внешних входов. Поэтому он используется как «подопытное животное» для исследования машин с рекурсивной логикой и изучения автоматов.

Марковские процессы. Диаграмма возможных последовательных состояний n -разрядного сдвигающего регистра является одновременно диаграммой состояний Маркова для двоичного канала n -го порядка. Работа сдвигающего регистра есть предельный случай марковского процесса, когда допустимы только два значения переходной вероятности —

1 и 0 (чистый детерминизм). Тем не менее топологические и (или) графотеоретические свойства диаграмм, открытые при изучении сдвигающих регистров, могут быть выражены в терминах теории марковских процессов общего вида.

Преимущества сдвигающих регистров

1. Линейные последовательности максимальной длины обладают богатой внутренней комбинаторной структурой. В основе этой структуры лежит свойство взаимной ортогональности различных циклических перестановок последовательностей. Использование указанных перестановок для построения генераторов эффективных кодов, исправляющих ошибки, создаст возможность осуществления линейно-независимых проверок на четность. При формировании помехоустойчивых сигналов свойство взаимной ортогональности приводит к двузначной корреляционной функции, идеальной с точки зрения требований, предъявляемых к таким сигналам.

Весьма важным преимуществом последовательностей, вырабатываемых сдвигающими регистрами, является исключительная простота их формирования.

2. Важным свойством сдвигающих регистров при построении генераторов последовательностей с заданными свойствами является их универсальность. Это значит, что с помощью сдвигающих регистров могут быть получены любые конечные (или периодические) двоичные последовательности. Известны методы анализа и синтеза схем со сдвигающими регистрами. Следовательно, всегда можно описать последовательность при известной формирующей схеме, и наоборот, всегда можно построить схему, если задана требуемая последовательность.

Иногда генераторы последовательностей с заданными свойствами выгодно использовать в качестве устройств памяти. Так, например, самые экономичные схемы деления частоты строятся именно на их основе. Одним из случаев, когда устройствам памяти на основе сдвигающих регистров следует отдавать предпочтение перед другими запоминающими устройствами, являются системы, построенные в основном из стандартных цифровых блоков. Здесь сдвигающий регистр может быть составлен из таких же блоков и непосредственно включен в систему. При этом не возникает никаких проблем, связанных с доступом к памяти, синхронизацией и с согласованием по напряжениям, сопротивлениям и т. п.

Для формирования заданной последовательности можно использовать и другие цифровые схемы, например счетчик с внешней логикой. Счетчик формирует требуемый период, а внешняя логика — требуемую последовательность.

Схема на сдвигающем регистре обладает по сравнению со схемой на счетчике рядом преимуществ. Во-первых, она проще и с точки зрения логических устройств более естественна. Это находит отражение в простоте перехода схемы из одного состояния в другое в связи с отсутствием задержек, необходимых для распространения цифр переноса. Во-вторых, последовательности на выходе различных разрядов сдвигающего регистра просто сдвинуты друг относительно друга во времени. Поэтому если для построения абсолютно минимизированной внешней логической схемы требуются какие-либо задержки, то они получаются с помощью самого сдвигающего регистра, в то время как в схемах со счетчиком для этой цели необходимо вводить дополнительные элементы задержки. И, наконец, если можно добиться желаемых целей с помощью простейшего конечного автомата (т. е. с помощью сдвигающего регистра), то незачем использовать более сложные схемы.

3. Никакое детерминированное устройство не может формировать истинно случайной последовательности элементов. Но, с другой стороны, никакая конечная последовательность не может быть истинно случайной *апостериори* (см. выше). Вместо этого можно задаться некоторыми критериями случайности и считать псевдослучайной любую последовательность, удовлетворяющую этим критериям.

Как мы уже видели, последовательность, вырабатываемая линейным сдвигающим регистром, удовлетворяет свойству серий и свойству нормальности в пределах от 0 до n (т. е. вероятность появления каждого набора из m элементов приблизительно равна 2^{-m} для $m < n$). Для большинства приложений метода Монте-Карло это адекватно истинной случайности. И, несомненно, метод формирования последовательности случайных элементов с помощью сдвигающих регистров гораздо экономичнее, например, возведения в квадрат десятиэлементного числа и выбора средних десяти элементов.

В некоторых случаях выгодно применять «стандартную» псевдослучайную последовательность. Повторяя ее многократно, можно исследовать различные системы в одной и той же «шумовой среде».

Сдвигающий регистр подробно изучен с точки зрения теории конечных автоматов. Многие из наиболее важных его свойств (например, для случая, когда диаграмма работы схемы состоит из «чистых» циклов и не имеет ветвей, что в терминах теории кодирования эквивалентно устройствам без потери информации) обобщены на более широкий класс логических машин.

Результаты исследования сдвигающего регистра как предельного детерминированного случая двичной цепи Маркова используются еще не полностью. Теорема о том, что n -разрядный регистр при соответствующей логике обратной связи может сформировать последовательность любого периода p в диапазоне $1 \leq p \leq 2^n$, является в действитель-

ности более общим видом следующей теоремы о двоичной цепи Маркова: если допустимы все возможные переходы из одного состояния в другое, то для каждого значения p ($1 \leq p \leq 2^n$) существует простая петля состояний, так что процесс возвращается в исходное состояние ровно через p переходов.

Диаграмма переходов для последовательностей, вырабатываемых сдвигающими регистрами, гомеоморфична (топологически эквивалентна) диаграмме переходов для двоичного марковского процесса. Так как теорема о «заданном периоде» доказана с помощью теории сдвигающих регистров, в то время как никакого строгого топологического доказательства не существует, то становится очевидной полезность использования теории сдвигающих регистров для изучения цепей Маркова.

Л и т е р а т у р а

1. Bose R. C. and D. K. Ray-Chaudhuri. «On a Class of Error-Correcting Binary Group Codes». *Information and Control*, 3, 1960, pp. 68—79.
Боуз Р. К., Рой-Чоудхури. Об одном классе двоичных групповых кодов с исправлением ошибки. «Кибернетический сборник», вып. 2. ИИЛ, 1961.
2. Golomb S. W. Sequences with Randomness Properties (Terminal Progress report under Contract Red. No 639498). Baltimore, Md.: Glenn L. Martin Co., June 1955.
3. Green J. and R. San Soucie. «An Error-Correcting Encoder and Decoder of High Efficiency». *Proc. IRE*, 46, 1958, pp. 1741—1744.
4. Huffman D. A. «A Linear Circuit Viewpoint on Error-Correcting Codes». *IRE Transactions*, IT-2, 1956, pp. 20—28.
5. Nadler M. and A. Segupta. «Shift-Register Code for Indexing Applications». *Communications of the Association for Computing Machinery*, 2, 10, oct. 1959, pp. 40—43.
6. Prange E. «Cyclic Error-Correcting Codes in Two Symbols». Air Force Cambridge Research Center TN-58-156, Bedford, Mass., april 1958.
7. Reed I. S. «A Class of Multiple-Error-Correcting Codes and the Decoding Scheme». *IRE Transactions*, PGIT-4, 1954, pp. 38—49.
Рид И. С. Класс кодов с исправлением нескольких ошибок и схема декодирования. «Кибернетический сборник», вып. 1. ИИЛ, 1960.
8. Zierler N. On Decoding Linear Error-Correcting Codes. *IRE Transactions*, IT-6, 1960, pp. 450—459.

ГЕНЕРИРОВАНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С ОСОБЫМИ СВОЙСТВАМИ

§ 2.1. Введение

В последующих главах будут рассмотрены последовательности с особыми свойствами и методы их применения в системах связи. Но так как всякому использованию предшествует формирование последовательностей, то эта глава посвящена некоторым цифровым методам их генерирования. Кроме того, затрагивается ряд проблем, связанных с преобразованиями таких последовательностей.

Наиболее простым генератором последовательности является запоминающее устройство (например, на ленте, на барабане или на линиях задержки), хранящее данную последовательность. Существует еще два простых метода построения генераторов последовательностей, основанные на применении рассмотренных в гл. 1 регистров с внутренней и внешней логикой.

Использование запоминающего устройства в качестве генератора последовательности кажется простым только на первый взгляд. Действительно, с возрастанием длины последовательности такое решение становится все менее и менее экономичным. Мало того, в этом случае до-

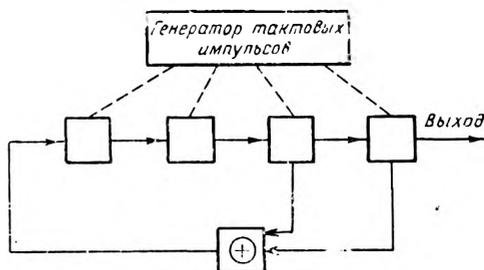


Рис. 2.1. Генератор последовательности с внутренней логикой

волью сложной оказывается задача ввода последовательности в запоминающее устройство.

Основным элементом генераторов с внутренней и внешней логикой является сдвигающий регистр. Генератор с внутренней логикой, состоящий из четырехразрядного регистра и одной цепи обратной связи, показан на рис. 2.1.

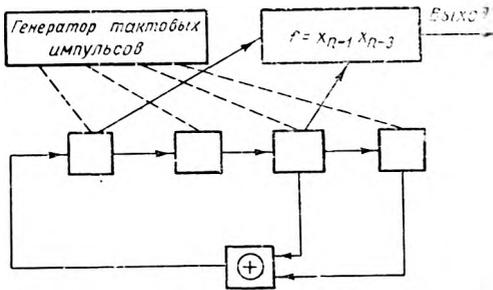


Рис. 2.2. Генератор последовательности с внешней логикой

Если рассмотреть последовательность состояний любого разряда регистра, то видно, что генератор вырабатывает последовательность 000100110101111. При данной функции обратной связи эта последовательность удовлетворяет рекуррентному соотношению $X_n = X_{n-3} \oplus X_{n-4}$, где знак \oplus означает сложение по модулю 2.

На рис. 2.2 изображен генератор с внешней логикой, вырабатывающий последовательность 000000001010110. Здесь сдвигающий регистр и внутренняя логика формируют последовательность 000100110101111, из которой с помощью *внешней* логики¹⁾ получается требуемая последовательность.

Таким образом, задача построения генератора последовательности сводится к нахождению вида функции обратной связи. Методы определения требуемых функций рассматриваются в следующем параграфе.

§ 2.2. Определение логической функции обратной связи

Для лучшего понимания метода определения логической функции обратной связи рассмотрим конкретный пример. Пусть требуется определить логическую функцию обратной связи для генераторов с внутренней и внешней логикой, вырабатывающих последовательность 01011100010.

Первая задача при построении генератора с внутренней логикой заключается в определении длины регистра. Если последовательность содержит две одинаковые группы из k последовательных символов, то количество разрядов регистра не должно быть меньше, чем $k+1$. (В

¹⁾ Схема совпадения «И» сигналов с первого и третьего разрядов регистра (прим. ред.).

частности, если *длина*, или *период*, последовательности равна p , то число разрядов регистра не может быть меньше, чем n , где $2^{n-1} < p \leq 2^n$.) Следовательно, минимальная длина регистра равна такому наименьшему числу m , при котором в последовательности не содержится двух одинаковых групп из m символов. В нашем примере $p=11$, и так как $2^3=8 < 11 < 16=2^4$, то $n=4$.

Таким образом, регистр должен состоять, по крайней мере, из четырех разрядов. Но группа символов 0010 появляется в последовательности дважды (начиная с восьмого и одиннадцатого членов). Поэтому число разрядов не должно быть меньше пяти. Так как ни одна группа из пяти последовательных символов не появляется дважды, то для формирования требуемой последовательности может быть использован пятиразрядный регистр. Очевидно, эту же последовательность можно сформировать с помощью регистров с числом разрядов 6, 7, 8, 9, 10 или 11 (последний случай соответствует простому запоминанию последовательности в регистре).

Если, например, длина регистра выбрана равной пяти, то последовательность разбивается на группы, состоящие из пяти последовательных символов. Существует 11 таких групп, каждая из которых соответствует строке таблицы истинности для пяти переменных. Если символ, следующий в последовательности за группой из пяти символов, равен ω (0 или 1), то это значение проставляется в таблице истинности в соответствующей строке. Таким образом, последовательность 01011100010 порождает частично определенную таблицу истинности, изображенную на рис. 2.3.

Любая логическая функция, удовлетворяющая этой таблице, генерирует требуемую последовательность. Так как таких функций существуют 2^{2^4} , то вполне возможно, что, по крайней мере, одна из них удовлетворяет также некоторым дополнительным требованиям, которые определяются в основном условиями применения последовательности¹⁾.

Обычно одним из дополнительных ограничений является требование минимальной сложности логической функции. Вопросы минимизации логики и построения генераторов с другими полезными свойствами рассматриваются в следующих параграфах этой главы.

Функция внешней логики для формирования последовательности, рассматриваемой в данном примере, находится следующим образом. Во-первых, определяется необходимая длина регистра n . Затем выбирается внутренняя логика для получения последовательности с периодом p , из которой формируется требуемая последовательность. В нашем примере $2^3=8 < p=11 < 2^4=16$ и, следовательно, $n=4$.

¹⁾ Величина 2^{2^4} обусловлена тем, что из 32 строк таблицы на рис. 2.3 однозначно определены (заполнены) только 11 (прим. ред.)

Получение внутренней логики, генерирующей последовательность длины p , рассматривается в § 2.4. Для настоящего случая она определяется выражением

$$X_n = \bar{X}_{n-1} \bar{X}_{n-2} X_{n-3} \oplus X_{n-3} \oplus X_{n-4}$$

и приводится без вывода. Эта логика генерирует последовательность 10101111001.

x_{n-5}	x_{n-4}	x_{n-3}	x_{n-2}	x_{n-1}	f	x_{n-5}	x_{n-4}	x_{n-3}	x_{n-2}	x_{n-1}	f
0	0	0	0	0		1	0	0	0	0	
0	0	0	0	1		1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1		1	0	0	1	1	
0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	
0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	
0	0	1	1	0		1	0	1	1	0	
0	0	1	1	1		1	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0		1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	
0	1	0	1	0		1	1	0	1	0	
0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	
0	1	1	0	0		1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1		1	1	1	0	1	
0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	
0	1	1	1	1		1	1	1	1	1	

Рис. 2.3. Таблица истинности для генератора последовательности с внутренней логикой

Если следующим друг за другом группам из четырех последовательных символов этой последовательности поставить в соответствие символы требуемой последовательности, то получается частично определенная таблица истинности для функции внешней логики. Так, если группе символов 1010 соответствует первый 0 в последовательности 01011100010, то функция внешней логики определяется таблицей истинности, изображенной на рис. 2.4. Хотя число таких логических функ-

ций равно только 2^3 , однако существует еще некоторая свобода в наложении дополнительных ограничений, о которых говорилось выше.

x_{n-4}	x_{n-3}	x_{n-2}	x_{n-1}	f	x_{n-4}	x_{n-3}	x_{n-2}	x_{n-1}	f
0	0	0	0		1	0	0	0	
0	0	0	1		1	0	0	1	0
0	0	1	0		1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0		1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Рис. 2.4. Таблица истинности для генератора последовательности с внешней логикой

§ 2.3. Диаграммы состояний

Таблицы истинности в § 2.2 были определены лишь частично, что дает возможность наложить некоторые желательные ограничения на функции обратной связи. Для выяснения смысла большинства из этих

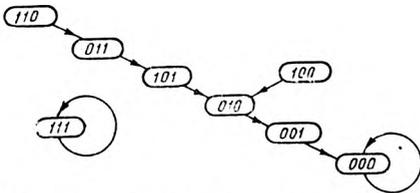


Рис. 2.5. Диаграмма состояний для $X_n = X_{n-2}X_{n-3}$

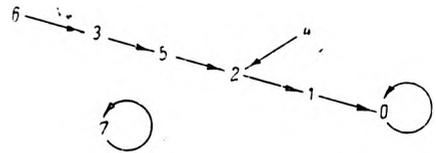


Рис. 2.6. Диаграмма состояний для $X_n = X_{n-2}X_{n-3}$ в десятичном обозначении

ограничений можно воспользоваться *диаграммами состояний*. Содержимое всех разрядов сдвигающего регистра формирует набор из n двоичных символов, который изменяется во времени в зависимости от вида функции обратной связи. Фактически функция обратной связи однозначно определяется характером данного изменения. Диаграмма, показывающая возможные взаимные переходы наборов, называется *диаграммой состояний*.

На рис. 2.5 изображена диаграмма состояний для трехразрядного регистра, логическая функция обратной связи которого имеет вид

$X_n = X_{n-2}X_{n-3}$. Если эти состояния рассматривать как двоичные числа, то для сокращения обозначений можно использовать их десятичные (или восьмеричные) эквиваленты. Тогда диаграмма, приведенная на рис. 2.5, преобразуется в диаграмму на рис. 2.6.

Существуют различные виды диаграмм состояний. В случае, когда все 2^n возможных состояний образуют замкнутые циклы, говорят, что данной логике соответствуют *циклы без ветвей*. Например, такая диаграмма состояний изображена на рис. 2.7. Порождающая ее логика имеет вид $X_n = X_{n-3}$. Если от любого из состояний в конечном итоге осуществляется переход к одному и тому же циклу, то диаграмма состояний называется *кустом*. Два крайних случая показаны на рис. 2.8.

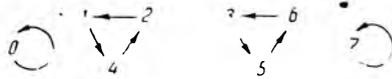


Рис. 2.7. Диаграмма состояний для $X_n = X_{n-3}$

осуществляется переход к одному и тому же циклу, то диаграмма состояний называется *кустом*. Два крайних случая показаны на рис. 2.8. Логика с кустовыми диаграммами состояний очень удобна для генерирования последовательности, соответствующей циклу куста. Поэтому не имеет значения, в каком состоянии находится схема в момент включения. Регистр в конце концов приходит к циклу, формирующему данную последовательность.

Логика с кустовыми диаграммами состояний очень удобна для генерирования последовательности, соответствующей циклу куста. Поэтому не имеет значения, в каком состоянии находится схема в момент включения. Регистр в конце концов приходит к циклу, формирующему данную последовательность.

Логика с кустовыми диаграммами состояний очень удобна для генерирования последовательности, соответствующей циклу куста. Поэтому не имеет значения, в каком состоянии находится схема в момент включения. Регистр в конце концов приходит к циклу, формирующему данную последовательность.

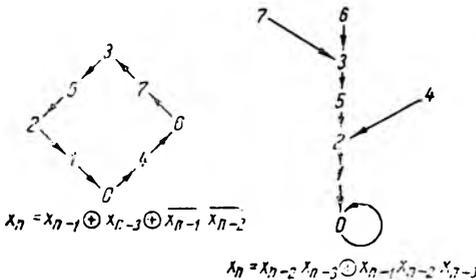


Рис. 2.8. Кусты

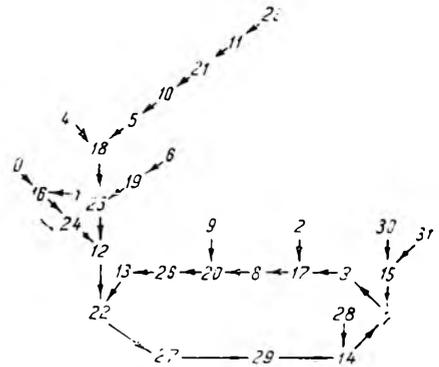


Рис. 2.9. Диаграмма состояний для $X_n = X_{n-4} X_{n-1} + X_{n-5} X_{n-2} + X_{n-5} X_{n-4} X_{n-3}$

Указанное свойство логик с диаграммами состояний кустового типа устраняет необходимость в специальных запускающих устройствах при генерировании последовательностей. Довольно типичный пример кустовой диаграммы состояний для пятиразрядного регистра показан на рис. 2.9.

Следует отметить, что для любой периодической последовательности можно построить кустовую диаграмму состояний. Очевидно, что желаемый вид диаграммы состояний определяется назначением последовательности.

Кроме хороших «стартовых» свойств, регистры с кустовыми диаграммами состояний обладают способностью автоматически возвращаться после случайного сбоя к циклу, формирующему последовательность. Так как возникший сбой трудно зарегистрировать, то во многих случаях такое поведение схемы может оказаться нежелательным.

§ 2.4. Генерирование последовательностей с заданной периодичностью

Для описания процесса генерирования последовательностей с заданной периодичностью необходимо использовать некоторые результаты теории *линейных рекуррентных последовательностей* [1, 7]. В частности, следует отметить, что существуют линейные логические функции, т. е. суммы по модулю 2, позволяющие формировать последовательности с периодом $2^n - 1$ для всех n , которые обладают *аддитивно-циклическим свойством*. Это означает, что при почленном сложении по модулю 2 последовательности со своей циклической перестановкой формируется новая циклическая перестановка той же последовательности. В качестве примера приведем последовательность 1110100 с периодом $2^3 - 1 = 7$:

1110100	1110100	1110100
<u>0111010</u>	<u>0011101</u>	<u>1001110</u>
1001110	1101001	0111010
1110100	1110100	1110100
<u>0100111</u>	<u>1010011</u>	<u>1101001</u>
1010011	0100111	0011101

Указанное свойство будет использовано для доказательства следующей теоремы [2].

♦ **Теорема.** С помощью n -разрядного сдвигающего регистра можно сформировать последовательности любого периода от 1 до 2^n .

Доказательство. Пусть $\{a_k\}$ — линейная рекуррентная последовательность с периодом $2^n - 1$. Такая последовательность содержит все возможные наборы из n символов, за исключением 0...0. Чтобы найти цикл с периодом p для $1 \leq p \leq 2^n - 2$, рассмотрим сумму по модулю 2: $\{a_k\} \oplus \{a_{k+p}\}$ ¹⁾. Вследствие аддитивно-циклического свойства данных последовательностей существует такое целое число M , что $\{a_k\} \oplus \{a_{k+p}\} = \{a_{k+M}\}$, где $\{a_{k+M}\}$ — фазовый сдвиг последовательности $\{a_k\}$. Так как в последовательности $\{a_{k+M}\}$ имеет место любой на-

¹⁾ $\{a_{k+p}\}$ так же, как $\{a_k\}$ есть последовательность, содержащая все возможные наборы из n элементов, но сдвинутая относительно $\{a_k\}$ на p элементов (прим. ред.).

бор из n последовательных элементов, за исключением n нулей, то набор $0\dots 01$ также содержится в этой последовательности (скажем, в промежутке от a_{k_0+m+1} до a_{k_0+m+n}). Это значит, что

$$\begin{aligned} a_{k_0+1} &= a_{k_0+p+1}, \\ a_{k_0+2} &= a_{k_0+p+2}, \\ &\vdots \\ a_{k_0+n-1} &= a_{k_0+p+n-1}, \\ a_{k_0+n} &= a_{k_0+p+n} \oplus 1. \end{aligned}$$

Таким образом, в последовательности $\{a_k\}$ существуют две подпоследовательности из n символов, отстоящие друг от друга на p элементов, в которых совпадают $n-1$ первые элементы и не совпадают лишь n -е элементы. Следовательно, для получения последовательности с периодом p необходимо сформировать логическую функцию (схема «И» со многими входами—детектор комбинации), которая равна 1 только в том случае, если в разрядах x_{n-1}, \dots, x_1 сдвигающего регистра устанавливается состояние $a_{k_0+n-1}, \dots, a_{k_0+1}$. Значения этой функции суммируются по модулю 2 со значениями исходной функции обратной связи. В результате последовательность с периодом 2^n-1 расщепляется на две части с периодами p и 2^n-1-p .

На этом заканчивается доказательство теоремы для значений p , определяемых неравенством $1 \leq p \leq 2^n-2$. Что касается $p=2^n-1$ и 2^n , то период 2^n-1 имеет исходная последовательность, а последовательность с периодом 2^n можно получить, как и в предыдущем случае, включением в обратную связь детектора комбинации $00\dots 0$.

Пусть для примера $p=11$. Так как $2^3=8 < p < 16=2^4$, то n может быть не больше чем 4. Логическая функция обратной связи $X_n = X_{n-3} \oplus X_{n-4}$ обеспечивает формирование периодической последовательности 000100110101111 , число элементов которой равно $15=2^4-1$. Почленное сложение по модулю 2 этой последовательности с последовательностью, циклически сдвинутой на 11 элементов, дает

$$\begin{array}{c} a_{k_0+1} \quad a_{k_0+2} \quad a_{k_0+3} \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ \{a_k\} = 000100110101111 \\ \{a_{k+11}\} = 111100010011010 \\ \hline \{a_{k+M}\} = \{a_k\} \oplus \{a_{k+11}\} = 111000100110101. \end{array}$$

Следовательно, $a_{k_0+1}=1$, $a_{k_0+2}=a_{k_0+3}=0$. Логическая функция, выделяющая данную комбинацию в сдвигающем регистре, имеет вид

$\bar{X}_{n-1}\bar{X}_{n-2}X_{n-3}$. Таким образом, логическая функция обратной связи для формирования последовательности с периодом $p=11$ определяется следующим выражением:

$$X_n = \bar{X}_{n-1}\bar{X}_{n-2}X_{n-3} \oplus X_{n-3} \oplus X_{n-4}.$$

Для получения последовательности с периодом $p=16$ используется детектор комбинации $\bar{X}_{n-1}\bar{X}_{n-2}\bar{X}_{n-3}$ и тогда $X_n = \bar{X}_{n-1}\bar{X}_{n-2}\bar{X}_{n-3} \oplus \oplus X_{n-3} \oplus X_{n-4}$.

Из вышеприведенных теоремы и примера видно, что для достижения желаемого результата достаточно, чтобы ко входам детектора комбинации были подключены выходы $n-1$ разрядов регистра. Однако в большинстве случаев к детектору комбинации подключаются все n разрядов регистра. Последнее делается для того, чтобы диаграмма состояний генератора последовательности с заданным периодом могла быть легко преобразована в куст (в этом случае исключенным из куста оказывается только состояние 00...0, что может быть легко исправлено).

Хотя существует много линейных логических функций, позволяющих получить последовательности длины 2^n-1 , однако для целей генерирования последовательностей с заданным периодом достаточно знать только одну из них для каждого значения n . Такие логические функции для всех значений n от 1 до 20 приведены на рис. 2.10 [3,4].

В приложении 3 приведены логические функции обратной связи и

n	Логическая функция	n	Логическая функция
1	$x_n = x_{n-1}$	11	$x_n = x_{n-9} \oplus x_{n-11}$
2	$x_n = x_{n-1} \oplus x_{n-2}$	12	$x_n = x_{n-2} \oplus x_{n-10} \oplus x_{n-11} \oplus x_{n-12}$
3	$x_n = x_{n-2} \oplus x_{n-3}$	13	$x_n = x_{n-1} \oplus x_{n-11} \oplus x_{n-12} \oplus x_{n-13}$
4	$x_n = x_{n-3} \oplus x_{n-4}$	14	$x_n = x_{n-2} \oplus x_{n-12} \oplus x_{n-13} \oplus x_{n-14}$
5	$x_n = x_{n-3} \oplus x_{n-5}$	15	$x_n = x_{n-14} \oplus x_{n-15}$
6	$x_n = x_{n-5} \oplus x_{n-6}$	16	$x_n = x_{n-11} \oplus x_{n-13} \oplus x_{n-14} \oplus x_{n-16}$
7	$x_n = x_{n-6} \oplus x_{n-7}$	17	$x_n = x_{n-14} \oplus x_{n-17}$
8	$x_n = x_{n-2} \oplus x_{n-3} \oplus x_{n-4} \oplus x_{n-8}$	18	$x_n = x_{n-11} \oplus x_{n-18}$
9	$x_n = x_{n-5} \oplus x_{n-9}$	19	$x_n = x_{n-14} \oplus x_{n-17} \oplus x_{n-18} \oplus x_{n-19}$
10	$x_n = x_{n-7} \oplus x_{n-10}$	20	$x_n = x_{n-17} \oplus x_{n-20}$

Рис. 2.10. Логические функции обратной связи для генерирования последовательностей с периодом 2^n-1

детектируемые комбинации для генерирования последовательностей с периодом p в пределах от 4 до 2047.

Выше было использовано аддитивно-циклическое свойство рекуррентных линейных последовательностей максимальной длины. Для полноты изложения докажем это свойство [1].

◆ **Теорема.** Последовательность $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, состоящая из единиц и нулей, обладает аддитивно-циклическим свойством тогда и только тогда, когда $p=2^n-1$ и последовательность удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$a_k = \sum_{i=1}^n c_i a_{k-i}^1$$

для всех k . Здесь коэффициенты c_i равны 0 или 1, а суммирование производится по модулю 2.

Доказательство. Если $\{a_i\}$ удовлетворяет линейному рекуррентному соотношению порядка n , т. е. если

$$a_k = \sum_{i=1}^n c_i a_{k-i},$$

то значение a_k однозначно определяется значениями $a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_{k-n}$. Так как любая двоичная последовательность длины, большей чем 2^n , должна содержать какой-либо набор из n символов, по крайней мере, дважды, то не существует рекуррентных последовательностей длины, большей чем 2^n , удовлетворяющих рекуррентному соотношению порядка n . Более того, если рекуррентное соотношение линейно, то состояние $00\dots 0$ порождает себя же. Следовательно, рекуррентная последовательность порядка n имеет период $p \leq 2^n - 1$.

Если $p=2^n-1$, то каждый набор из n символов должен содержаться в последовательности. Поскольку любая циклическая перестановка S_n такой последовательности удовлетворяет тому же линейному рекуррентному соотношению, что и исходная последовательность, то вследствие свойства линейности это утверждение справедливо и для суммы $S_i \oplus S_j$. При $S_i \neq S_j$ сумма их по модулю 2 обязательно является некоторой циклической перестановкой S_m .

С другой стороны, допустим, что последовательность нулей и единиц $\{a_i\}$ ($\neq 00\dots 0$) обладает аддитивно-циклическим свойством. Перестановки S_m в совокупности с последовательностью $S_0=00\dots 0$ формирует абелеву группу относительно операции почленного сложения по модулю 2, каждый элемент которой есть его же собственная инверсия. Со-

¹⁾ Так как в данном случае индекс при a должен равняться одному из чисел: 1, 2, ..., p , то при $k-i \leq 0$ его следует заменить на $p+(k-i)$ (прим. ред.).

гласно основной теореме абелевых групп [6] такая группа обязательно должна иметь порядок n , т. е. $p=2^n-1$.

Последовательности S_1, S_2, \dots, S_n линейно независимы, так как в противном случае порядок рекуррентного соотношения должен быть меньше n , что, как было показано выше, невозможно для последовательности длины 2^n-1 . Линейная независимость означает, что для всех 2^n наборов коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_n суммарные последовательности вида $\sum_{i=1}^n c_i S_i$ различны, но вследствие аддитивно-циклического свойства они выбираются из множества S_0, S_1, \dots, S_p .

Таким образом, каждая последовательность указанного множества может быть однозначно представлена в виде $\sum_{i=1}^n c_i S_i$. Так, в частности,

$S_{n+1} = \sum_{i=1}^n c_i S_i$ для некоторого набора коэффициентов c_i и, следовательно, для этого же набора коэффициентов справедливо рекуррентное соотношение

$$a_k = \sum_{i=1}^n c_i a_{k-i}.$$

§ 2.5. Изменение фазы периодических последовательностей

Часто необходимо изменять фазу периодической последовательности «мгновенно». В общем случае это может сопровождаться возникновением переходной последовательности, отличающейся как от исходной последовательности, так и от ее циклической перестановки с желаемым фазовым сдвигом. Поскольку переходная последовательность существует не дольше одного периода, то она не оказывает заметного влияния на функционирование быстродействующей системы, в которой усреднение ведется в течение многих периодов последовательности.

Если последовательность формируется с помощью сдвигающего регистра, то изменение ее фазы предполагает изменение логической функции обратной связи. Для определения новой логической функции можно воспользоваться диаграммой состояний. Рассмотрим последовательность 01110001011, которой соответствует логическая функция обратной связи $X_n = \bar{X}_{n-4} \bar{X}_{n-1} + \bar{X}_{n-5} \bar{X}_{n-2} + X_{n-5} X_{n-4} \bar{X}_{n-3}$.

Диаграмма состояний для этого случая показана на рис. 2.9. Посмотрим, что произойдет, если к схеме обратной связи через сумматор по модулю 2 подключить детектор комбинации $\bar{X}_{n-5} X_{n-4} X_{n-3} X_{n-2} \bar{X}_{n-1}$,

включающийся после первого срабатывания. На выходе генератора будет наблюдаться следующая картина:

Включение детектора	Детектор сработал
01110001011 <i>P</i>	01110001011 <i>2P</i>
01110101001 <i>3P</i>	10111000101 <i>4P</i>
10111000101 <i>5P</i>	

Таким образом, первый и второй периоды совпадают с исходной последовательностью, третий период является переходной последовательностью, о которой говорилось выше, а четвертый и пятый — фазовым сдвигом (на 1 элемент вправо) исходной последовательности. Если аналогичным образом использовать детектор комбинации $\overline{X_{n-1}}\overline{X_{n-2}}\overline{X_{n-3}}X_{n-4}X_{n-5}$ (что соответствует десятичному числу 3), то последовательность сместится в другом направлении:

Включение детектора	Детектор сработал
01110001011 <i>P</i>	01110001011 <i>2P</i>
01110000110 <i>3P</i>	11100010110 <i>4P</i>
	11100010110 <i>5P</i>

Здесь снова четвертый и пятый периоды представляют собой сдвинутую по фазе исходную последовательность.

Если рассмотреть диаграмму состояний на рис. 2.9, то видно, что вследствие включения детектора комбинации в первом случае вместо перехода 14→7 осуществляется переход 14→23. В результате для достижения состояния 22 требуется на один переход больше, чем раньше. Аналогично осуществление перехода 3→17 вместо перехода 3→1 позволяет регистру достигнуть состояния 22 на один переход раньше. Именно благодаря этому происходит сдвиг фазы исходной последовательности.

Для генерирования последовательности с любой фазой достаточно знать способ сдвига фазы на j элементов, где j — любое целое число, взаимно простое с периодом последовательности. В вышеприведенном примере можно было использовать также детекторы комбинаций 20 и 26. В результате последовательность сдвинулась бы на 3 элемента в ту или другую сторону вместо одного, как это было раньше.

В рассмотренном примере использовался регистр с внутренней логикой. Сдвиг фазы последовательностей, генерируемых регистрами с внешней логикой, может производиться точно таким же образом. Для определения детектируемой комбинации в данном случае используется диаграмма состояний, описывающая работу регистра с внутренней логикой. При этом вместе с изменением фазы последовательности, формируемой регистром, автоматически изменяется фаза последовательности на выходе регистра с внешней логикой.

§ 2.6. Минимизация логических функций

Каждой логической функции f соответствует таблица истинности, определяющая ее значение при любых наборах входных переменных. В качестве примера на рис. 2.11 приведена таблица истинности для логической функции $f(x, y) = xy + \bar{x}\bar{y}$. Заметим, что эта функция может быть представлена в виде более простого выражения $f(x, y) = \bar{x} \oplus \bar{y}$ ¹⁾.

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Рис. 2.11. Таблица истинности для $f(x, y) = \bar{x}\bar{y} + x\bar{y}$

Задача минимизации логической функции заключается в нахождении для нее «простейшего» логического выражения. Хотя алгоритмы определения такого «простейшего» выражения для заданной функции f известны [5], однако, когда число переменных превышает 10, выполнение всех преобразований занимает слишком много времени, даже если для указанной цели используются быстродействующие вычислительные машины. Это обусловлено тем, что из-за отсутствия критериев минимальности преобразованной функции для сравнения приходится рассматривать несколько возможных вариантов минимизации. При большом числе переменных количество этих вариантов очень велико.

До сих пор слово «простейшее» писалось в кавычках. Однако понятие «простейшее» логическое выражение является весьма относительным и зависит от применяемой системы элементов. Большинство алгоритмов не учитывает этого вообще и состоит в нахождении простейшего представления функции в конъюнктивно-дизъюнктивной форме. Следовательно, окончательное выражение должно иметь вид $xyz + \bar{w}xy + \bar{w}y$ (логическая сумма логических произведений нескольких переменных²⁾).

Пример, приведенный в § 2.2, показывает, что при построении генераторов на сдвигающих регистрах основная задача заключается в ми-

¹⁾ Действительно, $f(x, y) = \bar{x}\bar{y} + x\bar{y} = (\bar{x} + x)\bar{y} = \bar{y}$, так как $x + \bar{x} = 1$ (прим. ред.).

²⁾ В отечественной литературе представление логической функции в таком виде часто называется приведением функции к выражению вида И—ИЛИ (прим. ред.).

минимизации частично определенной логической функции. В принципе решение ее может быть получено минимизацией *всех возможных* вариантов доопределения таблицы истинности и выбором из полученных результатов минимального выражения. Но существуют и более простые способы. Тем не менее минимизация частично определенной функции значительно сложнее минимизации полностью определенной функции.

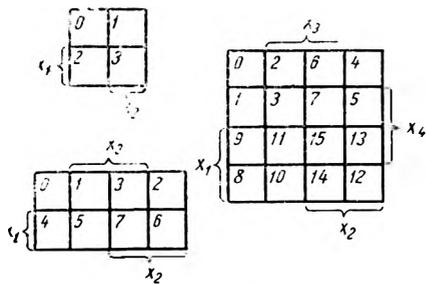


Рис. 2.12. Карты Карно

Как говорилось выше, существует много алгоритмов для минимизации логических функций. Многие из них могут быть использованы для минимизации частично определенных функций. Решение задачи с числом переменных не более пяти обычно производится вручную. Для количества переменных в пределах от 4 до 8 большинство алгоритмов с точки зрения их выполнения на быстродействующих

вычислительных машинах равноценны. Однако при минимизации функции девяти или более переменных, определенной для малого числа наборов, алгоритмы надо выбирать очень тщательно, так как выполнение большинства из них требует многих часов машинного времени.

Для нахождения абсолютно минимального выражения иногда требуются огромные объемы вычислений. Поэтому во многих случаях рациональнее использовать не абсолютно минимальные, но достаточно простые логические выражения, которые могут быть получены значительно легче. Для примера, приведенного на рис. 2.4, приемлемым решением является функция вида $f(X_{n-1}X_{n-3}X_{n-2}X_{n-1}) = \bar{X}_{n-4}X_{n-3} + X_{n-4}X_{n-3}X_{n-2}$. Она получена в результате доопределения таблицы истинности следующим образом: $f(0000) = f(0001) = f(0010) = f(1000) = 0$ и $f(0100) = 1$.

При минимизации логических функций вручную наиболее часто используют карты Карно, которые являются сверткой таблицы истинности. Карта Карно позволяет легко определить те члены логического выражения, которые необходимо объединить при минимизации.

На рис. 2.12 приведены карты Карно для двух, трех и четырех переменных. В углах клеток записаны номера наборов аргументов, рассматриваемые как двончные числа. Так, например, если слева от таблицы истинности (рис. 2.13) записать номера наборов аргументов, то ей будет соответствовать карта Карно на рис. 2.14¹⁾. Объединяя наборы

¹⁾ Аргументы X_1, X_2, X_3 на карте Карно показывают, в каких наборах они принимают значение 1. Так, $X_1=1$ в наборах 4, 5, 6, 7; $X_2=1$ в наборах 2, 3, 6, 7 и $X_3=1$ в наборах 1, 3, 5, 7 (прим. ред.).

0 и 4, 4 и 5, 3 и 2, получим три члена $\bar{X}_2\bar{X}_3$, $X_1\bar{X}_2$, \bar{X}_1X_2 , охватывающие все значения функции, равные единице ¹⁾. Окончательное логическое выражение искомой функции для этой таблицы истинности имеет вид: $f(X_1X_2X_3) = \bar{X}_2\bar{X}_3 + X_1\bar{X}_2 + \bar{X}_1X_2$.

	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Рис. 2.13. Таблица истинности

Функция, которая определена лишь частично, например, не определено ее значение при $X_1=X_2=0$, $X_3=1$, соответствует карте Карно, приведенной на рис. 2.15. Здесь возможны два варианта. Первый из них был рассмотрен выше. Второму соответствует $f(001)=1$. Рассмотрение карты Карно ясно показывает, что во втором случае минимальное выражение проще, чем в первом: $f(X_1X_2X_3) = \bar{X}_1 + \bar{X}_2$.

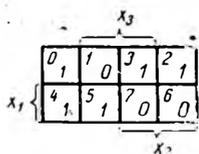


Рис. 2.14. Карта Карно

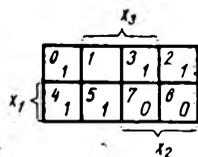


Рис. 2.15. Карта Карно

Таким образом, минимизация с помощью карт Карно заключается в группировке блоков единиц и в представлении каждого такого блока в виде одного члена. Однако для более сложных карт Карно, особенно в случае частично определенной функции, когда возможно неодно-

¹⁾ Так как искомая логическая функция принимает значение 1 только в наборах 0, 2, 3, 4, 5, то ее можно определить путем объединения трех пар наборов. Первый член искомой функции для наборов 0 и 4 находим из выражения $\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3 + X_1\bar{X}_2\bar{X}_3 = (\bar{X}_1 + X_1)\bar{X}_2\bar{X}_3 = \bar{X}_2\bar{X}_3$, второй член для наборов 4 и 5 — из выражения $X_1\bar{X}_2\bar{X}_3 + X_1\bar{X}_2X_3 = X_1\bar{X}_2$ и третий член для наборов 2 и 3 — из выражения $\bar{X}_1X_2\bar{X}_3 + \bar{X}_1X_2X_3 = \bar{X}_1X_2$ (прим. ред.).

значное заполнение пустых клеток, возникает проблема выбора блоков при минимизации. Тем не менее и здесь в основе процесса минимизации лежит рассмотренный выше метод.

§ 2.7. Дополнительные замечания

В § 2.2 при определении внутренней и внешней логики для формирования последовательности 01011100010 длина регистра выбиралась наименьшей, что совсем не обязательно, а иногда и нецелесообразно. В общем случае, если задана некоторая последовательность, то внутренняя логика для ее формирования тем проще, чем длиннее регистр, и совершенно вырождается, когда длина регистра равна периоду последовательности. В генераторах с внешней логикой иногда для получения внутренней последовательности с заданным периодом экономичнее использовать регистр, состоящий из $n+1$ разряда, а не из n . В частности, при $n=8$, как видно из таблицы на рис. 2.10, рекуррентное соотношение состоит из четырех членов. В то же время, если число разрядов регистра $n+1=9$, то число членов рекуррентного соотношения равно двум.

При формировании нескольких последовательностей одного и того же периода с учетом возможности одновременного сдвига их фазы в обоих направлениях более целесообразно применять схемы с внешней логикой, так как при этом может быть использована одна и та же внутренняя последовательность. Поскольку сдвиг фазы внешней последовательности осуществляется проще всего с помощью воздействия на внутреннюю логику, то для одновременного сдвига всех внешних последовательностей, формируемых из одной и той же внутренней последовательности, достаточно использовать один и тот же набор детекторов комбинаций.

Минимизация логической функции обратной связи генератора с внутренней логикой не ограничивается определением минимального выражения функции для данной последовательности. Вполне возможно, что для формирования инверсной последовательности требуется более простая логика, и поэтому удобнее формировать именно последнюю, а затем использовать ее инверсию. При построении генераторов с внешней логикой имеется еще большая свобода действий. Существует много последовательностей длины 2^n-1 , которые могут применяться для формирования последовательности с требуемым периодом. Кроме того, можно выбирать направление сдвига регистра и снимать с него либо прямую последовательность, либо ее инверсию. Более того, при построении схемы с внешней логикой можно использовать различные фазовые сдвиги внутренней последовательности.

Литература

1. Golomb S. W., Sequences with Randomness Properties, Terminal Progress Report under Contract Req. No 639498. Baltimore, Md.: Glenn L. Martin Co., June 1955.
2. Golomb S. W., L. R. Welch, and R. M. Goldstein, Cycles from Nonlinear Shift Registers, Progress Report No 20-389, Pasadena, California: Jet Propulsion Laboratory.
3. Golomb S. W., L. R. Welch and A. Hales, On The Factorization of Trinomials Over $GF/2/$, Memo, No. 20—189, Pasadena, California: Jet Propulsion Laboratory.
4. Marsh R. W., Table of Irreducible Polynomials Over $GF /2/$ Through Degree 19, distributed by Office of Technical Services, Commerce Dept., Washington, D. C., October 24, 1957.
5. Phister M., Jr., Logical Design of Digital Computers, New York: John Wiley & Sons, 1958.
Фистер М. Логическое проектирование цифровых вычислительных машин. Изд-во «Техника». Киев, 1964.
6. Van der Waerden B. L., Modern Algebra, New York: Frederick Ungar Publishing Co., Inc., 1949.
Ван дер Варден. Современная алгебра. ГИТТЛ, 1957.
7. Zierler N., Linear Recurring Sequences, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 7 (1959), 31.
Цирлер Н. Линейные возвратные последовательности. «Кибернетический сборник», вып. 6. ИИЛ, 1963.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СПЕКТРЫ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

§ 3.1. Введение

На протяжении всей книги широко применяется понятие частотного энергетического спектра, поэтому отдельная глава посвящается краткому изложению содержания этого понятия и его основных свойств.

Частотный спектр является одной из важнейших характеристик электромагнитного сигнала, пользуясь которой, можно довольно просто проанализировать два вида преобразования сигнала: линейную фильтрацию и смешивание.

Процесс линейной фильтрации целиком характеризуется простым соотношением, заключающимся в том, что спектр сигнала на выходе линейного фильтра равняется спектру сигнала на входе, умноженному на квадрат модуля его передаточной функции. Однако частотный метод не позволяет полностью описать процесс смешивания.

Необходимо помнить, что энергетический частотный спектр является преобразованием Фурье некоторой средней характеристики сигнала, называемой *автокорреляционной функцией*. Поэтому он содержит лишь ограниченное количество информации о данном сигнале, и, следовательно, различные сигналы могут иметь один и тот же энергетический спектр. Эти предварительные замечания будут теоретически доказаны и подробно рассмотрены в следующих параграфах.

§ 3.2. Периодические сигналы

Своим существованием теория современного спектрального анализа во многом обязана работе Винера «Обобщенный гармонический анализ» [4]. Для технических приложений она была упрощена и переработана в трудах Ли [2], Давенпорта и Рута [1], а также ряда других авторов. Ниже кратко излагаются основные положения этой теории.

Первоначально метод спектрального анализа использовался для исследования периодических сигналов. Хорошо известно, что при определенных слабых математических ограничениях, обычно выполняемых для физически реализуемых сигналов, периодическая функция вещественной переменной может быть представлена рядом Фурье:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T}, \quad (3.1)$$

где T есть период сигнала, а коэффициенты a_n и b_n определяются следующими выражениями:

$$a_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt; \quad b_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \sin \frac{2\pi nt}{T} dt.$$

Отсюда интуитивно следует, что мощность периодического сигнала сосредоточена только на частотах n/T , $2n/T$, где n — любое целое число. Амплитуда синусоидальной составляющей с частотой n/T равняется $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Таким образом, мощность этой гармоники составляет $(a_n^2 + b_n^2)/2$. Чтобы энергетический спектр выразить непосредственно как функцию частоты, удобно воспользоваться дельта-функцией Дирака $\delta(\omega - \omega_0)$, которая обладает следующими формальными свойствами:

$$\begin{aligned} \delta(\omega - \omega_0) &= 0 \text{ для } \omega \neq \omega_0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) f(\omega) d\omega &= f(\omega_0). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Тогда энергетический спектр может быть представлен в виде

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right). \quad (3.3)$$

Автокорреляционная функция периодического процесса определяется выражением

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t + \tau) dt. \quad (3.4)$$

Для вычисления $R(\tau)$ необходимо заданную функцию $f(t)$ умножить на свою копию, сдвинутую по оси времени, и полученный результат проинтегрировать за один период. Используя представление функции с помощью ряда Фурье (3.1), получим, что автокорреляционная функция периодического процесса $f(t)$ равна

$$\begin{aligned}
 R(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right] \times \\
 &\quad \times \left[a_m \cos \frac{2\pi m (t + \tau)}{T} + b_m \sin \frac{2\pi m (t + \tau)}{T} \right] dt = \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{a_n a_m}{2} \left[\cos \frac{2\pi [(m-n)t + m\tau]}{T} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \cos \frac{2\pi [(n+m)t + m\tau]}{T} \right] + \frac{a_n b_m}{2} \left[\sin \frac{2\pi [(m-n)t + m\tau]}{T} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sin \frac{2\pi [(n+m)t + m\tau]}{T} \right] + \frac{b_n a_m}{2} \left[\sin \frac{2\pi [(n-m)t - m\tau]}{T} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sin \frac{2\pi [(n+m)t + m\tau]}{T} \right] + \frac{b_n b_m}{2} \left[\cos \frac{2\pi [(m-n)t + m\tau]}{T} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \cos \frac{2\pi [(m+n)t + m\tau]}{T} \right] \right\} dt.
 \end{aligned}$$

Большинство из этих интегралов обращается в нуль. Окончательно имеем:

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} \cos \frac{2\pi n \tau}{T} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} \cos \frac{2\pi n \tau}{T}. \quad (3.5)$$

Преобразование Фурье для косинусоиды имеет следующий вид:

$$F(\cos \omega_0 t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 t e^{-i\omega t} dt = \delta(\omega - \omega_0). \quad (3.6)$$

Таким образом, из равенств (3.3), (3.5) и (3.6) легко видеть, что для периодической функции

$$\left. \begin{aligned}
 S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \\
 R(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega
 \end{aligned} \right\} \text{и, наоборот,} \quad (3.7)$$

Другими словами, энергетический спектр и автокорреляционная функция образуют пару преобразований Фурье.

Соотношения (3.7) называются уравнениями Винера—Хинчина. Из второго уравнения непосредственно вытекает хорошо известная теорема Парсевала. Полагая $\tau=0$, имеем:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (3.8)$$

Это соотношение согласуется с физическими представлениями, поскольку оно утверждает, что мощность периодического сигнала может быть получена либо усреднением за период квадрата функции сигнала, либо интегрированием его энергетического спектра. В дальнейшем будет показано, что тот же результат справедлив и для случайных процессов.

§ 3.3. Основные свойства автокорреляционных функций

Из предыдущего ясно, что любой периодический сигнал можно характеризовать с помощью энергетического спектра. Однако было показано, что столь же равноценной характеристикой сигнала является и его автокорреляционная функция. Она содержит в сигнале такое же количество информации, что и энергетический спектр. В действительности, при рассмотрении сигналов более общего вида, непериодических и случайных, величина, описываемая равенством (3.4), имеет физический смысл и может быть измерена для любого физически реализуемого сигнала, тогда как задача нахождения энергетического спектра не совсем ясна. По этой причине было бы полезно рассмотреть более общее определение автокорреляционной функции, справедливое как для периодических, так и непериодических и случайных сигналов, и сформулировать некоторые ее свойства.

Очевидно, в общем виде равенство (3.4) можно записать так:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t + \tau) dt. \quad (3.9)$$

Здесь усреднение осуществляется не за один период, а за бесконечно большое время. Отсюда сразу же вытекают два основных свойства автокорреляционной функции. Во-первых, $R(\tau)$ есть симметричная функция. Это легко видеть, если произвести замену переменных: $t' = t + \tau$. Тогда

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t' - \tau) f(t') dt' = R(-\tau). \quad (3.10)$$

Во-вторых, при $\tau=0$ корреляционная функция всегда имеет пик. Для доказательства последнего рассмотрим интеграл:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t) \pm f(t + \tau)]^2 dt > 0.$$

Приведенное неравенство справедливо, поскольку квадрат любого действительного числа есть всегда число положительное. Раскрывая скобки в подынтегральном выражении и учитывая равенство (3.9), получим

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f^2(t) + f^2(t + \tau) \pm 2f(t)f(t + \tau)] dt = 2[R(0) \pm R(\tau)] \geq 0.$$

Отсюда следует, что для всех τ

$$R(0) \geq |R(\tau)|. \quad (3.11)$$

Оба эти свойства выполняются для всех видов сигналов, для которых существует автокорреляционная функция, определяемая равенством (3.9).

§ 3.4. Случайные сигналы

Многие сигналы, представляющие интерес для современной радиосвязи, можно описать только статистически. Хорошо известно, что значительная часть помех носит случайный характер. Самым распространенным видом шума является тепловой шум, который имеет нормальное, или гауссовское, распределение вероятностей. Однако даже передаваемые (полезные) сигналы являются в некотором смысле случайными.

Рассмотрим, например, синусоидальное колебание, промодулированное по фазе двоичной последовательностью: при появлении «1» фаза синусоиды равняется $+\pi/2$, при появлении «0» фаза принимает значение $-\pi/2$. Несмотря на то, что некоторые параметры сигнала являются детерминированными (в частности, частота синусоидального колебания и длительность двоичного символа в модулирующей последовательности), случайный характер появления единиц и нулей делает сигнал в целом недетерминированным.

Отметив важность случайных сигналов, рассмотрим теперь некоторые их свойства. Единственной исчерпывающей характеристикой случайных сигналов является функция распределения. Для сигнала $x(t)$ функция распределения есть $P(x_t \leq X_t)$ ¹⁾, т. е. вероятность того, что

¹⁾ В советской технической литературе случайная величина обозначается большой буквой X , а текущее значение переменной функции распределения — малой буквой x (прим. ред.).

сигнал x в момент времени t меньше или равен действительному числу X_t . Если функция $P(x_t \leq X_t)$ дифференцируема, то можно ввести понятие плотности распределения

$$p(X_t) = \frac{\partial P(x_t \leq X_t)}{\partial x_t} . \quad (3.12)$$

Плотность распределения $p(X_t)$ определяется отношением вероятности попадания x в момент времени t на участок от X_t до $X_t + dX_t$ к бесконечно малому приращению амплитуды dX_t .

Важным подклассом случайных сигналов являются стационарные случайные сигналы. Случайный сигнал называют *стационарным*, если его функция распределения или плотность распределения не зависит

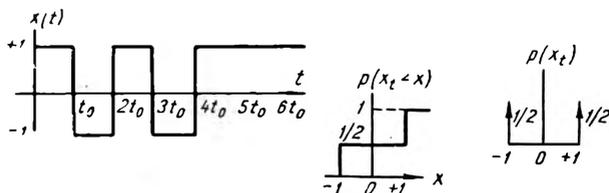


Рис. 3.1. Стационарная случайная двоичная последовательность, ее функция распределения и плотность распределения

от времени. В этом случае можно опустить индекс t в выражениях для $P(x_t \leq X_t)$ и $p(X_t)$.

Для сигнала, амплитуда которого принимает конечное множество значений (например, двоичный сигнал, равный либо $+1$, либо -1), функция распределения имеет ступенчатый вид. Понятно, что такая функция недифференцируема. Чтобы определить плотность распределения в данном случае, можно воспользоваться дельта-функцией Дирака, что вполне согласуется с физическими представлениями. (Дельта-функция есть производная от ступенчатой функции в классе функций Хевисайда.) Функция распределения и плотность распределения для стационарной случайной двоичной последовательности, которая состоит из элементов $+1$ и -1 , появляющихся с равной вероятностью, представлены на рис. 3.1.

Одним из наиболее важных видов распределения вероятностей является нормальное, или гауссовское, распределение. В этом случае функция распределения имеет производные всех порядков, и вместо нее гораздо чаще используется плотность распределения. Последняя определяется выражением

$$p(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}} . \quad (3.13)$$

Смысл величин m и σ , являющихся важными параметрами закона распределения, будет пояснен ниже. Знание плотности распределения случайного сигнала позволяет вычислить некоторые основные его параметры и, прежде всего, среднее значение сигнала, которое характеризуется следующей зависимостью:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx. \quad (3.14)$$

Разумеется, если сигнал нестационарный, среднее значение соответствует тому моменту времени, для которого была получена плотность распределения $p(X_t)$. С другой стороны, совершенно ясно, что среднее значение сигнала можно найти, усредняя его за бесконечно большое время:

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt. \quad (3.15)$$

Возникает вопрос: являются ли равенства (3.14) и (3.15) эквивалентными в случае стационарных сигналов? *Эргодическая гипотеза* [1, 2] с вероятностью, равной единице, утверждает, что для стационарных сигналов это именно так. Для нестационарных сигналов выражение (3.14) дает математическое ожидание сигнала только для данного момента времени и, следовательно, не является средним значением сигнала по времени.

Эргодическую гипотезу можно сформулировать и иначе: среднее значение стационарного сигнала можно определить либо усреднением по времени сигнала с выхода одного генератора, либо измерением в фиксированный момент времени значений сигналов на выходах бесконечно большого числа генераторов с одинаковыми статистическими свойствами и нахождением среднего арифметического этих значений. Полученная во втором случае величина называется *средним по ансамблю*¹⁾.

Другая важная характеристика случайного сигнала — его полная мощность, или дисперсия, которая также является средней величиной и определяется выражением:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx. \quad (3.16)$$

¹⁾ Под ансамблем в теории вероятности понимается совокупность событий вместе с их априорными вероятностями появления (прим. ред.).

Если сигнал стационарный, то согласно эргодической гипотезе дисперсия может быть найдена и как среднее по времени:

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - m_x]^2 dt. \quad (3.17)$$

Для гауссовского закона распределения (3.13) из равенств (3.14) и (3.16) следует, что величины m и σ являются средним значением сигнала и его дисперсией.

Хотя плотность распределения значения стационарного сигнала определенным образом характеризует этот сигнал, она не позволяет вычислить его автокорреляционную функцию. Гораздо больше информации о сигнале содержится в n -мерной плотности распределения, которая обозначается $p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})$ и выражает вероятность того, что значение сигнала в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n находится в интервалах между X_{t_1} и $X_{t_1} + dX_{t_1}$, X_{t_2} и $X_{t_2} + dX_{t_2}, \dots, X_{t_n}$ и $X_{t_n} + dX_{t_n}$.

Многомерная плотность распределения в равной степени применима для описания как стационарных, так и нестационарных сигналов. Однако в первом случае точные моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n не имеют существенного значения; необходимо задать лишь их разности: $t_2 - t_1, t_3 - t_2, \dots, t_n - t_{n-1}$.

