

# ТЕРМОДИНАМИКА ГАЗОВ

Перевод с английского и немецкого под редакцией  
докт. техн. наук, проф. *В. С. Зуева*



ИЗДАТЕЛЬСТВО  
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»

Москва 1970

# КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ

Г. ГРЭД

В настоящей работе кинетическая теория газов излагается в прямой связи с теорией уравнения Больцмана. Рассматриваются только оригинальные уравнения Максвелла и Больцмана для классических точечных частиц и короткодействующих сил. При этом остаются в стороне вопросы в равной степени интересные, но относящиеся к другой области и возникающие при рассмотрении внутренних степеней свободы, квантовых взаимодействий, сил, обратно пропорциональных квадрату расстояния, и несовершенных газов. Специальный случай газа Кнудсена, т. е. свободно-молекулярное течение, лишь затрагивается главным образом в целях сравнения.

В гл. I дается критическое рассмотрение и сравнение двух способов описания разреженного газа: 1) через функцию распределения молекул и уравнение Больцмана и 2) через динамику частиц, представляющих собой системы из  $n$  тел, где  $n$  велико.

Решение уравнения Больцмана шло по двум направлениям. Первое направление связано с исследованием так называемых *нормальных* решений, во многих отношениях обладающих свойствами классической сплошной среды. Эта теория была разработана Гильбертом, Энскогом и Чепменом. Критический обзор этого направления вместе с изложением некоторых новых свойств таких решений дается в гл. IV. Проблема получения общих решений уравнения Больцмана рассматривалась с точки зрения математической теории существования в работах Карлемана, Вильда и Моргенштерна (обзор современного состояния дается в гл. III) и с помощью более практических методов разложения по Максвеллу — в работах Грэда, Ван Чана и Уленбека, Мотт—Смита, а также в работах Гросса, Джексона и Зиринга. Содержание этих работ изложено в гл. V.

Второе направление связано с именами Яффе, Розе, Келлера, Ван Чана и Уленбека. Оно основывается на итерации и разложении в окрестности свободно-молекулярного течения. Это направление только затрагивается, поскольку с помощью этого трудного метода пока получены только лишь начальные результаты.

Большое внимание уделяется выявлению взаимосвязи и внутреннего единства в этих, казалось бы, в корне различных методах кинетической теории.

## Глава I

### УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА И КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ

В этой главе рассматриваются два основных вопроса: 1) степень обоснованности уравнения Больцмана и 2) связь его с поведением газа, который подчиняется законам динамики частиц. В нашем рассмотрении

принципиальную роль играет предельный переход, при котором отношение средней длины свободного пробега к макроскопическим размерам остается фиксированным, в то время как газ становится все более и более разреженным. В пределе мы находим, что хотя один аспект межмолекулярных сил, а именно: несовершенство газа, исчезает, влияние столкновений на эволюцию газа во времени остается и определяется уравнением Больцмана. Подтверждается, что уравнение Больцмана становится более обоснованным по мере уменьшения плотности и что оно справедливо для произвольно больших отклонений от равновесия на средней длине свободного пробега и произвольно быстрых флуктуаций (быстрых по сравнению со средним временем между столкновениями частиц); лимитирующей длиной является диаметр столкновения, а лимитирующим отрезком времени — средняя продолжительность самого столкновения. Очень важным моментом является то, что уравнение Больцмана получается из динамики частиц без привнесения какой-либо «искусственной» случайности (мы разграничиваем понятие *априорной* вероятности, которая относится только к повторяемости опытов и является полностью детерминированной, и таких физически не обоснованных понятий, как марковские процессы, статистическая независимость и т. д.). Найдено, что строго детерминированные системы при большом числе степеней свободы обладают свойством, напоминающим хаотичность. Мы можем сказать, что обратимая система будет иногда аппроксимировать поведение необратимой системы с любой степенью точности.

Многие парадоксы, а также весьма тонкие вопросы, которыми изобилует кинетическая теория, удастся упростить, и даже снять, когда мы интерпретируем функцию распределения молекул как математическое ожидание, а не как физическую плотность числа частиц. В частности, нет достаточных оснований для сглаживания или введения дискретности (как по времени, так и по пространству) одночастичной функции распределения.

В нашей трактовке  $H$ -функция Больцмана является достаточно гладкой по времени функцией, которая с большой вероятностью стремится к постоянной величине (своему минимуму) на неограниченном отрезке времени даже для конечной системы из  $n$  частиц.

В этой статье автор, не стремясь к полному изложению всего математического аппарата, старался, насколько это возможно, не уходить в сторону от математически тонких вопросов.

## ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ

### §1. УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ

Будем характеризовать местонахождение частицы вектором  $x$  или  $x^i$ ,  $i=1, 2, 3$ , а ее скорость — вектором  $\xi$  или  $\xi^i$ . В системе из  $n$  частиц мы различаем отдельные частицы с помощью индексации  $x_1, \dots, x_n$  или  $x^i_n$ , если это необходимо, и соответственно обозначаем скорости частиц через  $\xi_r$  или  $\xi_r^i$ ;  $6n$ -мерное фазовое пространство с представляющей точкой  $(x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n) \equiv Z$  обозначим через  $\Gamma$ , а  $6$ -мерное фазовое пространство с представляющей точкой  $(x, \xi) \equiv z$  — через  $\gamma$  или  $\gamma_r^*$ , если мы имеем в виду фазовое пространство именно  $r$ -ой частицы с координатами  $(x_r, \xi_r) \equiv z_r$ . Очевидно, что  $Z = (z_1, \dots, z_n)$ . Обозначим сокращенно через  $\int \dots dx$ ,  $\int \dots d\xi$ ,  $\int \dots dz_1$ ,  $\int \dots dZ$  операции интегрирования, соответственно, по  $3$ -мерному,  $6$ -мерному и  $6n$ -мерному пространствам.

\* Это обозначение отличается от более привычного обозначения  $\mu$  — для  $6$ -мерного пространства и  $\gamma$  — для  $6n$ -мерного.

Движение системы из  $n$  частиц подчиняется уравнению

$$m_r \frac{d^2 x_r}{dt^2} = X_r(Z). \quad (1.1)$$

Примем для простоты, что все частицы идентичны, в частности  $m_r = m$ , и что внешние силы отсутствуют, за исключением неявных сил, посредством которых газ остается в пределах сосуда.

Положим

$$X_r(Z) = \sum_{s=1}^n X_{rs}(z_r, z_s), \quad (1.2)$$

$$\text{где} \quad X_{rs}(z_r, z_s) = X_{12}(z_r, z_s), \quad (1.3)$$

$$\left. \begin{aligned} X_{12}(z_1, z_2) &= \frac{r}{r} \varphi'(r); \\ r &= x_2 - x_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Другими словами, силы являются производными от потенциала взаимодействия  $\varphi$  двух частиц. Здесь как обычно, через  $r$  обозначается абсолютная величина вектора  $r$ .

Обозначим через  $F_n(Z)$  плотность вероятности, определенную на  $\Gamma$ , при этом  $F_n \geq 0$  и  $\int F_n dZ = 1$ . Здесь неявным образом предполагается, что функция распределения  $F_n(Z)$  соответствует частоте появления микросостояния  $Z$  при многократном повторении некоего эксперимента (смысл такого введения вероятности будет обсуждаться в § 9).  $F_n$  по определению есть симметричная функция относительно перестановок  $n$  частиц, т. е.  $F_n(z_1, \dots, z_n)$  есть симметричная функция  $n$  групп переменных.

Назовем фазовой функцией функцию  $\psi(Z)$ , определенную в пространстве  $\Gamma$ . Всякая наблюдаемая величина может быть выражена через фазовую функцию; ее значение, конечно, определено, если мы знаем местонахождение и скорости всех частиц. Ожидаемое значение наблюдаемой функции  $\psi$  есть

$$\bar{\psi}(t) = \int \psi(Z) F_n(Z, t) dZ. \quad (1.5)$$

Функция распределения  $F_n$  позволяет вычислить не только ожидаемое значение  $\psi$ , но и полное распределение вероятности для  $\psi$ . Ибо если определить  $\psi_a(Z)$  как функцию, равную  $\psi$  при  $\psi \leq a$  и нулю в противном случае, то  $\psi_a$ , рассматриваемая как функция от параметра  $a$ , есть в точности интегральная функция распределения для значений, принимаемых функцией  $\psi$ .

Уравнения движения (1.1), записанные в форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_r}{dt} &= \xi_r; \\ \frac{d\xi_r}{dt} &= \frac{1}{m} X_r, \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

геометрически можно интерпретировать как уравнения, определяющие перемещение (поток) в фазовом пространстве  $\Gamma$ ; последовательность состояний  $Z$  представляется траекторией  $Z(t)$ . Вообще говоря\*\*, через каждую точку  $Z$  проходит одна траектория. В этом случае эволюция

\* Здесь как обычно через  $r$  обозначается абсолютная величина вектора  $r$ .

\*\* Положения статического равновесия являются исключениями.

плотности вероятности во времени, т. е. поведение функции  $F_n(Z, t)$ , становится детерминированной сразу же, как только задается начальное распределение. В самом деле, если мы наблюдаем систему в начальный момент времени в состоянии  $Z(0)$ , то мы найдем ее, конечно, в состоянии  $Z(t)$  в момент времени  $t$ . Более того, если мы знаем, что  $Z$  находится где-то внутри области  $D_0$  при  $t=0$ , то в момент времени  $t$  мы непременно обнаружим  $Z(t)$  в  $D_t$ , где  $D_t$  — область, в которую переходит  $D_0$  в процессе движения. Отсюда мы приходим к закону сохранения вероятности, а именно:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} F_n(Z, t) dZ = 0. \quad (1.7)$$

Полная вероятность, относящаяся к любой области, которая переносится потоком в фазовом пространстве, остается постоянной во времени. Дифференциальная форма закона сохранения (1.7) есть

$$\frac{\partial F_n}{\partial t} + \sum_{r=1}^n \frac{\partial}{\partial z_r} \cdot \left( \frac{dz_r}{dt} F_n \right) = 0. \quad (1.8)$$

Здесь  $dz_r/dt$  есть скорость потока, а точка ( $\cdot$ ) означает суммирование по шести компонентам  $z_r$  и  $dz_r/dt$ . Выражая уравнение (1.8) через  $x_r$  и  $\xi_r$ , мы получаем уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial F_n}{\partial t} + \sum_{r=1}^n \xi_r \cdot \frac{\partial F_n}{\partial x_r} + \frac{1}{m} \sum_{r=1}^n X_r \cdot \frac{\partial F_n}{\partial \xi_r} = 0. \quad (1.9)$$

Здесь точки обозначают суммы по трем составляющим различных векторов. Это дифференциальное уравнение в частных производных показывает, что функция  $F_n$  постоянна на каждой кривой  $Z(t)$ , являющейся траекторией движения системы. Такое свойство плотности вероятности  $F$  справедливо для любой системы Гамильтона. Действительно, хорошо известно, что для систем Гамильтона течение в фазовом пространстве является несжимаемым, а это и означает, что во всяком элементе движущейся среды плотность  $F_n$  сохраняется постоянной во времени.

Вдоль траектории  $Z(t)$  постоянной остается не только  $F_n$ , но и всякая функция от  $F_n$ . Это справедливо, например, для функции  $h(F_n) = -F_n \log F_n$ . Из несжимаемости потока следует, что  $\int h dZ$ , где интегрирование производится по всему пространству  $\Gamma$ , не зависит от времени. Обозначим величину этого интеграла через  $H_\Gamma$  (предполагая, что интеграл существует):

$$H_\Gamma(t) \equiv \int F_n(Z, t) \log F_n(Z, t) dZ \quad (1.10)$$

и сформулируем теорему

$$H_\Gamma = \text{const}. \quad (1.11)$$

Смысл этой теоремы будет подробно разобран ниже.

## § 2. РЕДУЦИРОВАННЫЕ И УСЕЧЕННЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Сокращенные функции, или функции распределения *пониженного порядка*, определяются следующим образом:

$$F_1(z_1) = \int F_n(z_1, \dots, z_n) dz_2, \dots, dz_n; \quad (2.1)$$

$$F_r(z_1, \dots, z_r) = \int F_n(z_1, \dots, z_n) dz_{r+1}, \dots, dz_n. \quad (2.2)$$

Вследствие предполагаемой симметрии функции  $F_n$  функции  $F_r$  будут симметричны по своим  $r$  аргументам. Более того, вид функции  $F_r$  не зависит от конкретного выбора  $r$  молекул. Все функции  $F_r$  нормализованы, т. е.

$$\int F_r(z_1, \dots, z_r) dz_1, \dots, dz_r = 1.$$

Физический смысл функции  $F_1$  заключается в том, что  $F_1(z_1) dz_1$  есть вероятность пребывания молекулы 1 в состоянии  $dz_1$  около точки  $z_1$ . Легко показать\*, что  $nF_1(z) dz$  есть математическое ожидание числа молекул с координатами внутри области  $dz$  около точки  $z$ . Несколько менее точно функцию  $nF_1(z)$  можно трактовать как плотность молекул в фазовом пространстве  $\gamma$ . Аналогичным образом,  $nmF_1 dz$  есть математическое ожидание массы, находящейся внутри  $dz$ , так что

$$f(z) \equiv nmF_1(z) \quad (2.3)$$

можно рассматривать как *плотность массы* в пространстве  $\gamma$ .

Для дальнейшего анализа удобно ввести усеченные функции распределения. Они определяются через параметр  $\sigma$ , который обладает размерностью длины и, как можно полагать, имеет порядок величины молекулярного диаметра. Точный выбор значения  $\sigma$  будет сделан позже. Зафиксируем вектор  $x_1$ , т. е. местонахождение молекулы 1. Определим подобласть  $D_r$  пространства  $\gamma_r$  неравенством

$$|x_r - x_1| \geq \sigma, \quad (\text{для всех } \xi_r). \quad (2.4)$$

$D_r$  — содержит все состояния молекулы  $r$ , при которых она удалена от молекулы 1 на расстояние, превышающее  $\sigma$ .  $6(n-1)$ -мерная область  $D$  определяется как произведение  $D_2 \times D_3 \times \dots \times D_n$ , т. е.  $D$  содержит все состояния молекул 2, ...,  $n$ , при которых ни одна из них не приближается к молекуле 1 ближе, чем на расстояние  $\sigma$ . Усеченное распределение  $F_1^\sigma$  определяется соотношением

$$F_1^\sigma(z_1) \equiv \int_D F_n(z_1, \dots, z_n) dz_2, \dots, dz_n. \quad (2.5)$$

Данная функция есть вероятность непопадания молекул в окрестность молекулы 1 радиусом  $\sigma$ , когда молекула 1 находится в состоянии  $z_1$ . Другое выражение для  $F_1^\sigma$  имеет вид

$$F_1^\sigma(z_1) = F_1(z_1) - (n-1) \int_{\bar{D}_2} F_2(z_1, z_2) dz_2 + \frac{1}{2} (n-1)(n-2) \times \\ \times \int_{\bar{D}_2 \times \bar{D}_3} F_3(z_1, z_2, z_3) dz_2 dz_3 - \dots, \quad (2.6)$$

где  $\bar{D}_r$  есть область, дополнительная к  $D_r$ ; она содержит в себе те  $z_r$ , которые удовлетворяют неравенству  $|x_r - x_1| < \sigma$ . Как следует из равенства (2.6),  $F_1^\sigma$  аппроксимирует  $F_1$ , если объем  $n\sigma^3$ , занятый частицами, мал по сравнению с физическим объемом, в котором заключен весь газ.

\* Определим фазовую функцию  $\varphi_D(Z)$  как число координат  $x, \dots, x_n$ , которые лежат в заданной области  $D$  пространства  $\gamma$ . Элементарные вычисления дают

$$\bar{\varphi}_D = \int_D nF_1 dz_1.$$

Так же, как и раньше, мы можем интерпретировать  $nF_1^\sigma(z)dz$  как математическое ожидание числа молекул, которые в непосредственной близости около себя не имеют соседних молекул (на расстоянии  $\sigma$ ), и

$$j^\sigma(z) \equiv nmF_1^\sigma(z) \quad (2.7)$$

как плотность массы в пространстве  $\gamma$  тех молекул, которые не имеют в тесном соседстве с собой других молекул.

Усеченная функция следующего порядка имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} F_2^\sigma(z_1, z_2) &\equiv \int_{D'} F_n(z_1, \dots, z_n) dz_3, \dots, dz_n; \\ D' &= D_3 \times D_4 \times \dots \times D_n. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Следует заметить, что  $F_2^\sigma$  несимметрична по своим аргументам  $z_1$  и  $z_2$ , поскольку область интегрирования связана только с  $x_1$  и не связана с  $x_2$ .

### § 3. РЕДУЦИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения, выражающие эволюцию во времени любой из функций распределения, описанных в § 2, могут быть получены путем интегрирования уравнения Лиувилля по соответствующим переменным. Идя таким путем, мы поступаем чисто формально и предполагаем, что все интегралы и производные, которые при этом появляются, существуют и что подынтегральные функции ведут себя достаточно хорошо, так что применимы обычные правила дифференцирования интеграла по параметру. После интегрирования по частям, а также интегрирования производных от различных функций, будут появляться граничные члены, т. е. члены, учитывающие условия на границах области интегрирования. Мы предполагаем, что все функции распределения таковы, что они быстро стремятся к нулю при больших  $\xi$  и тождественно равны нулю при больших  $x$  (т. е. вне физического объема, занимаемого газом). Поэтому граничные члены пропадут.

Проинтегрируем вначале уравнение Лиувилля (1.9) по всем переменным, кроме  $z_1$ :

$$\int \left\{ \frac{\partial F_n}{\partial t} + \sum_{r=1}^n \frac{\partial}{\partial x_r} \cdot (\xi_r F_n) + \frac{1}{m} \sum_{r=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_r} \cdot (X_r F_n) \right\} dz_2 \dots dz_n = 0.$$

В члене с частной производной по времени перенесем местами операции дифференцирования и интегрирования. Это даст член  $\partial F_1 / \partial t$ . В оставшемся выражении все члены под знаком суммы, за исключением членов с  $r=1$ , пропадают как граничные члены. Операции  $\partial / \partial x_1$  и  $\partial / \partial \xi_1$  можно вынести из-под знака интеграла, и мы получаем:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \xi_1 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \cdot \int X_1 F_n dz_2 \dots dz_n = 0.$$

Подставляя сюда  $X_1 = \sum_s X_{1s}$  и используя симметричность  $F_n$ , получаем

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \xi_1 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{n-1}{m} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \cdot \int X_{12} F_2(z_1, z_2) dz_2 = 0. \quad (3.1)$$

Точно таким же образом, интегрируя по  $z_{r+1}, \dots, z_n$ , найдем уравнение для  $\partial F_r / \partial t$ . Из уравнения

$$\int \left[ \frac{\partial F_n}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial x_s} \cdot (\xi_s F_n) + \frac{1}{m} \sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_s} \cdot (X_s F_n) \right] dz_{r+1} \dots dz_n = 0$$

находим

$$\frac{\partial F_r}{\partial t} + \sum_{s=1}^r \xi_s \cdot \frac{\partial F_r}{\partial x_s} + \frac{1}{m} \sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_s} \cdot \int X_s F_n dz_{r+1} \dots dz_n = 0$$

и затем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_r}{\partial t} + \sum_{s=1}^r \xi_s \cdot \frac{\partial F}{\partial x_s} + \frac{1}{m} \sum_{s,k=1}^r X_{sk} \cdot \frac{\partial F_r}{\partial \xi_s} + \frac{n-r}{m} \sum_{s=1}^r \frac{\partial}{\partial \xi_s} \times \\ \times \int X_{12}(z_s, z_{r+1}) F_{r+1}(z_1 \dots z_{r+1}) dz_{r+1} = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Остановимся на некоторых особенностях полученных уравнений. Прежде всего, уравнение для  $F_r$  не является дифференциальным уравнением в том же смысле, что и уравнение Лиувилля, так как в нем фигурирует не только  $F_r$ , но и  $F_{r+1}$ . Это означает, что уравнение для  $F_r$  само по себе не определяет эволюцию  $F_r(t)$ . То же самое относится и к системе из  $r$  уравнений для  $F_1, \dots, F_r$ . Действительно,  $F_n(t)$  можно найти однозначно, пользуясь только  $F_n(0)$  и уравнением Лиувилля. Начальное же распределение  $F_r$  не определяет  $F_n(0)$ . Мы могли бы надеяться определить  $F_r(t)$  по  $F_r(0)$  только в том случае, если по каким-либо причинам движение  $r$  частиц не будет зависеть от движения остальных частиц. Специфичность уравнения (3.2) для  $F_r$  заключается в том, что оно представляет собой уравнение Лиувилля для  $r$  частиц, к которому добавляются члены, учитывающие влияние остальных частиц через типовую  $(r+1)$ -ую частицу. Эти замечания указывают на принципиальное отличие уравнения (3.1) от уравнения Больцмана, которое позволяет определить  $F_1(t)$  по  $F_1(0)$  (см. гл. III).

Выкладки при получении уравнения для усеченного распределения  $F_1^\sigma$  несколько усложняются из-за того, что переменная  $x_1$  появляется в пределах интегрирования, а это не позволяет произвести непосредственную перестановку операций интегрирования и дифференцирования. Далее, мы используем следующие элементарные трехмерные тождества:

$$\int_{|y-x|>\sigma} \frac{\partial}{\partial y} \cdot A(x, y) dy = \int_{|y-x|<\sigma} \operatorname{div} A dy = - \oint_{|y-x|=\sigma} A \cdot dS; \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \int_{|y-x|>\sigma} A(x, y) dy = \int_{|y-x|>\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \cdot A(x, y) dy - \oint_{|y-x|=\sigma} A \cdot dS. \quad (3.4)$$

Здесь выражение (3.3) есть формула Гаусса, а соотношение (3.4) легко проверить. Заметим, что положительной считается внешняя нормаль к области  $|y-x|<\sigma$ . Интегрируя теперь уравнение Лиувилля\* по области  $D$ , определенной в § 2:

$$\int_D \left[ \frac{\partial F_n}{\partial t} + \sum_{r=1}^n \frac{\partial}{\partial x_r} \cdot (\xi_r F_n) + \frac{1}{m} \sum_{r=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_r} \cdot (X_r F_n) \right] = 0,$$

\* Мы опускаем символы дифференциалов, если область интегрирования указана явно.

получаем

$$\frac{\partial F_1^\sigma}{\partial t} + \sum_{r=1}^n \int_D \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\xi_r F_n) + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \cdot \int_D X_1 F_n = 0.$$

Обозначим через  $S_r$  сферу  $|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_1| = \sigma$ ; тогда, используя формулы (3.3), (3.4) и определения (2.5), (2.8), имеем

$$\int_D \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot (\xi_1 F_n) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot (\xi_1 F_1^\sigma) + \sum_{r=2}^n \oint_{S_r} F_2^\sigma(z_1, z_r) \xi_1 \cdot dS d\xi_2$$

и

$$\sum_{r=2}^n \int_D \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_r} \cdot (\xi_r F_n) = - \sum_{r=2}^n \oint_{S_r} F_2^\sigma(z_1, z_r) \xi_r \cdot dS d\xi_2.$$

Кроме того:

$$\int_D X_1 F_n = \sum_{r=2}^n \int_D X_{12}(z_1, z_r) F_n = (n-1) \int_{D_2} X_{12}(z_1, z_2) F_2^\sigma(z_1, z_2) dz_2.$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1^\sigma}{\partial t} + \xi_1 \cdot \frac{\partial F_1^\sigma}{\partial \mathbf{x}} + (n-1) \oint_{S_2} F_2^\sigma(\xi_1 - \xi_2) \cdot dS d\xi_2 + \\ + \frac{n-1}{m} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \cdot \int_{D_2} X_{12} F_2^\sigma dz_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В первом интеграле интегрирование ведется по  $\mathbf{x}_2$  по сфере  $|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| = \sigma$ , в то время как во втором — по области  $|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| > \sigma$ ; интегрирование по  $\xi_2$  в обоих интегралах проводится по всем возможным значениям этой переменной.

Уравнение (3.5) имеет очень простой физический смысл в специальном случае, когда

$$X_{12} = 0 \text{ при } |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| > \tau, \quad (3.6)$$

т. е. в случае межмолекулярных сил, действующих только на конечном расстоянии. Здесь уравнение (3.5) имеет вид

$$\frac{\partial F_1^\sigma}{\partial t} + \xi_1 \cdot \frac{\partial F_1^\sigma}{\partial \mathbf{x}_1} + (n-1) \oint_{S_2} F_2^\sigma(\xi_1 - \xi_2) dS d\xi_2 = 0, \quad (3.7)$$

откуда следует, что число свободных частиц (т. е. не имеющих поблизости от себя других частиц) может измениться только за счет убывания пары частиц, когда они попадают в сферу взаимного влияния, или же в результате появления новой пары частиц, когда они выходят из этой сферы. Этим уравнение (3.7) отличается от уравнения для  $F_1$ , которое показывает непрерывное изменение числа частиц в заданном состоянии при непрерывном влиянии сил. Это свойство уравнения для  $F_1^\sigma$  (скорость изменения  $F_1^\sigma$  определяется произошедшими столкновениями, а не непрерывно меняющимися молекулярными состояниями) соответствует уравнению Больцмана. Если нет сил, действующих только на конечных расстояниях, то дополнительный член в выражении (3.5) можно интерпретировать как поправочный член, который включает в себя эффект

касательных столкновений. Конечно, соотношение (3.7) не является определяющим уравнением для  $F_1^\sigma$ , поскольку оно содержит еще и  $F_2^\sigma$ .

Еще большего формального сходства между уравнением (3.7) и уравнением Больцмана можно добиться путем простой замены переменных. В качестве параметрической области для интегрирования по сфере  $S_2$  введем диаметрально плоскость сферы, перпендикулярную к направлению относительной скорости:

$$V \equiv \xi_2 - \xi_1. \quad (3.8)$$

Введем полярные координаты  $(r, \varepsilon)$  в этой плоскости  $0 < r < \sigma$ ,  $0 < \varepsilon < 2\pi$  и запишем выражение для элемента площади в виде

$$d\omega = r dr d\varepsilon, \quad (3.9)$$

где  $\varepsilon$  отсчитывается от произвольной оси\*.

Необходимо различать две полусферы:

$$\left. \begin{aligned} S_2^+, \quad V \cdot dS > 0; \\ S_2^-, \quad V \cdot dS < 0; \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

$S_2^+$  относится к удаляющимся частицам,  $S_2^-$  — к приближающимся. Точку на  $S_2^+$ , которая проектируется в точку  $(r, \varepsilon)$ , мы обозначаем через  $\mathbf{x}_2^+(r, \varepsilon)$  и, соответственно, точку на  $S_2^-$  как  $\mathbf{x}_2^-(r, \varepsilon)$ . Имеем\*\*

$$\left. \begin{aligned} (\xi_1 - \xi_2) \cdot dS = -V d\omega \text{ на } S_2^+; \\ (\xi_1 - \xi_2) \cdot dS = V d\omega \text{ на } S_2^-. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

В этих переменных уравнение (3.7) принимает вид

$$\frac{\partial F_1^\sigma}{\partial t} + \xi_1 \cdot \frac{\partial F_1^\sigma}{\partial \mathbf{x}_1} = (n-1) \int [F_2^\sigma(z_1, z_2^+) - F_2^\sigma(z_1, z_2^-)] V d\omega d\xi_2; \quad (3.12)$$

Аргументы  $z_2^+$  и  $z_2^-$  есть соответственно  $(\xi_2, \mathbf{x}_2^+)$  и  $(\xi_2, \mathbf{x}_2^-)$ . Поверхностный интеграл в выражении (3.5) может быть преобразован точно таким же путем.

## СПЕЦИФИЧЕСКИЕ ЧЕРТЫ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

### § 4. УРОВЕНЬ ОПИСАНИЯ

Наиболее характерной чертой уравнения Больцмана является, по видимому, то, что оно составлено для функции распределения  $F_1$  только одной частицы. В связи с этим его необходимо сравнить, с одной стороны, с уравнением Лиувилля, которое описывает поведение функции  $F_n$ , и, с другой стороны, — с уравнениями гидродинамики, дающими локальное термодинамическое описание. По степени подробности описания состояния системы функция распределения одной частицы стоит между термодинамическим описанием и описанием с помощью функции распределения для  $n$  частиц. Возникает вопрос, обязательно ли мы проигрываем в информации, переходя к менее детальному описанию, или иначе может ли быть излишней та информация, которой мы пренебрегаем. Ответ на этот вопрос состоит в том, что для некоторых предельных случаев описание на относительно низком уровне может быть столь же исчерпывающим, как и более детальное.

Простейший пример этой нечувствительности к детальности описания состояния имеется в равновесной термодинамике. Известно, что все

\* См. рис. 6.

\*\* См. примечание на стр. 7.

равновесные свойства однокомпонентных веществ определяются только двумя параметрами — энергией и объемом. Это можно показать математически вполне строго, но только для систем, размер которых стремится к бесконечности [65], [25].

Другим, физически более наглядным примером является газ *Кнудсена*, именно газ, настолько разреженный, что межмолекулярными силами в нем можно пренебречь. Если чисто формально опустить в выражении (3.1) член с межмолекулярными силами, то мы получим уравнение Лиувилля для одной частицы, т. е. для функции  $F_1$ . Это означает, что в данном случае состояние  $F_1(t)$  полностью определяется заданным начальным распределением  $F_1(0)$ .

Между двумя изложенными выше примерами имеется существенное различие. В первом примере термодинамическое описание является полным в том смысле, что знание энергии и объема системы позволяет найти распределение  $F_r$  для числа частиц  $r$ , малого по сравнению с  $n$  (хотя практическое вычисление  $F_r$  связано с огромными трудностями). Напротив, во втором примере знание  $F_1$  не позволяет определить не только  $F_r$ , но и даже  $F_2$ . Тем не менее, если удовлетвориться некоторым не совсем полным описанием состояния, то это описание будет замкнутым, т. е. не требующим никаких дополнительных замыкающих уравнений.

Как и газ Кнудсена, уравнение Больцмана получается с помощью предельного перехода. Для него (подробно см. § 7) найдено, что межмолекулярные силы сохраняют конечное влияние на эволюцию системы во времени (в виде члена, учитывающего столкновение), но их влияние как межмолекулярной потенциальной энергии на уравнение состояния и на некинетические члены напряжений или тепловых потоков пренебрежимо мало. Газ Больцмана поэтому является совершенным газом, отличающимся, однако, от газа Кнудсена.

Описание через  $F_1$  становится замкнутым следующим образом. Заданному начальному распределению  $F_1(0)$  соответствует целый класс совместимых распределений  $n$  частиц, например, совокупность функций  $\{F_n(0)\}$ . Каждому  $F_n(0)$  соответствует единственное решение уравнения Лиувилля в виде  $F_n(t)$ . Из каждого распределения  $F_n(t)$  распределение  $F_1(t)$  получается интегрированием. Поэтому имеется класс  $\{F_1(t)\}$  функций, которые переходят в одну и ту же заданную функцию  $F_1(0)$  при  $t=0$ . В результате предельного перехода класс функций  $\{F_1(t)\}$  сходится (в некотором смысле) к *одной и той же* функции  $F_1(t)$ , которая является решением уравнения Больцмана.

Способ, с помощью которого в этом пределе удастся отделить  $F_1$  от  $F_2, \dots, F_n$ , является более тонким, чем в обоих вышеприведенных примерах. Как и в термодинамическом случае,  $F_1$  не определяет все распределения  $F_2, \dots, F_n$ . Тем не менее, эти распределения нельзя рассматривать и как не зависящие от  $F_1$ . Дело в том, что хотя распределения наивысшего порядка  $F_n, F_{n-1}, \dots$  и сохраняют свою индивидуальность, однако, если рассматривать эту последовательность с другого конца, то  $F_2, F_3$  и последующие распределения более высокого порядка становятся зависимыми от  $F_1$  при  $n \rightarrow \infty$ . Заметим, попутно, что зависимость  $F_2$  от  $F_1$  (подробнее см. § 11) является весьма своеобразной.

## § 5. НЕОБРАТИМОСТЬ

Второй характерной чертой уравнения Больцмана является точный способ доказательства необратимости через  $H$  — функцию Больцмана, которая определяется соотношением

$$H_T = \int F_1 \log F_1 dz. \quad (5.1)$$

Индекс  $\gamma$  вводится здесь для отличия этой функции от функции  $H_{\Gamma}$ , определенной соотношением (1.10) через  $n$  — частичное распределение. Функции  $H_{\Gamma}$  и  $H_{\gamma}$  связаны неравенством\*

$$H_{\Gamma} \geq nH_{\gamma}. \quad (5.2)$$

При этом знак равенства имеет место в том и только в том случае, если  $F_n$  разлагается в произведение

$$F_n(Z) = F_1(z_1)F_1(z_2) \dots F_1(z_n). \quad (5.3)$$

Напомним, что  $H_{\Gamma}$ , являясь решением уравнения Лиувилля, сохраняет постоянное значение во времени, т. е. не меняется в процессе движения системы. Никаких простых свойств функции  $H_{\gamma}$  за исключением того, что она не является тождественной константой, получить нельзя, если находить эту функцию из уравнения Лиувилля. С другой стороны, если  $H_{\gamma}(t)$  определяется посредством уравнения Больцмана, то легко показать, что  $H_{\gamma}(t)$  есть функция, монотонно убывающая со временем (см. гл. II). Обращаясь к упомянутому в предыдущем параграфе предельному процессу, отметим, что поскольку  $F_1(t)$ , определяемое из уравнения Лиувилля, аппроксимирует решение уравнения Больцмана, то и  $H_{\gamma}(t)$  для решения уравнения Лиувилля, по крайней мере в некотором приближении, является монотонно убывающей функцией. Допустим, для определенности, что мы выбираем начальные  $F_1(0)$  и  $F_n(0)$  такими, что они удовлетворяют произведению (5.3). В начальный момент времени имеем  $H_{\Gamma} = nH_{\gamma}$ . Тогда в любой последующий момент времени будем иметь  $H_{\Gamma} = \text{const}$  и  $H_{\Gamma} \geq nH_{\gamma}$ . Поэтому из совершенно элементарных соображений следует, что  $H_{\gamma}$  может только уменьшаться по сравнению со своим начальным значением. Очевидно, что это утверждение является более слабым по сравнению с высказанным выше. На более общих свойствах функции  $H_{\gamma}$  мы остановимся позднее.

Двойственная природа решений уравнения Лиувилля, с одной стороны, — обратимость (примером чего служит  $H_{\Gamma} = \text{const}$ ), а, с другой стороны, — необратимость ( $H_{\gamma}$  в первом приближении монотонно убывает) будет подробно разобрана в § 12. Заметим, что необратимое описание является более точным, но оно связано с привлечением весьма тонкого математического аппарата.

## § 6. ОТКЛОНЕНИЕ ОТ РАВНОВЕСИЯ

Нетрудно убедиться, что для уравнения Больцмана характерным линейным размером служит средняя длина свободного пробега, а характерным отрезком времени является время между столкновениями молекул. Этим уравнение Больцмана резко отличается от почти всех других уравнений математической физики, описывающих необратимое поведение среды на расстояниях, которые должны быть большими по сравнению со средней длиной свободного пробега, и отрезках времени, которые должны быть большими по сравнению со средним временем между столкновениями. Это отличие уравнения Больцмана проявляется также и в том, что, например, обычная термодинамика необратимых процессов имеет дело с малыми (линейными) отклонениями от равновесия, тогда как уравнение Больцмана допускает большие (нелинейные) отклонения. Поэтому следует строго различать нелинейность уравнений гидродинамики и линейность механизма необратимости (например, пропорциональность теплового потока температурному градиенту).

Уравнение Больцмана применяется главным образом в случаях, когда требуется описать существенные изменения свойства газового

\* Доказательство элементарно, подобные неравенства даны в работе [60].

потока на средней длине свободного пробега или на отрезке времени порядка среднего времени между столкновениями. Нет оснований сомневаться в его достоверности для ударных волн произвольной интенсивности или для звуковых волн произвольной частоты; несомненно, что использование этого уравнения представляет единственно возможный подход к таким задачам. С этой точки зрения использование уравнения Больцмана для вычисления значений коэффициентов переноса следует рассматривать как его вторичное практическое применение.

## НАБРОСКИ ВЫВОДА УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

### § 7. ГАЗ БОЛЬЦМАНА И ГАЗ КНУДСЕНА

Для простоты мы вначале рассмотрим упругие сферические молекулы и затем обобщим результаты для произвольных межмолекулярных потенциалов. Пусть мы имеем в качестве фиксированной области сосуд, в котором заключен газ, и пусть имеется фиксированная функция  $F_1(\xi, \mathbf{x})$  для всех  $\mathbf{x}$  в указанной области. Допустим, что число частиц  $n$  стремится к бесконечности, в то время как масса каждой частицы  $m$  стремится к нулю так, что полная масса системы остается постоянной, т. е. выполняется соотношение

$$mn = \text{const.} \quad (7.1)$$

Допустим также, что в этом предельном переходе остаются неизменными функции распределения  $f = mnF_1$  и все обычные макроскопические величины, получаемые из  $f$  (например, температура, давление, скорость потока среды и т. д.) и, наконец, что размер сферических молекул стремится к нулю по закону

$$n\sigma^2 = \text{const.}, \quad (7.2)$$

где  $\sigma$  — молекулярный диаметр. Соотношение (7.2) означает, что средняя длина свободного пробега ( $\sim 1/n\sigma^2$ ) сохраняется постоянной. То же самое относится и к среднему времени между столкновениями молекул, поскольку никаких ограничений на значения скорости не накладывается [функция  $F_1(\xi)$  фиксирована]. Наконец, положим, что

$$n\sigma^3 \rightarrow 0, \quad (7.3)$$

где  $n\sigma^3$  представляет собой объем, занимаемый собственно молекулами. Следовательно, в рассматриваемом предельном переходе газ становится все более разреженным и в пределе удовлетворяет уравнению состояния для совершенного газа  $pV = nkT$ . Таким образом, из нашего рассмотрения выпадает один из аспектов межмолекулярных сил — внутренняя потенциальная энергия, но учитывается процесс столкновения как конечный эффект. Хотя в любой момент времени при  $n \rightarrow \infty$  относительное число сталкивающихся частиц становится все меньше и меньше, именно они определяют эволюцию  $F_1$ . Например, тензор напряжений определяется переносом количества движения через поверхность [см. уравнение (17.5)] и не испытывает влияния межмолекулярных сил. Однако его поведение тесно связано со столкновениями через механизм вязкости. Первый эффект имеет порядок  $n\sigma^3$ , а второй — порядок  $1/n\sigma^2$ .

Уравнение Больцмана для распределения массовой плотности в случае упругих сферических молекул содержит отношение  $\sigma^2/m$  в виде множителя для члена, описывающего эффект столкновения. Но  $\sigma^2/m$  — постоянная величина, так что уравнение Больцмана само по себе является инвариантным относительно рассматриваемого предела. Предельный газ допустимо рассматривать как *континуум*, поскольку дискретность стала произвольно малой, и этот предельный континуум, который *точно* удовлетворяет уравнению Больцмана, и называется газом Больцмана.

Если создается впечатление, что описанный выше предел является нефизическим из-за того, что в нем участвуют молекулярные массы и размеры, то его можно заменить абсолютно адекватным, но физически более понятным пределом. Пусть теперь  $\sigma$  и  $m$  постоянны. Пусть далее по мере увеличения полного числа частиц  $n$  масштаб линейных размеров сосуда, как и масштаб  $F_1 = f(x)$ , пропорционален  $\sqrt{n}$ , т. е. величина  $n^{3/2}F_1(\xi, x/\sqrt{n})$  остается неизменной (здесь множитель  $n^{3/2}$  требуется для нормализации). В этом случае средняя длина свободного пробега становится пропорциональной размеру сосуда. Выполняемая нами операция означает, что мы исчисляем все макроскопические градиенты потока и размер сосуда прямо пропорционально средней длине свободного пробега. Этот предельный переход формально не так изящен, как предыдущий, так как все физические интересные распределения  $F_1$ ,  $nF_1$  и  $f$  стремятся к нулю. Вследствие этого соблазнительно опустить в уравнении Больцмана член, учитывающий столкновения ввиду его квадратичности по  $f$ . Это привело бы нас к уравнению для газа Кнудсена. В некотором смысле это приближение справедливо, так как время между столкновениями в пределе становится бесконечно большим. Сущность вопроса заключается в перестановке пределов. Если мы следим за газом только в течение фиксированного интервала времени, то его поведение будет соответствовать газу Кнудсена, если же наблюдать за газом неограниченно долго для каждого значения  $n$  (или в течение отрезка времени, который увеличивается в соответствии со средним временем между столкновениями), то газ следует рассматривать как газ Больцмана.

Пользуясь введенными масштабами, можно временно определить газ Кнудсена как предельный случай, для которого

$$n\sigma^2 \rightarrow 0 \quad (7.4)$$

в отличие от выражения (7.2). Это позволяет, по крайней мере формально, опустить описывающий столкновения член в уравнении Больцмана. Если выразить этот предел в более физической форме, оставляя фиксированным  $m$  и  $\sigma$ , но увеличивая размер сосуда, то придем к результату, на первый взгляд не очень сильно отличающемуся от полученного ранее. Можно думать, что вопрос о том, можно или нельзя пренебречь столкновениями, зависит от длительности наблюдения за системой. Как ни странно, но правильный ответ на этот вопрос зависит от граничных условий, которые накладываются стенками сосуда, а также от длительности наблюдений. Если граничные условия являются стохастическими (например, диффузное отражение) и молекула «забывает» свое прошлое после столкновения с границей, тогда газ действительно является кнудсеновским с пределом по уравнению (7.4). Таким образом, уравнение кнудсеновского газа следует решать совместно с граничными условиями, при этом результат будет в равной мере справедлив для любых отрезков времени. Однако при зеркальном отражении от границы столкновения между молекулами газа будут всегда иметь решающее значение в течение заданного достаточного отрезка времени. Недостаток первоначального анализа (изложенного выше), не учитывающего это различие, заключался в допущении, что пренебрежение малым членом уравнения вносит малую погрешность в решение этого уравнения. Такая точка зрения является общепринятой. При выводе уравнения (например, уравнение Больцмана) нельзя иметь дело только с уравнением, но необходимо также рассматривать и его решения. В результате предел (7.4) определяет газ Кнудсена, если заданы стохастические граничные условия, в противном случае, в зависимости от времени наблюдения мы получаем либо газ Кнудсена, либо газ Больцмана.

При наличии межмолекулярного потенциала  $\varphi(r)$ , где  $r$  — межмолекулярное расстояние, мы вводим те же самые основные пределы

(7.1) и (7.2), рассматривая теперь  $\sigma$  не как точный межмолекулярный диаметр, а как масштабный коэффициент для потенциала.

В частности, мы предполагаем, что

$$\varphi(r, \sigma) = \sigma^2 \psi\left(\frac{r}{\sigma}\right), \quad (7.5)$$

где  $\psi$  есть фиксированная функция своего аргумента. Множитель  $\sigma^2$  выбирается так, чтобы служить геометрическим масштабом траекторий двух частиц. В частности, нетрудно убедиться, что сечение столкновения (см. § 15) остается фиксированной функцией своего аргумента и просто умножается на множитель  $\sigma^2$  так же, как и для упругих сферических молекул. Это гарантирует инвариантность уравнения Больцмана в процессе предельного перехода. Так же нетрудно убедиться в том, что средняя свободная длина пробега и среднее время столкновения фиксированы, но поправки на несовершенство газа опущены.

Для сравнения отметим, что выполнение пределов

$$\left. \begin{aligned} mn &= \text{const}; \\ m\sigma^3 &= \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

при которых средняя длина свободного пробега стремится к нулю, а уравнение состояния соответствует несовершенному газу, ведет к недиссипативным гидродинамическим уравнениям Эйлера [51]\*. В этом пределе распределения  $F_2, F_3 \dots$  не только становятся зависимыми от  $F_1$ , но, как и  $F_1$ , зависят еще от значительно менее детального гидродинамического описания состояния. Другой метод получения уравнений Эйлера (только для совершенного газа) заключается в том, что берут уравнение Больцмана и затем устремляют  $n\sigma^2 \rightarrow 0$  (см. § 26). В каждом случае диссипативные уравнения Навье—Стокса могут быть получены как поправка первого порядка к уравнениям Эйлера, т. е. путем сохранения членов первого порядка по параметру разложения. Легко видеть, что уравнения Навье—Стокса могут быть получены как предел нулевого порядка, только если межмолекулярные силы в пределе становятся дальнедействующими (т. е. являются гладкими функциями) [73].

## § 8. ФОРМАЛЬНЫЙ ВЫВОД

Рассмотрим вначале случай усеченных сил (3.6). Точное уравнение для  $F_1^\sigma$  есть (3.12). Чтобы получить уравнение Больцмана, нам понадобятся следующие четыре допущения:

- 1) усеченность;
- 2) бинарность столкновений;
- 3) молекулярный хаос;
- 4) медленное изменение  $F_1$ .

