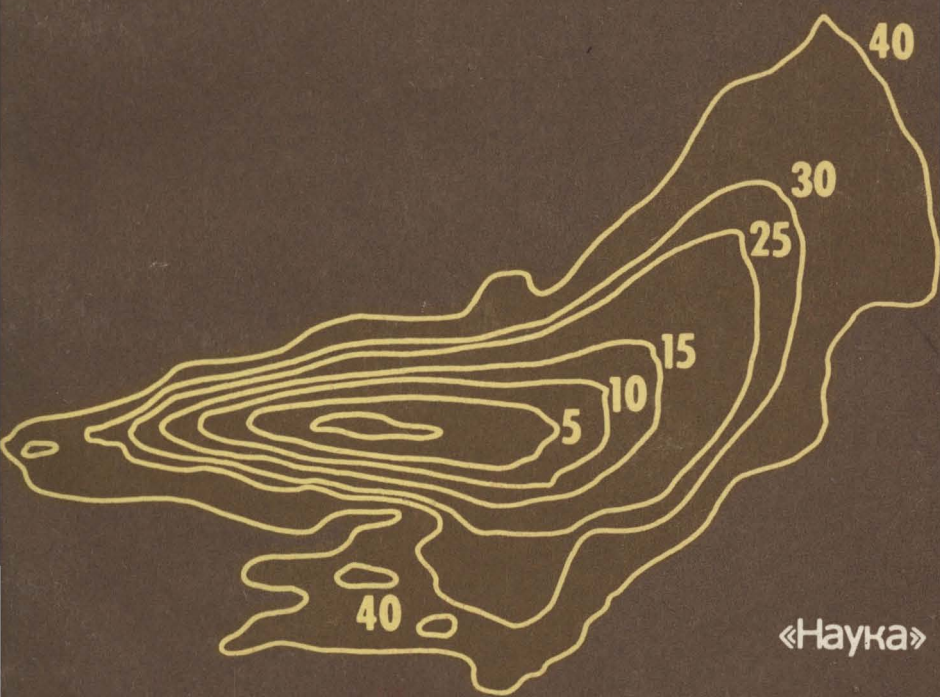


**ПОВЕРХНОСТНЫЕ  
СЕЙСМИЧЕСКИЕ  
ВОЛНЫ  
В ГОРИЗОНТАЛЬНО-  
НЕОДНОРОДНОЙ  
ЗЕМЛЕ**



«Наука»

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
Ордена Ленина Институт физики Земли  
им. О.Ю. Шмидта

# ПОВЕРХНОСТНЫЕ СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ГОРИЗОНТАЛЬНО- НЕОДНОРОДНОЙ ЗЕМЛЕ

Ответственный редактор  
доктор физико-математических наук  
В.И. КЕЙЛИС-БОРОК



МОСКВА  
"НАУКА"  
1987



**Поверхностные сейсмические волны в горизонтально-неоднородной Земле/А.Л. Левшин, Т.Б. Яновская, А.В. Ландер и др. — М.: Наука, 1987.**

На основе пространственно-лучевого метода изложена приближенная теория распространения поверхностных волн в полупространстве со слабой горизонтальной неоднородностью. Описаны приближенные способы расчета полей отраженных и преломленных поверхностных волн на вертикальных границах, моделирующих резкие вариации структуры.

Предлагаются методы интерпретации сейсмологических данных, основанные на учете горизонтальной неоднородности реальной Земли. Приводятся результаты исследования горизонтальных вариаций фазовой и групповой скоростей, на основе которых делаются выводы о строении литосферы в различных регионах Евразии.

Монография представляет интерес для специалистов, занимающихся теорией и интерпретацией сейсмических наблюдений. Может быть использована в качестве учебного пособия для студентов старших курсов и аспирантов-геофизиков.

Ил. 92. Табл. 11. Библиогр. 201 назв.

А.Л. ЛЕВШИН, Т.Б. ЯНОВСКАЯ, А.В. ЛАНДЕР,  
Б.Г. БУКЧИН, М.П. БАРМИН, Л.И. РАТНИКОВА, Е.Н. ИТС

Рецензенты:

*В.М. Бабич, М.А. Гринфельд*

## ВВЕДЕНИЕ

Поверхностные волны образуют самую продолжительную и интенсивную часть сейсмических колебаний, возбуждаемых взрывами и неглубокими землетрясениями. Пробегаая через области с различным геологическим строением, они "впитывают" в себя информацию о свойствах этих областей, которая наиболее ярко проявляется в дисперсии — зависимости скорости распространения от частоты. Другие свойства этих волн — поляризация, частотный состав, затухание, азимутальная изменчивость амплитуд и фаз — также обусловлены строением среды на пути между источником и регистрирующими станциями, а некоторые из них еще и свойствами самого источника и условиями, в которых он действует.

Сейсмология поверхностных волн стала в последние годы неотъемлемой частью сейсмологической практики. Максимальные амплитуды в цуге поверхностных волн практически от каждого землетрясения или крупного взрыва измеряются и используются всеми национальными и международными сейсмологическими службами для определения важнейшей энергетической характеристики сейсмического источника — магнитуды  $M_S$ . Соотношение между  $M_S$  и магнитудой  $m_b$ , определяемой по объемным волнам, регулярно используется для идентификации подземных ядерных взрывов. Записи поверхностных волн от сотни землетрясений в год анализируются для оценки тензора сейсмического момента очага землетрясения, определения периодов собственных колебаний Земли, построения региональных дисперсионных кривых — и по ним скоростных разрезов земной коры и верхней мантии в различных регионах, оценки диссипативных параметров вещества мантии. Начаты работы по поверхностно-волновой "томографии" мантии Земли — выявлению горизонтальных неоднородностей и анизотропии упругих свойств по глобальным сейсмологическим наблюдениям. Поверхностные волны взрывов и землетрясений привлекаются для изучения труднодоступных областей, в частности для выявления крупных осадочных бассейнов на арктическом шельфе.

Такому расцвету сейсмологии поверхностных волн способствовали развитие цифровой длиннопериодной сейсмологической аппаратуры, появление групп сейсмических станций, использование национальных и международных сетей длиннопериодных станций в качестве пространственных групп.

В то же время благодаря использованию ЭВМ существенно усовершенствовались методы анализа данных поверхностных волн, позволяющие с большей точностью оценивать их спектральные дисперсионные и поляризационные характеристики. Были развиты методы количественной интерпретации этих измерений, позволяющие эффективно находить скорост-

ные и плотностные модели среды, согласующиеся с наблюдениями, и оценивать неоднозначность и разрешающую способность данных.

Все эти результаты базировались на существенно продвинутой теории и развитых эффективных методах расчета спектральных характеристик и волновых полей поверхностных волн в вертикально- и радиально-неоднородных средах.

Однако по мере развития поверхностно-волновой сейсмологии все более очевидной становится неадекватность теоретической модели среды, принятой для интерпретации наблюдений, существующему уровню точности и детальности измерений, а также характеру решаемых задач. Изучаемые среды характеризуются значительной близкповерхностной и глубоинной латеральной неоднородностью, проявляющейся как в плавном изменении упругих и плотностных свойств среды с расстоянием (в пределах крупных блоков континентальной и океанической литосферы), так и в резких скачках скоростей и плотностей на границах блоков разного глубинного строения, в зонах субдукции, геосинклинальных прогибах, внутриконтинентальных депрессиях, рифтах, островных дугах и т.п.

В последние годы в СССР и за рубежом был выполнен ряд теоретических и экспериментальных (модельных и полевых) исследований эффектов, вызываемых такого рода латеральными неоднородностями в характеристиках поверхностных волн. Эти работы привели к результатам, имеющим прикладное значение: были найдены подходы, позволяющие в определенных условиях интерпретировать наблюдения в рамках горизонтально-неоднородных моделей и получать содержательные сведения о характере неоднородностей достаточно обоснованными (с физической точки зрения) методами. Появилась возможность поставить перед поверхностно-волновой сейсмологией новый круг задач, основанных на более полных представлениях о свойствах сейсмических полей в неоднородных средах. Настоящая монография является попыткой дать единое описание этих новых теоретических и интерпретационных подходов, а также результатов их применения к решению конкретных задач. Вместе с тем она служит и более широким целям — дать советским сейсмологам развернутое представление о современном состоянии и перспективах развития метода поверхностных волн и способствовать тем самым ликвидации определенного отставания отечественных работ в этой области по сравнению с передовыми зарубежными исследованиями.

Книга состоит из двух частей. Первая часть посвящена решению прямых задач поверхностно-волновой сейсмологии неоднородных сред.

В главе 1 даны элементы теории поверхностных волн в вертикальных и радиально-неоднородных средах. Проведено описание классов сейсмологических источников, основанное на теории избыточных напряжений; рассмотрены основные свойства волн, возбуждаемых некоторыми видами точечных источников, и влияние на них различных факторов; приведены примеры для простейших (классических) моделей. Описаны эффективные способы учета сферичности, неидеальной упругости и основные свойства сейсмограмм.

Глава 2 посвящена изучению влияния плавных горизонтальных неоднородностей на поля поверхностных волн. Описаны асимптотические подходы, приводящие к лучевым представлениям для главной части поля сме-

щений, переносимых стационарными и нестационарными поверхностными волнами. Нестационарные волновые поля исследуются при помощи пространственно-лучевого метода; даны элементы теории пространственно-временных лучей поверхностных волн в средах с плавной горизонтальной неоднородностью.

В главе 3 предлагается приближенный способ учета эффектов вертикального контакта на распространение поверхностных волн. Способ основан на использовании метода функций Грина и позволяет рассчитывать коэффициенты отражения—прохождения, плоских волн, падающих под произвольным углом на плоский вертикальный контакт двух четвертьпространств различного строения. Точность метода оценивается сравнением с результатами более полных численных расчетов, учитывающих вклад дифрагированных волн. Рассмотрены возможности усложнения модели введением наклона границы контакта.

Глава 4 посвящена алгоритмам решения прямых задач теории поверхностных волн. В ней описаны применяемые авторами алгоритмы расчета спектральных характеристик для вертикально-неоднородных сред, коэффициентов отражения и прохождения волн на вертикальных контактах. Приведены геометро-лучевые алгоритмы для сред с плавной горизонтальной неоднородностью. Каждая из методик проиллюстрирована примерами расчетов.

Вторая часть книги посвящена вопросам анализа и интерпретации наблюдений.

Глава 5 описывает современное состояние методов регистрации, сбора и анализа длиннопериодной информации.

Рассмотрен характер сейсмических шумов, мешающих выделению полезных сигналов в различных частотных диапазонах; даны принципиальные характеристики современных длиннопериодных каналов регистрации. Описаны способы сбора, хранения и доступа к длиннопериодной сейсмологической информации, применяемые Центральной сейсмологической обсерваторией "Обнинск" Института физики Земли АН СССР.

Представлена математическая модель диспергирующего сейсмического сигнала и исследованы ее свойства. Продемонстрированы возможности и ограничения спектральных и спектрально-временных методов разделения сигналов и измерения дисперсионных характеристик. Рассмотрены способы разделения интерферирующих волн и измерения их параметров при помощи поляризационного и пространственного анализов.

В главе 6 рассмотрены вопросы количественной интерпретации данных о дисперсии поверхностных волн. Дан обзор состояния проблемы. Далее подробно рассмотрены два различных подхода к извлечению локальной информации из наблюдений, охватывающих области различного глубинного строения. Один из них не требует априорной информации об изучаемой территории и ищет латеральные возмущения фазовой и групповой скоростей при помощи двумерного аналога широко известного в геофизике метода Бэкуса—Гилберта. Другой предполагает предварительную регионализацию исследуемой области и находит региональные дисперсионные кривые, соответствующие отдельным однородным по горизонтали регионам, методом нелинейного программирования.

Рассмотрены ошибки, возникающие при интерпретации данных по-

верхностных волн вследствие неучета латеральных неоднородностей, и явления, обусловленные неоднородностью среды, которые могут быть истолкованы как проявления анизотропии. Обсуждается постановка обратных задач об очаге землетрясения по данным поверхностных волн.

В главе 7 продемонстрированы результаты интерпретации наблюдений поверхностных волн, записанных стационарными сейсмическими станциями. Приведены скоростные разрезы земной коры ряда регионов Евразии, полученные по методике последовательного исключения трасс, и карты распределения групповых скоростей для некоторых континентальных и океанических областей. Исследованы дисперсионные и поляризационные эффекты протяженной аномальной зоны в Северо-Восточной Сибири, приуроченной к области гипотетического континентального рифтогенеза.

В написании монографии участвовал коллектив авторов: введение, глава 1 (за исключением § 1.2), § 5.1, 5.6 и 6.6 написаны А.Л. Левшиным; главы 2 и 3 (за исключением § 3.4), § 4.1, 4.3, 6.1, 6.5 и 7.2 — Т.Б. Яновской; § 5.3—5.5 и 7.3 — А.В. Ландером; § 1.2, 3.4 и 6.8 — Б.Г. Букчиным; § 4.2, 5.2, 6.2—6.4 — М.П. Барминым; § 6.7 и 7.1 — Л.И. Ратниковой; § 4.4 — Е.Н. Итс.

В работе использовались материалы, полученные авторами совместно с К.-А. Бертоссеном (Норвегия), Т.М. Сабитовой, С.Е. Капитановой, О.Е. Старовойтом, С.Б. Николовой и опубликованные ранее в совместных статьях. Всем указанным коллегам авторы выражают искреннюю признательность.



## Глава I

**ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ  
В ВЕРТИКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ**

## § 1.1. Уравнения движения упругой среды

Исследование поверхностных волн проводится в рамках линейной теории упругости преимущественно для идеально упругих тел. Внутренние источники возмущений описываются в § 1.2 при помощи эквивалентных сил. Способ учета малых отклонений от идеальной упругости при распространении волн указывается в § 1.6.

**Уравнения движения.** Уравнения движения произвольной точки  $x$  с координатами  $(x_1, x_2, x_3)$  под воздействием поля объемных сил имеют вид [3, 63]

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i. \quad (1.1)$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  — компоненты симметрического тензора напряжений;  $f_i$  — компоненты поля объемных сил, отнесенных к единице объема;  $\rho$  — плотность;  $u_i$  — компоненты вектора смещений; индексы  $i, j$  принимают значения 1, 2, 3. Точки над буквой означают дифференцирование по времени, нижние индексы справа от запятой — дифференцирование по пространственным координатам  $x_j$ . Всюду, где это особо не оговорено, подразумевается суммирование по повторяющимся (немым) индексам.

Тензор напряжения линейно связан с тензором малых деформаций  $e_{ij}$  законом Гука:

$$\sigma_{ij} = c_{ijpq} e_{pq}, \quad (1.2)$$

где  $c_{ijpq}$  — тензор упругих коэффициентов, зависящий от  $x$ . Он обладает свойствами симметрии

$$c_{ijpq} = c_{jipq} = c_{ijqp} = c_{pqij}.$$

В дальнейшем рассматриваются в основном изотропные тела, для которых

$$c_{ijpq} = \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp})$$

( $\delta_{ij}$  — символ Кронекера). Параметры Ламэ  $\lambda$  и  $\mu$  определяют скорости упругих волн  $a$  и  $b$ :

$$a = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} \text{ для продольных (P) волн,}$$

$$b = \sqrt{\mu/\rho} \text{ для поперечных (S) волн.}$$

Для изотропных сред закон Гука имеет вид

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \theta + 2\mu e_{ij}, \quad (1.2a)$$

где  $\theta = e_{kk}$  — дилатация.

Связь малых деформаций и смещений имеет вид

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1.3)$$

Подставляя (1.2а) и (1.3) в (1.1), получаем уравнения движения относительно  $\mathbf{u}$  в инвариантной форме

$$(\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + \nabla \mu \times \operatorname{rot} \mathbf{u} + 2(\nabla \mu, \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (1.4)$$

где  $\nabla$  – градиент;  $\Delta$  – лапласиан;  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  – скалярное произведение.

**Начальные условия.** Предполагается, что до момента  $t = 0$  среда находилась в покое:

$$u_j \equiv \dot{u}_j \equiv 0 \text{ при } t < 0. \quad (1.5)$$

**Граничные условия.** Рассматриваемые упругие тела ограничиваются (полностью или частично) свободной поверхностью  $S_0$ . Это означает, что справедливо соотношение

$$T_i(\mathbf{n}) = \sigma_{ij} n_j \Big|_{S_0} = 0, \quad (1.6)$$

где  $n_j$  – компоненты внешней нормали  $\mathbf{n}$  к  $S_0$ . Здесь и далее  $T_i(\mathbf{n})$  – компоненты векторного напряжения  $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ , т.е. силы, действующей на единичный элемент площадки  $dS_0$ .

**Условия на контактах.** Функции  $a(\mathbf{x})$ ,  $b(\mathbf{x})$ ,  $\rho(\mathbf{x})$  предполагаются положительными и кусочно-непрерывными. На всех поверхностях, где происходит скачок этих функций, имеется жесткий контакт, т.е. вектор смещений  $\mathbf{u}$  и тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  непрерывны при переходе через границу.

**Источники возмущений.** Источником упругих колебаний является векторное поле объемных сил  $\mathbf{f}$ , зависящее от пространственных и временной координат (физический смысл поля обсуждается в следующем параграфе). В дальнейшем предполагается, что это поле пространственно финитно, вне некоторой замкнутой области  $\Omega$  (т.е.)  $f_j(\mathbf{x}, t) = 0$ . Область  $\Omega$  в дальнейшем называется областью очага.

Далее предполагается финитность производной  $f_j$  по времени, т.е.  $f_j(\mathbf{x}, t) = \dot{f}_j(\mathbf{x}, t) = 0$  при  $t < 0$  и  $\dot{f}_j(\mathbf{x}, t) = 0$  при  $t > t_e$ .

**Функция Грина.** Пусть решение прямых задач волновой теории упругости заключается в отыскании векторного поля смещений  $u_j(\mathbf{x}, t)$  и тензорного поля напряжений  $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ , подчиняющихся уравнениям (1.1), (1.2а), (1.3), начальным и граничным условиям (1.5), (1.6).

В случае, когда поле объемных сил идеально сосредоточено в пространстве вокруг точки  $\mathbf{x}_0$  и во времени вокруг момента  $t_0$  и направлено вдоль оси  $x_j$ , т.е.

$$f_j(\mathbf{x}, t) = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(t - t_0),$$

где  $\delta$  – функция Дирака, результирующее смещение  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  называется фундаментальным решением или функцией Грина краевой задачи (1.1), (1.5), (1.6) [3]. Будем обозначать такое решение  $\mathbf{G}^{(j)}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0; t - t_0)$ , а его  $i$ -ю компоненту  $G_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0; t - t_0)$ .

Решение для произвольного воздействия  $f_j(\mathbf{x}, t)$ , равного нулю при

$t < 0$ , выражается через эту функцию Грина интегральным соотношением

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega} G_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}; t - \tau) f_j(\mathbf{y}, \tau) dV_y, \quad (1.7)$$

где  $dV$  — элемент объема  $\Omega$  среды (области очага), внутри которого  $f_j(\mathbf{x}, t)$  не является тождественным нулем.

Помимо самой функции Грина, удобно ввести интеграл по времени от этой функции

$$H_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}; t) = \int_0^t G_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}; \tau) d\tau.$$

Как нетрудно показать, смещение для произвольного финитного воздействия можно также представить в виде

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \int_0^{t_e} d\tau \int_{\Omega} H_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}; t - \tau) \dot{f}_j(\mathbf{y}, \tau) dV_y, \quad (1.8)$$

где  $t_e$  — время, в течение которого  $\dot{f}_j(t)$  не равно тождественно нулю.

**Теорема представления.** Рассмотрим трехмерную область  $V$  среды, ограниченную поверхностью  $S$  с внешней нормалью  $\mathbf{n}$ . Смещения в произвольной точке  $\mathbf{x}$  внутри этой области в момент времени  $t$  в соответствии с теоремой представления [3] могут быть выражены через смещения  $\mathbf{u}$  и напряжения  $\mathbf{T}$  на поверхности  $S$  и объемные силы, действующие в  $V$ , следующим образом:

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}, t) = & \int_0^{\infty} d\tau \int_V G_{ji}(\mathbf{y}; \mathbf{x}; t - \tau) f_j(\mathbf{y}, \tau) dV_y + \\ & + \int_0^{\infty} d\tau \int_S [G_{ji}(\mathbf{y}; \mathbf{x}; t - \tau) T_j(\mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau), \mathbf{n}) - \\ & - u_j(\mathbf{y}, \tau) T_j(\mathbf{G}^{(i)}(\mathbf{y}; \mathbf{x}; t - \tau), \mathbf{n})] dS_y. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь функция Грина  $\mathbf{G}^{(i)}$  — фундаментальное решение уравнения (1.1) в области  $V$  с произвольными граничными условиями на поверхности  $S$ .

Напряжения  $\mathbf{T}(\mathbf{G}^{(i)}(\mathbf{y}; \mathbf{x}; t), \mathbf{n})$  обусловлены смещениями  $\mathbf{G}^{(i)}$  и согласно (1.2), (1.3) имеют вид

$$T_j = c_{jklm} n_k G_{il,m}.$$

Пусть теперь объемные силы отсутствуют, а внутри среды существует поверхность  $\Sigma$  (с нормалью  $\mathbf{n}$ ), на которой терпит разрыв вектор смещения  $\mathbf{u}$ , а напряжения  $\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{n})$  непрерывны. В этом случае, выбирая в качестве поверхности  $S$  в (1.9)  $S_0 + \Sigma^- + \Sigma^+$ , где  $\Sigma^-$  и  $\Sigma^+$  — две стороны поверхности  $\Sigma$ , принимая однородные граничные условия (1.6) для функции Грина  $\mathbf{G}^{(i)}$  и смещения  $\mathbf{u}$  на поверхности  $S_0$ , получаем

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \int_0^{\infty} d\tau \int_{\Sigma} [u_j(\mathbf{y}, \tau)] c_{jklm}(\mathbf{y}) n_k(\mathbf{y}) G_{il,m}(\mathbf{x}; \mathbf{y}; t - \tau) d\Sigma_y. \quad (1.9a)$$

Дифференцирование функции Грина ведется по переменным  $y_j$ . Квадратные скобки означают разность величин в точке  $\mathbf{y}$ , измеряемых на разных

сторонах  $\Sigma^+$  и  $\Sigma^-$  площадки  $\Sigma$ , направление нормали  $\mathbf{n}$  — от  $\Sigma^-$  к  $\Sigma^+$ . При выводе (1.9а) использовано свойство взаимности данной функции Грина [3]

$$G_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}; t - \tau) = G_{ji}(\mathbf{y}; \mathbf{x}; t - \tau).$$

## § 1.2. Источники сейсмических возмущений

Наиболее часто сейсмические возмущения возникают в результате действия внутренних источников (землетрясений или взрывов) в отсутствие внешних объемных сил. Тогда в уравнении (1.1) следует считать  $f_j \equiv 0$ , и единственным решением, удовлетворяющим однородным начальным (1.5) и граничным (1.6) условиям и закону Гука (1.2), является  $u_i \equiv 0$ . Ненулевые смещения в среде возможны лишь в том случае, когда для них не выполняется хотя бы одно из перечисленных соотношений. Следуя [109, 110], будем предполагать, что причиной сейсмических движений является возникшее в момент времени  $t > 0$  нарушение закона Гука в некоторой части среды.

Пусть  $u_i(\mathbf{x}, t)$  описывает смещения точек среды, а  $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$  — те напряжения, которые существовали бы в ней, если бы повсеместно выполнялся закон Гука (1.2). Пусть  $s_{ij}(\mathbf{x}, t)$  — фактические напряжения в среде. Разность

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) - s_{ij}(\mathbf{x}, t), \quad (1.10)$$

называемая тензором избыточных напряжений (stress glut), не является тождественным нулем в пределах пространственной области  $\Omega$ . В этой области, и только в ней, не равен тождественно нулю и тензор  $\dot{\Gamma}_{ij}(\mathbf{x}, t)$ . Будем предполагать, что область  $\Omega$  расположена целиком внутри среды (не выходит на поверхность) и что, начиная с какого-то момента времени  $t_e > 0$ , всюду в среде  $\dot{\Gamma}_{ij}(\mathbf{x}, t) = 0$ . Интеграл от  $\Gamma_{ij}$  по области  $\Omega$  называют тензором сейсмического момента [3, 49]. Поскольку в соответствии с (1.1) истинные движения подчиняются уравнению  $s_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i$ , то из (1.10) получаем

$$\sigma_{ij,j} + g_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (1.11)$$

$$g_i = -\Gamma_{ij,j}. \quad (1.12)$$

Эквивалентные силы  $g_i(\mathbf{x}, t)$  в (1.11) удовлетворяют всем ограничениям, наложенным в § 1.1 на поле объемных сил  $f_i$ , поэтому возбужденные ими смещения выражаются теми же формулами (1.7), (1.8) с заменой  $f_i$  на  $g_i$ . Пользуясь выражением (1.12) для  $g_i$  и теоремой Гаусса—Остроградского, окончательно имеем

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega} G_{ij,k}(\mathbf{x}; \mathbf{y}; t - \tau) \Gamma_{jk}(\mathbf{y}, \tau) dV_{\mathbf{y}}, \quad (1.13)$$

или

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \int_0^{t_e} d\tau \int_{\Omega} H_{ij,k}(\mathbf{x}; \mathbf{y}; t - \tau) \dot{\Gamma}_{jk}(\mathbf{y}, \tau) dV_{\mathbf{y}}. \quad (1.14)$$

Здесь  $G_{ij}$ ,  $H_{ij}$  дифференцируются по аргументу  $y_k$ .

Если отклонение от идеальной упругости приурочено к некоторой произвольной конечной площадке внутренней поверхности  $\Sigma$ , тензор избыточных напряжений принимает вид

$$\Gamma_{jk}(\mathbf{x}, t) = m_{jk}(\mathbf{x}, t) \delta_{\Sigma}(\mathbf{x}),$$

где  $\delta_{\Sigma}(\mathbf{x})$  — обобщенная функция, удовлетворяющая соотношению  $\int_V \delta_{\Sigma}(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) dV_x = \int_{\Sigma} \varphi(\mathbf{x}) d\Sigma_x$  для любой функции  $\varphi(\mathbf{x})$ . Тогда интегрирование по объему  $V_y$  в (1.13), (1.14) сведется к интегрированию по поверхности  $\Sigma$ :

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \int_0^t d\tau \int_{\Sigma} G_{ij,k}(\mathbf{x}; \mathbf{y}; t - \tau) m_{jk}(\mathbf{y}, \tau) d\Sigma_y,$$

где точки  $\mathbf{y}$  принадлежат поверхности  $\Sigma$ . Если отклонение от идеальной упругости проявляется как скачок смещений  $\mathbf{u}$  на поверхности  $\Sigma$ , а скачок напряжений отсутствует, то, как следует из (1.9а),

$$m_{jk}(\mathbf{x}, t) = n_q(\mathbf{x}) [u_p(\mathbf{x}, t)] c_{jkpq}(\mathbf{x}),$$

где  $\mathbf{n}$  — нормаль к  $\Sigma$  (смысл скачка  $[u_p]$  пояснялся ранее). В изотропной среде

$$m_{jk} = \lambda [u_p] n_p \delta_{jk} + \mu (n_j [u_k] + n_k [u_j]);$$

в случае касательной (сдвиговой) дислокации  $n_p [u_p] \equiv 0$  и

$$m_{jk} = \mu (n_j [u_k] + n_k [u_j]). \quad (1.15)$$

Если отклонение от идеальной упругости сосредоточено в бесконечно малой окрестности точки  $\mathbf{x}_0$  (область  $\Omega$  стягивается в точку), то

$$\Gamma_{jk}(\mathbf{x}, t) = m_{jk}(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

и эквивалентные силы  $g_i$  приобретают вид диполей

$$g_j = -m_{jk}(t) \frac{\partial \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\partial x_k} \quad (1.16)$$

Такой источник создает поле вида

$$u_i = \int_0^t m_{jk}(t) G_{ij,k}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0; t - \tau) d\tau, \quad (1.17)$$

или

$$u_i = \int_0^{t_e} \dot{m}_{jk}(t) H_{ij,k}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0; t - \tau) d\tau, \quad (1.17a)$$

где дифференцирование  $G_{ij}$ ,  $H_{ij}$  осуществляется по переменной  $y_k$  в точке  $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0$ .

В изотропной среде для точечного центра расширения (идеально сосредоточенного взрыва) можно получить [3]

$$m_{jk} = m(t) \delta_{jk}, \quad (1.18)$$



а для точечной сдвиговой дислокации

$$m_{jk} = m(t) (\kappa_j n_k + \kappa_k n_j), \quad (1.19)$$

где  $\kappa_j$  — компоненты единичного вектора в направлении скачка  $[\mathbf{u}]$  (вектор подвижки), а  $m(t) = \mu |[\mathbf{u}]|$ .

Величина  $m_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} m(t)$  называется сейсмическим моментом.

### § 1.3. Поверхностные волны в вертикально-неоднородном полупространстве, возбуждаемом точечными источниками

Перейдем теперь к рассмотрению существенно более узкого класса моделей, чем описанные выше, а именно таких, в которых свойства среды зависят только от одной координаты. Теория поверхностных волн в таких средах разработана достаточно полно [3, 63], и мы приведем ниже основные результаты, необходимые для дальнейшего их использования в более сложных ситуациях.

Будем рассматривать вертикально-неоднородное полупространство с декартовыми координатами  $x = x_1$  ( $-\infty < x < \infty$ ),  $y = x_2$  ( $-\infty < y < \infty$ ),  $z = x_3$  ( $0 \leq z < \infty$ ), ограниченное свободной поверхностью  $S_0$  ( $z = 0$ ). Скорости  $a$  и  $b$ , плотность  $\rho$  являются функциями только одной координаты  $z$ . Кроме того, глубже  $z = Z$  среда однородна, т.е.  $a(z) = a(Z + 0)$ ,  $b(z) = b(Z + 0)$ ,  $\rho(z) = \rho(Z + 0)$  при  $Z < z < \infty$ , причем  $b(Z + 0) = \max b(z)$ ,  $a(Z + 0) = \max a(z)$ .

Как показано в [3, 63], полное решение  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  для такой среды можно представить в интегральной форме. Его главную часть на больших (по сравнению с изучаемыми длинами волн) расстояниях от области очага  $\Omega$  до точки наблюдения образуют поверхностные волны. При этом предполагается, что глубины, на которых расположена область очага и точка наблюдения, значительно меньше горизонтального расстояния между ними. Сама "поверхностно-волновая" часть решения распадается на два независимых поля  $\mathbf{u}^R$  и  $\mathbf{u}^L$  (волны Рэлея и Лява), обладающие различной поляризацией. В дальнейшем мы часто будем пользоваться символом  $D$  ( $D = R$  или  $L$ ) для указания типа волн.

**Одномерные задачи на собственные значения для волн Рэлея и Лява.** Рассмотрим частные решения уравнений (1.1) для описанной выше модели при отсутствии объемных сил в виде бегущих вдоль оси  $x$  плоских гармонических волн

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(z) \exp[i(\omega t - \xi x)],$$

удовлетворяющие граничному условию (1.6)

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \text{ при } z = 0.$$

Подставляя эти решения в (1.1) и (1.6), приходим к двум независимым одномерным задачам на собственные значения для компонент  $V_x, V_y, V_z$  амплитудного множителя  $\mathbf{V}(z)$ . Первая из них описывает колебания в плоскости  $(x, z)$  ( $P, SV$ ) и определяет, в частности, скорости распространения и амплитудные характеристики волн Рэлея. Вторая описывает коле-

бания в направлении оси  $y$  ( $SH$ ) и определяет скорости и амплитуды волн Лява.

Задача для  $P-SV$ -колебаний имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \bar{\sigma}_{33} - \xi \mu \frac{dV^{(2)}}{dz} + V^{(1)}(\rho \omega^2 - \xi^2 \mu) &= 0, \\ \frac{d}{dz} \bar{\sigma}_{13} + \xi \lambda \frac{dV^{(1)}}{dz} + V^{(2)}[\rho \omega^2 - \xi^2(\lambda + 2\mu)] &= 0, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= V_z; \quad V^{(2)} = iV_x; \\ \bar{\sigma}_{13} &= \mu \left( \frac{dV^{(2)}}{dz} + \xi V^{(1)} \right); \\ \bar{\sigma}_{33} &= (\lambda + 2\mu) \frac{dV^{(1)}}{dz} - \xi \lambda V^{(2)}; \end{aligned} \quad (1.21)$$

$\bar{\sigma}_{13}$  и  $\bar{\sigma}_{33}$  — амплитудные множители в выражениях для истинных напряжений  $\sigma_{13}, \sigma_{33}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= -i\bar{\sigma}_{13}(z) \exp[i(\omega t - \xi x)], \\ \sigma_{33} &= \bar{\sigma}_{33}(z) \exp[i(\omega t - \xi x)]. \end{aligned}$$

Граничное условие при  $z = 0$

$$\bar{\sigma}_{13} = \bar{\sigma}_{33} = 0. \quad (1.22)$$

Функции  $\bar{\sigma}_{13}, \bar{\sigma}_{33}, V^{(1)}$  и  $V^{(2)}$  непрерывны и ограничены при всех значениях аргумента  $z$ .

Указанная задача характеризуется дискретным и непрерывным спектрами, волновое число  $\xi$  играет роль свободного параметра. Собственные значения дискретного спектра заключены в интервале  $\xi^2 C_0^2 < \omega_{kR}^2 < \xi^2 b^2 (Z + 0)$ , где  $k = 1, 2, \dots$ ;  $C_0$  — минимальная из трех возможных скоростей:  $b_{\min}$  — минимальной скорости поперечных волн в среде,  $C_R$  — скорости волны Рэлея в однородном полупространстве с параметрами  $a(0), b(0)$ ;  $\min_i C_s^i$  — минимальной из скоростей волн Стоули [3], связанных с границами  $z = z_i$  разрыва скоростей или плотности, если такие волны могут существовать на границе двух однородных полупространств с параметрами  $a(z_i \pm 0), b(z_i \pm 0), \rho(z_i \pm 0)$ . Собственным значениям дискретного спектра соответствуют действительные собственные вектор-функции, компоненты которых при  $z > Z$  являются линейными комбинациями убывающих с ростом  $z$  экспонент:

$$\begin{aligned} V_k^{(1)} &= A_1 \exp \left[ -\sqrt{\xi^2 - \frac{\omega_{kR}^2}{a^2(Z+0)}} z \right] + B_1 \exp \left[ -\sqrt{\xi^2 - \frac{\omega_{kR}^2}{b^2(Z+0)}} z \right], \\ V_k^{(2)} &= A_2 \exp \left[ -\sqrt{\xi^2 - \frac{\omega_{kR}^2}{a^2(Z+0)}} z \right] + B_2 \exp \left[ -\sqrt{\xi^2 - \frac{\omega_{kR}^2}{b^2(Z+0)}} z \right]. \end{aligned}$$

Непрерывный спектр заключен в интервале  $\xi^2 b^2 (Z + 0) < \omega^2 < \infty$ . Ему соответствуют компоненты вектор-функций при  $z > Z$ , которые являются линейными комбинациями "нисходящих" и "восходящих" плоских волн:

$$\exp \left[ \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2(Z+0)} - \xi^2 z} \right], \quad \exp \left[ \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{b^2(Z+0)} - \xi^2 z} \right].$$

Для собственных функций при фиксированном  $\xi$  выполняются следующие условия ортогональности:

$$\int_0^{\infty} \rho (V_k^{(1)} V_l^{(1)} + V_k^{(2)} V_l^{(2)}) dz = 0, \quad k \neq l, \quad (1.23)$$

$$\int_0^{\infty} \rho (V_k^{(1)} V^{(1)}(\omega^2, z) + V_k^{(2)} V^{(2)}(\omega^2, z)) dz = 0,$$

$$\int_0^{\infty} \rho (V^{(1)}(\omega^2, z) V^{(1)}(\beta^2, z) + V^{(2)}(\omega^2, z) V^{(2)}(\beta^2, z)) dz \sim \delta(\omega^2 - \beta^2),$$

$$\omega^2 \neq \beta^2.$$

При фиксированном  $\omega$  справедливы два типа условий ортогональности:

$$\begin{aligned} & (\xi_k + \xi_l) \left[ \int_0^{\infty} (\lambda + 2\mu) V_k^{(2)} V_l^{(2)} dz + \int_0^{\infty} \mu V_k^{(1)} V_l^{(1)} dz \right] - \\ & - \int_0^{\infty} \lambda \left( \frac{dV_k^{(1)}}{dz} V_l^{(2)} + \frac{dV_l^{(1)}}{dz} V_k^{(2)} \right) dz + \\ & + \int_0^{\infty} \mu \left( \frac{dV_k^{(2)}}{dz} V_l^{(1)} + \frac{dV_l^{(2)}}{dz} V_k^{(1)} \right) dz = 0, \quad k \neq l, \end{aligned} \quad (1.23a)$$

$$\begin{aligned} & (\xi_k - \xi_l) \left[ \int_0^{\infty} (\lambda + 2\mu) V_k^{(2)} V_l^{(2)} dz - \int_0^{\infty} \mu V_k^{(1)} V_l^{(1)} dz \right] - \\ & - \int_0^{\infty} \lambda \left( \frac{dV_k^{(1)}}{dz} V_l^{(2)} - \frac{dV_l^{(1)}}{dz} V_k^{(2)} \right) dz - \\ & - \int_0^{\infty} \mu \left( \frac{dV_k^{(2)}}{dz} V_l^{(1)} - \frac{dV_l^{(2)}}{dz} V_k^{(1)} \right) dz = 0 \text{ при любых } k \text{ и } l. \end{aligned} \quad (1.23б)$$

Условия, аналогичные (1.23а), (1.23б), связывают между собой собственные функции непрерывного спектра и собственные функции дискретного и непрерывного спектров. Для фиксированного  $\omega$  непрерывный спектр будет существовать в интервале  $-\infty < \xi^2 < \omega^2/b^2 (Z + 0)$ .

Задача для *SH*-колебаний имеет вид

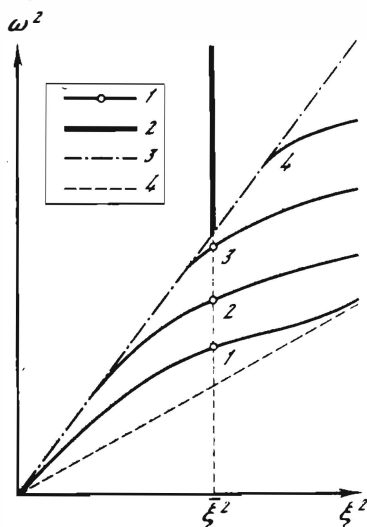
$$\frac{d}{dz} (\bar{\sigma}_{23}) + (\omega^2 \rho - \xi^2 \mu) V^{(3)} = 0, \quad (1.24)$$

где  $V^{(3)} = V_y$ ;  $\bar{\sigma}_{23} = \mu dV^{(3)}/dz$  — амплитудный множитель в выражении для касательного напряжения  $\sigma_{23} = \bar{\sigma}_{23} \exp[i(\omega t - \xi x)]$ . Граничное условие при  $z = 0$

$$\bar{\sigma}_{23} = 0. \quad (1.25)$$

Рис. 1.1. Дискретный и непрерывный спектры одномерной краевой задачи для волн Лява

1 — кривые  $\omega_k^2(\xi)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , точки соответствуют некоторому значению  $\xi^2 = \bar{\xi}^2$ ; 2 — интервал, занимаемый непрерывным спектром при  $\xi^2 = \bar{\xi}^2$ ; 3 — верхняя граница дискретного спектра  $\omega/\xi = b(Z + 0)$ ; 4 — нижняя граница дискретного спектра  $\omega/\xi = \min b(z)$



Функции  $V^{(3)}(z)$  и  $\bar{\sigma}_{2,3}(z)$  непрерывны и ограничены при всех значениях аргумента  $z$ . Указанная задача также характеризуется дискретным и непрерывным спектрами (рис. 1.1). Собственные значения дискретного спектра заключены в интервале  $\xi^2 b^2_{\min} < \omega^2_{kL} \leq \xi^2 b^2(Z + 0)$ , где  $k = 1, 2, \dots$ . Этому спектру соответствуют действительные собственные функции, экспоненциально убывающие с ростом  $z$  при  $z > Z$ :

$$V_k^{(3)} = A \exp \left[ -\sqrt{\xi^2 - \frac{\omega^2_{kL}}{b^2(Z+0)}} z \right].$$

Непрерывный спектр заключен в интервале  $\xi^2 b^2(Z + 0) < \omega^2 < \infty$  (рис. 1.1). Ему соответствуют собственные функции, принимающие при  $z > Z$  вид линейной комбинации "восходящих" и "нисходящих" плоских волн:

$$\exp \left[ \pm i \sqrt{\frac{\omega^2}{b^2(Z+0)} - \xi^2} z \right].$$

Собственные функции  $V_k^{(3)}$ ,  $V^{(3)}$  при фиксированном  $\xi$  подчиняются условиям ортогональности с весом  $\rho(z)$ :

$$\int_0^{\infty} \rho V_k^{(3)}(z) V_l^{(3)}(z) dz = 0, \quad k \neq l,$$

$$\int_0^{\infty} \rho V_k^{(3)}(z) V^{(3)}(\omega^2, z) dz = 0, \quad (1.26)$$

$$\int_0^{\infty} \rho V^{(3)}(\omega^2, z) V^{(3)*}(\beta^2, z) dz \sim \delta(\omega^2 - \beta^2),$$

где \* — знак комплексного сопряжения.

В рассматриваемой задаче в качестве свободного параметра можно принять и  $\omega$ . Тогда (для фиксированного  $\omega$ ) условия ортогональности (1.26) переходят в аналогичные, но с весом  $\mu(z)$ :

$$\int_0^{\infty} \mu V_k^{(3)} V_l^{(3)} dz = 0, \quad k \neq l \text{ и т.д.} \quad (1.26a)$$

В этом случае интервал существования непрерывного спектра  $-\infty < \xi^2 < \omega^2/b^2(Z + 0)$ .

**Функция Грина; поверхностно-волновая часть.** Поверхностно-волновая часть поля смещений, возбуждаемых локализованными в пространстве источниками, как показано в [63], выражается через собственные функции рассмотренных выше операторов, соответствующих их дискретным спектрам. Каждая из функций  $G^D$  представима в виде суммы бесконечного числа слагаемых (мод, гармоник)

$$G_{ij}^D = \sum_{k=1}^{\infty} G_{ij}^{kD}(x; x_0; t), \quad D = R, L,$$

причем моду с номером  $k = 1$  часто называют основной (фундаментальной), а остальные — высшими или обертонами. В ч. I будем обозначать трансформанты Фурье — спектральные преобразования от временных функций — теми же буквами, что и их прообразы, но со значком  $\Lambda$  сверху. Вклад каждой моды представим тогда в виде

$$G_{ij}^{kD} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{\bar{\omega}_{kD}}^{\infty} \hat{G}_{ij}^{kD}(x; x_0; \omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

где  $\bar{\omega}_{kD}$  — граничная частота (при частотах ниже  $\bar{\omega}_{kD}$  данная мода не существует).

Будем далее пользоваться двумя системами координат с началом в "эпицентре" — точке свободной поверхности, расположенной на одной вертикали с источником в точке  $x_0$ : декартовой  $x, y, z$  и цилиндрической  $z, r, \varphi$ , в которой угол  $\varphi$  отсчитывается от оси  $x$  по часовой стрелке (вид сверху). Силы, действующие в источнике, будем проектировать на орты декартовой системы  $e_1, e_2, e_3$ , а смещения в точке приема — на орты цилиндрической системы  $e_z, e_r, e_\varphi$ . Соответствующие компоненты функции Грина в цилиндрической системе координат обозначим  $\hat{G}_{pq}^{kD}$ , где символ  $p$  обозначает  $z, r$ - или  $\varphi$ -компоненту, а индекс  $q$  пробегает значения 1, 2, 3. Связь с обычными (декартовыми) компонентами функции Грина  $\hat{G}_{sq}^{kD}$  ( $s, q = 1, 2, 3$ ) дается очевидными соотношениями:

$$\hat{G}_{1q}^{kR} = \hat{G}_{rq}^{kR} \cos \varphi, \quad \hat{G}_{2q}^{kR} = \hat{G}_{rq}^{kR} \sin \varphi, \quad \hat{G}_{3q}^{kR} = \hat{G}_{zq}^{kR},$$

$$\hat{G}_{1q}^{kL} = -\hat{G}_{\varphi q}^{kL} \sin \varphi, \quad \hat{G}_{2q}^{kL} = \hat{G}_{\varphi q}^{kL} \cos \varphi, \quad \hat{G}_{3q}^{kL} = \hat{G}_{\varphi q}^{kL} = 0.$$

Компоненты функции Грина  $\hat{G}_{pq}^{kD}$  определяются выражением

$$\begin{aligned} \hat{G}_{pq}^{kD} &= \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{8\pi}} \frac{\exp(-i\xi_{kD}r)}{\sqrt{\xi_{kD}r}} \times \\ &\times \frac{\epsilon_p V_k^{(ip)}(\omega, z)}{\sqrt{C_{kD} U_{kD} I_{kD}^{(0)}}} \frac{\epsilon_q V_k^{(iq)}(\omega, h)}{\sqrt{C_{kD} U_{kD} I_{kD}^{(0)}}}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Здесь  $V_k^{(i)}$  — собственные функции, принадлежащие дискретным спектрам одномерных задач, рассмотренных выше; поскольку собственные функции определены с точностью до констант, мы будем обычно предполагать, что  $V_k^{(1)}(\omega, 0) \equiv V_k^{(3)}(\omega, 0) \equiv 1$ ;  $C_{kD}(\omega) = \omega/\xi_{kD}(\omega)$  — фазовая ско-



Таблица 1.1

$D$	$p$	$\epsilon_p$	$i_p$	$q$	$\epsilon_q$	$i_q$
$R$	$z$	1	1	1	$i \cos \varphi$	2
	$r$	$-i$	2	2	$i \sin \varphi$	2
	$\varphi$	0	-	3	1	1
$L$	$z$	0	-	1	$-i \sin \varphi$	3
	$r$	0	-	2	$i \cos \varphi$	3
	$\varphi$	$i$	3	3	0	-

рость, где  $\xi_{kD}(\omega)$  – функция, обратная  $\omega_{kD}(\xi)$ ;

$$U_{kD}(\omega) = \left[ \frac{d\xi_{kD}}{d\omega} \right]^{-1} = C_{kD} \left( 1 - \frac{\omega}{C_{kD}} \frac{dC_{kD}}{d\omega} \right)^{-1} \quad (1.28)$$

– групповая скорость;  $I_{kD}^{(0)}$  пропорционально средней кинетической энергии за период колебаний, переносимой данной модой:

$$I_{kR}^{(0)} = \int_0^{\infty} \rho(z) [(V_k^{(1)})^2 + (V_k^{(2)})^2] dz; \quad (1.29)$$

$$I_{kL}^{(0)} = \int_0^{\infty} \rho(z) [V_k^{(3)}]^2 dz. \quad (1.30)$$

Значения  $\epsilon_p$ ,  $\epsilon_q$  и  $i_p$ ,  $i_q$  приведены в табл. 1.1.

Формулы (1.27) являются асимптотическими, справедливыми при  $\xi_{kD}r \gg 1$ ,  $r \gg h$ ,  $r \gg z$ . Если эти условия не выполняются, асимптотические формулы не только не верны, но и само разделение поля на "объемно"- и "поверхностно"-волновые части может оказаться искусственным.

**Поле смещений, вызванных пространственно-сосредоточенными силами.** В случае, когда источник – комбинация сосредоточенных сил

$$f_q = K_q(t) \delta(x - x_0),$$

результатирующее смещение имеет вид

$$\hat{u}_p^{kD}(x; x_0; \omega) = \hat{G}_{pq}^{kD} \hat{K}_q(\omega).$$

Это приводит к асимптотической формуле для  $\hat{u}_p^{kD}$ :

$$\hat{u}_p^{kD} = \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{8\pi}} \frac{\exp(-i\xi_{kD}r)}{\sqrt{\xi_{kD}r}} \times \\ \times \frac{\epsilon_p V_k^{(i_p)}(\omega, z)}{\sqrt{C_{kD} U_{kD} I_{kD}^{(0)}}} \frac{W^{kD}(\omega, \varphi, h)}{\sqrt{C_{kD} U_{kD} I_{kD}^{(0)}}}, \quad (1.31)$$

где

$$W^{kD} = (\epsilon_q V_k^{(i_q)}) \hat{K}_q(\omega). \quad (1.32)$$

Таблица 1.2

$D$	$q$	$s$	$B_{qs}^{kD}$
R	1	1	$-\xi_{kR} \cos^2 \varphi V_k^{(2)}(\omega, h)$
	2	2	$-\xi_{kR} \sin^2 \varphi V_k^{(2)}(\omega, h)$
	3	3	$\left. \frac{dV_k^{(1)}(\omega, z)}{dz} \right _{z=h}$
	1	2	$-\frac{1}{2} \xi_{kR} \sin 2\varphi V_k^{(2)}(\omega, h)$
	1	3	$-\frac{i}{2} \cos \varphi \left( \xi_{kR} V_k^{(1)}(\omega, h) + \left. \frac{dV_k^{(2)}(\omega, z)}{dz} \right _{z=h} \right)$
	2	3	$-\frac{i}{2} \sin \varphi \left( \xi_{kR} V_k^{(1)}(\omega, h) + \left. \frac{dV_k^{(2)}(\omega, z)}{dz} \right _{z=h} \right)$
L	1	1	$-\frac{\xi_{kL}}{2} \sin 2\varphi V_k^{(3)}(\omega, h)$
	2	2	$\frac{\xi_{kL}}{2} \sin 2\varphi V_k^{(3)}(\omega, h)$
	3	3	0
	1	2	$\frac{1}{2} \xi_{kL} \cos 2\varphi V_k^{(3)}(\omega, h)$
	1	3	$\frac{i}{2} \sin \varphi \left. \frac{dV_k^{(3)}(\omega, z)}{dz} \right _{z=h}$
	2	3	$-\frac{i}{2} \cos \varphi \left. \frac{dV_k^{(3)}(\omega, z)}{dz} \right _{z=h}$

Поля смещений, вызванных пространственно-сосредоточенными диполями. В случае, когда источник — диполь вида (1.16)

$$f_q = -m_{qs}(t) \frac{\partial \delta(x - x_0)}{\partial x_s} \quad (q, s = 1, 2, 3),$$

результатирующее смещение имеет вид

$$\hat{u}_p^{kD} = \hat{G}_{pq, s}^{kD} \hat{m}_{qs}(\omega).$$

Воспользовавшись асимптотическими оценками  $\hat{G}_{pq, s}^{kD}$ , в которых не содержатся члены, убывающие с расстоянием быстрее чем  $1/\sqrt{r}$ , приходим к выражению для смещения  $\hat{u}_p^{kD}$  вида (1.31), где

$$\hat{W}^{kD} = B_{qs}^{kD} \hat{m}_{qs}. \quad (1.33)$$

Как и  $\hat{m}_{qs}$ ,  $B_{qs}^{kD}$  обладает симметрией по индексам  $q$  и  $s$ . Формулы для  $B_{qs}^{kD}$  приведены в табл. 1.2.

Формулы (1.31)–(1.33) с дополняющими их таблицами 1.1–1.2 дают полное асимптотическое описание полей поверхностных волн в вертикально-неоднородном полупространстве, возбуждаемых точечными силами и диполями. Их нетрудно обобщить на случай более сложных точечных источников.

#### § 1.4. Физическая трактовка полученных формул; элементарные примеры

Формулы вида (1.27), (1.31) для спектральных амплитуд смещений в поверхностных волнах поддаются простой физической трактовке. Кроме первого множителя – комплексной константы, они содержат еще три, каждый из которых контролируется определенными физическими факторами и параметрами эксперимента. Второй множитель  $(\xi_{kD} r)^{-1/2} \times \exp(-i\xi_{kD} r)$  описывает эффект цилиндрического геометрического расхождения потока энергии поверхностной волны и ее фазовой задержки по мере распространения в среде; эта задержка  $\xi_{kD} r = \omega r / C_{kD}$  монотонно растет с расстоянием и нелинейно зависит от частоты. Вид зависимостей  $C_{kD}(\omega)$ ,  $U_{kD}(\omega)$  – дисперсии скоростей – определяется только свойствами среды, т.е. распределениями  $a(z)$ ,  $b(z)$ ,  $\rho(z)$ .

При наличии в среде слабой диссипации соответствующий эффект поглощения и связанной с ним дополнительной дисперсии (см. § 1.6) естественно вводить в этот же множитель.

Третий множитель  $\epsilon_p V_k^{(ip)}(\omega, z)(C_{kD} U_{kD} I_{kD}^{(0)})^{-1/2}$  определяется глубиной расположения приемника  $z$  и регистрируемой им компонентой смещения  $p$  ( $p = z, r, \varphi$ ). В реальном сейсмическом эксперименте горизонтальные приборы обычно ориентированы по странам света, однако, если координаты эпицентра известны, простое линейное преобразование превращает компоненты сейсмограммы N–S и E–W в  $r$ - и  $\varphi$ -компоненты.

Из (1.27), (1.31) следует, что волны Рэлея ( $D = R$ ) эллиптически поляризованы в вертикальной плоскости, содержащей источник в  $x_0$  и приемник в  $x$ , т.е. их  $\varphi$ -компонента равна нулю, а  $z$ - и  $r$ -компоненты сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ . Направление движения частиц и относительные параметры описываемого ими эллипса контролируются отношением  $V_k^{(2)}(\omega, z)/V_k^{(1)}(\omega, z)$ , зависящим только от частоты, глубины приемника и свойств среды. Величину  $\chi_k(\omega) = |V_k^{(2)}(\omega, 0)/V_k^{(1)}(\omega, 0)|$  называют эллиптичностью, она равна отношению длин горизонтальной и вертикальной осей эллипса, который описывают частицы свободной поверхности при распространении волны  $R$ . Следует напомнить, что о строго эллиптическом движении частиц можно говорить только в случае гармонических колебаний, траектории же нестационарного движения, оставаясь в вертикальной плоскости, могут существенно отличаться от эллиптических. Волны Лява ( $D = L$ ) обладают только  $\varphi$ -компонентой смещений, т.е. линейно поляризованы в горизонтальном направлении, перпендикулярном плоскости поляризации волн Рэлея.

Изменения амплитуд смещений с глубиной полностью контролируются видом собственных функций  $V_k^{(ip)}(\omega, z)$ , т.е. свойствами среды, глубиной приемника и частотой, вне зависимости от эпицентрального расстояния  $r$ .

Если необходимо учесть частотную характеристику регистрирующего

прибора, соответствующее комплексное выражение удобно включать в третий множитель.

Наконец, четвертый множитель имеет вид  $W^{kD}(\omega, \varphi, h) (C_{kD} U_{kD} I_{kD}^{(0)})^{-1/2}$ . Он зависит как от свойств среды, так и от параметров источника — его глубины, взаимного расположения пары источник—приемник и механизма, т.е. соотношения между компонентами вектора сил  $K_q(t)$  или тензора плотности сейсмического момента  $m_{qs}(t)$ .

Приведем выражения для  $W^{kD}$  в случае простейших точечных источников, моделирующих взрыв и землетрясение.

1. Центр расширения (1.18)

$$W^{kR} = \left( \frac{dV_k^{(1)}(\omega, z)}{dz} \Big|_{z=h} - \xi_{kR}(\omega) V_k^{(2)}(\omega, h) \right) \hat{m}(\omega), \quad W^{kL} = 0. \quad (1.34)$$

В этом случае четвертый множитель определяется частотой, свойствами среды, глубиной и спектральной функцией источника.

2. Точечная сдвиговая дислокация (1.19) вдоль направления  $\underline{k}$  по касательной к площадке с нормалью  $\underline{n}$ . Введем обозначения:

$$n_x = \sin \gamma \cos \alpha, \quad n_y = \sin \gamma \sin \alpha, \quad n_z = \cos \gamma, \\ \kappa_x = \sin \beta \cos \delta, \quad \kappa_y = \sin \beta \sin \delta, \quad \kappa_z = \cos \beta$$

( $\alpha$  и  $\delta$  — азимуты горизонтальных проекций  $\underline{n}$  и  $\underline{k}$ , отсчитываемые от оси  $x$ ;  $\gamma$  и  $\beta$  — углы, образуемые теми же векторами с вертикалью  $z$ ). Для  $W^{kD}$  можно получить следующие выражения:

$$W^{kR} = \left\{ 2 \cos \beta \cos \gamma \frac{dV_k^{(1)}}{dz} \Big|_{z=h} - 2 \xi_{kR} \sin \beta \sin \gamma \cos(\delta - \varphi) \cos(\alpha - \varphi) \times \right. \\ \left. \times V_k^{(2)}(\omega, h) + i [\sin \beta \cos \gamma \cos(\delta - \varphi) + \sin \gamma \cos \beta \cos(\alpha - \varphi)] \times \right. \\ \left. \times \left( \xi_{kR} V_k^{(1)}(\omega, h) + \frac{dV_k^{(2)}(\omega, z)}{dz} \Big|_{z=h} \right) \right\} \hat{m}(\omega), \quad (1.35) \\ W^{kL} = \left\{ \xi_{kL} \sin \gamma \sin \beta \sin(\alpha + \delta - 2\varphi) V_k^{(3)}(\omega, h) - \right. \\ \left. - i [\sin \beta \cos \gamma \sin(\delta - \varphi) + \sin \gamma \cos \beta \sin(\alpha - \varphi)] \times \right. \\ \left. \times \frac{d\tilde{V}_k^{(3)}(\omega, z)}{dz} \Big|_{z=h} \right\} \hat{m}(\omega).$$

В этом случае четвертый множитель определяется частотой, свойствами среды, глубиной и спектральной функцией источника, а также его "геометрическим" механизмом — ориентировкой плоскости разрыва и вектора подвижки относительно пары источник—приемник.

**Элементарные примеры.** Для иллюстрации приведенных соотношений рассмотрим ряд простейших примеров упругих сред и возникающих в них поверхностных волн.

*Однородное полупространство.* В среде с постоянными значениями  $a$ ,  $b$ ,  $\rho$  может существовать только волна Рэлея, представленная одной фундаментальной модой. Она существует во всем интервале частот и не обладает дисперсией. Фазовая скорость  $C_R$  зависит только от отношения

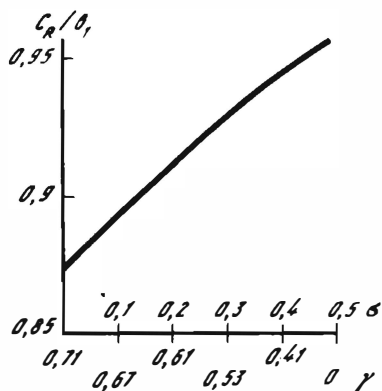


Рис. 1.2. Зависимость фазовой скорости волны Рэлея в однородном полупространстве от  $\gamma = b/a$  и коэффициента Пуассона

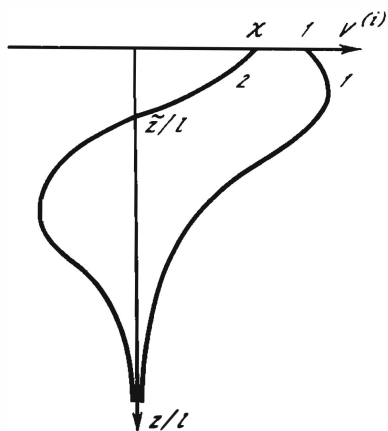


Рис. 1.3. Компоненты собственной функции одномерной задачи для волн Рэлея в однородном полупространстве

Цифры у кривых – номера компонент

$\gamma = b/a$  (или, что то же самое, от коэффициента Пуассона среды  $\sigma$ ):

$$\sigma = \lambda/[2(\lambda + \mu)] = (1 - 2\gamma^2)/[2(1 - \gamma^2)]$$

– это единственный действительный корень уравнения

$$(2 - \kappa)^2 - 4\sqrt{1 - \gamma^2 \kappa^2} \sqrt{1 - \kappa^2} = 0,$$

где  $\kappa = C_R/b$ . Зависимости  $C_R(\gamma)$  и  $C_R(\sigma)$  иллюстрируются рис. 1.2. Групповая скорость  $U$  равна фазовой скорости.

Изменение интенсивности с глубиной происходит по следующему закону (рис. 1.3):

$$V^{(1)}(\omega, z) = \frac{\kappa^2 - 2}{\kappa^2} \left( e^{-r_\alpha z} + \frac{2}{\kappa^2 - 2} e^{-r_\beta z} \right)$$

– для вертикальной компоненты,

$$V^{(2)}(\omega, z) = \frac{2 - \kappa^2}{\kappa^2 \sqrt{1 - \gamma^2 \kappa^2}} \left( e^{-r_\alpha z} + \frac{\kappa^2 - 2}{2} e^{-r_\beta z} \right)$$

– для горизонтальной компоненты. Здесь

$$r_\alpha = \frac{2\pi}{l} \sqrt{1 - \gamma^2 \kappa^2}; \quad r_\beta = \frac{2\pi}{l} \sqrt{1 - \kappa^2};$$

$l = 2\pi C_R/\omega$  – длина поверхностной волны.

Движение частиц происходит по эллипсам в плоскости  $rz$ , причем при  $z = 0$  отношение большой и малой осей эллипса  $\chi = \frac{2 - \kappa^2}{2\sqrt{1 - \gamma^2 \kappa^2}} = V^{(2)}(\omega, 0)$  не зависит от частоты.



Глубина  $\tilde{z}$  точки, где  $V^{(2)}(z)$  меняет знак, равна

$$\tilde{z} = Kl = \frac{\ln[(2 - \kappa^2)/2]}{2\pi(\sqrt{1 - \kappa^2} - \sqrt{1 - \kappa^2\gamma^2})} l.$$

При  $z < \tilde{z}$  движение частиц носит возвратный характер (по направлению к источнику в верхней части траектории), при  $z > \tilde{z}$  — прямой.

Интеграл кинетической энергии равен

$$I_R^{(0)} = \frac{b\rho}{\omega} \frac{8(\sqrt{1 - \gamma^2\kappa^2} - \sqrt{1 - \kappa^2})^2 + \kappa^4(2 - \kappa^2)}{4\sqrt{1 - \kappa^2}(1 - \gamma^2\kappa^2)\kappa^3}.$$

Спектральная амплитуда вертикального смещения точки  $x(0, r, \varphi)$  поверхности в волне Рэлея в случае вертикального сосредоточенного воздействия на поверхности при  $r \gg l$

$$\hat{G}_{zz}^R(x; 0; \omega) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi}} \frac{e^{-i\omega r/C_R}}{\sqrt{r'}} \times$$

$$\times \frac{\omega^{3/2} 4(1 - \gamma^2\kappa^2)\sqrt{1 - \kappa^2}\kappa^{3/2}}{b^2 \rho [8(\sqrt{1 - \gamma^2\kappa^2} - \sqrt{1 - \kappa^2})^2 + (2 - \kappa^2)^2\kappa^4]},$$

$$\hat{G}_{rz}^R = -i\chi \hat{G}_{zz}^R.$$

В случае сосредоточенной горизонтальной силы, направленной на точку регистрации (т.е. имеющей азимут  $\varphi$ ), смещения равны

$$\hat{u}_z^R = i\chi \hat{G}_{zz}^R, \quad \hat{u}_r^R = \chi^2 \hat{G}_{zz}^R.$$

*Однородный слой на однородном полупространстве.* В простейшей вертикально-неоднородной среде

$$a(z) = a_1, \quad b(z) = b_1, \quad \rho(z) = \rho_1 \quad \text{при } z \leq Z;$$

$$a(z) = a_2, \quad b(z) = b_2, \quad \rho(z) = \rho_2 \quad \text{при } z > Z$$

существуют и волны Лява, и волны Рэлея, представленные бесконечным набором мод.

**В о л н а Л я в а.** Фазовая скорость волн Лява подчиняется дисперсионному уравнению

$$\text{tg}(r_{\beta 1} Z) - \frac{b_2^2 \rho_2 r_{\beta 2}}{b_1^2 \rho_1 r_{\beta 1}} = 0,$$

где

$$r_{\beta 1} = \frac{\omega}{\kappa b_1} \sqrt{\kappa^2 - 1}; \quad r_{\beta 2} = \frac{\omega}{\kappa b_2} \sqrt{1 - \left(\frac{b_1}{b_2} \kappa\right)^2}; \quad \kappa = \frac{C_{\kappa L}}{b_1}.$$

Это уравнение для заданного значения  $\omega$  имеет одно или более решений; фундаментальная мода существует таким образом при всех  $\omega$ , высшие моды — на частотах  $\omega_{\kappa L} < \omega < \infty$ , где

$$\omega_{\kappa L} = \frac{\pi (k-1)b_2}{Z \sqrt{(b_2/b_1)^2 - 1}}, \quad k = 2, 3, \dots$$

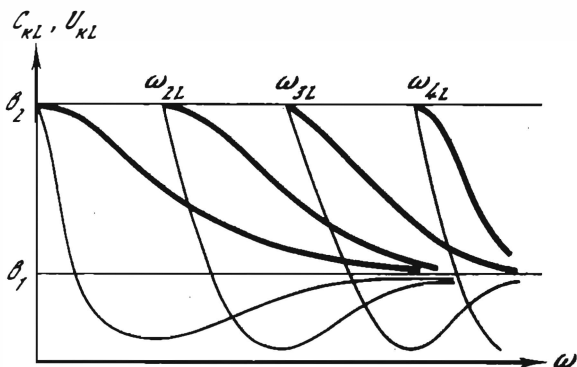


Рис. 1.4. Дисперсия фазовых (жирные линии) и групповых (тонкие) скоростей волн Лява в модели "однородный слой на однородном полупространстве"

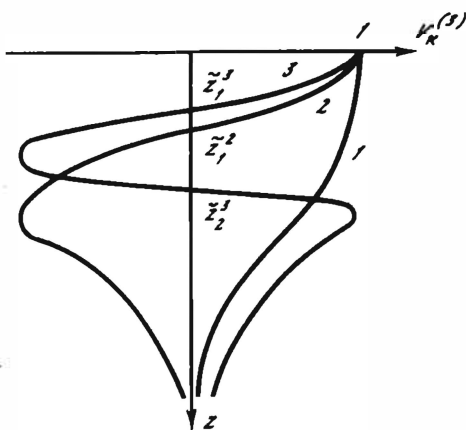


Рис. 1.5. Собственные функции одномерной задачи для волн Лява в модели "слой на полупространстве"

Цифры у кривых – номера мод

Групповая скорость подчиняется соотношению

$$U_{kL} = \frac{b_1^2}{C_{kL}} \left( \frac{\omega Z + \kappa^2 \ell b_1}{\omega Z + \ell b_1} \right),$$

где

$$\ell = \frac{\rho_2 \kappa \cos(r_{\beta_1} Z) (b_2^2 / b_1^2 - 1)}{\rho_1 (\kappa^2 - 1) \sqrt{1 - (b_1 \kappa / b_2)^2}}.$$

Вид кривых  $C_{kL}(\omega)$  и  $U_{kL}(\omega)$  показан на рис. 1.4.

Изменение интенсивности с глубиной происходит по закону (рис. 1.5)

$$V_k^{(3)} = \cos(r_{\beta_1} z), \quad 0 \leq z \leq Z,$$

$$V_k^{(3)} = \cos(r_{\beta_1} Z) \exp[-r_{\beta_2}(z - Z)], \quad z \geq Z.$$

Глубины точек перемены знака  $V_k^{(3)}$  (их  $k-1$ ) равны

$$\tilde{Z}_m^k = \frac{(2m-1)\pi}{2r_{\beta 1}}, \quad m = 1, \dots, k-1 \quad (k > 1).$$

Интеграл кинетической энергии

$$I_{kL}^{(0)} = \frac{\rho_1}{2\omega} [\omega Z + \mathcal{L}].$$

Спектральная амплитуда смещений в волне Лява на свободной поверхности под действием горизонтальной сосредоточенной в точке  $(0, 0, h)$  силы, направленной перпендикулярно направлению на приемник вправо от этого направления, имеет вид

$$\hat{\varphi}_{\varphi}^{kL} = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi}} \frac{e^{-i\omega r/C_{kL}}}{\sqrt{r}} \frac{2\sqrt{\omega C_{kL}} \cos(r_{\beta 1} Z)}{b_1^2 \rho (\omega Z + \kappa^2 b_1 \mathcal{L})}.$$

Мы не приводим рассмотрения для волн Рэлея, поскольку даже в этой простой модели оно требует громоздких вычислений.

### § 1.5. Учет сферичности; вариационные формулы

**Учет сферичности.** Во многих сейсмологических экспериментах используются поверхностные волны, распространяющиеся на такие большие расстояния и проникающие столь глубоко внутрь среды, что необходимо учитывать эффект сферичности Земли.

Более того, землетрясения большой магнитуды возбуждают столь интенсивные поверхностные волны, что они, прежде чем полностью затухнуть из-за диссипации в среде, успевают несколько раз обогать Землю. При этом сейсмическая станция регистрирует две последовательности волн, обогавшие Землю в двух противоположных направлениях.

Введем сферическую систему координат с началом в центре шара радиуса  $R_0$ , поместим приемник в точку  $x(R, \theta, \varphi)$ , источник в точку  $x_0(R_s, 0, 0)$ , где  $R_s = R_0 - h$ , и будем рассматривать  $p$ -е компоненты смещения, соответствующие ортам  $e_p$  ( $p = R, \theta, \varphi$ ). Пусть  $\tilde{\theta}$  — полное расстояние, пройденное волной:

$$\tilde{\theta} = (-1)^g \theta + 2\pi(l+g),$$

где  $l = 0, 1, 2, \dots$  — число полных окружностей Земли, пройденных волной;  $g = 0$  или  $1$  в зависимости от того, подходит ли волна  $S$  со стороны эпицентра или с противоположной стороны. В этом случае формулы (1.27) при  $\theta \neq k\pi$  переходят в

$$\begin{aligned} \hat{G}_{pq}^{kD}(x; x_0; \omega) &= \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{8\pi}} \frac{\exp[-i\omega R_0 \tilde{\theta}/C_{kD} + (i\pi/2)(2l+g)]}{\sqrt{\nu_{kD} \sin \theta}} \times \\ &\times \frac{\epsilon_p V_k^{(ip)}(\omega, R)}{\sqrt{C_{kD} U_{kD} I_{kD}^{(0)}}} \frac{\epsilon_q V_k^{(iq)}(\omega, R_s)}{\sqrt{C_{kD} U_{kD} I_{kD}^{(0)}}}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Фазовая скорость определяется как

$$C_{kD}(\omega) = \frac{\omega R_0}{\nu_{kD}(\omega) + 1/2}, \quad (1.37)$$

групповая скорость как

$$U_{kD}(\omega) = \left[ \frac{d\nu_{kD}(\omega)}{d\omega} \right]^{-1} R_0. \quad (1.38)$$

Собственные функции  $V_k^{(i)}(\omega, R)$  принадлежат несколько иным одномерным краевым задачам, чем приведенные в (1.20)–(1.25), а именно для волн Рэлея

$$l_1(V^{(1)}, V^{(2)}) \equiv \frac{d\bar{\sigma}_{RR}}{dR} + \frac{\mu}{R^2} \left[ 4R \frac{dV^{(1)}}{dR} - 4V^{(1)} + \right. \\ \left. + N 3V^{(2)} - R \frac{dV^{(2)}}{dR} - NV^{(1)} \right] + \omega^2 \rho V^{(1)} = 0, \quad (1.39)$$

$$l_2(V^{(1)}, V^{(2)}) \equiv \frac{d\bar{\sigma}_{R\theta}}{dR} + \frac{\lambda N}{R} \left( \frac{dV^{(1)}}{dR} + \frac{2}{R} V^{(1)} - \frac{N}{R} V^{(2)} \right) + \\ + \frac{\mu}{R^2} \left( 5NV^{(1)} + 3R \frac{dV^{(2)}}{dR} - V^{(2)} - 2N^2 V^{(2)} \right) + \omega^2 \rho V^{(2)} = 0$$

с граничными условиями

$$\bar{\sigma}_{RR} \equiv (\lambda + 2\mu) \frac{dV^{(1)}}{dR} + \frac{2\lambda}{R} V^{(1)} - \frac{\lambda N}{R} V^{(2)} = 0 \text{ при } R = R_0,$$

$$\bar{\sigma}_{R\theta} \equiv \mu \left( \frac{dV^{(2)}}{dR} - \frac{V^{(2)}}{R} + \frac{NV^{(1)}}{R} \right) = 0 \text{ при } R = R_0, \quad (1.40)$$

$$V^{(1)} = V^{(2)} = 0 \text{ при } R = 0.$$

Здесь  $N = \sqrt{\nu(\nu + 1)}$ ; параметр задачи  $\nu$  – безразмерный аналог волнового числа;  $\bar{\nu}$  – нижний предел рассматриваемого интервала волновых чисел ( $\bar{\nu} \gg 1$ ).

Аналогично для волн Лява  $V_k^{(3)}(\omega, R)$  – собственные функции задачи

$$l_3(V^{(3)}) \equiv \frac{d\bar{\sigma}_{R\varphi}}{dR} + \frac{3\mu}{R} \frac{dV^{(3)}}{dR} - \frac{\mu}{R^2} (N^2 + 1) V^{(3)} + \rho \omega^2 V^{(3)} = 0 \quad (1.41)$$

с граничными условиями

$$\bar{\sigma}_{R\varphi} \equiv \mu \left( \frac{dV^{(3)}}{dR} - \frac{V^{(3)}}{R} \right) = 0 \text{ при } R = R_0, \quad (1.42)$$

$$V^{(3)} = 0 \text{ при } R = 0.$$

Таблица 1.3

$D$	$p$	$\epsilon_p$	$i_p$	$q$	$\epsilon_q$	$i_q$
$R$	$R$	1	1	$x$	$i \sin \varphi$	2
	$\theta$	$-i(-1)^g$	2	$y$	$i \cos \varphi$	2
	$\varphi$	0	-	$z$	1	1
$L$	$R$	0	-	$x$	$-i \sin \varphi$	3
	$\theta$	0	-	$y$	$i \cos \varphi$	3
	$\varphi$	$i(-1)^g$	3	$z$	0	-

В (1.36)–(1.38) вместо функций  $\omega_{kD}(\nu)$  используются обратные им функции  $\nu_{kD}(\omega)$ .

Интегралы кинетической энергии

$$I_{kR}^{(0)} = \frac{1}{R_0^2} \int_0^{R_0} \rho R^2 \left[ \left( V_k^{(1)} \right)^2 + \left( V_k^{(2)} \right)^2 \right] dR, \quad (1.43)$$

$$I_{kL}^{(0)} = \frac{1}{R_0^2} \int_0^{R_0} \rho R^2 \left[ \left( V_k^{(3)} \right)^2 \right] dR.$$

Выражения для  $\epsilon_p, \epsilon_q, i_p, i_q$  приведены в табл. 1.3.

Соответствующие формулы для множителя  $W^{kD}$  в случае элементарных источников практически не отличаются от формул (1.34), (1.35); необходимо только заменить всюду  $\xi_{kD}$  на  $(\nu_{kD} + 1/2)/R_s$ , дифференцирование по  $z$  дифференцированием по  $R$  и добавить в (1.35) в выражениях, содержащих  $V_k^{(1)}, dV_k^{(2)}/dR$  и  $dV_k^{(3)}/dR$ , множитель  $(-1)^g$ .

**Вариационные формулы.** Методами теории возмущений можно получить следующие интегральные формулы для фазовых и групповых скоростей в вертикально-неоднородном полупространстве:

$$C_{kR} = \left\{ \left[ I_{kR}^{(1)} + I_{kR}^{(2)} + \frac{2}{\xi_{kR}} \left( I_{kR}^{(3)} + I_{kR}^{(4)} \right) + \frac{1}{\xi_{kR}^2} \left( I_{kR}^{(5)} + I_{kR}^{(6)} \right) \right] / I_{kR}^{(0)} \right\}^{1/2}, \quad (1.44)$$

$$C_{kL} = \left[ \left( I_{kL}^{(1)} + \frac{1}{\xi_{kL}^2} I_{kL}^{(2)} \right) / I_{kL}^{(0)} \right]^{1/2};$$

$$U_{kR} = \left[ I_{kR}^{(1)} + I_{kR}^{(2)} + \frac{1}{\xi_{kR}} \left( I_{kR}^{(3)} + I_{kR}^{(4)} \right) \right] / \left( C_{kR} I_{kR}^{(0)} \right),$$

$$U_{kL} = I_{kL}^{(1)} / \left( C_{kL} I_{kL}^{(0)} \right), \quad (1.45)$$

где интегралы  $I_{kD}^{(j)}$  имеют вид

$$I_{kR}^{(1)} = \int_0^{\infty} b^2 \rho \left[ V_k^{(1)} \right]^2 dz,$$

$$I_{kR}^{(2)} = \int_0^{\infty} a^2 \rho \left[ V_k^{(2)} \right]^2 dz,$$

$$I_{kR}^{(3)} = \int_0^{\infty} b^2 \rho \left[ \frac{dV_k^{(2)}}{dz} V_k^{(1)} + 2 \frac{dV_k^{(1)}}{dz} V_k^{(2)} \right] dz, \quad (1.46)$$

$$I_{kR}^{(4)} = - \int_0^{\infty} a^2 \rho \frac{dV_k^{(1)}}{dz} V_k^{(2)} dz,$$

$$I_{kR}^{(5)} = \int_0^{\infty} b^2 \rho \left[ \frac{dV_k^{(2)}}{dz} \right]^2 dz, \quad I_{kR}^{(6)} = \int_0^{\infty} a^2 \rho \left[ \frac{dV_k^{(1)}}{dz} \right]^2 dz,$$

$$I_{kL}^{(1)} = \int_0^{\infty} b^2 \rho \left[ V_k^{(3)} \right]^2 dz, \quad I_{kL}^{(2)} = \int_0^{\infty} b^2 \rho \left[ \frac{dV_k^{(3)}}{dz} \right]^2 dz.$$

Аналогичные формулы имеют место и для радиально-неоднородного шара:

$$C_{kR} = R_0 \left\{ \left[ I_{kR}^{(1)} + I_{kR}^{(2)} + \frac{2}{N} \left( I_{kR}^{(3)} + I_{kR}^{(4)} \right) + \frac{1}{N^2} \left( I_{kR}^{(5)} + I_{kR}^{(6)} \right) \right] / I_{kR}^{(0)} \right\}^{1/2},$$

$$C_{kL} = R_0 \left[ \left( I_{kL}^{(1)} + \frac{1}{N^2} I_{kL}^{(2)} \right) / I_{kL}^{(0)} \right]^{1/2}; \quad (1.47)$$

$$U_{kR} = \left\{ \left[ I_{kR}^{(1)} + I_{kR}^{(2)} + \frac{1}{N} \left( I_{kR}^{(3)} + I_{kR}^{(4)} \right) \right] R_0^2 \right\} / (C_{kR} I_{kR}^{(0)}),$$

$$U_{kL} = I_{kL}^{(1)} R_0^2 / (C_{kL} I_{kL}^{(0)}), \quad (1.48)$$

где  $I_{kR}^{(0)}, I_{kL}^{(0)}$  определены в (1.43), а интегралы  $I_{kD}^{(j)}$  имеют вид:

$$I_{kR}^{(1)} = \int_0^{R_0} b^2 \rho \left[ V_k^{(1)} \right]^2 dR,$$

$$I_{kR}^{(2)} = \int_0^{R_0} a^2 \rho \left[ V_k^{(2)} \right]^2 dR,$$

$$I_{kR}^{(3)} = \int_0^{R_0} b^2 \rho \left[ V_k^{(1)} V_k^{(2)} + R \left( V_k^{(1)} \frac{dV_k^{(2)}}{dR} + 2 \frac{dV_k^{(1)}}{dR} V_k^{(2)} \right) \right] dR,$$

$$I_{kR}^{(4)} = - \int_0^{R_0} a^2 \rho \left[ 2V_k^{(1)} V_k^{(2)} + R \frac{dV_k^{(1)}}{dR} V_k^{(2)} \right] dR,$$

$$I_{kR}^{(5)} = \int_0^{R_0} b^2 \rho \left[ \left( R \frac{dV_k^{(2)}}{dR} \right)^2 - 2R \left( 4V_k^{(1)} \frac{dV_k^{(2)}}{dR} + \frac{dV_k^{(1)}}{dR} V_k^{(2)} \right) - 4 \left( V_k^{(1)} \right)^2 - \left( V_k^{(2)} \right)^2 \right] dR, \quad (1.49)$$

$$I_{kR}^{(6)} = \int_0^{R_0} a^2 \rho \left[ \left( R \frac{dV_k^{(1)}}{dR} \right)^2 + 4R V_k^{(1)} \frac{dV_k^{(2)}}{dR} + 4 \left( V_k^{(1)} \right)^2 \right] dR,$$

$$I_{kL}^{(1)} = \int_0^{R_0} b^2 \rho \left[ V_k^{(3)} \right]^2 dR,$$

$$I_{kL}^{(2)} = \int_0^{R_0} b^2 \rho \left[ \left( R \frac{dV_k^{(3)}}{dR} \right)^2 - 2V_k^{(3)} \frac{dV_k^{(3)}}{dR} R - \left( V_k^{(3)} \right)^2 \right] dR.$$

**Частные производные фазовой скорости.** Важную роль в решении обратных задач сейсмологии поверхностных волн играет аппарат частных производных, позволяющий находить возмущения фазовой скорости при малых возмущениях скоростного и плотностного разрезов. Рассмотрим малое возмущение  $\delta\kappa(z)$  параметра  $\kappa(z)$  ( $\kappa = a, b$  или  $\rho$ ), равное нулю всюду, кроме интервала  $z_i < z < z_{i+1}$ . Ему соответствует возмущение фазовой скорости  $\delta C_{kD}(\omega)$  для фиксированной частоты  $\omega$ :

$$\delta C_{kD} = \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{\partial C_{kD}(\omega, z)}{\partial \kappa} \delta \kappa(z) dz.$$

Здесь ядро интеграла  $\partial C_{kD}/\partial \kappa$  — частная производная  $C_{kD}$  по параметру  $\kappa$  (точнее, "реакция"  $C_{kD}$  на  $\delta$ -образное изменение  $\kappa(z)$  в точке  $z$ ). Для  $\partial C_{kD}/\partial \kappa$  при  $\omega = \text{const}$  имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{kR}}{\partial a} &= \frac{a\rho}{U_{kR} I_{kR}^{(0)}} \left[ V_k^{(2)} - \frac{1}{\xi_{kR}} \frac{dV_k^{(1)}}{dz} \right]^2, \\ \frac{\partial C_{kR}}{\partial b} &= \frac{b\rho}{U_{kR} I_{kR}^{(0)}} \left[ \left( V_k^{(1)} + \frac{1}{\xi_{kR}} \frac{dV_k^{(2)}}{dz} \right)^2 + \frac{4}{\xi_{kR}} \frac{dV_k^{(1)}}{dz} V_k^{(2)} \right], \\ \frac{\partial C_{kR}}{\partial \rho} &= \frac{1}{2\rho} \left[ \frac{\partial C_{kR}}{\partial a} a + \frac{\partial C_{kR}}{\partial b} b \right] - \frac{C_{kR}^2}{2U_{kR} I_{kR}^{(0)}} \left[ \left( V_k^{(1)} \right)^2 + \left( V_k^{(2)} \right)^2 \right], \quad (1.50) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial C_{kL}}{\partial a} = 0,$$

$$\frac{\partial C_{kL}}{\partial b} = \frac{b\rho}{U_{kL}I_{kL}^{(0)}} \left[ \left( V_k^{(1)} \right)^2 + \frac{1}{\xi_{kL}^2} \left( \frac{dV_k^{(2)}}{dz} \right)^2 \right],$$

$$\frac{\partial C_{kL}}{\partial \rho} = \frac{b}{2\rho} \frac{\partial C_{kL}}{\partial b} - \frac{C_{kL}^2}{2U_{kL}I_{kL}^{(0)}} \left( V_k^{(3)} \right)^2.$$

В сферическом случае формулы совершенно аналогичны, если заменить  $\xi$  на  $N = \sqrt{\nu(\nu+1)}$  и использовать  $U_{kD}$ ,  $I_{kD}^{(j)}$  и собственные функции  $V_k^{(j)}$  для сферической Земли; производные  $dV_k^{(j)}(\omega, z)/dz$  нужно заменить на  $dV_k^{(j)}(\omega, R)/dR$ .

Частные производные групповой скорости на частоте  $\omega$  могут быть численно найдены через производные фазовой скорости в двух близких по частоте точках  $\omega_1 = \omega e^\delta$ ,  $\omega_2 = \omega e^{-\delta}$  [180]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial k} \Big|_{\omega} &= \frac{U|\omega}{2C|\omega} \left( 2 - \frac{U|\omega}{C|\omega} \right) \left( \frac{\partial C}{\partial k} \Big|_{\omega_1} + \frac{\partial C}{\partial k} \Big|_{\omega_2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{U|\omega}{C|\omega} \right]^2 \left( \frac{\partial C}{\partial k} \Big|_{\omega_1} - \frac{\partial C}{\partial k} \Big|_{\omega_2} \right) \delta^{-1}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

### § 1.6. Учет неупругих явлений

В слабо поглощающей среде связь между напряжениями и деформациями выражается линейными интегродифференциальными соотношениями [3, 4, 45, 60]. Исследуя распространение гармонических волн в такой среде, удобно пользоваться представлением о комплексных частотно-зависимых упругих модулях  $\bar{K}(\omega, x)$ ,  $\bar{\mu}(\omega, x)$  в отличие от частотно-независимых модулей  $K(x)$ ,  $\mu(x)$  идеально упругой среды. Им соответствуют комплексные частотно-зависимые скорости  $a(\omega, x)$  и  $b(\omega, x)$  распространения волн  $P$  и  $S$  соответственно.