Большую роль играет двумерная плотность распределения $p(x_{t_1}, x_{t_2})$. Для стационарных сигналов она обозначается $p(x_1, x_2; \tau)$, где $\tau = t_2 - t_1$, $x_2 \equiv x_1$, $x_{t_1} \equiv x_2$. Пользуясь этой плотностью распределения, автокорреляционную функцию стационарного случайного сигнала можно определить по следующей формуле:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2, \quad (3.18)$$

где x_1 и x_2 — любые два значения сигнала, отстоящие друг от друга на промежуток времени τ [т. е. $x_1 = x(t)$, $x_2 = x(t + \tau)$].

Эргодическая гипотеза утверждает, что для стационарных сигналов средние по ансамблю равны средним по времени. Следовательно, выражение (3.18), как среднее по ансамблю, эквивалентно приводимому ниже выражению для $R(\tau)$, как среднему по времени:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t + \tau) dt. \quad (3.19)$$

Это выражение совпадает с равенством (3.9). Таким образом, видно, что для класса стационарных случайных сигналов, представляющих наибольший интерес, автокорреляционную функцию можно вычислить двумя способами. Для экспериментальных исследований более удобно

пользоваться средними по времени, в то время как при теоретическом рассмотрении чаще применяются средние по ансамблю.

В § 3.2 было получено выражение для энергетического спектра периодического сигнала через коэффициенты Фурье. Затем было введено понятие автокорреляционной функции и показано, что она определяется посредством обратного преобразования Фурье энергетического спектра. Однако для случайных сигналов более важной характеристикой оказывается автокорреляционная функция, которую легче измерить, чем энергетический спектр. По существу, энергетический спектр определяется как преобразование Фурье автокорреляционной функции

$$\left. \begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ R(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \end{aligned} \right\} \text{ и, наоборот,} \quad (3.20)$$

Для выяснения физического смысла этих определений положим во втором уравнении $\tau \rightarrow 0$. Тогда

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (3.21)$$

Из этого равенства следует, что мощность сигнала можно вычислить либо как среднее по времени, либо путем интегрирования энергетического спектра.

Равенство (3.21) представляет собой теорему Парсеваля для случайных сигналов. В следующих параграфах будет рассмотрено влияние линейной фильтрации на автокорреляционные функции и энергетический спектры, а также определены спектры типичных случайных сигналов.

§ 3.5. Линейная фильтрация случайных сигналов

Как уже указывалось, для оценки влияния линейной фильтрации на заданный сигнал важно знать его энергетический спектр. Оценим процесс линейной фильтрации количественно. Для этой цели удобнее пользоваться не энергетическим спектром, а автокорреляционной функцией сигнала. Хорошо известно, что если произвольный сигнал $x(t)$ проходит

через линейный фильтр с импульсной характеристикой $h(\mu)$, то сигнал на выходе фильтра $y(t)$ определяется выражением

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \nu) h(\mu) d\nu. \quad (3.22)$$

Для физически реализуемого линейного фильтра $h(\mu) = 0$ для всех $\mu < 0$.

Предположим, что процесс $x(t)$ стационарный. Тогда автокорреляционная функция выходного сигнала фильтра как среднее по времени равна

$$R_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \nu) h(\mu) d\mu \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau - \sigma) h(\sigma) d\sigma \right] dt. \quad (3.23)$$

Предположим также, что подынтегральное выражение непрерывно относительно t , μ и σ одновременно. Это позволяет изменить порядок интегрирования:

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\mu) h(\sigma) \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t - \nu) x(t + \tau - \sigma) dt \right] d\nu d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\mu) h(\sigma) R_x(\tau - \sigma + \nu) d\nu d\sigma. \quad (3.24)$$

Выражение (3.24) характеризует влияние линейной фильтрации на автокорреляционную функцию.

Рассмотрим теперь, как при этом изменяется энергетический спектр сигнала. Передаточная функция линейного фильтра является преобразованием Фурье его импульсной характеристики $h(\mu)$ и может быть записана в виде

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\mu) e^{-i\omega\mu} d\mu. \quad (3.25)$$

Энергетический спектр выходного сигнала

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) h(\sigma) R_x(\tau - \sigma + \nu) d\nu d\sigma \right] e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Предположим, как и ранее, что подынтегральная функция непрерывна относительно τ , μ и σ . Тогда можно изменить порядок интегри-

рования и ввести замену переменной $\tau' = \tau - \sigma + \nu$. В результате получим:

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) e^{i\omega\nu} h(\sigma) e^{-i\omega\sigma} R_x(\tau - \sigma + \nu) e^{-i\omega(\tau - \sigma + \nu)} d\nu d\sigma d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) e^{i\omega\nu} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) e^{-i\omega\sigma} d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau') e^{-i\omega\tau'} d\tau' = \\ &= H(-\omega) H(\omega) S_x(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Таким образом, линейная фильтрация соответствует умножению энергетического спектра сигнала на квадрат абсолютного значения передаточной функции фильтра. Это согласуется с интуитивным представлением о том, что для неискаженной передачи произвольного сигнала с широким спектром необходимо использовать широкополосный фильтр.

§ 3.6. Примеры определения автокорреляционных функций и энергетических спектров случайных сигналов

В этом параграфе рассматриваются типичные случайные сигналы, использующиеся в последующих главах, и вычисляются их автокорреляционные функции и спектры. Одним из таких сигналов является двоичный сигнал, представленный на рис. 3.1. Как было отмечено в § 3.4, функция распределения или плотность распределения оказывается недостаточной для определения автокорреляционной функции. Двумерная плотность распределения достаточна, но не необходима. Для данного конкретного сигнала можно положить, что длительность двоичного символа равна t_0 секундам и что следующие друг за другом двоичные символы независимы и могут с равной вероятностью принимать значения $+1$ или -1 . В этом случае $R(\tau)$ легко вычисляется по ф-ле (3.19).

Пусть двоичный сигнал $x(t)$ смещен по оси времени на τ секунд. Если $\tau < t_0$, то в течение $[(t_0 - \tau)/t_0]$ -й части времени интегрирования сигнал и его смещенная во времени копия будут иметь одинаковые знаки. В остальное время они с вероятностью $\frac{1}{2}$ будут иметь одинаковые знаки и с вероятностью $\frac{1}{2}$ — различные. В результате усреднения по ф-ле (3.19) получим

$$R(\tau) = \frac{t_0 - \tau}{t_0} = 1 - \frac{\tau}{t_0}$$

при $\tau < t_0$. Вследствие симметрии $R(\tau)$ [равенство (3.10)] этот результат можно распространить на отрицательные значения τ :

$$R(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{t_0} \text{ при } |\tau| \leq t_0. \quad (3.27)$$

Для $|\tau| > t_0$ сигнал и его смещенная во времени копия будут с равной вероятностью иметь одинаковые или различные знаки. Следовательно,

$$R(\tau) = 0 \text{ при } |\tau| \geq t_0. \quad (3.27')$$

Автокорреляционная функция для рассматриваемого случайного сигнала показана на рис. 3.2. Теперь определим его энергетический спектр. Поскольку он находится посредством преобразования Фурье автокорреляционной функции $R(\tau)$, то

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-t_0}^{t_0} \left(1 - \frac{|\tau|}{t_0}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= 2 \int_0^{t_0} \left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right) \cos \omega\tau d\tau = \frac{2}{t_0} \left(\frac{1 - \cos \omega t_0}{\omega^2}\right) = \\ &= \frac{\left(\sin \frac{\omega t_0}{2}\right)^2}{t_0 \left(\frac{\omega}{2}\right)^2} = t_0 \left(\frac{\sin \frac{\omega t_0}{2}}{\frac{\omega t_0}{2}}\right)^2. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Кривая $S(\omega)$ также показана на рис. 3.2. Как видно, энергетический спектр имеет нули на частотах, кратных $1/t_0$ герц. Автокорреляционная функция подобного вида называется *двухзначной функцией корреляции*. Если бы вероятности появления элементов $+1$ и -1 отличались друг от друга, то сигнал все таки имел бы двухзначную функцию корреляции, однако ее нижнее значение не равнялось бы нулю. Из рис. 3.2 также ясно, что ширина пика автокорреляционной функции и ширина главного

пика автокорреляционной функции и ширина главного

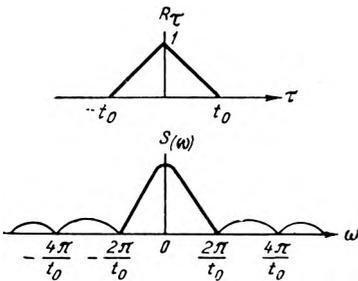


Рис. 3.2. Автокорреляционная функция и спектральная плотность последовательности $x(t)$, изображенной на рис. 3.1

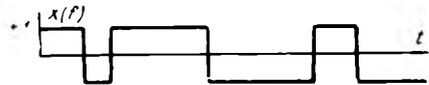


Рис. 3.3. Двоичный сигнал со случайными моментами времени изменения полярности

лепестка энергетического спектра обратно пропорциональны друг другу. Эта зависимость, иногда не в таком явном виде, характерна для для всех сигналов и следует из существования автокорреляционных функций и спектров.

Теперь рассмотрим «более случайный» двоичный сигнал. Такой сигнал, у которого изменение полярности происходит не в дискретные моменты времени, а произвольно, показан на рис. 3.3. Статистика моментов времени изменения полярности сигнала (пересечений нулевой оси) характеризуется вероятностью k пересечений нуля за время t . Как правило, пересечения нулевой оси распределяются по закону Пуассона:

$$p(k, t) = \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{t_0}\right)^k e^{-t/t_0}, \quad (3.29)$$

где $p(k, t)$ — вероятность k пересечений за время t ; t_0 — среднее время между пересечениями нуля. Ясно, что такой случайный сигнал является стационарным. Его автокорреляционную функцию можно найти как среднее по ансамблю. Поскольку сигнал двоичный, то x_1 и x_2 могут принимать только значения $+1$ и -1 . Следовательно, равенство (3.18) сводится в этом случае к выражению

$$\begin{aligned} R(\tau) = & (1)(1)P(x_1 = 1, x_2 = 1) + (1)(-1)P(x_1 = 1, x_2 = -1) + \\ & + (-1)(1)P(x_1 = -1, x_2 = 1) + (-1)(-1)P(x_1 = -1, x_2 = -1). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Величины x_1 и x_2 будут иметь одинаковые знаки только в том случае, если за промежуток времени, равный τ секунд, на который они отстоят друг от друга, произойдет четное число пересечений нулевой оси. Если за это время число пересечений нуля будет нечетным, то x_1 и x_2 имеют различные знаки. Следовательно,

$$\begin{aligned} R(\tau) = & P(x_1 x_2 > 0) - P(x_1 x_2 < 0) = P(\text{четное число пересечений нулевой} \\ & \text{оси за } \tau) - P(\text{нечетное число пересечений нулевой оси за } \tau) = \sum_{k \text{ четн.}} P(k, \tau) - \\ & - \sum_{k \text{ нечетн.}} P(k, \tau) = \left[\sum_{k \text{ четн.}} \frac{1}{k!} \left|\frac{\tau}{t_0}\right|^k - \sum_{k \text{ нечетн.}} \frac{1}{k!} \left|\frac{\tau}{t_0}\right|^k \right] e^{-|\tau/t_0|} = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left|\frac{\tau}{t_0}\right|^k e^{-|\tau/t_0|} = e^{-2|\tau/t_0|}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Тогда энергетический спектр сигнала

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|\tau|/t_0} e^{-i\omega\tau} d\tau = \\
 &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau/t_0} \cos \omega\tau d\tau = \frac{4}{\omega^2 + \left(\frac{2}{t_0}\right)^2}. \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

На рис. 3.4 показаны кривые $R(\tau)$ и $S(\omega)$ для двоичного сигнала с пуассоновским распределением пересечений нулевой оси. Заметим, что постоянная времени экспоненциальной автокорреляционной функции и значение круговой частоты на уровне 3 дБ от максимального значения $S(\omega)$ обратно пропорциональны друг другу. Это аналогично зависимости, полученной для ранее рассмотренного сигнала.

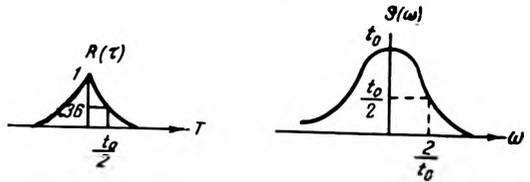


Рис. 3.4. Автокорреляционная функция и спектральная плотность сигнала $x(t)$, изображенного на рис. 3.3

Приведем еще один важный пример. До сих пор речь шла только о двоичных сигналах. Теперь рассмотрим случайный стационарный сигнал, который может принимать любые значения. Фактически совершенно неважно, какова плотность распределения данного сигнала; зададим лишь его энергетический спектр. Пусть он будет равномерным: $S(\omega) = \frac{N_0}{2}$. Тогда автокорреляционная функция имеет вид

$$R(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau).$$

Такой процесс называется «белым» шумом с односторонней спектральной плотностью N_0 . Эта терминология связана с тем, что при прохождении такого шума через идеальный фильтр нижних частот с полосой пропускания B мощность выходного сигнала фильтра равняется $N_0 B$, а мощность этого сигнала в единичной полосе частот равна N_0 . В действительности шум с такими параметрами является физически неосуществимым, поскольку его полная мощность будет

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega = \infty.$$

Однако это не должно вызывать беспокойства, поскольку всегда можно предположить, что шум имеет равномерный спектр в диапазоне частот, значительно превышающем полосу пропускания реальной системы. Белым, по существу, является тепловой шум. Более того, он имеет гауссовскую плотность распределения, откуда и возник термин «белый гауссовский шум». Если белый шум пропускается через однокаскадный RC -фильтр нижних частот с импульсной характеристикой $h(\mu) = e^{-\alpha\mu}$ и с передаточной функцией $H(\omega) = \frac{1}{i\omega + \alpha}$, то, как следует из равенства (3.26), спектр сигнала на выходе фильтра равен

$$S(\omega) = \left(\frac{1}{i\omega + \alpha} \right) \left(\frac{1}{-i\omega + \alpha} \right) \frac{N_0}{2} = \frac{N_0}{2(\omega^2 + \alpha^2)}. \quad (3.33)$$

Используя формулу обратного преобразования Фурье, получим

$$R(\tau) = \frac{N_0}{4\alpha} e^{-\alpha|\tau|}. \quad (3.34)$$

Очевидно, если положить $\alpha = 2/t_0$ и $N_0 = 4\alpha = 8/t_0$, то равенства (3.33) и (3.34) перейдут в равенства (3.32) и (3.31) соответственно. Таким образом, двоичный сигнал с распределенными по закону Пуассона пересечениями нулевой оси и белый гауссовский шум, пропущенный через однокаскадный RC -фильтр, имеют одинаковые автокорреляционную функцию и энергетический спектр, хотя в других отношениях данные сигналы, по-видимому, совершенно различные. Это подтверждает тот факт, что автокорреляционная функция не является однозначной характеристикой сигнала, а представляет собой лишь результат процесса усреднения.

В трех рассмотренных примерах сигналы обладали различной степенью «случайности». Такие сигналы чаще всего используются при рассмотрении систем связи. При определении их спектров использовались различные методы. Можно привести много примеров случайных сигналов. В работах [1, 2] описываются некоторые конкретные методы определения их энергетических спектров¹⁾. Важный класс образуют случайные сигналы, получающиеся в результате модуляции периодических колебаний случайными процессами. Если случайный сигнал может изменять свою полярность только через определенные промежутки времени, кратные периоду модулируемого колебания, то такая модуляция называется *когерентной*.

¹⁾ В отечественной литературе эти же вопросы рассматриваются в монографиях: В. И. Бунимовича «Флюктуационные процессы в радиотехнических устройствах». Изд-во «Сов. радио», 1951; Б. Р. Левина «Теоретические основы статистической радиотехники». Изд-во «Сов. радио», 1966; В. И. Тихонова «Статистическая радиотехника». Изд-во «Сов. радио», 1966 (прим. ред.).

Анализ когерентной модуляции случайными сигналами оказывается довольно сложным. Спектры для большого класса сигналов с когерентной модуляцией были получены Тицвортом и Велчем [3].

Литература

1. Davenport W. B., Jr. and W. L. Root, Random Signals and Noise. New York: McGraw-Hill Book Company, 1958.
Давенпорт В. Б., Рут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. ИИЛ, 1960.
2. Lee Y. W. Statistical Theory of Communication. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1960.
3. Titsworth R. C. and L. R. Welch, Modulation by Random and Pseudo-Random Sequences. Prog. Rep. No 20—387, Pasadena, California: Jet Propulsion Laboratory, June, 1959.
4. Wiener N., Generalized Harmonic Analysis, Acta Mathematica, (1930), pp. 117—258.

КОДЫ С ОСОБЫМИ КОРРЕЛЯЦИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ

§ 4.1. Введение

В этой главе рассматриваются только *равномерные* коды, в которых все кодовые слова содержат одинаковое число символов, выбираемых из двузначного алфавита. Обычно алфавит представлен двумя числами: 1 и -1 . В этом случае кодом является набор из n векторов, заданных в ω -мерном векторном пространстве¹⁾. Эти векторы рассматриваются как *кодовые слова*, состоящие из ω символов; число ω называют *длиной кодового слова*.

Коэффициент корреляции $\rho(x, y)$ между двумя ω -мерными векторами x и y определяется следующим выражением:

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{\omega} x_i y_i.$$

Если x и y — векторы, состоящие из символов 1 и -1 , то $\rho(x, y)$ есть косинус угла между ними. Два вектора x и y называются *ортгоналными*, если $\rho(x, y) = 0$.

Автокорреляционная функция $\rho_x(j)$ ω -мерного вектора x определяется следующим выражением:

$$\rho_x(j) = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{\omega} x_i x_{i+j},$$

¹⁾ Вопросы геометрической теории кодирования систематизированы в монографии К. А. Мешковского, Н. Е. Кириллова «Кодирование в технике связи». Изд-во «Связь», 1966 (прим. ред.).

где $x_{\omega+k} = x_k$ по определению. Например, если $x = (1, -1, -1, 1)$, то

$$\rho_x(3) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i x_{i+3} = \frac{1}{4} [1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-1)(-1) + 1(-1)] = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0$$

и

$$\rho_x(0) = 1, \quad \rho_x(1) = 0, \quad \rho_x(2) = -1.$$

Часто при построении систем связи используются векторы, символами которых не обязательно являются 1 и -1 . Однако удобно, чтобы корреляционные свойства рассматриваемых векторов остались теми же, что и при представлении их с помощью символов 1 и -1 . Для этого следует ввести более общее определение коэффициента корреляции: $\rho(x, y) = \frac{A-D}{A+D}$, где A — число почленных совпадений, а D — число почленных несовпадений векторов x и y . Очевидно, оба рассмотренных определения коэффициента корреляции приводят к одинаковым результатам.

§ 4.2. Трансортгогональность и симплексные коды

Код называется *трансортгогональным*, если коэффициенты корреляции между всеми его кодовыми словами отрицательны. Трансортгогональный код является *максимально* трансортгогональным, если максимальный коэффициент корреляции между различными кодовыми словами минимизирован. Важно отметить, что это определение не накладывает никаких ограничений на длину слова. Следующая теорема определяет границу трансортгогональности двоичных кодов. Пусть $v_i (i=1, 2, \dots, n)$ — кодовые слова, состоящие из символов 1 и -1 . Тогда справедливо следующее неравенство:

◆ Теорема 4.1.

$$\min_{\text{для всех кодов, } i \neq j} \max \rho(v_i, v_j) \geq \begin{cases} -\frac{1}{n-1} & \text{при четном } n, \\ -\frac{1}{n} & \text{при нечетном } n. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу M размерности $n \times \omega$, i -й строкой которой является вектор v_i . Тогда $(1/\omega)MM^T$ есть симметричная матрица коэффициентов корреляции¹⁾. Среднее значение $\bar{\rho}$ ко-

¹⁾ Здесь M^T есть матрица размерности $\omega \times n$, транспонированная к матрице M . Строками матрицы M^T являются столбцы матрицы M , а столбцами матрицы M^T являются строки матрицы M (прим. ред.).

эфициента корреляции между векторами v_i и $v_j (i=j)$ определяется выражением

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \rho(v_i, v_j) = \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i, j} \rho(v_j, v_j) - \sum_i \rho(v_i, v_i) \right) = \\ &= \frac{1}{n(n-1)\omega} \left(\sum_{i, j} v_i v_j - \sum_i v_i v_i \right) = \frac{1}{n(n-1)\omega} \left(\left| \sum_{i=1}^n v_i \right|^2 - \sum_i |v_i|^2 \right). \end{aligned}$$

Но $|v_i|^2 = \omega$ для всех i , поэтому если обозначить $V = \sum_{i=1}^n v_i$, то, оче-

видно, что V будет суммой векторов-строк матрицы M . Отсюда $|V|^2$ есть сумма квадратов сумм элементов каждого столбца. Следовательно, чтобы минимизировать $\tilde{\rho}$, необходимо минимизировать $|V|^2$. При четном n можно построить такую матрицу, для которой все суммы элементов каждого столбца равны нулю, однако при нечетном n эти суммы не могут быть по абсолютной величине меньше единицы. Таким образом,

$$\begin{aligned} \min_{\text{для всех кодов}} \tilde{\rho} &= \min \frac{1}{n(n-1)\omega} (|V|^2 - n\omega) \geq \\ &\geq \begin{cases} \frac{1}{n(n-1)\omega} (-n\omega) = -\frac{1}{n-1} & \text{при четном } n, \\ \frac{1}{n(n-1)\omega} (\omega - n\omega) = -\frac{1}{n} & \text{при нечетном } n. \end{cases} \end{aligned}$$

Но

$$\min_{\text{для всех кодов, } i \neq j} \max \rho(v_i, v_j) \geq \min_{\text{для всех кодов}} \tilde{\rho}.$$

Теорема доказана.

В ходе доказательства было установлено следующее следствие:
Следствие 4.1

$$\min_{\text{для всех кодов}} \tilde{\rho} \geq \begin{cases} -\frac{1}{n-1} & \text{при четном } n, \\ -\frac{1}{n} & \text{при нечетном } n. \end{cases}$$

Если код достигает границы, определяемой теоремой 4.1, то для него справедливо следующее равенство (см. доказательство теоремы 4.1):

$\max_{i \neq j} \rho(v_i, v_j) = \tilde{\rho}$, и, таким образом, для всех $v_i \neq v_j$ данного кода

$$\rho_{i \neq j}(v_i, v_j) = \tilde{\rho} = \begin{cases} -\frac{1}{n-1} & \text{при четном } n, \\ -\frac{1}{n} & \text{при нечетном } n. \end{cases}$$

Такой код называется *симплексным*¹⁾. Симплексные коды существуют для бесконечно большого числа значений n . В частности, они существуют для всех значений $n \leq 100$, за исключением, возможно, $n=57, 58, 77, 78, 93, 94$. В общем случае существование или несуществование симплексных кодов определяется с помощью математической теории матриц Адамара. Поскольку вводные положения этой теории излагаются в § 4.5, то здесь ограничимся лишь двумя примерами симплексных кодов.

Для $n=7$ такой код изображен на рис. 4.1, где каждая строка

-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	-1	-1
1	-1	1	-1	-1	-1	1
-1	1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	-1	1	1	-1
-1	-1	-1	1	1	-1	1
-1	-1	1	1	-1	1	-1

Рис. 4.1. Симплексный код, $n=7$

таблицы является кодовым словом. Аналогично для $n=14$ симплексный код изображен на рис. 4.2. Заметим, что в первом примере длина слова $\omega=n$, а во втором — $\omega=2(n-1)$. Как показано в следующей теореме, эти значения и являются минимальными.

◆ **Теорема 4.2.** Длина кодового слова ω симплексного кода при количестве слов $n > 2$ кратна 2 ($4t+1$), если $n=4t+1$ или $n=4t+2$. При $n=4t$ или $n=4t-1$ длина слова кратна $4t-1$.

Доказательство. Если $n=4t$ или $n=4t-1$, то коэффициент корреляции между любыми двумя различными кодовыми словами

¹⁾ Согласно геометрической теории кодирования оптимальным симплексным кодом называется код, слова которого определяются координатами сигнальных точек, соответствующих вершинам правильного симплекса ω -мерного векторного пространства. Правильный симплекс есть правильная фигура ω -мерного пространства, каждая грань которого является правильным треугольником. При $\omega=3$ симплекс превращается в тетраэдр. (прим. ред.).

1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	-
-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-
-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-
-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-
-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-
-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1	-
1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1	-
1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-
-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-
1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-
-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-
1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-
1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-
1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-

Рис. 4.2. Симплексный код, $n=14$

$\rho(v_i, v_j) = -\frac{1}{4t-1}$. Так как кодовые слова состоят из символов 1 и -1 , то длина слова должна быть равна $k(4t-1)$. Аналогично при $n=4t+1$ или $n=4t+2$ $\omega=j(4t+1)$ и остается показать, что число j четное. Поскольку изменение знаков всех элементов столбца (см. примеры выше) не изменяет значения коэффициентов корреляции между строками, то любой симплексный код может быть преобразован в симплексный код, содержащий кодовое слово $1\dots 1$. Все другие кодовые слова такого кода должны содержать ровно $j(2t)$ единиц (чтобы коэффициенты корреляции между ними и кодовым словом $11\dots 1$ сохраняли прежнее значение). Рассмотрим два таких кодовых слова; для них число почленных совпадений вида $1 \cdot 1$ имеет место α раз, число почленных несовпадений $1(-1)$ и $(-1) \cdot 1 - (2jt - \alpha)$ раз и число почленных совпадений вида $(-1) \cdot (-1) - j(4t+1) - 2(2jt - \alpha) - \alpha = j + \alpha$ раз. Коэффициент корреляции между этими словами равен

$$\frac{A-D}{A+D} = \frac{j+2\alpha-2(2jt-\alpha)}{j(4t+1)} = -\frac{1}{4t+1},$$

так что $\alpha = jt - j/2$, но поскольку α — целое число, то число j должно быть четным, что и требовалось доказать.

§ 4.3. Ортогональные и биортогональные коды

Различие между коэффициентами корреляции, равными $-1/(n-1)$ и 0, настолько мало, что, по крайней мере, для больших значений n им можно пренебречь без существенных потерь. Следовательно, вместо требования оптимальной различимости кодовых слов (что имеет место в симплексных кодах)¹⁾ можно потребовать, чтобы $\rho(v_i, v_j) = 0$ ($i \neq j$). Код, удовлетворяющий этому требованию, называется *ортогональным*. Обычно предполагается, что в ортогональных кодах $n = \omega$, и, как будет показано в § 4.5, для этого необходимо, чтобы $n = 1, 2$ или $4t$.

Биортогональный код состоит из векторов ортогонального кода и их инверсий, и в общем случае для него $n = 2\omega$, где, как и выше, ω принимает значения 1, 2 или $4t$. Биортогональные коды обладают следующими корреляционными свойствами:

$$\rho(v_i, \pm v_j) = 0, \quad (i \neq j); \quad \rho(v_i, \pm v_i) = \pm 1.$$

Наиболее известными биортогональными кодами являются коды Рида—Мюллера первого порядка [13], для которых $n = 2^k$. На рис. 4.3 приве-

¹⁾ Оптимальные симплексные коды относятся к максимальным кодам, т. е. таким, в которых при заданных длине слова ω и коэффициенте корреляции ρ (или что то же самое — кодовом расстоянии d) максимизируется число комбинаций n (прим. ред.).

ден биортогональный код, символами которого являются числа 1 и 0. На рис. 4.4 приведен другой биортогональный код, содержащий 24 кодовых слова.

0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0

Рис. 4.3. Код Рида—Мюллера

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0

Рис. 4.4 Биортогональный код, n=24

§ 4.4. Последовательности с двузначной автокорреляционной функцией

Если автокорреляционная функция ω -мерного вектора x такова,

что

$$\rho_x(0) = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{\omega} x_i^2 = 1$$

и

$$\rho_x(j) = \frac{1}{\omega} \sum_{t=1}^{\omega} x_t x_{t+j} = a \neq 1 \quad (1 \leq j < \omega),$$

то говорят, что вектор x (рассматриваемый как последовательность) имеет двузначную автокорреляционную функцию. Если к тому же $\rho_x(j) = -1/\omega$ при $j \neq 0$, то такая последовательность называется иногда *псевдошумовой* (псевдослучайной), или не очень точно *ортогональной*.

Примером последовательности с двузначной автокорреляционной функцией является последовательность 111—1. Здесь при $1 \leq j < \omega$ коэффициент корреляции равен нулю. Следовательно, данная последовательность и ее циклические перестановки могут быть использованы как кодовые слова ортогонального кода.

Другим примером последовательности с двузначной автокорреляционной функцией является последовательность 111—11—1—1. Поскольку здесь при всех j , где $1 \leq j < \omega$, коэффициенты корреляции одинаковы и равны $-1/7$, то это — псевдослучайная последовательность. Следовательно, ее циклические *перестановки* формируют симплексный код, в частности, код, изображенный на рис. 4.1.

Некоторые вопросы теории и формирования последовательностей с двузначными автокорреляционными функциями рассматриваются далее, в § 4.7, посвященном разностным множествам (см. также приложение 2). Несомненно, наиболее известными и хорошо изученными последовательностями такого типа являются *m*-последовательности [18]. Они называются также *линейными рекуррентными последовательностями максимальной длины* [18], или *линейными последовательностями максимальной длины сдвигающих регистров* [4]. Эти последовательности, длина которых равна $\omega = 2^k - 1$ и $\rho_x(j) = -1/(2^k - 1)$ ($1 \leq j < 2^k - 1$), были уже введены в § 1.4.

Известны четыре вида последовательностей с двузначной автокорреляционной функцией, на основе которых могут быть построены симплексные коды. Все они относятся к упомянутым выше псевдослучайным последовательностям и имеют следующие значения ω :

1. $\omega = 2^k - 1$ — *m*-последовательности.
2. $\omega = 4t - 1$ — простое число (последовательности «квадратичных вычетов» или последовательности символов Лежандра [10, 12]).
3. $\omega = 4t - 1 = 4x^2 - 27$ — простое число (последовательности Холла [8]).
4. $\omega = p(p+2)$, где p и $p+2$ — взаимно простые числа (последовательности с периодом, равным произведению двух простых чисел p и $p+2$).

Множества возможных периодов этих последовательностей частично перекрываются. Так, последовательности 1 и 2 имеют одинаковые периоды тогда и только тогда, когда ω является простым числом Мерсенна; 1 и 3 — тогда и только тогда, когда $\omega=31, 127, 131071$ [16]; 1 и 4 — тогда и только тогда, когда $\omega=15$. Множество периодов последовательностей 3 является подмножеством множества периодов последовательностей 2.

Простыми числами Мерсенна называются числа вида $\omega=2^k-1$. Известны простые числа Мерсенна $k=2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213$ [3]. Таким образом, несколько первых простых чисел Мерсенна равны $\omega=3, 7, 31, 127, 8191, 131071$. Во всех этих случаях при $\omega>7$ m -последовательности отличаются от последовательностей «квадратичных вычетов» той же длины. Аналогично последовательности 2 всегда отличаются от последовательности 3. Фактически совпадают между собой только следующие последовательности:

- при $\omega=3$ и 7 — m -последовательности и последовательности «квадратичных вычетов»;
- при $\omega=15$ — m -последовательность и последовательность с периодом, равным произведению двух простых чисел p и $p+2$;
- при $\omega=31$ — m -последовательность и последовательность Холла.

Таким образом, существуют две совершенно различные псевдослучайные последовательности длины 31 и три совершенно различные последовательности длины 127.

Некоторые дополнительные сведения о псевдослучайных последовательностях приведены в приложении 2. В частности, в нем описываются методы формирования псевдослучайных последовательностей типов 1, 2 и 4. Кроме того, перечисляются значения $\omega<1000$, для которых псевдослучайные последовательности получены. И, наконец, для нескольких первых значений ω приводятся логические функции обратной связи генераторов последовательностей на сдвигающих регистрах с внутренней логикой.

§ 4.5. Матрица Адамара

Матрицей Адамара [1, 2, 10, 15, 17] называется квадратная матрица, элементами которой являются числа 1 и -1 и строки (столбцы) которой взаимно ортогональны. На рис. 4.5 в качестве примера приведены четыре матрицы Адамара. (Разбиение матриц на рисунке демонстрирует их структурные свойства, которые будут рассмотрены позже.)

Верхняя граница определителя матрицы Адамара задается неравенством Адамара для определителей [4], т. е. она равна

$$|H|^2 = \prod_{i=1}^{\omega} \sum_{j=1}^{\omega} h_{ij}^2 = \omega^{\omega}.$$

Из определения этих матриц ясно, что свойство ортогональности сохраняется, если поменять местами строки или столбцы либо изменить знак каждого элемента в строке или в столбце.

Пользуясь данными операциями, можно получить *нормальную форму* матриц Адамара, потребовав, чтобы первая строка и первый столбец состояли только из единиц. Во всех примерах на рис. 4.5 матрицы Адамара представлены в нормальной форме.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Рис. 4.5. Матрица Адамара

Если две матрицы Адамара могут быть преобразованы одна в другую с помощью перечисленных выше операций, то они называются *эквивалентными*. Например, матрицы (c) и (d) эквивалентны. Этот пример показывает, что нормальная форма внутри класса эквивалентных матриц не единственна. В общем случае существует более чем один класс эквивалентных матриц для данного порядка m , $m \geq 16$.

Вопрос о существовании матриц Адамара всех возможных размерностей в математике еще не решен. Интересен следующий результат.

♦ **Теорема 4.3.** Если m — размерность матрицы Адамара и $m \geq 1$, то $m = 1, 2$ или $4l$.

Доказательство. Очевидно, что матрица $\|1\|$ является матрицей Адамара размерности 1×1 , а матрица на рис. 4.5a имеет раз-

мерность 2×2 . Если матрица Адамара содержит, по крайней мере, три строки x, y, z , то

$$\sum_{i=1}^m (x_i + y_i)(x_i + z_i) = \sum_{i=1}^m (x_i^2 + x_i z_i + y_i x_i + y_i z_i) = \sum_{i=1}^m x_i^2 = m,$$

но все слагаемые в левой части приведенного выражения кратны четырем. Таким образом, $m = 4t$.

Известны методы построения матриц Адамара для бесконечно большого числа значений m ($m = 4t$). Тем не менее существует еще бесконечно большое число значений m , для которых эти матрицы не найдены. Предположение о том, что матрицы Адамара существуют для всех значений $m = 4t$, остается не доказанным и не опровергнутым. Однако с точки зрения применения матриц Адамара дела обстоят не так уж плохо. Такие матрицы получены для всех $m \leq 200$, за исключением $m = 116, 156, 188$ [1, 10, 17]¹⁾. Возможно, самый простой и наиболее мощный метод построения матриц Адамара определяется следующей теоремой.

◆ **Теорема 4.4.** Если H_1 и H_2 — матрицы Адамара, то $H_1 \times H_2$ также матрица Адамара. Последняя формируется подстановкой H_2 вместо 1 и $-H_2$ вместо -1 в H_1 (произведение Кронекера матриц H_1 и H_2).

Доказательство заключается в непосредственной проверке и здесь не приводится. Для примера, однако (см. рис. 4.5), производится разбиение матрицы (b) , показывающее, что она равна произведению $(a) \times (a)$. Аналогично, разбиение матрицы (c) показывает, что она равна произведению $(a) \times (b) = (a) \times [(a) \times (a)]$. Таким способом из матрицы (a) можно получить матрицу Адамара порядка 2^n для всех n .

Теперь становится ясной связь между ортогональными (а следовательно, и биортогональными) кодами и матрицами Адамара. В частности, строки матрицы Адамара являются кодовыми словами ортогонального кода и наоборот. Следующая теорема устанавливает связь между матрицами Адамара и симплексными кодами.

◆ **Теорема 4.5.** Если существует матрица Адамара для $m = 4t$, то существуют симплексные коды для $m = 4t, 4t - 1, 2t$ и $2t - 1$.

Доказательство. Если в матрице Адамара, представленной в нормальной форме, вычеркнуть первый столбец, то строки формируют симплексный код для $m = 4t$. Вычеркивание любой из оставшихся строк приводит к симплексному коду для $m = 4t - 1$. Так как столбцы матрицы Адамара взаимно ортогональны, то любой столбец матрицы Ада-

¹⁾ В отечественной литературе вопросы применения матриц Адамара для построения максимальных кодов излагаются в работе В. И. Левенштейна «Применение матриц Адамара к одной задаче кодирования». «Проблемы кибернетики», 1961, вып. 5 (прим. ред.).

мара, представленной в нормальной форме, кроме первого, содержит $2t$ единиц и $2t$ минус единиц. Следовательно, если в матрице Адамара в нормальной форме выбрать любой столбец j , кроме первого, вычеркнуть в ней строки, вносящие в данный столбец элемент 1 (или, наоборот, -1), и затем вычеркнуть первый и j -й столбцы, то оставшиеся строки формируют множество $2t$ векторов длины $4t-2$. Коэффициент корреляции между каждой парой этих векторов равен $-\frac{2}{4t-2} = -\frac{1}{2t-1}$, т. е. они формируют симплексный код для $m=2t$. Если, как и раньше, вычеркнуть еще один из векторов, то получим симплексный код для $m=2t-1$.

С матрицами Адамара тесно связана проблема симметричных балансных неполных блок-схем, так называемая v, k, λ -проблема, которая рассматривается в следующем параграфе. Для более глубокого ознакомления с комбинаторными методами можно воспользоваться [15].

§ 4.6. Блок-схемы Адамара

Уравновешенной неполной блок-схемой [7, 15] называется такое размещение v элементов в b множествах, что:

- каждое множество содержит точно k различных элементов;
- каждый элемент содержится точно в r различных множествах;
- любая пара элементов содержится точно в λ различных множествах.

Указанные параметры связаны следующими двумя соотношениями:

$$1. \quad bk = vr,$$

$$2. \quad \lambda(v-1) = r(k-1).$$

Второе равенство остается нетривиальным даже для симметричной блок-схемы, когда $b=v$ и, следовательно, $k=r$. В этом случае оно преобразуется в выражение $\lambda(v-1) = k(k-1)$.

Пусть матрица D размерности $v \times v$ составлена из нулей и единиц и пусть столбцы этой матрицы соответствуют v элементам, а строки — $b=v$ множествам. Если принять, что $d_{ij}=1$ в случае, когда j -й элемент содержится в i -м множестве, и $d_{ij}=0$ в противном случае, то матрица D называется матрицей *инцидентности* данной блок-схемы.

На рис. 4.6 в качестве примера приведены матрицы инцидентности, представляющие два различных решения задачи построения блок-схемы с параметрами $v=7$, $k=3$ и $\lambda=1$.

Можно заметить, что, за исключением несущественного внешнего различия, приведенные матрицы соответствуют матрицам Адамара (d) и (c) на рис. 4.5. В этом и заключена связь между симметричными

уравновешенными неполными блок-схемами и матрицами Адамара. В частности, известна следующая теорема.

◆ **Теорема 4.6.** Матрица Адамара для $m=4t$ существует тогда и только тогда, когда существует симметричная уравновешенная блок-схема с параметрами $v=4t-1$, $k=2t-1$, $\lambda=t-1$, обычно называемая блок-схемой Адамара.

$$\begin{array}{c}
 S_1 \\
 S_2 \\
 S_3 \\
 S_4 \\
 S_5 \\
 S_6 \\
 S_7
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{c}
 S_1 \\
 S_2 \\
 S_3 \\
 S_4 \\
 S_5 \\
 S_6 \\
 S_7
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
 \end{bmatrix}$$

Рис. 4.6. Матрица инцидентности

Доказательство. Пусть задана матрица Адамара в нормальной форме. Вычеркнем первый столбец и первую строку. Так как строки (столбцы) матрицы Адамара взаимно ортогональны, то в каждой оставшейся строке (столбце) должно содержаться $2t-1=k$ единиц. Далее найдем коэффициент корреляции между двумя столбцами этой сокращенной матрицы. Положим, произведения вида $1 \cdot 1$ имеют место α раз, тогда, очевидно, произведения вида $1 \cdot (-1)$ и $(-1) \cdot 1$ имеют место $(2t-1-\alpha)$ раз каждое, а $(-1) \cdot (-1) - \alpha + 1$ раз. Следовательно, $(4t-1)\rho(x, y) = 2\alpha + 1 - 2(2t-1-\alpha) = 4\alpha - 4t + 3 = -1$, так что $\alpha = t-1 = \lambda$.

Таким образом, было показано, что сокращенная матрица Адамара может быть получена из матрицы инцидентности блок-схемы Адамара заменой -1 на 0 и наоборот. Определяя теперь коэффициент корреляции между столбцами x и y , находим, что произведение вида $1 \cdot 1$ имеет место $\lambda = t-1$ раз, $1 \cdot (-1)$ и $(-1) \cdot 1 - (k-\lambda)$ раз каждое, $(-1) \cdot (-1) - [v-k - (k-\lambda)] = t$ раз, так что $(4t-1)\rho(x, y) = t - 1 - 2t = -1$.

Следовательно, если к данной матрице добавить строку и столбец, состоящие только из единиц, то все столбцы новой матрицы станут взаимно ортогональными, т. е. получим матрицу Адамара.

Матрица инцидентности, соответствующая нормальной форме матрицы Адамара, образует ее *ядро*. На рис. 4.5 ядро матрицы Адамара (d) отделено от остальной части матрицы. На этом примере можно наблюдать явление, о котором раньше ничего не упоминалось, а именно: строки ядра матрицы образуют набор всех циклических перестано-

вок первой строки. Блок-схема Адамара, имеющая такую матрицу инцидентности, называется *циклической*. Циклические блок-схемы Адамара представляют особый интерес для практики в связи с относительной простотой генерирования соответствующих кодов с помощью сдвигающих регистров.

§ 4.7. Разностные множества

Разностным множеством $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ называется подмножество целых чисел по модулю v такое, что разность $d_i - d_j \pmod{v}$, $i \neq j$, принимает каждое из значений $1, 2, \dots, (v-1)$ ровно λ раз [7, 8, 9, 15]. Например, если $v=7$, $k=3$, $\lambda=1$, то $D = \{1, 2, 4\}$ является разностным множеством с этими параметрами. В частности¹⁾,

$$\left. \begin{aligned} d_1 - d_2 &= 1 - 2 = -1 \equiv 6 \\ d_1 - d_3 &= 1 - 4 = -3 \equiv 4 \\ d_2 - d_3 &= 2 - 4 = -2 \equiv 5 \\ d_2 - d_1 &= 2 - 1 = 1 \\ d_3 - d_1 &= 4 - 1 = 3 \\ d_3 - d_2 &= 4 - 2 = 2 \end{aligned} \right\}.$$

Наличие параметров v, k, λ указывает на прямую связь между разностными множествами и блок-схемами. Существует следующее соответствие.

◆ **Теорема 4.7.** Разностное множество для конкретных значений параметров v, k, λ существует тогда и только тогда, когда существует циклическая симметричная уравновешенная неполная блок-схема с теми же значениями v, k, λ .

Доказательство. Предположим, что разностное множество $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ с параметрами v, k, λ существует. Будем рассматривать $0, 1, 2, \dots, (v-1)$ как элементы этого множества. Пусть $S_{i+1} = \{d_1+i, d_2+i, \dots, d_k+i\}$, $0 \leq i \leq v-1$, являются множествами блок-схемы. Здесь сложение d_j+i выполняется по модулю v . Очевидно, что полученные v множества обладают следующими свойствами:

- каждое содержит ровно k различных элементов;
- каждый элемент содержится ровно в k различных множествах;
- $b=v, k=r$, т. е. блок-схема симметрична;
- множества образуют набор всех циклических перестановок множества D по модулю v (т. е. блок-схема циклична).

¹⁾ Все сравнения производятся по модулю 7.

Далее, учитывая последнее свойство и то, что $d_i - d_j \equiv m \pmod{v}$ имеет ровно λ решений в данном множестве D , приходим к заключению, что любая пара d_i, d_j содержится ровно в λ множествах. Таким образом, множества S_i формируют циклическую симметричную уравновешенную неполную блок-схему.

Пусть задана циклическая симметричная уравновешенная неполная блок-схема, состоящая из множеств S_i . Образует из множества S_1 множество D , полагая элементами последнего те значения i (по модулю v), для которых существуют элементы в множестве S_1 . Если в множестве D $i_j - i_q \equiv m \pmod{v}$, $m \neq 0$, то таких разностей, сравнимых с m по модулю v , в этом множестве будет ровно λ , так как каждая пара элементов (в частности, i_j и i_q) содержится в циклической блок-схеме ровно λ раз. Но в множестве D есть $k(k-1)$ упорядоченных пар $i_j, i_q (i_q \neq i_j)$, следовательно, число значений m (по модулю v) должно быть равно $k(k-1)/\lambda$. Однако в любой симметричной блок-схеме $k(k-1) = \lambda(k-1)$ (см. теорему 4.6), так что все ненулевые остатки представлены в ней ровно λ раз, т. е. D является разностным множеством.

Пусть задано разностное множество D . Рассмотрим вектор x , i -й элемент которого равен 1, если d_i содержится в D , и равен -1 в противном случае. При определении коэффициента корреляции вектора x с любой его циклической перестановкой видно, что произведение вида $1 \cdot 1$ имеет место ровно λ раз, $1 \cdot (-1)$ и $(-1) \cdot 1 - (k-\lambda)$ раз каждое и $(-1) \cdot (-1) - [v - 2(k-\lambda) - \lambda]$ раз. В результате имеем:

$$R_x(j) = \frac{v - 4(k - \lambda)}{v}, \quad 1 \leq j < v,$$

$$R_x(0) = 1,$$

т. е. x является последовательностью с двузначной автокорреляционной функцией. И, наоборот, если задана последовательность 1 и -1 с двузначной автокорреляционной функцией, то существует разностное множество, соответствующее этой последовательности. В частности, если длина последовательности $\{a_i\}$ с двузначной автокорреляционной функцией равна v , то этой последовательности соответствует множество $D = \{i, \text{при которых } a_i = \pm 1 \pmod{v}\}$. Следовательно, методы построения разностных множеств можно применить для формирования последовательностей с двузначной автокорреляционной функцией.

Для начала полезно ввести следующее определение. Если t — целое число такое, что множества $\{td_1, td_2, \dots, td_k\}$ и $\{d_1+s, d_2+s, \dots, d_k+s \pmod{v}\}$ совпадают в каком-либо порядке, то t называется **множителем** разностного множества $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$. В терминах современной алгебры множитель есть **автоморфизм** соответствующей циклической блок-схемы. Множители образуют группу, называемую *груп-*

ной множителей блок-схемы. Холлом была сформулирована следующая теорема.

◆ **Теорема 4.8.** Пусть дано разностное множество D и пусть n_1 делит $n = k - \lambda$, $(n_1, v) = 1^1$) и $n_1 > \lambda$. Если для любого простого p , делящего n_1 , существует j такое, что $p^j \equiv t \pmod{v}$, то t является множителем данного разностного множества по модулю v .

Доказательство этой теоремы приведено в [8]. Применимость ее будет проиллюстрирована с помощью построения разностного множества с параметрами $v = 23$, $k = 11$, $\lambda = 5$. Здесь $n = 6$, $n_1 = 6$, тогда $t \equiv 2^5 \equiv 3^2 \equiv 9 \pmod{23}$ есть множитель. Предположим, что разностное множество D существует. Тогда

$$\begin{aligned} 9D &\equiv \{D + s\}, \\ 9\{D + i\} &\equiv \{D + s + 9i\}. \end{aligned}$$

Следовательно, если $i \equiv s + 9i$, то существует такой сдвиг i , что $9\{D + i\} \equiv \{D + i\}$. Но это предполагает решение $8i \equiv -s$, которое существует, так как $(8, 23) = 1$. (Все операции здесь производились по модулю 23).

Таким образом, все вычеты модуля 23 можно разбить на множества, удовлетворяющие сравнению $9\{D + i\} \equiv \{D + i\} \pmod{23}$. В результате получим 3 множества:

$$\begin{aligned} \{1, 9, 12, 16, 6, 8, 3, 4, 13, 2, 18\} &= \{\text{различные степени } 9 \pmod{23}\}, \\ \{5, 7, 10, 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22\}, \\ \{0\}. \end{aligned}$$

Каждое из них либо принадлежит множеству $\{D + i\}$ целиком, либо не принадлежит вовсе. Теперь необходимо найти $k = 11$ вычетов, формирующих разностное множество. Очевидно, для этой цели подходит любое из двух первых множеств. Так, $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18\}$ является разностным множеством с параметрами $v = 23$, $k = 11$, $\lambda = 5$. Соответствующая данному множеству последовательность с двузначной автокорреляционной функцией имеет вид $1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, -1$.

В вышеприведенном примере использование теоремы 4.9 (теоремы о множителе) облегчалось тем, что существовал такой сдвиг i разностного множества D , что $\{D + i\}$ фиксировалось множителем. Основываясь на работе Паркера [11], Манн и Макфарлэнд показали справедливость этого для любого разностного множества, что находит выражение в следующей теореме.

◆ **Теорема 4.9.** Если задано разностное множество D с множителем t , то существует множество $\{D + i\}$, фиксируемое этим множителем.

Доказательство. Пусть A — матрица инцидентности циклической блок-схемы, соответствующей разностному множеству D (см. тео-

¹⁾ $(a_1, a_2) = 1$ означает, что числа a_1 и a_2 взаимно простые (прим. ред.).

рему 4.8). Как отмечалось выше, множитель разностного множества есть автоморфизм соответствующей блок-схемы. Это означает, что существуют такие перестановочные матрицы P, Q (определяемые t), что $PAQ=A$. Так как определитель матрицы A не равен 0 [15], то $A^{-1}PA=Q^{-1}$. Обозначая через $Tr(X)$ сумму диагональных элементов матрицы X , получаем $Tr(P)=Tr(A^{-1}PA)=Tr(Q^{-1})=Tr(Q)$.

Из определения матрицы инцидентности следует, что $Tr_r(P)$ есть число блоков блок-схемы, фиксируемых автоморфизмом (т. е. множителем), а $Tr(Q)$ есть число элементов, фиксируемых тем же множителем. Таким образом, число элементов, фиксируемых t , равно числу блоков, также фиксируемых t . Но множитель обязательно фиксирует элемент 0, следовательно, должен существовать, по крайней мере, один блок (т. е. сдвиг множества D), фиксируемый множителем.

Приведенный выше пример демонстрировал применимость теоремы 4.9 для построения разностных множеств при условии их существования. Эта теорема применима также для доказательства несуществования разностных множеств. В качестве примера будет доказано несуществование матрицы Адамара для $v=27$.

Таблица приложения 2 (см. также § 4.4) показывает, что блок-схемы Адамара существуют для всех $v=4t-1 < 27$, так что рассматриваемый случай представляет особый интерес. Здесь соответствующее разностное множество (см. теорему 4.8) имеет параметры $v=27, k=13, \lambda=6$ и t , равное 7, обязательно является множителем (см. теорему 4.9), если такое разностное множество существует. По теореме 4.10 некоторый сдвиг этого гипотетического множества фиксируется множителем 7.

Разбивая вычеты модуля 27 на множества, удовлетворяющие сравнению $7\{D+i\} \equiv \{D+i\} \pmod{27}$, получаем 7 множеств: $\{0\}; \{9\}; \{18\}; \{3, 21, 12\}; \{6, 15, 24\}; \{1, 7, 22, 19, 25, 13, 10, 16, 4\}; \{2, 14, 17, 11, 23, 26, 20, 5, 8\}$. Если разностное множество существует, то оно должно состоять из нескольких полученных множеств, рассматриваемых как единое целое. Так как разностное множество должно содержать 13 элементов, то в его состав должно входить одно из двух последних множеств. Но ни одно из них не является множеством с параметром $\lambda=6$, так как $d_i-d_j \equiv 3 \pmod{27}$ имеет 9 решений в каждом из этих множеств. Следовательно, циклическая блок-схема Адамара для $v=27$ не существует.

Прежде чем переходить к следующему параграфу, сделаем замечание относительно теоремы 4.9. В ней утверждалось, что любое простое p , удовлетворяющее соотношению $(p, v)=1$ и делящее $n=k-\lambda$, является множителем соответствующего разностного множества, если оно существует. Это справедливо для всех известных разностных множеств, но нигде не доказано, что данное утверждение справедливо в общем случае.

§ 4.8. Ограничения, накладываемые на коды

Допустим, что существует матрица Адамара для $n_0=4l_0$, и предположим, что необходимо сформировать симплексный, ортогональный или биортогональный код для n_0 . В общем случае для этого можно использовать большое число разных матриц Адамара. Однако, хотя многие из них эквивалентны с математической точки зрения, это совсем не значит, что они эквивалентны с точки зрения теории кодирования. В частности, если необходимо, чтобы код обладал некоторым свойством, и если данное свойство инвариантно относительно перестановок и инверсий (т. е. $h_{ij} \rightarrow -h_{ij}$) строк и столбцов, то некоторая матрица Адамара должна обладать указанным свойством в большей степени, чем другие, ей эквивалентные. Именно эту матрицу следует использовать для генерирования требуемого кода.

Здесь мы рассмотрим только два полезных свойства кода и покажем их влияние на выбор матриц. Этими свойствами являются простота генерирования кода и самосинхронизация (использование кодов без запятой).

Среди всех блок-схем Адамара, рассмотренных выше, возможно, самыми простыми для генерирования кодов представляются циклические блок-схемы. В данном случае необходимо генерировать или запоминать только одно кодовое слово, а в качестве других кодовых слов использовать его циклические перестановки. В классе последовательностей с двузначными автокорреляционными функциями самыми простыми для генерирования кодов являются последовательности максимальной длины. Они имеют период 2^n-1 и легко могут быть получены с помощью n -разрядного сдвигающего регистра.

Таким образом, блок-схемы с точки зрения простоты генерирования кодов можно расположить в следующем порядке:

- циклические блок-схемы с длиной слова 2^n-1 ;
- то же, с другой длиной слова;
- нециклические блок-схемы Адамара.

С точки зрения самосинхронизации можно требовать, чтобы формируемый код был кодом без запятой. Равномерный код C с длиной слова ω называется *кодом без запятой* [5], если принадлежность слов a_1, a_2, \dots, a_k и b_1, b_2, \dots, b_k к C означает, что перекрытия $a_2, \dots, a_\omega, b_1, a_3, \dots, b_1, b_2, \dots, a_\omega, b_1, \dots, b_{\omega-1}$ коду C не принадлежат, т. е. никакие перекрытия кодовых слов не являются кодовыми словами. Очевидно, что в отсутствие шумов для установления синхронизации слов необходимо принять не более $2(\omega-2)$ символов. Болсе того, не требуется передавать эти $2(\omega-2)$ символов первыми. Таким образом, в этом случае приемник устанавливает синхронизацию слов в любой, не обязательно начальной, части сообщения. Про такой код говорят, что он однозначно *дешифрируется в малом*.

Подробно ортогональные и биортогональные коды без запятой будут рассмотрены в гл. 8, где приводятся более общие определения данных кодов и производится их оценка с точки зрения обеспечения эффективности связи и времени установления синхронизации при наличии шумов.

Л и т е р а т у р а

1. Baumert L., S. W. Golomb and M. Hall Jr., Discovery of an Hadamard Matrix of Order 92, Bulletin of the American Mathematical Society, 68, 3 (1962), 237—238.
2. Brauer A., On a New Class of Hadamard Determinants, Mathematische Zeitschrift, 58 (1953), 219—225.
3. Gillies D. B., Three New Mersenne Primes and a Statistical Theory, Mathematics of Computation, 18 (1964), 93—95.
4. Golomb S. W., Sequences with Randomness Properties, Terminal Progress Report under Contract Red. No 639498, Baltimore, Maryland: Glenn L. Martin Company, June, 1955.
5. Golomb S. W., B. Gordon and L. R. Welch, Comma-Free Codes, Canadian Journal of Mathematics, 10 (1958), 202—9.
Голомб С. У., Гордон Б., Велч Л. Р. Коды без запятой. «Кибернетический сборник», вып. 5. ИИЛ, 1961.
6. Gordon B., W. H. Mills and L. R. Welch, Some New Difference Sets, Canadian Journal of Mathematics, 14 (1962), 614—625.
7. Hall M., Jr., A Survey of Combinatorial Analysis, in Karlansky, Hall, Hewitt, and Fortet, Some Aspects of Analysis and Probability, New York: John Wiley and Sons, 1958.
Холл М. Комбинаторная математика. ИИЛ, 1963.
8. Hall M., Jr., Survey of Difference Sets, Proceedings of the American Mathematical Society, 7 (1956), 975—986.
9. Hall M., Jr., Projective Planes and Related Topics, Lectures at California Institute of Technology, 1954. (distributed by CIT bookstore).
10. Paley R. E. A. C., On Orthogonal Matrices, Journal of Mathematics and Physics, 12 (1931), 311—320.
11. Parker E. T., On Collineations of Symmetric Designs, Proceedings of the American Mathematical Society, 8 (1957), 350—351.
12. Plotkin M., Binary Codes with Specified Minimum Distance, Moore School of Electrical Engineering, June, 1952; also in Trans. IRE, IT-6, 4 (September, 1960).
13. Reed I. S., A Class of Multiple-Error-Correcting Codes and the Decoding Scheme, IRE Transactions on Information Theory, PGIT-4 (September, 1954), 38—49.
Рид С. Класс кодов с исправлением нескольких ошибок и схема декодирования. «Кибернетический сборник», вып. 1. ИИЛ, 1960.
14. Riesz F., and B. Sz. Nagy. Functional Analysis, New York: Frederick Ungar Publishing Co., Inc., 1955, 176—177.
15. Ryser H. J., Combinatorial Mathematics, The Carus Mathematical Monographs, Mathematical Association of America, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1963.
Райзер Г. Дж. Комбинаторная математика. Изд-во «Мир», 1966.
16. Skolem Th. S. Chowla and D. J. Lewis, The Diophantine Equation $2^{n+2} - 7 = x^2$ and Related Problems, Proceedings of the American Mathematical Society, 10 (1959), 663—669.
17. Williamson J., Hadamard's Determinant Theorem and the Sum of 4 Squares, Duke Journal of Mathematics, 11 (1944), 65—81.
18. Цирлер Н. Линейные возвратные последовательности. «Кибернетический сборник», вып. 6. ИИЛ, 1963.