Приступая к выкладкам, опустим сначала индекс  $\sigma$  у  $F_1^\sigma$  и  $F_2^\sigma$  в уравнении (3.12). Затем заменим аргументы в  $F_2$  ( $z_1, z_2^+, t$ ) теми их значениями, которые они должны были бы иметь в начале бинарного столкновения (обозначим их через  $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{t}$ ), для того, чтобы в конце столкновения получить данные значения  $z_1, z_2^+$  в момент времени  $t$  (начало столкновения определяется соотношением  $|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| = \sigma$  и условием сближения молекул). Третий этап заключается в замене  $F_2(z_1, z_2^-)$  на  $F_1(z_1)F_1(z_2^-)$  и  $F_2(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$  — на  $F_1(\bar{z}_1)F_1(\bar{z}_2)$ . И, наконец, в четырех функ-

\* Хотя этот анализ и дает весьма большую информацию, некоторые проблемы все-таки остаются. Более легкая проблема получения основных уравнений сохранения с полным тензором напряжений и тепловым потоком (которые не образуют, однако, детерминированную систему) рассматривается с формальной точки зрения в работах [34] и [25] и более тщательно — в труде [54].

циях  $F_1(z_1, t)$ ,  $F_1(z_2^-, t)$ ,  $F_1(\bar{z}_1, \bar{t})$ ,  $F_1(\bar{z}_2, \bar{t})$  заменим  $x_2^-, x_1, x_2$  на  $x_1$  и  $\bar{t}$  на  $t$ . Подставив в уравнение (3.12)  $n$  вместо  $n-1$ , получаем

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \xi_1 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = n \int [F_1(\xi_1) F_1(\xi_2) - F_1(\bar{\xi}_1) F_1(\bar{\xi}_2)] V d\omega d\xi_2, \quad (8.1)$$

где  $x_1$  и  $t$  одни и те же во всех функциях. Это и есть уравнение Больцмана. Относительно плотности распределения массы уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{\xi}_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{m} \int [f(\bar{\xi}_1) f(\bar{\xi}_2) - f(\xi_1) f(\xi_2)] V d\omega d\xi_2. \quad (8.2)$$

Замена масштаба  $d\omega = \sigma^2 d\Omega$  показывает, что интегралы столкновений в выражениях (8.1) и (8.2) инвариантны относительно предела, описанного в § 7. Интегрирование по  $d\Omega$  производится по единичному кругу, множители  $n\sigma^2$  и  $\sigma^2/m$ , которые появляются под знаком интеграла, постоянны.

Дадим теперь эвристическое обоснование перехода от выражения (3.12) к уравнению (8.1), математическое обоснование излагается в конце этой главы. Напомним (см. § 3), что при малых значениях  $n\sigma^3$  функция  $F_1^\sigma$  аппроксимирует  $F_1$ , а  $F_2^\sigma$  аппроксимирует  $F_2$ . Так обосновывается первый этап. Согласно высказанным соображениям число частиц, участвующих в столкновениях, в любой момент времени мало по сравнению с  $n$ . Мы идем дальше, требуя, чтобы число тройных или более высокого порядка столкновений было мало по сравнению с числом бинарных столкновений. Рассмотрим в связи с этим уравнение (3.2) и остановимся на случае  $r=2$ . Если  $|x_2 - x_1| < \sigma$ , т. е. если молекулы 1 и 2 находятся в поле действия взаимных сил, интегральный член (т. е. тройное столкновение) в уравнении (3.2) мал (благодаря множителю  $\sigma$ ) по сравнению с членом, характеризующим бинарные столкновения с силой  $X_{1,2}(z_1, z_2)$  (хотя за длительный отрезок времени оба члена могут оказать соизмеримое влияние, поскольку частица только малую часть времени своей «жизни» находится около любой другой частицы). Отсюда мы делаем вывод, что для малого интервала времени порядка продолжительности самого столкновения (т. е. порядка  $\sigma$ ) двухчастичное уравнение Лиувилля представляет собой хорошую аппроксимацию точного уравнения для  $F_2$ . Решение этого уравнения есть  $F_2 = \text{const}$  на двухчастичной траектории. Все сказанное оправдывает второй этап и замену  $F_2(z_1, z_2^+, t)$  на  $F_2(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{t})$ . Принципиальным является то, что допущение о бинарности столкновений применяется к  $F_2(z_1, z_2^+, t)$  раньше, чем допущение о хаотичности. Третий этап представляет собой физически разумное предположение о том, что две частицы, которые должны столкнуться, статистически независимы, в то время как частицы, только что испытавшие столкновение, могут быть в очень тесной взаимосвязи. Если игнорировать это различие и положить  $F_2(z_1, z_2) = F_1(z_1) F_1(z_2)$  везде, где только появляются такие члены в уравнении (3.12), то мы найдем, что столкновения исчезают, и  $F_1$  удовлетворяет уравнению для кнудсовского газа.

Обратимся, наконец, к четвертому этапу. Оправданность его следует из того, что различие между координатами  $x$  и  $x_1$ , а также между  $\bar{t}$  и  $t$  имеет порядок величины  $\sigma$ . С другой стороны, зависимость  $F_1$  от координат (и, по предположению, от времени) фиксирована при  $\sigma \rightarrow 0$ .

Включение в рассмотрение межмолекулярных потенциалов, действие которых распространяется до бесконечности (но убывает достаточно быстро), может быть осуществлено с помощью простого приема. Усекающий параметр, который определяет усеченное распределение  $F_1^\sigma$ , и масштабный параметр в  $\varphi(r, \sigma)$  в принципе являются различными параметрами. Обозначим первый из этих параметров через  $\sigma'$ , второй — через  $\sigma$

и предположим, что они оба малы. Рассмотрим теперь уравнение (3.5) для  $F_1^{\sigma'}$ ; оно содержит член касательных столкновений, который ранее был опущен. Далее, как и раньше, пренебрежем различием между усеченным и неусеченным распределениями и оставим параметр  $\sigma'$  только в пределах интегрирования  $S_2$  и  $D_2$ . В результате придем к такому же интегралу столкновений, как и в уравнении (8.1), но с интегрированием по  $d\omega$  по кругу диаметром  $\sigma'$ , и, кроме того, получим поправочный член. Устремим теперь  $\sigma'$  к нулю, но с меньшей скоростью, чем стремится к нулю  $\sigma$ , так чтобы  $\sigma'/\sigma \rightarrow \infty$  при  $n(\sigma')^3 \rightarrow 0$  и  $n\sigma^2 = \text{const}$ . Если мы, как это делали ранее, изменим масштаб, т. е. вновь введем  $d\omega = \sigma^2 d\Omega$ , то получим тот же самый интеграл столкновений, что и раньше, но только теперь интегрирование по  $d\Omega$  будет вестись уже не по единичному кругу, а по всей плоскости. Иными словами, хотя усекающий параметр и становится макроскопически малым, по сравнению с молекулярными размерами он велик. Что же касается поправочного члена

$$\frac{n}{m} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \cdot \int_{D_2} X_{12} F_2 dz_2,$$

то из масштабных соображений следует, что главный вклад в этот интеграл (пренебрегая ограничениями для  $D_2$ ) делается на интервале  $|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$ , имеющем порядок  $\sigma$ . Поскольку  $\sigma' \gg \sigma$  и сфера  $\sigma'$  исключена из области интегрирования, то мы приходим к заключению, что поправочный член мал, если только интеграл сходится. Это же всегда имеет место, если межмолекулярные силы убывают быстрее, чем величина, обратная кубу радиуса.

Между исходным уравнением Больцмана и его усеченным вариантом имеется одно существенное математическое различие: в первом случае учитывающий столкновения член не является абсолютно сходящимся. Положительные и отрицательные его части по отдельности не сходятся, а сходятся только вместе. Полное поперечное сечение соударений  $\int d\omega$  бесконечно велико.

Итак, переход от точного уравнения для  $F_1^{\sigma}$  в  $n$ -частичной системе к уравнению Больцмана был сделан с помощью ряда физических допущений. Тот факт, что для детерминированной динамической системы  $F_1^{\sigma}$  может аппроксимировать  $F_1$ , или, что в разреженной газе должны преобладать бинарные столкновения, с физической точки зрения довольно очевиден, хотя математически доказать это оказывается очень трудно (см. § 10). Допущение о молекулярном хаосе обычно применяется в более осторожной форме, поскольку (и это принципиальный вопрос) отнюдь не обязательно делать предположение о хаотичности в динамической системе. То, что это есть законная *аппроксимация*, а не просто допущение *для данного случая*, будет показано ниже.

## КРИТИКА

### § 9. ДВЕ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

Имеются два различных способа введения статистического механизма, т. е. функции распределения, в динамическую проблему. Их необходимо очень тщательно разграничивать, так как формальный анализ в обоих случаях может быть совершенно аналогичным, но интерпретация их различна. Это различие заключается в разных определениях функции распределения. Согласно первому определению, данному в § 1,  $F_n$  есть плотность вероятности и относится к возможной повторяемости эксперимента. В математической теории свойства функции  $F_n$  почти полностью определяются постулированием, так как они находятся в очень сложной

зависимости от механизма воспроизведения эксперимента. Поэтому, чтобы такой подход действительно отражал природу явления, необходимо показать, что макроскопические результаты очень слабо зависят от специфики выбора начальной функции  $F_n$ . Одночастичное распределение  $F_1$  находится по  $F_n$  интегрированием.

Вторая возможность заключается в следующем. Точка  $Z$  (т. е. состояние) может быть представлена в  $\gamma$ -пространстве как совокупность  $n$  точек  $(z_1, \dots, z_n)$ . Если  $n$  велико, мы можем принять, что это «облако» точек аппроксимируется гладкой функцией распределения, которую будем, по-прежнему, обозначать как  $nF_1(z)$ . «Плотность»  $F_1$  определена в  $\gamma$ -пространстве только для таких объемов, которые «не слишком малы и не слишком велики». Более точно гладкое распределение  $F_1(z)$  можно определить только как предел при  $n \rightarrow \infty^*$ . Такое распределение  $F_1$  совершенно иное, чем введенное ранее. Оно представляет собой фактическую плотность числа частиц, а не плотность вероятности и относится к единичной системе, а не к общему поведению статистического ансамбля. Однако вследствие своей гладкости эта плотность фактически соответствует только предельной системе с бесконечно большим числом частиц. Чтобы пояснить сказанное, рассмотрим интеграл  $\int_b^n nF_1(z) dz$  по

области  $D$ , которая настолько мала, что величина интеграла существенно меньше единицы. Согласно первой интерпретации  $F_1$  как вероятности, это означает, что математическое ожидание числа молекул внутри  $D$  есть малая величина, т. е., если повторять эксперимент много раз, то иногда внутри  $D$  будет обнаружена молекула, иногда нет, и этот интеграл дает отношение числа экспериментов, при которых в области  $D$  были обнаружены молекулы, к общему числу проведенных экспериментов. Согласно второму определению  $F_1$ , в этом примере никакого вывода сделать нельзя;  $F_1$  имеет смысл только для областей, больших, чем  $D$ . Это является недостатком второго определения. Математически плотность числа частиц гораздо менее удобна, так как уже с самого начала приходится прибегать к усложненному предельному процессу даже при попытке аккуратно определить  $F_1$ . Конечно, подобные трудности могут возникнуть и для плотности вероятности, например, когда нужно показать, что макроскопические результаты не зависят от выбора начальной функции  $F_n$ , но многое говорит за то, что эти трудности можно обойти.

Помимо вопроса о математическом удобстве, между этими определениями есть и принципиальные различия. По сути дела, оба метода применяются к двум различным экспериментальным реализациям, а именно, к повторяющимся экспериментам над конечной системой из  $n$  частиц, с одной стороны, и к наблюдению за одной единственной системой из многих (точнее, бесконечно многих) частиц — с другой. Представляется вероятным, что оба метода приведут к уравнению Больцмана в соответствующем пределе. Но даже и в этом случае, несмотря на то, что уравнение одно и то же, искомые функции  $F_1$  в нем являются различными (мы можем сравнить такую ситуацию с уравнением Лапласа, которое справедливо для самых разнообразных физических величин, например, для температуры и электростатического потенциала). Возможно, что условия справедливости уравнения Больцмана различны для этих двух случаев; например, вопрос о том, допустимы или нет нелинейные отклонения от равновесия, может иметь разные ответы. Природа сходимости к уравнению Больцмана при  $n \rightarrow \infty$ , безусловно,

\* Введение функции распределения или рассмотрение  $nF_1$  как суммы  $\delta$ -функций не спасает положения. Ни уравнение Больцмана, ни величина  $\int F_1 \log F_1$  не могут иметь какого-либо точного смысла, если  $F$  не существует как обычная функция.

различна для обоих случаев. Вполне возможно, что  $F_1$  как плотность числа частиц в уравнении Больцмана представляет собой сглаженное среднее по тем  $F_1$ , которые сходятся к нему, тогда как это сглаживание, вероятно, не требуется для обеспечения сходимости плотности вероятности (см. § 12). Имеются также некоторые тонкости, связанные с теоремой Пуанкаре о возвращениях; они появляются, когда  $F_1$  рассматривается как плотность числа частиц, и отсутствуют, когда  $F_1$  рассматривается как плотность вероятности. Теорема Пуанкаре гласит, что если динамическая система находится в каком-либо состоянии, то в дальнейшем она в конце концов обязательно вновь подойдет сколь угодно близко к этому состоянию. Поэтому не следует ожидать, что система сама по себе придет к состоянию равновесия при  $t \rightarrow \infty$ , если под  $F_1$  понимать плотность числа частиц, необходимо либо устранить некоторые исключительные временные интервалы, либо произвести определенное сглаживание. В § 12 будет показано, что, по крайней мере для некоторых простых примеров, плотность вероятности  $F_1$  может однозначно стремиться к равновесному распределению и притом без исключений. Как же сгладить такое различие в поведении? Этот вопрос является не физическим, а математическим. Если время возвращения Пуанкаре достаточно велико, то вполне возможно, что оба предсказания физически неразличимы. Дело заключается в том, что плотность вероятности  $F_1$  предсказывает не фактический результат любого наблюдения, а только ожидаемый. Вместо последовательных по времени повторов экспериментов, как это обычно делается в лаборатории, мы считаем, что все возможные повторения (т. е. элементы пространства событий) начинаются одновременно и наблюдаются также одновременно. В последующие моменты времени события, заключающиеся в том, что система оказалась в особом состоянии, соответствующем теореме Пуанкаре, будут в меньшинстве, говоря более точно, такие события будут иметь меру нуль или нулевую вероятность. Если пространство событий бесконечно (и, особенно, если оно представляет собой континуум), то не следует удивляться, если в этом пространстве в последующие моменты времени не найдется достаточного количества исключительных событий, чтобы помешать непрерывному приближению к равновесному распределению вероятностей. Более сложное описание через плотность числа частиц дает более детальную картину фактических физических возможностей. Но обычно нас не интересуют *все* возможности, достаточно знать подавляющее большинство возможностей. Это достигается введением плотности вероятности; по-видимому, сглаживание плотности числа частиц приводит к той же цели, но более громоздким образом. В § 12 приводится достаточно убедительный пример, в котором сглаживание плотности числа частиц (путем устремления  $n \rightarrow \infty$ ) в точности эквивалентно введению вероятности.

Следует упомянуть, что и для второго определения  $F_1$  как плотности числа частиц часто вводится вероятность с целью устранения определенных неудобств и тех особых случаев, которые являются «маловероятными». Это делается с помощью теорем о «почти всех» точках пространства  $\Gamma$  (и иногда о «почти всех» временных отрезках), определяя тем самым в явном виде вероятность на  $\Gamma$ . Оба метода, однако, и здесь остаются различными, прежде всего вследствие различных определений наблюдаемых величин (в одном случае это значение фазовой функции, в другом — ее математическое ожидание) и еще в том, что понятие «малая вероятность» во втором случае относится к малости меры  $6n$ -мерного множества, тогда как в первом случае оно относится к некоторого рода мере в функциональном пространстве, т. е. к маловероятному выбору начальной функции  $F_n$ . Оба эти понятия между собой связаны, но весьма тонким и сложным образом.

В принципе оба рассмотрения следовало бы довести до конца, так как их результаты будут различными и будут иметь различные интерпретации, мы же сконцентрируем наше внимание на первом методе, так как выкладки здесь носят более простой характер, однако всякий раз, когда это необходимо, будем проводить сравнение со вторым методом.

Несколько слов следует сказать о различии между использованием понятия вероятности в совершенно определенном смысле наблюдения за эволюцией решений уравнения Лиувилля и концепцией «случайности». Случайный процесс полностью характеризуется заданием движения в фазовом пространстве (например, выбором функции Гамильтона) и выбором начальной вероятности  $F_n(Z, 0)$ . Этим определяются не только распределение вероятностей значений всякой фазовой функции  $\psi(Z)$  для всех времен, но и все вероятности совместных событий  $\psi(Z, t_1) < a_1$ ,  $\psi(Z, t_2) < a_2$  и т. д. Хорошо разработанная математическая теория имеется только для некоторых специальных видов случайных процессов, например, для марковских процессов. Вводимые при этом специальные вероятностные допущения, которые обычно подразумевают определенную степень «забывания» системой своего «прошлого» поведения, почти неизбежно являются несовместимыми с исходным динамически определенным случайным процессом, но есть надежда, что эти допущения могут выполняться с определенной степенью точности или, наконец, характеризовать некоторые предельные случаи.

## § 10. «ПОЧТИ ВСЕ» РЕШЕНИЯ

Всякое утверждение, что решения уравнения Лиувилля сходятся к решению уравнения Больцмана, является довольно тонким вопросом. Смысл выражения «сходится» будет анализироваться в последующих пяти параграфах.

Обратим, прежде всего, внимание на то, что, если не принять мер предосторожности, решения уравнения Лиувилля будут сходиться намного быстрее, чем это желательно, к равновесному решению Максвелла. Это решение, конечно, является решением уравнения Больцмана, но оно для нас не представляет интереса. Например, мы знаем, что если  $F_n$  является микроканоническим, т. е. сингулярным, распределением, постоянным на энергетической поверхности\*, то при увеличении  $n$  функция  $F_1$  стремится к максвелловскому распределению, которое соответствует данной энергетической поверхности. Этот результат допускает широкое обобщение. Например, если на этой энергетической поверхности функция  $F_n$  ограничена, т. е.  $a < F_n < b$ , а в остальном совершенно произвольна, то мы получаем тот же результат, а именно:  $F_1$  становится распределением Максвелла при больших  $n$ . Фактически, границы для  $F_n$  могут расти пропорционально любой степени  $n$ , например:

$$0 \leq F_n \leq bn^5.$$

При этом условии  $F_1$  не может быть ничем иным, как распределением Максвелла. Легко видеть, что не максвелловское распределение  $F_1$  может появиться только в том случае, если  $F_n$  растет экспоненциально с ростом  $n$ . Более точно, если мы примем границу типа  $F_n < K^n$ , то найдем, что те  $F_1$ , которые совместимы с этим неравенством, могут быть приблизительно охарактеризованы условием вида  $H_1 < \log K$ . Другими словами, отклонение данной функции  $F_1$  от равновесия, которое изме-

\* Плотность вероятности такого распределения постоянна не по отношению к элементу площади поверхности, а по отношению к мере, представляющей собой элемент объема тонкого энергетического слоя.

рется величиной  $H_1$  (см. § 18), определяет допустимую скорость роста  $F_n$  как функции от  $n$ .

Иной подход заключается в использовании другого определения  $F_1$ , данного в § 9, т. е. как плотности частиц, а не как математического ожидания. В этом случае  $F_1$  определена, грубо говоря, в каждой точке пространства  $\Gamma$ . Мы знаем, что при больших  $n$  не только среднее значение  $F_1$  на энергетической поверхности есть приближенно распределение Максвелла, но также и сама функция  $F_1$  для большинства точек энергетической поверхности приближенно является максвелловским распределением. Фактически, относительная мера совокупности точек, где  $F_1$  заметно отличается от распределения Максвелла, становится малой порядка  $K^{-n}$ . Для того чтобы математическое ожидание  $F_1$  было ощутимо не максвелловским, необходимо сконцентрировать плотность вероятности на этой столь малой совокупности точек. Ввиду того, что интеграл от  $F_n$  должен быть равен единице, распределение  $F_n$  должно расти со скоростью, по крайней мере равной  $K^n$ .

Эти замечания указывают на определенные математические трудности проблемы. Совершенно ясно, что мы не можем ожидать, что любой произвольный выбор начального значения  $F_n$  даст функцию  $F_1(t)$ , которая сходится к решению уравнения Больцмана. Мы должны каким-либо образом устранить исключительные и не обладающие достаточной гладкостью функции  $F_n(t)$ . Однако, допуская произвол в выборе вида функции  $F_n$ , достаточный для того, чтобы  $F_1$  при  $t=0$  не была функцией Максвелла, мы, на самом деле, допускаем решения уравнения Лиувилля, которые могут «вести себя» очень плохо. Например, у распределений  $F_n$  (и особенно у  $F_1$ ) нет равномерных точечных границ, которые не зависели бы от  $n$ . Неравенство (5.2) позволяет получить границы по мере. Однако эта трудность сочетается еще и с тем, что эволюция  $F_1$  определяется значениями, принимаемыми  $F_2$  на множестве, мера которого стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  (см. § 11).

Эта трудность появляется и при рассмотрении  $F_1$  как плотности числа частиц. Исключительное поведение, например, несходимость к уравнению Больцмана, будет представляться совокупностью точек малой меры. Но вся совокупность точек, которая нас интересует, уже сама по себе крайне мала и имеет порядок  $K^{-n}$ . Мы должны показать, что исключительная совокупность еще меньше.

## § 11. МОЛЕКУЛЯРНЫЙ ХАОС

Свойство хаотичности с физической точки зрения представляется нам проявлением определенного вида случайности. Интуитивно кажется очевидным, что столкновения оказывают неупорядоченные воздействия. Поэтому можно ожидать, что процесс столкновения ведет к образованию хаотичности, даже если первоначально ее не было. Для проявления этого механизма, очевидно, необходимо несколько времен столкновений и даже большое количество их, если требовать, чтобы свойство хаотичности выполнялось с определенной степенью точности. Такая аргументация никак не может привести к уравнению Больцмана, для которого время столкновений является характерным временным масштабом. Однако именно эти соображения приводят к *линейным диссипативным* процессам.

Если мы хотим с достаточной общностью оправдать применимость уравнения Больцмана для описания эволюции произвольной начальной функции  $F_1(z)$  на отрезках времени, сопоставимых со временем между столкновениями, необходимо *априори* принять, что начальная функция  $F_n$  удовлетворяет условию хаотичности. Приняв это условие, следует еще убедиться, что уравнение Лиувилля не разрушает свойств хаотичности.

Разделим поэтому проблему на две части. Проблема *начальной хаотичности* является делом только теории вероятности. Необходимо показать, что «наугад» выбранное начальное распределение  $F_n$  с большой вероятностью является хаотическим. Эта проблема никак не связана с динамикой частиц или уравнением Лиувилля. Проблема *последующей хаотичности* является делом теории дифференциальных уравнений в частных производных. Распространяется ли со временем некоторое свойство, если оно имело место в начальный момент? Фактически перед нами асимптотическая проблема, так как легко видеть, что это не может быть справедливым, пока  $n$  не велико. Ответ на эти два вопроса показывает, что изолированная динамическая система, которая не подвержена никаким внешним воздействиям, может, и в большинстве случаев будет, вести себя необратимым образом при условии, что  $n$  велико.

Рассмотрим сначала вопрос о начальной хаотичности. Для этой цели достаточно взять простейшее математическое определение хаоса, а именно:

$$F_2(z_1, z_2) = F_1(z_1)F_1(z_2). \quad (11.1)$$

Мы считаем функцию  $F_1(z_1)$  фиксированной. Очевидно, что нет разумных оснований для того, чтобы требовать выполнения уравнения (11.1) для всех функций класса  $F_2(z_1, z_2)$ , дающих после интегрирования заданную функцию  $F_1(z)$ . Тем не менее, рассмотрим все функции  $F_n(z_1, \dots, z_n)$ , совместимые с  $F_1(z)$ . Доказано, что класс функций  $\{F_2^{(n)}\}$ , который получается при интегрировании класса  $\{F_n\}$ , сходится к единственной функции  $F_1(z_1)F_1(z_2)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Решающее значение здесь имеет предполагаемая симметричность функций  $F_n$  по их аргументам  $z_1, \dots, z_n$ . В общем случае  $F_n$  принимает заданное значение в  $n!$  различных точках пространства  $\Gamma$ . Вследствие этого плотность вероятности должна концентрироваться в тех областях  $\Gamma$ , где наблюдается тенденция к выполнению условия (11.1). Безусловно, этот результат не может быть доказан для всех последовательностей  $F_n$  при  $n \rightarrow \infty$ , но доказано, что он имеет место для почти всех последовательностей, где выражение «почти все» определяется соответствующим образом.

Рассматриваемая ситуация наиболее просто описывается через плотности числа частиц  $F_1$  и  $F_2$ , а не через вероятности. Грубо говоря, вводится функция  $F_2$ , определенная как и  $F_1$  для каждой точки  $Z = (z_1, \dots, z_n)$  в  $\Gamma$ -пространстве. Множество, на котором  $F_1$  не аппроксимируется распределением Максвелла, имеет меру, экспоненциально уменьшающуюся с ростом  $n$ , например, как  $K^{-n}$ ; величина  $K$  зависит от степени точности, с которой мы определяем «аппроксимирование» максвелловским распределением. Мера подмножества, на котором  $F_2(z_1, z_2) \neq F_1(z_1)F_1(z_2)$  с определенной степенью точности имеет порядок  $K_1^{-n}$ , где  $K_1 > K$ . Это множество экспоненциально меньше, чем первое, относительная мера равна  $(K/K_1)^n$ . Это утверждение можно даже усилить, если перейти к плотностям вероятностей. Всякой заданной функции  $F_1$  соответствует минимальное значение константы роста  $K$ , например  $K_0$ , которое позволяет последовательности  $\{F_n\}$  воспроизвести эту функцию  $F_1$ . Для того чтобы последовательность сходилась к функции  $F_2$ , которая не является произведением функций  $F_1$ , величина  $K$  должна быть больше, чем  $K_0$ , например  $K_1$ . Теперь среди множества всех последовательностей  $\{F_n\}$ , ограниченных любым  $K^n$ , где  $K > K_1$  (они являются малым подмножеством всех последовательностей, совместимых с заданной функцией  $F_1$ ), только подмножество малой меры (эта мера определена в функциональном пространстве) будет давать нам функцию  $F_2$ , которая не является произведением.

Более общий результат о сходимости  $F_r(z_1, \dots, z_r)$  к произведению  $F_1(z_1) \dots F_1(z_r)$  для любого фиксированного  $r$  доказывается точно таким же образом.

Обратимся теперь к проблеме последующей хаотичности. Очевидно, что свойство хаотичности (11.1) почти немедленно разрушается уравнением Лиувилля. Чтобы убедиться в этом, возьмем начальную хаотичную функцию  $F_n$  и применим к ней уравнение Лиувилля на коротком отрезке времени. Если мы теперь выберем  $z_1$  и  $z_2$  так, чтобы они соответствовали двум только что столкнувшимся частицам, то условие (11.1) в общем случае выплняться не будет. Однако при выводе уравнения Больцмана нам вовсе не требуется, чтобы свойство (11.1) выполнялось полностью: нам оно нужно только для частиц, вступающих в столкновение. Это более слабое условие будем называть *односторонним хаосом*, а условие (11.1) — *двусторонним*. Хотя и нет оснований ожидать, что свойство одностороннего хаоса должно немедленно разрушаться, нет никакой физической ясности в вопросе о влиянии сложного движения системы на это свойство. Поэтому необходимо показать, что данное свойство не разрушается на *сколь угодно длительном отрезке времени* (т. е. для сколь угодно большого числа времен столкновений), если  $n$  достаточно велико.

Основная идея заключается в том, что  $F_2(z_1, z_2)$  и  $F_1(z_1) F_1(z_2)$  ведут себя во времени подобным образом, если  $x_1$  и  $x_2$  не являются смежными точками. В частности, вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1,2} &= F_2(z_1, z_2) - F_1(z_1) F_1(z_2); \\ \delta_{1,2,3} &= F_3(z_1, z_2, z_3) - F_1(z_1) F_2(z_2, z_3), \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_{1,2}}{\partial t} + \xi_1 \cdot \frac{\partial \delta_{1,2}}{\partial x_1} + \xi_2 \cdot \frac{\partial \delta_{1,2}}{\partial x_2} + \frac{1}{m} X_{1,2} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial \xi_1} + \frac{1}{m} X_{2,1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial \xi_2}; \\ + \frac{n}{m} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \cdot \int X_{1,2}(z_1, z_3) \delta_{1,3,2} dz_3; \\ + \frac{n}{m} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \cdot \int X_{1,2}(z_2, z_3) \delta_{1,2,3} dz_3; \end{aligned}$$

(для простоты мы пренебрегли разницей между  $n$ ,  $n-1$  и  $n-2$ ). Если  $x_1$  и  $x_2$  отделены друг от друга расстоянием, большим, чем  $\sigma$ , то скорость изменения  $\delta_{1,2}$  ( $\delta_{1,2}$ ) вдоль прямолинейных невозмущенных траекторий  $z_1$  и  $z_2$  определяется интегралом, в который входит  $\delta_{1,3,2}$  и  $\delta_{1,2,3}$ . Такого же типа результат получается для производной по времени от  $\delta_{1,2,3}$  и т. д. Мы можем вычислить  $\delta_{1,2}$  через  $\delta_{1,2,3}$ ,  $\delta_{1,2,3}$  — через  $\delta_{1,2,3,4}$  и т. д. и, в конце концов, попробовать связать  $\delta_{1,2}$  в момент времени  $t$  с начальными значениями некоторых из  $\delta$ . Поскольку эти начальные значения при  $n \rightarrow \infty$  становятся малыми ( $F_r$  хаотическое распределение), то  $\delta_{1,2}$  на конечном интервале времени  $t$  есть малая величина. Такое рассмотрение не учитывает дополнительных членов, которые появляются при столкновении двух частиц. Столкновение частиц проще всего рассмотреть с помощью диаграммы рис. 1. Частицы 1 и 2 ранее не сталкивались\*. Вычисляя  $\delta_{1,3,2}$  в момент времени  $t'$ , мы найдем, что для некоторых значений  $\xi_3$  пройденный участок траектории пересекается частицей 2 в момент времени  $t''$ . Эта часть области интегрирования по  $dz_3$  может давать большой вклад. С другой стороны, эти большие вклады имеют место

\* При граничном условии зеркального отражения они могли сталкиваться, но это может иметь место только на множестве малой меры.

только на множествах малой меры, когда  $\sigma$  мало. Несомненно, большой интерес представляет доказательство теоремы о том, что  $\delta$  остаются малыми, если они малы в начальный момент времени, но и в этом случае остаются пробелы из-за трудности, которая обсуждалась в § 10 и связана с тем, что функции  $F_T$  могут принимать крайне большие значения на множествах малой меры.

Из этих рассуждений мы можем видеть, что даже если  $F_1$  очень хорошо сходится к решению уравнений Больцмана, то сходимость  $F_2$  является в определенном смысле весьма своеобразной. Сходимость  $F_2$  следует описывать с помощью двух характерных длин: макроскопической и микроскопической. Допустим, что нами доказана сходимость  $F_2(z_1, z_2)$  к  $F_1(z_1)F_1(z_2)$  для почти всех значений  $z_1$  и  $z_2$  (т. е. макроскопически). Отсюда, однако, еще не следует теорема о последующей хаотичности. Нам необходимо проверить соотношение хаотичности только для множества тех значений  $z_1, z_2$ , которые имеют место перед столкновением, но это есть множество малой меры, которая стремится к нулю вместе с  $\sigma$ . Однако можно более точно установить то исключительное множество, на котором  $F_2(z_1, z_2)$  не сходится к  $F_1(z_1)F_1(z_2)$ , и убедиться, что в действительности на это множество можно не обращать внимания.

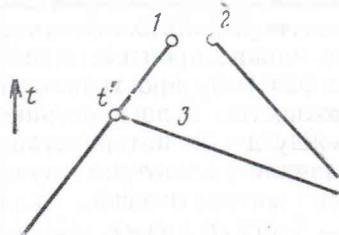


Рис. 1. Взаимное расположение траекторий движения молекул

Это исключительное множество, на котором не соблюдается хаотичность, интересно и само по себе. Оно состоит, грубо говоря, из тех пар точек  $z_1, z_2$ , которые соответствуют только что произошедшим столкновениям. Именно наличие этого исключительного множества и обеспечивает связь между обратимостью уравнения Лиувилля и необратимостью уравнения Больцмана. Допустим, что мы внезапно «выключаем» уравнение Лиувилля, обращаем все скорости и снова приступаем к решению уравнения Лиувилля. Тем самым мы рассматриваем эволюцию системы во времени в обратном направлении и можем обнаружить, например, что функция  $H_T$  увеличивается вместо того, чтобы уменьшиться. Причина этого заключается в том, что даже если условие хаотичности и выполняется почти повсюду, то малое исключительное множество, на котором это условие не выполняется, становится теперь в точности тем множеством, на котором величина  $F_2$  определяет эволюцию  $F_1$ .

Другое возможное объяснение этого положения заключается в том, что уравнение Лиувилля почти мгновенно преобразует очень вероятное распределение (двустороннее) в весьма маловероятное распределение (одностороннее). Доказательство, упомянутое выше, указывает только на то, что уравнение Лиувилля не разрушает уже имеющийся хаос в течение макроскопически долгого времени. Вероятно (см. § 12), через некоторое время процесс столкновений проявит себя в том отношении, что предшествующая хаотичность будет сохраняться *бесконечно долго*, но доказательство этого представляется очень трудным делом.

Следует несколько остановиться на граничных условиях. Мы видели, что в связи с теоремой о последующей хаотичности траектории ряда частиц необходимо обратить. Если граница вступает во взаимодействие еще до наступления момента  $t=0$ , то аргументацию необходимо изменить. Для зеркальной границы мы просто прочерчиваем в обратном направлении траектории отраженных частиц, пока не доходим до момента  $t=0$ . Если условия на границе задаются в стохастической формулировке, то к обычной форме граничного условия (связанного только с одночастичным распределением испускаемых частиц) необходимо до-

добавить еще требование статистической независимости частиц, выпускаемых из разных точек границы и в различные отрезки времени\*. Это — необходимое дополнение к условию начального хаоса.

## §12. ДИСКРЕТНОСТЬ

Давно известно, что переход от микроскопических к макроскопическим переменным требует проведения определенного рода сглаживания или введения некоторой дискретности, однако вопрос о том, в какой мере следует использовать эти операции, остается дискуссионным. Сглаживание можно произвести либо по пространственным переменным (обычно по фазовому пространству), либо по времени, либо с достаточной остротностью и по пространству, и по времени. В связи с этим различие между двумя интерпретациями  $F_n$  (см. § 9) имеет решающее значение. Вначале рассмотрим случай, когда  $F_n$  представляет собой вероятность. Все математические ожидания, выраженные в виде интегралов  $\psi = \int \psi(Z) F_n(Z) dZ$ , уже сглажены по  $Z$ . Распределение  $F_1$  согласно самому определению этой функции как интеграла от  $F_n$  является в некоторой степени автоматически сглаженным, хотя и очень слабо, так как интегрирование не распространяется полностью на все пространство  $\Gamma$ . Этим примером нам хотелось отметить, что степень сглаживания, которая подразумевается в самом определении  $F_1$ , вероятно, будет достаточной для того, чтобы эта функция хорошо вела себя при любом значении  $n$ . Вопрос же о том, гладко ли сходится последовательность функций  $F_1$  к решению уравнения Больцмана при  $n \rightarrow \infty$ , к данному примеру не относится.

Рассмотрим прямоугольный ящик, в котором находится газ Кнудсена, т. е. множество частиц, перемещающихся независимо друг от друга и зеркально отражающихся от стенок ящика. Движение индивидуальной частицы хорошо известно. Например, для почти всех начальных условий частица будет проходить через сколь угодно малую окрестность каждой внутренней точки ящика и при достаточно длительном наблюдении будет проводить в каждом выделенном объеме отрезок времени, в точности пропорциональный величине этого объема. Введем плотность вероятности  $F_n$ . Как уже упоминалось ранее (см. § 4), переменные разделяются, и  $F_1$  удовлетворяет одночастичному уравнению Лиувилля. Поскольку нас интересует поведение  $F_1$ , число частиц  $n$  в данном случае несущественно. Относительно  $F_1(\xi, \mathbf{x}, 0)$  выскажем только предположение, что эта функция интегрируема в смысле Лебега по  $(\xi, \mathbf{x})$ , при этом мы исключаем для  $F_1$  возможность быть сингулярной, например  $\delta$ -функцией. Поскольку  $F_1(\xi, \mathbf{x}, t)$  постоянна вдоль траекторий (траектория представляет собой последовательность прямолинейных отрезков, имеющих общие точки в местах пересечения их с границей), в любой момент времени  $t$  функция  $F_1$  численно равна своему начальному заданному значению, ясно, что  $F_1(\xi, \mathbf{x}, t)$  не стремится к пределу при  $t \rightarrow \infty$ . С другой стороны, без особого труда можно показать, что плотность в физическом пространстве

$$F_x(\mathbf{x}, t) = \int F_1(\xi, \mathbf{x}, t) d\xi, \quad (12.1)$$

\* Достаточно предположить, что корреляция падает до нуля на расстояниях (или отрезках времени), сравнимых с  $\sigma$ .

сходится к пределу при  $t \rightarrow \infty$ . Более того, этот предел, назовем его  $\bar{F}^*$ , является постоянной величиной, независимой от  $x$ . Можно доказать и более сильный результат. Можно показать, что функция

$$H_x(t) = \int F_x \log F_x dx \quad (12.2)$$

стремится к пределу, который в точности равен величине  $\bar{F} \log \bar{F}$ , умноженной на объем сосуда. Этот предел есть наименьшее значение, принимаемое  $H_x$ . Напомним, что величина  $H_\gamma = \int F_1 \log F_1 dz$  постоянна во времени. Физически это означает, что независимо от своего начального распределения плотность в физическом пространстве будет стремиться, в конце концов, к равномерному распределению. Таким образом, мы обнаружили, что степень сглаживания, заложенная в определении  $F_x$  (т. е. интегрирование по скорости), обеспечивает для  $F_x$  сходимости, хотя  $F_1$  и не сходится. Однако не следует думать, что  $H_x$  стремится к своему пределу обязательно монотонно, в общем случае это неверно.

Переход от фазового пространства  $\gamma = (\xi, x)$  в физическое пространство ( $x$ ) можно сравнить с переходом из  $\Gamma$  в  $\gamma$ . Столкновения с границей (за счет чего и обеспечивается сходимости в настоящем примере) можно сравнить с объединением граничных и межмолекулярных столкновений (для простоты можно рассматривать упругие сферы). Хотя доказательство представляется очень трудным, не следует удивляться, что  $F_1$  (несмотря на то, что  $F_n$  может не сходиться) может сходиться к пределу при  $t \rightarrow \infty$ . Это может быть справедливым для любых значений  $n$ . Хотя факт стремления к пределу не доказан, нетрудно вычислить предельную функцию. Оказывается, что она аппроксимируется распределением Максвелла при больших  $n$ . Хотя величина  $H_\Gamma$  и постоянна во времени, продолжая аналогию с примером кнудсеновского газа, следует ожидать, что  $H_\gamma$  стремится к своему минимальному значению при  $t \rightarrow \infty$ , но не обязательно монотонно. Немонотонность имеет определенную вероятность, если начальное распределение  $F_n$  не является хаотическим. Рассмотрим, однако, случай начального хаоса. Если  $n$  велико, то, опираясь на анализ § 11, можно ожидать, что для макроскопически долгого времени  $H_\gamma$  уменьшается приблизительно монотонно. Поскольку свойство хаотичности связано со сглаженными распределениями низкого порядка  $F_1$  и  $F_2$ , можно было бы ожидать приближения к равновесному состоянию (которое является строго хаотическим) при  $t \rightarrow \infty$  [36]. Более того, причиной этого предельного приближения к равновесию являются столкновения (по аналогии с кнудсеновским газом), а временная константа этого процесса имеет макроскопическое конечное значение. Оба механизма установления равновесия частично совпадают, поэтому мы приходим к заключению, что свойство хаотичности должно иметь место для любого момента времени. В результате можно ожидать, что  $H_\gamma$  является с некоторым приближением монотонно убывающей функцией, которая приходит к своему минимальному значению и уже никогда не отклоняется от него. Мы не предполагаем каких-либо осложнений типа тех, которые связаны с теоремой Пуанкаре о возвращении, например, последующего возврата к большим значениям  $H_\gamma$ . Более того, можно ожидать равномерную по времени сходимости  $F_1$  к решению уравнения Больцмана при  $0 < t < \infty$ . Трудности, вызываемые возвращениями Пуанкаре, устраняются за счет минимального сглаживания, связанного с редуцированием несингулярной плотности вероятности  $F_n$  к одночастичному распределению  $F_1$ .

\* Сходимость здесь имеет место по мере (или по вероятности), т. е. мера множества точек, на которых  $|F_x - \bar{F}| > \epsilon$  становится произвольно малой. Сходимость является точечной, если  $F_1$  непрерывна.

При наличии межмолекулярных столкновений имеется одна особенность, которая не представлена в модели кнудсеновского газа и которая, возможно, потребует дополнительного сглаживания. Эта особенность заключается в том, что (ср. § 11) поведение  $F_1$  определяется значениями  $F_2$  на множестве очень малой меры. Совсем нетрудно показать, что  $F_2$  есть функция «хорошего поведения» в большом, однако чрезвычайно трудно устранить математическую возможность того, что очень малые области, на которых  $F_2$  может «вести себя» очень плохо, будут концентрироваться именно на тех малых областях, которые определяют поведение  $F_1$ . Все же такое положение в худшем случае потребует сглаживания по малым промежуткам порядка  $\sigma$  и не затронет ни одного из остальных наших выводов. Более серьезно вопрос сглаживания встает при обосновании этапа (4) из § 8.

Для того чтобы выразить связь между  $H_T$  и  $H_T$  в более сильной форме, необходимо уточнить понятие дискретности. Введем математическое понятие *слабая сходимост*. Определение этого понятия можно дать в двух эквивалентных формах. Рассмотрим последовательность функций  $f_n(x)$  (размерность пространства  $x$  несущественна). Будем говорить, что последовательность сходится слабо к пределу  $f(x)$ , если

$$\int_D f_n(x) dx \rightarrow \int_D f(x) dx \quad (12.3)$$

на любом измеримом множестве  $D$  или если

$$\int \psi(x) f_n(x) dx \rightarrow \int \psi(x) f(x) dx \quad (12.4)$$

для произвольной интегрируемой функции  $\psi(x)$ . Первое определение стоит ближе к физическому понятию дискретности, тогда как второе непосредственно связано с понятием ожидаемого значения наблюдаемой величины. В качестве примера слабой сходимости можно указать на функцию  $\sin(nx)$ , которая слабо сходится к нулю.

Следует обратить внимание на тот факт, что из *слабой* сходимости последовательности функций  $F_1^{(n)}$  к предельной функции  $F_1$  вовсе не следует обязательная сходимост последовательности  $H_T^{(n)}$  к значению  $H_T$  для этой предельной функции. По той же причине слабая сходимост  $F_n(t)$  к пределу при  $t \rightarrow \infty$  не позволяет сделать каких-либо выводов о сходимости  $H_T$ .

Рассмотрим снова пример кнудсеновского газа, заключенного в ящик. Ясно, что хотя  $F_1$  в обычном понимании и не сходится, для  $F_1$  все же имеет место слабая сходимост к константе  $\bar{F}^*$ .

Вследствие слабой сходимости мы не ожидаем (и не находим), что  $H_T$  сходится к тому же самому пределу, что и  $H_x$ . Аналогичным образом мы вправе ожидать, что  $F_n$  сходится слабо к своему равновесному значению, тогда как  $F_1$  может сходиться сильно. Это находит свое отражение в том факте, что  $H_T$  — константа, в то время как  $H_T$  стремится к своему минимальному значению.

Обратимся, наконец, к другому определению  $F_1$  — как фактической плотности частиц, а не как вероятности. Снова попробуем прояснить положение путем рассмотрения кнудсеновского газа в ящике. Для конечного числа частиц в ящике мы можем взять  $F_1$  в виде суммы  $\delta$ -функций. Обозначим такое представление  $F_1$  через  $F_1^{(n)}$ . Подберем такую фиксированную функцию  $F_1(\xi, \mathbf{x})$  (несингулярную) и такую последовательность начальных распределений  $F_1^{(n)}$ , которые бы аппроксимировали

\* Слабая сходимост является общим свойством сильно смешанных эргодических потоков [31]. Однако следует отметить, что смешанность не является причиной слабой сходимости в этом примере, поскольку здесь имеет место полная несмешанность.

$F_1$  при  $n \rightarrow \infty$ . Мы имеем в виду, конечно, слабую сходимость  $F_1^{(n)}$  к  $F_1$ . Можно показать, что из слабой сходимости  $F_1^{(n)}$  к  $F_1$  при  $t=0$  следует слабая сходимость  $F_1^{(n)}(t)$  к  $F_1(t)$  для любого значения  $t$ . Более того, задав  $F_1(0)$ , мы можем подобрать большее значение  $t$  так, чтобы функция  $F_x(t)$  (плотность в физическом пространстве) аппроксимировала бы константу с любой желаемой степенью точности. Если теперь выбрать  $n$  несколько большим, чтобы  $F_1^{(n)}(0)$  близко аппроксимировало  $F_1(0)$ , то  $F_x^{(n)}(t)$  будет аппроксимировать равномерное распределение точек в физическом пространстве.