Диссипация, возникающая при всестороннем сжатии, характеризуется величиной  $Q_k = \text{Re}\bar{K}/\text{Im}\bar{K}$ , а диссипация при чистом сдвиге — величиной  $Q_\mu = \text{Re}\bar{\mu}/\text{Im}\bar{\mu}$ . Поглощение распространяющихся упругих волн управляется параметрами  $Q_a$  и  $Q_b$ :

$$Q_b = Q_\mu = \text{Re}b/2\text{Im}b,$$

$$Q_a = \frac{1}{2} \left[ Q_k^{-1} \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{4}{3} Q_\mu^{-1} \frac{b^2}{a^2} \right]^{-1} = \frac{\text{Re}a}{2\text{Im}a}.$$

Часто предполагают, что  $Q_k^{-1} = 0$ , тогда  $Q_a = \frac{3}{4} Q_b \frac{a^2}{b^2}$ .

Обозначим комплексные возмущения скоростей, вызванные введением в среду малой диссипации, через  $\delta a(\omega, z)$ ,  $\delta b(\omega, z)$ . Соответствующие



щие возмущения фазовых скоростей  $C_{kD}(\omega)$  можно оценить, применив аппарат теории возмущения:

$$\delta C_{kD}(\omega) = \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial C_{kD}(\omega, z)}{\partial a} \delta a(\omega, z) + \frac{\partial C_{kD}(\omega, z)}{\partial b} \delta b(\omega, z) \right] dz.$$

Если допустить, что  $Q_a, Q_b$  частотно-независимы в широком диапазоне частот, возмущения скоростей  $\delta a, \delta b$  будут иметь вид [3, 4, 60]:

$$\begin{aligned} \delta a(\omega) &= \frac{a(\omega_0)}{\pi Q_a} \ln \frac{\omega}{\omega_0} - i \frac{1}{2Q_a}, \\ \delta b(\omega) &= \frac{b(\omega_0)}{\pi Q_b} \ln \frac{\omega}{\omega_0} - i \frac{1}{2Q_b}, \end{aligned} \quad (1.52)$$

где  $\omega_0$  — опорная частота, для которой задано распределение скоростей  $a(z), b(z)$  в среде. Тогда

$$\delta C_{kD}(\omega) = \left( \frac{1}{\pi} \ln \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{i}{2} \right) S_{kD}(\omega), \quad (1.53)$$

где

$$S_{kD} = \int_0^{\infty} \left[ \frac{a(z)}{Q_a(z)} \frac{\partial C_{kD}}{\partial a} + \frac{b(z)}{Q_b(z)} \frac{\partial C_{kD}}{\partial b} \right] dz,$$

а для частного случая  $Q_k^{-1} = 0$

$$S_{kD} = \int_0^{\infty} \left[ \frac{4}{3} \frac{b}{a} \frac{\partial C_{kD}}{\partial a} + \frac{\partial C_{kD}}{\partial b} \right] \frac{b}{Q_b} dz. \quad (1.53a)$$

Зная  $\delta C_{kD}(\omega)$ , легко оценить коэффициент поглощения поверхностной волны на частоте  $\omega$ :

$$\alpha_{kD}(\omega) = \frac{\omega \operatorname{Im}(\delta C_{kD})}{C_{kD}^2} = \frac{\omega S_{kD}}{2C_{kD}^2} \quad (1.54)$$

и определяемое по поверхностной волне кажущееся  $Q_{kD}(\omega)$ :

$$Q_{kD}(\omega) = \omega / [2\alpha_{kD}(\omega) U_{kD}(\omega)]. \quad (1.55)$$

С учетом диссипации второй множитель в формулах (1.27), (1.31) для смещений в поверхностных волнах приобретает вид

$$(\xi_{kD} r)^{-3/2} \exp \left[ -\frac{i\omega r}{C_{kD}} \left( 1 - \frac{S_{kD}}{\pi C_{kD}} \ln \frac{\omega}{\omega_0} \right) \right] \exp [ -\alpha_{kD}(\omega) r ]$$

или в сферическом случае (1.36)

$$\begin{aligned} &(\nu_{kD} \sin \theta)^{-1/2} \exp \left[ -\frac{i\omega \tilde{R}_0}{C_{kD}} \left( 1 - \frac{S_{kD}}{\pi C_{kD}} \ln \frac{\omega}{\omega_0} \right) + \right. \\ &\left. + i \frac{\pi}{2} (2l + g) \right] \exp [ -\alpha_{kD}(\omega) \tilde{\theta} R_0 ]. \end{aligned}$$

## § 1.7. Теоретические сейсмограммы

Переход от спектральных представлений поверхностных волн к временным, т.е. к теоретическим сейсмограммам, требует вычисления интегралов Фурье от быстроколеблющихся функций, содержащих множитель  $\exp(-i\xi_{kD}(\omega)r)$ , где  $r$  — велико. Для качественных оценок вида сейсмограмм удобно пользоваться асимптотическими формулами метода стационарной фазы [48, 72] и метода интегралов Эйри [72, 74].

Представим спектр поверхностной волны в виде

$$\hat{u}_{pq}^{kD} = \frac{1}{\sqrt{r}} \Phi_{pq}^{kD}(\omega, h, z, \varphi) \exp[-i\xi_{kD}(\omega)r],$$

где  $\Phi_{pq}^{kD}$  — медленно осциллирующая с частотой  $\omega$  комплексная функция. Тогда

$$\begin{aligned} u_{pq}^{kD}(t) &= \frac{1}{\pi\sqrt{r}} \operatorname{Re} \int_{\omega_{kD}}^{\infty} \Phi_{pq}^{kD}(\omega) \exp[i(\omega t - \xi_{kD}(\omega)r)] d\omega \approx \\ &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{r} \operatorname{Re} \sum_j \frac{U_{kD}(\omega_j) \Phi_{pq}^{kD}(\omega_j)}{\sqrt{|dU_{kD}(\omega)/d\omega|_{\omega=\omega_j}}} \times \\ &\times \exp\left[\omega_j t - \xi_{kD}(\omega_j)r + i \frac{\pi}{4} \operatorname{sign}\left(\frac{dU_{kD}(\omega)}{d\omega}\right)\right] + o(r^{-1}), \end{aligned} \quad (1.56)$$

где точки стационарной фазы  $\omega_j(t)$  — корни уравнения  $t - r/U_{kD}(\omega) = 0$ .

Формула (1.56) применима в тех интервалах частот, где не обращается в нуль  $dU_{kD}(\omega)/d\omega$ , более точно условия применимости сформулированы в [74]. Для оценки вклада окрестностей точек  $\bar{\omega}$ , где  $dU_{kD}(\omega)/d\omega = 0$  (такие точки называются фазами Эйри), используется интеграл Эйри

$$\begin{aligned} u_{pq}^{kD}(t) &= \frac{2^{2/3}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r^{5/6}} \operatorname{Re} \frac{\Phi(\bar{\omega}) E(\tau)}{\sqrt[3]{-d^3 \xi_{kD}/d\omega^3}|_{\omega=\bar{\omega}}} \times \\ &\times \exp[i(\bar{\omega} t - \xi_{kD}(\bar{\omega})r)] + o(r^{-2/3}), \end{aligned} \quad (1.57)$$

где  $E(\tau)$  — функция Эйри от аргумента  $\tau$ :

$$\tau = (t - r/C_{kD}(\bar{\omega})) / \sqrt[3]{-\frac{r}{2} \frac{d^3 \xi_{kD}}{d\omega^3} \Big|_{\omega=\bar{\omega}}}.$$

Из формул (1.56), (1.57) следует, что вид сейсмограмм определяется групповой скоростью. Если разбить дисперсионную кривую  $U_{kD}(\omega)$  на участки с постоянным знаком  $dU_{kD}(\omega)/d\omega$ , то каждому участку будет соответствовать квазисинусоидальное колебание переменной частоты  $\hat{\omega}(r/t)$ , где  $\hat{\omega}(r/t)$  — функция, обратная  $U_{kD}(\omega)$  на этом интервале. Областям фаз Эйри соответствуют колебания с квазипостоянной частотой  $\bar{\omega}$ .

Амплитуда колебания с видимой частотой  $\omega_j$  убывает с расстоянием

как  $r^{-1}$  ( $r^{-1/2}$  — за счет геометрического расхождения и  $r^{-1/2}$  — за счет растягивания сигнала во времени). Амплитуда в фазе Эйри убывает с расстоянием несколько медленнее — как  $r^{-5/6}$  ( $r^{-1/2}$  вместо  $r^{-1/2}$  за счет несколько меньшего растягивания процесса во времени). Фактическая амплитуда каждой гармоники зависит от большого числа факторов: напомним, что  $\Phi^{kD}(\omega)$  зависит от глубины и механизма очага, спектра источника, строения среды.

Полная сейсмограмма  $u_{pq}^D(t)$  получается путем суммирования всех мод, приходящих к приемнику в данном интервале времени. Далеко не всегда можно придать физический смысл вкладу отдельной моды, так как несколько мод могут интерферировать так, что их не удастся разделить ни в частотной, ни во временной областях [63]. Поэтому аномалиям поляризации, дисперсии и других спектральных характеристик отдельных мод следует придавать существенное значение только тогда, когда в соответствующем интервале частот или времени данная мода может быть отделена от других мод в условиях реального эксперимента.

Рассмотренные формулы оценки теоретических сейсмограмм не всегда удобны для фактических вычислений из-за узкого диапазона применимости асимптотики и сложности их стыковки. Поэтому для расчета сейсмограмм обычно используют численные методы [3, 188].

## Глава 2

### ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ СО СЛАБОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

#### § 2.1. Постановка задач на распространение поверхностных волн в полупространстве со слабой горизонтальной неоднородностью

В предыдущей главе для вертикально-неоднородного полупространства из точного решения уравнений движения в интегральной форме выделена главная часть на больших удалениях от источника, описывающая поле поверхностных волн (см. формулы (1.27), (1.32), (1.33)). Для среды, характеризующейся помимо вертикальной еще и горизонтальной неоднородностью, точных формул для поля получить нельзя, поэтому использованный выше подход к анализу поверхностных волн неприемлем. Для произвольной горизонтальной неоднородности решение может быть построено лишь численными методами. Однако если горизонтальная неоднородность значительно слабее вертикальной, для построения решения, отвечающего полю поверхностных волн, может быть использован приближенный метод, аналогичный лучевому методу [9–11, 200]. Как и в лучевом методе [5,6] решение строится в виде разложения в ряд по степеням некоторого малого параметра (в лучевом методе — по обратным степеням частоты  $\omega$ , здесь — по степеням параметра, характеризующего слабую неоднородность).

Предполагается, что в полупространстве упругие параметры  $\lambda$ ,  $\mu$  и плот-

ность  $\rho$  могут быть представлены в виде

$$\lambda = \lambda(\epsilon x, \epsilon y, z), \quad \mu = \mu(\epsilon x, \epsilon y, z), \quad \rho = \rho(\epsilon x, \epsilon y, z),$$

где  $\epsilon$  — малый параметр. Очевидно, что при таком задании среды производные упругих постоянных по горизонтальному направлению будут порядка  $\epsilon$  по сравнению с производными по вертикали. Границы внутри среды предполагаются гладкими, близгоризонтальными. Это учитывается представлением границ в виде  $z_i = \zeta_i(\epsilon x, \epsilon y)$ . В аналогичной форме можно задавать и форму свободной границы полупространства:  $z_0 = \zeta_0(\epsilon x, \epsilon y)$ ,

Величина малого параметра  $\epsilon$  должна быть такой, чтобы относительное изменение упругих постоянных в горизонтальном направлении на расстоянии порядка длины волны было мало. Если фазовую скорость поверхностной волны обозначить через  $C$  (очевидно, что  $C = C(\epsilon x, \epsilon y)$ ), то условия, накладываемые на горизонтальные вариации изменения  $\lambda, \mu, \rho$ , имеют вид

$$\left| \nabla_{\perp} \lambda \right| \ll \frac{\omega}{C} \lambda, \quad \left| \nabla_{\perp} \mu \right| \ll \frac{\omega}{C} \mu, \quad \left| \nabla_{\perp} \rho \right| \ll \frac{\omega}{C} \rho,$$

где  $\nabla_{\perp}$  обозначает горизонтальную составляющую градиента. Функции, определяющие глубины границ, подчиняются условию  $|\nabla_{\perp} \zeta_i| \ll 1$ .

Если в среде имеются не границы, а переходные слои с большими градиентами упругих постоянных, то требуется, чтобы направление градиента было близко к вертикальному. Необходимо также учитывать, что рассматривается поле поверхностной волны, которое описывается главной частью решения уравнения движения на больших расстояниях  $r$  от источника. Амплитуда поверхностной волны убывает с расстоянием от источника как  $r^{-1/2}$  (в случае стационарной волны) и как  $r^{-1}$  (в случае нестационарной волны). При больших  $r$  это приводит к тому, что амплитуда изменяется по вертикальному направлению значительно быстрее, чем по горизонтальному, так что относительное изменение амплитуды на расстоянии порядка длины волны является малой величиной ( $\omega r / C \gg 1$ ). При построении решения для смещений в поверхностных волнах в среде со слабой горизонтальной неоднородностью будем считать, что производная амплитуда по любому горизонтальному направлению мала и имеет порядок величины  $O(\epsilon)$ .

При построении решений, отвечающих полю поверхностных волн в слабой неоднородной по горизонтали среде, будем учитывать, что поверхностные волны распространяются в горизонтальном направлении, т. е. фазовый множитель, описывающий распространение волны, не должен зависеть от координаты  $z$ . Амплитуда волны записывается в виде ряда по степеням  $\epsilon$ . Представленное в виде такого разложения решение подставляется в уравнение движения для неоднородной упругой среды и в граничные условия, и, таким образом, как уравнение, так и граничные условия записываются в виде ряда по степеням  $\epsilon$ . Приравниванием нулю коэффициентов при последовательных степенях  $\epsilon$  в уравнении и граничных условиях мы получаем последовательность граничных задач для последовательных приближений в искомом решении.

## § 2.2. Распространение стационарных поверхностных волн

Задача о распространении стационарных поверхностных волн в полупространстве со слабой горизонтальной неоднородностью решена в [9–11, 200]. Поле стационарной поверхностной волны можно представить в форме

$$u(x, y, z, t, \epsilon) = V(\epsilon x, \epsilon y, z, \epsilon) \exp [i\omega(t - \tau(x, y, \epsilon))]. \quad (2.1)$$

Так же как и в лучевом методе, решение ищется в виде волн, распространяющихся со скоростью  $C = |\nabla\tau|^{-1}$  вдоль лучей; только в данном случае лучи располагаются в горизонтальной плоскости, что отвечает распространению поверхностных волн в горизонтальном направлении. Под лучами мы здесь понимаем линии, ортогональные фронтам  $\tau = \text{const}$ . Главное же различие с лучевым методом заключается в том, что решение для  $V$  представляется в виде асимптотического ряда по степеням  $\epsilon$ .

Подставив (2.1) в уравнение движения (1.4), получим

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu)\nabla\text{div} V - \mu\text{rot rot} V + \nabla\lambda\text{div} V - \nabla\mu \times \text{rot} V + \\ & + 2(\nabla\mu, \nabla)V - i\omega \{(\lambda + \mu) [\text{div} V \nabla\tau + \nabla(V, \nabla\tau)] + \mu [V \Delta\tau + \\ & + 2 \frac{\partial V}{\partial \tau} (\nabla\tau)^2] + \nabla\lambda(V, \nabla\tau) + (\nabla\mu, V) \nabla\tau + (\nabla\mu, \nabla\tau) V \} - \\ & - \omega^2 \{(\lambda + \mu)(V, \nabla\tau) \nabla\tau + (\mu(\nabla\tau)^2 - \rho)V \} = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Граничное условие (1.6) при подстановке в него (2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} & \lambda \text{ndiv} V + 2\mu \left[ \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \times \text{rot} V) \right] - i\omega \left[ \lambda \mathbf{n} (\nabla\tau, V) + \right. \\ & \left. + \mu (\mathbf{n} \times (\nabla\tau \times V)) + 2\mu V \frac{\partial \tau}{\partial n} \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности:

$$\mathbf{n} = \left\{ \frac{1}{B} \frac{\partial \xi_0}{\partial x}, \frac{1}{B} \frac{\partial \xi_0}{\partial y}, -\frac{1}{B} \right\}, \quad B = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial \xi_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi_0}{\partial y} \right)^2}.$$

Введем ортогональную криволинейную систему координат: "лучевые" координаты  $\tau, \varphi$  в плоскости  $x, y$  и вертикальную координату  $z$ . Координата  $\varphi$  характеризует луч, координата  $\tau$  – точку на луче. Направление вектора  $\mathbf{e}_\varphi$  фиксируем условием  $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\tau$ . Геометрическое расхождение лучей в плоскости  $x, y$  обозначим

$$J = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Представим теперь искомое решение  $V$  в виде ряда по степеням  $\epsilon$ :

$$V = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j V_j.$$

Составляющие векторов смещений  $V_j$  по координатам  $z, \tau, \varphi$  будем обозначать  $V_j^{(z)}, V_j^{(\tau)}, V_j^{(\varphi)}$  соответственно. Подставим это разложение в уравнение (2.2) и в граничное условие (2.3) и выпишем главные члены. При этом учтем сделанное в § 2.1 замечание относительно того, что производная амплитуды по любому горизонтальному направлению имеет порядок  $O(\epsilon)$ . Это же относится и к величине  $\Delta\tau = \frac{|\nabla\tau|}{J} \frac{\partial}{\partial\tau} (J |\nabla\tau|)$  [5],

поскольку на больших расстояниях от источника относительное изменение геометрического расхождения  $J$  мало. В результате получим систему уравнений относительно  $V_0^{(z)}, V_0^{(\tau)}, V_0^{(\varphi)}$ :

$$l_1(V_0^{(z)}, V_0^{(\tau)}) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_0^{(\tau)}}{\partial z} \right) - i\omega |\nabla\tau| \left[ \lambda \frac{\partial V_0^{(z)}}{\partial z} + \frac{\partial(\mu V_0^{(z)})}{\partial z} \right] + \omega^2 [\rho - (\lambda + 2\mu)(\nabla\tau)^2] V_0^{(\tau)} = 0, \quad (2.4)$$

$$l_2(V_0^{(z)}, V_0^{(\tau)}) = \frac{\partial}{\partial z} \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_0^{(z)}}{\partial z} \right) - i\omega |\nabla\tau| \left[ \mu \frac{\partial V_0^{(\tau)}}{\partial z} + \frac{\partial(\lambda V_0^{(\tau)})}{\partial z} \right] + \omega^2 [\rho - \mu(\nabla\tau)^2] V_0^{(z)} = 0, \quad (2.5)$$

$$l_2(V_0^{(\varphi)}) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_0^{(\varphi)}}{\partial z} \right) + \omega^2 [\rho - \mu(\nabla\tau)^2] V_0^{(\varphi)} = 0. \quad (2.6)$$

Граничные условия для решения этой системы следующие: при  $z = \xi_0$

$$\partial V_0 / \partial z - i\omega |\nabla\tau| V_0^{(z)} = 0, \quad (2.7)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_0^{(z)}}{\partial z} - i\omega \lambda V_0^{(\tau)} |\nabla\tau| = 0, \quad (2.8)$$

$$\partial V_0^{(\varphi)} / \partial z = 0, \quad \text{при } z \rightarrow \infty \quad (2.9)$$

$$V_0^{(\tau)} \rightarrow 0, \quad V_0^{(z)} \rightarrow 0, \quad (2.10a)$$

$$V_0^{(\varphi)} \rightarrow 0. \quad (2.10b)$$

Эта система уравнений и граничные условия совершенно аналогичны тем, которые получаются для горизонтально-однородного полупространства (см. формулы (1.20)–(1.21), (1.23), (1.25)). Однако коэффициенты в уравнениях и граничных условиях являются не постоянными, а зависят от  $\epsilon x, \epsilon y$ , а условия (2.7)–(2.9) выполняются не при  $z = 0$ , а при  $z = \xi_0(\epsilon x, \epsilon y)$ , соответствующем положению свободной поверхности в данной точке  $(x, y)$ .

Как и в случае горизонтально-однородного полупространства, задача (2.4)–(2.10) разбивается на две независимые задачи, соответствующие волнам Рэля и Лява. Для волны Рэля  $V_0^{(\varphi)}(z) = 0$ , а собственные значения

$\omega|\Delta\tau|$  и собственные функции  $V_0^{(\tau)}(z)$ ,  $V_0^{(z)}(z)$  определяются из уравнений (2.4) и (2.5) с граничными условиями (2.7), (2.8), (2.10a); для волн Лява  $V_0^{(\tau)} = V_0^{(z)} = 0$ , а собственные функции  $V_0^{(\varphi)}(z)$  и собственные значения определяются из решения краевой задачи (2.6), (2.9) (2.10б). Таким образом, собственные значения этих задач и соответствующие собственные функции определяются локально и оказываются такими, какими были бы в случае однородного по горизонтали полупространства, характеризующегося вертикальным разрезом, совпадающим с разрезом в данной точке  $(x, y)$ . По собственному значению  $\omega|\nabla\tau| \equiv \xi$  определяется фазовая скорость волны  $C(x, y) = |\nabla\tau|^{-1}$ , которая, как и следовало ожидать, является функцией  $(x, y)$ . Отсюда очевидно, что  $\tau(x, y, \epsilon)$  определяется выражением

$$\tau(x, y, \epsilon) = \int_L \frac{ds}{C(x, y)}, \quad (2.11)$$

в котором интегрирование ведется вдоль луча на плоскости  $(x, y)$ , определяемого обычным уравнением луча [124]:

$$d\mathbf{r}/ds = C\mathbf{k}, \quad d\mathbf{k}/ds = -\nabla C/C^2. \quad (2.12)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки на луче;  $\mathbf{k}$  — вектор медленности, равный  $\nabla\tau = \mathbf{e}_\tau/C$ . Лучевые схемы для поверхностных волн вводились в работах [106, 137, 138].

При рассмотрении главных членов (порядка  $\epsilon^0$ ) в разложении уравнения движения и граничных условий прослеживается аналогия с лучевым разложением: анализ первого члена приводит к разделению поля на два типа волн, различающихся в нулевом приближении по поляризации, и определяется кинематика этих волн. Кроме того, в каждой точке  $(x, y)$  можно определить зависимость амплитуды этих волн от глубины  $z$  как собственные функции соответствующих одномерных задач. Однако амплитуда волны определяется лишь с точностью до множителя, зависящего от  $(x, y)$ , который показывает, как меняется интенсивность волны в процессе распространения. Для нахождения такого множителя необходимо рассмотреть второй член разложения уравнения и граничных условий. Как и в лучевом методе, амплитуда нулевого приближения определяется из уравнения, соответствующего следующему члену разложения в уравнении движения.

При анализе следующего приближения в разложении уравнения (2.2) с граничными условиями (2.3) следует рассматривать отдельно волны Лява и волны Рэлея.

**Волны Лява.** Как уже упоминалось выше, при фиксированных  $x, y$  задача, соответствующая нулевому приближению, имеет вид

$$I_3(V_0^{(\varphi)}) \equiv \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_0^{(\varphi)}}{\partial z} \right) + \omega^2(\rho - \mu(\nabla\tau)^2)V_0^{(\varphi)} = 0, \quad (2.13)$$

$$\left. \frac{\partial V_0^{(\varphi)}}{\partial z} \right|_{z=\xi_0} = 0, \quad (2.14)$$

при  $z \rightarrow \infty \quad V_0^{(\varphi)} \rightarrow 0$ .

В следующем приближении уже все компоненты смещения будут отличны от нуля, так что следовало бы рассматривать систему трех уравнений с неизвестными  $V_1^{(z)}$ ,  $V_1^{(\tau)}$ ,  $V_1^{(\varphi)}$  и соответственно с тремя граничными условиями. Однако для определения зависимости амплитуды нулевого приближения  $V_0^{(\varphi)}$  от  $(x, y)$  достаточно рассмотреть одно уравнение, соответствующее основной, т. е.  $\varphi$ -компоненте. Это уравнение и соответствующее граничное условие имеют вид:

$$\epsilon l_3 (V_1^{(\varphi)}) - i\omega [\mu V_0^{(\varphi)} \Delta \tau + 2\mu \frac{\partial V_0^{(\varphi)}}{\partial \tau} (\nabla \tau)^2 + \frac{\partial \mu}{\partial \tau} (\nabla \tau)^2 V_0^{(\varphi)}] = 0, \quad (2.15)$$

$$\epsilon \left. \frac{\partial V_1^{(\varphi)}}{\partial z} + \frac{\partial \xi_0}{\partial \tau} (\nabla \tau)^2 i\omega V_0^{(\varphi)} \right|_{z = \xi_0} = 0, \quad (2.16)$$

$$V_1^{(\varphi)} \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty).$$

Легко видеть, что второе слагаемое как в уравнении, так и в граничном условии имеет порядок  $\epsilon$ , так что оба слагаемых в (2.15) и (2.16) имеют один и тот же порядок малости.

Уравнение (2.15) с граничными условиями (2.16) образует неоднородную краевую задачу для  $V_1^{(\varphi)}$ , причем соответствующая однородная краевая задача совпадает с задачей для  $V_0^{(\varphi)}$  и, следовательно, имеет нетривиальное решение. В этом случае неоднородная задача будет иметь решение только в случае, если правая часть удовлетворяет условию разрешимости. Это условие можно получить, умножив (2.15) на  $V_0^{(\varphi)}$  и проинтегрировав по  $z$  от  $\xi_0$  до  $\infty$  с учетом (2.14) и (2.16). В результате получим следующее уравнение для  $V_0^{(\varphi)}$ :

$$\begin{aligned} & \mu (V_0^{(\varphi)})^2 \frac{\partial \xi_0}{\partial \tau} (\nabla \tau)^2 \Big|_{z = \xi_0} + \Delta \tau \int_{\xi_0}^{\infty} \mu (V_0^{(\varphi)})^2 dz + \\ & + 2(\nabla \tau)^2 \int_{\xi_0}^{\infty} \mu V_0^{(\varphi)} \frac{\partial V_0^{(\varphi)}}{\partial z} dz + (\nabla \tau)^2 \int_{\xi_0}^{\infty} \frac{\partial \mu}{\partial \tau} (V_0^{(\varphi)})^2 dz = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Учитывая, что  $\Delta \tau = \frac{|\nabla \tau|}{J} \frac{\partial}{\partial \tau} (J |\nabla \tau|)$  и  $|\nabla \tau| = C^{-1}$ , получаем

$$\frac{1}{CJ} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{J}{C} \int_{\xi_0}^{\infty} \mu (V_0^{(\varphi)})^2 dz \right) = \operatorname{div} (\nabla \tau \int_{\xi_0}^{\infty} \mu (V_0^{(\varphi)})^2 dz) = 0. \quad (2.18)$$

Из этого уравнения следует, что амплитуда в произвольной точке луча на глубине  $z$  определяется формулой

$$V_0^{(\varphi)}(x, y, z) = A_L(x, y) V^{(3)}(z - \xi_0), \quad (2.19)$$

$$A_L(x, y) = K_L(\varphi) \sqrt{\frac{C}{J} \left( \int_{\xi_0}^{\infty} \mu [V^{(3)}(z)]^2 dz \right)^{-1/2}}, \quad (2.20)$$

где  $V^{(3)}(z)$  — собственная функция одномерной задачи для волны Лява



в точке  $(x, y)$ ;  $K_L(\varphi)$  — некоторая величина, постоянная вдоль луча и характеризующая направленность излучения из источника. Это соотношение позволяет определить амплитуду волны вдоль луча, если она известна хотя бы в одной точке на луче.

Нетрудно показать, что соотношение (2.18) выражает закон постоянства энергии в нулевом приближении внутри области, являющейся в данном случае аналогом лучевой трубки, т. е. области, ограниченной цилиндрическими поверхностями, образующие которых — полубесконечные вертикальные линии, проходящие через лучи в плоскости  $(x, y)$  (рис. 2.1).

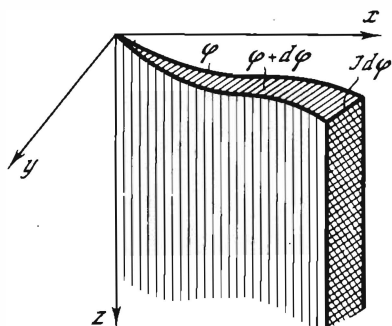


Рис. 2.1. Схематическое изображение лучевого цилиндра — аналога лучевой трубки

Действительно, поток энергии волны Лява, проходящий через бесконечную вертикальную полосу, перпендикулярную лучу и ограниченную лучами  $\varphi$  и  $\varphi + d\varphi$ , выражается следующим образом:

$$dE = \frac{U\omega^2}{2} J d\varphi \int_{\xi_0}^{\infty} \rho(V_0^{(\varphi)})^2 dz, \quad (2.21)$$

где  $U$  — групповая скорость. В гл. 1 была приведена интегральная формула для групповой скорости (1.45):

$$U = \int_0^{\infty} \mu [(V^{(3)}(z))]^2 dz / C \int_0^{\infty} \rho(V^{(3)}(z))^2 dz.$$

Подставляя (2.19), (2.20) и выражение для  $U$  в (2.21), получаем

$$dE = \omega^2 K_L^2(\varphi) d\varphi / 2. \quad (2.22)$$

Таким образом, действительно, поток энергии через любую вертикальную полосу, ограниченную двумя лучами, сохраняется постоянным.

**Волны Рэлея.** Для фиксированной точки  $(x, y)$  уравнения (2.4), (2.5) с граничными условиями (2.7), (2.8) и (2.10а) определяют одномерную задачу для волн Рэлея, совпадающую с рассмотренной в § 1.3. Отсюда

$$\begin{aligned} V_0^{(z)}(x, y, z) &= A_R(x, y) V^{(1)}(z - \xi_0), \\ V_0^{(\tau)}(x, y, z) &= iA_R(x, y) V^{(2)}(z - \xi_0). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Чтобы найти, как амплитуды  $V_0^{(z)}$ ,  $V_0^{(\tau)}$  меняются вдоль луча  $\varphi = \text{const}$ , необходимо рассмотреть следующее приближение. Уравнения для  $\tau$ - и

$z$ -компонент смещений в первом приближении имеют вид:

$$\begin{aligned} \epsilon l_1 (V_1^{(z)}, V_1^{(\tau)}) + |\nabla\tau| \left[ \frac{\partial}{\partial\tau} \left( \lambda \frac{\partial V_0^{(z)}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_0^{(z)}}{\partial\tau} \right) \right] - \\ - i\omega [(\lambda + 2\mu) V_0^{(\tau)} \frac{|\nabla\tau|}{J} \frac{\partial}{\partial\tau} (J |\nabla\tau|) + 2(\lambda + 2\mu) (\nabla\tau)^2 \frac{\partial V_0^{(\tau)}}{\partial\tau} + \\ + \frac{\partial(\lambda + 2\mu)}{\partial\tau} (\nabla\tau)^2 V_0^{(\tau)}] = 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \epsilon l_2 (V_1^{(z)}, V_1^{(\tau)}) + \frac{|\nabla\tau|}{J} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial (J V_0^{(\tau)})}{\partial\tau} \right) + \frac{\partial}{\partial\tau} \left( \mu J \frac{\partial V_0^{(\tau)}}{\partial z} \right) \right] - \\ - i\omega [\mu V_0^{(z)} \frac{|\nabla\tau|}{J} \frac{\partial}{\partial\tau} (J |\nabla\tau|) + 2\mu |\nabla\tau|^2 \frac{\partial V_0^{(z)}}{\partial\tau} + \\ + \frac{\partial\mu}{\partial\tau} (\nabla\tau)^2 V_0^{(z)}] = 0, \end{aligned}$$

где  $l_1$  и  $l_2$  определены (2.4), (2.5), а соответствующие граничные условия следующие:

$$\begin{aligned} \mu \left( \frac{\partial V_1^{(\tau)}}{\partial z} + |\nabla\tau| \frac{\partial V_0^{(z)}}{\partial\tau} - i\omega |\nabla\tau| V_1^{(z)} \right) - \\ - \frac{\partial\xi_0}{\partial\tau} |\nabla\tau| \left[ \lambda \frac{\partial V_0^{(z)}}{\partial z} - i(\lambda + 2\mu)\omega |\nabla\tau| V_0^{(\tau)} \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_1^{(z)}}{\partial z} + \lambda \frac{|\nabla\tau|}{J} \frac{\partial}{\partial\tau} (J V_0^{(\tau)}) - i\omega \lambda V_1^{(\tau)} |\nabla\tau| - \\ - \frac{\partial\xi_0}{\partial\tau} |\nabla\tau| \left( \mu \frac{\partial V_0^{(\tau)}}{\partial z} - i\omega \mu |\nabla\tau| V_0^{(z)} \right) = 0. \end{aligned}$$

Все дальнейшие рассуждения проводятся точно так же, как и в случае волны Лява. Уравнения (2.24) с граничными условиями (2.25) образуют неоднородную краевую задачу, причем  $\omega|\nabla\tau|$  является собственным значением соответствующей однородной задачи. Поэтому, чтобы решение задачи (2.24), (2.25) могло существовать, правые части уравнений должны удовлетворять условию разрешимости. Для получения этого условия умножим первое уравнение (2.24) на  $V_0^{(\tau)*}$  (звездочка означает комплексное сопряжение), второе на  $V_0^{(z)*}$ , сложим их и проинтегрируем по  $z$  от  $\xi_0$  до  $\infty$  с учетом (2.4), (2.5) и граничных условий (2.25). Преобразование полученных выражений при фиксированном  $\varphi$  приводит к соотношению, по форме

аналогичному (2.18):

$$\left\{ \frac{1}{CJ} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{JA_R^2}{C} \left[ I_R^{(1)} + I_R^{(2)} + \frac{C}{\omega} (I_R^{(3)} + I_R^{(4)}) \right] \right] \right\} = \\ = \operatorname{div} \left\{ \nabla_{\tau} A_R^2 \left[ I_R^{(1)} + I_R^{(2)} + \frac{C}{\omega} (I_R^{(3)} + I_R^{(4)}) \right] \right\} = 0, \quad (2.26)$$

где интегралы  $I_R^{(j)}$  совпадают с определенными в (1.46). Отсюда с учетом (1.45) получаем следующее выражение для  $A_R$ :

$$A_R(x, y) = K_R(\varphi) \sqrt{\frac{C}{J}} \left[ I_R^{(1)} + I_R^{(2)} + \frac{C}{\omega} (I_R^{(3)} + I_R^{(4)}) \right]^{-1/2} = \\ = K_R(\varphi) \sqrt{\frac{C}{J}} \frac{1}{\sqrt{CUI_R^{(0)}}}, \quad (2.27)$$

где  $K_R(\varphi)$  постоянно вдоль данного луча.

Точно так же, как и в предыдущем случае, (2.27) выражает постоянство потока энергии через поперечное сечение полубесконечного лучевого цилиндра. Энергия волны Рэлея, протекающая через такое сечение в единицу времени равна

$$dE = \frac{U\omega^2}{2} J d\varphi \int_{z_0}^{\infty} \rho (|V_0^{(r)}|^2 + |V_0^{(z)}|^2) dz. \quad (2.28)$$

Учитывая (2.23), (2.27), имеем

$$dE = \omega^2 K_R^2(\varphi) d\varphi / 2,$$

т.е. действительно в нулевом приближении энергия волны внутри лучевого цилиндра сохраняется.

**Поля точечного источника.** Приведенные выше формулы для компонент  $V_0$  определяют только изменение спектральных амплитуд смещений вдоль фиксированного луча  $\varphi = \text{const}$ . Чтобы получить полные выражения для спектральных амплитуд поверхностных волн, возбуждаемых в рассматриваемой модели точечным источником, необходимо определить множители  $K_D(\varphi)$  в формулах (2.20), (2.27).

При рассмотрении сходных скалярных задач волновой акустики [15] было показано, что в нулевом приближении излучаемая источником поверхностная волна локально такая же, как если бы источник действовал в горизонтально-однородной среде (с тем же вертикальным распределением параметров, как над и под источником). Аналогичные предположения о локальной однородности среды вокруг источника (в нулевом приближении) типичны для геометро-лучевой теории объемных волн. Действуя по аналогии с этими подходами и учитывая результаты § 1.3, мы приходим к следующим выражениям для спектральных амплитуд смещений в поверхностной волне ( $k$ -й моде  $D$ -го типа), возбуждаемой в точке  $x_0(0, 0, h)$  и

регистрируемой в точке  $x(x, y, z)$  :

$$\hat{u}_{pq}^{kD}(\omega, x, y, z) = \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{8\pi}} \frac{\exp[-i\omega \int_L ds/C_{kD}(s)]}{\sqrt{\xi_{kD} J_{kD}(x, y)}} \times \\ \times \left. \frac{\epsilon_p V_k^{(ip)}(\omega, z - \xi_0)}{\sqrt{C_{kD} U_{kD} I_{kD}^{(0)}}} \right|_{(x, y)} \left. \frac{W^{kD}(\omega, \varphi, h - \xi_0)}{\sqrt{C_{kD} U_{kD} I_{kD}^{(0)}}} \right|_{(0,0)} + O(\epsilon). \quad (2.29)$$

Интеграл в экспоненте второго множителя берется вдоль луча, соединяющего точки  $(0,0)$  и  $(x, y)$  плоскости  $(xy)$ . Третий множитель соответствует среде в области приемника, четвертый — в области источника; индекс  $p$  принимает значения  $\tau, \varphi, z$ , причем  $i_\tau = i_r, \epsilon_\tau = \epsilon_r$ , угол  $\varphi$  — азимут выхода луча из источника. Легко видеть, что в случае горизонтально-однородной среды формула (2.29) переходит в (1.31).

Таким образом, для оценки спектральных амплитуд необходимо рассчитать скалярное поле фазовой скорости волны  $C_{kD}(x, y)$ , построить луч, соединяющий проекции точек возбуждения и приема на плоскость  $(xy)$ , определить геометрическое расхождение в точке приема  $J(x, y)$  и рассчитать спектральные характеристики (групповые скорости, собственные функции, энергетические интегралы в точках возбуждения и приема, функцию  $W^{kD}$  для заданного механизма источника).

### § 2.3. Распространение нестационарных поверхностных волн

Зная решение для стационарной поверхностной волны, можно сконструировать решение и для нестационарной волны, используя подход, описанный в гл. 1 и заключающийся в представлении поля в виде суперпозиции гармонических волн, т.е. в виде интеграла Фурье, и оценке этого интеграла методом стационарной фазы. Однако в общем случае горизонтально-неоднородной среды такой подход оказывается неприемлемым. Это видно из следующего рассмотрения.

Как было показано в § 2.2, поле стационарной поверхностной волны в слабо неоднородной по горизонтали среде можно выразить следующим образом:

$$u(x, y, z, t, \epsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j V_j(\epsilon x, \epsilon y, z, \epsilon) \exp[i\omega(t - \tau(x, y, \epsilon))] d\omega. \quad (2.30)$$

Поле нестационарной волны можно представить так:

$$u(x, y, z, t, \epsilon) = \\ = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V_j(\epsilon x, \epsilon y, z, \epsilon, \omega) \exp[i\omega(t - \tau(x, y, \epsilon, \omega))] d\omega, \quad (2.31)$$

т.е. тоже в виде разложения по степеням малого параметра  $\epsilon$ . Попытаемся произвести оценку каждого из интегралов в правой части (2.31) методом стационарной фазы. Большим параметром здесь можно считать время  $t$ . Фазовый множитель в подынтегральной функции каждого из интегралов

в правой части (2.31) можно тогда представить в форме

$$\exp [it(\omega - \frac{\omega\tau}{t})] = \exp [it\psi(\omega, t)]. \quad (2.32)$$

Точка стационарной фазы определится условием

$$\frac{\partial \psi}{\partial \omega} = 1 - \frac{\partial(\omega\tau)/\partial \omega}{t} = 0 \quad (2.33)$$

или

$$t = \tau + \omega \partial \tau / \partial \omega.$$

Учитывая выражение (2.12) для  $\tau(x, y, \epsilon, \omega)$ , получаем

$$t = \int_{L_\omega} \frac{ds}{C(\epsilon x, \epsilon y, \omega)} - \omega \frac{d}{d\omega} \int_{L_\omega} \frac{ds}{C} \approx \int_{L_\omega} \frac{ds}{U(\epsilon x, \epsilon y, \omega)}, \quad (2.34)$$

где  $U$  — групповая скорость волны, определяемая выражением

$$\frac{1}{U(\omega)} = \frac{1}{C(\omega)} - \frac{\omega}{C^2} \frac{dC}{d\omega}; \quad (2.35)$$

$L_\omega$  — луч, соответствующий частоте  $\omega$ .

Строго говоря, при дифференцировании интеграла (2.11), определяющего функцию  $\tau(x, y, \omega)$ , следовало бы учесть и то, что при изменении  $\omega$  изменяется и путь интегрирования  $L_\omega$ , а не только подынтегральная функция. Однако, как показано в [6], вклад в вариацию  $\tau$  за счет вариации пути интегрирования по сравнению с тем, который обусловлен изменением скорости  $C$ , является величиной следующего порядка малости, так что при вычислении производной  $d\tau/d\omega$  вариацией луча с изменением  $\omega$  можно пренебречь. Таким образом, оценка каждого из интегралов в правой части (2.31) будет иметь вид квазигармонической волны с медленно меняющейся во времени и пространстве  $(x, y)$  частотой, определяемой из уравнения (2.34):

$$u(x, y, z, t, \epsilon) \approx \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j R_j(\epsilon x, \epsilon y, z, \omega(t, x, y)) \exp \{i[\omega(t)t - \tau(x, y, \epsilon, \omega(t, x, y))]\}. \quad (2.36)$$

Волна такого вида названа в [10] гармоническим волновым пакетом. Из изложенного выше следует, что составляющая волнового пакета с частотой  $\omega$  распространяется с групповой скоростью  $U(x, y, \omega)$  вдоль лучей  $L_\omega$  в плоскости  $x, y$ , определяемых распределением фазовой скорости  $C(x, y, \omega)$  в соответствии с уравнением луча (2.12). (Здесь и далее мы записываем зависимость фазовой и групповой скоростей от координат в виде  $C(x, y, \omega)$ ,  $U(x, y, \omega)$ , имея при этом в виду, что производные скоростей по  $x, y$  имеют порядок  $\epsilon$ .) Однако этим результатом и ограничивается рассмотрение поля нестационарной поверхностной волны в рамках интеграла Фурье. Амплитуды составляющих гармонического волнового пакета оценить при таком подходе не удастся. Дело в том, что для оценки амплитуды по методу стационарной фазы необходимо

определить вторую производную фазовой функции  $\partial^2 \psi / \partial \omega^2$  (см. § 1.7), а вторая производная  $\psi$  по  $\omega$  уже будет зависеть от вариации луча  $L_\omega$  при изменении  $\omega$ . Вычислить такую производную можно только в тех частных случаях, когда интеграл  $\int_{L_\omega} ds / C(x, y, \omega)$  может быть выражен в конеч-

ном виде и представлен в форме некоторой функции  $\omega$ . Это, очевидно, легко сделать для горизонтально-однородной среды (в этом случае  $\psi = \omega - \omega r / Ct$ ) или, например, в случае, когда скорость  $C$  линейно изменяется вдоль какого-то направления в горизонтальной плоскости. Для произвольной зависимости  $C = C(x, y)$  такой подход оказывается практически невозможным. В общем случае для анализа распространения гармонических волновых пакетов удобно применить пространственно-временной лучевой метод [7, 8, 88], который использует представление решения не в форме интеграла Фурье, а непосредственно в виде гармонического волнового пакета:

$$u(x, y, z, t, \epsilon) = \sum_{j=0}^j \epsilon^j u_j(\epsilon x, \epsilon y, z, \epsilon t) \exp[i\Theta(x, y, t)]. \quad (2.37)$$

Эта форма представления решения совпадает с той, которая получается путем оценки интеграла Фурье методом стационарной фазы: из сравнения (2.36) и (2.37) следует, что

$$\Theta = \omega(t, x, y) (t - \tau(x, y, \omega(t, x, y))). \quad (2.38)$$

Амплитуда соответственно является функцией времени, поскольку она зависит от частоты  $\omega$ , определяемой из соотношения (2.34). При этом как частота  $\omega$ , так и соответственно амплитуда волны медленно меняются со временем. Это легко видеть из соотношения (2.34), если учесть, что  $t$  велико (решение строится на больших удалениях от источника и, следовательно, при больших значениях времени  $t$ ).

Из (2.38) и (2.34) следует, что

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \omega + \frac{\partial \omega}{\partial t} \left( t - \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \tau) \right) = \omega, \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \left( t - \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \tau) \right) - \omega \frac{\partial \tau}{\partial x} = -\omega \frac{\partial \tau}{\partial x} = -\omega k_x,$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = -\omega k_y, \quad (2.40)$$

где  $k_x, k_y$  — составляющие вектора  $\mathbf{k} = \nabla \tau$ , определяемого уравнением (2.12), так что  $-\nabla \Theta = \omega \mathbf{k}$  — волновой вектор. Анализ распространения нестационарных поверхностных волн на основе пространственно-временного лучевого метода выполнен в [10, 200].

Решение строится аналогично предыдущему: вектор смещения (2.37) подставляется в уравнение движения (1.4) и граничные условия (1.6), левые части которых разлагаются в ряды по степеням  $\epsilon$ . Коэффициенты при последовательных степенях  $\epsilon$  приравниваются нулю, что приводит к набору краевых задач, определяющих кинематику волны и амплитуды последовательных приближений. Отличие от стационарного случая состоит

в том, что как фаза, так и амплитуда волны считаются неизвестными функциями времени  $t$ , так что решение ищется не в пространстве  $x, y, z$ , а в четырехмерном пространстве  $x, y, z, t$ .

В нулевом приближении уравнение движения и граничные условия примут вид, аналогичный (2.4)–(2.10). При выводе этих уравнений принято во внимание, что  $\partial \Theta / \partial t = \omega$  и  $|\nabla \Theta| = \xi$ . Эти уравнения имеют следующий вид:

$$l_1(V_0^{(z)}, V_0^{(\tau)}) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_0^{(\tau)}}{\partial z} \right) - i\xi \left[ \lambda \frac{\partial V_0^{(z)}}{\partial z} + \frac{\partial (\mu V_0^{(z)})}{\partial z} \right] + (\omega^2 \rho - (\lambda + 2\mu) \xi^2) V_0^{(\tau)} = 0, \quad (2.41)$$

$$l_2(V_0^{(z)}, V_0^{(\tau)}) = \frac{\partial}{\partial z} \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_0^{(z)}}{\partial z} \right) - i\xi \left[ \mu \frac{\partial V_0^{(\tau)}}{\partial z} + \frac{\partial (\lambda V_0^{(\tau)})}{\partial z} \right] + (\omega^2 \rho - \mu \xi^2) V_0^{(z)} = 0, \quad (2.42)$$

$$l_3(V_0^{(\varphi)}) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_0^{(\varphi)}}{\partial z} \right) + (\omega^2 \rho - \mu \xi^2) V_0^{(\varphi)} = 0, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial V_0^{(\tau)}}{\partial z} - i\xi V_0^{(z)} = 0 \Big|_{z=\xi_0}, \quad V_0^{(z)} \rightarrow 0 \Big|_{z \rightarrow \infty}, \quad (2.44)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_0^{(z)}}{\partial z} - i\xi \lambda V_0^{(\tau)} = 0 \Big|_{z=\xi_0}, \quad V_0^{(\tau)} \rightarrow 0 \Big|_{z \rightarrow \infty}, \quad (2.45)$$

$$\partial V_0^{(\varphi)} / \partial z = 0 \Big|_{z=\xi_0}, \quad V_0^{(\varphi)} \rightarrow 0 \Big|_{z \rightarrow \infty}. \quad (2.46)$$

Здесь, как и ранее, компоненты вектора  $V_0$  имеют следующий смысл:  $V^{(\tau)}$ ,  $V^{(\varphi)}$  – горизонтальные составляющие в направлении распространения волны (вдоль вектора  $k$ ) и в перпендикулярном направлении;  $V_0^{(z)}$  – вертикальная составляющая. Соответственно уравнения (2.41)–(2.43) и граничные условия (2.44)–(2.46) соответствуют компонентам уравнения движения и граничного условия в направлении волнового вектора, по вертикали и в горизонтальной плоскости перпендикулярно волновому вектору.

Как и в стационарном случае, эта краевая задача разбивается на две, соответствующие волнам Рэля и волнам Лява. Каждая из этих краевых задач определяет собственные значения

$$\omega = \omega_k(\xi, x, y) \quad (2.47)$$

и соответствующие им собственные функции ( $V_{0k}^{(\varphi)}(x, y, z)$  для волны Лява и  $V_{0k}^{(z)}(x, y, z)$ ,  $V^{(\tau)}(x, y, z)$  для волны Рэля), которые оказы-

ваются такими же, как и в случае горизонтально-однородной среды, в которой распределение упругих параметров с глубиной совпадает с вертикальным разрезом в данной точке  $x, y$ . Далее мы ограничимся рассмотрением распространения только одной моды и поэтому индекс  $k$  у собственных значений и собственных функций будем опускать.

Для нахождения фазовой функции  $\Theta(x, y, t)$  в данном случае удобно использовать метод характеристик (заметим, что в стационарном случае использование метода характеристик для определения функции  $\tau(x, y)$  приводит к уравнениям луча (2.12)). Для этого дисперсионное уравнение (2.47) представляется в форме уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} - \omega(x, y, \xi_x, \xi_y) = 0, \quad (2.48)$$

где зависимость  $\omega$  от  $x, y, \xi_x = -\partial\Theta/\partial x, \xi_y = -\partial\Theta/\partial y$  определяется соответствующей краевой задачей.

Характеристиками уравнения (2.48) являются кривые  $x = x(s), y = y(s), t = t(s)$ , в пространстве  $x, y, t$ . Они определяются из канонической системы, соответствующей уравнению Гамильтона–Якоби [10]:

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx}{ds} = \frac{\partial \omega}{\partial \xi_x}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\partial \omega}{\partial \xi_y}, \quad (2.49)$$

$$\frac{d\xi_x}{ds} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \frac{d\xi_y}{ds} = -\frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{d\omega}{ds} = 0.$$

Эти кривые называются пространственно-временными лучами (в отличие от обычных лучей, определяемых лучевым методом в реальном физическом пространстве  $x, y$  или  $x, y, z$ ).

Вектор  $\mathbf{U} = \{\partial\omega/\partial\xi_x, \partial\omega/\partial\xi_y\}$  называется вектором групповой скорости. В данном случае, как видно из (2.47),  $\omega$  зависит не от  $\xi_x, \xi_y$  по отдельности, а только от модуля волнового вектора  $\xi = \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}$ . Поэтому  $U_x = \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \xi_x} = U \frac{\xi_x}{\xi}, U_y = U \frac{\xi_y}{\xi}$  и, таким образом,

$$\mathbf{U} = U \mathbf{e}_r. \quad (2.50)$$

Рассмотрим теперь, чему равны производные  $\partial\omega/\partial x, \partial\omega/\partial y$ . Дифференцируя по  $x$  при постоянном  $\xi$  соотношение  $\omega(x, y, \xi) = \xi C(\omega, x, y)$ , получаем

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \xi \frac{\partial C}{\partial x} + \xi \frac{\partial C}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x},$$

откуда

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \left( \xi \frac{\partial C}{\partial x} \right) / \left( 1 - \frac{\omega}{C} \frac{\partial C}{\partial \omega} \right).$$



Из определения групповой скорости следует известное выражение

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{C} - \frac{\omega}{C^2} \frac{\partial C}{\partial \omega}.$$

Таким образом,  $\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\xi U}{C} \frac{\partial C}{\partial x}$  и соответственно  $\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\xi U}{C} \frac{\partial C}{\partial y}$ , следовательно, уравнения (2.49) могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} dr/ds &= U (r = x, y), & dt/ds &= 1, \\ d\xi/ds &= -U\xi \nabla C/C, & d\omega/ds &= 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Из (2.51) видно, что вдоль пространственно-временных лучей частота  $\omega$  остается постоянной, так что каждый луч характеризуется определенным значением  $\omega$ .

Выразим волновой вектор через вектор медленности  $\mathbf{k} = C^{-1} \mathbf{e}_r$  и учтем, что  $ds = dt$ . В результате мы придем к уравнениям, определяющим траектории в плоскости  $x, y$ , по которым происходит распространение составляющей гармонического волнового пакета с частотой  $\omega$ :

$$d\mathbf{r}/dt = U\mathbf{k}, \quad d\mathbf{k}/dt = -U\nabla C/C^2. \quad (2.52)$$

Из сравнения (2.52) с (2.12) видно, что составляющая волнового пакета распространяется вдоль той же траектории, что и стационарная гармоническая волна той же частоты, но не с фазовой  $C$ , а с групповой скоростью  $U$ .

Для решения системы (2.52) должны быть заданы начальные данные. Если рассматривается распространение волн от точечного источника, то начальными данными будут  $x = y = 0$  при  $t = 0$  и  $k_x = k_x^0$ ,  $k_y = k_y^0$ . Последние два условия предполагают задание частоты и азимута выхода волны из источника  $\varphi$ , так как  $k_x^0 = \cos \varphi / C_0(\omega)$ ,  $k_y^0 = \sin \varphi / C_0(\omega)$ . Если система (2.52) интегрируется не от источника, а от некоторой поверхности, например от границы, на которой образуются отраженные и преломленные поверхностные волны, то начальными данными для расчета отраженного (преломленного) луча будут  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ,  $k_x = k_x^0$ ,  $k_y = k_y^0$  при  $t = t_0$ , где  $x_0, y_0$  — точка границы;  $k_x^0, k_y^0$  — составляющие вектора  $\mathbf{k}$  для соответствующей волны, которые могут быть определены из граничного условия для луча. Граничные условия для луча будут рассмотрены в § 2.5.

Теперь рассмотрим, как меняется амплитуда волнового пакета в процессе распространения. С этой целью, как и в случае стационарной волны, следует рассмотреть следующий член разложения в уравнениях движения и граничных условиях. При этом точно так же, как было сделано в предыдущем параграфе, необходимо рассматривать отдельно волны Рэлея и волны Лява.

**Волны Лява.** Аналогично предыдущему для нахождения уравнения, определяющего зависимость  $V_0^{(\varphi)}$  от горизонтальных координат, достаточно рассмотреть только горизонтальную компоненту уравнения и граничного условия, перпендикулярную волновому вектору. Полученная

краевая задача для компоненты  $V_1^{(\varphi)}$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} \epsilon l_3(V_1^{(\varphi)}) - i \left[ 2\rho\omega \frac{\partial V_0^{(\varphi)}}{\partial t} + \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} V_0^{(\varphi)} + \mu V_0^{(\varphi)} \operatorname{div}(\omega \mathbf{k}) + \right. \\ \left. + 2\mu\omega(\nabla_1 V_0^{(\varphi)}, \mathbf{k}) + \omega(\nabla_1 \mu, \mathbf{k}) V_0^{(\varphi)} \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\epsilon \frac{\partial V_1^{(\varphi)}}{\partial z} - i(\nabla \xi_0, \omega \mathbf{k}) V_0^{(\varphi)} = 0, \quad z = \xi_0, \quad (2.54)$$

$$V_1^{(\varphi)} \rightarrow \infty, \quad z \rightarrow \infty,$$

где  $\nabla_1 = \left( \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \right)$  – горизонтальный градиент.

Из сравнения (2.53) с (2.15) легко видеть, что последние три члена во втором слагаемом в (2.53) в точности соответствуют второму слагаемому в (2.15). Появление первых двух членов обусловлено тем, что в нестационарном случае, как уже упоминалось выше, и частота и амплитуда волны зависят от времени. При этом частота и амплитуда медленно меняются со временем – это изменение того же порядка, что и изменение амплитуды и упругих параметров с расстоянием, т.е.  $O(\epsilon)$ . Таким образом, второе слагаемое в (2.53) действительно будет иметь тот же порядок малости, что и первое слагаемое, т.е.  $O(\epsilon)$ . Граничное же условие (2.54) полностью совпадает с граничным условием (2.16).

Как и в случае стационарной волны Лява, условие разрешимости неоднородной краевой задачи (2.53), (2.54) на собственном числе может быть получено, если уравнение (2.53) умножить на  $V_0^{(\varphi)}$  и проинтегрировать по  $z$  от  $\xi_0$  до  $\infty$  с учетом граничного условия (2.54) и задачи (2.43), (2.46) для  $V_0^{(\varphi)}$ . При этом благодаря наличию в (2.53) членов, содержащих производные по времени, результат, естественно, будет отличен от того, который получен для стационарного случая. Уравнение для  $V_0^{(\varphi)}$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} -\mu(V_0^{(\varphi)})^2(\nabla \xi_0, \omega \mathbf{k}) + \operatorname{div} \omega \mathbf{k} \int_{\xi_0}^{\infty} \mu(V_0^{(\varphi)})^2 dz + \\ + 2 \int_{\xi_0}^{\infty} \mu(\nabla_1 V_0^{(\varphi)}, \omega \mathbf{k}) V_0^{(\varphi)} dz + \omega \int_{\xi_0}^{\infty} (\nabla_1 \mu, \mathbf{k}) (V_0^{(\varphi)})^2 dz + \\ + 2\omega \int_{\xi_0}^{\infty} \rho V_0^{(\varphi)} \frac{\partial V_0^{(\varphi)}}{\partial t} dz + \frac{\partial \omega}{\partial t} \int_{\xi_0}^{\infty} \rho (V_0^{(\varphi)})^2 dz = 0. \end{aligned} \quad (2.55)$$

По аналогии с (2.18) это уравнение можно записать в форме

$$\operatorname{div}(\omega \mathbf{k} \int_{\xi_0}^{\infty} \mu(V_0^{(\varphi)})^2 dz) + \frac{\partial}{\partial t} (\omega \int_{\xi_0}^{\infty} \rho (V_0^{(\varphi)})^2 dz) = 0. \quad (2.56)$$

Здесь дивергенция определена в пространстве  $x, y$ , т.е.

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}.$$

Величина  $\rho\omega^2(V_0^{(\varphi)})^2/2$  представляет собой плотность энергии в единицу времени в точке  $(x, y, z)$ . Интеграл по  $z$  от этой величины можно трактовать как плотность энергии поверхностной волны в точке  $(x, y)$ . Обозначим ее через  $S$ . Учтем выражение (1.45) для величины групповой скорости и (2.50) для вектора групповой скорости. Тогда (2.56) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\omega} S \right) + \operatorname{div} \left( \frac{1}{\omega} S \mathbf{U} \right) = 0. \quad (2.57)$$

Величина  $S\mathbf{U}$  является вектором плотности потока энергии. Учитывая, что на пространственно-временном луче частота  $\omega$  не меняется, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\omega} \right) + (\nabla_{\perp} \left( \frac{1}{\omega} \right), \mathbf{U}) = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\omega} \right) = 0,$$

и, следовательно, соотношение (2.57) может быть записано в форме закона сохранения энергии

$$\frac{dS}{ds} = \frac{dS}{\partial t} + \operatorname{div}(S\mathbf{U}) = 0. \quad (2.58)$$

Это уравнение по форме полностью совпадает с хорошо известным в гидромеханике уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{U}) = 0,$$

которое определяет изменение плотности жидкости вдоль линий тока и выражает закон сохранения массы любого индивидуального объема. Совершенно аналогично (2.58) выражает закон сохранения энергии и определяет характер изменения плотности энергии волны вдоль пространственно-временного луча.

Учитывая, что  $\operatorname{div}(S\mathbf{U}) = (\nabla_{\perp} S, \mathbf{U}) + S \operatorname{div} \mathbf{U}$ , можно (2.58) записать в виде

$$dS/ds + S \operatorname{div} \mathbf{U} = 0. \quad (2.59)$$

Рассмотрим, чему равна  $\operatorname{div} \mathbf{U} = \partial U_x/\partial x + \partial U_y/\partial y$ . Прежде всего заметим, что она равна дивергенции в трехмерном пространстве  $x, y, t$  вектора  $\mathbf{w} = (U_x, U_y, 1)$ . Для отличия будем обозначать трехмерную дивергенцию символом  $\operatorname{Div}$ . По определению,

$$\operatorname{Div} \mathbf{w} = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega} \iint_{\Sigma_{\Omega}} w_n dS, \quad (2.60)$$

где  $\Sigma_{\Omega}$  — поверхность, ограничивающая объем  $\Omega$ . В качестве объема  $\Omega$  выберем часть лучевой трубки (образованной пространственно-временными

лучами), ограниченную плоскостями  $t = \text{const}$  и  $t + dt = \text{const}$ . Интеграл по боковой поверхности трубки будет равен нулю, так как вектор  $\mathbf{w}$  является касательным к пространственно-временному лучу. На торцах трубки  $|\mathbf{w}_n| = 1$ , так как вектор групповой скорости  $\mathbf{U}$  расположен в плоскости  $x, y$ . Таким образом, интеграл (2.60) будет равен

$$\text{Div } \mathbf{w} = \frac{1}{d\Omega} [d\Sigma_1 - d\Sigma_2], \quad (2.61)$$

где  $d\Sigma_1, d\Sigma_2$  — площади верхнего и нижнего торцов элемента трубки;  $d\Omega$  — его объем.

Введем теперь геометрическое расхождение пространственно-временной лучевой трубки. С этой целью определим лучевые координаты: две координаты, определяющие луч в пространстве  $x, y, t$ , и время  $t = s$ , определяющее точку на луче. Поскольку, как было ранее указано, на пространственно-временном луче сохраняется постоянной частота  $\omega$ , то естественно в качестве одной из лучевых координат выбрать  $\omega$ , другая координата (обозначим ее  $\varphi$ ) — азимут выхода луча из источника. Если лучевая трубка ограничена лучами  $\varphi, \varphi + d\varphi$  и  $\omega, \omega + d\omega$ , то площадь сечения трубки плоскостью  $t = \text{const}$  будет равна  $J d\varphi d\omega$ , где

$$J = \frac{D(x, y)}{D(\varphi, \omega)} = \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \omega} - \frac{\partial x}{\partial \omega} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) \quad (2.62)$$

— якобиан преобразования от координат  $x, y$  к лучевым координатам  $\varphi, \omega$ . Иначе

$$J = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega} \right|. \quad (2.63)$$

Перейдем теперь к выражению (2.61). Очевидно, что объем элемента трубки равен  $J dt$ , а разность площадей торцов  $d\Sigma_1 - d\Sigma_2 = \frac{dJ}{ds} dt$ . Таким образом,

$$\text{Div } \mathbf{U} = \text{div } \mathbf{w} = \frac{1}{J} \frac{dJ}{ds} \quad (2.64)$$

и окончательно соотношение (2.59) может быть записано в виде

$$\frac{1}{J} \frac{d}{ds} (SJ) = 0. \quad (2.65)$$

Учитывая, что  $S = \int_{\xi_0}^{\infty} \rho(V_0^{(\varphi)}(z))^2 dz$ , можно записать выражение для амплитуды поверхностной волны Лява таким образом:

$$V_0^{(\varphi)}(x, y, z, t) = \frac{K_L(\varphi, \omega) V^{(3)}(z - \xi_0(x, y))}{\sqrt{J} \sqrt{\int_0^{\infty} \rho[V^{(3)}(z)]^2 dz}}, \quad (2.66)$$

где  $K_L(\varphi, \omega)$  — множитель, зависящий от спектрального состава и направленности излучения из источника.

Волны Рэлея. Вывод уравнений, определяющих амплитуду рэлеевской волны в нулевом приближении, совершенно аналогичен проведенному выше для волны Лява. Для компонент  $V_1^{(z)}$  и  $V_1^{(\tau)}$  мы получаем следующие уравнения и граничные условия:

$$\begin{aligned} \epsilon l_1(V_1^{(z)}, V_1^{(\tau)}) - i \left[ 2\rho\omega \frac{\partial V_0^{(\tau)}}{\partial t} + \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} V_0^{(\tau)} + \right. \\ \left. + 2\omega(\lambda + 2\mu)(\nabla_{\perp} V_0^{(\tau)}, \mathbf{k}) + (\lambda + 2\mu)V_0^{(\tau)} \operatorname{div}(\omega \mathbf{k}) + \right. \\ \left. + V_0^{(\tau)} \omega(\mathbf{k}, \nabla_{\perp}(\lambda + 2\mu)) \right] + C \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\mu \nabla_{\perp} V_0^{(z)}, \mathbf{k}) + \right. \\ \left. + \left( \nabla_{\perp} \left( \lambda \frac{\partial V_0^{(z)}}{\partial z} \right), \mathbf{k} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \epsilon l_2(V_1^{(z)}, V_1^{(\tau)}) - i \left[ 2\rho\omega \frac{\partial V_0^{(z)}}{\partial t} + \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} V_0^{(z)} + \mu V_0^{(z)} \operatorname{div}(\omega \mathbf{k}) + \right. \\ \left. + 2\mu\omega(\mathbf{k}, \nabla_{\perp} V_0^{(z)}) + \omega(\nabla_{\perp} \mu, \mathbf{k}) V_0^{(z)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda \operatorname{div}(V_0^{(\tau)} C \mathbf{k})) + \\ + \operatorname{div} \left( \mu C \mathbf{k} \frac{\partial V_0^{(\tau)}}{\partial z} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \mu \left[ \frac{\partial V_1^{(\tau)}}{\partial z} - i \frac{\omega}{C} V_1^{(z)} + (\nabla_{\perp} V_0^{(z)}, C \mathbf{k}) \right] - (\nabla_{\perp} \xi_0, \mathbf{k}) \left[ \lambda C \frac{\partial V_0^{(z)}}{\partial z} - \right. \\ \left. - i\omega(\lambda + 2\mu) V_0^{(\tau)} \right] = 0 \quad \text{при } z = \xi_0, \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_1^{(z)}}{\partial z} - i\lambda \frac{\omega}{C} V_1^{(\tau)} + \lambda \operatorname{div}(V_0^{(\tau)} C \mathbf{k}) - \\ - (\nabla_{\perp} \xi_0, \mathbf{k}) \left( \mu C \frac{\partial V_0^{(\tau)}}{\partial z} - i\omega\mu V_0^{(z)} \right) = 0 \quad \text{при } z = \xi_0, \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$V_1^{(z)} \rightarrow 0, \quad V_1^{(\tau)} \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (2.71)$$

Как и в предыдущем параграфе, для получения условия разрешимости этой краевой задачи умножим первое уравнение на  $V_0^{(\tau)*}$ , второе — на  $V_0^{(z)*}$ , проинтегрируем по  $z$  от  $\xi_0$  до  $\infty$ , сложим результаты почленно и, учитывая граничные условия (2.69)–(2.71), а также (2.41), (2.42), (2.44), (2.45), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \omega \int_{\xi_0}^{\infty} \rho \left( |V_0^{(z)}|^2 + |V_0^{(\tau)}|^2 \right) dz \right] + \operatorname{div} \left\{ \mathbf{k} [\omega(I_R^{(1)} + I_R^{(2)}) + \right. \\ \left. + C(I_R^{(3)} + I_R^{(4)})] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Если обозначить плотность энергии рэлеевской волны в точке  $(x, y)$  через  $S$ :

$$S \equiv \frac{\omega^2}{2} \int_{\xi_0}^{\infty} \rho \left( \left| V_0^{(z)} \right|^2 + \left| V_0^{(\tau)} \right|^2 \right) dz \quad (2.73)$$

и учесть интегральное выражение для групповой скорости (1.45), то легко видеть, что (2.72) можно записать в форме (2.57) или (2.58). Дальнейшие рассуждения проводятся точно так же, как и для волн Лява. Окончательно выражение, описывающее изменение вектора смещения в рэлеевской волне вдоль пространственно-временного луча, будет иметь вид, аналогичный (2.66):

$$(V_0^{(z)}, V_0^{(\tau)}) = \frac{K_R(\varphi, \omega) (V^{(1)}(z - \xi_0), iV^{(2)}(z - \xi_0))}{\sqrt{J} \left\{ \int_0^{\infty} \rho [(V^{(1)}(z))^2 + (V^{(2)}(z))^2] dz \right\}^{1/2}}, \quad (2.74)$$

где  $V^{(1)}, V^{(2)}$  – компоненты векторной собственной функции одномерной задачи для волны Рэлея, соответствующей распределению упругих постоянных с глубиной в точке  $(x, y)$ .

#### § 2.4. Метод расчета геометрического расхождения пространственно-временных лучей

Методика вычисления геометрического расхождения пространственно-временных лучей во многом сходна с методикой расчета пространственных лучей недиспергирующих объемных волн [2, 179]. Геометрическое расхождение  $J$  определено в § 2.3 формулой (2.63). Как и в обычном лучевом методе, векторы  $Q^{(\varphi)} = \partial \mathbf{r} / \partial \varphi$  и  $Q^{\omega} = \partial \mathbf{r} / \partial \omega$  вычисляются численным интегрированием системы дифференциальных уравнений вдоль лучей. Для вывода такой системы введем дополнительные векторы  $P^{\varphi} = \partial \mathbf{k} / \partial \varphi$  и  $P^{\omega} = \partial \mathbf{k} / \partial \omega$ . Продифференцируем уравнения луча (2.52) отдельно по  $\varphi$  и  $\omega$ :

$$\frac{dQ^{\varphi}}{dt} = \left( C \frac{\partial U}{\partial \varphi} + U \frac{\partial C}{\partial \varphi} \right) \mathbf{k} + UC P^{\varphi}, \quad (2.75)$$

$$\frac{dP^{\varphi}}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} \nabla \left( \frac{1}{C} \right) + U \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \nabla \frac{1}{C} \right),$$

$$\frac{dQ^{\omega}}{dt} = \left( C \frac{\partial U}{\partial \omega} + U \frac{\partial C}{\partial \omega} \right) \mathbf{k} + UC P^{\omega},$$

$$\frac{dP^{\omega}}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \omega} \nabla \left( \frac{1}{C} \right) + U \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \nabla \frac{1}{C} \right). \quad (2.76)$$

Введем в плоскости  $x, y$  систему координат, связанную с лучом: ось  $q_2$  направим вдоль луча, а ось  $q_1$  — перпендикулярно лучу. Поскольку векторы  $\mathbf{r} = \{x, y\}$  и  $\mathbf{k} = \{k_x, k_y\}$  расположены в плоскости  $x, y$ , то очевидно, что и векторы  $\mathbf{Q}^{\varphi(\omega)}$ ,  $\mathbf{P}^{\varphi(\omega)}$  расположены в этой же плоскости. Обозначим

$$\mathbf{Q}^{\varphi(\omega)} = Q_1^{\varphi(\omega)} \mathbf{e}_1 + Q_2^{\varphi(\omega)} \mathbf{e}_2, \quad (2.77)$$

$$\mathbf{P}^{\varphi(\omega)} = P_1^{\varphi(\omega)} \mathbf{e}_1 + P_2^{\varphi(\omega)} \mathbf{e}_2,$$

где  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  — единичные векторы в направлении осей  $q_1, q_2$ .

Теперь составим систему уравнений для координат векторов  $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$  (индексы  $\varphi(\omega)$  будем пока опускать). Учтем, что

$$Q_1 = (\mathbf{Q}, \mathbf{e}_1), \quad Q_2 = (\mathbf{Q}, \mathbf{e}_2), \quad (2.78)$$

$$P_1 = (\mathbf{P}, \mathbf{e}_1), \quad P_2 = (\mathbf{P}, \mathbf{e}_2).$$

Из соотношения  $(\mathbf{k}, \mathbf{e}_1) = 0$  легко вывести, чему равны производные единичных векторов  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  по  $t$ , т.е. вдоль луча:

$$\left( \frac{d\mathbf{k}}{dt}, \mathbf{e}_1 \right) + \left( \mathbf{k}, \frac{d\mathbf{e}_1}{dt} \right) = 0, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{U}{C^2} \nabla C, \quad (2.79)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} \mathbf{e}_2, \quad \frac{d\mathbf{e}_2}{dt} = -\frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} \mathbf{e}_1.$$

Продифференцируем (2.78) по  $t$  и учтем (2.75), (2.76) и (2.79):

$$\frac{dQ_1}{dt} = UCP_1 + \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} Q_2, \quad (2.80a)$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = \left( C \frac{\partial U}{\partial \beta} + U \frac{\partial C}{\partial \beta} \right) \frac{1}{C} + UCP_2 - \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} Q_1, \quad (2.80б)$$

$$\frac{dP_1}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{U}{C^2} \right) \frac{\partial C}{\partial q_1} - \frac{U}{C^2} \left( \frac{\partial \nabla C}{\partial \beta}, \mathbf{e}_1 \right) + P_2 \frac{\partial C}{\partial q_1} \frac{U}{C}, \quad (2.80в)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{U}{C^2} \right) \frac{\partial C}{\partial q_2} - \frac{U}{C^2} \left( \frac{\partial \nabla C}{\partial \beta}, \mathbf{e}_2 \right) - P_1 \frac{\partial C}{\partial q_1} \frac{U}{C} \quad (2.80г)$$

Здесь  $\partial/\partial\beta$  обозначает дифференцирование либо по  $\varphi$ , либо по  $\omega$ . Сначала рассмотрим систему уравнений, соответствующую  $\mathbf{P}^{\varphi}, \mathbf{Q}^{\varphi}$ . Учтем, что производная по  $\varphi$  может быть выражена следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = Q_1^{\varphi} \frac{\partial}{\partial q_1} + Q_2^{\varphi} \frac{\partial}{\partial q_2}.$$

Уравнения (2.80a) и (2.80б) примут вид:

$$\frac{dQ_1^{\varphi}}{dt} = UCP_1^{\varphi} + \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} Q_2^{\varphi}, \quad (2.81a)$$

$$\frac{dQ_2^\varphi}{dt} = Q_1^\varphi \frac{\partial U}{\partial q_1} + Q_2^\varphi \left[ \frac{\partial U}{\partial q_2} + \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_2} \right] + UCP_2^\varphi. \quad (2.81б)$$

При преобразовании следующих двух уравнений системы учтем, что выполняются следующие соотношения:

$$\frac{\partial \nabla C}{\partial \varphi} = Q_1^\varphi \frac{\partial \nabla C}{\partial q_1} + Q_2^\varphi \frac{\partial \nabla C}{\partial q_2},$$

$$\left( \frac{\partial \nabla C}{\partial \varphi}, e_1 \right) = Q_1^\varphi \frac{\partial^2 C}{\partial q_1^2} + Q_2^\varphi \frac{\partial^2 C}{\partial q_1 \partial q_2},$$

$$\left( \frac{\partial \nabla C}{\partial \varphi}, e_2 \right) = Q_1^\varphi \frac{\partial^2 C}{\partial q_1 \partial q_2} + Q_2^\varphi \frac{\partial^2 C}{\partial q_2^2}.$$

Подстановка этих соотношений в (2.80в), (2.80г) приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{dP_1^\varphi}{dt} &= Q_1^\varphi \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( U \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{1}{C} \right) \right) \right] + Q_2^\varphi \frac{\partial}{\partial q_2} \left( U \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{1}{C} \right) \right) + \\ &+ \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} P_2^\varphi, \end{aligned} \quad (2.81в)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_2^\varphi}{dt} &= Q_1^\varphi \frac{\partial}{\partial q_1} \left( U \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{1}{C} \right) \right) + Q_2^\varphi \frac{\partial}{\partial q_2} \left( U \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{1}{C} \right) \right) - \\ &- \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} P_1^\varphi. \end{aligned} \quad (2.81г)$$

Уравнения (2.81а)–(2.81г) образуют систему для нахождения неизвестных функций  $Q_1^\varphi$ ,  $Q_2^\varphi$ ,  $P_1^\varphi$ ,  $P_2^\varphi$ . Можно, однако, показать, что одно из уравнений является лишним, так как между  $P_2^\varphi$ ,  $Q_1^\varphi$ ,  $Q_2^\varphi$  существует связь, аналогичная той, которая имеет место для обычных пространственных лучей [2]:

$$P_2 = -\frac{1}{C^2} \frac{\partial C}{\partial \varphi} = -\frac{1}{C^2} \left( Q_1 \frac{\partial C}{\partial q_1} + Q_2 \frac{\partial C}{\partial q_2} \right). \quad (2.82)$$

При дифференцировании по  $\varphi$  величина  $\omega$  остается постоянной, т.е.  $\partial \omega / \partial \varphi = 0$ . Поскольку  $\omega = \omega(\xi, x, y)$ , то

$$\frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (2.83)$$

Учитывая, что  $\partial \omega / \partial \xi = U$ ,  $\partial \xi / \partial \varphi = \omega \partial k / \partial \varphi = \omega P_2$ , а  $\omega = \xi C(\omega, x, y)$ , получаем

$$U\omega P_2^\varphi + \omega k \left( \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0$$



или

$$P_2^\varphi = -\frac{1}{C^2} \frac{\partial C}{\partial \varphi} = -\frac{1}{C^2} \left( Q_1^\varphi \frac{\partial C}{\partial q_1} + Q_2^\varphi \frac{\partial C}{\partial q_2} \right). \quad (2.84)$$

Подставим теперь (2.84) в уравнения (2.81б), (2.81в). В результате получим окончательно систему уравнений для определения  $Q_1^\varphi$ ,  $Q_2^\varphi$ ,  $P_1^\varphi$ :

$$\begin{aligned} \frac{dQ_1^\varphi}{dt} &= UCP_1^\varphi + \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} Q_2^\varphi, \\ \frac{dQ_2^\varphi}{dt} &= Q_1^\varphi C \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{U}{C} \right) + Q_2^\varphi \frac{\partial U}{\partial q_2}, \\ \frac{dP_1^\varphi}{dt} &= -Q_1^\varphi \left[ \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} \right) \right] - Q_2^\varphi \left[ \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.85)$$

которая должна решаться при следующих начальных данных в источнике:

$$Q_1^\varphi = Q_2^\varphi = 0, \quad P_1^\varphi = C_0^{-1}. \quad (2.86)$$

Теперь построим систему уравнений для нахождения  $Q^\omega$  и  $P^\omega$ . Отличие ее от системы для  $Q^\varphi$ ,  $P^\varphi$  будет обусловлено тем, что изменение  $C$ ,  $U$  и  $\nabla C$  при переходе от луча, соответствующего  $\omega$ , к лучу, соответствующему  $\omega + d\omega$ , будет происходить не только за счет перемещения в точку  $x + dx$ ,  $y + dy$ , но и за счет того, что скорость непосредственно зависит от частоты. При этом уравнения (2.76) преобразуются следующим образом:

$$\frac{dQ_1^\omega}{dt} = UCP_1^\omega + \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} Q_2^\omega, \quad (2.87a)$$

$$\frac{dQ_2^\omega}{dt} = Q_1^\omega \frac{\partial U}{\partial q_1} + Q_2^\omega \left[ \frac{\partial U}{\partial q_2} + \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_2} \right] + UCP_2^\omega + \frac{\partial U}{\partial \omega} + \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial \omega}, \quad (2.87б)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_1^\omega}{dt} &= Q_1^\omega \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( U \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{1}{C} \right) \right) \right] + Q_2^\omega \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} \left( U \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{1}{C} \right) \right) \right] + \\ &+ \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} P_2^\omega - \frac{1}{C^2} \frac{\partial C}{\partial q_1} \frac{\partial U}{\partial \omega} - \frac{U}{C^2} \left( \frac{\partial \nabla C}{\partial \omega}, e_1 \right) + \frac{2U}{C^3} \frac{\partial C}{\partial \omega} \frac{\partial C}{\partial q_1}, \end{aligned} \quad (2.87в)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_2^\omega}{dt} &= Q_1^\omega \frac{\partial}{\partial q_1} \left( U \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{1}{C} \right) \right) + Q_2^\omega \frac{\partial}{\partial q_2} \left( U \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{1}{C} \right) \right) - \\ &- \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} P_1^\omega - \frac{1}{C^2} \frac{\partial C}{\partial q_2} \frac{\partial U}{\partial \omega} - \frac{U}{C^2} \left( \frac{\partial \nabla C}{\partial \omega}, e_2 \right) + \frac{2U}{C^3} \frac{\partial C}{\partial \omega} \frac{\partial C}{\partial q_1}. \end{aligned} \quad (2.87г)$$

В этом случае также можно выразить  $P_2^\omega$  через  $Q_1^\omega$ ,  $Q_2^\omega$ .

Дифференцируя по  $\omega$  функцию  $\omega(\xi, x, y)$ , будем иметь

$$\frac{\partial \omega}{\partial \omega} = \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \omega} + \frac{\xi U}{C} \frac{\partial C}{\partial \omega'} = 1, \quad (2.88)$$

где  $\partial/\partial \omega'$  означает дифференцирование по  $\omega$ , связанное только с изменением координат:

$$\frac{\partial}{\partial \omega'} = Q_1^\omega \frac{\partial}{\partial q_1} + Q_2^\omega \frac{\partial}{\partial q_2}.$$

Учитывая, что  $\xi = \omega k$ , можно записать (2.88) в виде

$$U(\omega P_2^\omega + k) + \frac{U}{C} \omega k \frac{\partial C}{\partial \omega'} = 1 \quad (2.89)$$

или

$$U P_2^\omega + k \frac{\partial C}{\partial \omega'} = -\frac{U}{C^2} \frac{\partial C}{\partial \omega}. \quad (2.90)$$

Таким образом, получаем выражение для  $P_2^\omega$ , аналогичное (2.84):

$$P_2^\omega = -\frac{1}{C^2} \left( \frac{\partial C}{\partial q_1} Q_1^\omega + \frac{\partial C}{\partial q_2} Q_2^\omega \right) - \frac{1}{C^2} \frac{\partial C}{\partial \omega}. \quad (2.91)$$

Подставляя (2.91) в уравнения (2.87б), (2.87в), окончательно будем иметь следующую систему трех уравнений для определения  $Q_1^\omega, Q_2^\omega, P_1^\omega$ :

$$\frac{dQ_1^\omega}{dt} = U C P_1^\omega + \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} Q_2^\omega, \quad (2.92a)$$

$$\frac{dQ_2^\omega}{dt} = Q_1^\omega C \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{U}{C} \right) + Q_2^\omega \left[ \frac{\partial U}{\partial q_2} \right] + \frac{\partial U}{\partial \omega}, \quad (2.92б)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_1^\omega}{dt} = & -Q_1^\omega \left[ \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} \right) \right] - Q_2^\omega \left[ \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{C^2} \frac{\partial U}{\partial \omega} \frac{\partial C}{\partial q_1} - \frac{U}{C} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial \omega} \right). \end{aligned} \quad (2.92в)$$

Эта система решается при нулевых начальных данных в источнике:  $Q_1^\omega = Q_2^\omega = P_1^\omega = 0$  при  $x = 0, y = 0, t = 0$ .

Заметим, что из найденных соотношений легко выводится (с точностью до постоянного множителя) формула, определяющая поле нестационарной поверхностной волны в горизонтально-однородном полупространстве, полученная в гл. 1 методом стационарной фазы (см. формулу (1.56)). В этом случае ( $C = \text{const}$ ) из системы (2.85) следует  $P_1^\omega = C^{-1}, Q_1^\omega = Ut = r, Q_2^\omega = 0$ , а решением системы (2.92) будут функции  $P_1^\omega = 0, Q_1^\omega = 0$ ,

$Q_2^\omega = \frac{dU}{d\omega} t = \frac{dU}{d\omega} \frac{r}{U}$ . Таким образом, геометрическое расхождение прост-

ранственно-временных лучей определяется произведением двух сомножителей: один ( $Q_1^\varphi$ ) выражает расхождение трасс поверхностных волн на плоскости  $x, y$ , а другой ( $Q_2^\omega$ ) — растягивание волнового пакета во времени за счет дисперсии.

### § 2.5. Отражение и преломление пространственно-временных лучей на границе

Если в среде имеется граница раздела (в плане она может быть криволинейной), на ней будут происходить отражение и преломление поверхностных волн так же, как это имеет место в случае объемных волн. Кроме того, на границе будет происходить перераспределение энергии падающей волны в поверхностные отраженные и преломленные, а также в объемные волны (эти явления, связанные с необходимостью выполнения на границе условий непрерывности напряжений и смещений, будут освещены в гл. 3). На границе также будет происходить преломление и отражение лучевой трубки, соответственно будут претерпевать разрыв геометрическое расхождение и определяющие его функции  $Q_1^\varphi, Q_2^\varphi, Q_1^\omega, Q_2^\omega$ . Выведем условия, связывающие эти величины, соответствующие отраженным и преломленным волнам, с теми, которые относятся к падающей волне в точках границы.

Предварительно необходимо вывести граничные условия для пространственно-временного луча.