МОДУЛЯЦИЯ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ

§ 5.1. Введение

Последовательности и сигналы

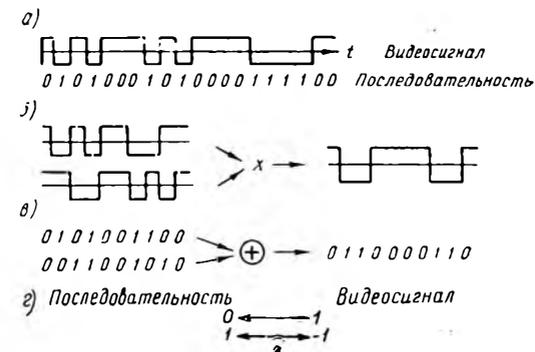
В этой главе рассматриваются вопросы модуляции двоичными последовательностями: имеется в виду модуляция синусоидальной несущей сигналом, который обладает некоторыми свойствами двоичной последовательности. При этом предполагается, что частота несущей намного выше частот основных гармоник модулирующего сигнала. Сигнал, который используется для отображения двоичной последовательности, строится следующим образом: каждой двоичной цифре последовательности отводится одинаковый отрезок времени, который называется длительностью двоичной цифры (символа)¹⁾. Если двоичная цифра последовательности равна нулю, то в течение соответствующего отрезка времени сигнал имеет единичный положительный уровень, а если — единице, то единичный отрицательный уровень. На рис. 5.1а показан пример двоичной последовательности и соответствующий ей двоичный видеосигнал. (Отметим, что абсолютная величина двоичного видеосигнала всегда равна единице.)

На рис. 5.1б изображен процесс перемножения двух двоичных видеосигналов, а на рис. 5.1 в показаны соответствующие этим сигналам последовательности и их почленное суммирование по модулю 2.

¹⁾ В отечественной литературе принят термин «длительность элементарного импульса» (прим. ред.).

Таблица на рис. 5.1г отражает соответствие между последовательностью и двоичным видеосигналом, который ее отображает. В этой главе и гл. 6 вычисления и алгебраические выкладки приводятся применительно к последовательностям, однако при рассмотрении блок-диаграмм и конкретных схем мы будем пользоваться двоичными видеосигналами.

При исследовании сигналов, промодулированных двоичными последовательностями, возникают две совершенно различные задачи. Одна



Сложение по модулю 2 ↔ Умножение

Рис. 5.1. Видеосигналы и последовательности

заключается в определении спектра модулированного сигнала и представляет интерес для проектировщика системы связи, который должен в зависимости от диапазона частот сигнала обеспечить соответствующую полосу пропускания аппаратуры. Другая задача касается цифровых характеристик модулированного сигнала. В некотором смысле эта задача является более важной, поскольку выбор конкретного видеосигнала определяется характеристиками последовательности, из которой он сформирован. В этой главе рассматриваются обе указанные задачи. Полученные результаты используются в гл. 6 и 7.

§ 5.2. Корреляционные свойства двоичных видеосигналов

Псевдослучайные последовательности и видеосигналы

Последовательности, о которых идет речь в данной книге, имеют большое значение благодаря своим корреляционным свойствам¹⁾. Ве-

¹⁾ Приводимые ниже определения, по существу, совпадают с введенными в гл. 3. Здесь они повторяются в применении к двоичным последовательностям и видеосигналам.

личина корреляции (ненормированная) между двумя последовательностями одинаковой длины определяется выражением

$$R = A - D,$$

где A — число символов, в которых обе последовательности совпадают; D — число символов, в которых они отличаются. Чтобы вычислить ненормированную величину корреляции между двумя последовательностями, длины которых p_1 и p_2 являются взаимно простыми числами, необходимо вторую последовательность повторить p_1 раз, а первую — p_2 раз. В результате получим две последовательности одинаковой длины $p_1 p_2$; величина корреляции между ними определяется по приведенной выше формуле. В общем случае период, за который измеряется величина корреляции между последовательностями длиной p_1 и p_2 , равен наименьшему общему кратному чисел p_1 и p_2 [НОК (p_1, p_2)].

Ненормированная функция взаимной корреляции двух последовательностей одинаковой длины представляет собой совокупность величин корреляции одной последовательности со всеми циклическими перестановками другой. (Если длины последовательностей различны, необходимо воспользоваться описанным выше методом.) Автокорреляционная функция последовательности есть совокупность величин корреляции этой последовательности со всеми своими циклическими перестановками.

Во многих случаях желательно пользоваться нормированной величиной корреляции — коэффициентом корреляции, который определяется следующим образом:

$$\rho = \frac{A - D}{A + D}.$$

Кроме того, часто используется нормированная функция корреляции. Для удобства вычисления корреляции между двумя последовательностями последние почленно суммируются по модулю 2. Учтывая далее, что нули в суммарной последовательности соответствуют совпадению символов в исходных последовательностях, а единицы — несовпадению, величину корреляции можно определять по формуле:

$$\rho = \frac{R - \text{число нулей} - \text{число единиц}}{2N},$$

На рис. 5.2а и б приведены примеры вычисления величин корреляции и функции взаимной корреляции двух последовательностей. Корреляционная переменная τ обозначает число двончных символов, на которое циклически смещена вторая последовательность относительно первой. Если последовательности поменять местами, знак τ изменится на обратный. Автокорреляционная функция вычисляется точно так же, как и функция взаимной корреляции. Поскольку автокорреляционная

функция не изменяется при перестановке двух исходных последовательностей, то она является четной функцией от τ .

а) Первая последовательность 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0,
 Вторая последовательность 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0,
 Сумма по модулю 2 1 0 1 1 1 0 0 1 1 0 0,

$$R = 5 - 6 = -1,$$

$$\rho = \frac{5-6}{5+6} = -\frac{1}{11};$$

б) Первая последовательность 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0,
 Вторая последовательность 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1,
 Сумма по модулю 2 1 1 0 0 1 0 1 1 1 1 1,

$$R = 3 - 8 = -5,$$

$$\rho = \frac{3-8}{3+8} = -\frac{5}{11}.$$

Корреляционная функция

τ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	-1	-5	-1	-1	7	-5	-1	3	3	-1	-1
ρ	$-\frac{1}{11}$	$-\frac{5}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{5}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$-\frac{1}{11}$

Рис. 5.2. Вычисление коэффициента корреляции

Эти основные понятия корреляционного анализа можно распространить на двоичные видеосигналы, которые, в отличие от последовательностей, являются периодическими функциями времени, бесконечно простирающимися вдоль оси времени. Величина корреляции двух двоичных видеосигналов с одинаковыми периодами определяется выражением

$$R = \int_0^T F_1(t) F_2(t) dt.$$

Если сигналы имеют разные периоды T_1 и T_2 , то величина корреляции

$$R = \int_0^{T_1 T_2} F_1(t) F_2(t) dt.$$

Аналогично нормированные величины корреляции равны

$$\rho = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(t) F_2(t) dt$$

и

$$\rho = \frac{1}{T_1 T_2} \int_0^{T_1 T_2} F_1(t) F_2(t) dt.$$

Функции взаимной корреляции определяются выражениями

$$R(\tau) = \int_0^T F_1(t) F_2(t + \tau) dt$$

и

$$R(\tau) = \int_0^{T_1 T_2} F_1(t) F_2(t + \tau) dt.$$

Нормированные функции взаимной корреляции имеют вид

$$\rho(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(t) F_2(t + \tau) dt$$

и

$$\rho(\tau) = \frac{1}{T_1 T_2} \int_0^{T_1 T_2} F_1(t) F_2(t + \tau) dt.$$

Вследствие периодичности двоичных видеосигналов приведенные выше зависимости совпадают с общим определением функции взаимной корреляции, а именно

$$\rho = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_1(t) F_2(t + \tau) dt.$$

Как и для последовательностей, функция корреляции двух двоичных видеосигналов с одинаковыми периодами является периодической и имеет такой же период, как и исходные сигналы. Период корреляционной функции двух двоичных видеосигналов с произвольными периодами равен наименьшему общему кратному периодов исходных сигналов. Здесь предполагается, что коррелируемые двоичные видеосигналы имеют одинаковые длительности двоичных символов.

В этой главе исследуются двоичные видеосигналы, образованные из псевдослучайных последовательностей, рассмотренных в гл. 4.

На рис. 5.3 показана нормированная автокорреляционная функция двоичного видеосигнала, соответствующего псевдослучайной последовательности. Такие двоичные видеосигналы называются *псевдослучайными*. Функция взаимной корреляции двух псевдослучайных последовательностей со взаимно простыми периодами при всех возможных относительных сдвигах близка к нулю. Две такие последовательности не

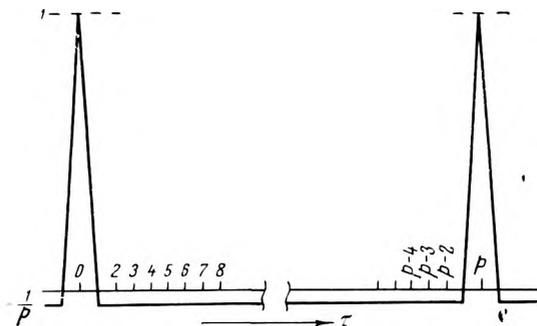


Рис. 5.3. Автокорреляционная функция псевдослучайного сигнала

совсем строго называют *некоррелированными*. Приведенный на рис. 5.4 пример иллюстрирует некоторые важные свойства функции взаимной корреляции последовательностей такого вида.

Во-первых, функцию взаимной корреляции достаточно определить только для p_1 значений τ (где p_1 — период короткой последовательности), так как в результате ее сдвига p_1 раз она принимает свое исходное положение. Это и показано на рис. 5.4, где функция взаимной корреляции вычисляется только для трех значений τ .

Во-вторых, так как фаза между двумя последовательностями принимает все возможные значения, то сдвиг одной последовательности относительно другой эквивалентен смещению их общего начала¹⁾ на некоторую величину. Например, из рис. 5.4 видно, что взаимное расположение двух последовательностей при $\tau=1$ и $\tau=0$ одинаково, однако при $\tau=1$ начало обеих последовательностей смещено на семь двоичных символов вправо. Аналогично при $\tau=2$ взаимное расположение последовательностей остается таким же, как и в случае $\tau=0$, но их на-

¹⁾ Под общим началом автор понимает исходное взаимное положение обеих последовательностей, как показано жирным шрифтом на рис. 5.4 (прим. ред.).

чало смещается на четырнадцать двоичных символов. Так как функция взаимной корреляции получается в результате суммирования (или интегрирования) сигналов за их общий период, то она не зависит от положения их начала. Таким образом, рис. 5.4 является иллюстрацией к следующей теореме.

Первая последовательность 1 1 1 0 1 0 0

Вторая последовательность 1 1 0

Вычисление $\rho(0)$

Первая последовательность 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 1 0 0

Вторая последовательность 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0

Сумма по модулю 2 0 0 1 1 0 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 0

Число нулей = 11

Число единиц = 10

$$\rho = \frac{1}{21}$$

Вычисление $\rho(1)$

Первая последовательность 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 1 0 0

Вторая последовательность 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1

Сумма по модулю 2 1 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1 0 1 1 1 1

Число нулей = 11

число единиц = 10

$$\rho = \frac{1}{21}$$

Вычисление $\rho(2)$

Первая последовательность 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 1 0 0

Вторая последовательность 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1

Сумма по модулю 2 0 1 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1

Число нулей = 11

Число единиц = 10

$$\rho = \frac{1}{21}$$

Рис. 5.4. Вычисление функции взаимной корреляции двух псевдослучайных последовательностей

◆ **Теорема 5.1.** Функция взаимной корреляции двух двоичных последовательностей со взаимно простыми периодами является постоянной величиной. Функция взаимной корреляции двух двоичных видеосигна-

лов со взаимно простыми периодами также является постоянной величиной.

Заметим, что данная теорема справедлива не только для псевдослучайных, но и для любых двоичных последовательностей.

Статистическая независимость элементов последовательности и вероятность их появления

Прежде чем продолжать изучение корреляционных свойств псевдослучайных видеосигналов, рассмотрим некоторые способы вычисления их корреляционных функций. Для этого введем определения статистической независимости двоичных символов в последовательностях и вероятностей их появления. В любой псевдослучайной последовательности длины p содержится $(p-1)/2$ нулей и $(p+1)/2$ единиц или наоборот. В этой главе будет предполагаться, что число единиц в псевдослучайной последовательности на единицу больше, чем число нулей. Следовательно, при произвольном выборе из последовательности двоичных символов вероятности появления нуля и единицы можно записать так:

$$P(0) = \frac{p-1}{2p},$$
$$P(1) = \frac{p+1}{2p}.$$

Эти же выражения определяют относительные частоты появления нулей и единиц во всей последовательности. Так как две последовательности со взаимно простыми периодами принимают в течение их общего периода все возможные фазовые соотношения, то знание фазы одной последовательности не дает никакой информации о фазе другой. Например, если из двух последовательностей случайным образом выбираются пары двоичных символов, то появление конкретного двоичного символа в одной последовательности не влияет на вероятности выбора символов в другой. Поэтому две такие последовательности называют *статистически независимыми*. В данном случае совместная вероятность выбора пары символов равна произведению частных вероятностей появления отдельных символов. Этим свойством можно пользоваться при вычислении корреляционных функций.

На рис. 5.5 приведен пример вычисления функции взаимной корреляции для тех же последовательностей, что и на рис. 5.4. Заметим, что вероятности, являясь средними значениями относительных частот, позволяют непосредственно вычислить нормированные корреляционные функции.

Для определения совместных вероятностей, особенно в более сложных ситуациях, удобно воспользоваться картами Карно. На рис. 5.5 слева показана карта Карно для суммирования двух переменных по

Первая последовательность 1110100																																					
Вероятности для первой последовательности	$\left\{ \begin{array}{l} P(0) = \frac{3}{7}, \\ P(1) = \frac{4}{7}. \end{array} \right.$																																				
Вторая последовательность 110																																					
Вероятности для второй последовательности	$\left\{ \begin{array}{l} P(0) = \frac{1}{3}, \\ P(1) = \frac{2}{3}. \end{array} \right.$																																				
Совместные вероятности	$\left\{ \begin{array}{l} P(00) = \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{21}, \\ P(01) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{21}, \\ P(10) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{21}, \\ P(11) = \frac{4}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{21}. \end{array} \right.$																																				
Вероятность совпадений	$= P(00) + P(11) = \frac{3}{21} + \frac{8}{21} = \frac{11}{21}.$																																				
Вероятность несовпадений	$= P(01) + P(10) = \frac{6}{21} + \frac{4}{21} = \frac{10}{21}.$																																				
Коэффициент корреляции	$= \frac{11}{21} - \frac{10}{21} = \frac{1}{21}.$																																				
<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse; margin-right: 20px;"> <tr> <td style="padding: 0 5px;"></td> <td style="padding: 0 5px; text-align: center;">0</td> <td style="padding: 0 5px; text-align: center;">1</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 5px; text-align: right;">0</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px; text-align: center;">0</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px; text-align: center;">1</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 5px; text-align: right;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px; text-align: center;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px; text-align: center;">0</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;"></td> </tr> </table>		0	1		0	0	1		1	1	0		<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 0 5px;"></td> <td style="padding: 0 5px; text-align: center;">3</td> <td style="padding: 0 5px; text-align: center;">4</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 5px;"></td> <td style="padding: 0 5px; text-align: center;">7</td> <td style="padding: 0 5px; text-align: center;">7</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 5px; text-align: right;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px; text-align: center;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px; text-align: center;">4</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 5px; text-align: right;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px; text-align: center;">21</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px; text-align: center;">21</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 5px; text-align: right;">2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px; text-align: center;">6</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px; text-align: center;">8</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 5px; text-align: right;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px; text-align: center;">21</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px; text-align: center;">21</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;"></td> </tr> </table>		3	4			7	7		1	3	4		3	21	21		2	6	8		3	21	21	
	0	1																																			
0	0	1																																			
1	1	0																																			
	3	4																																			
	7	7																																			
1	3	4																																			
3	21	21																																			
2	6	8																																			
3	21	21																																			
Сумма по модулю 2	Вероятности																																				

Рис. 5.5. Вычисление функции взаимной корреляции двух псевдослучайных последовательностей с использованием вероятностей появления символов

модулю 2. Карта Карно справа аналогична предыдущей, однако, входами и выходами для нее являются частные и совместные вероятности соответственно. Вероятности совпадения или несовпадения символов получаются суммированием вероятностей событий, соответствующих нулям или единицам в клетках карты Карно слева.

Корреляционные функции комбинированных последовательностей

Некоторые комбинации последовательностей обладают корреляционными функциями, представляющими особый интерес. Один класс таких комбинированных последовательностей рассматривается в гл. 6. Элементы комбинированной последовательности формируются в результате некоторой логической операции над соответствующими элементами двух или более исходных последовательностей, которые называются *компонентами*. В качестве примера на рис. 5.6 показана комбинированная последовательность, полученная с помощью логической функции «И»¹⁾. При вычислении автокорреляционной функции этой последовательности следует рассмотреть четыре случая:

1) $\tau=0$;

2) $\tau=7n$, т. е. первая компонента комбинированной последовательности находится в фазе;

3) $\tau=15$, т. е. вторая компонента комбинированной последовательности находится в фазе;

4) τ равно любой другой величине, так что ни одна из компонент не находится в фазе.

Значения корреляционной функции для каждого из этих случаев можно определить при помощи карт Карно с вероятностями в качестве входов и выходов. Предварительно найдем результаты приводимых ниже логических выражений. В них прописные буквы используются для обозначения компонент первой комбинированной последовательности, а строчные буквы обозначают компоненты второй комбинированной последовательности. Когда две компоненты находятся в фазе, они обе обозначаются прописными буквами:

$$1) XY \oplus XY = 0;$$

$$2) XY \oplus Xy = XY\bar{y} + X\bar{Y}y;$$

$$3) XY \oplus xY = XY\bar{x} + \bar{X}Yx;$$

$$4) XY \oplus xy = XY\bar{x} + X\bar{Y}y + \bar{X}xy + \bar{Y}xy.$$

¹⁾ На один вход схемы «И» непрерывно поступают элементы последовательности длиной $p_1=7$, а на другой — элементы последовательности длиной $p_2=15$. Формируемая комбинированная последовательность состоит из $p_1p_2=105$ элементов и показана на второй и третьей строчках рис. 5.6 вверху (прим. ред.).

Первая компонента 1110100, вторая компонента 111100010011010,
 Комбинированная последовательность 1110000100010001101000100100101000010000010.

01000000001010100100010011000001100000011010011100000010000

$$p = p_1 p_2 = 7 \times 15 = 105;$$

Вычисление $P(0)$ и $P(1)$ для комбинированной последовательности

Вычисление p при синфазности второй компоненты

$$XY \oplus xY = XY\bar{x} + \bar{X}Yx$$

		Y			
		7	8		
		15	15		
X	0	0	0	x	3
	1	0	1		
		7	15	21	24
		4	15	105	105
		7	15	28	32
				105	105

		Xx					
		7	2	2	2		
		7	7	7	7		
Y	0	00	01	11	10	7	15
	1	0	1	0	1		
		7	15	7	15	7	15
		8	15	14	14	14	14
		15	15	105	105	105	105
				8	16	16	16
				105	105	105	105

$$P(0) = (21 + 24 + 28) \frac{1}{105} = \frac{73}{105}$$

$$P(0) = (7 + 14 + 14 + 14 + 8 + 16) \frac{1}{105} = \frac{73}{105}$$

$$P(1) = \frac{32}{105}$$

$$P(1) = (16 + 16) \frac{1}{105} = \frac{32}{105}$$

$$\rho = \frac{73 - 32}{105} = \frac{41}{105}$$

Вычисление p при синфазности первой компоненты

Вычисление p при несинфазности обеих компонент

$$XY \oplus Xy = XY\bar{y} + \bar{X}Yy$$

$$XY \oplus xy = XY\bar{x} + XY\bar{y} + \bar{X}xy + \bar{Y}xy$$

		Yy					
		3	4	4	4		
		15	15	15	15		
X	0	00	01	11	10	3	7
	1	0	1	0	1		
		7	15	12	12	9	12
		4	15	16	16	105	105
		7	15	12	12	12	12
				12	16	16	16
				105	105	105	105

		Yy					
		3	4	4	4		
		15	15	15	15		
Xx	00	00	01	11	10	1	7
	01	0	1	1	0		
		7	15	12	12	3	4
		2	15	16	16	105	105
		7	15	12	12	4	4
		2	15	16	16	105	105
		7	15	12	12	8	8
		2	15	16	16	105	105
		7	15	12	12	8	8
		2	15	16	16	105	105
		7	15	12	12	8	8
		2	15	16	16	105	105
		7	15	12	12	8	8
		2	15	16	16	105	105

$$P(0) = (9 + 12 + 12 + 12 + 12 + 16) \frac{1}{105} = \frac{73}{105}$$

$$P(0) = \frac{57}{105}$$

$$P(1) = \frac{48}{105}$$

$$P(1) = (16 + 16) \frac{1}{105} = \frac{32}{105}$$

$$\rho = \frac{57 - 48}{105} = \frac{9}{105}$$

$$\rho = \frac{73 - 32}{105} = \frac{41}{105}$$

Рис. 5.6. Вычисление автокорреляционной функции комбинированной последовательности

Следует отметить, что вычисление автокорреляционной функции с помощью карт Карно и частных вероятностей, как показано на рис. 5.5, приводит к неверным результатам, так как компоненты одинаковой длины являются статистически зависимыми. Для несинфазных компонент могут иметь место четыре комбинации их двоичных символов, расположенных на одинаковых позициях: 00, 01, 11 и 10. Если p — длина компоненты, то справедливы следующие утверждения:

- | | | |
|----|---|-------------------|
| 1. | Общее число комбинаций вида 00 и 11 равно | $\frac{p-1}{2}$. |
| 2. | » » » » 01 и 10 » | $\frac{p+1}{2}$. |
| 3. | » » » » 00 и 01 » | $\frac{p-1}{2}$. |
| 4. | » » » » 10 и 11 » | $\frac{p+1}{2}$. |
| 5. | » » » » 01 и 11 » | $\frac{p+1}{2}$. |
| 6. | » » » » 00 и 10 » | $\frac{p-1}{2}$. |

Отсюда можно подсчитать вероятности:

$$P(00) = \frac{p-3}{4p},$$

$$P(01) = P(10) = P(11) = \frac{p+1}{4p}.$$

Эти формулы применимы для любых псевдослучайных последовательностей, длина которых превышает 3. Последовательность из трех символов настолько коротка, что она является вырожденной. Именно поэтому она не используется в примере на рис. 5.6.

Следует обратить внимание на две особенности автокорреляционной функции, вычисленной на рис. 5.6. Во-первых, она имеет пики при всех значениях τ , которые делятся на период любой из компонент. Во-вторых, в том случае, когда обе компоненты несинфазны, значение автокорреляционной функции не равно $-\frac{1}{p_1 p_2}$. Последнее объясняется

тем, что комбинируемая последовательность, состоящая из 72 нулей и 32 единиц, является сильно неуравновешенной.

Вычисления, приведенные на рис. 5.6, можно упростить, если допустить, что псевдослучайная последовательность содержит одинаковое количество единиц и нулей. Это означает, что для несинфазной компоненты четыре комбинации 00, 01, 11 и 10 равновероятны.

Комбинированная последовательность = $X\bar{Y}$

Вычисление ρ при несинфазности обеих компонент

$$X\bar{Y} \oplus xy = X\bar{Y}\bar{x} + X\bar{Y}y + \bar{X}xy + \bar{Y}xy$$

		Yy			
		00	01	11	10
Xx	00	0	0	0	0
	01	0	1	1	0
	11	0	1	0	1
	10	0	0	1	1

		Yy			
		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Xx	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$P(0) = \frac{10}{16} \quad P(1) = \frac{6}{16}$$

$$\rho = \frac{10 - 6}{16} = \frac{1}{4}$$

Вычисление ρ при синфазности компоненты X

		Yy			
		00	01	11	10
Xx	00	0	0	0	0
	01				
	11	0	1	0	1
	10				

		Yy			
		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Xx	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
	0	0	0	0	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
	0	0	0	0	0

$$P(0) = \frac{6}{8} \quad P(1) = \frac{2}{6}$$

$$\rho = \frac{1}{2}$$

Рис. 5.7. Вычисление автокорреляционной функции комбинированной последовательности упрощенным методом

На рис. 5.7 в упрощенной форме вычисляется функция корреляции для тех же последовательностей, что и на рис. 5.6. Сначала рассматривается случай, когда обе компоненты несинфазны. Заметим, что при сделанном допущении все вероятности в клетках карты Карно становятся одинаковыми. Поэтому для вычисления корреляционной функции можно просто подсчитать число единиц и нулей, содержащихся в карте, и воспользоваться следующей формулой:

$$\rho = \frac{\text{число нулей} - \text{число единиц}}{\text{число нулей} + \text{число единиц}}.$$

Ошибка при вычислении корреляционной функции упрощенным методом равна: $\frac{1}{4} - \frac{9}{105} = \frac{105 - 36}{420} = 0,164$. В данном случае она довольно велика, однако с увеличением длины компонент комбинированной последовательности эта ошибка быстро уменьшается. Кроме простоты вычислений, приближенный метод обладает и другим преимуществом: он применим для последовательностей любой длины.

На рис. 5.7 приводится также пример вычисления автокорреляционной функции комбинированной последовательности при синфазности одной из компонент. Так как обе компоненты входят в комбинированную последовательность симметрично, то совершенно аналогичные результаты получаются и при синфазности другой компоненты.

Для вычисления автокорреляционной функции в рассматриваемом случае можно снова воспользоваться полной картой Карно. Необходимо только вычеркнуть из нее те строки, для которых переменные принимают различные значения. Это равносильно тому, что вероятности появления таких комбинаций значений переменных полагаются равными нулю, как показано на карте Карно справа. Ошибка вычислений в этом случае равна: $\frac{1}{2} - \frac{41}{105} = 0,228$.

Как и раньше, ошибка оказывается большой, однако она уменьшается с возрастанием длины отдельных компонент. Вследствие простоты и общности упрощенного метода он будет использоваться в остальной части этой главы. Разумеется, в реальных условиях значения корреляционной функции необходимо вычислять точно.

Не у всех комбинированных последовательностей автокорреляционная функция имеет пики при значениях τ , кратных периодам компонент. Например, для рассматриваемой на рис. 5.8 комбинированной последовательности автокорреляционная функция повсюду очень мала, кроме момента синфазности обеих компонент. Следовательно, данная комбинированная последовательность по своим корреляционным свойствам эквивалентна одиночной псевдослучайной последовательности.

Интересно также исследовать корреляционную функцию между комбинированной последовательностью и одной или несколькими ее компонентами. Соответствующий пример приведен на рис. 5.9.



Рис. 5.8. Автокорреляционная функция комбинированной последовательности, не имеющая дополнительных пиков



Рис. 5.9. Вычисление функции взаимной корреляции комбинированной последовательности с одной из ее компонент

§ 5.3. Корреляционные функции и спектры

Псевдослучайные двоичные видеосигналы

Так как псевдослучайные двоичные видеосигналы являются периодическими функциями времени, то они имеют линейчатый спектр, который может быть непосредственно получен с помощью метода рядов

Фурье. Однако, когда длина последовательности, из которой образуется двоичный видеосигнал, становится очень большой, решение данной задачи оказывается затруднительным даже для мощной вычислительной машины. Пользуясь методами, изложенными в гл. 3, можно из автокорреляционной функции двоичного видеосигнала найти его энергетический спектр. Это необходимо для определения спектра модулированного сигнала, от которого зависит требуемая ширина полосы частот канала связи.

Энергетический спектр двоичного видеосигнала, автокорреляционная функция которого представлена на рис. 5.3, имеет вид:

$$\Phi(\omega) = \frac{p+1}{p^2} \left[\frac{\sin\left(\frac{\omega t_0}{2}\right)}{\frac{\omega t_0}{2}} \right]^2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{pt_0}\right) + \frac{1}{p^2} \delta(\omega),$$

где p — период последовательности; t_0 — длительность двоичного символа. Необходимо отметить следующие особенности этого спектра. Во-первых, он линейчатый, причем частоты отдельных гармоник кратны

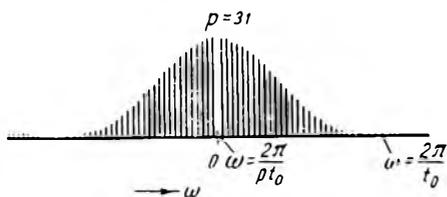


Рис. 5.10. Энергетический спектр двоичного видеосигнала, сформированного из псевдослучайной последовательности длины 31

основной частоте сигнала. Во-вторых, поскольку двоичный видеосигнал представляет собой прямоугольное колебание с постоянной амплитудой, то его мощность постоянна. Поэтому в выражении для энергетического спектра такого сигнала отсутствует масштабный коэффициент, обратно пропорциональный периоду последовательности. Таким образом, если период последовательности увеличивается вдвое, то плотность линий в спектре удваивается, а мощность каждой гармоники уменьшается наполовину.

В-третьих, вид огибающей спектра определяется длительностью двоичного символа. Это означает, что полоса частот, которую надо обеспечить для передачи двоичного видеосигнала с заданной точностью, не зависит от его длины, а определяется исключительно длительностью двоичного символа, т. е. максимальной частотой изменения его полярности. Найдем теперь постоянную составляющую псевдослучайного двоичного видеосигнала. Такой сигнал состоит из нечетного числа элементарных импульсов, причем $(p+1)/2$ из них имеют одну полярность, а $(p-1)/2$ — другую. Следовательно, величина постоянной составляющей сигнала равна $\pm 1/p$, а ее мощность есть $1/p^2$. На рис. 5.10 показано изображение энергетического спектра видеосигнала, образованного из последовательности длиной 31.

Комбинированные видеосигналы

Очевидно, что двончный видеосигнал, имеющий автокорреляционную функцию с несколькими пиками, является периодической функцией времени. Поэтому его энергетический спектр можно определить из автокорреляционной функции точно таким же способом, как и для двончного видеосигнала, автокорреляционная функция которого содержит только один пик. Однако, когда число пиков велико, процесс интегрирования становится громоздким, и для его выполнения может потребоваться даже цифровая вычислительная машина. Решение этой задачи упрощается, если подынтегральное выражение разбить на части.

На рис. 5.11 приводится пример, поясняющий этот метод. Показанная на рисунке автокорреляционная функция является приближенной, так как: во-первых, значение ее нижнего уровня принимается равным нулю вместо небольшой отрицательной величины, а во-вторых, на рисунке отложены асимптотические значения амплитуд всех пиков, кроме основного при $\tau=0$, получающиеся при неограниченном возрастании длины сигнала.

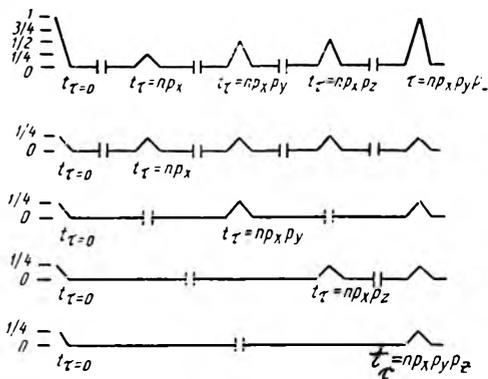


Рис. 5.11. Автокорреляционная функция комбинированного двончного видеосигнала

Первое допущение оказывает влияние лишь на постоянную составляющую спектра, которой часто пренебрегают. Второе допущение вносит ошибки в определение относительных амплитуд отдельных гармоник. Как правило, эти ошибки не имеют существенного значения в тех случаях, для которых вычисляется энергетический спектр. Однако излагаемый метод можно использовать с таким же успехом и при точном задании автокорреляционной функции.

Показанную на рис. 5.11 автокорреляционную функцию можно представить как сумму нескольких функций (в данном случае, четырех), имеющих одинаковую форму, но различные периоды и, возможно, различные амплитуды пиков. Поскольку операции интегрирования и суммирования переместимы, то можно по отдельности определить спектры, соответствующие каждой частичной автокорреляционной функции. Однако все они совпадают по форме (за исключением положения нижнего уровня) с автокорреляционной функцией псевдослучайного сигнала. Отсюда сразу же следуют выражения для частичных спектров,

которые для данного случая равны приблизительно:

$$\Phi_1(\omega) = \frac{1}{4\rho_x} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega t_0}{2}\right)}{\left(\frac{\omega t_0}{2}\right)^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\rho_x t_0}\right),$$

$$\Phi_2(\omega) = \frac{1}{4\rho_x \rho_y} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega t_0}{2}\right)}{\left(\frac{\omega t_0}{2}\right)^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\rho_x \rho_y t_0}\right),$$

$$\Phi_3(\omega) = \frac{1}{4\rho_x \rho_z} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega t_0}{2}\right)}{\left(\frac{\omega t_0}{2}\right)^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\rho_x \rho_z t_0}\right),$$

$$\Phi_4(\omega) = \frac{1}{4\rho_x \rho_y \rho_z} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega t_0}{2}\right)}{\left(\frac{\omega t_0}{2}\right)^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\rho_x \rho_y \rho_z t_0}\right).$$

Все эти частичные спектры имеют одну и ту же огибающую, что не вызывает удивления, поскольку огибающая спектра определяется частотой изменения полярности видеосигнала или шириной пиков автокорреляционной функции. Каждый частичный спектр вносит в общий спектр свои собственные гармоники. Гармоники четвертого частичного спектра имеют частоты, кратные основной частоте сигнала. Гармоники третьего частичного спектра совпадают по частоте с каждой ρ_y -й гармоникой четвертого спектра. Мощности гармоник отдельных частичных спектров суммируются. Аналогично гармоники второго частичного спектра совпадают по частоте с каждой ρ_z -й, а первого — с каждой $\rho_y \rho_z$ -й гармониками четвертого частичного спектра. Таким образом, спектр комбинированного сигнала имеет ряд характерных особенностей. Во-первых, вид его огибающей определяется шириной пиков автокорреляционной функции; во-вторых, частоты его гармоник кратны основной частоте видеосигнала и, в-третьих, он обладает тонкой структурой, которая возникает в результате наложения соответствующих гармоник отдельных частичных спектров.

Вид тонкой структуры определяется амплитудами отдельных пиков автокорреляционной функции комбинированного видеосигнала и периодами компонентных последовательностей. Рассмотренный в данном примере метод является самым общим и позволяет выразить спектр видеосигнала через длительность двоичного символа t_0 и периоды его компонент. Иногда вместо энергетического удобнее пользоваться ам-

плитудным спектром сигнала. Действительно, до сих пор предполагалось, что двоичный видеосигнал с единичной амплитудой прикладывался к единичному сопротивлению, на котором выделялась единичная мощность. Если это не так, то в выражение для энергетического спектра необходимо ввести соответствующий масштабный коэффициент. Однако, как правило, интерес представляет лишь относительное распределение энергии в спектре сигнала. Тогда данное предположение оказывается весьма удобным. В этом случае амплитудный спектр приблизительно определяется следующим выражением:

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{p} \frac{\sin\left(\frac{\omega t_0}{2}\right)}{\frac{\omega t_0}{2}}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{pt_0}\right).$$

§ 5.4 Модуляция несущей двоичным видеосигналом

Балансная модуляция

Для большого числа систем связи желательно, чтобы излучение осуществлялось непрерывно с использованием всей мощности передатчика. Особенно это относится ко многим системам связи с двоичным кодированием. Одним из применяемых видов модуляции является амплитудная модуляция с подавленной несущей, или балансная модуляция. При обычной амплитудной модуляции амплитуда несущего колебания изменяется под действием модулирующей функции времени, в результате чего промодулированный сигнал имеет вид:

$$A[1 + m(t)] \cos \omega_c t,$$

где A — амплитуда несущей; ω_c — угловая частота несущей; $m(t)$ — модулирующий сигнал.

Абсолютное значение m выбирается, как правило, меньше 1. При этом в спектре модулированного сигнала содержится составляющая на несущей частоте. Если используется балансная модуляция, модулированный сигнал определяется выражением: $A[m(t)] \cos \omega_c t$, в котором отсутствует составляющая сигнала на несущей частоте при условии, что среднее значение $m(t)$ равно нулю. В результате балансной модуляции происходит перенос спектра модулирующего сигнала по оси ча-

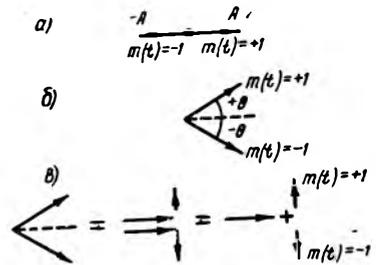


Рис. 5.12. Векторные диаграммы для балансной модуляции и фазовой модуляции двоичным видеосигналом

стот на величину, равную частоте несущей. Конечно, это справедливо лишь для двоичного модулирующего сигнала. Как правило, частота несущего колебания намного выше частот основных гармоник модулирующего сигнала, так что значения спектральной плотности на низких частотах оказываются пренебрежимо малы.

Часто для пояснения процесса модуляции используются фазовые диаграммы. Для случая балансной модуляции двоичным сигналом фазовая диаграмма принимает особенно простой вид, представленный на рис. 5.12а. Когда сигнал $m(t)$ равен $+1$, передается сама несущая. Если $m(t)$ принимает значение -1 , фаза передаваемой несущей меняется на 180° . Такой сигнал имеет постоянную мощность.

Фазовая модуляция

При фазовой модуляции фаза несущего колебания изменяется пропорционально модулирующей функции и результирующий сигнал можно представить в виде: $A\cos[\omega_c t + \Theta m(t)]$.

Обычно при анализе фазовой модуляции модулирующий сигнал предполагается синусоидальным. В этом случае спектр модулированного сигнала выражается с помощью бесселевых функций. При использовании сложных двоичных видеосигналов, которые можно представить состоящими из большого числа синусоидальных колебаний, такой анализ становится трудно выполнимым. Кроме того, частоты указанных синусоидальных колебаний находятся в простых кратных соотношениях. Поэтому от каждого из них в результате модуляции возникают одни и те же боковые частоты. Чтобы их суммировать, необходимо знать фазы данных частот. Следовательно, должны быть известны фазы гармоник модулирующего видеосигнала, которые, в свою очередь, можно определить только путем разложения этого видеосигнала в ряд Фурье.

Для двоичных видеосигналов с периодами, равными многим тысячам двоичных символов, подобный анализ оказывается совершенно непригодным. Однако использование фазовых диаграмм приводит к простому методу анализа фазовой модуляции. Двоичный видеосигнал принимает значения либо $+1$, либо -1 . Поэтому фаза модулированной несущей равняется либо $+\Theta$, либо $-\Theta$ (рис. 5.12б).

Показанные на рисунке фазовые векторы можно разложить на синфазные и квадратурные составляющие (рис. 5.12в). Синфазные составляющие для обоих случаев одинаковы и всегда присутствуют в модулированном сигнале. Следовательно, последний можно представить в виде суммы немодулированной синфазной составляющей и модулированной квадратурной составляющей.

Как видно из рисунка, квадратурная составляющая промодулирована по закону балансной модуляции. Амплитуды обеих составляю-

щих пропорциональны косинусу и синусу угла модуляции Θ соответственно.

Из рассмотренного анализа ясно, что амплитудные спектры фазомодулированного и балансно-модулированного сигналов совпадают, за исключением того, что в первом случае в спектре содержится составляющая на несущей частоте. При фазовой модуляции мощность передаваемого сигнала также остается постоянной.

§ 5.5. Преобразования сигналов в приемнике

Понятие о смешивании

Одной из наиболее важных операций в приемнике является смешивание, или перемножение двух сигналов. Если оба сигнала представляют собой синусоиды, то в результате смешивания получаем

$$A_1 \cos [\omega_1 t + \Theta_1] \times A_2 \cos [\omega_2 t + \Theta_2]$$

или

$$A_1 A_2 \left\{ \frac{1}{2} \cos [(\omega_1 + \omega_2) t + (\Theta_1 + \Theta_2)] \right\} + A_1 A_2 \left\{ \frac{1}{2} \cos [(\omega_1 - \omega_2) t + (\Theta_1 - \Theta_2)] \right\},$$

где амплитуды и фазы могут быть функциями времени. Обычно на выходе смесителя включается фильтр, с помощью которого устраняется член или с суммарной частотой, или с разностной. Ниже будем предполагать, что подавляется член с суммарной частотой, однако полученные результаты будут справедливы и для другого случая.

Смешивание балансно-модулированных сигналов

Пусть на входы смесителя поступают два синусоидальных колебания, подвергнутых балансной модуляции двоичными видеосигналами. Тогда на выходе смесителя с учетом фильтрации имеем

$$A_1 A_2 [m_1(t) m_2(t)] \left\{ \frac{1}{2} \cos [(\omega_1 - \omega_2) t + (\Theta_1 - \Theta_2)] \right\}.$$

После нормирования и соответствующего выбора начала отсчета это выражение сводится к следующему: $A[m_1(t)m_2(t)] \cos \omega t$.

Особый интерес представляет случай, когда оба двоичных видеосигнала не только имеют одинаковые периоды двоичных символов, но и когерентны, т. е. совпадают положения их элементарных импуль-

сов. Вследствие когерентности можно отказаться от обычного анализа процесса смешивания, основанного на использовании амплитудных и энергетических спектров входных сигналов смесителя.

Рассмотрим крайний случай, когда оба двоичных видеосигнала одинаковы. Тогда $m_1(t)m_2(t) = 1$, и на выходе смесителя существует немодулированное колебание. Однако если эти же двоичные сигналы смещены друг относительно друга на один или более двоичных символов, то сигнал на выходе смесителя будет в общем случае модулированным. Это свидетельствует о том, что для анализа процесса смешивания необходимо определенным образом использовать информацию о фазах видеосигналов. Данную информацию можно учесть, если оперировать с сигналами непосредственно как с функциями времени или если представить их рядом Фурье. При больших длинах исходных последовательностей указанные способы ввиду их трудоемкости оказываются неудовлетворительными.

Если известна некоторая информация относительно структуры двоичных последовательностей (что и представляет интерес в этой главе), то анализ процесса смешивания можно значительно упростить. Для этого необходимо проследить, как взаимодействуют при смешивании отдельные символы двух двоичных видеосигналов. Каждый из модулирующих видеосигналов может принимать значения или $+1$, или -1 . Тогда возможны четыре комбинации значений входных сигналов. Эти комбинации, а также

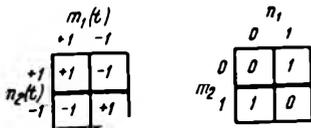


Рис. 5.13. Карта Карно для балансной модуляции

соответствующие им значения сигнала на выходе смесителя удобно свести в таблицу в виде карты Карно (рис. 5.13).

Из рисунка видно, что сигнал на выходе смесителя представляет собой несущую одной полярности при одинаковых знаках модулирующих двоичных видеосигналов на его входах и другой полярности — при различных. Для сравнения на рис. 5.13 справа приводится карта Карно для операции сложения по модулю 2. По форме она совпадает с картой Карно для смешивания балансно-модулированных сигналов. Отсюда следует весьма важное заключение: двоичный видеосигнал, модулирующий колебание на выходе смесителя, представляет собой результат сложения по модулю 2 двоичных видеосигналов, модулирующих входные колебания.

Таким образом, в смесителе происходит не только гетеродинирование несущих входных сигналов, но и поэлементное сложение по модулю 2 соответствующих им двоичных последовательностей. Для получения любой характеристики выходного сигнала смесителя (например, спектра) проще всего непосредственно проанализировать этот сигнал, пользуясь методом, изложенным в § 5.4.

Смешивание фазо-модулированных сигналов

Отфильтрованный выходной сигнал смесителя, на входы которого поступают два колебания, промодулированные по фазе двоичными видеосигналами, имеет вид

$$A_1 A_2 \frac{1}{2} \cos \{(\omega_1 - \omega_2)t + \Theta_1(t) - \Theta_2(t)\}.$$

После нормирования и соответствующего выбора начала отсчета это выражение сводится к следующему:

$$A \cos [\omega t + \Theta_1 m_1(t) - \Theta_2 m_2(t)],$$

где Θ_1 и Θ_2 — индексы модуляции соответствующих входных сигналов: $m_1(t)$ и $m_2(t)$ — двоичные функции времени.

Если элементарные импульсы двоичных видеосигналов $m_1(t)$ и $m_2(t)$ имеют одинаковые длительности и совпадают по положению, то для определения сигнала на выходе смесителя можно, как и раньше, воспользоваться картой Карно. В этом случае также возможны четыре комбинации значений фазы входных сигналов смесителя, однако фаза выходного сигнала равняется разности фаз двух входных сигналов (рис. 5.14). Если индексы модуляции смешиваемых сигналов различны, то фаза выходного сигнала смесителя может принимать четыре различных значения. Но даже при их совпадении существует три совершенно различных значения фазы выходного сигнала.

$\Theta_1 m_1(t)$	
$+\Theta_1$	$-\Theta_1$
$\Theta_1 - \Theta_2$	$\Theta_1 - \Theta_2$
$-\Theta_2$	$+\Theta_2$

$\Theta_2 m_2(t)$	
$+\Theta_2$	$-\Theta_2$
0	-2θ
-2θ	0

Рис. 5.14. Карта Карно для фазовой модуляции

Таким образом, получаемый в результате смешивания сигнал оказывается промодулированным по фазе, однако он уже не является двоичным. Смеситель не сохраняет двоичного характера модуляции, и именно поэтому при обработке двоичной информации операция смешивания фазо-модулированных сигналов, как правило, не применяется. Исключение составляет случай, когда фазовый угол одного из входных сигналов смесителя принимает значения $\pm 90^\circ$, т. е. несущее колебание подвергнуто балансной модуляции и затем сдвинуто по фазе на 90° . Разумеется, если фазовые углы обоих входных сигналов смесителя принимают значения $\pm 90^\circ$, то это соответствует перемножению балансно-модулированных сигналов, за исключением смещения начала отсчета фазовых углов.

Синхронное детектирование как частный случай смешивания

Синхронное детектирование можно рассматривать как смешивание двух сигналов с одинаковыми частотами. В общем случае оба смешиваемых сигнала могут быть промодулированы по амплитуде или по

фазе, или по обоим этим параметрам одновременно. Тогда сигнал на выходе смесителя можно записать в виде:

$$A_1(t)A_2(t) \left\{ \frac{1}{2} \cos [\Theta_1(t) - \Theta_2(t)] + \frac{1}{2} \cos [2\omega t + \Theta_1(t) + \Theta_2(t)] \right\}.$$

Как правило, член с суммарной частотой подавляется с помощью фильтра. Оставшееся выражение имеет вид

$$\frac{1}{2} A_1(t) A_2(t) \cos [\Theta_1(t) - \Theta_2(t)].$$

Из всего множества вариантов, которые могут встретиться при анализе процесса синхронного детектирования, рассмотрим только два. В первом случае один из сигналов является балансно-модулированным, а другой — чисто синусоидальным. При этом если фазы обоих сигналов одинаковы, то получим

$$\frac{1}{2} A_1 m_1(t) A_2 \cos(0) = \left[\frac{1}{2} A_1 A_2 \right] m_1(t).$$

При таком детектировании модулирующий видеосигнал восстанавливается с точностью до масштабного коэффициента. Заметим, что когда фазы несущих входных сигналов смесителя различны, в приведенном выше выражении появляется дополнительный масштабный коэффициент, равный косинусу разности этих фаз.

Теперь рассмотрим второй случай, когда один из сигналов промодулирован по фазе. При равенстве нулю фазы другого сигнала получим $\frac{1}{2} A_1 A_2 \cos [\Theta_1(t)]$. Если $\Theta_1(t)$ является двоичной функцией времени, то значение сигнала на выходе синхронного детектора будет равно постоянной величине, т. е. модулирующий сигнал при детектировании не восстанавливается. При равенстве фазы немодулированного колебания 90° получим следующее выражение:

$$\frac{1}{2} A_1 A_2 \cos [\Theta_1(t) - 90^\circ] = \frac{1}{2} A_1 A_2 \sin [\Theta_1(t)].$$

В этом случае двоичный модулирующий видеосигнал восстанавливается с точностью до масштабного коэффициента. Если фаза немодулированного колебания отличается от 90° , то в выражении для выходного сигнала синхронного детектора будут присутствовать и некоторый масштабный коэффициент, и постоянный член.

Л и т е р а т у р а

1. K a r n a u g h M., The Map Method for Synthesis of Combinational Logic Circuits, Communications and Electronics (November), 1953, 593—599.

ПРИМЕНЕНИЕ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ДАЛЬНОСТИ

§ 6.1. Проблема измерения дальности

При создании систем космической связи большое внимание уделяется проблеме слежения. Можно выделить два вида слежения. Первый из них заключается в постоянном совмещении оси антенны с направлением на цель и непрерывной настройке приемника на частоту входящего сигнала. Решение данной задачи обеспечивается с помощью следящих систем. Слежение второго вида состоит в получении информации, которая позволит вычислить настоящее и будущее местоположение космического аппарата. Как правило, эта информация представляет собой совокупность данных об угловых координатах цели, доплеровском смещении частоты и дальности до цели.

Решение задач слежения за целью в космосе по направлению и доплеровской частоте, а также задач по определению угловых координат и скорости цели, по существу, базируется на уже известных радиолокационных методах. Поэтому рассмотрение этих вопросов выходит за рамки настоящей книги. При межпланетных расстояниях, даже в пределах солнечной системы, принципиально новой является задача измерения дальности.

Классический радиолокационный метод определения дальности до цели заключается в измерении промежутка времени между моментами излучения зондирующего импульса и прихода отраженного от цели импульса. Это время, умноженное на скорость распространения электромагнитных волн в среде, равно удвоенной дальности до цели.

При больших дальностях выделить отраженный импульс становится

ся чрезвычайно трудно, даже если для усиления эхо-сигнала на борту космического аппарата используется приемопередатчик. В этих случаях можно передавать несколько импульсов или даже посылать непрерывное прямоугольное или синусоидальное колебание и использовать для обнаружения отраженного сигнала корреляционные методы. Однако если период повторения импульсов или период непрерывного колебания меньше времени распространения сигнала до цели и обратно, то при измерении дальности возникает неопределенность. Для ее устранения в излучаемый сигнал необходимо ввести дополнительную периодическую составляющую с периодом, превышающим время распространения эхо-сигнала от цели до приемной станции. При этом должна обеспечиваться возможность измерения фазы отраженного сигнала с точностью до периода повторения импульсов или периода непрерывного колебания.

Указанным свойством обладают рассмотренные в гл. 4 *псевдослучайные последовательности*, которые используются для модуляции последовательности импульсов или непрерывного колебания, причем «нулю» в последовательности может соответствовать излучение импульса или непрерывное колебание в одной фазе, а «единице» — отсутствие излучения импульса или непрерывное колебание в противоположной фазе. Отраженный сигнал затем коррелируется с имеющейся в приемнике копией излученного сигнала (оперным сигналом) для точного определения относительной фазы между ними. В этом случае удается устранить неопределенность при измерении дальности, так как длина генерируемой последовательности может достигать миллиардов и триллионов двоичных символов.

При построении подобной системы измерения дальности возникает еще одна проблема — обеспечение хорошей разрешающей способности, что требует высокой частоты повторения символов последовательности. При больших дальностях это приводит к длинным последовательностям. Кроме того, в данном случае мала мощность отраженного сигнала, поэтому для его обнаружения необходимо большое время интегрирования.

Для нахождения фазы псевдослучайной последовательности можно воспользоваться методом шаговой корреляции, который заключается в следующем. Выбирается некоторая фаза опорной последовательности и определяется величина корреляции между отраженной и опорной последовательностями. При неправильном выборе фазы испытывают следующее ее значение и т. д. Если последовательность содержит миллион двоичных символов, то для нахождения фазы опорного сигнала может потребоваться миллион подобных испытаний. Однако с точки зрения теории информации в этом случае необходимо задать не 10^6 , а лишь $\log_2 10^6$ вопросов типа «да» или «нет».

Были найдены последовательности, позволяющие приблизиться к этому теоретическому пределу. Они образуются путем почленного комбинирования нескольких коротких псевдослучайных последовательностей. Если периоды последних не имеют общих делителей, то период комбинированной последовательности равен произведению периодов отдельных коротких последовательностей. Тогда для определения фазы комбинированной последовательности достаточно найти фазу каждой из ее компонент. Так, если длина комбинированной последовательности равна $p_1 p_2 \dots p_n$, где p_i — длины ее компонент, то наибольшее число точек, для которых требуется вычислить корреляцию, равно $p_1 + p_2 + \dots + p_n$. Именно такие последовательности, имеющие автокорреляционную функцию с несколькими пиками, были описаны в § 5.2.

В этой главе рассматривается применение комбинированных псевдослучайных последовательностей для измерения дальности. Они служат для образования двоичных видеосигналов, которые затем могут использоваться для модуляции высокочастотной несущей. В дальнейшем двоичные видеосигналы, применяемые для измерения дальности, будем называть *дальномерными кодами*.

§ 6.2. Корреляторы и схемы слежения

Корреляторы и обнаружители

На рис. 6.1а показана простейшая схема устройства для определения корреляции двух сигналов. Такое устройство хорошо работает, когда оба входных сигнала представлены в виде кодов. Тогда вследствие двоичной структуры кодов вместо перемножителя можно использовать некоторое переключающее или цифровое устройство. Однако на практике один из сигналов (или оба) может сильно исказиться под действием шума, полная мощность которого на входе перемножителя иногда превышает мощность полезного сигнала на 50 и более децибел. В этих условиях построение широкополосного перемножителя постоянного тока оказывается чрезвычайно трудной задачей. Эта задача упрощается, если входной сигнал перемножителя представлен в виде непрерывного несущего колебания, промодулированного, например, по закону балансной модуляции двоичным кодом.

Одна из возможных схем коррелятора для указанного случая показана на рис. 6.1б. Полосовой фильтр подавляет большую часть помех на входе второго перемножителя, вследствие чего подаваемые на него входные сигналы являются теперь узкополосными. Фазы несущих (входной и опорной) должны быть одинаковы. Тогда при совпадении двоичных символов обоих кодов несущая с первого перемножителя (точнее, с выхода полосового фильтра) находится в фазе с опорной. Если соот-

ветствующие двоичные символы обоих кодов различны, то фаза колебания с выхода полосового фильтра меняется на обратную.

Следовательно, при наличии корреляции двух кодов входной сигнал второго перемножителя всегда находится в фазе с опорной несущей. При отсутствии корреляции в течение половины интервала усреднения входной сигнал второго перемножителя находится в фазе с опор-

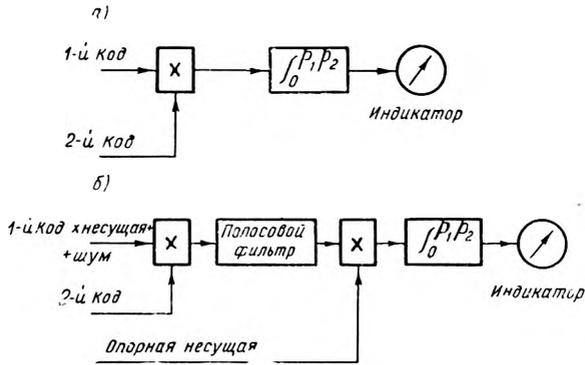


Рис. 6.1. Корреляторы

ной несущей, и в течение другой половины — в противофазе. В результате сигнал на выходе интегратора равен нулю. В общем случае он пропорционален величине корреляции двух кодов.

Слежение за задержкой принимаемого сигнала с использованием корреляторов постоянного тока

Другая задача, представляющая интерес при измерении дальности, состоит в обеспечении непрерывного слежения за задержкой двоичного кода после того, как он был обнаружен (т. е. установлен момент корреляции принимаемого и опорного кодов).

Предположим, что был послан сигнал, образованный из одиночной псевдослучайной последовательности, и с помощью измерения корреляции опорный сигнал был согласован по фазе с сигналом, отраженным от цели (введен в синхронизм). Тогда разность фаз между излученным и опорным сигналами служит мерой дальности до цели. Однако при изменении дальности синфазное положение отраженного и опорного сигналов нарушается. Для обеспечения непрерывного измерения дальности желательно иметь некоторое следящее устройство, которое автоматически поддерживает отраженный и опорный сигналы в синхронизме.

Коррелятор, показанный на рис. 6.1б, осуществляет обнаружение отраженного кода, но его нельзя использовать для автоматического

слежения за задержкой отраженного кода, так как в нем не вырабатывается сигнал ошибки, когда отраженный и опорный коды начинают выходить из синхронизма.

Схема, вырабатывающая сигнал ошибки, показана на рис. 6.2. Если коды B и A находятся в фазе, то любое последующее нарушение синфазности между ними вызывает появление сигнала ошибки, имеющего отрицательный знак, когда код B опережает код A , и положи-

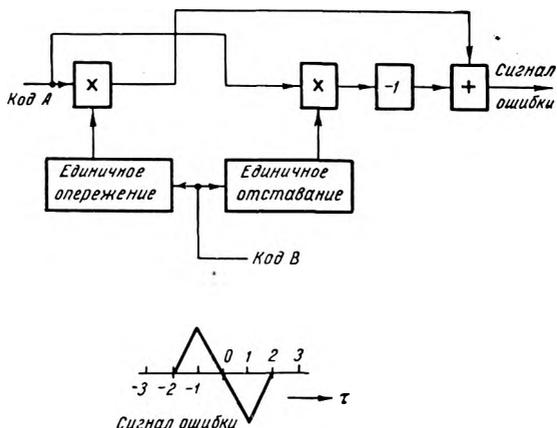


Рис. 6.2. Метод формирования сигнала ошибки для слежения за задержкой принимаемого кода

тельный знак — в противоположном случае. Полученный сигнал ошибки можно использовать для управления тактовой частотой генератора кода B и тем самым поддерживать коды B и A в фазе. Эта схема обладает тем же недостатком, что и коррелятор на рис. 6.1а: при наличии шумов возникают серьезные трудности, связанные с построением широкополосных перемножителей постоянного тока.