Другими словами, дискретное распределение  $F_1^{(n)}$  «подражает» приближению к равновесию функции  $F_1$ . Но если теперь дать возможность  $t$  расти при фиксированном  $n$ , то, как мы знаем, с распределением  $F_x^{(n)}(t)$  может произойти все что угодно. Это — элементарный пример значимости переменных мест пределов  $t \rightarrow \infty$  и  $n \rightarrow \infty$ . Если вначале устремить  $n \rightarrow \infty$ , то мы обнаружим приближение к равновесию при  $t \rightarrow \infty$ . Но если сперва устремить  $t \rightarrow \infty$ , то приближения к равновесию может и не быть. Выражаясь более точно, для фиксированного большого  $n$  имеются два масштаба времени. Вначале наблюдается приближение к равновесию, но по прошествии много большего отрезка времени может наблюдаться тенденция к обратному процессу.

В этом примере с газом Кнудсена функция  $F_1$  как вероятность и как предел последовательности плотностей числа частиц  $F_1^{(n)}$  удовлетворяет одному и тому же дифференциальному уравнению в частных производных.

Можно ожидать обнаружить то же различие в поведении обоих типов функций  $F_1$  и в случае реального газа. Если  $F_1$  есть сингулярная плотность частицы, то максимум того, что можно ожидать — это сходимость к решению уравнения Больцмана в некотором фиксированном (но произвольном) интервале времени  $0 < t < T$ . Более того, по самому определению сингулярного распределения  $F_1^{(n)}$  мы можем ожидать только слабую сходимость к решению уравнения Больцмана. К сожалению, не представляется возможным ни сформулировать уравнение Больцмана, ни даже определить  $H_1^{(n)}$  непосредственно для сингулярного распределения  $F_1^{(n)}$ .

### § 13. ВРЕМЯ ВОЗВРАЩЕНИЯ

Можно привести пример, где экспериментальные условия таковы, что априори известно распределение вероятностей  $F_n$ . В этом случае повторные эксперименты определяются как повторные наблюдения за данной изолированной динамической системой. Если только энергия есть независимый от времени интеграл движения, то функция  $F_n$  должна являться микроканоническим распределением на энергетической поверхности [24]. Это следует из эргодической теоремы; модельное пространство последовательных наблюдений (необязательно при равномерных интервалах) равномерно покрывает\* всю энергетическую поверхность. По определению  $F_n$  от времени не зависит. Тем не менее плотность распределения числа частиц  $F_1$  изменяется со временем и позволяет провести рассмотрение неравновесных свойств. Одним из основных постулатов теории необратимых термодинамических процессов является постулат Онзагера—Казимира, который утверждает, что искусственно созданное неравновесное состояние будет вести себя таким же образом, как и «такое же» неравновесное состояние, возникшее спонтанно под действием флуктуаций изолированной динамической системы [13]. Это утверждение тривиально, если понятие «такое же» относится к полному микро-

\* См. сноску на стр. 23.

скопическому состоянию. Если же оно относится к некоторому макроскопическому описанию (например, приближенному описанию плотности числа частиц  $F_1$ ), то это утверждение заключается в том, что модельное пространство извне созданных состояний, совместимых с данным макроскопическим состоянием, является таким же как и модельное пространство повторений данного состояния в системе, подчиняющейся уравнению Лиувилля. Этот постулат как будто бы противоречит сделанному в § 11 утверждению о том, что уравнение Лиувилля мгновенно преобразовывает вероятное (двустороннее) распределение в маловероятное (одностороннее) распределение. Теорема о начальном хаосе (см. § 11) разрешает эту дилемму и, кроме того, дает доказательство постулата Онзагера—Казимира в этом случае. Мы уже отмечали в § 11, что, исключая множество малой меры, все точки на энергетической поверхности соответствуют

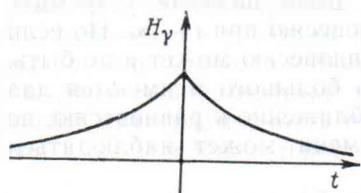


Рис. 2. Изменение  $H_\Gamma$  во времени

равновесному значению  $F_1$ . Еще более малое множество точек нарушает свойство двустороннего хаоса. Более того, при любом заданном (большом) отклонении от равновесия односторонняя хаотичность очень редка по сравнению с двусторонней. Это подтверждает постулат Онзагера—Казимира. В рассматриваемом случае распределение вероятностей, построенное в модельном пространстве последовательных наблюдений данного неравновесного состояния, определяется относительной мерой на энергетической поверхности, большинство возвращений данного состояния будет связано с двусторонним хаосом так же, как и при искусственно созданном состоянии. Мы видим, что уравнение Лиувилля имеет примечательное свойство, заключающееся в возможности следования, по-видимому, очень «маловероятным» путем, из «вероятного» неравновесного состояния обратно к равновесию. При этом, когда равновесие достигнуто, двусторонний хаос восстанавливается.

Это положение было рассмотрено Эренфестами [15] исходя из физических соображений. Допустим, что мы каким-то образом определили  $H_\Gamma$  в каждой точке  $\Gamma$  (беря, например, в качестве  $F_1$  ступенчатую функцию, разделив физическую область на ячейки). Если начальное состояние представляет собой двусторонний хаос,  $H_\Gamma$  будет уменьшаться как в положительном, так и в отрицательном направлении оси времени (рис. 2). Если мы будем слепо следовать постулату Онзагера—Казимира, то мы будем получать одну и ту же симметричную картину каждый раз, когда будет иметь место большое спонтанное отклонение от равновесия. Вероятность отклонения  $H_\Gamma$  от равновесного значения  $H_\Gamma^0$  можно оценить с помощью выражения типа  $\exp\{n(H_\Gamma - H_\Gamma^0)\}$ . Другими словами, если  $H_\Gamma$  есть маловероятное значение, то несколько большее значение  $H_\Gamma$  обладает много меньшей вероятностью. Рассмотрим пространство событий для тех моментов времени, в которые наблюдается некоторое большое значение  $H_\Gamma$ . В некоторых из этих случаев  $H_\Gamma$  лежит на возрастающей кривой, в некоторых — на убывающей и в некоторых значения  $H_\Gamma$  будет находиться как раз вблизи своего максимального значения (рис. 3). В каждом из первых двух случаев гораздо менее вероятное событие, а именно: большее значение  $H_\Gamma$ , имеет место либо несколько ранее, либо несколько позже данного наблюдаемого значения  $H_\Gamma$ . Поэтому пространство событий почти исключительно состоит из тех наблюдаемых значений  $H_\Gamma$ , которые находятся как раз вблизи своего пика. Таким образом, хотя состояние односторонней хаотичности и является весьма маловероятным по сравнению с другими состояниями с тем же самым значением  $H_\Gamma$ , но спонтанным, оно совсем не мало-

вероятно по сравнению с рассматриваемым исходным состоянием с большим значением  $H_T$ .

В заключение нашего рассмотрения заметим, что здесь *нет временной направленности*. Если мы сами создадим состояние, то в процессе наблюдения за системой мы обнаружим, что  $H_T$  уменьшается;  $H_T$  будет вести себя точно так же, если мы последуем за созданным состоянием назад по времени. Или, если мы будем наблюдать за изолированной системой до тех пор, пока она не достигнет заранее заданного маловероятного состояния, то мы обнаружим, что  $H_T$  тотчас же начнет убывать, а если, наблюдая это состояние, мы обратим

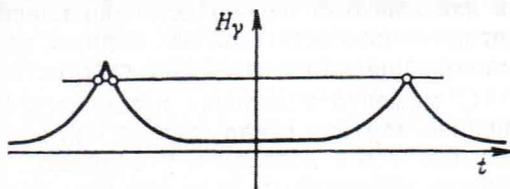


Рис. 3. Изменение  $H$  во времени

все скорости, то вновь обнаружим уменьшение  $H_T$ . Несущественно, какого направления времени мы придерживаемся —  $H_T$  может лишь уменьшаться. Увеличение  $H_T$  при обращении времени можно получить только в том случае, если специально подобрать определенное состояние, но не по каким-то его собственным качествам, а так, чтобы оно было преемником другого маловероятного состояния. Проведенное рассмотрение применимо для идеализированной математической модели газа в ящике. В случае неограниченной области с гравитационными силами вместо ящика результаты, возможно, будут иными.

#### § 14. ОБЗОР ДРУГИХ МЕТОДОВ ПОЛУЧЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Необходимо различать несколько уровней, на которых можно выводить уравнение Больцмана. Так, имеются оригинальные эвристические физические аргументы Максвелла и Больцмана и дублирующие их современные более сложные эвристические математические аргументы. Имеются также попытки внесения некоторой математической строгости в этот вопрос. Эти попытки различаются уровнем математической строгости, а также уровнем физической общности. Наконец, имеются чисто вероятностные подходы, которые обходят связь с детерминистской динамикой частиц и пытаются связать уравнение Больцмана с более общей вероятностной моделью частиц.

Вывод, данный в § 8, если не касаться его оправданности, вероятно, является наиболее прямым формальным выводом, исходящим из уравнения Лиувилля. Его простота вызвана тем, что точное уравнение (3.12), которому удовлетворяет усеченное распределение  $F_1^\sigma$ , может быть формально преобразовано в уравнение Больцмана почти непосредственно. Этот вывод аналогичен выводу Борна и Грина\*, за исключением того, что большое количество поправочных членов, которые в работе этих авторов должны рассматриваться и опускаться индивидуально (причем некоторые из них авторы опускают, даже не отдавая себе отчета в их существовании), здесь объединены вместе и дают разницу между  $F_1$  и  $F_1^\sigma$ . Этот вывод, даже с точки зрения физической наглядности, превосходит традиционный\*\* вывод. Функция  $n F_1^\sigma$  имеет простую интерпретацию как плотность частиц, которые не испытывают столкновений в данный момент времени. Уравнение (3.7) для  $F_1^\sigma$  сразу приобретает наглядный смысл, как только мы устанавливаем, что  $F_1^\sigma$  изменяется

\* Переработанный вариант в работе [5] является более прямым, чем оригинальный вывод в труде [4].

\*\* См., например, работу [11].

лишь при пролете частиц через сферу  $|x_2 - x_1| = \sigma$  и переход к уравнению (3.12) и затем к уравнению Больцмана становится тривиальным.

Главным вопросом всего критического анализа является обсуждение гипотезы о молекулярном хаосе, хотя и имеются другие вопросы такой же, если не большей, математической сложности. С философской точки зрения свойство хаотичности представляется наиболее важным, так как гипотеза непосредственно влечет за собой необратимость. Следует несколько остановиться, видимо, на причине того внимания, которое было оказано математической строгости подхода.

С момента появления исторической статьи Эренферстов [15], качественная картина стала совершенно ясной, хотя с течением времени она и изменялась в деталях и уточнялась. Единственный вопрос, который остается нерешенным и до сих пор, является математическим вопросом (если не рассматривать вопроса об обобщениях уравнения Больцмана) и заключается он в следующем: вытекает ли необратимое уравнение Больцмана только из обратимой динамики частиц или необходимо еще привносить извне случайные воздействия?

Удивительно, как мало изменились за половину столетия основные идеи, изложенные Эренферстами в их статье [15]. Были отчетливо сформулированы необходимость введения дискретности плотности числа частиц  $nF_1$  и концепция почти неизбежности наблюдения маловероятного состояния в точке возврата. Однако это описание неизбежно запутывается в трудностях, концентрирующихся вокруг возвращений Пуанкаре и эргодичности, из-за толкования  $F_1$  как плотности числа частиц, а не как более простой плотности вероятности. Конечно, эргодическая проблема в настоящее время намного прояснилась. В частности, стало очевидным, что рассматривавшееся универсальное монотонное убывание к равновесию (имеет ли это место для  $t \rightarrow \infty$  или только для не слишком длинных времен) не имеет ничего общего с эргодичностью. Представляется оправданной необходимость введения дискретности  $F_1$ , когда эта функция трактуется как сингулярная плотность числа частиц, а сопутствующая неопределенность в определении  $H$ , возможно, делает совершенно необходимым вмешательство в уравнения движения с целью появления необратимости.

Прежде чем продолжить наше рассмотрение, целесообразно сделать несколько общих замечаний. Опишем сначала одну процедуру, которая потом окажется для нас полезной. Вместо того, чтобы поставить начальные условия для уравнения Лиувилля и затем наблюдать за эволюцией системы, мы будем ее периодически прерывать и привносить в нее возмущения. В частности, при каждом прерывании мы отмечаем значение  $F_1$ , но не меняем его, однако мы заменяем  $F_2(z_1, z_2)$  произведением  $F_1(z_1)F_1(z_2)$ . Другими словами, мы периодически привносим хаотичность. Период прерывания берется много большим, чем длительность представляемого столкновения, но в то же время много меньшим, чем среднее время между столкновениями. Тройными и более высокого порядка столкновениями в период между последовательными прерываниями можно пренебречь по сравнению с бинарными столкновениями, так что  $F_2$  удовлетворяет двухчастичному уравнению Лиувилля. Нетрудно проверить, что свойство хаотичности не нарушается двухчастичным уравнением Лиувилля для отрезков времени, не превышающих отрезка времени между прерываниями. С помощью такого искусственного приема мы решаем проблему последующей хаотичности (см. § 11). Заметим попутно, что при слишком большой частоте прерываний, мы получаем аппроксимацию уравнений гидродинамики, а не уравнение Больцмана.

В § 11 утверждалось, что свойство хаотичности распространяется на конечный интервал времени, когда  $n \rightarrow \infty$ . Это утверждение жела-

тельно уточнить путем оценки ошибок в свойстве хаотичности, выразив ее через  $n$  (или  $\sigma \sim 1/\sqrt{n}$ ). Прежде всего заметим, что корреляция между скоростями двух частиц, сблизившихся на расстояние порядка  $\sigma$ , имеет, по крайней мере, порядок  $\sigma$ . Это есть вероятность события, состоящего в том, что недавно произошло столкновение между одной и той же третьей частицей и каждой из двух данных частиц (очень возможно, что численное значение этой корреляции представляет собой произведение очень малого числа на  $\sigma$ , но это не меняет порядка такого члена при  $\sigma \rightarrow 0$ ). Для двух частиц, которые находятся на расстоянии порядка средней длины свободного пробега и стремятся друг к другу, эта корреляция имеет порядок  $\sigma^2$ . Эти оценки следуют непосредственно из формул § 11, в частности, см. рис. 1. Для частиц, которые разделены несколькими средними длинами свободного пробега, разумно ожидать, что корреляция убывает экспоненциально с ростом расстояния между частицами. Поскольку средняя длина свободного пробега является макроскопическим эталоном длины, оценка  $O(\sigma^2)$  для корреляции между частицами на любом фиксированном расстоянии не меняется при  $n \rightarrow \infty$ . В частности, даже если предположить, что хаотичность соблюдается абсолютно точно для  $t=0$ , в любой фиксированный последующий момент времени можно ожидать, что корреляция будет в общем иметь порядок  $O(\sigma^2)$  и  $O(\sigma)$  для смежных частиц.

Вероятно, первая серьезная математическая попытка вывести уравнение Больцмана была предпринята Кирквудом [40]. Отправной точкой служило уравнение Лиувилля, в основе метода лежало сглаживание по времени и связь с броуновским движением. Временное сглаживание и получающееся ограничение линейными отклонениями от равновесия, вероятно, существенны для общей теории жидкости, построению которой посвящена эта серия статей, однако не было сделано попытки устранить столь строгое ограничение в случае газов. Сглаживание служит той же цели, что и введение усеченного распределения, а именно, получению уравнения, в котором выступают только законченные столкновения; подробно рассмотрена возможность периодических циклов. Вопрос о молекулярном хаосе был строго сформулирован, но в значительной степени остался без ответа. В общем, можно сказать, что ко многим принципиально важным вопросам внимание было привлечено именно благодаря этим основополагающим статьям.

Совершенно иной подход к проблеме был предложен Боголюбовым [3]. Формально его подход аналогичен вириальному разложению по степеням плотности для равновесного состояния. Постулируется, что распределения более высокого порядка  $F_r$ ,  $r > 1$ , зависят только от  $F_1$ , что аналогично рассмотрению нормальных решений уравнений Больцмана (ср. гл. IV). Принципиальным моментом является принятие некоторого «граничного условия», заключающегося в том, что группа из  $r$  частиц, которая обладает достаточной дисперсностью, удовлетворяет соотношению  $F_r(z_1, \dots, z_r) = F_1(z_1) \dots F_1(z_r)$ , т. е. отдельные частицы являются статистически независимыми. Полученные уравнения являются обобщением уравнения Больцмана и, по-видимому, применимы к реальным газам. Член, учитывающий столкновения, представляет собой степенной ряд по плотности; первый член, по существу, совпадает с членом уравнения Больцмана, характеризующим эффект столкновения частиц (за исключением того, что координата  $\mathbf{x}$  не является одной и той же во всех аргументах), члены более высокого порядка последовательно учитывают столкновения трех частиц, четырех частиц и т. д. Решающий аргумент заключается в том, что любое распределение более высокого порядка  $F_r$  для  $r$  частиц, которые могут быть в контакте при обращении их движения во времени, в конце концов достигает такой степени дисперсности частиц, которая позволяет выразить  $F_r$  через  $F_1$ . Это и есть то условие

независимости, которое позволяет фактически рассматривать  $F_r$  как функционал от  $F_1$  и вывести уравнение для эволюции во времени одной только функции  $F_1$ , независимо от начальных значений  $F_r$  при  $r > 1$ .

Хотя такой подход и представляется очень остроумным, методика его описана недостаточно точно, чтобы можно было оценить его значение или оправданность. Несмотря на то что берется предел при  $n \rightarrow \infty$ , большой пользы эта операция не дает. Размер области увеличивается вместе с  $n$  так, чтобы сохранить фиксированную плотность числа частиц. Далее неявным образом вносится допущение, что во всякой фиксированной области во время этого предельного перехода  $F_1$  не меняется, что требует непрерывного переопределения  $F_1$  во вновь получаемом объеме. При этом предельном переходе молекулярный размер, средняя длина свободного пробега и макроскопический масштаб изменения по  $x$  остаются фиксированными, а увеличивается лишь размер области. Вследствие этого описанная процедура не кажется достаточно радикальным предельным процессом для получения функциональной зависимости  $F_r$  от  $F_1$ . Применение Боголюбовым граничного условия независимости весьма похоже на введение операции «прерывания», описанной ранее в этом параграфе (и вряд ли лучше оправдано). Для того чтобы дойти до членов порядка  $r$  в разложении по плотности  $\nu = n/V$ , необходимо выполнить условия независимости до порядка  $\nu^{r-1}$  для несколько более раннего момента времени, когда частицы дисперсны. Однако, даже если условие независимости в точности выполняется в начальный момент времени, то столкновения, как мы уже видели, будут нарушать его, по крайней мере, на порядок  $(\sigma/L)^2$  ( $L$  — средняя длина свободного пробега, остающаяся постоянной в предыдущем предельном переходе), но это есть  $O(\nu^2)$ . В лучшем случае мы можем надеяться, что  $F_2$  и  $F_3$  есть функционалы от  $F_1$ . Для распределений более высокого порядка это уже не так. Так или иначе, правомочность ограничения двумя членами боголюбовского разложения связана скорее с более точным анализом проблемы последующей хаотичности (или последующей независимости), чем с использованием указанного выше предельного перехода.

Даже для членов первого порядка по  $\nu$  данная проблема формулируется по иному, чем в § 7. Разложение по  $\nu$  является разложением в окрестности средней длины свободного пробега, *большой* по сравнению с макроскопическими изменениями. Это весьма необычный предельный случай, исключающий все проблемы, к которым обычно применяют уравнение Больцмана. Тем не менее, в результате фиксирования местных макроскопических градиентов и при наличии роста средней длины свободного пробега Боголюбов получает обобщение уравнения Больцмана, в котором значения аргумента  $x$  в функциях  $f$ ,  $f_1$ ,  $\bar{f}$  и  $\bar{f}_1$  берутся различными. Возможно, что Боголюбов имеет в виду предел, в котором конечные макроскопические градиенты накладываются на градиенты, масштаб которых порядка средней длины свободного пробега (как в § 7); это могло бы дать уравнение, которое явилось бы естественным обобщением обычного уравнения Больцмана. Однако доказательства пока еще нет, и даже как формальное уравнение это обобщение уравнения Больцмана представляется слишком трудным для получения из него практических результатов. К тому же сходимость аналогичного (виртуального) метода разложения для равновесного случая не имеет существенного значения в интересующей нас проблеме неравновесного состояния, так как в равновесном случае заранее известно, что  $F_r$  не только является функционалом лишь от  $F_1$ , но есть точечная функция термодинамического состояния.

Довольно похожий подход был предложен М. С. Грином [26]. Предельный переход здесь выполняется так же, как у Боголюбова, далее делается опять-таки разложение в ряд по плотности, но рассматри-

вается случай только пространственной однородности. Это является сильным ограничением, но за счет этого устраняется необходимость переопределения  $F_1$  по мере увеличения области. По тем же самым причинам, что указаны выше, постулируемая зависимость  $F_r$  от  $F_1$  при  $r > 3$  представляется сомнительной. Из формул Грина следует, что плотностное разложение аналогично разложению в степенной ряд по времени. Поэтому можно предполагать, что решение вплоть до тройных соударений будет хорошей аппроксимацией только для малого числа времен столкновений. Однако в работе широко используется предельное поведение этих членов для больших отрезков времени. Это, по-видимому, связано с вопросом о перестановке пределов, что требует особой осторожности. В работе дается превосходное и подробное описание тройных столкновений. Вполне возможно, что здесь модификация уравнения Больцмана является формально правильной. Анализ условия независимости (т. е. последующей хаотичности) проведён более тщательно, чем у Боголюбова, но специальных оценок ошибок не дано. В частности, не освещены трудности, связанные с функцией  $F_n$ , которая должна расти экспоненциально с ростом  $n$  (ср. § 10).

Вернемся теперь к предельному переходу § 7. Если эволюция  $F_1$  во времени действительно самоопределяется с точностью до первого порядка по  $\sigma$ , то тройные столкновения могут быть введены с помощью следующей схемы прерываний. Используем обособленное трехчастичное уравнение Лиувилля для  $F_3$  как дополнение к точному уравнению для  $F_1$  и  $F_2$ . Решение прерывается на интервалах времени, которые велики по сравнению с  $\sigma$ , но малы по сравнению с единицей.

При этом каждый раз в качестве начальных условий используются соотношения

$$F_2(z_1, z_2) = F_1(z_1)F_1(z_2);$$

$$F_3(z_1, z_2, z_3) = F_1(z_1)F_1(z_2)F_1(z_3).$$

Проведение этой операции позволяет обобщить уравнение Грина для тройных столкновений на случай пространственной неоднородности. Однако такой подход отличен от метода Боголюбова.

Г. Л. Фришем [18] была предложена потенциально ценная идея, заключающаяся во введении параметра  $\lambda$  в уравнения для распределения  $F_r$  таким образом, чтобы этот параметр «частично экранировал» группу из  $r$  частиц от  $(r+1)$ -ой частицы. Степенной ряд по  $\lambda$  дает формулы, которые в общих чертах напоминают разложение в ряд по времени. Для того чтобы отойти от окрестности  $t=0$ , по-видимому, нужно ввести гипотезу о хаотичности или независимости.

Совершенно иное направление исследований было предложено Ван-Ховом [66] для квантовомеханических систем и Брутом и Пригожиным [6], [7] — для классических систем. В работе [6] Брут выводит «производящее» уравнение («Master» equation), а не уравнение Больцмана. Это уравнение заменяет уравнение Лиувилля и очень напоминает уравнение Больцмана. Однако оно может быть написано только для пространственно однородного случая. В  $\Gamma$  — пространстве соблюдается строгий детерминизм: каждой точке  $Z(0)$  соответствует единственная последующая точка  $Z(t)$ . Это не имеет места для пространства с более низкой размерностью, например, в пространстве скоростей  $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ . Точка  $\Xi(0)$  имеет много образов  $Z(0)$ , и последующая точка  $\Xi(t)$  не является единственной. Брут формально показывает, что в пределе при  $n \rightarrow \infty$  и  $v = n/V \rightarrow 0$  «движение» точки  $\Xi$  удовлетворяет стохастическому марковскому процессу. Согласно этому процессу вероятность того, что за время  $dt$  осуществится переход из состояния  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)$  в состояние  $(\xi_1', \xi_2', \xi_3, \dots, \xi_n)$ , где  $(\xi_1', \xi_2')$  представляет собой возможный исход законченного бинарного столкновения между частицами с  $\xi_1$  и  $\xi_2$ ,

определяется обычным поперечным сечением столкновения, находимым из уравнения Больцмана. Этот аргумент очень нагляден, но он игнорирует математические трудности, упоминавшиеся в § 10. Возмущения вероятности, т. е. отклонения вероятностного распределения, связанные, например, со столкновениями более высокого порядка, опускаются, если они имеют место только на множествах малой меры. Однако если  $F_1$  не является равновесным распределением, то только множества малой меры представляют для нас интерес, поэтому из-за отсутствия более тщательных оценок погрешности «производящее» уравнение можно считать правомочным только для равновесного состояния.

Это уравнение представляется интересным и само по себе как постулированное стохастическое уравнение. Исходя из этого уравнения, Кац [37] смог получить пространственно однородное уравнение Больцмана (главным образом, путем проверки последующей хаотичности для этого стохастического уравнения), предполагая наличие начальной хаотичности. Это доказывает внутреннюю связь между двумя интересными стохастическими процессами, но необходимо еще выяснить связь с уравнением Лнувилля.

В работе [7] Брут и Пригожин вводят малый связующий параметр  $\lambda$  в межмолекулярный потенциал, который предполагается настолько гладким, что происходят только касательные столкновения. Пользуясь анализом Фурье и разложением в ряд по степеням  $\lambda$ , авторы оказываются в состоянии получить уравнение Фоккера—Планка для  $F_1$  в пространственно однородном случае. Оно связано с теорией уравнения Больцмана, поскольку можно формально показать, что при наличии только касательных столкновений член уравнения Больцмана, описывающий эффект столкновения, приобретает форму дифференциального оператора второго порядка, как и в уравнении Фоккера—Планка. Результаты Брута и Пригожина получены для больших времен, определяемых соотношением  $\lambda^2 t = \text{const}$ ; интерпретируя  $\lambda$  как меру диаметра молекул, можно видеть, что это согласуется с предельным процессом § 7. Основная идея здесь заключается в том, что корреляции более высокого порядка (определяемые коэффициентами Фурье более высокого порядка) остаются малыми, если они были малы в начальный момент. Этот результат необходимо сравнить со свойством последующей хаотичности.

Такой подход представляется очень наглядным и является мощным инструментом, однако и в этом случае предельный переход осуществляется довольно-таки неосторожно. Досадный экспоненциальный рост  $F_n$ , вероятно, будет находить свое отражение в возможности появления очень больших значений коэффициентов Фурье высокого порядка.

## Глава II

### ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА\*

#### § 15. СВОЙСТВА БИНАРНЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ

Общие свойства бинарных столкновений, независимые от конкретного вида межмолекулярных сил, являются следствием законов сохранения количества движения и энергии. Для двух молекул равной массы они могут быть записаны как

$$\xi + \xi_1 = \xi' + \xi'_1; \quad (15.1)$$

$$\xi^2 + \xi_1^2 = (\xi')^2 + (\xi'_1)^2. \quad (15.2)$$

\* Более полное изложение дано ниже, в статье Л. Вальдмана «Явление переноса в газах при средних давлениях».

Здесь под  $(\xi, \xi_1)$  будем понимать значения скоростей перед столкновением, а под  $(\xi', \xi_1')$  — после столкновения. Из уравнений (15.1), (15.2) вытекает полная симметрия между  $(\xi, \xi_1)$  и  $(\xi', \xi_1')$ . Если считать  $(\xi, \xi_1)$  заданными, то для определения  $(\xi', \xi_1')$  мы имеем систему из четырех уравнений [(15.1) является векторным, а (15.2) — скалярным уравнением] с шестью неизвестными. Поэтому можно ожидать, что мы получим двухпараметрическое семейство решений. Эти два параметра проще всего ввести с помощью единичного вектора  $\alpha$ , направленного вдоль вектора изменения скорости  $\xi$ :

$$\xi' - \xi = \alpha A. \quad (15.3)$$

Можно исключить  $A$  и получить для уравнений (15.1), (15.2) явное параметрическое решение, зависящее только от параметра  $\alpha$ . Из уравнения (15.1) находим

$$\xi_1' - \xi_1 = -\alpha A \quad (15.4)$$

и из уравнения (15.2)

$$\xi^2 + \xi_1^2 = (\xi + \alpha A)^2 + (\xi_1 - \alpha A)^2.$$

При условии, что  $A \neq 0$ , имеем

$$A = \alpha \cdot V, \quad (15.5)$$

где

$$V \equiv \xi_1' - \xi. \quad (15.6)$$

Подстановка этих результатов в уравнения (15.3), (15.4) приводит нас к искомому решению уравнений (15.1), (15.2):

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \xi + \alpha(\alpha \cdot V); \\ \xi_1' &= \xi_1 - \alpha(\alpha \cdot V). \end{aligned} \right\} \quad (15.7)$$

Эта параметризация решений уравнений (15.1), (15.2) не является однозначной. Большая окружность  $\alpha \cdot V = 0$  соответствует единственному решению (тождественному). Все другие решения входят дважды: один раз на полусфере  $\alpha \cdot V > 0$  и другой раз — на полусфере  $\alpha \cdot V < 0$ . Оба значения  $\alpha$  и  $-\alpha$  соответствуют одному и тому же решению. Однако если потребовать, чтобы вектор  $\alpha$  имел направление  $\xi' - \xi$ , то должно выполняться условие

$$\alpha \cdot (\xi' - \xi) > 0. \quad (15.8)$$

Это устраняет неопределенность и делает параметризацию однозначной (исключая случай  $\alpha \cdot V = 0$ ). Связь между параметризацией через  $\alpha$  (направление апсиды) и через  $\omega$  [параметр плоскости столкновения, см. уравнение (3.9)] будет определена позже.

Заметим, что уравнение (15.7) представляет собой линейное преобразование шестимерного пространства  $(\xi, \xi_1)$  самого в себя. Нетрудно найти и обратное преобразование. Имеем

$$V' \equiv \xi_1' - \xi_1 = \xi_1 - \xi - 2\alpha(\alpha \cdot V) = V - 2\alpha(\alpha \cdot V),$$

откуда следует

$$\alpha \cdot V' = -\alpha \cdot V. \quad (15.9)$$

Подставляя это соотношение в уравнение (15.7), находим

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi' + \alpha(\alpha \cdot V'); \\ \xi_1 &= \xi_1' - \alpha(\alpha \cdot V'); \\ V' &= \xi_1' - \xi'. \end{aligned} \right\} \quad (15.10)$$

Другими словами, при фиксированном  $\alpha$  (или с обратным знаком) линейное преобразование  $(\xi, \xi_1)$  в  $(\xi', \xi_1')$  является своей собственной инверсией. Для того чтобы параметризация согласно условию (15.8) была однозначной, в системе (15.10) по сравнению с решениями (15.7) необходимо переменить знак. Отсюда сразу же следует, что для фиксированного  $\alpha$  (или с обратным знаком) якобиан преобразования равен единице:

$$\frac{\partial(\xi', \xi_1')}{\partial(\xi, \xi_1)} = 1. \quad (15.11)$$

Напомним, что в уравнении Больцмана пара молекул перед столкновением находится в состоянии  $(\bar{\xi}, \bar{\xi}_1)$ , а после столкновения — в данном состоянии  $(\xi, \xi_1)$ , поэтому  $(\bar{\xi}, \bar{\xi}_1)$  можно теперь отождествить с состоя-

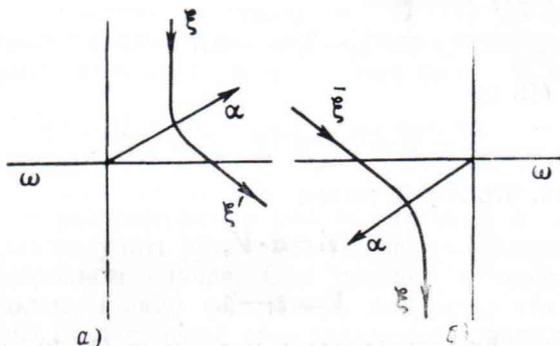


Рис. 4. Обращенные столкновения

нием  $(\xi', \xi_1')$ , которое является *результатом* столкновения с начальным состоянием  $(\xi, \xi_1)$  при условии, однако, что знак  $\alpha$  изменен на противоположный. Связь между этими преобразованиями представлена на рис. 4, а и б.

Имеется очень простая (и очень полезная) геометрическая интерпретация преобразования (15.7). Будем рассматривать  $(\xi, \xi_1)$  как пару точек в трехмерном пространстве, а не как одну точку в шестимерном пространстве. Непосредственно из уравнений (15.7) следует, что точки  $\xi, \xi_1, \xi', \xi_1'$  находятся в простой геометрической связи, представленной на рис. 5. Задав  $\xi$  и  $\xi_1$ , построим сферу с диаметром  $\xi_1 - \xi$ . Геометрическим местом пары точек  $(\xi', \xi_1')$ , которые могут получиться в результате столкновения частиц со скоростями  $\xi$  и  $\xi_1$ , являются все пары диаметрально расположенных точек на этой сфере.

Уравнения (15.1) и (15.2) и их геометрическую интерпретацию целесообразно сформулировать заново следующим образом. Каждая из пяти функций  $\psi_r, r=0, 1, 2, 3, 4$ , где

$$\left. \begin{aligned} \psi_0 &= 1; \\ \psi_1 &= \xi_i; \\ \psi_4 &= \xi_i^2, \end{aligned} \right\} i = 1, 2, 3 \quad (15.12)$$

обладает свойством

$$\psi(\xi) + \psi(\xi_1) = \psi(\xi') + \psi(\xi_1'). \quad (15.13)$$

Геометрически это означает, что сумма значений  $\psi$  постоянна на диаметрально противоположных точках каждой сферы. Такая функция  $\psi$  носит название *сумматорного инварианта*. Справедливо и обратное положение. Всякий сумматорный инвариант является линейной ком-

бинацией пяти функций  $\psi$ , [22], [39]. Это обстоятельство в дальнейшем будет неоднократно использовано.

Уравнение Больцмана в действительности нельзя рассматривать как уравнение до тех пор, пока не будет установлена связь между параметром  $\alpha$ , который входит аргументом в функции  $\bar{f}$  и  $\bar{f}_1^{2*}$ , и переменной интегрирования  $d\omega$ . Чтобы сделать это, введем сферические координаты с началом в молекуле  $\xi$  и возьмем  $V$  в качестве полярной оси. В частности, определим широту  $\vartheta$  соотношением

$$\alpha \cdot V = V \cos \vartheta \quad (15.14)$$

и введем произвольное начало для долготы  $\epsilon$ . Тогда имеем:

$$d\omega = r dr d\epsilon. \quad (15.15)$$

Напомним, что параметр столкновения  $r$  есть координата точки, в которой  $\omega$  пересекается асимптотой траектории  $\xi_1$  (рис. 6; траектория изображена для сил притяжения).

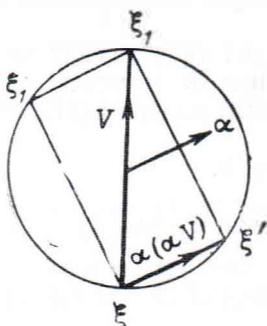


Рис. 5. Преобразование скоростей

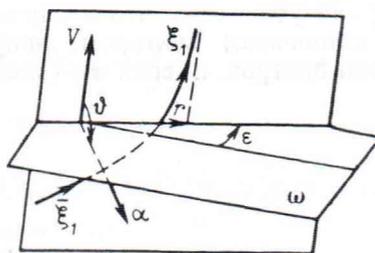


Рис. 6. Параметры столкновения

Необходимо отдавать себе отчет в том, что координатные оси привязаны к представляющей молекуле  $\xi$  в положении  $x$  (ср. вывод члена, учитывающего столкновения в § 3) и не перемещаются вместе с какой-либо конкретной молекулой в процессе столкновения. Переменные  $\epsilon$ ,  $\vartheta$  (а также  $V$ ) входят явным образом в аргумент  $f$ . Решение обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих бинарное столкновение, даст угол отклонения, равный  $\pi - 2\vartheta$ , как функцию от  $V$  и  $r$ . Если эта функция монотонна, то обратным преобразованием из нее можно найти  $r(\vartheta, V)$ . Заменим  $r$  на  $\vartheta$  при  $V = \text{const}$  в выражении для  $d\omega$ :

$$d\omega = r dr d\epsilon = r(\vartheta, V) \left| \frac{\partial}{\partial \vartheta} r(\vartheta, V) \right| d\vartheta d\epsilon. \quad (15.16)$$

После этого уравнение Больцмана можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{m} \int B(\vartheta, V) (f' f'_1 - f f_1) d\vartheta d\epsilon d\xi_1, \quad (15.17)$$

где

$$B(\vartheta, V) \equiv V r \left| \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \right|. \quad (15.18)$$

Напомним, что  $f$  является плотностью распределения массы. Переменные интегрирования теперь выражены в явном виде. В этой формуле как обычно переменная  $\xi$  отождествляется с  $\xi'$ . Функция  $B(\vartheta, V)$  зави-

\* Будем использовать обозначения  $\bar{f}$  для  $f(\xi)$ ,  $\bar{f}_1$  для  $f(\xi_1)$ ,  $f'$  для  $f(\xi')$  и  $f'_1$  для  $f(\xi'_1)$ .

сит от межмолекулярного потенциала и тесно связана с дифференциальным поперечным сечением столкновения.

Если межмолекулярные силы являются чисто отталкивающими, то  $\vartheta$  изменяется монотонно по  $r$ , так что преобразование (15.16) правомерно. Если же сила меняет знак, то отображение плоскости  $\omega$  на сферу  $\alpha$  не является однозначным. В такой ситуации мы, с одной стороны, можем сохранить первоначальную переменную  $r$ , не вводя переменной  $\vartheta$ , в результате чего аргумент будет сложной функцией переменных интегрирования. С другой стороны, мы можем определить якобиан  $\left| r \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \right|$  как многозначную функцию от  $\vartheta$  и вновь получить формулу (15.17), определяя  $B(\vartheta, V)$ , как сумму нескольких значений, которые может принимать  $r \left| \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \right|$  при данном  $\vartheta$ . Эта сумма, конечно, есть та величина, которая наблюдалась бы в эксперименте, поскольку невозможно различить две молекулы, появляющиеся с одним и тем же углом  $\vartheta$ , даже если их траектории (т. е. параметры столкновения  $r$ ) будут различными.

Нетрудно убедиться, что в случае упругих сферических молекул  $\alpha$  является единичным вектором, направленным в момент соударения вдоль линии центров, и если  $\sigma$  — молекулярный диаметр [11], [45], то

$$B(\vartheta, V) = \sigma^2 V \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta. \quad (15.19)$$

Для молекул, отталкивающихся по степенному закону

$$X = \frac{K}{r^s}, \quad s > 3, \quad (15.20)$$

можно показать, что

$$B(\vartheta, V) = kmV^* b \frac{db}{d\vartheta}, \quad (15.21)$$

где  $k$  и  $\kappa$  — молекулярные константы, связанные с  $K$  и  $s$  соотношениями

$$k = \frac{1}{m} \left( \frac{2K}{m} \right)^{2/s-1}; \quad \kappa = \frac{s-5}{s-1}, \quad (15.22)$$

а функция  $b(\vartheta)$  определяется неявным образом соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \vartheta(b) = \int_0^{\beta_0} \frac{d\beta}{\left[ 1 - \beta^2 - \frac{2}{s-1} \left( \frac{\beta}{b} \right)^{s-1} \right]^{\frac{1}{2}}}; \\ 1 - \beta_0^2 - \frac{2}{s-1} \left( \frac{\beta_0}{b} \right)^{s-1} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.23)$$

В этом случае уравнение Больцмана принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = k \int V^* (f' f'_1 - f f_1) b db d\xi_1. \quad (15.24)$$

Преимуществом этого специального закона действия сил является разделение  $B(\vartheta, V)$  на произведение степени  $V$  и функции только от  $\vartheta$ . В частности, специальный случай  $\kappa=0$ , т. е.  $s=5$ , так называемых *максвелловских молекул* имеет своей отличительной чертой то, что  $B$  есть функция только от  $\vartheta$ .

Необходимо заметить, что, исключая случай конечно действующих сил, интеграл  $\int d\omega = \int r dr d\varepsilon$  бесконечен, это означает, что бесконечным является и интеграл  $\int B(\vartheta, V) d\vartheta$ . Этот факт свидетельствует только о том, что полное поперечное сечение столкновений является бесконечным. Следствием этого является то, что член, учитывающий столкновения в уравнении Больцмана, сходится только условно, положительные и отрицательные его части по отдельности расходятся.

## § 16. СООТНОШЕНИЯ СИММЕТРИЧНОСТИ

Удобно ввести билинейную форму

$$J(f, g) \equiv \frac{1}{2m} \int V(f'g'_1 + f_1g' - fg_1 - f_1g) d\omega d\xi_1. \quad (16.1)$$

Тогда учитывающий столкновения член уравнения Больцмана может быть записан в виде  $J(f, f)$ . Выбрав функцию  $\varphi(\xi)$ , определим

$$J_\varphi(f, g) \equiv \int \varphi(\xi) J(f, g) d\xi = \frac{1}{2m} \int \varphi V(f'g'_1 + f_1g' - fg_1 - f_1g) d\omega d\xi d\xi_1. \quad (16.2)$$

Из уравнения (15.7) следует, что замена  $\xi$  на  $\xi_1$  приводит к замене  $\xi'$  на  $\xi'_1$  ( $V$  меняет знак). Напомним также, что преобразование (15.7) является свсим собственным преобразованием инверсии, таким образом, замена  $(\xi, \xi_1)$  на  $(\xi', \xi'_1)$  преобразует  $(\xi', \xi'_1)$  в  $(\xi, \xi_1)$ . Отсюда следует, что величина

$$(f'g'_1 + f_1g' - fg_1 - f_1g)$$

не меняется при перестановке  $\xi$  и  $\xi_1$  и меняет знак при перестановке  $(\xi, \xi_1)$  и  $(\xi', \xi'_1)$ . В каждом случае величина  $V$  не меняется (на рис. 5 видим, что  $V' = V$ ). В итоге, вспомнив, что якобиан преобразования между  $(\xi, \xi_1)$  и  $(\xi', \xi'_1)$  равен единице, приходим к следующим различным формам для  $J_\varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} J_\varphi &= \frac{1}{2m} \int \varphi(\xi) V(f'g'_1 + f_1g' - fg_1 - f_1g) d\omega d\xi d\xi_1 = \\ &= \frac{1}{2m} \int \varphi(\xi_1) V(f'g'_1 + f_1g' - fg_1 - f_1g) d\omega d\xi d\xi_1 = \\ &= -\frac{1}{2m} \int \varphi(\xi') V(f'g'_1 + f_1g' - fg_1 - f_1g) d\omega d\xi d\xi_1 = \\ &= -\frac{1}{2m} \int \varphi(\xi'_1) V(f'g'_1 + f_1g' - fg_1 - f_1g) d\omega d\xi d\xi_1. \end{aligned} \right\} \quad (16.3)$$

Здесь вторая (по порядку) форма получается в результате подстановки  $(\xi, \xi_1) \leftrightarrow (\xi_1, \xi_1')$ , третья—за счет замены  $(\xi, \xi_1) \leftrightarrow (\xi', \xi'_1)$ , последняя форма является результатом обеих замен. Отсюда

$$J_\varphi = \frac{1}{2m} \int \frac{1}{2} (\varphi + \varphi_1) V(f'g'_1 + f_1g' - fg_1 - f_1g) d\omega d\xi d\xi_1; \quad (16.4)$$

$$J_\varphi = \frac{1}{2m} \int \frac{1}{4} (\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi'_1) V(f'g'_1 + f_1g' - fg_1 - f_1g) d\omega d\xi d\xi_1. \quad (16.5)$$

Обращая процесс столкновений, убеждаемся в справедливости

$$J_{\varphi} = \frac{1}{2m} \int \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi'_1 - \varphi - \varphi_1) V (f g_1 + f_1 g) d\omega d\xi d\xi_1; \quad (16.6)$$

$$J_{\varphi} = \frac{1}{2m} \int (\varphi' - \varphi) V (f g_1 + f_1 g) d\omega d\xi d\xi_1. \quad (16.7)$$

В частности, из формы (16.5) следует, что  $J_{\varphi}$  равняется нулю, если  $\varphi$  есть сумматорный инвариант (15.13).