Определим в среде границу раздела  $S$  уравнением  $f(x, y) = 0$ . В пространстве  $x, y, t$  это будет цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси  $t$ . Очевидно, что на этой поверхности функция  $\Theta(x, y, t)$  должна быть непрерывна. Из этого условия сразу следует непрерывность  $r$  и  $t$  на лучах и непрерывность производной  $\Theta$ , взятой по любому направлению вдоль поверхности  $S$ . Последнее условие означает непрерывность вектора  $\mathbf{g} = \nabla\Theta - \mathbf{n}(\nabla\Theta, \mathbf{n})$ , где  $\mathbf{n}(n_x, n_y)$  — единичный вектор нормали к поверхности, а

$$\nabla\Theta = \left( \frac{\partial\Theta}{\partial x}, \frac{\partial\Theta}{\partial y}, \frac{\partial\Theta}{\partial z} \right) = (-\xi_x, -\xi_y, \omega).$$

Введем координаты  $n, \eta$  в плоскости  $x, y$  в каждой точке поверхности  $S$ :  $n$  — по нормали к границе  $f(x, y) = 0$ ,  $\eta$  — по касательной. Направление оси  $\eta$  фиксируем условием  $(\mathbf{k}, \mathbf{e}_\eta) = \frac{\sin\theta}{C} > 0$ , так что ось  $\eta$  направлена в сторону распространения волны (рис. 2.2). Из условия непрерывности  $\mathbf{g}$  следует, во-первых, непрерывность  $\omega$ , во-вторых, непрерывность вектора  $\mathbf{k} - \mathbf{n}(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = \mathbf{e}_\eta(\mathbf{k}, \mathbf{e}_\eta)$ . Поскольку  $(\mathbf{k}, \mathbf{e}_\eta) = \sin\theta/C$ , то это означает, что как и в случае обычных пространственных лучей, имеет место закон Снеллиуса

$$\frac{\sin\theta^\nu}{C^\nu(\omega)} = \frac{\sin\theta^0}{C^0(\omega)}. \quad (2.93)$$

Здесь и далее значок  $\nu$  будет относиться к образованной на границе волне (отраженной или преломленной), а 0 — к падающей. Добавление в дан-

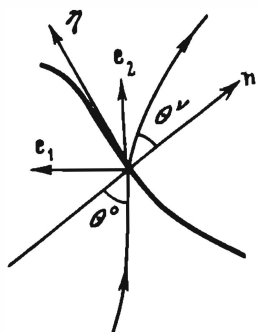


Рис. 2.2. Схема координатных осей, связанных с границей  $s(n, \eta)$ , и ортов  $e_1, e_2$ , связанных с лучом

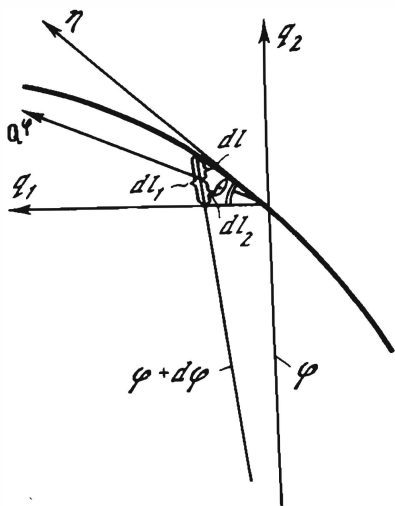


Рис. 2.3. Схема лучей, иллюстрирующая вывод формулы (2.97)

ном случае временной координаты приводит к дополнительному условию

$$\omega^\nu = \omega^0. \quad (2.94)$$

Теперь рассмотрим граничные условия для функций, определяющих геометрическое расхождение пространственно-временных лучей. Выведем вначале условия для  $Q_1^\varphi, Q_2^\varphi, P_1^\varphi$ . Очевидно, что в силу непрерывности  $\tau$  на  $S$  должна иметь место и непрерывность  $(\partial\tau/\partial\varphi)_S$ . Нетрудно видеть, что

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial\varphi}\right)_S = e_\eta \frac{Q_1}{(e_1, e_\eta)}, \quad (2.95)$$

и, таким образом, непрерывность  $(\partial\tau/\partial\varphi)_S$  сводится к следующему:

$$(Q_1^\varphi)^\nu / (e_1^\nu, e_\eta) = (Q_1^\varphi)^0 / (e_1^0, e_\eta). \quad (2.96)$$

Условие на  $Q_2$  выводится из условия непрерывности  $t$ , из которого следует непрерывность  $(\partial t/\partial\varphi)_S$ . Выражение для  $(\partial t/\partial\varphi)_S$  легко вывести, если обратиться к рис. 2.3:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial\varphi}\right)_S = \frac{1}{U} \frac{\partial l}{\partial\varphi} = \frac{1}{U} \left( \frac{\partial l_1}{\partial\varphi} - \frac{\partial l_2}{\partial\varphi} \right) = \frac{1}{U} \left( \frac{Q_1^\varphi \sin\theta}{(e_1, e_\eta)} - Q_2^\varphi \right). \quad (2.97)$$

Таким образом, второе граничное условие будет иметь вид

$$(Q_1^\varphi)^\nu \frac{\sin\theta^\nu}{U^\nu (e_1^\nu, e_\eta)} - \frac{(Q_2^\varphi)^\nu}{U^\nu} = \frac{(Q_1^\varphi)^0 \sin\theta^0}{U^0 (e_1^0, e_\eta)} - \frac{(Q_2^\varphi)^0}{U^0}. \quad (2.98)$$

Условие, связывающее функции  $P_1^\varphi$  для падающей и образованной границе волн, выводится из непрерывности вектора  $\mathbf{g}$ , которое означает и непрерывность  $(\partial\mathbf{g}/\partial\varphi)_S$ . Учтем, что  $\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)_S = \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)_t + \left(\frac{\partial t}{\partial\varphi}\right)_S \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\varphi$ ,

и рассмотрим компоненту  $(\partial \mathbf{g}/\partial \varphi)_S$  по оси  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \left( \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varphi} \right)_S, \mathbf{e}_\eta \right) = \omega \left\{ \left( \left( \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} \right)_I, \mathbf{e}_\eta \right) + \left( \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right)_S \left( \left( \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} \right)_\varphi, \mathbf{e}_\eta \right) - \right. \\ \left. - \left( \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \varphi} \right)_S, \mathbf{e}_\eta \right) (\mathbf{k}, \mathbf{n}) - (\mathbf{n}, \mathbf{e}_\eta) \left[ \left( \left( \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} \right)_S, \mathbf{n} \right) + \left( \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \varphi} \right)_S, \mathbf{k} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Выполняя преобразования, аналогичные тем, которые приведены в [2], получаем

$$\begin{aligned} \left( \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varphi} \right)_S, \mathbf{e}_\eta \right) = P_1^\varphi (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_\eta) + P_2^\varphi \sin \theta - \frac{1}{C^2} \left( \frac{Q_1^\varphi \sin \theta}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_\eta)} - Q_2^\varphi \right) \frac{\partial C}{\partial \eta} + \\ + \frac{2(\mathbf{e}_2, \mathbf{n}) D Q_1^\varphi}{C(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_\eta)}, \end{aligned} \quad (2.100)$$

где  $D$  определяет кривизну границы в точке падения луча

$$D = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial \eta^2}. \quad (2.101)$$

С учетом выражения (2.84) для  $P_2^\varphi$  получим, что на границе должно выполняться условие

$$\begin{aligned} (Q_1^\varphi)^\nu \left[ -\frac{\sin \theta^\nu}{(C^\nu)^2} \left( \left( \frac{\partial C}{\partial q_1} \right)^\nu + \frac{1}{(\mathbf{e}_1^\nu, \mathbf{e}_\eta)} \frac{\partial C^\nu}{\partial \eta} \right) + \frac{2D(\mathbf{e}_2^\nu, \mathbf{n})}{C^\nu(\mathbf{e}_1^\nu, \mathbf{e}_\eta)} \right] + \\ + (Q_2^\varphi)^\nu \frac{1}{(C^\nu)^2} \left[ -\sin \theta^\nu \left( \left( \frac{\partial C}{\partial q_2} \right)^\nu + \frac{\partial C^\nu}{\partial \eta} \right) + (P_1^\varphi)^\nu (\mathbf{e}_1^\nu, \mathbf{e}_\eta) \right] = \\ = (Q_1^\varphi)^0 \left[ -\frac{\sin \theta^0}{(C^0)^2} \left( \left( \frac{\partial C}{\partial q_1} \right)^0 + \frac{1}{(\mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_\eta)} \frac{\partial C^0}{\partial \eta} \right) + \frac{2D(\mathbf{e}_2^0, \mathbf{n})}{C^0(\mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_\eta)} \right] + \\ + (Q_2^\varphi)^0 \frac{1}{(C^0)^2} \left[ -\sin \theta^0 \left( \left( \frac{\partial C}{\partial q_2} \right)^0 + \frac{\partial C^0}{\partial \eta} \right) + (P_1^\varphi)^0 (\mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_\eta) \right]. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Условия (2.96), (2.98) и (2.102) могут быть компактно записаны в матричной форме:

$$\mathbf{M}^\nu \mathbf{R}_\varphi^\nu = \mathbf{M}^0 \mathbf{R}_\varphi^0, \quad (2.103)$$

где  $\mathbf{R}_\varphi$  – вектор с компонентами  $Q_1^\varphi$ ,  $Q_2^\varphi$ ,  $P_1^\varphi$ ;  $\mathbf{M}$  – матрица

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{1}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_\eta)} & 0 & 0 \\ \frac{\sin \theta}{U(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_\eta)} & -1/U & 0 \\ -\frac{\sin \theta}{C^2} \left( \frac{\partial C}{\partial q_1} + \frac{1}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_\eta)} \frac{\partial C}{\partial \eta} \right) + \frac{2D(\mathbf{e}_2, \mathbf{n})}{C(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_\eta)} & \frac{1}{C^2} \left( -\sin \theta \left( \frac{\partial C}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial C}{\partial \eta} \right) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_\eta) \end{array} \right\| \quad (2.104)$$

Теперь рассмотрим условия для функций  $Q_1^\omega$ ,  $Q_2^\omega$ ,  $P_1^\omega$ . Очевидно, что первые два условия будут точно такими же, как для  $Q_1^\varphi$ ,  $Q_2^\varphi$ . Выраже-

ние для  $((\partial g/\partial \omega)_S, e_\eta)$  будет иметь также вид (2.100). Однако, здесь надо учесть, что выражение для  $P_2^\omega$  (формула (2.91)) будет иметь дополнительный член, содержащий производную по  $\omega$ . Поэтому в третьем условии, аналогичном (2.102), в правой и левой частях появятся дополнительные слагаемые вида

$$-\frac{\sin \theta}{C^2} \frac{\partial C}{\partial \omega} = \sin \theta \left( \frac{1}{U} - \frac{1}{C} \right).$$

Учитывая непрерывность  $\sin \theta/C$ , достаточно к правой и левой частям (2.102) добавить только  $\sin \theta^{(0)}/U^{(0)}$ .

## § 2.6. Пространственно-временные лучи и геометрическое расхождение в сферическом случае

В § 1.5 показано, что приближенное решение, соответствующее полю поверхностных волн в радиально-неоднородном шаре, описывает систему волн, распространяющихся вдоль дуг большого круга (формула (1.36)), т.е. решение для стационарной волны описывается выражениями типа

$$V(R, \theta, t) = \frac{1}{\sqrt{R_0 \sin \theta}} \Phi(R, \omega) \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{R_0 \theta}{C(\omega)} \right) \right], \quad (2.105)$$

где  $\theta$  — угловое эпицентральное расстояние;  $R_0$  — радиус шара. Функция  $\Phi(R, \omega)$  описывает распределение амплитуды волны вдоль радиуса, причем для достаточно высоких частот она совпадает с собственной функцией соответствующей моды в полупространстве. Дисперсионное уравнение при этом будет также совпадать с тем, которое имеет место для полупространства. Однако затухание волны, обусловленное геометрическим расхождением лучей, будет существенно различаться для шара и полупространства: в полупространстве стационарная волна затухает как  $1/\sqrt{r}$ , а в шаре — как  $1/\sqrt{R_0 \sin \theta}$ .

Здесь мы не будем рассматривать полностью построение решения для латерально-неоднородного шара, а ограничимся только рассмотрением эффекта, связанного с геометрическим расхождением пространственно-временных лучей. Если длина поверхностной волны много меньше радиуса шара, собственные значения и собственные функции будут в каждой точке шара такими же, как и в латерально однородном шаре, имеющем распределение упругих параметров по радиусу, соответствующее данной точке с координатами  $\theta, \varphi$ .

Рассмотрение будем проводить аналогично предыдущему в рамках пространственно-временного лучевого метода. Поле будем описывать в форме, аналогичной (2.37):

$$u(R, \theta, \varphi, t) = \sum_j \epsilon^j u_j(R, \epsilon\theta, \epsilon\varphi, \epsilon t) \exp [i\Theta(\theta, \varphi, t)]. \quad (2.106)$$

Здесь фазовая функция  $\Theta(t, \theta, \varphi)$  такова, что

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \omega(t, \theta, \varphi), \quad \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} = -\xi_\theta, \quad \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} = -\xi_\varphi.$$

Пространственно-временные лучи будем строить так же, как и в случае полупространства. Дисперсионное уравнение  $\omega = \omega(\theta, \varphi, \xi)$ , которое, вообще говоря, должно соответствовать сферическому случаю и только при достаточно высоких частотах может быть принято таким, как для полупространства, представим в форме

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} - \omega(\theta, \varphi, \xi_\theta, \xi_\varphi) = 0. \quad (2.107)$$

Отличие от решения в декартовых координатах будет заключаться в том, что когда мы выразим  $\xi_\theta, \xi_\varphi$  через частные производные функции  $\Theta$  по координатам  $\theta, \varphi$ , уравнение (2.107) в форме Гамильтона–Якоби будет иметь вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} - \omega\left(\theta, \varphi, \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}, \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}\right) = 0, \quad (2.108)$$

так что каноническая система, определяющая характеристики этого уравнения, будет

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_\theta}, \quad \frac{d(R \xi_\theta)}{ds} = -\left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega}{\partial \xi_\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}\right)\right), \quad (2.109)$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_\varphi}, \quad \frac{d(R \sin \theta \xi_\varphi)}{ds} = -\frac{\partial \omega}{\partial \varphi}, \quad \frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{d\omega}{ds} = 0.$$

После элементарных преобразований эта система сводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{U}{R} \frac{\xi_\theta}{\xi}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{U}{R \sin \theta} \frac{\xi_\varphi}{\xi}, \\ \frac{d\xi_\theta}{dt} &= -\frac{U\xi}{RC} \frac{\partial C}{\partial \theta} - \frac{U}{\xi R} \frac{\xi_\varphi^2}{\operatorname{tg} \theta}, \\ \frac{d\xi_\varphi}{dt} &= -\frac{U\xi}{RC \sin \theta} \frac{\partial C}{\partial \varphi} - \frac{U\xi_\theta \xi_\varphi}{R \xi \operatorname{tg} \theta}. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Система уравнений (2.110) описывает лучи на сферической поверхности. Для получения системы уравнений, определяющих геометрическое расхождение, эту систему удобнее преобразовать к векторной форме, чтобы иметь возможность выполнить преобразования, аналогичные описанным в § 2.4.

Введем, как и ранее, волновой вектор медленности  $\mathbf{k} = k_\theta \mathbf{e}_\theta + k_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ . Нетрудно показать, что система (2.110) сводится к системе, совершенно

аналогичной по форме системе (2.52) :

$$d\mathbf{r}/dt = UC\mathbf{k}, d\mathbf{k}/dt = U\nabla(1/C), \quad (2.111)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки на сферической поверхности радиуса  $R$ . Здесь следует иметь в виду, что вектор  $\mathbf{k}$  в отличие от предыдущего случая, уже является трехмерным, т.е. при движении вдоль луча он не остается в одной плоскости, и, следовательно,  $d\mathbf{k}/dt$  будет иметь все три компоненты. Соответственно следует считать, что фазовая скорость  $C$  зависит не только от координат  $\theta, \varphi$ , но и от радиуса  $R$ . Действительно, во всех точках вдоль радиуса волна распространяется с одной и той же угловой скоростью  $C(\theta, \varphi)/R_0$ , где  $C(\theta, \varphi)$  — линейная скорость волны на поверхности шара  $R = R_0$  (ср. формулу (2.105)), так что линейная скорость волны в разных точках, расположенных вдоль одного и того же радиуса, будет разной, равной соответственно  $C(\theta, \varphi)R/R_0$ . Поэтому правую часть второго уравнения (2.111) можно записать иначе:

$$U\nabla_{\theta, \varphi} \left( \frac{1}{C} \right) - \frac{U\mathbf{e}_R}{CR_0},$$

где  $U = U(\theta, \varphi)$ ;  $C = C(\theta, \varphi)$ .

Теперь, исходя из системы уравнений пространственно-временных лучей в форме (2.111), выведем уравнения для определения геометрического расхождения. Аналогично предыдущему введем координаты  $q_1, q_2$ , связанные с лучом, в плоскости, касательной к поверхности шара в данной точке луча. Параметрами, определяющими луч, будем считать азимут  $\varphi_0$  выхода луча из источника, который поместим в полюсе шара, и частоту  $\omega$ . Геометрическое расхождение, как и ранее, будет определяться формулой (2.63).

Будем теперь считать, что  $R = R_0$ , и введем аналогично предыдущему векторы  $\mathbf{Q}^{\varphi(\omega)}, \mathbf{P}^{\varphi(\omega)}$ . Дифференцируя (2.111) по  $\varphi_0$  и  $\omega$ , получаем уравнение для этих векторов. Отличие от предыдущего случая будет состоять в том, что вектор  $\mathbf{P}^{\varphi(\omega)}$  будет иметь составляющие не только по координатам  $q_1, q_2$  в плоскости, касательной к поверхности шара, но и по радиусу  $R$ . Уравнения для  $\mathbf{Q}^{\varphi}, \mathbf{P}^{\varphi}$  будут иметь вид:

$$\frac{d\mathbf{Q}^{\varphi}}{dt} = UC\mathbf{P}^{\varphi} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \varphi_0} (UC), \quad (2.112)$$

$$\frac{d\mathbf{P}^{\varphi}}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \varphi_0} \nabla \left( \frac{1}{C} \right) + U \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \nabla \left( \frac{1}{C} \right) - \frac{U}{CR_0} \frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial \varphi_0} - \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \left( \frac{U}{C} \right) \frac{\mathbf{e}_R}{R_0}.$$

Уравнения для  $\mathbf{Q}^{\omega}, \mathbf{P}^{\omega}$  совершенно аналогичны, но производные по  $\varphi_0$  должны быть заменены на производные по  $\omega$ . По сравнению с уравнениями (2.75), (2.76) здесь во втором уравнении появляются два дополнительных члена. Выражение для  $\partial \mathbf{e}_R / \partial \varphi_0$  преобразуется следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial \varphi_0} = Q_1^{\varphi} \frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial q_1} + Q_2^{\varphi} \frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial q_2} = \frac{1}{R_0} \left( Q_1^{\varphi} \mathbf{e}_1 + Q_2^{\varphi} \mathbf{e}_2 \right) = \frac{\mathbf{Q}^{\varphi}}{R_0}. \quad (2.113)$$



Теперь, так же как и в предыдущем случае, построим уравнения для составляющих векторов  $Q$  и  $P$  по осям  $q_1$  и  $q_2$ . Очевидно, что уравнения для  $Q_1$  и  $Q_2$  будут в точности совпадать с (2.80а), (2.80б), а уравнения для  $P_1$  и  $P_2$  будут иметь вид:

$$\frac{dP_1}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \varphi_0} \left( \frac{U}{C^2} \right) \frac{\partial C}{\partial q_1} - \frac{U}{C^2} \left( \frac{\partial \nabla C}{\partial \varphi_0}, e_1 \right) + \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} P_2 - \frac{U}{CR_0^2} Q_1, \quad (2.114)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \varphi_0} \left( \frac{U}{C^2} \right) \frac{\partial C}{\partial q_2} - \frac{U}{C^2} \left( \frac{\partial \nabla C}{\partial \varphi_0}, e_2 \right) - \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} P_1 - \frac{U}{CR_0^2} Q_2.$$

Дальнейшие преобразования выполняются аналогично описанным в § 2.4. В результате получаются следующие системы для  $Q_1^\varphi$ ,  $Q_2^\varphi$ ,  $P_1^\varphi$  и  $Q_1^\omega$ ,  $Q_2^\omega$ ,  $P_1^\omega$ :

$$\begin{aligned} \frac{dQ_1^\varphi}{dt} &= UCP_1^\varphi + \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} Q_2^\varphi, \\ \frac{dQ_2^\varphi}{dt} &= Q_1^\varphi C \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{U}{C} \right) + Q_2^\varphi \frac{\partial U}{\partial q_2}, \end{aligned} \quad (2.115)$$

$$\frac{dP_1^\varphi}{dt} = -Q_1^\varphi \left[ \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} \right) + \frac{U}{CR_0^2} \right] - Q_2^\varphi \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} \right);$$

$$\frac{dQ_1^\omega}{dt} = UCP_1^\omega + \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} Q_2^\omega,$$

$$\frac{dQ_2^\omega}{dt} = Q_1^\omega C \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{U}{C} \right) + Q_2^\omega \frac{\partial U}{\partial q_2} + \frac{\partial U}{\partial \omega}, \quad (2.116)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_1^\omega}{dt} &= -Q_1^\omega \left[ \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} \right) + \frac{U}{CR_0^2} \right] - Q_2^\omega \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{C^2} \frac{\partial U}{\partial \omega} \frac{\partial C}{\partial q_1} - \frac{U}{C} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial \omega} \right). \end{aligned}$$

Начальные данные для решения системы (2.115) имеют вид:  $Q_1^\varphi = Q_2^\varphi = 0$ ,  $P_1^\varphi = C_0^{-1}$ , а начальные данные для решения системы (2.116) нулевые:  $Q_1^\omega = Q_2^\omega = P_1^\omega = 0$ .

В качестве примера рассмотрим случай латерально-однородного шара. При этом уравнения (2.115) примут вид

$$\frac{dQ_1^\varphi}{dt} = UCP_1^\varphi, \quad \frac{dP_1^\varphi}{dt} = -Q_1^\varphi \frac{U}{CR_0^2}, \quad Q_2^\varphi = 0. \quad (2.117)$$

Учитывая, что в этом случае согласно уравнению луча  $dt = R_0 d\theta/U$ , эти уравнения можно записать так:

$$dQ_1^\varphi/d\theta = R_0 CP_1^\varphi, \quad dP_1^\varphi/d\theta = -\frac{Q_1^\varphi}{CR_0}$$

и при начальных данных  $Q_1^\varphi = 0, P_1^\varphi = C^{-1}$  решением этой системы будут следующие функции:

$$Q_1^\varphi = R \sin \theta, \quad P_1^\varphi = \cos \theta / C. \quad (2.118)$$

Система (2.116) в случае латерально-однородного шара примет вид

$$\frac{dQ_1^\omega}{dt} = UCP_1^\omega, \quad \frac{dQ_2^\omega}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \omega}, \quad \frac{dP_1^\omega}{dt} = -Q_1^\omega \frac{U}{CR_0^2} \quad (2.119)$$

и при нулевых начальных данных она будет иметь решение

$$Q_1^\omega = P_1^\omega = 0, \quad Q_2^\omega = \frac{R_0 \theta}{U} \frac{\partial U}{\partial \omega}. \quad (2.120)$$

Таким образом, геометрическое расхождение пространственно-временных лучей в этом случае будет

$$J = \frac{R_0^2 \theta}{U} \frac{\partial U}{\partial \omega} \sin \theta, \quad (2.121)$$

так что амплитуда нестационарной поверхности будет затухать с расстоянием  $\Delta$  ( $\Delta = \theta$ ) от источника как

$$\left( R_0 \sqrt{\frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial \omega} \Delta \sin \Delta} \right)^{-1}.$$

### § 2.7. О конфигурации пространственно-временных лучей

Характер поля пространственно-временных лучей проще всего рассмотреть на примере горизонтально-однородной среды с простейшим законом изменения групповой скорости с частотой, т.е. для случая, когда дисперсионная кривая групповой скорости имеет единственный минимум (рис. 2.4). В этом случае пространственно-временные лучи представляют собой прямые линии в пространстве  $x, y, t$ . Из первого уравнения (2.52) следует, что наклон, который составляют эти прямые с осью  $t$ , определяется групповой скоростью  $U$ . Таким образом, для каждой заданной частоты  $\omega$  пространственно-временные лучи образуют круговой конус, причем угол раствора конуса различен для разных частот (рис. 2.5). В вертикальном сечении, проходящем через ось  $t$ , лучи образуют веер прямых (рис. 2.6). При этом благодаря тому, что дисперсионная кривая групповой скорости в данном случае имеет две ветви — нисходящую ( $\omega < \omega_0$ ) и восходящую ( $\omega > \omega_0$ ), лучи, отвечающие нисходящей ветви (т.е. соответствующие частотам  $\omega < \omega_0$ ), образуют веер прямых, наклон которых возрастает с увеличением  $\omega$  (рис. 2.6, а), а наклон лучей, отвечающих восходящей

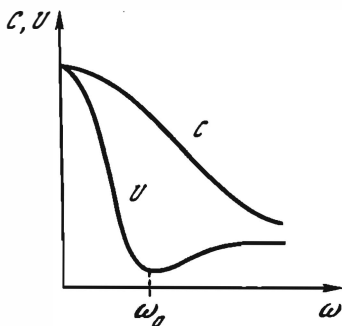


Рис. 2.4. Характер изменения с частотой фазовой и групповой скоростей

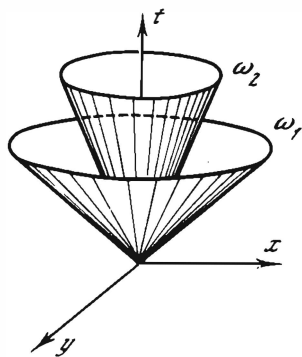


Рис. 2.5. Схема пространственно-временных лучей поверхностных волн в горизонтально-однородной среде

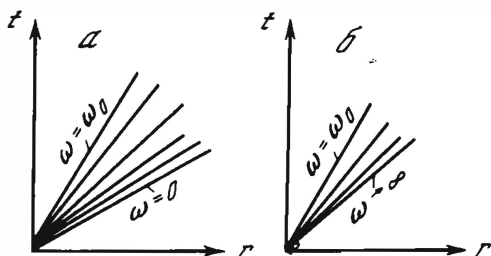


Рис. 2.6. Система пространственно-временных лучей, соответствующая частотам  $0 < \omega < \omega_0$  (а) и  $\omega > \omega_0$  (б) в сечении, проходящем через ось  $t$

ветви  $\omega > \omega_0$ , уменьшается с возрастанием  $\omega$  (рис. 2,6, б). Частота  $\omega_0$  является граничной частотой: в области пространства  $x, y, t$ , ограниченной конусом лучей, соответствующих  $\omega = \omega_0$ , имеет место зона тени. В некотором смысле этот конус лучей подобен поверхности каустики в пространстве, хотя здесь эта каустика является вырожденной (в невырожденном случае лучи касаются каустики в одной точке, здесь же сами лучи образуют каустику).

В горизонтально-неоднородной среде лучи будут иметь значительно более сложную конфигурацию, они могут искривляться, в результате чего в пространстве  $x, y, t$  могут возникать те же особенности лучевого поля, что и в случае обычных пространственных лучей в трехмерно-неоднородной среде, т.е. каустики и зоны тени. На пространственно-временной каустике обращается в нуль геометрическое расхождение  $j = |Q^\varphi \times Q^\omega|$ , что возможно как в результате обращения в нуль одного из векторов  $Q^\varphi$  или  $Q^\omega$ , так и в случае, когда эти векторы становятся коллинеарны. Анализ пространственно-временных каустик в простейшем случае волнового уравнения рассмотрен в монографии [8]. Для поверхностных волн

такое рассмотрение должно проводиться по той же схеме, что и в случае регулярного поля лучей, т.е. путем рассмотрения краевых задач для последовательных приближений и учета условия разрешимости краевой задачи для первого приближения.

Аналогично тому, как это делается для лучей в физическом пространстве  $x, y, z$ , поля поверхностных волн можно рассчитывать в рамках пространственно-временного лучевого метода путем суммирования гауссовых пучков [77]. Здесь эти пучки будут представлять решения, сосредоточенные в окрестности пространственно-временных лучей.

## Глава 3

### ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ С ВЕРТИКАЛЬНЫМИ КОНТАКТАМИ

Задачи, рассмотренные в предыдущей главе, могут быть применены к изучению распространения поверхностных волн в областях со слабой горизонтальной неоднородностью. В Земле существуют также и узколокализованные зоны, в которых происходят резкие изменения в структурах. К ним относятся, например, глубинные разломы и зоны перехода от океана к континенту. Ширина этих зон — от единиц до десятков километров, так что по отношению к длиннопериодным поверхностным волнам их поперечные размеры могут быть меньше длины волны. Поэтому влияние этих зон на распространение поверхностных волн будет таким же, как и границ контакта между блоками разнородного строения. На таких границах будет происходить отражение и преломление поверхностных волн. Кинематические особенности отраженных и проходящих поверхностных волн (изменение направления распространения, изменение геометрического расхождения) были рассмотрены в § 2.6. Здесь мы остановимся на динамических характеристиках отраженных и проходящих волн, а именно на спектральных коэффициентах отражения и прохождения.

#### § 3.1. Постановка задачи

Задача о прохождении поверхностной волны через вертикальный контакт двух сред ставится следующим образом. Два вертикально-неоднородных четвертьпространства 1 и 2 находятся в жестком контакте вдоль плоскости  $x = 0$  (рис. 3.1). В каждом из четвертьпространств могут существовать горизонтальные границы раздела. В среде 1 ( $x < 0$ ) распространяется плоская гармоническая поверхностная волна. Для простоты примем, что волна распространяется в направлении оси  $x$ , так что падает нормально на границу  $x = 0$ . Без ограничения общности можно считать, что падающая волна содержит только одну моду какой-либо из волн (Рэлея или Лява), так что смещения в ней описываются выражением

$$\hat{u}_{\text{пад}}(x, z, \omega) e^{i\omega t} = V_s(z) \exp [i(\omega t - \xi_{sD} x)], \quad (3.1)$$

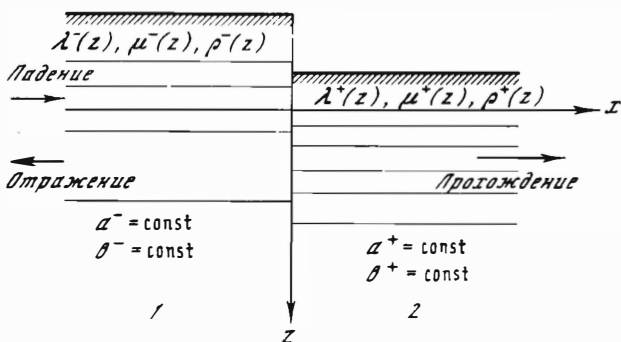


Рис. 3.1. Модель контакта сред 1 и 2 и схема распространения волн

$\times \mathbf{e}_z - iV_s^{(2)}(z)\mathbf{e}_x$ ,  $\xi_{sD} = \xi_{sR}$  — для волны Рэлея;  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  — единичные векторы, направленные вдоль координатных осей. Поле этой волны удовлетворяет в среде 1 граничным условиям отсутствия напряжений на границе  $z = 0$ , исчезновения смещений при  $z \rightarrow \infty$  и условиям жесткого контакта (непрерывности смещений и напряжений) на всех промежуточных горизонтальных границах.

При падении этой волны на границу  $x = 0$  возникают гармонические волновые поля в средах 1 и 2, которые обозначим  $\hat{\mathbf{u}}_{\text{отр}}(x, z, \omega)e^{i\omega t}$  и  $\hat{\mathbf{u}}_{\text{прох}}(x, z, \omega)e^{i\omega t}$  соответственно. Поля этих волн должны удовлетворять уравнению движения (1.4) и следующим условиям: непрерывности напряжений и смещений на границе  $x = 0$

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{пад}}(0, z, \omega) + \hat{\mathbf{u}}_{\text{отр}}(0, z, \omega) = \hat{\mathbf{u}}_{\text{прох}}(0, z, \omega), \quad (3.2)$$

$$\mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}}_{\text{пад}} + \hat{\mathbf{u}}_{\text{отр}}, \mathbf{e}_x)|_{x=0} = \mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}}_{\text{прох}}, \mathbf{e}_x)|_{x=0}, \quad (3.3)$$

отсутствию напряжений на границе  $z = 0$

$$\mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}}_{\text{отр}}, \mathbf{e}_z)|_{z=0} = 0, x < 0 \quad (3.4)$$

$$\mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}}_{\text{прох}}, \mathbf{e}_z)|_{z=0} = 0, x > 0, \quad (3.5)$$

и условию предельного поглощения для  $\hat{\mathbf{u}}_{\text{отр}}(x, z, \omega)$  при  $x \rightarrow -\infty$  и для  $\hat{\mathbf{u}}_{\text{прох}}(x, z, \omega)$  при  $x \rightarrow \infty$ .

На горизонтальных границах поля волн  $\hat{\mathbf{u}}_{\text{отр}}$  и  $\hat{\mathbf{u}}_{\text{прох}}$  должны удовлетворять условию жесткого контакта.

Волновые поля  $\hat{\mathbf{u}}_{\text{отр}}(x, z, \omega)$  и  $\hat{\mathbf{u}}_{\text{прох}}(x, z, \omega)$  включают в себя поверхностные и объемные (в том числе дифрагированные на угловых точках) волны. Задача заключается в определении полей поверхностных волн. Очевидно, что при нормальном падении поверхностной волны поля образованных волн будут содержать поверхностные волны того же типа, что и падающая волна (Рэлея или Лява). При наклонном падении будут возникать уже волны обоих типов.

В случае нормального падения волны Лява поля смещений, образующиеся по обе стороны контакта, могут быть представлены суммой полей, соответствующих дискретному и непрерывному спектрам волнового

числа  $\xi$  [29]. Дискретный спектр при любой фиксированной частоте является конечным. Соответствующие ему смещения могут быть представлены в виде суммы нормальных мод

$$K(\omega) \sum_{k=1} F_k V_k(z) \exp(\pm i \xi_k x),$$

где знак минус соответствует волнам, распространяющимся в положительном направлении оси  $x$ , а знак плюс — в противоположном.

Значения  $\xi^2$ , отвечающие непрерывному спектру, как было показано в гл. 1, существуют в интервале  $-\infty < \xi^2 < \omega^2/b^2 (Z+0)$ . Введем новую переменную  $\eta$  из условия  $\eta^2 + \xi^2 = \omega^2/b^2 (Z+0)$ , так что  $0 < \eta < \infty$ . Поле смещений, соответствующих непрерывному спектру значений  $\xi$ , можно записать в виде

$$\int_0^{\infty} F(\eta) V(\xi(\eta), z) \exp[\pm i \xi(\eta)x] d\eta.$$

Множитель  $\exp(i\omega t)$  здесь и далее опущен. В приведенных формулах

$$V_k(z) = V_k^{(3)}(z) e_y, \quad V(\xi(\eta), z) = V^{(3)}(\xi(\eta), z) e_y,$$

где  $V_k^{(3)}(z)$ ,  $V^{(3)}(\xi(\eta), z)$  — собственные функции дифференциального оператора (1.24), (1.25) при фиксированном значении  $\omega$ , а  $\xi(\eta) = \sqrt{\omega^2/b^2 (Z+0) - \eta^2}$ .

Таким образом, имеем выражение для поля проходящих волн

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\text{прох}} &= \sum_{k=1}^{K^+(\omega)} B_k V_k^+(z) \exp(-i \xi_k^+ x) + \\ &+ \int_0^{\infty} B(\eta) V^+(\xi^+(\eta), z) \exp(-i \xi^+(\eta)x) d\eta \end{aligned} \quad (3.6)$$

и для поля отраженных волн

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\text{отр}} &= \sum_{k=1}^{K^-(\omega)} A_k V_k^{-*}(z) \exp(i \xi_k^- x) + \\ &+ \int_0^{\infty} A(\eta) V^{-*}(\xi^-(\eta), z) \exp(i \xi^-(\eta)x) d\eta. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Функции, относящиеся к среде справа от контакта, будем здесь и далее помечать знаком +, а слева от контакта (со стороны падающей волны) — знаком —.

Коэффициенты  $A_k$ ,  $B_k$  можно интерпретировать как коэффициенты отражения и прохождения соответствующих нормальных мод, а  $A(\eta)$ ,  $B(\eta)$  определяют долю энергии, переходящей из нормальной моды падающей волны в энергию затухающих мод соответственно слева и справа от контакта, или, как они будут далее называться, объемных волн. Задача заключается в оценке  $A_k$ ,  $B_k$ . Обозначим смещения и напряжения, создаваемые на плоскости  $x = 0$  объемными волнами, соответственно через

$V_{об}(z)$  и  $P_{об}(z)$ . Тогда условия непрерывности смещений и напряжений на границе  $x = 0$  принимает вид

$$V_s^-(z) + \sum_{k=1}^{K^-} A_k V_k^*(z) + V_{об}^-(z) = \sum_{k=1}^{K^+} B_k V_k^+(z) + V_{об}^+(z). \quad (3.8)$$

$$P_s^-(z) + \sum_{k=1}^{K^-} A_k P_k^*(z) + P_{об}^-(z) = \sum_{k=1}^{K^+} B_k P_k^+(z) + P_{об}^+(z). \quad (3.9)$$

Здесь  $p_k$  — векторное напряжение, создаваемое на плоскости  $x = 0$   $k$ -й модой волны Лява, распространяющейся в положительном направлении оси  $x$ . Для него справедливо

$$p_k(z) = -i \xi_{kL} \mu V_k^{(3)}(z) e_y. \quad (3.10)$$

Аналогичное напряжение, создаваемое волнами, бегущими в обратном направлении, является комплексно-сопряженными к  $p_k(z)$ . Коэффициенты  $A_k$ ,  $B_k$  не удается непосредственно определить из уравнений из-за наличия членов, отвечающих полю объемных волн.

При решении этой задачи существенно используется условие ортогональности собственных функций, отвечающих одному и тому же  $\omega$ , но разным значениям  $\xi_k$  (формула (1.26а)). Учитывая выражение (3.10) для напряжений, действующих на контакте  $x = 0$ , нетрудно показать, что условие (1.26а) можно записать в виде:

$$\int_0^{\infty} (p_k^* V_l - p_l V_k^*) dz = 0, \quad k \neq l, \quad (3.11)$$

$$\int_0^{\infty} (p_k V_l - p_l V_k) dz = 0 \text{ при любых } k, l. \quad (3.12)$$

Такие же условия ортогональности имеют место для нормальных мод Лява и поля объемных волн *SH*:

$$\int_0^{\infty} (p_k^* V_{об} - p_{об} V_k^*) dz = 0, \quad (3.13)$$

$$\int_0^{\infty} (p_k V_{об} - p_{об} V_k) dz = 0.$$

Отметим, что уравнения (3.8), (3.9) и условия (3.11)–(3.13) справедливы для волн Рэлея и объемных волн *P-SV*. Напряжение, создаваемое  $k$ -й модой волны Рэлея, распространяющейся в положительном направлении оси  $x$ , на поверхности  $x = 0$  равно

$$p_k(z) = \left[ -(\lambda + 2\mu) \xi_{kR} V_k^{(2)} + \lambda \frac{dV_k^{(1)}}{dz} \right] e_x - i \left[ \mu \left( \frac{dV_k^{(2)}}{dz} + \xi_{kR} V_k^{(1)} \right) \right] e_z. \quad (3.14)$$

### § 3.2. Обзор существующих теоретических результатов

За последние 20 лет появилось большое количество теоретических работ, основанных на разных подходах к определению коэффициентов отражения и прохождения поверхностных волн через вертикальные границы. Это обусловлено тем, что точное решение задачи об отражении и прохождении поверхностной волны через вертикальный контакт не представляется возможным в связи с образованием в окрестности контакта интенсивных объемных волн. Эти волны описываются интегралом по непрерывному спектру значений  $\xi$  (см. § 3.1) и не поддаются строгому учету — их удается учесть лишь с той или иной степенью приближения. Поэтому для анализа и расчета полей отраженных и проходящих поверхностных волн (точнее, нормальных мод поверхностных волн) используются либо численные, либо приближенные методы.

К численным методам прежде всего следует отнести получившие достаточно широкое применение методы конечных разностей и конечных элементов [114, 115, 128, 157, 158, 183, 186]. Они позволяют строить численное решение для полей поверхностных волн в моделях, содержащих узкие зоны перехода от одной горизонтально-однородной среды к другой.

Еще одним численным методом является метод, основанный на численном решении интегральных уравнений [21, 116]. Здесь мы на нем не будем останавливаться, так как он будет более подробно изложен в § 3.4.

Приближенные методы расчета предназначены только для непосредственной оценки спектральных коэффициентов отражения и прохождения. Они развивались в разных направлениях, из которых главными являются способы, основанные: 1) на методе функций Грина; 2) на приближенном выполнении граничных условий на вертикальном контакте и 3) на представлении поля поверхностной волны суперпозицией плоских однородных и неоднородных объемных волн.

Метод функций Грина использовался для решения данной задачи в работах [144, 151, 159]. Он является математической формализацией принципа Гюйгенса—Френеля, согласно которому каждая точка среды, через которую распространяется волна, становится источником новых элементарных волн, и поле распространяющейся волны можно представить в виде суперпозиции таких элементарных волн. На вертикальной границе раздела падающая поверхностная волна создает возмущение, которое может рассматриваться как источник для образования отраженных и проходящих поверхностных волн. Для точного решения задачи об определении полей отраженных и проходящих поверхностных волн необходимо знать поля смещений и напряжений на вертикальной границе в рассматриваемой моде поверхностной волны. В действительности они нам неизвестны, поэтому приходится применять приближенные оценки. В качестве функции Грина используют главную часть волнового поля на больших расстояниях от источника, т.е. ту часть поля, которая соответствует поверхностным волнам. Для построения полей смещений и напряжений в рассматриваемых модах отраженных и проходящих поверхностных волн на контакте используются те или иные предположения. Таким образом, решение будет настолько хорошо приближаться к истинному, насколько адекватны принимаемые предположения.



Поскольку в дальнейшем изложении мы часто будем обращаться к методу функций Грина и выражению теоремы представления для вертикально-неоднородного четвертьпространства, ограниченного горизонтальной свободной поверхностью и вертикальной границей, сформулируем двумерный аналог теоремы представления (1.9) при отсутствии объемных сил. Поскольку всюду далее будет рассматриваться стационарный случай, запишем эту теорему для спектров смещений и напряжений. Заметим, что свертка по времени в (1.9) соответствует произведению спектральных функций. Таким образом, теорема примет вид:

$$\hat{u}_i(x_0, \omega) = \int_L [\hat{G}^{(i)}(x; x_0; \omega) T(\hat{u}(x, \omega) n) - \hat{u}(x, \omega) T(\hat{G}^{(i)}(x; x_0; \omega), n)] dL, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.15)$$

где  $\hat{G}^{(i)}(x; x_0; \omega)$  — спектральная двумерная функция Грина — спектр смещений, вызванных в точке  $x$  с координатами  $x, z$  сосредоточенной линейной силой

$$\delta(x - x_0) \delta(z - z_0) \delta(t) e_i.$$

Пусть при падении поверхностной волны слева на границу  $x = 0$  (рис. 3.2) на ней образуется некоторое поле смещений  $V(z)e^{i\omega t}$  и напряжений  $p(z)e^{i\omega t}$ , обуславливающих появление поля отраженной волны в четвертьпространстве  $x < 0, z > 0$ . В точке  $(x_0, z_0)$  смещения в поверхностных волнах могут быть выражены по теореме представления (3.15) через смещения и напряжения на контуре  $L$ , состоящем из участков  $L_1, L_2, L_3, L_4$ , причем участки  $L_3, L_4$  отодвинуты на бесконечность.

В качестве функции Грина принимается поверхностно-волновая часть фундаментального решения, соответствующего полупространству с параметрами левого четвертьпространства, так что на  $L_1$  напряжение, соответствующее функции Грина, обращается в нуль. В силу того что эта поверхность является свободной, напряжение в исследуемой волне на этой границе также равняется нулю. На  $L_3$  смещения и напряжения, соответствующие функции Грина, обращаются в нуль. Таким образом, интегралы в (3.15) по участкам  $L_1$  и  $L_3$  оказываются равными нулю. В силу принципа предельного поглощения и условий ортогональности (3.11)–(3.13) интеграл по участку контура  $L_4$  также равен нулю. Так что окончательно смещения в поверхностных волнах могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} (\hat{u}(x_0, z_0), e_i) &= \int_0^{\infty} [\hat{G}^{(i)}(0, z; x_0, z_0) p(z) - \\ &- V(z) T(\hat{G}^{(i)}(0, z; x_0, z_0), e_x)] dz. \end{aligned} \quad (3.16)$$

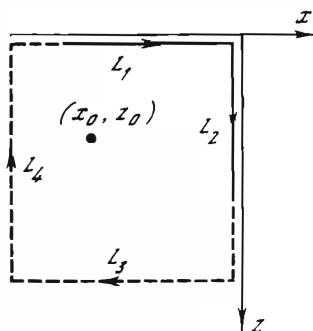
Очевидно, что если  $p(z), V(z)$  представляют суммарное поле всех отраженных волн на границе  $x = 0$ , то получаемое по формуле (3.16) смещение в точке  $(x_0, z_0)$  будет отвечать сумме всех отраженных волн — всех мод поверхностных и объемных волн.

Для того чтобы найти смещение в некоторой отраженной моде по формуле (3.16), нам в силу условий ортогональности (3.11)–(3.13) достаточно либо в качестве функции Грина использовать только ее слагаемое, соответствующее этой моде, либо в качестве смещения и напряжения на кон-

также учесть только вклад этой моды. Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для проходящих поверхностных волн.

Впервые метод функций Грина был применен Кноповым и Хадсоном [144] для решения задачи об отражении и прохождении волн Лява и Рэлея на свободной грани двумерного клина. Существенным недостатком этого решения было то, что явления отражения и прохождения рассматривались независимо, так что получаемые коэффициенты отражения и прохождения оказывались не связанными друг с другом. Этот недостаток был отмечен и исправлен в работе Мэла и Кнопова [159], где получена система для совместного определения коэффициентов отражения и прохождения.

Рис. 3.2. Схема контура интегрирования в формуле теоремы представления для отраженной волны (при  $x < 0$ )



Метод функций Грина был использован Кноповым и Хадсоном [151] также для решения задачи о прохождении волны Лява в слое на полупространстве, свободная поверхность которого имеет уступ. При этом авторы при построении поля проходящей волны пренебрегали отраженной поверхностной волной: возмущение, созданное на границе падающей волной, рассматривалось как источник образования только проходящей волны. Аналогичное допущение было сделано в работе Лутикова [66] при рассмотрении нормального падения волны Рэлея на вертикальную границу раздела однородных четвертьпространств.

В работе [61] было предложено распространить метод, основанный на принципе Гюйгенса—Френеля, на определение полей как проходящей, так и отраженной волны Лява при нормальном падении на границу. При этом предполагалось, что источником для образования проходящей волны является суммарное поле, образованное на границе падающей и отраженными волнами, а источником для образования отраженной волны — разность полей в падающей и проходящих волнах. В дальнейшем этот подход был распространен на отражение и преломление волн Рэлея, на случай наклонного падения и на случай криволинейной субвертикальной границы раздела [38—41, 145]. Этот способ будет более подробно рассмотрен в § 3.3.

Другая серия работ [102, 139, 160—162], посвященных оценкам коэффициентов отражения и прохождения поверхностных волн через вертикальный контакт, основывается на так называемом методе Олсопа, в основе которого лежит предположение, что интенсивность объемных волн, возникающих на контакте, мала по сравнению с интенсивностью поверхностных волн, так что коэффициенты отражения и прохождения могут быть опре-

делены из требования приближенного (с учетом одних нормальных мод) выполнения граничных условий – непрерывности напряжений и смещений на исследуемом контакте.

Идею метода Олсопа рассмотрим на примере нормального падения стационарной волны Лява на вертикальный контакт двух вертикально-неоднородных четвертьпространств [102] (см. рис. 3.1).

Пусть смещение в падающей волне Лява описывается выражением

$$V_1^-(z) \exp[i(\omega t - \xi_1^- x)] e_y$$

(без ограничения общности можно принять, что падающая мода – основная; мы будем обозначать ее индексом 1).

Пусть для данной частоты  $\omega$  может существовать  $m \geq 1$  мод волны Лява в среде слева от границы и  $n \geq 1$  мод в среде справа. Выражения для смещений в отраженных и проходящих волнах будут тогда иметь соответственно вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m A_i(\omega) V_i^-(z) \exp[i(\omega t + \xi_i^- x)] e_y, \\ \sum_{j=1}^n B_j(\omega) V_j^+(z) \exp[i(\omega t - \xi_j^+ x)] e_y, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где  $A_i(\omega)$  и  $B_j(\omega)$  – коэффициенты отражения и прохождения;  $V_i^-$ ,  $V_j^+$ ,  $\xi_i^-$ ,  $\xi_j^+$  – собственные функции  $V_i^{(3)}$ ,  $V_j^{(3)}$  и собственные значения  $\xi_{iL}$ ,  $\xi_{jL}$  одномерной задачи § 1.3 для полупространств с параметрами левого (–) и правого (+) четвертьпространств. Множитель  $e^{i\omega t}$  будем в дальнейшем опускать.

Запишем условия непрерывности смещений и напряжений на границе  $x = 0$ , предполагая, что волновое поле на границе контакта сред складывается только из полей нормальных мод:

$$V_1^-(z) + \sum_{i=1}^m A_i V_i^-(z) = \sum_{j=1}^n B_j V_j^+(z), \quad (3.18)$$

$$-i \xi_1^- \mu^- V_1^-(z) + i \mu^- \sum_{i=1}^m A_i \xi_i^- V_i^-(z) = -i \mu^+ \sum_{j=1}^n B_j \xi_j^+ V_j^+(z). \quad (3.19)$$

Поля разных мод в одной среде при фиксированной частоте подчиняются условию ортогональности (1.26a):

$$\int_0^\infty \mu V_i V_j dz = 0, \quad i \neq j, \quad (3.20)$$

а на собственные функции удобно наложить следующее условие нормировки:

$$\xi_i \int_0^\infty \mu V_i^2 dz = 1. \quad (3.21)$$

Благодаря тому что на границе раздела образуются не только нормальные моды, но и объемные волны, граничные условия, записанные в форме

(3.18), (3.19), будут выполняться лишь приближенно. Для построения уравнений, соответствующих приближенному выполнению этих условий, предлагается использовать один из следующих способов.

Один способ состоит в том, что уравнение (3.19) умножают на  $V_j^+$  и интегрируют от 0 до  $\infty$ . Тогда с учетом (3.20), (3.21) коэффициенты прохождения  $B_j$  могут быть выражены через коэффициенты  $A_i$  следующим образом:

$$B_j = P_{jj} - \sum_{i=1}^m A_i \xi_i P_{ij}, \quad (3.22)$$

где

$$P_{ij} = \xi_i^- \int_0^{\infty} \mu^- V_i^- V_j^+ dz = \frac{1}{i} \int_0^{\infty} p_i^- V_j^+ dz \quad (3.23)$$

определяет связь между напряжением  $p_i^- = p_i^- e_y$ , создаваемым на границе  $x = 0$   $i$ -й модой в среде 1 и смещением в  $j$ -й моде, распространяющейся в среде 2.

Для определения коэффициентов  $A_i$  ставится требование приближенного выполнения условия (3.18) так, чтобы минимизировалось среднее по глубине значение квадрата разности смещений справа и слева от границы, т.е. интеграл

$$\Phi = \int_0^{\infty} [\delta V]^2 dz = \int_0^{\infty} (V_1^- + \sum_{i=1}^m A_i V_i^- - \sum_{i=1}^n B_i V_i^+)^2 dz. \quad (3.24)$$

Коэффициенты  $B_j$ , определяемые соотношением (3.22), подставляются в (3.24) и  $A_i$  определяются из уравнений, которые получаются приравнованием нулю частных производных функции  $\Phi$  по параметрам  $A_i$ .

Другой способ, который считается более предпочтительным в случае, когда участок поверхности контакта является свободным от напряжений (т.е. когда на свободной поверхности полупространства имеется уступ), исходит из того, что коэффициенты определяются из требования приближенного выполнения условия (3.19), соответствующего непрерывности напряжений на контакте. В этом случае на участке, соответствующем уступу, напряжение обращается в нуль, тогда как смещение в нуль не обращается, и более адекватным является минимизация среднего квадрата разности напряжений на контакте. Для получения условия, эквивалентного (3.22), предлагается (3.18) умножить на  $\xi_j^+ \mu^+ V_j^+$  и проинтегрировать от 0 до  $\infty$ . Это приводит к следующему выражению коэффициентов прохождения через коэффициенты отражения:

$$B_j = S_{j1} + \sum A_i S_{ji}, \quad (3.25)$$

где  $S_{ji} = \xi_j^+ \int_0^{\infty} \mu^+ V_j^+ V_i^- dz$ . Полученные таким способом коэффициенты прохождения выражаются через коэффициенты отражения  $A_i$  и подставляются в функционал, подлежащий минимизации:

$$\Psi = \int_0^{\infty} [\delta p]^2 dz = \int_0^{\infty} (\xi_1^- \mu^- V_1^- - \mu^- \sum_i A_i \xi_i^- V_i^- - \mu^+ \sum_j B_j \xi_j^+ V_j^+)^2 dz. \quad (3.26)$$

Дифференцируя  $\Psi$  по параметрам  $A_i$ , получаем систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов отражения.

Описанные два подхода приводят к разным результатам, так что подход, развитый Олсопом, не дает однозначного соответствия между искомыми коэффициентами. Следует также заметить, что из (3.18), (3.19) можно получить и другие, несовместимые между собой соотношения, связывающие  $A_i$  и  $B_j$ . В дополнение к (3.22) и (3.24) можно добавить соотношения, которые можно получить или путем умножения (3.18) на  $\xi_i^- \mu^- V_i^-$  с последующим интегрированием, что дает выражение  $A_i$  через линейную комбинацию  $B_j$ :

$$A_i = \sum_j B_j P_{ij} - \delta_{i1}, \quad (3.27)$$

или умножением (3.19) на  $V_i^-$  и аналогичным интегрированием, что даст следующее соотношение:

$$A_i = \delta_{i1} - \sum_j B_j S_{ji}. \quad (3.28)$$

Таким образом, метод является в достаточной степени субъективным; остается неясным, в каких случаях следует предпочитать один способ, а в каких другой.

Метод Олсопа был использован Малишевским [160] для случая наклонного падения волн Лява и Рэлея на границу сред, но в дальнейшем он не получил широкого развития. Это объясняется, с одной стороны, указанной выше субъективностью (и соответственно неоднозначностью метода), а с другой стороны, тем, что метод не дает хорошего приближения в случае, когда контраст между контактирующими средами не слишком мал. В этом случае возникают достаточно интенсивные объемные волны, которые в данном методе полностью игнорируются. Поэтому даже авторы предлагали оценивать получающуюся разность потоков энергии в поверхностных волнах слева и справа от границы, которая должна быть равна как раз энергии неучитываемых объемных волн, и использовать оценки, получаемые этим методом, лишь в случае, когда относительная энергия объемных волн оказывается малой.

Остановимся теперь на работах, в которых предлагается представлять поле поверхностных волн в виде суперпозиции плоских однородных и неоднородных волн, определять коэффициенты отражения и прохождения этих объемных волн на отдельных участках контакта и таким образом приближенно строить поля отраженных и проходящих волн на всем контакте [103, 140, 141]. Это позволяет с помощью теоремы представления оценить коэффициенты отражения и прохождения поверхностных волн.

Идею метода, как и ранее, рассмотрим на примере нормального падения плоской волны Лява на вертикальную границу. Контактующие четвертьпространства будем считать слоисто-однородными. В каждом из слоев волна Лява представляется суперпозицией плоских однородных или неоднородных волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оси  $z$  (будем их называть нисходящими и восходящими волнами соответственно). В полупространстве волна Лява представляется только нисходящей неоднородной волной. Система таких волн условно изображена на рис. 3.3.

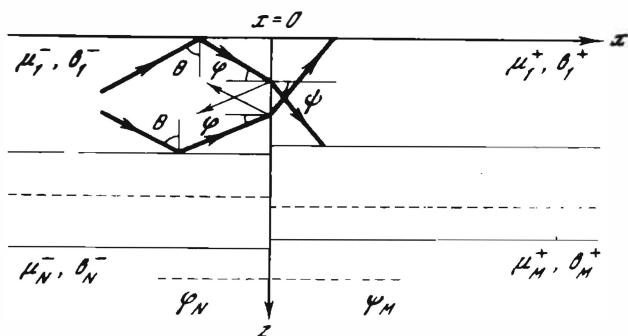


Рис. 3.3. Схема преломления на границе  $x=0$  однородных (в первом слое) и неоднородных (в полупространстве) плоских волн, слагающих поверхностную волну

В  $k$ -м слое волны, слагающие поверхностную волну, отражаются от верхней и нижней границ под углом  $\theta_k$ , который определяется фазовой скоростью волны  $C$ :

$$\sin \theta_k = b_k^- / C. \quad (3.29)$$

Угол падения  $\varphi_k$  волн, слагающих поверхностную волну в  $k$ -м слое, на контакт  $x=0$  будет определяться из соотношения

$$\sin \varphi_k = \cos \theta_k = \sqrt{1 - (b_k^- / C)^2}. \quad (3.30)$$

Угол преломления  $\psi_q$  волны на участке контакта этого слоя с  $q$ -м слоем среды 2, характеризующимся скоростью поперечных волн  $b_q^+$ , определится из закона Снеллиуса:

$$\sin \psi_q = b_q^+ \sqrt{(1/b_k^-)^2 - 1/C^2}. \quad (3.31)$$

Аналогично можно считать, что волна падает на контакт полупространств под углом  $\varphi_N$ , определяемым из соотношения

$$\sin \varphi_N = \sqrt{1 - (b_N^- / C)^2}, \quad (3.32)$$

но в этом случае угол падения волны будет мнимым. Соответственно будет мнимым и угол преломления этой волны:

$$\sin \psi_M = b_M^+ \sqrt{1/(b_N^-)^2 - 1/C^2}. \quad (3.33)$$

Волна в слое представляется в виде суперпозиции восходящих и нисходящих волн. Это относится и к случаю, когда волна в слое представляется суперпозицией неоднородных волн. Действительно, в каждом из слоев смещение в падающей волне Лява может быть выражено в форме

$$V^-(z) \exp [i(\omega t - \xi^- x)],$$

$$V^-(z) = \begin{cases} A_1 e^{\beta_1 z} + B_1 e^{-\beta_1 z}, & 0 < z < z_1 \\ A_2 e^{\beta_2 z} + B_2 e^{-\beta_2 z}, & z_1 < z < z_2 \\ \dots & \dots \\ B_N e^{-\beta_N z}, & z > z_N, \end{cases} \quad (3.34)$$

$\beta_k = \sqrt{\xi^2 - \omega^2/b_k^{-2}}$  (первое слагаемое в правой части соответствует восходящим волнам, второе — нисходящим). Для определенности будем считать, что  $A_k, B_k$  подчиняются условию нормировки (3.21). Аналогично смещение в рэлеевской волне в каждом из слоев представляется в виде суперпозиции восходящих и нисходящих  $P$ - и  $SV$ -волн. Каждая из этих волн отражается и преломляется на вертикальной границе. Таким образом, смещение, например, в отраженной волне  $SH$  на участке контакта двух слоев, принадлежащих средам 1 и 2, может быть записано в виде

$$V^{\text{отр}}(z) = \kappa(\xi) V(z), \quad V^{\text{прох}}(z) = \chi(\xi) V(z), \quad (3.35)$$

где  $\kappa$  — коэффициент отражения;  $\chi$  — коэффициент прохождения  $SH$ -волны, падающей на контакт сред 1 и 2 под углом  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\mu^-/b^- \cos \varphi - \mu^+/b^+ \cos \psi}{\mu^-/b^- \cos \varphi + \mu^+/b^+ \cos \psi} = \\ &= \frac{\mu^-/C - \mu^+ \sqrt{1/(b^+)^2 - 1/(b^-)^2 + 1/C^2}}{\mu^-/C + \mu^+ \sqrt{1/(b^+)^2 - 1/(b^-)^2 + 1/C^2}}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\chi = 1 + \kappa. \quad (3.37)$$

Для волны Рэлея поле отраженной волны на контакте складывается из полей отраженных  $P$ - и  $SV$ -волн, образующихся при падении восходящих и нисходящих  $P$ - и  $SV$ -волн.

Нетрудно видеть, что поле как отраженных, так и проходящих волн на пересечении контакта с горизонтальными границами будет разрывным, что не согласуется с физическими соображениями. Это, как уже упоминалось выше, объясняется тем, что в таком подходе игнорируются волны, дифрагированные на угловых точках границ. Добавление полей таких волн к общему полю отраженных (проходящих) волн привело бы к удовлетворению граничных условий и к непрерывности полей на вертикальном контакте. Таким образом, основное ограничение в этом методе заключается в пренебрежении полями дифрагированных волн. Поле смещений и напряжений в отраженных (проходящих) волнах на контакте можно рассматривать как источник формирования отдельных мод отраженных (проходящих) поверхностных волн. Пользуясь теоремой представления (3.16) и условиями ортогональности (3.11)–(3.13), можно получить следующие выражения для коэффициентов отражения  $A_i$  и прохождения  $B_j$  волн на контакте:

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{2i} \int_0^\infty [i \xi^- \mu^-(z) \kappa(z) V_i^-(z) V_i^-(z) + \\ &+ i \kappa(z) V_i^-(z) \xi_i^- \mu^-(z) V_i^-(z)] dz = \frac{\xi_1^- + \xi_i^-}{2} \int_0^\infty \mu^-(z) \kappa(z) V_i^-(z) V_i^-(z) dz, \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} B_j &= \frac{1}{2} [\xi_j^+ \int_0^\infty \mu^+(z) V_j^+(z) V_i^-(z) \chi(z) dz + \\ &+ \xi_i^- \int_0^\infty \mu^-(z) (1 - \kappa(z)) V_i^-(z) V_j^+(z) dz]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

### § 3.3. Приближенный метод расчета коэффициентов отражения—прохождения поверхностных волн на контакте

Идея описываемого в этом параграфе приближенного метода расчета коэффициентов отражения и прохождения поверхностных волн изложена в [61], где рассмотрен простейший случай решения задачи об отражении и прохождении поверхностных волн: нормальное падение волны Лява на вертикальный контакт двух вертикально-неоднородных сред. В [38] этот метод был применен к рассмотрению нормального падения волны Рэлея на вертикальную границу раздела, а в [39, 40] исследован общий случай наклонного падения волны любого типа — Рэлея или Лява. В [41] этот метод распространен на случай субвертикальной границы, имеющей произвольный криволинейный профиль. В своей основе он использует метод функций Грина.

Рассмотрим вначале идею этого метода на примере нормального падения плоской поверхностной волны (Лява или Рэлея) на вертикальную границу  $x = 0$ . Для простоты будем считать, что падающая волна содержит одну  $s$ -ю моду поверхностной волны, а поле отраженных и проходящих поверхностных волн представляется суперпозицией всех мод, соответствующих заданной частоте  $\omega$ . Если смещение в падающей волне  $\hat{u}_s^-(x, z, \omega) \exp(i\omega t)$ , то в отраженных волнах оно выразится суммой

$$\sum_j A_j \hat{u}_j^{-*}(x, z, \omega) \exp(i\omega t),$$

а в проходящих

$$\sum_j B_j \hat{u}_j^+(x, z, \omega) \exp(i\omega t).$$

Здесь  $A_j$  и  $B_j$  — коэффициенты отражения и прохождения, подлежащие определению. Множитель  $\exp(i\omega t)$  будем далее опускать.

Полное волновое поле слева и справа от границы складывается из полей нормальных мод и объемных волн, затухающих с удалением от контакта. Смещения слева от границы представляются тогда суммой

$$\hat{u}_s^-(x, z, \omega) + \sum_j A_j \hat{u}_j^{-*}(x, z, \omega) + \hat{u}_{об}^-(x, z, \omega), \quad (3.40)$$

а справа от границы

$$\sum_j B_j \hat{u}_j^+(x, z, \omega) + \hat{u}_{об}^+(x, z, \omega), \quad (3.41)$$

где  $\hat{u}_{об}^-$  и  $\hat{u}_{об}^+$  — смещения в объемных волнах. Условия непрерывности смещений и напряжений на границе  $x = 0$  можно записать в виде

$$V_s^-(z) + \sum_i A_i V_i^{-*}(z) - \sum_j B_j V_j^+(z) + V_{об}^- - V_{об}^+ = 0, \quad (3.42)$$

$$p_s^-(z) + \sum_i A_i p_i^{-*}(z) - \sum_j B_j p_j^+(z) + p_{об}^- - p_{об}^+ = 0. \quad (3.43)$$



Здесь

$$\begin{aligned}\hat{u}_i(x, z) &= V_i(z) \exp(-i\xi x); \\ T(\hat{u}_i(x, z), e_x) &= p_i(z) \exp(-i\xi x), \\ \hat{u}_{об}(0, z) &= V_{об}(z).\end{aligned}\quad (3.44)$$

Теорема представления для  $q$ -й компоненты смещения в  $i$ -й моде отраженной волны в соответствии с (3.16) имеет вид

$$\begin{aligned}A_i(\hat{u}_i^{-*}(x_0, z_0), e_q) &= \int_0^{\infty} [\hat{G}^{(q)-}(0, z; x_0, z_0) p_i^{отр}(z) - \\ &- V_i^{отр}(z) T(\hat{G}^{(q)-}(0, z; x_0, z_0), e_x)] dz,\end{aligned}\quad (3.45)$$

где  $\hat{G}^{(q)}$  – спектральная функция Грина, т.е. смещение в точке  $(x, z)$ , вызванное источником типа сосредоточенной силы, направленной вдоль оси  $q$  ( $q = x, y, z$ ) и помещенной в точку  $(x_0, z_0)$ . В подынтегральном выражении  $V_i^{отр}(z)$  и  $p_i^{отр}(z)$  – амплитуда смещения и напряжения в  $i$ -й моде отраженной волны на поверхности  $x = 0$ .

Поверхностно-волновая часть функции Грина для вертикально-неоднородного полупространства (в двумерном случае) дана в работе Херрера [134]. Она имеет вид

$$\hat{G}^{(q)}(x, z; x_0, z_0) = \begin{cases} \sum_k \frac{(\hat{u}_k^*(x_0, z_0), e_q) \hat{u}_k(x, z)}{J_k} & \text{при } x > x_0, \\ \sum_k \frac{(\hat{u}_k(x_0, z_0), e_q) \hat{u}_k^*(x, z)}{J_k} & \text{при } x < x_0, \end{cases}\quad (3.46)$$

где

$$J_k = \int_0^{\infty} [(T^*(\hat{u}_k, e_x), \hat{u}_k) - (T(\hat{u}_k, e_x), \hat{u}_k^*)] dz.\quad (3.46a)$$

В формуле (3.46)

$$\hat{u}_k(x, z) = V_k(z) \exp(-i\xi_k D x),$$

где в случае  $q = x, z, D = R$  (волна Рэлея)  $V_k(z) = V_k^{(1)}(z)e_z - iV_k^{(2)}e_x$ , а в случае  $q = y, D = L$  (волна Лява)  $V_k(z) = V_k^{(3)}(z)e_y$ . Соответственно в формуле (3.45)  $T(\hat{G}^{(q)-}(0, z; x_0, z_0), e_x)$  определяется из (3.46) с учетом (3.44), при этом  $p_i(z)$  выражается через  $V_i(z)$  либо формулой (3.10) (в случае волны Лява), либо (3.14) (в случае волны Рэлея). В формуле теоремы представления (3.45) в силу условия ортогональности (3.11) вместо полного выражения для функции Грина, определяемого суммой (3.46), достаточно взять только то слагаемое, которое отвечает  $i$ -й моде. Сокращая левую и правую части на  $(\hat{u}_i^{-*}(x_0, z_0), e_q)$ , получаем выражение для коэффициента отражения  $A_i$ :

$$A_i = \frac{1}{J_i^-} \int_0^{\infty} [p_i^{отр}(z) V_i^-(z) - V_i^{отр}(z) p_i^-(z)] dz.\quad (3.47)$$

Выразим теперь  $p_j^{\text{отр}}$  и  $V_i^{\text{отр}}$ , которые входят в выражение подинтегральной функции (3.45), из граничных условий (3.42), (3.43). Тогда соотношение (3.47) примет вид

$$A_i = \frac{1}{J_i^-} \int_0^\infty [V_i^- (\sum_j B_j p_j^+ - p_s^- - \sum_{k \neq i} A_k p_k^- + p_{\text{об}}^+ - p_{\text{об}}^-) - p_i^- (\sum_j B_j V_j^+ - V_s^- - \sum_{k \neq i} A_k V_k^- + V_{\text{об}}^+ - V_{\text{об}}^-)] dz. \quad (3.48)$$

Разные моды в одной среде подчиняются условиям ортогональности (3.11), (3.12). Учитывая эти условия и вводя обозначение для коэффициента связи между полем отраженной  $i$ -й моды в первой среде с полем проходящей  $j$ -й моды во второй среде

$$P_{ij} = \frac{1}{J_j^-} \int_0^\infty (p_i^- V_j^+ - p_j^+ V_i^-) dz, \quad (3.49)$$

можно записать (3.48) в виде

$$A_i = - \sum_j B_j P_{ij} - \frac{1}{J_i^-} \int_0^\infty [p_i^- (V_{\text{об}}^+ - V_{\text{об}}^-) - V_i^- (p_{\text{об}}^+ - p_{\text{об}}^-)] dz. \quad (3.50)$$

Второе слагаемое в правой части (3.50) выражает связь  $i$ -й моды отраженной волны с полем объемных волн на контакте двух сред. Поскольку поле нормальной моды ортогонально полю объемных волн в той же среде (формула (3.13)), этот член принимает вид

$$\frac{1}{J_i^-} \int_0^\infty (p_i^- V_{\text{об}}^+ - p_{\text{об}}^+ V_i^-) dz,$$

и он будет определять связь между полем  $i$ -й моды отраженной волны в первой среде с полем объемных волн во второй среде. Сделав допущение, что эта связь слабая, чтобы этим интегралом пренебречь, получим

$$A_i = - \sum_j B_j P_{ij}. \quad (3.51)$$

Такую же процедуру можно выполнить и для коэффициента прохождения  $B_j$ . Выразим поле проходящей поверхностной волны в точке на достаточно большом удалении от границы с помощью теоремы представления (3.45) и далее записав напряжение и смещение в  $j$ -й моде проходящей волны на контакте через поля всех остальных волн, исходя из граничных условий и предполагая малость интеграла  $\int_0^\infty (p_j^{+*} V_{\text{об}}^- - V_j^{+*} p_{\text{об}}^-) dz$ , выражающего связь между полем объемной волны в первой среде и полем  $j$ -й моды проходящей волны во второй среде, получим соотношение, аналогичное (3.51):

$$B_j = S_{sj}^* + \sum_i A_i P_{ij}^*, \quad (3.52)$$

где

$$S_{sj} = \frac{1}{J_j^{+*}} \int_0^\infty (p_s^{-*} V_j^+ - p_j^+ V_s^{-*}) dz \quad (3.53)$$

— коэффициент связи между полем  $s$ -й моды падающей волны в первой среде и полем  $j$ -й моды проходящей волны во второй среде.

Уравнения (3.51), (3.52) представляют собой линейную систему для определения коэффициентов отражения и прохождения.

Выпишем теперь явные выражения для коэффициентов связи мод отдельно для волн Лява и Рэлея.

**Волна Лява.** Учитывая выражение (3.46а) для  $J_k$ , а также то, что для волны Лява  $\mathbf{V}_k = V_k^{(3)}(z)\mathbf{e}_y$  и  $\mathbf{p}_k(z) = -i\xi_{kL}\mu V_k^{(3)}(z)\mathbf{e}_y$ , получаем

$$J_k = 2i\xi_{kL} \int_0^{\infty} \mu(z)(V_k^{(3)})^2 dz.$$

Если нормировать собственные функции  $V_k^{(3)}(z)$  в соответствии с (3.21), то  $J_k = 2i$ . При этом

$$P_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \xi_{jL}^+ \int_0^{\infty} \mu^+ V_i^{(3)-} V_j^{(3)+} dz - \xi_{iL}^- \int_0^{\infty} \mu^- V_i^{(3)-} V_j^{(3)+} dz \right\}, \quad (3.54)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \xi_{iL}^- \int_0^{\infty} \mu^- V_i^{(3)-} V_j^{(3)+} dz + \xi_{jL}^+ \int_0^{\infty} \mu^+ V_i^{(3)-} V_j^{(3)+} dz \right\}.$$

**Волна Рэлея.** В этом случае смещения и напряжения в любой из мод (индекс которой  $R$  в (3.55)–(3.57) опущен), распространяющейся в положительном направлении оси  $x$  (т.е. в падающей и проходящих волнах), будут иметь вид

$$\mathbf{V} = -iV^{(2)}\mathbf{e}_x + V^{(1)}\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{p} = \bar{\sigma}_{11}\mathbf{e}_x - i\bar{\sigma}_{13}\mathbf{e}_z, \quad (3.55)$$

где

$$\bar{\sigma}_{11} = -(\lambda + 2\mu)\xi_R V^{(2)} + \lambda \frac{\partial V^{(1)}}{\partial z}, \quad \bar{\sigma}_{13} = \mu \left( \frac{\partial V^{(2)}}{\partial z} + \xi_R V^{(1)} \right). \quad (3.56)$$

Подставляя эти выражения в формулу (3.46а) для  $J$ , получаем

$$J = 2i \left[ \xi_R \int_0^{\infty} (\lambda + 2\mu)(V^{(2)})^2 dz + \int_0^{\infty} \mu \frac{\partial V^{(2)}}{\partial z} V^{(1)} dz + \xi_R \int_0^{\infty} \mu (V_k^{(1)})^2 dz - \int_0^{\infty} \lambda \frac{\partial V_k^{(1)}}{\partial z} V_k^{(2)} dz \right] = 2i \left\{ \xi_R (I_R^{(1)} + I_R^{(2)}) + I_R^{(3)} + I_R^{(4)} \right\}. \quad (3.57)$$

Аналогично предыдущему примем условие нормировки на собственные функции, такое, что  $J = 2i$ , т.е. выражение в квадратной скобке будем принимать равным единице. Выражения для коэффициентов связи  $P_{ij}$  и  $S_{ij}$  при такой нормировке будут соответственно иметь вид

$$P_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ Q_{ij}^- - Q_{ij}^+ - M_{ij}^- + M_{ij}^+ - L_{ij}^- + L_{ij}^+ - R_{ij}^- + R_{ij}^+ \right\},$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ Q_{ij}^- + Q_{ij}^+ + M_{ij}^- + M_{ij}^+ + L_{ij}^- + L_{ij}^+ - R_{ij}^- - R_{ij}^+ \right\}, \quad (3.58)$$

где

$$\begin{aligned}
 Q_{ij}^- &= \xi_{iR}^- \int_0^\infty (\lambda^- + 2\mu^-) V_i^{(2)-} V_j^{(2)+} dz; & Q_{ij}^+ &= \xi_{jR}^+ \int_0^\infty (\lambda^+ + 2\mu^+) V_i^{(2)-} V_j^{(2)+} dz; \\
 M_{ij}^- &= \int_0^\infty \mu^- \frac{\partial V_i^{(2)-}}{\partial z} V_j^{(1)+} dz; & M_{ij}^+ &= \int_0^\infty \mu^+ \frac{\partial V_j^{(2)+}}{\partial z} V_i^{(1)-} dz; \\
 L_{ij}^- &= \xi_{iR}^- \int_0^\infty \mu^- V_i^{(1)-} V_j^{(1)+} dz; & L_{ij}^+ &= \xi_{iR}^+ \int_0^\infty \mu^+ V_i^{(1)-} V_j^{(1)+} dz; \\
 R_{ij}^- &= \int_0^\infty \lambda^- \frac{\partial V_j^{(1)+}}{\partial z} V_i^{(2)-} dz; & R_{ij}^+ &= \int_0^\infty \lambda^+ \frac{\partial V_i^{(1)-}}{\partial z} V_j^{(2)+} dz.
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Так как все коэффициенты связи оказываются вещественными, то и коэффициенты отражения и прохождения также получаются вещественными.

Рассмотрим теперь наклонное падение  $s$ -й моды поверхностной волны Лява или Рэлея под углом  $\theta_s^-$  на вертикальную границу. Отличие от случая нормального падения будет заключаться в следующем: во-первых, разные моды будут отражаться и преломляться под разными углами (соответственно  $\theta_{kD}^-$  или  $\theta_{kD}^+$ ), которые определяются фазовой скоростью соответствующей моды согласно закону Снеллиуса:

$$\xi_{kD}^\pm \sin \xi_{kD}^\pm = \xi_s^- \sin \theta_s^-, \tag{3.60}$$

и, во-вторых, при наклонном падении на границу волны Рэлея будут образовываться не только рэлеевские волны ( $D=R$ ), но и волны Лявы ( $D=L$ ) и наоборот.

При рассмотрении наклонного падения уже нельзя ограничиваться двумерным распространением волны. Тогда в теореме представления функция Грина должна соответствовать трехмерной задаче (см. § 1.2), а интегрирование должно выполняться не по контуру, а по замкнутой поверхности. В качестве таковой берется поверхность, ограничивающая рассматриваемое четвертьпространство, т.е. плоскости  $x=0$ ,  $z=0$ , и замыкающая поверхность на бесконечности. Как и в двумерном случае, из граничных условий и принципа предельного поглощения следует, что отличным от нуля оказывается только интеграл по плоскости  $x=0$ . Интегрирование по  $y$  производится приближенно, по методу стационарной фазы [48], что справедливо, если точка наблюдения находится на большом удалении от границы. При этом условие стационарности фазы приводит как раз к условию (3.60). Все дальнейшее рассмотрение проводится точно так же, как и для случая нормального падения волны, но при этом поле отраженных и преломленных волн представляется суммой мод волн обоих типов, т.е. Рэлея и Лява. В отличие от нормального падения коэффициенты связи между разными модами в одной и той же среде уже не будут равны нулю. Для удобства записи пронумеруем моды волн Рэлея и Лява последовательно, например, для мод волн Рэлея индекс моды от 1 до  $m_R$ , для волн Лява в той же среде — от  $1+m_R$  до  $m_R+m_L$ . В результате для коэффициентов отражения и прохождения получается система уравнений, аналогичная

(3.51), (3.52):

$$A_i \cos \theta_i^- = -\sum_j B_j P_{ij} + \sum_{k \neq i} A_k Q_{ik} + T_{is}, \quad (3.61)$$

$$B_j \cos \theta_j^+ = S_{sj}^* + \sum_i A_i P_{ij}^* - \sum_{l \neq j} B_l Y_{lj}^*,$$

где  $P_{ij}$ ,  $S_{ij}$  определяются формулами вида (3.49), (3.53), в которых в случае волн Лява

$$V_k(z) = V_k^{(3)}(e_y \cos \theta_k - e_x \sin \theta_k), \quad (3.62)$$

в случае волн Рэлея

$$V_k(z) = V_k^{(1)} e_z + V_k^{(2)}(e_x \cos \theta_k + e_y \sin \theta_k), \quad (3.63)$$

а  $p_k(z) = T(V_k(z) \exp[-i\xi_k D(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k)], e_x)$  при  $x = 0$ ,  $y = y_{ст}$  ( $y_{ст}$  — точка стационарной фазы). Соответственно  $Q_{ik}$  представляет коэффициент связи  $i$ -й и  $k$ -й мод отраженных волн в первой среде:

$$Q_{ik} = \frac{1}{J_i^-} \int_0^\infty (p_i^- V_k^* - p_k^* V_i^-) dz; \quad (3.64)$$

$T_{is}$  — коэффициент связи между  $i$ -й модой отраженной волны и  $s$ -й модой падающей волны:

$$T_{is} = \frac{1}{J_i^-} \int_0^\infty (p_i^- V_s^- - p_s^- V_i^-) dz; \quad (3.65)$$

$Y_{lj}$  — коэффициент связи между  $l$ -й и  $j$ -й гармониками преломленной волны:

$$Y_{lj} = \frac{1}{J_j^+} \int_0^\infty (p_l^{+*} V_j^* - p_j^{+*} V_l^*) dz. \quad (3.66)$$

В случае нормального падения все эти коэффициенты оказываются равными нулю вследствие условия ортогональности. Чтобы понять, какой вид имеют коэффициенты связи мод в случае наклонного падения, рассмотрим простейший случай падения рэлеевской волны под углом  $\theta^-$  на вертикальную границу однородных четвертьпространств. В этом случае будет образовываться только одна отраженная и одна преломленная рэлеевская волна. Угол преломления будем обозначать  $\theta^+$ . Вектор смещения в рэлеевской волне в системе координат, повернутой относительно исходной так, чтобы ось  $x$  совпала бы с направлением распространения волны, имеет составляющие  $(-iV^{(2)}, 0, V^{(1)})$ . В этой же системе координат напряжение, приложенное к плоскости, перпендикулярной направлению распространения, имеет составляющие  $(\bar{\sigma}_{11}, 0, -i\bar{\sigma}_{13})$ , где

$$\bar{\sigma}_{11} = -(\lambda + 2\mu)\xi V^{(2)} + \lambda \frac{\partial V^{(1)}}{\partial z}; \quad (3.67)$$

$$\bar{\sigma}_{13} = \mu \left( \frac{\partial V^{(2)}}{\partial z} + \xi V^{(1)} \right),$$

а составляющие напряжения, приложенного к плоскости падения, равны соответственно  $(0, \bar{\sigma}_{11} + 2\mu\xi V^{(2)}, 0)$ . Таким образом, напряжение, приложенное к плоскости  $x = 0$ , будет иметь вид  $\bar{\sigma}_{11}e_x - i\bar{\sigma}_{13}e_z \cos\theta - 2\mu\xi V^{(2)} \sin\theta(e_y \cos\theta - e_x \sin\theta)$ . Подставляя его и формулу для вектора смещений в (3.49), (3.53), получим следующие выражения для коэффициентов связи:

$$P = [I_1 \cos\theta^- - I_2 \cos\theta^+ + 2\xi^- \sin\theta^- \sin(\theta^- + \theta^+) I_3] / 2, \quad (3.68)$$

$$S = [-I_1 \cos\theta^- - I_2 \cos\theta^+ + 2\xi^- \sin\theta^- \sin(\theta^- - \theta^+) I_3] / 2,$$

где

$$I_1 = \int_0^{\infty} (\bar{\sigma}_{11}^+ V^{(2)-} + \bar{\sigma}_{13}^- V^{(1)+}) dz,$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} (\bar{\sigma}_{11}^- V^{(2)+} + \bar{\sigma}_{13}^+ V^{(1)-}) dz, \quad (3.69)$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} (\mu^+ - \mu^-) V^{(2)-} V^{(2)+} dz.$$

**Энергетические соотношения.** На границе раздела сред энергия падающей поверхностной волны перераспределяется: часть ее переходит в энергию проходящих поверхностных волн, часть — в энергию отраженных и, наконец, некоторая доля превращается в энергию неучитываемых объемных волн. Для выполнения граничных условий непрерывности смещений и напряжений на границе необходимо, чтобы поле объемных волн имело бы на границе  $x = 0$  скачки смещений и напряжений соответственно

$$[V] = V_{06}^+ - V_{06}^- = V_s^- + \sum_i A_i V_i^- - \sum_j B_j V_j^+, \quad (3.70)$$

$$[p] = p_{06}^+ - p_{06}^- = p_s^- + \sum_i A_i p_i^- - \sum_j B_j p_j^+,$$

что следует из граничных условий (3.42), (3.43). Эти граничные условия, записанные для случая нормального падения, справедливы и в случае наклонного падения волны, но при этом векторы  $V_i(z)$  и  $p_i(z)$  определяются в соответствии с (3.62), (3.63). Чтобы образовать такие смещения и напряжения на участке границы, представляющем полубесконечную полосу единичной ширины, необходимо затратить работу, которая за время, равное одному циклу колебаний, определится интегралом [38]

$$W = \frac{\pi}{2i} \int_0^{\infty} ([p]^* [V] - [V]^* [p]) dz. \quad (3.71)$$

Можно показать, что эта работа оказывается равной разности потоков энергии (за один цикл колебаний) в поверхностных волнах слева и справа от границы. Действительно, поток энергии, переносимой поверхностной волной через вертикальную полубесконечную полосу единичной ширины, равен

$$\rho = \frac{\pi}{2i} \int_0^{\infty} (p^* V - p V^*) dz, \quad (3.72)$$

где  $V(z)$  и  $p(z)$  характеризуют распределение по вертикали соответствен-

но смещений и напряжений, приложенных к вертикальной плоскости  $x = \text{const}$ . Подставляя в (3.72) выражения для смещений и напряжений слева (в падающей и отраженных волнах) и справа (в проходящих волнах) от границы и образуя разность этих выражений, получаем разность потоков энергии слева и справа

$$p^- - p^+ = \frac{\pi}{2i} \int_0^{\infty} ([p]^* [V] - [V]^* [p]) dz, \quad (3.73)$$

что в точности равно (3.71).