Слежение за задержкой принимаемого сигнала с использованием несущей или частоты синхронизации

Для построения устройства слежения за задержкой принимаемого сигнала к коррелятору, показанному на рис. 6.1б, можно подключить систему фазовой автоподстройки частоты (ФАП), осуществляющую слежение за несущей или специальным сигналом синхронизации¹⁾, и ис-

¹⁾ Ниже будет показано, что с точки зрения качества синхронизации целесообразно использовать не несущую, а специальный сигнал синхронизации, период которого определенным образом связан с длительностью символа кода (прим. ред.).

пользовать вырабатываемое ею когерентное напряжение для управления сдвигом генератора опорного кода. Схема подобного устройства слежения показана на рис. 6.3. Здесь внутренний контур представляет собой систему ФАП, настроенную на частоту синхронизации. С помощью внешнего контура тактовая частота генератора опорного кода изменяется пропорционально изменению принимаемой частоты синхронизации.

Предположим, что принимаемый и опорный коды в точности синфазны и сигнал на выходе генератора управляемого напряжения (ГУН) находится в фазе с частотой синхронизации принимаемого сигнала. Тогда напряжение постоянного тока на выходе второго перемножителя отсутствует.

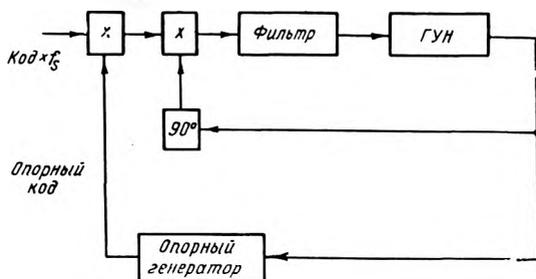


Рис. 6.3. Двухконтурное устройство слежения за задержкой принимаемого кода

Если принимаемые код и частота синхронизации начинают смещаться относительно опорного кода и опорной частоты синхронизации (напряжения с выхода ГУН), то на выходе второго перемножителя возникает сигнал постоянного тока. Он изменяет частоту ГУН таким образом, что опорная частота синхронизации и, следовательно, опорный код поддерживаются в фазе с принимаемыми.

Рассмотренное двухконтурное следящее устройство является основной частью приемника системы измерения дальности до цели. В таком приемнике, описанном в § 6.4, осуществляются обнаружение принимаемого кода и последующее слежение за его задержкой. Это позволяет непрерывно измерять время распространения сигнала до цели и обратно.

Связь между частотой синхронизации и формой сигнала ошибки

Прежде чем рассмотреть вопрос о соотношении между периодом частоты синхронизации и длительностью двоичного символа псевдослу-

чайного кода, заметим, что величина ошибки является функцией временного сдвига τ между принимаемым и опорным сигналами. В частности,

$$E(\tau) = \int_{\text{Период}} \text{код}_1(t) f_s(t) \text{код}_2(t + \tau) f_s\left(t + \tau + \frac{p f_s}{4}\right) dt,$$

где $f_s(t)$ — частота синхронизации; $p f_s$ — период частоты синхронизации. Период интегрирования равен произведению периодов кода и частоты синхронизации. Как видно из рис. 6.4, приведенное выше выражение можно приблизительно представить в виде произведения двух интегралов:

$$E(\tau) = \left[\int_{\text{Период}} \text{код}_1(t) \text{код}_2(t + \tau) dt \right] \left[\int_{\text{Период}} f_s(t) f_s\left(t + \tau + \frac{p f_s}{4}\right) dt \right].$$

Эти интегралы являются автокорреляционными функциями кода и частоты синхронизации. Если последняя представляет собой прямоугольное колебание, то ей соответствует корреляционная функция, изображенная на рис. 6.4а. На рис. 6.4б показана корреляционная функция псевдослучайного кода, ширина пика которой в шесть раз больше периода частоты синхронизации. Кривая сигнала ошибки на рис. 6.4в является линейной аппроксимацией произведения этих двух корреляционных функций. Кривая имеет шесть точек устойчивого равновесия (устойчивых нулей)¹⁾, поэтому подобная функция ошибки оказывается непригодной для слежения за задержкой сигнала, так как на практике невозможно предсказать, в какой точке устойчивого равновесия находится система.

Более подходящей для построения устройств слежения является частота синхронизации, период которой равен удвоенной длительности двоичного символа кода. Кривая сигналов ошибки для этого случая показана на рис. 6.5, из которого следует другой подход к определению сигнала ошибки. Действительно, подынтегральное выражение можно представить в виде произведения двух сомножителей: $(\text{код}_1 \times f_{s1})$ и

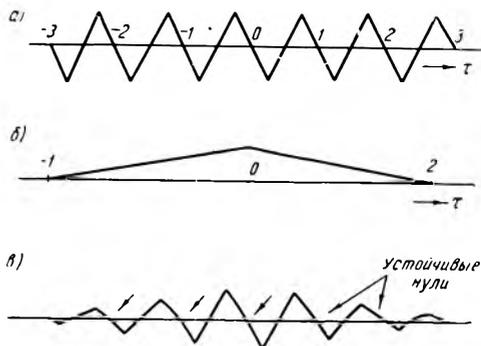


Рис. 6.4. Корреляционные функции и кривые сигнала ошибки для двухконтурного устройства слежения

¹⁾ Система находится в точке устойчивого равновесия, если любое ее отклонение от данной точки вызывает сигнал, стремящийся вернуть систему обратно в эту точку.

(код₂ × f_{s2}), показанных на рис. 6.5в и г соответственно¹⁾. Тогда сигнал ошибки определяется взаимной корреляционной функцией этих сомножителей (рис. 6.5д). Такая кривая сигнала ошибки имеет только один устойчивый нуль при τ=0. Кроме того, она имеет два квазиустойчивых нуля, которые иногда могут вредно влиять на работу системы. Один из возможных путей решения проблемы квазиустойчивых нулей описывается в следующем параграфе.

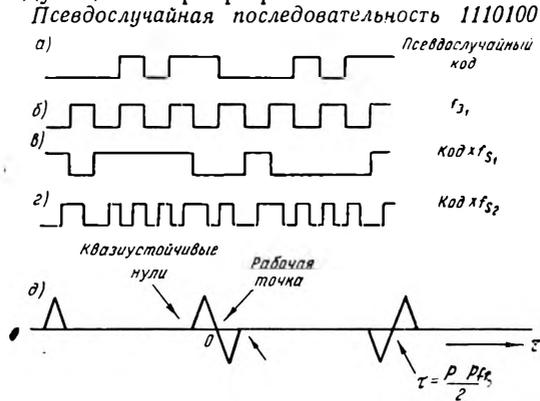


Рис. 6.5. Получение кривой сигнала ошибки с одним устойчивым нулем

Существование зеркального участка взаимной корреляционной функции в окрестности $\tau = pp f_s / 2$, где p — период кода, объясняется тем, что в этот момент времени псевдослучайные коды находятся в той же фазе, а частоты синхронизации — в противоположной по отношению к $\tau=0$.

§ 6.3. Дальномерные коды

Простейший псевдослучайный код, смешанный с частотой синхронизации

Простейшим дальномерным кодом является двоичный видеосигнал, образованный из одиночной псевдослучайной последовательности. Разумеется, в качестве дальномерного кода может быть использован сигнал в виде смеси псевдослучайного кода и частоты синхронизации при условии, что предусмотрены меры, предотвращающие «попадание»

¹⁾ Здесь через f_{s2} обозначается та же частота синхронизации f_{s1} , но сдвинутая на 1/4 периода (прим. ред.).

контура ФАП в один из квазиустойчивых нулей. Однако из-за значительного времени вхождения в синхронизм применение такого сигнала в системах измерения дальности нецелесообразно.

Комбинированные дальномерные коды

Комбинированная последовательность, которая впервые использовалась для измерения дальности, формировалась по следующему закону:

$$W = X \oplus YZ.$$

Вычисление автокорреляционной функции такой последовательности приведено на рис. 6.6. Так как компоненты Y и Z входят в выражение для W симметрично, то вычисления выполняются только для одной из них.

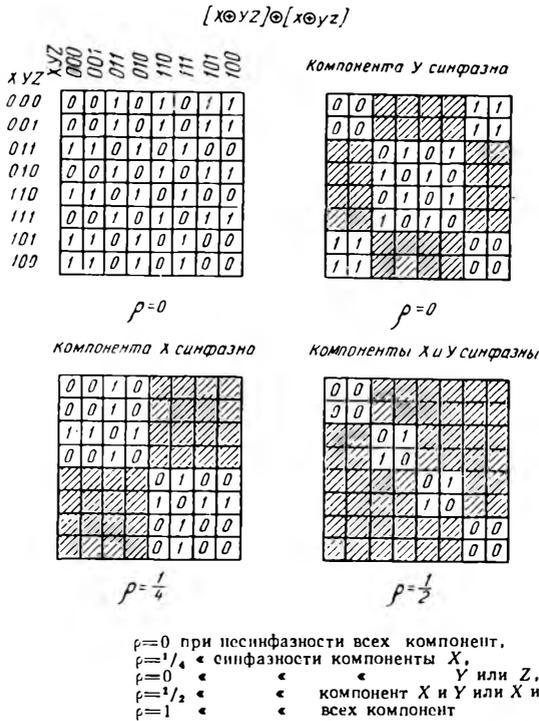


Рис. 6.6. Вычисление автокорреляционной функции дальномерного кода

Из вида автокорреляционной функции последовательности W вытекает процедура ее обнаружения. Для этого используется двухконтурное следящее устройство с некоторой дополнительной схемой, как показано на рис. 6.7. Если первоначально частота синхронизации принимаемого сигнала отличается от опорной частоты синхронизации на выходе ГУН, то принимаемый и опорный коды будут непрерывно скользить друг относительно друга. Если скорость скольжения невысока, то в тот момент, когда компоненты X обоих кодов окажутся в фазе,

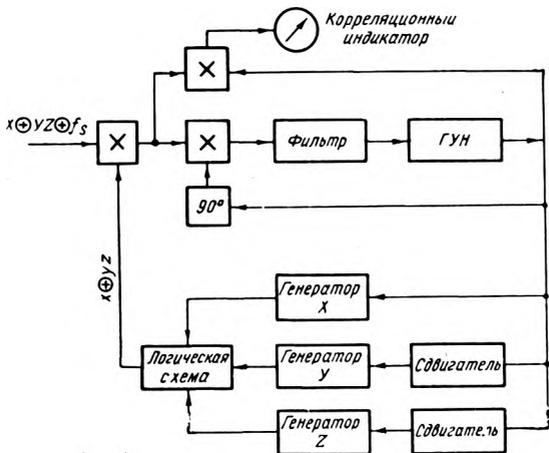


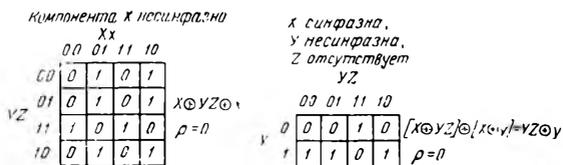
Рис. 6.7. Устройство обнаружения трехкомпонентного кода

система ФАП войдет в синхронизм. (Предполагается, что предусмотрены меры, исключающие «попадание» системы ФАП в один из квазиустойчивых нулей.) Выходной сигнал с ГУН в данный момент будет находиться в фазе с принимаемой частотой синхронизации. При этом сигнал на выходе первого умножителя будет представлять собой частоту синхронизации, которая в течение 62,5% времени совпадет и в течение 37,5% времени противоположна по фазе напряжению на выходе ГУН. В среднем выходной сигнал первого умножителя можно рассматривать как частоту синхронизации, находящуюся в фазе с выходным сигналом ГУН, но с амплитудой, равной 25% от полной. Этот сигнал синхронно детектируется и регистрируется корреляционным индикатором.

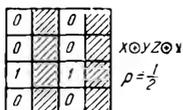
Второй шаг в процедуре обнаружения последовательности W состоит в сдвигании опорной последовательности Y каждый раз на один двоичный символ до тех пор, пока компоненты Y обоих кодов не окажутся в фазе. Тогда величина корреляции, фиксируемая корреляционным индикатором, станет равной $1/2$. Третий шаг заключается в анало-

гичном сдвигании опорной последовательности Z до тех пор, пока компоненты Z обоих кодов не окажутся в фазе. Показание корреляционного индикатора при этом станет равным 1.

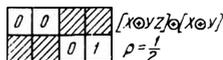
Комбинированная последовательность $X \oplus YZ$



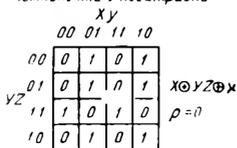
Компонента X синфазна



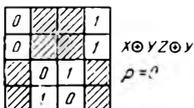
X и Y синфазны, Z отсутствует



Компонента Y несинфазна



Компонента Y синфазна



- $\rho = 0$ при несинфазности X и отсутствии Y и Z
- $\rho = 1/2$ « синфазности X « » Y и Z
- $\rho = 1/4$ « X и наличии всех компонент
- $\rho = 1/2$ « X и Y « « «
- $\rho = 1$ « всех компонент

Рис. 6.8. Вычисление функции взаимной корреляции комбинированной последовательности с ее компонентами

Описанная система обладает двумя недостатками. Первый (но не самый важный) заключается в существовании квазиустойчивых нулей и может быть устранен за счет дополнительного усложнения аппаратуры. Второй недостаток состоит в том, что в данном случае система ФАП должна войти в синхронизм в течение промежутка времени, пока компоненты X обоих кодов находятся в фазе. Для этого необходимо, чтобы была широкой ее полоса пропускания, что нежелательно при большом уровне шума в канале связи, либо была мала скорость сколь-

жения принимаемого и опорного кодов, т. е. мала начальная расстройка принимаемой частоты синхронизации относительно опорной. При измерении дальности до цели оба эти условия оказываются трудновыполнимыми, хотя в других случаях дело может обстоять иначе.

Рассмотрим другую схему обнаружения последовательности W , которая несколько лучше изображенной на рис. 6.7. В этой схеме определяется функция взаимной корреляции последовательности W с отдельными ее компонентами. Для важнейших случаев эта функция вычисляется на рис. 6.8. Видно, что наиболее целесообразной является такая процедура обнаружения, при которой на первом шаге принимаемая последовательность коррелируется только с компонентой X . Тогда при обнаружении данной компоненты и частоты синхронизации величина корреляции равна не $1/4$, а $1/2$. Вследствие этого вхождение в синхронизм осуществляется надежнее, чем в схеме на рис. 6.7. Однако, как и раньше, система ФАП должна засинхронизироваться за время, пока компоненты X находятся в фазе.

Дальномерные коды, содержащие в качестве компоненты частоту синхронизации

Трудность вхождения в синхронизм при скольжении принимаемого и опорного кодов привела к созданию комбинированных кодов, в которых одной из компонент является частота синхронизации. Последнюю можно рассматривать как некоторую вырожденную псевдослучайную последовательность длины 2. Ее автокорреляционная функция равна $+1$ при синфазных сдвигах и -1 при несинфазных. В отличие от всех других псевдослучайных последовательностей она является полностью уравновешенной.

В качестве примера рассмотрим комбинированную последовательность вида $W = f_s \oplus YZ$. В данном случае f_s — двоичная «синхронизирующая» последовательность, полученная из частоты синхронизации. Последовательность W можно представить как $W = f_s$ при $YZ = 0$ и $W = \overline{f_s}$ при $YZ = 1$. Так как 75% времени $YZ = 0$ и 25% времени $YZ = 1$, то в среднем W можно рассматривать как частоту синхронизации с амплитудой, равной 50% от полной.

Определим показания корреляционного индикатора, приведенного на рис. 6.7, учитывая при вычислениях наличие синхронизирующей последовательности f_s . Принимаемый сигнал при этом будет иметь вид $f_s \oplus YZ$, а опорный — просто yz . Процесс вхождения в синхронизм в данном случае начинается немедленно и во времени не ограничивается.

Обнаружение компонент Y и Z происходит как и прежде (компонента X в нашем примере как таковая не существует). Ниже приводятся показания корреляционного индикатора для каждого шага процедуры обнаружения сигнала:

- 1) f_s не обнаружена — 0%,
- 2) f_s обнаружена — 25%,
- 3) компонента Y обнаружена — 50%,
- 4) компонента Z обнаружена — 100%.

Эта процедура имеет два больших преимущества по сравнению с рассмотренными ранее. Во-первых, принимаемый сигнал содержит составляющую в виде частоты синхронизации, по которой осуществляется вхождение в синхронизм даже тогда, когда ни одна из компонент принимаемого кода еще не обнаружена. Во-вторых, сигнал ошибки не содержит квазиустойчивых нулей, в которых система может ошибочно засинхронизироваться. Взаимная корреляционная функция между частотой синхронизации и ее фазовым сдвигом на 90° представляет собой колебание треугольной формы и не имеет квазиустойчивых нулей.

Методы формирования кодов, содержащих частоту синхронизации

Хотя рассмотренный в предыдущем параграфе метод формирования дальномерного кода является простым и удобным, он непригоден, когда код состоит более чем из двух компонент. Например, при использовании трех компонент результирующий код имеет вид $W = f_s \oplus XYZ$ и в среднем он представляет собой частоту синхронизации с амплитудой, равной 75% от полной.

Другое преимущество данного кода состоит в том, что при подаче на вход коррелятора опорного кода величина корреляции снижается только до 56,25%. Однако обнаружение одной компоненты кода повышает корреляцию всего лишь до 62,5%. Это приращение слишком мало.

В реальных системах к дальномерным кодам предъявляется ряд требований. Самым очевидным из них является наличие в коде частоты синхронизации. Кроме того, дальномерный код должен быть уравновешенным, т. е. должен содержать одинаковое число «1» и «0». В противном случае происходит фазовый сдвиг немодулированной составляющей несущего колебания.

Другое требование заключается в том, чтобы применяемый код позволял реализовать оптимальную в некотором смысле процедуру обнаружения сигнала. Наиболее целесообразным следует считать такой критерий оптимальности, который требует не только максимального приращения корреляционной функции при обнаружении каждой компоненты кода, но и наличия значительной корреляции при обнаружении лишь частоты синхронизации. Код, удовлетворяющий этим ус-

ловиям, а также ограничениям, накладываемым реальной системой, имеет вид

$$W = Xf_s + \bar{X}[f_s \oplus F],$$

где F — тоже некоторый дальномерный код.

В качестве примера примем $F = AB + AC + BC$. Здесь все компоненты представляют собой псевдослучайные последовательности с взаимно простыми периодами.

Данный код является полностью уравновешанным, так как в каждом члене присутствует частота синхронизации. В связи с этим его мож-

Таблица 6.1
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ОБНАРУЖЕНИЯ
КОДА

№ п.п.	Обнаруживаемая компонента	Опорный код	Скачок корреляционной функции, %
1	f_s	0	0 ÷ 50
2	X	$\bar{X}A$	25 ÷ 50
3	A	$\bar{X}A$	50 ÷ 75
4	B	$\bar{X}B$	50 ÷ 75
5	C	$\bar{X}C$	50 ÷ 75
6	Проверочное обнаружение	$\bar{X}[F]$	100

но рассматривать в среднем как частоту синхронизации с амплитудой, равной 50% от полной. Последовательность обнаружения данного кода показана в табл. 6.1.

Число компонент рассмотренного кода можно увеличивать за счет увеличения количества компонент в функции F . При этом процедура обнаружения остается той же, однако скачок корреляционной функции при обнаружении каждой компоненты уменьшается.

§ 6.4. Приемники систем измерения дальности

Схема слежения за несущей принимаемого сигнала

В системе измерения дальности дальномерный код модулирует несущее колебание, частота которого, как правило, лежит в свч диапазоне. Оптимальным методом демодуляции сигнала является синхронное детектирование. Однако для этого приемник должен «следить» за изменением несущей частоты принимаемого сигнала. Функциональная схема подобного устройства слежения показана на рис. 6.9. Когерентные опорные частоты формируются с помощью того же генератора, который вырабатывает несущую частоту передатчика.

Рассматриваемое устройство представляет собой следящую систему. Когда система настроена на принимаемую несущую, сигнал ошибки на входе фильтра отсутствует. Если фаза несущей изменяется, то на ту же величину начинают изменяться фазы обоих сигналов промежуточной частоты. При этом на выходе фазового детектора возникает сигнал ошибки, который, пройдя через фильтр, поступает на

ГУН. Под его действием частота ГУН меняется так, что фаза и частота опорного колебания с выхода умножителя частоты совпадают с фазой и частотой несущей принимаемого сигнала. В результате фаза выходного сигнала ГУН становится пропорциональной фазе несущей.

Таким образом, рассматриваемый приемник представляет собой систему фазовой автоподстройки частоты. Наличие во входном сигнале аддитивного шума вызывает случайные флуктуации фазы выходного напряжения ГУН. С целью уменьшения флуктуации фазы на входе ГУН

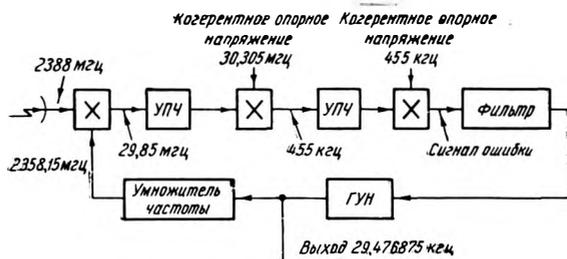


Рис. 6.9. Устройство слежения за несущей

включается фильтр нижних частот с очень узкой полосой пропускания. Он определяет шумовую полосу и динамические характеристики устройства слежения.

Комбинированная схема слежения за несущей и дальномерным кодом

Рассмотренные ранее схемы слежения за несущей и дальномерным кодом можно использовать для построения приемника системы измерения дальности. Для этого сигнал с выхода первого усилителя промежуточной частоты устройства слежения за несущей синхронно детектируется и подается на умножитель устройства слежения за дальномерным кодом. Как было показано в § 5.5, форма модулирующего сигнала в данном случае полностью восстанавливается (предполагается, что применяется фазовая модуляция). Однако для уменьшения уровня шумов на выходе приемника корреляционное умножение следует выполнять до детектирования принимаемого кода, т. е. на высокой частоте. Схема подобного приемника показана на рис. 6.10. Здесь на один из входов смесителя подается сигнал фазовой модуляции, а на другой — сигнал балансной модуляции. Выходной сигнал смесителя при этом имеет вид: $A \cos[\omega t + \Theta_1 m_1(t) - \Theta_2 m_2(t)]$. Так как разностная

частота $\omega=0$, то предыдущее выражение сводится к следующему: $A \cos[\Theta_1 m_1(t) - \Theta_2 m_2(t)]$. Величины Θ_1 и Θ_2 различны, поэтому возможны следующие случаи:

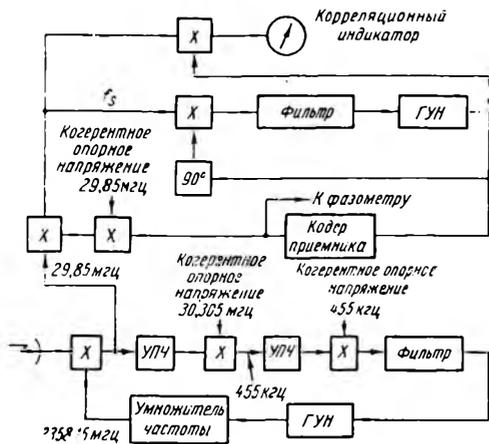


Рис. 6.10. Приемник системы измерения дальности

- 1) $\Theta_1 - \Theta_2$;
- 2) $\Theta_1 + \Theta_2$;
- 3) $-\Theta_1 - \Theta_2$;
- 4) $-\Theta_1 + \Theta_2$.

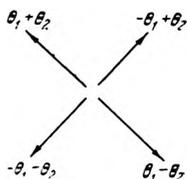


Рис. 6.11. Фаза выходного сигнала смесителя

Однако так как косинус является четной функцией и $\Theta_2=90^\circ$, то выходные сигналы смесителя в случаях 1 и 4 одинаковы. То же относится и к случаям 2 и 3. Более того, выходные сигналы смесителя для случаев 1, 4 и 2, 3 равны друг другу по величине и противоположны по знаку. Но точно такие же соотношения получаются при перемножении двух модулирующих двоичных видеосигналов. Следовательно, рассматриваемый смеситель одновременно выполняет операции синхронного детектирования и корреляционного перемножения.

Перечисленные выше четыре случая можно отобразить с помощью векторной диаграммы, показанной на рис. 6.11 (здесь угловая скорость вращения векторов равна нулю).

Эффективность приемников систем измерения дальности

Во всех случаях, когда передача информации происходит при наличии шумов, возникает задача эффективного использования мощности передатчика. При измерении дальности желательно, чтобы в приемнике использовалась вся мощность приходящего сигнала.

Сигнал фазовой модуляции можно записать в виде: $A \cos[\omega t + \Theta m(t)]$. Полная мощность такого сигнала пропорциональна A^2 и состоит из двух частей: мощности несущей, пропорциональной $[A \cos\Theta]^2$,

и мощности боковых частот, пропорциональной $[A \sin\Theta]^2$. Схема слежения за несущей реагирует только на немодулированную составляющую принимаемого сигнала $A \cos\Theta[\cos\omega t]$.

Аналогично выходной сигнал корреляционного смесителя пропорционален $A \sin\Theta$. Следовательно, приемник системы измерения дальности, показанный на рис. 6.10, является эффективным в том смысле, что он использует всю мощность принимаемого сигнала.

Другим аспектом проблемы эффективности является оптимальное распределение мощности сигнала между несущей и боковыми частотами. Если бы имелась возможность построения системы ФАП с любой желаемой полосой пропускания, решение этой задачи было бы очевидным. Полосы пропускания систем ФАП выбирались бы в зависимости от скорости доплеровского изменения несущей и частоты синхронизации принимаемого сигнала. Но скорость доплеровского изменения частоты пропорциональна значению этой частоты. Отсюда

$$\frac{B_c}{B_s} = \frac{f_c}{f_s},$$

где B_c — полоса пропускания системы ФАП несущей; B_s — полоса пропускания системы ФАП частоты синхронизации; f_c — несущая частота; f_s — частота синхронизации.

Целесообразно, чтобы обе системы ФАП имели одинаковые уровни пороговых сигналов. Однако необходимо помнить, что в процессе обнаружения кода система ФАП частоты синхронизации работает при пониженном уровне сигнала. Для процедуры обнаружения, рассмотренной в § 6.3, данный уровень составляет 25% по амплитуде или -12 дБ по мощности от полного уровня сигнала. Поэтому распределение полной мощности сигнала должно удовлетворять следующему соотношению:

$$\frac{P_c}{\frac{1}{16} P_s} = \frac{B_c}{B_s} = \frac{f_c}{f_s},$$

где P_c — мощность несущей; P_s — мощность боковых частот.

На практике оказывается, что полоса пропускания системы ФАП частоты синхронизации не может быть сколь угодно узкой. Например, если $f_c = 1000$ МГц, $f_s = 500$ кГц, $B_c = 100$ Гц, то $B_s = 0,05$ Гц.

Минимально возможная полоса пропускания реальных систем ФАП несколько превышает указанное значение. Поэтому расчет распределения мощности сигнала должен основываться на реально достижимых значениях полосы пропускания системы ФАП, а не на отношении несущей частоты сигнала к частоте синхронизации.

§ 6.5. Время обнаружения дальномерного кода

Обнаружение дальномерного кода по методу максимального правдоподобия

В описанных ранее методах обнаружения дальномерного кода использовались его корреляционные свойства. Смысл методов заключался в пошаговом поиске фазы каждой компоненты. В общем случае каждый этап процедуры поиска продолжался до тех пор, пока не принималось решение о том, что выбранная фаза опорной компоненты является правильной.

При работе системы вблизи порогового уровня такая процедура обнаружения кода зависела от довольно субъективных критериев, которыми пользовался оператор при наблюдении за корреляционным индикатором. Поскольку эти критерии не были точно определены, то автоматизация указанного процесса связана была с серьезными трудностями. По этой же причине невозможно было определить время, требуемое для обнаружения дальномерного кода.

В этом параграфе описывается метод обнаружения, используемый при приеме блоковых телеметрических кодов, рассмотренных в гл. 4. Метод является статистическим и позволяет дать максимально правдоподобную оценку фазы обнаруживаемой компоненты. Он является *оптимальным* среди всех неитеративных процедур в том смысле, что требует минимального времени для определения фазы принимаемого сигнала с заданной точностью.

Однокомпонентные коды

Так как компоненты дальномерного кода обладают двузначной автокорреляционной функцией, то их циклические перестановки, или фазовые сдвиги, образуют трансортгональный код с небольшим отрицательным коэффициентом корреляции. Такой код получил название псевдослучайного (см. гл. 4). В гл. 7 описывается оптимальный приемник псевдослучайного кода, работающий по методу максимального правдоподобия. Там же приводятся кривые, показывающие зависимость средней вероятности ошибочного приема слова от отношения энергии сигнала на один бит к спектральной плотности аддитивного белого гауссовского шума для двух классов кодов: ортогонального и биортогонального.

Структура приемника для трансортгонального, ортогонального и биортогонального кодов остается одной и той же, и все три кода обладают приблизительно одинаковой помехоустойчивостью. В описываемом приемнике принятый сигнал, состоящий из однократно переданного кодового слова с наложенным на него шумом, коррелируется со

всеми кодовыми словами, допустимыми для передачи. По максимуму корреляции определяется, какое слово было послано на самом деле.

При заданной энергии сигнала на один бит и заданной спектральной плотности шума приводимые кривые позволяют найти ожидаемую вероятность ошибочного приема кодового слова. И, наоборот, с помощью этих кривых можно рассчитать требуемую энергию сигнала на бит при заданном уровне шума для обеспечения желаемой вероятности ошибочного приема кодового слова. Если известна скорость передачи информации, то, зная энергию сигнала на бит, можно вычислить его мощность.

При проектировании типовой системы связи мощность сигнала и (или) скорость передачи информации выбираются в зависимости от характеристик канала и желаемой частоты ошибок. В любом случае передаваемые сообщения преобразуются в кодовые слова, которые однократно передаются по каналу связи. Заметим, что помехоустойчивость системы связи не изменится, если каждое слово передавать дважды, но с удвоенной скоростью, а на приемном конце это двойное кодовое слово рассматривать как одиночное. Суть состоит в том, что кодовые слова — это в действительности сигналы с определенными взаимно корреляционными свойствами. Повторение каждого слова не меняет взаимно корреляционных свойств кода, а приводит лишь к удвоению требуемой полосы пропускания канала связи. Именно поэтому такой метод не представляет интереса для теории связи.

Задача измерения дальности несколько отличается от обычной задачи связи. Во-первых, спектр дальномерного сигнала выбирается, исходя из требуемой разрешающей способности по дальности. Во-вторых, в процессе слежения за космическим аппаратом мощность принимаемого сигнала может меняться в больших пределах. В-третьих, информация, получаемая при обнаружении дальномерного кода, представляет собой дальность до цели и задача состоит в том, чтобы при данных параметрах сигнала и шума получить эту информацию как можно быстрее.

В дальнейшем изложении будем предполагать, что к началу измерения дальности произведен захват частоты синхронизации и осуществляется непрерывное слежение за ней. Вследствие этого отпадает проблема синхронизации двоичных символов. Как мы увидим дальше, при измерении дальности синхронизация кодовых слов вообще не требуется.

Пусть приемник определяет фазу однокомпонентного дальномерного кода по методу максимального правдоподобия. Для этого в приемнике генерируются все фазовые сдвиги дальномерного кода (опорные коды) и каждый из них коррелируется с принимаемым сигналом. Сначала предположим, что корреляция определяется на одном периоде дальномерного кода. Так как принимаемый сигнал и опорные коды

существуют непрерывно, то интегрирование может начинаться в любой момент времени. В результате такой операции получается оценка фазы входящего сигнала с некоторой вероятностью ошибки. Допустим, что вероятность ошибки много выше допустимой. Для ее уменьшения можно удвоить время интегрирования. Энергия сигнала в данном случае также удвоится, а вероятность ошибки уменьшится на соответствующую величину. Аналогично время интегрирования можно увеличить в 3, 4 и любое целое число раз, что приведет лишь к увеличению энергии сигнала на бит информации.

При расчете системы связи может возникнуть следующий вопрос: какова будет ошибка определения корреляционной функции, если интервал интегрирования не кратен периоду кода. Точный ответ на вопрос получить трудно — он зависит как от конкретного вида кода, так и от конкретного момента начала интегрирования. Однако можно легко найти границу этой ошибки.

Если принимаемый и опорный коды синфазны ($\tau=0$), то они совпадают друг с другом во всех двоичных символах (при отсутствии шума) и на интервал интегрирования никаких ограничений не накладывается. При несинфазности ($\tau \neq 0$) число совпадений двоичных символов равно $(p-1)/2$, где p — период кода, а число несовпадений — $(p+1)/2$.

Предположим, что $\tau \neq 0$ и интервал интегрирования составляет $(p-1)/2p$ часть периода дальнего кода, причем оказалось, что на этом интервале все соответствующие двоичные символы обоих кодов совпали. Тогда случаи $\tau=0$ и $\tau \neq 0$ будут неразличимы.

Если интервал интегрирования составляет $1 + (p-1)/2p$ часть периода дальнего кода, то будем иметь $1 + (p-1)/2p$ совпадений двоичных символов при $\tau=0$ и $(p-1)/2p$ совпадений при $\tau \neq 0$. В общем случае, если интегрирование осуществляется за $n + \frac{1}{2}$ периодов дальнего кода, то отношение результатов интегрирования для случаев $\tau=0$ и $\tau \neq 0$ приближенно будет определяться выражением

$$\frac{n + (p-1)/2p}{(p-1)/2p} \approx \frac{n + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2n + 1}{1}.$$

Эта оценка верхней границы ошибки определения корреляционной функции очень завышена, но даже из нее становится очевидным, что при $n=10$ ошибка не превышает нескольких процентов.

Таким образом, если фаза однокомпонентного дальнего кода определяется методом максимального правдоподобия, то интервал интегрирования выбирается, исходя из требуемой энергии сигнала на

бит для обеспечения заданной вероятности ошибки. При этом момент начала интегрирования может быть любым по отношению к началу кода. Последнее справедливо, если интервал интегрирования равен нескольким периодам дальномерного кода.

До сих пор изложение носило качественный характер. Для того чтобы воспользоваться количественными результатами, полученными в гл. 7, необходимо установить, что понимается под битом информации при измерении дальности. Как правило, при обнаружении дальномерного кода априорная информация относительно измеряемой дальности

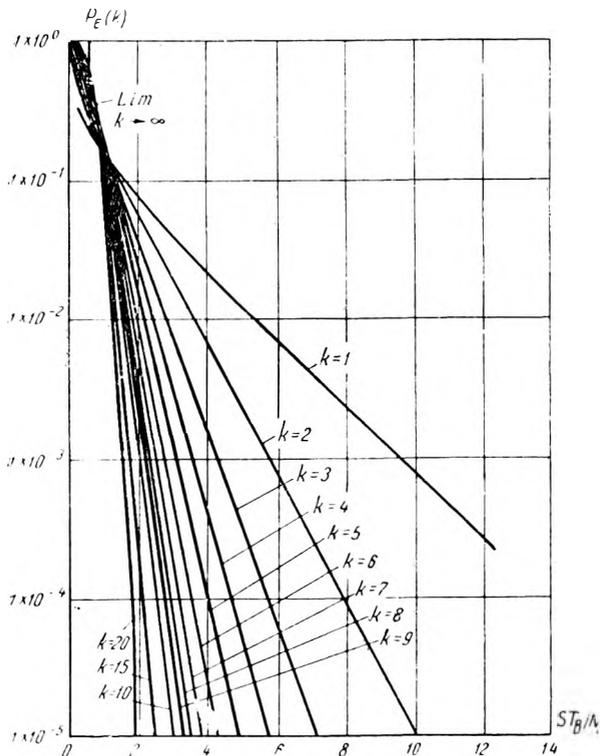


Рис. 6.12. Зависимость $P_E(k)$ от ST_B/N_0 для ортогональных кодов

отсутствует. Поэтому если период компоненты дальномерного кода равен p , то ее фаза на входе приемника может принимать p равновероятных значений, т. е. она содержит $\log_2 p$ битов информации.

Приведенные в гл. 7 графики относятся к ортогональному и биортогональному кодам. Последовательности, используемые для измерения дальности, образуют почти ортогональный код, и при вычислениях

можно пользоваться результатами, полученными для ортогонального кода, так как ошибка будет мала. Длина таких последовательностей p есть число нечетное, следовательно, $\log_2 p = k$ (рис. 6.12) не может быть целым числом. Поэтому график на рис. 6.12 необходимо интерполировать. Получаемая в данном случае ошибка также будет мала.

В качестве примера определим интервал интегрирования для следующих условий приема дальномерного кода:

- шумовая температура приемника — 300°K ,
- мощность принимаемого сигнала — (-130) дБ,
- длина компонентного кода — 31,
- длительность двоичного символа — 1 мксек,

требуемая вероятность ошибочного приема кодового слова — 10^{-3} .

При расчетах воспользуемся кривыми, приведенными на рис. 6.12. Количество информации, содержащееся в принимаемом сигнале, равно $\log_2 31 \approx 5$ бит. Из рис. 6.12 получим $ST_B/(N/B) = 3$, где S — мощность сигнала; T_B — время приема одного бита информации; (N/B) — спектральная плотность шума. Учитывая, что $kT^\circ = (N/B)$, где k — постоянная Больцмана, а T° — шумовая температура приемника, $^\circ\text{K}$, получим: $T_B = 3 \cdot 1,37 \cdot 10^{-23} \cdot 399/10^{-16} = 1,23 \cdot 10^{-4}$ сек. Беря интервал интегрирования, равный $5T_B$, получим $6,3 \cdot 10^{-4}$ сек. Так как этот интервал приблизительно в 20 раз превышает период кода, равный 31 мксек, то моменты начала или окончания интегрирования могут быть произвольными.

Многокомпонентные коды

Различные фазовые сдвиги каждой компоненты комбинированного дальномерного кода также образуют трансортгональный код с небольшим отрицательным коэффициентом корреляции. Однако в данном случае эквивалентная амплитуда принимаемого сигнала уменьшается пропорционально корреляционной функции. В качестве примера рассмотрим дальномерный код вида $W = AB + BC + CA$. Для обнаружения каждой компоненты определяется взаимно корреляционная функция между этой компонентой и комбинированным кодом. Если опорная компонента и соответствующая компонента дальномерного кода несинфазны, то коэффициент корреляции равен нулю. При их синфазном положении он равен 1/2. Таким образом, по сравнению со случаем однокомпонентного кода величина сигнала на выходе интегратора уменьшилась в два раза по амплитуде и в четыре раза по мощности. Для примера, рассмотренного в предыдущем параграфе, это равносильно уменьшению мощности принимаемого сигнала в четыре раза, следовательно, во столько же раз необходимо увеличить интервал интегрирования.

Время обнаружения кода при использовании последовательного коррелятора

В дальномерном приемнике, рассмотренном в § 6.4, для определения корреляции между принятым и опорным кодами используется только один умножитель, т. е. каждый раз можно вычислять лишь одно значение корреляционной функции. Однако поскольку дальномерный код принимается непрерывно, то интегрирование для различных значений относительной задержки принимаемого и опорного кодов можно выполнять последовательно. В данном случае время обнаружения компоненты кода увеличивается в число раз, равное периоду этой компоненты. В рассмотренном выше примере с однокомпонентным кодом время обнаружения в 31 раз больше времени интегрирования и равно 19,53 мсек.

Примеры. Представляет интерес вычислить полное время обнаружения дальномерного кода для трех типичных радиолокационных систем, предназначенных для измерения дальности до искусственных спутников Земли, лунников и межпланетных космических кораблей. В каждом случае предполагается, что длительность двоичного символа равна 1 мсек, а длина комбинированного кода выбирается достаточной для однозначного измерения дальности до объекта, как показано в табл. 6.2. Кроме того, предполагается, что полная мощность принятого сигнала равна — 140 дб, а мощность дальномерного кода составляет 10% от полной, т. е. — 150 дб. Шумовая температура приемника принимается равной 300°К. Требуемая вероятность ошибки при обнаружении каждой компоненты равна 10^{-3} . При принятых значениях

$$T_B = X \frac{(N/B)}{S} = X \frac{kT^\circ}{S} = X \frac{1,37 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{10^{-18}} = 4,11 \cdot 10^{-3} X.$$

Как видно из таблицы, полное время обнаружения дальномерного кода для рассматриваемых трех случаев равно 0,7; 0,9 и 3 мин соответственно. Следует отметить, что время обнаружения дальномерного кода обратно пропорционально мощности принимаемого сигнала. Например, если мощность принимаемого сигнала станет равной —130 дб, то время обнаружения будет соответственно равно 0,07; 0,09 и 0,3 мин.

Л и т е р а т у р а

1. Jaffe R. and Rechtin E., Design and Performance of Phase—Locked Circuits Capable of Near Optimum Performance over a Wide Range of Input Signals and Noise Levels, IRE Transactions on Information Theory, IT-1, 1 (March, 1955), 66—76.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ОБНАРУЖЕНИЯ ДАЛЬНОМЕРНОГО КОДА

Максимальная дальность мили	Длина кода мили	Компоненты кода p	Коэффициент взаимной корреляции	$\log_2 p$	X	T_B	Время обнаружения, сек
5 000	10 000	11	$\frac{1}{2}$	3,46	4	$16,4 \cdot 10^{-3}$	$3,46 \cdot 16,45 \cdot 10^{-3} \cdot 11 \cdot 4 = 2,5$
		47		5,55	2,8	$11,5 \cdot 10^{-3}$	$5,55 \cdot 11,51 \cdot 10^{-3} \cdot 47 \cdot 4 = 12,1$
		103		6,69	2,6	$10,7 \cdot 10^{-3}$	$6,69 \cdot 10,7 \cdot 10^{-3} \cdot 103 \cdot 4 = 29,5$
		Полное время обнаружения—44,1					
250 000	500 000	7	$\frac{3}{8}$	2,8	4,5	$18,5 \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 18,5 \cdot 10^{-3} \cdot 7 \cdot \frac{64}{9} = 2,5$
		11		3,46	4,0	$16,4 \cdot 10^{-3}$	$3,46 \cdot 16,4 \cdot 10^{-3} \cdot 11 \cdot \frac{64}{9} = 4,5$
		23		4,51	3,3	$13,6 \cdot 10^{-3}$	$4,51 \cdot 13,6 \cdot 10^{-3} \cdot 23 \cdot \frac{64}{9} = 10,0$
		31		4,95	3,0	$12,3 \cdot 10^{-3}$	$4,95 \cdot 12,3 \cdot 10^{-3} \cdot 31 \cdot \frac{64}{9} = 13,5$
		47		5,55	2,8	$11,5 \cdot 10^{-3}$	$5,55 \cdot 11,5 \cdot 10^{-3} \cdot 47 \cdot \frac{64}{9} = 21,4$
Полное время обнаружения—51,9							
100 000 000	200 000 000	23	$\frac{3}{8}$	4,51	3,3	$13,6 \cdot 10^{-3}$	$4,51 \cdot 13,6 \cdot 10^{-3} \cdot 23 \cdot \frac{64}{9} = 10,0$
		47		5,55	2,8	$11,5 \cdot 10^{-3}$	$5,55 \cdot 11,5 \cdot 10^{-3} \cdot 47 \cdot \frac{64}{9} = 21,4$
		79		6,31	2,7	$11,1 \cdot 10^{-3}$	$6,31 \cdot 11,1 \cdot 10^{-3} \cdot 79 \cdot \frac{64}{9} = 39,4$
		103		6,69	2,6	$10,7 \cdot 10^{-3}$	$6,69 \cdot 10,7 \cdot 10^{-3} \cdot 103 \cdot \frac{64}{9} = 52,4$
		127		6,98	2,5	$10,3 \cdot 10^{-3}$	$6,98 \cdot 10,3 \cdot 10^{-3} \cdot 127 \cdot \frac{64}{9} = 64,6$
Полное время обнаружения—187,8							

КОГЕРЕНТНАЯ СВЯЗЬ ПО НЕПРЕРЫВНОМУ ГАУССОВСКОМУ КАНАЛУ

§ 7.1. Кодирование при передаче информации

Одна из основных задач космической связи состоит в передаче информации или данных с максимально возможной скоростью и минимальным количеством ошибок по каналу со стационарным гауссовским шумом. Теорема Шеннона утверждает, что если скорость передачи информации меньше заданной величины, то существует способ преобразования сообщения в передатчике и восстановления его из смеси сигнал плюс шум в приемнике, при котором вероятность ошибочного приема стремится к нулю по мере того, как длина сообщения стремится к бесконечности. Максимальная «безошибочная» скорость передачи информации называется *пропускной способностью канала*. Преобразование сообщения в передатчике называется *кодированием*, а восстановление его из принятого сигнала — *декодированием*.

Сообщения могут поступать в передатчик в самой различной форме в зависимости от вида их источника. Поскольку книга посвящена дискретным системам связи, то здесь будет рассматриваться стандартный источник, создающий сообщения в виде случайной последовательности символов, выбираемых из двоичного алфавита. Эти символы появляются с вероятностью $\frac{1}{2}$, причем каждый символ в сообщении не зависит от остальных (как и в случае с подбрасыванием идеальной монеты)¹⁾.

¹⁾ Предположение о равновероятных и взаимнезависимых символах подразумевает источник сообщений с максимальной производительностью. Оно справедливо для многих случаев, при которых не заданы априорные вероятности. В общем случае любой источник можно преобразовать в источник подобного вида, используя разработанные Шенноном [6] методы кодирования для каналов без помех.

Следовательно, каждый символ содержит один бит информации.

Кодирование, или операцию преобразования сообщения, можно рассматривать как однозначное отображение последовательностей символов сообщения сигналами, передаваемыми в канал связи. Каждый сигнал единственным образом определяет последовательность символов сообщения. Такие последовательности будем называть *векторами сообщения*, или *информационными векторами*.

Если источник создает сообщения в виде последовательностей из k двоичных символов, то в передатчике необходимо иметь $M=2^k$ сигналов, по одному на каждую последовательность. Эти же сигналы должны храниться в приемнике для выполнения операции декодирования.

Для более конкретного рассмотрения каждый сигнал можно представить в виде последовательности из n элементов. Целое число n назовем *числом степеней свободы*, или *числом измерений сигнала*. Если каждый сигнал строго ограничен по спектру полосой частот W и приблизительно ограничен по времени длительностью T , то теорема отсчетов [6] утверждает, что он может быть полностью представлен последовательностью $n=2WT$ символов¹⁾.

Во избежание математических и физических трудностей, связанных с теоремой отсчетов, будем считать, что длительность каждого сигнала строго ограничена T секундами. Разобьем этот интервал времени на n подынтервалов длительностью T/n секунд. В течение каждого подынтервала посылается либо сигнал $s_0(t)$, либо сигнал $s_1(t)$.

В общем случае n может быть больше k . Тогда, как показано на рис. 7.1, операцию кодирования в широком смысле можно разбить на два этапа. Первый этап — это непосредственно кодирование, заключающееся в отображении множества 2^k возможных информационных векторов $a^{(i)}$ на множество 2^k кодовых векторов b^i . Элементами векторов являются целые двоичные числа «0» и «1». Второй этап состоит в передаче в течение j -го подынтервала элементарного сигнала, соответствующего j -й координате кодового вектора. Другими словами, в зависимости от того, какое значение принимает $b_j^{(i)}$ — 0 или 1 — в течение j -го подынтервала, посылается либо сигнал $s_0(t)$, либо $s_1(t)$.

В § 7.4 будет показано, что при соответствующем выборе элементарных сигналов эффективная полоса частот, занимаемая передаваемыми сигналами, может не превышать $n/2T$ герц. Как следует из теоремы отсчетов, для сигнала длительностью T , имеющего n степеней свободы, это значение полосы частот является минимальным.

Показанный на рис. 7.1 кодер в общем случае представляет собой запоминающее устройство, хранящее $2^k n$ двоичных цифр. Для каждого из 2^k возможных информационных векторов $a^{(i)}$ необходимо помнить

¹⁾ В отечественной литературе теорема отсчетов известна как теорема Котельникова, которая была им доказана в 1946 г. в его докторской диссертации (прим. ред.).

n -разрядное двоичное число, соответствующее кодовому вектору $b^{(i)}$. Кодер с таким объемом памяти оказывается очень громоздким и непригодным для использования в передатчике космического аппарата.

Пользуясь методами, изложенными в гл. 4, можно построить кодеры с минимальным количеством оборудования и минимальным объемом памяти, что имеет огромное значение для систем космической связи (см. § 7.5).

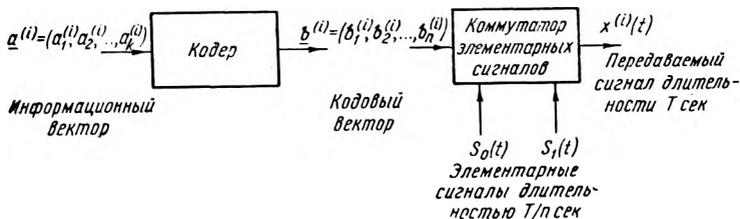


Рис. 7.1. Кодирование двоичных сообщений

§ 7.2. Оптимальное декодирование (метод максимального правдоподобия)

Прежде чем рассмотреть любой конкретный способ кодирования, целесообразно определить оптимальную процедуру декодирования для произвольного типа сигналов. Под *оптимальным декодированием* понимается такой метод обработки принятого сигнала, при котором приемник из множества M разрешенных для передачи сигналов выбирает сигнал, который вероятнее всего был послан. Таким образом, при оптимальном декодировании *минимизируется вероятность ошибки*. Подобный метод был выведен Вудвордом и Девисом [9, 10] для произвольного типа сигналов при наличии аддитивного белого гауссовского шума и обычно называется *декодированием по методу максимального правдоподобия*.

Хелстром [2] и другие распространили полученные результаты для случая «окрашенного» шума. Поскольку для большинства систем радиосвязи аддитивный гауссовский шум обладает фактически равномерным спектром в полосе пропускания приемной аппаратуры, то этот шум можно считать белым с той оговоркой, что его спектральная плотность на высоких частотах стремится к нулю. В противном случае мощность шума должна быть бесконечной, что физически невозможно.

Теперь определим структуру оптимального декодера с учетом изложенных выше условий. Пусть длительность принятого сигнала $y(t)$ равна T секунд. Этот сигнал представляет собой аддитивную смесь одного из M разрешенных для передачи сигналов, ослабленного в кана-

ле, $x^{(i)}(t)$ и белого гауссовского шума $n(t)$. Декодер должен вычислить *апостериорные* вероятности посылки каждого из сигналов $x^{(1)}(t)$, $x^{(2)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ при условии, что на его вход поступил сигнал $y(t)$, и принять решение о том, что был послан тот сигнал $x^{(i)}(t)$, для которого эта вероятность наибольшая. При этом на выходе декодера появится последовательность символов, соответствующая выбранному сигналу $x^{(i)}(t)$.

Так как предполагалось, что символы сообщения равновероятны и независимы, то *априорные* вероятности посылки каждого из M сигналов одинаковы. Следовательно, энергии каждого из M сигналов также должны быть одинаковы. Тогда все посылаемые последовательности из k двоичных символов будут находиться в равных условиях.

Предположим, что средняя мощность принятого сигнала равна S ватт. В таком случае энергия каждого из M сигналов составит ST джоулей. Спектральную плотность шума обозначим как N_0 ватт/герц. Пусть из принятого сигнала $y(t)$ взято конечное число выборок m через интервал времени T/m секунд. По этим выборкам декодер приемника должен определить апостериорные вероятности посылки каждого из M сигналов $x^{(i)}(t)$. Следовательно, полученные m выборок можно рассматривать как координаты вектора принятого сигнала $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$.

Аналогично сигнал $x^{(i)}(t)$ и шум $n(t)$ можно представить в виде векторов $\mathbf{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)})$ и $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m)$, элементами которых являются мгновенные значения сигнала $x^{(i)}(t)$ и шума $n(t)$, отсчитанные в те же моменты времени, что и выборки принятого сигнала $y(t)$. Тогда в соответствии с правилом Бейеса плотность апостериорной вероятности посылки сигнала $x^{(i)}$ при условии, что принят сигнал \mathbf{y} , можно записать в виде:

$$p(\mathbf{x}^{(i)}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x}^{(i)})p(\mathbf{x}^{(i)})}{p(\mathbf{y})}. \quad (7.1)$$

Интерес представляет только то значение i , при котором выражение (7.1) достигает максимума, поэтому члены, не зависящие от i , можно рассматривать как постоянные величины. Поскольку предполагалось, что априорная вероятность посылки сигналов $x^{(i)}(t)$ одна и та же для всех i , то $p(\mathbf{x}^{(i)}) = 1/M$. Плотность вероятностей $p(\mathbf{y})$ в выражении (7.1) также не зависит от i . На основании сказанного имеем

$$p(\mathbf{x}^{(i)}|\mathbf{y}) = Kp(\mathbf{y}|\mathbf{x}^{(i)}),$$

где K — постоянная величина.

Функцию $p(\mathbf{y}|\mathbf{x}^{(i)})$ обычно называют функцией *правдоподобия*. Если априорные вероятности посылки каждого сигнала $x^{(i)}(t)$ одинаковы,

то апостериорная вероятность пропорциональна функции правдоподобия. Отсюда и возник термин «декодирование по методу максимального правдоподобия».

Так как шум является аддитивным и гауссовским, то координату r вектора y при условии, что передавался сигнал $x^{(i)}(t)$, можно представить в виде $y_r = x_r^{(i)} + n_r$, где n_r — гауссовская случайная переменная, характеризующая шум. Причем поскольку шум является белым, то его любые две соседние выборки независимы. Следовательно, функцию правдоподобия можно записать в виде

$$p(y | x^{(i)}) = p(y - x^{(i)} = n) = \frac{\exp \left[- \sum_{r=1}^m (y_r - x_r^{(i)})^2 / 2 \sigma^2 \right]}{(2\pi)^{m/2} \sigma^m}, \quad (7.2)$$

где $\sigma^2 = \overline{n_r^2}$ — дисперсия шума.

Для определения максимального значения функции правдоподобия $\max_i p(y/x^{(i)})$ достаточно найти максимум экспоненты в выражении (7.2). Для удобства умножим выражение в квадратных скобках на σ^2/m , относительные значения функций правдоподобия при этом не изменятся. Тогда достаточно рассмотреть выражение

$$\max_i \left\{ - \frac{1}{2m} \sum_{r=1}^m (y_r - x_r^{(i)})^2 \right\} = \max_i \left\{ \frac{1}{2m} \left[- \sum_{r=1}^m (y_r^2 - 2 y_r x_r^{(i)} + x_r^{(i)2}) \right] \right\}.$$

Поскольку $\sum_{r=1}^m y_r^2$ не зависит от i , то интересующее нас выражение

сводится к следующему:

$$\max_i \frac{1}{m} \left[\sum_{r=1}^m y_r x_r^{(i)} - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m x_r^{(i)2} \right]. \quad (7.3)$$

Предположим, что количество отсчетов m принятого сигнала стремится к бесконечности. Предел выражения (7.3) существует, если функции времени $y(t)$ и $x^{(i)}(t)$ непрерывны во всех точках, количество которых, однако, конечно. Действительно, случайный процесс $y(t)$ будет в среднем непрерывным при условии, что белый шум имеет равномерный

спектр в полосе частот, значительно превышающей полосу пропускания приемника, и обладает конечной дисперсией. Следовательно:

$$\lim_{\substack{m \Delta t \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0 \\ m \Delta t = T}} \frac{1}{m \Delta t} \left[\sum_{r=1}^m y_r x_r^{(i)} \Delta t - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m x_r^{(i)2} \Delta t \right] = \\ = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) x^{(i)}(t) dt - \frac{1}{2T} \int_0^T x^{(i)2}(t) dt. \quad (7.4)$$

Второй интеграл выражает энергию i -го сигнала, которая согласно предположению равна ST и не зависит от i . Таким образом, оптимальный декодер для множества равновероятных сигналов $x^{(i)}(t)$, $i=1, 2, \dots, M$, с одинаковыми энергиями состоит из M умножителей и интеграторов и вычисляет M величин вида

$$z_i = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) x^{(i)}(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (7.5)$$

Затем он определяет максимальную из них и отождествляет принятый сигнал $y(t)$ с соответствующим ему сигналом $x^{(i)}(t)$. На выходе деко-

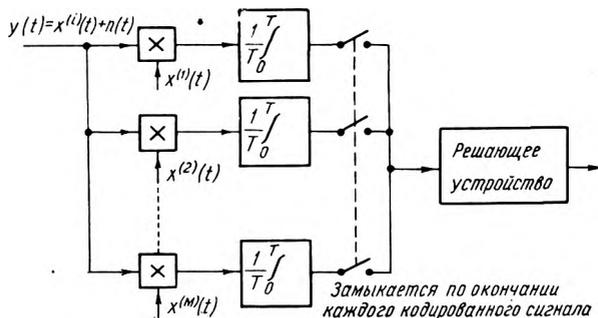


Рис. 7.2. Функциональная схема оптимального декодера

дера появляется последовательность символов сообщения, которая вероятнее всего была послана.

На рис. 7.2 приведена функциональная схема оптимального декодера, состоящего из набора M умножителей и интеграторов, которые обрабатывают сигнал в течение интервала времени T , после чего выдают результат и приводятся в исходное состояние. Такие устройства обычно называют *корреляторами*, а выполняемый ими процесс обработки сигнала — *корреляционным приемом* по аналогии с операцией взаимной корреляции.

Величины z_i в выражении (7.5) называются *корреляционными интегралами*. Решающее устройство сравнивает величины корреляционных интегралов в конце интервала времени T и определяет наибольшую из них¹⁾.