### § 17. УРАВНЕНИЯ СОХРАНЕНИЯ

Массовая плотность и макроскопическая скорость потока среды определяется соотношениями

$$\rho(\mathbf{x}, t) \equiv \int f(\xi, \mathbf{x}, t) d\xi; \quad (17.1)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv \int \xi f(\xi, \mathbf{x}, t) d\xi. \quad (17.2)$$

Более высокие моменты функции  $f$  удобнее всего определяются через относительную скорость

$$c \equiv \xi - \mathbf{u}. \quad (17.3)$$

Заметим, что

$$\int c f d\xi = 0. \quad (17.4)$$

Тогда моменты вплоть до четвертого порядка суть

$$P_{ij} \equiv \int c_i c_j f d\xi; \quad (17.5)$$

$$S_{ijk} \equiv \int c_i c_j c_k f d\xi; \quad (17.6)$$

$$Q_{ijkl} \equiv \int c_i c_j c_k c_l f d\xi. \quad (17.7)$$

В частности,  $P_{ij}$  есть тензор напряжений, а свернутый третий момент

$$q_i \equiv \frac{1}{2} S_{irr} = \int \frac{1}{2} c_i c^2 f d\xi \quad (17.8)$$

есть вектор *теплового потока*. Физически  $P_{ij}$  представляет собой среднюю скорость потока  $i$ -й компоненты количества движения в  $j$ -ом направлении через единицу площади, а  $q_j$  — среднюю скорость потока кинетической энергии в  $j$ -ом направлении, обе скорости потока измеряются в координатной системе, движущейся со скоростью  $\mathbf{u}$ . Поскольку рассматривается совершенный газ, межмолекулярные силы не дают вклада в напряжения или в поток энергии.

Интересно также вычислить потоки количества движения и энергии через элемент поверхности, которая остается неподвижной, т. е. вычислить моменты  $f$  относительно  $\xi$ , а не  $c$ . Имеем

$$\int \xi_i \xi_j f d\xi = \int (c_i + u_i)(c_j + u_j) f d\xi = P_{ij} + \rho u_i u_j \quad (17.9)$$

и

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2} \xi_i \xi^2 f d\xi &= \int \frac{1}{2} (c_i + u_i)(c^2 + 2c \cdot u + u^2) f d\xi = \\ &= q_i + u_j P_{ji} + \rho u_i \left( e + \frac{1}{2} u^2 \right), \end{aligned} \quad (17.10)$$

где

$$e = \frac{1}{\rho} \int \frac{1}{2} c^2 f d\xi \quad (17.11)$$

есть *внутренняя энергия* единицы массы (т. е. энергия измеряется в системе координат, движущихся с жидкостью). Из уравнения (17.9) следует, что поток количества движения через поверхность является суммой макроскопического потока количества движения  $\rho u_i u_j$  и потока, измеряемого в системе координат, движущихся со средой. Соотношение (17.10) показывает, что полный поток энергии через поверхность складывается из макроскопического переноса энергии  $\rho u_i \left( e + \frac{1}{2} u^2 \right)$  вместе со средой, плюс работа  $u_j P_{ji}$ , совершаемая поверхностными силами, плюс тепловой поток  $q_i$ .

Напомним, что каждая из функций  $\psi_r$  уравнений (15.12) является сумматорным инвариантом. Если умножить уравнение Больцмана на любую из этих функций и проинтегрировать по  $\xi$ , то член, учитывающий столкновения, исчезает. Например, взяв  $\psi_0 = 1$ , получаем

$$\int \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \xi_r \frac{\partial f}{\partial x_r} \right) d\xi = 0$$

и, меняя местами операции интегрирования и дифференцирования, находим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_r} (\rho u_r) = 0. \quad (17.12)$$

Это макроскопическое уравнение сохранения массы. Аналогично, взяв  $\psi_i = \xi_i$  и  $\psi_4 = \frac{1}{2} \xi^2$  и используя зависимости (17.9) и (17.10), находим соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_r} (\rho u_i u_r + P_{ir}) = 0 \quad (17.13)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} u^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_r} \left[ \rho u_r \left( e + \frac{1}{2} u^2 \right) + u_s P_{sr} + q_r \right] = 0, \quad (17.14)$$

представляющие собой, соответственно, уравнения сохранения количества движения и энергии. Полученные уравнения (17.12)–(17.14) полностью совпадают с соответствующими макроскопическими уравнениями, однако мы получили их согласно определениям (17.5), (17.8) и (17.11) для случая совершенного газа.

Забегая вперед, дадим определения скалярного давления

$$p \equiv \frac{1}{3} P_{rr}, \quad (17.15)$$

приведенного тензора напряжений (или девиатора напряжений)

$$p_{ij} \equiv P_{ij} - p \delta_{ij}, \quad (17.16)$$

который обладает тем свойством, что

$$p_{rr} = 0, \quad (17.17)$$

и температуры

$$RT \equiv \frac{p}{\rho} = \frac{2}{3} e. \quad (17.18)$$

### §18. Н-ТЕОРЕМА

Введем в рассмотрение величины\*

$$H(\mathbf{x}, t) \equiv \int f \log f d\xi; \quad (18.1)$$

$$\bar{H}(t) \equiv \int H d\mathbf{x}; \quad (18.2)$$

$$H_i(\mathbf{x}, t) \equiv \int \xi_i f \log f d\xi. \quad (18.3)$$

Функции  $H$  и  $H_i$  характеризуют локальные свойства среды, тогда как  $\bar{H}$  характеризует свойства всей системы\*\*.  $H_i$  представляет собой скорость потока  $f \log f$  через поверхность. Для того чтобы найти уравнение для скорости изменения  $H$ , умножим уравнение Больцмана на  $(1 + \log f)$  и проинтегрируем по  $\xi$ :

$$\int (1 + \log f) \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \xi_r \frac{\partial f}{\partial x_r} \right\} d\xi = \int (1 + \log f) J(f, f) d\xi.$$

Что касается левой части этого уравнения, то, как легко заметить,

$$(1 + \log f) \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (f \log f);$$

$$(1 + \log f) \xi_r \frac{\partial f}{\partial x_r} = \frac{\partial}{\partial x_r} (\xi_r f \log f).$$

Поэтому, меняя местами операции дифференцирования и интегрирования, имеем

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H_r}{\partial x_r}.$$

В правой части преобразуемого уравнения можно опустить единицу, так как она является сумматорным инвариантом, а из уравнения (16.5) следует:

$$\int \log f J(f, f) d\xi = -\frac{1}{8m} \int V (f' f'_1 - f f_1) \log \left( \frac{f' f'_1}{f f_1} \right) d\omega d\xi d\xi_1 \equiv -G.$$

Ясно, что функция  $G$  не отрицательна, она положительна, если только соотношение

$$f' f'_1 = f f_1 \quad (18.4)$$

не выполняется тождественно. Соединяя оба результата, получаем

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H_r}{\partial x_r} = -G. \quad (18.5)$$

Интегрирование этого соотношения по области  $D$  с границей  $\Sigma$  дает

$$\frac{d\bar{H}}{dt} + \oint_{\Sigma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = - \int_D G dV. \quad (18.6)$$

Если граничное условие таково, что на  $\Sigma$  поток  $\mathbf{H}$  равен нулю (например, зеркальное отражение), то тогда  $\bar{H}$  — убывающая функция

\* Отступая от нашего общего правила (см. сноску на стр. 7), мы обозначили величину вектора  $H_i$  через  $H$ .

\*\*  $\bar{H}$  в сущности то же, что и  $H_T$  (см. гл. I), за исключением того, что эта величина определена относительно массовой плотности  $f$ , а не плотности вероятности  $F_1$ .

времени, пока уравнение (18.4) не удовлетворяется для всех  $x$  и всех  $\xi$ . Уравнение (18.4) означает, что  $\log f$  является сумматорным инвариантом. Отсюда следует, что

$$\log f = a + b \cdot \xi + c \xi^2, \quad (18.7)$$

где параметры  $a$ ,  $b$  и  $c$  могут быть функциями от  $x$  и  $t$ . Это означает, что  $f$  есть локально максвелловское распределение; параметры  $a$ ,  $b$ ,  $c$  можно легко связать с плотностью, скоростью и температурой [см. уравнение (18.8)].

Можно показать, что только локально максвелловские решения уравнения Больцмана, т. е. локально максвелловские решения уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_r \frac{\partial f}{\partial x_r} = 0$$

являются абсолютно максвелловскими (т. е. решениями, независимыми от времени и пространства) или описывают вращение как твердого тела (т. е. вращение, при котором температура постоянна, а давление и скорость меняются обычным при вращении образом, что может быть только в случае вполне определенных граничных условий), или являются некоторыми другими более специфическими решениями, которые не могут иметь места в ограниченной области [22]. Следовательно, при соответствующих граничных условиях  $\bar{H}$  монотонно убывает, пока не достигается равновесие.

Исходя из определений (17.1), (17.2), (17.11) и (17.18), легко убедиться, что максвелловское (или локально максвелловское) распределение имеет вид

$$f^{(0)} = \frac{q}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{(\xi - u)^2}{2RT} \right\}. \quad (18.8)$$

Простые выкладки показывают, что для локально максвелловского  $f^{(0)}$  функция  $H^{(0)}$  определяется выражением

$$H^{(0)} = \int f^{(0)} \log f^{(0)} d\xi = -\frac{1}{R} qS, \quad (18.9)$$

где  $S$  — термодинамическая энтропия единицы массы, а  $R$  — газовая константа также для единицы массы. Аналогичные вычисления приводят к результату:

$$H_r^{(0)} = u_r H^{(0)}, \quad (18.10)$$

т. е.  $H_r^{(0)}$  — скорость, с которой течение переносит  $H^{(0)}$ . Более хорошая аппроксимация для  $H_r$  может быть получена, если в уравнении (18.3) оставить  $f$  и заменить  $\log f$  на  $\log f^{(0)}$ , так что

$$H_r^{(1)} = \int \xi_r f \log f^{(0)} d\xi = H_r^{(0)} - \frac{q_r}{RT}. \quad (18.11)$$

В этом случае дополнительно к конвекции  $S$  появляется еще и классический член теплового потока. В общем же случае для неравновесных состояний нет простой связи между  $H$  и  $S$ , а также между  $H_r$  и конвекцией  $S$  и тепловым потоком [ср. уравнения (28.38), (28.39)].

## ТЕОРИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ

## §19. ОБЗОР

Исходя из физической интерпретации уравнения Больцмана, легко предположить общий вид начальных и граничных условий, с которыми мы можем встретиться. Эти предположения, конечно, должны быть доказаны математически, чтобы убедиться в том, что уравнение Больцмана точно отображает физическое явление. Такие же эвристические выводы можно сделать непосредственно из самого уравнения. Запишем его в форме

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = J, \quad (19.1)$$

где

$$J \equiv \frac{1}{m} \int V (f' f_1 - f f_1') d\omega d\xi_1. \quad (19.2)$$

В интегральную часть входят только как параметры переменные  $(\mathbf{x}, t)$ , а в дифференциальную часть — переменная  $\xi$ . Другими словами, учитывающий столкновения член  $J$  воздействует на функцию  $f(\xi)$  в тот же самый момент времени, который является «текущим» для  $\mathbf{x}$  и  $t$  в дифференциальных членах. Это дает возможность предположить, что соответствующие начальные и граничные значения будут определяться только дифференциальной частью и будут такими же, как и для уравнения кнудсеновского газа:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 0. \quad (19.3)$$

В частности, можно предположить, что задаются начальное распределение  $f(\xi, \mathbf{x})$  и граничное условие, которое определяет отраженную «половину» распределения через падающую «половину». Простейшим примером может служить зеркальное отражение, для которого граничное условие задается в виде

$$f[\xi - 2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \xi), \mathbf{x}_0, t] = f(\xi, \mathbf{x}_0, t); \quad \xi \cdot \mathbf{n} > 0. \quad (19.4)$$

Здесь  $\mathbf{x}_0$  — точка на границе,  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль в точке  $\mathbf{x}_0$ , условие  $\xi \cdot \mathbf{n} > 0$  определяет падающие молекулы. Часто рассматривают также *стохастические* граничные условия. Под этим понимают граничное условие, соответствующее микроскопической ситуации, при которой скорость отраженной молекулы не определяется однозначно ее скоростью при падении на границу. Такие граничные условия будут содержать, в общем случае, несколько параметров, из которых некоторые будут описывать состояние граничной поверхности, а другие — ее структуру. Состояние граничной поверхности обычно выражается термодинамически, т. е. через ее температуру, однако, если нужно, то такое ограниченное описание можно было бы сделать более детальным\*. Структура поверхности обычно определяется посредством небольшого числа *коэффициентов аккомодации* или более абстрактно с помощью стохастического ядра

$$f(\xi, \mathbf{x}_0, t) = \int K(\xi, \eta) f(\eta, \mathbf{x}_0, t) d\eta; \quad \eta \cdot \mathbf{n} > 0; \quad \xi \cdot \mathbf{n} < 0. \quad (19.5)$$

\* Из недавних экспериментов [47] следует, что состояние адсорбированной пленки, возможно, придется определять так же, как и состояние поверхностных свойств вещества стенки.

Для того чтобы граничное условие зеркального отражения (19.4) входило в ядро (19.5) как частный случай, необходимо для  $K$  допустить возможность быть сингулярной функцией. В общем случае в качестве граничного условия следует принять условие, по которому определенная доля  $\alpha$  падающих молекул отражается зеркально, а оставшаяся  $(1-\alpha)$  часть молекул отражается согласно максвелловскому распределению при температуре стенки. Это соответствует ядру

$$K(\xi, \eta) = \alpha \delta(n \cdot \xi + n \cdot \eta) + (1 - \alpha) \frac{n \cdot \eta}{2\pi R^2 T_0^2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2RT_0}\right). \quad (19.6)$$

Это ядро содержит один параметр  $\alpha$ , характеризующий природу стенки, и еще один параметр  $T_0$ , который характеризует ее состояние. Множитель, стоящий перед экспонентой, показывает, что на поверхности не происходит накопления частиц (это свойство может нарушаться в случае пористых стенок или неустановившихся условий).

Можно обобщить условие (19.6) путем введения двух параметров стенки (т. е. двух коэффициентов аккомодации) в виде

$$K(\xi, \eta) = \alpha \delta(n \cdot \xi + n \cdot \eta) + (1 - \alpha) \frac{n \cdot \eta}{2\pi R^2 T_0^2} \exp\left\{-\frac{(\xi - U)^2}{2RT_0}\right\}. \quad (19.7)$$

Вплоть до настоящего момента молчаливо предполагалось, что стенка стационарна. Обобщение (19.4) и (19.6) на случай движущихся стенок очевидно: например, если стенка перемещается только в тангенциальном направлении, то выражение (19.7) является корректным обобщением (19.6), если  $U$  отождествить со скоростью стенки. Однако, рассматривая только тангенциальное движение стенки, можно взять  $U$  в качестве второго параметра, характеризующего материал, из которого изготовлена стенка; например, в этой формуле под  $U$  можно понимать некоторое среднее значение скорости стенки и скорости газа, смежного со стенкой, указывая тем самым на частичную аккомодацию количества движения.

Стохастическое граничное условие (19.5) иногда записывают через  $\xi f$ , а не через  $f$ , поскольку  $\xi f$  представляет собой скорость потока через элемент поверхности; обе формы записи, конечно, эквивалентны, если проведена соответствующая идентификация.

Для нас было бы весьма желательно показать существование единственного решения уравнения Больцмана в произвольной области при условии, что это решение удовлетворяет заданной функции распределения в начальный момент времени и некоторому граничному условию типа условий, только что обсуждавшихся. Кроме того, хотелось бы показать стремление к равновесию при  $t \rightarrow \infty$  для тех граничных условий, которые допускают возможность такого стремления (например, это не может иметь места для движущихся стенок в общем случае). Должно быть возможным выполнение законов постоянства полной массы и энергии, так же как и убывания  $H$ , если это допускается граничными условиями. Вопрос о степени математической общности является обоюдоострым. Если на начальное распределение  $f(\xi, \mathbf{x}, 0)$  наложить только очень слабые ограничения, то доказать что-либо существенное о решении  $f(\xi, \mathbf{x}, t)$  в общем случае невозможно. Так, например, мы не в состоянии показать, что энергия системы сохраняется постоянной, если не предполагать, что второй момент для  $f$  в начальный момент времени, т. е.  $\int \xi^2 f(\xi, \mathbf{x}, 0) d\xi d\mathbf{x}$ , конечен. С другой стороны, у уравнения Больцмана, несомненно, могут быть присущие ему определенные черты, придающие решению  $f(\xi, \mathbf{x}, t)$  свойства, которыми не обладает функция  $f(\xi, \mathbf{x}, 0)$ . Показано, например, для специального случая, рассмотренного

Карлеманом (см. ниже), что  $f$  будет строго положительной функцией,  $f > 0$ , для любого положительного времени  $t$ ,  $t > 0$ , несмотря на то, что в начальный момент времени, возможно, имелись области, в которых  $f$  была тождественным нулем. Это свойство существенно, когда мы рассматриваем вопрос о существовании временной производной для  $H$  [ср. (18.5)]. Возможно даже, что уравнение Больцмана обладает сглаживающими свойствами аналогично уравнению теплопроводности, но ничего подобного доказано не было. Для уравнения теплопроводности, как известно, негладкость начального распределения температуры не существенна, так как в следующие мгновения распределение становится аналитическим. С другой стороны, можно было бы ожидать возможности оценки приближения к равновесию как экспоненциального распада по времени. Говоря более точно (ср. § 22), должен иметь место распад некоторых свойств  $f$  на масштабе среднего времени между столкновениями, за которым следует окончательный распад до равновесного состояния на совершенно другом временном масштабе. В конце концов, необходимо суметь доказать все эти свойства, исходя только лишь из таких слабых ограничений, как природа межмолекулярных сил.

В настоящее время намеченная выше программа далеко не завершена\*. Тем не менее можно опробовать достаточное количество специальных задач, чтобы показать, что, идя по такому пути, в конце концов можно развить общую теорию, даже если каждый пример содержит только небольшое количество тех трудностей, которые объединены в общей проблеме\*\*.

Для того чтобы рассмотреть пространственно неоднородный случай, т. е. когда  $f$  зависит от  $x$ , мы должны будем ограничиться решением *в малом*, т. е. только для конечного временного интервала  $0 < t < T$ . Причиной этого ограничения является квадратичная зависимость учитываемого столкновения члена от  $f$ . Решение обыкновенного дифференциального уравнения  $\frac{df}{dt} = f^2$  резко растет после конечного отрезка времени.

Не следует надеяться получить решение уравнения Больцмана *в большом*, т. е. для всех времен, не используя в значительной мере неявного взаимного сокращения двух количеств, происходящего из-за того, что  $J$  представляет собой разность двух положительных членов, которые стремятся друг к другу при  $t \rightarrow \infty$  ( $J \rightarrow 0$ , если  $f$  становится распределением Максвелла). Это — более тонкий вопрос, чем может показаться с первого взгляда. С физической точки зрения многое говорит за следующее (см. § 26): мы можем ожидать, что  $f$  становится приближенно *локально* максвелловским распределением задолго до того, как достигается однородность по  $x$ . Последующее поведение должно быть аналогично поведению решения некоторой формы гидродинамических уравнений; для них, как известно, оценки роста исключительно трудны. Эти трудности исчезают в пространственно-однородном случае, для которого гидродинамика тривиальна.

Первой проблемой, к которой мы обратимся, является (§ 20) пространственно неоднородный случай *в малом*. Предполагается, что начальное распределение  $f$  равномерно ограничено максвелловским распределением, которое не зависит от  $x$ . В общем, этого достаточно, чтобы охватить по существу все гидродинамические (т. е. термодинамические) начальные состояния. Для простоты рассмотрения берется неограничен-

\* Существование решения в большом (на бесконечном отрезке времени) для пространственно зависимых постановок уравнения Больцмана в случае упругих сфер было отмечено Т. Карлеманом (Т. Карлеман, Математические вопросы кинетической теории газов, ИЛ, 1960). Методы очень сложны и, к сожалению, некоторые из аргументов приведены не полностью.

\*\* Противоположная точка зрения дается в работе [50].

ная область и *псевдомаксвелловские* молекулы. Эти ограничения весьма несущественны, и доказательство можно распространить на случай произвольных сил с ограниченным воздействием и ограниченной области со стохастическим граничным условием, лишь бы область не была слишком велика. Псевдомаксвелловские молекулы объединяют в себе математические черты максвелловских молекул (с отрицательной пятой степенью) и упругих сфер; полное поперечное сечение этих молекул является конечным, и функция  $B$  в уравнении (15.17) не зависит от  $V$ . Трудно поверить, что существуют молекулы, межмолекулярный потенциал которых объединяет все эти свойства. Тем не менее это очень полезная математическая модель (физическая искусственность этой модели, по-видимому, ранее не отмечалась).

Интересно отметить, что элементарные методы § 20 достаточны для доказательства существования решения в *большом* для линеаризованного уравнения Больцмана, которое применимо для малых отклонений от равновесного распределения. Это линейное уравнение рассмотрено, главным образом, с помощью методов разложения в ряд (обсуждающихся в гл. V), которые дают значительно более точную информацию в специальных случаях, но которые не поддаются общему анализу с помощью теорем существования. Теория существования для линеаризованного уравнения Больцмана в настоящей работе рассматриваться не будет.

В § 21 мы вернемся к решению уравнения Больцмана в *большом*, но ограничимся пространственно однородным случаем и снова возьмем псевдомаксвелловские молекулы. Первая теорема существования для этого основного класса была доказана Карлеманом [9], который рассматривал для случая упругих сфер как изотропные, так и однородные распределения ( $f$ —функция от скалярной величины скорости и времени). Однородный случай с псевдомаксвелловскими молекулами рассматривался Вайлдом [70], методика исследования была в значительной степени упрощена Моргенштерном [49]. Доказательство существования, данное в § 21, по существу то же самое, что и у Моргенштерна. Там же весьма подробно воспроизводится анализ Карлемана. Основным результатом этого анализа является вывод некоторых более тонких свойств решений в дополнение к доказательству их существования. Показано, например, что  $H = \int f \log f$  и  $\partial H / \partial t$  существуют и что  $H$  убывает монотонно, а  $f$  становится функцией Максвелла при  $t \rightarrow \infty$ . Более того, хотя  $f$  меняется не монотонно, найдена верхняя граница  $f$ , справедливая для всех времен и являющаяся очевидной функцией только от начальных значений  $f$ .

Два примера в § 20 и 21 выбраны из-за их математической простоты. Эта простота непосредственно связана с выбором псевдомаксвелловских молекул. Однородный случай (§ 21) можно, по-видимому, распространить на произвольные молекулы, если затратить некоторые усилия и использовать методику, аналогичную методике Карлемана. Специальный случай упругих сфер и изотропного распределения  $f$  уже исследован Карлеманом. С другой стороны, распространение решения неоднородной задачи (§ 20) на бесконечное время связано с огромными математическими трудностями даже для псевдомаксвелловских молекул. Если же ограничиться короткими отрезками времени, то распространение на более общие молекулы и ограниченные области влечет за собой лишь умеренные трудности.

Все упоминавшиеся методы теории существования являются итерационными и основаны на сведении уравнения Больцмана к чисто интегральному уравнению путем интегрирования дифференциальных членов. Первая процедура непосредственно подсказывается уравнением (19.1),

которое мы решаем, считая  $J(\xi, \mathbf{x}, t)$  заданным неоднородным членом дифференциального уравнения:

$$f(\xi, \mathbf{x}, t) = f(\xi, \mathbf{x} - \xi t, 0) + \int_0^t J[\xi, \mathbf{x} - \xi(t-s), s] ds. \quad (19.8)$$

С учетом того, что  $J$  определяется по уравнению (19.2), соотношение (19.8) представляет собой интегральное уравнение относительно  $f$ . Предполагается, что  $f(\xi, \mathbf{x} - \xi t, 0)$  заданная функция. Хотя это и представляет собой простейшую процедуру, в нее трудно включить то взаимное уничтожение двух количеств, которое имеет место в  $J$  как разности двух положительных членов. Даже для анализа в малом множитель  $V$ , который входит в  $J$ , причиняет массу хлопот, если не принимать во внимание это взаимное уничтожение. Важным исключением является случай псевдомаксвелловских молекул, где с помощью замены переменных  $V$  можно исключить.

Несколько более тонкая процедура заключается в расщеплении  $J$  на два члена и перенесении отрицательного члена в другую часть уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \nu f = L, \quad (19.9)$$

где

$$\nu \equiv \frac{1}{m} \int V f_1 d\omega d\xi_1 \quad (19.10)$$

и

$$L \equiv \frac{1}{m} \int V f' f'_1 d\omega d\xi_1. \quad (19.11)$$

Для того чтобы записать уравнение в такой форме, необходимо сначала перейти к усеченным межмолекулярным силам. Чтобы получить интегральное уравнение, мы просто решаем уравнение (19.9), рассматривая  $\nu$  и  $L$  как заданные функции от  $\xi, \mathbf{x}$  и  $t$ . Получаем\*

$$f(\xi, \mathbf{x}, t) = f[\xi, \mathbf{x} - \xi(t-t_0), t_0] \exp\left\{-\int_{t_0}^t \nu(\xi, \mathbf{x} - \xi(t-s), s) ds\right\} + \\ + \int_{t_0}^t L[\xi, \mathbf{x} - \xi(t-\tau), \tau] \exp\left\{-\int_{\tau}^t \nu[\xi, \mathbf{x} - \xi(t-s), s] ds\right\} d\tau. \quad (19.12)$$

Величина  $t_0$  используется вместо начального момента времени  $t=0$  для того, чтобы исключить в эту формулу случай ограниченной области. Если мы зададим  $(\xi, \mathbf{x}, t)$  и прочертим в обратном направлении траекторию частицы, обладающей этой скоростью, то найдем, что она либо пересекается с границей в момент времени  $t_0 > 0$ , либо продолжается до совокупности точек, представляющих собой начальные данные. В этом случае полагаем  $t=0$ . Физическая интерпретация уравнения (19.12) ясна. Число частиц в точке  $\mathbf{x}, t$ , обладающих скоростью  $\xi$ , складывается из тех частиц, которые начинают свое движение по направлению к точке  $\mathbf{x}$  в предшествующий момент времени  $s$  из точки  $\mathbf{x} - \xi(t-s)$  и не исчезают по дороге.

Экспоненциальный множитель определяет вероятность выживания. Дополнительно к интегрированию по  $s$  образуется также конечный вклад от тех частиц, которые начинают свое движение из состояния при  $t=0$  или от стенки в некоторый момент времени  $t_0$ , зависящий от  $\xi$  и  $\mathbf{x}$ . Оче-

\* Это было замечено Энскогом [17].

видно, что уравнение (19.12) необходимо дополнить граничным условием. Математически наиболее простым граничным условием было бы такое условие, когда отраженная половина распределения определялась бы *априорно* как не зависящая от притока частиц на стенку. При таком типе (физически искусственном) граничного условия известна в явном виде функция  $f[\xi, \mathbf{x} - \xi(t - t_0), t_0]$  в уравнении (19.12) точно так же, как в случае задачи с одними только начальными данными. Для физически более приемлемых граничных условий, как, например, описанных уравнением (19.5), функция  $f[\xi, \mathbf{x} - \xi(t - t_0), t_0]$  должна быть найдена как часть решения.

Следует отметить, что при наличии стохастического граничного условия даже случай газа Кнудсена представляет собой нетривиальную проблему. Локальное решение дифференциального уравнения есть

$$f(\xi, \mathbf{x}, t) = f[\xi, \mathbf{x} - \xi(t - t_0), t_0], \quad (19.13)$$

где траектория частицы прочерчивается обратно либо до  $t_0 = 0$ , либо до пересечения с границей в точке  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - \xi(t - t_0)$ . Поскольку распределение молекул, покидающих стенку, зависит от потока молекул, падающих на стенку, уравнение (19.13) связывает лишь значение  $f$  в одной точке со значением  $f$  в другой точке. Это можно записать как интегральное уравнение, но в менее удобной форме, используя граничное условие (19.5). Существование решения в большом легко устанавливается, поскольку задача является линейной. Однако приближение к равновесию (или к стационарному состоянию), которое подчиняется граничному условию, является более тонким вопросом. В специальном случае, когда отсутствует зависимость от времени и выполняется условие (19.6), задача значительно упрощается. Примем для простоты  $\alpha = 0$ . Определение  $f$  можно свести к определению граничной функции

$$Q(S) = \int_{\xi \cdot \mathbf{n} > 0} (\xi \cdot \mathbf{n}) f d\xi \quad (19.14)$$

с помощью интегрального уравнения вида

$$Q(S) = P(S) + \int L(S, S') Q(S') dS', \quad (19.15)$$

где  $P$  представляет собой поток через любые входы, а  $L$  — ядро, зависящее от геометрии [14].

Другая полезная интерпретация уравнения (19.12) заключается в следующем. Введем функцию

$$\mu(\tau) \equiv v[\xi, \mathbf{x} - \xi(t - \tau), \tau] \exp\left\{-\int_{\tau}^t v[\xi, \mathbf{x} - \xi(t - s), s] ds\right\}. \quad (19.16)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\int_{t_0}^t \mu(\tau) d\tau = 1 - \exp\left\{-\int_{t_0}^t v[\xi, \mathbf{x} - \xi(t - s), s] ds\right\}. \quad (19.17)$$

Уравнение (19.12) показывает, что  $f(\xi, \mathbf{x}, t)$  есть среднее значение с общим весом 1 двух функций: распределенного среднего функции

$$g(\tau) \equiv \frac{L[\xi, \mathbf{x} - \xi(t - \tau), \tau]}{v[\xi, \mathbf{x} - \xi(t - \tau), \tau]}, \quad (19.18)$$

взятого с весом  $\mu(\tau) d\tau$ ,  $t_0 < \tau < t$ , и распределенного среднего функции  $f[\xi, \mathbf{x} - \xi(t - t_0), t_0]$ , взятого с оставшимся весом.

Формула (19.12) записана в такой форме, которая применима также и к решениям уравнения Больцмана для не зависящих от времени установившихся течений. Мы просто опускаем третий аргумент (время) во всех функциях и везде, где еще встречается  $t$ , полагаем  $t=0$ . Параметр  $t_0$  имеет то же самое значение, что и раньше, это есть отрезок времени, требуемый для достижения границы из точки  $\mathbf{x}$  со скоростью —  $\xi$ . Величины  $s$  и  $\tau$  — просто переменные интегрирования.

Точное интегральное уравнение, используемое Карлеманом, имеет несколько форм, зависящих от производимых оценок. Величина  $v$  далее разбивается либо на сумму  $v_1 + v_2$ , где  $v_1$  — явная функция от  $\xi$ , а  $v_2$  может быть опущена для получения верхних оценок для  $f$ , либо на разность  $v_1' - v_2'$ , где  $v_1'$  — также явная функция, а  $v_2'$  опускается для получения нижних оценок для  $f$ . Конечно, пространственная зависимость при этом отсутствует.

Можно описать ступенчатую аппроксимацию решений уравнения Больцмана, которая представляет интерес, несмотря на то, что она не используется в каких-либо физических проблемах. Разобьем время на интервалы  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ . Возьмем вначале  $f(\xi, \mathbf{x}) = f_0$  и решим пространственно независимое уравнение Больцмана ( $\mathbf{x}$  является параметром) для  $t = t_1$ ; обозначим это решение через  $f_1^*(\xi, \mathbf{x})$ . Затем напомним  $f_1(\xi, \mathbf{x}) = f_1^*[\xi, \mathbf{x} - \xi(t_1 - t_0)]$ . Продолжим этот процесс, чередуя решения пространственно однородного уравнения Больцмана и уравнения свободного течения (газа Кнудсена). Можно ожидать сходимость к решению уравнения Больцмана при уменьшении временных интервалов. В целях аппроксимации вместо уменьшения интервала времени возьмем в качестве общего временного интервала  $t_n - t_{n-1}$  среднее время столкновения и вместо решения пространственно независимого уравнения Больцмана именно на этом интервале будем решать его для бесконечного времени на каждом шаге. Другими словами, при каждом  $\mathbf{x}$  мы заменим  $f$  эквивалентным локально максвелловским распределением и затем продолжаем его как свободное течение для следующего шага. Это будет некоторая аппроксимация точного решения, поскольку столкновениями на интервале одного времени столкновений можно полностью пренебречь (гипотеза свободно молекулярного течения) и в то же время можно ожидать получения законченного приближения к равновесию в интервале одного времени столкновений (гипотеза локально максвелловского распределения). Интересной особенностью этой процедуры является ее очень большое сходство с анализом на основе длины среднего свободного пробега, как это принято в элементарной кинетической теории.

## § 20. ПРОСТРАНСТВЕННО ЗАВИСИМЫЕ РЕШЕНИЯ В МАЛОМ

Введем сокращенные обозначения

$$[f] = f' f_1' - f f_1; \quad (20.1)$$

$$\{f\} = f' f_1' + f f_1. \quad (20.2)$$

Для псевдомаквелловских молекул можно написать

$$J = \int B(\vartheta) [f] d\vartheta d\varepsilon d\xi_1 \quad (20.3)$$

и

$$\int B(\vartheta) d\vartheta d\varepsilon = \beta, \quad (20.4)$$

где  $\beta$  есть конечная константа. Предположим, что функция  $f$  в начальный момент равномерно ограничена пространственно независимым распределением Максвелла:

$$f(\xi, \mathbf{x}, 0) < f^{(0)}(\xi). \quad (20.5)$$

На основе соотношения (19.8) образуем следующий итерационный процесс:

$$\left. \begin{aligned} f_{n+1}(\xi, \mathbf{x}, t) &= f_0(\xi, \mathbf{x} - \xi t) + \int_0^t J_n[\xi, \mathbf{x} - \xi(t-s), s] ds; \\ J_n(\xi, \mathbf{x}, t) &= \int B(\vartheta) [f_n] d\vartheta d\varepsilon d\xi_1. \end{aligned} \right\} \quad (20.6)$$

Чтобы начать итерации, вычисляем  $J_0$ , полагая

$$f_0 = f(\xi, \mathbf{x}_0, 0). \quad (20.7)$$

Доказательство существования можно сделать зависящим от следующей оценки. Если при заданных  $\mathbf{x}$  и  $t$  значение  $f$  удовлетворяет неравенству

$$f < 2f^{(0)}, \quad (20.8)$$

где  $f^{(0)}$  есть максвелловская граница (20.5), то

$$|J| < 8\beta R f^{(0)}, \quad (20.9)$$

где  $R$  — известная константа —

$$R = \int f^{(0)} d\xi. \quad (20.10)$$

Покажем это. Имеем

$$\begin{aligned} |J| &< \int B |f| d\vartheta d\varepsilon d\xi_1 < 4 \int B |f^{(0)}| d\vartheta d\varepsilon d\xi_1 = \\ &= 8 \int B f^{(0)} f_1^{(0)} d\vartheta d\varepsilon d\xi_1 = 8\beta R f^{(0)}. \end{aligned}$$

Ограничимся интервалом времени

$$0 < t < T = 1/8\beta R. \quad (20.11)$$

Можно показать, что в этом временном интервале все итерации удовлетворяют неравенству

$$f_n < 2f^{(0)}. \quad (20.12)$$

Вспользуемся методом индукции. Прежде всего отметим справедливость неравенства

$$f_0 < f^{(0)} < 2f^{(0)}.$$

Затем, предполагая, что  $f_n$  удовлетворяет неравенству (20.12), из уравнения (20.6) получаем

$$\begin{aligned} f_{n+1} &< f_0(\xi, \mathbf{x} - \xi t) + \int_0^t |J_n| ds < f^{(0)} + \\ &+ \int_0^t 8\beta R f^{(0)} ds = f^{(0)} + 8\beta R t f^{(0)} < 2f^{(0)}, \end{aligned}$$

чем и заканчивается доказательство.

Удобно ввести в качестве нормы функции  $g(\xi, x, t)$  максимальное значение функции  $|g|/f^{(0)}$  по всем  $\xi, x$  и  $t$  ( $0 < t < T$ ):

$$\|g\| = \max_{\xi, x, t} \left[ \frac{|g|}{f^{(0)}} \right]. \quad (20.13)$$

Составляя разности в соответствии с уравнением (20.6), находим

$$f_{n+1} - f_n = \int_0^t (J_n - J_{n-1}) ds; \quad (20.14)$$

$$J_n - J_{n-1} = \int B \{ [f_n] - [f_{n-1}] \} d\vartheta d\varepsilon d\xi_1. \quad (20.15)$$

Имеем

$$\begin{aligned} [f_n] - [f_{n-1}] &= f'_n f'_{1,n} - f_n f'_{1,n} - f'_{n-1} f'_{1,n-1} + f_{n-1} f'_{1,n-1} = \\ &= f'_n (f'_{1,n} - f'_{1,n-1}) + f'_{1,n-1} (f_n - f_{n-1}) - \\ &\quad - f_n (f_{1,n} - f_{1,n-1}) - f_{1,n-1} (f_n - f_{n-1}), \end{aligned}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} |[f_n] - [f_{n-1}]| &< f'_n |f'_{1,n} - f'_{1,n-1}| + f'_{1,n-1} |f_n - f_{n-1}| + \\ &\quad + f_n |f_{1,n} - f_{1,n-1}| + f_{1,n-1} |f_n - f_{n-1}|. \end{aligned}$$

Разделив обе стороны неравенства на  $f^{(0)} f_1^{(0)} = f^{(0)'} f_1^{(0)'}$  и воспользовавшись соотношениями (20.12) и (20.13), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\|[f_n] - [f_{n-1}]\|}{f^{(0)'} f_1^{(0)'}} &< 2 \|f'_{1,n} - f'_{1,n-1}\| + 2 \|f_n - f_{n-1}\| + 2 \|f_{1,n} - f_{1,n-1}\| + \\ &\quad + 2 \|f_n - f_{n-1}\|; \\ &= 8 \|f_n - f_{n-1}\|. \end{aligned}$$

Возвращаясь теперь к выражению (20.15), получаем

$$\left. \begin{aligned} |J_n - J_{n-1}| &< \int B |[f_n] - [f_{n-1}]| d\vartheta d\varepsilon d\xi_1; \\ &< 8 \|f_n - f_{n-1}\| \int B f^{(0)'} f_1^{(0)'} d\vartheta d\varepsilon d\xi_1; \\ &= 8\mathfrak{R} \|f_n - f_{n-1}\| f^{(0)'}, \end{aligned} \right\} \quad (20.16)$$

или

$$\|J_n - J_{n-1}\| < 8\mathfrak{R} \|f_n - f_{n-1}\|. \quad (20.17)$$

В то же время из уравнения (20.14) следует

$$|f_{n+1} - f_n| < \int_0^t |J_n - J_{n-1}| ds,$$

или

$$\|f_{n+1} - f_n\| < t \|J_n - J_{n-1}\|. \quad (20.18)$$

Окончательно

$$\begin{aligned} \|f_{n+1} - f_n\| &< 8\mathfrak{R} t \|f_n - f_{n-1}\|; \\ \|J_{n+1} - J_n\| &< 8\mathfrak{R} t \|J_n - J_{n-1}\|; \end{aligned}$$

и для любого  $\alpha$  из интервала  $0 < \alpha < 1$  имеем

$$\left. \begin{aligned} \|f_{n+1} - f_n\| &< \alpha \|f_n - f_{n-1}\|; \\ \|J_{n+1} - J_n\| &< \alpha \|J_n - J_{n-1}\|; \\ 0 &< t < \alpha T. \end{aligned} \right\} \quad (20.19)$$

Сравнивая с геометрическим рядом  $1/(1-\alpha)$ , мы приходим к выводу, что существуют функции  $f(\xi, \mathbf{x}, t)$  и  $J(\xi, \mathbf{x}, t)$  такие, что

$$\left. \begin{aligned} \|f - f_n\| &\rightarrow 0; \\ \|J - J_n\| &\rightarrow 0. \end{aligned} \right\} \quad (20.20)$$

Теперь из уравнения (20.6) легко заключить (вычитая  $f$  из обеих частей первого уравнения и  $J$  из обеих частей второго уравнения и вводя затем норму), что  $f$  и  $J$  удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} f(\xi, \mathbf{x}, t) &= f_0(\xi, \mathbf{x} - \xi t) + \int_0^t J[\xi, \mathbf{x} - \xi(t-s), s] ds; \\ J(\xi, \mathbf{x}, t) &= \int B(\vartheta)[f] d\vartheta d\varepsilon d\xi_1. \end{aligned} \right\} \quad (20.21)$$

Если  $f_0(\xi, \mathbf{x})$  непрерывна по своим аргументам, то нетрудно проверить, что  $f_1(\xi, \mathbf{x}, t)$  и все функции  $f_n$  и  $J_n$  в свою очередь непрерывны по  $(\xi, \mathbf{x})$ , а также по  $t$ . Вследствие равномерной сходимости  $f$  и  $J$  непрерывны. Из уравнения (20.1) следует, что производная по направлению  $\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$  существует (для того чтобы показать существование производных  $\partial/\partial t$  и  $\partial/\partial \mathbf{x}$  по отдельности, необходимо провести дополнительные оценки производных, аналогичные сделанным выше) и  $f$  удовлетворяет исходному уравнению Больцмана вместе с соответствующими начальными данными. Подобные выводы можно сделать, предполагая лишь измеримость  $f_0$  по Лебегу; решение  $f(\xi, \mathbf{x}, t)$  будет измеримым по Лебегу и будет существовать производная  $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)$ .

Очень легко показать, что это решение будет единственным в классе всех функций  $f(\xi, \mathbf{x}, t)$ , которые ограничены некоторой функцией Максвелла.

Используя в рассматриваемой проблеме интегральное уравнение (19.12) вместо (19.8), можно получить для  $f$  нижние оценки так же, как и верхние. Это позволяет провести оценку интегралов вида  $\int f \log g d\xi$  и таким образом показать существование  $H$  и  $\partial H/\partial t$ , а также и монотонное убывание  $H$ .

Ясно, что элементарность этого доказательства всецело определяется экспоненциальностью оценочных границ и предположением о псевдомаксвелловских молекулах, что в совокупности позволяет легко оценить  $J$ .

## § 21. ПРОСТРАНСТВЕННО ОДНОРОДНЫЕ РЕШЕНИЯ В БОЛЬШОМ [49]

Построим интерационный процесс для уравнения (19.12). Точнее говоря, возьмем уравнения

$$f(\xi, t) = f(\xi, 0) e^{-\nu t} + \int_0^t L(\xi, \tau) e^{-\nu(t-\tau)} d\tau; \quad (21.1)$$

$$L = \int B(\vartheta) f' f'_1 d\vartheta d\varepsilon d\xi_1, \quad (21.2)$$

где

$$\nu = \int B f_1 d\vartheta d\varepsilon d\xi_1 = \rho q; \quad (21.3)$$

$$q = \int f d\xi; \quad (21.4)$$

$$\beta = \int B d\vartheta d\varepsilon. \quad (21.5)$$

Для псевдомаксвелловских молекул  $\beta$  является заданной константой. При написании уравнения (21.1) мы уже используем определенное свойство решения, хотя в действительности следовало бы вначале доказать, что решение обладает таким свойством, а именно: мы предполагаем, что массовая плотность  $\rho$  постоянна во времени. Чтобы доказать это свойство, поступим следующим образом. Решим уравнение (21.1), считая  $\nu$  заданной константой, несвязанной с величиной  $q(t) = \int f(\xi, t) d\xi$ , которая должна быть определена. Затем мы найдем, что если константа  $\nu$  выбрана так, что в начальный момент времени  $\nu = \beta q$ , то решение обладает свойством  $q = \text{const}$  и  $\nu = \beta q$  для любого момента времени. Этим будет доказано, что уравнение (21.1) действительно является уравнением Больцмана для такого решения.

Будем предполагать, что  $f(\xi, 0)$  задана и интегрируема, так что

$$\int f(\xi, 0) d\xi = q(0), \quad (21.6)$$

и положим константу  $\nu$  равной

$$\nu = \beta q(0). \quad (21.7)$$

Итерации построим по схеме

$$f_{n+1} = f(\xi, 0) e^{-\nu t} + \int_0^t L_n e^{-\nu(t-\tau)} d\tau; \quad (21.8)$$

$$L_n = \int B f'_n f'_{1,n} d\vartheta d\varepsilon d\xi_1. \quad (21.9)$$

Чтобы начать итерирование, возьмем  $f_0 = 0$  и определим

$$q_n(t) = \int f_n(\xi, t) d\xi. \quad (21.10)$$

Нам желательно показать, что последовательное приближение протекает монотонно, т. е.

$$f_n(\xi, t) < f_{n+1}(\xi, t), \quad (21.11)$$

причем приближения  $q_n(t)$  равномерно ограничены:

$$q_n(t) < q(0). \quad (21.12)$$

Этим мы докажем сходимость  $f_n$  к пределу. Доказательство монотонности тривиально. Так как  $f_0 = 0$  и  $f_1 = f(\xi, 0) e^{-\nu t}$ , то  $f_1 > f_0$ . Используем теперь индукцию. Согласно уравнению (21.9) неравенство  $f_n > f_{n-1}$  имеет своим следствием  $L_n > L_{n-1}$ , откуда  $f_{n+1} > f_n$  согласно уравнению (21.8), чем и заканчивается доказательство монотонности.