Таким образом, потеря энергии в поверхностных волнах оказывается равной работе, совершаемой скачком напряжений  $[p]$  на границе  $x = 0$ , чтобы образовать скачок смещений  $[V]$ . Эта работа и переходит в энергию неучитываемых объемных волн.

Далее можно показать, что эта энергия удовлетворяет условию стационарности по отношению к коэффициентам отражения и прохождения поверхностных волн, т.е. коэффициенты  $A_i$  и  $B_j$ , определяемые по описанному выше способу, удовлетворяют уравнениям

$$\partial W / \partial A_i = 0, \quad \partial W / \partial B_j = 0. \quad (3.74)$$

Справедливость этого утверждения легко проверяются подстановкой (3.70) в (3.71).

### § 3.4 Численный метод расчета поля смещений

Рассмотрим задачу о нормальном падении плоской гармонической волны Лява частоты  $\omega$  на жесткий вертикальный контакт  $x = 0$  (см. рис. 3.1) двух горизонтально-однородных слоистых четвертьпространств. Падающая волна распространяется из  $x = -\infty$  вдоль оси  $x$  и описывается выражением (3.1). Возбуждаемое поле смещений в этом случае имеет вид

$$u(x, z, t) = u(x, z) \exp(i\omega t) e_y.$$

Функция  $u(x, z)$  является решением краевой задачи, описанной в § 3.1. Вопросы существования и единственности этого решения были подробно исследованы в [29], а в [21, 116] был предложен численный метод расчета функции смещений  $u(x, z)$ , который мы здесь и опишем.

Пусть нам известны смещения на контакте  $u(0, z) = f(z)$ . Тогда (см. формулы (3.6), (3.7)) функция  $u(x, z)$  может быть представлена в виде

$$u(x, z) = \begin{cases} V_s^-(z) \exp(-i\xi_s^- x) + \sum_i A_i V_i^-(z) \exp(i\xi_i^- x) + \\ + \int_0^{\infty} A(\eta) V_{\eta}^-(z) \exp[i\xi_{\eta}^-(\eta) x] d\eta, & x \leq 0, \\ \sum_j B_j V_j^+(z) \exp(-i\xi_j^+ x) + \int_0^{\infty} B(\eta) V_{\eta}^+(z) \exp[-i\xi_{\eta}^+(\eta) x] d\eta, \\ x \geq 0, \end{cases} \quad (3.75)$$

где

$$A(\eta) = \int_0^{\infty} \mu^-(z) f(z) V_{\eta}^{-*}(z) dz, \quad A_i = \int_0^{\infty} \mu^-(z) f(z) V_i^-(z) dz - \delta_{is},$$

$$B(\eta) = \int_0^{\infty} \mu^+(z) f(z) V_{\eta}^{+*}(z) dz, \quad B_j = \int_0^{\infty} \mu^+(z) f(z) V_j^+(z) dz. \quad (3.76)$$

Системы собственных функций  $V_{\eta}^-(z)$ ,  $V_i^-(z)$  и  $V_{\eta}^+(z)$ ,  $V_j^+(z)$  образуют ортогональные базисы в пространстве функций, интегрируемых с квадратом (см. [29, 148]). Они удовлетворяют следующим условиям нормировки:

$$\int_0^{\infty} \mu^-(z) V_i^-(z) V_k^-(z) dz = \delta_{ik}, \quad \int_0^{\infty} \mu^-(z) V_{\eta}^-(z) V_{\lambda}^{-*}(z) dz = \delta(\eta - \lambda),$$

$$\int_0^{\infty} \mu^+(z) V_j^+(z) V_q^+(z) dz = \delta_{jq}, \quad \int_0^{\infty} \mu^+(z) V_{\eta}^+(z) V_{\lambda}^{+*}(z) dz = \delta(\eta - \lambda).$$

Формулы (3.75) и (3.76) при  $x=0$  дают разложения функции  $f(x)$  в этих базисах (предполагается, что  $f(z)$  интегрируема с квадратом). Для любой такой функции смещения  $u(x, z)$  вида (3.75) удовлетворяют дифференциальному уравнению (1.4), условиям непрерывности смещений и напряжений на границах слоев, условиям отсутствия напряжений на горизонтальной части свободной поверхности, условиям предельного поглощения на бесконечности и условию непрерывности смещений на вертикальном контакте  $x=0$ . Для произвольно выбранной функции  $f(z)$  не выполняется лишь условие непрерывности напряжений на контакте, которое имеет вид

$$\mu^-(z) \frac{\partial u(0-0, z)}{\partial x} = \mu^+(z) \frac{\partial u(0+0, z)}{\partial x}. \quad (3.77)$$

Подставляя в формулу (3.77) производные  $\partial u(x, z)/\partial x$  в  $x=0$  слева и справа, выраженные из (3.75), (3.76), получаем уравнение для функции  $f(z)$ . Однако это будет интегральное уравнение первого рода, численное решение которого ввиду его некорректности без предварительной регуляризации невозможно [87]. Заменяем условия непрерывности напряжений (3.77) их разностным аналогом

$$\mu^-(z) [u(0, z) - u(-\epsilon, z)]/\epsilon = \mu^+(z) [u(\epsilon, z) - u(0, z)]/\epsilon + O(\epsilon),$$

где  $\epsilon$  — малая положительная величина. Пренебрегая величинами  $O(\epsilon^2)$ , имеем

$$f(z) = u(0, z) = [\mu^-(z) u(-\epsilon, z) + \mu^+(z) u(\epsilon, z)]/(\mu^-(z) + \mu^+(z)). \quad (3.78)$$

Подставляя в соотношение (3.78)  $u(-\epsilon, z)$  и  $u(\epsilon, z)$ , выраженные с помощью формул (3.75) и (3.76), получаем для  $f(z)$  интегральное урав-



нение

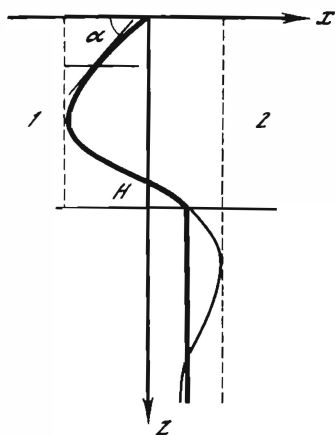
$$\begin{aligned}
 f(z) = & [\mu^-(z)/(\mu^-(z) + \mu^+(z))] \{ V_s^-(z) [\exp(i\xi_s^- \epsilon) - \exp(-i\xi_s^- \epsilon)] + \\
 & + \sum_i V_i^-(z) \exp(-i\xi_i^- \epsilon) \int_0^\infty \mu^-(\tau) f(\tau) V_i^-(\tau) d\tau + \\
 & + \int_0^\infty V_\eta^-(z) \exp[-i\xi_\eta^-(\eta) \epsilon] \int_0^\infty \mu^-(\tau) f(\tau) V_\eta^{-*}(\tau) d\tau d\eta \} + \\
 & + [\mu^+(z)/(\mu^-(z) + \mu^+(z))] \{ \sum_j V_j^+(z) \exp(-i\xi_j^+ \epsilon) \int_0^\infty \mu^+(\tau) f(\tau) \times \\
 & \times V_j^+(\tau) d\tau + \int_0^\infty V_\eta^+(z) \exp[-i\xi_\eta^+(\eta) \epsilon] \int_0^\infty \mu^+(\tau) f(\tau) V_\eta^{+*}(\tau) d\tau d\eta \}. \quad (3.79)
 \end{aligned}$$

Можно показать, что если функция  $f(z)$  удовлетворяет уравнению (3.79) с точностью  $O(\epsilon^2)$ , то она отличается от истинной функции смещений на контакте  $u(0, z)$  на величину порядка  $\epsilon$ . Это справедливо и в том случае, когда  $\epsilon$  — комплексная малая величина  $\epsilon_0(1+i)$ , где  $\epsilon_0$  — вещественно. В [21] показано, что при таком выборе  $\epsilon$  ( $\epsilon_0 > 0$ ) метод последовательных приближений, примененный к уравнениям (3.79), сходится. Если  $f_{n-1}(z)$  и  $f_n(z)$  — две итерации  $f(z)$  и их разность является величиной  $O(\epsilon_0^n)$ , то  $f_n(z)$  отличается от функции  $u(0, z)$  на величину  $O(\epsilon_0)$ . Таким образом, получив с помощью метода последовательных приближений с заданной точностью решение уравнения (3.79)  $f(z)$ , по формулам (3.75) и (3.76) можно оценить смещения  $u(x, z)$  в любой точке и значения коэффициентов отражения  $A_i$  и коэффициентов прохождения  $B_j$ .

### § 3.5. Случай наклонного контакта и другие возможные усложнения модели

Рассмотренные в предыдущих параграфах модели среды, содержащие вертикальный контакт вертикально-неоднородных четвертьпространств, являются, конечно, весьма грубым приближением к характеристикам строения реальной среды в областях сочленения разнородных блоков. Как правило, и зоны разломов, и тем более зоны перехода от континентальной структуры к океанической являются наклонными. Поэтому более адекватной моделью таких переходных зон является наклонная граница раздела блоков. В связи с этим в ряде работ рассматривалась задача о прохождении поверхностной волны через невертикальную — наклонную и криволинейную — границу раздела. Работа [66] посвящена изучению влияния наклона границы раздела однородных сред на распространение волны Рэлея, в которой, в частности, показано, что в данном случае коэффициенты отражения — прохождения являются комплексными. В [161] решена задача об отражении и прохождении рэлеевских волн через криволинейную границу методом Олсопа и также получены комплексные коэффициенты отражения — прохождения. В работе [41] показано, что описанный в § 3.3 подход, основанный на методе функций Грина, может быть без особого труда перенесен и на случай невертикальной границы. Прежде чем переходить к описанию

Рис. 3.4. Модель криволинейной границы  
 Жирной линией изображена принятая аппроксимация границы для волн, глубина проникания которых меньше  $H$



этого подхода, остановимся на ограничениях, которые должны быть наложены на конфигурацию границы.

В используемом методе, так же как и во всех других исследованиях распространения поверхностных волн в средах с криволинейными или наклонными границами, предполагается, что все поверхностные волны (падающая, отраженные, проходящие) распространяются слева и справа от контакта так же, как и в полупространстве с соответствующими параметрами. Однако такое приближение может считаться справедливым только в случае вертикального контакта. В случае же криволинейной границы на участке, в пределах которого заключены абсциссы точек границы, среда не соответствует ни среде 1, ни среде 2 (на рис. 3.4. такой участок заключен между вертикальными пунктирными линиями). В случае же бесконечно протяженной наклонной границы такое несоответствие имеет место целиком для всей среды со стороны острого угла. Поэтому представляется естественным ввести определенное ограничение на конфигурацию границы, а именно считать, что, начиная с некоторой глубины  $H$ , граница является вертикальной (рис. 3.4). Такая аппроксимация границы не повлияет на характеристики поверхностных волн, у которых глубина проникания меньше  $H$ . Кроме того, при моделировании переходных зон в реальной земле такое ограничение не является существенным, потому что обычно различия в характере структур, находящихся по обе стороны контакта, нивелируются с глубиной, так что представляется правоммерным продолжить границу контакта в глубину по вертикали.

Другое очевидное ограничение состоит в том, что длина участка, заключенного между наиболее удаленными по горизонтали точками границы, не должна во всяком случае превосходить длину волны. В противном случае на таком участке будут формироваться волны с характеристиками, отличными от волн, распространяющихся слева и справа от этого участка, и поле этих волн будет влиять на волновое поле на больших удалениях.

Границы, удовлетворяющие этим двум условиям, будем называть субвертикальными и дальнейшие рассмотрения будем проводить только для субвертикальных границ.

Примем уравнение, определяющее границу раздела сред, в виде  $x = x(z)$ , т.е. граница считается цилиндрической поверхностью вдоль оси  $y$ . Наклон границы в каждой точке определяется углом  $\alpha = \arctg(-dx/dz)$  (рис. 3.4). Для удобства поместим начало координат в точку пересечения границы с поверхностью  $z = 0$ , так что  $x(0) = 0$ . Рассмотрим общий случай падения  $s$ -й моды поверхностной волны на границу под некоторым углом  $\theta_s$ . Используя метод, описанный в § 3.3, нетрудно показать, что уравнения для

определения коэффициентов отражения и прохождения в этом случае будут иметь точно такой же вид, как и в случае вертикальной границы (уравнения (3.61), в которых коэффициенты связи мод будут определяться по формулам, аналогичным (3.49), (3.53), (3.62)–(3.64)). Отличие будет заключаться в том, что интегрирование в этих формулах будет проводиться не по координате  $z$ , а вдоль контура границы  $L$ . Так, например, коэффициент связи между  $i$ -й модой отраженной волны и  $j$ -й модой проходящей волны будет иметь вид

$$P_{ij} = \frac{1}{2i} \int_L [\mathbf{T}^*(\hat{\mathbf{u}}_i^{\text{отр}}, \mathbf{n}) \hat{\mathbf{u}}_j^{\text{прел}} - \hat{\mathbf{u}}_i^{\text{отр}*} \mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}}_j^{\text{прел}}, \mathbf{n})] dl, \quad (3.80)$$

где  $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{n})$  — напряжение, приложенное к границе в данной точке. Если нормаль  $\mathbf{n}$  к границе направить так, что она будет составлять с осью  $x$  острый угол, то

$$\mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{e}_x) \cos \alpha + \mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{e}_z) \sin \alpha. \quad (3.81)$$

Интегрирование в (3.80) проводится вдоль границы, так что  $dl = dz / \cos \alpha(z)$ .

По формулам, аналогичным (3.80), определяются и все остальные коэффициенты связи мод.

При вычислении коэффициентов связи следует иметь в виду, что значения  $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{n})$  и  $\hat{\mathbf{u}}$  в подынтегральной функции должны вычисляться в точках  $x(z)$ . Зависимость  $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{n})$  и  $\hat{\mathbf{u}}$  от  $x$  определяется экспонентой типа  $\exp[\mp i k_x^{\pm} x \cos \theta_i^{\pm}]$ . Отсюда видно, что коэффициенты связи в этом случае должны получиться комплексными и соответственно комплексными будут коэффициенты отражения и прохождения.

Другим возможным усложнением модели, приближающим ее к реальной среде, является допущение, что среда справа и слева от контакта является слабонеоднородной по горизонтали, а граница в плане не прямолинейная (рис. 3.4). В этом случае как падающая, так и отраженные и проходящие волны будут распространяться по криволинейным траекториям, определяемым уравнением луча (2.52). Падающая волна будет испытывать отражение и преломление, при этом согласно выводам настоящей главы мы можем оценивать интенсивность образованных поверхностных волн лишь на достаточном удалении от границы. При этом интенсивность волны будет определяться как величиной соответствующего коэффициента (отражения или прохождения), так и изменением геометрического расхождения волны при пересечении границы. Метод определения изменения геометрического расхождения пространственно-временных лучей описан в § 2.5, а способ приближенной оценки коэффициентов приведен в настоящей главе. Изменение же геометрического расхождения при движении вдоль луча определяется системами дифференциальных уравнений (2.85), (2.92).

Обратим внимание на то, что пространственно-временной лучевой метод дает возможность определять не спектральную амплитуду, а непосредственно амплитуду волны на сейсмограмме, и это дает возможность строить сейсмограмму, не прибегая к спектральным преобразованиям. В то же время коэффициенты отражения и прохождения, оцениваемые описанным здесь методом, соответствуют стационарным волнам, т.е. они являются спектральными коэффициентами. Однако для построения теоретической

сейсмограммы в соответствии с описанной здесь схемой это обстоятельство несущественно. Это можно легко увидеть, если выразить поле поверхностной волны в виде интеграла Фурье и проводить оценку этого интеграла методом стационарной фазы. Спектральный коэффициент отражения—прохождения, входящий в виде множителя в подынтегральную функцию, является медленно меняющейся функцией, так что его значение при частоте, отвечающей стационарной точке, будет входить в качестве множителя в выражение для амплитуды сигнала. Таким образом, хотя процесс распространения волны в модели, содержащей как слабые горизонтальные неоднородности, так и границы между отдельными блоками, описывается в рамках пространственно-временного лучевого метода, а энергетические потери при отражении—преломлении на границах раздела оцениваются на основе спектрального подхода, результаты, получаемые исходя из этих двух различных подходов, оказывается возможным объединить и таким образом вычислить все необходимые элементы для построения сейсмограммы для моделей, приближающихся к реальным структурам. Это, конечно, сопряжено с большими вычислительными трудностями, но, по-видимому, вполне осуществимо на ЭВМ пятого поколения. Алгоритмы отдельных этапов вычислительного процесса будут описаны в гл. 4.

## Глава 4

### АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТА ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

В этой главе будут рассмотрены некоторые алгоритмы расчета полей поверхностных волн, применявшихся в работах авторов, и приведены примеры расчетов. Поскольку теория поверхностных волн в горизонтально-неоднородных средах, изложенная в гл. 2 и 3, в своей основе использует свойства собственных функций и собственных значений одномерных краевых задач для волн Лява и Рэлея, рассмотренных в гл. 1, мы вначале (§ 4.1 и 4.2) остановимся на решении этих задач. Учитывая, что этой проблеме посвящена обширная литература (см., например [26, 63, 68—71, 94, 100, 142, 149, 152, 187, 193, 199]), мы обсудим лишь некоторые аспекты решения, нужные для дальнейшего изложения или содержащие новые в алгоритмическом отношении идеи. Два следующих параграфа посвящены непосредственно расчетным методикам, применяемым для горизонтально-неоднородных сред, а именно расчету лучей поверхностных волн (§ 4.3) и коэффициентов отражения—прохождения при наличии вертикального контакта (§ 4.4).

#### 4.1. Матричный алгоритм решения одномерных краевых задач

Наиболее часто для расчета собственных значений и собственных функций одномерных краевых задач, соответствующих волнам Лява и Рэлея, применяются матричные методы, развитие которых началось с работ Томсона [193] и Хаскелла [142]. В них используется аппроксимация верти-

кально-неоднородной среды системой  $n$  однородных слоев, лежащих на однородном полупространстве.

В однородных слоях собственные функции представляются линейными комбинациями экспонент или тригонометрических функций, если показатели экспонент оказываются мнимыми. Коэффициенты при экспонентах в соседних слоях связаны между собой линейными соотношениями, выражающими условия непрерывности напряжений и смещений на границах. Поэтому, используя аппарат матричной алгебры, можно выразить коэффициенты для верхнего слоя через коэффициенты для полупространства. Учитывая далее граничное условие равенства нулю напряжений на свободной границе, можно построить функцию, являющуюся левой частью дисперсионного уравнения

$$\Phi(\omega, \xi) = 0. \quad (4.1)$$

Рассмотрим отдельно построение этой функции для волн Лява и волн Рэлея.

**Волна Лява.** Для волны Лява зависимость смещения  $V^{(3)}$  от глубины  $z$  в  $i$ -м слое может быть представлена в виде

$$V_i^{(3)}(z) = A_i \exp[\beta_i(z - z_i)] + B_i \exp[-\beta_i(z - z_i)], \quad z_{i-1} < z < z_i, \quad (4.2)$$

где  $\beta_i^2 = \xi^2 - \omega^2/b_i^2$ ;  $z_{i-1}$  — глубина верхней границы  $i$ -го слоя,  $i = 1, 2, \dots, n+1$ ;  $z_0 = 0$ .

Если  $\xi < \omega/b_i$ , то аргументы экспонент будут мнимыми, так что (4.2) можно привести к тригонометрической форме. Однако для единообразия мы будем всюду представлять смещения в форме (4.2), имея в виду, что значение  $\beta_i$  может быть либо положительным действительным, либо мнимым.

Граничные условия на  $z_i$  — границе, разделяющей  $i$ -й и  $(i+1)$ -й слои, имеют вид

$$\begin{aligned} A_i e^{\beta_i H_i} + B_i e^{-\beta_i H_i} &= A_{i+1} + B_{i+1}, \\ \mu_i \beta_i (A_i e^{\beta_i H_i} - B_i e^{-\beta_i H_i}) &= \mu_{i+1} \beta_{i+1} (A_{i+1} - B_{i+1}), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $H_i = z_i - z_{i-1}$  — мощность  $i$ -го слоя. Иначе эти условия можно записать следующим образом:

$$L_i K_i \begin{Bmatrix} A_i \\ B_i \end{Bmatrix} = L_{i+1} \begin{Bmatrix} A_{i+1} \\ B_{i+1} \end{Bmatrix}, \quad (4.4)$$

где

$$L_i = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ \mu_i \beta_i & -\mu_i \beta_i \end{Bmatrix}; \quad K_i = \begin{Bmatrix} e^{\beta_i H_i} & 0 \\ 0 & e^{-\beta_i H_i} \end{Bmatrix}, \quad (4.5)$$

откуда

$$\begin{Bmatrix} A_i \\ B_i \end{Bmatrix} = K_i^{-1} L_i^{-1} L_{i+1} \begin{Bmatrix} A_{i+1} \\ B_{i+1} \end{Bmatrix}. \quad (4.6)$$

Последовательно выражая коэффициенты первого слоя через коэффициенты второго, коэффициенты второго через коэффициенты третьего и т.д., получим окончательно связь между коэффициентами, соответствующими

щими первому слою и полупространству:

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ B_1 \end{vmatrix} = K_1^{-1} L_1^{-1} L_2 K_2^{-1} L_2^{-1} \dots L_n K_n^{-1} L_n^{-1} L_{n+1} \begin{vmatrix} 0 \\ B_{n+1} \end{vmatrix} \quad (4.7)$$

(в силу условия  $V^{(3)}(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$  в полупространстве  $A_{n+1} = 0$ ).  
Условие, выражающее отсутствие напряжения на свободной поверхности  $z = 0$ , имеет вид

$$\mu_1 \beta_1 (A_1 - B_1) = 0,$$

иначе его можно записать так:

$$\begin{vmatrix} \mu_1 \beta_1 & -\mu_1 \beta_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 \\ B_1 \end{vmatrix} = 0$$

или, учитывая выражение (4.7),

$$(\mathbf{J} \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2 \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{L}_2^{-1} \dots \mathbf{L}_n \mathbf{K}_n^{-1} \mathbf{L}_n^{-1} \mathbf{L}_{n+1} \mathbf{G}) \mathbf{B}_{n+1} = 0, \quad (4.8)$$

где

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \mu_1 \beta_1 & -\mu_1 \beta_1 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Матрицу  $\mathbf{F}_i = \mathbf{L}_i \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{L}_i^{-1}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) называют матрицей слоя. Нетрудно показать, что

$$\mathbf{F}_i = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} \beta_i H_i & -\frac{1}{\mu_i \beta_i} \operatorname{sh} \beta_i H_i \\ -\mu_i \beta_i \operatorname{sh} \beta_i H_i & \operatorname{ch} \beta_i H_i \end{vmatrix}. \quad (4.9)$$

Матрица  $\mathbf{J} \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{L}_1^{-1}$  размером  $1 \times 2$ , относящаяся к первому слою, равна  $(0, 1) \mathbf{F}_1$ . Обозначим ее  $\mathbf{Q}_1$ :

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{vmatrix} -\mu_1 \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 H_1 & \operatorname{ch} \beta_1 H_1 \end{vmatrix} \quad (4.10)$$

(нетрудно видеть, что она равна второй строке матрицы  $\mathbf{F}_1$ ), а матрицу  $\mathbf{L}_{n+1} \mathbf{G}$  размером  $2 \times 1$ , относящуюся к полупространству, обозначим  $\mathbf{R}_{n+1}$ :

$$\mathbf{R}_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 \\ -\mu_{n+1} \beta_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, окончательно дисперсионное уравнение для волны Лява можно записать в виде

$$\mathbf{Q}_1 \prod_{i=2}^n \mathbf{F}_i \mathbf{R}_{n+1} = 0, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} \prod_{i=1}^n \mathbf{F}_i \mathbf{R}_{n+1} = 0. \quad (4.11)$$

**Волна Рэлея.** Вертикальное  $V^{(1)}(z)$  и горизонтальное  $V^{(2)}(z)$  смещения в волне Рэлея в  $i$ -м слое записываются таким образом:

$$V_i^{(1)} = A_i \exp[\alpha_i(z - z_{i-1})] + B_i \exp[-\alpha_i(z - z_{i-1})] + C_i \exp[\beta_i(z - z_{i-1})] + D_i \exp[-\beta_i(z - z_{i-1})],$$

$$V_i^{(2)} = A_i \frac{\xi}{\alpha_i} \exp[\alpha_i(z - z_{i-1})] - B_i \frac{\xi}{\alpha_i} \exp[-\alpha_i(z - z_{i-1})] + C_i \frac{\beta_i}{\xi} \exp[\beta_i(z - z_{i-1})] - D_i \frac{\beta_i}{\xi} \exp[-\beta_i(z - z_{i-1})], \quad (4.12)$$

где  $\alpha_i^2 = \xi^2 - \omega^2/a^2$ .

Связь между коэффициентами  $i$ -го и  $(i + 1)$ -го слоев имеет вид, аналогичный (4.4), но матрицы  $L_i$  и  $K_i$  будут иметь размер  $4 \times 4$ , а векторы-столбцы неизвестных коэффициентов будут составлены четырьмя коэффициентами:  $A_i, B_i, C_i, D_i$ . Запишем выражения для матриц  $L_i$  и  $K_i$ :

$$L_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \xi/\alpha_i & -\xi/\alpha_i & \beta_i/\xi & -\beta_i/\xi \\ \mu_i p_i / \alpha_i & -\mu_i p_i / \alpha_i & 2\mu_i \beta_i & -2\mu_i \beta_i \\ 2\mu_i \xi & 2\mu_i \xi & \mu_i p_i / \xi & \mu_i p_i / \xi \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

$$K_i = \begin{pmatrix} e^{\alpha_i H_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\alpha_i H_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\beta_i H_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\beta_i H_i} \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

где  $p_i = 2\xi^2 - k_i^2$ ,  $k_i = \omega/b_i$ .

Прежде чем строить матрицу слоя  $F_i = L_i K_i^{-1} L_i^{-1}$ , выпишем отдельно, имея в виду дальнейшее изложение (§ 4.3), выражения для матриц  $K_i^{-1}$  и  $L_i^{-1}$ . Матрица  $K_i^{-1}$  определяется элементарно:

$$K_i^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha_i H_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha_i H_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta_i H_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\beta_i H_i} \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

а матрица  $L_i^{-1}$  имеет следующий вид:

$$L_i^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{p_i}{2k_i^2} & \frac{\alpha_i \xi}{k_i^2} & -\frac{\alpha_i}{2\mu_i k_i^2} & \frac{\xi}{2\mu_i k_i^2} \\ -\frac{p_i}{2k_i^2} & -\frac{\alpha_i \xi}{k_i^2} & \frac{\alpha_i}{2\mu_i k_i^2} & \frac{\xi}{2\mu_i k_i^2} \\ \xi^2/k_i^2 & -\frac{p_i \xi}{2k_i^2 \beta_i} & \frac{\xi^2}{2\mu_i k_i^2 \beta_i} & -\frac{\xi}{2\mu_i k_i^2} \\ \xi^2/k_i^2 & \frac{p_i \xi}{2k_i^2 \beta_i} & -\frac{\xi^2}{2\mu_i k_i^2 \beta_i} & -\frac{\xi}{2\mu_i k_i^2} \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

Теперь нетрудно показать, что элементы  $f_{jk}$  матрицы слоя  $F_i$  имеют вид (для простоты индекс  $i$  всюду опускаем):

$$\begin{aligned}
 f_{11} &= -\frac{p}{k^2} \operatorname{ch} \alpha H + \frac{2\xi^2}{k^2} \operatorname{ch} \beta H, \\
 f_{12} &= -\frac{2\alpha\xi}{k^2} \operatorname{sh} \alpha H + \frac{p\xi}{k^2\beta} \operatorname{sh} \beta H, \\
 f_{13} &= \frac{\alpha}{\mu k^2} \operatorname{sh} \alpha H - \frac{\xi^2}{\mu k^2\beta} \operatorname{sh} \beta H, \\
 f_{14} &= \frac{\xi}{\mu k^2} (\operatorname{ch} \alpha H - \operatorname{ch} \beta H), \\
 f_{21} &= \frac{\xi p}{\alpha k^2} \operatorname{sh} \alpha H - \frac{2\xi\beta}{k^2} \operatorname{sh} \beta H, \\
 f_{22} &= \frac{2\xi^2}{k^2} \operatorname{ch} \alpha H - \frac{p}{k^2} \operatorname{ch} \beta H, \\
 f_{23} &= -\frac{\xi}{\mu k^2} (\operatorname{ch} \alpha H - \operatorname{ch} \beta H), \\
 f_{24} &= -\frac{\xi^2}{\mu k^2\alpha} \operatorname{sh} \alpha H + \frac{\beta}{\mu k^2} \operatorname{sh} \beta H, \\
 f_{31} &= \frac{\mu p^2}{\alpha k^2} \operatorname{sh} \alpha H - \frac{4\mu\beta\xi^2}{k^2} \operatorname{sh} \beta H, \\
 f_{32} &= \frac{2\mu p\xi}{k^2} (\operatorname{ch} \alpha H - \operatorname{ch} \beta H), \\
 f_{33} &= -\frac{p}{k^2} \operatorname{ch} \alpha H + \frac{2\xi^2}{k^2} \operatorname{ch} \beta H, \\
 f_{34} &= -\frac{p\xi}{\alpha k^2} \operatorname{sh} \alpha H + \frac{2\xi\beta}{k^2} \operatorname{sh} \beta H, \\
 f_{41} &= -\frac{2\mu p\xi}{k^2} (\operatorname{ch} \alpha H - \operatorname{ch} \beta H), \\
 f_{42} &= -\frac{4\alpha\mu\xi^2}{k^2} \operatorname{sh} \alpha H + \frac{\mu p^2}{\beta k^2} \operatorname{sh} \beta H,
 \end{aligned} \tag{4.17}$$



$$f_{43} = \frac{2\xi\alpha}{k^2} \operatorname{sh} \alpha H - \frac{\xi p}{\beta k^2} \operatorname{sh} \beta H,$$

$$f_{44} = \frac{2\xi^2}{k^2} \operatorname{ch} \alpha H - \frac{p}{k^2} \operatorname{ch} \beta H.$$

Соотношение, связывающее коэффициенты для первого слоя с коэффициентами для полупространства, в этом случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = K_1^{-1} L_1^{-1} F_2 F_3 \dots F_n L_{n+1} \begin{pmatrix} 0 \\ B_{n+1} \\ 0 \\ D_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

а граничное условие на свободной поверхности записывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \frac{\mu_1 p_1}{\alpha_1} & -\frac{\mu_1 p_1}{\alpha_1} & 2\mu_1 \beta_1 & -2\mu_1 \beta_1 \\ 2\mu_1 \xi & 2\mu_1 \xi & \frac{\mu_1 p_1}{\xi} & \frac{\mu_1 p_1}{\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Легко видеть, что матрица в этом соотношении есть

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_1.$$

Обозначим

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Введем также соответствующую полупространству матрицу  $R_{n+1}$  размером  $4 \times 2$ , составленную вторым и четвертым столбцами матрицы  $L_{n+1}$ :

$$R_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\xi/\alpha_{n+1} & -\beta_{n+1}/\xi \\ -\mu_{n+1} p_{n+1}/\alpha_{n+1} & -2\mu_{n+1} \beta_{n+1} \\ 2\mu_{n+1} \xi & \mu_{n+1} p_{n+1}/\xi \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Из (4.18) с учетом (4.19) получаем следующую систему уравнений относительно  $B_{n+1}$ ,  $D_{n+1}$ :

$$Q_1 \prod_{i=2}^n F_i R_{n+1} \begin{pmatrix} B_{n+1} \\ D_{n+1} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.20)$$

Чтобы эта система имела нулевое решение, необходимо, чтобы ее определитель обращался в нуль:

$$\det(Q_1 \prod_{i=2}^n F_i R_{n+1}) = 0. \quad (4.21)$$

Это соотношение и является дисперсионным уравнением для волны Рэлея. В некоторых случаях его удобнее записывать так:

$$\det \left( G_1 \prod_{i=1}^n F_i R_{n+1} \right) = 0, \quad (4.22)$$

где

$$G_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

При исследовании поверхностных волн, распространяющихся через океанические структуры, необходимо рассматривать модели, в которых верхний слой является жидким. Очевидно, что жидкий слой влияет только на распространение рэлеевских волн; для волн Лява граница жидкого и твердого слоев является свободной границей, так что при рассмотрении волн Лява жидкий слой следует просто игнорировать.

Выражения для смещений в рэлеевской волне в жидком слое ( $i = 1$ ) будут содержать только два неизвестных коэффициента:

$$V^{(1)} = A_1 e^{\alpha_1 z} + B_1 e^{-\alpha_1 z}, \quad (4.23)$$

$$V^{(2)} = \frac{\xi}{\alpha_1} A_1 e^{\alpha_1 z} - \frac{\xi}{\alpha_1} B_1 e^{-\alpha_1 z}, \quad 0 \leq z < z_1 = H_1.$$

Дисперсионное уравнение в данном случае строится, исходя из граничных условий равенства нулю тангенциального напряжения на границе твердого и жидкого слоев и равенства нулю нормальной составляющей напряжения на свободной поверхности жидкого слоя. Такая разнородность граничных условий (одно условие на верхней, другое — на нижней границе жидкого слоя) приводит к некоторым осложнениям при построении дисперсионного уравнения.

Связь между коэффициентами, относящимися к жидкому и подстилающему его твердому слоям, выражается исходя из граничных условий равенства вертикальной составляющей смещения и нормальной составляющей напряжения:

$$L_1^* K_1^* \begin{vmatrix} A_1 \\ B_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} L_2 \begin{vmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{vmatrix}, \quad (4.24)$$

где матрицы  $L_1^*$  и  $K_1^*$  имеют вид

$$L_1^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\omega^2 \rho_1}{\alpha_1} & \frac{\omega^2 \rho_1}{\alpha_1} \end{vmatrix}, \quad K_1^* = \begin{vmatrix} e^{\alpha_1 H_1} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha_1 H_1} \end{vmatrix}. \quad (4.25)$$

Из этого соотношения следует, что

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ B_1 \end{vmatrix} = (\mathbf{K}_1^*)^{-1} (\mathbf{L}_1^*)^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{L}_2 \begin{vmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{vmatrix}. \quad (4.26)$$

Граничное условие на свободной поверхности жидкости слоя можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} -\frac{\omega^2 \rho_1}{\alpha_1} & \frac{\omega^2 \rho_1}{\alpha_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 \\ B_1 \end{vmatrix} = 0$$

или с учетом (4.26)

$$\begin{vmatrix} -\frac{\omega^2 \rho_1}{\alpha_1} & \frac{\omega^2 \rho_1}{\alpha_1} \end{vmatrix} (\mathbf{K}_1^*)^{-1} (\mathbf{L}_1^*)^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{L}_2 \begin{vmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{vmatrix}. \quad (4.27)$$

В этом соотношении легко определить произведение первых четырех матриц:

$$\begin{vmatrix} -\frac{\omega^2 \rho_1}{\alpha_1} & \frac{\omega^2 \rho_1}{\alpha_1} \end{vmatrix} (\mathbf{K}_1^*)^{-1} (\mathbf{L}_1^*)^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} \frac{\omega^2 \rho_1}{\alpha_1} & \text{sh}_1 H_1 & 0 & \text{ch}_1 H_1 \\ 0 & \text{ch}_1 H_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Граничное условие равенства нулю тангенциальной составляющей напряжения на границе жидкого и твердого слоев можно записать так:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{L}_2 \begin{vmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Объединим оба граничных условия:

$$\mathbf{Q}_1^* \mathbf{L}_2 \begin{vmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (4.28)$$

где

$$\mathbf{Q}_1^* = \begin{vmatrix} \frac{\omega^2 \rho_1}{\alpha_1} \text{sh}_1 H_1 & 0 & \text{ch}_1 H_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4.29)$$

Нетрудно видеть, что дисперсионное уравнение в случае, когда верхний слой является жидким, имеет вид (4.21); отличие заключается только в

выражении для матрицы  $Q_1$ . Заметим, что если  $H_1 \rightarrow 0$ , то матрица  $Q_1^*$  переходит в матрицу  $G_1$ , и дисперсионное уравнение принимает форму, соответствующую системе упругих слоев (4.21).

Таким образом, как для волн Лява, так и для волн Рэлея в  $n$ -слойной системе (включающей и случай, когда верхний слой является жидким) дисперсионное уравнение может быть представлено в виде (4.21), в котором левая часть вычисляется в соответствии с одним из описанных выше алгоритмов. Уравнение это можно решать, либо задавая фазовую скорость  $C$  и определяя значения частоты  $\omega$ , соответствующие заданным модам, либо задавая значение частоты  $\omega$  и определяя соответствующие этой частоте значения волнового числа  $\xi$ . Для решения задач, основанных на спектральном представлении волнового поля, последний вариант предпочтительнее. Но при его реализации возникает трудность, связанная с тем, что нельзя оценить заранее общее число мод, соответствующих заданной частоте. Нахождение же всех корней трансцендентного уравнения  $\Phi(x) = 0$  в заданном конечном интервале  $x_1 \leq x \leq x_2$  каким-либо численным методом может быть осуществлено, только если известно заранее общее число корней. Поэтому производить расчёт корней дисперсионного уравнения  $\Phi(\omega, \xi) = 0$  можно только для последовательно возрастающих частот, начиная либо с  $\omega = 0$ , для которой существует только одна мода, либо с такой частоты, для которой точно известно общее число мод. Расчет проводится с некоторым, достаточно малым шагом по частоте ( $\Delta\omega$ ), и в процессе счета производится проверка, не появилось ли при переходе от  $\omega_k$  к  $\omega_{k+1} = \omega_k + \Delta\omega$  следующей моды, или, что то же самое, дополнительного корня внутри интервала  $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$ , в котором могут существовать вещественные корни  $\Phi(\omega, \xi)$ . Такую проверку можно осуществить, например, путем слежения за знаком произведения  $\Phi(\omega, \xi_{\min})\Phi(\omega, \xi_{\max})$ . Если при переходе от  $\omega_k$  к  $\omega_{k+1}$  знак этого произведения изменился, значит число мод, соответствующих  $\omega_{k+1}$ , на единицу больше, чем число мод, соответствующих  $\omega_k$ . При этом очевидно, что шаг  $\Delta\omega$  не должен превышать расстояния по частоте между точками появления соседних ветвей дисперсионной кривой.

Когда значение  $\xi$  найдено, определяются значения коэффициентов в выражениях для собственных функций (4.2) или (4.12). Это легко сделать, полагая один из коэффициентов равным, например, единице. Для волн Лява соответственно принять  $B_{n+1} = 1$ , тогда

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = K_n^{-1} L_n^{-1} L_{n+1} G$$

и последующие значения коэффициентов для  $(n-1)$ -го,  $(n-2)$ -го и т.д. слоев находятся по формуле (4.6).

По вычисленным значениям коэффициентов можно определить интегралы (1.29), (1.30), (1.46). Далее они могут в зависимости от требований задачи использоваться для той или иной нормировки собственных функций, а также для вычисления групповой скорости по интегральной формуле (1.45). Приведем выражения для этих интегралов.

Волна Лява:

$$I_L^{(0)} = \int_0^{\infty} \rho [V^{(3)}(z)]^2 dz = \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i S_i, \quad I_L^{(1)} = \int_0^{\infty} \mu [V^{(3)}(z)]^2 dz = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i S_i, \quad (4.30)$$

где

$$S_i = \left( A_i^2 e^{\beta_i H_i} + B_i^2 e^{-\beta_i H_i} \right) \frac{\text{sh} \beta_i H_i}{\beta_i} + 2 A_i B_i H_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (4.31)$$

$$S_{n+1} = B_{n+1}^2 / 2 \beta_{n+1}.$$

Волна Рэлея:

$$I_R^{(0)} = \int_0^{\infty} \rho \left[ (V^{(1)})^2 + (V^{(2)})^2 \right] dz = \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i \left[ \left( 1 + \frac{\xi^2}{\alpha_i^2} \right) S_i^{(1)} + \left( 1 + \frac{\xi^2}{\beta_i^2} \right) S_i^{(2)} + S_i^{(3)} + S_i^{(4)} + 2 \left( 1 + \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right) S_i^{(5)} + 2 \left( 1 - \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right) S_i^{(6)} \right], \quad (4.32)$$

$$I_R^{(1)} + I_R^{(2)} + \frac{1}{\xi} (I_R^{(3)} + I_R^{(4)}) = \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i \left[ \left( 4b_i^2 + \frac{\omega^2}{\alpha_i^2} \right) S_i^{(1)} + \left( 4b_i^2 + \frac{\omega^2}{\beta_i^2} \right) S_i^{(2)} + a_i^2 S_i^{(3)} + b_i^2 S_i^{(4)} + \left( r_i + \frac{\beta_i}{\alpha_i} q_i \right) S_i^{(5)} + \left( r_i - \frac{\beta_i}{\alpha_i} q_i \right) S_i^{(6)} \right]. \quad (4.33)$$

Здесь

$$S_i^{(1)} = (A_i^2 e^{\alpha_i H_i} + B_i^2 e^{-\alpha_i H_i}) \frac{\text{sh} \alpha_i H_i}{\alpha_i},$$

$$S_i^{(2)} = \frac{\beta_i^2}{\xi^2} (C_i^2 e^{\beta_i H_i} + D_i^2 e^{-\beta_i H_i}) \frac{\text{sh} \beta_i H_i}{\beta_i},$$

$$S_i^{(3)} = -\frac{A_i B_i H_i \omega^2}{\alpha_i^2 a_i^2}, \quad S_i^{(4)} = \frac{C_i D_i H_i \omega^2}{\xi^2 b_i^2}, \quad (4.34)$$

$$S_i^{(5)} = \left\{ A_i C_i \exp \left[ \frac{(\alpha_i + \beta_i) H_i}{2} \right] + B_i D_i \exp \left[ \frac{-(\alpha_i + \beta_i) H_i}{2} \right] \right\} \times$$

$$\times \frac{\text{sh} [(\alpha_i + \beta_i) H_i / 2]}{(\alpha_i + \beta_i) / 2},$$

$$S_i^{(6)} = \left\{ A_i D_i \exp \left[ \frac{(\alpha_i - \beta_i) H_i}{2} \right] + B_i C_i \exp \left[ \frac{-(\alpha_i - \beta_i) H_i}{2} \right] \right\} \times \\ \times \frac{\text{sh}[(\alpha_i - \beta_i) H_i / 2]}{(\alpha_i - \beta_i) / 2}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$S_{n+1}^{(1)} = B_{n+1}^2 / 2\alpha_{n+1}, \quad S_{n+1}^{(2)} = \beta_{n+1} D_{n+1}^2 / 2\xi^2,$$

$$S_{n+1}^{(3)} = 0, \quad S_{n+1}^{(4)} = 0,$$

$$S_{n+1}^{(5)} = B_{n+1} D_{n+1} / (\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}), \quad S_{n+1}^{(6)} = 0,$$

$$r_i = 4b_i^2 - \omega^2 / \xi^2, \quad q_i = \frac{2b_i^2(\alpha_i^2 + \xi^2)}{\xi^2} + \omega^2 / \xi^2.$$

По мере роста частоты энергия колебаний сосредоточивается в волноводах или вблизи свободной поверхности и становится экспоненциально малой в антиволноводах и подстилающем полупространстве. Это позволяет модифицировать модель, заменив незахваченную колебаниями нижнюю часть слоистой среды однородным полупространством, при этом не происходит потери точности счета [187]. Однако и данный прием не устраняет все трудности, возникающие в описанном методе поиска корней дисперсионного уравнения при больших  $\omega$ . Это вызвано двумя причинами. Во-первых, при больших  $\omega$  существует уже много мод, скорости которых асимптотически приближаются к одному и тому же значению. Поэтому корни дисперсионного уравнения сближаются, и при практических расчетах это приводит к потере отдельных корней и перескоку с одной ветви дисперсионной кривой на другую.

Второй недостаток этого метода заключается в том, что в области  $\xi H_i \text{Re} \alpha_i \gg 1$  и  $\text{Re} \alpha_i \gg \text{Re} \beta_i$  при численных расчетах для волн Рэлея происходит потеря точности. Этот недостаток был преодолен в работах Л.А. Молоткова [68–70]. Он предложил вместо представления дисперсионного уравнения через произведение матриц четвертого порядка (для рэлеевских волн) использовать его представление через матрицы пятого порядка. Мы здесь не останавливаемся на этом подходе и отсылаем читателя к монографии [68], где он подробно описан. Существуют и другие модификации метода Томсона–Хаскелла, эффективно преодолевающие эту трудность [100, 129, 152, 187].

#### § 4.2. Численный метод решения одномерных краевых задач

Необходимость моделировать среды с непрерывным изменением скорости с глубиной слоисто-однородными аналогами, сложность учета эффектов сферичности и трудность идентификации найденных корней дисперсионного уравнения на высоких частотах делают в ряде случаев предпочтительным использование методов численного интегрирования, свободных от этих недостатков. К ним относится модификация метода прогонки, предложенная в [64] и примененная к решению одномерной задачи для волн Рэлея в [71, 94]. Ниже будет описано, как та же схема может быть применена к

расчету волн Лява в сферически-симметричном шаре, при этом будет показан ряд преимуществ данной схемы перед описанными ранее [26, 63]. То, что рассматривается упругий шар, а не шаровой слой, в данном случае несущественно, поскольку поверхностные волны не проникают в область вблизи границы мантии с жидким ядром Земли.

Дифференциальный оператор для смещения  $V = V^{(3)}$  при  $0 \leq R \leq R_0$  имеет вид

$$\frac{d}{dR} \left[ \mu \left( \frac{dV}{dR} - \frac{V}{R} \right) \right] + \frac{3\mu}{R} \frac{dV}{dR} + \left[ \omega^2 \rho - \mu \frac{N^2 + 1}{R^2} \right] V = 0, \quad (4.35)$$

а граничные условия

$$\bar{\sigma}_{\varphi R} = \mu(R) \left( \frac{dV}{dR} - \frac{V}{R} \right) = 0 \Big|_{R=R_0}, \quad (4.36)$$

$$V = 0 \Big|_{R=0}. \quad (4.37)$$

Здесь  $N^2 = \nu(\nu + 1)$ , где параметр  $\nu$  (порядок сферической функции) принимает целочисленные значения. Решения для нецелых  $\nu$  находятся интерполяцией. Необходимо определить собственные значения  $\omega_{kL}(\nu)$  и собственные функции  $V_k(R, \nu)$  данной задачи для заданных значений  $k$  и  $\nu$ .

Решение ищется методом прогонки [64]. Введем функцию  $F$  следующим образом:

$$\mu \left( \frac{dV}{dR} - \frac{V}{R} \right)' = -lFV, \quad (4.38)$$

где  $l$  — нормировочная константа, определим комплексную функцию  $W(R)$  как

$$W = (i - F)(i + F)^{-1}. \quad (4.39)$$

Очевидно,  $W$  представимо в виде

$$W = \exp[i\psi(R)].$$

Дифференцируя (4.38) по  $R$  и подставляя в (4.35), исключая всюду  $dV/dR$ , получаем

$$\frac{dF}{dR} = \frac{l}{\mu} F^2 - \frac{4F}{R} + \frac{\mathcal{H}}{l}, \quad (4.40)$$

где

$$\mathcal{H} = \frac{\mu(2 - N^2)}{R^2} + \omega^2 \rho.$$

Перейдем в (4.38) от  $F$  к  $W$  и получим прогоночное уравнение для  $W$ :

$$dW/dR = iS(W)W, \quad (4.41)$$

где

$$S(W) = \left( \frac{l}{\mu} + \frac{\mathcal{H}}{l} \right) + \left( \frac{\mathcal{H}}{l} - \frac{l}{\mu} \right) \frac{W + W^*}{2} + \frac{2i(W - W^*)}{R}.$$

Граничные условия для  $W$  имеют вид

$$W(R_0) = 1, \quad (4.42)$$

$$W(0) = -1. \quad (4.43)$$

Подставляя в (4.39) выражение для  $W = \exp[i\psi(R)]$ , получаем прогоночное уравнение для  $\psi$

$$\frac{d\psi}{dR} = S(e^{i\psi}) \quad (4.44)$$

с граничными условиями

$$\psi(R_0) = 2m\pi, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (4.45)$$

$$\psi(0) = -\pi. \quad (4.46)$$

Можно показать, что номер собственного значения  $k$  и целое число  $m$  в граничном условии (4.45) тождественно равны. Отсюда следует алгоритм отыскания  $\omega_{kL}^2(\nu)$  при заданных  $k$  и  $\nu$ . Принимаем пробное значение  $\omega^2$  и интегрируем численно (4.41) от  $R = 0$  до  $R = R_0$ , одновременно вычисляя на каждом шаге функцию  $\psi(R) = \arg W$ . Тем самым находим величину

$$\Phi(\omega^2, \nu) = \psi(\omega^2, R_0) - 2k\pi.$$

Благодаря тому что  $\Phi(\omega^2)$  монотонно растет с  $\omega^2$ , поиск такого значения  $\omega^2$ , при котором  $|\Phi(\omega^2)| < \epsilon$ , где  $\epsilon$  — малая константа, осуществляется без труда (с этой целью применяются метод деления пополам, метод Ньютона и т.п.). Интегрирование (4.41) выполняется по разностной схеме

$$W_{n+1} = \left(1 - \frac{ih_n}{2} S(W_{n+1/2})\right)^{-1} \left(1 + \frac{ih_n}{2} S(W_{n+1/2})\right) W_n,$$

$$W_{n+1/2} = \left(1 - \frac{ih_n}{\xi} S(W_n)\right)^{-1} \left(1 + \frac{ih_n}{2} S(W_n)\right) W_n$$

с переменным шагом  $h_n = \min(\delta, H_0)$ , где  $\delta = \pi/(nS(W_n))$ . Величина  $n$  выбирается так, чтобы можно было следить за  $\psi$ , не пропуская увеличения  $\psi$  на  $2\pi$ . Константа  $H_0$  выбирается из соображений точности интегрирования.

После того как значение  $\omega_{kL}^2$  найдено, отыскивается собственная функция  $V(R, \nu)$ , для чего вводится новая функция  $\eta$ :

$$\eta = \frac{2l}{1+W^*} V_k. \quad (4.47)$$

Пользуясь (4.35), (4.38) и (4.39), находим уравнение для  $\eta$ :

$$d\eta/dR = \Psi(W)\eta, \quad (4.48)$$



где

$$\Psi(W) = \frac{2W^* - 1}{R} + \frac{i}{2} \left[ \frac{l}{\mu} + \frac{\mathcal{K}}{l} + \left( \frac{\mathcal{K}}{l} - \frac{l}{\mu} \right) W^* \right]; \quad (4.49)$$

$$\eta(0) = 1.$$

Уравнение (4.48) решается численно на интервале от  $R = 0$  до  $R = R_0$  при помощи разностной схемы

$$\eta_{n+1} = \left( 1 - \frac{h_n}{2} \Psi(W_{n+1}) \right)^{-1} \left( 1 + \frac{h_n}{2} \Psi(W_n) \right) \eta_n$$

совместно с уравнением для  $W_n$  с тем же шагом  $h_n$ . Когда  $\eta(R)$  найдено, нетрудно определить  $V_k(\nu, R)$  и производную этой функции по  $R$ :

$$V_k = \frac{1 + W^*}{2l} \eta, \quad (4.50)$$

$$\frac{dV_k}{dR} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 + W^*}{Rl} + i \frac{1 - W^*}{\mu} \right) \eta.$$

Для поверхностных волн типичны достаточно большие  $\nu > 10$ . Уравнение (4.35) для таких  $\nu$  и типичных для Земли распределений  $\mu$  и  $\rho$  в мантии обладает точкой поворота  $R_n$ , ниже которой решение экспоненциально убывает при  $R \rightarrow 0$ . Поэтому существует интервал  $[R_n, 0]$ , где фактическое поведение решения не влияет на его ход при  $R > R_n$ . Естественно, что исключение этого интервала из численной схемы, как в матричном подходе, существенно ускоряет счет.

Для этого вначале находим точку поворота  $R_n$  — такое максимальное значение  $R$ , при котором для всех  $R < R_n$

$$\gamma(R) = \frac{\mu(R)(N^2 - 2)}{R^2} - \omega^2 \rho > 0.$$

От этой точки строим мажорантное решение для нашего уравнения к убывающим  $R$ :

$$Y(R) = \exp \left[ \int_{R_n}^R \sqrt{\gamma(R)} dR \right],$$

до тех пор, пока эта величина не станет меньше  $\exp(-M)$  (обычно  $M = 10 \div 12$ ). Соответствующее значение  $R$  принимается за точку начала интегрирования  $R_n$ .

Хотя в принципе допустимо перенесение в  $R_n$  граничного условия (4.43), лучший результат дает "замораживание" ниже  $R_n$  коэффициентов  $\mu$  и  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \mu(R) &= \mu(R_n - 0) \\ \rho(R) &= \rho(R_n - 0) \end{aligned} \quad R_n > R \geq 0.$$

На этом интервале решением уравнения (4.35) с граничным условием (4.37)

является сферическая функция Бесселя [50] :

$$V(R) = \frac{1}{\sqrt{R}} J_{\nu+1/2} \left( \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} R \right),$$

где  $J_{\nu+1/2}$  — функция Бесселя первого рода. Зная  $V(R_H)$  и  $dV/dR(R_H)$ , можно определить граничное условие в точке  $R_H$  для функции  $W$  из (4.38) и (4.39).

Помимо самой собственной функции  $V_k$  и ее производной по  $R$ , в узлах интегрирования определяются значения частных производных  $\partial C_{kL}/\partial b$ ,  $\partial C_{kL}/\partial \rho$ . В результате интегрирования находятся также величины  $I_{kL}^{(0)}$ ,  $I_{kL}^{(1)}$ ,  $I_{kL}^{(2)}$  (формулы (1.43), (1.49)), а по ним фазовая и групповая скорости  $C_{kL}$  и  $U_{kL}$  (формулы 1.47) и (1.48)). Хорошее совпадение "интегральной" фазовой скорости с найденной при подборе собственного значения  $\omega_{kL}^2(\nu)$  как  $C_{kL} = R_0 \omega_{kL}(\nu)/(\nu + 1/2)$  является критерием надежности счета.

Описанная методика решения одномерной краевой задачи для волн Лява в шаре не требует счета тригонометрических функций и поэтому эффективнее предложенных ранее схем прогонки для волн Лява [26]. Аналогичная методика матричной прогонки для волн Рэлея в шаре описана в работе [94].

### § 4.3. Расчет лучей в горизонтально-неоднородной среде

Задача расчета лучей и амплитуд волновых пакетов поверхностных волн представляет практический интерес для случая, когда горизонтальная неоднородность среды обусловлена негоризонтальностью границ раздела. При существующих вариациях упругих параметров и мощностей слоев, слагающих верхнюю толщу Земли, определяющее влияние на значения скоростей и амплитуд поверхностных волн оказывают изменения мощностей слоев. Поэтому мы ограничимся рассмотрением однородно-слоистой модели, в которой мощности слоев  $H_i$  медленно изменяются при изменении координат  $x$  и  $y$ .

1. **Расчет лучей.** Лучи поверхностных волн рассчитываются путем численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (2.52). Для решения этой системы необходимо иметь возможность вычислять правые части в любой точке  $x$ ,  $y$ , иначе говоря, должен быть определен алгоритм вычисления фазовой  $C(x, y)$ , групповой  $U(x, y)$  скоростей, а также  $\nabla C$ , т.е.  $(\partial C/\partial x, \partial C/\partial y)$ . Предполагается, что мощности слоев заданы в виде функциональной зависимости  $H_i = H_i(x, y)$ , так что производные  $\partial C/\partial x$  и  $\partial C/\partial y$  могут определяться следующим образом:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \sum_i \frac{\partial C}{\partial H_i} \frac{\partial H_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = \sum_i \frac{\partial C}{\partial H_i} \frac{\partial H_i}{\partial y}, \quad (4.51)$$

и, следовательно, задача вычисления этих производных сводится к расчету производных фазовой скорости по значениям мощностей слоев.

Алгоритм расчета фазовой скорости как функции частоты описан в § 4.1. Особенность этого алгоритма состоит в том, что расчет производится для фиксированной модели среды, начиная с некоторой частоты, для

которой известно общее число мод (обычно с  $\omega = 0$ , чему соответствует одна мода), и выполняется для последовательных частот с заданным шагом  $\Delta\omega$ . Для каждой частоты рассчитываются фазовые скорости и собственные функции, соответствующие всем модам. При определении же луча расчет должен проводиться для одной и той же частоты при вариации модели, причем вычисляемая скорость должна соответствовать одной определенной моде.

В соответствии с алгоритмом, основанным на методе Томсона—Хаскелла, фазовая скорость  $C$  определяется через корень уравнения

$$\Phi(\omega, \xi) = 0, \quad (4.52)$$

где  $\xi = \omega/C$ , а функция  $\Phi$  строится путем перемножения матриц и имеет вид (4.11) или (4.21).

Для расчета луча достаточно вычислить требуемое значение  $\xi$  (соответствующее заданной моде и частоте  $\omega$ ) в начальной точке луча (без ограничения общности можно считать, что начало помещено в точку  $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ ), а далее, передвигаясь вдоль луча в процессе интегрирования системы (2.52), оценить приближенное значение  $\xi$  по формуле

$$\xi(x + \Delta x, y + \Delta y) = \xi(x, y) + (\partial \xi / \partial x)_{x, y} \Delta x + (\partial \xi / \partial y)_{x, y} \Delta y. \quad (4.53)$$

Соответствующее значение  $\xi$  подставляется в выражение для функции  $\Phi(\xi, \omega)$ , которая рассчитывается при значениях  $H_i$  в точке  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$  и корректируется так, чтобы удовлетворить уравнению (4.52). При полученном уточненном значении  $\xi$  и значениях  $H_i(x + \Delta x, y + \Delta y)$  вычисляются коэффициенты  $A_i, B_i$  (в случае волн Лява) и  $A_i, B_i, C_i, D_i$  (в случае волн Рэлея), определяющие соответствующие собственные функции (4.2) или (4.12). Таким образом, расчет фазовой скорости не представляет принципиальных сложностей, он практически полностью базируется на алгоритме, изложенном в § 4.1.

Групповая скорость  $U$  в точке  $(x, y)$  может быть вычислена из интегральных формул (1.45). Выражения для интегралов, входящих в эти формулы, даны в § 4.1 (формулы (4.30)–(4.34)).

Перейдем теперь к рассмотрению способа расчета производных фазовой скорости по значениям мощностей слоев, при этом рассмотрим отдельно волны Лява и волны Рэлея.

**В о л н а Л я в а.** Левая часть дисперсионного уравнения представляется в виде произведения матриц (4.11). Каждая из матриц является функцией  $\xi$ , а  $H_i$  входит только в выражение для матрицы  $F_i$ . Производная  $\partial \xi / \partial H_i$  определяется дифференцированием (4.11):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial H_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial H_i} = 0, \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = G_1 \left( \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^{j-1} F_i \frac{\partial F_j}{\partial \xi} \prod_{i=j+1}^n F_i \right) R_{n+1} + G_1 \prod_{i=1}^n F_i \frac{\partial R_{n+1}}{\partial \xi}, \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial H_i} = G_1 \prod_{k=1}^{i-1} F_k \frac{\partial F_i}{\partial H_i} \prod_{k=i+1}^n F_k R_{n+1}, \quad (4.56)$$

где  $G_1 = \|\| 0 \quad 1 \|\|$ .

Производные матриц  $\partial F_i/\partial \xi$ ,  $\partial R_{n+1}/\partial \xi$  и  $\partial F_i/\partial H_i$  имеют вид:

$$\frac{\partial F_i}{\partial \xi} = \left\| \begin{array}{cc} \xi H_i \frac{\text{sh} \beta_i H_i}{\beta_i} & \frac{\xi H_i}{\mu_i \beta_i^2} \left( \frac{\text{sh} \beta_i H_i}{\beta_i H_i} - \text{ch} \beta_i H_i \right) \\ -\mu_i \xi H_i \left( \frac{\text{sh} \beta_i H_i}{\beta_i H_i} + \text{ch} \beta_i H_i \right) & \xi H_i \frac{\text{sh} \beta_i H_i}{\beta_i} \end{array} \right\|, \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial R_{n+1}}{\partial \xi} = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ -\mu_{n+1} \xi / \beta_{n+1} \end{array} \right\|, \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial H_i} = \left\| \begin{array}{cc} \beta_i \text{sh} \beta_i H_i & -\frac{1}{\mu_i} \text{ch} \beta_i H_i \\ -\mu_i \beta_i^2 \text{ch} \beta_i H_i & \beta_i \text{sh} \beta_i H_i \end{array} \right\|. \quad (4.59)$$

Волна Рэлея. Алгоритм расчета производных несколько отличается от предыдущего случая. Прежде всего заметим, что функция  $\Phi(\omega, \xi)$  для волны Рэлея представляет детерминант матрицы системы (4.21). Эту матрицу для краткости обозначим через  $Z$ , а ее элементы соответственно через  $z_{ik}$ . Таким образом, дисперсионное уравнение имеет вид  $\det Z = 0$ , или

$$z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} = 0. \quad (4.60)$$

Производная левой части (4.60) может быть выражена таким образом:

$$z'_{11}z_{22} + z_{11}z'_{22} - z'_{12}z_{21} - z_{12}z'_{21} = 0.$$

Здесь знак "штрих" обозначает дифференцирование по любому из параметров  $\xi$ ,  $H_i$ . Соответственно  $z'_{ik}$  являются элементами матрицы  $Z'$ . Поэтому для вычисления  $\partial \Phi/\partial \xi$  и  $\partial \Phi/\partial H_i$  необходимо построить матрицы  $\partial Z/\partial \xi$  и  $\partial Z/\partial H_i$ .

Поскольку матрица  $Z$  для волны Рэлея имеет ту же самую конструкцию, что и для волны Лява, выражения для производных  $\partial Z/\partial \xi$  и  $\partial Z/\partial H_i$  определяются правыми частями формул (4.55) и (4.56), в которых матрицы  $F_i$  и  $R_{n+1}$  размером  $4 \times 4$  и  $4 \times 2$  соответственно определяются выражениями (4.17) и (4.19), а матрица  $G_1$  имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Так как выражения для элементов матрицы  $L_i$  являются довольно громоздкими, для упрощения расчетов имеет смысл учесть, что  $F_i = L_i K_i^{-1} L_i^{-1}$ , причем от  $H_i$  зависят только элементы матрицы  $K_i^{-1}$ , так что  $\frac{\partial F_i}{\partial H_i} = L_i \frac{\partial K_i^{-1}}{\partial H_i} L_i^{-1}$ . Производная матрицы  $K_i^{-1}$  определяется просто, а выражения для матриц  $L_i$  и  $L_i^{-1}$  даны в § 4.1 (формулы (4.13), (4.15)). Производная  $\partial F_i/\partial \xi$  может без особого труда быть получена дифференцированием по  $\xi$  элементов матрицы, определенной выражением (4.17) (выражения для элементов матрицы  $\partial F_i/\partial \xi$  здесь не выписываются из-за их громоздкости).

Следует отметить, что при расчете только геометрии луча вычисление производных фазовой скорости по координатам  $x$ ,  $y$  по описанному выше алгоритму целесообразно лишь тогда, когда число слоев не слишком велико. В противном случае расчеты по приведенным выше формулам будут связаны с большим объемом вычислений. Применение этих формул при расчете луча имеет смысл, если общее число слоев (в том числе и тех, мощности которых не изменяются) не превышает двух-трех. Кроме того, как будет показано ниже, эти формулы необходимо использовать при расчете геометрического расхождения. Для большого числа слоев производные фазовой скорости можно определять численным дифференцированием.

С этой целью преобразуем систему (2.52) к виду, удобному для численного интегрирования. Представим вектор  $k$  через его составляющие:  $k = (\sin \varphi / C, \cos \varphi / C)$ , где  $\varphi$  — угол, образованный проекцией пространственно-временного луча на плоскость  $xu$  с осью  $x$ . Тогда систему (2.52) можно привести к следующим трем скалярным уравнениям:

$$\begin{aligned} \partial x / \partial t &= U \cos \varphi, & \partial y / \partial t &= U \sin \varphi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{U}{C} \left( \frac{\partial C}{\partial x} \sin \varphi - \frac{\partial C}{\partial y} \cos \varphi \right). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Если в соответствии с тем, как это сделано в § 2.4, на плоскости  $xu$  ввести координаты  $q_1$  и  $q_2$  в направлении, перпендикулярном лучу и вдоль луча, то нетрудно видеть, что правая часть последнего уравнения

есть не что иное, как  $-\frac{U}{C} \frac{\partial C}{\partial q_1}$ . Таким образом, для решения системы (4.61) необходимо на каждом шаге расчета луча вычислять производную  $\partial C / \partial q_1$ .

Пусть процесс численного интегрирования системы (4.61) выполняется с шагом  $\Delta t$ . На  $k$ -м шаге мы переходим из точки  $M_{k-1}$  в точку  $M_k$ , отстоящую от  $M_{k-1}$  на расстояние  $\Delta s \approx U_{k-1} \Delta t$ . В точке  $M_k$  скорость  $C$ , как уже упоминалось ранее, оценивается вначале приближенно по соотношению  $C(M_k) \approx C(M_{k-1}) + (\partial C / \partial q_2)_{k-1} \Delta s$  и затем уточняется путем решения уравнения  $\Phi(\xi, \omega) = 0$ . Таким образом, в точке  $M_k$  может быть оценена производная  $(\partial C / \partial q_2)_k \approx [C(M_k) - C(M_{k-1})] / \Delta s$ , которая потребуется только для приближенной оценки скорости в следующей точке  $M_{k+1}$ , а для решения системы (4.61) необходимо знание производной, по перпендикулярному направлению  $\partial C / \partial q_1$ . Для определения этой производной поступаем следующим образом. Перейдем из точки  $M_k$  вдоль оси  $q_1$  в точку  $N_k$ , отстоящую от  $M_k$  на расстояние  $\Delta l$ . Предполагается, что значение  $\partial C / \partial q_1$  в точке  $M_{k-1}$  было определено. Используя его, вычисляем приближенно скорость  $C$  в точке  $N_k$  по формуле

$$C(N_k) \approx C(M_k) + (\partial C / \partial q_1)_{k-1} \Delta l$$

и уточняем ее, решая уравнение (4.61). Далее численным дифференцированием определяем производную  $\partial C / \partial q_1$  в точке  $M_k$ :

$$(\partial C / \partial q_1)_k = [C(N_k) - C(M_k)] / \Delta l.$$

2. **Расчет амплитуд.** Расчет амплитуд волнового пакета производится численным интегрированием систем дифференциальных уравнений (2.85), (2.92). В правые части этих уравнений входят первые и вторые производные фазовой скорости и первые производные групповой скорости по координатам  $x, y$  (или  $q_1, q_2$ ), а также первая производная групповой скорости по частоте. Определение вторых производных фазовой скорости по координатам сводится к определению вторых производных  $\xi$  по мощностям слоев  $H_i$ . Выражения для этих производных выводятся точно так же, как для первых производных. Однако уже для первых производных выражения получаются довольно громоздкими. Поэтому при практических расчетах предпочтительнее вычислять вторые производные фазовой и первые производные групповой скорости путем численного дифференцирования по схеме, аналогичной той, которая была описана выше для вычисления первых производных при расчете луча. В этом случае, однако, первые производные  $\partial C/\partial q_1$  и  $\partial C/\partial q_2$  следует вычислять по формулам, не прибегая к операции численного дифференцирования. При этом вычислять производные  $\partial C/\partial q_1, \partial C/\partial q_2$ , а также групповую скорость  $U$  следует не только в точках луча  $M_k$ , но и в точках  $N_k$ , с тем чтобы иметь возможность определять путем численного дифференцирования производные как по направлению вдоль луча ( $q_2$ ), так и по перпендикулярному к нему направлению ( $q_1$ ).

Вычисление производной  $\partial U/\partial \omega$  можно производить исходя из интегральных формул для групповой скорости (1.48), (4.30) – (4.34). При этом надо иметь в виду, что при изменении  $\omega$  меняются не только  $\xi, \alpha_i, \beta_i$ , но и коэффициенты в выражениях для собственных функций  $A_i, B_i$  (для волн Лява) и  $A_i, B_i, C_i, D_i$  (для волн Рэлея), а производные этих коэффициентов можно определять на основе их матричного представления. В частности, для волны Лява соотношение, связывающее коэффициенты в последовательных слоях, исходя из (4.4), может быть записано в виде

$$\mathbf{K}_i \begin{vmatrix} A_i \\ B_i \end{vmatrix} = \mathbf{L}_i^{-1} \mathbf{L}_{i+1} \begin{vmatrix} A_{i+1} \\ B_{i+1} \end{vmatrix}.$$

Дифференцируя это соотношение, получаем рекуррентную формулу, связывающую производные коэффициентов для  $i$ -го слоя с производными коэффициентов для  $(i + 1)$ -го слоя:

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{vmatrix} \frac{\partial A_i}{\partial \omega} \\ \frac{\partial B_i}{\partial \omega} \end{vmatrix} + \mathbf{K}_i^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial \omega} \begin{vmatrix} A_i \\ B_i \end{vmatrix} \right\| = \\ & = \mathbf{K}_i^{-1} \frac{\partial}{\partial \omega} (\mathbf{L}_i^{-1} \mathbf{L}_{i+1}) \begin{vmatrix} A_i \\ B_i \end{vmatrix} + \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{L}_i^{-1} \mathbf{L}_{i+1} \begin{vmatrix} \frac{\partial A_{i+1}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial B_{i+1}}{\partial \omega} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

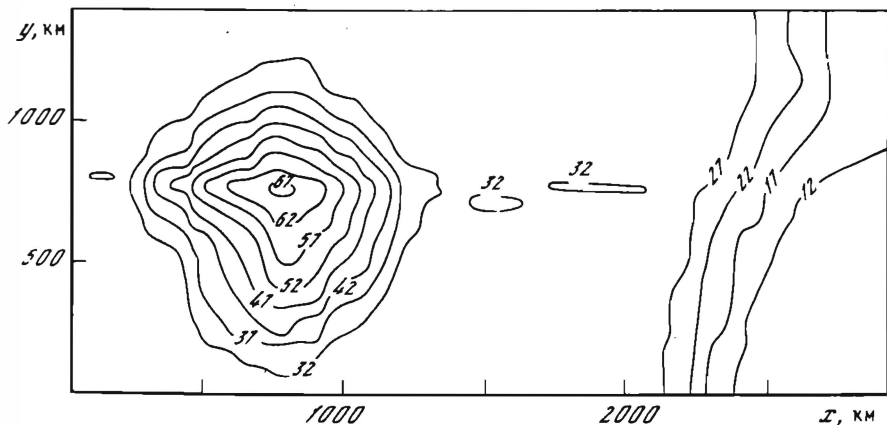


Рис. 4.1. Модель среды, принятая для расчетов  
Цифры — значения мощности слоя

Матрицы  $K_i^{-1} \frac{\partial K_i}{\partial \omega}$  и  $\frac{\partial}{\partial \omega} (L_i^{-1} L_{i+1})$ , входящие в это соотношение, имеют вид:

$$K_i^{-1} \frac{\partial K_i}{\partial \omega} = \frac{\omega H_i q_i}{\beta_i} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} (L_i^{-1} L_{i+1}) = \frac{\omega \mu_{i+1} \beta_{i+1}}{2 \mu_i \beta_i} \left( \frac{q_{i+1}}{\beta_{i+1}^2} - \frac{q_i}{\beta_i^2} \right) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad (4.63)$$

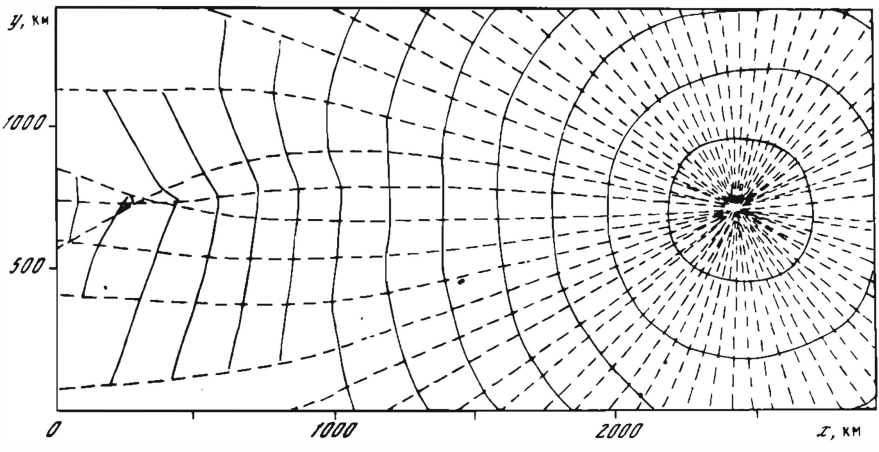
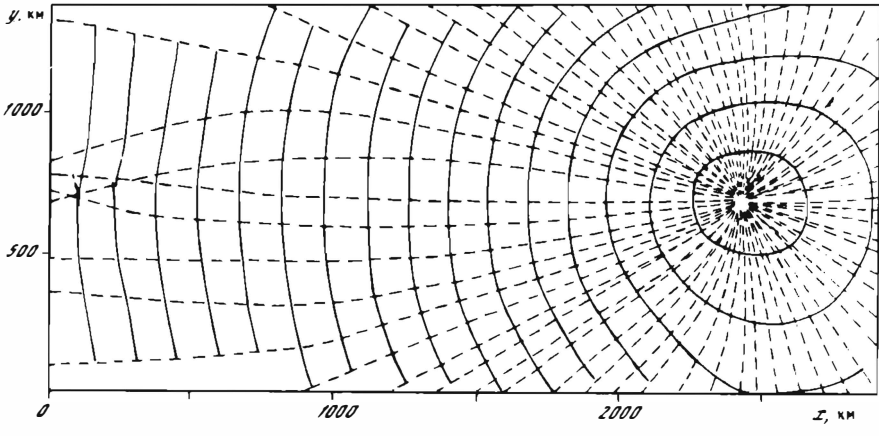
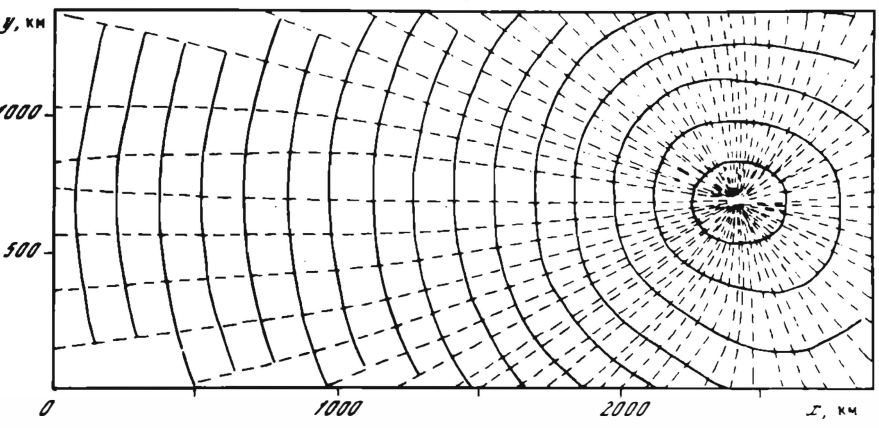
где  $q_i \equiv \frac{1}{CU} - \frac{1}{b_i^2}$ .

Несколько более сложную, но основанную на том же принципе схему можно предложить и для расчета амплитуд рэлеевских волн.

**Пример расчета.** Приведем в качестве примера результаты выполненного Л.И. Корсаковой расчета лучей волн Лява в слое переменной мощности, лежащем на полупространстве. Изолинии мощности слоя изображены на рис. 4.1. Выбранная структура моделирует строение коры в Центральной и Восточной Азии. Область повышенных значений мощности слоя отвечает Тибету, а понижение мощности в правой части рисунка соответствует переходу к океану. Источник был расположен в районе "границы" океана и континента, где находится большинство эпицентров землетрясений. Для фиксированных частот рассчитывались пространственно-временные лучи, выходящие во всех направлениях из источника, при этом наибольший интерес представляли, конечно, лучи, пересекающие зону повышенной мощности слоя, которой на низких частотах отвечают пониженные

Рис. 4.2. Проекция пространственно-временных лучей волн Лява для модели среды, приведенной на рис. 4.1

$a - \omega = 0,1$  рад/с ( $T = 62,8$  с);  $b - \omega = 0,2$  рад/с ( $T = 31,4$  с);  $\bar{a} - \omega = 0,3$  рад/с ( $T = 20,9$  с)

$\alpha$  $\beta$  $\delta$ 



значения фазовой скорости и которая для таких частот будет являться зоной фокусировки лучей.

На рис. 4.2 приведены проекции пространственно-временных лучей на плоскость  $z = 0$  для трех разных частот в рассмотренной модели среды (пунктир) и изолинии времен прихода волнового пакета, или, что то же самое, сечения пучка пространственно-временных лучей, соответствующих заданной частоте, плоскостями  $t = \text{const}$  (сплошные линии). Интервал времени между соседними изолиниями  $\Delta t = 50$  с.

На низких частотах отчетливо видно фокусирующее действие зоны повышенной мощности слоя; с увеличением частоты этот эффект ослабевает и при  $\omega = 0,3$  рад/с практически исчезает. Фокусировка проявляется только на низких частотах, поскольку понижение фазовой скорости волны Лява в этой зоне происходит только при низких частотах. Как видно из рис. 4.3, если на частоте  $\omega = 0,1$  фазовая скорость в зоне, моделирующей Тибет, изменяется от 4,59 до 3,71 км/с, то при  $\omega = 0,3$  она в этой зоне сохраняется практически постоянной. В то же время на частоте  $\omega = 0,3$  проявляются сильные горизонтальные вариации скорости в правой части модели, соответствующей переходу от континентальной структуры к океанической. Эти вариации приводят к заметной рефракции лучей в направлениях вытянутости изолиний скорости.

В случае, когда распределение фазовой скорости поверхностной волны  $C = C(x, y)$  или  $C = C(\theta, \varphi)$  может считаться заданным для фиксированного периода волны, расчет лучей не представляет особых трудностей — он выполняется численным интегрированием системы дифференциальных уравнений луча (4.61), из которой можно исключить групповую скорость  $U$  путем замены переменной интегрирования  $ds = U dt$ , а в сферическом случае системы

$$d\theta/ds = \cos\alpha/R,$$

$$d\varphi/ds = \sin\alpha/R \sin\theta,$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{C} \left( \frac{\sin\alpha}{R} \frac{\partial C}{\partial \theta} - \frac{\cos\alpha}{R \sin\theta} \frac{\partial C}{\partial \varphi} \right) - \frac{\sin\alpha \text{ctg}\theta}{R},$$

которая легко получается из (2.110) в результате замены

$$k_\theta = \cos\alpha/C, \quad k_\varphi = \sin\alpha/C.$$

Расчеты системы лучей на сферической поверхности при заданных распределениях скорости, соответствующих различным периодам волн, выполнены в работах [147, 153, 189]. Из них следует, что горизонтальная неоднородность Земли может приводить к сильному отклонению трасс поверхностных волн от дуг большого круга и многопутевому распространению.

Обычно такие рассчитанные лучевые схемы используются для качественного суждения о распределении амплитудных аномалий поверхностных волн: там, где лучи сгущаются, естественно ожидать повышения амплитуд, а где они расходятся — уменьшения. При таком рассмотрении, однако, не учитывается растяжение волнового пакета за счет дисперсии, характер которой может быть разным вдоль разных трасс, а также изменение энергетического профиля волны по вертикали. В [51] рассчитывались аномалии амплитуд поверхностных волн, обусловленные только пространственным

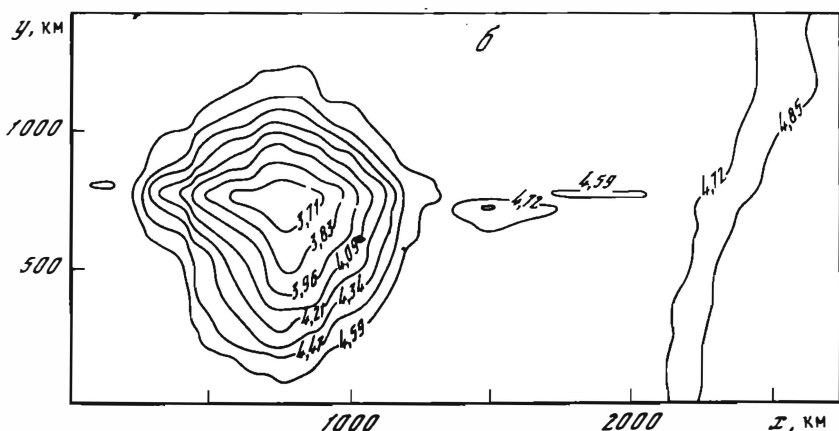
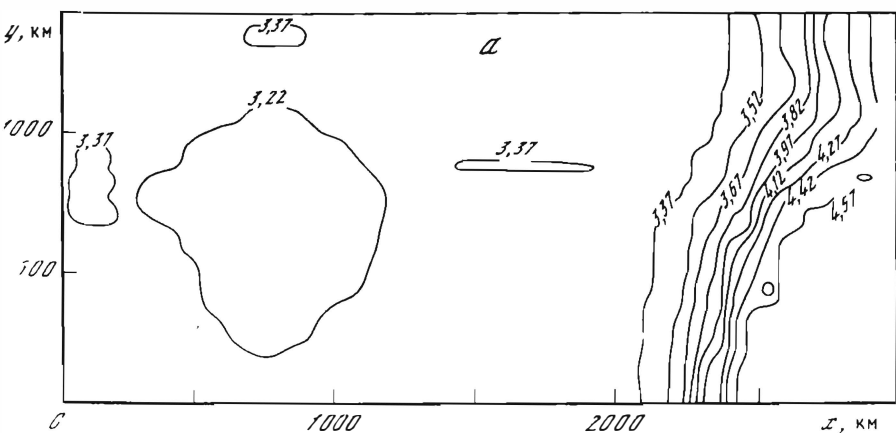


Рис. 4.3. Распределения фазовой скорости волны Лява для модели среды, приведенной на рис. 4.1

*a* —  $\omega = 0,1$  рад/с; *б* —  $\omega = 0,3$  рад/с.

Цифры у кривых — значения фазовых скоростей в км/с

геометрическим расхождением, при этом рассчитанные аномалии оказались заметно меньше наблюдаемых. Из этого следует, что при количественных оценках амплитуд поверхностных волн необходимо учитывать все факторы определяющие амплитуду поверхностной волны. Поэтому естественно проводить расчеты амплитуд на основе пространственно-лучевого метода, описанного в гл. 2.

#### § 4.4. Расчет коэффициентов отражения—прохождения

Расчеты коэффициентов отражения—прохождения поверхностных волн проводились в соответствии с методикой, описанной в § 3.3. Основная вычислительная сложность при использовании этой методики связана с расчетом коэффициентов связи  $P_{ij}$ ,  $S_{ij}$ ,  $Q_{ij}$ ,  $T_{ij}$ ,  $Y_{ij}$ , выражающихся ин-

тегралами, содержащими собственные функции соответствующих мод. Поэтому для упрощения расчетов естественно использовать такую модель среды, для которой собственные функции выражаются в явном виде, чтобы и коэффициенты связи можно было бы получить также в явной форме. Такой простейшей моделью является слоисто-однородная среда, собственные функции в каждом из слоев которой, как упоминалось выше, выражаются в виде комбинации экспонент. Таким образом, слева и справа от контакта мы принимаем среду слоисто-однородной, причем горизонтальные границы слева и справа могут не совпадать, за исключением свободной границы  $z = 0$ , которая является общей для обеих сред. Иначе говоря, мы считаем, что уступ на свободной поверхности отсутствует.

Для расчета коэффициентов отражения—прохождения собственные функции должны быть определенным образом нормированы. Все приводимые ниже расчеты основаны на нормировке, введенной в § 3.2, а именно: для волн Лява

$$\xi I_{kL}^{(1)} = 1, \quad (4.64)$$

для волн Рэлея

$$\xi (I_{kR}^{(1)} + I_{kR}^{(2)}) + (I_{kR}^{(3)} + I_{kR}^{(4)}) = 1. \quad (4.65)$$

В то же время для анализа результатов и сопоставления их с данными эксперимента, а также с результатами расчетов другими методами необходимо получать такие значения коэффициентов отражения—прохождения, которые бы не зависели от способа нормировки. С этой целью обычно рассматривают отношения смещений в соответствующих модах и на свободной поверхности (surface ratio). Эти отношения будем называть далее поверхностным коэффициентом отражения—прохождения и обозначать соответственно  $A_{si}^{\text{нов}}$  и  $B_{sj}^{\text{нов}}$ . Очевидно, что  $A_{ii}^{\text{нов}} = A_{ii}$  не зависит от способа нормировки. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении коэффициента отражения той же самой моды верхний индекс мы будем опускать.

Расчет коэффициентов отражения—прохождения проводится по следующей схеме. В каждой из двух контактирующих сред вычисляются собственные значения  $\xi_k$  для всех мод для заданной частоты  $\omega$  в соответствии с алгоритмом, описанным в § 4.1. По формулам (4.30)–(4.34) рассчитываются интегралы  $I_{kD}^{(j)}$ , и все коэффициенты для соответствующей моды нормируются согласно (4.64) или (4.65).