§ 7.3. Вероятность ошибки при оптимальном декодировании сигналов произвольного типа

Выше была определена процедура оптимального декодирования для равновероятных сигналов произвольного типа, имеющих одинаковые энергии и искаженных белым гауссовским шумом. Теперь оценим помехоустойчивость системы связи при заданном отношении сигнал/шум. Для этого необходимо определить вероятность ошибки. Прежде всего удобно ввести меру сходства сигналов, т. е. коэффициент взаимной корреляции между парой сигналов:

$$\rho_{ij} = \frac{\int_0^T x^{(i)}(t) x^{(j)}(t) dt}{\left[\int_0^T x^{(i)2}(t) dt \int_0^T x^{(j)2}(t) dt \right]^{1/2}} = \frac{\int_0^T x^{(i)}(t) x^{(j)}(t) dt}{ST}. \quad (7.6)$$

Как будет показано ниже, эта величина совпадает с коэффициентом взаимной корреляции между случайными переменными z_i и z_j на выходе i - и j -го корреляторов. Во всех случаях $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$. Когда $\rho_{ij} = \pm 1$, $x^{(i)}(t) = \pm x^{(j)}(t)$, а когда $\rho_{ij} = 0$, $x^{(i)}(t)$ и $x^{(j)}(t)$ — ортогональны. Среднюю вероятность ошибки P_E можно выразить через величину P_{E_i} — вероятность ошибки в случае, если передавался сигнал $x^{(i)}$. Поскольку все сигналы имеют одинаковые априорные вероятности, то

$$P_E = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P_{E_i}. \quad (7.7)$$

Пусть сигнал $x^{(1)}(t)$ передается в течение заданного интервала времени T секунд. Вероятность P_E можно определить следующим образом. Корреляционные интегралы z_1, z_2, \dots, z_M являются гауссовскими переменными, поскольку они получаются в результате линейной операции над функцией времени, случайная составляющая которой имеет гаус-

¹⁾ В отечественной литературе описанный метод оптимального приема кодированных сигналов называется приемом «в целом» (см., например, А. П. Мановцев «Введение в цифровую радиотелеметрию». Энергия, 1957) (прим. ред.).

совское распределение. Математическое ожидание величины z_i при условии, что передавался сигнал $x^{(i)}(t)$, равно:

$$\bar{z}_i = \frac{1}{T} \int_0^T [x^{(i)}(t) + \overline{n(t)}] x^{(i)}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T x^{(i)}(t) x^{(i)}(t) dt = S \rho_{i1}, \quad (7.8)$$

так как $\overline{n(t)}=0$. Заметим, что поскольку $\rho_{11}=1$, то математическое ожидание корреляционного интеграла, соответствующего переданному сигналу, равно $\bar{z}_1=S$. Аналогично определяются ковариации переменных z_i :

$$\begin{aligned} \overline{z_i z_j} - \bar{z}_i \bar{z}_j &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T [x^{(i)}(t) + n(t)] x^{(i)}(t) [x^{(j)}(u) + n(u)] x^{(j)}(u) dt du - \\ &\quad - \frac{1}{T^2} \int_0^T x^{(i)}(t) x^{(i)}(t) dt \int_0^T x^{(j)}(u) x^{(j)}(u) du = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T x^{(i)}(t) x^{(j)}(u) \overline{n(t)n(u)} dt du = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T x^{(i)}(t) x^{(j)}(u) \frac{N_0}{2} \delta(t-u) dt du = \\ &= \frac{N_0}{2T^2} \int_0^T x^{(i)}(t) x^{(j)}(t) dt = \frac{N_0 S}{2T} \rho_{ij}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

где полагается

$$\overline{n(t)n(u)} = \frac{N_0}{2} \delta(t-u),$$

поскольку автокорреляционная функция белого шума описывается дельта-функцией Дирака. Таким образом, дисперсия каждого корреляционного интеграла равна:

$$\sigma_{z_i}^2 = \overline{z_i^2} - \bar{z}_i^2 = \frac{N_0 S}{2T} \quad (7.10)$$

и не зависит от i . Следовательно, нормированная ковариационная матрица, называемая иначе *корреляционной матрицей*, случайных величин z_1, z_2, \dots, z_M имеет вид $\|\rho_{ij}\|$ и совпадает с корреляционной матрицей кодированных сигналов $x^{(i)}(t)$ ($i=1, 2, \dots, M$). Здесь везде употребляется термин «корреляционная матрица (кодированных сигналов)» несмотря на то, что сами сигналы являются детерминированными.

Определив указанным образом статистические параметры корреляционных интегралов, нетрудно вычислить вероятность ошибки P_{E1} или ее дополнение, т. е. вероятность правильного декодирования $P_{c1} = 1 - P_{E1}$ в случае, если передавался сигнал $x^{(1)}(t)$. Величина P_{c1} равна

вероятности того, что корреляционный интеграл z_1 будет больше остальных корреляционных интегралов z_2, z_3, \dots, z_M . Тогда

$$P_{c1} = P [z_1 > \max (z_2, z_3, \dots, z_M)] = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{z_1} \dots \int_{-\infty}^{z_1} p(z_1, z_2, \dots, z_M) dz_2 \dots dz_M,$$

где $p(z)$ — гауссовская плотность распределения системы переменных z_1, z_2, \dots, z_M , ковариационная матрица которой определяется выражением (7.9), а математические ожидания переменных — выражением (7.8).

Для оценки влияния физических параметров S, T и N_0 на величину P_{c1} , а также типа сигналов $x^{(i)}(t) (i=1, 2, \dots, M)$ выполним следующие преобразования. Положим $u_i = z_i - \bar{z}_i$. Тогда

$$P_{c1} = \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \int_{-\infty}^{u_1 + \bar{z}_1 - \bar{z}_2} \dots \int_{-\infty}^{u_1 + \bar{z}_1 - \bar{z}_M} p'(u_1, u_2, \dots, u_M) du_2 \dots du_M,$$

где $p'(\mathbf{u})$ — плотность распределения случайных величин u_1, u_2, \dots, u_M с той же ковариационной матрицей, но с математическими ожиданиями переменных, равными нулю.

Вводя $v_i = u_i / \sigma_z$, нормализуем плотность распределения и получаем

$$P_{c1} = \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{v_1 + (\bar{z}_1 - \bar{z}_2) / \sigma_z} \dots \int_{-\infty}^{v_1 + (\bar{z}_1 - \bar{z}_M) / \sigma_z} p_N(v_1, \dots, v_M) dv_2 \dots dv_M,$$

где $p_N(\mathbf{v})$ — нормированная гауссовская плотность распределения системы случайных величин v_1, v_2, \dots, v_M с нулевыми математическими ожиданиями и ковариационной матрицей $\|\rho_{ij}\|$.

Используя равенства (7.8) и (7.10), предыдущее выражение можно переписать в виде

$$1 - P_{E1} = P_{c1} = \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{v_1 + \sqrt{2ST/N_0} (1 - \rho_{12})} \dots \int_{-\infty}^{v_1 + \sqrt{2ST/N_0} (1 - \rho_{1M})} \\ \times \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{v}^T \|\rho_{ij}\|^{-1} \mathbf{v}\right)}{(2\pi)^{M/2} |\rho_{ij}|} dv_2, \dots, dv_M, \quad (7.11)$$

где матрица $\|\rho_{ij}\|^{-1}$ обратна матрице $\|\rho_{ij}\|$; определитель последней обозначен как $|\rho_{ij}|$.

Подынтегральное выражение является функцией только коэффициентов взаимной корреляции сигналов, тогда как физические парамет-

ры системы связи входят в виде соотношения ST/N_0 в пределы интегрирования. Если передавался сигнал $x^{(j)}(t)$, то в равенстве (7.11) индекс l следует заменить на индекс j . Наконец, средняя вероятность ошибки определяется по ф-ле (7.7).

§ 7.4. Полоса частот сигналов и выбор типа сигналов

Для полной оценки системы связи и соответствующей схемы кодирования необходимо определить не только вероятность ошибки как функцию от отношения сигнал/шум и скорости передачи сообщений, но и требуемую полосу пропускания канала связи. Для этого вернемся к модели кодера, рассмотренной в § 7.1. Как было показано, каждый сигнал продолжительностью T секунд на выходе кодера состоит из последовательности n сигналов длительностью T/n секунд, выбираемых случайным образом из двух элементарных сигналов $s_0(t)$ и $s_1(t)$. Следовательно, полоса частот сигнала $x^{(i)}(t)$ зависит от функций времени $s_0(t)$ и $s_1(t)$.

Под шириной полосы частот данного канала понимают такой минимальный разнос центральных частот отдельных каналов, при котором сигналы в одном канале не влияют на работу декодера другого канала. Обозначим сигнал в канале α как $x_\alpha^{(i)}(t)$, а сигнал в канале β — как $x_\beta^{(j)}(t)$. Как отмечалось в § 7.3, декодер канала α сравнивает принятый сигнал $y(t)$ со всеми M возможными сигналами данного канала $x_\alpha^{(i)}(t)$ и определяет величину $\frac{1}{T} \int_0^T y(t) x_\alpha^{(i)}(t) dt$. Для того чтобы не было взаимного влияния соседних каналов, должно выполняться условие

$$\int_0^T x_\alpha^{(i)}(t) x_\beta^{(j)}(t) dt = 0$$

для всех i и j и для всех α и β . Это условие ортогональности для сигналов, передаваемых по различным каналам, будет выполняться, если свойством ортогональности будут обладать элементарные сигналы каждого канала. Обозначим элементарные сигналы канала α как s_0 и s_1 , а канала β — как s'_0 и s'_1 . Тогда сформулированное выше условие можно записать в таком виде:

$$\int_0^{T/n} s_r(t) s'_m(t) dt = 0, \quad r \text{ и } m = 0, 1. \quad (7.12)$$

Равенство (7.12) выполняется, если элементарные сигналы канала α имеют вид

$$s_r(t) = C_r \cos\left(\frac{\alpha \pi n}{T}\right)t, \quad r = 0, 1 \quad (7.13)$$

(где α — любое неотрицательное целое число), а элементарные сигналы канала β

$$s'_r(t) = C'_r \cos\left(\frac{\beta \pi n}{T}\right)t.$$

Таким образом, ясно, что минимальный разнос центральных частот соседних каналов (или ширина полосы частот каждого канала) равен $\pi n/T$ радиан в секунду или $n/2T$ герц. Центральные частоты других каналов (измеренные в радианах) должны отстоять друг от друга на величину, кратную $\pi n/T$.

При таком выборе элементарных сигналов передаваемые сигналы могут быть легко получены посредством амплитудной модуляции синусоидального несущего колебания. Далее будет показано, что для образования требуемых кодированных сигналов из элементарных сигналов вида (7.13) можно выбрать $C_0 = \sqrt{2S}$ и $C_1 = -\sqrt{2S}$, где S — мощность принятого сигнала. Тогда

$$\left. \begin{aligned} s_0(t) &= \sqrt{2S} \cos\left(\frac{\alpha \pi n}{T}\right)t \\ s_1(t) &= -\sqrt{2S} \cos\left(\frac{\alpha \pi n}{T}\right)t \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

Очень важно, что мощность излучаемого сигнала остается при этом постоянной и, следовательно, энергии всех кодированных сигналов одинаковы. Элементарные сигналы вида $\pm \sqrt{2S} \cos[(\alpha \pi n)/T]t$ могут быть получены либо в результате балансной модуляции несущей, либо манипуляцией фазы несущей между значениями $\pm 90^\circ$.

Теперь рассмотрим основные физические параметры системы связи. Пусть используется совокупность $M = 2^h$ равновероятных сигналов $x^{(i)}(t)$ длительностью T секунд каждый, причем мощность сигнала на входе приемника составляет S ватт, а спектральная плотность аддитивного стационарного белого гауссовского шума — N_0 ватт/герц.

Совокупность сигналов с точки зрения помехоустойчивости приема характеризуется величинами коэффициентов взаимной корреляции любой пары сигналов

$$\rho_{ij} = \frac{\int_0^T x^{(i)}(t) x^{(j)}(t) dt}{ST}.$$

При оптимальном декодировании вероятность ошибки P_E является функцией отношения ST/N_0 и корреляционной матрицы сигналов $\|\rho_{ij}\|$. Если $x^{(i)}(t)$ представляются собой последовательности n элементарных двоичных сигналов, описываемых выражением (7.14), то ρ_{ij} можно выразить через количество совпадающих и несовпадающих координат двоичных векторов, из которых получены сигналы $x^{(i)}(t)$ и $x^{(j)}(t)$. Действительно, в этом случае

$$\rho_{ij} = \frac{1}{ST} \sum_{r=1}^n \int_{(r-1)T/n}^{rT/n} x^{(i)}(t) x^{(j)}(t) dt,$$

и из выражения (7.14) следует, что каждое слагаемое в приведенном выше выражении равняется либо $+ST/n$, либо $-ST/n$ в зависимости от того, одинаковы или различны соответствующие кодовые символы сигналов $x^{(i)}$ и $x^{(j)}$. Отсюда для двоичных сигналов можно записать

$$\rho_{ij} = \frac{A-D}{n}, \quad (7.15)$$

где A — число совпадающих кодовых символов сигналов $x^{(i)}$ и $x^{(j)}$; D — число несовпадающих кодовых символов сигналов $x^{(i)}$ и $x^{(j)}$. Такое же соотношение было получено в гл. 4.

Любой из M передаваемых равновероятных сигналов содержит $\log_2 M$ битов информации. Поскольку на передачу каждого из сигналов затрачивается T секунд, то скорость посылки информации в канал определяется соотношением

$$R = \frac{\log_2 M}{T} = \frac{k}{T}, \text{ бит/сек}, \quad (7.16)$$

или, с другой стороны, время, затрачиваемое на посылку одного бита информации, равно

$$T_E = \frac{T}{\log_2 M} = \frac{T}{k}, \text{ сек/бит}. \quad (7.17)$$

Скорость приема информации меньше R на величину *ненадежности канала в единицу времени*. Величину R в дальнейшем будем называть *производительностью* источника сообщений.

Для возможности сравнения систем связи при различных значениях M необходимо рассмотреть вероятность ошибки P_E в зависимости от отношения энергии принятого сигнала на один бит информации к спектральной плотности шума ST_B/N_0 . Это отношение является основным параметром системы связи, поскольку его числитель определяется свойствами передатчика, а знаменатель — свойствами канала связи.

Таким образом, одной из величин, по которой будут сравниваться системы связи с различным числом M применяемых сигналов и различными корреляционными матрицами сигналов $\|\rho_{ij}\|$, является вероят-

ность ошибочного приема P_E как функция от отношения энергии сигнала на бит информации к спектральной плотности шума ST_B/N_0 .

Другим основным параметром системы связи является отношение полосы пропускания канала связи к производительности источника сообщений: W/R . Ранее было показано, что полоса пропускания канала связи равна $n/2T$ герц. Найдя отношение этой величины к производительности источника информации, определяемой равенством (7.16), получим

$$\frac{W}{R} = \frac{n}{2 \log_2 M} = \frac{n}{2k}. \quad (7.18)$$

В общем случае при проектировании систем связи задача заключается в том, чтобы найти классы кодов, обеспечивающие минимальную вероятность ошибки при заданных k и ST_B/N_0 с учетом ограничений, наложенных на отношение W/R . Оценка вероятности ошибки для данного кода зависит исключительно от этих параметров и корреляционной матрицы сигналов $\|\rho_{ij}\|$. Ниже будет показано, что наибольшей помехоустойчивостью в условиях непрерывного гауссовского канала обладают сигналы, образованные из двоичных кодов и элементарных сигналов, описываемых равенствами (7.14).

§ 7.5. Генерирование оптимальных двоичных кодов

Равенство (7.11) позволяет определить вероятности ошибки для произвольного типа кодированных сигналов. С помощью этого выражения [7] или другим образом [1] можно показать, что производная вероятности ошибки по любому коэффициенту взаимной корреляции $\rho_{ij} (i \neq j)$ положительна. Поэтому уменьшение любого коэффициента улучшает помехоустойчивость системы связи.

В гл. 4 было установлено, что для двоичного кода объемом M кодовых слов минимальное значение максимального, а также среднего коэффициентов взаимной корреляции равно $-1/(M-1)$. Доказано, что указанными свойствами обладают также и недвоичные коды [1, 4, 7].

Можно построить множество двоичных кодированных сигналов (образованных из элементарных сигналов, описываемых равенством 7.14), для которого $\rho_{ij} = -1/(M-1)$ при всех $i \neq j$. Такое множество сигналов будем называть *трансортогональным* или *правильным симплексным кодом*. В этом коде минимизируются средние, а также максимальный коэффициент корреляции. Кроме того, он является оптимальным среди класса кодов, имеющих равные коэффициенты корреляции.

Один из методов построения трансортгонального кода объемом $M=2^k$ кодовых слов заключается в использовании произведения Кронекера для формирования ортогональных матриц Адамара, рассмотренных в гл. 4. Матрица Адамара второго порядка имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица Адамара размерности 2^k получается как k -кратное произведение Кронекера матрицы Адамара второго порядка. Для $k=3$ имеем

$$\begin{array}{|cccccc|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

Ясно, что данным методом можно получить код объемом 2^k слов по 2^k символов в каждом слове. Для такого кода любая пара кодовых слов совпадает и отличается в одинаковом числе символов. Следовательно, в соответствии с равенством (7.15) $\rho_{ij}=0$. Однако первый столбец рассматриваемой матрицы Адамара состоит из одних нулей, т. е. все векторы-строки совпадают в первом элементе. Вычеркнув этот столбец, получим трансортгональный код объемом 2^k слов по 2^k-1 символов в каждом слове. Для любой пары кодовых слов число несовпадений соответствующих символов превышает число совпадений на единицу. Отсюда согласно равенству (7.15)

$$\rho_{ij} = \frac{1}{n} = \frac{1}{2^k - 1} = \frac{1}{M - 1},$$

т. е. данный код является трансортгональным.

Процесс построения рассматриваемого кода можно представить графически с помощью кодового дерева, показанного на рис. 7.3. Каждое кодовое слово образуется при движении вдоль соответствующей группы «ветвей», начиная от «корня» (слева) до одной из восьми «вершин» (справа). Очевидно, полученный в результате код идентичен коду, записанному в виде матрицы Адамара выше. Отсюда следует простая схема кодера для рассматриваемого ортогонального кода: если

первый информационный символ равен 0, то движение после первой точки разветвления происходит по верхней ветви, а если — 1, то по нижней. То же самое относится и к остальным точкам разветвления.

Схема подсбного кодера изображена на рис. 7.4. Вначале запоминается весь вектор сообщения, а в запоминающее устройство обратной связи записывается цифра 0. Затем элементы вектора сообщения последовательно поступают из запоминающего устройства на сумматор по модулю 2 и складываются со всеми кодовыми символами, сформированными ранее, после чего записываются в запоминающее устройство обратной связи. Следовательно, если j -й элемент сообщения равен 0, то 2^{j-1} новых кодовых символов, генерируемых кодером, совпадут с 2^{j-1} символами, уже хранящимися в запоминающем устройстве обратной связи. Если же элемент сообщения равен 1, то 2^{j-1} новых кодовых символов будут противоположны сформированным ранее. Таким образом происходит генерирование кода на основе кодового дерева.

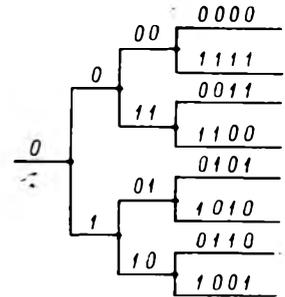


Рис. 7.3. Кодовое дерево

Существует другой еще более простой метод генерирования трансортгонального кода, рассмотренного в гл. 4. k -разрядный сдвигающий регистр позволяет получить последовательность максимальной длины, состоящую из $2^k - 1$ символов, любые две

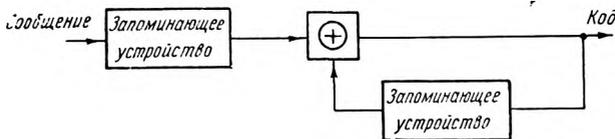


Рис. 7.4. Схема кодера

циклические перестановки которой трансортгональны. Следовательно, множество $2^k - 1$ циклических перестановок такой последовательности плюс последовательность из $2^k - 1$ нулей образуют трансортгональный код объемом 2^k слов.

Рассмотренные методы формирования трансортгональных кодов могут быть легко модифицированы для генерирования ортогональных кодов. Однако, как будет показано в следующем параграфе, ортогональные коды оказываются несколько хуже трансортгональных.

Представляет интерес также биортгональный код. Он получается в результате объединения двух ортогональных таблиц, противоположных друг другу. Биортгональный код объемом 16 слов ($k=4$) обра-

зуется из ортогонального кода для $k=3$, рассмотренного выше, путем добавления следующих восьми векторов:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Для формирования биортогонального кода может быть использовано устройство, изображенное на рис. 7.4, но оно должно быть незначительно видоизменено для учета первого элемента сообщения. Если этот элемент равен 0, то в качестве первого кодового символа выбирается цифра 0, а оставшаяся часть кодового слова формируется как прежде. Если первым элементом сообщения является 1, то первому кодовому символу присписывается значение 1, а остальные символы данного слова образуются путем инвертирования символов, генерируемых кодером. То же самое относится и к методу генерирования биортогональных кодов с помощью сдвигающего регистра.

Главным достоинством биортогональных кодов является меньшая по сравнению с другими кодами полоса занимаемых частот. Для ортогонального кода количество символов в слове равно числу кодовых слов, т. е. $n=M$. Справедливость этого положения в общем случае следует из того факта, что ортогональные вектора образуют базис эвклидова n -мерного пространства, так что любой другой вектор не может быть независимым или ортогональным по отношению к ним.

Так как $n=M$, то из равенства (7.18) следует, что отношение занимаемой полосы частот к производительности источника сообщений для двоичных ортогональных сигналов равно:

$$\frac{W}{R} = \frac{M}{2 \log_2 M} = \frac{2^k - 1}{k}$$

Для трансортогональных кодов, как было показано выше, $n=M-1$. Следовательно:

$$\frac{W}{R} = \frac{M-1}{2 \log_2 M} = \frac{2^k - 1}{2k}$$

Для биортогональных кодов количество символов в слове вдвое меньше, чем для ортогональных, поэтому

$$\frac{W}{R} = \frac{M/2}{2 \log_2 M} = \frac{2^{k-2}}{k}.$$

Таким образом, занимаемая полоса частот для биортогональных кодов в два раза меньше, чем для ортогональных.

§ 7.6. Помехоустойчивость ортогональных кодированных сигналов

Для передачи информации по гауссовскому каналу ортогональные сигналы оказываются неоптимальными. Однако при большом количестве возможных для передачи сигналов M они почти достигают наивысшей степени трансортгоналности, поскольку максимальный коэффициент корреляции не может быть меньше величины $-1/(M-1)$, которая при больших M почти равна нулю. Кроме того, анализ помехоустойчивости ортогональных сигналов оказывается наиболее простым, так как в этом случае корреляционная матрица $\|\rho_{ij}\| = \mathbf{I}^1$, и, следовательно, выражение для вероятности ошибки [см. ф-лу (7.11)] упрощается:

$$\begin{aligned} 1 - P_E = P_c &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-v_1^2/2]}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{v_1 + \sqrt{2ST/N_0}} \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dv \right]^{M-1} dv_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-v_1^2/2]}{\sqrt{2\pi}} \left[\operatorname{erf} \left(v_1 + \sqrt{\frac{2ST}{N_0}} \right) \right]^{M-1} dv_1. \end{aligned} \quad (7.19)^2$$

Величина P_E не зависит от того, какой сигнал был передан, так как v_1 является просто переменной интегрирования.

Выражение (7.19) было численно проинтегрировано на вычислительной машине IBM 704 для $M=2^k$ при $k=1, \dots, 10, 15$ и 20 [8].

Как уже отмечалось в § 7.4, для правильного сравнения результатов при различных значениях M в качестве независимой переменной следует выбирать величину ST_B/N_0 , где $T_B = T/\log_2 M$. Полученные результаты представлены на рис. 7.5, из которого следует, что для всех,

¹⁾ Символом I обозначена единичная матрица (прим. ред.).

²⁾ Формулу $\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x/\sqrt{2}} e^{-t^2/2} dt$ — интеграл вероятности ошибок (прим.

ред.).

за исключением очень малых, значений ST_B/N_0 вероятность ошибки уменьшается с увеличением количества принятых для передачи сигналов M или размерности вектора сообщения k . Эти численные результаты сведены в табл. П.1 приложения 3.

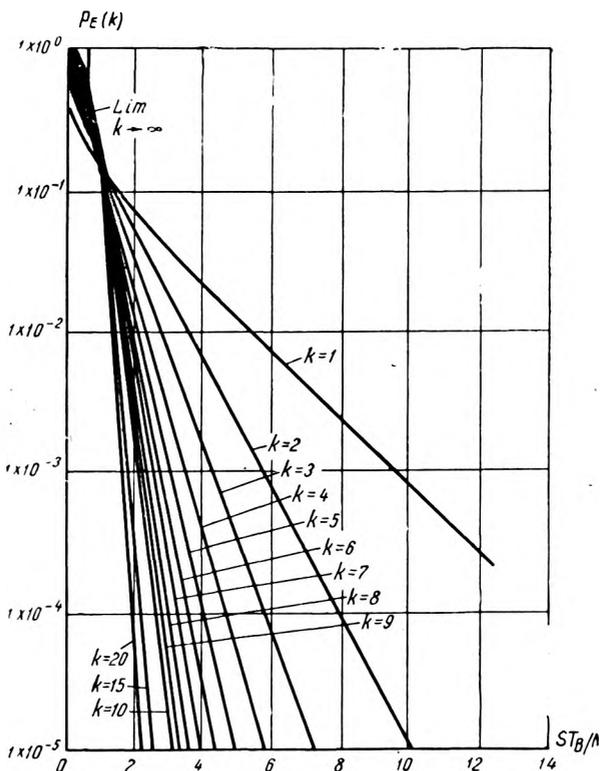


Рис. 7.5. Зависимость $P_E(k)$ от ST_B/N_0 для ортогональных кодов

Особый интерес представляет поведение величины P_E при $M \rightarrow \infty$. Возвращаясь к равенству (7.19), имеем

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} P_c &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-v_1^2/2]}{\sqrt{2\pi}} \left[\operatorname{erf} \left(v_1 + \sqrt{\frac{2ST_B \log_2 M}{N_0}} \right) \right]^{M-1} dv_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-v_1^2/2]}{\sqrt{2\pi}} \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\operatorname{erf} \left(v_1 + \sqrt{\frac{2ST_B \log_2 M}{N_0}} \right) \right]^{M-1} dv_1. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Введем обозначение $ST_B/N_0 = \beta$ и рассмотрим предел логарифма выражения в скобках:

$$\begin{aligned} & \lim_{M \rightarrow \infty} \ln [\operatorname{erf}(v_1 + \sqrt{2\beta \log_2 M})]^{M-1} = \\ & = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\ln [\operatorname{erf}(v_1 + \sqrt{2\beta \log_2 M})]}{\frac{1}{M-1}}. \end{aligned}$$

Считая M непрерывной переменной и пользуясь правилом Лопиталья, получим

$$\begin{aligned} & \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2M} \sqrt{\frac{2\beta}{\ln 2 \ln M}} \exp \left[-\frac{1}{2} (v_1^2 + 2\beta \log_2 M + 2v_1 \sqrt{2\beta \log_2 M}) \right]}{\frac{\sqrt{2\pi} \operatorname{erf}(v_1 + \sqrt{2\beta \log_2 M})}{1}} = \\ & = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{-(M-1)^2}{\beta} \sqrt{\frac{\beta}{4 \ln 2 \ln M}} \frac{\exp[-v_1^2/2 - v_1 \sqrt{2\beta \log_2 M}]}{\operatorname{erf}(v_1 + \sqrt{2\beta \log_2 M})} = \\ & = \begin{cases} -\infty, & \text{если } \beta < \ln 2 \\ 0, & \text{если } \beta > \ln 2 \end{cases} \text{ при } -\infty < v_1 < \infty. \end{aligned}$$

Тогда предел собственно выражения в скобках можно выразить как

$$\lim_{M \rightarrow \infty} [\operatorname{erf}(v_1 + \sqrt{2\beta \log_2 M})] = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta < \ln 2 \\ 1, & \text{если } \beta > \ln 2 \end{cases} \text{ при } -\infty < v_1 < \infty.$$

В соответствии с равенством (7.20) можно записать

$$\lim_{M \rightarrow \infty} P_c = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta = \frac{ST_B}{N_0} < \ln 2, \\ 1, & \text{если } \beta = \frac{ST_B}{N_0} > \ln 2, \end{cases}$$

или, переходя к вероятности ошибки P_E , получим

$$\lim_{M \rightarrow \infty} P_E = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{ST_B}{N_0} < \ln 2, \\ 0, & \text{если } \frac{ST_B}{N_0} > \ln 2. \end{cases} \quad (7.21)$$

Скачкообразное изменение P_E при $M \rightarrow \infty$ также показано на рис. 7.5.

С точки зрения теории информации такое изменение вероятности ошибки P_E имеет особое значение. Формула Шеннона [5, 6] для про-

пускной способности канала с полосой пропускания W при наличии в нем аддитивного гауссовского шума с равномерной спектральной плотностью N_0 имеет вид

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N_0 W} \right).$$

Она выражает максимальную скорость безошибочной передачи информации в пределе, когда длительность сообщения становится бесконечной. Устремляя к бесконечности и полосу пропускания W , получим

$$\begin{aligned} \lim_{W \rightarrow \infty} C &= \lim_{W \rightarrow \infty} \frac{S}{N_0} \frac{N_0 W}{S} \log_2 \left(1 + \frac{S}{N_0 W} \right) = \\ &= \lim_{W \rightarrow \infty} \frac{S}{N_0} \log_2 \left(1 + \frac{S}{N_0 W} \right)^{N_0 W/S} = \frac{S}{N_0} \log_2 e = \frac{S}{N_0 \ln 2}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Таким образом, из выражений (7.21) и (7.22) следует, что в пределе при $M \rightarrow \infty$ вероятность ошибки при передаче информации ортогональными сигналами равна нулю, если производительность источника сообщений удовлетворит соотношению

$$R = \frac{1}{T_B} < \frac{S}{N_0 \ln 2} = \lim_{W \rightarrow \infty} C. \quad (7.23)$$

Разумеется, когда $M \rightarrow \infty$, длительность сообщения также стремится к бесконечности, поскольку $T = T_B \log_2 M$. Кроме того, в соответствии с (7.22) полоса пропускания канала тоже должна стремиться к бесконечности. Этот вопрос рассматривался в § 7.5, где было показано, что для двоичных ортогональных кодов отношение полосы занимаемых частот к производительности источника сообщений равно $W/R = M/2 \log_2 M = 2^{h-1}/k$ и при увеличении M стремится к бесконечности.

Следовательно, если на полосу пропускания канала не накладывается никаких ограничений, то в пределе при стремлении M к бесконечности ортогональные коды оказываются наилучшими, поскольку они допускают безошибочную передачу информации со скоростью вплоть до пропускной способности канала.

§ 7.7. Помехоустойчивость трансортогональных кодов

Трансортогональные коды, так же как и ортогональные, входят в класс кодов с постоянными коэффициентами взаимной корреляции между словами ($\rho_{ij} = \rho$ для всех $i \neq j$). С помощью различных методов можно показать [1, 4, 7], что вероятность ошибки для любого ρ , соответствующего реализуемому коду объемом M слов, связана с вероятностью

стью ошибки для ортогонального кода ($\rho=0$) того же объема следующим соотношением:

$$P_E\left(\frac{ST_B}{N_0}, \rho\right) = P_E\left[\frac{ST_B}{N_0}(1-\rho), 0\right]. \quad (7.24)$$

Для трансортогонального кода из M слов $\rho = -\frac{1}{M-1}$, так что

$$P_E\left(\frac{ST_B}{N_0}, -\frac{1}{M-1}\right) = P_E\left[\frac{ST_B}{N_0}\left(1 + \frac{1}{M-1}\right), 0\right], \quad (7.25)$$

т. е. вероятность ошибки будет та же, что и для ортогонального кода, если соотношение сигнал/шум для последнего увеличить на величину $1/(M-1)$, которая при больших M становится пренебрежимо малой.

Простейшее доказательство равенства (7.25) состоит в следующем. Трансортогональный код может быть получен из ортогональных кодов, рассмотренных в § 7.5, путем вычеркивания первого символа во всех кодовых словах. Если на передачу каждого символа в обоих кодах отводится одинаковый промежуток времени, то и вероятности ошибок в обоих случаях будут одинаковые, так как первый символ слов ортогонального кода одинаково влияет на все корреляторы приемника. Далее, если длительность слова трансортогонального кода увеличить и сделать равной длительности слова ортогонального кода, то энергия слова возрастет на величину $1/(M-1)$. Следовательно, полученная в результате вероятность ошибки будет та же, что и для ортогонального кода, если энергию каждого слова последнего увеличить в $1+1/(M-1)$ раз, откуда и следует равенство (7.25). Таким образом, с помощью этого равенства и рис. 7.5 можно получить вероятность ошибки для двоичного трансортогонального кода при $k < 20$.

§ 7.8. Помехоустойчивость биортогональных кодов

Корреляционную матрицу для биортогонального кода можно представить в виде

$$[\rho_{ij}] = \begin{bmatrix} I & -I \\ -I & I \end{bmatrix},$$

где I — единичная матрица размерности $M/2 \times M/2$. Матрица $\|\rho_{ij}\|$ является вырожденной, поскольку в ней первые $M/2$ строк противоположны вторым $M/2$ строкам, так что выражение для вероятности ошибки (7.11) оказывается непригодным. В этом случае решение состоит в исключении зависимых переменных. Воспользуемся следующими физическими рассуждениями.

Один и тот же коррелятор можно использовать для выделения сигнала $x^{(i)}(t)$ и его инверсии. Если знак выходной величины z_i данного

коррелятора положителен, то апостериорная вероятность посылки $x^{(i)}(t)$ больше, чем $-x^{(i)}(t)$, и наоборот, если знак величины z_i отрицателен. Следовательно, оптимальная процедура декодирования заключается в нахождении одного из $M/2$ корреляторов с максимальным по абсолютной величине выходным сигналом и определении знака этого

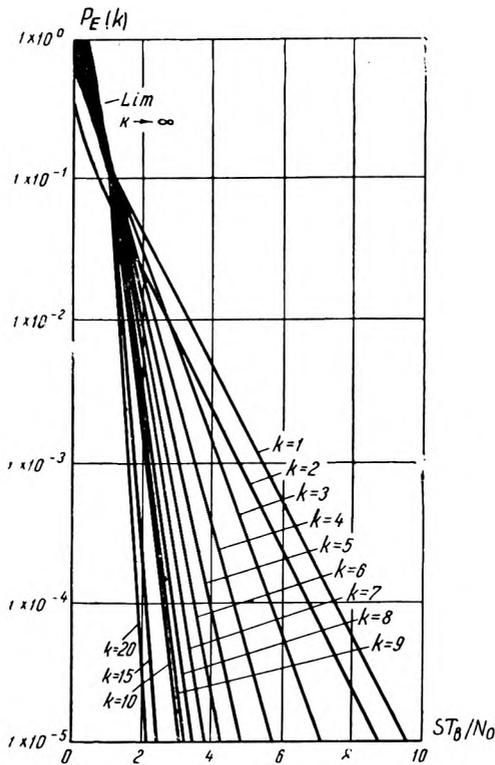


Рис. 7.6. Зависимость $P_E(k)$ от ST_B/N_0 для биортогональных кодов

сигнала. Тогда вероятность правильного декодирования при условии, что был передан сигнал $x^{(1)}(t)$, равна:

$$P_{c1} = P\{z_1 > 0, |z_1| > \max(|z_2|, \dots, |z_{M/2}|)\} = \int_0^\infty dz_1 \int_{-z_1}^{z_1} \dots \int_{-z_1}^{z_1} p(z_1, z_2, \dots, z_{M/2}) dz_2, \dots, dz_{M/2}$$

Случайные переменные $z_1, z_2, \dots, z_{M/2}$ имеют одинаковые математические ожидания и ту же ковариационную матрицу, что и в случае ортогонального кода. Поэтому, воспользовавшись методом, изложенным в § 7.3, получим

$$1 - P_E = P_c = \int_{-\sqrt{2ST/N_0}}^{\infty} \frac{\exp(-v_1^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-v_1 + \sqrt{2ST/N_0}}^{v_1 + \sqrt{2ST/N_0}} \frac{\exp(-v^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \right]^{(M/2)-1} dv_1. \quad (7.26)$$

Полученное выражение не зависит от того, какой сигнал был передан.

Данный интеграл также был численно рассчитан с помощью вычислительной машины JBM 704 [8]. Зависимость P_E от ST_B/N_0 для $M=2^k$ ($k=1 \div 10, 15, 20$) представлена на рис. 7.6. Как можно было ожидать, в рассматриваемом случае вероятность ошибки оказывается меньше, чем для ортогональных кодов, однако при $M > 2^5$ эта разница становится пренебрежимо малой. Разумеется, асимптотическое поведение P_E при больших M для ортогональных и биортогональных кодов одинаково.

§ 7.9. Сравнение помехоустойчивости систем связи с кодированием и без кодирования сообщений

В системе связи без кодирования каждый раз с помощью одного из двух элементарных сигналов передается один бит информации. В этом случае кодер, представленный на рис. 7.1, необходимо исключить. Для минимизации вероятности ошибки коэффициент взаимной корреляции между двумя элементарными сигналами должен быть как можно меньше. Сигналы, описываемые выражениями (7.14), имеют противоположные знаки, так что коэффициент взаимной корреляции между ними равен минимально возможной величине -1 . Это соответствует биортогональному или трансортгональному коду для $k=1$. Тогда из выражения (7.26) следует

$$P_E = 1 - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{2ST_E}{N_0}}. \quad (7.27)$$

Если передаются k битов информации без кодирования, то вероятность ошибочного приема одного или более битов равна:

$$1 - P_E = \left(\operatorname{erf} \sqrt{\frac{2ST_E}{N_0}} \right)^k. \quad (7.28)$$

На рис. 7.7. и 7.8 представлена вероятность ошибки как функция от ST_B/N_0 при передаче сообщений без кодирования для $k=5$ и 10, а также соответствующие вероятности ошибки для ортогонального, биортогонального и транспортного кодов. Как видно, при $k=5$ для обеспечения одинаковой вероятности ошибки требуемая мощность сигнала в системе связи с кодированием на 2,5 дб меньше, чем в системе

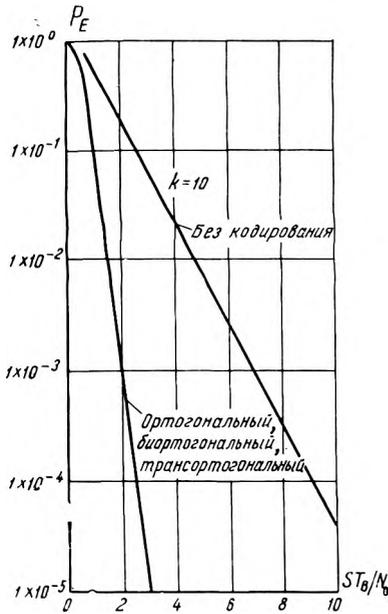


Рис. 7.7. Зависимость P_E от ST_B/N_0 для систем связи с кодированием и без кодирования сообщений, $k=5$

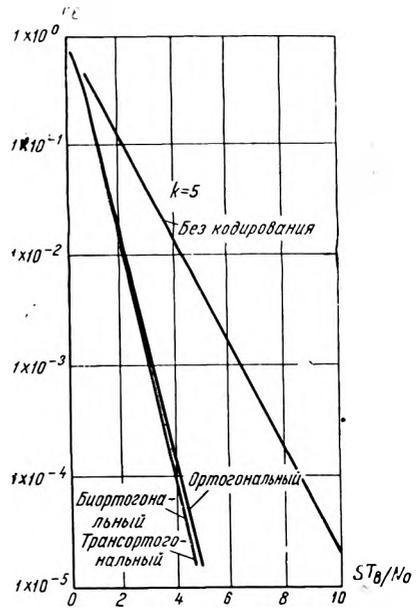


Рис. 7.8. Зависимость P_E от ST_B/N_0 для систем связи с кодированием и без кодирования сообщений, $k=10$

без кодирования. При $k=10$ введение кодирования позволяет сэкономить 5 дб мощности сигнала.

До сих пор рассматривалась вероятность ошибочного приема кодового слова, т. е. вероятность того, что, по крайней мере, один бит слова, состоящего из k битов, принят неверно. Однако оценку помехоустойчивости системы связи следует производить в соответствии с ее назначением. Если передается набор сообщений из k битов каждое, как, например, в телетайпных или кодовых системах, то вероятность ошибочного приема кодового слова действительно является важным параметром помехоустойчивости системы. С другой стороны, если посылает-

ся последовательность независимых битов, то интерес представляет вероятность ошибочного приема одного бита.

При ортогональном кодировании, где все ошибки равновероятны, математическое ожидание количества ошибочно принятых битов, когда кодовое слово из k битов было принято неверно, равно:

$$\frac{\sum_{i=1}^k i \binom{k}{i}}{\sum_{i=1}^k \binom{k}{i}} = \frac{k 2^{k-1}}{2^k - 1}.$$

Следовательно, условная вероятность ошибочного приема данного бита при условии, что содержащее его k -битовое слово принято неверно, равна $2^{k-1}/(2^k-1)$. Тогда вероятность ошибочного приема одного бита равна:

$$P_B(k) = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} P_E(k). \quad (7.29)$$

На рис. 7.9 представлена зависимость $P_B(k)$ от ST_B/N_0 для ортогональных кодов.

Для биортогональных кодов ситуация оказывается несколько сложнее. Выбор кодового вектора, противоположного переданному (ошибку данного вида будем называть ошибкой первого рода), гораздо менее вероятен, чем выбор ортогонального слова. В соответствии с выводом, приведенным в § 7.3, вероятность такой ошибки равна:

$$P_1(k) = \int_{-\infty}^{-v\sqrt{2ST/N_0}} \frac{\exp(-v^2/2)}{\sqrt{2\pi}} dv \left[\int_{-(v+\sqrt{2ST/N_0})}^{v+\sqrt{2ST/N_0}} \frac{\exp(-z^2/2)}{\sqrt{2\pi}} dz \right]^{2^{k-1}-1}. \quad (7.30)$$

Вероятность выбора одного из 2^k-2 кодовых векторов, ортогональных переданному (ошибку этого вида будем называть ошибкой второго рода), равна полной вероятности ошибки P_E , определяемой ур-нием (7.26), минус $P_1(k)$:

$$P_2(k) = P_E(k) - P_1(k). \quad (7.31)$$

Предполагается, что инверсным информационным векторам соответствуют инверсные кодовые векторы, вследствие чего минимизируется вероятность ошибочного приема всех битов при ошибочном приеме кодового слова. Тогда при наличии ошибки первого рода количество неправильно принятых битов равно точно k ; условная вероятность ошибочного приема одного бита в этом случае равна 1.

При наличии ошибки второго рода математическое ожидание числа ошибочно принятых битов равно:

$$\frac{\sum_{i=1}^{k-1} i \binom{k-1}{i}}{\sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1}{i}} = \frac{(k-1) 2^{k-2}}{2^{k-1} - 1},$$

а вероятность ошибочного приема одного бита равна:

$$\frac{(k-1) 2^{k-2}}{k(2^{k-1} - 1)}$$

Полная вероятность ошибочного приема бита для биортогональных кодов имеет вид

$$P_B(k) = P_1(k) + \frac{(k-1) 2^{k-2}}{k(2^{k-1} - 1)} P_2(k).$$

Полученные результаты представлены на рис. 7.10 и в приложении 3.

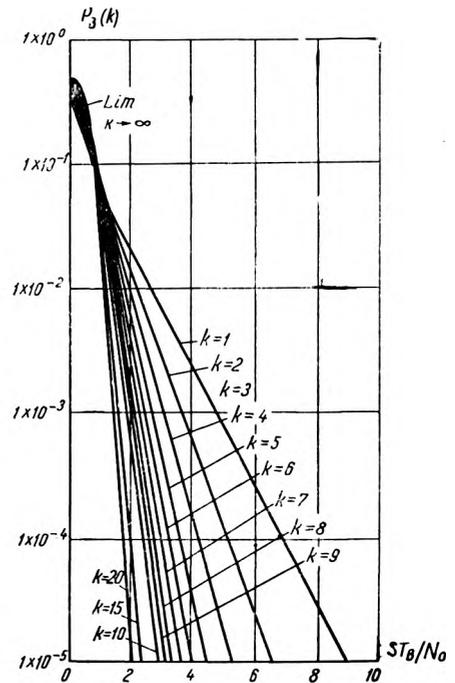
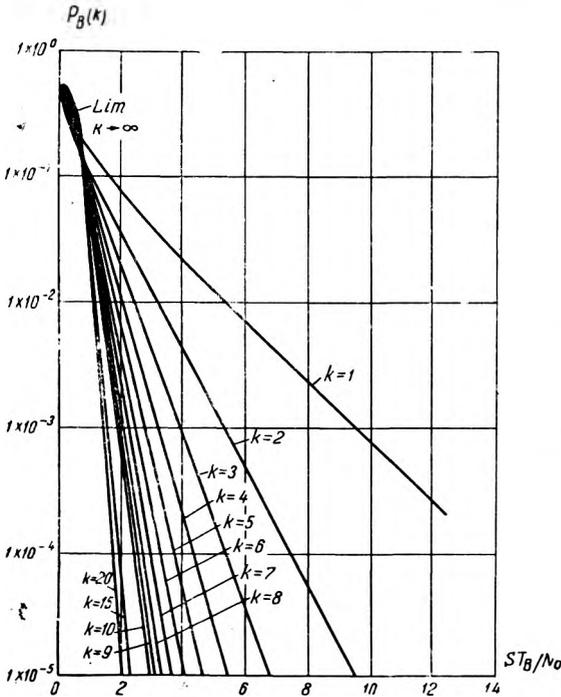


Рис. 7.9. Зависимость $P_B(k)$ от ST_B/N_0 для ортогональных кодов

Рис. 7.10. Зависимость $P_B(k)$ от ST_B/N_0 для биортогональных кодов

§ 7.10. Техническая реализация декодера на элементах цифровой техники

Схема декодера для двоичных кодов, представленная на рис. 7.2, упрощается, если M корреляторов, каждый из которых состоит из аналогового умножителя и интегратора, заменить одним умножителем и одним интегратором, подключенными через преобразователь аналого-цифра к набору накопителей и цифровому логическому устройству.

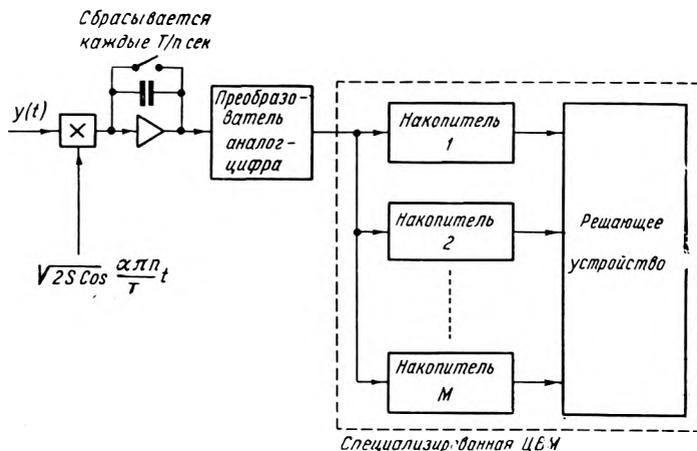


Рис. 7.11. Функциональная схема цифрового декодера

Последние могут быть выполнены в виде специализированной вычислительной машины (рис. 7.11).

Принцип работы описанной упрощенной схемы декодера заключается в следующем. Операция декодирования состоит из формирования M интегралов вида: $\int_0^T y(t) x^{(i)}(t) dt$, $i = 1, \dots, M$, где $y(t)$ — принятый сигнал. Возможные передаваемые сигналы $x^{(i)}(t)$ на данном подынтервале длительности T/n равны $x^{(i)}(t) = \pm \sqrt{2S} \cos(\alpha \pi n / T) t$. Тогда приведенный выше интеграл можно представить как сумму n интегралов:

$$\int_0^T y(t) x^{(i)}(t) dt = \sum_{j=1}^n \int_{(j-1)(T/n)}^{j(T/n)} y(t) \left(\pm \sqrt{2S} \cos \frac{\alpha \pi n}{T} t \right) dt =$$

$$= \pm \int_0^{T/n} \sqrt{2S} \left(\cos \frac{\alpha \pi n}{T} t \right) y(t) dt \pm \int_{T/n}^{2(T/n)} \sqrt{2S} \left(\cos \frac{\alpha \pi n}{T} t \right) y(t) dt \pm$$

$$\pm \int_{(n-1)T/n}^T \sqrt{2S} \left(\cos \frac{\alpha \pi n}{T} t \right) y(t) dt,$$

где знаки \pm определяются кодом сигнала $x^{(i)}(t)$.

Следовательно, в целом процесс декодирования можно упростить. Для этого принятый сигнал $y(t)$ перемножается с синусоидальным колебанием $\sqrt{2S} \cos \frac{\alpha \pi n}{T} t$ и полученный результат интегрируется за каждый подынтервал длительностью T/n . В конце каждого подынтервала с интегратора снимается выходной сигнал, который преобразуется в цифровой код. Результат интегрирования на j -м подынтервале суммируется с содержимым i -го накопителя или вычитается из него в зависимости от того, чему равен j -й символ кода — нулю или единице. Числа, записанные в каждом из M накопителей, к концу n -го подынтервала сравниваются между собой и по наибольшему из них определяется, какой сигнал был передан. Для того чтобы ошибки аналого-цифрового преобразования были малы, квантование сигнала необходимо производить достаточно точно.

В рассмотренной схеме можно за счет увеличения машинного времени существенно снизить сложность оборудования. С этой целью операцию накопления следует выполнять не параллельно, а последовательно. Тогда величина машинного времени определяется количеством требуемых при декодировании операций. Так как для каждого n -размерного вектора необходимо выполнить n сложений или вычитаний, а всего имеется M кодовых слов, то общее количество операций равно $nM = n2^k$. Для ортогональных кодов, где $n = 2^k$, количество операций равно $2^{2k} = 4^k$.

Рассмотренное цифровое устройство можно построить не только для ортогональных и родственных им кодов, но и любых двоичных кодов вообще. Для неортогональных кодов $n \ll 2^k$, следовательно, требуемое машинное время также значительно меньше.

К настоящему времени подобные кодовые цифровые системы связи уже построены и находятся в эксплуатации. В одной из них, получившей название «Диджикок», используются 5-битовые кодовые слова. Операция декодирования в ней выполняется с помощью универсальной цифровой вычислительной машины. Недостатком этой системы является то, что обработка данных не может осуществляться в реальном масштабе времени. С другой стороны, универсальность большой вычислительной машины позволяет существенно упростить проектирование системы связи в целом.

В лаборатории реактивной техники была спроектирована и построена специализированная вычислительная машина, выполняющая операцию декодирования в реальном масштабе времени. Фотография

этой экспериментальной аппаратуры, включающей в себя как кодер, так и декодер, приведена на рис. 7.12. При разумном объеме кода ($k=5$ или 32 кодовых слова) объем декодирующего оборудования не превышает величины, которая, как правило, требуется для демодуляции и обработки телеметрической информации.

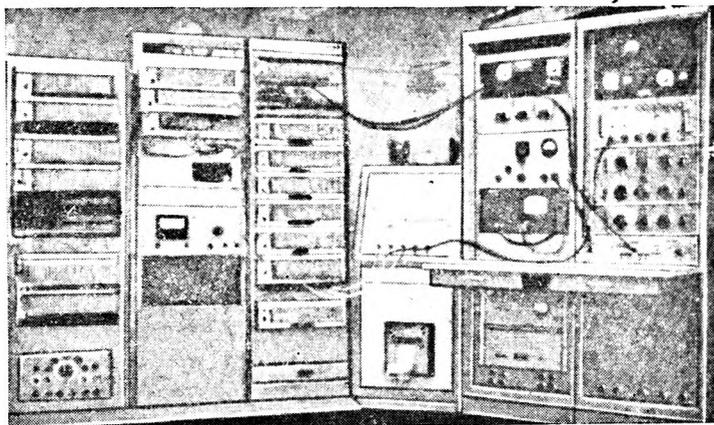


Рис. 7.12. Специализированное вычислительное устройство системы Диджлоок

§ 7.11. Выводы

Кодирование информации с помощью набора последовательностей двоичных символов, характеризующихся малыми коэффициентами взаимной корреляции, позволяет снизить вероятности ошибок за счет увеличения занимаемой полосы частот при данной скорости передачи информации. Если время, отводимое на передачу каждого бита, равно T_B секунд, а количество битов в кодовом слове — k , то скорость передачи информации будет $1/T_B \frac{\text{бит}}{\text{сек}}$, а эффективная занимаемая полоса частот равна $2^{h-1}/kT_B$ герц для ортогональных кодов, примерно той же величине для трансортогональных и половине этой величины для биортогональных кодов.

В случае необходимости передачи пяти битов информации при вероятности ошибочного приема кодового слова 10^{-3} использование транс- или биортогонального кода позволит снизить отношение ST_B/N_0 на 2,5 дБ по сравнению с тем, которое требуется для обеспечения той же вероятности ошибки в случае приема каждого бита в отдельности

(т. е. в системе без кодирования). Если требуется передать 10 бит информации при той же вероятности ошибочного приема слова, то этот выигрыш составляет 5 дб. Для $n > 5$ ортогональные коды почти столь же эффективны, что и транс- и биортогональные коды, но по сравнению с последними они занимают вдвое большую полосу частот.

В пределе, когда количество битов в кодовом слове и занимаемая полоса частот стремятся к бесконечности, вероятность ошибки стремится к 0 при $ST_B/N_0 > \ln 2$ и к 1, если отношение ST_B/N_0 меньше или равно $\ln 2$.

Таким образом, если полосу занимаемых частот не принимать во внимание, то ортогональный и родственные ему коды приближаются к оптимальным с точки зрения теоремы Шеннона, когда объем кода стремится к бесконечности.

Л и т е р а т у р а

1. Balakrishnan A. V. A Contribution to the Sphere—Packing Problem of Communication Theory, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 3, 3 (1961), 485—506.
2. Helstrom C. W. Statistical Theory of Signal Detection, New York: Pergamon Press, 1960.
Хелстром К. Статистическая теория обнаружения сигналов. ИИЛ, 1963.
3. Jaffe R. M. Digilock Telemetry System for the Air Force Special Weapons Center's Blue Scout Jr., IRE Transactions on Space Electronics and Telemetry, SET-8, 1 (March, 1962), 44—50.
Джеффи Р. М. Телеметрическая система Диджилок для ракеты Блускауг. «Зарубежная радиоэлектроника», № 2, 1963, Изд-во «Советское радио».
4. Nuttall A. H. Error Probabilities for Non-Orthogonal M-ary Signals under Phase-Coherent and Phase-Incoherent Reception, Technical Report TR-61-1-BF, Waltham, Mass.: Litton Systems, Inc., June, 1961.
5. Shannon C. E., Communication in the Presence of Noise, Proceedings of the IRE, 37 (1949), 10—21.
Шеннон К. Связь при наличии шума. Сб. К. Шеннон. «Работы по теории информации и кибернетике». ИИЛ, 1963.
6. Shannon C. E. and Weaver W. The Mathematical Theory of Communication, Urbana, Ill.: The University of Illinois Press, 1949.
Шеннон К. Математическая теория связи. Сб. «Работы по теории информации и кибернетике». ИИЛ, 1963.
7. Viterbi A. J. Systematic Coding for the Continuous Gaussian Channel, Ph. D. Dissertation, University of Southern California, August, 1962.
8. Viterbi A. J. On Coded Phase-Coherent Communications, IRE Transactions on Space Electronics and Telemetry, SET-7, 1 (March), 1961, 3—14.
9. Woodward P. M. and Davies I. L. Information Theory and Inverse Probability in Telecommunication, Proceedings of the IRE, 99, 111 (1952), 37.
10. Woodward P. M. Probability and Information Theory, with Applications to Radar, New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1955.
Вудворт Ф. Теория вероятностей и теория информации с применениями в радиолокации. Изд-во «Советское радио», 1955.

МЕТОДЫ СИНХРОНИЗАЦИИ

§ 8.1. Введение

Как указывалось в гл. 1, в работе любой системы связи можно выделить два этапа: этап обнаружения сигнала (вхождение в связь) и этап эффективной передачи полезной информации. Один из аспектов второго этапа подробно рассмотрен в гл. 7. В ней были изучены ортогональные, биортогональные и трансортогональные коды и показано, что они обладают рядом свойств, обеспечивающих наиболее эффективную передачу информации по непрерывному каналу с «белым» гауссовским шумом. Для удобства предполагалось, что этап обнаружения сигнала завершен. При передаче телеметрических данных из космоса это означает, что произведены не только ориентировка антенн и настройка приемника на требуемую частоту, но и осуществлено также согласование во времени, т. е. *синхронизация* кодовых комбинаций, для обеспечения эффективного декодирования. В частности, напомним, что оптимальный приемник вычисляет корреляцию между каждым принимаемым кодовым словом и копиями всех слов, формируемыми в этом приемнике. Следовательно, момент времени, определяющий окончание одного и начало следующего кодового слова, должен быть известен точно. Настоящая глава посвящена частной задаче этапа обнаружения, а именно: синхронизации кодовых слов, которая рассматривается применительно в основном к ортогональным кодам, описанным в гл. 7.

Для удобства предположим, что осуществлены синхронизация символов¹⁾ (т. е. известны моменты времени, когда амплитуда сигнала мо-

¹⁾ Фазирование по импульсам (прим. ред.).

жет изменять знак), а также фазовая подстройка поднесущей. В конечном счете, это необходимо для работы любой цифровой системы связи независимо от того, используется в ней кодирование или нет.

Некоторые из известных схем посимвольной синхронизации, хотя и обеспечивают возможность различения двух двоичных символов, однако не позволяют однозначно отождествлять в приемнике один из этих символов с 1, а другой с -1 . Ясно, что при такой неопределенности в процессе приема сообщений невозможно отличать кодовые слова от их инверсий.