Чтобы установить равномерную ограниченность, проинтегрируем уравнение (21.8):

$$q_{n+1} = q(0) e^{-\nu t} + \int_0^t e^{-\nu(t-\tau)} \left\{ \int L_n d\xi \right\} d\tau,$$

но

$$\int L_n d\xi = \int B f'_n f'_{1,n} d\vartheta d\varepsilon d\xi d\xi_1 = \int B f_n f_{1,n} d\vartheta d\varepsilon d\xi d\xi_1 = \beta q_n^2,$$

откуда

$$q_{n+1} = q(0) e^{-\nu t} + \int_0^t \beta q_n^2(\tau) e^{-\nu(t-\tau)} d\tau. \quad (21.13)$$

Снова используем индукцию. Имеем  $q_0(t) = 0 < q(0)$ . Предполагая, что  $q_n(t) < q(0)$ , находим из уравнения (21.13):

$$q_{n+1} < q(0) e^{-\nu t} + \beta q^2(0) \int_0^t e^{-\nu(t-\tau)} d\tau = q(0).$$

Опираясь на теорему Лебега о монотонной сходимости [63], мы заключаем, что  $f_n(\xi, t)$  сходится к функции  $f(\xi, t)$ , которая также удовлетворяет оценке

$$q(t) = \int f(\xi, t) d\xi \leq q(0). \quad (21.14)$$

Из сходимости  $f_n(\xi)$  к  $f(\xi)$  следует сходимость  $f'_n(\xi') f_n(\xi'_1)$  к  $f(\xi') f(\xi'_1)$  и согласно теореме Фубини [57] сходимость  $L_n$  к  $\int B f' f'_1 d\vartheta d\varepsilon d\xi_1$ . Отсюда вытекает, что  $f$  и  $L$  удовлетворяют уравнениям (21.1) и (21.2). Остается теперь показать, что  $q(t) = \text{const}$ . Интегрируя уравнение (21.1), имеем

$$q(t) = q(0) e^{-\nu t} + \int_0^t \beta q^2(\tau) e^{-\nu(t-\tau)} d\tau. \quad (21.15)$$

Сграничим сейчас  $t$  интервалом  $0 < t < T$ , где  $T$  выбирается так, чтобы  $e^{-\beta T} = \frac{1}{2}$ . Если  $\bar{q}$  есть наибольшая нижняя граница для  $q(t)$  при  $0 < t < T$ , то из уравнения (21.15) вытекает

$$\begin{aligned} q(t) &\geq q(0) e^{-\nu t} + \int_0^t \beta \bar{q}^2 e^{-\nu(t-\tau)} d\tau = q(0) e^{-\nu t} + \\ &+ \frac{\bar{q}^2}{q(0)} (1 - e^{-\nu t}) \geq \frac{1}{2} \left\{ q(0) + \frac{\bar{q}^2}{q(0)} \right\}, \end{aligned}$$

так как правая сторона есть монотонно убывающая функция от  $t$ . Однако это означает, что

$$\bar{q} \geq \frac{1}{2} \left\{ q(0) + \frac{\bar{q}^2}{q(0)} \right\},$$

откуда следует  $\bar{q} = q(0)$  и согласно уравнению (21.14)  $q(t) = q(0)$  в интервале  $0 < t < T$ . Повторяя эти рассуждения для интервала  $T < t < 2T$ , найдем, что величина  $q(t)$  постоянна во времени. В частности,  $\nu = \beta q$  для любого  $t$ . Из уравнения (21.1) мы заключаем, что  $f(\xi, t)$  дифференцируема по  $t$  и, следовательно, удовлетворяет исходному уравнению Больцмана.

Оставаясь в рамках изложенного метода, легко показать, что полученное решение является единственным только в классе решений, для которых известно, что  $\int f(\xi, t) d\xi$  есть константа. Иными словами, не показано, что однородное в начальный момент решение не может стать неоднородным [49]. Это является следствием выбора величины  $\nu$  такой, чтобы она была константой в уравнении (21.1), а не равной  $\beta q$ , какие бы значения  $q$  ни принимало. Однако из результатов § 20 мы знаем, что решение является единственным даже среди пространственно неоднородных решений (но только, если они ограничены сверху решением Максвелла).

Эта теорема существования является весьма общей, поскольку речь идет об ограничениях, накладываемых на начальные функции. Следует убедиться, что более «хорошо себя ведущие» начальные функции сохраняют свои свойства. Легко показать, что энергия  $\int \frac{1}{2} \xi^2 f(\xi, t) d\xi$  существует и постоянна при условии, что этот интеграл существует в начальный момент времени. Но очевидно, что предположение о существовании в начальный момент только функции  $H = \int f \log f d\xi$  (а не мажорируемости  $f$  какой-либо «хорошо ведущей себя» функцией) является достаточным для того, чтобы гарантировать существование этой функции и производной  $dH/dt$  для  $t > 0$ . Из § 20 мы знаем, что если ограничена максвелловским распределением, то этого достаточно, чтобы гарантировать существование  $H$ , но только на коротком отрезке времени. Доказательство этих свойств для любого отрезка времени, вероятно, можно осуществить, используя методы Карлемана.

Интересно отметить, что если разложить  $f$  по полиномам Эрмита по  $\xi$ , изменение каждого из коэффициентов Эрмита во времени определяется явным образом и экспоненциально для действительно максвелловских молекул (ср. гл. V); доказательство сходимости в этом случае, вероятно, могло бы быть получено без особых затруднений.

## Глава IV

# НОРМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

## § 22. ВВЕДЕНИЕ И ОБЗОР

Уже упоминалось, что для уравнения Больцмана основным масштабом длины является средняя длина свободного пробега, а основным масштабом времени — время между столкновениями. С другой стороны, в задачах обычной газовой динамики обе эти величины очень малы по сравнению с макроскопическими размерами. Имеется и более поразительное различие. Для уравнения Больцмана определить состояние — это значит задать функцию распределения  $f(\xi, \mathbf{x})$ ; определить же состояние для системы уравнений гидродинамики — значит задать первые пять моментов от  $f$ : плотность  $\rho(\mathbf{x})$ , скорость  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  и энергию  $e(\mathbf{x})$  или температуру  $T(\mathbf{x})$ . Такое сокращение информации, которая необходима для конкретизации гидродинамического состояния, свидетельствует о том, что имеет место предельный переход. Напомним, что (см. гл. I) существует несколько предельных случаев, которые ведут к уменьшению той максимальной степени подробности описания состояния системы, которая заложена в уравнении Лиувилля. Один из этих случаев дает уравнение Больцмана, а другой — уравнения гидродинамики. Должно оказаться возможным нахождение непосредственного математического перехода от уравнения Больцмана к системе гидродинамических уравнений для специального случая совершенного газа. Этот переход можно

найти только приняв, что время между столкновениями определенным образом стремится к нулю. Нам хотелось бы получить, что очень большая совокупность решений  $f(\xi, \mathbf{x}, t)$  уравнения Больцмана [одно для каждого начального значения  $f(\xi, \mathbf{x})$ ] сокращается до много меньшей совокупности, которая ставит в соответствие одну функцию  $f(\xi, \mathbf{x}, t)$  каждому набору начальных значений  $\rho(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\mathbf{x}), T(\mathbf{x})$ . Или посылку каждый момент времени  $t$  может быть принят за начальный, мы должны ожидать, что в пределе только одна функция распределения  $f(\xi, \mathbf{x})$  будет ставиться в соответствие каждому гидродинамическому состоянию  $\rho(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\mathbf{x}), T(\mathbf{x})$ . Другой вариант подхода заключается в том, что в пределе предполагают: производная по времени от  $f$  определяется не самой функцией  $f$  (которая соответствует уравнению Больцмана), а набором  $(\rho, \mathbf{u}, T)$ . Следующий шаг будет заключаться в окончательном исключении  $f$  и выводе, что производная по времени от  $(\rho, \mathbf{u}, T)$  определяется мгновенным значением  $(\rho, \mathbf{u}, T)$ ; это есть в точности гидродинамическое описание. Нельзя ожидать, что  $f(\xi, \mathbf{x})$  будет определяться численными значениями  $\rho, \mathbf{u}$  и  $T$  в той же самой точке  $\mathbf{x}$ ; в общем случае  $f(\xi)$  не будет точечной функцией пяти переменных  $\rho, \mathbf{u}, T$ , но  $f(\xi, \mathbf{x})$  будет функционалом от пяти функций  $\rho(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\mathbf{x}), T(\mathbf{x})$ . Фактически, если удовлетвориться простейшей системой уравнений гидродинамики, т. е. недиссипативными уравнениями Эйлера, то  $f(\xi)$  в пределе станет точечной функцией  $\rho, \mathbf{u}$  и  $T$ . Осложнения возникают при попытке получить более реалистичные уравнения гидродинамики.

Гильбертовское разложение (см. § 23) является формальным разложением решений уравнения Больцмана по степеням некоторого параметра [30]. Обычно предполагают, что таким разложением можно аппроксимировать все решения уравнения (возможно, одни лучше, другие хуже). Поразительной особенностью этого разложения, вытекающей из теоремы Гильберта о единственности, является то, что всякое решение, разложимое в принятой форме, однозначно определяется *одним только гидродинамическим состоянием*. Другими словами, это разложение отбирает именно те нормальные решения уравнения Больцмана, которые соответствуют гидродинамическому описанию. Пользуясь формальным расширением анализа Гильберта [20], можно непосредственно выразить напряжения и тепловой поток через последовательно повышающиеся по порядку градиенты  $\rho, \mathbf{u}$  и  $T$  (см. § 24). Подстановка этих выражений в уравнения (17.12)—(17.14) заканчивает исключение  $f$ , о котором говорилось выше, и дает последовательность совместимых уравнений гидродинамики. Эта задача исключения промежуточной функции  $f$  в том случае, если известно, что она зависит только от гидродинамических переменных и их градиентов, может быть решена более легко методом Энского [16]. В § 25 показывается, что обе эти процедуры идентичны. Принципиальное различие методов Гильберта и Энского заключается в том, что Энског постулирует существование функциональной зависимости  $f(\xi, \mathbf{x})$  от  $\rho(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\mathbf{x})$  и  $T(\mathbf{x})$ , которые разложимы в ряд по параметру, тогда как Гильберт выводит зависимость  $f$  от  $\rho, \mathbf{u}$  и  $T$ , предполагая только, что  $f$  разложима в ряд по этому параметру.

Внутри этих формальных операций имеется ряд математических тонкостей. Несмотря на то, что результаты § 24 (идентичные результатам Энского, но полученные иным образом) формально эквивалентны результатам, полученным Гильбертом (§ 23), математически они совершенно различны. Например, число граничных условий, которые можно накладывать по методу Гильберта, обычно не увеличивается с порядком аппроксимации, в то время как, хотя это и не является неизбежным, число граничных условий необходимо увеличивать по мере повышения порядка в последовательности уравнений Чепмена—Энского (см. § 33). Это экстраординарное различие вызвано казалось бы весьма

слабо различающимися способами усечения бесконечных рядов и превращения их в конечные последовательности.

Для того чтобы время между столкновениями молекул стало малой величиной, удобно ввести в уравнение Больцмана малый параметр  $\epsilon$  следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\epsilon} J. \quad (22.1)$$

Нас интересуют свойства решений этого уравнения при малых  $\epsilon$ . Если левая часть этого уравнения остается конечной при малом  $\epsilon$  (что отражает макроскопическое изменение гидродинамических переменных), то это означает, что  $J \rightarrow 0$  или  $f$  становится локально максвелловским распределением, а тогда эта функция полностью и притом явным образом определяется гидродинамическим состоянием, т. е. набором  $\rho(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ,  $T(\mathbf{x})$ . Таким образом, мы приходим к малому отклонению  $f$  от распределения Максвелла, которое после деления на  $\epsilon$  в уравнении (22.1) определяет конечные гидродинамические свойства газа. Следовательно, необходимо найти это малое отклонение от локально максвелловского распределения.

Важной особенностью такого перехода к гидродинамике является наличие двух различных масштабов времени. Первый масштаб — время столкновения\* представляет собой порядок стретка времени, необходимого для того, чтобы первоначальное немаксвелловское течение установилось. После этого вступают в силу уравнения гидродинамики. Здесь снова появляется время распада, но уже много большее, чем в предыдущем случае. Легко оценить, что макроскопическое время распада, обычно определяемое как результат действия вязкости и теплопроводности, имеет порядок квадрата характерного макроскопического времени, деленного на время столкновения. Другими словами, при  $\epsilon \rightarrow 0$  мы одновременно уменьшаем время столкновения и увеличиваем макроскопическое время распада. Первый период мог бы быть описан как период, в течение которого величина  $N$  распадается до термодинамической энтропии  $S$ . Второй период определяется распадом  $S$  до своего максимального значения. Это разделение двух временных масштабов возможно только тогда, когда  $\epsilon$  достаточно мало.

В § 26 дается асимптотическое решение уравнения Больцмана при малом  $\epsilon$ . Наиболее характерной чертой является связь между гладким поведением функций почти во всей области и несколькими типами пограничных слоев. Существуют пограничные слои около действительно физических границ, начальные «пограничные» слои вблизи  $t=0$  и, наконец, третий тип пограничных слоев находится в среде потока (ударные волны). Вблизи одного из этих пограничных слоев поведение решения, грубо говоря, описывается экспонентой по  $1/\epsilon$ . В другом месте оно аппроксимируется степенными рядами. Формальное вычисление этих степенных рядов наиболее прямым путем осуществляется по Гильберту или Энскогу (см. § 24 и 25). Однако асимптотический анализ делает ясным переход от общих решений уравнения Больцмана к нормальным решениям при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Возможно, что точная оценка области применимости нормальных решений в конце концов могла бы быть получена из такого типа анализа.

Важно заметить, что при большом  $\epsilon$  для решения уравнения Больцмана необходимы совершенно другие процедуры (подобные описанным в гл. III и V). Если  $\epsilon$  не мало, то два временных масштаба сливаются, и различные пограничные слои не могут быть выделены из всего течения в целом.

\* Здесь и далее под временем столкновения понимается средний интервал времени между столкновениями (прим. ред.)

Чтобы получить формальное асимптотическое разложение, введем в уравнение Больцмана малый параметр

$$\dot{f} = \frac{1}{\varepsilon} J(f, f), \quad (23.1)$$

где введено сокращенное обозначение

$$J = \frac{\partial f}{\partial t} + \xi_r \frac{\partial f}{\partial x_r}. \quad (23.2)$$

В дальнейшем будем широко использовать квадратичный характер  $J(f, f)$ . В частности [см. уравнение (16.1)]:

$$J[(f_1 + f_2), (g_1 + g_2)] = J(f_1, g_1) + J(f_1, g_2) + J(f_2, g_1) + J(f_2, g_2). \quad (23.3)$$

Далее введем формальное разложение

$$f = f^{(0)} + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots, \quad (23.4)$$

подставим его в уравнение (23.1) и, приравняв коэффициенты при равных степенях  $\varepsilon$ , получим

$$J[f^{(0)}, f^{(0)}] = 0; \quad (23.5)$$

$$2J[f^{(0)}, f^{(1)}] = \dot{f}^{(0)}; \quad (23.6)$$

$$\sum_{m=0}^n J[f^{(m)}, f^{(n-m)}] = \dot{f}^{(n-1)}. \quad (23.7)$$

Перепишем равенство (23.7) в виде

$$2J[f^{(0)}, f^{(n)}] = \dot{f}^{(n-1)} - \sum_{m=1}^{n-1} J[f^{(m)}, f^{(n-m)}], \quad (23.8)$$

чтобы отделить член с  $f^{(n)}$  от остальных членов, связанных с более низкими порядками. Согласно уравнению (23.5)  $f^{(0)}$  является локально максвелловским распределением. Определим пять параметров с помощью соотношений

$$\left. \begin{aligned} Q^{(0)} &= \int f^{(0)} d\xi; \\ Q^{(0)} \mathbf{u}^{(0)} &= \int \xi f^{(0)} d\xi; \\ 3Q^{(0)} RT^{(0)} &= 2Q^{(0)} e'^{(0)} = \int [\xi - \mathbf{u}^{(0)}]^2 f^{(0)} d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (23.9)$$

Здесь используются верхние индексы, так как нет неотразимого довода, говорящего за то, что можно отождествить с моментами  $f$  эти пять параметров, связанных с  $f^{(0)}$ ; эта возможность оставляется открытой.

Чтобы найти  $f^{(1)}$  из уравнения (23.6), необходимо решить интегральное уравнение. Из соотношения (23.8) следует, что точно такое же интегральное уравнение (с другими неоднородными членами) должно быть решено для того, чтобы найти  $f^{(n)}$ , считая  $f^{(0)}, \dots, f^{(n-1)}$  уже найденными функциями. Можно показать, что это есть уравнение Фредгольма

с симметричным ядром\* в тех случаях, когда оно выражено через переменную  $f^{(1)}/f^{(0)}$ , или, в общем случае, через

$$g^{(n)} = \frac{f^{(n)}}{f^{(0)}}. \quad (23.10)$$

Положение осложняется тем фактом, что нуль является пятикратным собственным значением. Однородное уравнение

$$J[f^{(0)}, f^{(0)}g] = 0 \quad (23.11)$$

имеет пять линейно независимых решений:

$$g = \sum_{r=0}^4 \gamma_r \psi_r, \quad (23.12)$$

где  $\psi_r$  определяется согласно уравнению (15.12). Чтобы доказать это, рассмотрим

$$J_g[f^{(0)}, f^{(0)}g] = \int g J d\xi = 0.$$

Используя уравнение (16.5) и привлекая равенство

$$f^{(0)} f_1^{(0)} = f^{(0)'} f_1^{(0)'},$$

находим, что  $J_g$  можно представить в форме

$$\int V f^{(0)} f_1^{(0)} (g + g_1 - g' - g_1')^2 d\omega d\xi d\xi_1 = 0.$$

Отсюда следует, что уравнение (23.11) может удовлетворяться только в том случае, если  $g$  является сумматорным инвариантом. Коэффициенты  $\gamma_r$  могут быть функциями от  $x$  и  $t$ . Из теории уравнений Фредгольма известно, что решение неоднородного уравнения

$$J[f^{(0)}, f_g^{(0)}] = h \quad (23.13)$$

существует только в том случае, когда  $h$  удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int \psi_r h d\xi = 0. \quad (23.14)$$

Если эти условия выполняются, то имеется пятипараметрическое семейство решений

$$g = \bar{g} + \sum \gamma_r \psi_r. \quad (23.15)$$

Частное решение, назовем его  $\bar{g}$ , можно сделать единственным, наложив на него условие

$$\int \psi_r \bar{g} f^{(0)} d\xi = 0. \quad (23.16)$$

В результате мы находим, что для каждой функции  $f^{(n)}$  (включая  $f^{(0)}$ ) имеется пятипараметрическое семейство решений. Однако, чтобы гарантировать существование решения для  $f^{(4)}$ , необходимо наложить на  $f^{(0)}$  пять условий; в свою очередь, для нахождения  $f^{(n)}$  необходимо накладывать пять условий на  $f^{(n-1)}$ . Эти условия будут иметь форму дифференциальных уравнений в частных производных по  $x$  и  $t$  для каждой совокупности пяти параметров.

\* См. работы [30] для упругих сфер и [11] для общего случая.

Случай  $f^{(0)}$  отличен от других, поскольку пять параметров входят иным образом. Условие совместности для  $f^{(1)}$

$$\int \psi_r \dot{f}^{(0)} d\xi = 0 \quad (23.17)$$

дает пять уравнений сохранения (17.12) — (17.14) для специального случая локально максвелловского распределения  $f$ . Из того, что  $f^{(0)}$  является локально максвелловским распределением, следует

$$\left. \begin{aligned} P_{ij} &= p \delta_{ij}; \\ \rho_i &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23.18)$$

Подстановка этих соотношений в уравнения сохранения дает гидродинамические уравнения Эйлера (т. е. без диссипации и с постоянством энтропии на тех линиях тока, которые не пересекаются с ударной волной). Эти уравнения удовлетворяются значениями  $\rho^{(0)}$ ,  $\mathbf{u}^{(0)}$  и  $T^{(0)}$ .

Продолжим рассмотрение по индукции, считая, что  $f^{(0)}, \dots, f^{(n-1)}$  уже однозначно определены. Имеем

$$f^{(n)} = \bar{f}^{(n)} + \sum \gamma_r^n \psi_r f^{(0)}, \quad (23.19)$$

где  $\bar{f}^{(n)}$  есть решение (23.8), однозначно определяемое через  $f^{(0)}, \dots, f^{(n-1)}$  условиями

$$\int \psi_r \bar{f}^{(n)} d\xi = 0. \quad (23.20)$$

Интегральное уравнение для  $f^{(n+1)}$  имеет решение только при условии

$$\int \psi_r \left\{ \dot{f}^{(n)} - \sum_{m=1}^n J[f^{(n+1)}, f^{(n+1-m)}] \right\} d\xi = 0.$$

Члены с  $J$  пропадают согласно уравнению (16.5), так как  $\psi_r$  являются сумматорными инвариантами. Остаются члены

$$\int \psi_r \dot{f}^{(n)} d\xi = 0$$

или

$$\int \psi_r \dot{\bar{f}}^{(n)} d\xi + \sum_s \int [\dot{\gamma}_s^n \psi_r \psi_s f^{(0)} + \gamma_s^n \dot{\psi}_r \psi_s f^{(0)}] d\xi = 0. \quad (23.21)$$

Вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} a_{rs} &= \int \psi_r \psi_s f^{(0)} d\xi; \\ b_{rs}^k &= \int \xi_k \psi_r \psi_s f^{(0)} d\xi; \\ c_{rs} &= \int \psi_r \dot{\psi}_s f^{(0)} d\xi = \frac{\partial a_{rs}}{\partial t} + \frac{\partial b_{rs}^k}{\partial x_k}; \\ d_r^n &= \int \psi_r \dot{\bar{f}}^{(n)} d\xi = \frac{\partial}{\partial x_k} \int \psi_r \xi_k \bar{f}^{(n)} d\xi = \frac{d e_{rk}^n}{d x_k}, \end{aligned} \right\} \quad r, s = 0, 1, 2, 3, 4; \quad k = 1, 2, 3 \quad (23.22)$$

находим, что уравнение (23.21) можно записать в виде

$$a_{rs} \frac{\partial \gamma_s^n}{\partial t} + b_{rs}^k \frac{\partial \gamma_s^n}{\partial x_k} + c_{rs} \gamma_s^n + d_r^n = 0 \quad (23.23)$$

или, используя другие соотношения из системы (23.22):

$$\frac{\partial}{\partial t} (a_{rs} \gamma_s^n) + \frac{\partial}{\partial x_k} (b_{rs}^k \gamma_s^n + e_{rk}^n) = 0, \quad (23.24)$$

т. е. приходим к системе пяти дифференциальных уравнений ( $r=0, 1, 2, 3, 4$ ) для  $\gamma_r^n$ .

Следует заметить, что  $d_r^n$  (или  $e_{rk}^n$ ) известны только как функции от  $f^{(0)}, \dots, f^{(n-1)}$ . Детерминант, составленный из  $a_{rs}$ , может быть легко вычислен; он отличен от нуля, если  $f^{(0)}$  не есть тождественный нуль. Поэтому  $\gamma_r^n(\mathbf{x}, t)$  и, следовательно,  $f^{(n)}(\xi, \mathbf{x}, t)$  однозначно определяются решением системы (23.23) при условии, что известны начальные значения  $\gamma_r^n(\mathbf{x}, 0)$ .

Введем теперь обозначение

$$Q_r^n = \int \psi_r f^{(n)} d\xi \quad (23.25)$$

наряду с

$$Q_r = \int \psi_r f d\xi. \quad (23.26)$$

Имеем

$$Q_r = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n Q_r^n, \quad (23.27)$$

а также

$$\left. \begin{aligned} Q_0 &= Q; \\ Q_i &= Q u_i; \\ Q_4 &= 2Q \left( e + \frac{1}{2} u^2 \right). \end{aligned} \right\} i=1,2,3 \quad (23.28)$$

Из выражений (23.19) и (23.20) находим, что

$$Q_r^n = a_{rs} \gamma_s^n. \quad (23.29)$$

Поскольку детерминант из  $a_{rs}$  отличен от нуля, мы можем считать  $Q_r^n$  и  $\gamma_r^n$  взаимозаменяемыми [уравнение (23.24) дает временную производную для  $Q_r^n$  в явном виде]. В частности, мы приходим к заключению, что единственное решение для гильбертовского разложения существует вплоть до членов порядка  $n$  при условии, что мы знаем начальные значения для *всех* величин  $Q_r^{(0)}(\mathbf{x}), Q_r^1(\mathbf{x}), \dots, Q_r^n(\mathbf{x})$ . Это, на первый взгляд, находится в противоречии с гидродинамической постановкой, согласно которой только для пяти величин, а именно  $Q_r(\mathbf{x})$ , можно задавать начальные значения. Тем не менее, обе эти формулировки совместимы. Мы показали, что функции  $f^{(n)}(\xi, \mathbf{x}, t)$  однозначно определяются начальными значениями  $Q_r^n(\mathbf{x}, 0)$ . С другой стороны, мы нашли, что степенные ряды по  $\varepsilon$

$$f[(\xi, \mathbf{x}, t), \varepsilon] = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f^{(n)}(\xi, \mathbf{x}, t) \quad (23.30)$$

однозначно определяются значениями

$$Q_r[(\mathbf{x}, 0), \varepsilon] = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n Q_r^n(\mathbf{x}, 0). \quad (23.31)$$

Нужно показать, что при фиксированном значении  $\varepsilon$  функция  $f[(\xi, \mathbf{x}, t), \varepsilon]$  однозначно определяется начальными значениями  $Q_r[(\mathbf{x}, 0), \varepsilon]$ . Допустим, что ряды (23.30) и (23.31) сходятся или, по крайней мере, представляют собой однопараметрическое семейство решений уравнения

Больцмана. Рассмотрим теперь уравнение Больцмана, в котором вместо  $\epsilon$  появляется параметр  $\mu$ . Если следовать только что описанной процедуре, то получим единственное решение уравнения

$$F = \frac{1}{\mu} J(F, F) \quad (23.32)$$

с начальными значениями

$$\left. \begin{aligned} \int F^{(0)} \psi_r d\xi &= q_r[(\mathbf{x}, 0), \epsilon]; \\ \int F^{(n)} \psi_r d\xi &= 0, \quad n > 0. \end{aligned} \right\} \quad (23.33)$$

Это решение есть функция обоих параметров, т. е.  $F[(\xi, \mathbf{x}, t), \epsilon, \mu]$ . Рассмотрим далее функцию  $F[(\xi, \mathbf{x}, t), \epsilon, \epsilon]$  для любого *фиксированного* значения  $\epsilon$ . Являясь решением уравнения (23.32) с начальными данными (23.33), эта функция построена со знанием только  $q_r[(\mathbf{x}, 0), \epsilon]$  для заданного значения  $\epsilon$  ( $\mu$  есть параметр разложения). С другой стороны, разлагая эту функцию по  $\epsilon$ , мы видим, что она обладает теми же самыми начальными значениями  $q_r^n(\mathbf{x}, 0)$ , что и исходная функция  $f[(\xi, \mathbf{x}, t), \epsilon]$ , и поэтому идентична с ней. В частности, мы видим, что значения  $q_r(\mathbf{x}, 0)$  могут быть распределены более или менее произвольно среди начальных значений  $q_r^n(\mathbf{x}, 0)$ .

Очевидно, что эта теорема единственности приложима к уравнению Больцмана далеко не всегда, поскольку мы видели в гл. III, что в общем случае функция распределения сама должна быть определена в начальный момент. По-видимому, класс решений уравнения Больцмана, которые могут быть представлены *степенными рядами* по  $\epsilon$ , является весьма узким, и в этом классе имеется взаимнооднозначное соответствие между решениями  $f(\xi, \mathbf{x}, t)$  и начальными значениями  $q_r(\mathbf{x}, 0)$ . Мы видим, как далеко простираются следствия казалось бы безобидного допущения о разложимости  $f$  в степенный ряд. Мы будем называть решения вышеописанного класса *нормальными решениями или решениями класса Гильберта*. Теперь, если решение  $f(\xi, \mathbf{x}, t)$  определяется значениями  $q_r(\mathbf{x}, 0)$ , то  $f(\xi, \mathbf{x}, 0)$ , естественно, определяется значениями  $q_r(\mathbf{x}, 0)$ . Ясно, что момент времени  $t=0$  не может быть каким-то особенным. Следовательно, в решениях класса Гильберта имеется однозначное соответствие между функцией распределения  $f(\xi, \mathbf{x})$  и ее пятью моментами  $q_r(\mathbf{x})$ . Более точно, имеется семейство функций  $f_H(\xi, \mathbf{x})$  — одно для каждой совокупности функций  $q_r(\mathbf{x})$  с тем свойством, что если  $f_H$  выбирается в качестве начального значения для уравнения Больцмана, то получаемое в результате решение будет затем оставаться в классе  $f_H$ .

Если  $f(\xi, \mathbf{x}, t)$  определяется значениями  $q_r(\mathbf{x}, 0)$ , то это же относится и к  $q_r(\mathbf{x}, t) = \int \psi_r f(\xi, \mathbf{x}, t) d\xi$ . Нам хотелось бы иметь возможность определить  $q_r(\mathbf{x}, t)$  непосредственно из  $q_r(\mathbf{x}, 0)$ , не используя в качестве промежуточной функцию  $f(\xi, \mathbf{x}, t)$  — этим самым мы перейдем к гидродинамике. Но если  $f(\xi, \mathbf{x})$  определяется как функционал от  $q_r(\mathbf{x})$ , то это неизбежно должно привести к тому, что более высокие моменты  $p_{ij}(\mathbf{x})$  и  $q_i(\mathbf{x})$  (см. § 17) будут также определяться как функционалы от  $q_r(\mathbf{x})$ . Если они могут быть вычислены, то уравнения сохранения становятся детерминированной системой и непосредственно дают изменения  $q_r(\mathbf{x})$  во времени, устраняя тем самым уравнение Больцмана. Это будет сделано в следующем параграфе и затем вновь в § 25.

Вопрос о том, сколько граничных условий можно удовлетворить с помощью нормального решения, является значительно более сложным, чем вопрос о начальных условиях. Параметры в  $f^{(0)}$  удовлетворяют уравнениям Эйлера, для которых ответ более или менее известен, но весьма

осложняется в зависимости от того, является ли поток вихревым или безвихревым, дозвуковым или сверхзвуковым, или трансзвуковым и т. д.

Уравнения для  $q_r^n$  линейны и имеют такие же характеристики (т. е. звуковые скорости), что и уравнения Эйлера для  $q^{(0)}$ ,  $u^{(0)}$  и  $T^{(0)}$ . Они могут поэтому принимать также же количество граничных условий (и такого же типа). Таким образом, на каждую из функций  $f^{(0)}$ ,  $f^{(1)}$ , ... можно налагать такое же количество граничных условий. Если эти системы граничных условий аддитивны, например, если они линейны по  $q_r^n$ , то, так же как и в случае начальных значений, они сводятся к *единственной* системе граничных условий для самих  $q_r$ . Формулирование граничных условий, наложенных на  $f^{(0)}$ ,  $f^{(1)}$ , ..., в этом случае сводится к возможности зависимости граничного условия от  $\varepsilon$ . С другой стороны, положение осложняется тем фактом, что уравнения для  $q_r^n$  неоднородны. Кроме того, в задачах с наиболее устойчивыми состояниями имеется дополнительная гибкость, поскольку решение уравнений Эйлера одними только граничными условиями однозначно не определяется. К этим вопросам мы вернемся в следующем параграфе, а также в § 33.

#### § 24. ПРОДОЛЖЕНИЕ ТЕОРИИ ГИЛЬБЕРТА

В предыдущем параграфе мы пришли к выводу, что для решений, которые разложимы в степенные ряды, должна существовать возможность выражения тензора напряжений  $p_{ij}$  и вектора теплового потока  $q_i$  через  $q_r$ , т. е. через  $q$ ,  $u$  и  $T$ .

Напомним вначале, что мы не теряем общности, если накладываем полные начальные значения  $q_r$  только на  $q_r^0$

$$\left. \begin{aligned} q_r^0(x, 0) &= q_r(x); \\ q_r^n(x, 0) &= 0. \end{aligned} \right\} n > 0 \quad (24.1)$$

Это допустимо благодаря теореме о единственности. Важно заметить, что несмотря на выполнение соотношения  $q_r^0 = q_r$  в начальный момент (это означает, что параметры в локально максвелловском распределении  $f^{(0)}$  отождествляются с параметрами начального распределения  $f$ ), в последующие моменты времени этого уже не будет. Дифференциальные уравнения для  $q_r^n$  неоднородны, и  $q_r^n$  с течением времени будут уклоняться от нуля, следовательно,  $q_r^0$  больше не будут равняться  $q_r$ .

Для того чтобы найти  $f^{(1)}$ , необходимо вычислить  $\dot{f}^{(0)}$ . Поскольку зависимость функции  $f^{(0)}$  от  $x$  и  $t$  имеет место только через  $q_r^0$ , то

$$\dot{f}^{(0)} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + \xi_j \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_j} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial q_r^0} \left( \frac{\partial q_r^0}{\partial t} + \xi_j \frac{\partial q_r^0}{\partial x_j} \right). \quad (24.2)$$

Распределение  $f(\xi, x)$  является функционалом от  $q_r(x)$ , не связанным со временем. Поэтому при отыскании  $f^{(1)}(\xi, x)$  (для этого нужно знать  $f^{(0)}$ ) можно положить  $t=0$ . Это позволяет заменить  $q_r^0$  в уравнении (24.2) на  $q_r$  и  $\partial q_r^0 / \partial x_j$  на  $\partial q_r / \partial x_j$ , при этом *нельзя* произвести замену *временной производной*  $\partial q_r^0 / \partial t$  на  $\partial q_r / \partial t$ . Однако мы знаем, что  $q_r^0$  удовлетворяет уравнениям Эйлера. Следовательно, можно найти  $\partial q_r^0 / \partial t$  через пространственные производные от  $q_r^0$ , которые имеют такой же вид, что и пространственные производные от  $q_r$  при  $t=0$ . Таким образом, мы можем выразить  $\dot{f}^{(0)}$  в явном виде при  $t=0$  через одни только пространственные производные от  $q_r$ . Простые выкладки приводят к следующему результату:

$$\dot{f}^{(0)}|_{t=0} = f^{(0)} \left\{ \frac{1}{2T} \frac{\partial T}{\partial x_i} c_i \left( \frac{c^2}{RT} - 5 \right) + \frac{1}{RT} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left( c_i c_j - \frac{1}{3} c^2 \delta_{ij} \right) \right\}. \quad (24.3)$$

Поскольку  $\mathbf{x}$  и  $t$  являются просто параметрами в интегральном уравнении, представляющем собой линейное уравнение, решение  $f^{(1)}$  должно быть линейной однородной функцией от параметров  $\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i}$  и  $\frac{1}{T} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ .

Сопоставление полиномов по  $c$ , на которые умножаются эти два коэффициента, показывает, что  $p_{ij}^{(1)} = \int c_i c_j f^{(1)} d\xi$  будет линейной однородной функцией только от  $\partial u_i / \partial x_j$ , тогда как величина  $q_i^{(1)} = \int \frac{1}{2} c_i c^2 f^{(1)} d$

пропорциональна  $\partial T / \partial x_i$ . Тем самым мы пришли к соотношениям Навье—Стокса. Вычисление  $f^{(1)}$  как функции  $\xi$ , т. е. нахождение множителей, на которые умножаются коэффициенты  $\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i}$  и  $\frac{1}{T} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ , и затем определение по ним коэффициентов вязкости и теплопроводности является

труднопреодолимой задачей и рассматривается подробно ниже, в статье Л. Вальдмана\*. Вернемся теперь к общему случаю. Решающее значение для нашего рассмотрения будет иметь тот факт, что мы не будем сразу же полагать  $t=0$ . Предположим, что  $f^{(0)}, \dots, f^{(n-1)}$  уже выражены через  $q_r^{(0)}, \dots, q_r^{(n-1)}$  и их пространственные производные. Неоднородный член в интегральном уравнении (23.8) для  $f^{(n)}$  содержит все эти функции, а также временные производные (появляющиеся из  $f^{(n-1)}$ ). Временные производные заменим пространственными производными с помощью дифференциальных уравнений для  $\gamma_r^n$  (которые эквивалентны  $q_r^n$ ). Найдя  $f^{(n)}$ , можно положить  $t=0$ , что оставит нам только пространственные производные от  $q_r^0 = q_r$  ( $q_r^n = 0$  в начальный момент для  $n > 0$ ). Но если нам нужно продолжить вычисление  $f^{(n+1)}$ , то уже нельзя полагать  $t=0$ , и следует сохранить исходное выражение во всех  $q_r^n$ .

В результате мы находим, что  $f^{(n)}(\xi, \mathbf{x})$  как функционал от  $q_r(\mathbf{x})$  является точечной функцией от пространственных производных  $q_r(\mathbf{x})$  вплоть до порядка  $n$ . Поскольку все  $\gamma_r^n$  исчезают при  $t=0$ , имеем

$$\left. \begin{aligned} p_{ij}^n &= \int c_i c_j \bar{f}^{(n)} d\xi; \\ q_i^n &= \int \frac{1}{2} c_i c^2 \bar{f}^{(n)} d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (24.4)$$

## § 25. МЕТОД ЧЕПМЕНА—ЭНСКОГА

Стандартным методом нахождения напряжений и теплового потока из уравнения Больцмана является метод Чепмена и Энскога [16], [10], [8]. Здесь мы рассмотрим абстрактно-формальную структуру этого метода (следуя Энскогу) и, в частности, его связь с разложением Гильберта.

Опираясь на теорему Гильберта о единственности и на тот факт, что  $f$  зависит не только от  $q_r$ , но и от их производных, мы постулируем следующую форму  $f$ :

$$f = f(\xi, q, \nabla q, \varepsilon), \quad (25.1)$$

где выражение

$$q = \int \psi f d\xi \quad (25.2)$$

предполагается выполняющимся тождественно. Для сокращения записи мы обозначаем  $q_r$  через  $q$ ,  $\psi_r$  через  $\psi$  и  $(\nabla q, \nabla^2 q, \dots)$  через  $\nabla q$ . Постулируем также, что  $\partial q / \partial t$  имеет вид

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \Phi(q, \nabla q, \varepsilon). \quad (25.3)$$

\* См. также работы [29], [42] и [12], где излагаются другие методы.

Это есть абстрактная форма уравнений сохранения. Пространственная и временная зависимости явным образом не входят ни в какой из аргументов; они входят только неявным образом через  $q$  и  $\nabla q$ . И, наконец, допустим, что зависимость от  $\varepsilon$  представляется степенным рядом; никакие требования относительно аналитичности (т. е. сходимости) или даже относительно асимптотического представления не накладываются.

Из уравнения (25.1) следует, что

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f^{(n)}(\xi, q, \nabla q), \quad (25.4)$$

а из уравнения (25.3)

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Phi^{(n)}(q, \nabla q). \quad (25.5)$$

Дифференцируем уравнение (25.1):

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \nabla q} \frac{\partial \nabla q}{\partial t} \quad (25.6)$$

и подставляем сюда равенства (25.4) и (25.5):

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{r,s=0}^{\infty} \varepsilon^{r+s} \left[ \frac{\partial f^{(r)}}{\partial t} \Phi^{(s)} + \frac{\partial f^{(r)}}{\partial \nabla q} \nabla \Phi^{(s)} \right]. \quad (25.7)$$

Подстановка этого выражения в уравнение Больцмана и уравнивание коэффициентов при  $\varepsilon^n$  дают

$$\sum_{+s=n-1} \left[ \frac{\partial f^{(r)}}{\partial q} \Phi^{(s)} + \frac{\partial f^{(r)}}{\partial \nabla q} \nabla \Phi^{(s)} \right] + \xi_j \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial x_j} = \sum_{r+s=n} J[f^{(r)}, f^{(s)}], \quad (25.8)$$

т. е. последовательность интегральных уравнений для  $f^{(0)}, f^{(1)}, \dots$ , похожую на выражение (23.7) в гильбертовском разложении. На самом деле они тождественны, если все временные производные в выражении (23.7) исключены за счет использования дифференциальных уравнений (23.23), как это описано в § 24. Непосредственная проверка этого заключения представляет собой сложную задачу из-за различия в используемом формализме. Это легче сделать, если вначале доказать, что только полученное решение принадлежит к гильбертовскому типу, и затем отождествить оба решения на основании теоремы о единственности. Мы имеем некоторую степень свободы так же, как и в разложении Гильберта, и имеем право положить

$$\left. \begin{aligned} \int \psi f^{(0)} d\xi &= q; \\ \int \psi f^{(n)} d\xi &= 0. \end{aligned} \right\} n > 0 \quad (25.9)$$

Это не начальные условия, а ограничение, которое накладывается для любого момента времени. Используя систему (25.9) и вспоминая, что  $q$  и  $\nabla q$  независимые переменные в различных производных  $f^{(n)}$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned} \int \psi_r \frac{\partial f^{(0)}}{\partial q_s} d\xi &= \frac{\partial q_r}{\partial q_s} = \delta_{rs}; \\ \int \psi_r \frac{\partial f^{(n)}}{\partial q_s} d\xi &= 0; \\ \int \psi_r \frac{\partial f^{(n)}}{\partial \nabla q} d\xi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (25.10)$$

находим следующие условия совместимости для интегральных уравнений (25.8):

$$\Phi_r^{(n-1)} + \frac{\partial}{\partial x_j} \int \psi_r \xi_j f^{(n-1)} d\xi = 0. \quad (25.11)$$

Условия (25.9) гарантируют единственность решения интегрального уравнения для  $f^{(n)}$ . Неопределенные «коэффициенты» в разложениях (25.4) и (25.5) теперь могут быть определены, при этом  $f^{(n)}$  находится из решения интегральных уравнений (25.9), а  $\Phi^{(n)}$  из решения (25.11). В результате получаем решение типа Гильберта, т. е. разложимое в степенной ряд по  $\epsilon$ ; начальные условия (25.9) те же самые, что и для рядов, найденных в § 24 путем исключения временных производных от  $q_r^n$ . Следовательно, результаты тождественны.

Метод Энскога иногда представляют как относящийся исключительно к данному случаю способ жонглирования членами в разложении  $f = f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} + \dots$  с целью получения результатов, которые имеют желаемую форму [11]. Хотя с математической точки зрения полученное выше разложение по степеням  $\epsilon$  ничуть не является более оправданным, оно несколько короче.

Мы описали две различные процедуры получения нормальных решений уравнения Больцмана. Формально они эквивалентны, но по своему существу совершенно различны. Первая процедура (Гильберта), описанная в § 23, требовала задания начальных значений для  $q_r^0$  (упрощенно обозначаемых  $q_r$ ) и для каждой совокупности  $q_r^n$ ,  $n=1, 2, \dots$ . Изменение во времени задается уравнениями Эйлера для  $q_r^0$  и линейными уравнениями (23.24) для  $q_r^n$ ,  $n>0$ . Вторая процедура (Чепмена—Энскога), первая часть которой представлена в § 24, а вторая была только что описана, требует нахождения последовательных приближений для  $p_{ij}$  и  $q_i$  и затем их подстановки в уравнения сохранения, из которых и определяется изменение во времени. Нетрудно провести сравнение обеих процедур. Они различаются способом усечения бесконечного разложения  $\Sigma f^{(n)}$  до конечного  $n$ . Сумма первых  $n$  совместимых уравнений (23.24) вместе с уравнениями Эйлера дает выражение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{m=0}^n q_r^m \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \int \xi_k \psi_r f^{(0)} d\xi + \sum_{m=1}^n (b_{rs}^k \gamma_s^m + e_{rk}^m) \right] = 0. \quad (25.12)$$

При  $t=0$ ,  $\gamma_s^n = 0$  и записи  $e_{rk}^m$  в явном виде это соотношение переходит в

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{m=0}^n q_r^m \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \int \xi_k \psi_r f^{(0)} d\xi + \sum_{m=1}^n \int \xi_k \psi_r \bar{f}^{(m)} d\xi \right] = 0. \quad (25.13)$$

Из уравнения (23.20) при  $t=0$  следует

$$\left. \begin{aligned} \int \xi_k^{i_0} \bar{f}^{(n)} d\xi &= 0; \\ \int \xi_k^{i_j} \bar{f}^{(n)} d\xi &= p_{jk}^n; \\ \int \xi_k^{i_4} \bar{f}^{(n)} d\xi &= 2(u_j p_{jk}^n + q_k^n). \end{aligned} \right\} i=1, 2, 3 \quad (25.14)$$

Мы видим, что сумма во втором члене уравнения (25.13) разделяется на последовательные приближения для напряжений и теплового потока (интерпретация не так проста для  $t>0$ ). Таким образом, для процедуры Чепмена—Энскога необходимо взять уравнение (25.12) (в котором можно заменить  $\rho^0$  на  $\rho$  при  $t=0$  по методу Гильберта) и, заменив  $\rho^0$  на  $\rho$  для всех  $t$ , получить уравнение (25.13). Обе процедуры согласуются при  $t=0$  и, вероятно, для некоторого малого отрезка времени  $t$ , который, возможно, увеличивается при  $n \rightarrow \infty$ . Степень различия в трактовке задачи проявляется в вопросе о граничных условиях. В § 23 мы видели, что несмотря на сложность ситуации во многих случаях можно ожидать, что число граничных условий в методе Гильберта остается фиксированным при  $n \rightarrow \infty$  (это подтверждается самым непосредственным образом на примере Ван Чана и Уленбека, см. § 33). Хотя вопрос о точном числе граничных условий для последовательности уравнений гидродинамики в методе Чепмена—Энскога опять-таки очень сложен, не следует удивляться возможности наложения растущего числа граничных условий при  $n \rightarrow \infty$ . Точный смысл нормальных решений и их различных интерпретаций в настоящее время еще не совсем ясен, но в § 26 мы попытаемся несколько прояснить этот вопрос.