Далее коэффициенты связи между модами определяются суммированием выражений, соответствующих интегралам по отдельным участкам вертикальной границы. Эти выражения легко определяются интегрированием произведений экспонент аналогично тому, как это сделано при определении выражений для  $I_{kD}^{(j)}$  (формулы (4.30), (4.31), (4.33), (4.34)). Затем в зависимости от поставленной задачи методом Гаусса решается система линейных уравнений (3.51) или (3.61), из которой определяются коэффициенты отражения—прохождения при собственных функциях, нормированных в соответствии с (4.64), (4.65). Наконец, производится определение поверхностных коэффициентов отражения—прохождения по

формулам: для волн Лява

$$A_{si}^{\text{пов}} = A_{si} V_i^{(3)-}(0) / V_s^{(3)-}(0),$$

$$B_{sj}^{\text{пов}} = B_{sj} V_j^{(3)+}(0) / V_s^{(3)-}(0),$$

для волн Рэлея

$$A_{si}^{\text{пов}} = A_{si} V_i^{(1)-}(0) / V_s^{(1)-}(0),$$

$$B_{sj}^{\text{пов}} = B_{sj} V_j^{(1)+}(0) / V_s^{(1)+}(0).$$

Для оценки эффективности рассматриваемого метода было проведено сравнение результатов численного моделирования, полученных с помощью этого метода, с результатами применения других методов, описанных в гл. 3, а также с результатами ультразвукового моделирования [32, 82].

Наиболее надежным критерием достоверности приближенных оценок является их согласие с результатами, полученными с помощью численных методов. Сопоставление приближенных оценок коэффициентов отражения—прохождения и результатов, полученных численным методом, описанным в § 3.4 [22], было проведено на примере простейшей модели контакта океанического и континентального блоков земной коры. Модель представляла однородный слой на однородном полупространстве со скачкообразным изменением мощности при  $x = 0$  от 5 км (океан) до 40 км (континент). Параметры слоя:  $b = 3,5$  км/с,  $\rho = 2,7$  г/см<sup>3</sup>; параметры полупространства:  $b = 4,5$  км/с,  $\rho = 3,3$  г/см<sup>3</sup>. Расчеты проводились для нормального падения основной моды волны Лява на границу  $x = 0$  со стороны океана. Полученные в результате расчетов поверхностные коэффициенты прохождения  $B_{11}^{\text{пов}}$  и отражения  $A_{11}$  для разных периодов изображены на рис. 4.4. Согласованность результатов, полученных двумя разными методами, позволяет сделать вывод об эффективности приближенного метода для оценки амплитуд смещений в волнах Лява, возбуждаемых на достаточно контрастном контакте, каким является граница океан—континент.

Сопоставление коэффициентов отражения рэлеевских волн, рассчитанных приближенным методом и определенных экспериментально с помощью трехмерного ультразвукового моделирования, проводилось на примере двух моделей контакта однородных четвертьпространств [32].

В модели контакта сред со слабой скоростной дифференциацией в качестве контактирующих материалов были использованы гипс и сургуч, скорости рэлеевских волн  $C_R$  в которых равны соответственно 1,3 и 1,21 км/с. Результаты расчетов и эксперимента, приведенные на рис. 4.5, показывают, что на всем интервале углов падения совпадение теоретических и экспериментальных кривых вполне удовлетворительно.

В модели контакта сред с сильной скоростной дифференциацией в качестве контактирующих материалов выбраны сургуч ( $C_R = 1,21$  км/с) и дюралюминий ( $C_R = 2,61$  км/с). Результаты расчетов и эксперимента приведены на рис. 4.6; здесь же изображены коэффициенты отражения, рассчитанные методом Олсопа. Сравнение этих трех кривых показывает, что коэффициенты Олсопа завышены, а коэффициенты, полученные методом функций Грина, хорошо согласуются с экспериментальными в области докритических углов. В закритической области существенное расхождение

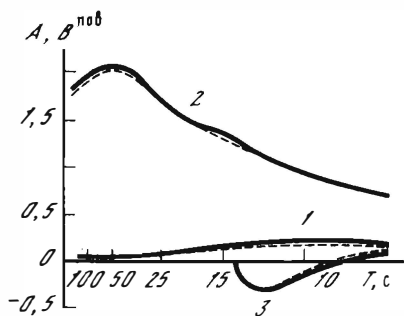


Рис. 4.4. Результаты расчетов полей отраженных и проходящих волн Лява при нормальном падении основной моды на границу океан-континент со стороны океана

1 — коэффициент отражения основной моды; 2, 3 — поверхностные коэффициенты прохождения, соответствующие основной и второй проходящей модам. Сплошная линия — результаты расчетов по методу функций Грина, штриховая — по методу, изложенному в § 3.4

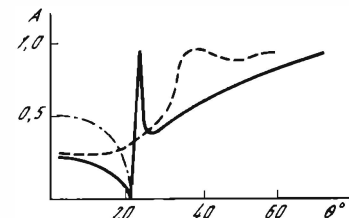
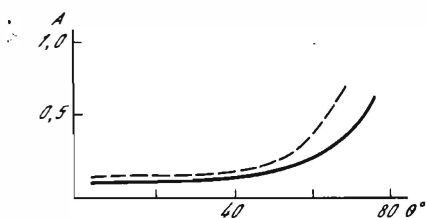


Рис. 4.5. Коэффициент отражения волны Рэлея от границы контакта сургуч-гипс как функция угла падения

Сплошная линия — результаты расчетов по методу функций Грина, штриховая — экспериментальные данные

Рис. 4.6. Коэффициент отражения волны Рэлея от границы контакта сургуч-дюралюминий

Обозначения те же, что на рис. 4.5. Кривая штрих с точкой — результаты расчетов по методу Олсона

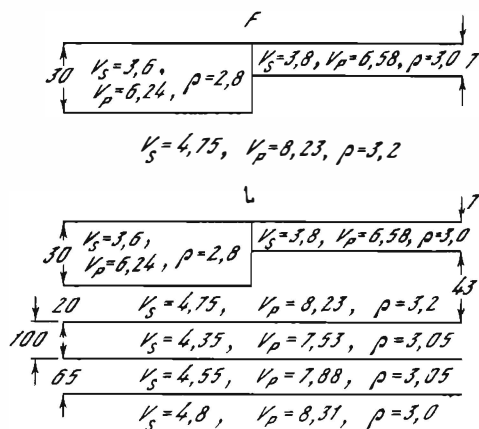


Рис. 4.7. Модели контакта континент-океан

$V_s$  — скорость поперечных волн, км/с;  $V_p$  — скорость продольных волн, км/с;  $\rho$  — плотность, г/см<sup>3</sup>; мощности слоев приведены в км

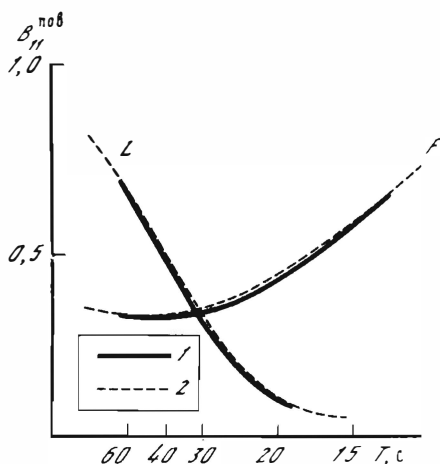


Рис. 4.8. Поверхностные коэффициенты прохождения основной моды волны Лява для моделей  $F$  и  $L$

Падение со стороны континента. Расчеты выполнены методом Греггсона—Олсопа (1) и методом функций Грина (2)

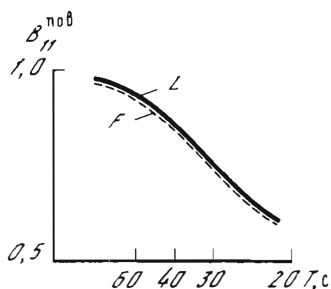


Рис. 4.9. Поверхностные коэффициенты прохождения основной моды волны Рэля для моделей  $F$  и  $L$ , рассчитанные методом функций Грина

Падение со стороны континента

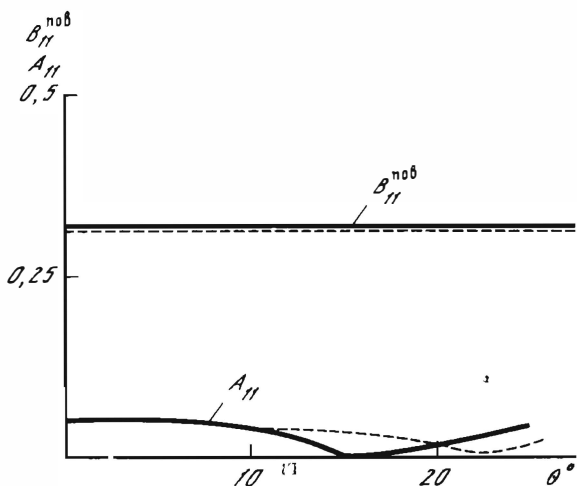


Рис. 4.10. Коэффициенты  $B_{11}^{пов}$  и  $A_{11}$  волны Лява, рассчитанные для модели  $L$  методом функций Грина (штриховая линия) и методом Греггсона—Олсопа (сплошная)

Падение со стороны континента

теоретической и экспериментальной кривых связано, по-видимому, с тем, что с увеличением интенсивности отраженной волны возрастает не учитываемый в расчетах коэффициент связи отраженной волны с объемными волнами во второй среде.

Результаты, получаемые двумя разными приближенными методами

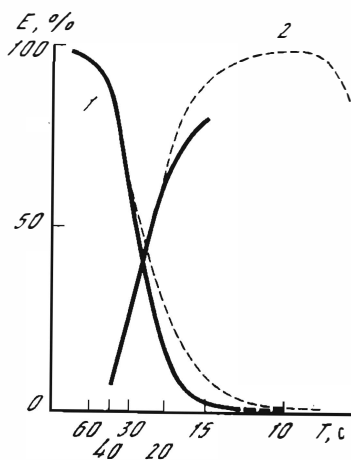


Рис. 4.11. Отношения потоков энергий в проходящих основной (1) и второй высшей модах (2) к потоку энергии падающей волны Лява (модель  $L$ , падение основной моды со стороны океана)

Расчеты выполнены по методу Греггерсона—Олсопа (сплошная линия) и по методу функций Грина (штриховая)

(Греггерсена—Олсопа и описанным в §3.3), сравнивались на примере двух моделей контакта континент—океан  $F$  и  $L$  (рис. 4.7), использованных в работах [140, 141]. Модели  $L$  и  $F$  с разной степенью детальности описывают структуру контактирующих блоков коры и верхней мантии. Главное различие между моделями заключается в том, что в интер-

вале глубин 50—215 км модель  $L$  содержит низкоскоростной слой.

Значения поверхностных коэффициентов прохождения  $B_{11}^{поб}$  волн Лява как функций частоты при нормальном падении приведены на рис. 4.8. Во всем рассмотренном интервале частот кривые, полученные двумя различными способами, фактически полностью совпадают. Интересно отметить резкое различие в величинах исследуемых коэффициентов и их изменении с частотой для различных моделей, тем более что приведенные на рис. 4.9 поверхностные коэффициенты прохождения волн Рэлея отличаются для моделей  $F$  и  $L$  незначительно. Этот факт обусловлен, по-видимому, более сильным влиянием мощного низкоскоростного слоя на процесс формирования волн Лява. Поверхностные коэффициенты прохождения  $B_{11}^{поб}$  и коэффициенты отражения  $A_{11}$  волн Лява с периодом  $T = 30$  с как функции угла падения для модели  $L$  приведены на рис. 4.10. Видно, что с увеличением угла падения коэффициенты  $B_{11}^{поб}(\theta)$ , рассчитанные разными способами, не изменяются и фактически совпадают, а коэффициенты  $A_{11}(\theta)$  расходятся для больших углов.

Представляет интерес исследовать, как перераспределяется энергия падающей поверхностной волны между отдельными модами проходящей волны. Долю энергии падающей волны, переходящей в энергию проходящей (или отраженной) волны, можно характеризовать отношением потоков энергии в соответствующих волнах через вертикальную полубесконечную полосу единичной ширины:  $0 < z < \infty$ ,  $0 < y < 1$ . В случае нормального падения волны Лява на границу  $x = 0$  поток энергии в любой

из волн равен  $\frac{U\omega^2}{2} \int_0^\infty \rho [V(z)]^2 dz$ , где  $V(z)$  — амплитуда смещения в соответствующей волне  $(V_s^{(3)-}(z))$  в  $s$ -й моде падающей,  $A_{si} V_i^{(3)-}(z)$  — в  $i$ -й моде отраженной,  $B_{sj} V_j^{(3)+}(z)$  в  $j$ -й моде проходящей волны,  $V_k^{(3)\pm}(z)$  — собственная функция, нормированная в соответствии с (4.64). Учитывая выражение для групповой скорости волны Лява, нетрудно показать, что отношение потоков энергии в проходящей и падающей волнах равно  $B_{sj}^2$ . То же самое имеет место и в случае нормального падения волны Рэлея.

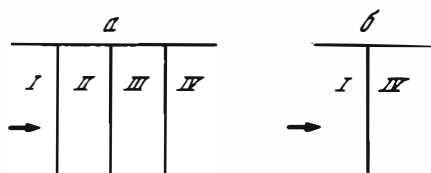


Рис. 4.12. Схема моделей зоны перехода от океанического литосферного блока (I) к континентальному (IV) в районе Южной Камчатки

Стрелкой обозначено направление распространения падающей волны

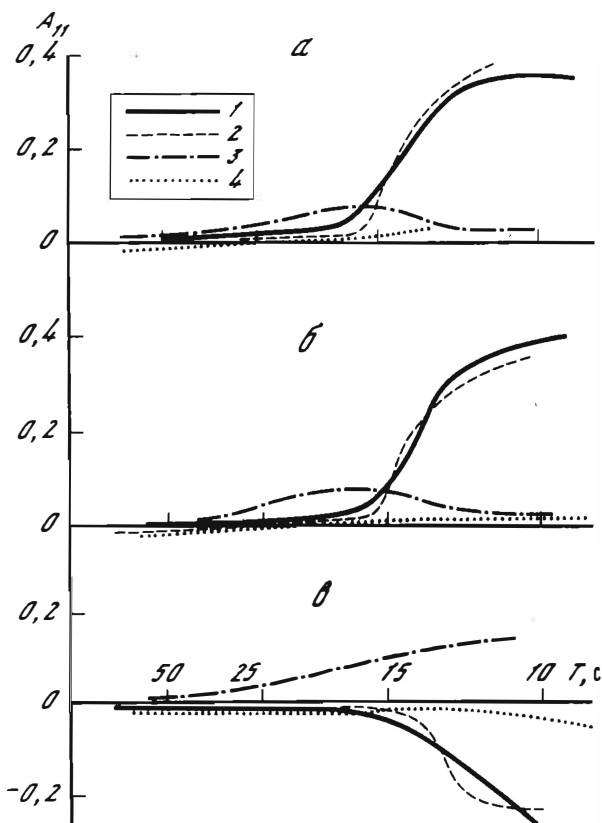


Рис. 4.13. Коэффициенты отражения волн Рэлея и Лява на разных границах

а - нормальное падение  $R \rightarrow R$ ; б - падение под углом  $15^\circ$ ,  $R \rightarrow R$ ; в - падение под углом  $15^\circ$ ,  $R \rightarrow L$ . Границы: 1 - I-IV; 2 - I-II; 3 - II-III; 4 - III-IV

Перекачка энергии основной моды волны Лява в высшие с увеличением частоты продемонстрирована на рис. 4.11. Кривые рассчитаны для нормального падения волны Лява на границу в модели  $L$  двумя приближенными методами: методом Греггерсона-Олсопа и методом функций Грина. Результаты расчетов свидетельствуют об увеличении доли энергии ( $E$ ), идущей на формирование второй моды, и об уменьшении энергии основной моды,



Т а б л и ц а 4.1. Параметры моделей литосферных блоков в районе Южной Камчатки

Океанический вал Зенкевича (I)				Блок континентального склона (II)			
$b$ , км/с	$a$ , км/с	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$H$ , км	$b$ , км/с	$u$ , км/с	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$H$ , км
0	1,57	1,0	5,2	1,63	3,3	2,32	5,0
2,6	4,5	2,61	3,1	2,25	3,3	2,46	6,0
2,76	6,4	2,61	5,7	3,41	5,9	2,84	9,0
4,21	7,4	3,07	5,9	4,21	7,3	3,05	17,0
4,74	8,2	3,5		4,74	8,2	3,5	

при этом величина энергии, подсчитанная методом функций Грина для периодов, меньших 20 с, оказалась меньше полученной по методу Греггерсона—Олсопа.

Таким образом, описанный в § 3.3 способ оценок полей отраженных и преломленных поверхностных волн дает результаты, находящиеся в хорошем согласии с теми, которые были получены с помощью альтернативных приближенных и численных методов, и, следовательно, его можно применять для численного моделирования наблюдаемых полей поверхностных волн. Иллюстрацией таких расчетов может служить оценка полей поверхностных волн, распространяющихся через зону сочленения континентального и океанического блоков в районе Южной Камчатки. Расчеты выполнялись для случаев нормального и наклонного падения основной моды волны Рэлея на последовательность трех границ между четырьмя основными блоками: океаническим валом Зенкевича (I), блоком материкового склона (II), Восточно-Камчатским (III) и Срединно-Камчатским блоками (IV). Параметры моделей этих блоков приведены в табл. 4.1, а структура зоны перехода схематично изображена на рис. 4.12, а. Кроме того, проводились расчеты для упрощенной модели, в которой два средних блока (II и III) были исключены, так что переходная зона заменялась одной границей между океаническим (I) и континентальным (IV) блоками (рис. 4.12, б). Характерными особенностями зоны перехода от океана к континенту является увеличение мощности коры, исчезновение водного слоя, наличие внутреннего волновода в моделях Восточно- и Срединно-Камчатского блоков.

На рис. 4.13 приведены результаты расчетов коэффициентов отражения волн Рэлея при нормальном и наклонном падении, а также коэффициенты отражения обменной волны Лява, которая образуется при наклонном падении рэлеевской волны. Для кривых характерны следующие особенности: на больших периодах (а для границы III—IV на всех периодах) интенсивность всех отраженных волн незначительна; с уменьшением периода коэффициенты отражения на границах I—IV, I—II растут особенно резко в интервале периодов 12,5—15 с, достигая значений порядка 0,4, причем коэффициенты отражения под углом  $\theta = 15^\circ$  для небольших периодов чуть больше, чем при нормальном падении. Интенсивность обменных волн Лява имеет тот же порядок. Это означает, что для периодов, меньших 15 с, на формиро-

Восточно-Камчатский блок (III)				Срединно-Камчатский блок (IV)			
$b$ , км/с	$a$ , км/с	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$H$ , км	$b$ , км/с	$a$ , км/с	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$H$ , км
3,18	5,5	2,78	1,0	2,54	4,4	2,3	2,0
3,81	6,6	2,96	20,0	3,38	5,85	2,75	20,0
4,57	7,9	3,15	8,0	3,93	6,8	2,97	5,0
4,33	7,5	3,05	10,0	4,33	7,5	3,05	15,0
4,68	8,1	3,3		4,68	8,1	3,3	

вание отраженных волн идет 15–20% энергии падающей волны. Кривые зависимости коэффициентов отражения на границах I–IV и I–II близки друг к другу и по форме, и по величинам.

Кривые зависимости поверхностных коэффициентов прохождения волн Рэлея от периода приведены на рис. 4.14. Расчеты показали, что эти величины в интервале углов 0–15° практически не зависят от угла падения. Коэффициенты прохождения на границах I–IV и I–II, как и коэффициенты отражения, почти не отличаются друг от друга. Основная тенденция — уменьшение поверхностного коэффициента прохождения с уменьшением периода.

В работе [81] приводятся данные об интенсивных поверхностных волнах, отраженных от глубинных разломов. В связи с этим представляет интерес численно исследовать влияние глубинных разломов на характер распространения волн. В первом приближении разлом можно моделировать границей, на которой происходит сдвиг слоев друг относительно друга и скачкообразное изменение их мощности. Подобная модель, приведенная на рис. 4.15, была использована для расчетов, при проведении которых предполагалось, что на границу слева (прямое падение) или справа (обратное падение) падает нормально основная гармоника волны Лява, причем мощность верхнего слоя  $H$  в среде справа от контакта варьировалась в интервале 1,5–10 км.

Полученные результаты, которые приведены на рис. 4.16–4.18, характеризуются следующими особенностями. В случае прямого падения с увеличением  $H$  и соответственно глубинности разлома доля энергии, переходящая в основную моду проходящей волны, которая, как было показано выше, определяется квадратом коэффициента прохождения  $B_{11}$ , уменьшается на больших частотах, тогда как коэффициент  $B_{12}$ , характеризующий долю энергии, переходящую во вторую моду, напротив, значительно возрастает (рис. 4.16, *a*). Это связано с тем, что при определенных значениях частот фазовые скорости основной моды падающей волны и второй моды проходящей волны становятся близки (рис. 4.17). При обратном падении (рис. 4.18, *a*) коэффициент  $B_{11}$  при возрастании глубинности разлома также уменьшается на больших частотах, но интенсивность второй моды остается сравнительно малой. В обоих случаях коэффициенты отражения  $A_{1i}$  (рис. 4.16, *b* и 4.18, *b*) с увеличением частоты возрастают интенсивнее

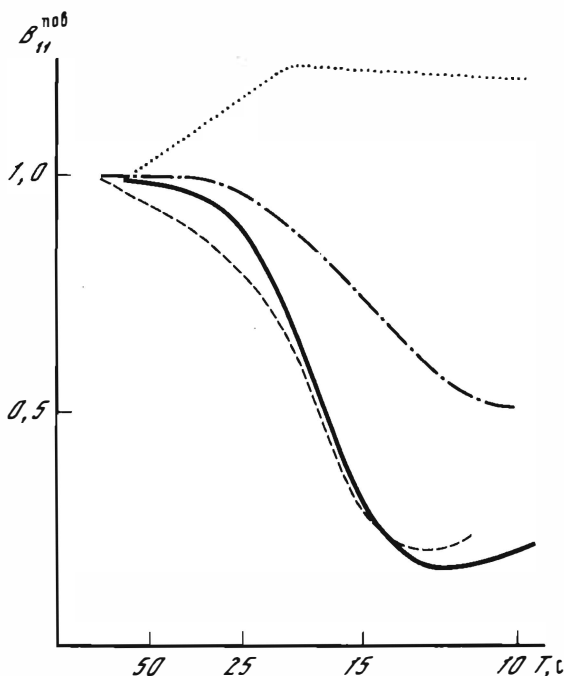


Рис. 4.14. Поверхностные коэффициенты прохождения волн Рэлея через разные границы

Обозначения те же, что на рис. 4.13. Кривые соответствуют интервалу углов  $0-15^\circ$

для глубокопростирающихся разломов, но всегда остаются по величине меньше коэффициентов прохождения. Таким образом, при моделировании разломов контактами описанного типа не удастся получить интенсивные отраженные волны.

Этот результат был подтвержден расчетом коэффициентов отражения—прохождения волн Рэлея при нормальном падении для Севанского глубинного разлома (рис. 4.19) на территории Армении. В интервале периодов от 125 до 5,5 с коэффициент прохождения менялся в пределах 0,98–1, коэффициент отражения — в пределах — (0,01–0,015). Эти значения позволяют считать, что выбранная на основании данных ГСЗ модель неадекватна истинному разлому, поскольку именно на Кавказе наблюдаются довольно интенсивные отраженные волны.

Для исследования влияния наклона границы на величины коэффициентов отражения—прохождения поверхностных волн в соответствии с полученными в § 3.5 формулами (3.80), (3.81) были проведены расчеты этих коэффициентов для случая нормального падения волны Лява на наклонный уступ, образованный границей слоя и полупространства. Модель среды изображена на рис. 4.20. Параметры для слоя и полупространства одни и те же слева и справа от уступа, так что различие сред — только в различной толщине слоя. Расчеты проводились для случаев падения волны на уступ как слева, так и справа для различных значений угла наклона границы.

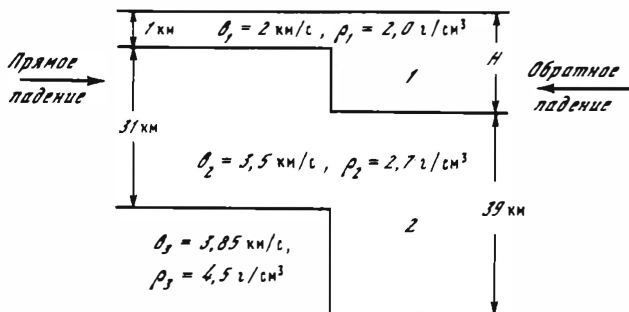


Рис. 4.15. Модель глубинного разлома

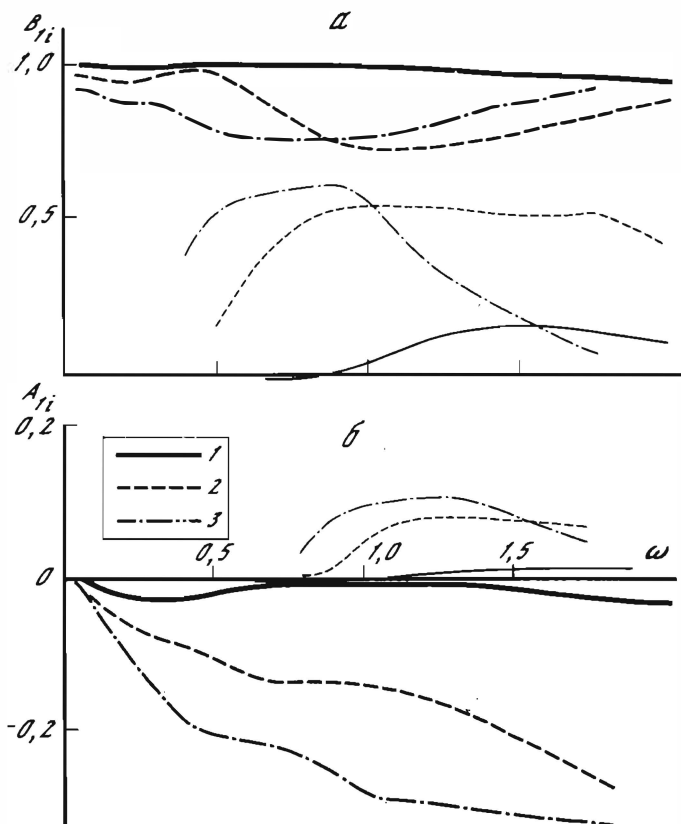


Рис. 4.16. Коэффициенты прохождения  $B_{1i}$  (а) и отражения  $A_{1i}$  (б) для случая прямого падения волны Лява

Кривые, соответствующие основной моде проходящей или отраженной волны ( $i = 1$ ), изображены жирными линиями, второй моде ( $i = 2$ ) — тонкими. 1 —  $H = 1,5 \text{ км}$ , 2 —  $H = 5 \text{ км}$ , 3 —  $H = 10 \text{ км}$

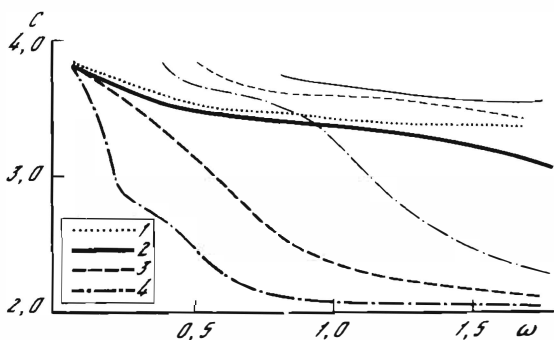


Рис. 4.17. Фазовые скорости падающей (1) и проходящих (2–4) волн Лява при прямом падении

Соответствие кривых 2–4 значениям  $H$  и номерам мод такое же, как и на рис. 4.16

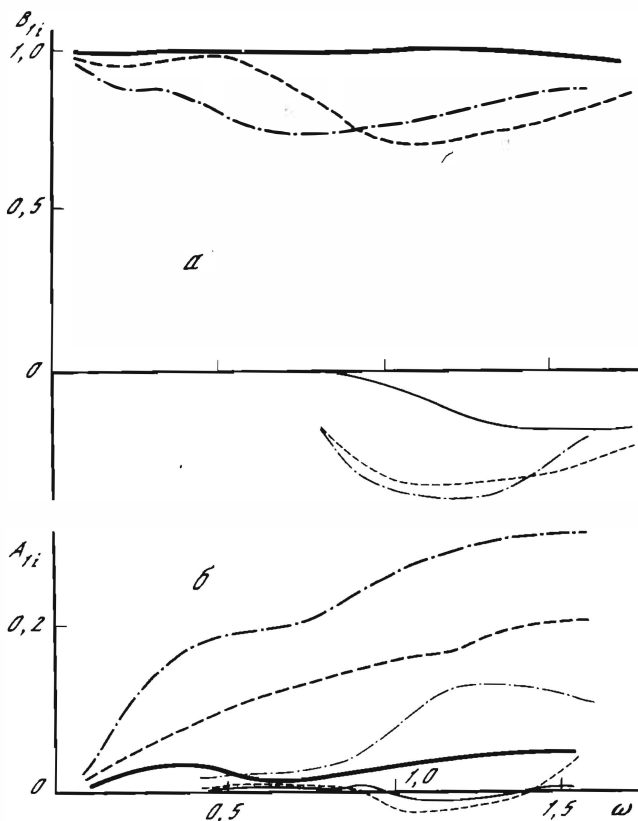


Рис. 4.18. Коэффициенты прохождения (а) и отражения (б) при обратном падении  
Обозначения те же, что на рис. 4.16

$h$ , км	$\alpha$ , км/с	$\beta$ , км/с	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$h$ , км	$\alpha$ , км/с	$\beta$ , км/с	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>
11,0	5,90	3,41	2,75	5,0	4,70	2,77	2,55
6,0	6,30	3,64	3,15	15,5	6,00	3,47	2,80
15,5	6,80	3,93	3,20	8,0	6,80	3,93	3,20
9,5	7,40	4,28	3,30	11,5	7,40	4,28	3,30
	8,00	4,62	3,40	8,00	4,62	3,40	

Рис. 4.19. Модель Севанского глубинного разлома

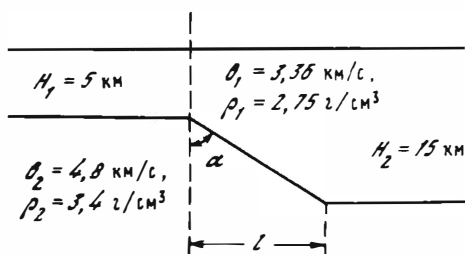


Рис. 4.20. Модель наклонного контакта

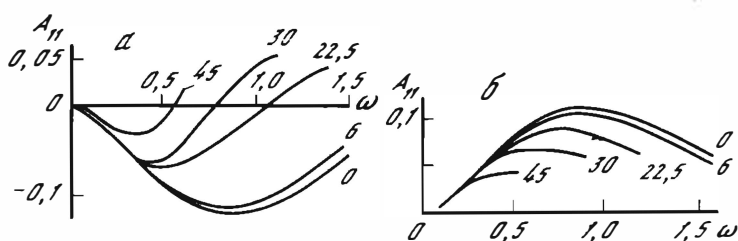


Рис. 4.21. Зависимость коэффициентов отражения от частоты в случае наклонного контакта, изображенного на рис. 4.20

*а* – падение волны со стороны тонкого слоя; *б* – падение волны со стороны толстого слоя. Цифры у кривых – значения углов наклона границы

Согласно указанным в § 3.5 ограничениям коэффициенты вычислялись до таких частот, при которых соответствующие длины волн были равны горизонтальному размеру уступа  $l$ . На рис. 4.21 приведены результаты расчетов только коэффициента отражения, так как на величины коэффициентов прохождения на всем интервале частот наклон границы практически не влияет. На величины коэффициентов отражения изменение угла наклона границы практически не влияет при низких частотах. При  $l < \lambda/10$  для всех рассмотренных углов отклонение кривых  $A_{11}(\omega)$  от соответ-

ствующей кривой для вертикальной границы не превышает 15%. С увеличением частоты указанное расхождение становится весьма значительным.

Приведенные примеры расчетов демонстрируют приемлемость использования описанного в § 3.3 приближенного метода расчета для оценки коэффициентов отражения—прохождения поверхностных волн, образующихся на границе жесткого контакта сред, не слишком сильно различающихся по своему строению. Однако при численном моделировании полей отраженных и проходящих поверхностных волн следует учитывать неадекватность такой модели реальным глубинным разломам и зонам сочленения разнородных литосферных блоков. На характер полей отраженных и проходящих волн будут, по-видимому, сильно влиять такие неучитываемые в данной модели факторы, как повышенное поглощение и рассеяние в зоне контакта блоков и переход значительной части энергии поверхностных волн в энергию объемных волн, рассеянных на локальных неоднородностях.

## ВОПРОСЫ ИНТЕРПРЕТАЦИИ НАБЛЮДЕНИЙ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

---

### Глава 5

#### РЕГИСТРАЦИЯ, ВЫДЕЛЕНИЕ И ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

Интерпретация поверхностных волн с целью изучения глубинного строения различных регионов Земли и определения природы сейсмических источников включает как обязательный начальный этап проведение массовых измерений спектральных характеристик этих волн на множестве трасс эпицентр–станция [58]. Такие измерения требуют сбора и стандартизованного анализа большого объема экспериментальных данных – сейсмограмм, получаемых на сейсмических станциях. В процессе анализа данные преобразуются в единый формат, корректируются за искажения, вносимые регистрирующей аппаратурой, на них выделяются интересующие интерпретаторов сигналы, проводится измерение спектральных параметров этих сигналов. В настоящей главе рассмотрены все основные этапы такого первичного анализа данных, причем основное внимание уделено методам выделения и измерения параметров сигналов.

##### § 5.1. Способы и средства регистрации поверхностных волн

Разнообразные сейсмические наблюдения показывают, что в зависимости от условий возбуждения и регистрации поверхностные сейсмические волны, распространяющиеся в земной коре и верхней мантии, содержат колебания с периодами от 5–10 до 300–500 с (в некоторых случаях до 700–800 с [133]). Такие колебания в соответствии со сложившейся в сейсмологии терминологией называют длиннопериодными по сравнению с 0,5–5-секундными колебаниями, хорошо представленными объемными волнами, хотя нередко тот же термин относят к колебаниям с периодами 50 с и более.

Условия регистрации таких волн определяются интенсивностью возбуждающих их сейсмических источников, затуханием при распространении в Земле и интенсивностью присутствующего в месте регистрации сейсмического шума естественной и искусственной природы, не связанного с выделяемыми сигналами.

Не затрагивая сколько-нибудь подробно вопросы о свойствах источников, отметим огромный динамический диапазон используемых сейсмических источников (не менее десяти десятичных порядков по излучаемой им энергии упругих колебаний). Затухание волн с периодами более 10 с сравнительно невелико (менее одного десятичного порядка на расстояниях в несколько тысяч километров) и не оказывает столь существенного



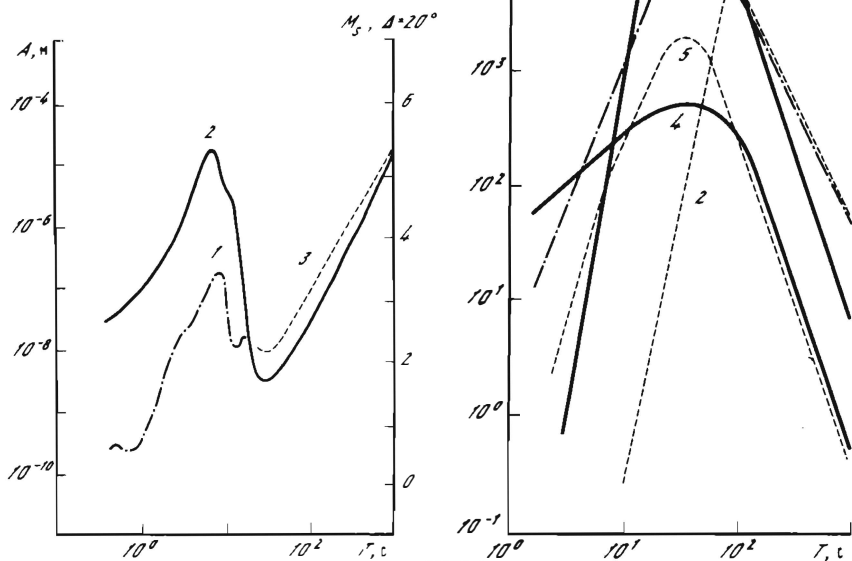


Рис. 5.1. Амплитудные спектры сейсмических помех и эквивалентные магнитуды  $M_S$  для  $\Delta = 20^\circ$

1, 2 — минимальный и максимальный уровни сейсмических помех в различных местах наблюдений по записям скважинных сейсмографов SRO [177]; 3 — уровень помех по записям помехозащищенных сейсмографов [46]

Рис. 5.2. Амплитудно-частотные характеристики современных длиннопериодных сейсмографов

1 — скважинный сейсмограф SRO [177]; 2 — гравиметр IDA [101]; 3 — помехозащищенный сейсмограф ICC [46, 47]; 4 — сейсмограф типа СД и WWSSN [173]; 5 — сейсмический канал NORSAR [117]

влияния на регистрацию. Наконец, сейсмические помехи в рассматриваемом диапазоне частот имеют достаточно сложную структуру (рис. 5.1) [3, 46, 89]. Высокий уровень помех в интервале периодов 5–15 с создают океанические (штормовые) микросейсмы (микросейсмы первого рода). В области 20–40 с помехи очень слабы, и это "окно" широко используется для регистрации поверхностных волн от слабых источников. Далее в области более длинных периодов уровень помех непрерывно растет: их создают барические (ветровые) колебания, действующие как непосредственно на регистрирующие приборы, так и на грунт в месте регистрации или на окружающей территории (микросейсмы второго рода). Уровень помех на записях сейсмографов в зависимости от метеоусловий может меняться на один-два десятичных порядка. Различные способы подавления барического воздействия на сейсмометр (герметизация, вакуумизация, термоизоляция и термокомпенсация) позволяют ослабить несейсмическую составляющую помехи. Для ослабления помехи, действующей через грунт,

приборы заглубляют в скважины на несколько сотен метров; другим способом подавления сейсмических помех является корреляционная фильтрация с использованием когерентных "барических" колебаний (записей давления или эквивалентных ему колебаний температуры). Проведенные эксперименты свидетельствуют о высокой эффективности этого способа ослабления барических помех.

**Способы регистрации.** В мировой сейсмологической практике для регистрации длиннопериодных сейсмических колебаний чаще всего применяются сейсмометры — маятниковые датчики с электродинамическими или емкостными преобразователями перемещений в электрический ток [67, 178, 197], в меньшей степени используются гравиметры [101], кварцевые и лазерные деформометры [3, 83] и другие устройства [3, 65, 113]. До недавнего времени колебания в основном регистрировались аналоговым путем (на фотобумагу); в последние годы все большее применение находит цифровая регистрация. На рис. 5.2 показаны амплитудные характеристики сейсмического канала, применяемые в СССР и за рубежом.

В связи с необходимостью совместного стандартизованного анализа данных различных станций в последние годы получили развитие сети однотипных длиннопериодных приборов. Первая из таких сетей WWSSN [173], ориентированная на осциллографическую регистрацию, модернизируется; создается также цифровая сеть SRO—ASRO, оборудованная длиннопериодными маятниковыми приборами [177]. Уже несколько лет функционирует гравиметровая мировая сеть IDA [101]; в последние годы стали развиваться новые сети [181], состоящие только из длиннопериодных приборов. Сбор данных со станций сети осуществляется в основном пересылкой магнитных лент по почте.

В ряде стран в конце 60-х — начале 70-х годов были созданы групповые станции с большим числом датчиков, в том числе и длиннопериодных, телеметрически связанных с пунктами обработки (LASA, NORSAR, ALPA). Длиннопериодные датчики этих групп — трехкомпонентные сейсмометры, обладающие резонансной частотной характеристикой с пиком вблизи 20 с (рис. 5.2). В настоящей монографии мы используем данные одной из таких групп — NORSAR [117], расположенной в Южной Норвегии (до 1977 г. эта группа состояла из 22 длиннопериодных станций, расположенных по трем концентрическим окружностям с наибольшим диаметром 110 км). Отсчеты приборов каждую секунду передаются по телефонным каналам в центр обработки. Так как эксплуатация таких станций требует значительных затрат, в настоящее время они полностью либо частично закрыты.

В СССР на некоторых станциях используется система магнитной цифровой регистрации СЦР [34] с записью данных в цифровом коде на магнитную ленту шириной 35 мм с последующей перезаписью на магнитные ленты ЭВМ. В настоящее время в ИФЗ АН СССР разработана также экспериментальная микропроцессорная система цифровой регистрации с записью на магнитной ленте (МЛ) в формате ЭВМ. Широко применяется также полуавтоматическая цифровка осциллографических записей, однако малый динамический диапазон (не более 30 дБ) и невысокая точность цифровки из-за нерегулярности развертки не позволяют использовать этот цифровой материал с той же эффективностью, как и полученный средствами прямой регистрации на магнитные носители.

## § 5.2. Система унификации, архивирования и доступа к данным

При совместном анализе данных, полученных при помощи разных аппаратных средств, неизбежно возникают проблемы унификации, архивирования и стандартизации доступа к цифровой информации [76, 93]. В 1980 г. применительно к условиям советской сейсмологической сети в Центральной сейсмологической обсерватории "Обнинск" (ЦСО) [84] была разработана система, состоящая из набора программ. Эти программы осуществляют форматные преобразования: записи с различных носителей в разных форматах преобразуются в запись с унифицированным форматом на МЛ; архивацию-накопление, исключение; сервисные функции — вывод на печать и графопостроитель и т.п.; доступ к отдельным записям с целью использования их для различных расчетов. Настоящая версия системы обеспечивает ввод записей, полученных на СЦР, данных американской гравиметрической сети IDA, данных сети французских станций. Все перечисленные выше типы данных непосредственно регистрируются на МЛ в цифровой форме. Имеется возможность ввода перфолент с цифровыми записями ряда станций ЧССР и ПНР. С перфокарт данные вводятся в коде EBCDIC и в специальных кодах ЭВМ БЭСМ-4 (выходные форматы установок типа УЦС). Набор форматов может легко расширяться по мере необходимости.

Т а б л и ц а 5.1. Структура метки файла

Номер байтов записи	Содержимое поля	Условное обозначение	Формат
1-8	Служебная информация		
9-16	Имя файла	SORS	A8
17-20	Версия	IVER	A4
21-24	Год	IVB	I4
25-27	День	INB	I3
28-29	Час	IDB	I2
30-31	Минута	INB	I3
32-34	Секунда × 10	IMB	I3
35-38	Год	IYE	I4
39-41	День	IDE	I3
42-43	Час	INE	I2
44-45	Минута	IME	I2
46-48	Секунда × 10	ISE	I3
49-56	Шаг отсчета (с)	DT	F8.3
57-68	Число отсчетов	ISCAN	I12
69-72	Код станции	KOD	A4
73-92	Название станции	NAME	A20
93-100	Название прибора	INSTAL	A8
101-108	Дополнительные сведения о приборе	DOPIN	A8
109-124	Информация о канале	DOPCAN	A16
125-128	Тип записи	DVFORM	I4
129-132	Номер файла	NFLE	I4
133-200	Резерв	SPACE	A68
200-1000	Комментарий	COMM	A800

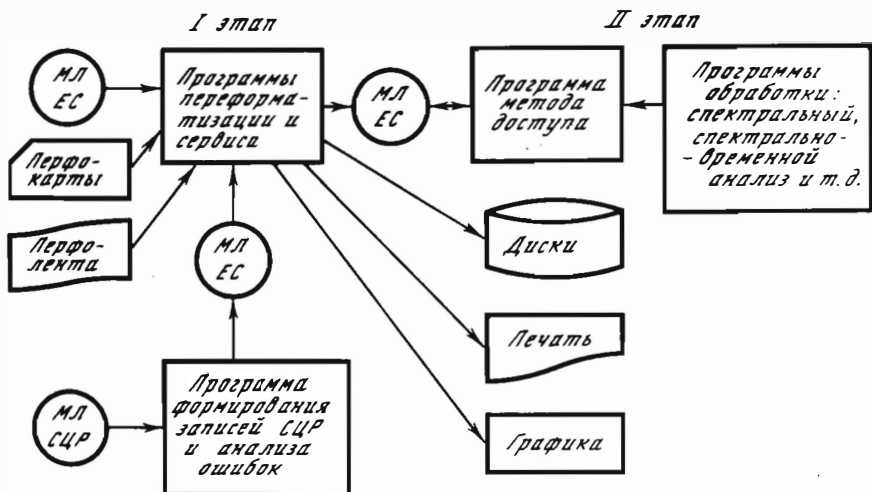


Рис. 5.3. Блок-схема системы сбора, хранения и доступа к цифровой длиннопериодной информации

Структура организации информации на МЛ ЭВМ серии ЕС для записей в унифицированном формате представляет собой многофайловую структуру с метками тома и файла. Метка файла (табл. 5.1) содержит описательную информацию: время начала и конца записи, шаг записи, код и название станции, тип прибора, параметры прибора; длина метки 1000 байт. Далее следуют блоки по 1000 байт, содержащие отсчеты амплитуд для одного непрерывного интервала записи сейсмического сигнала во внутреннем машинном представлении (с целью экономии ленты), причем отсчеты взяты с постоянным шагом по времени. Такой способ представления информации позволяет записать на 750 м ленты (одна большая кассета)  $4 \cdot 10^6$  и  $8 \cdot 10^6$  отсчетов при размере 4 и 2 байта на число соответственно.

Такой способ организации информации позволяет упрощать программы обработки (спектральный анализ, спектрально-временной анализ и т.д.), а также накапливать интересующую исследователя информацию для последующей обработки — создавать архив записей для определенного набора задач. На общей блок-схеме, изображенной на рис. 5.3, приведены два этапа работ с информацией: I — накопление; II — обработка. Отметим, что программа доступа к информации обеспечивает разрядку и фильтрацию вводимого материала. Цифровые записи сети станций SRO, ASRO, DWSSN еще не включены в данную систему, но технология доступа к этой информации разработана.

Таким образом, процесс сбора интересующей исследователя информации состоит из следующих этапов: поиск необходимого материала по справочникам, каталогам и т.д.; приведение материала к виду, пригодному для ввода в ЭВМ; составление программы приведения к унифицированному формату (расширение системы), если исходный материал не удалось привести ни к одному из имеющихся форматов в системе; пополнение архивных записей; вывод записей на графопостроитель с целью визуального контроля и проверки качества записи.

### § 5.3. Принципы обработки записей поверхностных волн

Основам цифровой обработки записей поверхностных волн посвящены следующие четыре параграфа. Наша главная цель — передать специфику возникающих здесь задач и способов их решения. Изложение не претендует на полноту, и в первую очередь — в отношении технических деталей. Исключение сделано лишь для двух вопросов, рассмотренных подробнее остальных: (спектрально-временного анализа — наиболее наглядного способа представления поверхностных волн) и отдельных проблем поляризационного анализа, недостаточно освещенных в сейсмологической литературе.

Обработке единичной одноканальной записи посвящены § 5.3 и 5.4. Вопросы измерения поляризационных характеристик и возможности пространственного анализа поверхностных волн рассматриваются в § 5.5.

Обозначения в формулах этих параграфов не вполне соответствуют предыдущим, они сохранены только для нескольких понятий, занимающих центральное место во всех разделах. Под термином "измерение" подразумевается не физический процесс, а вычисление значений характеристик сигнала при его цифровой обработке.

Для геофизической интерпретации информации, содержащуюся в сейсмограмме, необходимо перевести на язык понятий и величин, составляющих некоторую теоретическую модель, — в этом главное содержание процесса обработки данных.

Легко видеть, что задача имеет две стороны: первая — более исследовательская — выбор модели, вторая — более рутинная — вычисления в рамках выбранной модели. Понятие модели здесь весьма широкое и проявляется в самых разнообразных контекстах. Это может быть и приближение горизонтально-однородной среды или частный вопрос о том, включать ли некоторый цуг на записи в полезную волну или отнести его к помехам. Конечно, многие "модельные утверждения", относящиеся к поверхностным волнам в Земле, уже многократно подтвердились, и все же почти на каждой сейсмограмме мы продолжаем находить что-то неожиданное, требующее принятия неформальных (и чаще всего субъективных) решений. В таких ситуациях помогает не столько теория обработки, сколько удачное представление материала. Математические приемы относятся в основном ко второй, "рутинной" стороне обработки.

Непосредственным основам обработки одномерной записи поверхностных волн и посвящен этот параграф. Мы перечислим априорные предположения о поверхностных волнах при взгляде на них как на "сигналы", рассмотрим параметры, которыми описываются их общие свойства, и, наконец, проследим, как из последних вытекают главные приемы обработки.

**Измеряемые характеристики. Определения.** Прежде всего уточним, что является тем "модельным языком", на который мы хотим "перевести" кривую, записанную сейсмометром.

В теории поверхностной волной называется определенный член разложения суммарного колебания среды. При обработке отдельной "волне" соответствует "сигнал". Будем подразумевать под сигналом ту часть за-

писи, которая несет информацию об интересующей нас волне, все остальное на записи является по отношению к данному сигналу помехой. При обработке мы сначала идентифицируем сигнал (т.е. узнаем в нем характерные черты волны), выделяем его из помех и, наконец, отождествляем его характеристики с соответствующими характеристиками волны. Таким образом, конечной целью обработки является измерение характеристик полезного сигнала.

Если мы предполагаем среду "линейной" и "стационарной" (т.е. с не зависящими от времени свойствами), то наиболее удобным функциональным представлением волны является спектральное. Такая среда воздействует на сигнал как линейный фильтр с передаточной функцией, равной функции Грина соответствующих дифференциальных уравнений. Удобнее задавать фильтр частотной характеристикой, которая в простейшем случае горизонтально-однородной среды имеет вид

$$M(\omega, r) \exp[-i\xi(\omega)r], \quad (5.1)$$

где функция  $\xi(\omega)$  — волновое число;  $r$  — расстояние, пройденное волной;  $M(\omega, r)$  и  $\xi(\omega)$  определяются только средой и не зависят от формы распространяющейся волны, они и составляют ту информацию о среде, которая содержится в бегущей волне. Выше мы видели, что и многие задачи о сейсмическом источнике удобно формулировать в спектральной форме.

Легче всего поддается интерпретации фазовая характеристика фильтра-среды (5.1), определяющая кинематику распространения волн. Ее обычно принято задавать фазовой скоростью

$$C(\omega) = \omega / \xi(\omega). \quad (5.2)$$

Как мы увидим ниже, процесс обработки поверхностных волн требует измерения другой характеристики фазы фильтра (5.1) — групповой скорости

$$U(\omega) = 1 / \frac{d\xi}{d\omega}(\omega). \quad (5.3)$$

Функции  $U(\omega)$  и  $C(\omega)$  называются дисперсионными кривыми среды. Они связаны соотношением

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{C} + \omega \frac{d}{d\omega} \left( \frac{1}{C} \right), \quad (5.4)$$

т.е. групповая скорость может быть вычислена по фазовой (но не наоборот). Формально кривая групповой скорости не несет дополнительной информации о среде по сравнению с кривой фазовой скорости, тем не менее обе они активно используются для геофизической интерпретации [3, 174]. Это связано и с тем, что в ряде случаев измерению доступна только групповая скорость, и с тем, что ошибки измерения  $U$  и  $C$  не обязательно связаны соотношением, аналогичным (5.4).

Перейдем теперь от характеристик фильтра-среды к характеристикам сигнала. Пусть последний задается вещественной функцией  $w(t)$ . Опре-

делим спектр сигнала выражением

$$K(\omega) = |K(\omega)| e^{i\psi(\omega)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w(t) e^{-i\omega t} dt, & \omega > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt, & \omega = 0 \\ 0, & \omega < 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

где  $K(\omega)$ ,  $\psi(\omega)$  — спектральные амплитуда и фаза соответственно.

Такое определение позволяет построить комплексный сигнал  $W(t)$ , соответствующий  $w(t)$  и связанный с  $K(\omega)$  обычным преобразованием Фурье на бесконечной оси:

$$W(t) = |W(t)| e^{i\varphi(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \\ K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} W(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (5.6)$$

где  $|W(t)|$ ,  $\varphi(t)$  — временные (или мгновенные) амплитуда и фаза. Во многих случаях функции  $|W(t)|$  и  $\varphi(t)$  имеют наглядный смысл "амплитуды огибающей" и "фазы несущей". В частности, это так для узкополосных сигналов:  $\Delta\omega / \langle\omega\rangle \ll 1$ , где  $\Delta\omega$  и  $\langle\omega\rangle$  — ширина и характерная частота спектральной полосы сигнала.

Из (5.5) и (5.6) следует, что  $w(t)$  и  $W(t)$  связаны соотношением  $w(t) = \text{Re } W(t)$ , т.е. комплексный сигнал содержит всю информацию о вещественном;  $W(t)$  называют иногда аналитическим сигналом. В рамках принятой модели линейной и стационарной среды  $w(t)$  и  $W(t)$  являются решениями одних и тех же дифференциальных уравнений.

Введение аналитического сигнала позволяет использовать как в спектральной, так и во временной области аналогичные понятия амплитуды и фазы. Весьма полезны и две следующие характеристики (штрих — дифференцирование по частоте, точка — по времени):

$$\tau(\omega) = -\psi'(\omega) \text{ (групповое время)}, \\ \Omega(t) = \dot{\varphi}(t) \text{ (мгновенная частота)}.$$

Связь фазовой и групповой скоростей со спектральными характеристиками сигнала (для горизонтально-однородной среды) весьма проста. Фазовый спектр волны после прохождения фильтра-среды имеет вид

$$\psi(\omega) = -\xi(\omega)r + \psi_n(\omega) = -\frac{\omega}{C(\omega)}r + \psi_n(\omega), \quad (5.7)$$

где  $\psi_n(\omega)$  — спектральная фаза источника [63, 136]. Дифференцируя (5.7), получаем

$$\tau(\omega) = -\psi'(\omega) = \frac{r}{U(\omega)} - \psi_n'(\omega). \quad (5.8)$$

Последнее соотношение объясняет термин "групповое время" —  $\tau(\omega)$  является именно той характеристикой сигнала, по которой вычисляется групповая скорость волны. По той же причине мы будем иногда использовать для зависимости  $\tau(\omega)$  термин "спектральная дисперсионная кривая сигнала" и по аналогии будем называть  $\Omega(t)$  "временной дисперсионной кривой сигнала".

Для определения  $C(\omega)$  и  $U(\omega)$  из (5.7) и (5.8) необходимо исключить фазу источника. Это достигается либо путем измерения  $\psi(\omega)$  и  $\tau(\omega)$  на двух и более станциях, либо исходя из теоретических представлений о механизме источника (см. § 1.2). Сейсмические источники обычно действуют короткое время по сравнению с характерными величинами  $\tau(\omega)$ , что позволяет в пределах необходимой точности заменять в (5.8)  $-\psi'_i(\omega)$  на константу ("время в очаге"). Поэтому групповая скорость часто может быть найдена по известным параметрам эпицентра при измерении  $\tau(\omega)$  всего на одной станции. Ниже мы часто будем полагать в формулах  $\psi'_i(\omega) \equiv 0$ .

Таким образом, изучение кинематических свойств среды требует измерения характеристик  $\psi(\omega)$  и  $\tau(\omega)$  сигнала. Аналогично динамические задачи приводят к измерению спектральной амплитуды  $|K(\omega)|$ .

**Специфика сигналов—поверхностных волн.** "Рутинная" сторона обработки состоит из функциональных преобразований. Часть из них, например, фильтрация, всегда ориентирована на конкретные свойства сигналов. Такие преобразования будут тем эффективнее, чем лучше мы знаем свой сигнал и, вообще говоря, помехи. Перечислим известные общие черты сигналов — поверхностных волн (ориентируясь на телесеismicкий материал).

*Ограниченность по частоте и времени.* Как на сейсмограмме, так и в ее спектре поверхностная волна занимает ограниченный интервал, вне его амплитуды сигналы малы и скрыты в помехах. Поведение модели сигнала на этих участках можно выбирать произвольным образом, лишь бы амплитуды не превосходили некоторого порога. В частности, всегда можно считать, что обе функции  $|W(t)|^2$  и  $|K(\omega)|^2$  стремятся к нулю на  $\pm\infty$  и интегрируемы. Результаты обработки не должны значимо зависеть от участков, где амплитуды малы и не могут быть надежно установлены.

*Детерминированный характер.* За исключением особых случаев, поверхностные волны являются наиболее интенсивной и легко идентифицируемой частью сейсмических колебаний. Помехи занимают по отношению к ним подчиненное положение. Поэтому сигналы—поверхностные волны — можно рассматривать как детерминированные функции с относительно плавно меняющимися (но не постоянными) кривыми  $|K(\omega)|$ ,  $\tau(\omega)$ . Представление о характере этих функций дают рисунки, помещенные в § 7.3. Часто встречающиеся в спектрах сейсмограмм участки неустойчивого поведения  $|K(\omega)|$  или  $\tau(\omega)$  обычно связаны не со свойствами полезного сигнала, а с присутствием помех.

*Дисперсия  $\tau(\omega)$ ,* связанная с дисперсией групповых скоростей, — наиболее характерная черта рассматриваемых сигналов. Как следствие, поверхностная волна не имеет резкого фронта и обладает как широкой спектральной полосой, так и большой длительностью во времени. Для



телесеismicческих волн ось частот можно разделить на три-четыре интервала, в пределах каждого из которых дисперсионная кривая  $U(\omega)$  ведет себя монотонно (см. рис. 6.4). На многих записях весь сигнал попадает в пределы одного такого интервала, т.е. обладает монотонной  $\tau(\omega)$ . В таких случаях весьма полезна модель  $\tau'(\omega) = \text{const}$ , которую мы будем называть линейно диспергирующим сигналом.

**Поляризация.** Два типа поляризации поверхностных волн, собственные горизонтально-однородной изотропной среде (волны Лява и Рэлея — см. § 1.4), хорошо различаются на сейсмограммах. Но не редки и значительные отклонения поляризационных направлений от теоретических значений. Эти отклонения не настолько велики, чтобы возникли серьезные проблемы в идентификации волн, но в отдельных случаях могут достигать  $50^\circ$  (см. § 7.3). Более типичны отклонения порядка  $10^\circ$ .

**Помехи.** На большинстве сейсмограмм стационарные шумы значительно слабее поверхностных волн. Основные трудности доставляют локальные импульсные (нестационарные) помехи. Возможно, что многие из них генерируются самой поверхностной волной. Нестационарный характер обычно не позволяет использовать априорные модели помех. Чаще всего за помеху принимается "то, что не похоже на полезный сигнал", но широко встречаются и случаи интерференции различных идентифицируемых поверхностных волн.

**Параметризация главных свойств сигнала.** Для описания общих свойств сигналов, с которыми тесно связаны дальнейшие приемы обработки, воспользуемся широко распространенной в физике параметризацией, основанной на моментах и квадратичной норме.

Введем нормированные амплитуды

$$A(t) = \frac{|W(t)|}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |W(t)|^2 dt}} \quad B(\omega) = \frac{|K(\omega)|}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 d\omega}} \quad (5.9)$$

Тогда (равенство Парсеваля)

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} B^2(\omega) d\omega = 1 \quad (5.10)$$

и преобразование Фурье принимает вид

$$B(\omega) e^{i\psi(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \exp \{ i [\varphi(t) - \omega t] \} dt \quad (5.11)$$

Рассматривая  $A^2(t)$  и  $B^2(\omega)$  как "энергетические распределения", введем параметры, характеризующие "средние" свойства сигнала: характерное время

$$\langle t \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t A^2(t) dt, \quad (5.12)$$

средняя мгновенная частота

$$\langle \Omega \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(t) A^2(t) dt, \quad (5.13)$$

длительность  $\Delta_t$

$$\Delta_t^2 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (t - \langle t \rangle)^2 A^2(t) dt, \quad (5.14)$$

"интервал" изменения мгновенной частоты  $\Delta_\Omega$

$$\Delta_\Omega^2 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (\Omega(t) - \langle \Omega \rangle)^2 A^2(t) dt, \quad (5.15)$$

характерная частота

$$\langle \omega \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \omega B^2(\omega) d\omega, \quad (5.16)$$

среднее групповое время

$$\langle \tau \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(\omega) B^2(\omega) d\omega, \quad (5.17)$$

ширина спектральной полосы  $\Delta_\omega$

$$\Delta_\omega^2 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \langle \omega \rangle)^2 B^2(\omega) d\omega, \quad (5.18)$$

"интервал" изменения группового времени  $\Delta_\tau$

$$\Delta_\tau^2 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (\tau(\omega) - \langle \tau \rangle)^2 B^2(\omega) d\omega. \quad (5.19)$$

В этих выражениях предполагается, что  $A(\pm\infty) \rightarrow 0$ ,  $B(\pm\infty) \rightarrow 0$ , и все интегралы конечны. Как отмечалось выше, "практическая ограниченность" временных интервалов и спектральных диапазонов сигналов всегда оправдывает такие предположения.

Рассмотрим теперь несколько соотношений, связывающих "средние" свойства сигналов.

"Соотношение группового времени". Продифференцируем обе части равенства (5.11) по частоте

$$(B' + iB\tau) e^{i\psi} = - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t A \exp [i(\varphi - \omega t)] dt. \quad (5.20)$$

Проинтегрируем по  $\omega$  произведение (5.20) на равенство, комплексно сопряженное (5.11). Используя  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(t-s)\omega] d\omega = 2\pi\delta(t-s)$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} B' B d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} B^2 |_{-\infty}^{\infty} = 0$ , получаем

$$\langle \tau \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(\omega) B^2(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} t A^2(t) dt = \langle t \rangle. \quad (5.21)$$

Таким образом, характерное время сигнала  $\langle t \rangle$  равно среднему по энергетическому спектру значению группового времени  $\langle \tau \rangle$ . Отметим, что величины  $\langle \tau \rangle$  и  $\langle t \rangle$  получены усреднением с разными весовыми функциями.

Равенство (5.21) поясняет, в каком смысле спектральная характеристика  $U(\omega)$  – групповая скорость – является “скоростью распространения в пространстве и во времени”. При распространении в среде с дисперсией форма волны  $W(t)$  в разных точках пространства отличается, и понятие “скорость распространения” требует специального определения. Примем в качестве “момента времени присутствия волны в точке  $r$ ” значение  $\langle t \rangle$ , полученное по записи в этой точке. Тогда из (5.21) и (5.8), считая  $\psi_{\text{н}}(\omega) \equiv 0$ , будем иметь

$$\frac{1}{\langle U \rangle} = \frac{\langle t \rangle}{r} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B^2(\omega)}{U(\omega)} d\omega. \quad (5.22)$$

В указанном смысле волна распространяется в диспергирующей среде с “медленностью”  $1/\langle U \rangle$ , равной средней по энергетическому спектру сигнала “групповой медленности”  $1/U(\omega)$  среды.

Иногда, прежде всего для узкополосных сигналов, величине  $1/\frac{d\langle t \rangle}{dr}$  можно приписать смысл “скорости распространения огибающей”. Согласно (5.22) она равна групповой скорости на некоторой частоте в пределах спектральной полосы сигнала. Такой взгляд на групповую скорость несет наглядный физический смысл и потому весьма полезен, более того, на нем основан целый ряд методик измерения групповой скорости. Однако не следует забывать, что речь здесь идет всего лишь о приближенном утверждении, строгий смысл которого не выходит за рамки равенства (5.21). Поэтому и соответствующие методики измерений всегда обладают систематическими ошибками (см. § 5.4).

Аналогично (5.21) выводится равенство характерной частоты спектра (5.16) и средней мгновенной частоты сигнала (5.13)

$$\langle \Omega \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(t) A^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \omega B^2(\omega) d\omega = \langle \omega \rangle. \quad (5.23)$$

Таким образом, измеряя на сейсмограмме видимую частоту  $\Omega$ , мы одновременно приблизительно узнаем и значение частоты  $\langle \omega \rangle$ , вокруг которой концентрируется спектр сигнала. Последнее утверждение позволяет в случае узкополосного сигнала придать групповой скорости еще более наглядный смысл: “скорость распространения огибающей” приближенно (!) равна групповой скорости на видимой частоте сигнала.

В заключение приведем пример, в котором соотношение (5.21) позволяет легко получить несколько неожиданный физический вывод. Пусть узкополосная волна бежит в среде с дисперсией и поглощением, причем последнее растет с частотой, а  $U(\omega)$  убывает. Тогда по мере распространения будет возрастать роль длиннопериодной части спектра волны, и в эту сторону сместится эффективный интервал интегрирования в (5.22). Как следствие, возрастает  $\langle U \rangle$ . Наблюдателю, ориентирующемуся на “скорость распространения огибающей”, будет казаться, что волна движется с ускорением, хотя среда остается горизонтально-однородной. Конечно, измеряя при этом и  $\langle \Omega \rangle$ , можно заменить смещение спектрального диапазона, но мы видим, насколько осторожно следует подходить к определению групповой скорости по временным характеристикам сигнала.

Длительность и ширина спектральной полосы. Соотношение неопределенности. Используя (5.11) и (5.12), перепишем (5.20) в виде

$$[B' - iB(\tau - \langle \tau \rangle)]e^{i\psi} = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (t - \langle t \rangle) A \exp[i(\varphi - \omega t)] dt \quad (5.24)$$

и, применяя к последнему выражению равенства Парсеваля, получим

$$\Delta_t^2 = \Delta_\tau^2 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} B'^2(\omega) d\omega. \quad (5.25)$$

Таким образом, длительность сигнала во времени определяется двумя разными свойствами его спектра. Рассмотрим их.

Выше, обсуждая равенство (5.21), мы начали говорить о связи, существующей между функцией  $\tau(\omega)$  и временами  $t$ , на которых присутствует сигнал. Первое слагаемое в правой части (5.25) является следующим выражением этой связи. Утверждения  $\langle t \rangle = \langle \tau \rangle$  и вытекающее из (5.25)  $\Delta_t > \Delta_\tau$  означает, что ("в среднем") интервал времен  $t$ , занимаемых сигналом, по крайней мере перекрывает интервал изменения  $\tau(\omega)$  в пределах спектральной полосы. Заметим, что  $\Delta_\tau = 0$  только при линейном фазовом спектре ( $\tau(\omega) = \text{const}$ ). Дисперсия  $\tau(\omega)$  всегда приводит к увеличению длительности  $\Delta_t$ . В важном для нас случае линейно диспергирующего сигнала ( $\tau'(\omega) = \tau' = \text{const}$ )

$$\Delta_\tau = |\tau'| \Delta_\omega. \quad (5.26)$$

Для поверхностных волн  $\Delta_\tau$  существенно связано с дисперсией скоростей в среде. Из (5.8), (5.19), (5.22), считая  $\psi'(\omega) \equiv 0$ , находим

$$\Delta_\tau^2 = r^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{U(\omega)} - \frac{1}{\langle U \rangle} \right)^2 B^2(\omega) d\omega, \quad (5.27)$$

т.е.  $\Delta_\tau$  растет пропорционально расстоянию от источника.

Второе слагаемое в правой части (5.25) определяется только амплитудным спектром сигнала. Для оценки этого члена воспользуемся тождествами

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} B^2 d\omega = -2 \int_{-\infty}^{\infty} B' B \omega d\omega = -2 \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \langle \omega \rangle) B B' d\omega.$$

Применяя неравенство Коши к последнему интегралу, получаем

$$2\Delta_\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} B'^2(\omega) d\omega \geq 1. \quad (5.28)$$

Подставляя (5.28) в (5.25), имеем

$$\Delta_t^2 \geq \Delta_\tau^2 + 1/\Delta_\omega^2. \quad (5.29)$$

Таким образом, второй член в правой части (5.25) ответствен за обычное соотношение неопределенности, ограничивающее снизу произведение  $\Delta_\omega \Delta_t$ . Выражение (5.29) дает полную форму соотношения неопределенности. Равенство в (5.28) и (5.29) достигается при  $B' \sim (\omega - \langle \omega \rangle) B$ , т.е. для сигнала с гауссовым амплитудным спектром  $B(\omega) = c_1 \exp[c_2(\omega - \langle \omega \rangle)^2]$ . Условие убывания  $B(\omega)$  на бесконечности требует  $c_2 < 0$ .

Из всех сигналов с произвольным, но одинаковым фазовым спектром гауссов сигнал обладает минимальным произведением  $\Delta_\omega \Delta_t$ .

При распространении волны в среде без поглощения  $B(\omega)$ , а следовательно, и  $\int_{-\infty}^{\infty} B'^2(\omega) d\omega$  не зависят от расстояния от источника. Тогда, учитывая (5.27),

$$\Delta_t = \sqrt{ar^2 + b^2} \approx \Delta_\tau + b/2ar, \quad (5.30)$$

где  $a$  и  $b$  — положительные константы. На больших расстояниях от источника  $\Delta_t \rightarrow \Delta_\tau$ , т.е. длительность сигнала определяется практически лишь дисперсией.

Аналогичным образом выводятся соотношения, связывающие  $\Delta_\omega$  и  $\Delta_\Omega$ :

$$\Delta_\omega^2 = \Delta_\Omega^2 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}^2(t) dt, \quad (5.31)$$

$$\Delta_\omega^2 \geq \Delta_\Omega^2 + 1/\Delta_\tau^2. \quad (5.32)$$

**Безразмерные параметры  $I$  и  $q$ . Неопределенность.** Обсуждавшиеся выше интегральные свойства сигналов удобно характеризовать значениями двух безразмерных параметров:

$$I^2 = 2\Delta_\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} B'^2(\omega) d\omega, \quad (5.33)$$

$$q^2 = \Delta_\tau^2 / \left( 2 \int_{-\infty}^{\infty} B'^2(\omega) d\omega \right). \quad (5.34)$$

Тогда (5.25) и соотношение неопределенности (5.29) принимают безразмерную форму

$$\Delta_\omega^2 \Delta_t^2 = I^2 (q^2 + 1), \quad I^2 \geq 1. \quad (5.35)$$

Будем называть величину  $\Delta_\omega \Delta_t$  неопределенностью сигнала. Она достигает минимума  $\Delta_\omega \Delta_t = 1$  для гауссова сигнала ( $I = 1$ ) с линейным фазовым спектром ( $\tau(\omega) \equiv \text{const}$ ,  $q = 0$ ). Таким образом, значение неопределенности количественно характеризует "неоптимальность" сигнала в смысле произведения  $\Delta_\omega \Delta_t$ . Параметры  $I$  и  $q$  выражают две возможные причины этой "неоптимальности".

Параметр  $I$  характеризует "неоптимальность" амплитудного спектра. Легко убедиться, что замена  $|K(\omega)| \rightarrow |K(a\omega)|$ , где  $a = \text{const}$ , не меняет  $I$ . В этом смысле  $I$  не зависит от ширины спектральной полосы сигнала,  $I$  близок к 1 для сигналов, "похожих" на гауссовы. Практически оказывается, что большинство спектральных пиков, рассматриваемых по отдельности, обладают  $I$ , близкими к единице. Зато сигналы с несколькими спектральными максимумами всегда неоптимальны в смысле  $I$  больше единицы. Это легко увидеть на следующем простом примере.

Рассмотрим два сигнала с  $\tau(\omega) \equiv 0$  (на рис. 5.4,а приведены их амплитудные спектры): первый имеет единственный спектральный пик, а второй состоит из нескольких неперекрывающихся спектральных пиков той же формы, но разной амплитуды. Для этих двух сигналов отно-

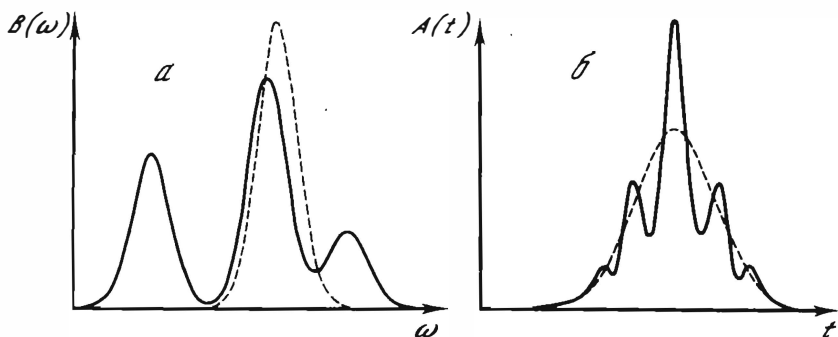


Рис. 5.4. Пример отклонения параметра  $I$  от единицы  
 а — спектральные; б — временные амплитуды двух сигналов. Для сигнала, изображенного штриховой линией,  $I = 1$ , жирной —  $I \approx 3$

шение значений интегралов  $\int_{-\infty}^{\infty} |K|^2 d\omega$  равно отношению энергий  $\int_{-\infty}^{\infty} |K|^2 d\omega$  (на рисунке энергии для наглядности временных картинок выбраны равными), и, следовательно, параметры  $\Delta_t = 2 \int_{-\infty}^{\infty} B^2 d\omega$  ( $\Delta_\tau = 0$ ) обоих сигналов равны между собой. Из рисунка видно, что величины  $\Delta_\omega$  существенно отличаются и во столько же отличаются параметры  $I$  двух сигналов.

Параметр  $q$  характеризует относительное влияние фазового и амплитудного спектров на длительность сигнала. Утверждение  $q = 0$  равноценно  $\tau(\omega) \equiv \text{const}$ . Нелинейный фазовый спектр существенно влияет на временную форму сигнала только при  $q \gg 1$ . Мы будем иногда называть сигналы с  $q > 0$  "диспергирующими" (слабо — если  $q^2 \ll 1$ , сильно — если  $q^2 \gg 1$ ). В случае линейной зависимости  $\tau(\omega)$

$$q = \tau' \Delta_\omega^2 / I. \quad (5.36)$$

В дальнейшем для таких сигналов будем считать, что  $q$  совпадает по знаку с  $\tau'$  ( $I$  всегда считаем положительным).

Часто удобно вычислять  $q$  для каждого отдельного спектрального пика. Тогда  $I \approx 1$ , и при  $q^2 \gg 1$  из (5.33) — (5.35) имеем

$$\Delta_\omega \Delta_t \approx \Delta_\omega \Delta_\tau \approx |q|, \quad (5.37)$$

т.е. для отдельного спектрального пика сильнодиспергирующего сигнала  $q$  приблизительно равно его неопределенности. Вообще из (5.35) следует, что диспергирующие сигналы всегда неоптимальны в смысле произведения  $\Delta_\omega \Delta_t$ .

Выше мы говорили о том, что наиболее характерной чертой сигналов — поверхностных волн — является дисперсия  $\tau(\omega)$ . Теперь этому утверждению можно придать количественный смысл. Для телесейсмических поверхностных волн типичны значения  $q^2 \gg 10$ . Поскольку  $\Delta_\omega$  слабо зависит от расстояния от источника, а  $\Delta_\tau$  пропорционально ему (5.27), то и

параметр  $q$  поверхностных волн растет (5.37) приблизительно пропорционально  $r$ . Таким образом, сигнал — поверхностная волна — обычно весьма неоптимален в смысле величины неопределенности. Ниже мы увидим, что этот факт в значительной степени определяет пути обработки поверхностных волн.

Параметр  $q$  отдельного цуга поверхностной волны можно грубо оценить прямо по сейсмограмме. Для сильнодиспергирующих сигналов в (5.32) обычно  $\Delta_\omega \approx \Delta_\Omega$ . Поэтому, подставляя  $\Delta_\Omega$  в (5.37) и учитывая определения  $\Delta_\Omega$  и  $\Delta_t$ , можно оценить  $q$  в окрестности одного максимума огибающей по формуле

$$|q| \approx D_t D_\Omega, \quad (5.38)$$

где  $D_t, D_\Omega$  — интервалы изменения  $t$  и  $\Omega$  на промежутке времени, где амплитуда огибающей  $|W(t)|$  спадает приблизительно в 0,6 раза относительно максимума. Заметим, что сигнал может оказаться сильнодиспергирующим в окрестности лишь некоторых максимумов огибающей.

Посмотрим теперь, к каким особым свойствам приводит высокое значение неопределенности сигнала — поверхностной волны.

**Локально-узкополосный сигнал. Приближение стационарной фазы.** Если сигнал обладает  $q^2 \ll 1$  и  $I \approx 1$ , то любое преобразование, уменьшающее  $\Delta_\omega$ , согласно соотношению неопределенности (5.35) приводит к увеличению  $\Delta_t$ . Такие сигналы, а следовательно, и такая формулировка, часто встречаются в физике, но для поверхностных волн мы сталкиваемся с иной ситуацией. При  $q^2 \gg 1$  обе величины  $\Delta_\omega$  и  $\Delta_t$  могут быть одновременно уменьшены. Для демонстрации этого ограничимся простейшим случаем линейно диспергирующего сигнала ( $\tau' = \text{const}$ ) с достаточно широкой полосой  $\Delta_\omega$  и  $I \approx 1$  (последнее условие означает, что мы рассматриваем отдельный спектральный пик).

Пропустим такой сигнал через фильтр с вещественной частотной характеристикой  $H(\omega)$  ( $\arg H(\omega) \equiv 0$ ), симметричной относительно некоторой частоты  $\omega^H$ . Для обозначения параметров сигнала на выходе фильтра используем знак  $\sim$  над соответствующим символом. Из вещественности  $H(\omega)$  следует  $\tilde{\tau}' = \tau'$ , и выражение (5.25) для сигнала на выходе фильтра принимает вид

$$\tilde{\Delta}_t^2 = \tilde{\Delta}_t^2 (1 + \tilde{q}^2) \approx \tau'^2 \Delta_\omega^H + I^{H^2} \Delta_\omega^H. \quad (5.39)$$

Здесь вместо  $\tilde{\Delta}_\omega$  и  $\tilde{I}$  подставлены параметры фильтра  $\Delta_\omega^H$  и  $I^H$ , что не приводит к существенным ошибкам, если  $\Delta_\omega^H \ll \Delta_\omega$ , т.е. фильтр узок по сравнению с полосой исходного сигнала, и  $\tilde{B}(\omega) \approx \text{const } H(\omega)$ .

Будем уменьшать ширину фильтра  $\Delta_\omega^H$ , сохраняя его форму (т.е.  $I^H = \text{const}$ ). Тогда из (5.39) следует

$$\tilde{\Delta}_t^2 \approx \tilde{\Delta}_t^2 \approx \tau'^2 \Delta_\omega^H \quad \text{при } q^2 \gg 1, \quad (5.40)$$

т.е.  $\tilde{\Delta}_t$  убывает пропорционально  $\tilde{\Delta}_\omega \approx \Delta_\omega^H$ . Сигнал на выходе фильтра обладает и следующими свойствами:

$$\langle \tilde{\Omega} \rangle = \langle \tilde{\omega} \rangle \approx \omega^H, \quad (5.41)$$

$$\langle \tilde{t} \rangle = \langle \tilde{\tau} \rangle \approx \tau(\omega^H), \quad (5.42)$$

которые вытекают из симметрии  $H(\omega)$  относительно  $\omega^H$  и линейности  $\tau(\omega)$ . Таким образом, сигнал на выходе фильтра имеет форму цуга с мгновенной частотой, близкой к  $\omega^H$ , концентрируется в окрестности момента времени  $t = \tau(\omega^H)$  и обладает меньшими, чем исходный сигнал, длительностью и шириной спектра.

Используя несколько фильтров с разными  $\omega^H$ , мы можем разделить исходный сигнал на последовательность приходящих в разное время относительно коротких и узкополосных цугов. Говоря нестрого, каждый узкий спектральный диапазон сильнодиспергирующего сигнала значимо проявляет себя лишь на ограниченном промежутке времени, меньшем суммарной длительности. Аналогично можно сказать, что в окрестности каждого момента  $t$  сильнодиспергирующий сигнал обладает относительно узкой спектральной полосой<sup>1</sup>, меняющейся со временем. Такой сигнал можно назвать локально-узкополосным. Обладая в целом широкой полосой, он ведет себя в окрестности каждого момента времени как узкополосный. В частности, для локально-узкополосного сигнала функции  $|W(t)|$  и  $\Omega(t)$  имеют наглядный смысл амплитуды огибающей и частоты несущей.

Сделанные выводы не строги, но асимптотически они приобретают четкий смысл в рамках приближения стационарной фазы, которое в простейшем варианте утверждает, что если на некотором интервале частот  $\tau'(\omega) \neq 0$  и

$$\psi(\omega) = N\eta(\omega) + \eta_0(\omega), \quad N \rightarrow \infty \quad (5.43)$$

(откуда следует  $q \rightarrow \infty$ ), то существует интервал  $t$ , на котором с точностью до  $O(1/N)$  связь между  $K(\omega)$  и  $W(t)$  имеет не интегральный, а функциональный характер:

$$|W(t)| = \sqrt{|\dot{\Omega}(t)|} |K(\Omega(t))|, \quad (5.44)$$

$$\varphi(t) = \psi(\Omega(t)) + \Omega(t)t + \frac{\pi}{4} \text{sign} [\dot{\Omega}(t)], \quad (5.45)$$

где  $\Omega(t)$  является решением уравнения

$$t = \tau(\Omega). \quad (5.46)$$

Нетрудно убедиться, что определенная из (5.46)  $\Omega(t)$  является мгновенной частотой сигнала  $W(t)$ :

$$\dot{\varphi}(t) = [t - \tau(\Omega(t))] \dot{\Omega}(t) + \Omega(t) = \Omega(t). \quad (5.47)$$

Из (5.46) и (5.47) следует, что в приближении стационарной фазы спектральная  $\tau(\omega)$  и временная  $\Omega(t)$  дисперсионные кривые сигнала являются обратными функциями. Этот факт часто используется при ручной обработке сейсмограмм: вместо  $\tau(\omega)$  непосредственно по временной записи измеряется  $\Omega(t)$ . Для поверхностных волн роль большого параметра в (5.43) согласно (5.7) выполняет  $r$ , т.е. точность формул (5.44), (5.45) растет с увеличением расстояния от источника. Но для большинства

<sup>1</sup> Если кривая  $\tau(\omega)$  немонотонна, то таких спектральных полос для каждого момента времени может быть несколько.



сейсмограмм телесейсмических поверхностных волн (особенно при средних  $r$  порядка 3–5 тыс. км) точность приближения стационарной фазы не удовлетворяет современным требованиям к измерению фазовых и групповых скоростей. Вместе с тем это приближение остается весьма полезным инструментом грубых оценок и качественных выводов о поведении характеристик диспергирующего сигнала.

Формулы (5.44) и (5.45) можно качественно интерпретировать таким образом: "в каждый момент времени на записи присутствует единственная спектральная составляющая". Однако, с какой бы точностью ни выполнялось приближение стационарной фазы (каким бы большим ни было  $q$ ), это конечно не означает, что величины  $\tilde{\Delta}_\omega$  и  $\tilde{\Delta}_r$  могут быть одновременно сделаны сколь угодно малыми. Чтобы убедиться в этом, вернемся к (5.39).

При уменьшении  $\Delta_\omega^H$  величина  $\tilde{\Delta}_r$  рано или поздно начнет значимо зависеть от второго члена суммы в (5.39). Наконец, при малых  $\Delta_\omega^H$  он станет преобладающим, т.е.

$$\tilde{\Delta}_r^2 = \frac{\tilde{I}^H}{\tilde{\Delta}_\omega} (1 + \tilde{q}^2) \approx \frac{I^H}{\Delta_\omega^H} \quad \text{при } \tilde{q}^2 \ll 1. \quad (5.48)$$

Теперь соотношение неопределенности принимает вид  $\tilde{\Delta}_r \sim 1/\tilde{\Delta}_\omega$  и  $\tilde{\Delta}_r$  растет с уменьшением  $\Delta_\omega^H$ .

Немонотонный характер функции  $\tilde{\Delta}_r(\Delta_\omega^H)$  означает, что она имеет минимум, который удобно найти, переписав (5.25) в виде

$$\tilde{\Delta}_r^2 \approx \tau' I^H (\tilde{q} + 1/\tilde{q}). \quad (5.49)$$

Член перед скобкой не зависит от  $\omega^H$ , т.е.  $\tilde{\Delta}_r$  минимально при  $|\tilde{q}| = 1$ . При этом

$$\tilde{\Delta}_\omega^2 \approx \Delta_\omega^{H^2} = \frac{I^H}{|\tau'|}, \quad (5.50)$$

$$\tilde{\Delta}_r^2 = 2 \cdot |\tau'| I^H, \quad (5.51)$$

$$\tilde{\Delta}_\omega \tilde{\Delta}_r = \sqrt{2} I^H. \quad (5.52)$$

Если  $I^H \approx 1$ , то минимальное  $\tilde{\Delta}_r$  оказывается в  $\approx \sqrt{q/2}$  раз меньше исходного  $\Delta_r$ , а соответствующее  $\tilde{\Delta}_\omega$  в  $\approx \sqrt{q}$  раз меньше  $\Delta_\omega$ . Таким образом, исходный сигнал путем фильтрации (с вещественной  $H(\omega)$ ) может быть разбит на  $\sim \sqrt{q}$  сигналов минимальной длительности.