Рассмотренные в гл. 7 бнортогональные коды содержат и ортогональные кодовые слова, и их инверсии, поэтому методы синхронизации слов, описываемые ниже, относятся в основном к ортогональным кодам. Большинство из предлагаемых методов может быть легко распространено на бнортогональные коды, если при этом каким-либо способом решается проблема неопределенности знака символа.

Задача синхронизации оказывается довольно простой, если в многоканальной системе связи один из каналов отвести исключительно для передачи данных о границах кодовых слов. Тогда можно непосредственно использовать методы измерения дальности, рассмотренные в главе 5.

Допустим, что длительность псевдослучайной последовательности, посылаемой по каналу синхронизации, равна длительности кодового слова, а ее фаза относительно передаваемого кодового слова известна. Достижение синхронизации в такой системе сводится к обнаружению на приемном конце рассматриваемой последовательности. Этот метод особенно целесообразен, когда одновременно с телеметрической информацией необходимо передавать данные о дальности.

Если длительность одной из подпоследовательностей дальномерной последовательности выбрать равной длительности кодового слова и с ней синхронизировать телеметрические данные на передающем конце, то установление синхронизации в приемнике системы связи явится побочным продуктом определения дальности.

Подобный метод можно использовать и в одноканальной телеметрической системе. В этом случае синхронизирующая последовательность должна вводиться в телеметрический канал периодически. Если она выбрана так, что не является частью информационной последовательности, то факт обнаружения данной синхронизирующей последовательности и означает установление синхронизации.

Допустим, что синхронизирующая последовательность содержит m символов. Тогда процесс синхронизации заключается в определении корреляции между каждой принимаемой последовательностью из m символов и копией синхронизирующей последовательности, вырабатываемой в приемнике.

Поскольку в канале связи всегда присутствует шум, то для надеж-

ного распознавания синхронизирующей последовательности желательнее, чтобы она как можно меньше коррелировала со всеми возможными информационными последовательностями. При этом последняя легко опознается.

Иногда затруднительно определить оптимальную синхронизирующую последовательность для данного кодового словаря. Если данные не кодируются или если m — длина синхронизирующей последовательности — мало по сравнению с длиной кодового слова, то критерий для выбора синхронизирующей последовательности становится несколько другим. В этом случае можно полагать, что символы, не входящие в синхронизирующую последовательность, появляются независимо и случайно с вероятностями $p(1) = p(-1) = 1/2$. Следовательно, появление каждого набора из m символов в информационной последовательности равновероятно. Тогда для обеспечения синхронизации необходимо некоторую фиксированную последовательность передавать чаще с тем, чтобы она появлялась гораздо регулярнее, чем если бы это происходило в результате случайного процесса. Единственное условие при выборе синхронизирующей последовательности заключается в слабой корреляции ее со всеми своими *апериодическими* фазовыми сдвигами. Так, если синхронизирующая последовательность представлена набором символов x_1, x_2, \dots, x_m , то желательно, чтобы величина коэффициента корреляции

$$R_k = \sum_{i=1}^{m-k} x_i x_{i+k}$$

была мала для $k \neq 0$, поскольку она характеризует влияние синхроследовательности на величину корреляции между принимаемым кодовым словом и его копией при их несинхронном положении. Следовательно, последовательность из нескольких единиц не может использоваться в качестве синхронизирующей, так как в этом случае величина R_k почти равна R_0 , и точное состояние синхронизма определить почти невозможно.

Указанным свойством, а именно: $|R_k| \leq 1, k \neq 0$, — обладают *последовательности Баркера* [1], из которых известными являются последовательности длины $m = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 13$. Они часто используются, когда отсутствует специальный синхронизирующий канал.

В обоих описанных методах некоторая часть мощности расходуется исключительно для целей синхронизации (если не считать одновременного измерения дальности в первом методе). После установления синхронизации эта мощность, по существу, тратится впустую. При двусторонней связи можно было бы уменьшить указанные потери, прекращая передачу синхроследовательности после установления синхронизации, однако связанные с этим усложнения системы могут быть неоп-

равданы. Более того, при связи на значительных расстояниях большое запаздывание при передаче сообщений может сделать данную процедуру довольно бесполезной. По этим причинам представляет интерес рассмотреть третий подход к решению задачи синхронизации.

Для различения синхронного и несинхронного состояний можно использовать любую операцию над принятой последовательностью *самых* кодовых слов, результаты которой существенно различны для обоих указанных случаев. Совсем не очевидно, что такая операция существует. Однако если бы она была найдена, то системы, использующие такие *самосинхронизирующиеся* коды, были бы свободны от недостатков, присущих описанным выше методам.

На первый взгляд может показаться, что с точки зрения теории информации существование самосинхронизирующихся кодов невозможно. В каждом передаваемом ортогональном кодовом слове содержится точно $n = \log_2 N$ битов информации, где N — число слов в словаре.

Если для обеспечения синхронизации в код не введена никакая избыточность, то все n битов должны быть использованы для передачи данных, и никакая часть информации кодового словаря не может быть использована для целей синхронизации. Однако если напомнить, что в шумовом канале производительность источника сообщений не равна скорости передачи информации по каналу, и учесть, что неопределенность в синхронизации является некоторым видом шума, то указанный парадокс нетрудно разрешить. В частности, скорость передачи информации уменьшается, если вероятность ошибочного декодирования принимаемого слова увеличивается [6]. Очевидно, что эта вероятность больше в отсутствии синхронизации, чем при ее наличии. Следовательно, при асинхронной работе скорость передачи информации R меньше, чем скорость R' , достижимая в той же системе связи, но с *точной синхронизацией*. Эта разница определяет теоретически возможную скорость передачи синхронизирующей информации. Поскольку *априори* существует только 2^n равновероятных синхронных положений, то для выделения правильного из них достаточно n битов информации. Если T_s есть время, необходимое для установления синхронизации, то с теоретической точки зрения необходимо лишь, чтобы выполнялось неравенство $(R' - R)T_s \geq n$.

Следует отметить, что при увеличении T_s скорость передачи информации R может приближаться к R' сколь угодно близко. Это говорит о том, что для установления синхронизации требуется очень мало информации. Такое рассуждение объясняет смысл самосинхронизирующихся кодов.

Как говорилось выше, в первых двух методах для передачи синхронизирующей информации расходуется некоторая мощность (при симплексной связи), поэтому R не может приближаться к R' сколь угодно близко.

Мощность, отводимая для синхронизации, должна быть такой, чтобы выполнялось неравенство $(R' - R)T_m \geq n$ для минимального ожидаемого времени непрерывного наблюдения T_m . Если время непрерывного наблюдения T_c становится много больше T_m , то $(R' - R)T_c \gg n$. При использовании самосинхронизирующихся кодов в режиме синхронизации R достигает R' автоматически, поскольку в этом случае вся возможная мощность расходуется для передачи данных.

Необходимо заметить, что принимаемое сообщение можно запомнить и декодировать после установления синхронизации с желаемой точностью. Следовательно, скорость R в вышеприведенном неравенстве должна быть выбрана такой, чтобы обеспечить наилучшую оценку синхронизации, т. е. оценку, достижимую при времени исследования T_c .

§ 8.2. Ортогональные групповые коды

Прежде чем продолжить изложение, исследуем структуру ортогональных кодовых словарей¹⁾ и, в частности, ортогональных *групповых* кодов²⁾.

Пусть g_j — вектор, состоящий из $N = 2^n$ элементов, и пусть G — ортогональный код, содержащий N таких векторов. Код G называется *группой* тогда и только тогда, когда существует подмножество $n = \log_2 N$ векторов g_i таких, что любой из N векторов g_j может быть представлен в виде суммы:

$$g_j = \sum_{i=1}^n a_i g_i. \quad (8.1)$$

Здесь $a_i = 0$ или 1, а знак суммы означает почленное сложение векторов по модулю 2. Заметим, что один из 2^n векторов должен быть равен

$$g_0 = \sum_{i=1}^n a_i g_i,$$

где $a_i = 0$ для всех i . Следовательно, вектор, содержащий только нули, обязательно является членом любой группы. Его удобно рассматривать как единичный вектор, так как $g_j \oplus g_0 = g_j$ для всех j .

¹⁾ Термин «кодировый словарь» применяется для обозначения ансамбля используемых кодовых слов.

²⁾ Следует заметить, что слова рассматриваемых здесь словарей формируют алгебраические *группы* относительно операции почленного сложения по модулю 2. Так как при написании этой книги предполагалось, что читатель не знаком с теорией групп, то там, где это необходимо, будут доказываться некоторые положения этой теории. Для удобства иногда будет использоваться также и терминология теории групп.

Покажем, что определенные в гл. 4 матрицы Адамара формируют группы. Очевидно, что строки матрицы размерности 2×2 ($n=1$)

$$\begin{aligned} g_0 &= 00 \\ g_1 &= 01 \end{aligned}$$

могут быть порождены второй строкой, поскольку

$$g_0 = \sum_{i=1}^1 a_i g_i,$$

где $a_i=0$, и аналогично

$$g_1 = \sum_{i=1}^1 a_i g_i,$$

где $a_1=1$.

Допустим, что матрица A_n размерности $N \times N$ может быть порождена таким же способом с помощью $n = \log_2 N$ базисных векторов g_1, g_2, \dots, g_n . Тогда матрица размерности $2N \times 2N$

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} A_n & A_n \\ A_n & \bar{A}_n \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

может быть порождена векторами $g_1 g_1, g_2 g_2, \dots, g_n g_n, g'_{n+1}$. Здесь $g_i g_i$ обозначает $2N$ -элементный вектор, первая и вторая половины которого повторяют вектор g_i , а g'_{n+1} является вектором, первые N элементов которого равны 0, а вторые N элементов равны 1. Так как равенство (8.2) формулирует метод образования ортогональных словарей, рассмотренных в гл. 7, то эти словари должны формировать группы.

Групповые коды представляют как аналитический, так и практический интерес. Групповая структура часто облегчает подробное аналитическое исследование этих кодов. Вследствие алгебраической структуры значительно упрощаются также и методы кодирования при использовании ортогональных групповых кодов. Поскольку любое кодовое слово может быть порождено n векторами с помощью суммирования

$$g_j = \sum_{i=1}^n a_i g_i (a_i = 0, 1),$$

то очевидно, что необходимо запомнить только эти n векторов. Двоичные переменные a_i могут представлять биты сообщения, которые подлежат кодированию. Тогда кодер состоит из сумматора по модулю 2, входы которого управляются информационными битами a_i . Техническая реализация такого кодера не представляет трудностей.

§ 8.3. Статистический метод синхронизации ¹⁾

Рассмотрим матрицу A_n размерности $2^n \times 2^n$, строки которой являются кодовыми словами ортогонального словаря. Допустим, что первый столбец ее содержит только нули, а остальные состоят наполовину из нулей и наполовину из единиц. Тогда матрица

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} A_n & A_n \\ A_n & A_n \end{bmatrix}$$

также обладает этой особенностью и, начиная, например, со словаря

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

можно формировать словари всех размерностей $N = 2^n$, обладающих тем же свойством. Указанный факт может быть использован для выполнения синхронизирующей операции, о которой шла речь в § 8.2. Очевидно, что для установления синхронизации достаточно определить положение символа, соответствующего единственному столбцу, состоящему только из нулей. Для этого необходимо вначале сформировать интеграл

$$I_{k/N} = \int_{kT/N}^{(k+1)T/N} \sqrt{2} \sin \omega_c t [x^r(t) + n(t)] dt, \quad (8.3)$$

где $x^r(t)$ — принимаемый двичный сигнал; $n(t)$ — аддитивный белый гауссовский шум²⁾. Фаза k , где k — любое целое число в пределах от 0 до $N-1$ (длина модулирующей последовательности равна N), соответствует возможному начальному символу кодового слова. Не нарушая общности, будем считать, что для столбца, состоящего из одних нулей, $k=0$. Теперь интеграл $I_{k/N}$ можно оценить для всех значений k принимаемой последовательности символов. Из допущения о том, что источник выбирает кодовые слова независимо и с вероятностью $1/N$

¹⁾ В оригинале этот метод назван The Random Source Method of Synchronization, что буквально означает: «Метод синхронизации при наличии источника случайных сообщений». Как увидим далее, этот метод основан на учете статистики символов в последовательности кодовых слов (прим. ред.).

²⁾ Рассматриваемая здесь система связи идентична системе связи, описанной в гл. 7, поэтому здесь применяются те же самые обозначения, в частности,

$$x^i(t) = \sqrt{2S} x_j^i \sin \omega_c t, \quad (j-1)T/N < t < jT/N,$$

где $x_j^i = 1$ или -1 в зависимости от того, чему равен ij -й элемент кодовой матрицы A_n : 0 или 1. Нгловая частота ω_c кратна $N\pi/T$ герц, как и в гл. 7, а двусторонняя спектральная плотность шума равна $N_0/2$ ватт/герц.

следует, что интеграл $I_{k/N}$ есть гауссовская переменная с математическим ожиданием:

$$E(I_{k/N}) = \int_{kT/N}^{[(k+1)/N]T} \sqrt{2} \sin \omega_c t \{E[x^r(t)] + E[n(t)]\} dt = \begin{cases} 0, & k \neq 0, \\ \frac{\sqrt{S}T}{N}, & k = 0, \end{cases} \quad (8.4)$$

так как $E[n(t)] = 0$ по допущению, а

$$\begin{aligned} E[x^r(t)] &= Pr(x_{k+1}^r = \sqrt{2S} \sin \omega_c t) \sqrt{2S} \sin \omega_c t + \\ &+ Pr(x_{k+1}^r = -\sqrt{2S} \sin \omega_c t) (-\sqrt{2S} \sin \omega_c t) = \begin{cases} 0, & k \neq 0, \\ \sqrt{2S} \sin \omega_c t, & k = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Далее определим

$$\begin{aligned} E(I_{k/N}^2) &= E \left\{ \int_{kT/N}^{[(k+1)/N]T} \int_{kT/N}^{[(k+1)/N]T} [x^r(t) + n(t)][x^r(u) + \right. \\ &\quad \left. + n(u)] 2 \sin \omega_c t \sin \omega_c u dt du \right\} = \\ &= E \left\{ \left[\int_{kT/N}^{[(k+1)/N]T} \sqrt{2} \sin \omega_c t [x^r(t)] dt \right]^2 \right\} + \\ &+ 2 \int_{kT/N}^{[(k+1)/N]T} \int_{kT/N}^{[(k+1)/N]T} E[x^r(t)] E[n(u)] 2 \sin \omega_c t \sin \omega_c u dt du + \\ &+ \int_{kT/N}^{[(k+1)/N]T} \int_{kT/N}^{[(k+1)/N]T} E[n(t)n(u)] 2 \sin \omega_c t \sin \omega_c u dt du = \\ &= \left[\int_{kT/N}^{[(k+1)/N]T} 2 \sqrt{S} \sin^2 \omega_c t dt \right]^2 + \\ &+ \int_{kT/N}^{[(k+1)/N]T} \int_{kT/N}^{[(k+1)/N]T} \frac{N_0}{2} \delta(t-u) 2 \sin \omega_c t \sin \omega_c u dt du = \\ &= \frac{ST^2}{N^2} + \frac{N_0}{2} \frac{T}{N}. \end{aligned} \quad (8.)$$

Таким образом, средние значения μ_k и дисперсия σ_k^2 переменной $I_{k/N}$ для $k=0$ и $k \neq 0$ равны:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{k=0} &= \sqrt{S} T/N \\ \mu_{k \neq 0} &= 0 \\ \sigma_{k=0}^2 &= E(I_0^2) - [E(I_0)]^2 = (N_0/2) T/N \\ \sigma_{k \neq 0}^2 &= \frac{ST^2}{N^2} + (N_0/2) T/N \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Так как $\sigma_k^2 \neq 0$, то обычно невозможно точно определить фазу после приема только одного слова. Однако сумма $S_k = \sum_{l=1}^m I_{l+k/N}$, очевидно,

обладает тем свойством, что для достаточно больших значений m величина S_0 легко отличима от других значений S_k , $k \neq 0$.

К сожалению, для обеспечения хорошей разрешающей способности при синхронизации значение m должно быстро возрастать с увеличением числа N слов в словаре [7].

Статистический метод синхронизации тесно связан с методом синхронизации с помощью последовательностей Баркера (см. § 8.2). Одним из свойств ортогональных кодов является то, что они содержат одну и ту же односимвольную последовательность Баркера, что и делает возможным такой метод синхронизации. Хотя статистический метод и применим для малых значений N , но он сильно зависит от вида распределения вероятностей принимаемых кодовых слов. Если, например, источник за сеанс связи передает только половину слов словаря, то, как следует из анализа описываемых кодов [8], существует другое значение $k \neq 0$, для которого каждый символ всегда равен либо $+\sqrt{S}$, либо $-\sqrt{S}$. Вероятность точной синхронизации снижается при этом до $1/2$ независимо от числа принятых слов.

В общем случае, если источник ограничивает свой выбор подмножеством словаря, состоящим из 2^{n-p} слов вместо 2^n , то может существовать $2^p - 1$ фаз $k \neq 0$, не отличимых от $k=0$. При больших значениях N это становится серьезной проблемой по следующим двум причинам:

— выбор осуществляется из большого числа слов, поэтому увеличивается возможность того, что большое подмножество слов не будет передано;

— при постоянной скорости передачи символов число различных слов, передаваемых за определенное время, уменьшается, если увеличивается длина слова.

§ 8.4. Метод синхронизации, использующий коды без запятой

Для выделения сообщений вычисляются коэффициенты корреляции

$$R_{i0} = \int_0^T x^i(t) [x^r(t) + n(t)] dt, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (8.7)$$

и по наибольшему из них определяют, какой из N сигналов вероятнее всего был передан. Как и в гл. 7, $x^i(t)$ соответствует формируемой в приемнике копии i -го кодированного сигнала:

$$x^i(t) = \sqrt{2} x_j^i \sin \omega_c t, \quad (j-1) \frac{T}{N} < t < j \frac{T}{N},$$

$$x_j^i = +1 \text{ или } -1.$$

Выражение $x^r(t) + n(t)$ представляет собой аддитивную смесь полезного сигнала и шума:

$$x^r(t) = \sqrt{2S} x_j^r \sin \omega_c t, \quad (j-1) \frac{T}{N} < t < j \frac{T}{N}.$$

В случае отсутствия синхронизации имеется $N(N-1)$ других коэффициентов корреляции вида

$$R_{ik} = \int_0^T x^i(t) [y^k(t) + n(t)] dt, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad (8.8)$$

где $y^k(t)$ — последовательность, формируемая последними $N-k$ символами одного кодового слова, за которыми следуют k первых символов другого кодового слова. Очевидно, что при $k=0$ $y^0(t) = x^r(t)$ для некоторого r .

Если существует код, для которого величины R_{i0} и R_{ik} существенно различны, то это различие можно использовать для обеспечения синхронизации.

Для конкретной последовательности $y^k(t)$ и стационарного белого гауссовского шума $n(t)$ случайная переменная является гауссовской с математическим ожиданием

$$E(R_{ik}) = E \left[\int_0^T x^i(t) y^k(t) dt \right] = \frac{\sqrt{ST}}{N} \sum_j x_j^i y_j^k \quad (8.9)$$

и дисперсией

$$E(R_{ik}^2) - [E(R_{ik})]^2 = \int_0^T (N_0/2) x_i^2(t) dt = (N_0/2) T. \quad (8.10)$$

Поскольку векторы x^i ортогональны, то они образуют базис в N -мерном пространстве. Любой другой вектор y^h может быть записан как линейная комбинация векторов x^i :

$$y_j^k = \sum_{i=1}^N a_i x_j^i. \quad (8.11)$$

Тогда последовательность, соответствующая вектору y^h , полностью характеризуется вектором $a(k) = \{a_i\}$, элементы которого равны коэффициентам корреляции между y^h и всеми N кодовыми векторами x^i , т. е.

$$\rho_l \equiv \frac{1}{N} \sum x_j^i y_j^k \equiv \frac{x^i y^k}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x^i a_j x_j^k = a_i. \quad (8.12)$$

Вектор $a(k=0)$ является одним из единичных векторов e_r , все элементы которого, за исключением r -го, равны 0, r -й элемент равен 1.

Еще одно условие для вектора $a(k)$ можно получить, если y^h представить последовательностью 1 и -1 . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (y_j^k)^2 &= 1 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{\mu=1}^N \rho_{\mu} x_j^{\mu} \sum_{\nu=1}^N \rho_{\nu} x_j^{\nu} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^N \sum_{\nu=1}^N \rho_{\mu} \rho_{\nu} \sum_{j=1}^N x_j^{\mu} x_j^{\nu} = \sum_{\mu=1}^N \rho_{\mu}^2 = 1. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Учитывая выражение (8.9), желательно наложить на кодовый словарь, если возможно, дополнительное ограничение, которое каким-либо образом максимизировало бы разность между векторами $a(k \neq 0)$ и $a(0)$. Для этого необходимо определить термин *разность*. Оптимальное определение, в свою очередь, зависит от метода, в котором данная разность используется для обеспечения синхронизации. По-видимому, приемлемой мерой разности между $a(k)$ и любым из синфазных векторов $\pm e_i$ является минимальная «среднеквадратическая» разность:

$$\begin{aligned} d &= \min_i \sum_{j=1}^N [\rho_j \pm (e_i)_j]^2 = \min_i \left(\sum_{j=1}^N \rho_j^2 \pm 2 \rho_i + 1 \right) = \\ &= \min_i 2(1 - |\rho_i|) = 2(1 - \max |\rho_i|). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Знак перед e_i должен быть взят таким, чтобы $a(k)$ сравнивался с «ближайшим» из единичных векторов $\pm e_i$.

Следовательно, максимизация определенной выше разности d эквивалентна минимизации элемента вектора a с максимальным абсолютным значением. Этот критерий и использовался для выбора синхронизирующих последовательностей в § 8.2, где утверждалось, что при несинфазном положении все коэффициенты корреляции между принимаемой последовательностью и копиями кодовых слов должны быть малы.

Ранее было показано, что коэффициент корреляции между двумя двоичными последовательностями x^i и y равен:

$$\rho_{x^i y} = \frac{A_i - D_i}{N}, \quad (8.15)$$

где A_i — число совпадений, а D_i — число несовпадений соответствующих элементов обеих последовательностей. Следовательно, при конкретном значении N коэффициент корреляции однозначно определяется, если задано A_i или D_i . Отметим далее, что если элементами векторов x^i и y являются 1 и 0, то D_i равно числу 1 в почленной сумме по модулю 2 этих векторов.

Таким образом, $D_i = |x^i \oplus y|$, где $|z|$ обозначает вес (число единиц) двоичного вектора z . (Заметим, что $D = |x^i \oplus y|$ является также хэмминговым расстоянием между векторами x^i и y .)

Теперь можно ввести понятие кодов без запятой [3].

Если совокупность N -символьных слов образует код без запятой, то любая последовательность $2N-1$ символов, встречающаяся в произвольной последовательности этих слов, должна содержать одно единственное кодовое слово длины N . Следовательно, число несовпадений D между каждым кодовым словом и любым N -символьным перекрытием двух слов (т. е. любой N -символьной комбинацией, образующейся на стыке двух слов) должно быть больше 0. Это условие в более общем виде можно получить с помощью следующих рассуждений. Величина d в выражении (8.14) максимизируется, когда минимизируется величина

$$\max_i |\rho_i| = \max_i \left| 1 - \frac{2D_i}{N} \right|.$$

Так как неравенство $p \leq D_i \leq N-p$ эквивалентно требованию $|\rho_i| \leq \left| 1 - \frac{2p}{N} \right|$, то очевидно, что $\max |\rho_i|$ минимизируется, если максимизируется величина $p \leq N/2$.

Код, для которого D_i удовлетворяет этим неравенствам для всех последовательностей из N символов, не являющихся кодовыми словами, называют кодом без запятой *индекса p^1*). Тогда *оптимальным ортогональным кодом объема N* называется код, в котором *индекс максимизирован*.

Рассмотрим матрицу A , строки которой образуют кодовые слова. Отметим, что коэффициент корреляции между двумя любыми строками матрицы не изменится при произвольной перестановке столбцов или их замене на свои инверсии. Однако если

$$a = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N, \quad b = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N, \quad c = \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$$

являются тремя словами кода A , то очевидно, что в общем случае коэффициент корреляции между $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ и $\beta_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_N$; $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$ неинвариантен относительно изменения мест столбцов или замены столбцов их инверсиями.

Следовательно, существует большой класс элементарных операций над кодом A , которые не изменяют его свойств с точки зрения передачи информации в синхронных системах, но приводят к кодам без запятой с различными индексами.

В частотном случае ортогональных кодов существует еще одна аналогичная операция, о которой следует упомянуть. Поскольку коэффициент корреляции между двумя любыми словами в этом случае равен 0, то код, образующийся в результате замены любых или всех кодовых слов их инверсиями, остается ортогональным. Однако замена некоторых слов на их инверсии также может изменить индекс кода без запятой.

Если имеются два таких словаря, что один из них может быть получен в результате инвергирования и перестановки строк и столбцов другого, то говорят, что эти словари относятся к одному и тому же *эквивалентному классу*.

На первый взгляд кажется, что оптимальные коды можно отыскать путем полного перебора всех ортогональных словарей объема N на быстросействующей вычислительной машине. Однако, как показано в приложении 1, число различных словарей только в одном классе эквивалентных групп настолько велико, что такой перебор оказывается труд-

Таблица 8.1
ЧИСЛО СЛОВАРЕЙ
В КЛАССЕ ЭКВИВА-
ЛЕНТНЫХ ГРУПП

n	$M(2^n)$
1	4
2	32
3	122880
4	$8,7 \times 10^{15}$

¹⁾ По существу, индекс p равен минимально возможному для данного кода числу несовпадений между кодовым словом и любым N -символьным перекрытием (прим. ред.).

но выполнимым. В частности, существует

$$M(2^n) = \frac{(2^n)! (2^{2^n+1} - 2^{2^n-1})}{(2^n - 2^0)(2^n - 2^1)(2^n - 2^2) \dots (2^n - 2^{n-1})}$$

словарей объема $N=2^n$ в эквивалентном классе, содержащем групповые коды.

В табл. 8.1 приведен порядок величины $M(2^n)$.

Существует более $8 \cdot 10^{15}$ двоичных ортогональных словарей, содержащих только 16 слов. С увеличением N это число очень быстро растет. Ясно, что вместо метода полного перебора для нахождения кодов без запятой должны быть разработаны другие, более эффективные методы.

§ 8.5. Коды без запятой с высокими значениями индексов

Порядок величины $M(2^n)$ не позволяет использовать полный перебор всех ортогональных словарей в качестве метода поиска словарей без запятой. Однако если заданы конкретные словари со сравнительно малыми значениями $N=2^n$, то значение индекса кода без запятой может быть определено. Такая работа уже проводилась, и ее результаты подытоживаются в этом параграфе.

Из эвристических соображений, которые будут объяснены в § 8.8,

Таблица 8.2
известные значения
индекса p_N для
словарей без
запятой

$N=2^n$	p_N
16	2
32	6
64	14
128	34

для рассмотрения были выбраны коды, сформированные следующим образом. С помощью рекуррентного соотношения

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & A_{n-1} \\ A_{n-1} & \bar{A}_{n-1} \end{bmatrix},$$

где

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

строилась ортогональная группа, впервые описанная в гл. 7. Затем ко всем векторам словаря A_n прибавлялся по модулю 2 вектор c_n , в результате чего образовывался словарь $B_n = A_n \oplus c_n$. Вектор c_n является некоторой циклической перестановкой псевдослучайной последовательности длины $2^n - 1$, к которой добавлена одна двоичная цифра, чтобы длина вектора равнялась требуемой величине 2^n . Значения индексов p_N для полученных таким способом словарей приведены в табл. 8.2.

Можно показать, что для $n < 4$ [4] словарей без запятой не существует. Формирование словаря B_n для кодов без запятой уже описано. Остается только перечислить векторы:

$$\begin{aligned}
 c_4 &= \underline{01110101} \quad 01100100^1) \\
 c_5 &= \underline{10001101} \quad 11010100 \quad 00100101 \quad 10011111 \\
 c_6 &= \underline{00011100} \quad 10010110 \quad 11101100 \quad 11010100 \\
 &\quad 11111100 \quad 00010000 \quad 11000101 \quad 0011110\bar{1} \\
 c_7 &= \underline{11111111} \quad 00000010 \quad 00001100 \quad 00101000 \\
 &\quad \underline{11110010} \quad 00101100 \quad 11101010 \quad 01111101 \\
 &\quad 00001110 \quad 00100100 \quad 11011010 \quad 11011110 \\
 &\quad 11000110 \quad 10010111 \quad 01110011 \quad 00101010
 \end{aligned}$$

Элементы, которые добавлены к псевдослучайной последовательности, подчеркнуты.

Итак, полный словарь для $N=16$ имеет вид:

0111	0101	0110	0100
0111	0101	1001	1011
0111	1010	0110	1011
0111	1010	1001	0100
0100	0110	0101	0111
0100	0110	1010	1000
0100	1001	0101	1000
0100	1001	1010	0111
0010	0000	0011	0001
0010	0000	1100	1110
0010	1111	0011	1110
0010	1111	1100	0001
0001	0011	0000	0010
0001	0011	1111	1101
0001	1100	0000	0010
0001	1100	1111	1101

Наконец, необходимо отметить, что биортогональные словари, образуемые из этих ортогональных словарей, имеют в каждом случае те

¹⁾ В оригинале $c_4 = \underline{00100011} \quad 11010111$. Однако в этом случае непонятно, каким образом с помощью предлагаемой процедуры из выбранного ортогонального кода может быть сформирован приводимый далее словарь. Так как исходный ортогональный код обязательно содержит слово, состоящее из одних нулей, то полученный словарь без запятой обязательно должен содержать слово, совпадающее с c_4 (прим. ред.).

же самые индексы, что и соответствующие ортогональные словари, т. е. биортогональный словарь без запятой $B_4 \cup \bar{B}_4$ имеет индекс $\rho'_{16}=2$, а словарь $B_5 \cup \bar{B}_5$ — индекс $\rho'_{32}=6$ и т. д.

§ 8.6. Нижние границы индексов кодов без запятой

Хотя, исходя из результатов гл. 7, можно заключить, что нецелесообразно строить систему, использующую словарь с большим числом слов, чем 128, тем не менее теоретически представляет интерес оценить поведение величины ρ_N для $N > 128$. Время, необходимое для исследования только одного ортогонального кода с числом слов 256 или более, чрезвычайно велико, даже если для этого используется быстродействующая вычислительная машина. Возможно, однако, установить нижнюю границу индекса при $N > 128$. Эта граница определяется в настоящем параграфе. Описывается метод построения больших словарей, обладающих тем свойством, что значение индекса ρ_N для них увеличивается, по крайней мере, пропорционально N .

Допустим, что биортогональные кодовые словари без запятой $A \cup (-A)$ и $B \cup (-B)$, содержащие $2M$ и $2N$ слов соответственно, имеют индексы ρ_M и ρ_N . Рассмотрим матрицу $C = (A \times B) \cup [-(A \times B)]$, где знак \times обозначает произведение Кронекера (см. гл. 7), определяемое следующим образом:

$$A \times B = (a_{ij}) \times (b_{km}) = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1M}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{M1}B & a_{M2}B & \dots & a_{MM}B \end{bmatrix}. \quad (8.16)$$

Здесь A и B — ортогональные матрицы размерностей $M \times M$ и $N \times N$ соответственно, а элементы a_{ij} и b_{km} равны либо $+1$, либо -1 ¹⁾.

Матрица C является объединением двух матриц размерности $MN \times MN$, причем вторая матрица получена перемножением каждого элемента первой на -1 . Рассмотрим коэффициент корреляции между двумя произвольными строками матрицы $A \times B$, т. е.

$$a_{11} \beta_k, a_{12} \beta_k, \dots, a_{1M} \beta_k$$

и

$$a_{j1} \beta_m, a_{j2} \beta_m, \dots, a_{jM} \beta_m,$$

где β_v представляет собой v -ю строку матрицы B . Если $m \neq k$, то эти две строки обязательно ортогональны вследствие ортогональности строк

¹⁾ Эти матрицы, конечно, могут быть записаны в более удобной двоичной форме, если -1 заменить 0.

B. Далее, поскольку рассматриваемые строки с помощью перестановок столбцов могут быть приведены к виду

$$\begin{matrix} b_{k1} \alpha_i, & b_{k2} \alpha_i, & \dots, & b_{kN} \alpha_i, \\ b_{m1} \alpha_j, & b_{m2} \alpha_j, & \dots, & b_{mN} \alpha_j, \end{matrix}$$

где α_j обозначает j -ю строку матрицы A , и перестановка столбцов матрицы не изменяет коэффициента корреляции между ее строками, то строки матрицы $A \times B$ также ортогональны при $i \neq j$ вследствие ортогональности строк матрицы A . Непосредственно проверяя (8.16), можно убедиться в том, что в матрице $A \times B$ не существует двух строк, для которых $i=j$ и $m=k$ одновременно. Следовательно, все строки матрицы $A \times B$ взаимно ортогональны.

Таким образом, C является биортогональным кодом, словами которого являются строки вида $\gamma_l = \pm \beta_i, \pm \beta_i, \dots, \pm \beta_i$, где β_i — строка матрицы B , содержащая N членов. Всего в строке γ_l содержится M членов β_i .

Рассмотрим следующие четыре несинфазных случая:

1. Фаза ¹⁾ $k \neq qN, q=1, 2, \dots, M-1$, поэтому каждая последовательность β_i в γ_l не совпадает с соответствующей несинфазной последовательностью не менее чем в ρ_N и не более чем в $N - \rho_N$ элементах. Это следует из того, что β_i являются кодовыми словами словаря B , и все возможные несинфазные последовательности длины N , с которыми $\pm \beta_i$ в данном случае может сравниться, относятся к множеству перекрестий слов кода $B \times (-B)$. Следовательно, для данного случая $\rho_{MN} \geq M \rho_N$.

2. $k = qN, q=1, 2, \dots, M-1$, и γ_l сравнивается с последовательностью, состоящей из членов $\pm \beta_j, i \neq j$. Тогда, поскольку кодовые слова словаря B ортогональны, то $\rho_{MN} = MN/2$.

3. $k = qN, q=1, 2, \dots, M-1$, и несинфазный вектор содержит только члены $\pm \beta_i$. Тогда, очевидно, $\rho_{MN} = N \rho_M$, так как всякое несовпадение элементов слов словаря $A \cup (-A)$ вызывает N несовпадений в слове C .

4. $k = qN, q=1, 2, \dots, M-1$, и несинфазные векторы содержат как члены $\pm \beta_i$, так и $\pm \beta_j, i \neq j$. Если первая часть последовательности, с которой сравнивается γ_l содержит члены $\pm \beta_i$, то каждое несовпадение элемента кода $A \cup -A$ вызывает N несовпадений в коде C . Во второй части последовательности, содержащей ν элементов A , каждому элемен-

¹⁾ Фаза k , как и в § 8.3, равна количеству принятых символов последовательности по модулю, равному длине последовательности, считая от первого символа кодового слова. Если имеется посимвольная синхронизация, то k — целое число; если же нет, то достаточно рассматривать только целые значения k , так как легко убедиться, что максимальные и минимальные коэффициенты корреляции имеют место именно в этих случаях.

ту A соответствует $N/2$ несовпадений в C вследствие ортогональности $B \cup -B$.

Если строки матрицы $A \cup -A$, соответствующие сравниваемым строкам матрицы C , не совпадают в $d = d_1 + d_2$ элементах, где d_1 — число несовпадений среди первых k элементов строк $A \cup -A$, а d_2 — среди последних $M - k = v$ элементов, то $M - p_M \geq d_1 + d_2 \geq p_M$. Но в случае биортогональных кодов при инвертировании какого-либо перекрытия двух кодовых слов, с которыми сравниваются кодовые слова, справедливо следующее неравенство:

$$M - p_M - v \geq d_1 - d_2 \geq p_M - v.$$

Объединяя это неравенство с предыдущим, получим

$$\frac{2M - v - 2p_M}{2} \geq d_1 \geq \frac{2p_M - v}{2}.$$

Так как $d_{MN} = N \left(d_1 + \frac{v}{2} \right)$, то $N(M - p_M) \geq d_{MN} > Np_M$, и, следовательно, $p_{MN} \geq Np_M$.

Очевидно, тот же результат получается, если члены β_i содержатся не в первой, а во второй части несинфазного вектора матрицы C . Заметим, что второй и третий случаи являются частными по отношению к четвертому.

Обобщая результаты всех рассмотренных случаев, заключаем, что $p_{MN} \geq \min(Np_M, Mp_N)$. Если $M = N$, то $p_N^2 \geq Np_N$. Следовательно, индекс биортогональных, а тем более и ортогональных кодов без запятой возрастает, по крайней мере, пропорционально числу слов N в словаре.

Чтобы установить нижние границы значений p_N для всех двоичных ортогональных словарей, содержащих 2^n слов, необходимо лишь показать, что биортогональные коды с $p_N > 0$ существуют для $N = 16, 32, 64$ и 128 . Действительно, такие коды не существуют для $n < 4$, и ни одно произведение перечисленных чисел не порождает словарь с числом слов меньшим чем $2^8 = 256$. Следовательно, ни один словарь меньшего объема не может быть сформирован описанным выше способом. Чтобы убедиться в том, что можно ограничиться перечисленным набором значений N , заметим, что $2^n = 2^4 \times 2^{n-4}$, а так как биортогональные коды без запятой существуют для $n = 4, 5, 6, 7$, то для больших n они могут быть получены рекурсивно.

§ 8.7. Верхние границы индексов кодов без запятой

Поскольку полный перебор ортогональных кодов для поиска кодов без запятой практически невозможен, то желательно иметь показатель, позволяющий сравнивать имеющиеся коды без запятой. В этом пара-

графе выводится несколько оценок верхних границ максимальных индексов ортогональных кодов без запятой.

Первая оценка получается при определении максимально достижимого значения индекса в случае, когда кодовое слово коррелируется со своими циклическими перестановками или циклическими перестановками других кодовых слов. Так как множество слов, образуемых циклическими перестановками кодовых слов, является подмножеством всех возможных несинхронных комбинаций, то верхняя граница, получаемая только при рассмотрении этого подмножества, обязательно является верхней границей для всего множества в целом. Но если x должен отличаться от всех циклических перестановок y , по крайней мере, в p элементах и не более чем в $N-p$ элементах, то все циклические перестановки x и \bar{x} должны отличаться от всех циклических перестановок y и \bar{y} хотя бы в p элементах.

Для доказательства этого предположим, что x^r представляет собой набор из N символов, образующийся при циклической перестановке x на r элементов, т. е. $x = x_1x_2x_3x_4$, $x^1 = x_4x_3x_2x_1$, $x^2 = x_3x_4x_2x_1$, $x^3 = x_2x_3x_4x_1$.

Допустим, что $N-p \geq |x \oplus y^t| \geq p$ для всех t . Предположим, что $|x^r \oplus y^s| < p$. Тогда

$$|x^{r+(N-r)} \oplus y^{s+(N-r)}| = |x^N \oplus y^{s-r+N}| = |x \oplus y^{s-r+N}| < p.$$

Но y^{s-r+N} является только некоторой циклической перестановкой y . Следовательно, последнее предположение противоречит гипотезе о том, что $|x^r \oplus y^s| \geq p$. Аналогично предположим, что $|x^r \oplus \bar{y}^s| < p$. Тогда

$$|x \oplus \bar{y}^{s-r+N}| < p,$$

$$N - |x \oplus y^{s-r+N}| < p,$$

$$|x \oplus y^{s-r+N}| > N - p,$$

что противоречит гипотезе о том, что $|x \oplus y^t| \leq N - p$. Очевидно, то же доказательство можно распространить на $|x^r \oplus \bar{y}^s|$ и $|x^r \oplus y^s|$.

Рассмотрим теперь ортогональное множество N векторов. Из вышеприведенного доказательства следует, что каждый вектор «супермножества», содержащего все циклические перестановки членов рассматриваемого множества и их инверсии, должен отличаться, по крайней мере, в p элементах от других векторов. Очевидно, что число векторов этого множества равно $2N(N) = 2N^2$, так как существует N циклических перестановок каждого ортогонального вектора и его инверсии.

Из теории корректирующих кодов известно [5], что если M N -мерных двоичных векторов отличаются друг от друга хотя бы в $p = 2e + 1$

элементах, то справедливо следующее неравенство:

$$M \leq \frac{2^N}{1 + \binom{N}{1} + \dots + \binom{N}{e}}, \quad p = 2e + 1. \quad (8.17)$$

Действительно, если вектор, получаемый из одного кодового слова путем замены e или меньшего числа его элементов на обратные, таким же способом может быть получен из другого кодового слова, то эти два кодовых слова могут отличаться не более чем в $2e$ элементах. Тогда кодовым словом может быть только тот вектор, у которого ни один из соседних

$$N_e = \binom{N}{1} + \binom{N}{2} + \dots + \binom{N}{e}$$

векторов не будет ни кодовым словом, ни одним из N_e соседних векторов любого другого кодового слова, т. е. никакие две «сферы» с радиусом e , центрами которых являются кодовые слова, не должны пересекаться. Следствием этого и является вышеприведенное неравенство.

Аналогичное неравенство можно получить для случая, когда любые два кодовых вектора должны отличаться не менее, чем в $2d$ элементах. Пусть для каждого кодового слова x построена сфера с радиусом d , центром которой является x . Тогда требование, чтобы никакие две сферы не имели точек пересечения (за исключением, возможно, пограничных точек) эквивалентно равенству расстояния между двумя кодовыми словами, по крайней мере, $2d$.

Нельзя исключать возможность того, что две сферы могут иметь общую граничную точку. Определим максимальное число таких сфер. Пусть расстояние между вектором z и каждым из кодовых слов x и y одинаково и равно d . Тогда $z \oplus y = u$, $z \oplus x = v$, $x \oplus y = u \oplus v$, где $|u| = |v| = d$ и $|x \oplus y| = |u \oplus v| \geq 2d$. Так как $2d = |u| + |v| \geq |u \oplus v|$, то необходимо, чтобы $|u \oplus v| = |u| + |v|$. Очевидно, это справедливо тогда и только тогда, когда векторы v и u имеют единицы на разных позициях. Следовательно, любой вектор x , состоящий из N элементов, может быть общим самое большее для $[N/d]$ сфер, где скобки означают целую часть числа. Тогда каждый вектор x исключает из рассмотрения

$$1 + \binom{N}{1} + \dots + \binom{N}{d-1} + \frac{1}{[N/d]} \binom{N}{d}$$

векторов. Таким образом, для кода с минимальным расстоянием между словами $p=2d$ число кодовых слов ограничено неравенством

$$M \leq \frac{2^N}{1 + \binom{N}{1} + \dots + \binom{N}{d-1} + \frac{1}{[N/d]} \binom{N}{d}}. \quad (8.18)$$

В табл. 8.3 приведены максимальные значения ρ , получаемые из неравенства (8.18), для ортогональных кодов при различных значениях N . Другая независимая верхняя граница индекса для ортогонального кода без запятой может быть легко получена, если воспользоваться ограничением (см. § 8.4), налагаемым на сумму квадратов N коэффициентов корреляции между любой последовательностью и N кодовыми словами, а именно:

$$\sum_{i=1}^N \rho_i^2 = 1.$$

Кроме того, $\max \rho_i^2 \geq \bar{\rho}_i^2 = \alpha^2$.

Но $\sum_{i=1}^N \rho_i^2 = N\alpha^2 = 1$. Отсюда

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (8.19)$$

Таблица 8.3
ВЕРХНИЕ ГРАНИЦЫ
ИНДЕКСОВ КОДОВ
БЕЗ ЗАПЯТОЙ

N	$\rho_{\text{макс}}$
4	0
8	2
16	4
32	14
64	30

Тогда максимальное абсолютное значение коэффициента корреляции при несинфазном положении, по крайней мере, не меньше $1/\sqrt{N}$. Следовательно:

$$\max_t \left| \frac{N - 2D}{N} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{N}}$$

и

$$\begin{aligned} \max D_t &\geq N - \frac{N \left(1 - \frac{1}{\sqrt{N}}\right)}{2}, \\ \min D_t &\leq \frac{N \left(1 - \frac{1}{\sqrt{N}}\right)}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем новую верхнюю границу индекса кода без запятой

$$\rho \leq \frac{N - \sqrt{N}}{2}. \quad (8.20)$$

Легко проверить, что новая верхняя граница больше предыдущей для значений $N < 32$. При $N \geq 32$ ситуация обратная.

Верхняя граница индекса кода без запятой для некоторых значений N может быть уточнена, если учесть ряд дополнительных факторов. Во-первых, любая верхняя граница, полученная при рассмотрении только циклических перестановок кодовых слов, должна быть четным чис-

лом. Чтобы проверить это, рассмотрим кодовые слова x и y . Пусть x_i — i -й элемент x — равен $(1-2\xi_i)/\sqrt{N}$ и аналогично $y_i = (1-2\eta_i)/\sqrt{N}$, где $\xi_i, \eta_i = 0$ или 1 . Тогда

$$\rho_k = \frac{N-2D(k)}{N} = \sum_{i=1}^N (x_i y_{i+k}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1-2\xi_i)(1-2\eta_{i+k}),$$

$$D(k) = \sum_{i=1}^N \xi_i + \sum_{i=1}^N \eta_{i+k} - 2 \sum_{i=1}^N \xi_i \eta_{i+k}.$$

Так как

$$\sum_{i=1}^N \eta_{i+k} = \sum_{i=1}^N \eta_i$$

и для двух ортогональных последовательностей четной длины, большей чем 2 , $D(0)$ является четным числом, то сумма

$$\sum_{i=1}^N \xi_i + \sum_{i=1}^N \eta_{i+k}$$

будет также четным числом. Таким образом, $D(k)$ — четное число.

Указанный факт не имеет особого значения, поскольку ранее уже было установлено, что верхние границы индекса, выведенные при рассмотрении циклических перестановок кодовых слов, есть четные числа. Однако он может быть использован для уменьшения некоторых значений верхних границ, если принять во внимание следующее.

Для $N \geq 32$ наилучшая верхняя граница, полученная ранее, определяется выражением

$$\rho = \frac{N - \sqrt{N}}{2}.$$

Это означает, что каждое слово образует «совершенную последовательность» в том смысле, что ее коэффициенты корреляции со всеми фазовыми сдвигами равны $\pm 1/\sqrt{N}$. Если это справедливо, то

$$\sum_{k=1}^N \rho_k = 1 + \frac{1}{\sqrt{N}} [\nu - (N-1-\nu)] = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N x_i x_{i+k} = \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 = \frac{(N-2\mu)^2}{N},$$

где μ — число членов вида $-1/\sqrt{N}$ в кодовом слове x ; ν — число раз, когда коэффициент корреляции равен $+1/\sqrt{N}$. Следовательно,

$$(N-2\mu)^2 = N + \sqrt{N}(2\nu+1-N)$$

или

$$N + N\sqrt{N} - 4\mu\sqrt{N} + \frac{4\mu^2}{\sqrt{N}} - \sqrt{N} = 2\nu + 1.$$

Для того чтобы \sqrt{N} было целым числом, необходимо иметь $N = 2^{2m}$. Таким образом, если \sqrt{N} — целое число, то оно также и четное число. Тогда в последнем равенстве все члены левой части, за исключением $4\mu^2/\sqrt{N}$, являются четными числами, в то время как правая часть является нечетным числом.

Для соблюдения данного равенства число $4\mu^2/\sqrt{N}$ должно быть нечетным. Если $N = 2^{2(m+1)}$, то равенство не соблюдается, поскольку

$$\frac{4\mu^2}{\sqrt{N}} = \frac{4\mu^2}{2^{2m+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{2^{m-1}} \right)^2 = \frac{1}{2} q^2.$$

Но $1/2 q^2$ не может быть нечетным числом, так как при $q^2 = 2sq$ должно быть четным. Если $q^2/2 = 2t^2$, то $q^2 = 4t^2$ и $q^2/2 = 2t^2$. Поэтому верхняя граница индекса p для $N = 2^{2(2m+1)}$ должна быть уменьшена на 2, поскольку никаких «совершенных» последовательностей таких длин не существует, и число несовпадений между элементами любой последовательности и ее циклических перестановок четно. Наконец, как указывалось раньше, можно показать, что для $N = 8$ не существует ни одного ортогонального кодового словаря без запятой.

В табл. 8.4 сравниваются наилучшие верхние границы индексов p_N со значениями индексов p'_N , достигнутыми в настоящее время; при этом N определяется выражением $3 \leq n = \log_2 N \leq 7$.

Таблица 8.4

ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ГРАНИЦЫ ИНДЕКСОВ КОДОВ БЕЗ ЗАПЯТОЙ

N	p_N	p'_N
8	0	0
16	4	2
32	13	6
64	26	14
128	58	34

¹⁾ Достигнутые в настоящее время, см. табл. 8.2 (прим. ред.).

§ 8.8. Асимптотическое поведение индекса p_N

При использовании больших кодовых словарей можно получить довольно интересную эвристическую оценку индексов кодов без запятой. Для этого возьмем ортогональную *группу* из N векторов и построим $(N+1)$ -й вектор, последовательно выбирая N двоичных символов случайным образом, так что $p(0) = p(1) = 1/2$. Рассмотрим теперь следующий ортогональный словарь:

$$H = G \oplus c \oplus c^k \oplus y,$$

где c — случайный вектор; c^k — последовательность c , циклически сдвинутая на k элементов влево; y — последовательность, образуемая $N-k$

символами одного вектора группы, за которыми следует k первых символов другого вектора группы. $G \oplus y$ образуют ортогональный словарь, а $c \oplus c^k$ есть вектор, символы которого формируют случайную двоичную последовательность.

Таким образом, векторы словаря H также являются случайными двоичными последовательностями. Однако заметим, что если единицы в словаре H заменить на $-1/N$, а нули -- на $1/N$, то сумма символов, формирующих i -й вектор h^i словаря H , равна в точности коэффициенту корреляции между i -м словом словаря $G \oplus c$ и возможным перекрытием двух кодовых слов с фазой, равной k . Так как последовательность $\{h^i\}$ является случайной и

$$p\left(-\frac{1}{N}\right) = p\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{2},$$

то сумма

$$S_i^2 = \left[\sum_{j=1}^N h_j^i \right]^2$$

является случайной переменной с математическим ожиданием

$$E(S_i^2) = E\left(\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N h_j^i h_k^i\right) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N E(h_j^i h_k^i) = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \delta_{jk} = \frac{1}{N}$$

и дисперсией

$$\begin{aligned} E[(S_i^2)^2] - [E(S_i^2)]^2 &= \sigma^2(S_i^2) = E\left(\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N h_j^i h_k^i h_m^i h_n^i\right) - \frac{1}{N^2} = \\ &= \frac{1}{N^4} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^N \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \delta_{jk} \delta_{nm} + \frac{1}{N^4} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \delta_{jm} \delta_{kn} + \\ &+ \frac{1}{N^4} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \delta_{jn} \delta_{km} + \frac{1}{N^4} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \delta_{jk} \delta_{km} \delta_{mn} - \\ &= \frac{1}{N^2} = \frac{3N(N-1) + N - N^2}{N^4} = \frac{2(N^2 - N)}{N^4} \approx \frac{2}{N^2}. \end{aligned}$$

Здесь δ_{jk} — дельта-функция Кронекера:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq k, \\ 1 & \text{при } j = k. \end{cases}$$

Следовательно, квадрат коэффициента корреляции между любым словом и любой несинфазной последовательностью имеет математическое ожидание, равное $1/N$, а его дисперсия быстро стремится к нулю при увеличении N . Это означает, что индексы словарей, полученных в результате сложения по модулю 2 одного и того же случайного двоичного вектора с каждым членом группы (см. § 8.5), асимптотически приближаются к максимальным достижимым значениям. Последние имеют место, если коэффициенты корреляции между любым словом и любой несинфазной последовательностью равны $\pm 1/\sqrt{N}$. Именно поэтому в качестве векторов в § 8.5 были выбраны псевдослучайные последовательности. Как было показано, данные последовательности обладают определенными свойствами, характерными для случайных последовательностей, и имеют автокорреляционную функцию $R(\tau)$, которая мала при $\tau \neq 0$.

§ 8.9. Задержка синхронизации при использовании самосинхронизирующихся кодов

Основной характеристикой всякой схемы синхронизации является время установления синхронизации. Определим задержку синхронизации (измеряемую количеством слов, которое должно быть принято для установления синхронизации с заданной надежностью)¹⁾ для кодов без запятой. Полученные результаты сравним со значениями задержек при использовании статистического метода синхронизации, описанного в § 8.3.

Существует ряд методов, эффективно использующих характерное для кодов без запятой различие между значениями коэффициента корреляции при наличии и отсутствии синхронизации. Метод, рассматриваемый ниже, хотя и не оптимален, однако принципиально прост и может быть легко реализован.

Перепишем выражения (8.7) и (8.8) в более общем виде:

$$R_{ij}(k) = \int_{iT}^{(i+1)T} x^i(t) [y^k(t) + n(t)] dt, \quad i = 1, 2, \dots, N;$$

$$k = 1, 2, \dots, N-1.$$

В формуле используются обозначения, принятые в § 8.4. Указанный метод заключается в определении величин $\max_i R_{ij}(k)$, $\min_i R_{ij}(k)$ и формировании сумм $R_m(k) = \sum_{j=1}^m \max R_{ij}(k)$, $R'_m(k) = \sum_{j=1}^m \min R_{ij}(k)$.

¹⁾ В дальнейшем эта величина обозначается через m (прим. ред.).

Оценкой правильной фазы будет такое значение k , которое максимизирует выражение $\max_k \{|R_m(k)|, |R'_m(k)|\}$.

Как указывалось в § 8.1, часто невозможно однозначно отождествить принятый символ с 1 или -1 . Поэтому необходимо рассматривать и $R_m(k)$, и $R'_m(k)$. Данная неоднозначность разрешается при выборе наибольшего из указанных членов.

Найдем верхнюю границу количества принятых слов m , необходимых для установления синхронизации с заданной вероятностью. Для

Таблица 8.5
ВЕРХНИЕ ГРАНИЦЫ ЗАДЕРЖКИ
СИНХРОНИЗАЦИИ

N	Метод синхронизации, использующий коды без запятой		Статистический метод синхронизации	
	$m(0,999)$	$m(0,9999)$	$m(0,999)$	$m(0,9999)$
8	—	—	45	57
16	72	110	62	80
32	36	43	95	124
64	28	34	165	220
128	18	21	280	380

сравнения в табл. 8.5 приведены аналогичные верхние границы для статистического метода синхронизации. Для обоих случаев отношение сигнал/шум выбрано таким, чтобы вероятность ошибочного приема двоичного символа при наличии синхронизации равнялось 10^{-3} . В столбце, обозначенном $m(0,999)$, даются значения верхней границы величины m , при которых вероятность того, что

полученное значение k соответствует наличию синхронизации, равно 0,999. То же относится и к столбцу, обозначенному $m(0,9999)$. Эта таблица относится к кодам без запятой, рассмотренным в § 8.5. Заметим, что с увеличением N значение m для статистического метода синхронизации растет, в то время как при использовании кодов без запятой оно фактически падает. Можно показать [3], что в случае кодов без запятой с ростом N величина m асимптотически не возрастает, в то время как для статистического метода синхронизации она увеличивается пропорционально N .

Кроме того, необходимо отметить, что при определении задержки синхронизации в случае использования кодов без запятой на источник сообщений не накладывается никаких ограничений. В противоположность этому при статистическом методе синхронизации требуется, чтобы априорные вероятности передачи всех кодовых слов были одинаковы.

Сделаем ряд кратких замечаний относительно задержки синхронизации при методах, описанных в § 8.2. Если для синхронизации используется отдельный канал, то задержка прямо пропорциональна мощности, отводимой на данный канал. При известной мощности задержка синхронизации вычисляется аналогично тому, как определялось время измерения дальности для заданной вероятности ошибки в

гл. 6. При использовании специальной синхронизирующей последовательности она зависит в основном от соотношения между этой последовательностью и кодовыми словами. Тем не менее можно показать [7], что зависимость произведения Mm от N' (Здесь M — длина синхронизирующей последовательности, m — задержка синхронизации, N' — число символов между двумя ближайшими синхронизирующими последовательностями) асимптотически приближается к линейному закону. Если синхронизирующая последовательность предшествует каждому слову, то, разумеется, величина N' равна длине слова N .

Литература

1. Barker R. H. Group Synchronizing of Binary Digital Systems, in Communication Theory, W. Jackson, ed., New York: Academic Press, Inc., 1953, 273—287.
2. Golomb S. W. Sequences with Randomness Properties, Terminal Progress Report under contract Req. No 639498, Baltimore, MD: Glenn L. Martin Co., June, 1955.
3. Golomb S. W., B. Gordon and L. R. Welch. Comma-Free Codes, Canadian Journal of Mathematics, 10 (1958), 202—209.
Голомб С. У., Гордон Б., Велч Л. Р. Коды без запятой. Кибернетический сборник, вып. 5. ИИЛ, 1961.
4. Hall M., Jr. and J. J. Stiffler. The Non-Existence of Comma-Free Binary Orthogonal Sets of Order 8, Jet Propulsion Laboratory Research Summary 36—14, June, 1962.
5. Hamming R. W. Error Detecting and Error Correcting Codes, Bell System Technical Journal, 29 (1950), 147—160.
Хэмминг Р. Коды с обнаружением и исправлением ошибок. Сб. «Коды с обнаружением и исправлением ошибок». ИИЛ, 1956.
6. Shannon C. E. and Weaver W. The Mathematical Theory of Communication, Urbana, Ill, The University of Illinois Press, 1949.
Шеннон К. Математическая теория связи. Сб. «Работы по теории информации и кибернетике». ИИЛ, 1963.
7. Stiffler J. J. Synchronization Methods for Block Codes, IRE Transactions on Information Theory, IT-8 (September, 1962), 525—534.
8. Stiffler J. J., Self-Synchronizing Binary Telemetry Codes, Ph D. Dissertation, Dept. of Electrical Engineering California Institute of Technology (1962), 75—88.