## § 26. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ [17]

Для рассмотрения асимптотики удобно использовать интегральную форму (19.12), включая туда параметр  $\varepsilon$ . Запишем уравнение Больцмана в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{\varepsilon} \nu f = \frac{1}{\varepsilon} L \quad (26.1)$$

[ср. уравнение (19.9)] и затем найдем

$$\begin{aligned} f(\xi, \mathbf{x}, t) &= f(\xi, \mathbf{x} - \xi t, 0) \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \nu[\xi, \mathbf{x} - \xi(t-s), s] ds \right\} + \\ &+ \int_0^t g[\xi, \mathbf{x} - \xi(t-\tau), \tau] \mu[\xi, \mathbf{x} - \xi(t-\tau), \tau] d\tau, \end{aligned} \quad (26.2)$$

где введены функции  $g$  и  $\mu$  из уравнений (19.16) и (19.18) согласно соотношениям

$$\begin{aligned} \mu[\xi, \mathbf{x} - \xi(t-\tau), \tau] &= \frac{1}{\varepsilon} \nu[\xi, \mathbf{x} - \xi(t-\tau), \tau] \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} \nu[\xi, \mathbf{x} - \xi(t-s), s] ds \right\}; \end{aligned} \quad (26.3)$$

$$g(\xi, \mathbf{x}, t) = \frac{L(\xi, \mathbf{x}, t)}{\nu(\xi, \mathbf{x}, t)}. \quad (26.4)$$

Ценность этой частной формы представления  $f$  заключается в том, что она выражает  $f$  как среднее значение начальной функции  $f$  и функции  $g$  с общим весом, равным единице. Для малого  $\varepsilon$  вес концентрируется главным образом на  $g$ , а на  $g$  он концентрируется около  $\tau=t$ . В пределе имеем

$$f(\xi, \mathbf{x}, t) = g(\xi, \mathbf{x}, t). \quad (26.5)$$

Это можно записать как  $v\dot{f} = L$ , что эквивалентно  $J=0$ ; в пределе  $f$  есть локально максвелловское распределение.

Это усложненный путь получения результата, который был ранее найден более непосредственным образом. Однако интегральная форма (26.2) особенно хорошо приспособлена для асимптотической аппроксимации при малом  $\varepsilon$ . Стандартный прием состоит в интегрировании по частям путем дифференцирования функции, среднее значение которой нас интересует, и интегрирования весовой функции, имеющей острый максимум. Это дает разложение по степеням  $\varepsilon$  наряду с дополнительными экспоненциальными членами. Применяя сокращенные обозначения, получаем

$$f = f_0 e^{-\frac{1}{v}\bar{v}} + g e^{-\frac{1}{v}\bar{v}(\tau)} \Big|_0^t - \frac{\varepsilon}{v} \frac{dg}{d\tau} e^{-\frac{1}{v}\bar{v}(\tau)} \Big|_0^t + \\ + \frac{\varepsilon}{v} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\varepsilon}{v} \frac{dg}{d\tau} \right) e^{-\frac{1}{v}\bar{v}(\tau)} \Big|_0^t + \dots \quad (26.6)$$

Здесь используется запись  $f_0$  для  $f(\xi, \mathbf{x} - \xi t, 0)$ ,  $g$  для  $g[\xi, \mathbf{x} - \xi(t-\tau), \tau]$ ,  $v$  для  $v[\xi, \mathbf{x} - \xi(t-\tau), \tau]$ ,  $\bar{v}(\tau)$  для  $\int_{\tau}^t v[\xi, \mathbf{x} - \xi(t-s), s] ds$ ,  $\bar{v}$  для  $\bar{v}(0)$  и  $\frac{d}{d\tau}$  для  $\frac{\partial}{\partial \tau} + \xi \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ . Опустим прежде всего экспоненциальные члены и сохраним только члены вплоть до первого порядка по  $\varepsilon$

$$f = g - \frac{\varepsilon}{v} \dot{g} \quad (26.7)$$

(напомним, что  $\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial t} + \xi \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}$ ). Запишем теперь

$$f = f^{(0)} + \varepsilon f^{(1)}, \quad (26.8)$$

где  $f^{(0)}$  есть локально максвелловское распределение в соответствии с равенством (26.5). Чтобы не допускать противоречивости в отношении порядка сохраняемых членов, мы заменяем  $g$  на  $g^{(0)} = f^{(0)}$  в том члене соотношения (26.7), который умножается на  $\varepsilon$ , а член с  $g$ , имеющий нулевой порядок по  $\varepsilon$ , разлагаем на два члена. Как и следовало ожидать, получаем

$$2J[f^{(0)}, f^{(1)}] = \dot{f}^{(0)}, \quad (26.9)$$

что в точности совпадает с уравнением (23.6). Совершенно ясно, что мы получим те же самые результаты, которые были получены более изящным образом в § 23—25.

Преимущество этой процедуры по сравнению с уже описанными методами разложения заключается в том, что она делает возможным изучение справедливости разложения в степенные ряды и указывает на возможности улучшения. Если сохранить остаточный член после несколько раз проведенного интегрирования по частям, то в принципе можно дать оценку точности разложения до этого порядка. Трудность заключается в том, что при отсутствии по-настоящему полных теорем

существования оценить ошибку можно, только сделав специфические допущения о свойствах решения, которыми они, вероятно, должны обладать. Однако даже качественная информация является ценной для понимания этой сложной проблемы. Ограничимся рассмотрением задачи, в которой заданы фиксированные начальные значения и граничные значения для  $f(\xi, \mathbf{x})$ , причем независимые от  $\epsilon$ . Допустим также, что в окрестности заданной точки  $(\mathbf{x}, t)$  решение  $f[(\xi, \mathbf{x}, t), \epsilon]$  сходится при  $\epsilon \rightarrow 0$ . В этой окрестности  $f$  будет локально максвелловским распределением, и гидродинамические уравнения Эйлера становятся хорошей аппроксимацией. Если при  $\epsilon \rightarrow 0$  мы приближаемся к  $t=0$ , сохраняя для  $t$  порядок  $\epsilon$ , это заключение становится неверным из-за экспоненциального члена  $f_0 e^{-t/\epsilon}$ . Иными словами, имеется начальный пограничный слой толщины  $\epsilon$  (порядок времени столкновений). Точно таким же образом, взяв более сложную интегральную форму (19.12), которая включает в себя граничные условия, мы получили бы пространственный пограничный слой толщиной  $\epsilon$  (порядка средней длины свободного пробега).

Мы молчаливо предполагаем, что  $f[(\xi, \mathbf{x}, t), \epsilon]$  сходится в фиксированной внутренней точке  $(\mathbf{x}, t)$ , которая не лежит на границе (для простоты изложения мы рассматриваем  $t=0$  как часть границы пространственно-временного многообразия). Однако это слишком трудно доказать. С другой стороны, легко найти случаи, когда это можно опровергнуть. Предполагая сходимость, мы получаем уравнение Эйлера. Хорошо известно, что решения этих уравнений не всегда существуют в большом из-за появления ударных волн. По всей видимости мы поступаем правильно, когда соединяем вместе решения уравнений Эйлера и разумно выбранные ударные разрывы (по существу на этом основывается газовая динамика сжимаемой среды). «Разумно» здесь означает в соответствии с нашим сегодняшним уровнем знаний; сомнительно, чтобы появление ударных волн определялось однозначно. Поведение ударной волны, так же как и течение с каждой стороны скачка, определяется уравнениями Эйлера вместе с условиями на ударной волне, которые представляют собой просто-напросто выражения сохранения массы, количества движения и энергии при переходе через ударную волну. Следовательно, в дополнение к уже рассмотренным ранее слоям существуют еще внутренние пограничные слои.

Их расположение определяется только уравнениями Эйлера (принимая обычно гидродинамическое допущение), т. е. безотносительно к уравнению Больцмана или  $\epsilon$ . Более того, изучение структуры ударных волн показывает, что толщина ударного слоя, так же как и толщина других пограничных слоев, имеет порядок  $\epsilon$  (порядок средней длины свободного пробега).

Наше модифицированное предположение заключается в следующем. Задав фиксированную точку  $(\mathbf{x}, t)$ , которая не лежит на границе (ни  $\mathbf{x}$ , ни  $t$ ) или на ударной волне (принципиально это определимо по решению уравнений Эйлера), можно ожидать, что  $f[(\xi, \mathbf{x}, t), \epsilon]$  сходится в окрестности  $(\mathbf{x}, t)$  и что предельное поведение в этой области будет определяться решением уравнений Эйлера. Здесь имеется еще одно затруднение, о котором необходимо упомянуть. Решение уравнений Эйлера требует начальных и граничных значений. Начальные значения  $f(\xi, \mathbf{x})$ , конечно, определяют начальные значения для  $\rho(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ,  $T(\mathbf{x})$ . Однако между  $t=0$  и областью, где можно пользоваться уравнениями Эйлера, лежит пограничный слой. Необходимо удостовериться, что «асимптотические начальные значения» для  $t \sim \epsilon$  стремятся к действительным начальным значениям при  $t=0$ . Это почти наверняка справедливо для рассматриваемой сейчас задачи, т. е. для рассмотрения уравнений Эйлера как предельного представления уравнения Больцмана. Допуская это, мы можем сделать предположение в большом. При  $\epsilon \rightarrow 0$  решение

уравнения Больцмана сходится к обобщенному решению (с ударными волнами) уравнений Эйлера с соответствующими начальными и граничными условиями. Положение становится более сложным, когда мы рассматриваем вопрос о полном разложении нормального решения как асимптотического представления истинного решения. Чтобы использовать действительные начальные значения  $q_0$  в разложении нормального решения до порядка  $\varepsilon^n$ , необходимо убедиться в том, что появление пограничного слоя не приводит к изменению этих начальных значений вплоть до того же порядка. Даже если нормальное решение является законным асимптотическим локальным приближением к истинному решению, при переходе через пограничный слой можно потерять след начальных значений. Здесь можно идти двумя путями. Во-первых, начальный пограничный слой будет отсутствовать, если начальная функция  $f(\xi, x)$  является нормальной функцией  $f$ , т. е. принадлежит к гильбертовскому классу  $f_H$ . Соблюдение этого ограничения значительно уменьшает важность нормальных решений. Другой метод подхода заключается в исследовании начального слоя и применении асимптотических дифференциальных уравнений с асимптотическими начальными значениями, вычисляемыми каким-либо образом из истинных начальных значений. Это следует сделать при любой степени общности\*.

Вопрос о согласованных граничных условиях для нормальных решений более сложен, чем вопрос о начальных условиях. Во-первых, заранее неизвестно, сколько граничных условий можно удовлетворить при заданной степени аппроксимации (ср. § 25). Во-вторых, два метода разложения нормальных решений (Гильберта и Чепмена—Энскога) могут различаться в этом отношении. В общем, можно сказать, что в вопросе согласования граничных условий мы несколько проигрываем по сравнению с общими решениями уравнения Больцмана. В такой ситуации становится необходимым вычисление асимптотических граничных значений из истинных так же, как и в отношении начальных значений. Явный пример такой потери граничных условий, найденный Ван Чаном и Уленбеком, рассматривается в § 33.

Общая картина внутренней структуры начального слоя может быть найдена следующим образом. Вернемся к соотношению (26.6) и оставим на этот раз еще несколько экспоненциальных членов дополнительно к членам первого порядка по  $\varepsilon$ . Имеем

$$f = g - \frac{\varepsilon}{v} \dot{g} (1 - e^{-v/\varepsilon}) + (f_0 - g_0) e^{-v/\varepsilon}, \quad (26.10)$$

где

$$g_0 = g(\xi, x - \xi t, 0) \quad (26.11)$$

или

$$J = J_0 e^{-v/\varepsilon} + \varepsilon \dot{g} (1 + e^{-v/\varepsilon}), \quad (26.12)$$

где

$$J_0 = J(f_0, f_0). \quad (26.13)$$

Вместо равенства (26.8) напомним

$$f = f^{(0)} + f^{(1)}$$

\* Специальные начальные условия, для которых решение уравнения Больцмана известно в явном виде, были найдены Трусделлом [64]. В этом случае можно в явном виде сформулировать точную модификацию начальных значений.

и допустим, что  $f^{(1)}$  мало по сравнению с  $f^{(0)}$ , не рассматривая вопрос о смысле малости. Заменим в правой части уравнения (26.12)  $\dot{g}$  на  $\dot{g}^{(0)} = \dot{f}^{(0)}$  и  $\bar{v}$  на  $\bar{v}^{(0)}$ , тогда

$$2J[f^{(0)}, f^{(1)}] = J(f_0, f_0) \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon} \bar{v}^{(0)}\right] + \varepsilon \dot{f}^{(0)} \left\{1 - \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon} \bar{v}^{(0)}\right]\right\}. \quad (26.14)$$

Теперь ясно, почему оставлен член  $\varepsilon g e^{-\bar{v}/\varepsilon}$ , несмотря на то, что его можно рассматривать как член более высокого порядка, чем  $\varepsilon$  или  $e^{-\bar{v}/\varepsilon}$  по отдельности: если устремить  $t \rightarrow 0$ , то решение сможет принять истинное начальное значение  $f_0$ . Поскольку интегральное уравнение (26.14) линейно, решение будет суммой членов, зависящих от  $\dot{f}^{(0)}$  (т. е. членов уравнений Навье—Стокса) и от начальных значений  $J(f_0, f_0)$ . Зависимость от экспонент, однако, очень сложна. Одна из причин заключается в том, что  $\bar{v}^{(0)}$  есть функция от  $\xi$ , т. е. от аргумента интегрального уравнения. Эту зависимость от  $\xi$  нельзя устранить за счет перехода к максвелловским молекулам (где  $v$  не зависит от  $\xi$ ), поскольку  $\xi$  входит также в аргумент  $x - \xi t$ . Решение поэтому не будет типа простой экспоненты, тем не менее можно ожидать, что качественно оно будет вести себя примерно таким же образом. Для того чтобы решение (26.14) существовало, правая часть должна удовлетворять условиям совместности (23.14). Это будут условия относительно пяти параметров в  $f^{(0)}$ , а именно,  $q_r^{(0)}(x, t)$ , чем будет достигаться аппроксимация уравнений Эйлера, если экспоненты малы. К сожалению, нас интересуют эти уравнения только в том случае, когда экспоненты не малы.

Можно ожидать, что решение (26.14) [после решения уравнений, выражающих условия совместности для  $q_r^{(0)}(x, t)$ ] описывает картину течения в пограничном слое и дает с разумной точностью переход от начального значения  $f_0$  к локально максвелловскому  $f^{(0)}$ , которое удовлетворяет уравнениям Эйлера. Это пока еще не сделано. Вполне возможно, что непосредственное рассмотрение (26.2) с помощью некоторых из методов гл. III или V может оказаться проще. Однако с помощью этого анализа легко оценить размер пограничного слоя, который, как оказывается, имеет порядок  $\varepsilon \log(1/\varepsilon)$  вместо  $\varepsilon$ . Мы получаем эту оценку, полагая равными два «малых» коэффициента  $\varepsilon$  и  $e^{-\bar{v}/\varepsilon}$  и замечая, что  $\bar{v} \sim tv$ . Различие между этими двумя оценками толщины слоя ( $\varepsilon$  и  $\varepsilon \log 1/\varepsilon$ ) очевидно. Если мы удовлетворимся локально максвелловской функцией  $f^{(0)}$  как хорошей аппроксимацией, то эффект пограничного слоя станет пренебрежимо малым на расстояниях, превышающих  $\varepsilon$ . Но если желательно более уточненное приближение  $f^{(0)} + \varepsilon f^{(1)}$ , то пограничный эффект станет пренебрежимо малым по сравнению с  $\varepsilon f^{(1)}$  лишь на больших расстояниях — порядка  $\varepsilon \log(1/\varepsilon)$ . С другой стороны, уравнения Эйлера становятся хорошей аппроксимацией при  $t \gg \varepsilon$ , тогда как уточнение Навье—Стокса несправедливо до тех пор, пока не станет  $t \gg \varepsilon \log(1/\varepsilon)$ .

Теперь ясно, что применение так называемых *нормальных решений* уравнения Больцмана, вероятно, оправдано в асимптотическом смысле, если только они применяются не слишком близко к пограничному слою или к ударному слою. Использование их в области течения со скольжением, т. е. около границы, допустимо только в том случае, если не интересоваться картиной течения внутри слоя, который может обладать толщиной, равной многим (т. е.  $\log 1/\varepsilon$ ) средним длинам свободного пробега, и если можно убедиться, что асимптотические «граничные» условия вне такого слоя согласуются вплоть до надлежащего порядка с гранич-

ными условиями на реальной стенке. Используя методы гл. V, может быть удастся связать истинное граничное условие на стенке с граничными значениями для нормального решения, наблюдаемыми на некотором удалении от стенки. В некоторых специальных случаях, например, вблизи плоской границы и для малых значений теплового потока и напряжений, граничные условия содержатся в неявном виде в уже известных точных решениях этих задач (см. § 33).

Рассмотрим теперь возможность анализа ударной волны с помощью подобных методов. Аналитически среднее значение функции  $g$  должно быть вычислено [см. уравнение (26.2)] в той области, где как функция  $g$ , так и весовая функция начинают резко изменяться одновременно. Интегрирование по частям здесь бесполезно. Однако легко видеть, что параметр  $\varepsilon$  можно полностью исключить из рассмотрения путем простой замены масштаба длины\*. Устранив  $\varepsilon$ , можно ввести новый параметр, характеризующий интенсивность ударной волны, причем этот параметр входит почти так же, как входил параметр  $\varepsilon$ . Например, мы можем взять отношение плотности по обеим сторонам скачка ( $\varepsilon = \rho_1/\rho_0 - 1$ ) как параметр в разложении (23.4). Гильбертовское разложение превращается в разложение по степеням интенсивности ударной волны. В данном случае в интегральном уравнении (26.2) ни начальные, ни граничные значения не появляются (за исключением неявного условия на бесконечности). Нет оснований априори подозревать, что разложение в степенные ряды суживает множество решений уравнения Больцмана до специального класса, или подозревать расходимость рядов. Этот вопрос остается открытым. С другой стороны, вполне возможно, что здесь имеется пара различных асимптотических разложений (по одному разложению с каждой стороны скачка) и что связь между ними нельзя найти из анализа на основе нормальных решений, но это можно сделать лишь путем полного рассмотрения переходной зоны. Часто оказывается, что стыковка асимптотических разложений, которые справедливы в различных областях, представляет собой трудную задачу.

## Глава V

### ДРУГИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

#### § 27. ВВЕДЕНИЕ

В гл. IV излагалась теория нормальных решений уравнения Больцмана. В гл. III рассматривался с абстрактной точки зрения теории существования вопрос об общих решениях. В этой главе мы рассмотрим вопрос об общих решениях с практической стороны. Здесь могут быть два более или менее различных подхода. Первый подход заключается в получении новых феноменологических уравнений, которые обобщают обычные гидродинамические уравнения на те случаи, когда уже недопустимо использование нормальных решений. Нужно показать достаточно общий (для охвата широкого класса задач) переход от уравнения Больцмана, в котором состояние определяется через  $f(x, \xi)$ , к обычному

\* Параметр  $\varepsilon$  можно устранить путем замены масштаба длины в любой независимой от времени задаче. Однако он вновь появляется в расположении границы, и задача по существу остается той же, что и в исходных переменных. Задача об ударной волне решается однозначно там, где нет конечных границ, так что  $\varepsilon$  можно законно исключить.

гидродинамическому описанию, в котором состояние определяется через  $q(\mathbf{x})$ ,  $u(\mathbf{x})$  и  $T(\mathbf{x})$ . Такой подход можно рассматривать как интерполяцию между крайними определениями состояния. Этот метод был начат Максвеллом [46] и продолжен Грэдом [22]\* (см. § 28). Второй подход заключается в попытке решения уравнения Больцмана как такового относительно распределения  $f(\xi, \mathbf{x}, t)$  для определенного круга задач. Ряд попыток был предпринят для получения результатов в окрестности свободно молекулярного течения [35], [58], [38]. Совсем недавно были предприняты попытки охватить весь диапазон значений средней длины свободного пробега. Этот метод разрабатывался, главным образом, Ван Чаном и Уленбеком [68], [69] и Мотт-Смитом [54].

Основным орудием исследования до настоящего времени являлись некоторые формы метода разложения и несколько меньшее внимание уделялось итерациям\*\*. Что же касается методики разложения, то различие между двумя подходами, упомянутыми выше, сводится к вопросу о том, сколько членов можно удержать удобным образом; задачи, в которых имеются в той или иной форме специфическая симметричность или другие упрощения, позволяют построить более совершенные разложения.

В практику вошло несколько типов разложений. Двумя такими разложениями, подобными с теоретической точки зрения, но не с точки зрения практики, являются разложения  $f$  либо в окрестности локально-максвелловского распределения  $f^{(0)}$  с параметрами  $q$ ,  $u$ ,  $T$ , зависящими от  $\mathbf{x}$  и  $t$  (см. § 28), либо в окрестности абсолютно максвелловского распределения  $f^{(0)}$  с постоянными параметрами (см. § 30). Выбирая распределение Максвелла (локальное или абсолютное) как исходную точку, видимо, наиболее целесообразно использовать полиномиальное разложение Эрмита\*\*\*.

Разложение ведется по переменной  $\xi$ , а коэффициенты суть функции от  $\mathbf{x}$  и  $t$ . Эти коэффициенты можно рассматривать как *переменные макроскопического состояния*. В данном случае мы имеем интерполяцию между гидродинамическим и молекулярным состояниями, о чем выше и шла речь. Если мы удерживаем только малое число дополнительных коэффициентов Эрмита, то это естественнее всего трактовать как макроскопическое обобщение гидродинамики. Если же в разложении оставляется много членов, то это более соответствует микроскопической аппроксимации самой функции  $f$ , однако граница между этими рассмотренными до некоторой степени произвольна.

Вопрос о том, какое разложение предпочтительнее — разложение около локально или абсолютно максвелловского распределения — следует решать отдельно в каждом конкретном случае.

Преимущество абсолютно максвелловского распределения заключается в том, что оно позволяет получить более простые уравнения. Локально максвелловское распределение, очевидно, предпочтительнее в тех случаях, когда решение оказывается приблизительно локально-

---

\* Внимание исследователей в этот промежуточный период времени было привлечено почти исключительно к нормальным решениям.

\*\* См. работы [58], [32], [22] и § 28, где комбинируются методы итераций и разложения.

\*\*\* См. работу [22]. Это эрмитовское разложение идентично по существу последовательно используемым разложениям по полиномам Сонина [68], [53]. Ранее полиномы Сонина использовались, но не для уравнения Больцмана как такового, а для решения уравнения Фредгольма, которое появляется в теории нормальных решений [8]. Разница между двумя разложениями заключается просто в выборе координат, разложение Эрмита в прямоугольных координатах становится произведением сферических функций и полиномов Сонина в случае сферических координат.

максвелловским, но с определенно непостоянными  $\rho(x)$ ,  $u(x)$ ,  $T(x)$ . Последняя ситуация имеет место, когда два временных масштаба — время столкновений и время вязкого распада — или два масштаба длины — средняя длина свободного пробега и характерные размеры течения (см. § 22) — различаются на порядок величины или более. Абсолютно максвелловское разложение, вероятно, является более предпочтительным, если эти параметры имеют одинаковый порядок величины. Оба разложения по существу идентичны для линейаризованного случая малых возмущений относительно равновесия. В линейаризованной постановке, как правило, законченные решения могут быть получены, если либо нет физических границ, либо границами являются параллельные плоскости (см. § 33).

Другой метод разложения заключается в расщеплении функции распределения  $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  на две половины, соответствующие, к примеру,  $\xi_1 > 0$  и  $\xi_1 < 0$ , и разложении каждой половины в отдельности в полупространстве [28]. Недостатком этого метода, очевидно, является увеличение сложности. Преимущество заключается в улучшении скорости сходимости вблизи границы, где обе половины функции распределения (для падающих и отраженных молекул) могут выглядеть совершенно по-разному. Этот тип разложения затронут в § 31.

Всякая разумная функция распределения может быть аппроксимирована каждым из упомянутых выше разложений сколь угодно близко. Однако вследствие быстрого увеличения затраты труда по мере повышения порядка аппроксимации очень важно вначале выяснить специфические особенности каждой рассматриваемой задачи, прежде чем решать, какой же из методов разложения является наилучшим. Необходимо обратить внимание на следующее. Несмотря на то, что заданную функцию  $f$  можно аппроксимировать сколь угодно близко с помощью последовательности аппроксимирующих функций  $f_n$ , нет гарантии того, что решение уравнений, которым удовлетворяют  $f_n$ , будет в каком-то смысле аппроксимировать решение уравнения Больцмана. Все эти методы (по крайней мере, в приложении их к нелинейному уравнению Больцмана) являются чисто формальными, и пока нет скольнибудь убедительных оснований подозревать существование каких-либо *качественных* различий в сходимости.

Другой тип разложения, который может оказаться полезным в специальных случаях (хотя и не ведет очень далеко), можно получить, если взять в качестве весовой функции анизотропное распределение Максвелла  $f^{(0)}$ , т. е. включить анизотропность в экспоненту так же, как и в получаемые при этом полиномы [44]. Это может оказаться полезным при рассмотрении задач с сильной анизотропностью, например, при рассмотрении сильных ударных волн. Продолжая эту идею дальше, можно было бы ввести всю последовательность приближений в экспоненту, т. е. разлагать  $\log f$ . Это дает то преимущество (чем не обладают другие методы), что все аппроксимирующие функции становятся положительными. Недостаток этого метода заключается в чрезмерном усложнении вывода уравнений, которым удовлетворяют аппроксимирующие функции.

Общая постановка вопроса о граничных условиях для любого из методов разложения рассматривается в § 29.

Так как полезные результаты из уравнения Больцмана получить трудно, время от времени предлагались аналоговые уравнения для уравнения Больцмана. Этот вопрос затрагивается в § 32.

Краткое обсуждение относительных достоинств некоторых из этих методов путем сравнения решений специальных задач изложено в конце главы, в § 33.

§ 28. РАЗЛОЖЕНИЕ ОКОЛО ЛОКАЛЬНО МАКСВЕЛЛОВСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ [22]

Напомним, что распределение Максвелла задается выражением

$$f^{(0)} = \frac{\varrho}{(2\pi RT)^{3/2}} e^{-c^2/2RT}, \quad (28.1)$$

где  $c = \xi - u$  — относительная скорость (по отношению к средней скорости).

Если  $f^{(0)}$  рассматривается как весовая функция разложения, допустимо выбрать входящие в нее пять параметров любыми. Мы возьмем их такими, чтобы они представляли собой местные значения соответствующих моментов истинной функции распределения  $f$ . Если мы разложим произвольную функцию  $f$  с этой весовой функцией  $f^{(0)}$ , то пять параметров разложения будут фиксированы согласно указанной выше идентификации. Заменяем функцию  $f(\xi, \mathbf{x}, t)$  бесконечной совокупностью  $\varrho(\mathbf{x}, t)$ ,  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $T(\mathbf{x}, t)$  и  $a^{(n)}(\mathbf{x}, t)$  (они должны быть определены). Это разложение нужно подставить в уравнение Больцмана вместо  $f$  и затем приравнять соответствующие коэффициенты. В результате получится бесконечная последовательность дифференциальных уравнений для  $\varrho$ ,  $u$ ,  $T$  и  $a^{(n)}$ . В каждое уравнение будет входить только одна временная производная. Мы расположим уравнения в последовательности, соответствующей временным производным, т. е. сначала уравнения сохранения ( $\partial\varrho/\partial t$ ,  $\partial u/\partial t$ ,  $\partial T/\partial t$ ) и затем уравнения с  $\partial a^{(n)}/\partial t$  по порядку. Эти уравнения являются квазилинейными уравнениями (т. е. линейными относительно производных) первого порядка и содержат члены (появляющиеся из члена, учитывающего столкновения молекул, квадратичные по  $a^{(m)}$ ). В общем случае нет конечной совокупности уравнений, которые отделялись бы от остальной части системы. Чтобы получить детерминированную систему конечного порядка вплоть до  $a^{(n)}$ , сохраним уравнения вплоть до  $\partial a^{(n)}/\partial t$  и положим в них  $a^{(m)} = 0$ ,  $m > n$ , везде, где такие члены появляются. Эта процедура, хотя и является формальной, принадлежит к тому типу усечения, для которого можно ожидать сходимости. Прежде чем приступить к разложению, удобно ввести безразмерную скорость

$$v = \frac{c}{\sqrt{RT}} \quad (28.2)$$

и безразмерную функцию распределения

$$g = \frac{(RT)^{3/2}}{\varrho} f. \quad (28.3)$$

Определения  $\varrho$ ,  $u$  и  $T$  влекут за собой следующие условия, накладываемые на  $g$ :

$$\left. \begin{aligned} \int g d\mathbf{v} &= 1; \\ \int \mathbf{v} g d\mathbf{v} &= 0; \\ \int \mathbf{v}^2 g d\mathbf{v} &= 3. \end{aligned} \right\} \quad (28.4)$$

Распределение  $g^{(0)}$ , соответствующее максвелловскому распределению, есть

$$g^{(0)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-v^2/2}. \quad (28.5)$$

Разложим  $g$  по полиномам Эрмита:

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t) = g^{(0)}(\mathbf{v}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_i^{(n)}(\mathbf{x}, t) H_i^{(n)}(\mathbf{v}) \quad (28.6)$$

или, в менее сокращенной записи:

$$g = g^{(0)} \left[ a^{(0)} H^{(0)} + a_i^{(1)} H_i^{(1)} + \frac{1}{2!} a_{ij}^{(2)} H_{ij}^{(2)} + \dots \right]. \quad (28.7)$$

Для  $f$  имеем

$$f = f^{(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_i^{(n)} H_i^{(n)}. \quad (28.8)$$

Несколько слов следует сказать об этой системе обозначений для полиномов Эрмита [21].  $H_i^{(n)}$  есть тензор с  $n$  индексами,  $i = (i_1, \dots, i_n)$ , а также полином  $n$ -ой степени. Коэффициент  $a_i^{(n)}$  также тензор порядка  $n$ , причем в формуле полинома (28.6) подразумевается суммирование по всей совокупности значений индекса  $i$ . Как можно было ожидать, использование декартовых тензорных обозначений (инвариантных при вращении) оказывает неоценимую помощь при выводе и интерпретации основных формул. Формула обратного преобразования для коэффициентов  $a_i^{(n)}$  такова:

$$a_i^{(n)} = \int g H_i^{(k)} d\mathbf{v} = \frac{1}{\varrho} \int f H_i^{(n)} d\xi. \quad (28.9)$$

Выпишем несколько первых полиномов:

$$\left. \begin{aligned} H^{(0)} &= 1; \\ H_i^{(1)} &= v_i; \\ H_{ij}^{(2)} &= v_i v_j - \delta_{ij}; \\ H_{ijk}^{(3)} &= v_i v_j v_k - (v_i \delta_{jk} + v_j \delta_{ik} + v_k \delta_{ij}); \\ H_{ijkl}^{(4)} &= v_i v_j v_k v_l - (v_i v_j \delta_{kl} + v_i v_k \delta_{jl} + v_i v_l \delta_{jk} + \\ &\quad + v_j v_k \delta_{il} + v_j v_l \delta_{ik} + v_k v_l \delta_{ij}) + (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \end{aligned} \right\} \quad (28.10)$$

Каждая компонента тензора  $H_i^{(n)}$  есть произведение трех обычных (для одной переменной) полиномов Эрмита с общей степенью, равной  $n$ . Для заданного  $n$  все полиномы  $H_i^{(n)}$  независимы и ортогональны, исключая тривиальный случай коммутации индексов. В частности, каждая компонента  $H_i^{(n)}$  ортогональна каждой компоненте  $H_j^{(m)}$ , если  $n \neq m$ , и, кроме того, совокупность индексов  $i_1, \dots, i_n$  не является перестановкой из  $j_1, \dots, j_n$ . Соотношения (28.10) показывают, что  $H^{(n)}$  в явном виде не содержит иных численных коэффициентов, кроме как  $\pm 1$ . Всякое  $a^{(n)}$  согласно уравнению (28.9) есть безразмерный полиномиальный момент от  $f$ , из них несколько первых (выраженных через элементарные моменты см. § 17) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} a^{(0)} &= 1; \\ a_i^{(1)} &= 0; \\ a_{ij}^{(2)} &= p_{ij}/p; \\ a_{ijk}^{(3)} &= S_{ijk}/p \sqrt{RT}; \\ a_{ijkl}^{(4)} &= Q_{ijkl}/pRT - \frac{1}{p} (p_{ij} \delta_{kl} + p_{ik} \delta_{jl} + p_{il} \delta_{jk} + p_{jk} \delta_{il} + \\ &\quad + p_{jl} \delta_{ik} + p_{kl} \delta_{ij}) - (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \end{aligned} \right\} \quad (28.11)$$

Они являются комбинациями моментов, которые равны нулю (исключая  $a^{(0)}$ ) в том случае, когда  $f$  есть максвелловское распределение. Свертываемая  $a^{(3)}$ , находим

$$a_i^{(3)} = a_{irr}^{(3)} = \frac{2q_i}{p \sqrt{RT}}. \quad (28.12)$$

Мы видим, что первые нетривиальные эрмитовские коэффициенты представляют собой безразмерные формы тензора напряжений  $p_{ij}$  и вектора теплового потока  $q_i$ . Коэффициенты  $a^{(2)}$ ,  $a^{(3)}$  и  $a^{(4)}$  с физической точки зрения являются совершенно равноправными, хотя  $a_{ij}^{(2)}$  и  $a_i^{(3)}$  имеют психологическое преимущество общезвестности.

Подставим разложение (28.8) в уравнение Больцмана и приравняем коэффициенты при  $H_i^{(n)}$ . В результате этого получим бесконечную последовательность дифференциальных уравнений относительно коэффициентов  $a_i^{(n)}$  [22]. В качестве примера выпишем уравнение для  $a^{(2)}$  [определение  $dRT/dt$  дается соотношением (28.36)]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial a_{ij}^{(2)}}{\partial t} + u_r \frac{\partial a_{ij}^{(2)}}{\partial x_r} + a_{ir}^{(2)} \frac{\partial u_j}{\partial x_r} + a_{rj}^{(2)} \frac{\partial u_i}{\partial x_r} + [a_{ij}^{(2)} + \delta_{ij}] \frac{1}{RT} \frac{dRT}{dt} + \\ & + \sqrt{RT} \frac{\partial a_{ijr}^{(3)}}{\partial x_r} + \frac{\sqrt{RT}}{v} a_{ijr}^{(3)} \frac{\partial v}{\partial x_r} + \frac{3}{2RT} a_{ijr}^{(3)} \frac{\partial RT}{\partial x_r} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = J_{ij}^{(2)}. \end{aligned} \quad (28.13)$$

Уравнение, в которое входит  $\partial a_i^{(n)}/\partial t$ , получает вклад от члена, связанного со столкновениями молекул, равный

$$\left. \begin{aligned} J_i^{(n)} &= \frac{v}{2} \sum_{r,s=0}^{\infty} \beta_{ijkr}^{(nrs)} a_j^{(r)} a_k^{(s)}; \\ i &= (i_1 \dots i_n), \quad j = (j_1 \dots j_r), \quad k = (k_1 \dots k_s). \end{aligned} \right\} \quad (28.14)$$

Коэффициенты  $\beta^{(nrs)}$  определяются выражением

$$\begin{aligned} \beta_{ijr}^{(nrs)} &= \frac{1}{r!s!} \int \frac{1}{m} B(\vartheta, V) g^{(0)}(\mathbf{v}) g^{(0)}(\mathbf{v}_1) H_j^{(r)}(\mathbf{v}) H_k^{(s)}(\mathbf{v}_1) \times \\ & \times [H_i^{(n)}] d\vartheta d\varepsilon d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1 \end{aligned} \quad (28.15)$$

или эквивалентным ему отношением

$$\begin{aligned} \beta_{ijr}^{(nrs)} &= \frac{1}{r!s!} \int \frac{1}{m} B(\vartheta, V) g^{(0)}(\mathbf{v}) g^{(0)}(\mathbf{v}_1) H_i^{(n)}(\mathbf{v}) \times \\ & \times [H_j^{(r)}(\mathbf{v}) H_k^{(s)}(\mathbf{v}_1)] d\vartheta d\varepsilon d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1; \end{aligned} \quad (28.16)$$

где

$$[\varphi] = \varphi' + \varphi'_1 - \varphi - \varphi_1, \quad (28.17)$$

Эти выражения получены непосредственным применением соотношений симметричности из § 16. В общем случае  $J^{(n)}$  является бесконечной квадратичной суммой эрмитовских коэффициентов. Коэффициенты  $\beta$  функции от температуры, поскольку  $B(\vartheta, V) = B(\vartheta, |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}| \sqrt{RT})$ . Случай максвелловских молекул, где  $B$  функция только от  $\vartheta$ , особенно прост. Прежде всего, коэффициенты  $\beta$  становятся просто числами (т. е. зависят только от молекулярных констант, но не от состояния газа). Далее, интегрирование по скорости в уравнении (28.15) может быть выполнено в явном виде, подынтегральные выражения являются полиномами, умноженными на экспоненты. Наиболее существенным является то, что сумма в формуле (28.14) для максвелловских молекул становится конечной [22]. Поскольку  $[H_i^{(n)}]$  в уравнении (28.15) есть полином по  $\mathbf{v}$

и  $v_1$  с общей степенью  $n$ , интеграл исчезает, когда  $r+s > n$  (вследствие ортогональности). С другой стороны, поскольку  $[H_j^{(r)}(\mathbf{v})H_k^{(s)}(\mathbf{v}_1)]$  имеет общую степень  $r+s$ , то из уравнения (28.16) следует, что интеграл исчезает при  $n > r+s$ . Другими словами,  $\beta^{(nrs)}$  отличны от нуля только при  $n > r+s$ , а  $J^{(n)}$  есть конечная квадратичная сумма эрмитовских коэффициентов порядка не выше  $n$ .

Из уравнения (28.13) следует, что дифференциальные уравнения не разделяются,  $a^{(3)}$  входит в уравнение для  $\partial a^{(2)}/\partial t$  и т. д.,  $a^{(n+1)}$  входит в уравнение для  $\partial a^{(n)}/\partial t$ . Все эрмитовские коэффициенты входят в каждую функцию  $J^{(n)}$  за исключением случая максвелловских молекул. Чтобы получить детерминированную систему уравнений, нужно решиться на аппроксимацию  $f$  конечной суммой полиномов Эрмита, например, до  $a^{(n)}$ . В системе уравнений вплоть до  $\partial a^{(n)}/\partial t$  положим равными нулю все коэффициенты Эрмита более высокого порядка. Левая (дифференциальная) часть уравнений изменит свой вид только в последнем уравнении для  $a^{(n)}$ ; в частности, уравнения сохранения остаются полностью с тензором напряжений и вектором теплового потока. В правой части мы должны обрезать сумму (28.14) на  $n$ -ом члене, исключая случай максвелловских молекул, где точное выражение для  $J^{(n)}$  уже имеет нужную форму. В работе [22] показано для  $J^{(2)}$  и  $J^{(3)}$ , а в работе [53] — для ряда других случаев, что даже при наличии немаксвелловских молекул ошибка из-за ограничения суммы (28.14) условием  $r+s=n$  (а не  $r+s \leq n$ ) очень мала.

Допустим, к примеру, что мы сохраняем члены вплоть до третьего порядка. Состояние определяется значениями  $a_{ij}^{(2)}(\mathbf{x})$  и  $a_{ijk}^{(3)}(\mathbf{x})$ , а также значениями  $\rho(\mathbf{x})$ ,  $u_i(\mathbf{x})$  и  $T(\mathbf{x})$ . Изменение во времени этих переменных состояния определяется системой двадцати дифференциальных уравнений [22] (число уравнений значительно сокращается в задачах, обладающих симметрией). Если же пойти на то, чтобы сохранить только часть членов третьего порядка, а именно  $a_i^{(3)}$ , то в этом случае предпочтительней описывать тринадцать переменных состояния через обычные размерные моменты  $p_{ij}$  и  $q_i$  в дополнение к  $\rho$ ,  $u_i$ ,  $T$ . Для этой аппроксимации  $f$  принимает вид

$$f = f^{(0)} \left\{ 1 + \frac{p_{ij}}{2\rho RT} c_i c_j - \frac{q_i}{\rho RT} c_i \left( 1 - \frac{c^2}{5RT} \right) \right\}, \quad (28.18)$$

где  $p_{ij}$  и  $q_i$  должны быть определены из уравнений

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_r} (u_r p_{ij}) + \frac{2}{5} \left( \frac{\partial q_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial q_r}{\partial x_r} \right) + p_{ir} \frac{\partial u_j}{\partial x_r} + p_{jr} \frac{\partial u_i}{\partial x_r} - \frac{2}{3} \delta_{ij} p_{rs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + p \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_r}{\partial x_r} \right) + \beta_{ij} p_{ij} = 0; \quad (28.19)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_r} (u_r q_i) + \frac{7}{5} q_r \frac{\partial u_i}{\partial x_r} + \frac{2}{5} q_r \frac{\partial u_r}{\partial x_i} + \frac{2}{5} q_i \frac{\partial u_r}{\partial x_r} + RT \frac{\partial p_{ir}}{\partial x_r} + \frac{7}{2} p_{ir} \frac{\partial RT}{\partial x_r} - \frac{p_{ir}}{\rho} \frac{\partial p_{rs}}{\partial x_s} + \frac{5}{2} p \frac{\partial RT}{\partial x_i} + \frac{2}{3} \beta_{ij} q_i = 0. \quad (28.20)$$

Оказывается, что появляется только один параметр столкновений  $\beta^*$ ; этот параметр записывается в виде

$$\beta(RT) = \frac{2}{5} \sqrt{2\pi} \int_0^\infty x^6 e^{-\frac{1}{2}x^2} \left[ \int \frac{1}{m} B(\vartheta, x\sqrt{2RT}) \times \right. \\ \left. \times \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta \right] dx. \quad (28.21)$$

\* Это является следствием ограничения  $r+s=n$  в сумме (28.14). Полученное соотношение выполняется точно для максвелловских молекул и является хорошей аппроксимацией в общем случае [22].

Отметим, что  $p_{ij}$  и  $q_i$  входят на равных правах с  $\rho$ ,  $u_i$  и  $T$ , они не определены явным образом через гидродинамические переменные или какие-либо их производные. Воздействие напряжений и теплового потока на функцию распределения явно выражено в соотношении (28.18). Касательные напряжения делают функцию  $f$  анизотропной, а тепловой поток придает ей асимметричность. Более того, они составляют то наименьшее число параметров, с помощью которых можно добиться такой степени гибкости.

Параметру  $\beta$  в уравнениях (28.19) и (28.20) можно дать несколько интерпретаций. Для чисто временной зависимости, когда отсутствует изменение в пространстве, мы имеем

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial t} + \beta \rho p_{ij} = 0; \quad \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{2}{3} \beta \rho q_i = 0. \quad (28.22)$$

Это указывает на максвелловский релаксационный эффект [46].

Если нет макроскопических градиентов, то напряжения и тепловой поток затухают по экспоненте. Время  $1/\beta\rho$  имеет порядок среднего времени столкновения. Применим теперь метод получения нормальных решений, но уже к уравнениям моментов, а не к самому уравнению Больцмана. От разложений  $f$  и  $\partial f/\partial t$  легко перейти к разложениям для различных моментов  $f$ . Решение для  $f^{(1)}$  через  $f^{(0)}$  [ср. уравнение (23.6)] эквивалентно записи  $p_{ij}^{(1)}$  и  $q_i^{(1)}$  в правой части уравнений (28.19) и (28.20) и замене слева всех величин через их локально-максвелловские значения.

Мы получаем

$$p \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_r}{\partial x_r} \right) + \beta \rho p_{ij}^{(1)} = 0; \quad (28.23)$$

$$\frac{5}{2} p \frac{\partial (RT)}{\partial x_i} + \frac{2}{3} \beta \rho q_i^{(1)} = 0. \quad (28.24)$$

Это уравнения Навье-Стокса, в которых мы отождествляем коэффициенты вязкости и теплопроводности с выражениями

$$\mu(RT) = \frac{p}{\beta \rho} = \frac{RT}{\beta(RT)}, \quad (28.25)$$

$$\lambda(RT) = \frac{15}{4} \frac{pR}{\beta \rho} = \frac{15}{4} R\mu = \frac{5}{2} C_V \mu. \quad (28.26)$$

Мы видим, что в одно и то же время  $\beta$  выступает как временная константа, как коэффициент вязкости и как коэффициент теплопроводности. В действительности,  $\beta$  не является ни одной из этих величин в точности. Как параметр в дифференциальных уравнениях (28.19) и (28.20) величина  $\beta$  оказывает очень сложное воздействие на решение этих уравнений и лишь в некоторых случаях будет иметь простую интерпретацию.