**Спектрально-временное представление.** В задаче исследовательского плана, где принципиально не все формализуемо, мы стремимся в первую очередь увидеть наиболее характерные черты изучаемого объекта – в нашем случае сигнала, чтобы понять, соответствует ли он априорному представлению, и если нет, то в чем состоят отличия. Поэтому для хорошей методики обработки очень важно удачное представление данных.

Для изучения коротких импульсных волн, характеризуемых одним моментом вступления, часто достаточно временной записи. Длинные квазигармонические колебания, например собственные колебания Земли, значительно удобнее изучать в спектральной форме. Поверхностные волны

являются относительно сложными объектами для обработки. Их главная характерная черта — дисперсия  $\tau(\omega)$  — описывается не одним параметром, а функцией. Для наглядного изображения такого сигнала требуется функция двух переменных. Эту роль выполняет спектрально-временное представление, замечательное тем, что оно позволяет различать сигналы именно в соответствии с их дисперсионными кривыми. В этом параграфе мы дадим лишь краткую характеристику этого представления и вернемся к нему подробнее в § 5.4.

Идеей спектрально-временного представления мы фактически уже воспользовались при обсуждении особых свойств диспергирующих сигналов. Если пропустить сигнал через параллельную систему относительно узкополосных фильтров  $H(\omega - \omega^H)$ , отличающихся значением центральной частоты  $\omega^H$ , то каждый из результирующих сигналов согласно (5.42) концентрируется вблизи момента  $t = \tau(\omega^H)$ <sup>1</sup>. Будем теперь рассматривать совокупность сигналов на выходе всех фильтров  $H(\omega - \omega^H)$  как функцию (комплексную) двух переменных  $\omega^H$  и  $t$ :

$$S(\omega^H, t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega - \omega^H)K(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \quad (5.53)$$

которая и называется спектрально-временным представлением сигнала. Процесс исследования сигналов, основанный на (5.53), в советской сейсмологической литературе сокращено принято обозначать СВАН (спектрально-временной анализ) [56].

Для наглядности изображения используется карта изолиний функции  $|S(\omega^H, t)|$ , называемая картой СВАНа. Для фиксированного  $\omega^H$   $|S(\omega^H, t)|$  является огибающей сигнала на выходе соответствующего фильтра. Поэтому каждому исходному сигналу на карте СВАНа соответствует "горный хребет" (повышенные значения), протянувшийся в окрестности дисперсионной кривой  $t(\omega^H) = \tau(\omega^H)$  (рис. 5.5).

Введение функции  $S(\omega^H, t)$  дает возможность использовать удобную терминологию, основанную, в частности, на понятии спектрально-временной области сигнала. Под ней понимается часть плоскости  $(\omega^H, t)$ , занимаемая соответствующим хребтом. Из рис. 5.5 хорошо видно, что изображение спектрально-временной области значительно лучше передает свойства диспергирующего сигнала, чем набор параметров  $\langle t \rangle, \Delta_t, \langle \omega \rangle, \Delta_\omega$ . В терминах  $|S(\omega^H, t)|$  вполне определенный смысл приобретает утверждение: "энергия сигнала сосредоточена (на плоскости  $(\omega^H, t)$ ) вблизи его дисперсионной кривой". Отсюда хорошо видно и то, что большая неопределенность  $\Delta_\omega \Delta_t$  диспергирующего сигнала является в некотором смысле фикцией: площадь соответствующего прямоугольника на плоскости  $(\omega^H, t)$  значительно больше площади спектрально-временной области.

Однако существует важный момент, принципиально отличающий спектрально-временное представление от привычных спектрального или временного. Функция  $S(\omega^H, t)$  не является свойством только исходного сигнала, в ее определение входит и характеристика фильтра  $H(\omega - \omega^H)$ , выбирае-

<sup>1</sup> Этот вывод не связан с принятым выше условием  $q \gg 1$  и верен для любого сигнала с плавно меняющимся  $\tau(\omega)$ .

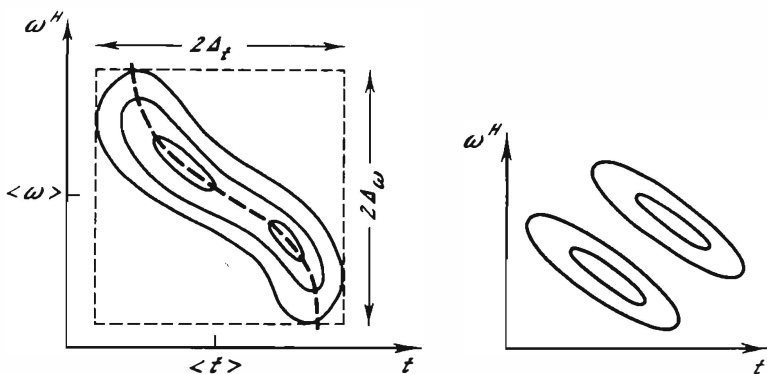


Рис. 5.5. Схематическое изображение карты СВАН  
Штрих – дисперсионная кривая  $t(\omega^H) = \tau(\omega^H)$

Рис. 5.6. Пример разделения двух сигналов на карте СВАН  
В спектральной и временной областях эти сигналы неразделимы

мая интерпретатором. Меняя форму  $H(\omega - \omega^H)$ , можно получить для одного и того же сигнала существенно различные функции  $S(\omega^H, t)$ . Здесь уместна аналогия с квантовомеханическими измерениями, где результат также зависит от "влияния экспериментатора". Впрочем отсюда не следует, что при вычислении  $S(\omega^H, t)$  происходит потеря информации о сигнале (это могло бы произойти, если бы мы использовали единственный фильтр, а не систему). При известной форме фильтров  $H(\omega - \omega^H)$  функции  $W(t)$  или  $K(\omega)$  принципиально могут быть восстановлены по  $S(\omega^H, t)$ .

Таким образом, полное задание спектрально-временного представления включает в себя две зависимости: собственно  $S(\omega^H, t)$  и закон изменения формы фильтров. По существу, при спектрально-временном анализе мы имеем дело с целым классом представлений сигнала, отличающихся выбором фильтров. Это порождает специфическую задачу выбора того из представлений, которое наиболее соответствует решаемому вопросу обработки (задача оптимальной фильтрации СВАН). Заметим, что спектр и временную запись можно рассматривать как два предельных случая класса спектрально-временных представлений:  $K(\omega)$  – при бесконечно узких фильтрах  $H(\omega - \omega^H) = \delta(\omega - \omega^H)$ ;  $W(t)$  – при бесконечно широких фильтрах  $H(\omega - \omega^H) \equiv 1/\sqrt{2\pi}$ .

Использование СВАН далеко не ограничивается удобным представлением материала, в его рамках можно решать практически все главные задачи обработки поверхностных волн. Преимущества при идентификации диспергирующих волн уже очевидны. Кроме того:

1. Меньшая площадь спектрально-временной области по сравнению с неопределенностью  $\Delta\omega\Delta t$  дает дополнительные возможности для разделения диспергирующих сигналов (рис. 5.6).

2. По той же причине часть помех, попадающих в область  $(\langle \omega \rangle \pm \Delta\omega, \langle t \rangle \pm \Delta t)$ , но лежащих далеко от дисперсионной кривой сигнала, оказы-

вается отделенной от него. Поэтому спектрально-временное представление обладает в целом более высоким отношением сигнал/шум, чем исходная запись или ее спектр. Этот вывод применим и к стационарным помехам, относительно равномерно распределенным по плоскости  $(\omega^H, t)$ .

3. Осевая линия хребта, соответствующего сигналу на плоскости  $(\omega^H, t)$ , замечательна не только тем, что она проходит вблизи дисперсионной кривой  $t = \tau(\omega^H)$ , — взятые на осевой линии значения  $|S(\omega^H)|$ ,  $\arg S(\omega^H)$  позволяют с некоторой точностью оценить функции  $|K(\omega)|$  и  $\psi(\omega)$ . Таким образом, СВАН может служить способом измерения (возможно, грубого) практически всех интересующих нас спектральных характеристик сигнала.

Итак, в некотором смысле СВАН является "универсальным инструментом" обработки поверхностных волн. Однако за универсальность приходится платить качеством. В следующем параграфе мы увидим, что в каждой из задач обработки СВАН не использует всех имеющихся ресурсов и обладает очевидными недостатками. Поэтому его имеет смысл рассматривать как прием, ориентированный на исследовательскую сторону обработки. Тем не менее достаточно часто результаты, полученные из СВАН, оказываются вполне удовлетворительными и не требуют уточнения.

В § 5.4 мы вернемся к подробному обсуждению СВАН, а теперь перейдем к рассмотрению возможностей улучшения его результатов.

**"Плавающий" фильтр. Фазовое выравнивание.** После СВАН мы имеем хотя и грубые, но уже достаточно подробные модели (значения характеристик) полезного сигнала и помех. Теперь обработка приобретает более рутинный характер, и на первый план выходят требования не наглядности и универсальности, а эффективности. Рабочая методика должна решать два вопроса: 1) отделить полезный сигнал-волну от нестационарных помех и 2) измерить спектральные характеристики сигнала-волны устойчивым по отношению к стационарным помехам способом.

На втором вопросе мы останавливаться не будем. Для телесейсмических поверхностных волн шумовые помехи имеют второстепенное значение, и обычно после отделения сигнала от нестационарных помех случайная ошибка функции  $K(\omega)$  оказывается незначительной. В противном случае здесь необходимо обратиться к статистическим методам выделения сигнала из шума.

Разберем теперь применение к поверхностным волнам наиболее традиционного способа разделения сигнала и помех — линейной фильтрации. Термин "фильтр" часто используется в узком смысле для преобразования, параметры которого инвариантны к сдвигу во времени (частотный фильтр). Мы поступали выше именно таким образом. Но при обработке диспергирующих сигналов удобно использовать этот термин и шире. Запишем общий вид линейного преобразования (знаком  $\sim$  над символом вновь обозначаются результаты фильтрации)

$$\tilde{K}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, \lambda) K(\lambda) d\lambda. \quad (5.54)$$

Требования к  $F(\omega, \lambda)$  легче всего представить на спектрально-временном языке. Фильтр, описываемый (5.54), должен "вырезать", по возможности

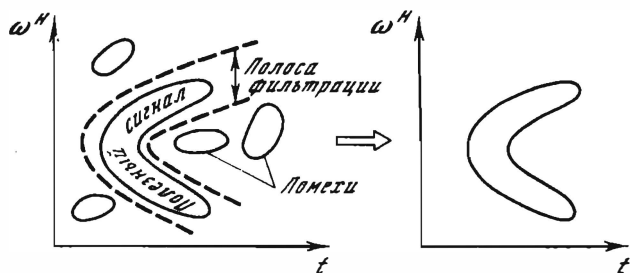


Рис. 5.7. Схематическое изображение действия "плавающего" фильтра

без искажений, часть плоскости, на которой расположена спектрально-временная область полезного сигнала<sup>1</sup> (рис. 5.7). Нестрого можно представить такую операцию как "частотный фильтр с переменными во времени параметрами". Полоса фильтрации "плывет" вдоль дисперсионной кривой. Поскольку именно здесь сосредоточена энергия сигнала, он не испытывает значительных искажений. В то же время помехи, расположенные вдали от дисперсионной кривой полезного сигнала, сквозь "плавающий" фильтр не проходят. Ниже мы обсудим способ построения простейшего варианта "плавающего" фильтра, обладающего не зависящей от частоты шириной сечения во времени. Это дополнительное условие технически удобно тем, что позволяет вычислять (5.54) в рамках операций обычного спектрального анализа и, в частности, использовать быстрое преобразование Фурье.

Обычная операция инвариантной к временному сдвигу полосовой частотной фильтрации "вырезает" на плоскости  $(\omega^H, t)$  полосу, параллельную оси  $t$ . Аналогично временное окно  $G(t)$ , наложенное на запись  $\tilde{W}(t) = G(t)W(t)$ , "вырезает" полосу, параллельную оси  $\omega^H$ . Совокупность этих двух операций позволяет выделить только "прямоугольную" область плоскости  $(\omega^H, t)$  со сторонами, параллельными осям. Но "полоса" плавающего фильтра может располагаться по отношению к осям  $\omega^H$  и  $t$  произвольным образом. Тем не менее, если сохранять "ширину полосы по  $t$ " одинаковой для всех  $\omega^H$ , операция плавающей фильтрации сводится к последовательности частотных фильтров и временных окон.

Важнейший момент этой операции — фазовое выравнивание (другое название — фильтрация, согласованная по фазе). Из результатов СВАН нам известна приблизительная оценка дисперсионной кривой полезного сигнала  $\hat{\psi}(\omega)$ . Поэтому преобразование фазы спектра всей записи

$$\tilde{K}(\omega) = K(\omega) \exp[-i\hat{\psi}(\omega)],$$

$$\hat{\psi}(\omega) = - \left[ \int_0^{\omega} \tau(\eta) d\eta + c_1 \omega + c_2 \right] \quad (5.55)$$

превращает полезный сигнал в слабодиспергирующий ( $\tilde{q} \ll 1$ ). Константы  $c_1$  и  $c_2$  не влияют на форму огибающей  $|\tilde{W}(t)|$  и служат только для изменения начальной фазы результирующего сигнала и перемещения его

<sup>1</sup> Область, где  $|S(\omega^H, t)| \neq 0$ , не может быть конечной. Здесь подразумевается, что вне "вырезанной" области значения  $|S(\omega^H, t)|$  будут пренебрежимо малы.

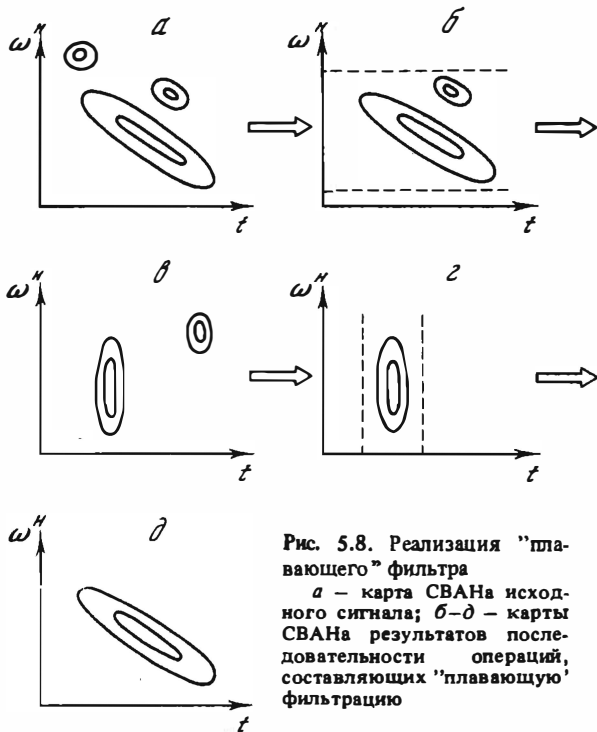


Рис. 5.8. Реализация "плавающего" фильтра  
 а — карта СВАНа исходного сигнала; б–д — карты СВАНа результатов последовательности операций, составляющих "плавающую" фильтрацию

к удобному моменту времени, например, к середине записи (для полезного сигнала  $\langle \hat{t} \rangle \approx c_1$ ). Заметим, что в результате (5.55) дисперсия помех может возрасти. Вообще в грубом приближении можно представить, что фазовому выравниванию соответствует деформация плоскости  $(\omega^H, t)$ , переводящая каждую кривую  $t = \hat{t}(\omega^H) + \text{const}$  в прямую  $t = \text{const}$ , параллельную оси  $\omega^H$ . Это означает, что расстояние между осевыми линиями спектрально-временных областей различных сигналов, измеренное вдоль оси  $t$ , не изменяется, но область полезного сигнала окажется вытянутой приблизительно параллельно оси  $\omega^H$ . Такая спектрально-временная область эффективно "вырезается" наложением временного окна (а также частотного полосового фильтра, который, впрочем, удобнее использовать до фазового выравнивания). Теперь, чтобы вернуть выделенный полезный сигнал к первоначальной форме, достаточно провести процедуру, обратную фазовому выравниванию, т.е. прибавить к его фазовому спектру ту же функцию  $\psi(\omega)$ .

Таким образом, процедура плавающей фильтрации распадается на четыре последовательных операции (на рис. 5.8 схематически изображены карты СВАНа их результатов):

1) полосовая фильтрация (рис. 5.8, б)

$$\tilde{K}_1(\lambda) = H(\lambda)K(\lambda), \quad (5.56)$$

где  $H(\lambda)$  — вещественная функция, равная единице в пределах полосы полезного сигнала и спадающая к нулю вне ее;

2) фазовое выравнивание (рис. 5.8, в) и переход к временному представлению

$$\tilde{W}_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}_1(\lambda) \exp \{i[\lambda t - \hat{\psi}(\lambda)]\} d\lambda, \quad (5.57)$$

В результате первоначально сильнодиспергирующий сигнал — поверхностная волна приобретает форму короткого интенсивного импульса;

3) наложение временного окна  $G(t)$  (рис. 5.8, з) и возврат к спектральному представлению

$$\tilde{K}_3(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(t) \tilde{W}_2(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (5.58)$$

где  $G(t)$  — вещественная функция, равная единице в пределах временного интервала преобразованного (импульсного) полезного сигнала и спадающая к нулю вне его;

4) обратное преобразование фазы (рис. 5.8, д)

$$\tilde{K}(\omega) = \tilde{K}_3(\omega) e^{i\hat{\psi}(\omega)}, \quad (5.59)$$

запись сигнала приобретает первоначальный вид, но без отфильтрованных помех.

Объединяя (5.56)–(5.59), получаем окончательное выражение для ядра  $F(\omega, \lambda)$  в преобразовании (5.54)

$$F(\omega, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} H(\lambda) H_t(\omega - \lambda) \exp \{i[\hat{\psi}(\omega) - \hat{\psi}(\lambda)]\},$$

$$H_t(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{i\omega t} dt. \quad (5.60)$$

На практике, конечно, нет необходимости вычислять  $F(\omega, \lambda)$ . Именно возможность разбить (5.54) на простые операции и делает рассматриваемый вариант плавающего фильтра эффективным приемом обработки.

Помимо функции  $\hat{\psi}(\omega)$ , основной параметр плавающего фильтра — ширина полосы пропускания по  $t$ , или, что то же, ширина  $\Delta_t^G$  временного окна  $G(t)$ . При уменьшении  $\Delta_t^G$  убывают ошибки, связанные с помехами ("случайные ошибки"), но растут искажения, вносимые самим фильтром ("систематические ошибки"). Иными словами, на практике имеет смысл расширять окно настолько, насколько позволяют помехи. Компромиссное значение индивидуально для каждой записи.

Более того, поверхностная волна обычно занимает на записи весьма широкий частотный диапазон, в пределах которого помехи распределены достаточно неоднородно. Поэтому часто неудобно сохранять величину  $\Delta_t^G$  одинаковой на всех частотах. Эту трудность проще всего обойти, разделив исходный сигнал полосовыми фильтрами (5.56) на несколько диапазонов и построив в каждом из них самостоятельный плавающий фильтр. Из примера, приведенного на рис. 5.4, следует, что  $\Delta_t^G$  существенно не изменится, если выделить каждый спектральный пик полезного сигнала в отдельный частотный диапазон.

Преимущества плавающего фильтра перед СВАНом связаны в значи-

тельной степени с возможностью более эффективного сжатия по  $t$  диспергирующих сигналов. Основной инструмент сжатия в СВАНе — узкополосная вещественная фильтрация, в плавающем фильтре — фазовое выравнивание. Мы видели (5.51), что первая позволяет уменьшить  $\Delta_t$  в  $\sim\sqrt{q/2}$  раз. Но и тогда неопределенность результирующего сигнала остается по крайней мере в  $\sqrt{2}$  раз выше оптимальной (3.52). Это означает, что СВАН не исчерпывает все ресурсы сжатия сигналов. Фазовое выравнивание полного сигнала сжимает его в  $\sim q$  раз, и если у исходного сигнала  $I \approx 1$ , то неопределенность сжатого близка к оптимальной. Это приводит к тому, что в целом компромиссные значения случайных и систематических ошибок результатов "плавающей" фильтрации оказываются ниже, чем в СВАНе.

В заключение заметим, что разделение методики анализа на СВАН и "плавающую" фильтрацию в известной степени условно. Они основаны на одном приеме — линейной фильтрации (в широком смысле) и реализуют единую идею обработки — постепенную адаптацию фильтра к исследуемому сигналу и помехам. Видимое различие состоит прежде всего в способе представления результатов, а преимущества "плавающего" фильтра над СВАНом связаны с тем, что мы вводим в первый больше априорной информации. Существуют и другие пути введения этой информации, в частности применение фазового выравнивания в рамках СВАНа [132, 14]. Мы не останавливаемся на этих приемах, поскольку их принципы весьма близки к изложенным выше.

#### § 5.4. Спектрально-временной анализ

В аналоговой форме спектрально-временное представление применяется около 40 лет [134], а в цифровом виде было введено в сейсмологию в 1969 г. в работе [131]. С небольшими модификациями этот вариант активно используется уже больше 15 лет, и мы также уделим ему главное внимание. Но для уточнения нескольких условий, заложенных в методику, взглянем сначала на определение с более общих позиций.

**Варианты определения.** Симметричное относительно осей частот  $\omega^H$  и времен  $t^H$  определение спектрально-временного представления сигнала  $W(t)$ :

$$S(\omega^H, t^H) = \int_{-\infty}^{\infty} G^*(\omega^H, t^H, t)W(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} H^*(\omega^H, t^H, \omega)K(\omega)d\omega, \quad (5.61)$$

$$\langle t(G) \rangle(\omega^H, t^H) \equiv t^H, \quad \langle \omega(H) \rangle(\omega^H, t^H) \equiv \omega^H.$$

где обозначения  $\langle t(G) \rangle$ ,  $\langle \omega(H) \rangle$  подразумевают, что соответствующие средние величины получены по функции  $G(\omega^H, t^H, t)$  и ее фурье-образу  $H(\omega^H, t^H, \omega)$  при фиксированных  $\omega^H$  и  $t^H$ . Выражение (5.61) означает, что исходный сигнал проектируется на двупараметрическое семейство "пробных" функций, каждая из которых "сосредоточена" в окрестности частоты  $\omega^H$  и времени  $t^H$ .

Определение (5.61) достаточно гибко, поскольку позволяет выбирать вид функции  $G$  независимо для каждой точки плоскости  $(\omega^H, t^H)$ , одна-



ко в таком общем виде оно требует слишком большого объема вычислений. Последние существенно упростятся, если пожертвовать равноправием параметров  $\omega^H$ ,  $t^H$  и принять функции  $G$  или  $H$  инвариантными к сдвигу по одному из них. Это приводит к двум возможным определениям:

1) форма спектра "пробного" сигнала зависит только от  $t^H$ :

$$\begin{aligned} S_t(\omega^H, t^H) &= \int_{-\infty}^{\infty} H^*(t^H, \omega - \omega^H) K(\omega) d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G_t^*(t^H, t) e^{-i\omega^H t} W(t) dt, \end{aligned} \quad (5.62)$$

где  $G_t(t^H, t)$  — фурье-образ  $H(t^H, \omega)$ . При вещественной  $G_t$  функция  $S_t$  называется "мгновенным спектром" сигнала  $W(t)$ ;

2) форма "пробного" сигнала зависит только от  $\omega^H$ :

$$\begin{aligned} S_\omega(\omega^H, t^H) &= \int_{-\infty}^{\infty} G^*(\omega^H, t - t^H) W(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_\omega^*(\omega^H, \omega) e^{i\omega t^H} K(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (5.63)$$

где  $H_\omega(\omega^H, \omega)$  — фурье-образ  $G(\omega^H, t)$ . Операция (5.63) является многоканальной частотной фильтрацией (с характеристикой  $H_\omega^*(\omega^H, \omega)$ ) и соответствует определению спектрально-временного представления, данному в предыдущем параграфе.

Условия 1 и 2 не могут выполняться одновременно, и функции  $S_t$  и  $S_\omega$ , определенные по (5.62) и (5.63), отличаются друг от друга. В простейшем случае отличие сводится лишь к фазовому множителю  $e^{i\omega^H t^H}$ . Это произойдет, если положить в (5.62)  $G_t(t^H, t) = G_t(t - t^H)$  или в (5.63)  $H_\omega(\omega^H, \omega) = H_\omega(\omega - \omega^H)$ . В частности, функция

$$S_0(\omega^H, t^H) = \int_{-\infty}^{\infty} H_\omega^*(\omega - \omega^H) e^{i\omega t^H} K(\omega) d\omega \quad (5.64)$$

используется в радиотехнике под названием "функция взаимной неопределенности".

Определение (5.63) является наиболее распространенным. Оно проще, чем (5.62), реализуется в аналоговой форме, но при цифровой обработке (5.62) и (5.63) (а также (5.64)) требуют примерно одинакового количества вычислений. Тем не менее из физических соображений обычно удобнее регулировать разрешающую способность анализа по частоте, чем по времени. Достаточно, например, вспомнить, что одинаковые частотные интервалы в различных диапазонах  $\omega$  отвечают за совершенно разные интервалы глубин прониновения поверхностных волн.

Выбирая фильтр  $H_\omega^*(\omega^H, \omega)$  в (5.63), можно ориентироваться на характерные свойства конкретных сигналов. При первичной обработке поверхностных волн обычно используются фильтры, обладающие следующими простыми свойствами: отсутствие фазовых искажений (веществен-

ная  $H_\omega$ ) и наилучшая разрешающая способность анализа. Из (5.51) следует, что длительность сигнала на выходе фильтра  $H_\omega$  пропорциональна параметру  $I^H$ , т.е. оптимальным в смысле разрешения сигналов является гауссов фильтр. Такие фильтры мы и будем рассматривать в дальнейшем.

Итак, ниже под спектрально-временным представлением сигнала, заданного спектром  $K(\omega)$ , подразумевается комплексная функция на плоскости  $(\omega^H, t)^1$

$$S(\omega^H, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \beta(\omega^H)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(\omega - \omega^H)^2}{2\beta^2(\omega^H)} \right] K(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (5.65)$$

Использованный в (5.65) вещественный гауссов фильтр будем называть фильтром СВАНа. Он полностью описывается двумя параметрами

$$\langle \omega^H \rangle = \omega^H, \quad (5.66)$$

$$\Delta \omega^H = \beta. \quad (5.67)$$

**Модельные сигналы.** Свойства СВАНа удобно демонстрировать на примере аналитически заданных параметрических сигналов, моделирующих запись поверхностной волны. Мы воспользуемся двумя сигналами ( $K_g(\omega)$  и  $K_l(\omega)$ ), спектрально-временные представления которых вычисляются явно.

Оба сигнала имеют квадратичный фазовый спектр (линейную дисперсионную кривую  $\tau(\omega)$ )

$$\psi_g(\omega) = \psi_l(\omega) = \psi_0 - \tau_0 \cdot (\omega - \omega_0) - \frac{\tau'}{2} (\omega - \omega_0)^2, \quad (5.68)$$

где  $\psi_0, \tau_0, \tau'$  — константы.

Амплитудный спектр  $K_g$  гауссова модельного сигнала

$$|K_g(\omega)| = K_0 \exp \left[ -\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (5.69)$$

Из (5.68), (5.69) следует, что для  $K_g$  выполняются соотношения:

$$\langle \omega \rangle = \omega_0, \quad \langle t \rangle = \tau_0, \quad \Delta \omega = \sigma, \quad (5.70)$$

$$I = 1, \quad q = \tau' \sigma^2, \quad \Delta_t^2 = (1 + q^2)/\sigma^2.$$

Амплитуда  $|K_g(\omega)|$  отлична от нуля при  $\omega < 0$ , т.е. соответствующая временная функция  $W_g(t)$  не является "аналитическим сигналом" и ей не соответствует никакой вещественный сигнал  $w(t)$ . Однако, если предположить  $\Delta \omega \ll \omega_0$ , этим можно пренебречь, и  $K_g(\omega)$  удовлетворительно моделирует отдельный спектральный пик поверхностной волны.

Для демонстрации локальных свойств спектрально-временного представления используем  $K_l$  — линейный модельный сигнал с амплитудным спектром в окрестности частоты  $\omega^H$  вида

$$|K_l(\omega)| = K(\omega^H) + K'(\omega^H) \cdot (\omega - \omega^H). \quad (5.71)$$

<sup>1</sup> Поскольку другие определения больше рассматриваться не будут, из выражения (5.65) исключены лишние индексы.

Считаем также, что разложение фазового спектра  $\psi_I(\omega)$  (5.63) взято в точке  $\omega_0 = \omega^H$ . Благодаря быстроспадающей частотной характеристике гауссова фильтра СВАН результаты спектрально-временного анализа не зависят существенно от поведения  $|K_I(\omega)|$  вне полосы фильтра шириной  $\sim \beta$ .

Спектрально-временные представления модельных сигналов имеют вид:

$$S_g(\omega^H, t) = \frac{K_0}{\sqrt{(1 + \beta^2/\sigma^2) + ip}} \exp \left[ i(\psi_0 + \omega_0 t) - \frac{(v - is)^2}{2(1 + \beta^2/\sigma^2 + ip)} - \frac{s^2}{2} \right], \quad (5.72)$$

$$S_I(\omega^H, t) = \frac{K(\omega^H)}{\sqrt{1 + ip}} \left( 1 + \frac{i\bar{K}v}{1 + ip} \right) \exp \left\{ i[\psi(\omega^H) + \omega^H t] - \frac{v^2}{2(1 + ip)} \right\}, \quad (5.73)$$

где  $\beta = \beta(\omega^H)$  и

$$v = \beta \cdot (t - \tau_0), \quad (\text{в (5.73) } v = \beta \cdot (t - \tau(\omega^H))), \\ s = \frac{\omega^H - \omega_0}{\beta}, \quad p = \tau' \beta^2, \quad \bar{K} = \frac{|K|'(\omega^H)}{|K(\omega^H)|} \beta. \quad (5.74)$$

Ниже мы будем приводить результаты, относящиеся к модельным сигналам только в окончательном виде. Подробнее свойства  $S_g(\omega^H, t)$  и аналога  $S_e(\omega^H, t)$  разобраны в [53–55].

**Оптимальная фильтрация.** Функция  $S(\omega^H, t)$  существенно зависит от выбора фильтров СВАН или, конкретнее, от функции  $\beta(\omega^H)$ . Выбирая  $\beta(\omega^H)$ , вообще говоря, следует ориентироваться на две задачи: обеспечить разделение полезного сигнала и помех и получить удовлетворительные оценки характеристик сигнала. Требования, предъявляемые этими задачами к  $\beta(\omega^H)$ , во многом противоречивы. Однако практика обработки телесеismicических поверхностных волн показывает, что, если рассматривать СВАН как этап предварительной обработки (где не требуется высокой точности оценок), следует отдать предпочтение задаче разделения сигналов. В этом узком смысле мы и будем понимать критерии оптимальной фильтрации.

Поскольку модели помех априори не известны, критерии оптимальности исходят только из свойств полезного сигнала и состоят в минимизации либо площади спектрально-временной области, либо одного из ее сечений.

Рассмотрим сначала вопросы оптимальной фильтрации на примере гауссова модельного сигнала, причем упростим задачу, ограничившись условием  $\beta(\omega^H) = \beta = \text{const}$ . Найдем  $\beta$ , минимизирующее площадь спектрально-временной области сигнала. Из (5.72) следует, что линии уровня функции  $|S_g(\omega^H, t)|$  представляют эллипсы с площадями, пропорциональ-

ными величине

$$\frac{\sigma^2}{\beta^2} \left[ \left( 1 + \frac{\beta^2}{\sigma^2} \right)^2 + p^2 \right], \quad (5.75)$$

имеющей минимум при (используем (5.70))

$$\beta_{os}^2 = \frac{1}{\sqrt{\tau'^2 + 1/\sigma^4}} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{1 + q^2}} = \frac{\Delta_\omega}{\Delta_t}. \quad (5.76)$$

Все величины в правых частях (5.76) относятся к исходному сигналу,  $\beta_{os}$  дает простую удобную оценку оптимального  $\beta$  при любых значениях параметра  $q$  сигнала.

Величины  $\beta$ , при которых спектрально-временная область сигнала оказывается максимально сжатой по частоте или времени, отличаются от  $\beta_{os}$ . Минимальная ширина сечения области по  $\omega^H$  достигается при

$$\beta_{o\omega}^2 = \frac{1}{|\tau'|} \frac{q^2 - |q|}{q^2 + 1}, \quad (5.77)$$

а минимальная ширина сечения по  $t$  (т.е.  $\tilde{\Delta}_t$  сигнала на выходе фильтра СВАН) достигается при

$$\beta_{ot}^2 = \frac{1}{\tau'} \frac{q}{|q| - 1}, \quad (5.78)$$

причем последнее выражение верно независимо от условия  $\beta(\omega^H) = \text{const}$ . При  $\beta(\omega^H) = \beta_{ot}$  для сигналов на выходе фильтров СВАН

$$\tilde{q}_{ot}(\omega^H) = \tau' \left/ \left( \frac{1}{\beta_{ot}^2} + \frac{1}{\sigma^2} \right) \right. \equiv 1. \quad (5.79)$$

Из (5.76)–(5.78) видно, что  $\beta_{os}$  существует при любых параметрах сигнала, но ширина спектрально-временной области по  $\omega^H$  или  $t$  обладает минимумом только при  $|q| > 1$ . Для слабодиспергирующих сигналов ( $|q| < 1$ ) наилучшее разрешение по времени достигается при  $\beta \rightarrow \infty$ , а по частоте при  $\beta \rightarrow 0$ . Но при  $\beta \rightarrow \infty$  спектрально-временное представление совпадает (при соответствующей нормировке) с временным, а при  $\beta = 0$  — со спектральным. Таким образом, мы приходим к важному выводу, что СВАН целесообразно использовать для разделения только существенно диспергирующих сигналов. Для сигналов с  $|q| < 1$  разрешающая способность СВАН ниже, чем спектра или временной записи.

В предыдущем параграфе, исходя из общего соотношения (5.39), мы получили для сильнодиспергирующих сигналов ширину фильтра, минимизирующего  $\tilde{\Delta}_t$ . В обозначениях СВАН формула (5.50) принимает вид

$$\beta_o^2(\omega^H) = 1/|\tau'(\omega^H)|. \quad (5.80)$$

Из (5.76)–(5.78) следует, что при  $q \rightarrow \infty$  к этому значению стремятся все оптимальные  $\beta$ , соответствующие разным критериям. Таким образом, для сильнодиспергирующего сигнала все критерии разрешения реализуются единым значением  $\beta_o$  (5.80).

Формулу (5.80) можно применять и локально. Для этого не требуется линейности  $\tau(\omega)$  в широком частотном диапазоне. Достаточно, чтобы условие  $\tau'(\omega) \approx \text{const}$  выполнялось в пределах полосы фильтра, т.е. (все величины взяты в точке  $\omega^H$ )

$$\eta = \left| \frac{\tau''\beta_0}{2\tau'} \right| \ll 1. \quad (5.81)$$

Записав в (5.80) обе величины как функции  $\omega^H$ , мы предполагали выполнение (5.81). Условие  $q \gg 1$  должно быть заменено на другое — локальное

$$\bar{K} \ll 1, \quad (5.82)$$

где  $\bar{K}$  (5.74) вычислено при  $\beta = \beta_0$ .

Выражение (5.80) является основной рабочей формулой в большей части диапазона частот поверхностных волн. Исключение составляют окрестности экстремумов  $\tau(\omega)$ , где не выполняется (5.81). Для построения здесь оптимальных фильтров необходимо исследовать общее выражение (5.25) при более сложных зависимостях  $\tau(\omega)$ . В [123] в предположении  $\bar{K} = 0$  получены формулы оптимальных фильтров СВАН (минимизирующих  $\tilde{\Delta}_t$ ) для произвольной функции  $\tau(\omega)$ , представленной в виде степенного ряда по  $\omega$ . Приведем результаты для квадратичного  $\tau(\omega)$ .

При  $|K(\omega)| \approx \text{const}$  в окрестности  $\omega^H$  шириной  $\sim \beta$  (т.е.  $\bar{K} \ll 1$ ) и при

$$\tau(\omega) = \tau(\omega^H) + \tau'(\omega^H)(\omega - \omega^H) + \frac{\tau''(\omega^H)}{2} (\omega - \omega^H)^2 \quad (5.83)$$

оптимальное (минимизирующее  $\tilde{\Delta}_t$ ) значение  $\beta_0$  ищется из уравнения

$$\tau'^2 \beta_0^4 + \frac{\tau''^2}{2} \beta_0^6 = 1. \quad (5.84)$$

Тогда на выходе оптимального фильтра

$$\tilde{q}_0^2 = (1 + \eta^2/2)/(1 + \eta^2), \quad (5.85)$$

где  $\eta$  — параметр (5.81). В квадратичном приближении  $q_0$  не обязательно равно единице, как это было в линейном приближении, но остается того же порядка. В зависимости от соотношения между линейным и квадратичным членом разложения  $\tau(\omega)$  параметр  $q_0$  меняется в интервале 1/2—1. В точке экстремума  $\tau(\omega)$  (5.84), (5.85) переходят в

$$\beta_0^2 = \sqrt[3]{2/|\tau''|}, \quad \tilde{q}_0^2 = 1/2. \quad (5.86)$$

Для автоматизации процесса выбора оптимальных фильтров удобно выразить  $\beta_0$  через скоростные параметры среды. Например, для линейных участков  $\tau(\omega)$  (5.80) переходит (с учетом (5.8)) в

$$\beta_0^2(\omega^H) = U^2(\omega^H) / \left( r \left| \frac{du}{d\omega}(\omega^H) \right| \right), \quad (5.87)$$

т.е. ширина оптимального фильтра СВАН убывает с ростом эпицентрального расстояния. На практике не требуется высокой точности в выборе  $\beta_0$ . Фактически имеющихся данных о средних групповых скоростях поверхностных волн в Земле достаточно для хорошего выбора  $\beta_0$  еще до

начала обработки. Функция  $U(\omega)$  и ее производные фиксируются заранее, и единственным входным параметром процедуры вычисления  $\beta_0$  остается эпицентральное расстояние  $r$ .

**Задача измерения.** В общем виде измерение характеристик исходного сигнала по функции  $S(\omega^H, t)$  требует решения линейного интегрального уравнения (5.65). Если функция  $S(\omega^H, t)$  задана на достаточно большой области, уравнение решается вполне устойчиво по отношению к небольшим помехам. Например, в простейшем случае  $\beta(\omega^H) = \text{const}$  формула обращения имеет вид

$$W(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega^H, t) d\omega^H. \quad (5.88)$$

Инверсия уравнения (5.65) значительно усложняется, если  $S(\omega^H, t)$  известна с хорошей точностью лишь на части спектрально-временной области сигнала.

Рассмотрим более простые приемы измерения, применяемые на практике и вполне соответствующие предварительной роли СВАНА. Вместо спектральных характеристик исходного сигнала измеряются соответствующим образом подобранные характеристики функции  $S(\omega^H, t)$ , т.е. временные характеристики сигналов на выходе фильтров СВАНА. Такая замена измеряемых спектральных характеристик на временные ведет к появлению систематических ошибок. Характеристики  $S(\omega^H, t)$ , используемые для измерений, в дальнейшем будем называть оценками и обозначать знаком  $\wedge$  над символом измеряемой величины. Значок  $\sim$  над символом, как и прежде, относится к характеристикам сигналов на выходе фильтров СВАНА. Предложено много различных оценок СВАНА, мы перечислим лишь наиболее употребительные. Приводимые ниже формулы для систематических ошибок основаны в основном на модельных сигналах (5.72), (5.73). Эти формулы хорошо передают качественное поведение ошибок, но в реальных ситуациях недостаточно точны, чтобы использоваться для поправок.

**Оценки группового времени.** Три рассмотренные ниже оценки группового времени строятся следующим образом. Для каждого сигнала на выходе фильтра СВАНА (т.е. сечения  $S(\omega^H, t)$  по  $t$ ) выбирается пара характеристик:  $\hat{r}$  и  $\hat{\omega}$ . Точка  $\hat{r}(\hat{\omega})$  рассматривается как оценка точки дисперсионной кривой  $\pi(\omega)$ .

Оценка  $\hat{r}(\hat{\omega}) = \langle \hat{r} \rangle (\langle \hat{\omega} \rangle)$ . Разлагая  $\pi(\omega)$  в точке  $\langle \hat{\omega} \rangle$  в ряд до квадратичного члена и учитывая, что  $\langle \hat{\omega} \rangle = \langle \tilde{\omega} \rangle$ , имеем

$$\langle \hat{r} \rangle = \langle \tilde{r} \rangle = \pi(\langle \tilde{\omega} \rangle) + \frac{\tau''(\langle \tilde{\omega} \rangle)}{4} \tilde{\Delta}_{\omega}^2. \quad (5.89)$$

Отсюда следует, что для линейно диспергирующего сигнала ( $\tau''=0$ ) оценка  $\langle \hat{r} \rangle (\langle \hat{\omega} \rangle)$  не смещена. При условии  $K \ll 1$   $\tilde{\Delta}_{\omega} \approx \Delta_{\omega}^H = \beta$  и ошибка  $\delta\tau$  рассматриваемой оценки определяется выражением

$$\delta\tau = \pi(\langle \tilde{\omega} \rangle) - \langle \hat{r} \rangle (\langle \hat{\omega} \rangle) = -\frac{\tau''\beta^2}{4} = -\frac{\tau''}{4|\tau'|}. \quad (5.90)$$

Правое равенство в (5.90) записано для оптимального фильтра (5.80)

в предположении, что измерения проводятся вдали от экстремума дисперсионной кривой.

Вычисление  $\langle \tilde{t} \rangle$  и  $\langle \tilde{\Omega} \rangle$  требует большого временного интервала, свободного от помех. Поэтому чаще применяются менее точные, но более помехоустойчивые оценки, основанные на характеристиках, взятых в точке максимума  $|W(t)|$  (условного максимума  $|S(\omega^H, t)|$  по  $t$ ). Такие характеристики будем отмечать индексом  $m$ , в частности  $t_m$  — момент времени, при котором  $|W(t)|$  имеем максимум.

Оценка  $\hat{t}(\hat{\omega}) = t_m(\omega^H)$ . Это наиболее простая и распространенная оценка группового времени. Если сигнал является линейно диспергирующим и спектральная амплитуда  $\tilde{B}(\omega)$  симметрична относительно  $\omega^H$ , то  $t_m = \langle \tilde{t} \rangle$ ,  $\omega^H = \langle \tilde{\omega} \rangle$  и рассматриваемая оценка совпадает с предыдущей. Поскольку гауссов фильтр симметричен относительно  $\omega^H$ , на участках линейности  $\tau(\omega)$  основным параметром, определяющим смещение оценки  $t_m(\omega^H)$ , является  $\bar{K}$  (5.74). Рассмотрение линейного модельного сигнала (5.73) показывает, что ошибка имеет вид

$$\delta\tau_\omega = \tau(\omega^H) - t_m(\omega^H) = -\beta\tau'\bar{K} = -\tilde{q} \frac{|K'|}{|K|} \Big|_{\beta=\beta_0} = -\frac{|K'|}{|K|}. \quad (5.91)$$

Очень простой способ грубого вычисления смещения оценки дает рассмотрение гауссова модельного сигнала (5.72). Для него при  $|\omega^H - \omega_0| = \sigma |K'|/|K| = 1/\sigma$ , т.е. ошибка  $\delta\tau_\omega$  достигает величин порядка обратной ширины спектрального пика.

Типичная картина поведения оценки  $t_m(\omega^H)$  приведена на рис. 5.9. Обратим внимание, что знак смещения оценки меняется при переходе кривой через каждую вершину хребта  $|S(\omega^H, t)|$ . Это приводит к появлению фиктивного изгиба в окрестности седловой точки.

Оценка  $\hat{t}(\hat{\omega}) = t_m(\Omega_m)$ . При измерениях на краю частотного диапазона сигнала параметр фильтра  $\omega^H$ , как видно из рис. 5.10, может не отражать свойства сигнала на выходе фильтра. В этих случаях оценка  $t_m(\omega^H)$  имеет недопустимо большую ошибку. Погрешность измерений будет значительно ниже, если в качестве  $\hat{\omega}$  выбрать значение мгновенной частоты в момент  $t_m$ .

$$\hat{\omega} = \tilde{\Omega}_m = \frac{\partial}{\partial t} \arg S(\omega^H, t_m). \quad (5.92)$$

Для гауссова модельного сигнала (5.72) оценка  $t_m(\tilde{\Omega}_m)$  не смещена во всем частотном диапазоне, а для сигнала (5.73) имеет третий порядок малости по  $\bar{K}$ :

$$\begin{aligned} \delta\tau_\Omega &= \tau(\tilde{\Omega}_m) - t_m(\tilde{\Omega}_m) \approx \frac{\beta\tau'}{1+q^2} \bar{K}^3 = \\ &= \beta^2 \frac{\tilde{q}}{1+\tilde{q}^2} \left( \frac{|K'|}{|K|} \right)^3 \Big|_{\beta=\beta_0} = \frac{1}{|\tau'|} \left( \frac{|K'|}{|K|} \right)^3. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Таким образом, рассматриваемую оценку следует предпочесть оценке  $t_m(\omega^H)$  во всем частотном диапазоне измерений.

Заметим, что оценка  $t_m(\tilde{\Omega}_m)$ , хотя и записывается сходным с (5.46)

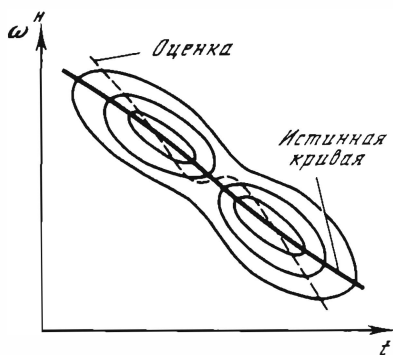


Рис. 5.9. Характерное отклонение оценок СВАНа (штриховая линия) от истинной дисперсионной кривой сигнала (жирная линия)

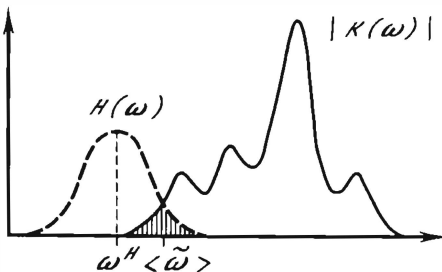


Рис. 5.10. Характерная ситуация смещения оценки  $t_m(\omega^H)$  на краю спектрального диапазона сигнала

образом, не имеет отношения к приближению стационарной фазы. Последнее обычно неприменимо к сигналам на выходе фильтров СВАНа, поскольку оптимальная фильтрация приводит к  $\tilde{q} \sim 1$ .

Из формул для систематических ошибок следует, что при фиксированных  $\beta(\omega)$  точность измерения  $\tau(\omega)$  в целом тем выше, чем меньше характерное  $\tau$  сигнала. Поэтому дисперсионные кривые разных сигналов, присутствующих на одной карте СВАН, могут измеряться с различной точностью.

**Оценки амплитуды и фазы.** Для построения этих оценок используем функцию  $S_m$  одного переменного, полученную по  $S(\omega^H, t)$  на линии максимумов  $|S|$  по  $t$ . В качестве аргумента  $S_m$  могут выбираться различные величины, в частности  $\omega^H$ ,  $t$  или  $\tilde{\Omega}_m$ , взятое в той же точке плоскости, что и  $S_m$ . Приведенные ниже формулы (5.94)–(5.100) получены для модельного гауссова сигнала и, следовательно, приближают случай отдельного спектрального пика на линейном участке дисперсионной кривой.

Для вычисления оценок амплитуды и фазы удобнее всего рассматривать  $S_m$  как функцию  $\tilde{\Omega}_m$  (5.92). Тогда

$$|K_g(\tilde{\Omega}_m)| = \sqrt{(1 + \beta^2/\sigma^2)^2 + \tau^2\beta^4} |S_m(\tilde{\Omega}_m)| = \frac{\beta\tilde{\Delta}_t}{4\sqrt{1+q^2}} |S_m(\tilde{\Omega}_m)|, \quad (5.94)$$

$$\psi_g(\tilde{\Omega}_m) = \arg S_m(\tilde{\Omega}_m) - \tilde{\Omega}_m t_m + \frac{1}{2} \arctg \tilde{q}. \quad (5.95)$$

Правые части (5.94) и (5.95) включают только величины, определяемые по функции  $S(\omega^H, t)$ . Эти выражения могут рассматриваться как оценки спектральных амплитуд и фазы. Для оптимального фильтра СВАНа ( $\beta = \beta_{opt}$ ) оценки принимают особенно простой вид (в (5.96) предполагаем  $q \gg 1$ )

$$|K^{\wedge}(\tilde{\Omega}_m)| = 4\sqrt{2} \sqrt{1 + \beta_{opt}^2/\sigma^2} |S_m(\tilde{\Omega}_m)| \approx 4\sqrt{2} |S_m(\tilde{\Omega}_m)|, \quad (5.96)$$

$$|\hat{\psi}(\tilde{\Omega}_m)| = \arg S_m(\tilde{\Omega}_m) - \tilde{\Omega}_m t_m + \frac{\pi}{2} \text{sign } \tau'. \quad (5.97)$$



Обратим внимание, что последнее слагаемое в (5.97) равно половине аналогичного члена в приближении стационарной фазы (5.45).

Точность всех приведенных выше оценок группового времени, амплитуды и фазы растет с уменьшением  $\beta$ . Это неудивительно, поскольку спектральное представление сигнала можно рассматривать как предельный случай спектрально-временного при  $\delta$ -образных бесконечно узких фильтрах. Однако при  $\beta < \beta_0$  сужение фильтров приводит к растяжению сигнала  $W(t)$  и, следовательно, ограничено присутствием помех. Здесь мы вновь сталкиваемся с противоречием систематических и случайных ошибок.

**Оценки "средних" параметров сигнала.** Из (5.96) следует, что при оптимальном выборе фильтров параметры  $\langle \omega \rangle$  и  $\Delta_\omega$  оцениваются непосредственно по аналогичным параметрам функции  $S_m(\tilde{\Omega}_m)$ .

Если используется  $S_m(\omega^H)$ , то (обозначая ее второй центральный момент  $\chi_\omega^2$ ) за оценку  $\Delta_\omega$  следует принять

$$\hat{\Delta}_\omega^2 = \chi_\omega^2 - \beta^2. \quad (5.98)$$

Рассматривая, кроме того, функцию  $S_m(t)$  и обозначая ее второй центральный момент  $\chi_t^2$ , запишем оценки  $\Delta_t$  и  $q$  исходного сигнала:

$$\hat{\Delta}_t^2 = (1 + \chi_t^2 \chi_\omega^2) / (\chi_\omega^2 - \beta^2), \quad (5.99)$$

$$|\hat{q}| = \chi_\omega \chi_t. \quad (5.100)$$

**Связи между характеристиками  $S(\omega^H, t)$ .** В заключение рассмотрим несколько общих соотношений, позволяющих лучше понять свойства функции  $S(\omega^H, t)$ . Она не является произвольной функцией двух переменных. Из определения (5.65) вытекает, что характеристики  $S(\omega^H, t)$  удовлетворяют определенным дифференциальным соотношениям. Мы рассмотрим эти связи только для случая  $\beta(\omega^H) = \text{const}$ , когда они принимают наиболее простой вид.

Перепишем (5.65) в виде (замена  $x = \omega/\beta$ )

$$S(\omega^H, t) = |S| e^{i\tilde{\varphi}} = \exp\left(-\frac{\omega^H t}{2\beta^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(\beta x) e^{-x^2} \times \\ \times \exp\left[i\left(\beta t - i\frac{\omega^H}{\beta}\right)x\right] dx. \quad (5.101)$$

Отсюда при  $\beta = \text{const}$  следует, что

$$\ln \left[ S(\omega^H, t) \exp\left(\frac{\omega^H t}{2\beta^2}\right) \right] = \ln |S(\omega^H, t)| + \frac{\omega^H t}{2\beta^2} + i\tilde{\varphi}(\omega^H, t) = \\ = J(\omega^H, t) = J(\beta t - i\omega^H/\beta) \quad (5.102)$$

является аналитической функцией комплексного переменного  $z = \beta t - i\omega^H/\beta$ . Выписывая для (5.102) условия Коши-Римана, получаем соотношения, выполняющие в каждой точке плоскости  $(\omega^H, t)$  (предполагая  $|S(\omega^H, t)| \neq 0$ );

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = \tilde{\Omega} = \omega^H + \frac{\beta^2}{|S|} \frac{\partial |S|}{\partial \omega^H}, \quad (5.103)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \omega} = - \frac{1}{\beta^2 |S|} \frac{\partial |S|}{\partial t} \quad (5.104)$$

и, как следствие,

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial t^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \omega^{H^2}} = 0, \quad (5.105)$$

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \ln |S|}{\partial t^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 \ln |S|}{\partial \omega^{H^2}} = -1. \quad (5.106)$$

Из (5.103), (5.104) следует, что в любой (односвязной) области (где  $|S| \neq 0$ ) функции  $\tilde{\varphi}(\omega^H, t)$  и  $\ln |S(\omega^H, t)|$  восстанавливаются одна по другой с точностью до константы. Таким образом, карта СВАНа (амплитудная) с точностью до одного значения начальной фазы несет всю информацию о сигнале. Это не означает, конечно, что на практике нет необходимости вычислять функцию  $\tilde{\varphi}(\omega^H, t)$ . Например, такая полезная величина, как  $\tilde{\Omega}_m$ , находится по  $\tilde{\varphi}(\omega^H, t)$  значительно проще, чем по  $|S(\omega^H, t)|$ .

Тот факт, что  $S(\omega^H, t)$  отличается от аналитической функции только на известный множитель  $\exp[\omega^2/2\beta^2]$ , означает, что спектрально-временное представление может быть в принципе восстановлено по значениям  $S(\omega^H, t)$  (амплитуда и фаза) на отрезке кривой в плоскости  $(\omega^H, t)$ . В частности, все значения  $S(\omega^H, t)$  в пределах спектрально-временной области сигнала определяются значениями  $S(\omega^H, t_m(\omega^H))$  на ее осевой линии.

Приведем несколько полезных утверждений, вытекающих из соотношений между  $\tilde{\varphi}$  и  $|S|$  (напомним, что они относятся к случаю  $\beta(\omega^H) = \text{const}$ ):

- 1) на линии экстремумов  $|S|$  по  $\omega^H$ :  $\tilde{\Omega} = \omega^H$  (следствие (5.103));
- 2) на линии экстремумов  $|S|$  по  $t$  достигаются и экстремумы  $\tilde{\varphi}$  по  $\omega^H$  (следствие (5.104)). Отсюда также следует, что в этих точках изолинии функций  $\tilde{\varphi}(\omega^H, t)$  и  $|S(\omega^H, t)|$  ортогональны друг другу (и направлены параллельно осям  $\omega^H$  и  $t$ );
- 3) предыдущее свойство позволяет получить два соотношения, относящихся к функции  $\arg S_m$ , использованной выше для оценки фазы:

$$d/dt \arg S_m(t) = \tilde{\Omega}_m, \quad (5.107)$$

$$d/d \tilde{\Omega}_m [\arg S_m(\tilde{\Omega}_m) - \tilde{\Omega}_m t_m] = -t_m. \quad (5.108)$$

Последнее равенство означает, что (при  $\tilde{q}(\omega^H) = \text{const}$ , в частности при оптимальных фильтрах СВАНа, оценки фазы (5.95) и группового времени  $t_m(\tilde{\Omega}_m)$  связаны между собой соотношением, аналогичным связи (5.8) между оцениваемыми функциями  $\psi(\omega)$  и  $\tau(\omega)$ . Следовательно, тем же соотношением связаны и систематические ошибки измерения этих величин.

## § 5.5. Линейный поляризационный анализ

Настоящий параграф посвящен применению аппарата комплексной линейной алгебры для поляризационного анализа трехкомпонентных записей поверхностных волн.

**Определение.** Трехкомпонентная запись волны описывается вещественной векторной функцией  $w(t)$  с компонентами

$$\|w_x(t) \quad w_y(t) \quad w_z(t)\|. \quad (5.109)$$

Преобразование (5.5) переводит (5.109) в тройку комплексных спектров

$$\|K_x(\omega) \quad K_y(\omega) \quad K_z(\omega)\|, \quad (5.110)$$

которую при каждом  $\omega$  можно рассматривать как элемент комплексного линейного пространства, т.е. комплексный вектор  $K(\omega)$ . В том же комплексном пространстве можно рассматривать и векторный аналитический сигнал  $W(t)$ , полученный из (5.110) фурье-преобразованием компонент. Вещественное пространство, элементом которого является (5.109) (будем называть его физическим), погружено в комплексное пространство, совпадающее со множеством его вещественных векторов.

Вектор  $K(\omega)$  описывает поляризационные, амплитудные и фазовые свойства спектра сигнала. Выделение собственно поляризационной характеристики опирается на утверждение: *два сигнала одинаково поляризованы, если при любом  $\omega$  их векторные спектры  $K(\omega)$  линейно зависимы.*

Отсюда следует, что с точки зрения поляризации все векторы, отличающиеся на скалярный комплексный множитель, т.е. принадлежащие одному подпространству размерности 1, эквивалентны. Поэтому за математический объект, описывающий поляризационные свойства сигнала, примем одномерное подпространство, которому принадлежит комплексный вектор  $K(\omega)$ . В дальнейшем одномерные линейные подпространства комплексного пространства называются прямыми, а двумерные – плоскостями.

**Параметризация прямых. Поляризационный вектор.** Прямая однозначно задается параметрами принадлежащего ей единичного вектора. Все векторы, отличающиеся от последнего скалярным множителем  $\exp[-i\gamma]$  ( $\gamma$  – вещественно), принадлежат тому же подпространству. Для взаимного однозначного соответствия необходимо, чтобы единичный вектор удовлетворял дополнительным условиям, которые выбираются исходя из следующих соображений.

Пусть  $K = a + ib$  и  $Ke^{-i\gamma} = c + id$  – комплексные векторы ( $a, b, c, d$  – вещественные векторы). Тогда

$$c = a \cos \gamma + b \sin \gamma, \quad d = -a \sin \gamma + b \cos \gamma. \quad (5.111)$$

При изменении  $\gamma$  оба вектора  $c$  и  $d$  описывают в физическом пространстве один и тот же эллипс, оставаясь его сопряженными радиусами. Существует  $\gamma = \psi$ , при котором  $c$  и  $d$  совпадают с главными осями эллипса. Величина  $\psi$  находится из условия ортогональности  $c$  и  $d$ :

$$\psi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2(a, b)}{(a, a) - (b, b)}. \quad (5.112)$$

Векторы главных осей эллипса получаются подстановкой  $\gamma = \psi$  в (5.111).

Таким образом, каждому комплексному вектору соответствует определенный эллипс в физическом пространстве. Процедуру приведения эллипса к главным осям соответствует утверждение, что каждый комплексный вектор  $\mathbf{K}$  может быть представлен в виде

$$\mathbf{K} = z\mathbf{P}, \quad (5.113)$$

где  $z$  — комплексный скаляр, а вектор  $\mathbf{P}$  имеет специальный вид

$$\mathbf{P} = \mu_1 \mathbf{r}_1 + i\mu_2 \mathbf{r}_2, \\ \mu_1, \mu_2 \geq 0, \quad \mu_1^2 + \mu_2^2 = 1, \quad |\mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_2| = 1, \quad (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0, \quad (5.114)$$

где  $\mu_1, \mu_2, \mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  — вещественные скаляры и векторы, векторы  $\mu_1 \mathbf{r}_1$  и  $\mu_2 \mathbf{r}_2$  являются главными осями соответствующего эллипса и находятся по  $\mathbf{K} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$  указанным выше способом с добавлением нормировочного условия  $\mu_1^2 + \mu_2^2 = 1$ . Последнее означает, что  $|\mathbf{P}| = 1$ .

Вектор  $\mathbf{P}$  вида (5.114) примем за характеристику комплексной прямой. Тогда вектор — спектр произвольного сигнала — можно записать так:

$$\mathbf{K}(\omega) = \mathbf{P}(\omega)K(\omega). \quad (5.115)$$

Функцию  $\mathbf{P}(\omega)$  назовем "поляризационным вектором", а  $K(\omega)$  — "скалярным спектром" сигнала:  $|K| = |\mathbf{K}|$ , а  $\psi = \arg K$  вычисляется из (5.112). Такое определение фазы равноценно измерению ее на компоненте физического пространства, совпадающей с главной осью соответствующего эллипса.

**З а м е ч а н и е.** Условия, входящие в (5.114), определяют четыре единичных вектора  $\mathbf{P}$ , отличающихся последовательным умножением на  $i$ , что соответствует существованию у эллипса четырех главных полуосей. Строго говоря, в определение  $\mathbf{P}$  должно входить условие выбора одной из них. В конкретных практических задачах такое условие обычно нетрудно сформулировать: например, в случае волны Рэлея принять за "самую главную" полуось ближайшую к направлению "вверх".

**П р и м е р ы.** В ортогональной системе координат, первая из осей которой совпадает с направлением распространения волны, а третья направлена вертикально вниз, волна Рэлея (в горизонтально однородной изотропной среде) имеет поляризационный вектор

$$\mathbf{P}(\omega) = \|\mu_1(\omega) \ 0 \ i\mu_2(\omega)\|,$$

а волна Лява

$$\mathbf{P}(\omega) = \|\ 0 \ 1 \ 0 \|\ .$$

**Комплексное пространство.** В дальнейшем мы используем обычные понятия унитарного векторного пространства, в частности эрмитово скалярное произведение

$$(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2) = (\mathbf{a}_1 + i\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 - i\mathbf{b}_2). \quad (5.116)$$

Здесь и в дальнейшем векторы, обозначенные строчными буквами, считаются вещественными. Поскольку физическое пространство погружено в комплексное, любой результат, относящийся к первому, может быть получен в рамках второго. Например, спектр сигнала на вещественной компоненте  $e$  равен  $(\mathbf{K}(\omega), e)$ .

Векторное произведение определяется выражением

$$[\mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2] = [(\mathbf{a}_1 - i\mathbf{b}_1) \times (\mathbf{a}_2 - i\mathbf{b}_2)]. \quad (5.117)$$

При таком определении сохраняются свойства векторного и смешанного произведений, известные для вещественных пространств. В частности, результат  $[\mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2]$  ортогонален в смысле (5.116) каждому из сомножителей. Выполняется соотношение

$$[\mathbf{K}_1 \times [\mathbf{K}_2 \times \mathbf{K}_3]] = \mathbf{K}_2 (\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_3)^* - \mathbf{K}_3 (\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2)^*.$$

Подчеркнем, что в записи  $(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2)$  неявно подразумевается комплексное сопряжение второго сомножителя, а в записи  $[\mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2]$  — обоих сомножителей. Поэтому, например, в явной записи выражения  $(\mathbf{K}, \mathbf{K}^*) = (\mathbf{a} + i\mathbf{b}, \mathbf{a} + i\mathbf{b})$  комплексное сопряжение вектора  $\mathbf{K}$  отсутствует.

Угол между векторами  $\mathbf{K}_1$  и  $\mathbf{K}_2$  (обозначим его  $\alpha(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2)$ ) определяется выражением:

$$\cos \alpha(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2) = \frac{|(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2)|}{|\mathbf{K}_1| |\mathbf{K}_2|}, \quad (5.118)$$

$$\sin \alpha(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2) = \frac{|[\mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2]|}{|\mathbf{K}_1| |\mathbf{K}_2|}. \quad (5.119)$$

Угол всегда лежит в интервале  $0 - \pi/2$ .

Векторные обозначения дают компактные выражения для характеристик скалярного спектра и поляризационного вектора (5.114) (а также соответствующего эллипса):

$$|K| = |\mathbf{K}|, \quad \arg K = \frac{1}{2} \arg (\mathbf{K}, \mathbf{K}^*), \quad (5.120)$$

$$\mu_1 = \cos \frac{1}{2} \alpha(\mathbf{K}, \mathbf{K}^*), \quad \mu_2 = \sin \frac{1}{2} \alpha(\mathbf{K}, \mathbf{K}^*). \quad (5.121)$$

Вектор  $\mathbf{P}$  задает не только геометрию эллипса  $\mathbf{P}$ , но и направление вращения по нему в спектральной компоненте сигнала (от  $\mathbf{r}_2$  к  $\mathbf{r}_1$ ). Положительное направление оси вращения (в физическом пространстве) совпадает с вектором

$$i[\mathbf{K} \times \mathbf{K}^*] = 2|\mathbf{K}|^2 \mu_1 \mu_2 [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1], \quad (5.122)$$

ортогональным плоскости эллипса. Из (5.122) следует, что  $|\mathbf{K} \times \mathbf{K}^*|$  пропорционален площади эллипса. В важном частном случае  $\mu_1$  (или  $\mu_2$ ) = 0 (назовем его условно "вещественной поляризацией") эллипс вырождается в отрезок прямой и его площадь равна нулю. Условие вещественной поляризации имеет вид

$$\frac{|[\mathbf{K} \times \mathbf{K}^*]|}{|\mathbf{K}|^2} = \sin \alpha(\mathbf{K}, \mathbf{K}^*) = 2\mu_1 \mu_2 = 0. \quad (5.123)$$

Для произвольной прямой параметр  $2\mu_1 \mu_2$  принимает значения в пределах  $0-1$ , достигая единицы в случае  $\mu_1^2 = \mu_2^2 = \frac{1}{2}$  (круговая поляризация). Формулы (5.121) позволяют вычислить по параметру  $2\mu_1 \mu_2$  каждую из величин:  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .

Кроме векторов, будем рассматривать как самостоятельные объекты

прямые и плоскости. Для обозначения прямой используем символ принадлежащего ей вектора (обычно в форме (5.114) с добавлением верхнего левого индекса 1 ( ${}^1P$ ). В обозначении плоскости используем символ ортогонального ей вектора с добавлением индекса 2 ( ${}^2P$ ). Эквивалентность прямых или плоскостей обозначается символом  $\sim$ . Тем же символом отмечается и принадлежность векторов одной прямой.

При фиксированном базисе все прямые можно подразделить на два типа:  $C1$  — прямая, не содержащая вещественных векторов;  $R1$  — прямая, содержащая хотя бы один, а следовательно, и бесконечно много вещественных векторов. Такие прямые будем называть "вещественными". Условие принадлежности прямой к  $R1$  имеет вид (5.123), где  $K$  — произвольный вектор, лежащий на прямой.

Аналогичным образом выделяются два типа плоскостей:  $C2$  — содержит единственную вещественную прямую. Принадлежащий последней вектор  $e$  находится из выражения

$$e \sim [P \times P^*] \sim [r_1 \times r_2], \quad (5.124)$$

где  $P = \mu_1 r_1 + i\mu_2 r_2$  — вектор (в форме (5.114)) ортогональной плоскости;  $R2$  — содержит единственную плоскость физического пространства. Плоскость типа  $R2$  также будем называть вещественной. Условие принадлежности к  $R2$ , записанное через ортогональный вектор, имеет вид (5.123).

Заметим, что приведенная классификация подпространств, вообще говоря, не инвариантна к выбору произвольного комплексного базиса. Это относится и к операции комплексного сопряжения, и к параметризации прямой в форме (5.114). Однако будем считать, что во всех выражениях объекты комплексного пространства записаны в базисе, принадлежащем физическому пространству, — это и есть ситуация реальных измерений. При таком ограничении указанные трудности отсутствуют.

**Эллиптически и линейно поляризованные сигналы.** Методики поляризационного анализа в значительной степени основаны на модели сигнала, поляризационный вектор которого не зависит от частоты:

$$K(\omega) = PK(\omega). \quad (5.125)$$

Приведенная выше классификация прямых ( $C1$  и  $R1$ ) соответствует разделению сигналов типа (5.125) на эллиптически и линейно поляризованные. Последние могут быть записаны в виде

$$K(\omega) = rK(\omega), \quad (5.126)$$

где  $r$  — единичный вещественный вектор. Хотя (5.126) является частным случаем (5.125), терминологически нам будет удобнее рассматривать эллиптически и линейно поляризованные сигналы как два независимых типа. Дело в том, что принадлежность сигнала к определенному типу поляризации часто составляет важную априорную информацию, используемую при обработке записей. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что в определении эллиптически поляризованного сигнала к (5.125) добавлено условие  $[P \times P^*] \neq 0$ .

В физическом пространстве траектория  $w(t) = \text{Re } W(t)$  эллиптически

поляризованного сигнала в общем случае отличается от эллипса. Однако она лежит в плоскости, ортогональной вещественному вектору  $i[\mathbf{P} \times \mathbf{P}^*]$ , и в этой плоскости существуют два ортогональных направления (совпадающих с  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  вектора  $\mathbf{P}$ ), проекции  $\mathbf{K}(\omega)$  на которые с точностью до постоянного множителя являются действительной и мнимой частями одного аналитического сигнала. При линейной поляризации (5.126) движение в физическом пространстве происходит вдоль прямой, заданной вектором  $\mathbf{r}$ .

Гармонический сигнал с компонентами  $K_m \exp[i(\omega t + \psi_m)]$  всегда имеет вид (5.125), и, более того, его траектория в физическом пространстве согласно (5.111) — эллипс. Поэтому если волна, записанная сейсмометром, является узкополосным сигналом, ее наблюдаемая траектория близка к эллипсу. Для локально-узкополосного сигнала, каким часто является поверхностная волна, этот эллипс медленно деформируется со временем.

Особое значение эллиптической и линейной поляризации определяется не только простотой их исследования. Модель (5.125) часто вполне адекватна реальным сигналам. Скорости упругих волн в Земле ( $P$ ,  $S$ , волны Рэлея, Лява и т.д.) тесно связаны с их поляризацией. Поэтому деление сейсмограммы на отдельные волны, исходя из характерных скоростей, во многом равносильно и делению на сигналы со слабо зависящим и от частоты поляризационными векторами.

**Модель линейного поляризационного анализа.**

1. Каждая из волн, присутствующих на записи, считается эллиптически или линейно поляризованной:

$$\mathbf{K}(\omega) = \sum_j \mathbf{K}_j(\omega) = \sum_j \mathbf{P}_j K_j(\omega). \quad (5.127)$$

2. Скалярные спектры  $K_j(\omega)$  линейно независимы. Отсюда следует важное следствие:

если суммарный спектр  $\mathbf{K}(\omega)$  принадлежит некоторому линейному подпространству, то ему принадлежит и каждый из интерферирующих сигналов.

Модель (5.127) является расширением понятий эллиптически и линейно поляризованных сигналов. Если (5.125) — вырожденный случай трехмерного движения по комплексной прямой, то в рамках (5.127) возможны движения, при которых вектор  $\mathbf{K}(\omega)$  на любой частоте принадлежит фиксированной плоскости. Исследование всей совокупности таких вырожденных ситуаций и составляет основу программы линейного поляризационного анализа.

Чтобы лучше соответствовать реальной записи, модель (5.127) должна включать помеху. Однако для краткости мы будем демонстрировать основные идеи поляризационного анализа с детерминистических позиций, приводя по мере необходимости окончательные результаты, получаемые введением в (5.127) случайной помехи. Подробный разбор многих статистических аспектов поляризационного анализа имеется в [42].

**Ковариационная матрица.** Наиболее распространенный инструмент изучения подпространств — ковариационная матрица  $\mathbf{C}$ , вычисляемая

непосредственно по компонентам записи или спектра сигнала:

$$C = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}(\omega) \mathbf{K}^{T*}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{K}(\omega)|^2 d\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{W}(t) \mathbf{W}^{T*}(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{W}(t)|^2 dt}. \quad (5.128)$$

Нормировка в (5.128) выбрана таким образом, что след  $C$  равен единице,  $\mathbf{K}^{T*}$  – комплексно-сопряженный вектор-строка.

Инвариантные по отношению к ортогональной (и вещественной) системе координат свойства  $C$  взаимно однозначно связаны с характеристиками подпространств. Обозначим:

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$  – собственные значения  $C$  – они неотрицательны и  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ ;

$\mathbf{G}, \mathbf{V}$  – собственные векторы матрицы  $C$  соответственно для  $\lambda_1$  и  $\lambda_3$  (приведенные к форме (5.114)):

$$\mathbf{G} = \eta_1 \mathbf{g}_1 + i\eta_2 \mathbf{g}_2, \quad \mathbf{V} = \nu_1 \mathbf{v}_1 + i\nu_2 \mathbf{v}_2. \quad (5.129)$$

В табл. 5.2 для каждого типа подпространств приведены равносильные свойства ковариационной матрицы.

Таким образом, процесс определения характеристик подпространства, которому принадлежит  $\mathbf{K}(\omega)$ , состоит из двух операций:

- 1) вычисление собственных значений и векторов матрицы  $C$  и определение размерности подпространства, исходя из значений  $\lambda_m$ ;
- 2) преобразование соответствующего собственного вектора ( $\mathbf{G}$ , если  $\text{rank } C = 1$ ,  $\mathbf{V}$ , если  $\text{rank } C = 2$ ) к виду (5.114) и выяснение типа подпространства, исходя из величины  $2\eta_1\eta_2$  или  $2\nu_1\nu_2$ .

В случае, если априори искомое подпространство имеет размерность единицу, т.е. сигнал эллиптически или линейно поляризован, достаточно одной операции. Действительно, тогда

$$\text{Re } C = \text{Re } \mathbf{P} \mathbf{P}^{T*} = \mu_1^2 \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^T + \mu_2^2 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2^T, \quad (5.130)$$

откуда видно, что искомые величины  $\mu_1^2, \mu_2^2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  являются собственными значениями и векторами матрицы  $\text{Re } C$ . Третье собственное значение в этом случае равно нулю.

В реальной ситуации из-за помех или отклонений поляризации от модели (5.127) матрица  $C$  не вырождена, и ее свойства, приведенные в правой части табл. 5.1, формулируются как приближенные условия. Например, условие  $\lambda_m = 0$  принимается при  $\lambda_m < \lambda_0$ , где  $\lambda_0$  – предварительно выбранное пороговое значение. Результаты, полученные таким образом, достаточно устойчивы по отношению к малым отклонениям от модели (5.127). Дело в том, что  $C$  играет по отношению к поляризационным характеристикам сигнала ту же роль, что и параметры  $\langle \omega \rangle, \Delta\omega$  и т.д. по отношению к его скалярным характеристикам. Иными словами, ковариационная матрица позволяет найти "среднее положение линейного подпространства", которому принадлежит сигнал.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим произвольный единичный вектор  $\mathbf{Y}$  и запишем квадратичную форму (используем нормированную спектраль-



Таблица 5.2

К( $\omega$ ) принадлежит подпространству	Тип подпространства	Равносильные свойства матрицы С	
${}^1P$	C1	rank C = 1 (или $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ )	$2\eta_1 \eta_2 \neq 0$
${}^1P$	R1	$G \sim P$	$2\eta_1 \eta_2 = 0$
${}^2Q$	C2	rank C = 2 (или $\lambda_3 = 0, \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ )	$2\nu_1 \nu_2 \neq 0$
${}^2Q$	R2	$V \sim Q$	$2\nu_1 \nu_2 = 0$
Всему пространству		rank C = 3	

ную амплитуду  $B(\omega)$  (5.9))

$$Y^T C Y = \int_{-\infty}^{\infty} |(P(\omega), Y)|^2 B^2(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 \alpha(P(\omega), Y) B^2(\omega) d\omega. \quad (5.131)$$

Эта величина экстремальна на собственных векторах матрицы С и равна соответствующим собственным значениям. Вектор  $G$  (5.139) задает прямую, а вектор  $V$  – плоскость, на которые проектируется максимальная часть энергии сигнала. В этом смысле полученная по  $G$  прямая и по  $V$  плоскость являются "средними по данному сигналу".

Из (5.131) нетрудно оценить и характерные для данного сигнала значения углов отклонения: от "средней" прямой  ${}^1G$

$$\Delta_{\alpha}^G = \arcsin \sqrt{\lambda_2 + \lambda_3} \quad (5.132)$$

и от "средней" плоскости

$$\Delta_{\alpha}^V = \arcsin \sqrt{\lambda_3}. \quad (5.133)$$

Осредняющие свойства ковариационной матрицы позволяют использовать ее и как инструмент вычисления сглаженных поляризационных характеристик произвольного сигнала (в том числе с  $P(\omega) \neq \text{const}$ ). Тогда интервалы интегрирования в (5.128) заменяются на конечные и это равенство распадается на два независимых определения спектральной и временной ковариационных матриц.

При обработке диспергирующих поверхностных волн удобнее использовать матрицу С, определенную через спектрально-временное представление записи, последнее вычисляется покомпонентно при фиксированной функции  $\beta(\omega)$ . Тогда для любого сигнала вида (5.125) векторное спектрально-временное представление имеет вид

$$S(\omega^T, t) = P S(\omega^H, t), \quad (5.134)$$

т.е. переход от  $K(\omega)$  к  $S(\omega^H, t)$  не приводит к искажению поляризационного вектора. При  $P(\omega) \neq \text{const}$  поляризационные характеристики, измененные по  $S(\omega^H, t)$ , обладают систематическими ошибками.

Ковариационная матрица определяется через  $S(\omega^H, t)$  выражением

$$C(\omega_0^H, t_0) = \frac{\int_{\epsilon(\omega_0^H, t_0)} S^T(\omega^H, t) d\omega^H dt}{\int_{\epsilon(\omega_0^H, t_0)} |S(\omega^H, t)|^2 d\omega^H dt}, \quad (5.135)$$

где  $\epsilon(\omega_0^H, t_0)$  — "сканирующее окно" — ограниченная область плоскости  $(\omega^H, t)$ , расположенная в окрестности точки  $(\omega_0^H, t_0)$ . Таким образом, матрица  $C$  рассматривается как функция, заданная на спектрально-временной плоскости. В каждой точке  $(\omega_0^H, t_0)$  она обладает всеми перечисленными выше свойствами по отношению к  $S(\omega^H, t)$ , рассматриваемому в пределах окна  $\epsilon(\omega_0^H, t_0)$ .

Обсуждаемые ниже приемы поляризационного анализа опираются на свойства ковариационной матрицы, а не на способ ее вычисления. Тем не менее результаты существенно зависят от него, и в частности от выбора окна  $\epsilon$ .

**Анализ одномерных подпространств.** Наиболее широкое применение находит простейший вариант модели (5.127), предполагающий, что на исследуемом участке записи преобладает единственный эллиптически или линейно поляризованный сигнал. Этому вопросу посвящена обширная литература [30, 31, 43, 135, 163], и мы коротко коснемся лишь некоторых его сторон.

Хорошее соответствие (5.125) реальным волнам позволяет использовать критерии качества этой модели в задачах идентификации и выделения сигналов. Для идентификации строится решающая функция  $L$ , величина которой характеризует отличие измеренных параметров прямой от априорной модели.

Например, если целью идентификации является любой эллиптически или линейно поляризованный сигнал, в качестве  $L$  можно выбрать комбинацию собственных значений матрицы  $C$  ( $\lambda_1$  — максимальное)

$$L_e = (3\lambda_1 - 1)/2\lambda_1, \quad (5.136)$$

которая оценивает долю энергии полезного сигнала в общей энергии, попадающей в окно  $\epsilon$ . Величина (5.136) меняется от нуля (при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/3$ ) до единицы (при  $\lambda_1 = 1$ ). Сканируя окном необходимый участок спектрально-временной плоскости, представим  $L_e$  как функцию  $(\omega_0^H, t_0)$ . В ее рельефе значениям, близким к единице, соответствуют области, на которых поляризация близка к модельной. За оценку поляризационного вектора принимается собственный вектор  $G$  (5.129), вычисленный в точке максимума  $L_e(\omega_0^H, t_0)$ .

Для выделения сигналов вида (5.125) плоскость  $(\omega_0^H, t_0)$  отождествляется с  $(\omega^H, t)$  и находится произведение

$$\mathfrak{S}(\omega^H, t) = L(\omega^H, t) S(\omega^H, t). \quad (5.137)$$

Эта операция называется поляризационной фильтрацией. Обычно в нее включается также проектирование  $\mathfrak{S}(\omega^H, t)$  на некоторое направление: либо выбранное заранее, либо оцененное по матрице  $C$ . Фильтр (5.137) нелинеен и, следовательно, приводит к искажению полезных сигналов. Для уменьшения этого эффекта зависимости  $L$  от параметров  $C$  придают форму, приблизительно соответствующую той, что изображена на рис. 5.11. Выбирается один или несколько параметров  $X$ , характеризующих близость

поляризации, измеренной по  $C$ , к модели, а также их пороговые значения  $X_0$ . Для сигналов, близких к модельному,  $L \approx 1$ , и они пропускаются фильтром (5.137) без существенных искажений.

В рассмотренном выше примере функцию  $L_e$  (5.136) можно преобразовать к указанному виду следующим образом. Примем за  $X$  параметр  $\rho$ , характеризующий энергетическое отношение помеха/полезный сигнал,

$$\rho = \frac{1 - L_e}{L_e} = \frac{1 - \lambda_1}{3\lambda_1 - 1}, \quad (5.138)$$

меняющийся в пределах  $0 \div \infty$ . Пусть  $\rho_0$  — пороговое значение параметра  $\rho$ . Тогда функция

$$L_1(\rho) = \cos\left(\arctg \frac{\rho}{\rho_0}\right) \quad (5.139)$$

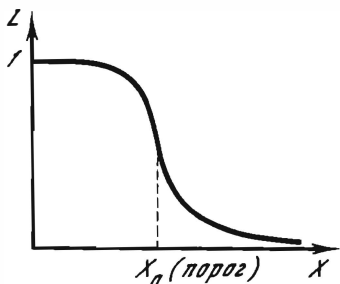


Рис. 5.11. Характерная форма решающей функции

приблизительно соответствует изображенной на рис. 5.11. Для малой помехи ( $\rho \ll \rho_0$ )  $L_1 \approx 1$ , а если отношение помеха/сигнал выше порога ( $\rho \gg \rho_0$ ), то  $L_1 \ll 1$ . При фильтрации (5.137) основные искажения приходятся на сигналы, для которых  $\rho \approx \rho_0$ .

Приведем еще несколько примеров решающих функций.

1. Для выделения линейно (не эллиптически!) поляризованных сигналов (например, волн Лява) применимы те же функции (5.139), (5.138), в которые, однако, вместо аргумента  $\lambda_1$  входит максимальное собственное значение матрицы  $\text{Re}C$ . Соответствующий ему собственный вектор, взятый в точке максимума  $L_1$ , и принимается за оценку искомого поляризационного вектора.

2. Для выделения сигналов, обладающих конкретным поляризационным вектором  $\mathbf{P}$ , в решающую функцию вводится множитель, зависящий от параметра:

$$\theta = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1} \text{tg}^2 \alpha(\mathbf{P}, \mathbf{G}), \quad (5.140)$$

где  $\mathbf{G}$  — собственный вектор (5.129), соответствующий  $\lambda_1$ . Параметр  $\theta$  меняется в интервале  $0 \div \infty$  и равен единице при  $\alpha(\mathbf{P}, \mathbf{G}) = \Delta_\alpha^G$  (5.132). Решающая функция строится аналогично (5.139):

$$L_2 = L_1 \cos\left(\arctg \frac{\theta}{\theta_0}\right), \quad (5.141)$$

где  $\theta_0$  — пороговое значение  $\theta$ .

3. Пусть необходимо выделить основную моду волны Рэлея, приходящей с произвольного априори неизвестного азимута. За идентификационные признаки примем вертикальное положение плоскости эллипса поляризации

$$\alpha(\mathbf{e}_z, [\mathbf{P} \times \mathbf{P}^*]) = \pi/2 \quad (5.142)$$

( $\mathbf{e}_z$  – вертикальный вектор) и близость отношения  $\mu_2/\mu_1$  к единице:  $1/c < \mu_2/\mu_1 < c$  или равносильное условие

$$\operatorname{tg}^2 \alpha(\mathbf{P}, \mathbf{P}^*) = \frac{|[\mathbf{P} \times \mathbf{P}^*]|^2}{|(\mathbf{P}, \mathbf{P}^*)|^2} > \frac{4}{(c - 1/c)^2} = \gamma_0, \quad (5.143)$$

где  $\gamma_0$  – пороговое значение величины  $\gamma = \operatorname{tg}^2(\mathbf{G}, \mathbf{G}^*)$ . Второе пороговое значение  $\theta_0$  (для условия (5.142) установим, используя параметр  $\theta$ , сходный по смыслу с (5.140):

$$\theta = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1} \operatorname{ctg}^2 \alpha(\mathbf{e}_z, [\mathbf{G} \times \mathbf{G}^*]). \quad (5.144)$$

Окончательная решающая функция

$$L_3 = L_1 \cos\left(\operatorname{arctg} \frac{\theta}{\theta_0}\right) \cos\left(\operatorname{arctg} \frac{\gamma_0}{\gamma}\right) \quad (5.145)$$

выделяет сигнал, исходя из приближенного выполнения трех условий: (5.152), (5.153) и соответствия модели (5.125).