О количестве ортогональных словарей в классе эквивалентных групп

Пусть A_n есть двоичная ортогональная матрица размерности $2^n \times 2^n$. Заменяем в ней каждую единицу на $-\frac{1}{2^{n/2}}$ и каждый нуль — на $\frac{1}{2^{n/2}}$. Полученная таким способом матрица B_n является унитарной, так как ее строки ортогональны. Следовательно, $B_n B_n^T = I$, где B_n^T — матрица, транспонированная к матрице B_n . Таким образом, детерминант $|B_n B_n^T| = |I| = |B_n|^2 = 1$, и матрица B_n является невырожденной.

Если A_n — групповой словарь, то он может быть образован с помощью n двоичных векторов a_n , состоящих из 2^n элементов каждый. Расположим их в виде прямоугольной таблицы:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^{2^n} & & \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^{2^n} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^{2^n} & & \end{array} \quad (\text{П1.1})$$

имеющей 2^n столбцов, каждый из которых соответствует некоторому n -элементному набору¹⁾.

Предположим, что два таких n -элементных набора одинаковы. Тогда два столбца матрицы A_n , образуемые этими двумя наборами, также будут одинаковы. Следовательно, будут одинаковы и соответствующие столбцы в матрице B_n , и она окажется вырожденной.

¹⁾ Таблица (П1.1) называется производящей матрицей группового кода, а ее строки — базисными векторами. Все кодовые векторы группового кода получаются как линейные комбинации строк производящей матрицы (прим. ред.).

Таким образом, если A_n представляет ортогональную группу, то все столбцы таблицы (П1.1) должны быть различны. Поскольку существует только 2^n различных двоичных n -элементных наборов, то каждый из них должен содержаться в таблице (П1.1). При этом вследствие их различия каждой перестановке столбцов таблицы соответствует различное множество базисных векторов. Очевидно, количество таких множеств равно $2^{n!}$. При этом одна и та же группа может быть образована из нескольких различных множеств базисных векторов. В частности, если задана группа, то первый базисный вектор может быть выбран из $2^n - 1$ векторов, так как единичный вектор не может быть базисным. Второй базисный вектор может выбираться из множества $2^n - 2$ векторов, не содержащего единичный и первый базисный векторы. Третий вектор может быть любым из $2^n - 2^2$ векторов, не образуемых с помощью первых двух базисных векторов, и т. д. Таким образом, если общее количество различных множеств базисных векторов разделить на число множеств базисных векторов, образующих одну и ту же группу, т. е. на $(2^n - 2^0)(2^n - 2^1)(2^n - 2^2) \dots (2^n - 2^{n-1})$, то будет доказана следующая теорема.

◆ **Теорема П1.1.** Общее количество различных ортогональных двоичных групп равно:

$$\frac{(2^n)!}{(2^n - 2^0)(2^n - 2^1) \dots (2^n - 2^{n-1})} \quad (\text{П1.2})$$

Биортогональной группой C_n называется группа, которая содержит 2^{n+1} векторов, состоящих из 2^n элементов каждый, и обладает тем свойством, что любой ее вектор c_j может быть получен из множества $n+1$ базисных векторов c_i с помощью выражения

$$c_j = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i c_i,$$

где $\alpha_i = 0$ или 1 ; c_{n+1} — вектор, элементами которого являются одни единицы.

Используя результаты предыдущей теоремы, можно доказать следующее следствие относительно биортогональных групп.

Следствие. Количество различных биортогональных двоичных групп

$$B(2^n) = \frac{(2^n)!}{2^n (2^n - 2^0)(2^n - 2^1) \dots (2^n - 2^{n-1})} \quad (\text{П1.3})$$

Доказательство. Биортогональная группа образуется теми же базисными векторами, что и ортогональная, но с добавлением к ним вектора e , все элементы которого равны 1 . Из $n+1$ базисных векторов такой группы можно выбрать n базисных векторов ортогональных групп посредством 2^n способов, поскольку может выбираться любой из n базисных векторов c_i (кроме e) или его инверсия $c_i \oplus e$. Никакая ортогональная группа не может одновременно содержать векторы c_i и $c_i \oplus e$. Все ортогональные группы, выбранные из различных биортогональных групп, тоже обязательно различны, так как группы, получаемые из них добавлением базисного вектора e , должны быть различны. Таким образом, каждой биортогональной группе соответствует 2^n ортогональных групп, что и требовалось доказать.

Докажем теперь следующую теорему.

◆ **Теорема П1.2.** Существует, по крайней мере,

$$M(2^n) = \frac{(2^n)! (2^{2^{n+1}-2n-1})}{(2^n - 2^0)(2^n - 2^1)(2^n - 2^2) \dots (2^n - 2^{n-1})} \quad (\text{П1.4})$$

различных двоичных ортогональных словарей с длиной слова $N=2^n$.

¹⁾ То есть равно количеству перестановок из 2^n элементов (прим. ред.).

Доказательство. Пусть C_n — биортогональная группа 2^{n+1} двоичных векторов, каждый из которых состоит из 2^n элементов. Смежным классом $C_n \oplus y$ группы C_n называется множество, получаемое сложением по модулю 2 двоичного вектора y (называемого образующим вектором смежного класса) с каждым из векторов биортогональной группы C_n . Рассмотрим два смежных класса этой группы $C_n \oplus y_1$ и $C_n \oplus y_2$. Если эти смежные классы не идентичны, то никакой вектор из первого класса не содержится во втором. Для доказательства положим, что c_j и c_k являются векторами группы C_n . Тогда вектор $c_j \oplus y_1$ принадлежит первому смежному классу, а вектор $c_k \oplus y_2$ — второму.

Предположим также, что $c_j \oplus y_1 = c_k \oplus y_2$. Тогда $y_2 = c_j \oplus c_k \oplus y_1 = c_l \oplus y_1$. Таким образом, y_2 принадлежит смежному классу группы C_n , содержащему y_1 . Отсюда следует, что любой вектор из первого смежного класса для некоторых r и s $c_r \oplus y_1 = c_s \oplus y_2$ должен быть и во втором смежном классе и наоборот. Таким образом, если два смежных класса имеют какой-либо общий вектор, то они идентичны. Следовательно, для формирования различных смежных классов нужно выбирать такой вектор y_i , который не содержится в сформированных ранее смежных классах. Новый смежный класс, для которого вектор y_i является образующим, будет отличаться от всех предыдущих смежных классов.

Очевидно, эту процедуру можно продолжать до тех пор, пока все векторы y_i не окажутся в каком-либо смежном классе. Так как всего существует 2^{2^n} двоичных векторов длины $N=2^n$, то количество различных смежных классов из 2^{n+1} элементов равно $2^{2^n - (n+1)}$.

Рассмотрим теперь количество способов, которыми можно выбрать ортогональное множество из биортогонального смежного класса. При этом будем учитывать, что любое ортогональное множество в классе эквивалентных групп образует биортогональный смежный класс путем добавления к данному множеству инверсий его элементов. Единственное ограничение при выборе ортогонального множества, содержащего 2^n векторов, из биортогонального класса, включающего 2^{n+1} векторов, состоит в следующем: в ортогональное множество не могут одновременно входить вектор и его инверсия, так как они не ортогональны. Таким образом, каждый из 2^n элементов ортогонального множества может быть выбран двумя способами. Следовательно, из каждого смежного класса можно выбрать 2^{2^n} ортогональных множеств и совершенно очевидно, что все они будут различны.

Любые два множества, выбранные из смежных классов различных биортогональных групп, также должны быть различны, поскольку каждое из них обязательно включает в себя, по крайней мере, один вектор c_i или $c_i \oplus e$, не содержащийся во втором. Следовательно, существует 2^{2^n} ортогональных множеств для каждого из $2^{2^n - n - 1}$ смежных классов каждой биортогональной группы. В результате получаем $M(2^n)$ ортогональных множеств, эквивалентных ортогональной группе относительно операций инвертирования и перестановки, определенных в § 8.4.

Эти $M(2^n)$ множеств были получены из исходной группы путем перестановки столбцов, инвертирования столбцов, инвертирования строк и, наконец, перестановки строк именно в этом порядке. Все множества, сформированные с помощью такой последовательности операций, были сосчитаны. Чтобы утверждать, что в данном эквивалентном классе не может быть большого количества ортогональных множеств, необходимо доказать, что никакое другое множество не может возникнуть в результате какого-либо другого порядка операций. Очевидно, что операции инвертирования и перестановки соответствуют умножению кодовой матрицы на матрицы S и P , где матрица S имеет только диагональные элементы $+1$ и -1 , а P — обычная перестановочная матрица.

Наряду с этим всегда существует диагональная матрица C_2 такая, что $C_1 P = P C_2$ для любых P и C_1 . Тогда $C_2 = P C_1 P^{-1}$ и так как такое преобразование превращает c_{ii} в c_{jj} , то C_2 диагональна, если диагональна C_1 .

Если H_1 и H_2 находятся в одном и том же эквивалентном классе, то существует некоторое множество матриц P_i, C_i такое, что $P_1 C_1 P_2 C_2 \dots P_m C_m H_1 C_{m+1} P_{m+1} \dots C_n P_n = H_2$. Поскольку $C_i P_i = P_i C_j, C_i C_j = C_k$ и $P_k P_r = P_q$, то это выражение можно переписать так: $P_a C_a H_1 C_b P_b = H_2$. Так как P и C связаны, согласно описанному выше, а матричное умножение ассоциативно, то порядок операций перестановки и инвертирования не имеет значения, и никакая другая последовательность этих операций не приведет к возникновению нового ортогонального множества.

Наконец, величина $M(2^n)$ является нижней границей количества ортогональных множеств. Это следует из того факта, что для $n=4$ существует всего пять взаимно неэквивалентных классов, каждый из которых может содержать столько же (или больше) различных множеств, что и групповой класс. По-видимому, для больших значений n количество неэквивалентных классов ортогональных словарей еще больше.

Л и т е р а т у р а

Н а и л М. Jr. Hadamard Matrices of Order 16, Jet Propulsion Laboratory Research Summary, 36—10. September, 1961.

Формирование псевдослучайных последовательностей

Введение

В гл. 4 отмечалось, что последовательности с двузначными автокорреляционными функциями и разностные множества эквивалентны. Следовательно, общие методы формирования разностных множеств, основанные на использовании множителей, можно применять и для формирования последовательностей с двузначными автокорреляционными функциями. Однако некоторые из этих последовательностей могут быть сформированы другим, более непосредственным способом. В частности, к этой категории относится большинство последовательностей, порождающих симплексные коды.

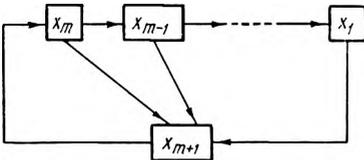


Рис. П2.1. Генератор псевдослучайной последовательности

В этом приложении рассматриваются методы формирования трех видов таких последовательностей. Кроме того, приводится таблица периодов рассматриваемых последовательностей (табл. П2.1), а также некоторые последовательности с периодами не более 127 (табл. П2.2). Здесь же для каждой из них даны логические функции обратной связи для генераторов с внутренней логикой.

На рис. П2.1 показана блок-схема генератора последовательностей, приводимых в табл. П2.2.

Формирование последовательностей «квадратичных вычетов»

Целое число a является *квадратичным вычетом* модуля n , если сравнение $x^2 \equiv a \pmod{n}$ имеет решение и $(a, n) = 1$. Пусть $p = 4t - 1$ — простое число, тогда квадратичные вычеты модуля p формируют разностное множество. Следовательно, последо-

ПЕРИОДЫ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Период	Тип	Период	Тип	Период	Тип	Период	Тип	Период	Тип
3	<i>L</i>	131	<i>L</i>	311	<i>L</i>	511	<i>M</i>	751	<i>L</i>
7	<i>L</i>	139	<i>L</i>	323	<i>TP</i>	523	<i>L</i>	787	<i>L</i>
11	<i>L</i>	143	<i>TP</i>	331	<i>L</i>	547	<i>L</i>	811	<i>L</i>
15	<i>M</i>	151	<i>L</i>	347	<i>L</i>	563	<i>L</i>	823	<i>L</i>
19	<i>L</i>	163	<i>L</i>	359	<i>L</i>	571	<i>L</i>	827	<i>L</i>
23	<i>L</i>	167	<i>L</i>	367	<i>L</i>	587	<i>L</i>	839	<i>L</i>
31	<i>L</i>	179	<i>L</i>	379	<i>L</i>	599	<i>L</i>	859	<i>L</i>
35	<i>TP</i>	191	<i>L</i>	383	<i>L</i>	607	<i>L</i>	863	<i>L</i>
43	<i>L</i>	199	<i>L</i>	419	<i>L</i>	619	<i>L</i>	883	<i>L</i>
47	<i>L</i>	211	<i>L</i>	431	<i>L</i>	631	<i>L</i>	887	<i>L</i>
59	<i>L</i>	223	<i>L</i>	439	<i>L</i>	643	<i>L</i>	899	<i>TP</i>
63	<i>M</i>	227	<i>L</i>	443	<i>L</i>	647	<i>L</i>	907	<i>L</i>
67	<i>L</i>	239	<i>L</i>	463	<i>L</i>	659	<i>L</i>	911	<i>L</i>
71	<i>L</i>	251	<i>L</i>	467	<i>L</i>	683	<i>L</i>	919	<i>L</i>
79	<i>L</i>	255	<i>M</i>	479	<i>L</i>	691	<i>L</i>	947	<i>L</i>
83	<i>L</i>	263	<i>L</i>	487	<i>L</i>	719	<i>L</i>	967	<i>L</i>
103	<i>L</i>	271	<i>L</i>	491	<i>L</i>	727	<i>L</i>	971	<i>L</i>
107	<i>L</i>	283	<i>L</i>	499	<i>L</i>	739	<i>L</i>	983	<i>L</i>
127	<i>L</i>	307	<i>L</i>	503	<i>L</i>	743	<i>L</i>	991	<i>L</i>

Примечание. *L* — последовательности Лежандра, или последовательности «квадратичных вычетов»; *M* — *m*-последовательности; *TP* — последовательности с периодом, равным произведению двух простых чисел *p* и *p*+2.

вательность $\{a_i\}$ с двузначной автокорреляционной функцией может быть образована, если положить, что

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{при условии, что } i \text{ есть квадратичный вычет модуля } p, \\ -1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если *p* — простое нечетное число, то символ Лежандра $\left(\frac{i}{p}\right)$ определяется следующим образом:

$$\left(\frac{i}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{при условии, что } i \text{ есть квадратичный вычет модуля } p, \\ -1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда последовательность с двузначной автокорреляционной функцией можно образовать, если принят $a_i = \left(\frac{i}{p}\right)$. Именно по этой причине такие последовательности называют иногда *последовательностями Лежандра*. Например, для $p=4t-1=19$ квадратичные вычеты равны 1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17 и последовательность $\{a_i\}_{i=0}^{18}$ имеет вид: $-11-1-1-1-1111-11-11-1-1-1-111-1$.

Формирование последовательностей с периодом, равным произведению простых чисел p и $p+2$

Формирование последовательностей квадратичных вычетов основывалось на использовании символа Лежандра. Здесь для формирования последовательностей будет использован символ Якоби $\left[\frac{a}{n}\right]$:

$$\left[\frac{a}{n}\right] = \left(\frac{a}{p_1}\right) \left(\frac{a}{p_2}\right) \cdots \left(\frac{a}{p_s}\right),$$

где $(a, n) = 1$, $n = p_1 p_2 \dots p_s$ и p_i — нечетные простые числа, не обязательно различные.

Рассмотрим последовательность $\{a_i\}$ с периодом, равным произведению $n = p(p+2)$:

$$a_i = \begin{cases} \left[\frac{-i}{n}\right] & \text{при } (i, n) = 1, \\ 1 & \text{при } i \equiv 0 \pmod{p+2}, \\ -1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть, например, $n=15=3 \cdot 5$. Тогда символы Якоби формируют элементы $a_1 = a_2 = a_4 = a_8 = 1$, $a_7 = a_{13} = a_{14} = -1$. Числа 0, 5 и 10 сравнимы с нулем по модулю 5, так что $a_0 = a_5 = a_{10} = 1$. Оставшиеся элементы $a_3 = a_6 = a_9 = a_{12} = -1$. В результате формируется последовательность: $111-111-1-1-1-1-1-1-1-1$.

Формирование m -последовательностей

Как указывалось в гл. 4, линейные рекуррентные последовательности максимальной длины называются m -последовательностями. Теория линейных рекуррентных последовательностей определяет метод их формирования. Если требуется m -последовательность длины $2^n - 1$, то любой неприводимый многочлен степени над полем $GF(2)$, имеющий период $2^n - 1$, можно использовать для получения рекуррентной формулы. Применяя ее к любому набору из n элементов, за исключением набора $0 \dots 0$, получим m -последовательность требуемого вида.

В [3, 4, 6, 7] и другой литературе можно найти таблицы неприводимых над полем $GF(2)$ полиномов и их периодов. Таблица Марша охватывает все неприводимые полиномы до 19-й степени. Голомб, Велч и Хейлис ограничились трехчленными полиномами до 45-й степени. Питерсон перечислил все неприводимые полиномы вплоть до 16-й степени, а также полиномы от 17 до 34-й степени с наименьшим количеством ненулевых коэффициентов. В таблице Ватсона дано по одному неприводимому примитивному (т. е. имеющему период $2^n - 1$) полиному всех степеней вплоть до 100. Все эти таблицы использовались при построении таблицы рекуррентных соотношений в гл. 2.

Полиному

$$\sum_{i=0}^n c_i x^i = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 x^2 \oplus \dots \oplus c_n x^n = 0$$

соответствует рекуррентная формула

$$\sum_{i=0}^n c_i x_{k-i} = c_0 x_k \oplus c_1 x_{k-1} \oplus \dots \oplus c_n x_{k-n} = 0,$$

откуда

$$x_k = \frac{1}{c_0} [c_1 x_{k-1} \oplus \dots \oplus c_n x_{k-n}].$$

При $n=5$ один из неприводимых полиномов периода $2^n - 1 = 31$ будет иметь вид $x^5 \oplus x^4 \oplus x^3 \oplus x^2 \oplus 1 = 0$. Ему соответствует следующее рекуррентное соотношение: $x_k = x_{k-2} \oplus x_{k-3} \oplus x_{k-4} \oplus x_{k-5}$. Применение этого соотношения к вектору 00001 порождает последовательность 000010110101000111011110010011, которая является m -последовательностью периода $2^n - 1 = 31$.

Если существует несколько типов последовательностей данного периода, то в таблице указан один из них.

Л и т е р а т у р а

1. Брауер А. On a New Class of Hadamard Determinants, *Mathematische Zeitschrift*, 58 (1953), 219—225.
2. Golomb S. W. Sequences with Randomness Properties, Terminal Progress Report Under Contract Req. No. 639498, Baltimore, Md: Glenn L. Martin Co., June, 1955.
3. Golomb S. W., Welch L. R. and Hales A. On the Factorization of Trinomials Over GF (2), Memo No 20—189, Pasadena, Calif.: Jet Propulsion Laboratory.
4. Marsch R. W. Table of Irreducible Polynomials Over GF (2) Through Degree 19, distributed by Office of Technical Services, Commerce Department, Washington, D. C., October, 24, 1957.
5. Nagel T. Introduction to Number Theory, New York: John Wiley and Sons, Inc., 1951.
6. Peterson W. W. Error-Correcting Codes, New York: The Technology Press and John Wiley and Sons, Inc., 1961.
Питерсон У. Коды, исправляющие ошибки. ИИЛ, 1964.
7. Watson E. J. Primitive Polynomials (Mod 2), *Mathematics of Computation*, 16 (1962), 368—369.
8. Zierler N. Linear Recurring Sequences, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 7 (1959), 31.
Цирлер Н. Линейные возвратные последовательности. «Кибернетический сборник», вып. 6. ИИЛ, 1963.

Последовательности с заданным периодом

В синхронных цифровых машинах часто необходимо делить основную тактовую частоту в j раз, что всегда можно сделать с помощью счетчика. Однако при больших значениях j экономичнее иметь устройство, формирующее последовательность с периодом j , и использовать его в качестве делителя. Для получения заданных последовательностей применяются генераторы с внешней логикой (см. гл. 2).

Как указывалось в этой главе, в ряде случаев требуется изменять фазу генерируемой последовательности, что сравнительно просто достигается в указанных генераторах. В генераторах с внутренней логикой это осуществляется изменением фазы внутренней последовательности фиксированного периода, из которой и образуется нужная последовательность. В табл. ПЗ.1 содержится некоторая информация о возможности сдвига фазы последовательности, образуемой с помощью соответствующей логики.

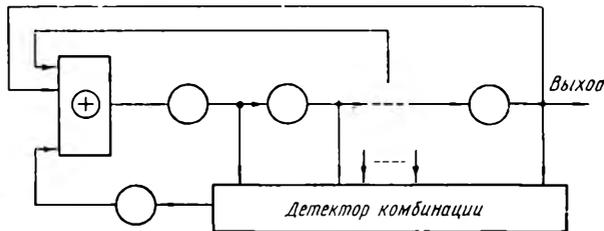


Рис. ПЗ.1. Генератор последовательности
 —○— элемент задержки на один период тактовых
 импульсов (единичная задержка)

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ С ЗАДАНЫМ ПЕРИОДОМ

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
4	3,2	111	35	6,5	101111
5	3,2	001	36	6,5	*011011
6	3,2	*101	37	6,5	*111010
7	3,2		38	6,5	*101011
8	4,3	*1100	39	6,5	111111
9	4,3	1000	40	6,5	*110011
10	4,3	1001	41	6,5	010001
11	4,3	0111	42	6,5	011110
12	4,3	0001	43	6,5	001000
13	4,3	0110	44	6,5	100001
14	4,3	*1101	45	6,5	101001
15	4,3		46	6,5	001010
16	5,3	*10100	47	6,5	001110
17	5,3	00011	48	6,5	110110
18	5,3	00111	49	6,5	000110
19	5,3	*11010	50	6,5	111000
20	5,3	*11001	51	6,5	001111
21	5,3	01011	52	6,5	011010
22	5,3	11111	53	6,5	100000
23	5,3	*10011	54	6,5	110010
24	5,3	*01101	55	6,5	010100
25	5,3	00100	56	6,5	110100
26	5,3	01010	57	6,5	000111
27	5,3	01100	58	6,5	000001
28	5,3	10000	59	6,5	101101
29	5,3	10111	60	6,5	100111
30	5,3	*11100	61	6,5	010110
31	5,3		62	6,5	*111101
32	6,5	011100	63	6,5	
33	6,5	100101	64	7,6	0011111
34	6,5	010000	65	7,3	1000010

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
66	7,6	0111001	99	7,6	0111111
67	7,6	0100000	100	7,6	0001110
68	7,6	1111000	101	7,6	0101000
69	7,6	*1000110	102	7,6	1110001
70	7,6	*1001110	103	7,6	0010000
71	7,3	0001100	104	7,6	1001010
72	7,3	1000001	105	7,6	1101101
73	7,6	1111111	106	7,6	0110010
74	7,6	*0011001	107	7,6	1110011
75	7,6	0110100	108	7,6	1101001
76	7,3	0011011	109	7,6	1011011
77	7,6	0010101	110	7,6	1011110
78	7,6	0001000	111	7,6	0100001
79	7,6	1000001	112	7,6	0100101
80	7,3	0110111	113	7,6	0001111
81	7,3	0101111	114	7,6	1101100
82	7,6	0111000	115	7,6	1000000
83	7,6	1101000	116	7,6	1011100
84	7,3	0111111	117	7,6	0001010
85	7,6	0000110	118	7,6	1100110
86	7,6	0101111	119	7,6	1011001
87	7,6	1010110	120	7,6	0000111
88	7,6	0100111	121	7,6	0000001
89	7,6	1100100	122	7,6	0110110
90	7,6	1110110	123	7,6	1110100
91	7,6	1100010	124	7,6	0010001
92	7,6	0010100	125	7,6	0101001
93	7,6	0101110	126	7,6	*1111101
94	7,6	0111110	127	7,6	
95	7,6	1000100	128	9,5	*101101111
96	7,3	0000011	129	9,5	*000000011
97	7,6	1001000	130	9,5	*000000110
98	7,3	1011010	131	9,5	*110110111

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
132	9,5	*011100101	165	9,5	*101101000
133	9,5	101011110	166	9,5	*100110110
134	9,5	*011001010	167	9,5	*001111110
135	9,5	*110001010	168	9,5	*100111101
136	9,5	001110001	169	9,5	001111000
137	9,5	*001101000	170	9,5	001000111
138	9,5	*001100110	171	9,5	*110001100
139	9,5	*010111010	172	9,5	*111011011
140	9,5	*011010000	173	9,5	100001101
141	9,5	001001010	174	9,5	111010101
142	9,5	*101011001	175	9,5	*011000001
143	9,5	*011011101	176	9,5	*000101011
144	9,5	*111100101	177	9,5	100000111
145	9,5	*110011000	178	9,5	*001111011
146	9,5	*011010110	179	9,5	*111100001
147	9,5	*000110000	180	9,5	011100010
148	9,5	*011010111	181	9,5	*011000101
149	9,5	110011110	182	9,5	010001000
150	9,5	*100101110	183	9,5	*010010010
151	9,5	*010110101	184	9,5	111101100
152	9,5	*000101100	185	9,5	100000100
153	9,5	*111110111	186	9,5	*010011011
154	9,5	*001001110	187	9,5	100001100
155	9,5	000001111	188	9,5	000010000
156	9,5	*100010101	189	9,5	*111010000
157	9,5	101001000	190	9,5	*011100001
158	9,5	*001110110	191	9,5	*000101010
159	9,5	*100000011	192	9,5	110111100
160	9,5	*000001110	193	9,5	*101000000
161	9,5	*110010110	194	9,5	*001100001
162	9,5	001010010	195	9,5	*100100101
163	9,5	*001010110	196	9,5	*000110111
164	9,5	010010101	197	9,5	011100100

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
198	9,5	*101010010	231	9,5	*100011110
199	9,5	*011000010	232	9,5	*011111101
200	9,5	*010100000	233	9,5	*110011011
201	9,5	100101010	234	9,5	*010010001
202	9,5	*100101011	235	9,5	010101101
203	9,5	*010101110	236	9,5	101000111
204	9,5	110111001	237	9,5	010000101
205	9,5	001110101	238	9,5	*100119001
206	9,5	000111110	239	9,5	*000101111
207	9,5	000001001	240	9,5	*010100101
208	9,5	011110110	241	9,5	001110010
209	9,5	*010110011	242	9,5	111000101
210	9,5	010101000	243	9,5	010110110
211	9,5	*001001011	244	9,5	001101111
212	9,5	*100110000	245	9,5	*101100110
213	9,5	111110010	246	9,5	101111011
214	9,5	*111000110	247	9,5	110111111
215	9,5	000010100	248	9,5	111110011
216	9,5	*111101101	249	9,5	011110001
217	9,5	110101011	250	9,5	*010011110
218	9,5	110000110	251	9,5	000001000
219	9,5	*100010100	252	9,5	*011011010
220	9,5	*001100101	253	9,5	100000000
221	9,5	*111111000	254	9,5	*001011100
222	9,5	*010101011	255	9,5	111001111
223	9,5	111111111	256	9,5	*111001101
224	9,5	*011001100	257	9,5	001011110
225	9,5	*000110100	258	9,5	*100000010
226	9,5	110010000	259	9,5	011011000
227	9,5	001101100	260	9,5	*000001010
228	9,5	*111001001	261	9,5	010011100
229	9,5	*010100110	262	9,5	*011110011
230	9,5	*011101110	263	9,5	*111110001

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
264	9,5	*11011101	297	9,5	111000100
265	9,5	*101111001	298	9,5	*111110000
266	9,5	101100100	299	9,5	100110010
267	9,5	*001101101	300	9,5	001001001
268	9,5	*010110100	301	9,5	*010101010
269	9,5	*111000111	302	9,5	010110011
270	9,5	*001110000	303	9,5	*011110100
271	9,5	010100111	304	9,5	*000001011
272	9,5	000101101	305	9,5	*000111100
273	9,5	100110011	306	9,5	*001110111
274	9,5	*010000111	307	9,5	*110111011
275	9,5	*101000101	308	9,5	010101100
276	9,5	*010101111	309	9,5	100101001
277	9,5	010010011	310	9,5	*100101000
278	9,5	110011001	311	9,5	010100010
279	9,5	011111111	312	9,5	011000000
280	9,5	100011100	313	9,5	101010000
281	9,5	011101100	314	9,5	*011100110
282	9,5	010100100	315	9,5	000110101
283	9,5	111001011	316	9,5	100100111
284	9,5	*001101110	317	9,5	001100011
285	9,5	*110010010	318	9,5	101000010
286	9,5	000110110	319	9,5	*110111110
287	9,5	011001110	320	9,5	000101000
288	9,5	*111111101	321	9,5	011100011
289	9,5	010101001	322	9,5	111010010
290	9,5	111111 010	323	9,5	*000010010
291	9,5	0011 00111	324	9,5	*100001110
292	9,5	100010110	325	9,5	010011001
293	9,5	*110000100	326	9,5	*100000110
294	9,5	*110101001	327	9,5	*111101110
295	9,5	111101111	328	9,5	010010000
296	9,5	*000010110	329	9,5	*010001010

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинаций	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
330	9,5	011000111	363	9,5	011010101
331	9,5	*011100000	364	9,5	000110010
332	9,5	111100011	365	9,5	011010100
333	9,5	001111001	366	9,5	110011010
334	9,5	*100000101	367	9,5	111100111
335	9,5	000101001	368	9,5	011011111
336	9,5	011000011	369	9,5	101011011
337	9,5	*111010111	370	9,5	*001001000
338	9,5	*100001111	371	9,5	011010010
339	9,5	111011001	372	9,5	010111000
340	9,5	110001110	373	9,5	001100100
341	9,5	*001000101	374	9,5	001101010
342	9,5	*001111010	375	9,5	*001110011
343	9,5	100111111	376	9,5	110001000
344	9,5	001111100	377	9,5	011001000
345	9,5	100110100	378	9,5	101011100
346	9,5	101101010	379	9,5	*011100111
347	9,5	*010010111	380	9,5	110110101
348	9,5	001010100	381	9,5	000001010
349	9,5	*001010000	382	9,5	000000001
350	9,5	110010100	383	9,5	101101101
351	9,5	000001100	384	9,5	*111010011
352	9,5	100000001	385	9,5	110010001
353	9,5	001110100	386	9,5	011000100
354	9,5	*101001010	387	9,5	110110100
355	9,5	100010100	388	9,5	110100101
356	9,5	*000001101	389	9,5	101110001
357	9,5	001001100	390	9,5	101101001
358	9,5	*111110101	391	9,5	001100010
359	9,5	000101110	392	9,5	010100011
360	9,5	010110111	393	9,5	101111110
361	9,5	100101100	394	9,5	010111101
362	9,5	*110011100	395	9,5	111100110

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
396	9,5	101001110	429	9,5	011101000
397	9,5	*100111000	430	9,5	110000000
398	9,5	010010110	431	9,5	001010001
399	9,5	101000110	432	9,5	111011111
400	9,5	000110001	433	9,5	011111100
401	9,5	101110111	434	9,5	101010001
402	9,5	001000001	435	9,5	*001011001
403	9,5	101100111	436	9,5	001011010
404	9,5	101000001	437	9,5	111101010
405	9,5	010001001	438	9,5	111000000
406	9,5	000011001	439	9,5	101100011
407	9,5	111001010	440	9,5	110101101
408	9,5	*011011011	441	9,5	110101111
409	9,5	010110010	442	9,5	101011111
410	9,5	000100101	443	9,5	110100010
411	9,5	*000011101	444	9,5	100010001
412	9,5	*110000001	445	9,5	101100010
413	9,5	011110101	446	9,5	001010101
414	9,5	*100100010	447	9,5	*101110000
415	9,5	*011001101	448	9,5	010111110
416	9,5	100110111	449	9,5	011001011
417	9,5	010000010	450	9,5	*11010001
418	9,5	010111011	451	9,5	100001000
419	9,5	101001101	452	9,5	111011000
420	9,5	000010011	453	9,5	101001001
421	9,5	100011111	454	9,5	010001111
422	9,5	110100100	455	9,5	101010110
423	9,5	*000100100	456	9,5	111110110
424	9,5	111101001	457	9,5	101110110
425	9,5	110111010	458	9,5	000111011
426	9,5	101111111	459	9,5	100010010
427	9,5	*011110010	460	9,5	010011101
428	9,5	*011011110	461	9,5	011111011

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
462	9,5	111100000	495	9,5	000111000
463	9,5	101101110	496	9,5	001111111
464	9,5	000010111	497	9,5	*111000011
465	9,5	*101111010	498	9,5	*000111101
466	9,5	011111000	499	9,5	110000101
467	9,5	001011111	500	9,5	110110000
468	9,5	010011000	501	9,5	010000100
469	9,5	110011101	502	9,5	000100010
470	9,5	100011011	503	9,5	010001110
471	9,5	110101010	504	9,5	100111100
472	9,5	111001110	505	9,5	001101011
473	9,5	110101110	506	9,5	001000010
474	9,5	100011000	507	9,5	001000110
475	9,5	100100011	508	9,5	100100110
476	9,5	011101001	509	9,5	101010111
477	9,5	000011100	510	9,5	*111111100
478	9,5	100001001	511	9,5	
479	9,5	110001011	512	10,7	0011111001
480	9,5	100111001	513	10,7	*0001001011
481	9,5	000000101	514	10,7	*1000010001
482	9,5	100101111	515	10,7	0001000000
483	9,5	111010110	516	10,7	1110100011
484	9,5	*111011100	517	10,7	0110010111
485	9,5	010000011	518	10,7	1010111111
486	9,5	110110011	519	10,7	0111101111
487	9,5	101011000	520	10,7	*1111101010
488	9,5	110001101	521	10,7	*0001000101
489	9,5	111111001	522	10,7	*1011111111
490	9,5	011101111	523	10,7	*1100100001
491	9,5	000011000	524	10,7	*0011001011
492	9,5	001001101	525	10,7	0010101100
493	9,5	000100011	526	10,7	1110111000
494	9,5	011010001	427	10,7	0010110110

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
528	10,7	1000001101	561	10,7	1111000100
529	10,7	1111000011	562	10,7	1101100011
530	10,7	0001110000	563	10,7	*0011111100
531	10,7	0100111100	564	10,7	*1100110100
532	10,7	*0110000001	565	10,7	1101011011
533	10,7	*1001111101	566	10,7	*1111001100
534	10,7	1011000001	567	10,7	1011110011
535	10,7	*1001000110	568	10,7	*1010010010
536	10,7	0000010101	569	10,7	0001010000
537	10,7	*1001001110	570	10,7	1010101100
538	10,7	*0001010011	571	10,7	1001010001
539	10,7	*1100000010	572	10,7	*1010001111
540	10,7	1010011110	573	10,7	1000011001
541	10,7	*1011011100	574	10,7	*1011101001
542	10,7	*0111100011	575	10,7	1101001001
543	10,7	0101001000	576	10,7	1001101101
544	10,7	*0101100011	577	10,7	1110001011
545	10,7	0111110010	578	10,7	0101000101
546	10,7	*0001111101	579	10,7	*0000110001
547	10,7	1011010000	580	10,7	0010001000
548	10,7	1101100111	581	10,7	*1000001011
549	10,7	0001101101	582	10,7	0100010011
550	10,7	0100001011	583	10,7	1011100011
551	10,7	1101110001	584	10,7	0010000101
552	10,7	1001010110	585	10,7	*1000110010
553	10,7	*0100011110	586	10,7	1101011110
554	10,7	1100101001	587	10,7	*0011001010
555	10,7	*1100100010	588	10,7	*0010110000
556	10,7	1110000000	589	10,7	0001110001
557	10,7	*0101011101	590	10,7	1000110100
558	10,7	*1111011101	591	10,7	*1001100110
559	10,7	0000010110	592	10,7	1010111010
560	10,7	1101101100	593	10,7	*0001100010

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
594	10,7	1010100010	627	10,7	*0101100110
595	10,7	*1011111110	628	10,7	*1011111011
596	10,7	0010111101	629	10,7	*0001110100
597	10,7	*0111010100	630	10,7	*0010001011
598	10,7	1100101111	631	10,7	*1111110101
599	10,7	1111010001	632	10,7	*0101010100
600	10,7	1000100011	633	10,7	1101000110
601	10,7	1101010000	634	10,7	*1000011110
602	10,7	*1001100010	635	10,7	1000101011
603	10,7	*1101111011	636	10,7	1000000111
604	10,7	0100100111	637	10,7	1011001001
605	10,7	1001100011	638	10,7	0101111100
606	10,7	1010000110	639	10,7	*0010001101
607	10,7	1110111110	640	10,7	0110011100
608	10,7	*0000001010	641	10,7	1110011011
609	10,7	0101100101	642	10,7	1000011111
610	10,7	*1110010011	643	10,7	*0011110101
611	10,7	0111111000	644	10,7	1111010111
612	10,7	*0001011111	645	10,7	1000001000
613	10,7	1011110110	646	10,7	0010011110
614	10,7	1100010100	647	10,7	*1011101111
615	10,7	1010101000	648	10,7	*1010011000
616	10,7	*1001001011	649	10,7	0100101000
617	10,7	1100110000	650	10,7	1011100101
618	10,7	1111110011	651	10,7	1001111100
619	10,7	0111000110	652	10,7	1001101010
620	10,7	0011011100	653	10,7	1101100110
621	10,7	1011010111	654	10,7	1010000001
622	10,7	*0110001101	655	10,7	*0001001010
623	10,7	0110101111	656	10,7	1011101000
624	10,7	1110011110	657	10,7	0100111001
625	10,7	1110010111	658	10,7	0101110110
626	10,7	1000111011	659	10,7	*1010010001

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
660	10,7	*0011000101	693	10,7	1110101110
661	10,7	0110101000	694	10,7	*1001111010
662	10,7	0101000000	695	10,7	1110100010
663	10,7	0011000001	696	10,7	1010000111
664	10,7	0110111100	697	10,7	0110100000
665	10,7	1011110000	698	10,7	*1010101111
666	10,7	*0001111010	699	10,7	0010010011
667	10,7	0101101101	700	10,7	*0110011001
668	10,7	1111011100	701	10,7	0111111111
669	10,7	0100001010	702	10,7	*1100011100
670	10,7	*0011010001	703	10,7	*0111011001
671	10,7	*0110110010	704	10,7	1011111000
672	10,7	1111011000	705	10,7	*0110001100
673	10,7	0001010100	706	10,7	1110011000
674	10,7	1000001100	707	10,7	1101111000
675	10,7	1110001100	708	10,7	1000000100
676	10,7	1110110000	709	10,7	0100110100
677	10,7	0110100111	710	10,7	1100010101
678	10,7	*0111010101	711	10,7	0111011010
679	10,7	*0010011101	712	10,7	1101001101
680	10,7	1011000010	713	10,7	0110111010
681	10,7	0011111000	714	10,7	0111110110
682	10,7	1101110010	715	10,7	0000100100
683	10,7	1000100000	716	10,7	*1101011000
684	10,7	0111111100	717	10,7	1100111100
685	10,7	0101010001	718	10,7	0011010111
686	10,7	0110001010	719	10,7	0010000000
687	10,7	0011110000	720	10,7	*1100001000
688	10,7	0010110111	721	10,7	*0011001111
689	10,7	*0111111001	722	10,7	0100100000
690	10,7	1110110001	723	10,7	0110001010
691	10,7	*0011011001	724	10,7	*0001001110
692	10,7	0001100001	725	10,7	0000011111

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
726	10,7	1100000001	759	10,7	*0100001110
727	10,7	*0110010001	760	10,7	0111010001
728	10,7	1000011010	761	10,7	1000100101
729	10,7	0100010010	762	10,7	*0000111101
730	10,7	1111111011	763	10,7	1111100010
731	10,7	1110001111	764	10,7	0000011100
732	10,7	*1011010110	765	10,7	*1111000111
733	10,7	*1010000010	766	10,7	1010010111
734	10,7	0111101100	767	10,7	*0100110111
735	10,7	*0000101111	768	10,7	0000100111
736	10,7	1100100110	769	10,7	0000100001
737	10,7	*1100001100	770	10,7	*0111011101
738	10,7	1010001010	771	10,7	1001101100
739	10,7	0000010001	772	10,7	*0110101100
740	10,7	1111101011	773	10,7	0111000111
741	10,7	1001011000	774	10,7	1010001001
742	10,7	0111100110	775	10,7	0000011011
743	10,7	*0011101001	776	10,7	1011100100
744	10,7	0101111101	777	10,7	1011011011
745	10,7	1001000001	778	10,7	*1000111101
746	10,7	0111000001	779	10,7	0100101011
747	10,7	1100111001	780	10,7	0110101011
748	10,7	*0001000110	781	10,7	0001000001
749	10,7	0011101111	782	10,7	0110111001
750	10,7	1000111110	783	10,7	0011100011
751	10,7	0111100111	784	10,7	0101110001
752	10,7	1111100111	785	10,7	0000110000
753	10,7	0110011000	786	10,7	0000101100
754	10,7	1010110101	787	10,7	1111110110
755	10,7	1110011111	788	10,7	1111011001
756	10,7	*1010100110	789	10,7	*0101000001
757	10,7	1011000100	790	10,7	1101111110
758	10,7	*1100110011	791	10,7	1100011011

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
792	10,7	1101101011	825	10,7	0001101000
793	10,7	0010111000	826	10,7	*1000111000
794	10,7	1001110100	827	10,7	0011111111
795	10,7	0110110110	828	10,7	0101101001
796	10,7	1000110001	829	10,7	0100000111
797	10,7	1010110100	830	10,7	1000100100
798	10,7	1000010101	831	10,7	1100001101
799	10,7	0001100111	832	10,7	0001010101
800	10,7	*1001000101	833	10,7	0010111100
801	10,7	1110010100	834	10,7	0010000001
802	10,7	0000000111	835	10,7	1000101111
803	10,7	1110100110	836	10,7	*0111000010
804	10,7	*1100010011	837	10,7	1010111001
805	10,7	*1010100011	838	10,7	0001101001
806	10,7	1110110101	839	10,7	0010100011
807	10,7	0000101011	840	10,7	1101010110
808	10,7	*0100100011	841	10,7	0010010101
809	10,7	0010111011	842	10,7	1111000010
810	10,7	*0101111010	843	10,7	1010100101
811	10,7	0011110110	844	10,7	0100110000
812	10,7	1001110010	845	10,7	0001101110
813	10,7	1101110100	846	10,7	0011000000
814	10,7	0110100110	847	10,7	*0101010000
815	10,7	0011011000	848	10,7	1100111000
816	10,7	0011101110	849	10,7	*1111001010
817	10,7	0111110011	850	10,7	1011001101
818	10,7	0000111011	851	10,7	0100011101
819	10,7	1110000001	852	10,7	0110110001
820	10,7	1101010011	853	10,7	0100000001
821	10,7	1101101000	854	10,7	1011110111
822	10,7	0110111111	255	10,7	0100110001
823	10,7	1001001100	856	10,7	*0101110111
824	10,7	0111011100	857	10,7	0000110101

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
858	10,7	1011001000	891	10,7	0111001001
859	10,7	1101000001	892	10,7	*0010001100
860	10,7	1101000010	893	10,7	1101100000
861	10,7	0010010110	894	10,7	1111101101
862	10,7	0001111100	895	10,7	1011011101
863	10,7	0001110111	896	10,7	0110000100
864	10,7	1111001011	897	10,7	0010101001
865	10,7	*1111110010	898	10,7	1111101100
866	10,7	1001011011	899	10,7	1000010110
867	10,7	0011110001	900	10,7	0000110110
868	10,7	0111010000	901	10,7	0101000100
869	10,7	0000001001	902	10,7	0010100101
870	10,7	1011011010	903	10,7	1110100111
871	10,7	1000000000	904	10,7	1100010000
872	10,7	1100101110	905	10,7	0001111001
873	10,7	1111001111	906	10,7	0011100111
874	10,7	1100011111	907	10,7	1001010101
875	10,7	0011010110	908	10,7	0110010000
876	10,7	1001010000	909	10,7	0001011001
877	10,7	1101001100	910	10,7	0000011000
878	10,7	1000000011	911	10,7	0000101010
879	10,7	0000001111	912	10,7	0101011010
880	10,7	0111001010	913	10,7	1001001000
881	10,7	1010010100	914	10,7	1110000111
882	10,7	1010110000	915	10,7	0100000110
883	10,7	1100100101	916	10,7	0100010110
884	10,7	0010100100	917	10,7	*0000111010
885	10,7	1101010111	918	10,7	1001111011
886	10,7	1000101110	919	10,7	0010110001
887	10,7	1011101100	920	10,7	0111110101
888	10,7	0011010010	921	10,7	1011000111
889	10,7	0101011100	922	10,7	0111100010
890	10,7	1100101001	923	10,7	0100101101

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
924	10,7	0110100001	957	10,7	1001100111
925	10,7	0000111110	958	10,7	0101100010
926	10,7	0111001101	959	10,7	0100111101
927	10,7	0101001110	960	10,7	1100000100
928	10,7	0010011001	961	10,7	1100011010
929	10,7	0000001110	962	10,7	0101101010
230	10,7	0100010101	963	10,7	1011001100
931	10,7	1110000110	964	10,7	1100110101
932	10,7	0110011101	965	10,7	1110111101
933	10,7	1010001100	966	10,7	1000110101
934	10,7	0010101010	967	10,7	0110000010
935	10,7	1001110011	968	10,7	0010100000
936	10,7	1011100000	969	10,7	0101001001
937	10,7	1101011111	970	10,7	1110010010
938	10,7	0011000110	971	10,7	0110010100
939	10,7	1111010110	972	10,7	1110101111
940	10,7	1010011101	973	10,7	0001001111
941	10,7	0011100110	974	10,7	1010011011
942	10,7	0100011011	975	10,7	0111101000
943	10,7	1010111110	976	10,7	0110001011
944	10,7	0101110000	977	10,7	1101001000
945	10,7	0110110101	978	10,7	1110001000
946	10,7	0000000100	979	10,7	1110110110
947	10,7	0000000001	980	10,7	1101111101
948	10,7	1101101101	981	10,7	0101111001
949	10,7	0100111010	982	10,7	1000101010
950	10,7	0111101011	983	10,7	0010011010
951	10,7	0100001111	984	10,7	0011011111
952	10,7	0100011000	985	10,7	0010000100
953	10,7	0011001110	986	10,7	1111010000
954	10,7	*1111111101	987	10,7	0101001101
955	10,7	1010101001	988	10,7	1110101010
956	10,7	1111111010	989	10,7	1100000101

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
990	10,7	0010101111	1023	10,7	.
991	10,7	1001011111	1024	11,9	11110101011
992	10,7	1011010001	1025	11,9	*00100011100
993	10,7	1110101001	1026	11,9	00111010001
994	10,7	0001011110	1027	11,9	10110110100
995	10,7	1001000000	1028	11,9	0000000011
996	10,7	0001100111	1029	11,9	0000000111
997	10,7	0101011011	1030	11,9	11011011010
998	10,7	0100101110	1031	11,9	*01011100101
999	10,7	*1111100011	1032	11,9	*11100010011
1000	10,7	*0011100010	1033	11,9	11000010001
1001	10,7	0001011000	1034	11,9	*01110010010
1002	10,7	1101110111	1035	11,9	10100001110
1003	10,7	0010010010	1036	11,9	*01111011100
1004	10,7	1100001001	1037	11,9	11011011001
1005	10,7	0101101110	1038	11,9	01110100101
1006	10,7	0111001110	1039	11,9	*00101110001
1007	10,7	1100111111	1040	11,9	10110110011
1008	10,7	1101000111	1041	11,9	*10111101110
1009	10,7	0000100000	1042	11,9	00111011111
1010	10,7	1001110101	1043	11,9	01001010100
1011	10,7	1111100100	1044	11,9	*11000110110
1012	10,7	1010110001	1045	11,9	*00101101101
1013	10,7	0000010010	1046	11,9	*10010001101
1014	10,7	0011101000	1047	11,9	11101010001
1015	10,7	1001011100	1048	11,9	*11011111000
1016	10,7	0100000000	1049	11,9	*00101111111
1017	10,7	1001101011	1050	11,9	11100001011
1018	10,7	1000010010	1051	11,9	*11000100001
1019	10,7	1110111001	1052	11,9	*11001010101
1020	10,7	0100100110	1053	11,9	11110101111
1021	10,7	0101010111	1054	11,9	*10000000100
1022	10,7	*1111111100	1055	11,9	00010100011

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
1056	11,9	11100110111	1089	11,9	00010111101
1057	11,9	01000100001	1090	11,9	*11000010100
1058	11,9	*11111011110	1091	11,9	00010101010
1059	11,9	*10010110011	1092	11,9	10101100111
1060	11,9	*11101011000	1093	11,9	*01101110001
1061	11,9	*11110010001	1094	11,9	*00010010000
1062	11,9	00101000111	1095	11,9	11100001100
1063	11,9	*11000000010	1096	11,9	10100011100
1064	11,9	*10011101010	1097	11,9	00001000000
1065	11,9	*01101101011	1098	11,9	*10011111010
1066	11,9	00010011011	1099	11,9	*10001100101
1067	11,9	11100001101	1100	11,9	00111001011
1068	11,9	00000111011	1101	11,9	*01000011110
1069	11,9	*10001001001	1102	11,9	10101011101
1070	11,9	*00010111000	1103	11,9	*00110100010
1071	11,9	*01000101101	1104	11,9	11011101110
1072	11,9	11101101111	1105	11,9	00101100010
1073	11,9	*11110111111	1106	11,9	00101010101
1074	11,9	*10001111000	1107	11,9	*11100001010
1075	11,9	*00111100100	1108	11,9	11100100111
1076	11,9	10100111110	1109	11,9	*00011011010
1077	11,9	00110010010	1110	11,9	11001101010
1078	11,9	*00100111111	1111	11,9	10011111110
1079	11,9	00111111100	1112	11,9	*00111110100
1080	11,9	01100110101	1113	11,9	00000100000
1081	11,9	11100111000	1114	11,9	00101001011
1082	11,9	*00101111100	1115	11,9	10100000000
1083	11,9	01111001110	1116	11,9	*00010110101
1084	11,9	*10101011011	1117	11,9	10001101011
1085	11,9	*00100000100	1118	11,9	01110111110
1086	11,9	01001000010	1119	11,9	*10110000011
1087	11,9	*00100001100	1120	11,9	*01110101111
1088	11,9	10110 101101	1121	11,9	*00101100001

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
1122	11,9	*11100011000	1155	11,9	01111000100
1123	11,9	10010101111	1156	11,9	11001111001
1124	11,9	10000001010	1157	11,9	11100101110
1125	11,9	00011010101	1158	11,9	*01010001110
1126	11,9	01111110000	1159	11,9	11001000100
1127	11,9	*01101100101	1160	11,9	*11101000010
1128	11,9	10110011011	1161	11,9	01010100101
1129	11,9	*11101100111	1152	11,9	00101011000
1130	11,9	*11000010000	1163	11,9	01000101011
1131	11,9	11111011011	1164	11,9	00000011111
1132	11,9	01011100001	1165	11,9	*10111001910
1133	11,9	10101000010	1166	11,9	01101101101
1134	11,9	*00011000010	1167	11,9	*01100100011
1135	11,9	00010001000	1169	11,9	*01011000011
1136	11,9	*01011101101	1169	11,9	*10111000001
1137	11,9	01011010001	1170	11,9	10101011000
1138	11,9	11010111100	1171	11,9	00100100101
1139	11,9	*01000110111	1172	11,9	*11110000111
1140	11,9	*01110001000	1173	11,9	10001000001
1141	11,9	*11110001101	1174	11,9	*11010111111
1142	11,9	11100111101	1175	11,9	00000001100
1143	11,9	11111101000	1176	11,9	10001010000
1144	11,9	*01101100010	1177	11,9	*11110110011
1145	11,9	10001110010	1178	11,9	*10101110001
1146	11,9	*00110100101	1179	11,9	*00001110010
1147	11,9	*00000100100	1180	11,9	11000100101
1148	11,9	*00011011101	1181	11,9	*10110100011
1149	11,9	11111100011	1182	11,9	10110001111
1150	11,9	00110011000	1183	11,9	*01110111010
1151	11,9	*11001110011	1184	11,9	*10100101011
1152	11,9	11111010010	1185	11,9	10000101000
1153	11,9	*01101100011	1186	11,9	01101111110
1154	11,9	11011110110	1187	11,9	01011111101

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
1188	11,9	*10111100110	1221	11,9	*10111000000
1189	11,9	10011011111	1222	11,9	00011101000
1190	11,9	01100111010	1223	11,9	10110000010
1191	11,9	00111010101	1124	11,9	11011100001
1192	11,9	01011000000	1225	11,9	10110101100
1193	11,9	*00010101011	1226	11,9	*00100001010
1194	11,9	10001010111	1227	11,9	*11010101000
1195	11,9	00010101100	1228	11,9	10100011001
1196	11,9	01110110001	1229	11,9	00110011110
1197	11,9	10000100011	1230	11,9	00110111001
1198	11,9	*11110001001	1231	11,9	11110000011
1199	11,9	10000110110	1232	11,9	00001100111
1200	11,9	00000100101	1233	11,9	10011110101
1201	11,9	*01011011010	1234	11,9	10010010101
1202	11,9	*11100011011	1235	11,9	*10011001101
1203	11,9	*00111000100	1236	11,9	*01101110000
1204	11,9	*11111001011	1237	11,9	*01000001000
1205	11,9	*11010110110	1238	11,9	*11010101101
1206	11,9	*11101100110	1239	11,9	*00001111010
1207	11,9	01000101000	1240	11,9	01010001011
1208	11,9	*00101010000	1241	11,9	*11101111110
1209	11,9	*01010110010	1242	11,9	01110110111
1210	11,9	10100000011	1243	11,9	01001001100
1211	11,9	10111011100	1244	11,9	*00101000110
1212	11,9	00001010110	1245	11,9	01100011101
1213	11,9	*10000101110	1246	11,9	00110010011
1214	11,9	*10000001111	1247	11,9	01011000100
1215	11,9	*10101111101	1248	11,9	*01101000001
1216	11,9	*11001011010	1249	11,9	10010111010
1217	11,9	*11110111011	1250	11,9	*01101100100
1218	11,9	*11000000101	1251	11,9	*11111000111
1219	11,9	*00101100110	1252	11,9	00001000001
1220	11,9	*11111101111	1253	11,9	01010100100

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
1254	11,9	*11000101101	1287	11,9	00001100000
1255	11,9	*01100110011	1288	11,9	10010101110
1256	11,9	01110110010	1289	11,9	*01111010110
1257	11,9	*00011111000	1290	11,9	*11011110000
1258	11,9	*10100111000	1291	11,9	10111111101
1259	11,9	00011000100	1292	11,9	*10001000111
1260	11,9	10100010111	1293	11,9	11111101110
1261	11,9	*00000111101	1294	11,9	*10000100110
1262	11,9	11011000110	1295	11,9	00111001000
1263	11,9	11000010101	1296	11,9	10110010101
1264	11,9	00000011100	1297	11,9	10111111010
1265	11,9	*10110001110	1298	11,9	10110111111
1266	11,9	10111111011	1299	11,9	11101010110
1267	11,9	*11110011100	1300	11,9	*11111010100
1268	11,9	*01101001010	1301	11,9	00110110000
1269	11,9	01000111001	1302	11,9	*01100110100
1270	11,9	11110000110	1303	11,9	10000010100
1271	11,9	*01011111000	1304	11,9	10101110110
1272	11,9	01110011100	1305	11,9	*10011001011
1273	11,9	*11111010011	1306	11,9	10110001010
1274	11,9	01111010001	1307	11,9	*00111000111
1275	11,9	*00110100011	1308	11,9	*10001101000
1276	11,9	11101000101	1309	11,9	*11001100110
1277	11,9	11001111101	1310	11,9	01011101011
1278	11,9	01111101010	1311	11,9	10100000110
1279	11,9	*10011100001	1312	11,9	10010101000
1280	11,9	*11000110001	1313	11,9	00011101111
1281	11,9	*10010110000	1314	11,9	*10011000011
1282	11,9	*10000001100	1315	11,9	01000100110
1283	11,9	01100011110	1316	11,9	10010111100
1284	11,9	*11011010001	1317	11,9	11110011111
1285	11,9	01010010010	1318	11,9	11101001110
1286	11,9	*01010000001	1319	11,9	01010010001

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
1320	11,9	10111010001	1353	11,9	00101010100
1321	11,9	*10111110001	1354	11,9	*00001110110
1322	11,9	11110101000	1355	11,9	*01100000110
1323	11,9	01101111001	1356	11,9	10111011111
1324	11,9	11010000001	1357	11,9	10101101001
1325	11,9	*00101010011	1358	11,9	11110110010
1326	11,9	01110001001	1359	11,9	00001010001
1327	11,9	*01101101010	1360	11,9	11010010101
1328	11,9	*01001100000	1361	11,9	11111001110
1329	11,9	*00111001010	1362	11,9	*10011011000
1330	11,9	00011111110	1363	11,9	10010001001
1331	11,9	11000001001	1364	11,9	*10101000111
1332	11,9	*11001011111	1365	11,9	11011111110
1333	11,9	01110011101	1366	11,9	*01100011011
1334	11,9	*11100011100	1367	11,9	00111011100
1335	11,9	11000001100	1368	11,9	*10100101110
1336	11,9	00100101110	1369	11,9	*11111100110
1337	11,9	01001100111	1370	11,9	*01110001111
1338	11,9	10001111001	1371	11,9	01011000101
1339	11,9	00001010010	1372	11,9	11101110111
1340	11,9	*11001001011	1373	11,9	01001001001
1341	11,9	00001101100	1374	11,9	00111101100
1342	11,9	*11111000100	1375	11,9	*00111100101
1343	11,9	00000110100	1376	11,9	11010100011
1344	11,9	00010011101	1377	11,9	01001000110
1345	11,9	01111111010	1378	11,9	01101110100
1346	11,9	10010110101	1379	11,9	10010001000
1347	11,9	*00010011000	1380	11,9	*10110111011
1348	11,9	*11001101011	1381	11,9	01011001001
1349	11,9	*10100010001	1382	11,9	01110010111
1350	11,9	00101111011	1383	11,9	*01000110010
1351	11,9	01111000000	1384	11,9	*10001011010
1352	11,9	01001001101	1385	11,9	*00001011100