Указанные здесь выражения для  $\mu$  и  $\lambda$  согласно Чепмену и Каулингу [11] представляют собой первое приближение для истинных значений этих величин. Они являются точными для максвелловских молекул и дают очень хорошее приближение для любых законов взаимодействия молекул. Термин «первое приближение» относится к последовательным приближениям, получаемым при решении интегрального уравнения Фредгольма для  $f^{(1)}$  и не имеет отношения к дальнейшим приближениям  $f^{(n)}$  в разложении нормального решения. Очевидно, что взяв моменты больцмановского уравнения, мы сумеем решить интегральные уравнения для  $f^{(1)}$  точно для максвелловских молекул и с хорошим при-

ближением для общего случая \*. Причина этого заключается в том, что в специальном случае максвелловских молекул собственные функции линейного уравнения Фредгольма, которое имеет место в теории Гильберта, есть полиномы Эрмита \*\*. Следовательно, разложение  $f^{(1)}$  по полиномам Эрмита дает решение в явном виде. Это результат легко выводится как следствие того, что в выражении (28.14) остаются только члены с  $r+s=n$  (см. § 30). Кроме того, поскольку недиагональные члены  $\beta^{(nrs)}$  малы для всех типов молекул, пренебрежение ими [что приводит к значениям вязкости и теплопроводности, определяемым соотношениями (28.25) и (28.26)] дает приближенное решение интегрального уравнения. Точное решение для  $\mu$  и  $\lambda$  с учетом этих членов влечет за собой обращение бесконечной матрицы  $\beta^{(nrs)}$ . Поскольку матрица почти диагональная, разнообразные методы простых итераций могут дать быструю сходимость [11]\*\*\*.

Нормальные решения более высокого порядка в случае максвелловских молекул также легко интерпретируются через моментные уравнения. В правой части мы по очереди имеем  $p_{ij}^{(2)}, p_{ij}^{(3)}, \dots$  и  $q_i^{(2)}, q_i^{(3)}, \dots$  (аналогично для моментов более высокого порядка). В левой части в члены с пространственными производными мы подставляем результаты ранее проведенных вычислений для  $p_{ij}$  и  $q_i$ , для членов же  $\partial p_{ij}/\partial t$  и  $\partial q_i/\partial t$  выполняется слегка усложненная процедура. Что касается членов с пространственными производными, то здесь имеет место чисто итерационный процесс решения для правой части через левую. Легко убедиться, что все члены, необходимые для вычисления  $p_{ij}^{(2)}$  и  $q_i^{(2)}$  (т. е. для уравнения Барнетта), содержатся внутри уравнений тринадцатимоментного приближения [11]. Тем не менее, систему уравнений тринадцати моментов [которая состоит из уравнений (28.19), (28.20) и уравнений сохранения (17.12)—(17.14)] нельзя непосредственно сравнить с любой стадией приближения теории Чепмена—Энскога—Гильберта. Вполне вероятно, что тринадцатимоментное приближение является более точным, чем  $f^{(1)}$  или  $f^{(2)}$  (т. е. чем уравнения Навье—Стокса или Барнетта). Определение  $f^{(3)}$  потребует получения некоторой информации из уравнений моментов более высокого порядка. С другой стороны, ни при какой степени аппроксимации анализ, основанный на нормальных решениях, не утрачивает основного своего свойства, заключающегося в том, что будущее определяется исключительно настоящим состоянием  $\rho$ ,  $u$  и  $T$ , тогда как тринадцатимоментное рассмотрение превосходит этот низкий уровень аппроксимации.

Связь между уравнениями Навье—Стокса и уравнениями тринадцати моментов, выявленную нами с помощью формального применения разложения по нормальным решениям к моментному уравнению, можно сделать более ясной. Рассмотрим течение, в котором характерное для наших уравнений время  $1/\beta\varrho$  мало по сравнению с временами, необходимыми для сколько-нибудь заметных макроскопических изменений. Запишем уравнения (28.19) и (28.20) в форме

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial t} + A_{ij} + \beta\varrho p_{ij} = 0; \quad (28.27)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + B_i + \frac{2}{3} \beta\varrho q_i = 0. \quad (28.28)$$

$A_{ij}$  и  $B_i$  заменяют остальные члены, которые по предположению почти постоянны на отрезке времени, сравнимом с  $1/\beta\varrho$ . На каждом таком

\* Эта процедура аналогична оригинальному методу Чепмена [10] и противоположна методу Энскога [16].

\*\* Впервые это было отмечено Ван Чаном и Уленбеком [68], хотя этот факт и широко использовался ранее Барнеттом и др.

\*\*\* Другие методы см. в трудах [29], [42] и [12].

отрезке времени эти уравнения могут рассматриваться как обычные дифференциальные уравнения с постоянными неоднородными членами  $A_{ij}$  и  $B_i$ . Решение состоит из переходного состояния плюс установившееся состояние, последнее есть

$$\left. \begin{aligned} p_{ij} &= -A_{ij}/\beta\varrho; \\ q_i &= -\frac{3}{2} B_i/\beta\varrho. \end{aligned} \right\} \quad (28.29)$$

Иными словами, независимо от того, какие значения имеют  $p_{ij}$  и  $q_i$  в начальный момент, за короткий отрезок времени они приближаются к равновесным значениям (28.29). Рассматривая по-прежнему уравнения (28.27) и (28.28) как обычные дифференциальные уравнения, в которых  $A_{ij}$  и  $B_i$  — медленно меняющиеся функции времени, мы получим, исключая малую погрешность, решение дифференциального уравнения как *квазиравновесие* (28.29). Во многих случаях (но не во всех — это требует численных оценок в каждой конкретной задаче) доминирующими частями  $A_{ij}$  и  $B_i$  являются именно те члены скоростных и температурных градиентов, которые дают соотношения Навье—Стокса. Это есть уточнение аргументов § 26 об экспоненциальном распаде решения уравнений Эйлера без вязкости. Конечно, если  $1/\beta\varrho$  не мало по сравнению с характерным временем, то уравнения тринадцати моментов не аппроксимируют уравнения Навье—Стокса и должны давать лучшие результаты. Можно ожидать, что уравнения тринадцати моментов описывают, по крайней мере в определенной степени, эффект частичного совпадения двух временных масштабов (см. § 26) а именно, времени столкновений и времени макроскопического распада.

Интересно отметить, что тепловой поток в покоящемся газе приводит к появлению напряжений точно такого же вида, как если бы они появились под действием поля скоростей [ср. (28.19)].

Эрмитовское разложение приводит, по всей вероятности, к *гиперболическим системам* дифференциальных уравнений, т. е. к уравнениям, в которых имеется конечная скорость распространения слабых возмущений (тринадцатимоментный случай обсуждается в § 29). С другой стороны, уравнения Навье—Стокса, как и все другие уравнения, получающиеся из нормальных решений (за исключением уравнения Эйлера), являются *параболическими* и характеризуются бесконечной скоростью распространения слабых возмущений. С точки зрения математической простоты, а также простоты качественного описания свойств системы уравнений, часто предпочитают гиперболические системы. С другой стороны, решение гиперболической системы может нарушаться появлением скачков (см. § 33 для тринадцатимоментного случая). Поэтому для определенных целей представляется лучшим иметь дело с соответствующей параболической системой. Это можно осуществить с помощью интерполяционного процесса, который аналогичен интерполяции Навье—Стокса между пятимоментными уравнениями Эйлера и уравнениями тринадцати моментов. Параллельная процедура может быть использована для получения аппроксимации четырех моментов (оставляя третьи моменты, не включенные в  $q_i$ ) из моментных уравнений более высоких порядков. Например, можно заменить левую часть уравнений моментов более высоких порядков тринадцатимоментной функцией  $f$  из уравнения (28.18). Не следует использовать  $f^{(0)}$  в левой части, поскольку для этого приближения все эрмитовские коэффициенты более высокого порядка, чем  $a_{ij}^{(2)}$  и  $a_i^{(3)}$ , предполагаются равными нулю [22]. Моменты, которые должны быть вычислены для подстановки в уравнения тринадцати моментов, представляют собой те компоненты  $S_{ijk}$ , которые отличны от  $q_i = \frac{1}{2} S_{irr}$  (всего их по количеству семь), и свернутый тензор четвертого

порядка  $Q_{ijrr}$  (шесть компонент). Удобно вычислить следующие комбинации моментов (причина будет объяснена позже):

$$s_{ijk} = S_{ijk} - \frac{2}{5} (q_i \delta_{jk} - q_j \delta_{ik} + q_k \delta_{ij}); \quad (28.30)$$

$$q = Q_{rrss} - 15pRT; \quad (28.31)$$

$$q_{ij} = Q_{ijrr} - 5pRT \delta_{ij} - 7RT p_{ij} \quad (28.32)$$

( $q$  отличается от теплового потока  $q_i$  индексом).

В результате\*

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \beta_Q S_{ijk} / RT &= \frac{2}{5} \left( \frac{\partial p_{ir}}{\partial x_r} \delta_{jk} + \frac{\partial p_{jr}}{\partial x_r} \delta_{ki} + \frac{\partial p_{kr}}{\partial x_r} \delta_{ij} \right) - \\ &- \left( \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial p_{jk}}{\partial x_i} \right); \end{aligned} \quad (28.33)$$

$$\frac{2}{3} \beta_Q q / RT = -8 \left( p_{rs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \frac{\partial q_r}{\partial x_r} \right) - 4q_r \left( 2 \frac{du_r}{dt} + 7 \frac{\partial RT}{\partial x_r} \right); \quad (28.34)$$

$$\begin{aligned} \beta' Q_{q_{ij}} / RT &= \frac{8}{3} p_{rs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} \delta_{ij} - 2 p_{ir} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_r} + \frac{\partial u_r}{\partial x_j} \right) - 2 p_{ir} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_r} + \frac{\partial u_r}{\partial x_i} \right) - \\ &- p_{ij} \left( 2 \frac{\partial u_r}{\partial x_r} + 7 \frac{dRT}{dt} \right) / RT - \frac{14}{5RT} \left( q_i \frac{du_j}{dt} + q_j \frac{du_i}{dt} - \frac{2}{3} q_r \frac{du_r}{dt} \delta_{ij} \right) - \\ &- \frac{14}{5R^2 T^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (q_j R^2 T^2) + \frac{\partial}{\partial x_j} (q_i R^2 T^2) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_r} (q_r R^2 T^2) \delta_{ij} \right]. \end{aligned} \quad (28.35)$$

Лагранжевы производные по времени  $du_r/dt$  и  $dRT/dt$ , которые фигурируют в этих уравнениях, определяются как

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial x_r} \quad (28.36)$$

и могут быть исключены, если это желательно, с помощью уравнений сохранения. Новый интеграл столкновений  $\beta'$  определяется выражением

$$\begin{aligned} \beta' (RT) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{420} \int_0^\infty x^6 (3x^4 - 42x^2 + 301) e^{-\frac{1}{2}x^2} \times \\ &\times \left[ \int \frac{1}{m} B(\vartheta, x \sqrt{2RT}) \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta \right] dx. \end{aligned} \quad (28.37)$$

Следует отметить, что  $\frac{3}{2} \beta_Q$ ,  $\frac{3}{2} \beta_Q$  и  $\beta' Q$  являются временными константами для распада, соответственно,  $s_{ijk}$ ,  $q$  и  $q_{ij}$ ; аналогично  $\beta_Q$  и  $\frac{2}{3} \beta_Q$  — временные константы для  $p_{ij}$  и  $q_i$  [ср. уравнение (28.22)]. Для максвелловских молекул  $\beta' = \frac{7}{6} \beta$ . Комбинации моментов (28.30) — (28.32) характерны тем, что в случае максвелловских молекул они показывают простой экспоненциальный распад. Вообще говоря,  $p_{ij}$  и  $q_{ij}$  связаны, как и  $q_i$ , и  $s_{ijk}$ , с эквивалентными «слоями» моментов пятого порядка и т. д., но эта взаимосвязь является очень слабой даже для немасвелловских молекул.

Формулы (28.33) — (28.35) дают дополнительные члены для уравнений (28.19) и (28.20), но мы не будем их выписывать. В интересных

\* Результат для  $s_{ijk}$  дан в работе [22].

задачах эти формулы не так уже громоздки. Однако если искать простейшую модификацию уравнений тринадцати моментов, то следует положить  $s_{ijk}=0$ ,  $q_{ij}=0$  и включить только  $q$  из уравнения (28.34).

Вопрос об итерациях довольно подробно рассмотрен в работе [32]. Несмотря на то, что уже первая итерация, подобная той, которая приводит к уравнениям Навье—Стокса или модификациям (28.33)—(28.35) уравнений тринадцати моментов, вероятно, должна дать значительное увеличение точности, дальнейшие итерации не кажутся оправданными, так что пожалуй следует привлечь моменты более высокого порядка. Однако в настоящее время это является чисто интуитивным, а не математическим выводом.

В заключение, коснемся вкратце вопроса об энтропии и  $H$ -функции в тринадцатимоментном приближении. Имеем приближенно

$$H^{(13)} = -\frac{1}{R} \rho S + \frac{p_{rs} p_{rs}}{2pRT} + \frac{2}{5} \frac{q_r q_r}{pR^2 T^2} \quad (28.38)$$

и

$$H_i^{(13)} = u_i H^{(13)} - \frac{q_i}{RT} + \frac{4}{5} \frac{p_{ir} q_r}{pRT} \quad (28.39)$$

[ср. уравнения (7.13) и (7.14) в работе [22]]. В общем случае ни  $S$ , ни  $H$  или даже приближение (28.38) для  $H$  не обладают какими-либо монотонными свойствами для решений уравнений тринадцати моментов. Однако уравнения (28.38) и (28.39) интересны и сами по себе. Они показывают, до некоторой степени, в чем заключается разница между  $H$  и  $S$ . В частности, соотношение (28.39) указывает на то, что приток  $H$  в область наблюдается при наличии как напряжений, так и теплового потока.

## § 29. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Вопрос о постановке граничных условий для системы уравнений нужно разбить на две части: сколько условий нужно наложить и как они должны быть получены. Из граничных условий для самого уравнения Больцмана (см. § 19) легко получить бесконечную последовательность граничных условий для любого типа разложения. Однако число граничных условий, которые должны быть выбраны из этой последовательности, определяется тем, что целесообразно взять в качестве граничных условий для рассматриваемой системы уравнений, и поэтому их число непосредственно не вытекает из порядка аппроксимации или из числа уравнений.

Рассмотрим тринадцатимоментную систему. Всего переменных тринадцать:

$$\rho, u_i, p, p_{ij}, q_i. \quad (29.1)$$

Для одномерных течений количество переменных уменьшается до пяти

$$\rho, u_1, p, p_{11}, q_1, \quad (29.2)$$

а в случае двумерных течений — до девяти

$$\rho, u_1, u_2, p, p_{11}, p_{12}, p_{22}, q_1, q_2. \quad (29.3)$$

Отсюда тотчас же следует, что требуемое число начальных условий для случаев (29.1)—(29.3) равно соответственно тринадцати, пяти и девяти. Чтобы сосчитать граничные условия, вначале нужно вычислить характеристики (характеристические скорости) дифференциальных уравнений в частных производных. В одномерном случае они оказы-

ваются (приблизенно, для малых напряжений и тепловых потоков) следующими [22]:

$$\left. \begin{aligned} V &= u; \\ V &= u \pm a_1 \sqrt{RT}; \\ V &= u \pm a_2 \sqrt{RT}, \end{aligned} \right\} \quad (29.4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 &= \frac{1}{15} (13 + \sqrt{94}) \sim 4,54; \\ a_2^2 &= \frac{1}{15} (13 - \sqrt{94}) \sim 0,661. \end{aligned} \right\} \quad (29.5)$$

Из уравнений Эйлера находим  $a^2 = \frac{5}{3}$ . Здесь имеются две конечные характеристические скорости и третья, равная нулю. Принимая во внимание знаки плюс и минус, мы имеем здесь пять характеристик. Далее возьмем для простоты одно граничное условие в виде  $u=0$  на фиксированной стенке. Граничная поверхность будет пересекаться двумя характеристиками, идущими в обратном направлении, и двумя характеристиками, идущими вперед; отсюда следует, что необходимо накладывать всего два граничных условия или, иначе говоря, добавить еще одно к условию  $u=0$ . Интуитивно это можно связать с тепловым потоком через границу. Важно заметить, что характеристика с нулевой скоростью не дает вклада в граничное условие.

Обратимся к двумерному случаю. Здесь мы находим те же самые скорости  $a_1$  и  $a_2$ , как и прежде, и, кроме того,

$$a_3^2 = \frac{7}{5}. \quad (29.6)$$

Теперь нулевая характеристическая скорость является тройным корнем; всего их девять, поскольку  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  фигурируют дважды. Если снова взять фиксированную стенку, допустим, перпендикулярную первому направлению, и положить  $u_1=0$  в качестве одного из граничных условий, то мы обнаружим, что необходимо наложить еще *два* дополнительных условия. Их можно было бы связать с нормальным компонентом теплового потока и тангенциальным напряжением.

Для уравнений Навье—Стокса точное число граничных условий является таким же, как и для уравнений тринадцати моментов (по крайней мере, для одномерных и двумерных течений; трехмерные тринадцатимоментные характеристики пока не вычислены). Пуска еще не ясен ответ в случае аппроксимаций более высокого порядка для нормальных решений.

Из этих примеров следует, что одного лишь подсчета уравнений или порядка дифференцирования недостаточно. Кроме того, бессильна здесь, в принципе, и физическая интуиция. Физическая ситуация не меняется в зависимости от того, с какой точностью аппроксимируется функция распределения  $f$  или от того, предполагается ли  $f$  аналитической по параметру  $\epsilon$  или нет, или от того, предпочитаем ли мы итерировать уравнения либо увеличивать их число; но все эти факторы могут повлиять на необходимое число граничных условий.

Опишем конструкцию бесконечной последовательности граничных условий, не пытаясь согласовать порядки аппроксимаций для разложения граничного условия и разложения уравнения Больцмана. Задав систему уравнений, можно выбрать целесообразное число граничных условий. Следует отметить, что сами дифференциальные уравнения мо-

гут накладывать ограничения на то, что необходимо задавать на границе и в каком количестве; такого рода информация может помочь в выборе граничных условий, но это обычно требует сложных вычислений для сколько-нибудь значительного числа уравнений.

Напомним граничное условие

$$f(\xi) = \int_{\eta \cdot n > 0} K(\xi, \eta) f(\eta) d(\eta); \quad \xi \cdot n < 0 \quad (29.7)$$

[см. уравнение (19.5)]. Допустим теперь, что  $K$  есть несингулярная функция, т. е., что нет зеркального отражения. Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} f^+(\xi) &= \begin{cases} f(\xi), & \xi \cdot n > 0; \\ 0 & \xi \cdot n < 0; \end{cases} \\ f^-(\xi) &= \begin{cases} 0 & \xi \cdot n > 0; \\ f(\xi), & \xi \cdot n < 0. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (29.8)$$

Ясно, что

$$f^+(\xi) + f^-(\xi) = f(\xi). \quad (29.9)$$

В уравнении (29.7) мы можем написать  $f^+(\eta)$  справа и  $f^-(\xi)$  слева. Уравнение (29.7) отображает пространство функций  $f^+$  на пространство функций  $f^-$ . С другой стороны, в пространстве всех функций  $f$  соотношение (29.7) выделяет линейное подпространство функций  $f = f^+ + f^-$ , которые являются возможными граничными функциями. Один способ определения этого подпространства заключается в перечислении совокупности функций  $\varphi_r$  (например, полиномов), которые ортогональны к каждому элементу подпространства, т. е.

$$\int \varphi_r(\xi) f(\xi) d\xi = 0. \quad (29.10)$$

Для многих целей следует даже предпочесть уравнение (29.10) в качестве основы для формулировки граничных условий вместо того, чтобы формулировать их через ядро, как это делается в условии (29.7).

Попробуем теперь найти совокупность функций  $\varphi_r$ , которые подходят для любого заданного ядра  $K$ . Возьмем произвольную функцию  $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$  согласно равенству (29.8). Имеем

$$\int f(\xi) \varphi(\xi) d(\xi) = \int f^+ \varphi^+ d\xi + \int f^- \varphi^- d\xi. \quad (29.11)$$

Из уравнения (29.7) вытекает

$$\left. \begin{aligned} \int f^- \varphi^- d\xi &= \int \varphi^-(\xi) K(\xi, \eta) f^+(\eta) d\eta d\xi; \\ &= \int \varphi^+(\eta) f^+(\eta) d\eta, \end{aligned} \right\} \quad (29.12)$$

где

$$\psi^+(\eta) \equiv \int \varphi^-(\xi) K(\xi, \eta) d\xi. \quad (29.13)$$

Следовательно:

$$\int f(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \int f^+ (\varphi^+ + \psi^+) d\xi. \quad (29.14)$$

Мы ищем функции  $\varphi$ , для которых  $\int f \varphi d\xi = 0$ , когда функция  $f^+$  произвольна. Следовательно, мы полагаем  $\varphi^+ + \psi^+ = 0$ . Теперь можно точно определить класс функций  $\varphi_r$ , удовлетворяющих уравнению (29.10). Выберем  $\varphi_r^-$  произвольной, а  $\varphi_r^+$  в виде

$$\varphi^+(\eta) = - \int \varphi^-(\xi) K(\xi, \eta) d\xi. \quad (29.15)$$

Сумма  $\varphi_r^+ + \varphi_r^- = \varphi_r$  и дает искомую функцию. В качестве последовательности функций  $\varphi_r^-$  можно взять полную последовательность полиномов в полупространстве  $\xi \cdot n > 0$  или любые другие подходящие функции. Если необходимо удовлетворить граничному условию на фиксированной стенке

$$\int (\xi \cdot n) f(\xi) d\xi = 0, \quad (29.16)$$

то следует включить  $\varphi_1 = \xi \cdot n$  в последовательность  $\varphi_r$ ; выражение (29.15) дает  $\varphi = \xi \cdot n$ , если отправляться от  $\varphi^- = \xi \cdot n$ .

Граничное условие (29.10) в равной степени применимо и в том случае, когда  $K$  является сингулярной функцией. Например, если взять  $K$  в виде уравнения (19.6) и если  $\psi_r^\pm$  представляют две последовательности ортогональных полиномов в полуобластях с весовой функцией  $Ae^{-\beta\xi^2}$  (в двух полупространствах  $\xi \cdot n \geq 0$ ), то можно положить  $\varphi_1 = \xi \cdot n$  и

$$\varphi_r = \psi_r^- - \alpha\psi_r^+; \quad r > 1. \quad (29.17)$$

Для  $\alpha = 1$  можно взять любую последовательность нечетных по  $\xi \cdot n$  полиномов; одна из таких последовательностей задается соотношением (29.17).

Ясно, что в выборе функций  $\varphi_r$  имеется большой произвол. Например, для случая зеркального отражения пригодна любая последовательность нечетных функций. Более того, не нужно включать полиномы всех порядков в конструкцию полной последовательности  $\psi_r^-$ ; в выражение (29.17), например, достаточно (хотя, возможно, и неразумно) выбрать последовательность нечетных полиномов  $\psi_r^-$  таких, чтобы  $\varphi_r$  были непрерывны в начале отсчета координат. Конечно, в любом конкретном случае следует выбирать функции  $\varphi_r$  такими, чтобы они допускали хорошую согласованность, являлись удобными с вычислительной точки зрения и были просто связаны с функциями, используемыми для разложения  $f$ .

Как уже упоминалось в § 19, ядро  $K$  будет иметь определенное число параметров, коэффициентов аккомодации, которые определяют природу стенки, а не ее термодинамическое состояние. Независимо от этого имеется конечное число граничных условий, которое соответствует данной системе уравнений. Если эти два числа равны, то появляется возможность целиком обойти вопрос о конструкции ядра или о последовательности функций  $\varphi_r$  и выразить граничные условия непосредственно через коэффициенты аккомодации.

Рассмотрим случай двух коэффициентов аккомодации:  $\alpha_M$  — для количества движения и  $\alpha_E$  — для энергии. Коэффициент  $\alpha_M$  определяется как доля падающего потока тангенциального количества движения, которая теряется на стенке. Всякое значение  $0 \leq \alpha_M \leq 1$  совместимо с равновесным состоянием, поскольку как падающие, так и отраженные потоки тангенциального количества равны нулю. Точной аналогией для потока энергии нет, поскольку при равновесии падающие и отраженные потоки энергии равны между собой, но не равны нулю. Вместо этого определим коэффициент  $\alpha_E$  как отношение разности (по абсолютной величине) между действительным падающим и отраженным потоком энергии к разности между падающим потоком энергии и отраженным потоком, который имел бы место, если бы отражение происходило равновесным образом при данной температуре стенки (т. е. при полной аккомодации). Мы определим  $M^+$  и  $M^-$  как падающий и отраженный потоки тангенциального количества движения и  $E^+$  и  $E^-$  как падающий и отраженный потоки энергии, все время выбирая их знаки так, чтобы

$M^+ + M^-$  и  $E^+ + E^-$  давали чистые потоки. Определения  $\alpha_M$  и  $\alpha_E$  могут быть записаны в форме

$$\alpha_M M^+ = M^+ + M^-; \quad (29.18)$$

$$\alpha_E (E^+ + E_0^-) = E^+ + E^-. \quad (29.19)$$

Здесь  $E_0$  — поток энергии, который отражается при равновесии с температурой стенки,  $E^+ + E^-$  представляет собой «чистый» поток энергии; это есть тепловой поток к стенку, только когда тангенциальная скорость газа равна нулю. Граничные условия (19.6) соответствуют условию

$$\alpha_E = \alpha_M = 1 - \alpha. \quad (29.20)$$

Пусть для простоты нормаль к стенке имеет направление (1), а газ находится слева. Поток массы в стенку

$$m = \int \xi_1 f^+ d\xi = - \int \xi_1 f^- d\xi,$$

а величины  $M^+$  и  $E^+$  определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} M_j^+ &= \int \xi_1 \xi_j f^+ d\xi; \\ &= \int \xi_1 c_j f^+ d\xi + u_j \int \xi_1 f^+ d\xi; \\ &= p_{1j}^+ \pm m u_j, \end{aligned} \right\} \quad (29.21)$$

$$\left. \begin{aligned} E_j^+ &= \int \frac{1}{2} \xi_1^2 \xi_j f^+ d\xi; \\ &= \int \frac{1}{2} \xi_1 c^2 f^+ d\xi + \int \xi_1 (c \cdot u) f^+ d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} u^2 \int \xi_1 f^+ d\xi; \\ &= q_1^+ + u_r p_{1r}^+ \pm \frac{1}{2} m u^2. \end{aligned} \right\} \quad (29.22)$$

«Половины» моментов определены как показано, а скорость  $u_j$  берется по направлениям (2, 3). Для тринадцатимоментного приближения  $m$ ,  $p_{ij}^{\pm}$  и  $q_i^{\pm}$  вычислены в работе [22]:

$$m = \frac{p + \frac{1}{2} p_{11}}{(2\pi RT)^{1/2}}; \quad (29.23)$$

$$p_{1j}^{\pm} = \frac{1}{2} p_{1j} \pm \frac{q_j}{5(2\pi RT)^{1/2}}; \quad (29.24)$$

$$q_i^{\pm} = \frac{1}{2} q_i \pm \left( 2p + \frac{3}{2} p_{11} \right) \left( \frac{RT}{2\pi} \right)^{1/2}. \quad (29.25)$$

Легко показать, что

$$E_0 = -2mRT_0, \quad (29.26)$$

где  $T_0$  — температура стенки. Подстановка этих формул в выражения (29.18) и (29.19) дает

$$\frac{p_{1j}}{p} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha_M}{2 - \alpha_M} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{p_{11}}{p} \right) \frac{u_j}{\sqrt{RT}} + \frac{q_j}{5p\sqrt{RT}} \right]; \quad (29.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{q_1 + p_{1r} u_r}{p\sqrt{RT}} &= \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\alpha_E}{2 - \alpha_E} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{p_{11}}{p} \right) \left( 1 - \frac{T_0}{T} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{2} \frac{u^2}{RT} \right) + \frac{1}{4} \frac{p_{11}}{p} + \frac{q_r u_r}{10pRT} \right]. \end{aligned} \quad (29.28)$$

Эти граничные условия качественно подобны условиям Максвелла [46]. Действительно, интуитивно ясно, что тангенциальное напряжение связано со скоростью скольжения (но также и с тангенциальным тепловым потоком), а нормальный компонент теплового потока связан с температурным скачком (и с многими другими факторами). Член с  $p_{1r}$  можно исключить из второго граничного условия:

$$\frac{q_1}{p \sqrt{RT}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\alpha_E}{2 - \alpha_E} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{p_{11}}{p} \right) \left( 1 - \frac{T_0}{T} \right) + \frac{1}{4} \frac{p_{11}}{p} \right] + \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\alpha_E - \alpha_M}{(2 - \alpha_E)(2 - \alpha_M)} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{p_{11}}{p} \right) \frac{u^2}{RT} + \frac{q_r u_r}{5pRT} \right]. \quad (29.29)$$

Несколько слов следует сказать о смысле моментов  $p_{ij}$  и  $q_i$ , поскольку скорость газа — не то же самое, что скорость стенки. Напряжения, определяемые действительно на стенке, записываются как  $\int \xi_j \xi_i f = P_{ij} + q u_i u_j$ , но это выражение упрощается до  $P_{ij}$  только для случая  $i=1$ . Однако поток энергии через стенку равняется  $\int \frac{1}{2} \xi_1 \xi^2 f = q_1 + u_r p_{1r}$ , а не просто  $q_1$ . Если нужно определить тепловой поток через границу, то это различие необходимо иметь в виду.

Граничное условие для напряжений (29.27) отсутствует в одномерных задачах, содержит один компонент для двумерных и два компонента для трехмерных задач. Граничное условие для теплового потока (29.28) или (29.29) во всех случаях представляет собой одно скалярное условие. Общее число наших граничных условий (включая  $u_1=0$ ) является правильным для уравнений тринадцати моментов и для уравнений Навье—Стокса. Если желательно большее число граничных условий, то нужно построить ядро  $K(\xi, \eta)$ , включающее в себя  $\alpha_M$  и  $\alpha_E$  [см. § 14].

### § 30. РАЗЛОЖЕНИЕ ОКОЛО АБСОЛЮТНОГО РАВНОВЕСИЯ

Разложение  $f$  около  $f^{(0)}$ , когда  $f^{(0)}$  константа, представляет собой, очевидно, более простую процедуру, чем когда  $f^{(0)}$  является функцией от  $x$  и  $t$ . Это ведет к большим упрощениям в одних отношениях, но зато приводит к дополнительным затруднениям в других. Мы сначала опишем общую методику и затем конкретизируем ее для случая линеаризованного уравнения Больцмана [68], [53]. Обозначим через  $q^{(0)}$ ,  $u^{(0)}$  (обычно нуль) и  $T^{(0)}$  постоянные параметры  $f^{(0)}$ . Они могут быть связаны или не связаны со средними значениями или другими характерными значениями этих величин в данной области. Рассмотрим полиномы Эрмита по безразмерной скорости

$$v = \frac{\xi}{\sqrt{RT^{(0)}}} \quad (30.1)$$

для безразмерной функции распределения

$$g = \frac{(RT^{(0)})^{3/2}}{q^{(0)}} f. \quad (30.2)$$

Например, второй эрмитовский коэффициент имеет вид

$$\begin{aligned} A_{ij}^{(2)} &= \int (\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j - \delta_{ij}) g d\mathbf{v}; \\ &= \frac{1}{\varrho^{(0)}} \int \left[ \frac{\xi_i \xi_j}{RT^{(0)}} - \delta_{ij} \right] f d\xi; \\ &= \frac{1}{\rho^{(0)}} [P_{ij} + \varrho u_i u_j - \varrho RT^{(0)} \delta_{ij}], \end{aligned}$$

где моменты  $P_{ij}$ ,  $\varrho$ ,  $u_i$  имеют их обычное значение. Мы знаем (см. § 28), что интегралы столкновений наиболее легко представляются через локальные эрмитовские коэффициенты  $a^{(n)}$ . Совершенно неразумно выражать интегралы столкновений через абсолютные эрмитовские коэффициенты  $A^{(n)}$ . Например, уравнение для напряжений содержит величину

$$\frac{P_{ij}}{\rho^{(0)}} = A_{ij}^{(2)} - \frac{1}{3} A_{rr}^{(2)} \delta_{ij} - \frac{A_i^{(1)} A_j^{(1)}}{A^{(0)}} + \frac{1}{3} \frac{A^{(1)}}{A^{(0)}} \delta_{ij}.$$

Однако дифференциальные уравнения при этом значительно упрощаются, и это может служить определенной компенсацией. Используя тождество [21]

$$\xi_j \mathcal{H}_{i_1 \dots i_n}^{(n)} = \mathcal{H}_{i_1 \dots i_n}^{(n+1)} + \delta_{i_1 j} \mathcal{H}_{i_2 \dots i_n}^{(n-1)} + \delta_{i_2 j} \mathcal{H}_{i_1 i_3 \dots i_n}^{(n-1)} + \dots + \delta_{i_n j} \mathcal{H}_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} \quad (30.3)$$

и определения

$$\int \mathcal{H}_{i_1 \dots i_n}^{(n)} f d\xi = \varrho^{(0)} A_{i_1 \dots i_n}^{(n)}; \quad (30.4)$$

$$\int \mathcal{H}_{i_1 \dots i_n}^{(n)} J(f, f) d\xi = \varrho^{(0)} \mathcal{J}_{i_1 \dots i_n}^{(n)}, \quad (30.5)$$

мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} A_{i_1 \dots i_n}^{(n)} + \frac{\partial}{\partial x_j} A_{i_1 \dots i_n}^{(n+1)} + \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} A_{i_2 \dots i_n}^{(n-1)} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} A_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} = \mathcal{J}_{i_1 \dots i_n}^{(n)}. \quad (30.6)$$

Возможно, что это разложение может оказаться полезным в тех случаях, когда средняя длина свободного пробега сравнима с характерными размерами течения. Однако наиболее важным применением этого метода является использование его в случае *линеаризованного* уравнения Больцмана, для которого становятся простыми не только дифференциальные уравнения, как в выражении (30.6), но просты также и интегралы столкновений.

В этом случае мы записываем

$$f = f^{(0)}(1 + \varepsilon h), \quad (30.7)$$

подставляем это выражение в уравнение Больцмана и опускаем члены с  $\varepsilon^2$ . Однако это не начало разложения нормального решения, поскольку здесь перед описывающими столкновение членами нет множителя  $1/\varepsilon$ , а вклад в обе части уравнения от членов первого порядка.

Получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \xi_r \frac{\partial h}{\partial x_r} &= \frac{1}{f^{(0)}} J[f^{(0)}, f^{(0)} h] = L(h) = \\ &= \frac{1}{m} \int B f^{(0)}(\xi_1) [h(\xi_1') + h(\xi_1'') - h(\xi) - h(\xi_1)] d\vartheta d\varepsilon d\xi_1. \end{aligned} \quad (30.8)$$

За исключением выпавшего множителя  $f^{(0)}$  интегральный оператор  $L$  есть тот же оператор, который фигурирует в теории Гильберта. Теперь перед нами *линейное* интегро-дифференциальное уравнение, и методы разложения могут иметь уже не только чисто формальное значение.

Как уже упоминалось в § 28, собственными функциями оператора  $L$  являются просто свертки полиномов Эрмита, если  $B$  есть функция только от  $\vartheta$ . Убедимся сейчас в этом, введя сначала безразмерные обозначения (30.1). Имеем

$$L(h) = \varrho^{(0)} \int \beta(\vartheta) g^{(0)}(\mathbf{v}_1) [h] d\vartheta d\varepsilon d\mathbf{v}_1, \quad (30.9)$$

где

$$\beta(\vartheta) = \frac{1}{m} B(\vartheta); \quad (30.10)$$

$$g^{(0)}(\mathbf{v}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{v}^2} \quad (30.11)$$

и использовано обозначение  $[h] = h' + h_1' - h - h_1$ .

Чтобы получить решения уравнения

$$L(h) = \lambda h, \quad (30.12)$$

умножим его на  $\mathcal{H}^{(n)}(\mathbf{v}) g^{(0)}(\mathbf{v})$  и проинтегрируем:

$$\lambda a^{(n)} = \varrho^{(0)} \int \beta g^{(0)}(\mathbf{v}) g^{(0)}(\mathbf{v}_1) \mathcal{H}^{(n)}(\mathbf{v}) [h] d\vartheta d\varepsilon d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1; \quad (30.13)$$

$$= \varrho^{(0)} \int \beta g^{(0)}(\mathbf{v}) g^{(0)}(\mathbf{v}_1) h(\mathbf{v}) [\mathcal{H}^{(n)}] d\vartheta d\varepsilon d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1; \quad (30.14)$$

здесь мы положили

$$a^{(n)} \equiv \int g^{(0)} \mathcal{H}^{(n)} h d\mathbf{v}. \quad (30.15)$$

Следует заметить, что причина, по которой анализ § 28 может быть в точности продублирован (незвизрая на то, что сейчас  $a^{(n)}$  представляет собой абсолютный эрмитовский коэффициент, а не локальный, как это было ранее), заключается в том, что уравнение линеаризовано. В частности,  $\frac{1}{\varrho} \int \xi f d\xi$  имеет порядок  $\varepsilon$  (не теряя общности, можно положить  $\mathbf{u}^{(0)} = 0$ ). Следовательно, ведущий член (по отношению к  $\varepsilon$ ) во всяком полиноме одинаков и не зависит от того, пользуемся ли мы выраженном через  $\xi = \mathbf{c} + \mathbf{u}$  или через  $\mathbf{c}$ .

Этим устраняется то затруднение, о котором упоминалось в начале параграфа.

Подставим теперь разложение

$$h = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} a_i^{(m)} \mathcal{H}_i^{(m)} \quad (30.16)$$

в уравнения (30.13) и (30.14). Точно так же, как и в § 28, мы видим, что выражение (30.13) равно нулю для членов разложения, у которых  $m < n$ , тогда как выражение (30.14) равно нулю для членов с  $m > n$ . В результате останутся члены:

$$\lambda a_i^{(n)} = \varrho^{(0)} \beta_{ij}^{(n)} a_j^{(n)}, \quad (30.17)$$

где

$$\beta_{ij}^{(n)} = \int \beta(\vartheta) g^{(0)}(\mathbf{v}) g^{(0)}(\mathbf{v}_1) \mathcal{H}_i^{(n)}(\mathbf{v}) [\mathcal{H}_j^{(n)}] d\vartheta d\varepsilon d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1. \quad (30.18)$$

Здесь используются индексы  $i$  и  $j$  (для  $i_1, \dots, i_n$ ) и  $(j_1, \dots, j_n)$  и в уравнении (30.17) производится суммирование по  $j$ . Полученная форма является линеаризованным специальным случаем (28.14), однако вывод

был повторен для того, чтобы иметь самостоятельное выражение в линейном случае.

Задача о собственных значениях оператора  $L$  превратилась, таким образом, в конечномерную задачу для каждого значения  $n$ ; мы должны найти собственные тензоры  $a_i$  уравнения (30.17), определяемые «матрицей»  $\beta_{ij}$ . Решение может быть получено в явном виде. Возьмем произвольный симметричный тензор порядка  $n-2m$ ,  $a^{(n-2m)}$ , который исчезает при свертывании его по двум его индексам. Построим тензор порядка  $n$  путем умножения  $a^{(n-2m)}$  на  $m$  символов Кронекера  $\delta$  и симметризуем его суммированием по всем перестановкам индексов. В результате получим решение уравнения (30.17). Этот результат следует из того, что два тензора порядка  $n$ , которые построены из основных тензоров  $a^{(n-2m)}$  и  $a^{(n-2m')}$  ортогональны, если  $m \neq m'$ . Более того, собственное значение  $\lambda_m^{(n)}$  есть функция только от  $m$ ; оно зависит только от порядка основного тензора  $a^{(n-2m)}$ , на базе которого производится построение, и не зависит от специфики тензора  $a^{(n-2m)}$ . Если  $n$  — четное, то имеется еще одно решение, а именно, симметричная сумма произведений  $\frac{1}{2} n$  символов Кронекера  $\delta$ . Если же  $n$  — нечетно, то имеется особое решение, построенное на произвольном векторе  $a^{(1)}$  в сочетании с  $\delta$ -символами. Теперь ясно, что нужно переписать разложение  $h$  в выражении (30.16) в виде суммы собственных функций для  $L$ . Это делается с помощью процесса «снятия слоев» коэффициентов Эрмита. Например, для тензора второго порядка имеются два слоя  $p\delta_{ij}$  и  $p_{ij}$ , определяемые как

$$P_{ij} = p\delta_{ij} + p_{ij}; \quad p = \frac{1}{3} P_{rr}. \quad (30.19)$$

Для тензора третьего порядка имеются также два слоя

$$S_{ijk} = \frac{1}{5} (S_i\delta_{jk} + S_j\delta_{ik} + S_k\delta_{ij}) + s_{ijk}, \quad (30.20)$$

где

$$S_i = S_{irr}. \quad (30.21)$$

У тензора четвертого порядка три слоя

$$Q_{ijkl} = \frac{1}{15} Q (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{1}{7} (Q_{ij}\delta_{kl} + Q_{ik}\delta_{jl} + Q_{il}\delta_{jk} + \\ + Q_{jk}\delta_{il} + Q_{jl}\delta_{ik} + Q_{kl}\delta_{ij}) + q_{ijkl}, \quad (30.22)$$

где

$$Q = Q_{rrss}; \quad Q_{ij} = Q_{ijrr} - \frac{1}{3} Q\delta_{ij}. \quad (30.23)$$

Каждый из слоев построен на подтензоре с нулевым следом (например,  $p_{ij}$ ,  $s_{ijk}$ ,  $q_{ijkl}$ ) или еще и на скаляре ( $p$  или  $Q$ ) или векторе  $S_i$ . Любая из эрмитовских комбинаций

$$\left. \begin{aligned} &\delta_{ij}\mathcal{H}_{ij}^{(2)}; \\ &p_{ij}\mathcal{H}_{ij}^{(2)}; \\ &(S_i\delta_{jk} + S_j\delta_{ik} + S_k\delta_{ij})\mathcal{H}_{ijk}^{(3)}; \\ &s_{ijk}\mathcal{H}_{ijk}^{(3)}; \\ &(\delta_{ij}\delta_{kl} + \dots)\mathcal{H}_{ijkl}^{(4)}; \\ &(q_{ij}\delta_{kl} + \dots)\mathcal{H}_{ijkl}^{(4)}; \\ &q_{ijkl}\mathcal{H}_{ijkl}^{(4)} \end{aligned} \right\} \quad (30.24)$$

является собственной функцией оператора  $L$ . Для каждого слоя имеется одно собственное значение. Заметим, что величины  $q$  и  $q_{ij}$ , введенные в уравнения (28.31) и (28.32), являются разностями между  $Q$  и  $Q_{ij}$  и их соответствующими тринадцатимоментами приближениями.

Собственные функции чаще всего выражают через полиномы Сонина. Они, в основном, аналогичны полиномам Эрмита, но выражены в сферических, а не прямоугольных координатах\*. Симметрии, присущие инвариантной декартовой тензорной системе обозначений, часто более предпочтительны. Нет необходимости выписывать в явном виде специальные линейные комбинации (30.24) базисных полиномов Эрмита, все вычисления могут быть доведены до конца в инвариантной системе обозначений, и линейные комбинации в равенстве (30.24) получаются естественным образом.

Поскольку полиномы Эрмита (или Сонина) в одно и то же время являются собственными функциями  $L$  и ортогональны к невозмущенному распределению  $f^{(0)}$ , их, очевидно, естественно рассматривать как базисные функции разложения во всякой задаче с максвелловскими молекулами. Некоторые примеры использования этого метода даны в § 33. Сходимость является (эмпирически установлено) достаточно быстрой. Однако вопрос о пригодных граничных значениях не очень согласуется с разложением Эрмита, и общие замечания последнего параграфа не могут быть в сколь-нибудь значительной мере упрощены ни в линейном случае, ни за счет использования абсолютно максвелловского распределения в качестве весовой функции. В случае немасвелловских молекул разложение Эрмита не делает оператор  $L$  диагональным. Однако получающаяся бесконечная матрица симметрична, что видно при сравнении альтернативных выражений (30.13) и (30.14). Эту симметрию можно интерпретировать как выражение закона взаимности Онзагера в терминах «термодинамических» координат  $a^{(n)}$  (ср. работу [43]). В частности, энтропия (линеаризованная) выражается в виде

$$H = \int f \log f d\xi = \int f \left\{ \log f^{(0)} + \log \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} a_i^{(n)} \mathcal{H}_i^{(n)} \right] \right\} d\xi \sim \\ \sim \int f \left\{ \log f^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_i^{(n)} \mathcal{H}_i^{(n)} \right\} d\xi = H^{(0)} + \varrho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} a_i^{(n)} a_i^{(n)}.$$

Другими словами, выбор эрмитовских координат всегда делает выражение для энтропии диагональным, но выражение для роста энтропии становится диагональным только в случае максвелловских молекул.