В заключение несколько замечаний о выборе размеров сканирующего окна  $\epsilon$ . Наилучшему отношению сигнал/случайный шум соответствует  $\epsilon$ , приблизительно совпадающее со спектрально-временной областью сигнала. Последнюю можно считать "верхней оценкой" окна  $\epsilon$ . С другой стороны, значения  $\mathbf{S}(\omega^H, t)$  в близких точках плоскости  $(\omega^H, t)$  сильно зависимы. Поэтому для эффективной идентификации необходимо, чтобы хотя бы один линейный размер  $\epsilon$ , по  $\omega^H$  или по  $t$ , превосходил величину соответственно порядка  $\beta$  или  $1/\beta$ . В противном случае собственное значение  $\lambda_1$  близко к единице независимо от того, соответствует ли исследуемый сигнал модели (5.125). Это требование определяет "нижнюю оценку"  $\epsilon$ . Оно относится не только к исследованию одномерных подпространств, но и к рассматриваемым ниже задачам идентификации и измерениям характеристик интерферирующих сигналов. В остальном следует ориентироваться на то, что увеличение размеров  $\epsilon$  в целом ведет к росту систематических ошибок оценок  $\mathbf{P}$  и, наоборот, к уменьшению погрешностей, вызванных случайными помехами.

**Идентификация интерферирующих сигналов.** Возможности линейного поляризационного анализа в определении числа сигналов, присутствующих в некоторой, например частотной, области, весьма ограничены. Действительно, разложение любого сигнала в фиксированном базисе  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$  комплексного пространства

$$\mathbf{K}(\omega) = \mathbf{E}_1 \mathbf{K}_1(\omega) + \mathbf{E}_2 \mathbf{K}_2(\omega) + \mathbf{E}_3 \mathbf{K}_3(\omega) \quad (5.146)$$

есть не что иное, как представление сигнала в виде суммы трех эллиптически (или даже линейно) поляризованных. Поэтому результат интерфе-

ренции более чем двух сигналов принципиально не отличим от общего случая и не идентифицируется поляризационными методами. Тем не менее единственный оставшийся вариант модели (5.127) – интерференция двух сигналов с различными поляризационными векторами – достаточно интересен для практики. Он и рассматривается в дальнейшем.

Сумма двух сигналов вида (5.125) принадлежит фиксированной плоскости, включающей оба поляризационных вектора. Идентификационные признаки такой ситуации (в пределах окна  $\epsilon$ ):

$$\lambda_3 = 0, \lambda_2 > 0. \quad (5.147)$$

На практике строится решающая функция, контролирующая качество выполнения обоих условий (5.147), например ( $l_0$  – порог)

$$L_4 = \cos\left(\arctg \frac{1}{l_0} \frac{\lambda_1 \lambda_3}{\lambda_2^3}\right). \quad (5.148)$$

Функция (5.148) не различает плоскости типов  $C2$  и  $R2$ . Для идентификации только сигналов, принадлежащих  $R2$ , следует добавить в (5.148) множитель, контролирующий условие  $2\nu_1 \cdot \nu_2 = 0$ . Примем для определенности  $\nu_2 \leq \nu_1$ . Тогда ближайшая (в смысле угла) к  $\mathbf{V}$  вещественная прямая проходит через вектор  $\mathbf{v}_1$  (5.129), причем

$$\operatorname{tg} \alpha(\mathbf{V}, \mathbf{v}_1) = \nu_2 / \nu_1. \quad (5.149)$$

Сравнивая эту величину с характерным значением тангенса ошибки  $\Delta_\alpha^V$  (5.133), запишем решающую функцию для выделения плоскостей типа  $R2$ , например, в виде ( $m_0$  – порог)

$$L_5 = L_4 \cos\left[\arctg\left(\frac{1}{m_0} \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2} \frac{\lambda_3}{1 - \lambda_3}\right)\right]. \quad (5.150)$$

За оценку плоскости, содержащей оба интерферирующих сигнала, принимается  ${}^2\mathbf{V}$  (или  ${}^2\mathbf{v}_1$ , если предполагается, что плоскость имеет тип  $R2$ ).

Из факта принадлежности суммарного сигнала плоскости определенного типа уже следует некоторая информация о каждом из интерферирующих сигналов.

Если плоскость идентифицирована как  $R2$ , то любой из интерферирующих сигналов ортогонален вещественному вектору  $\mathbf{v}_1$ . Но тогда (во временной форме) и  $(\operatorname{Re} \mathbf{W}_j(t), \mathbf{v}_1) \equiv 0$ , т.е. исходные вещественные сигналы в любой момент времени лежат в одной плоскости физического пространства. Каждый из них может быть поляризован как линейно, так и эллиптически. В последнем случае в той же плоскости лежат и соответствующие поляризационные эллипсы.

В случае плоскости  $C2$  формально хотя бы один из двух интерферирующих сигналов эллиптически поляризован ( $C2$  включает всего одну вещественную прямую (5.134)). Однако с практической точки зрения этот вывод нельзя считать вполне определенным. Любая плоскость  ${}^2\mathbf{V}$  с произвольным значением параметра  $2\nu_1\nu_2$  включает бесконечно много прямых, не отличающихся в пределах точности измерений от вещественной. Таким образом, оба интерферирующих сигнала, вообще говоря, могут быть близки к линейно поляризованным.

Дальнейшие выводы о характеристиках интерферирующих сигналов возможны только при наличии определенной априорной информации о них. Следует учитывать, что в горизонтально-неоднородных средах, как вытекает из предшествующих глав, такая информация весьма ограничена. Реальные поляризационные характеристики поверхностных волн могут значительно отличаться от ожидаемых в модели горизонтально-однородной изотропной среды.

Переходим к обсуждению измерения поляризационных характеристик интерферирующих сигналов. Рассмотрим сначала два частных, но практически интересных примера, а затем коротко коснемся более общих соотношений.

**Интерференция волны Лява и волны Рэлея.** В качестве модели примем результат интерференции линейно (волна Лява) и эллиптически (волна Рэлея) поляризованных сигналов:

$$\mathbf{K}(\omega) = r\mathbf{K}_L(\omega) + (\mu_1\mathbf{r}_1 + i\mu_2\mathbf{r}_2)\mathbf{K}_R(\omega). \quad (5.151)$$

Таким образом, первые априорные предположения состоят в том, что тип поляризации каждого сигнала известен. Заметим, что мы пока не предположили никаких других свойств поляризации волн Лява и Рэлея, обычных для горизонтально-однородной среды, и будем вводить такую информацию лишь по мере необходимости.

Если наблюдаемый  $\mathbf{K}(\omega)$  лежит в плоскости  ${}^2\mathbf{V}$  типа  $C2$ , сделанных предположений уже достаточно, чтобы найти поляризационный вектор волны Лява. Поскольку  $\mathbf{r}$  принадлежит плоскости, содержащей всего одну вещественную прямую:

$$\mathbf{r} = [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2], \quad (5.152)$$

где, как и выше,  $\mathbf{V} = \nu_1\mathbf{v}_1 + i\nu_2\mathbf{v}_2$  — собственный вектор (5.129).

Поляризационный вектор волны Рэлея без дополнительных предположений определить нельзя. Чтобы нагляднее представить ограничения, которым он подчиняется, воспользуемся специальным преобразованием записи, полезным и в практическом отношении. Это линейное преобразование в ортогональном базисе, составленном из векторов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{r}$ , имеет вид

$$\tilde{\mathbf{K}}(\omega) = \left\| \begin{array}{ccc} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \mathbf{K}(\omega). \quad (5.153)$$

Понятия вещественной прямой и плоскости не инвариантны к (5.153). Его смысл состоит в том, что вектор  $\mathbf{V}$  преобразуется в  $\tilde{\mathbf{v}}$ , лежащий на вещественной прямой:

$$\mathbf{V} = \nu_1\mathbf{v}_1 + i\nu_2\mathbf{v}_2 \rightarrow \tilde{\mathbf{v}} = i(\nu_1\mathbf{v}_1 + \nu_2\mathbf{v}_2), \quad (5.154)$$

а соответствующая плоскость  ${}^2\mathbf{V}$  переходит в плоскость  ${}^2\tilde{\mathbf{v}}$  типа  $R2$ . Этой плоскости принадлежит и преобразованная волна Рэлея, а также волна Лява, на которую (5.153) вообще не влияет.

Практическое значение (5.153) связано со вторым предположением, относящимся к (5.151): считаем, что одна из главных осей поляризационного эллипса волны Рэлея (для определенности  $\mathbf{r}_2$ ) априори известна и

ортогональна вектору  $\mathbf{r}$  волны Лява. Такое допущение вполне естественно в рамках модели горизонтально-однородной изотропной среды, где одна из главных осей эллипса волны Рэлея априори вертикальна, а волна Лява поляризована в горизонтальной плоскости. Однако направление  $\mathbf{r}_1$  и значения  $\mu_1, \mu_2$  мы пока считаем неизвестными. Тогда, выражая  $V$  через векторное произведение  $\mathbf{r}$  и  $\mu_1 \mathbf{r}_1 + i \mu_2 \mathbf{r}_2$ , получаем

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_2. \quad (5.155)$$

Но мы предположили  $\mathbf{r}_2$  известным (вертикальным). Это позволяет провести преобразование записи (5.153) еще до вычисления ковариационной матрицы, а следовательно, вектора  $V$ .

На практике (5.153) сводится к изменению на  $\pi/2$  фазы вертикальной компоненты спектра записи. После этого искомая плоскость считается априори типа  $R2$  и для ее поиска используется матрица  $Re C$ . Собственный вектор, соответствующий минимальному собственному значению матрицы  $Re C$ , принимается за оценку  $\tilde{\mathbf{v}}$ . Его угол с вертикалью определяет значения параметров  $\nu_1$  и  $\nu_2$ :

$$\nu_1 = \cos \alpha(\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{r}_2), \quad \nu_2 = \sin \alpha(\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{r}_2). \quad (5.156)$$

За оценку направления поляризации волны Лява принимается линия пересечения плоскости  ${}^2\tilde{\mathbf{v}}$  с горизонтальной плоскостью:

$$\mathbf{r} \sim [\tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{r}_2]. \quad (5.157)$$

Преимущества такой процедуры связаны с тем, что она требует оценки меньшего числа параметров, чем вычисление  $V$ , и, следовательно, более устойчива по отношению к помехам.

Согласно (5.155) волна Рэлея в результате (5.153) преобразуется в линейно поляризованный сигнал с вектором

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mu_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 \mathbf{r}_2. \quad (5.158)$$

Поскольку  $\tilde{\mathbf{p}}$  принадлежит плоскости  ${}^2\tilde{\mathbf{v}}$ , его неизвестные параметры связаны соотношением

$$\mu_1 \sin \alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) / \mu_2 = \nu_2 / \nu_1. \quad (5.159)$$

Заметим, что  $\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r})$  — угол между вектором  $\mathbf{r}$  волны Лява и плоскостью первоначального эллипса поляризации волны Рэлея. Из (5.159) следует

$$\mu_2 / \mu_1 \leq \nu_1 / \nu_2. \quad (5.160)$$

Более точные утверждения о параметрах поляризационного вектора волны Рэлея согласно (5.159) возможны только после введения дополнительной информации о значениях либо угла  $\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r})$ , либо отношения осей эллипса  $\mu_2 / \mu_1$ . Например, принимая в полном объеме модель горизонтально-однородной изотропной среды, т.е.  $\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) = \pi/2$ , найдем все неизвестные параметры задачи:

$$\mu_1 \mathbf{r}_1 + i \mu_2 \mathbf{r}_2 = \nu_1 \mathbf{v}_2 + i \nu_2 \mathbf{v}_1. \quad (5.161)$$

С другой стороны, для основной моды волны Рэлея обычно  $\mu_2 / \mu_1 > \kappa \sim 0,5$ , что (при неизвестном  $\mu_2 / \mu_1$ ) накладывает ограничение на возможные зна-

чения  $\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r})$ :  $\sin \alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) \geq \kappa \nu_1 / \nu_2$ . Поскольку мы допускаем изменение угла только в пределах  $0 \div \pi/2$ , уточним, что каждому значению  $\mu_2 / \mu_1 \leq \nu_1 / \nu_2$  соответствуют два вектора  $\mathbf{r}_1$ , симметричные в горизонтальной плоскости относительно оси  $\mathbf{v}_1$ , и, следовательно, два поляризационных вектора волны Рэлея.

**Интерференция двух волн Рэлея.** Ситуация моделируется выражением

$$K(\omega) = (\mu_{11}\mathbf{r}_{11} + i\mu_{21}\mathbf{r}_{21})K_1(\omega) + (\mu_{12}\mathbf{r}_{12} + \mu_{22}\mathbf{r}_{22})K_2(\omega) \quad (5.162)$$

и исследуется аналогично предыдущей.

Предположим, что главные оси  $\mathbf{r}_{21}$  и  $\mathbf{r}_{22}$  совпадают и вертикальны. Тогда с ними совпадает и ось  $\mathbf{v}_1$  (5.129), где вектор  $\mathbf{V}$  ортогонален плоскости, содержащей  $K(\omega)$ :

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_{22}. \quad (5.163)$$

Применим к записи преобразование (5.153). Тогда каждая из интерферирующих волн Рэлея превратится в линейно поляризованный сигнал, принадлежащий плоскости  ${}^2\tilde{\mathbf{v}}$ . Параметры каждого из поляризационных векторов удовлетворяют соотношениям (5.159), (5.160), где  $\alpha(\mathbf{r}_{1j}, \mathbf{r})$  — угол  $\mathbf{r}_{1j}$  с линией пересечения  ${}^2\tilde{\mathbf{v}}$  и горизонтальной плоскости.

Для поиска поляризационных векторов необходима дополнительная информация об углах  $\alpha(\mathbf{r}_{1j}, \mathbf{r})$  или о параметрах  $\mu_{2j}/\mu_{1j}$ . Например, вновь обращаясь к модели горизонтально-однородной среды, примем  $\mu_{21}/\mu_{11} = \mu_{22}/\mu_{12}$  (величина отношения априори неизвестна). Тогда, если нам известен  $\mathbf{r}_{11}$  — направление распространения одной из интерферирующих волн (основной волны), (5.159) позволяет найти направление другой (помехи):

$$\mathbf{r}_{12} = 2(\mathbf{r}_{11}, [\mathbf{r} \times \mathbf{r}_{21}]) [\mathbf{r} \times \mathbf{r}_{21}] - \mathbf{r}_{11}$$

и отношение осей эллипсов

$$\frac{\mu_{21}}{\mu_{11}} = \frac{\mu_{22}}{\mu_{12}} = \frac{\nu_2}{\nu_1 \sin \alpha(\mathbf{r}_{11}, \mathbf{r})},$$

чем полностью определяются оба поляризационных вектора интерферирующих волн.

**Общие ограничения.** Приведем несколько соотношений, относящихся к моделям (5.151), (5.162) и не зависящих от сделанных выше априорных предположений.

Параметры любого вектора  $\mathbf{P} = \mu_1 \mathbf{r}_1 + i\mu_2 \mathbf{r}_2$ , принадлежащего плоскости  ${}^2\mathbf{V}$  типа  $C2$ , связаны соотношением

$$\frac{\mu_1 \mu_2}{\nu_1 \nu_2} = \frac{\sin^2 \alpha(\mathbf{P}, \mathbf{v}_r)}{|([\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2], \mathbf{v}_r)|} = \frac{\sin^2 \alpha(\mathbf{P}, \mathbf{v}_r)}{\sin \gamma}, \quad (5.164)$$

где  $\mathbf{v}_r$  задает единственную лежащую в плоскости вещественную прямую,  $\gamma$  — угол (в физическом пространстве) между  $\mathbf{v}_r$  и плоскостью соответствующего  $\mathbf{P}$  эллипса.

Каждая плоскость типа  $C2$ , кроме вещественной прямой ( $2\mu_1 \mu_2 = 0$ ), содержит две прямых, соответствующих круговой поляризации ( $2\mu_1 \mu_2 = 1$ ),



зависимых векторами (для определенности  $\nu_2 \leq \nu_1$ ):

$$v_{1,2}^c = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\nu_2}{\nu_1} v_1 \pm \sqrt{1 - \nu_2^2/\nu_1^2} v_r + i v_2 \right), \quad (5.165)$$

которые сливаются в одну только при  $\nu_1 = \nu_2$ . Любому другому значению параметра  $2\mu_1\mu_2$  (кроме нуля и единицы) соответствует в плоскости  $^2V$  бесконечно много прямых. Это отличает общий случай от рассмотренных выше примеров, где каждому значению  $\mu_2/\mu_1$  отвечала одна или две прямых.

Если априори предполагается, что вектор лежит на вещественной прямой, но в действительности он обладает "слабой эллиптичностью"  $\delta\mu_2 \ll 1$ , то полученная оценка  $v_r$  обычно (при  $2\nu_1\nu_2 \sim 1$ ) близка к истинному вектору  $P$ . Это утверждение обеспечивается неравенством, вытекающим из (5.164):

$$\sin \alpha(P, v_r) \leq \min \{ \mu_2/\nu_2, \mu_1/\nu_1 \},$$

т.е. оценка отличается от истинного вектора на угол  $\delta\alpha \leq \delta\mu_2/\nu_2$  (принято  $\mu_2/\mu_1 < \nu_2/\nu_1$ ). Измерения параметров априори вещественных прямых неустойчивы только для плоскостей, "близких" к вещественным ( $\nu_2 \ll 1$ ).

Если плоскость типа  $C2$  порождена двумя сигналами, близкими к линейно поляризованным, то их поляризационные векторы близки к  $v_r$  и, следовательно, между собой. Это условие отличает плоскость  $C2$  от  $R2$ . Последняя может быть порождена линейно поляризованными сигналами, угол между которыми произволен.

**Поляризационное разделение сигналов.** Рассмотрим задачу поиска в рамках модели (5.127) скалярных спектров  $K_j(\omega)$  по известным (или измеренным) поляризационным векторам  $P_j$ . Подразумевается, что функции  $K_j(\omega)$  существенно коррелированы и сравнимы по амплитуде, т.е. не могут быть разделены ни спектрально-временными методами, ни поляризационной фильтрацией.

Идея поляризационного разделения сводится к проектированию суммарной записи на направление, где избранный "полезный сигнал" по возможности преобладает над остальными — "помехами". При произвольном числе интерферирующих сигналов такая задача требует знания ковариационной матрицы скалярных спектров  $K_j(\omega)$ . В практике обработки поверхностных волн такая информация отсутствует, и поляризационное разделение эффективно при интерференции не более чем трех сигналов.

Пусть модель (5.127) содержит три сигнала с поляризационными векторами  $P_1, P_2, P_3$ . Для разделения по ним строится сопряженная система векторов  $E_1, E_2, E_3$ , каждый из которых ортогонален паре из векторов  $P_j$ , например:

$$E_1 = [P_2 \times P_3] / (P_1, [P_2 \times P_3]). \quad (5.166)$$

Это возможно, если векторы  $P_j$  линейно независимы. Проектирование  $K(\omega)$  на  $E_1$  приводит к выделению  $K_1(\omega)$ . Коэффициент при векторном произведении в (5.166) обеспечивает правильное измерение амплитуды и фазы  $K_1(\omega)$ .

Если интерферируют только два сигнала, то из соображений максимизации отношения сигнал/случайный шум в качестве  $P_3$  выбирается  $V$

(5.129) – собственный вектор матрицы  $C$ , соответствующий минимальному собственному значению.

Для практики оказывается важным, что в (5.166) вектор  $P_1$  появляется только в скалярном коэффициенте. Это означает, что для выделения  $K_1(\omega)$  с точностью до неизвестного скалярного множителя не требуется знания поляризаационного вектора самого сигнала – достаточно знать поляризацию помех. И наоборот, если  $P_j$  помех неизвестны, измерение параметров поляризаационного вектора еще не гарантирует выделения соответствующего скалярного спектра. Заметим, что не зависящий от частоты постоянный множитель не влияет на измерение групповых времен, а если он веществен, то и фаз.

Последние соображения имеют прямое отношение к ситуации интерференции волны Лява с волной Рэлея. Мы видели, что в общем случае измерению доступен только поляризаационный вектор волны Лява. Это означает, что только скалярный спектр волны Рэлея легко поддается поляризаационному выделению (с точностью до постоянного множителя). Последний факт хорошо знаком сейсмологам-практикам, которые уверенно изучают волну Рэлея на вертикальной компоненте записи.

### § 5.6. Пространственный анализ поверхностных волн

Наличие горизонтальных неоднородностей среды, как следует из теоретических рассмотрений (см. гл. 2 и 3) и экспериментальных данных [81, 118, 122, 156], приводит к отклонению путей поверхностных волн от прямых и появлению на сейсмограммах, помимо основного цуга поверхностных волн, запаздывающих сигналов.

Изучение таких аномалий пространственной структуры волнового поля наиболее эффективно осуществляется при помощи площадных сейсмических групп [57]. Имеются два основных способа такого анализа: пространственно-временной и пространственно-спектральный.

**Пространственно-временной анализ (ПВАН).** Он ведется во временной области и может рассматриваться как двумерный аналог регулируемого направленного приема (РНП) – второго рода, так как в его основе лежит суммирование трасс с временными задержками, определяемыми параметрами фазовой поверхности волны, т.е. ищется функция трех переменных

$$P(t, \alpha, C) = \frac{1}{\Delta T} \int_{t - \frac{\Delta T}{2}}^{t + \frac{\Delta T}{2}} \left[ \sum_j w_j u_j(s - \tau_j(\alpha, C)) \right]^2 ds, \quad (5.167)$$

где  $P$  – мощность суммарного сигнала;  $t$  – время;  $\alpha$  и  $C$  – параметры плоской фазовой поверхности, для которой проводится суммирование;  $\alpha$  – азимут подхода,  $C$  – фазовая скорость относительно группы;  $\Delta T$  – ширина скользящего временного окна для оценки мощности;  $j$  – номер трассы;  $w_j$  – вес, придаваемый наблюдению  $j$ -й трассы  $u_j(t)$ ;  $\tau_j$  – временная задержка  $j$ -й трассы. Поскольку каждая поверхностная волна характеризуется определенными интервалами значений  $t$ ,  $\alpha$  и  $C$ , такие сигналы выделяются на диаграммах  $P(t, \alpha, C)$  как локальные области

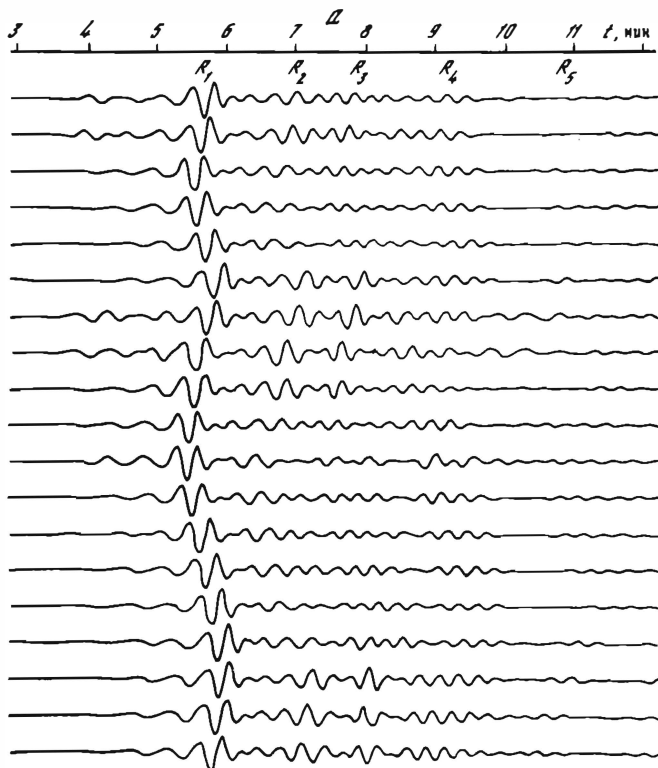
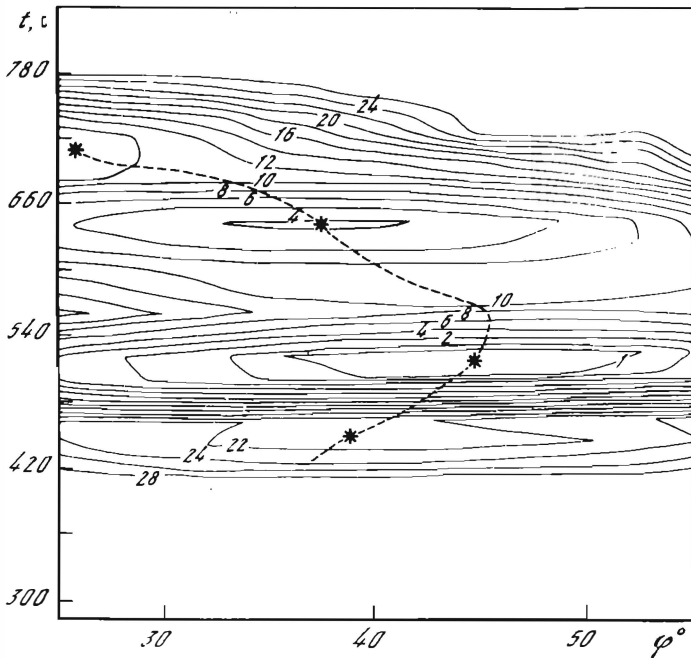


Рис. 5.12. Пример пространственно-временного анализа записи группы НОРСАР  
*a* – фрагмент записи, видны основная мода волны Рэлея  $R_1$  и ее кода (волны  $R_2$ – $R_5$ ). Время  $t$  после начала записи; *б* – азимутально-временная диаграмма  $P_C(t, \alpha)$ , числа у изолиний – величины спада мощности в децибелах относительно максимальной. Звездочками показаны максимум основного и последующих вступлений, пунктиром – изменение положения максимума со временем

повышенных значений. Если группа имеет диаметр (апертуру) около 100 км (именно такие размеры имел НОРСАР), то она не может при временном суммировании обеспечить высокой разрешающей способности по  $C$ . Поэтому наиболее удобны для анализа диаграммы сечений  $P_{C_0}(t, \alpha)$ , где  $C_0$  соответствует средней фазовой скорости поверхностной волны в изучаемом частотном диапазоне.

Пример использования азимутально-временных диаграмм приведен на рис. 5.12. Анализируется запись группой НОРСАР (точнее, ее длинно-периодными вертикальными приборами) сейсмических волн с теоретическим азимутом подхода к группе  $41,7^\circ$ . Фазовая скорость  $C$  для анализа была принята равной 3,5 км/с, временное окно  $\Delta T = 40$  с.

На записи, помимо основного сигнала  $R_1$ , обладающего заметной дисперсией, видно несколько интенсивных запаздывающих по времени на 1–3 мин последующих сигналов. Рассмотрение диаграммы показывает, что азимут подхода основного сигнала заметно превышает теоретический



и плавно изменяется со временем. Последующие сигналы характеризуются локальными максимумами  $P_C(t, \alpha)$ , достаточно четко выделяемыми на диаграмме и имеющими существенно иные азимуты подхода по сравнению с основным сигналом. Анализ временных задержек и азимутальных отклонений последующих вступлений позволяет интерпретировать их как отраженные поверхностные волны от близвертикальных границ в земной коре: границы между двумя блоками коры в Баренцевом море, окаймления Свальбардской платформы, континентального склона в районе Норвежского моря [156]. Таким же способом в работе [17] выделена волна, отраженная от северо-восточного борта Днепровско-Донецкого прогиба (см. гл. 7, § 7.1).

**Пространственно-спектральный способ анализа.** Он основан на спектральных преобразованиях полученных записей [3, 75, 121]. Предварительным этапом анализа является построение оценки матрицы взаимной спектральной плотности мощности  $\hat{f}_{ij}(\omega)$ . Для этого анализируемый интервал записи каждого канала после предварительной фильтрации полосовым фильтром, симметричным относительно выбранной частоты  $\omega$ , разделяется на  $M$  одинаковых блоков длиной  $N$  отсчетов каждый. Затем находятся спектральные плотности на частоте  $\omega$  для каждого блока:

$$S_{jn} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^N u_j((m-1)\Delta t + (n-1)N\Delta t) \exp[-i(m-1)\Delta t], \quad (5.168)$$

где  $\Delta t$  — шаг дискретизации;  $n = 1 \div M$ .

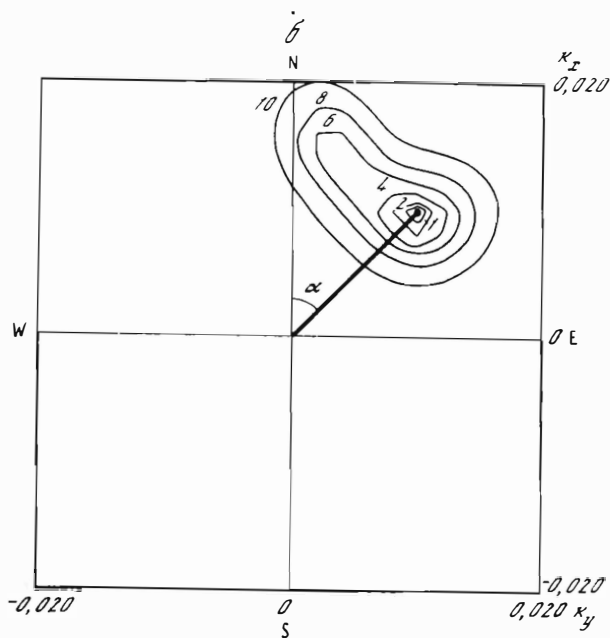
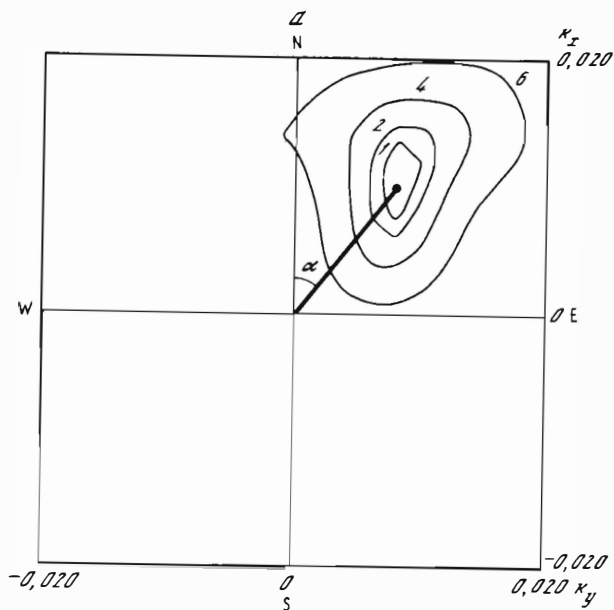


Рис. 5.13. Диаграммы пространственно-временной спектральной плотности мощности  $P^p(\omega, K)$  для временных интервалов 220–360 с (а) и 360–500 с (б). Точкой указано положение максимума  $P^p$ ; числа у кривых – величины спада  $P^p$  относительно максимума

Далее строится осредненная по всем блокам оценка спектральной плотности мощности

$$\hat{f}_{jl}(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M S_{jn}(\omega) S_{1n}^*(\omega). \quad (5.169)$$

Зная  $\hat{f}_{jl}$ , можно оценить пространственно-временную спектральную плотность мощности  $P(\omega, \mathbf{k})$ , где  $\mathbf{k}$  – векторное волновое число. Направление  $\mathbf{k}$  по отношению к странам света характеризует азимут подхода волны, величина  $\omega/|\mathbf{k}|$  – фазовую скорость волнового пакета, проходящего через группу. В качестве стандартной оценки  $\hat{P}(\omega, \mathbf{k})$  принята

$$\hat{P}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{K^2} \sum_{j, l=1}^K w_j w_l^* \hat{f}_{jl}(\omega) \exp[-i \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l)], \quad (5.170)$$

где  $w_j$  – веса, контролирующие форму окна по волновому числу (обычно  $w_j \equiv 1$ );  $\mathbf{x}_j$  – радиус-вектор, характеризующий расположение  $j$ -го прибора группы.

Величина  $\hat{P}(\omega, \mathbf{k})$  является асимптотически несмещенной состоятельной оценкой истинной спектральной плотности. Это означает, в частности, что когда через группу проходит плоская гармоническая волна вида  $\exp[i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})]$ , оценка  $\hat{P}(\omega, \mathbf{k})$  стремится к дельта-функции  $\delta(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$  при  $M \rightarrow \infty$ . Таким образом, диаграмма мощности (при фиксированной  $\omega$ ) в этом случае имеет острый максимум при  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ .

Однако ограниченность интервала записи, содержащего сигнал, понижает разрешающую способность оценки  $\hat{P}(\omega, \mathbf{k})$ . В связи с этим была предложена оценка  $\hat{P}'(\omega, \mathbf{k})$ , обладающая более высоким разрешением, чем  $\hat{P}(\omega, \mathbf{k})$ , которая строится как

$$P'(\omega, \mathbf{k}) = \left\{ \sum_{j, l=1}^K \hat{f}_{jl}^{-1}(\omega) \exp[i \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l)] \right\}^{-1}. \quad (5.171)$$

Обобщенная теория таких оценок дана в [75].

В качестве примера использования такой оценки для анализа поверхностных волн были рассмотрены диаграммы  $P'(\omega, \mathbf{k})$ , приведенные на рис. 5.13. Они получены по записям, показанным на рис. 5.12, а, и соответствуют двум неперекрывающимся интервалам времени в 140 с для частоты 0,05 Гц. Каждый интервал разделен на два блока. Диаграмма представляет собой карту изолиний оценок  $P'$  на координатной плоскости компонент волнового числа  $k_x, k_y$  (оси  $x$  направлены на север, ось  $y$  – на восток). Видно, что в первом интервале максимум  $P'(\omega, \mathbf{k})$  приходится на значение азимута подхода  $\alpha = 45^\circ$  и фазовую скорость  $C = 3,51$  км/с. Этот интервал содержит основной сигнал, доминирующий в нем по амплитуде. В последующем интервале область максимума  $P'(\omega, \mathbf{k})$  растягивается в северо-западном направлении в связи с появлением последующих вступлений с существенно меньшими азимутами подхода при близких фазовых скоростях. Видно, что результаты двух видов анализа хорошо согласуются; временной анализ обеспечивает существенно лучшее разрешение по времени, чем спектральный, однако спектральный анализ дает лучшее разрешение по азимуту и особенно по фазовой скорости. Поэтому

данные различных способов изучения сигнала существенно дополняют друг друга.

Другие подходы к анализу данных пространственных групп приборов рассмотрены в [170].

## Глава 6

### МЕТОДЫ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ НАБЛЮДЕНИЙ

#### § 6.1. Обзор современных подходов к решению обратной задачи поверхностных волн

Измеренные характеристики поверхностных волн (фазовые и групповые скорости, амплитудные и фазовые спектры) используются в сейсмологической интерпретации для решения разнообразных задач, таких, как исследование распределения скоростных и поглощающих характеристик среды по вертикали и по горизонтальным направлениям, а также изучение механизма очагов землетрясений. Поскольку данная монография посвящена рассмотрению особенностей полей поверхностных волн в горизонтально-неоднородных средах, мы будем здесь в основном освещать те аспекты интерпретации, которые связаны с горизонтальной неоднородностью среды. Сюда относятся собственно исследования горизонтальных вариаций структуры верхней толщи Земли и, кроме того, эффекты, которые вызываются горизонтальной неоднородностью и которые следует учитывать при решении других задач (например, определение механизма очага).

При решении обратных задач, использующих в качестве исходных данных дисперсию скоростей поверхностных волн, следует выделять две проблемы: одна связана с построением так называемых локальных дисперсионных кривых по данным, отвечающим трассам, вдоль которых скорости поверхностных волн могут существенно изменяться; вторая — построение скоростного разреза по полученным локальным дисперсионным кривым. Вторая проблема является уже собственно обратной задачей в рамках горизонтально-однородной среды, и, как было выше указано, на ней мы не будем подробно останавливаться, тем более что методы решения этой задачи освещены в ряде других работ [3, 19, 20, 44, 63, 171].

Задачей картирования горизонтальных неоднородностей коры и верхней мантии по данным о различии дисперсии поверхностных волн на разных трассах начали заниматься достаточно давно. Еще в 50-х годах были выявлены принципиальные различия в строении земной коры океанов и континентов по данным о групповых скоростях поверхностных волн на океанических и континентальных трассах. При этом использовался простейший подход, который, кстати, не потерял своего значения и до настоящего времени. Он заключался в том, что для интерпретации выбирались трассы, пересекающие однородные в тектоническом отношении области. Но, конечно, это можно было сделать только для крупных, резко различающихся по структуре регионов и при этом получать только осред-

ненные данные для достаточно протяженных трасс. Использование дифференциального метода (по данным двух достаточно близко расположенных станций) для определения как фазовых, так и групповых скоростей дало возможность определить дисперсионные кривые и соответственно по ним вертикальное распределение скоростей сейсмических волн и плотности для небольших по размерам территорий. Недостаток этого подхода состоит в том, что он позволяет анализировать данные только для тех участков Земли, где расположены сейсмические станции. Кроме того, следует отметить, что значения скоростей, получаемые дифференциальным методом, содержат значительные погрешности.

Использовать значительно большее количество материала наблюдений можно, если включать в интерпретацию данные, получаемые на "смешанных" трассах, т.е. таких, которые пересекают разнородные по своему строению регионы. Если в трассах соотношение между участками, соответствующими разным регионам, различно, то по временам пробега вдоль таких трасс можно оценивать скорости в каждом регионе. Такая возможность основана на предположении, что в пределах каждого региона-блока среда горизонтально однородна, граница между ними известна, а эффектами преломления и искажения фазовых характеристик на границах можно пренебречь. Простейший вариант такой интерпретации основан на методике последовательного исключения трасс.

Пусть имеется всего два региона (I и II); две трассы, пересекающие их различным образом, имеют длины  $l_1$  и  $l_2$ . Доли региона I в трассах 1 и 2 составляют  $q_1$  и  $q_2$  ( $q_1 \neq q_2$ ). Если времена пробега (групповые или фазовые) волны на частоте  $\omega$  вдоль трасс 1 и 2 равны соответственно  $t_1$  и  $t_2$ , то по ним нетрудно найти скорости  $v_1$  и  $v_2$  (соответственно групповые или фазовые) в каждом из регионов на этой частоте:

$$v_1 = (q_1 - q_2) / \left[ \frac{t_1}{l_1} (1 - q_2) - \frac{t_2}{l_2} (1 - q_1) \right],$$

$$v_2 = (q_2 - q_1) / \left[ \frac{t_1}{l_1} q_2 - \frac{t_2}{l_2} q_1 \right].$$
(6.1)

Такая методика "исключения трасс" легко обобщается на большое число регионов. Если число трасс существенно превышает число блоков, естественно применять статистические подходы, учитывающие присутствие в измерениях случайных ошибок наблюдений.

Пусть имеется  $N$  блоков и  $J$  трасс и пусть  $\Delta_{nj}$  — расстояние, которое проходит волна вдоль  $j$ -й трассы в  $n$ -м блоке;  $\epsilon_j$  — случайная ошибка измерения времени пробега  $t_j$  вдоль  $j$ -й трассы. Тогда

$$t_j = \sum_{n=1}^N \Delta_{nj} v_n^{-1} + \epsilon_j, \quad 1 \leq j \leq J,$$
(6.2)

где  $v_n$  — неизвестная скорость в  $n$ -м блоке. Наиболее часто для решения этой задачи — определения скоростей  $v_n$  — при  $J \gg N$  применяют метод наименьших квадратов, т.е. минимизируют среднеквадратичную невязку



расчетных и наблюдаемых времен пробега

$$\sum_{j=1}^J (t_j - \sum_{n=1}^N \Delta_{nj} v_n^{-1})^2$$

или его аналоги, в которых учитываются свойства случайных ошибок измерений времени.

Такой подход к оценке групповых скоростей в разнородных в тектоническом отношении блоках (платформах, щитах, океанах, тектонических районах) использовался в ряде работ [17, 62, 133, 155, 165, 182, 192, 194], и с его помощью были получены основные сведения о различиях в структуре этих блоков.

Существенным недостатком этого метода, некоторые аспекты применения которого рассмотрены в § 6.1, является отсутствие ограничений на "поведение" неизвестных: для плохо представленных наблюдениями блоков они могут оказаться вне пределов физически возможных значений скорости, а также ограничений на абсолютные значения "невязки", — для некоторых трасс они могут превышать допустимые в реальных ситуациях. От этих недостатков свободен метод квадратичного программирования, рассмотренный в § 6.2. Сравнение эффективности двух методов на модельной задаче, приближающейся по сложности к реальной, проведено в § 6.3.

В некоторых случаях задача исследования может ставиться по-другому: на основании предыдущих региональных исследований известны скорости в блоках, но неизвестна конфигурация границ между ними. Такая задача также решается путем минимизации среднеквадратичной невязки, но в качестве неизвестных параметров здесь будут являться не скорости  $v_n$ , а параметры границ блоков, от которых зависят расстояния  $\Delta_{nj}$ , проходимые волной в каждом из блоков. Задача в такой постановке решалась в [80].

Недостатком указанных подходов является использование в них жестких ограничений (либо на конфигурацию границ, либо на значения скоростей в отдельных блоках), что не позволяет извлечь всю информацию о горизонтальных неоднородностях, которую несут данные о скоростях поверхностных волн.

Первая попытка проследить горизонтальные неоднородности вдоль поверхности земного шара без привлечения какой-либо дополнительной информации только на основании данных о скоростях поверхностных волн вдоль различных, пересекающихся между собой трасс была сделана в [184]. Было предложено представлять величину, обратную групповой скорости  $U(\theta, \varphi)$  (для заданного периода  $T = 2\pi/\omega$ ), в виде разложения по сферическим функциям

$$\frac{1}{U(\theta, \varphi)} = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) (A_{mn} \cos m\varphi + B_{mn} \sin m\varphi), \quad (6.3)$$

где  $\theta, \varphi$  — сферические координаты;  $P_n^m(x)$  — присоединенные полиномы Лежандра. Используя такое разложение, можно представить фазовое или групповое время пробега волны по заданной трассе в виде линейной функции неизвестных коэффициентов разложения  $A_{mn}, B_{mn}$ , если трассу  $\mathcal{L}_j$

приближенно принять за дугу большого круга:

$$t_j = \int \frac{ds}{v_j} = \int \sum_{m, n} (A_{mn} \cos m\varphi + B_{mn} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta) ds =$$

$$= \sum_{m, n} (A_{mn} \Phi_{mn}^j + B_{mn} \Psi_{mn}^j), \quad (6.4)$$

где  $V$  – фазовая или групповая скорость;

$$\Phi_{mn}^j = R_0 \int_{(\theta_{0j}, \varphi_{0j})}^{(\theta_{1j}, \varphi_{1j})} P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi d\gamma,$$

$$\Psi_{mn}^j = R_0 \int_{(\theta_{0j}, \varphi_{0j})}^{(\theta_{1j}, \varphi_{1j})} P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi d\gamma, \quad (6.5)$$

причем интегрирование в (6.5) производится по дуге большого круга ( $d\gamma$  – элемент дуги) от источника с координатами  $\theta_{0j}, \varphi_{0j}$  до станции  $(\theta_{1j}, \varphi_{1j})$ . Величины  $\Phi_{mn}^j, \Psi_{mn}^j$  могут быть таким образом вычислены для каждой трассы, так что коэффициенты разложения  $A_{mn}, B_{mn}$  определяются путем минимизации величины

$$\sum_j [t_j - \sum_{m, n} (A_{mn} \Phi_{mn}^j + B_{mn} \Psi_{mn}^j)]^2.$$

Этим методом было исследовано распределение групповых и фазовых скоростей рэлеевских волн для разных периодов [1, 105, 167, 168], что позволило проследить изменение горизонтальных неоднородностей в верхней мантии с глубиной.

Такой метод может быть использован как для всей Земли в целом, так и для отдельных ее областей. Очевидно, что в случае, когда используются данные по трассам, охватывающим всю поверхность земного шара, разложение (6.3) является естественным и единственно возможным. В случае же, когда исследуется распределение скоростей на ограниченной территории, для аппроксимации могут быть использованы и другие представления. Например, если рассматриваемый участок поверхности имеет относительно небольшие размеры, то соответствующим выбором полюса сферической системы координат его можно расположить в окрестности экватора, и тогда координаты  $\theta, \varphi$  будут близки к прямоугольным, так что величину  $V^{-1}(\theta, \varphi)$  можно аппроксимировать обычным полиномом от переменных  $\theta, \varphi$ . В общем выбор аппроксимирующей функции определяется как размерами исследуемой области, так и априорными представлениями о характере изменения скорости.

Таким образом, хотя данный метод и не использует ограничений, накладываемых в описанном выше подходе на количество блоков и их конфигурацию, он тоже не свободен от ограничений, вносимых априорными представлениями о распределении скорости. К ним относятся, с одной стороны, вид функции, аппроксимирующей  $V^{-1}(\theta, \varphi)$ , а с другой – число членов разложения, которым мы ограничиваемся. Число членов разложения диктуется количеством используемых данных: чтобы для оценки коэффициентов можно было применять метод наименьших квадратов,

число неизвестных параметров должно быть заведомо меньше числа исходных данных. Но при этом не учитывается разрешающая способность данных: трассы обычно неравномерно покрывают исследуемую поверхность, и там, где густота трасс больше, распределение скорости можно получить более детально, чем в областях, пересекаемых малым количеством трасс. А решение, которое строится таким методом, дает всюду одинаковую детальность распределения скоростей. В этом заключается недостаток используемого метода.

Чтобы избавиться от этого недостатка, можно для оценки распределения скоростей применять метод обобщенной линейной инверсии, или, как его иначе называют, метод сингулярных разложений (МСР) [90, 98], который начинает широко использоваться при решении различных обратных задач геофизики. В применении к решению данной задачи он будет состоять в следующем.

Величина, обратная групповой или фазовой скорости  $V^{-1}(\theta, \varphi)$ , представляется в виде суммы некоторого среднего значения  $V_0^{-1}$  и искомой поправки  $\delta(V^{-1}(\theta, \varphi)) = \kappa(\theta, \varphi)$ : Разобьем исследуемую территорию на большое число ячеек: их число может быть больше, чем число трасс, но в то же время таково, чтобы имелось достаточное число ячеек, пересекаемых более чем одной трассой. В каждой ячейке будем  $\kappa(\theta, \varphi)$  считать постоянной, равной  $\kappa_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ). С точностью до случайной ошибки

время пробега по  $j$ -й трассе ( $j = 1, 2, \dots, J$ ) будет равно  $\sum_{n=1}^N \Delta_{nj} (v_0^{-1} + \kappa_n)$  или

$$\delta t_j = \sum_{n=1}^N \Delta_{nj} \kappa_n, \quad (6.6)$$

где  $\delta t_j$  — разность между наблюдаемым на  $j$ -й трассе временем пробега и временем в горизонтально-однородной среде со скоростью  $v_0$ . Для решения системы (6.6) при  $J > N$  можно использовать метод сингулярных разложений. Но здесь, конечно, надо иметь в виду, что решение будет получаться только для тех ячеек, которые пересекаются хотя бы одной трассой (при разбиении на большое число ячеек через некоторые из них не пройдет ни одна трасса). А для тех ячеек, для которых решение может быть построено, оно получается минимальным по норме, т.е. таким, для которого

$\sum_n \kappa_n^2 = \min$ . Таким образом, данный метод будет давать решение, хорошо

отражающее реальное распределение скоростей в случае слабой горизонтальной неоднородности. Если число трасс окажется больше числа выбранных ячеек, получаемое этим методом решение совпадает с решением по методу наименьших квадратов. Преимуществом же такого "обобщенного" подхода к решению обратной задачи является то, что в его рамках можно оценивать степень разрешенности получаемого решения. Некоторые аспекты метода сингулярных разложений рассмотрены в § 6.1; в целом он достаточно подробно освещен в литературе [3, 98, 146, 198].

Другим возможным подходом к решению задачи об оценке распределения скорости  $V(\theta, \varphi)$  по выборке данных о временах пробега волн по различным трассам является метод Бэкуса—Гилберта [107, 108], обоб-

щенный в [96, 99, 201], на случай двумерного распределения скорости. Этот метод не использует априорных предположений о характере распределения скорости, таких, как разбиение на блоки, выбор аппроксимирующей функции. С его помощью строится распределение сглаженного значения скорости, осредненного по некоторой области, размеры которой определяются количеством и взаимным расположением трасс в используемой выборке данных. Степень сглаженности решения будет, очевидно, меняться от точки к точке: в той части исследуемой области, которая пересекается меньшим числом трасс, решение будет получаться более сглаженным, чем там, где проходит много трасс и где эти трассы дифференцированы. Этот метод более подробно описан в § 6.4. Последующие параграфы 6.5–6.7 посвящены более частным вопросам интерпретации наблюдений поверхностных волн в горизонтально-неоднородных средах — измерению поглощения, проявлениям кажущейся анизотропии, постановке обратной задачи об источниках сейсмических колебаний.

### § 6.2. Применение методов наименьших квадратов и сингулярных разложений

Сформулируем следующую задачу. Пусть задана регионализация, разбивающая исследуемую область на  $N$  регионов и  $J$  наблюдений  $t_j(\omega)$  ( $j = 1, 2, \dots, J$ ) — фазовых или групповых времен пробега, полученных по записи поверхностной волны на  $j$ -й трассе в диапазоне частот  $\omega_n < \omega < \omega_k$ . Необходимо определить дисперсионные кривые  $v_n(\omega)$  для каждого из  $N$  регионов ( $n = 1, 2, \dots, N$ ). Как правило,  $N < J$  и даже  $N \ll J$ .

Решение поставленной задачи для произвольной частоты в пределах изучаемого диапазона можно искать путем минимизации суммы квадратов разностей наблюдаемых и теоретических времен пробега, т.е. найти минимум по всем  $v_n^{-1}$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) величины

$$\sum_{j=1}^J \left( t_j - \sum_{n=1}^N \frac{\Delta_{nj}}{v_n} \right)^2. \quad (6.7)$$

Здесь  $\Delta_{nj}$  — отрезок  $j$ -й трассы, приходящийся на  $n$ -й регион;  $v_n$  — искомые региональные скорости на частоте  $\omega$ . Минимизация (6.7) по переменным  $v_n^{-1}$  есть решение сформулированной выше задачи методом наименьших квадратов (МНК).

Минимум (6.7) находится из системы нормальных уравнений [78]. Введем матрицу  $\mathbf{A} = \{a_{nj}\}$ , такую, что  $a_{nj} = \Delta_{nj}$ , и векторы  $\mathbf{x} = \{x_n\}$ ,  $x_n = v_n^{-1}$ ;  $\mathbf{t} = \{t_j\}$ . Тогда систему нормальных уравнений запишем в виде

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{t}, \quad (6.8)$$

где  $\mathbf{t}$  — значок транспонирования. Матрица  $\mathbf{H} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$  симметрическая, и все ее собственные значения  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$ . Если  $\mathbf{H}$  — положительно определенная матрица ( $\lambda_n > 0$ ), то система (6.8) имеет единственное решение; если  $\mathbf{H}$  вырождена (существует  $\lambda_n = 0$ ), то решений бесконечно много (решения образуют подпространство размерности единица и более). При решении методом МНК может возникнуть ситуация, когда матрица  $\mathbf{H}$  плохо обусловлена, т.е. близка к вырожденной. Такое

возможно, например, если время пробега волны через  $n$ -й регион  $\Delta_{nj}/v_n$  мало для всех трасс по сравнению с временами для остальных регионов (присутствует регион с малыми размерами) либо времена пробега для значительного числа трасс практически совпадают. В этом случае результат носит случайный характер (влияют машинные ошибки округления) и близок к некоторому решению из подпространства, базис которого образуют собственные векторы с минимальными  $\lambda_n$ . Для того чтобы избежать этой неприятной ситуации, необходимо исследовать собственные значения матрицы  $\mathbf{H}$  и считать, что  $\mathbf{H}$  вырождена, если  $\lambda_N / \sum_{n=1}^N \lambda_n$  меньше определенного порогового значения.

Следует отметить [3, 90], что при минимизации (6.7) предпочтительнее с точки зрения точности счета и простоты проверки вырожденности матрицы  $\mathbf{H}$  пользоваться методом сингулярных разложений. Учитывая, что выражение (6.7) есть норма  $\|t - \mathbf{A}x\|$  вектора  $t - \mathbf{A}x$ , рассмотрим следующую задачу: минимизировать  $\|t - \mathbf{A}x\|$  при условии, что  $\|x\|$  минимальна. Минимальность нормы вектора  $x$  означает, что в пространстве решений берется единственное решение, обладающее минимальной нормой [90]. Метод сингулярных разложений позволяет получить сингулярное разложение матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T,$$

где  $\mathbf{U}$  – унитарная ( $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{E}$ ) матрица размерности  $J \times K$ , состоящая из  $K$  столбцов, образующих базис в пространстве столбцов матрицы  $\mathbf{A}$ ;  $\mathbf{V}$  – унитарная ( $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{E}$ ) матрица размерности  $N \times K$ , состоящая из  $K$  столбцов, образующая базис в пространстве строк матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{\Lambda} = \left\| \begin{array}{ccc} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \\ 0 & & \cdot \\ & & & \sigma_k \end{array} \right\|$$

– сингулярная (диагональная) матрица;  $\sigma_i$  – сингулярные числа,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k > 0$ ;  $K$  – ранг матрицы  $\mathbf{A}$ , причем  $\sigma_n^2 = \lambda_n$ . Если ранг матрицы  $K$  равен  $N$  ( $K = N$ ), то решение поставленной задачи единственно, совпадает с решением по методу МНК и дается формулой

$$x = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}^T t. \quad (6.9)$$

Если  $K < N$ , то вектор, минимизирующий  $\|t - \mathbf{A}x\|$  и обладающий минимальной нормой, также определяется (6.9), где матрица  $\mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}^T = \mathbf{A}^+$  – псевдообратная к матрице  $\mathbf{A}$ .

Данная методика позволяет учитывать априорную информацию о скоростях в случае, если  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  вырождена ( $K < N$ ). Это достигается за счет того, что обычно уравнения (6.6) редуцируются, т.е. ищется не непосредственно решение, а поправки  $\delta(x_n)$  к заданным значениям  $x_{0n} = v_{0n}^{-1}$ . В этом случае невязка принимает вид

$$\delta t_j = t_j - \sum_{n=1}^N \frac{\Delta_{nj}}{v_{0n}} = \sum_{n=1}^N \Delta_{nj} \delta(x_n) + \epsilon_j.$$

Решение МСР обеспечивает минимизацию

$$\sum_{j=1}^N \left( \delta t_j - \sum_{n=1}^N \Delta_{nj} \delta(x_n) \right)^2 \quad (6.10)$$

при условии

$$\sum_{n=1}^N |\delta(x_n)|^2 = \min. \quad (6.11)$$

Если  $K < N$ , то условие (6.11) обеспечивает нахождение решения  $x_n$ , не слишком сильно отклоняющегося от начального значения  $x_{0n}$ .

### § 6.3. Применение методов квадратичного программирования

В § 6.2 рассматривались задачи безусловной минимизации функционала (6.7), т.е. на область переменных  $x_n$ , образующих  $N$ -мерное пространство, не накладывалось никаких ограничений. Введем три типа линейных ограничений на область допустимых значений переменных  $x_n$ :

$$d_n \leq x_n \leq c_n, \quad \left| \sum_{n=1}^N \Delta_{nj} x_n - t_j \right| \leq \epsilon_j, \quad 0 \leq x_n.$$

Здесь индекс  $n$  принимает некоторые значения от единицы до  $N$ , а индекс  $j$  — от единицы до  $J$ .

Первое из ограничений задает максимальную и минимальную границы значений скоростей для определенных регионов, в частности может быть  $d_n = c_n$ ; это означает, что для  $n$ -го региона скорость известна:  $v_n = d_n^{-1}$ . Второе ограничение не позволяет расчетным временам слишком сильно отклоняться от измеряемых величин  $t_j$ ; третье ограничение  $x_n \geq 0$  отражает физическую постановку задачи — скорости не могут быть отрицательными величинами. Таким образом, совместная система ограничений на переменные  $x_n$  определяет в пространстве переменных некоторое выпуклое многогранное множество, являющееся областью допустимых значений переменных  $x_n$ . Рассмотрим задачу, относящуюся к области квадратичного программирования. Минимизировать

$$\sum_{j=1}^J \left( t_j - \sum_{n=1}^N \Delta_{nj} x_n \right)^2 \quad (6.12)$$

при условиях

$$d_n \leq x_n \leq c_n, \quad (6.13)$$

$$\left| \sum_{n=1}^n \Delta_{nj} x_n - t_j \right| \leq \epsilon_j, \quad (6.14)$$

$$0 \leq x_n. \quad (6.15)$$

Отметим, что в данной постановке построение региональных дисперсионных кривых позволяет учитывать следующие факторы: задание априорной информации о границах возможных значений скоростей для некоторых регионов (ограничения (6.13)), учет природы ошибок наблюдаемых диспер-

сионных характеристик, статистическую обоснованность полученного решения. Как это будет показано далее, разумно выбирая необходимые ограничения, можно существенно сузить неопределенность в построении дисперсионных кривых по сравнению с классическим методом наименьших квадратов и его аналогами.

**Некоторые элементы теории квадратичного программирования.** Рассмотрим следующую задачу квадратичного программирования. Минимизировать

$$c^T x + \frac{1}{2} x^T H x \quad (6.16)$$

при условиях

$$Ax \leq b, \quad (6.17)$$

$$0 \leq x_j. \quad (6.18)$$

Здесь  $c$ ,  $x$  –  $N$ -мерные векторы;  $b$  –  $p$ -мерный вектор;  $A$  – матрица ограничений размерности  $p \times N$ ;  $H$  – симметрическая матрица размерности  $N \times N$ . Легко заметить, что задача (6.12) – (6.15) приводится к задаче (6.16)–(6.18), причем матрица  $H$  имеет собственные значения  $\lambda_n \geq 0$ .

Обозначив векторы множителей Лагранжа для условий  $Ax \leq b$  и  $x_j \geq 0$  соответственно через  $u$  и  $v$ , а вектор дополнительных переменных через  $y$ , можно записать условия Куна–Таккера в виде [12]:

$$Ax + y = b, \quad -Hx - A^T u + v = c. \quad (6.19)$$

$$x^T v = 0, \quad u^T y = 0, \quad x_j, y_j, u_j, v_j \geq 0.$$

Условия (6.19) являются необходимыми и достаточными для решения задачи (6.16)–(6.18). В случае положительной определенности матрицы  $H$  решение единственно, в остальных случаях единственность не гарантируется.

Обозначим

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -A \\ A^T & H \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix}$$

и перепишем условия (6.19) в виде задачи линейной дополнителности: найти такие неотрицательные векторы  $w$  и  $z$ , чтобы были справедливы следующие соотношения:

$$w - Mz = q, \quad (6.20)$$

$$w_j \geq 0, \quad z_j \geq 0 \quad \text{при } j = 1, \dots, p,$$

$$w_j z_j = 0,$$

Здесь  $(w_j, z_j)$  – пара дополнительных переменных, причем одна переменная из пары является базисной (ненулевой), а вторая обязательно равна нулю (небазисная переменная). Процедура нахождения решения системы (6.20) описана в [12]. Возможны различные окончания работы процедуры: решение либо найдено, либо не может быть найдено. Последнее связано с тем, что в общем случае (6.20) может иметь неограниченное число реше-

ний либо вообще не иметь решения. Решение задачи (6.12) – (6.18) в случае, когда матрица  $\mathbf{H}$  – положительно определенная, не может быть неограниченным, следовательно, решение не может быть найдено только тогда, когда множество, определяемое (6.17), (6.18), пусто. Данный алгоритм сходится к решению за конечное число шагов при положительно определенной матрице  $\mathbf{H}$ , а также при положительно полуопределенной матрице  $\mathbf{H}$  с положительными диагональными элементами.

**Линейное программирование.** Как частный случай задачи (6.16) – (6.18), когда матрица  $\mathbf{H}$  равна нулю, возникает задача линейного программирования: минимизировать (или максимизировать) каждое из неизвестных  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) при ограничениях (6.17), (6.18). Эта задача решается симплекс-методом [24] и менее эффективно в рамках описанного выше алгоритма квадратичного программирования. Найденные  $2N$  значений  $x_n \min$  и  $x_n \max$  определяют в  $N$ -мерном пространстве минимальный параллелепипед  $V = \{x; x_n \min < x_n < x_n \max\}$ , содержащий многогранное множество решений. Решение задачи квадратичного программирования находится внутри или на границе множества  $V$ ; решение МНК в силу статистических свойств ошибок измерений с высокой степенью вероятности находится внутри множества  $V$ .

#### § 6.4. Моделирование экспериментальных данных в блочной структуре

Моделирование экспериментальных данных с целью опробования различных методов решения обратных задач целесообразно проводить так, чтобы модельная задача обладала всеми основными чертами реальной обратной задачи. К таким чертам при построении региональных наблюдаемых кривых относятся: сложность контуров региональных блоков и резкое различие в их размерах, расположение источников в основном по периферии изучаемой области, ограниченное количество трасс, наличие ошибок измерений. Моделирование, как и решение реальной обратной задачи, начинается с выбора системы трасс станция–источник и разделения изучаемой континентальной области на регионы с различным глубинным строением. Последняя процедура опирается на априорную информацию о тектоническом строении области. Затем для каждой выбранной трассы, которую мы предполагаем совпадающей с дугой большого круга, необходимо найти долю пути, приходящуюся на каждый регион, пересекаемый трассой. Эту задачу решает алгоритм разбиения геодезических на участки, описанный в [13]. Далее в реальной задаче переходят к оценке данных о временах пробега поверхностных волн вдоль выбранных трасс. В модельной задаче эти времена необходимо еще рассчитать. Для этого необходимо каждому региону приписать скоростную и плотностную модель и рассчитать для нее дисперсионные кривые, а затем, пользуясь ими, найти суммарные времена пробега волн по трассам для выбранных значений периода. При моделировании необходимо также предусмотреть возможность имитации случайных ошибок измерений.

**Расчет времени пробега по трассе.** Пусть в исследуемой области выделено  $N$  регионов, для каждого из которых справедлива гипотеза о горизонталь-



ной однородности, и определена некоторая система из  $J$  трасс эпицентр—станция, причем трассы целиком содержатся в исследуемых регионах. Принимается ряд упрощающих предположений: волны распространяются по дугам большого круга между эпицентром и станцией; игнорируются все эффекты на контактах регионов. Тогда суммарное время пробега по трассе равно суммарному времени пробега волны по отрезкам пути, приходящимся на отдельные регионы. Кроме того, исключаются трассы, которые частично проходят по границе двух регионов. Если это происходит, то волна движется со скоростью, наибольшей для граничащих регионов, и возможны искривления трасс. Должны быть исключены из рассмотрения отраженные волны, поскольку они распространяются не по дугам большого круга. Все это говорит о том, что выбранную систему трасс необходимо увязать с регионализацией, что может быть достигнуто визуальным способом после нанесения системы трасс на карту регионов.

Зная скорости  $v_n$  в тех регионах, которые пересекает трасса, и длины отрезков  $j$ -й трассы  $\Delta_{nj}$ , приходящиеся на каждый из регионов, можно представить время пробега  $t_j$  вдоль трассы для фиксированного периода  $T$  по формуле (6.2)

$$t_j(T) = \sum_{n=1}^N \frac{\Delta_{nj}}{v_n(T)} + \epsilon_j(T).$$

Сумма, стоящая в правой части, — теоретическое время пробега, а  $\epsilon_j(T)$  — случайная ошибка, распределенная по известному закону и моделирующая реальную ошибку измерений времени пробега, связанную как с самой методикой измерений, так и с эффектами на границах регионов. Природа реальных ошибок измерений времени достаточно сложна и в настоящее время еще полностью не изучена. Некоторые авторы считают ошибки распределенными по нормальному закону. Это вряд ли справедливо, поскольку большие ошибки в определении времен обычно связаны с сильными помехами на записи, и такую запись интерпретатор обычно исключает из дальнейшего рассмотрения. Поэтому функция плотности распределения ошибки вне определенного ограниченного интервала равна нулю.

Исходя из этого, ошибки  $\epsilon_j(T)$  можно имитировать следующим образом:

$$\epsilon_j(T_k) = \sigma_j(T_k) \xi_k, \quad (6.21)$$

где  $\xi_k$  — случайная величина с математическим ожиданием  $M \xi_k = 0$  и ковариационной матрицей

$$\text{cov}(\xi_m, \xi_n) = \begin{cases} 1 - \frac{|m-n|}{2s+1}, & |m-n| \leq s, \\ 0, & |m-n| > s. \end{cases}$$

Здесь  $\xi_k$  умышленно сделаны зависимыми в ограниченном диапазоне периодов  $T$ , поскольку они наверняка зависят от ошибок на близлежащих частотах. Чисто случайную составляющую должен в основном устранять СВАН. Приведенная выше ковариационная матрица получится, если опре-

делить  $\xi_k$  как

$$\xi_k = \sum_{l=k-s}^{l=k+s} \xi_l / (2s+1), \quad \xi_l = \left( \sum_{j=1}^p \eta_j - \frac{p}{2} \right) / \sqrt{p/12}, \quad (6.22)$$

где  $\eta_j$  — независимые случайные величины, равномерно распределенные на интервале  $[0, 1]$ . Величина  $\sigma_j(T_k)$  характеризует среднеквадратичное отклонение случайной величины  $\xi_k$ , добавленное к истинному времени пробега. Ошибки, определяемые формулой (6.22), рассчитываются для некоторого дискретного набора периодов  $T_k$ .

**Описание модели Евразии.** Для оценки эффективности различных методик построения региональных дисперсионных кривых было промоделировано строение Евразии до глубин порядка 400 км.

Вся поверхность Земли была разбита на две части: территория Евразии и внешняя к ней. На основе тектонических и геоморфологических данных на территории Евразии был выделен 61 регион. Затем некоторые регионы были объединены, и в окончательной регионализации осталось 12 типов регионов: 1) древние щиты; 2) океанические области; 3) альпийский пояс; 4) островные дуги; 5) асейсмические платформы; 6) рифты; 7) осадочные котловины; 8) "Тибет"; 9) горные области; 10) "Китай"; 11) окраинные моря; 12) внутренние моря.

Под горными областями подразумеваются все районы с высокими горами (выше 3000 м), за исключением альпийского пояса. Океанические области захватывают примыкающие к Евразии части глубокого океана. Тибетское нагорье и центральная часть Китая, имеющая сложное глубинное строение, выделены в отдельные блоки и чисто условно названы "Тибет" и "Китай".

Конечно, данное разбиение, изображенное на рис. 6.1, весьма схематично и субъективно, и выделенные регионы не являются достаточно однородными применительно к реальной Земле. Однако для оценки возможностей описанных выше методов такая схематизация вполне приемлема.

Для каждого из 12 выделенных регионов по литературным данным [19, 20, 44, 127, 133, 155, 165, 190] были выбраны скоростные разрезы коры и верхней мантии. В интервале глубин от 400 до 1600 км для всех регионов использовались стандартная модель Земли Гутенберга и плотностная модель Буллена-А. Скоростные разрезы для поперечных волн в моделях регионов приведены на рис. 6.2.

Далее для каждого региона по описанным в гл. 2 алгоритмам решалась прямая задача: рассчитывались фазовые и групповые скорости волн Рэлея и Лява в сферической негравитирующей Земле в диапазоне периодов от 10 до 300 с. Фазовые и групповые скорости с помощью техники сплайнов приведены к значениям периодов от 10 до 300 с с шагом 10 с. В качестве иллюстрации на рис. 6.3 и 6.4 показаны графики фазовых и групповых скоростей основной моды волны Рэлея для 12 выделенных регионов.

На территории Евразии и примыкающих областей океана выбрано 11 реальных эпицентров землетрясений; из существующей сейсмической сети отобрано 28 оснащенных длиннопериодной аппаратурой сейсмических станций (см. рис. 6.1).

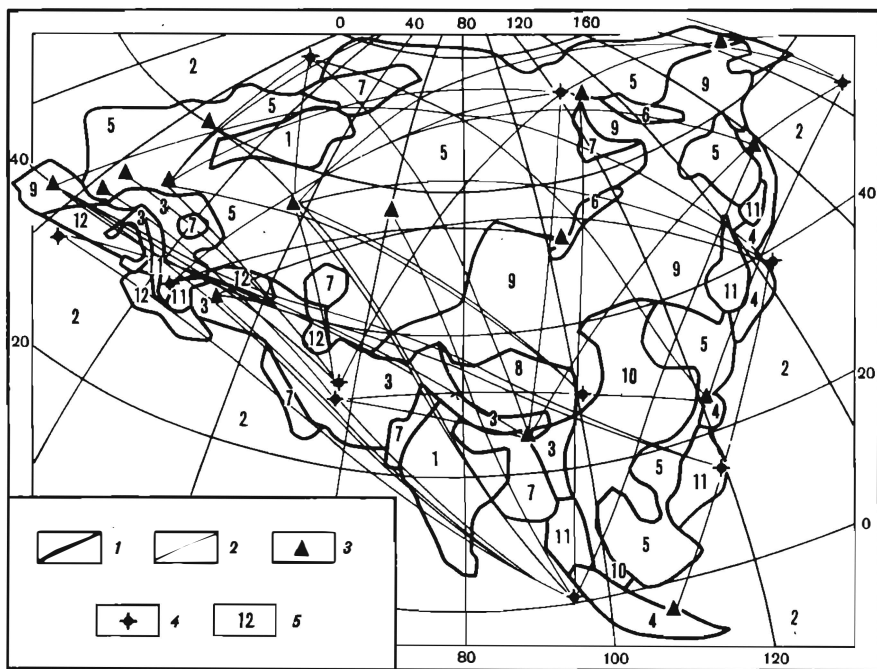


Рис. 6.1. Схема регионализации Евразии и система трасс

1 – граница региона; 2 – трасса; 3 – сейсмическая станция; 4 – эпицентр землетрясения; 5 – номер региона

Из 308 трасс эпицентр – станция было выбрано 40 трасс, пересекающих Евразию (см. рис. 6.1) по существенно различным направлениям. Для каждой трассы определялись длины отрезков  $\Delta_{nj}$ , принадлежащие отдельным регионам, и вычислялись времена пробега  $t_j$  ( $T_k$ ) для периодов 50, 100, 150 и 200 с. Имитировалось десять реализаций наблюдаемых времен  $t_j$ , отличающихся реализациями случайных погрешностей.

**Сопоставление методов наименьших квадратов и сингулярных разложений.** Рассмотрим возможности методов МНК и МСР на модельной ситуации, описанной выше. Анализ матрицы  $A$  методом МСР показал, что эта матрица – положительно определенная и ее сингулярные числа  $\sigma_i^2$  лежат в диапазоне 41–2144. Для каждого из десяти вариантов времен пробега определялись региональные дисперсионные кривые фазовых скоростей методами МСР и МНК. Наблюдается хорошее согласие результатов расчета: для всех десяти вариантов относительная погрешность методов

$$(v_{\text{МСР}} - v_{\text{МНК}})/v_{\text{МНК}} \approx 10^{-5}.$$

Результаты МНК для первого варианта приведены в табл. 6.1. Сравнение с исходными дисперсионными кривыми показывает, что наиболее точно дисперсионные характеристики определяются для протяженных регионов, таких, как асейсмические платформы, горные области, альпийский пояс, океанические области. Поскольку относительная точность исходных данных (времен пробега) колеблется в пределах от 0 до 2% в зависимости от

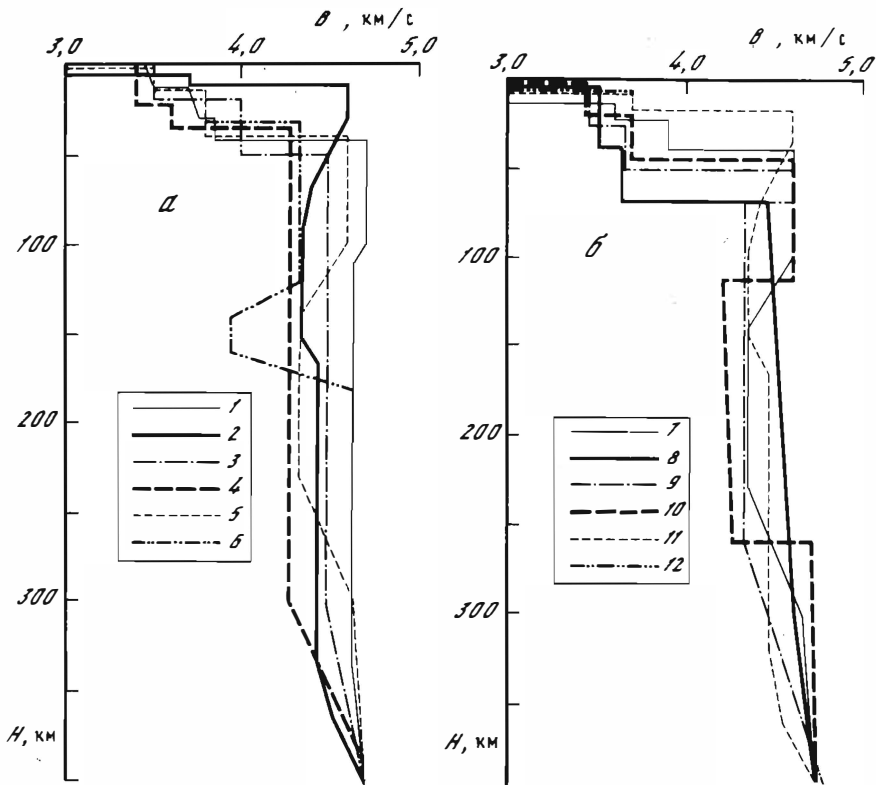


Рис. 6.2. Региональные модельные разрезы земной коры и верхней мантии для регионов 1–6 (а) и 7–12 (б)

а: 1 – древние щиты, 2 – океанические области, 3 – альпийский пояс, 4 – островные дуги, 5 – асейсмические платформы, 6 – внутриконтинентальные рифты; б: 7 – осадочные котловины, 8 – "Тибет", 9 – горные области, 10 – "Китай", 11 – окраинные моря, 12 – внутренние моря

вносимой ошибки и длины трассы, то точность определения дисперсионных характеристик для упомянутых выше регионов имеет тот же порядок – около 1%. Наиболее ненадежны определения для островных дуг и окраинных морей – их пересекает малое число трасс и приходящиеся на них доли трасс (см. рис. 6.1) невелики (не более 500 км). Ошибки для этих регионов сильно колеблются от варианта к варианту и могут достигать 20%. Так, для варианта I на периоде  $T = 150$  с они равны 18 и 11,1% соответственно. Это говорит о том, что при определении скоростей для нескольких неравноценных по площади регионов худших результатов следует ожидать для регионов небольших размеров. Могут быть получены и бессмысленные с физической точки зрения результаты – отрицательные скорости. Ошибки для остальных регионов колеблются в пределах 2–5%.

**Сопоставление квадратичного программирования с МНК.** Для тех же десяти вариантов модельных данных, которые использовались в МНК, региональные дисперсионные кривые определялись методом квадратичного

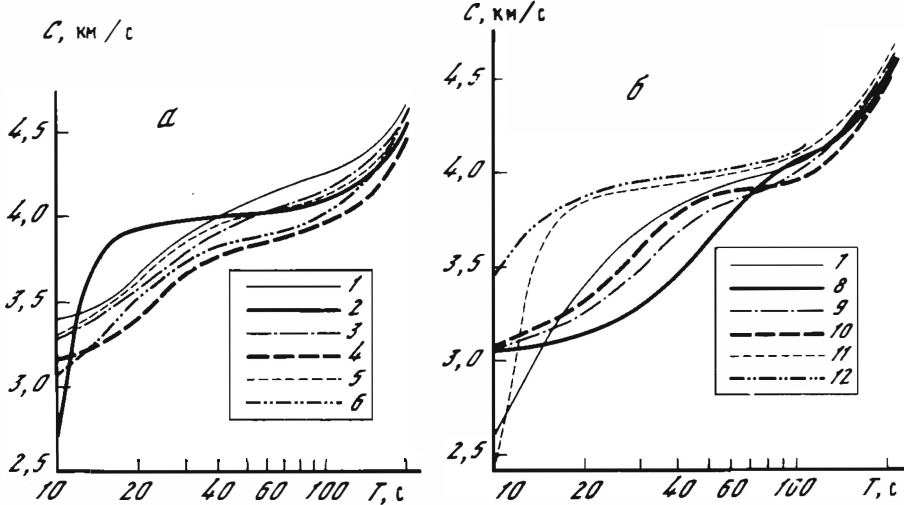


Рис. 6.3. Расчетные дисперсионные кривые фазовой скорости основной моды волны Рэлея в регионах 1–6 (а) и 7–12 (б)

Обозначения те же, что и на рис. 6.2

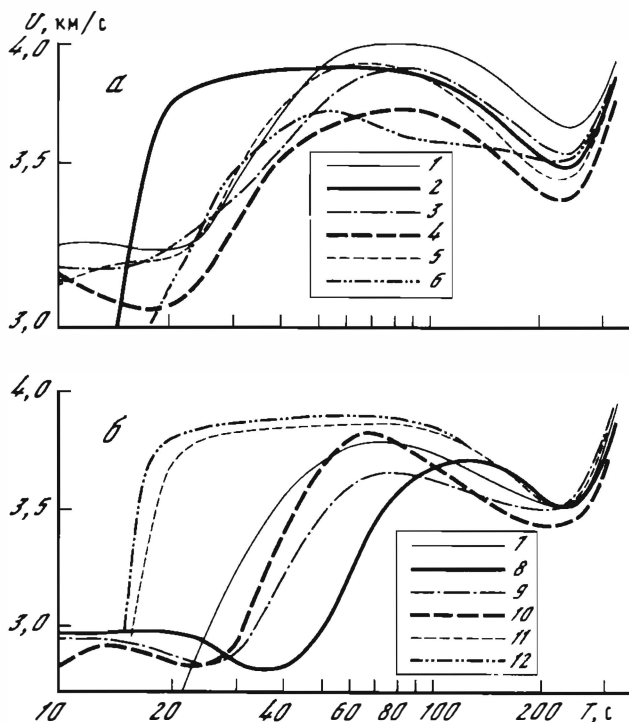


Рис. 6.4. Расчетные дисперсионные кривые групповой скорости основной моды волны Рэлея в регионах 1–6 (а) и 7–12 (б)

Обозначения те же, что и на рис. 6.2

программирования – минимизировалась функция (6.12) со следующим набором ограничений:

$$\left| \sum_{n=1}^{12} \Delta_{nj} x_n - t_j \right| \leq k \sigma_j, \quad (6.23)$$

$$v_n = x_n^{-1} \leq v_{\max} = v'_{\max} + 1,5 (v'_{\max} - v'_{\min}), \quad (6.24)$$

$$v_n = x_n^{-1} \geq v_{\min} = v'_{\min} - 1,5 (v'_{\max} - v'_{\min}). \quad (6.25)$$

Ограничения (6.23) не позволяют теоретическим временам пробега отличаться от наблюдаемых более чем на  $k\sigma_j$ , где параметр  $\sigma_j$  есть корень из дисперсии имитируемой ошибки наблюдений в формуле (6.21) для времени пробега волны вдоль  $j$ -й трассы. Поскольку в задачу данной работы не входил детальный анализ природы ошибок в зависимости от длины трассы и границ блоков, которые она пересекает, то  $\sigma_j$  полагались одинаковыми для всех  $j$  и равными 10 с для всех десяти вариантов модельных данных. Значение  $p$  (формула (6.22)) было принято равным шести; это означает, что значения  $t_j$  изменяются в пределах

$$t_j^0 - \frac{p\sigma_j}{2} \leq t_j \leq t_j^0 + \frac{p\sigma_j}{2}.$$

Здесь  $t_j^0$  – истинное время пробега вдоль  $j$ -й трассы;  $k$  – безразмерная величина, характеризующая отношение допустимой максимальной ошибки во времени пробега вдоль трассы к среднеквадратичному отклонению имитируемой ошибки. Длины трасс лежат в диапазоне от 3000 до 12 000 км, максимальная относительная ошибка, вносимая во время пробега вдоль трассы, составляет около 3% при  $k = 2$  и 2,2% при  $k = 1,5$ . Практика расчетов показывает, что при  $k > 3$  ограничения (6.23) практически не дают никакого выигрыша, поскольку многогранное множество слишком большое и решение МНК находится внутри этого множества. С другой стороны, при малых значениях  $k$  (порядка единицы и менее) множество, определяемое (6.23), может оказаться пустым, особенно если велики ошибки наблюдений. Чтобы избежать этого, необходимо увеличить  $k$  либо отбросить трассы, дающие самые большие ошибки.

Ограничения (6.24), (6.25) задают априорную информацию о допустимых значениях скоростей для регионов. Здесь  $v'_{\max}$  и  $v'_{\min}$  – максимальные и минимальные теоретические скорости (по всем регионам) для заданного периода  $T$ ,  $v_{\max}$  и  $v_{\min}$  расширяют диапазоны допустимых скоростей в 1,5 раза по сравнению с теоретическим диапазоном. Такие широкие границы позволяют исследовать решения, достаточно сильно отличающиеся от наших априорных представлений.

Задача квадратичного программирования (6.12) с ограничениями (6.23)–(6.25) решалась для четырех фиксированных значений периодов и всех десяти вариантов модельных данных. На рис. 6.5 приведены результаты определений фазовых скоростей для 12 исследуемых регионов Евразии, принятые значения параметров:  $\sigma = 10$  с,  $k = 2$ ,  $p = 6$ . По вертикальной оси отложены значения фазовых скоростей, ограниченные на каждом периоде  $v_{\min}$  и  $v_{\max}$  (на рисунке горизонтальные линии), по горизонталь-

Т а б л и ц а 6.1. Результаты модельных экспериментов методом МНК (вариант I)

Номер региона	T = 50 с			T = 100 с		
	$v^0$ , км/с	$v_{\text{МНК}}$ , км/с	Ошибка, %	$v^0$ , км/с	$v_{\text{МНК}}$ , км/с	Ошибка, %
1	4,115	4,096	0,5	4,261	4,278	-0,4
2	4,022	3,997	0,6	4,132	4,115	0,4
3	3,955	3,994	0,04	4,156	4,179	-0,5
4	3,839	3,745	2,4	3,980	4,080	-2,5
5	4,006	4,004	0,04	4,099	4,101	-0,05
6	3,848	3,858	-0,3	4,027	4,273	-5,4
7	3,911	3,827	2,2	4,065	4,044	0,5
8	3,668	3,650	0,5	4,067	4,045	0,5
9	3,802	3,769	0,9	4,012	4,066	-1,3
10	3,887	3,955	-1,7	3,988	4,064	-1,9
11	3,990	3,971	0,5	4,108	3,852	6,2
12	3,997	4,180	-4,6	4,106	4,108	-0,05
	3,668*			3,980*		
	4,115**			4,261**		

\* Минимальное по регионам значение  $v_{\text{min}}^0$ .\*\* Максимальное значение  $v_{\text{max}}^0$ .

ной оси — номера регионов ( $N$ ). Результаты счета не очень сильно отличаются от результатов МНК для достаточно протяженных регионов. Максимальный разброс скоростей для регионов 6, 11 сократился примерно в 2 раза и составляет 5–7%. Такой эффект дают ограничения (6.24), (6.25); ограничения (6.23) при  $k = 2$  слабо влияют на результат. Результаты для остальных трех периодов носят примерно такой же характер, за исключением того, что уменьшается разброс для регионов 4 и 7. Это связано с тем, что размер допустимой области для скоростей  $v_{\text{min}}$ ,  $v_{\text{max}}$  сужается с ростом периода  $T$ .

Будем варьировать параметры  $k$ ,  $\sigma$  и границы допустимых скоростей для отдельных регионов, используя все те же десять вариантов модельных данных. Для того чтобы можно было более объективно сопоставить точность определения региональных скоростей для различных методов, введем оценку среднеквадратичной ошибки определения скорости для каждого региона следующим образом:

$$\theta_n(v) = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^{10} (v_n^{(m)} - v_n^0)^2}{10}} / v_n^0 \cdot 100\%, \quad (6.26)$$

где  $m = 1, \dots, 10$ ;  $v_n^{(m)}$  — оценки скорости для  $n$ -го региона в  $m$ -й модели;  $v_n^0$  — истинные значения скоростей.

Для МНК и квадратичного программирования ( $\sigma = 10$ ,  $k = 2$ ,  $p = 6$ ) была вычислена оценка (6.26), которая приведена в табл. 6.4 (третий и

$T = 150 \text{ с}$			$T = 200 \text{ с}$		
$v^{\circ}$ , км/с	$v_{\text{МНК}}$ , км/с	Ошибка, %	$v^{\circ}$ , км/с	$v_{\text{МНК}}$ , км/с	Ошибка, %
4,415	4,423	-0,2	4,653	4,619	0,7
4,299	4,326	-0,6	4,572	4,497	1,7
4,327	4,372	-1,0	4,595	4,651	-1,2
4,158	3,993	4,0	4,446	4,831	-8,7
4,282	4,309	-0,6	4,566	4,552	0,3
4,277	5,046	-18,0	4,578	4,501	1,7
4,276	4,275	0,01	4,575	4,547	0,6
4,274	4,238	0,8	4,541	4,510	0,6
4,265	4,241	0,6	4,587	4,591	-0,1
4,201	4,357	-3,7	4,519	4,421	2,2
4,281	3,807	11,1	4,557	4,593	-0,8
4,278	4,475	-4,6	4,553	4,422	2,9
4,158*			4,446*		
4,415**			4,653**		

четвертый столбцы соответственно). Видно, что квадратичное программирование улучшает оценки для следующих регионов: островные дуги с 3,12 до 2,97%, внутриконтинентальные рифты с 5,32 до 4,47, "Китай" — с 2,01 до 1,74, окраинные моря с 7,59 до 5,5%. Для остальных регионов отмечены незначительные изменения в точности определения фазовых скоростей.