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
1386	11,9	10000101011	1419	11,9	10100101111
1387	11,9	11101100011	1420	11,9	*00011001011
1388	11,9	11010111001	1421	11,9	01001111101
1389	11,9	00110010100	1422	11,9	11010110010
1390	11,9	*01001100001	1423	11,9	11001000010
1391	11,9	00000010100	1424	11,9	10101100000
1392	11,9	01001010111	1425	11,9	11010000000
1393	11,9	01000001011	1426	11,9	10111010000
1394	11,9	10000011001	1427	11,9	00001011000
1395	11,9	*11110001110	1428	11,9	00011010100
1396	11,9	*10110110010	1429	11,9	11100110010
1397	11,9	11110100011	1430	11,9	00111100011
1398	11,9	10111101001	1431	11,9	01011110000
1399	11,9	10111100011	1432	11,9	10101101010
1400	11,9	*00010001110	1433	11,9	10101111011
1401	11,9	01011111110	1434	11,9	10000000111
1402	11,9	01100101100	1435	11,9	01001010011
1403	11,9	00010010110	1436	11,9	*01000010101
1404	11,9	00001011101	1437	11,9	11011010110
1405	11,9	*01101011100	1438	11,9	*00011000011
1406	11,9	00010000100	1439	11,9	*01100111001
1407	11,9	*00101001100	1440	11,9	*00011111001
1408	11,9	11000101000	1441	11,9	01110000000
1409	11,9	11011000011	1442	11,9	10000111110
1410	11,9	11101011101	1443	11,9	*11100000010
1411	11,9	*10110100101	1444	11,9	*11010110001
1412	11,9	10010100001	1445	11,9	*11001011001
1413	11,9	*11000111000	1446	11,9	10101000110
1414	11,9	11101101001	1447	11,9	*00011110010
1415	11,9	00110000101	1448	11,9	*10001011011
1416	11,9	01010100001	1449	11,9	10101010010
1417	11,9	10111111110	1450	11,9	*01111111110
1418	11,9	10100001011	1451	11,9	01000100010

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
1452	11,9	10100110111	1485	11,9	00000000110
1453	11,9	*11010010001	1486	11,9	10100111011
1454	11,9	11110110111	1487	11,9	*10011010111
1455	11,9	*10001110110	1488	11,9	10110101000
1456	11,9	10011100110	1489	11,9	00111101101
1457	11,9	00011001100	1490	11,9	11001111000
1458	11,9	11101110011	1491	11,9	11110010010
1459	11,9	01100000011	1492	11,9	01000110110
1460	11,9	00111010110	1493	11,9	10011001100
1461	11,9	*10011011110	1494	11,9	*11111111101
1462	11,9	11100000100	1495	11,9	01010101001
1463	11,9	01001011111	1496	11,9	11111111011
1464	11,9	11011001010	1497	11,9	11001100111
1465	11,9	00111111000	1498	11,9	*01100010110
1466	11,9	11100000101	1499	11,9	10110000100
1467	11,9	*11000111110	1500	11,9	*00100011101
1468	11,9	*00010100111	1501	11,9	11011110001
1469	11,9	*01101001011	1502	11,9	00110111100
1470	11,9	01110101110	1503	11,9	10011101011
1471	11,9	11100100001	1504	11,9	01000111111
1472	11,9	*10100011010	1505	11,9	*11101111001
1473	11,9	*01111100101	1506	11,9	*11110001010
1474	11,9	10011101101	1507	11,9	10111001101
1475	11,9	*11000110000	1508	11,9	*10111110111
1476	11,9	10111001011	1509	11,9	10110001001
1477	11,9	10000100101	1510	11,9	*01100001011
1478	11,9	00110101011	1511	11,9	11011001001
1479	11,9	*01011010101	1512	11,9	*00100010101
1480	11,9	*01000011111	1513	11,9	00101110111
1481	11,9	01001010010	1514	11,9	00101100111
1482	11,9	00100111100	1515	11,9	01000010110
1483	11,9	10101100110	1516	11,9	11011111111
1484	11,9	11100101101	1517	11,9	11100111011

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
1518	11,9	*11110100110	1551	11,9	*00001101101
1519	11,9	10111001110	1552	11,9	*00001001111
1520	11,9	00010000011	1553	11,9	00101101100
1521	11,9	*01111000011	1554	11,9	10101011110
1522	11,9	10001000110	1555	11,9	00000111100
1523	11,9	01100101011	1546	11,9	11001001010
1524	11,9	00011100100	1557	11,9	*10011000110
1525	11,9	*00110110001	1558	11,9	01001111001
1526	11,9	11111100111	1559	11,9	00011001000
1527	11,9	10101101110	1560	11,9	10111010100
1528	11,9	10011010010	1561	11,9	11010010000
1529	11,9	11110100101	1562	11,9	*10100011101
1530	11,9	*10100100000	1563	11,9	11110010111
1531	11,9	10101000001	1564	11,9	*10100110110
1532	11,9	01100100110	1465	11,9	11010100101
1533	11,9	00001111111	1566	11,9	10010000000
1534	11,9	11101100010	1557	11,9	10010000111
1535	11,9	10001010110	1568	11,9	00111101000
1536	11,9	10110000111	1569	11,9	00000010101
1537	11,9	*10110010001	1570	11,9	11101001111
1538	11,9	*00011111101	1571	11,9	10010111001
1539	11,9	01011010000	1572	11,9	01000000000
1540	11,9	00101000001	1573	11,9	01011110001
1541	11,9	10010000100	1574	11,9	00110111010
1542	11,9	01101011001	1575	11,9	10000010010
1543	11,9	11101110000	1576	11,9	*11000001101
1544	11,9	11010010100	1577	11,9	10000111011
1545	11,9	01110111111	1578	11,9	01100011010
1546	11,9	11011110111	1579	11,9	*01110010100
1547	11,9	11101000001	1580	11,9	00000001111
1548	11,9	11111110101	1581	11,9	10000000001
1549	11,9	00001001110	1582	11,9	01001110100
1550	11,9	*10011010100	1583	11,9	10001100011

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
1584	11,9	11001110000	1617	11,9	01111010111
1585	11,9	*00011101011	1618	11,9	*01111100100
1586	11,9	*01111100000	1619	11,9	11111100000
1587	11,9	11011001111	1620	11,9	00001101010
1588	11,9	11011001100	1621	11,9	00010010111
1589	11,9	*11101011011	1622	11,9	*00001110011
1590	11,9	11000000011	1623	11,9	*00110001100
1591	11,9	00000011000	1624	11,9	01100100101
1592	11,9	01101011111	1625	11,9	11010011111
1593	11,9	00111001101	1626	11,9	00110101100
1594	11,9	10011011001	1627	11,9	00000110111
1595	11,9	*11000101001	1628	11,9	00100101101
1596	11,9	01100001100	1629	11,9	10110010110
1597	11,9	00010001111	1630	11,9	00010001011
1598	11,9	11001010011	1631	11,9	11111110110
1599	11,9	01101001100	1632	11,9	10101010100
1600	11,9	11001001101	1633	11,9	11010001101
1601	11,9	11010100000	1634	11,9	11000011110
1602	11,9	*10010110100	1635	11,9	*10000011100
1603	11,9	*01010111110	1636	11,9	*10010010110
1604	11,9	00011010000	1637	11,9	00000101001
1605	11,9	00001001010	1638	11,9	*10110011010
1606	11,9	11000011011	1639	11,9	*10001011100
1607	11,9	10001001101	1640	11,9	*01111110110
1608	11,9	11001100001	1641	11,9	01011100110
1609	11,9	10011110000	1642	11,9	00000111000
1610	11,9	*01001111110	1643	11,9	01100001010
1611	11,9	00010000111	1644	11,9	11110110100
1612	11,9	10101010011	1645	11,9	01010111000
1613	11,9	01100001101	1646	11,9	10111000111
1614	11,9	10001101100	1647	11,9	*01010100000
1615	11,9	10100101010	1648	11,9	00100010100
1616	11,9	00000001001	1649	11,9	11011011100

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
1650	11,9	00010101111	1683	11,9	00101011111
1651	11,9	10101001100	1684	11,9	11101101110
1652	11,9	01100010111	1685	11,9	*11101001000
1653	11,9	*01010011111	1686	11,9	11101111101
1654	11,9	00111110111	1687	11,9	11000110101
1655	11,9	00111000001	1688	11,9	11000011101
1656	11,9	10010011011	1689	11,9	00001000110
1657	11,9	10110100110	1690	11,9	10111011000
1658	11,9	*00101001000	1691	11,9	*00010111001
1659	11,9	01100101000	1692	11,9	*01011001101
1660	11,9	11101011100	1693	11,9	*01100000010
1661	11,9	10001101101	1694	11,9	01010001000
1662	11,9	01111001001	1695	11,9	00110001111
1663	11,9	01001101110	1696	11,9	11100101010
1664	11,9	00100010001	1697	11,9	00100011000
1665	11,9	10110111010	1698	11,9	10101111110
1666	11,9	00100100010	1699	11,9	11000100000
1667	11,9	01000001111	1700	11,9	11110000000
1668	11,9	11110100010	1701	11,9	10010111101
1669	11,9	*11111101001	1702	11,9	11001110110
1670	11,9	11010101011	1703	11,9	01101111111
1671	11,9	11000011000	1704	11,9	11010100100
1672	11,9	*11100010100	1705	11,9	00001100110
1673	11,9	*11110111100	1706	11,9	01110101011
1674	11,9	10100010000	1707	11,9	*11110011000
1675	11,9	*00110000001	1708	11,9	11010101100
1676	11,9	01001100100	1709	11,9	01011011111
1677	11,9	11011100010	1710	11,9	01001000111
1678	11,9	01010110011	1711	11,9	11011101111
1679	11,9	10010000011	1712	11,9	01010111101
1680	11,9	01011101010	1713	11,9	*00000011001
1681	11,9	00010110010	1714	11,9	*01001011000
1682	11,9	10111011011	1715	11,9	00100110010

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
1716	11,9	01110000111	1749	11,9	*00000110010
1717	11,9	11001001100	1750	11,9	00101011110
1718	11,9	10110011111	1751	11,9	01110001100
1719	11,9	00110000000	1752	11,9	01010011000
1720	11,9	*00001000101	1753	11,9	10001000010
1721	11,9	10010100100	1754	11,9	01110011011
1722	11,9	*10001010011	1755	11,9	*01111000101
1723	11,9	11001101100	1756	11,9	11100010111
1724	11,9	01110101010	1757	11,9	00110110100
1725	11,9	00110011101	1758	11,9	11001000101
1726	11,9	11110111000	1759	11,9	10001001110
1727	11,9	11010000111	1760	11,9	11011010000
1728	11,9	*01001011100	1761	11,9	00100110001
1729	11,9	10011101110	1762	11,9	*00011110001
1730	11,9	00100110110	1763	11,9	01111011111
1731	11,9	10011100000	1764	11,9	01100111101
1732	11,9	11110010100	1765	11,9	11010001100
1733	11,9	10011110100	1766	11,9	00010000010
1734	11,9	01111001000	1767	11,9	01111100011
1735	11,9	*01000111100	1768	11,9	11011101000
1736	11,9	*00000100001	1769	11,9	*10100100011
1737	11,9	01100000111	1770	11,9	01010011011
1738	11,9	*10100110011	1771	11,9	00001010111
1739	11,9	01100101111	1772	11,9	01011001100
1740	11,9	11101110100	1773	11,9	10010011110
1741	11,9	01101000010	1774	11,9	01101010001
1742	11,9	01110100011	1775	11,9	*01001100011
1743	11,9	10101001000	1776	11,9	11101001001
1744	11,9	10001000000	1777	11,9	11011100110
1745	11,9	10000111100	1778	11,9	10001100110
1746	11,9	01101000110	1779	11,9	01001011001
1747	11,9	01100010010	1780	11,9	11111110010
1748	11,9	*11100000011	1781	11,9	*00110111101

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
1782	11,9	10101001011	1815	11,9	01001110011
1783	11,9	11010011011	1816	11,9	01001101010
1784	11,9	11001011101	1817	11,9	01011011011
1785	11,9	10001001010	1818	11,9	11101000100
1786	11,9	10101101111	1819	11,9	00100000111
1787	11,9	11010001011	1820	11,9	11011100111
1788	11,9	*10011010001	1821	11,9	00001001001
1789	11,9	*11001111110	1822	11,9	00011100101
1790	11,9	01111110101	1823	11,9	11010111000
1791	11,9	01110000011	1824	11,9	00000101110
1792	11,9	10101100001	1825	11,9	00110101010
1793	11,9	01100100000	1826	11,9	01000000101
1794	11,9	00010011110	1827	11,9	01011111001
1795	11,9	11100110001	1828	11,9	01100010001
1796	11,9	10111010101	1829	11,9	00011100010
1797	11,9	11001000001	1830	11,9	10011000111
1798	11,9	01010000101	1831	11,9	10000001011
1799	11,9	01011110111	1832	11,9	*11111011101
1800	11,9	11010001000	1833	11,9	*11000101110
1801	11,9	00110001000	1834	11,9	*00111100010
1802	11,9	01010011100	1835	11,9	10010011000
1803	11,9	01000011000	1836	11,9	00111011011
1804	11,9	00100100001	1837	11,9	00111110000
1805	11,9	10111011100	1838	11,9	*10110111100
1806	11,9	*00011010001	1839	11,9	11110101100
1807	11,9	00011100011	1840	11,9	00011011001
1808	11,9	00111111111	1841	11,9	00110000110
1809	11,9	*00101101001	1842	11,9	00001110111
1810	11,9	01101010000	1843	11,9	01110000110
1811	11,9	00100000011	1844	11,9	01010101101
1812	11,3	00101110100	1845	11,9	10000111010
1813	11,9	10110100000	1846	11,9	00100101000
1814	11,9	00001111110	1847	11,9	00000101111

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
1848	11,9	01110100110	1881	11,9	10100001101
1849	11,9	11011111001	1882	11,9	01010111001
1850	11,9	00111011010	1883	11,9	10000011111
1851	11,9	11001100000	1884	11,9	00010010001
1852	11,9	10010010011	1885	11,9	01010110110
1853	11,9	10000110111	1886	11,9	10111100111
1854	11,9	01011110110	1887	11,9	00011011100
1855	11,9	01010110101	1888	11,9	01010010100
1856	11,9	*10100010100	1889	11,9	01000010001
1857	11,9	00011000101	1890	11,9	01110010001
1858	11,9	11001010110	1891	11,9	00110110111
1859	11,9	00100111001	1892	11,9	10011000010
1860	11,9	10110101001	1893	11,9	10011001010
1861	11,9	10001100000	1894	11,9	11000111101
1862	11,9	01000101100	1895	11,9	11000000110
1863	11,9	00001100011	1896	11,9	00110001001
1864	11,9	00100010010	1897	11,9	10100111101
1865	11,9	*11111111010	1898	11,9	00100001101
1866	11,9	11000111001	1899	11,9	10010100111
1867	11,9	00111001110	1900	11,9	01000000011
1868	11,9	01010000010	1901	11,9	11011011111
1869	11,9	001011101000	1902	11,9	10110010000
1870	11,9	10000111101	1903	11,9	01010000100
1871	11,9	10011100101	1904	11,9	10101110000
1872	11,9	10100000111	1905	11,9	11111011010
1873	11,9	00000110001	1906	11,9	00010100110
1874	11,9	00111101001	1907	11,9	11001010010
1875	11,9	11111001010	1908	11,9	10001110011
1876	11,9	*01010001101	1909	11,9	*01111111101
1877	11,9	10100100110	1910	11,9	00110011011
1878	11,9	01111011010	1911	11,9	01001001010
1879	11,9	01011010100	1912	11,9	01010101100
1880	11,9	00101111000	1913	11,9	01101000111

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
1914	11,9	10111101000	1947	11,9	00011110101
1915	11,9	00101011011	1948	11,9	01101010110
1916	11,9	*01000000100	1949	11,9	01000110001
1917	11,9	00001011011	1950	11,9	00111110011
1918	11,9	01110110100	1951	11,9	00111010000
1919	11,9	10001011101	1952	11,9	01011100000
1920	11,9	10000110000	1953	11,9	10101110111
1921	11,9	10101001110	1954	11,9	01000001110
1922	11,9	*01001000001	1955	11,9	01001110010
1923	11,9	01111010010	1956	11,9	11100101011
1924	11,9	10000011000	1957	11,9	11010011010
1925	11,9	00100111000	1958	11,9	11000001000
1926	11,9	*11110011001	1959	11,9	01011101110
1927	11,9	01001101101	1960	11,9	00101110000
1928	11,9	11001110111	1961	11,9	11000100100
1929	11,9	10001111101	1962	11,9	10010001100
1930	11,9	10000010001	1963	11,9	01110100000
1931	11,9	01101001101	1964	11,9	10011111001
1932	11,9	01101011010	1965	11,9	00111111011
1933	11,9	10011111101	1966	11,9	00110101101
1934	11,9	01001111000	1967	11,9	01110011000
1935	11,9	00100101001	1968	11,9	00101000000
1936	11,9	10000010101	1969	11,9	10111101101
1937	11,9	01101010111	1970	11,9	01000011011
1938	11,9	01000010010	1971	11,9	00010111100
1939	11,9	00001111011	1972	11,9	10111110110
1940	11,9	00010110100	1973	11,9	00011101100
1941	11,9	00100011001	1974	11,9	01111011011
1942	11,9	11100010010	1975	11,9	00010100000
1943	11,9	10010101001	1976	11,9	11100100100
1944	11,9	10010011101	1977	11,9	01100111100
1945	11,9	10010100010	1978	11,9	11111010111
1946	11,9	00100001011	1979	11,9	01000111010

Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация	Период	Номера отводов сдвиг. рег.	Детектируемая комбинация
1980	11,9	11011000010	2013	11,9	00100110101
1981	11,9	11101111010	2014	11,9	11100110100
1982	11,9	01101111010	2015	11,9	11101010111
1983	11,9	01111111001	2016	11,9	10000110011
1984	11,9	11010000100	2017	11,9	01000100111
1985	11,9	11100100010	2018	11,9	01011011100
1986	11,9	10100001000	2019	11,9	01111110011
1987	11,9	01011001000	2020	11,9	11111001111
1988	11,9	01111110110	2021	11,9	01001110111
1989	11,9	11011000111	2022	11,9	11011010101
1990	11,9	01111101001	2023	11,9	10111000100
1991	11,9	10001110111	2024	11,9	10100110010
1992	11,9	11111000010	2025	11,9	00000101010
1993	11,9	01101110101	2026	11,9	00011110100
1994	11,9	10101111000	2027	11,9	10011110011
1995	11,9	00001101001	2028	11,9	10111100010
1996	11,9	00000010011	2029	11,9	00100000000
1997	11,9	01111101111	2030	11,9	10111110000
1998	11,9	00101001111	2031	11,9	11111000011
1999	11,9	11100011111	2032	11,9	00011001101
2000	11,9	*11111110011	2033	11,9	11101010010
2001	11,9	*01100110010	2034	11,9	01111001101
2002	11,9	00100100100	2035	11,9	11010011110
2003	11,9	01010101010	2036	11,9	00000001010
2004	11,9	00010110001	2037	11,9	01101101100
2005	11,9	10000101111	2038	11,9	10000000000
2006	11,9	11101101010	2039	11,9	11001011100
2007	11,9	10100100111	2040	11,9	11100111100
2008	11,9	11011101001	2041	11,9	00110100100
2009	11,9	00110010111	2042	11,9	11010110111
2010	11,9	01010010111	2043	11,9	01110111001
2011	11,9	00000010000	2044	11,9	10010010000
2012	11,9	10110110111	2045	11,9	10101010111
			2046	11,9	*11111111100
			2047	11,9	

Рассмотрим основные допущения, которые были приняты при вычислении данной таблицы. В гл. 2 приведен теоретический метод, используемый для построения этой таблицы. Однако там не разбирались имеющие практическое значение вопросы синхронизации работы регистра и направления сдвига, которые необходимо учитывать при использовании этой таблицы. На рис. П3.1 изображена схема сдвигающего регистра.

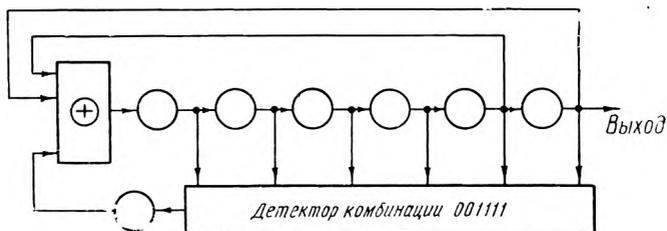


Рис. П3.2. Генератор последовательности с периодом $p=51$

Таблица состоит из трех столбцов. В первом столбце перечислены периоды от 4 до 2047, второй столбец определяет рекуррентные соотношения (сумма по модулю 2) для последовательностей максимальной длины указанных периодов и, наконец, в третьем столбце приведены комбинации, которые должны выделяться детектором для формирования требуемого периода. Например, для получения последовательности с периодом 51 строка таблицы имеет вид: 51 6,5 001111. Отсюда следуют основное рекуррентное соотношение, позволяющее сформировать требуемую последовательность $x_i = x_{i-5} \oplus x_{i-6}$, и логическая функция дешифратора (детектора) $x_{i-1}x_{i-2}x_{i-3}x_{i-4}x_{i-5}x_{i-6}$. Соответствующий сдвигающий регистр изображен на рис. П3.2.

Если детектируемая комбинация не помечена звездочкой, то в течение периода формируемой последовательности сдвигающий регистр обязательно пройдет через последовательность n -элементных состояний 1... 10, 1... 1, 01... 1, что может быть использовано для сдвига фазы¹⁾. Если в третьем столбце не содержится детектируемая комбинация, то это значит, что генерируется последовательность максимальной длины, которая обязательно содержит следующие друг за другом наборы: 1... 10, 1... 1, 01... 1, 01... 1.

Приложение 4

Помехоустойчивость ортогональных и биортогональных кодов

В табл. П4.1 и П4.2 приведены основные характеристики и значения вероятностей ошибок для ортогональных и биортогональных кодов, рассмотренных в гл. 7. Эти таблицы представлены также графически на рис. 7.4—7.9.

¹⁾ В этом случае для сдвига фазы необходимо использовать детектор комбинации 1... 10. В результате регистр обязательно принимает состояние 1... 1 два раза подряд, т. е. осуществляется сдвиг фазы на один шаг. Последовательно применяя эту операцию, можно осуществить сдвиг фазы на любое число шагов (прим. ред.).

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КОДОВ

k	ST_B / N_0	$P_E(k)$	$P_B(k)$	k	ST_B / N_0	$P_E(k)$	$P_B(k)$
1	.080	.38865	.38864	1	6.480	.00545	.00545
1	.125	.36184	.36183	1	6.845	.00444	.00444
1	.180	.33569	.33569	1	7.220	.00360	.00360
1	.245	.31031	.31031	1	7.605	.00291	.00291
1	.320	.28580	.28580	1	8.000	.00234	.00234
1	.405	.26226	.26226	1	8.405	.00187	.00187
1	.500	.23975	.23975	1	8.820	.00149	.00149
1	.605	.21834	.21834	1	9.245	.00118	.00118
1	.720	.19807	.19807	1	9.680	.0009316	.0009316
1	.845	.17899	.17899	1	10.125	.0007315	.0007315
1	.980	.16110	.16110	1	10.580	.0005717	.0005717
1	1.125	.14442	.14442	1	11.045	.0004448	.0004448
1	1.280	.12895	.12895	1	11.520	.0003444	.0003444
1	1.445	.11467	.11467	1	12.005	.0002654	.0002654
1	1.620	.10155	.10155	1	12.500	.0002036	.0002036
1	1.805	.08955	.08955	2	.080	.58621	.39081
1	2.000	.07865	.07865	2	.125	.54145	.36097
1	2.205	.06878	.06878	2	.180	.49624	.33083
1	2.420	.05990	.05990	2	.245	.45115	.30077
1	2.645	.05194	.05194	2	.320	.40677	.27118
1	2.880	.04484	.04484	2	.405	.36362	.24242
1	3.125	.03855	.03855	2	.500	.32222	.21481
1	3.380	.03300	.03300	2	.605	.28229	.18866
1	3.645	.02812	.02812	2	.720	.24627	.16418
1	3.920	.02386	.02386	2	.845	.21234	.14156
1	4.205	.02015	.02015	2	.980	.18136	.12091
1	4.500	.01695	.01695	2	1.125	.15334	.10229
1	4.805	.01419	.01419	2	1.280	.12857	.08571
1	5.120	.01183	.01183	2	1.445	.10669	.07112
1	5.445	.00981	.00981	2	1.620	.08767	.05844
1	5.780	.00810	.00810	2	1.805	.07133	.04755
1	6.125	.00666	.00666	2	2.000	.05747	.03831

k	ST_B / N_0	$P_E(k)$	$P_B(k)$	k	ST_B / N_0	$P_E(k)$	$P_B(k)$
2	2.205	.04583	.03056	3	.245	.54381	.31075
2	2.420	.03620	.02413	3	.320	.48516	.27724
2	2.645	.02830	.01887	3	.405	.42699	.24399
2	2.880	.02191	.01461	3	.500	.37050	.21172
2	3.125	.01679	.01119	3	.605	.31683	.18105
2	3.380	.01274	.00849	3	.720	.26690	.15251
2	3.645	.00957	.00638	3	.845	.22141	.12652
2	3.920	.00712	.00474	3	.980	.18082	.10333
2	4.205	.00524	.00349	3	1.125	.14535	.08306
2	4.500	.00382	.00255	3	1.280	.11498	.06570
2	4.805	.00276	.00184	3	1.445	.08949	.05114
2	5.120	.00197	.00131	3	1.620	.06853	.03916
2	5.445	.00139	.0009289	3	1.805	.05163	.02950
2	5.780	.0009760	.0006507	3	2.000	.03826	.02186
2	6.125	.0006769	.0004513	3	2.205	.02790	.01594
2	6.480	.0004649	.0003099	3	2.420	.02001	.01143
2	6.845	.0003161	.0002107	3	2.645	.01412	.00807
2	7.220	.0002129	.0001419	3	2.880	.00980	.00560
2	7.605	.0001420	.0000946	3	3.125	.00669	.00382
2	8.000	.0000937	.0000625	3	3.380	.00450	.00257
2	8.405	.0000613	.0000409	3	3.645	.00298	.00170
2	8.820	.0000397	.0000265	3	3.920	.00194	.00111
2	9.245	.0000255	.0000170	3	4.205	.00124	.0007090
2	9.680	.0000162	.0000108	3	4.500	.0007826	.0004472
2	10.125	.0000102	.0000068	3	4.805	.0004859	.0002777
2	10.580	.0000064	.0000043	3	5.120	.0002971	.0001698
2	11.045	.0000040	.0000027	3	5.445	.0001789	.0001022
2	11.520	.0000025	.0000017	3	5.780	.0001061	.0000606
2	12.005	.0000015	.0000010	3	6.125	.0000620	.0000354
2	12.500	.0000009	.0000006	3	6.480	.0000357	.0000204
3	.080	.71018	.40581	3	6.845	.0000203	.0000116
3	.125	.65748	.37570	3	7.220	.0000113	.0000065
3	.180	.60166	.34380	3	7.605	.0000623	.0000036

k	ST_B / N_0	$P_E (k)$	$P_B (k)$	k	ST_B / N_0	$P_E (k)$	$P_B (k)$
3	8.000	.0000035	.0000020	4	4.205	.0002867	.0001529
3	8.405	.0000019	.0000011	4	4.500	.0001565	.0000834
3	8.820	.0000010	.0000006	4	4.805	.0000834	.0000445
3	9.245	.0000006	.0000003	4	5.120	.0000437	.0000233
3	9.680	.0000003	.0000002	4	5.445	.0000224	.0000119
3	10.125	.0000002	.0000001	4	5.780	.0000113	.0000060
3	10.580	.0000002	.0000001	4	6.125	.0000056	.0000030
3	11.045	.0000001	.0000001	4	6.480	.0000027	.0000015
4	.080	.79366	.42329	4	6.845	.0000013	.0000007
4	.125	.73939	.39434	4	7.220	.0000007	.0000004
4	.180	.67875	.36200	4	7.605	.0000003	.0000002
4	.245	.61310	.32699	4	8.000	.0000002	.0000001
4	.320	.54422	.29025	5	.080	.85179	.43963
4	.405	.47419	.25290	5	.125	.79972	.41276
4	.500	.40514	.21608	5	.180	.73813	.38097
4	.605	.33914	.18087	5	.245	.66826	.34491
4	.720	.27793	.14823	5	.320	.59218	.30564
4	.845	.22284	.11885	5	.405	.51268	.26461
4	.980	.17473	.09319	5	.500	.43291	.22344
4	1.125	.13393	.07143	5	.605	.35603	.18376
4	1.280	.10032	.05350	5	.720	.28484	.14701
4	1.445	.07342	.03916	5	.845	.22146	.11430
4	1.620	.05250	.02800	5	.980	.16720	.08630
4	1.805	.03667	.01956	5	1.125	.12252	.06325
4	2.000	.02502	.01334	5	1.280	.08709	.04495
4	2.205	.01668	.00890	5	1.445	.06003	.03099
4	2.420	.01086	.00579	5	1.620	.04013	.02071
4	2.645	.00691	.00369	5	1.805	.02601	.01343
4	2.880	.00430	.00229	5	2.000	.01635	.00844
4	3.125	.00261	.00140	5	2.205	.00997	.00514
4	3.380	.00156	.0008297	5	2.420	.00590	.00304
4	3.645	.0009049	.0004826	5	2.645	.00338	.00175
4	3.920	.0005149	.0002746	5	2.880	.00189	.0009732

k	ST_B / N_0	$P_E (k)$	$P_B (k)$	k	ST_B / N_0	$P_E (k)$	$P_B (k)$
5	3.125	.00102	.0005267	6	2.880	.0008301	.0004217
5	3.380	.0005366	.0002769	6	3.125	.0003995	.0002029
5	3.645	.0002743	.0001416	6	3.380	.0001857	.0000943
5	3.920	.0001363	.0000704	6	3.645	.0000835	.0000424
5	4.205	.0000660	.0000033	6	3.920	.0000362	.0000184
5	4.500	.0000311	.0000015	6	4.205	.0000153	.0000078
5	4.805	.0000143	.0000074	6	4.500	.0000063	.0000032
5	5.120	.0000064	.0000033	6	4.805	.0000025	.0000013
5	5.445	.0000028	.0000015	6	5.120	.0000010	.0000005
5	5.780	.0000013	.0000007	6	5.445	.0000004	.0000002
5	6.125	.0000006	.0000003	6	5.780	.0000002	.0000001
5	6.480	.0000003	.0000002	7	.080	.92245	.46485
5	6.845	.0000002	.0000001	7	.125	.87979	.44336
6	.080	.89297	.45357	7	.180	.82297	.41472
6	.125	.84515	.02928	7	.245	.75177	.37885
6	.180	.78515	.39881	7	.320	.66787	.33656
6	.245	.71366	.36250	7	.405	.56481	.28967
6	.320	.63275	.32139	7	.500	.47765	.24071
6	.405	.54569	.27717	7	.605	.38209	.19255
6	.500	.45663	.23194	7	.720	.29351	.14791
6	.605	.36997	.18792	7	.845	.21609	.10889
6	.720	.28973	.14716	7	.980	.15224	.07672
6	.845	.21898	.11123	7	1.125	.10252	.05166
6	.980	.15956	.08105	7	1.280	.06594	.03323
6	1.125	.11199	.05688	7	1.454	.04049	.02040
6	1.280	.07567	.03844	7	1.620	.02373	.01196
6	1.445	.04920	.02499	7	1.805	.01328	.00669
6	1.620	.03078	.01564	7	2.000	.00709	.00357
6	1.805	.01853	.00941	7	2.205	.00362	.00182
6	2.000	.01074	.00545	7	2.420	.00177	.0008895
6	2.205	.00599	.00304	7	2.645	.0008236	.0004150
6	2.420	.00322	.00163	7	2.880	.0003679	.0001854
6	2.645	.00166	.0008452	7	3.125	.0001575	.0000794

k	ST_E / N_0	$P_E (k)$	$P_B (k)$	k	ST_B / N_0	$P_E (k)$	$P_B (k)$
7	3.380	.0000647	.0000326	8	4.500	.0000003	.0000002
7	3.645	.0000256	.0000129	8	4.805	.0000002	.0000001
7	3.920	.0000097	.0000049	9	.080	.95901	.48044
7	4.205	.0000036	.0000018	9	.125	.92701	.46441
7	4.500	.0000013	.0000007	9	.180	.87879	.44025
7	4.805	.0000005	.0000003	9	.245	.81183	.40671
7	5.120	.0000002	.0000001	9	.320	.72607	.36374
8	.080	.94367	.47368	9	.405	.62474	.31298
8	.125	.90613	.45500	9	.500	.51422	.25761
8	.180	.85368	.42851	9	.605	.40289	.20184
8	.245	.78413	.39360	9	.720	.29925	.14992
8	.320	.69872	.35073	9	.845	.21002	.10522
8	.405	.60097	.30166	9	.980	.13894	.06961
8	.500	.49670	.24932	9	1.125	.08647	.04332
8	.605	.39295	.19725	9	1.280	.05057	.02534
8	.720	.29661	.14889	9	1.445	.02777	.01391
8	.845	.21306	.10695	9	1.620	.01432	.00717
8	.980	.14536	.07297	9	1.805	.00693	.00347
8	1.125	.09405	.04721	9	2.000	.00315	.00158
8	1.280	.05766	.02894	9	2.205	.00134	.0006752
8	1.445	.03347	.01680	9	2.420	.0005423	.0002717
8	1.620	.01839	.00923	9	2.645	.0002057	.0001030
8	1.805	.00957	.00480	9	2.880	.0000738	.0000370
8	2.000	.00471	.00237	9	3.125	.0000250	.0000125
8	2.205	.00220	.00111	9	3.380	.0000081	.0000041
8	2.420	.0009755	.0004897	9	3.645	.0000025	.0000013
8	2.645	.0004104	.0002060	9	3.920	.0000008	.0000004
8	2.880	.0001642	.0000824	9	4.205	.0000003	.0000001
8	3.125	.0000625	.0000314	10	.080	.97012	.48554
8	3.380	.0000228	.0000114	10	.125	.94297	.47194
8	3.645	.0000079	.0000040	10	.180	.89941	.45014
8	3.920	.0000027	.0000014	10	.245	.83566	.41824
8	4.205	.0000009	.0000005	10	.320	.75048	.37561

k	ST_B / N_0	$P_E(k)$	$P_B(k)$	k	ST_B / N_0	$P_E(k)$	$P_B(k)$
10	.405	.64649	.32356	15	1.125	.05439	.02720
10	.500	.53048	.26550	15	1.280	.02440	.01220
10	.605	.41210	.20625	15	1.445	.00975	.00488
10	.720	.30156	.15093	15	1.620	.00348	.00174
10	.845	.20703	.10362	15	1.805	.00111	.0005537
10	.980	.13295	.06654	15	2.000	.0003105	.0001553
10	1.125	.07967	.03988	15	2.205	.0000790	.0000395
10	1.280	.04450	.02227	15	2.420	.0000180	.0000090
10	1.445	.02314	.01158	15	2.645	.0000038	.0000019
10	1.620	.01120	.00561	15	2.880	.0000007	.0000004
10	1.805	.00505	.00253	15	3.125	.0000002	.0000001
10	2.000	.00212	.00105	20	.080	.99872	.49936
10	2.205	.0008299	.0004154	20	.125	.99501	.49751
10	2.420	.0003035	.0001519	20	.180	.98381	.49191
10	2.645	.0001039	.0000520	20	.245	.95565	.47782
10	2.880	.0000332	.0000166	20	.320	.89752	.44876
10	3.125	.0000101	.0000051	20	.405	.79700	.39850
10	3.380	.0000029	.0000015	20	.500	.65349	.32675
10	3.645	.0000008	.0000004	20	.605	.48509	.24255
10	3.920	.0000003	.0000001	20	.720	.31896	.15948
15	.080	.99379	.49691	20	.845	.18320	.09160
15	.125	.98315	.49159	20	.980	.09051	.04525
15	.180	.95975	.47989	20	1.125	.03866	.01933
15	.245	.91499	.45751	20	1.280	.01405	.00703
15	.320	.84072	.42037	20	1.445	.00435	.00217
15	.405	.73359	.36681	20	1.620	.00117	.0005851
15	.500	.59891	.29946	20	1.805	.0002519	.0001259
15	.605	.45125	.22563	20	2.000	.0000483	.0000241
15	.720	.31035	.15518	20	2.205	.0000082	.0000041
15	.845	.19326	.09663	20	2.420	.0000013	.0000007
15	.980	.10830	.05415	20	2.645	.0000002	.0000001

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ КОДОВ

k	ST_B / N_0	$P_E (k)$	$P_B (k)$	k	ST_B / N_0	$P_E (k)$	$P_B (k)$
1	.080	.34458	.34458	1	6.480	.0001597	.0001597
1	.125	.30854	.30854	1	6.845	.0001082	.0001082
1	.180	.27425	.27425	1	7.220	.0000727	.0000727
1	.245	.24196	.24196	1	7.605	.0000484	.0000484
1	.320	.21185	.21185	1	8.405	.0000209	.0000209
1	.405	.18406	.18406	1	9.245	.0000087	.0000087
1	.500	.15865	.15865	1	10.125	.0000036	.0000036
1	.605	.13566	.13566	1	11.045	.0000015	.0000015
1	.720	.11507	.11507	1	12.005	.0000006	.0000006
1	.845	.09680	.09680	2	.080	.57042	.34458
1	.980	.08056	.08056	2	.125	.52188	.30854
1	1.125	.06681	.06681	2	.180	.47329	.27425
1	1.280	.05480	.05480	2	.245	.42538	.24196
1	1.445	.04457	.04457	2	.320	.37883	.21186
1	1.620	.03593	.03593	2	.405	.33424	.18406
1	1.805	.02872	.02872	2	.500	.29214	.15866
1	2.000	.02275	.02275	2	.605	.25293	.13567
1	2.205	.01787	.01787	2	.720	.21690	.11507
1	2.420	.01391	.01391	2	.845	.18423	.09680
1	2.645	.01073	.01073	2	.980	.15500	.08076
1	2.880	.00820	.00820	2	1.125	.12915	.06681
1	3.125	.00621	.00621	2	1.280	.10660	.05480
1	3.380	.00466	.00466	2	1.445	.08715	.04457
1	3.645	.00347	.00347	2	1.620	.07057	.03593
1	3.920	.00256	.00256	2	1.805	.05661	.02872
1	3.154	.00187	.00187	2	2.000	.04498	.02275
1	4.500	.00135	.00135	2	2.205	.03541	.01787
1	4.805	.0009689	.0009689	2	2.420	.02761	.01390
1	5.120	.0006882	.0006882	2	2.645	.02133	.01072
1	5.445	.0004843	.0004843	2	2.880	.01633	.00820
1	5.780	.0003377	.0003377	2	3.125	.01238	.00621
1	6.125	.0002333	.0002333	2	3.380	.00930	.00466

k	ST_B / N_0	$P_E(k)$	$P_B(k)$	k	ST_B / N_0	$P_E(k)$	$P_B(k)$
2	3.645	.00692	.00347	3	1.805	.04731	.02103
2	3.920	.00510	.00256	3	2.000	.03486	.01550
2	3.154	.00373	.00187	3	2.205	.02527	.01123
2	4.500	.00270	.00135	3	2.420	.01803	.00801
2	4.805	.00193	.0009689	3	2.645	.01265	.00562
2	5.120	.00137	.0006882	3	2.880	.00874	.00389
2	5.445	.0009669	.0004843	3	3.125	.00594	.00264
2	5.780	.0006739	.0003377	3	3.380	.00398	.00177
2	6.125	.0004654	.0002333	3	3.645	.00262	.00117
2	6.480	.0003184	.0001597	3	3.920	.00170	.0007558
2	6.845	.0002158	.0001082	3	4.205	.00109	.0004827
2	7.220	.0001449	.0000727	3	4.805	.0004231	.0001880
2	7.605	.0000964	.0000484	3	5.445	.0001551	.0000689
2	8.405	.0000415	.0000209	3	6.125	.0000536	.0000238
2	9.245	.0000172	.0000087	3	6.845	.0000175	.0000078
2	10.125	.0000069	.0000036	3	7.605	.0000054	.0000024
2	11.045	.0000027	.0000015	3	8.405	.0000016	.0000007
2	12.005	.0000011	.0000006	3	9.245	.0000005	.0000002
3	.080	.70486	.33456	3	10.125	.0000002	.0000001
3	.125	.65055	.30413	3	11.045	.0000001	.0000000
3	.180	.59320	.27398	3	12.005	.0000001	.0000000
3	.245	.53401	.24429	4	.080	.79185	.34612
3	.320	.47428	.21537	4	.125	.73688	.31993
3	.405	.41537	.18755	4	.180	.67553	.29195
3	.500	.35853	.16119	4	.245	.60920	.26248
3	.605	.30488	.13663	4	.320	.53976	.23210
3	.720	.25534	.11416	4	.405	.46931	.20155
3	.845	.21054	.09397	4	.500	.40005	.17166
3	.858	.17089	.07617	4	.605	.33403	.14326
3	1.125	.13651	.06079	4	.720	.27300	.11705
3	1.280	.10731	.04776	4	.845	.21828	.09357
3	1.445	.08301	.03693	4	.980	.17065	.07314
3	1.620	.06317	.02809	4	1.125	.13041	.05589

k	ST_B / N_0	$P_E (k)$	$P_B (k)$	k	ST_B / N_0	$P_E (k)$	$P_B (k)$
4	1.280	.09739	.04173	5	1.805	.02554	.01090
4	1.445	.07106	.03045	5	2.205	.00976	.00416
4	1.620	.05065	.02170	5	2.645	.00330	.0014098
4	1.805	.03527	.05511	5	3.125	.0009940	.0004241
4	2.000	.02400	.01028	5	3.645	.0002666	.0001137
4	2.205	.01595	.00683	5	4.205	.0000640	.0000273
4	2.420	.01036	.00444	5	4.805	.0000139	.0000059
4	2.645	.00658	.00281	5	5.445	.0000028	.0000012
4	3.125	.00248	.00106	5	6.125	.0000006	.0000002
4	3.645	.0008539	.0003660	5	6.845	.0000002	.0000001
4	4.205	.0002698	.0001156	5	7.605	.0000001	.0000000
4	4.805	.0000783	.0000336	5	8.405		
4	5.445	.0000210	.0000090	5	9.245		
4	6.125	.0000052	.0000023	5	10.125		
4	6.845	.0000013	.0000006	5	11.045		
4	7.605	.0000003	.0000001	5	12.005		
4	8.405	.0000001	.0000001	6	.080	.89275	.38458
4	9.245	.0000001	.0000000	6	.125	.84480	.36363
5	.080	.85116	.36520	6	.180	.78465	.33760
5	.125	.79879	.34189	6	.245	.71300	.30671
5	.180	.73687	.31494	6	.320	.63192	.27181
5	.245	.66666	.28470	6	.405	.54474	.23430
5	.320	.59029	.25198	6	.500	.45560	.19596
5	.405	.51056	.21789	6	.605	.36893	.15868
5	.500	.43065	.18377	6	.720	.28873	.12418
5	.605	.35375	.15094	6	.845	.21807	.09379
5	.720	.28265	.12060	6	.980	.15878	.06829
5	.845	.21945	.09363	6	1.125	.11136	.04790
5	.980	.16545	.07059	6	1.280	.07518	.03234
5	1.125	.12105	.05165	6	1.620	.03054	.01313
5	1.280	.08591	.03665	6	2.000	.01063	.00457
5	1.445	.05913	.02523	6	2.420	.00318	.00137
5	1.620	.03947	.01684	6	2.880	.0008199	.0003527

k	ST_B / N_0	$P_E (k)$	$P_B (k)$	k	ST_B / N_0	$P_E (k)$	$P_B (k)$
6	3.380	.0001831	.0000788	8	.500	.49648	.21892
6	3.920	.0000357	.0000154	8	.605	.39270	.17316
6	4.500	.0000062	.0000027	8	.720	.29637	.13068
6	5.120	.0000010	.0000004	8	.845	.21285	.09386
6	5.780	.0000002	.0000001	8	.980	.14519	.06402
6	6.480	.0000001	.0000000	8	1.125	.09393	.04142
7	.080	.92237	.40175	8	1.445	.03341	.01473
7	.125	.87966	.38305	8	1.805	.00955	.00421
7	.180	.82276	.35823	8	2.205	.00220	.0009684
7	.245	.75149	.32719	8	2.645	.0004089	.0001803
7	.320	.66750	.29062	8	3.125	.0000622	.0000274
7	.405	.57438	.25007	8	3.645	.0000079	.0000035
7	.500	.47718	.20776	8	4.205	.0000009	.0000004
7	.605	.38161	.16614	8	4.805	.0000002	.0000001
7	.720	.29305	.12759	8	5.445	.0000001	.0000000
7	.845	.21568	.09390	9	.080	.95900	.42790
7	.980	.15189	.06613	9	.125	.92699	.41362
7	1.280	.06574	.02862	9	.180	.87876	.39209
7	1.620	.02364	.01029	9	.245	.81176	.36220
7	2.000	.00706	.00307	9	.320	.72596	.32392
7	2.420	.00176	.0007641	9	.405	.62462	.27870
7	2.880	.0003655	.0001591	9	.500	.51413	.22940
7	3.380	.0000642	.0000280	9	.605	.40283	.17973
7	3.920	.0000096	.0000042	9	.720	.29919	.13350
7	4.500	.0000013	.0000006	9	.845	.20995	.09368
7	5.120	.0000002	.0000001	9	.980	.13885	.05195
7	5.780	.0000001	.0000000	9	1.125	.08640	.03855
8	.080	.94364	.41614	9	1.280	.05052	.02254
8	.125	.90637	.39968	9	1.620	.01430	.00638
8	.180	.85360	.37640	9	2.000	.00315	.00141
8	.245	.78402	.34571	9	2.420	.0005415	.0002416
8	.320	.69857	.30803	9	2.880	.0000736	.0000328
8	.405	.60078	.26491	9	3.380	.0000080	.0000036

k	ST_B / N_*	$P_E(k)$	$P_B(k)$	k	ST_B / N_*	$P_E(k)$	$P_B(k)$
9	3.920	.0000008	.0000003	15	.405	.73316	.34216
9	4.500	.0000001	.0000001	15	.500	.59939	.27973
9	5.120	.0000001	.0000000	15	.605	.45154	.21073
10	.080	.97013	.43741	15	.720	.30979	.14458
10	.125	.94295	.42516	15	.845	.19290	.09003
10	.180	.89938	.40551	15	.980	.10856	.05066
10	.245	.83567	.37679	15	1.125	.05466	.02551
10	.320	.75050	.33839	15	1.445	.00973	.00454
10	.405	.64645	.29147	15	1.805	.00111	.0005166
10	.500	.53034	.23912	15	2.205	.0000783	.0000365
10	.605	.41196	.18574	15	2.645	.0000038	.0000018
10	.720	.30151	.13594	15	3.125	.0000002	.0000001
10	.845	.20706	.09336	15	4.205	.0000001	.0000001
10	.980	.13299	.05996	20	.080	.99871	.47439
10	1.125	.07670	.03593	20	.125	.99400	.47262
10	1.445	.02312	.01043	20	.180	.98377	.46729
10	1.805	.00504	.00227	20	.245	.95552	.45387
10	2.205	.0008292	.0003738	20	.320	.89760	.42636
10	2.645	.0001038	.0000468	20	.405	.79526	.37775
10	3.125	.0000100	.0000045	20	.500	.65509	.31117
10	3.645	.0000008	.0000004	20	.605	.48475	.23025
10	4.202	.0000001	.0000001	20	.720	.31617	.15018
10	5.120	.0000001	.0000000	20	.845	.18277	.08682
15	.080	.99380	.46380	20	.980	.09154	.04348
15	.125	.98313	.45882	20	1.125	.03893	.01849
15	.180	.95970	.44789	20	1.805	.0002519	.0001196
15	.245	.91523	.42713	20	2.645	.0000002	.0000001
15	.320	.84049	.39225	20	3.645	.0000001	.0000001

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бычков С. И. и др. Космические радиотехнические комплексы. Изд-во «Советское радио», 1967.
2. Вудворт Ф. М. Теория вероятностей и теория информации с применениями в радиолокации. Изд-во «Советское радио», 1955.
3. Гуткин П. С. Теория оптимальных методов радиоприема при флюктуационных помехах. Госэнергоиздат, 1961.
4. Добрушин Р. Л. Передача информации по каналу с обратной связью. «Теория вероятностей и ее применение», т. III, вып. 4, 1958.
5. Добрушин Р. Л. Математические вопросы шенноновской теории оптимального кодирования информации. «Проблемы передачи информации», 1961, вып. 10.
6. Зюко А. Г. Помехоустойчивость и эффективность систем связи. Связьиздат, 1963.
7. Колмогоров А. Н. Теория передачи информации. Изд. АН СССР, 1956.
8. Котельников В. А. Теория потенциальной помехоустойчивости. Госэнергоиздат, 1956.
9. Мановцев А. П. Синтез оптимального алфавита сигналов. Труды Всесоюзной конференции по кодированию, 1965.
10. Мановцев А. П. Введение в цифровую радиотелеметрию. «Энергия», 1967.
11. Кириллов Н. Е., Мешковский К. А. Кодирование в технике связи. Изд-во «Связь», 1966.
12. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. Изд-во «Советское радио», т. 1, 1961, т. 2, 1962.
13. Петрович Н. Т., Камнев Е. Ф. Вопросы космической связи. Изд-во «Советское радио», 1965.

14. Пинскер М. С. Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов. Изд. АН СССР, 1960.
15. Сандерс. Сравнение эффективности некоторых систем связи. «Зарубежная радиоэлектроника», № 12, 1960.
16. Теплов Н. Л. Помехоустойчивость систем передачи дискретной информации. Изд-во «Связь», 1964.
17. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. Изд-во «Советское радио», 1966.
18. Файнштейн А. Основы теории информации ИИЛ, 1960.
19. Финк Л. М. Теория передачи дискретных сообщений. Изд-во «Советское радио», 1963.
20. Фалькович С. Е. Прием радиолокационных сигналов на фоне флюктуационных помех. Изд-во «Советское радио», 1961.
21. Харкевич А. А. Очерки общей теории связи. Гостехиздат, 1955.
22. Харкевич А. А. Борьба с помехами. Физматгиз, 1963.
23. Хвичин А. Я. Понятие энтропии в теории информации. «Успехи математических наук», 1953, вып. 3, стр. 3—20.
24. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. ИИЛ, 1963

ОГЛАВЛЕНИЕ

А. П. Мановцев. Вопросы теории космической связи	5
Предисловие	36
Глава 1. Введение в цифровую связь	38
1.1. Состояние техники цифровой связи	38
1.2. Статистическая теория связи, кодирование и теория переключа- тельных цепей	39
1.3. Основные принципы обнаружения сигналов и передачи инфор- мации	40
Ортогональность	40
Два этапа процесса связи	42
1.4. Псевдослучайные последовательности	45
Критерии, определяющие случайность и псевдослучайность по- следовательностей	45
Последовательности, вырабатываемые сдвигающими регистрами	46
1.5. Использование последовательностей, вырабатываемых сдвигаю- щими регистрами	49
Генераторы скрытных кодов. Шифровка	49
Генераторы эффективных кодов. Коды, исправляющие ошибки	50
Генераторы последовательностей с заданными свойствами и за- данным периодом	51
Математические модели. Генераторы случайных двоичных чисел	51
Преимущества сдвигающих регистров	52
Л и т е р а т у р а	54

Глава 2. Генерирование последовательностей с особыми свойствами	55
2.1. Введение	55
2.2. Определение логической функции обратной связи	56
2.3. Диаграммы состояний	59
2.4. Генерирование последовательностей с заданной периодичностью	61
2.5. Изменение фазы периодических последовательностей	65
2.6. Минимизация логических функций	67
2.7. Дополнительные замечания	70
Л и т е р а т у р а	71
Глава 3. Энергетические спектры и корреляционные функции	72
3.1. Введение	72
3.2. Периодические сигналы	73
3.3. Основные свойства автокорреляционных функций	75
3.4. Случайные сигналы	76
3.5. Линейная фильтрация случайных сигналов	80
3.6. Примеры определения автокорреляционных функций и энергетических спектров случайных сигналов	82
Л и т е р а т у р а	87
Глава 4. Коды с особыми корреляционными свойствами	88
4.1. Введение	88
4.2. Трансортгоналность и симплексные коды	89
4.3. Ортогональные и биортогональные коды	93
4.4. Последовательности с двузначной автокорреляционной функцией	94
4.5. Матрица Адамара	96
4.6. Блок-схемы Адамара	99
4.7. Разностные множества	101
4.8. Ограничения, накладываемые на коды	105
Л и т е р а т у р а	106
Глава 5. Модуляция псевдослучайными последовательностями	107
5.1. Введение	107
5.2. Корреляционные свойства двоичных видеосигналов	108
Псевдослучайные последовательности и видеосигналы	108
Статистическая независимость элементов последовательности и вероятность их появления	114
Корреляционные функции комбинированных последовательностей	116
5.3. Корреляционные функции и спектры	121
Псевдослучайные двоичные видеосигналы	121
Комбинированные видеосигналы	123
5.4. Модуляция несущей двоичным видеосигналом	125
Балансная модуляция	125
Фазовая модуляция	126
5.5. Преобразования сигналов в приемнике	127
Понятие о смешивании	127
Смешивание балансно-модулированных сигналов	127
Смешивание фазо-модулированных сигналов	129
Синхронное детектирование как частный случай смешивания	129
Л и т е р а т у р а	130
	269

Глава 6. Применение псевдослучайных последовательностей для измерения дальности	131
6.1. Проблема измерения дальности	131
6.2. Корреляторы и схемы слежения	133
Корреляторы и обнаружители	133
Слежение за задержкой принимаемого сигнала с использованием корреляторов постоянного тока	134
Слежение за задержкой принимаемого сигнала с использованием несущей или частоты синхронизации	135
Связь между частотой синхронизации и формой сигнала ошибки	136
6.3. Дальномерные коды	138
Простейший псевдослучайный код, смешанный с частотой синхронизации	138
Комбинированные дальномерные коды	139
Дальномерные коды, содержащие в качестве компоненты частоту синхронизации	142
Методы формирования кодов, содержащих частоту синхронизации	143
6.4. Приемники систем измерения дальности	144
Схема слежения за несущей принимаемого сигнала	144
Комбинированная схема слежения за несущей и дальномерным кодом	145
Эффективность приемников систем измерения дальности	146
6.5. Время обнаружения дальномерного кода	148
Обнаружение дальномерного кода по методу максимального правдоподобия	148
Однокомпонентные коды	148
Многокомпонентные коды	152
Время обнаружения кода при использовании последовательного коррелятора	153
Л и т е р а т у р а	153
Глава 7. Когерентная связь по непрерывному гауссовскому каналу	155
7.1. Кодирование при передаче информации	155
7.2. Оптимальное декодирование (метод максимального правдоподобия)	157
7.3. Вероятность ошибки при оптимальном декодировании сигналов произвольного типа	161
7.4. Полоса частот сигналов и выбор типа сигналов	164
7.5. Генерирование оптимальных двоичных кодов	167
7.6. Помехоустойчивость ортогональных кодированных сигналов	171
7.7. Помехоустойчивость трансортгональных кодов	174
7.8. Помехоустойчивость биортгональных кодов	175
7.9. Сравнение помехоустойчивости систем связи с кодированием и без кодирования сообщений	177
7.10. Техническая реализация декодера на элементах цифровой техники	181
7.11. Выводы	183
Л и т е р а т у р а	184
Глава 8. Методы синхронизации	185
8.1. Введение	185
8.2. Ортогональные групповые коды	189
8.3. Статистический метод синхронизации	191

8.4. Метод синхронизации, использующий коды без запятой	194
8.5. Коды без запятой с высокими значениями индексов	198
8.6. Нижние границы индексов кодов без запятой	200
8.7. Верхние границы индексов кодов без запятой	202
8.8. Асимптотическое поведение индекса p_x	207
8.9. Задержка синхронизации при использовании самосинхронизирующихся кодов	209
Литература	211
Приложение 1. О количестве ортогональных словарей в классе эквивалентных групп	212
Литература	215
Приложение 2. Формирование псевдослучайных последовательностей	216
Введение	216
Формирование последовательностей квадратичных вычетов	216
Формирование последовательностей с периодом, равным произведению простых чисел p и $p+2$	220
Формирование m -последовательностей	220
Литература	221
Приложение 3. Последовательности с заданным периодом	222
Приложение 4. Помехоустойчивость ортогональных и биортогональных кодов	254
Дополнительная литература	266

ЦИФРОВЫЕ МЕТОДЫ В
КОСМИЧЕСКОЙ СВЯЗИ

Редактор *Е. В. Комарова*
Художник *Г. Ф. Бурмистров*
Техн. редактор *Г. И. Шефер*
Корректор *М. Д. Чвялева*

Сдано в набор 16/XII 1968 г.
Подписано в печ. 10/III 1969 г.
Форм. бум. 70×90/16 17,0 печ. л.
19,89 усл.-п. л. 16,6 уч.-изд. л.
Тираж 3600 экз. Бумага № 1
Зак. изд. 13727. Цена 1 руб. 42 коп.
Издательство «Связь», Москва-центр,
Чистопрудный бульвар, 2.

Типография издательства «Связь» Комитета
по печати при Совете Министров СССР.
Москва-центр, ул. Кирова, 40. Зак. тип. 563