### § 31. РАЗЛОЖЕНИЕ В ПОЛУОБЛАСТИ [28]

Было показано, что использование разложения Эрмита целесообразно, в частности, при обобщении уравнений гидродинамического типа (вблизи локально максвелловского состояния) и в случае линеаризованного уравнения Больцмана. Граничные же условия лучше всего рассматривать с помощью разложения совершенно иного типа. Из самого способа определения граничных условий ясно, что две половины распределения  $f^+$  и  $f^-$  могут быть совершенно различными, и  $f$  может быть даже разрывной функцией при  $\xi \cdot n = 0$  около границы. Наилучшим пу-

\* В работе [68] собственные значения обозначены как  $\lambda_{rl}$ , а собственные функции —  $\psi_{rl}$ . Чтобы сравнить с нашим обозначением, нужно только заметить, что  $l$  — порядок основного тензора, а  $r$  — число дополнительных символов Кронекера; полный порядок тензора (а также степень полинома)  $l+2r$ .

тем аппроксимации  $f$  около границы является аппроксимация  $f^+$  и  $f^-$  по отдельности. Например, мы можем ввести весовые функции (возможно, даже различные) и разложить каждую из функций  $f^+$  и  $f^-$  в полиномы по полуобласти. Это, однако, приведет к разрушению как дифференциальных уравнений, так и интегралов столкновений. После того как выбраны весовые функции, функцию  $f$  можно описать через две последовательности коэффициентов  $a_+^{(n)}$  и  $a_-^{(n)}$ , соответствующие двум последовательностям функций  $\varphi_+^{(n)}(\xi)$ , определенных для  $\xi \cdot n > 0$  и  $\varphi_-^{(n)}(\xi)$ , определенных для  $\xi \cdot n < 0$ . Уравнения для коэффициентов  $a_{\pm}^{(n)}$  можно получить путем интегрирования уравнения Больцмана после умножения его на  $\varphi_{\pm}^{(n)}$ . В принципе этот метод аналогичен методам, рассмотренным ранее, однако на практике дело обстоит иначе.

Ясно, что это пример метода, который должен хорошо соответствовать задаче. Для задач с простой геометрией данный метод вполне осуществим и может обладать более быстрой сходимостью, чем разложение во всей области вблизи границы. В задачах, где границы не являются параллельными плоскостями (или цилиндрами, или сферами) или где состояние газа на границе меняется при переходе от точки к точке, трудности могут оказаться слишком большими.

Разложения по полуобласти могут быть применены для исследования пограничного слоя на расстояниях от стенки в несколько длин среднего свободного пробега. Если бы это удалось сделать с определенной степенью общности, то, вероятно, можно было бы связать состояние вне пограничного слоя с точным состоянием на стенке через коэффициенты  $a^{(n)}$  по всей области. Эта концепция, имеющая более важное значение с точки зрения нормальных решений (ср. § 26), могла бы в весьма значительной степени расширить пределы справедливости теорий разложения по всей области.

### § 32. МОДИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Решение задач с помощью уравнения Больцмана является весьма и весьма трудновыполнимым делом. Поэтому вполне оправдан поиск различных его вариантов и модификаций. Доказательством внутренней простоты самого по себе уравнения Больцмана является то, что предложений такого рода было очень немного. Рассмотрим две модификации уравнения Больцмана, одна из которых удобна с точки зрения практических решений, а другая — с точки зрения доказательства существования.

Построенная Д. Моргенштерном [50] модификация уравнения Больцмана позволяет рассмотреть нелинейность с точки зрения существования решения (это главная трудность при доказательстве существования в большом, ср. гл. III). Идея заключается в введении сглаживающего или смягчающего ядра. Аргументы функций, появляющихся в обычном члене, учитывающем столкновения, различаются только значениями переменной  $\xi$ ;  $\mathbf{x}$  везде одно и то же. Моргенштерн сохраняет переменную  $\mathbf{x}$  в  $f(\xi, \mathbf{x})$  и  $f(\xi', \mathbf{x})$ , однако заменяет ее на  $\mathbf{y}$  в  $f(\xi_1, \mathbf{y})$  и  $f(\xi'_1, \mathbf{y})$ . Величина  $(f'f_1 - ff_1)$  затем умножается на ядро  $k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  и интегрируется по  $\mathbf{y}$  так же, как и по другим переменным. С помощью довольно тонкого анализа Моргенштерну удается доказать существование решения в большом для нескольких типов граничных условий.

В работе приводятся два утверждения, которые не кажутся оправданными. В первом выражается сомнение в существовании решений классического уравнения в общем случае. Никаких оснований для этой точки зрения, кроме как трудности проблемы, нет; во втором утверждается, что сглаженное уравнение находится в таком же соответствии с физической картиной, как и уравнение Больцмана. В некотором

абстрактном смысле это правильно. Однако выбранная конкретная форма сглаживания этого не показывает. Насколько молекулы  $\xi$  и  $\xi_1$  отличаются своим месторасположением, настолько же несвязанными являются два состояния  $\xi$  и  $\xi'$  или  $\xi_1$  и  $\xi_1'$ . Возможно, что позаботиться об этом не составит труда. Более серьезное возражение (с точки зрения вывода уравнения Больцмана) заключается в том, что это сглаживание содержит член порядка молекулярного диаметра  $\sigma$ , и в то же время мы не получаем конечного предела больцмановского газа (ср. § 7). Если сохранить этот член, то необходимо также сохранить и многие другие члены того же порядка. Но что еще более важно, так это отсутствие ясности, будет ли вообще существовать какое-либо уравнение Больцмана (в том смысле, что одночастичное распределение полностью определяет состояние), если не пользоваться пределом. Этот аргумент выдвигается только из-за *желательности* иметь дело с уравнением Больцмана, в конце концов общая теория существования должна быть построена для того, чтобы выяснить ее физическую значимость.

Уравнение, которым предлагается заменить уравнение Больцмана, исходя из практической точки зрения, имеет следующий вид [2]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_r \frac{\partial f}{\partial x_r} = \nu [f^{(0)} - f]. \quad (32.1)$$

Как видим, изменение претерпел только член, учитывающий столкновения;  $f^{(0)}$  — локально максвелловская функция, соответствующая  $f$ ;  $\nu$  — параметр, который может быть функцией от  $\rho$ ,  $u$ ,  $T$  и возможно от  $\xi$ . Основная идея этой модификации члена, учитывающего столкновения на первый взгляд, весьма привлекательна. Эта форма в явном виде показывает тенденцию приближения к локальному равновесию и, в конце концов, к абсолютному равновесию. Когда  $\nu$  не зависит от  $\xi$ , предлагаемое уравнение обладает всеми основными качественными чертами уравнения Больцмана. Мы имеем

$$\int \psi_r [f^{(0)} - f] d\xi = 0, \quad (32.2)$$

если  $\psi_r$  — сумматорный инвариант. Уравнения сохранения получаются сразу же. Так, поскольку

$$\int f \log f^{(0)} d\xi = \int f^{(0)} \log f^{(0)} d\xi$$

(это проверяется непосредственной подстановкой  $f^{(0)}$ ), то мы имеем

$$\int \log f [f^{(0)} - f] d\xi = \int \log [f/f^{(0)}] [f^{(0)} - f] d\xi \leq 0. \quad (32.3)$$

Поэтому  $H$ -теорема справедлива для соотношения (32.1). По-видимому, нет никакого смысла рассматривать случай, когда  $\nu$  есть функция от  $\xi$ , так как в этом случае несправедливы ни законы сохранения, ни  $H$ -теорема. Кроме того, пропадает главное упрощение уравнения (32.1), заключающееся в легкости аппроксимации члена, учитывающего столкновения с помощью разложения  $f$ .

Возможно, что наилучшее оправдание уравнения (32.1) (с точки зрения уравнения Больцмана, а не с общих позиций) заключается в следующем. Напомним (28.14), что

$$J_i^{(n)} = \frac{1}{2} \rho \sum_{r,s=0}^{\infty} \psi_{ijks}^{nrs} a_j^{(r)} a_k^{(s)}, \quad (32.4)$$

откуда следует, что выражение для  $J(f, f)$  может быть представлено в виде

$$J(f, f) = \frac{1}{2} \varrho f^{(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \beta_{ijk}^{nrs} \mathcal{H}_i^{(n)} a_j^{(r)} a_k^{(s)}. \quad (32.5)$$

Для максвелловских молекул остаются члены только с  $r+s=0$ ; для линеаризованного уравнения — члены только с  $r=0, s=n$  или  $r=n, s=0$ . При таких аппроксимациях

$$J(f, f) = \varrho f^{(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \beta_{ik}^{n0n} \mathcal{H}_i^{(n)} a_k^{(n)}. \quad (32.6)$$

Окончательная аппроксимация

$$\varrho \beta_{ik}^{n0n} = \nu \delta_{ik} \quad (32.7)$$

приводит к желаемому результату (32.1) (символ  $\delta_{ik}$  — сокращенное обозначение произведения  $n\delta$  символов Кронекера, каждого с одним  $i$  и одним  $j$ ). Грубо говоря, уравнение (32.1) следует из допущения о фактической диагональности  $\beta^{nrs}$ . Различные эрмитовские формы не связаны между собой и все релаксационные времена равны.

Уравнение (32.1) было успешно использовано в ряде специфических задач [2], [27], [28]. Однако решение истинного уравнения Больцмана в случае конкретных задач, по-видимому, будет ненамного сложнее. Когда требующиеся интегралы столкновений уже вычислены, вряд ли есть какая-либо разница в затрате труда вообще. В настоящее время представляется, что в наибольшей степени это уравнение будет применяться в тех задачах, где требуется разложение в полубластях с неизвестными интегралами столкновений. Уравнение (32.1) ценно для быстрого обзора возможных решений, затратив же умеренное количество дополнительного труда, полученные результаты можно сделать и количественно верными, используя далее истинное уравнение Больцмана.

Положение радикально изменилось бы, если бы удалось использовать аналитически специфическую форму правой части уравнения (32.1). Это пока еще не сделано. В отношении теории существования уравнение (32.1), по-видимому, столь же неподатливо, как и само уравнение Больцмана; даже если взять  $\nu$  константой,  $f^{(0)}$  привносит с собой очень сильную нелинейность.

### § 33. НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

Здесь мы дадим обзор решений ряда характерных задач для того, чтобы пролить некоторый свет на относительные достоинства различных методов решения уравнения Больцмана.

К числу таких задач относятся дисперсия звука, ударный слой, тепловой поток между параллельными пластинами, плоское течение Куэтта (течение со сдвигом), задача Стокса о течении вокруг сферы и задача Релея о пластине, внезапно начинающей свое движение. Эти задачи можно классифицировать по-разному. Здесь имеются задачи без границы и с границей, линейные и нелинейные, с простой геометрией и с более сложной, в конце рассматриваются различные методы решения.

Не всякая из указанных задач может быть решена с помощью любого из рассмотренных методов, поэтому мы выделяем те задачи, которые позволяют провести интересные сравнения. Решение для кнудсоновского или свободного молекулярного течения и решение Навье—Стокса занимают особое положение как универсальные стандарты для сравне-

ния. Они отображают два крайних случая, которые предполагается связать с помощью уравнения Больцмана, кроме того, решение их в каждом из рассматриваемых примеров математически достаточно просто. Рассматриваемые нами задачи настолько примитивны с гидродинамической точки зрения, что для большинства из них решение уравнений Эйлера тривиально.

Математическая трудность задачи определяется в первую очередь числом независимых переменных, сложностью геометрии и наличием линейности или нелинейности. Задачи Стокса и Релея являются наиболее трудными, поскольку они связаны с двумя независимыми переменными (т. е. с дифференциальными уравнениями в частных производных) и нетривиальными границами. Насколько нам известно, пока еще не было попыток рассмотрения нелинейных задач для этих случаев (за исключением чисто гидродинамических подходов, которые не имеют отношения к решению уравнения Больцмана).

Тепловой поток, поток со сдвигом и течение в ударной волне являются одномерными задачами (они связаны с обыкновенными дифференциальными уравнениями) и поэтому допускают рассмотрение нелинейных вариантов, но только для более примитивных аппроксимаций уравнения Больцмана. В линейных вариантах задачи о тепловом потоке и потоке со сдвигом достаточно просты, и это позволяет получить по существу общее решение. Задача об ударной волне в линеаризованном варианте не имеет смысла.

Можно разумировать существующее положение следующим образом. Линейные двумерные и нелинейные одномерные задачи могут быть решены при несколько пониженной степени аппроксимации уравнения Больцмана. Одномерные линейные задачи могут быть решены с высокой степенью аппроксимации в случае простейших геометрических конфигураций, т. е. для параллельных плоскостей и концентрических цилиндров.

Задача о дисперсии звука, хотя она и двумерна ( $x$  и  $t$ ), является специфической, поскольку ее переменные могут быть разделены, и, по крайней мере, вначале задачу можно рассматривать без границ. Эта задача была решена при высокой степени аппроксимации для максвелловских молекул Ван Чаном и Уленбеком [68] методом разложения по полиномам Эрмита или Сонина, описанным в § 30. Результаты получены на трех уровнях аппроксимации. «Нулевым приближением» являются уравнения Эйлера, «первое приближение» — уравнения тринадцати моментов, «второе приближение» включает  $s_{ijk}$ ,  $q$  и  $q_i$ , «третье приближение» (которое только названо, но не вычислено) добавляет наружный слой четвертых моментов  $q_{ijkl}$ , а также первые два слоя пятых моментов (вектор и тензор третьего порядка). Такое, до некоторой степени произвольное, подразделение последовательных приближений выбирается из-за того, что это гарантирует неизменность разложения различных дисперсионных коэффициентов по степеням частоты вплоть до некоторого определенного порядка при всех последующих приближениях. По некоторым причинам первое приближение называется «приближение Навье—Стокса», а второе — «приближение Барнетта». Они, очевидно, являются значительно более тщательно разработанными приближениями, чем об этом говорит их название, и в принципе это разложение по ортогональным функциям совершенно отлично от метода нормальных решений. Во втором приближении всего имеется восемь переменных:  $\rho$ ,  $u_1$ ,  $p$ ,  $p_{11}$ ,  $S_1$ ,  $S_{111}$ ,  $q$  и  $q_{11}$ . Дисперсионное соотношение представляет собой полином восьмой степени по частоте и шестой степени по волновому числу. Иначе говоря, имеется восемь форм, подобных по времени, и шесть — пространственно подобных. Это означает, что можно наложить восемь начальных значений и, по всей вероятности, три граничных значения. Результаты должны оказаться очень точными, если они связаны с соот-

ветствующими граничными условиями. В случае длин волн, сравнимых со средней длиной свободного пробега, можно убедиться\*, что форма, которая является аналитическим продолжением выражения для обычной незатухающей скорости звука при большой длине волны, затухает так же сильно, как и другие формы. Следовательно, все три формы будут наблюдаться одновременно в любом высокочастотном эксперименте. Их относительные амплитуды аналитически могут быть найдены только из решения задачи с граничными значениями. Точно также скорость сходимости приближений Ван Чана—Уленбека нельзя точно оценить, не решая соответствующей задачи с граничными значениями. Это еще не было сделано, следовательно, нет еще и окончательного сравнения с экспериментом.

Задача о дисперсии звука в кнудсеновском газе, по-видимому, ранее не ставилась. В пределах одной длины среднего свободного пробега или для осциллирующей в этих пределах границы решение для свободного молекулярного течения может быть вычислено, вероятно, без особых трудностей. Весьма возможно, что затухание окажется линейным (механизмом затухания является сдвиг по фазе частиц, которые ударяются о стенку в различные моменты времени). Это решение следует сравнить с начальным наклоном экспоненциально затухающих решений около стенки.

Простейшая задача об ударной волне формулируется следующим образом. Мы ищем одномерное установившееся течение, в котором происходит переход от одного постоянного состояния при  $x = -\infty$  к другому постоянному состоянию при  $x = +\infty$ . Оба состояния будут связаны между собой обычными условиями на ударной волне. Это решение подтверждает традиционное разрывное приближение только в том случае, если переходный слой макроскопически тонок. Ранние исследования на основе рассмотрения уравнений Навье—Стокса при постоянных коэффициентах вязкости и теплопроводности были проведены Рэнкином [55], Тейлором [61], Релеем [56] и Беккером [1]. Беккер отмечал в специальном случае, что толщина ударной волны становится пренебрежимо малой для сильных ударных волн (меньше, чем средняя длина свободного пробега). В том же самом специальном случае Томас [62] обнаружил, что зависимость  $\mu \sim T^{1/2}$  (упругие сферические молекулы) делают предельную толщину конечной, а Мордухов и Либби [48] обнаружили, что зависимость

$\mu \sim T^s$  ведет к тому, что предельная толщина равна нулю при  $s < \frac{1}{2}$  и становится бесконечной при  $s > \frac{1}{2}$ . Такое anomальное поведение объясняется следующим образом [41], [23]. Средняя длина свободного пробега является функцией температуры и плотности, кроме случая упругих сфер  $s > \frac{1}{2}$ , где она зависит только от плотности. Максимальное отношение плотностей при переходе через ударную волну равно четырем; отношение же температур стремится к бесконечности для сильных ударных волн. Исключая случай упругих сфер, средняя длина свободного пробега меняется чрезвычайно сильно при переходе через ударную волну и, наблюдается ли большая длина среднего свободного пробега на передней или задней стороне ударной волны, зависит от величины  $s$ :

$$s < \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad s > \frac{1}{2}.$$

Anomальные результаты вытекают из допущения об использовании

\* H. Grad, Address before the American Physikal Society, Pittsburgh, March, 1951.

средней длины свободного пробега на фронте ударной волны в качестве характерной длины. Если выбрать за характерную точку подходящую точку внутри ударной волны, то толщина остается ограниченной при любой интенсивности ударной волны и любой зависимости  $\mu$  и  $\lambda$  от температуры. Более того, если ввести в качестве новой переменной расстояние  $y = x/L$ , где  $L$  — переменная средняя длина свободного пробега (что соответствует неравномерному растяжению), то профиль ударной волны становится почти универсальным и меняется лишь на несколько процентов при произвольном выборе зависимости  $\mu(T)$  [23].

Решения этой задачи были также получены из уравнений Барнетта и следующего приближения для разложения Энскога [41], [67], [72], из уравнений тринадцати моментов [23] и с помощью специального приближенного метода Мотта—Смита [52]. В последней работе функция распределения аппроксимируется суммой двух локально-максвелловских распределений с различными параметрами  $\rho$ ,  $u$  и  $T$ . Дифференциальные уравнения для этих параметров получаются путем взятия соответствующих моментов уравнения Больцмана после подстановки указанной аппроксимации для  $f$ . Для слабых ударных волн, где, как известно, справедливы другие теории, результат Мотта—Смита не представляется существенным. Если сумма двух максвелловских функций действительно аппроксимирует функцию распределения сильной ударной волны (идея заключается в том, что происходит наложение двух течений — одно из  $+\infty$  и другое из  $-\infty$ ), то для сильных ударных волн эта теория могла бы оказаться совершенно точной.

Очень трудно сравнить полученные результаты из-за большого числа параметров; результаты зависят от выбора закона взаимодействия межмолекулярных сил и от выбора наблюдаемой переменной (например, температурный профиль выглядит совершенно иначе, чем профиль плотности), а также и от интенсивности ударной волны. При некотором определении толщины ударной волны найдено, что толщина  $\delta$  скоростного профиля для максвелловского газа выражается следующим образом\*:

для уравнений Навье—Стокса

$$\delta = 1 - 0,497\alpha^2 + \dots; \quad (33.1)$$

для уравнений Барнетта

$$\delta = 1 + 0,032\alpha^2 + \dots; \quad (33.2)$$

для следующего порядка аппроксимации Чепмена—Энскога

$$\delta = 1 + 0,094\alpha^2 + \dots; \quad (33.3)$$

и для уравнений тринадцати моментов

$$\delta = 1 + 0,712\alpha^2 + \dots \quad (33.4)$$

Параметр  $\alpha$  является мерой интенсивности ударной волны и меняется от нуля для слабых ударных волн до единицы для ударных волн бесконечной интенсивности. Разложение Чепмена—Энскога показывает стабильное увеличение толщины для последовательных приближений, но толщина для тринадцати моментов значительно больше. В этих единицах толщина по Мотт—Смиту при нулевой интенсивности примерно равна 1,25. Результаты Ван Чана вычислены вплоть до порядка  $\alpha^2$  (разложение четно по  $\alpha$ ) для случая максвелловских молекул. Результаты

\* См. работы [67], [41], [23]. Найдено, что разложение Ван Чана сходится намного скорее, если выразить его через параметр разложения  $\alpha = \left(\frac{1}{3}\epsilon\right)$  в обозначениях работы [23], использованный Колером и Грэдом.

тринадцати моментов (как и результаты по Навье—Стоксу) вычислены вплоть до порядка  $\alpha^4$  для произвольных молекулярных сил [23]. В случае уравнений Навье—Стокса найдено, что разложение вплоть до членов с  $\alpha^4$  является очень хорошим приближением для любой интенсивности, включая бесконечную ( $\alpha=1$ ).

Тот факт, что уравнения Навье—Стокса являются параболическими, а уравнения тринадцати моментов — гиперболическими, выявляется поразительным образом. Скорость слабой ударной волны сравнима с обычной скоростью звука в газе,  $\alpha^2 = \frac{5}{3}$  в обозначениях § 29. При увеличении интенсивности скорость ударной волны увеличивается и при определенной интенсивности ( $\alpha=0,518$ ) достигает значения скорости наиболее быстрой характеристики ( $\alpha^2=4,54$ ) уравнений тринадцати моментов (29. 5). Для ударных волн с большей интенсивностью подлинная разрывность на ударной волне проявляется в тринадцатимоментной теории, гладкие решения, по-видимому, не могут распространяться со скоростью большей, чем скорость малых возмущений. Уравнения тринадцати моментов ультраконсервативны, они отказываются предсказывать результаты, которые могут оказаться неверными. С другой стороны, уравнения Навье—Стокса иногда предсказывают гладкие решения для интенсивностей, больших бесконечности (с переходом от положительной к отрицательной плотности). Решение Барнетта вычислено только в виде степенного ряда по интенсивности ударной волны, и его поведение для сильных ударных волн неизвестно. По Мотт—Смиту толщина уменьшается по мере увеличения интенсивности ударной волны и расходится с тринадцатимоментным значением как раз там, где тринадцатимоментное решение перестает иметь смысл.

Лучшие результаты для ударной волны можно было бы получить при аппроксимации более высокого порядка (28. 33)—(28. 35) или с помощью разложения около анизотропного распределения  $f^{(0)}$ , или, наконец, итераций, используя уравнения (19. 12).

В линейной постановке задача одномерного теплового потока была решена с высокой степенью аппроксимации Ван Чаном и Уленбеком [69], а также в работе [53] с помощью полиномиального разложения (см. § 30). Вследствие линейности задачи удается получить ее точное решение в явном виде. Функция распределения есть сумма линейного по  $x$  члена и бесконечной суммы экспонент. Линейный член представляет собой обычное выражение для теплового потока. Экспоненты должны быть найдены из решения бесконечного определителя. Числовые коэффициенты получаются обращением бесконечной матрицы, которая зависит от граничного условия, наложенного на  $f$ . В цитируемых работах решение находится до определенного порядка при опускании всех полиномов выше этого порядка. Физический смысл получаемого решения достаточно ясен. На стенке имеется конечный температурный скачок, величина которого зависит от средней длины свободного пробега, а также экспоненциальный пограничный слой с толщиной порядка средней длины свободного пробега (см. § 26).

Кроме того, Ван Чан и Уленбек получают решение, используя разложение Гильберта (в этой специальной задаче оно оказывается идентичным решению Чепмена—Энскога). Оказывается, что решение первого порядка, т. е.

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (33.5)$$

является точным нормальным решением для всех порядков. Более того, это решение идентично с линейным по  $x$  членом полного решения. Можно сказать, что точное решение задачи линеаризованного теплового пото-

жа представляет собой сумму решения Гильберта—Энскога—Чепмена (сходимость которого для данного случая тривиальна) и экспоненциального пограничного слоя. Если пластины отстоят друг от друга на расстоянии, меньшем, чем средняя длина свободного пробега, то пограничный слой как таковой выделить из всего течения не удастся.

Вопрос о граничных условиях представляет особый интерес. Так же как и в общем случае, мы предполагаем, что число граничных условий для разложения Гильберта не зависит от порядка аппроксимации и является тем же самым, что и для уравнений Эйлера (§ 24). Предполагается, что в общем случае разложение Чепмена—Энскога требует увеличения числа граничных условий. Ни одно из предположений в этом примере не оправдывается. При данной геометрии уравнения Эйлера не дают никакой конкретизации течения, кроме как равенство нулю скорости на обоих концах. Однако если скорость *тождественно* равна нулю, то проблема вырождается, и никакая степень ограничения на границе не может конкретизировать решение, которое позволяет температуре быть произвольной функцией от  $x$ . Условия совместимости более высокого порядка для разложения Гильберта сокращают этот произвол до единственного параметра для каждого порядка; это может быть тепловой поток или значение температурного градиента. Степень гибкости, таким образом, здесь такая же, как и для уравнений Навье—Стокса. В разложении Чепмена—Энскога результат также является вырожденным, по-видимому, из-за того, что скорость и давление есть тождественные константы, а производные более высокого порядка не входят в аппроксимации выше аппроксимации Навье—Стокса.

Нелинейная задача при больших значениях теплового потока легко решается для уравнений Навье—Стокса и уравнений тринадцати моментов, в этой задаче они идентичны. Неясно только, насколько трудно было бы выполнить аппроксимации более высокого порядка, используя методы § 28 или § 30.

Задачи плоского течения Куэтта и теплового потока весьма сходны. С помощью разложения по полиномам Сонина можно получить общую форму решения [53], которое снова является суммой линейного члена и бесконечной суммы экспонент. Линейный член представляет собой обычное решение с постоянным скоростным градиентом и линейным по  $x$  тепловым потоком, а экспоненциальные члены — пограничный слой, когда пластины удалены друг от друга на несколько длин среднего свободного пробега. В этой работе дается очень простая приближенная формула, учитывающая пограничный слой путем добавления к расстоянию между пластинами величины, кратной среднему свободному пробегу и почти не зависящей от параметров. Это можно было бы рассматривать как «асимптотическое» граничное условие, приведенное в § 26 для нормальных решений.

Рассматриваемая задача была также решена Гроссом, Джексоном и Зирингом [28], использовавшими полиномы в полуобласти и модифицированное уравнение Больцмана, о котором шла речь в § 32. Был найден тот же самый тип экспоненциального пограничного слоя. Было бы интересно сравнить сходимость этого метода и те усилия, которые требуются при использовании только что изложенного метода разложения по всей области для истинного уравнения Больцмана.

В работе [64] Трусделлом было получено точное решение уравнения Больцмана для определенного типа течения со сдвигом. Он нашел, что подстановка линейного скоростного профиля (например,  $u = ky$ ,  $v = w = 0$ ) в бесконечную систему точных нелинейных моментных уравнений и предположение о том, что все другие величины являются пространственно-чезависимыми, приводят к системе обыкновенных дифференциальных уравнений только по времени. Это — линейные уравнения с постоянными

коэффициентами, которые в случае максвелловских молекул могут быть решены по очереди для каждого более высокого момента ( $a^{(n+1)}$  входит в уравнение для  $a^{(n)}$  только как пространственная производная). Экспоненциальный рост температуры и давления является следствием отсутствия теплового потока для компенсации вязкой диссипации. Как можно было ожидать, имеется начальный «пограничный» слой порядка времени столкновения, за которым следует макроскопический экспоненциальный рост, причем временной масштаб здесь определяется вязкой диссипацией. Интересно отметить, что начальный распад не является монотонным, имеется комплексные экспоненты. Разложение нормального решения сходится к «главному» решению, т. е. с исключенным начальным распадом. Однако нормальное решение принимает истинные начальные значения только для членов первого порядка. Уравнения тринадцати моментов для этого примера являются точными.

В рассматриваемом примере параметром в разложении нормального решения является время столкновения, сравнимое с вязкостной экспонентой. Линеаризация этой задачи соответствует тому, что время вязкостного роста делается большим. Следовательно, линеаризация соответствует сохранению только первого члена в разложении нормального решения; таким образом, в этом примере два процесса не могут быть разделены, как это может быть сделано для течения со сдвигом, независимого от времени.

Для нелинейного течения Куэтта, т. е. течения с большими скоростными градиентами, решение можно найти с помощью уравнений Навье—Стокса [33] и уравнений тринадцати моментов\*. В этом случае результаты различны, но их очень легко связать между собой. Введем следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{\rho_{xy}}{\rho} \quad (33.6)$$

и

$$\beta = \frac{\mu}{\rho} \frac{du}{dy} \quad (33.7)$$

В случае уравнений Навье—Стокса  $\alpha + \beta = 0$ , тогда как в тринадцатимоментном случае между  $\alpha$  и  $\beta$  имеется связь в виде полинома, который упрощается до  $\alpha + \beta = 0$  для малых  $\alpha$ . Профиль определяется неявным образом с помощью уравнений

$$\gamma \rho y = \pm \int \frac{\mu(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau_0 - \tau}}; \quad (33.8)$$

$$u^2 = \delta^2 (\tau_0 - \tau), \quad (33.9)$$

где  $\tau = RT$ ,  $\mu$  — коэффициент вязкости,  $\tau_0$  — максимальное значение, принимаемое  $\tau$ , а  $\gamma$  и  $\delta$  суть некоторые алгебраические функции от  $\alpha$  и  $\beta$ .

Для уравнений Навье—Стокса они упрощаются до  $\gamma^2 = \frac{8}{15} \alpha^2$  и  $\delta^2 = 30$ .

Напряжения определяются соотношениями

$$\rho_{xx} : \rho_{yy} : \rho_{zz} : \rho_{xy} = -8\beta : 6\beta : 2\beta : 5. \quad (33.10)$$

Трудно предвидеть, сколько трудностей связано с распространением таких нелинейных результатов на аппроксимации более высокого порядка.

Проблема цилиндрического течения Куэтта не имеет простого явного решения в нелинейном случае, и практические результаты могут быть получены только численно или с помощью разложения через различные параметры [59].

\* См. сноску на стр. 102.

Обратимся теперь к проблеме медленного течения около сферы. Уравнения Навье—Стокса в этом случае могут быть решены в явном виде с граничным условием скольжения [44], которое для простоты возьмем в форме

$$p_{ij}n_j = \beta u_i, \quad (33.11)$$

т. е. тангенциальное напряжение пропорционально скорости скольжения. Сопротивление сферы оказывается равным

$$F = 6\pi\mu Ua \frac{2\alpha + 3\beta}{3\alpha + \beta}, \quad (33.12)$$

где  $U$  есть скорость течения на бесконечности,  $a$  — радиус сферы. Коэффициент скольжения  $\beta$  пропорционален плотности. Средняя длина свободного пробега имеет порядок  $\mu/\beta$ . При большой средней длине свободного пробега (по сравнению с  $a$ )  $F \rightarrow 4\pi\mu Ua$ , тогда как при малой длине  $F \rightarrow 6\pi\mu Ua$  (формула Стокса). Первый результат, очевидно, является неверным, так как в вакууме сфера не может обладать сопротивлением.

Этот результат находится в прямой противоположности с только что упоминавшимся решением для течения Куэтта, где уравнения Навье—Стокса в сочетании с граничным условием скольжения дают прекрасные результаты во всем диапазоне изменения средней длины свободного пробега, в частности, напряжения убывают до нуля, когда средняя длина свободного пробега становится большой. Легко видеть, что правильность результата в случае течения Куэтта является случайностью. При любой геометрии, при которой постоянное течение или вращение как твердого тела не допускаются граничными условиями, напряжения

$$p_{ij} = -\mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_r}{\partial x_r} \right) \quad (33.13)$$

не могут исчезнуть. Величина плотности (т. е. длина среднего свободного пробега) здесь не сказывается. Те редкие случаи, в которых использование уравнений Навье—Стокса не исключается сразу же при малых плотностях, геометрически характеризуются наличием в качестве границ параллельных плоскостей или концентрических цилиндров, или же вообще отсутствием границ. Однако почти все геометрические формы, для которых найдены решения, попадают в эту очень специальную категорию!

Линеаризованная задача о течении вокруг сферы была решена для уравнений тринадцати моментов и граничных условий (29.27) и (29.28). Решение получается в явном виде, и сопротивление представляет собой сложное алгебраическое выражение относительно длины среднего свободного пробега [19]. Оно дает правильное значение сопротивления, а именно, нуль для бесконечной длины среднего свободного пробега и точный стоксовский предел для его малой длины, но является не очень точным в интервале между этими предельными значениями. Тем не менее, на сегодня это единственное решение, которое справедливо во всем диапазоне изменения средней длины свободного пробега.

В заключение отметим очень интересное рассмотрение случая внешне приводимой в движение пластины, проведенное Янгом и Лисом [71]. Они используют линеаризованные тринадцатимоментные уравнения и граничные условия со скольжением и решают их с помощью преобразования Лапласа. Поскольку уравнения гиперболические, возмущения могут удаляться от пластины только с конечной скоростью. Через короткий отрезок времени после толчка приходит в движение лишь тонкий слой газа около пластины, этот слой движется как целое со средней скоростью, которая определяется граничным условием скольжения. С тече-

нием времени фронт волны удаляется и распадается, а профиль асимптотически приближается к результату Релея

$$\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{t}}. \quad (33.14)$$

Эта задача имеет специфическую особенность, заключающуюся в переходе от свободно-молекулярного течения для малых времен к классической гидродинамике для больших времен, и этим избегается начальная неопределенность решения Навье—Стокса.

Из этого краткого изложения следует, что проблемы, которые могут быть решены с помощью описанных методов, далеко не исчерпаны. Однако относительно полные результаты, которые получены для линейных задач дисперсии звука, теплового потока и течения со сдвигом, вряд ли легко распространить на многие другие проблемы. Но даже и в этих задачах получена со всей общностью только форма решения и требуется большая вычислительная работа для каждого дополнительного шага в аппроксимации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Becker R., Z. Physik 8, 321, 1922.
2. Bhatnager P. L., Gross E. P., Krook M., Phys. Rev., 94, 511, 1954.
3. Боголюбов Н., ЖЭТФ, 10, 265, 1946.
4. Born M., Green H. S., Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A 188, 10, 1946.
5. Born M., Green H. S., A General Kinetic Theory of Liquids, Cambridge 1949.
6. Brout R., Physica, Haag, 22, 509, 1956.
7. Brout R., Prigogine L., Physica, Haag, 22, 621, 1956.
8. Burnett D., Proc. Lond., Math. Soc., 40, 382, 1935.
9. Carleman T., Acta math., Stockh., 60, 91, 1933.
10. Chapman S., Phil. Trans. Roy. Soc., Lond., A 217, 115, 1917.
11. Chapman S., Cowling T. G., The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge University Press, 1952. (русск. перев. Чепмен С., Каулинг Т., Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1961).
12. Cotter J. R., Proc. Roy. Irish Acad., A 55, 1, 1952.
13. De Groot S. R., Thermodynamics of Irreversible Processes. New York: Interscience 1951. (русск. перев. Де Гроот С. Р., Термодинамика необратимых процессов, Гостехиздат, 1956).
14. De Marcus W. C., The Problem of Knudsen Flow, U. S. Atomic Energy Commission, Report K-1302, ORGDR.
15. Ehrenfest P., Ehrenfest T., Encykl. math. Wiss., 4, 2, 1911.
16. Enskog D., Kinetische Theorie der Vorgänge in mässig verdünnten Gasen, Uppsala, 1917.
17. Enskog D., Ark. Mat., Astronom. Phys., Ser A 21, 1, 1928.
18. Frisch H. L., J. Chem. Phys., 22, 1713, 1954.
19. Goldberg R., Slow Flow of a Rarefied Gas Past a Spherical Obstacle, Thesis, New York University, 1954.
20. Grad H., Kinetic Theory and Statistical Mechanics, mimeographed notes. Institute of Mathematical Sciences. New York University, 1949.
21. Grad H., Comm. Pure Appl. Math., 2, 325, 1949.
22. Grad H., Comm. Pure Appl. Math., 2, 331, 1949. [русск. перев., Грэд Г., О кинетической теории разреженных газов, сб. Механика, № 4 (14), 5 (15), 1952].
23. Grad H., Comm. Pure Appl. Math., 5, 257, 1952.
24. Grad H., Comm. Pure Appl. Math., 5, 455, 1952.
25. Grad H., J. Phys. Chem., 56, 1039, 1952.
26. Green M. S., J. Chem. Phys., 25, 836, 1956.
27. Gross E. P., Krook M., Phys. Rev., 102, 593, 1956.
28. Gross E. P., Jackson E. A., Ziering S., Ann. of Physics, 1, 141, 1957. (русск. перев., Гросс Э., Джексон Э., Зиринг С., Граничные задачи в кинет. теории газов, сб. Механика, № 5, 51, 1958).
29. Hecke E., Math. Z., 12, 274, 1922.
30. Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Wien: J. B. Teubner, 1924.
31. Hopf E., Ergodentheorie. New York: Chelsea Publ. Co., 1948 (русск. перев., Хофф Э., Эргодическая теория «Успехи математических наук», вып. 1 (29), 1949).
32. Kenberry E., Truesdell C., J. Rat. Mech. Analysis, 5, 1, 1956.

33. Illingworth C. R., Proc. Cambridge Phil. Soc., **46**, 469, 1950.
34. Irving J. H., Kirkwood J. G., J. Chem. Phys., **18**, 817, 1950.
35. Jaffe G., Ann. der Phys., **6**, 195, 1930.
36. Jeans J. H., The Dynamical Theory of Gases. Cambridge, 1916.
37. Кас М., Proceedings of Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. U. of Cal. Press, 1956.
38. Keller J. B., Comm. Pure Appl. Math., **1**, 275, 1948.
39. Kennard E. H., Kinetic Theory of Gases. New York, McGraw-Hill, 1938.
40. Kirkwood J. G., J. Chem. Phys., **15**, 72, 1947.
41. Kohler M., Théorie moléculaire de l'onde de choc dans les gaz monoatomiques. Laboratoire d'études ballistiques de Saint Louis, 1946.
42. Kohler M., Z. Physik, **124**, 772, 1947.
43. Kohler M., Z. Physik, **27**, 215, 1950.
44. Lamb H., Hydrodynamics. New York: Dover Publ. 1945. (Русск. перев., Лэмб Г. Гидродинамика, ОГИЗ, 1947).
45. Lebowitz J. L., Frisch H. L., Phys. Rev., **107**, 917, 1957.
46. Maxwell J. C., Scientific Papers. New York: Dover Publ. n. d.
47. Merlic E., Hurlbut F. C., The Determination of slip flow coefficients for various Histories. Inst. of Engineering Res., U. of Calif., 1956.
48. Morduchow M., Libby P. A., J. Aer. Sci., **16**, 1949.
49. Morgenstern D., Proc. Nat. Acad. Sci., **40**, 719, 1954.
50. Morgenstern D., J. Rat. Mech. Analysis, **4**, 533, 1955.
51. Morrey C. B., Comm. Pure a. Appl. Math., **8**, 279, 1955.
52. Mott-Smith H. M., Phys. Rev., **82**, 885, 1951. (русск. перев., Мотт-Смит Г. М., сб. Механика, вып. I, ИЛ, 1953.).
53. Mott-Smith H. M., A New Approach in the Kinetic Theory of Gases, Lincoln Laboratory M.I.T., 1954.
54. Noll W., J. Rat. Mech. Analysis, **4**, 627, 1955.
55. Rankine W. J. M., Trans. Roy. Soc., **160**, 1870.
56. Rayleigh, J. Proc. Soc. Lond., Ser. A **84**, 1910.
57. Rogosinski W. W., Volume and Integral, New York, Interscience, 1952.
58. Rose M. (Heineman), Comm. Pure Appl. Math., **1**, 259, 1948.
59. Rose M. (Heineman), Phys. Rev., **91**, 469, 1953.
60. Shannon C. E., Weaver W., The Mathematical Theory of Communication, Univ. of Illinois Press, 1949.
61. Taylor G. I., Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A **84**, 1910.
62. Thomas L. H., J. Chem. Phys., **12**, 449, 1944.
63. Titchmarsh E. C., The Theory of Functions. Oxford University Press, 1939. (русск. перев., Титчмарш Э., Теория функций, ИЛ, 1951.).
64. Truesdell C., J. Rat. Mech. Analysis, **5**, 55, 1956.
65. Van Hove L., Physica, Haag, **15**, 951, 1949.
66. Van Hove L., Physica, Haag, **21**, 517, 1955.
67. Wang Chang C. S., On the Theory of the Thickness of Weak Shock Waves, Dept. of Engr. Research, U. of Mich., 1948.
68. Wang Chang C. S., Uhlenbeck G. E., On the Propagation of Sound in Monatomic Gases, Engr. Research Inst., U. of Mich., 1952.
69. Wang Chang C. S., Uhlenbeck G. E., The Heat Transport Between two Parallel Plates as Functions of the Knudsen Number, Engr. Research Inst., U. of Mich., 1953.
70. Wild E., Proc. Cambridge Phil. Soc., **47**, 602, 1951.
71. Yang H. T., Lees L., Rayleigh's problem at low Mach number according to the kinetic theory of gases. Guggenheim Aeron. Lab., Cal. Inst. of Tech., 1955.
72. Zoller K., Z. Physik, **130**, 1, 1951.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

### Кинетическая теория газов (Г. Грэд)

<i>Глава I.</i> Уравнение Больцмана и кинетическая теория газов . . . . .	5
Простейшие свойства уравнения Лиувилля . . . . .	6
Специфические черты уравнения Больцмана . . . . .	13
Наброски вывода уравнения Больцмана . . . . .	16
Критика . . . . .	20
<i>Глава II.</i> Простейшие свойства уравнения Больцмана . . . . .	38
<i>Глава III.</i> Теория существования решений . . . . .	48
<i>Глава IV.</i> Нормальные решения уравнения Больцмана . . . . .	60
<i>Глава V.</i> Другие методы решения . . . . .	77
Литература . . . . .	108

### Получение и измерение сверхвысокого вакуума (Д. Альперт)

<i>Глава I.</i> Введение . . . . .	110
<i>Глава II.</i> Измерение очень низких давлений . . . . .	113
<i>Глава III.</i> Факторы, определяющие достижения сверхвысокого вакуума . . . . .	131
<i>Глава IV.</i> Использование газопоглотителей при получении очень высокого вакуума . . . . .	140
<i>Глава V.</i> Ионное откачивание и использование ионных насосов для получения очень низких давлений . . . . .	144
<i>Глава VI.</i> Диффузионные насосы систем сверхвысокого вакуума . . . . .	150
<i>Глава VII.</i> Системы сверхвысокого вакуума и их элементы . . . . .	153
Литература . . . . .	165

### Явления переноса в газах при среднем давлении (Л. Вальдман)

<i>Глава I.</i> Феноменология процессов переноса . . . . .	169
<i>Глава II.</i> Методы измерения . . . . .	188
Измерение вязкости . . . . .	188
Измерение теплопроводности . . . . .	193
Измерение коэффициента диффузии . . . . .	198
Измерение коэффициента термодиффузии . . . . .	206
<i>Глава III.</i> Основы кинетической теории одноатомного газа . . . . .	213
Механика точки . . . . .	214
Статистические основы кинетической теории газов . . . . .	225
<i>Глава IV.</i> Функциональные методы в кинетической теории . . . . .	246
<i>Глава V.</i> Теплопроводность и трение в простом газе . . . . .	270
Кинетическая теория Чепмена и Энскога . . . . .	271
Некоторые количественные оценки. Сравнение с экспериментом . . . . .	283
<i>Глава VI.</i> Диффузия, теплопередача и трение в газовых смесях . . . . .	292
Формальные основы гидродинамического приближения . . . . .	293

	<i>Стр.</i>
Методы определения функций распределения и коэффициентов переноса	308
Сравнение теоретических и экспериментальных значений коэффициентов диффузии . . . . .	320
Теоретические и экспериментальные значения термодиффузионного коэффи- циента . . . . .	327
Теоретические и экспериментальные значения коэффициентов трения и теп- лопроводности бинарных смесей . . . . .	342
<i>Глава VII.</i> Квантомеханические эффекты в легких газах . . . . .	348
<i>Глава VIII.</i> Многоатомные газы . . . . .	368
Общая теория . . . . .	368
Некоторые специальные приложения теории . . . . .	401
Л и т е р а т у р а . . . . .	407
<b>Теория реальных газов (Джозеф Е. Майер)</b>	
<i>Глава I.</i> Общие методы . . . . .	415
<i>Глава II.</i> Внутренняя статистическая сумма . . . . .	445
<i>Глава III.</i> Классические несовершенные газы . . . . .	471
<i>Глава IV.</i> Квантовая теория газов . . . . .	526
Л и т е р а т у р а . . . . .	562

---