Введем дополнительную информацию о границах скоростей для регионов 4, 6, 7, 11, 12. Это регионы — наименьшие по размерам, их суммарная площадь составляет не более 10% от площади всей исследуемой территории. Зададим для них максимальную границу  $v_{n \max} = v_n^0 + 0,0025 v_n^0$ , а минимальную  $v_{n \min} = v_n^0 - 0,0025 v_n^0$ , что соответствует максимально допустимому разбросу скоростей всего лишь на 0,25%. Это — весьма жесткие ограничения: практически они эквивалентны точному заданию скоростей для этих регионов. При этом (см. табл. 6.2, четвертый столбец) точность определения скорости для наиболее протяженных регионов, таких, как асейсмические платформы, горные области, остается практически неизменной. Это говорит о том, что скорость в более крупных регионах достаточно хорошо определяется любым методом. Для регионов со средними размерами характерно понижение ошибки: древние щиты с 1,55 до 1,2%, альпийский пояс с 0,67 до 0,42%, "Китай" с 2,01 до 1,37%.

Усилим ограничения (6.23), задав  $k = 1,5$  (см. табл. 6.2, пятый столбец). При этом картина остается прежней: крупные регионы дают примерно такую же ошибку, для регионов средних размеров наблюдается дальнейшее понижение ошибки — древние щиты (регион 1) с 1,55 до 0,91%, океанические области (2) с 0,52 до 0,23%, альпийский пояс (3) с 0,67 до 0,30%, "Тибет" (8) с 1,17 до 0,57%.



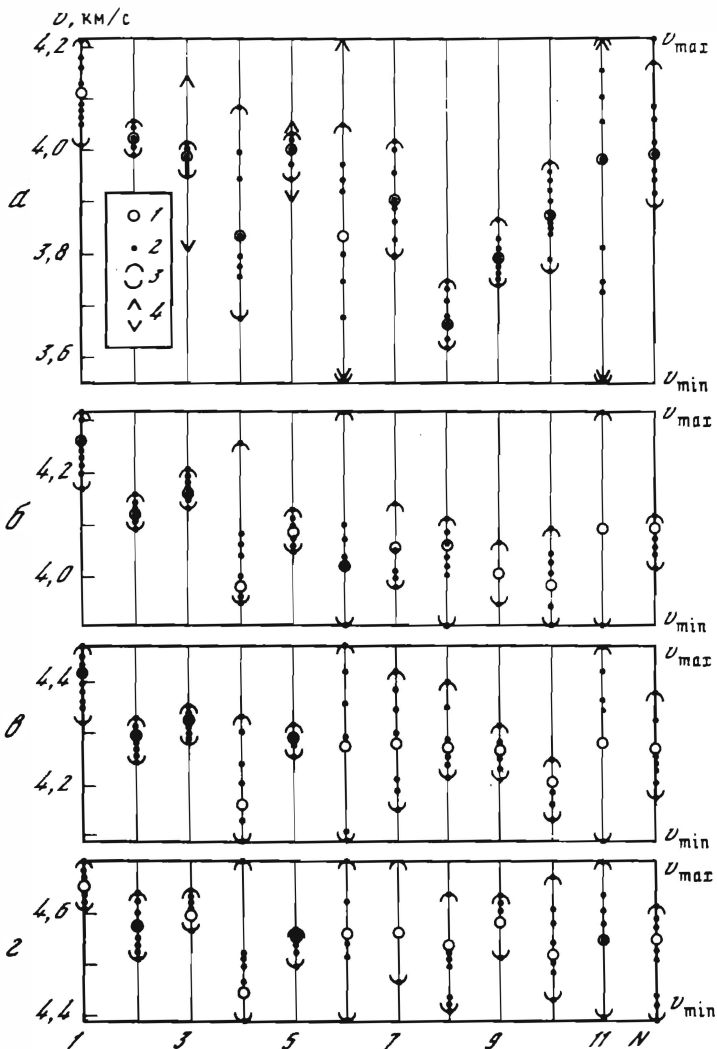


Рис. 6.5. Результаты модельных экспериментов для фазовых скоростей на периодах 50 с (а), 100 (б), 150 (в) и 200 с (г)

1 — истинные значения скоростей; 2 — отдельные варианты счета; 3, 4 — максимальные и минимальные значения скорости, найденные методом квадратичного и линейного программирования соответственно

Все изложенное выше позволяет сделать вывод о том, что применение квадратичного программирования дает возможность повысить точность определения для регионов средних размеров при введении дополнительных ограничений на регионы с малыми размерами. Преимущество данного метода заключается в том, что он позволяет интерпретатору вводить дополнительную информацию о регионах, сохраняя статистическую обусловленность решения.

Т а б л и ц а 6.2. Относительные среднеквадратичные ошибки определения региональных фазовых скоростей (%)

Номер региона	Ошибка МНК	Ошибки квадратичного программирования		
		$k = 2$	$k = 2$	$k = 1,5^*$
1	1,55	1,57	1,2	0,91
2	0,52	0,53	0,43	0,33
3	0,67	0,51	0,42	0,30
4	3,12	2,97	0,26	0,26
5	0,36	0,38	0,46	0,34
6	5,32	4,47	0,26	0,26
7	1,87	1,90	0,26	0,26
8	1,17	1,90	1,38	0,57
9	0,90	0,82	0,87	0,69
10	2,01	1,74	1,37	1,35
11	7,59	5,5	0,25	0,25
12	2,06	2,08	0,25	0,20

\* Введены дополнительные ограничения для регионов 4, 6, 7, 11 и 12 (см. текст).

**Сравнение результатов линейного и квадратичного программирования.** Для регионов 3, 5, 6 и 11 результаты решения задач линейного программирования (период  $T = 50$  с при  $k = 2$ ) сравниваются на рис. 6.5 с результатами квадратичного программирования. Линейное программирование дает несколько худшие результаты, нежели квадратичное, поскольку в этом случае не используются статистические свойства помех в определении времен пробега. Фактически исследуется предельно неблагоприятная ситуация: минимизируется (максимизируется) значение скорости в фиксированном регионе, остальные же переменные остаются свободными, но не выходят за границы многогранного множества, определяемого системой ограничений. При анализе результатов выявляется четкая закономерность: чем большая часть доли трасс приходится на регион (больше размеры региона), тем ближе результаты линейного программирования к квадратичному (регион 6). Уменьшение размеров региона приводит к большему разбросу скоростей (для региона 3 разброс увеличивается примерно в 2 раза) до тех пор, пока  $x_{n \min}$  и  $x_{n \max}$  не выйдут на ограничения. Это имеет место для регионов 6 и 11, которые характеризуются малыми размерами. Хотя результаты линейного программирования значительно хуже, чем квадратичного, они являются весьма полезными при оценке размеров многогранного множества решений и могут использоваться при подборе параметров  $\sigma$  и  $k$ .

### § 6.5. Метод Бэкуса–Гилберта

Метод, основанный на формализме Бэкуса–Гилберта в применении к оценке горизонтального распределения скоростей поверхностных волн, разработан для случая плоской поверхности, т.е. для случая распространения волн в полупространстве  $x, y, z$ . Принципиальных сложностей в

перенесении этого способа на случай сферической модели нет, но вычислительная схема в координатах  $x, y$  оказывается значительно проще, чем в координатах  $\theta, \varphi$ . Поэтому удобно предварительно перейти из сферической координатной системы в прямоугольную и выполнять решение обратной задачи в прямоугольной системе. Перейти же от сферической системы к прямоугольной можно с помощью следующего простого преобразования, сохраняющего инвариантность времен пробега волн между соответствующими точками:

$$x = R_0 \ln \operatorname{tg} (\theta/2), \quad (6.27)$$

$$y = R_0 \varphi, \quad (6.28)$$

$$V(x, y) = v(\theta, \varphi) / \sin \theta, \quad (6.29)$$

где  $R_0$  — радиус Земли. Чтобы при этом преобразовании не слишком сильно искажалось распределение скорости волн вдоль поверхности, необходимо, чтобы  $\sin \theta$  не слишком сильно менялся в пределах рассматриваемого участка поверхности, а это происходит тогда, когда участок расположен вблизи экватора, где  $\frac{d}{d\theta} (\sin \theta) \simeq 0$ . Очевидно, что при рассмотрении какой-

либо функции на поверхности сферической Земли совершенно не обязательно полюс сферической системы координат совмещать с географическим полюсом, его всегда можно поместить в такую точку, чтобы исследуемый участок сферической поверхности оказался вблизи экватора выбранной координатной системы. Таким образом, предварительные преобразования исходных данных заключаются в соответствующем выборе полюса сферической координатной системы и выполнении преобразований (6.27) — (6.29). При этом значения времен пробега вдоль лучей на сферической поверхности, как было уже упомянуто, остаются неизменными и в преобразованной системе координат. Построив решение в прямоугольной системе, мы можем с помощью преобразований, обратных (6.27) — (6.29), перейти снова в сферическую систему. Поэтому все дальнейшее рассмотрение мы будем проводить в прямоугольной координатной системе и считать исследуемый участок поверхности прямоугольником:  $0 < x < X, 0 < y < Y$ .

Время пробега волны между точками  $x_{0j}, y_{0j}$  и  $x_{1j}, y_{1j}$  записывается в виде

$$t_j = \int_{(x_{0j}, y_{0j})}^{(x_{1j}, y_{1j})} V^{-1}(x, y) ds, \quad (6.30)$$

где интегрирование, вообще говоря, производится вдоль лучей, конфигурация которых определяется распределением фазовой скорости (см. гл. 2, § 2.2). Здесь  $V(x, y)$  может означать как групповую, так и фазовую скорость в зависимости от того, какие используются наблюдения. Основное предположение, положенное в основу этого метода (как, кстати, и всех методов, описанных в предыдущем параграфе), заключается в том, что горизонтальные вариации структуры считаются малыми, такими, что соответствующие им вариации фазовой скорости не приведут к сильному

отличию лучей от прямых линий. Вариации групповой скорости при этом могут даже быть достаточно большими. Таким образом, мы считаем, что в (6.30) интегрирование производится вдоль прямой, соединяющей точки  $(x_{0j}, y_{0j})$  и  $(x_{1j}, y_{1j})$ .

Выберем некоторое среднее значение величины  $V^{-1}$  для исследуемой территории (пусть это будет  $V_0^{-1}$ ) и рассчитаем значения времен пробега волны по заданным трассам  $t_{0j}$  при таком значении скорости. Разность между искомым распределением  $v^{-1}(x, y)$  и значением  $V_0^{-1}$  обозначим  $\delta V^{-1}(x, y)$ ; тогда очевидно, что в рамках сделанного выше предположения разность наблюдаемых и рассчитанных времен пробега, т.е.  $\delta t_j = t_j - t_{0j}$ , будет выражаться интегралом

$$\delta t_j = \int_{(x_{0j}, y_{0j})}^{(x_{1j}, y_{1j})} \delta V^{-1}(x, y) ds. \quad (6.31)$$

причем интегрирование производится вдоль прямой линии.

Введем безразмерную величину относительной поправки к величине, обратной скорости волны  $m(x, y) = V_0 \delta V^{-1}(x, y)$ . Тогда (6.31) можно переписать в виде

$$\delta t_j = \int_{(x_{0j}, y_{0j})}^{(x_{1j}, y_{1j})} m(x, y) \frac{ds}{V_0}. \quad (6.32)$$

Запишем правую часть (6.32) так:

$$\int_{x_{0j}}^{x_{1j}} m(x, y_{\pi}(x)) \frac{\cos \alpha}{V_0} dx + \int_{y_{0j}}^{y_{1j}} m(x_{\pi}(y), y) \frac{\sin \alpha}{V_0} dy, \quad (6.33)$$

где  $\alpha$  — угол, который составляет рассматриваемая трасса с осью  $x$ , а  $x_{\pi}(y)$  и  $y_{\pi}(x)$  определяют координаты точек на луче. Запишем теперь (6.33) в форме двойного интеграла по поверхности:

$$\delta t_j = \int_0^Y \int_0^X m(x, y) [\delta(y - y_{\pi}(x)) \cos \alpha + \delta(x - x_{\pi}(y)) \sin \alpha] V_0^{-1} dx dy = \int_0^Y \int_0^X (G_j(x, y) m(x, y) dx dy. \quad (6.34)$$

Нетрудно видеть, что ядра  $G_j(x, y)$  удовлетворяют условию

$$\int_0^Y \int_0^X G_j(x, y) dx dy = t_{0j}.$$

Будем теперь определять в соответствии с методом Бэкуса—Гилберта сглаженные значения  $m(x, y)$ :

$$\langle m \rangle_{x, y} = \int_0^Y \int_0^X A(x', y', x, y) m(x', y') dx' dy', \quad (6.35)$$

которые могут быть выражены в виде линейной комбинации исходных данных:

$$\langle m \rangle_{x, y} = \sum a_j(x, y) \delta t_j. \quad (6.36)$$

Сравнение (6.34) – (6.36) показывает, что сглаживающее ядро является линейной комбинацией ядер  $G_j(x, y)$ , т.е.

$$A(x', y', x, y) = \sum_j a_j(x, y) G_j(x', y'). \quad (6.37)$$

Коэффициенты этой линейной комбинации должны подбираться так, чтобы обеспечить наилучшее разрешение, т.е. сделать сглаживающее ядро  $A(x', y', x, y)$  существенно отличным от нуля в возможно более узкой окрестности точки  $x, y$ . Критерии такой "сосредоточенности", или, как говорят, дельта-образности сглаживающего ядра, могут быть выбраны различными способами. В [99] предложен один из возможных критериев, преимуществом которого является простота расчетной схемы, хотя, как будет видно из дальнейшего, он не является оптимальным.

Посмотрим функции

$$P(x'; x, y) = \int_0^y A(x', y', x, y) dy', \quad (6.38)$$

$$Q(y'; x, y) = \int_0^x A(x', y', x, y) dx'$$

и потребуем, чтобы  $P(x')$  была сосредоточена (близка к  $\delta$ -функции) в окрестности точки  $x$ , а  $Q(y')$  – в окрестности точки  $y$ . Таким образом, вместо того чтобы требовать близости  $A(x', y', x, y)$  к двумерной  $\delta$ -функции, мы требуем близости интегралов от  $A(x', y', x, y)$  к одномерным  $\delta$ -функциям. Близость какой-либо функции к  $\delta$ -функции эквивалента близости интеграла от этой функции к функции единичного скачка (функции Хэвисайда  $H(\xi)$ ). Таким образом, предлагаемый критерий сводится к минимизации следующей величины:

$$s(x, y) = \int_0^x [H(\xi - x) - \int_0^{\xi} P(x', x, y) dx'] d\xi + \int_0^y [H(\eta - y) - \int_0^{\eta} Q(y', x, y) dy']^2 d\eta. \quad (6.39)$$

Смысл величины  $s(x, y)$  легко виден в случае, когда сглаживающее ядро  $A(x', y', x, y)$  отлично от нуля и равно постоянной величине внутри прямоугольника с центром в рассматриваемой точке  $x, y$ . В этом случае  $s(x, y)$  пропорционально периметру этого прямоугольника.

Перейдем теперь к векторным обозначениям. Пусть  $\mathbf{a}$  – вектор, компонентами которого являются неизвестные коэффициенты  $a_j$ ,  $\mathbf{H}$  – вектор с компонентами

$$H_j(x, y) = \int_x^x t_j(x') dx' + \int_y^y \tau_j(y') dy', \quad (6.40)$$

где функции  $t_j(x)$  и  $\tau_j(y)$  представляют собой времена пробега в одно-

родной среде вдоль  $j$ -й трассы от точки с координатой  $x_{0j}$  до точки с координатой  $x$  (или соответственно  $y$ ); при этом если  $x < x_{0j}$ , то  $t_j(x) = 0$ ; если  $x > x_{1j}$ , то  $t_j(x) = t_{0j}$  (предполагается, что  $x_{1j} > x_{0j}$ ). Аналогично находится и функция  $\tau_j(y)$ . Определим матрицу  $\mathbf{S}$  следующим образом:

$$S_{ij} = \int_0^x t_i(x) t_j(x) dx + \int_0^y \tau_i(y) \tau_j(y) dy. \quad (6.41)$$

Нетрудно показать, что  $s(x, y)$  можно записать в форме

$$s = \mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a} - 2\mathbf{H}^T \mathbf{a} + \mathbf{X} - x + \mathbf{Y} - y. \quad (6.42)$$

На сглаживающее ядро должно быть наложено еще условие нормировки, т.е. для того чтобы искомая функция отражала действительно сглаженные значения  $m(x, y)$ , необходимо, чтобы

$$\int_0^x \int_0^y A(x', y', x, y) dx' dy' = 1.$$

Учитывая выражение (6.3) для  $A(x', y', x, y)$ , можем записать это условие в виде

$$\mathbf{a}^T \mathbf{T}_0 = 1, \quad (6.43)$$

где  $\mathbf{T}_0$  – вектор, компонентами которого являются времена пробега волны в однородной среде  $\delta t_{0j}$ .

Следовательно, задача сводится к минимизации (6.42) при условии (6.43). Решение этой задачи с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа приводит к следующему выражению для вектора  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{H} + \frac{1 - \mathbf{T}_0^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{H}}{\mathbf{T}_0^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{T}_0} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{T}_0. \quad (6.44)$$

Таким образом, задача сводится к вычислению матрицы  $\mathbf{S}$  и вектора  $\mathbf{H}(x, y)$  и выполнению вычислительных процедур линейной алгебры. Элементы  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{H}$  вычисляются очень просто, поскольку функции  $t_j(x)$  и  $\tau_j(y)$  являются линейными на участке, соответствующем лучу, и постоянными (0 или  $t_{0j}$ ) вне его. Интегрирование таких функций или их произведений производится в конечном виде.

Недостатком выбранного критерия дельта-образности сглаживающего ядра является то, что получаемое решение относится к такому классу функций, которые представляются в виде двух слагаемых, одно из которых зависит только от  $x$ , а другое только от  $y$ :

$$\langle m \rangle_{x,y} = m_1(x) + m_2(y). \quad (6.45)$$

Это легко видеть из выражения (6.44), которое является линейным относительно  $\mathbf{H}$ , тогда как компоненты вектора  $\mathbf{H}$  представляются суммой, аналогичной (6.45). Очевидно, что аппроксимация произвольной функции двух переменных  $f(x, y)$  суммой  $f_1(x) + f_2(y)$  в общем является неадекватной. Поэтому в результате такого представления искомой функции  $\langle m \rangle_{x,y}$  некоторые ее особенности могут оказаться сглаженными. Кроме того, решение, получаемое таким методом, оказывается сильно зависящим

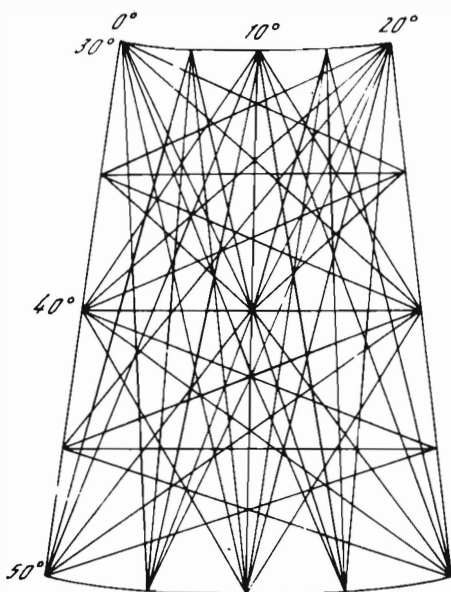
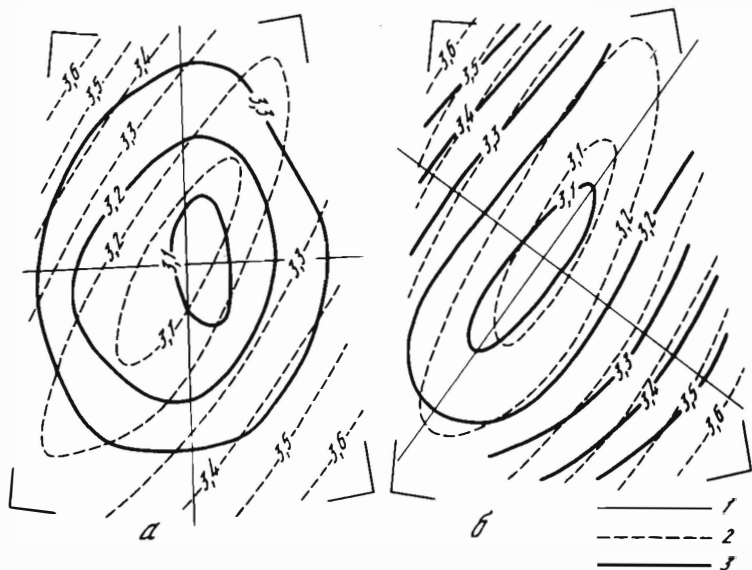


Рис. 6.6. Расположение трасс, времена вдоль которых использовались в тестовом примере решения обратной задачи методом Бэкуса-Гилберта

Рис. 6.7. Распределения сплаженных скоростей, полученные по данным о временах пробега вдоль трасс, изображенных на рис. 6.6

1 — оси координатных систем; 2 — истинное распределение скорости; 3 — решение



от ориентации координатной системы. Однако если в некоторой координатной системе неизвестная функция  $m(x, y)$  может быть представлена в виде  $m_1(x) + m_2(y)$ , и решение ищется именно в этой системе, оно будет удовлетворительно отражать основные особенности искомого распределения скорости.

Если горизонтальное распределение скорости определяется в ограничен-

ном по размерам района и строение этого района не очень сложное, то ориентацию координатных осей можно связать с направлением простирания основных тектонических структур, которое обычно бывает известно. Если оно неизвестно, то можно строить решения для разных ориентаций координатной системы и выбирать из них такое, для которого распределение поправок к скорости оказывается наиболее контрастным, поскольку неправильный выбор координатной системы приводит к более сильному сглаживанию решения. На приводимом ниже модельном примере мы покажем, как влияет неправильный выбор ориентации координатной системы на свойства решения.

Распределение скорости в модели было выбрано в соответствии с законом

$$v(\theta, \varphi) = 3,0 + (\pi/18)^2 [(\theta - 40)^2 + (\varphi - 10)^2 + 4,0(\theta - 40)(\varphi - 10)], \quad (6.46)$$

где  $\theta$  и  $\varphi$  выражены в градусах. Для этого распределения скорости были вычислены времена пробега вдоль 50 трасс, показанных на рис. 6.6. Вычисленные времена пробега были приняты в качестве исходных для решения обратной задачи.

Обратная задача решалась в двух координатных системах, указанных на рис. 6.7. Легко видеть, что в первом случае (рис. 6.7,а) невозможно аппроксимировать заданное скоростное распределение суммой двух функций, каждая из которых зависит только от одной координаты. Тем не менее решение в этой системе качественно отражает истинное скоростное распределение, но оно получается значительно более сглаженным, и изолинии скорости оказываются искажены.

Во второй системе (рис. 6.7,б), оси которой приблизительно совпадают с осями эллипсов (6.46), решение очень хорошо согласуется с заданной моделью. Из сравнения рис. 6.7,а и б видно, что в координатной системе, ориентация которой выбрана правильно, решение получается менее сглаженным.

Рассмотрим теперь, как ошибки наблюдений влияют в этом методе на получаемое решение. Из выражения (6.36) для решения следует, что дисперсия решения имеет вид

$$\rho = D(\langle m \rangle) = \mathbf{a}^T \mathbf{L} \mathbf{a}, \quad (6.47)$$

где  $\mathbf{L}$  — ковариационная матрица ошибок  $t_j$ . В [108] показано, что если решение строится, исходя только из условия минимизации величины  $s$ , определяющей размеры области сглаживания, то ошибка решения может получиться большой. Поэтому предлагается минимизировать не просто  $s$ , а сумму  $s + \lambda \rho$ , где  $\lambda$  — априорно выбранный коэффициент, указывающий, в каком соотношении для искомого решения должны находиться степень сглаженности и точность. Если все наблюдения независимы и равноточны, то  $\rho = \delta^2 \mathbf{a}^T \mathbf{a}$ , где  $\delta^2$  — дисперсия каждого наблюдения. Соответственно минимизации подлежит величина

$$s = \mathbf{a}^T (\mathbf{S} + \lambda \delta^2 \mathbf{E}) \mathbf{a} - 2\mathbf{H}^T \mathbf{a} + X - x + Y - y,$$

где  $\mathbf{E}$  — единичная матрица. При этом сохраняется весь описанный выше



формальный аппарат построения решения, но к каждому из диагональных элементов матрицы  $S$  должно быть добавлено одно и то же слагаемое  $\lambda \delta^2$ . Величина  $\lambda$  играет роль регуляризирующего параметра: увеличение  $\lambda$  приводит к большей сглаженности решения, при уменьшении  $\lambda$  может возникнуть неустойчивость решения, обусловленная наличием ошибок наблюдений.

Сделаем еще некоторые замечания по поводу получаемого решения. Прежде всего надо отметить, что решение будет хорошо отражать истинное распределение скорости, если последнее достаточно гладкое, а именно такое, что в промежутках между трассами нет резких особенностей в распределении скорости, т.е. если можно считать, что на таких участках скорость близка к той, которая может быть получена интерполяцией значений на трассе. Отсюда, кстати, следует, что если в распределении скорости можно ожидать наличия локализованных особенностей, то исследуемая территория должна быть достаточно густо покрыта трассами поверхностных волн.

Далее, получаемое решение представляет собой сглаженную величину поправки к величине обратной скорости, а поскольку начальное приближение для этой величины есть константа, то исходя из решения, можно построить и сглаженное значение  $V^{-1}(x, y)$ , т.е.

$$\langle V^{-1}(x, y) \rangle = V_0^{-1} + \langle \delta V^{-1} \rangle_{x,y}.$$

Эта величина обычно далее пересчитывается в среднее значение собственной скорости  $\bar{V}(x, y) = 1/\langle V^{-1} \rangle_{x,y}$ . При этом надо иметь в виду, что определяемая так скорость будет иметь смысл эффективной скорости, она не будет равна скорости, осредненной по некоторой области с помощью сглаживающей функции  $A(x', y', x, y)$ . Но надо учесть, что это ограничение, так же как и предыдущее замечание, относится и ко всем остальным существующим методам (см. § 6.1)

### § 6.6. Влияние горизонтальной неоднородности среды на измерения поглощения поверхностных волн

Наблюдения поверхностных волн широко используются для изучения диссипативных свойств Земли. Для этой цели из наблюдений определяют коэффициент поглощения поверхностной волны  $\alpha_{kD}(\omega)$  и связанная с ним кажущаяся добротность среды по отношению к поверхностным волнам  $Q_{kD}(\omega)$  (см. формулу (1.55)). По этим данным решается обратная задача о распределении истинной добротности среды  $Q(z)$  по глубине. Учитывая соотношения (1.53), эту обратную задачу можно решать в линейной постановке, применяя описанные выше методы МНК, МСР и метод Бэкуса—Гилберта [107, 108], а также линейное [36] или квадратичное программирование.

Здесь мы не будем останавливаться на решении обратных задач этого класса, а рассмотрим эффекты, которые вносит в измерения  $\alpha_{kD}$  и  $Q_{kD}$  горизонтальная неоднородность. Для этого укажем основные способы определения  $\alpha_{kD}(\omega)$  из наблюдений поверхностных волн. Поскольку речь будет идти об измерениях, относящихся к конкретной моде и типу волны, индексы  $k$  и  $D$  в дальнейшем опускаем.

Для измерений используются амплитудные спектры волн, найденные либо прямым спектральным преобразованием сейсмограмм, либо вычисленные по результатам спектрально-временного анализа с учетом поправочного коэффициента (5.96). Для того чтобы исключить влияние на амплитудные спектры волн других факторов, помимо поглощения, используются различные приемы: независимо определяются механизм, глубина и вид спектральной функции источника [164, 166, 196] и производится соответствующая корректировка наблюдаемого спектра; используются наблюдения двух станций, лежащих с эпицентром на одной дуге большого круга, и определяется отношение амплитудных спектров одной и той же волны от данного землетрясения; находится отношение амплитудных спектров волн, разное число раз оббежавших Землю в одном направлении и зарегистрированных одной и той же станцией [119, 150, 165, 175, 176, 195].

Во всех этих подходах явно или косвенно заложено представление о горизонтальной однородности среды. Проведенный в гл. 2 и 3 теоретический анализ позволяет оценить искажения, вносимые в измерения такого типа существованием в среде плавной или резкой горизонтальной неоднородности [59].

**Эффект плавной неоднородности.** Пусть гипоцентр находится в точке  $M_0(0, 0, h)$  полупространства, а наблюдение производится в точке  $M(r, \varphi, 0)$  на эпицентральной расстоянии  $r$ . Обозначим наблюдаемый амплитудный спектр  $p$ -й компоненты смещения в поверхностной волне через  $|\hat{U}^p|(\omega)$ . В предположении о горизонтальной однородности среды он представляется выражением

$$|\hat{U}^p| = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \frac{\exp[-\alpha^*(\omega)r]}{\sqrt{\xi r}} \left[ \frac{|\epsilon_p|}{\sqrt{CUI^{(0)'} }} \right]_{M_0} \left[ \frac{|W(\omega, h, \varphi)|}{\sqrt{CUI^{(0)'} }} \right]_{M_0} \quad (6.48)$$

(предполагается, что нам известен множитель  $W$ , контролируемый источником, и что среда устроена всюду так же, как под эпицентром — точкой  $M_0(0, 0, 0)$ ). В силу существования горизонтальной неоднородности рассчитываемый по (6.48) коэффициент поглощения  $\alpha^*$  является кажущимся. Его отличия от локального  $\alpha(\omega, x, y)$  в среде или осредненного  $\bar{\alpha}$  на трассе эпицентр — станция определяются видом горизонтальной неоднородности.

Пусть в соответствии с постулатами § 2.1 среда изменяет свойства от точки  $M_0$  к точке  $M$ . Точка вместо (6.48) для наблюдаемого амплитудного спектра, учитывая (2.29), имеем выражение

$$|\hat{U}^p| = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \frac{\exp[-\bar{\alpha}(\omega)L]}{\sqrt{|\xi Y|_M}} \left[ \frac{|\epsilon_p|}{\sqrt{CUI^{(0)'} }} \right]_M \left[ \frac{|W|}{\sqrt{CUI^{(0)'} }} \right]_{M_0}, \quad (6.49)$$

где  $L$  — длина луча, по которому поверхностная волна бежит из  $M_0$  в  $M$ ,

$L = \int_{M_0}^M ds$ ;  $\bar{\alpha}(\omega)$  — средний коэффициент поглощения вдоль луча:

$$\bar{\alpha} = \int_{M_0}^M a(\omega, s) ds / L. \quad (6.50)$$

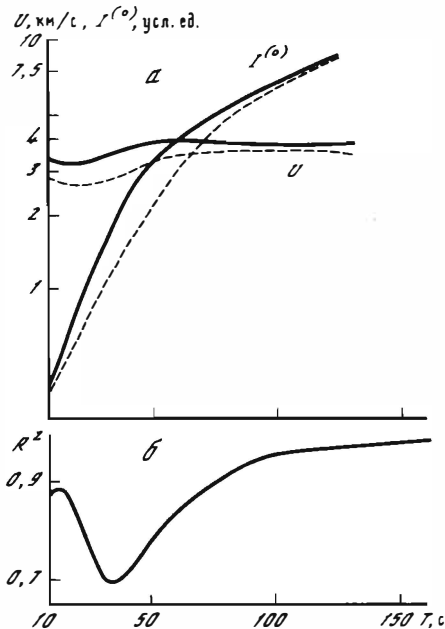


Рис. 6.8. Абсолютные и относительные спектральные характеристики основной моды волны Рэлея в моделях 1 (сплошные линии) и 2 (штриховые)

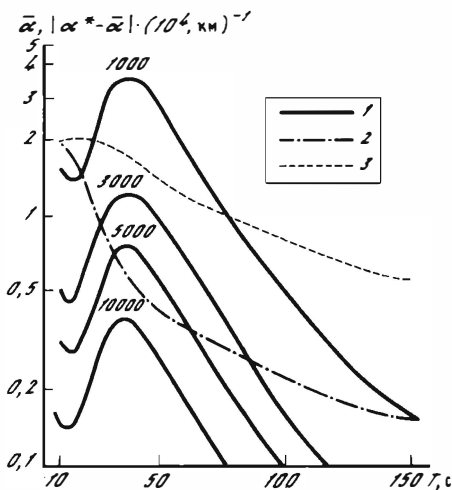


Рис. 6.9. Систематические ошибки определения среднего коэффициента поглощения  $\bar{\alpha}$  при неучете горизонтальной неоднородности среды

1 -  $(\alpha^* - \bar{\alpha})$ , цифры у кривых - длины трасс  $r$  в тыс. км; 2, 3 -  $\bar{\alpha}$  при различных распределениях  $Q$  по глубине: 2 - в коре и мантии  $Q = 400$ ; 3 - в коре  $Q = 400$ , в мантии 100

Из (6.49) и (6.50) вытекает, что, игнорируя горизонтальную неоднородность, вместо  $\bar{\alpha}$  по (6.48) мы определяем  $\alpha^*$ :

$$\alpha^* = \bar{\alpha} \frac{L}{r} + \frac{1}{2r} \ln \frac{[J]_M}{r} + \frac{1}{r} \ln R_{M_0 M}^P(\omega), \tag{6.51}$$

где

$$R_{M_0 M}^P(\omega) = \sqrt{\frac{[UI^{(0)}]_{M_0}}{[UI^{(0)}]_M}} \left| \frac{[\epsilon_p]_M}{[\epsilon_p]_{M_0}} \right|. \tag{6.52}$$

Чтобы оценить, насколько присутствие члена с  $R^P$  в (6.51) может исказить  $\bar{\alpha}$ , рассмотрим результаты расчетов, выполненных для двух моделей литосферы из [175]. Модель 1 - континентальная платформенная модель Гутенберга, модель 2 соответствует горной области Памира и существенно отличается от модели 1 строением первых 80 км литосферы (табл. 6.5). На рис. 6.8, а показаны графики групповой скорости  $U(T)$  и величины  $l^{(0)}(T)$  для основной моды волны Рэлея в обеих моделях. Наибольшие раз-

личия для двух моделей отмечаются в области 30–50 с (до 50% в  $J^{(0)}$  и 25% в  $U$ ). Это приводит к заметной частотной зависимости функции  $R^2(T)$  (рис. 6.8, б) — ее флуктуации достигают 30%. На рис. 6.9 показано поведение члена с  $R^2$  в (6.51) в зависимости от периода для четырех эпицентральных расстояний  $r$  (цифры у  $\kappa_1$  двух). Там же приведены графики  $\alpha(T)$  для горизонтально-однородной модели 1 с двумя различными распределениями  $Q$  в среде ( $Q$  предполагается частотно-независимым и связанным только со сдвиговой диссипацией). Найденные в работах [119, 175] экспериментальные значения  $\alpha$  располагаются в основном между этими двумя графиками. Видно, что систематические ошибки, возникающие за счет неучета члена с  $R^2$ , сравнимы с фактически наблюдаемыми и расчетными значениями этой величины. Они не могут быть устранены осреднением по азимутальному окну, применяемому для ослабления геометрических эффектов горизонтальной неоднородности, если используемые станции расположены в пределах одного и того же или близких по строению блоков литосферы. В рассмотренном случае определяемое из наблюдений  $\alpha$  будет завышено, так как при переходе от модели 2 к модели 1 возрастают групповая скорость и глубина проникания волны (т.е. и множитель  $J^{(0)}$ ), и, следовательно, уменьшается спектральная амплитуда волны. Этот эффект неправильно приписывается поглощению. При распространении волны в обратном направлении наблюдаются обратные эффекты, и поглощение может быть резко занижено.

Аналогичные ошибки могут быть внесены в оценки  $\alpha$  по спектрам, наблюдаемым на двух станциях, расположенных в узком азимутальном секторе относительно источника. В этом случае в (6.51)  $M_0$  соответствует ближней, а  $M$  — дальней от источника станции,  $r$  — расстояние между ними по дуге большого круга, а второе слагаемое заменяется на  $1/2 r (\ln [J]_M - \ln [J]_{M_0})$ .

При двустанционных наблюдениях этот эффект можно устранить, если использовать наблюдения поверхностных волн от двух источников, расположенных на той же дуге большого круга, но по разные стороны от изучаемой трассы между станциями. Суммируя выражения (6.51) для двух измерений, мы приходим к выражению для  $\alpha^*$ , свободному от члена с  $R^P$ :

$$\alpha^* = \frac{\bar{\alpha}L}{r} + \frac{1}{4r} \left( \ln \frac{[J]_M^I}{[J]_{M_0}^I} + \ln \frac{[J]_{M_0}^{II}}{[J]_M^{II}} \right), \quad (6.53)$$

в котором расхождения  $J^I, J^{II}$  соответствуют разным источникам. Аналогичным образом удастся устранить  $R^P$  при наблюдениях на одной и той же станции волн, разное число раз оббежавших Землю, — в этом случае измеренное  $\alpha^*$  соответствует большому кругу, на котором расположены станция и эпицентр.

При определении кажущейся добротности  $Q$  поверхностной волны на трассе  $M_0M$  обычно пользуются формулой

$$\bar{Q} = \omega/2\bar{\alpha}\bar{U},$$

где  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{U}$  средние для трассы величины:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_{M_0}^M \alpha(\omega, s) ds = \frac{\omega}{L} \int_{M_0}^M \frac{ds}{U(s)Q(s)},$$

$$\bar{U} = L / \int_{M_0}^M ds/U(s).$$

Отсюда среднее для трассы  $\bar{Q}$  равно

$$\bar{Q} = \int_{M_0}^M \frac{ds}{U(s)} / \int_{M_0}^M \frac{ds}{U(s)Q(s)},$$

т.е. зависит не только от локальных вариаций  $Q$ , но и от вариаций групповой скорости вдоль трассы, что обычно игнорируется при интерпретации данных о  $Q$ . Кроме, того, при определении  $\bar{Q}$  по искаженному горизонтальной неоднородностью  $\alpha^*$  также вносятся систематические ошибки:

$$Q^* = \bar{\alpha}/\alpha^* \bar{Q}.$$

Еще более значительные искажения  $\bar{\alpha}$  и  $\bar{Q}$  могут вызываться геометрическими эффектами, если трасса распространения волн содержит аномальные включения повышенной или пониженной скорости, а периоды колебаний не слишком велики (см. примеры в § 4.3). Дополнительные искажающие эффекты создают запаздывающие сигналы типа отражений от вертикальных контактов, если временные задержки этих сигналов не позволяют полностью отделить их от основного.

Таким образом, измерения  $\alpha$  в условиях горизонтальной неоднородности подвержены значимым систематическим искажениям, если влияние условий на трассе и вблизи станции не учитывается. Поэтому полученные на основе таких измерений данные о распределении  $Q$  в Земле требуют пересмотра с учетом установленных здесь эффектов.

Сказанное выше позволяет наметить следующий подход к интерпретации наблюдений в условиях слабой горизонтальной неоднородности. При наличии большого числа трасс, пересекающих регион, и данных о механизмах очагов землетрясений определяются дисперсионные кривые по отдельным трассам. Данные для фиксированных периодов используются затем для построения скалярных полей  $C(x, y)$ ,  $U(x, y)$  согласно § 6.4. По имеющимся скалярным полям строятся лучи поверхностных волн для заданных пар источник—станция, оценивается расхождение лучей на пути от источника. Подбираются модели среды в области источника и станций; все эти данные используются для определения  $\bar{\alpha}$  на пути волны по формуле (6.49) и затем для нахождения скалярного поля  $\alpha(x, y)$  или  $Q(x, y)$  по методике, описанной в § 6.4.

Несмотря на значительную сложность описанной процедуры по сравнению с применяемыми для простых горизонтально-однородных моделей, она обладает и значительными преимуществами, устраняя систематические ошибки в оценках диссипативных свойств Земли.

**Эффект вертикального контакта.** Рассмотрим теперь, как может по-

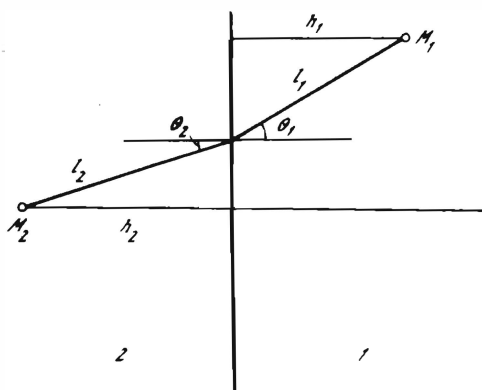


Рис. 6.10. Схема распространения поверхностной волны через вертикальный контакт

влиять на оценку  $\alpha$ , выполняемую в предположении о горизонтальной однородности, наличие вертикального контакта между двумя горизонтально-однородными средами, когда источник и приемник расположены по разные стороны от контакта на достаточном удалении от него. В предположениях § 3.3 с учетом результатов § 1.3 для спектра волны, наблюдаемой в точке  $M_1$  среды 1 и возбуждаемой в точке  $M_2$  среды 2 (рис. 6.10.), получаем выражение

$$|\hat{u}^p| = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \frac{\exp(-\alpha_1 l_1 - \alpha_2 l_2)}{\sqrt{[\xi J]_{M_1}}} \left[ \frac{|\epsilon_p |V^{(i)}|}{\sqrt{CUI^{(0)}}} \right]_{M_1} \left[ \frac{|W|}{\sqrt{CUI^{(0)}}} \right]_{M_2} \times K_{21}(\theta_2, \omega) \sqrt{\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2}}. \quad (6.54)$$

Здесь индексы 1 и 2 указывают среду, к которой относятся те или иные характеристики волны;  $l_1$  и  $l_2$  — расстояния, проходимые волной в среде 1 и 2, причем  $l_1 = h_1 / \cos \theta_1$ ,  $l_2 = h_2 / \cos \theta_2$ ;  $h_1$  и  $h_2$  — расстояния от точек  $M_1$  и  $M_2$  до границы раздела;  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — углы падения на границу и преломления луча, связывающего точки  $M_1$  и  $M_2$ :  $\sin \theta_1 / C_1 = \sin \theta_2 / C_2$ ;  $K_{21}(\theta_2, \omega)$  — отношение амплитуд смещений свободной поверхности при прохождении волны из среды 2 в среду 1, определяемое согласно § 3.3. В этом случае геометрическое расхождение имеет вид

$$[J]_M = \frac{\cos \theta_1 \cos^3 \theta_2}{C_2} \left( \frac{h_1 C_1}{\cos^3 \theta_1} + \frac{h_2 C_2}{\cos^3 \theta_2} \right).$$

Сравнивая (6.54) с (6.48), видим, что предположение о горизонтальной однородности (среда всюду такая же, как в области источника) приводит к следующей формуле для кажущегося коэффициента поглощения:

$$\alpha^* = \bar{\alpha} \frac{l_1 + l_2}{r} + \frac{1}{2r} \ln \frac{[J]_M}{r} + \frac{1}{2r} \ln \mathcal{R}_{M_1 M_2}^p(\omega, \theta_2), \quad (6.55)$$

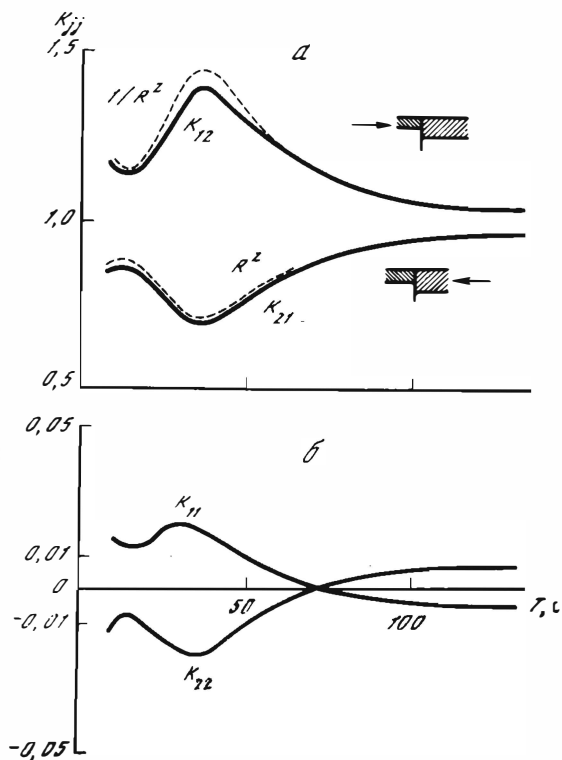


Рис. 6.11. Изменение амплитуд смещений в поверхностной волне Рэлея на вертикальном контакте (основная мода, нормальное падение)

*a* — коэффициенты прохождения  $K_{21}$  и  $K_{12}$ ; *б* — коэффициенты отражения  $K_{22}$  и  $K_{11}$

где

$$\bar{\alpha} = (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2) / (l_1 + l_2);$$

$$\mathcal{R}_{M_2 M_1}^p = K_{21}(\omega, \theta_2) \sqrt{\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2}} \left| \frac{[\epsilon_p]_{M_1}}{[\epsilon_p]_{M_2}} \right|.$$

Расчеты  $\mathcal{R}_{M_2 M_1}^z$  при угле падения, близком к нормальному ( $\theta_2 \approx 0$ ), для прохождения основной моды волны Рэлея из среды с параметрами литосферной модели 2 в среду с параметрами модели 1 (табл. 6.3) показали, что поведение  $R^z$  и  $\mathcal{R}^z$  практически совпадает (рис. 6.11, *a*). Это означает, что изменение амплитуд смещений в проходящей волне вызвано в основном перестройкой ее энергетического профиля по глубине и изменением групповой скорости (скорости переноса энергии), а не потерями на отражение и обмен. Это согласуется с тем фактом, что величина коэффициентов отражения и обмена при углах падения меньше  $30^\circ$  не превышают нескольких сотых (рис. 6.11, *б*). Сходная картина наблюдается при распространении волны в обратном направлении из

Т а б л и ц а 6.3. Модели литосферы

h, км	a, км/с	b, км/с	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	h, км	a, км/с	b, км/с	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>
Модель 1				Модель 2			
19	6,14	3,55	2,76	4	4,41	2,55	2,41
19	6,58	3,80	3,00	26	5,58	3,18	2,66
12	8,20	4,65	3,32	30	6,5	3,76	2,90
10	8,17	4,62	3,34	20	8,10	4,51	3,36
10	8,14	4,57	3,35	10	8,07	4,46	3,37
10	8,10	4,51	3,36	10	8,02	4,41	3,38
10	8,07	4,46	3,37	25	7,93	4,37	3,39
10	8,02	4,41	3,38	25	7,85	4,35	3,41
25	7,93	4,37	3,39	25	7,89	4,36	3,43
25	7,85	4,35	3,41	25	7,98	4,38	3,46
25	7,89	4,36	3,43	25	8,10	4,42	3,48
25	7,98	4,38	3,46	25	8,21	4,46	3,50
25	8,10	4,42	3,48	50	8,38	4,54	3,53
25	8,21	4,46	3,50	50	8,62	4,68	3,58
50	8,38	4,54	3,53	50	8,87	4,85	3,62
50	8,62	4,68	3,58	—	9,15	5,04	3,69
50	8,87	4,85	3,62				
—	9,15	5,04	3,69				

среды 1 в среду 2: поведение функций  $(R^z)^{-1}$  и  $R_{M_1 M_2}^z$  в целом весьма сходно, однако различия несколько больше, чем в предыдущем случае (рис. 6.11, б). Это объясняется, по-видимому, несколько большими потерями на образование объемных волн при переходе волны из среды с более тонкой земной корой в среду с большей мощностью коры, чем в противоположной ситуации.

Проведенные расчеты показывают, что ошибки из-за неучета вертикального контакта близки к найденным для случая плавной горизонтальной неоднородности. Особенно велики они могут быть для смешанных континентально-океанических трасс.

### § 6.7. Анизотропия или неоднородность ?

Существование сейсмической анизотропии установлено многочисленными лабораторными и полевыми экспериментами. Анизотропные свойства пород тесно связаны с их геологической историей и содержат существенную информацию о строении и динамике Земли [92, 126]. Это оправдывает большой интерес геофизиков ко всем сейсмическим явлениям, которые можно интерпретировать в рамках анизотропии. Однако при недостаточно полном и строгом анализе за проявления анизотропии можно принять явления совершенно иного происхождения, например вызванные крупномасштабными неоднородностями [23]. Ниже путем численного моделирования будет показано, как крупномасштабные неоднородности могут вызывать такие эффекты, как: 1) отклонение плоскости поляризации поверхностных волн от теоретического положения для изотропной среды; 2) неудовлетворительная согласованность дис-



Т а б л и ц а 6.4. Параметры горизонтально-однородной изотропной модели коры и верхней мантии

Номер слоя	Мощность, км	$a$ , км/с	$b$ , км/с	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>
1	10	5,8	3,4	2,7
2	20	6,6	3,8	2,9
3	10	7,5	4,3	3,324
4	—	9,0	5,4	3,6

персии волн Лява и Рэлея в рамках изотропной горизонтально-однородной модели. Такие явления обычно рассматриваются как индикаторы анизотропии [126, 155, 185].

**Поляризация высших мод поверхностных волн.** Неоднократно указывалось, что поляризация высших мод поверхностных волн крайне чувствительна даже к слабой анизотропии [126]. Эффектом анизотропии объяснялся также характер наблюдаемой поляризации высших мод на протяженных континентальных трассах: при анализе трехкомпонентных записей на временах регистрации высших мод наблюдалось устойчивое эллиптическое движение в вертикальной плоскости, не совпадающей с плоскостью, содержащей теоретическую трассу эпицентр—станция.

Чтобы проверить, обязательно ли такие явления связаны с анизотропией, были проведены расчеты спектральных характеристик и теоретических сейсмограмм первых высших мод волн Лява и Рэлея (обозначаемых далее  $2L$  и  $2R$ ) в модели среды (табл. 6.4), близкой по параметрам к одной из изотропных моделей работы [126].

Спектральные характеристики показаны на рис. 6.12, из которого видно, что кривые фазовой скорости мод  $2R$  и  $2L$  очень близки при  $T < 11$  с и дважды пересекаются при  $T \approx 6$  и 10 с. Представим теперь, что один из слоев модели обладает очень слабой анизотропией. Тогда, согласно [126], вместо вырожденных мод  $2L$  и  $2R$  появятся так называемые обобщенные моды  $3G$  и  $4G$ . Как будут их дисперсионные кривые соотноситься с дисперсионными кривыми мод  $2L$  и  $2R$ ? Очевидно, они должны быть очень близки к ним и в пределе (при полном исчезновении анизотропии) переходить в них. Однако нумерация мод в анизотропной модели строится иначе, чем в изотропной, где моды волн Лява и Рэлея нумеруются независимо, а именно для любого периода  $C_{4G} > C_{3G}$  (см. рис. 6.12). В результате соседние участки спектра одной и той же моды ( $3G$  или  $4G$ ) переходят при исчезновении анизотропии в участки спектров различных мод изотропной среды (то  $2L$ , то  $2R$ ). Естественно, что при слабой анизотропии такие участки резко отличаются по характеру поляризации. Это и создает иллюзию особой чувствительности поляризации высших мод к анизотропии. На самом деле физический смысл следует придавать только сумме мод  $3G$  и  $4G$ ; это суммарное колебание создает смещение, вертикальная и радиальная компоненты которого вполне аналогичны смещениям в волне  $2R$ , а тангенциальная — в волне  $2L$ . По мере усиления анизотропии  $C_{3G}$ ,  $C_{4G}$  будут все дальше отходить

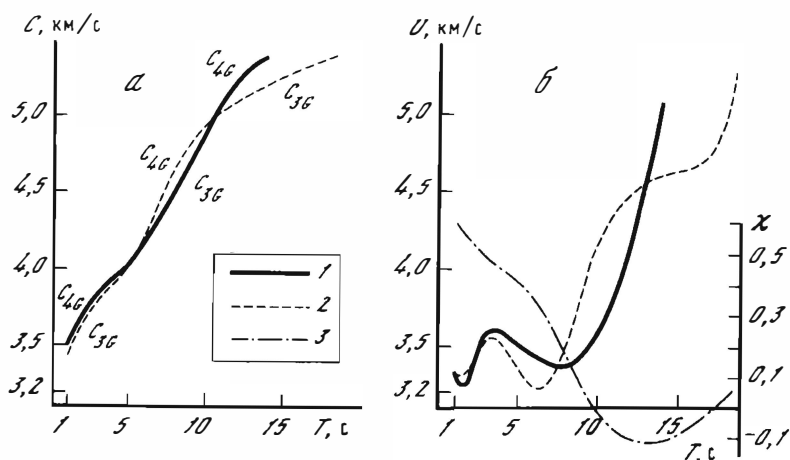


Рис. 6.12. Спектральные характеристики высших мод  $2R$  и  $2L$ .

$a$  — фазовые скорости;  $b$  — групповые скорости и эллиптичность. 1 — волна  $2L$ ; 2 — волна  $2R$ ; 3 — эллиптичность  $\chi$  волны  $2R$

от  $C_{2L}$ ,  $C_{2R}$  и возникнут азимутально-зависимые поляризационные эффекты. Неадекватность описания слабосвязанных интерференционных полей (в данном случае квази- $SH$ -волн и квази- $P$ -и  $SV$ -волн) единой системой собственных функций, проявившаяся в этом примере, хорошо известна из других волновых ситуаций.

Близость групповых скоростей высших мод  $2R$  и  $2L$  (рис. 6.12, б) показывает, что, анализируя трехкомпонентную запись в соответствующем интервале времен и периодов, мы всегда будем иметь дело с суммарным колебанием, поляризация которого зависит от соотношения интенсивностей этих мод. Это соотношение весьма изменчиво, так как является функций глубины и механизма очага, а также геометрии системы источник—станция. Однако одна важная характеристика, а именно соотношение амплитуд вертикальной и радиальной компонент временной записи, очень слабо зависит от этих факторов, так как она определяется главным образом спектральным отношением амплитуд смещений поверхности  $\chi_2(T)$  для моды  $2R$ , зависящим только от свойств модели. На рис. 6.12 показано это отношение  $\chi_2$  как функция периода для нашей модели. Видно, что радиальное смещение поверхности в интервале 8–15 с (т.е. интервале групповых скоростей 4,6–3,5 км/с) не превышает по модулю 0,1 вертикального; следовательно, в отличие от основной моды  $1R$  мода  $2R$  переносит в основном вертикальные смещения.

Теоретические сейсмограммы высших мод рассчитывались по асимптотическим формулам (1.31) для точечного источника на глубине  $h=3$  км, моделирующего чисто сдвиговую дислокацию по вертикальной поверхности разрыва. Развитие дислокации во времени ( $0 \leq t \leq \tau$ ) происходило по закону  $0,5 \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi t}{\tau}\right)$ , параметр  $\tau$  принимался равным 3 с для ослабления эффекта обрыва высокочастотного спектра. Предполагалось, что

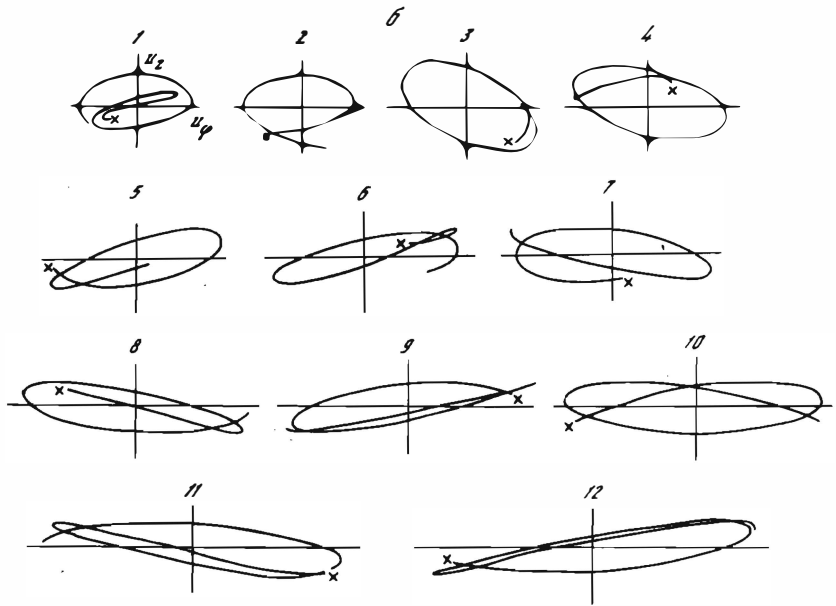
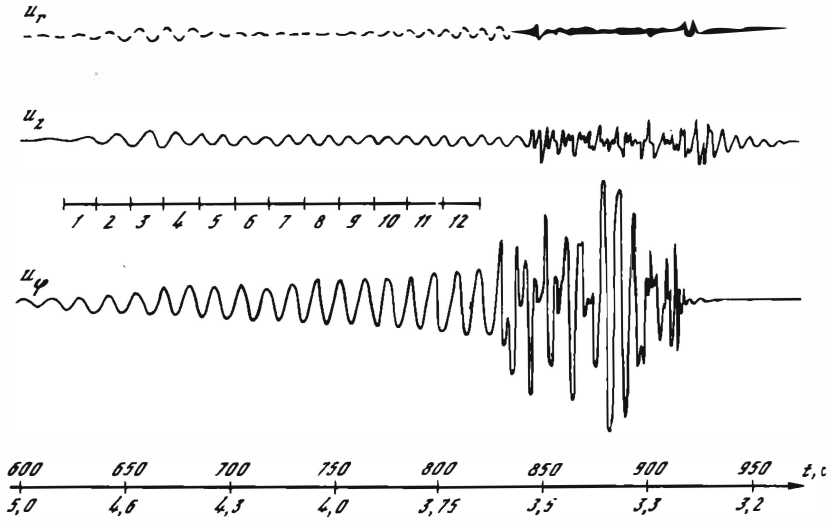


Рис. 6.13. Характер поляризации высших мсд в изотропной модели  
 а — теоретические сейсмограммы: компоненты  $u_z$ ,  $u_r$  соответствуют моде  $2R$ , компонента  $u_\varphi$  — моде  $2L$ . Пунктирная часть  $u_r$  с десятикратным увеличением; б — траектории движения частиц в суммарной поверхностной волне (проекция на плоскость  $z\varphi$ ); номера кадров соответствуют интервалам, показанным под сейсмограммой  $u_z$

в направлении приемника излучение волн Лява и Рэлея происходило с одинаковой интенсивностью, что соответствует углу между направлением подвижки и направлением на станцию, равному  $\pi/8$ . Результирующие сейсмограммы и траектории движения частиц в суммарной поверхностной волне в плоскости  $z\varphi$  (вертикальная плоскость, перпендикулярная направлению распространения волны) показаны на рис. 6.13. Видно, что практически все движение происходит именно в этой плоскости и носит устойчивый эллиптический характер (благодаря близости к  $\pi/2$  либо к  $3\pi/2$  фазового сдвига между волной  $2L$  и вертикальной компонентой волны  $2R$ ). Сходный характер движения наблюдался при анализе экспериментальных сейсмограмм высших мод [126]. В зависимости от соотношения интенсивностей волн Лява и Рэлея, излучаемых в данном направлении, вид эллипсов может значительно меняться, однако малость амплитуд радиальной компоненты смещения остается устойчивой характеристикой движения. Таким образом, наблюдаемые эффекты поляризации высших мод могут быть объяснены в рамках вертикально-неоднородных моделей без обязательного привлечения анизотропии.

**Прохождение поверхностных волн через горизонтально-неоднородную среду.** Рассмотрим модель Земли, состоящую из двух контактирующих вертикально-неоднородных полупространств различного строения, т.е. с разными законами изменения с глубиной скоростей упругих волн или плотности. Как следует из результатов гл. 3, при больших удалениях источника и приемника от контакта по сравнению с рассматриваемыми длинами волн наблюдаемая дисперсия близка к получаемой осреднением дисперсий в каждой из частей среды:

$$\frac{1}{\bar{C}} = \frac{l_1 + l_2}{l_1/C_1 + l_2/C_2}, \quad \frac{1}{\bar{U}} = \frac{l_1 + l_2}{l_1/U_1 + l_2/U_2}.$$

Здесь индексы 1 и 2 соответствуют левой и правой частям среды;  $l_1, l_2$  — длины соответствующей части трассы. Пусть в результате наблюдений мы имеем такие осредненные дисперсионные кривые для волн Лява и Рэлея и ищем горизонтально-однородную модель среды, согласующуюся с наблюдениями. Если искомая модель не обладает достаточным набором свободных параметров, такая задача может оказаться невыполнимой. В этом случае переход к анизотропным горизонтально-однородным моделям, обладающим, по определению, большим числом параметров, может привести к решению, удовлетворительно согласующемуся с наблюдениями, однако такое решение может не отражать реальной геофизической ситуации. В качестве примера рассмотрим результаты модельных расчетов и их интерпретации для весьма простой слоистой модели (рис. 6.14, а). Дисперсия волн Лява и Рэлея в каждой из образующих модель сред иллюстрируется графиками рис. 6.14, б–г, там же показаны как бы “наблюденные” дисперсионные кривые для протяженной трассы, равные части которой лежат в каждой из граничащих сред. Параметры модели коры с вертикальным контактом: мощность первой среды — 35 км, второй — 50 км; скорости  $a=6,0$  км/с,  $b=3,46$  км/с, плотность

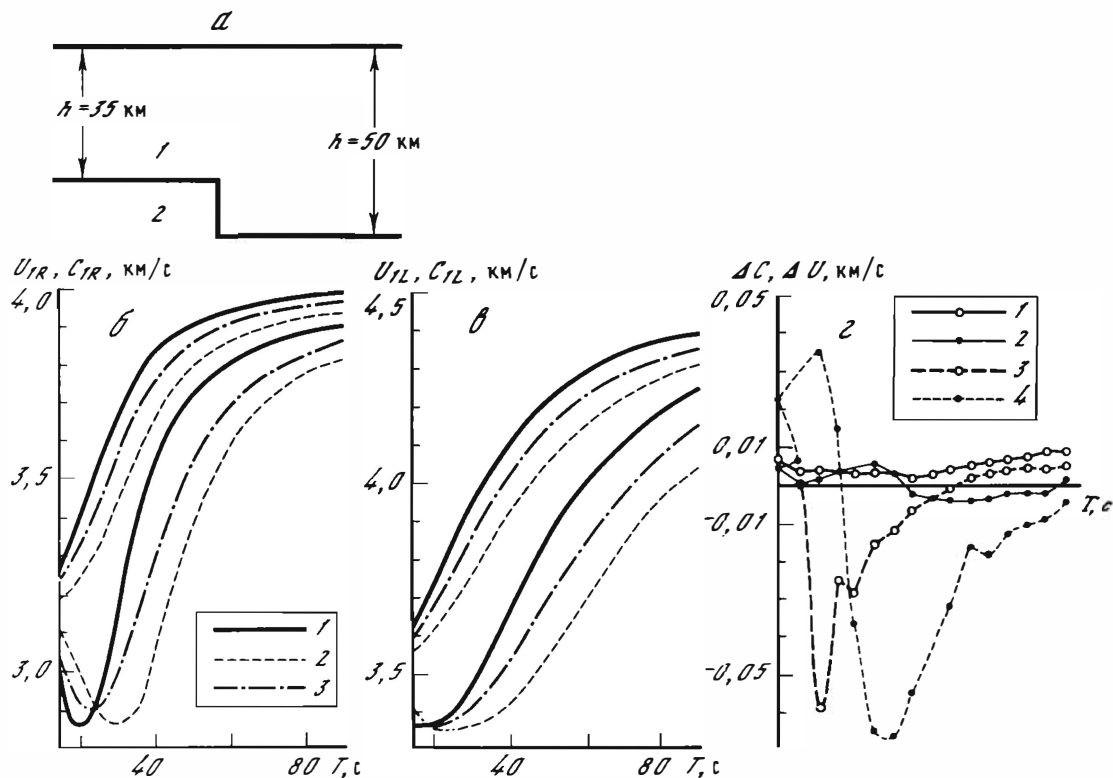


Рис. 6.14. Влияние горизонтальной неоднородности на интерпретацию "наблюдаемой" дисперсии

$a$  — модель среды: 1, 2 — номера слоя; б — кривые фазовых и групповых скоростей волны Рэлея в горизонтально-однородных моделях с мощностью слоя 35 км (1), 50 км (2) и "наблюдаемые" кривые (3); в — то же, что и на рис. б, для волны Лява; г — разность между "наблюдаемой" и расчетной кривыми для наилучшей модели: волны Лява — фазовые скорости (1), групповые скорости (2), волны Рэлея — фазовые скорости (3), групповые скорости (4)

$\rho = 2,8 \text{ г/см}^3$ ; скорости в подстилающем полупространстве  $a = 7,72 \text{ км/с}$ ,  
 $b = 4,60 \text{ км/с}$ ,  $\rho = 3,3 \text{ г/см}^3$ .

С помощью метода "Еж" [25] был проведен поиск трехслойных моделей, удовлетворяющих "наблюденным" дисперсионным кривым фазовой и групповой скоростям в интервале 15–90 с. Варьировались скорости поперечных волн и мощности всех слоев. В процессе поиска найдены модели, согласующиеся по дисперсии либо волн Лява, либо волн Рэлея с погрешностью меньше 0,01 км/с; в то же время модель, удовлетворяющую одновременно двум типам данных со среднеквадратичной погрешностью меньше 0,02 км/с, найти не удалось. При этом максимальные отклонения для отдельных периодов достигали 0,05 км/с и даже более. В этих условиях введение в среду анизотропии казалось бы естественным, однако полученная в результате "хорошо подогнанная" модель не давала бы правильной геофизической интерпретации данных.

На наш взгляд, подобные эффекты могли проявиться при построении модели Земли: несогласованность различных типов наблюдений для верхней мантии (полученных неизбежным осреднением данных по регионам Земли с заметно различающимся глубинным строением) послужила в [104, 130] аргументом в пользу трансверсально-анизотропной модели верхней мантии.

Рассмотренные примеры, естественно, ни в коей степени не опровергают существования анизотропии: они лишь указывают на необходимость особой осторожности при введении новых, более сложных моделей среды на основе недостаточно детальных и неоднозначно интерпретируемых наблюдений.

### § 6.8. Оценка параметров очага землетрясения

В § 1.2 область очага землетрясения была определена как пространственная область, в каждой точке которой тензор  $\dot{\Gamma}_{ij}$  не является тождественным нулем. Время же действия источника — это время, в течение которого в различных точках очаговой области происходят неупругие движения, т.е. тензор  $\dot{\Gamma}_{ij}$  отличен от нуля. Наряду с этими понятиями будем рассматривать мгновенный очаг, т.е. пространственную область, охваченную неупругими движениями в некоторый момент времени  $t$ , и локальное время действия источника, т.е. время, в течение которого такие движения происходят в некоторой точке  $x$ .

В данном параграфе мы приведем формулы для оценок геометрических характеристик очаговой области и осредненных по времени геометрических характеристик мгновенного очага, а также формулы для оценок времени действия источника и осредненного по пространству локального времени его действия. Все перечисленные параметры, характеризующие очаг землетрясения, выражаются через пространственно-временные моменты тензора  $\dot{\Gamma}_{ij}(\mathbf{x}, t)$  суммарной степени (по пространству и времени) 0, 1 и 2. В свою очередь, эти моменты, как будет показано ниже, могут быть оценены с использованием длиннопериодных записей смещений в некотором числе точек свободной поверхности.

Момент  $\dot{\Gamma}^{(m,n)}(q, \tau)$  пространственной степени  $m$  и временной сте-

пени  $n$  относительно точки  $q$  и момента времени  $\tau$  является тензором порядка  $m + 2$  и определяется формулой

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_{ij; k_1 \dots k_m}^{(m, n)}(q, \tau) = \int_{\Omega} dV_x \int_0^{\infty} \dot{\Gamma}_{ij}(x, t) \times \\ \times (x_{k_1} - q_{k_1}) \dots (x_{k_m} - q_{k_m}) (t - \tau)^n dt, \end{aligned} \quad (6.56)$$

где  $\Omega$  — пространственная область, вне которой  $\dot{\Gamma}(x, t) \equiv 0$ . Принципиальная возможность получения моментов (6.56) из длиннопериодных записей смещений будет рассмотрена в конце этого параграфа, а пока выясним, какая информация об очаге землетрясения содержится в моментах суммарной степени  $m + n$ , равной 0, 1 и 2.

При фиксированных значениях  $i$  и  $j$  моменты (6.56) характеризуют пространственно-временную конфигурацию скалярного поля  $\dot{\Gamma}_{ij}(x, t)$ . Каждый сейсмический источник описывается шестью (вследствие симметрии тензора  $\dot{\Gamma}_{ij}$ ) различными скалярными функциями, что затрудняет интерпретацию его моментов. Следуя [111], поставим в соответствие очагу землетрясения-скалярное поле

$$c(x, t) = \dot{\Gamma}_{ij}^{(0, 0)} \dot{\Gamma}_{ij}(x, t) \quad (6.57)$$

и будем считать геометрические и временные характеристики этого поля оценками соответствующих характеристик очага.

Заметим, что тензор  $\dot{\Gamma}_{ij}^{(0, 0)}$  является предельным значением (при  $t \rightarrow \infty$ ) тензора сейсмического момента  $\int \dot{\Gamma}_{ij}(x, t) dV_x$  (см. [49]). Моменты функции  $c(x, t)$  определяются формулой, аналогичной (6.56):

$$\begin{aligned} c_{k_1 \dots k_m}^{(m, n)}(q, \tau) = \int_{\Omega} dV_x \int_0^{\infty} c(x, t) \cdot \\ \cdot (x_{k_1} - q_{k_1}) \dots (x_{k_m} - q_{k_m}) (t - \tau)^n dt. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Если известны моменты тензора  $\dot{\Gamma}_{ij}(x, t)$ , то моменты  $c^{(m, n)}$  могут быть получены из соотношения

$$c_{k_1 \dots k_m}^{(m, n)}(q, \tau) = \dot{\Gamma}_{ij}^{(0, 0)} \dot{\Gamma}_{ij; k_1 \dots k_m}^{(m, n)}(q, \tau). \quad (6.59)$$

**Оценки временных и геометрических характеристик очага землетрясения.** Пусть нам известны моменты (6.58) функции  $c(x, t)$ , определяемой соотношением (6.57). Будем считать, что справедливо неравенство  $c(x, t) \geq 0$ . Согласно [111], многие типы сейсмических источников удовлетворяют этому условию. Так, нетрудно показать, что в случае источника, представляющего собой идеальный плоский сдвиг, это неравенство эквивалентно требованию: вектор скорости подбижки не отклоняется от некоторого фиксированного направления на угол, больший чем  $\pi/2$ . В предположении неотрицательности поля  $c(x, t)$  в работе [111] предлагаются следующие оценки временных и геометрических характеристик очага землетрясения. В качестве оценки величины, характеризующей местопо-

положение очага, рассматривается пространственный центроид  $q_c$  поля  $c(x, t)$ , определяющийся соотношением

$$q_c = \int_{\Omega} dV_x \int_0^{\infty} c(x, t) x dt / \int_{\Omega} dV_x \int_0^{\infty} c(x, t) dt, \quad (6.60)$$

которое можно записать в виде

$$c^{(0,0)} q_c = c^{(1,0)}(0). \quad (6.61)$$

Если  $m(x) = \int_0^{\infty} c(x, t) dt$  – распределение массы в пространстве, то его центр масс совпадает с центроидом  $q_c$ . Аналогично оценка временного центроида  $\tau_c$  находится по формуле

$$c^{(0,0)} \tau_c = c^{(0,1)}(0). \quad (6.62)$$

Совокупность значений  $q_c$  и  $\tau_c$  определяет пространственно-временной центроид очага. Продолжительность действия источника оценивается величиной  $2\Delta\tau$ , где

$$(\Delta\tau)^2 = \int_{\Omega} dV_x \int_0^{\infty} c(x, t) (t - \tau_c)^2 dt / \int_{\Omega} dV_x \int_0^{\infty} c(x, t) dt \quad (6.63)$$

или в принятых обозначениях

$$(\Delta\tau)^2 = c^{(0,2)}(\tau_c) / c^{(0,0)}. \quad (6.64)$$

Пусть  $r$  – единичный вектор. В качестве оценки среднего размера очага в направлении  $r$  будем рассматривать величину  $2l_r$ , где

$$l_r^2 = \int_{\Omega} dV_x \int_0^{\infty} c(x, t) [(x - q_c) r]^2 dt / \int_{\Omega} dV_x \int_0^{\infty} c(x, t) dt. \quad (6.65)$$

Введем матрицу

$$W = c^{(2,0)}(q_c) / c^{(0,0)}. \quad (6.66)$$

Тогда  $l_r^2$  можно выразить в виде квадратичной формы

$$l_r^2 = r^T W r, \quad (6.67)$$

где  $r^T$  – транспонированный вектор  $r$ .

Из (6.67) следует, что минимальный размер очаговая область имеет в направлении собственного вектора матрицы  $W$ , соответствующего минимальному собственному значению, а максимальный размер в направлении собственного вектора той же матрицы, соответствующего максимальному собственному значению.

Для интерпретации момента  $c^{(1,1)}$  последнего из моментов функции  $c(x, t)$  суммарной степени 0, 1 и 2, рассмотрим следующую задачу. Из равномерно движущихся точек  $x = x_0 + vt$  найти такую, вокруг которой поле  $c(x, t)$  сконцентрировано наилучшим образом в смысле минимума



функции

$$\Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} dV_x \int_0^{\infty} c(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \mathbf{v}t)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \mathbf{v}t) dt. \quad (6.68)$$

Как показано в [111], решение этой задачи имеет вид

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{q}_c - \mathbf{v}\tau_c, \quad \mathbf{v} = \mathbf{w}/(\Delta\tau)^2, \quad (6.69)$$

где

$$\mathbf{w} = \mathbf{c}^{(1,1)}(\mathbf{q}_c, \tau_c) / \mathbf{c}^{(0,0)}.$$

**Мгновенный очаг и оценки его осредненных геометрических характеристик.** В течение времени действия источника неупругие движения охватывают различные части пространства. Рассмотренная выше очаговая область является их объединением. Назовем мгновенным очагом изменяющуюся со временем пространственную область, в каждый момент включающую в себя те точки пространства, в которых происходят неупругие движения среды, т.е. избыточные напряжения зависят от времени. На наш взгляд, даже приближенные оценки осредненных по времени геометрических характеристик такой области могут быть полезны при изучении процессов, происходящих в очаге землетрясения.

Итак, точка  $\mathbf{x}$  в момент времени  $t_0$  принадлежит мгновенному очагу, если тензор  $\dot{\Gamma}_{ij}(\mathbf{x}, t)$  отличен от тождественного нуля в любой окрестности  $t_0$ . Аналогично тому, как это было сделано выше, вместо тензорного поля  $\dot{\Gamma}_{ij}(\mathbf{x}, t)$  будем рассматривать скалярное поле  $c(\mathbf{x}, t)$ , определяемое формулой (6.67), и в каждый момент времени  $t_0$  мгновенным очагом будем считать область, в каждой точке которой функция  $c(\mathbf{x}, t)$  отлична от тождественного нуля в любой окрестности  $t_0$ .

Назовем мгновенным центроидом функцию  $\mathbf{q}(t)$ , определяющуюся соотношением

$$\mathbf{q}(t) = \int_{\Omega} c(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} dV_x / \int_{\Omega} c(\mathbf{x}, t) dV_x. \quad (6.70)$$

Поскольку  $c(\mathbf{x}, t) \geq 0$ , формула (6.70) определяет функцию, на которой принимает минимальное значение функционал

$$F[\mathbf{z}(t)] = \int_0^{\infty} dt \int_{\Omega} c(\mathbf{x}, t) [\mathbf{x} - \mathbf{z}(t)]^T [\mathbf{x} - \mathbf{z}(t)] dV_x. \quad (6.71)$$

На временах  $t$ , при которых  $c(\mathbf{x}, t) \equiv 0$  по  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{q}(t)$  может быть доопределена произвольным образом.

Аналогично (6.65) в качестве оценки среднего размера мгновенного очага в направлении  $\mathbf{r}$  будем рассматривать величину  $2d_r$ , где

$$d_r^2 = \int_{\Omega} dV_x \int_0^{\infty} c(\mathbf{x}, t) \{[\mathbf{x} - \mathbf{q}(t)] \cdot \mathbf{r}\}^2 dt / \int_{\Omega} dV_x \int_0^{\infty} c(\mathbf{x}, t) dt. \quad (6.72)$$

Итак, для получения оценки  $d_r$  необходимо знать функцию  $\mathbf{q}(t)$ , являющуюся решением задачи о минимуме функционала (6.71). Решение этой задачи (6.70) выражается через пространственные моменты поля  $c(\mathbf{x}, t)$ , которые нам неизвестны. Наша цель — выразить  $d_r$  через пространствен-

но-временные моменты (6.58) функции  $c(x, t)$ . В общем случае это возможно лишь приближенно. А именно в качестве приближения  $q(t)$  в формуле (6.72) будем рассматривать функцию  $y(t)$ , реализующую минимум функционала (6.71) на множестве многочленов степени  $n$ .

Покажем, что для любого значения  $n$  такой минимум существует и притом единственный.

Итак,  $y(t)$  – многочлен степени  $n$ :

$$y(t) = \sum_{j=0}^n a_j (t - \tau_c)^j. \quad (6.73)$$

Пусть  $i$ -я компонента вектора  $a_j$  есть  $\alpha_{ij}$ . Тогда

$$y_i(t) = \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} (t - \tau_c)^j, \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.74)$$

и

$$F[y(t)] = \int_{\Omega} dV_x \int_0^{\infty} c(x, t) \sum_{i=1}^3 \left[ x_i - \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} (t - \tau_c)^j \right]^2 dt. \quad (6.75)$$

Дифференцируя (6.75) по  $\alpha_{ij}$ , имеем

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_{ij}} = -2 \int_{\Omega} dV_x \int_0^{\infty} c(x, t) \left[ x_i - \sum_{k=0}^n \alpha_{ik} (t - \tau_c)^k \right] (t - \tau_c)^j dt. \quad (6.76)$$

Из условия стационарности  $\partial F / \partial \alpha_{ij} = 0$  в обозначениях (6.58) получим систему  $3(n+1)$  уравнений для коэффициентов  $\alpha_{ik}$ :

$$c_i^{(1,j)}(0, \tau_c) - \sum_{k=0}^n \alpha_{ik} c^{(0,k+j)}(\tau_c) = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (6.77)$$

Упорядочим множества коэффициентов  $\alpha_{ij}$  и значений  $c_i^{(1,j)}$ , поставив им в соответствие  $3(n+1)$ -мерные векторы  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{p}$  так, что

$$\alpha_{ij} = b_k, \quad c_i^{(1,j)}(0, \tau_c) = p_k, \quad k = (i-1)(n+1) + j. \quad (6.78)$$

Тогда из (6.77) получим следующее уравнение для вектора  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{p} = \mathbf{B}\mathbf{b}, \quad (6.79)$$

где  $\mathbf{B}$  – блочная матрица размера  $3(n+1) \times 3(n+1)$ :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{pmatrix},$$

а элементы матрицы  $\mathbf{A}$  определяются соотношением

$$A_{ij} = c^{(0,i+j-2)}(\tau_c), \quad i, j = 1, \dots, n+1. \quad (6.80)$$

Как видно из формулы (6.76), для матрицы вторых производных функ-

ции  $F$  по коэффициентам  $b_k$  имеем

$$\partial^2 F / \partial b_i \partial b_j = 2B_{ij}, \quad (6.81)$$

где  $B_{ij}$  — элементы матрицы  $B$ .

Покажем, что матрица  $A$  — положительно определенная. Действительно,

$$A_{ij} = (f_i, f_j), \quad (6.82)$$

где  $f_i = (t - \tau_c)^{i-1}$ , а скалярное произведение  $(f_i, f_j)$  определяется формулами

$$(f_i, f_j) = \int_0^\infty v(t) f_i(t) f_j(t) dt, \quad (6.83)$$

где  $v(t) = \int_\Omega c(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} \geq 0$ . Из (6.82) следует, что  $A$  — матрица Грамма,

и поскольку функции  $f_i$  — линейно независимы, то она — положительно определенная. Заметим, что  $\det B = (\det A)^3$ , и из положительной определенности матрицы  $A$  следует, что и  $B$  — положительно определенная матрица. Но тогда решение уравнения (6.79) существует и единственно, и на нем функция  $F$  принимает минимальное значение.

Итак, решение уравнения (6.79) определяет коэффициенты для приближения функции  $q(t)$  многочленом степени  $n$ . Подставляя полученный многочлен  $y(t)$  вместо  $q(t)$  в формулу (6.72), мы можем выразить приближенное значение среднего размера мгновенного очага в любом направлении через пространственно-временные моменты функции  $c(\mathbf{x}, t)$ .

Получим явные формулы для случая линейного приближения  $q(t)$ , т.е. для  $n = 1$ . В этом случае минимизируемая функция (6.75) совпадает с функцией (6.68), рассмотренной в [111]. Разделив уравнение (6.79) на величину  $c^{(0,0)}$ , можем записать его решение в виде

$$\mathbf{b}^T = (q_{c_1}, w_1/(\Delta\tau)^2, q_{c_2}, w_2/(\Delta\tau)^2, q_{c_3}, w_3/(\Delta\tau)^2). \quad (6.84)$$

Откуда

$$y(t) = q_c + (t - \tau_c)w/(\Delta\tau)^2, \quad (6.85)$$

т.е.  $y(t)$  — радиус-вектор точки, движущейся с постоянной скоростью  $w/(\Delta\tau)^2$  и в момент  $\tau_c$  находящейся в  $q_c$ . Заметим, что  $y(t)$  совпадает с решением (6.69), минимизирующим функцию (6.68). При выводе формул (6.84) и (6.85) мы воспользовались тем, что

$$c^{(1,1)}(0, \tau_c) = c^{(1,1)}(q_c, \tau_c), \quad c^{(0,1)}(\tau_c) = 0.$$

Подставив функцию  $y(t)$  из (6.85) в формулу (6.72) и обозначив приближенное значение  $d_r$  через  $\hat{d}_r$ , получим

$$\hat{d}_r^2 = \mathbf{r}^T \left( \mathbf{W} - \frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^T}{(\Delta\tau)^2} \right) \mathbf{r}. \quad (6.86)$$

Заметим, что  $\hat{d}_r$  является верхней оценкой  $d_r$ , т.е. справедливо неравенство  $d_r \leq \hat{d}_r$ .

В рассмотренном приближении мгновенный очаг имеет минимальный средний размер в направлении собственного вектора матрицы  $W - \frac{ww^T}{(\Delta\tau)^2}$ ,

соответствующего ее минимальному собственному значению, и максимальный размер — в направлении собственного вектора, соответствующего максимальному собственному значению той же матрицы.

**Оценка осредненного локального времени действия источника.** В различных точках очаговой области неупругие движения возбуждаются в различные промежутки времени, составляющие время действия источника, для которого выше была приведена оценка. Назовем локальным временем действия источника в точке  $x_0$  временной интервал, в течении которого в этой точке происходят неупругие движения, т.е. функция  $c(x_0, t)$  отлична от нуля.

Назовем локальным временным центроидом  $\tau(x)$  следующую величину:

$$\tau(x) = \int_0^{\infty} c(x, t) t dt / \int_0^{\infty} c(x, t) dt. \quad (6.87)$$

Здесь  $x$  принадлежит очаговой области, так что  $\int_0^{\infty} c(x, t) dt \neq 0$ .

Поскольку  $c(x, t) \geq 0$ , функция (6.87) минимизирует функционал:

$$Q[\varphi(x)] = \int_{\Omega} dV_x \int_0^{\infty} c(x, t) [t - \varphi(x)]^2 dt, \quad (6.88)$$

т.е.  $\varphi(x) = \tau(x)$  — точка минимума функционала  $Q$ .

В качестве оценки осредненного по пространству локального времени действия источника будем рассматривать величину  $2\Delta\theta$ , где аналогично (6.63)

$$(\Delta\theta)^2 = \int_{\Omega} dV_x \int_0^{\infty} c(x, t) [t - \tau(x)]^2 dt / \int_{\Omega} dV_x \int_0^{\infty} c(x, t) dt. \quad (6.89)$$

Из (6.88), (6.89) следует, что

$$(\Delta\theta)^2 = Q[\tau(x)] / c^{(0,0)}. \quad (6.90)$$

Таким образом, для получения оценки  $\Delta\theta$  необходимо минимизировать функционал  $Q$ . Аналогично оценке средних размеров мгновенного очага величина  $\Delta\theta$  может быть лишь приближенно выражена через пространственно-временные моменты функции  $c(x, t)$ . В качестве приближения  $\tau(x)$  в формуле (6.90) будем использовать функцию  $\theta(x)$ , минимизирующую функционал  $Q$  на множестве многочленов по  $x$  степени  $n$ . Докажем существование и единственность такого минимума. Вначале рассмотрим общий случай, когда поле  $c(x, t)$  распределено в некоторой трехмерной области. Пусть  $\theta(x)$  — многочлен степени  $n$ :

$$\theta(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_{\alpha} (x - q_c)^{\alpha}, \quad (6.91)$$

где  $\alpha = (k, l, m)$  — мультииндекс;  $|\alpha| = k + l + m$ ;  $x^{\alpha} = x_1^k x_2^l x_3^m$ .

Если  $N$  — число всевозможных значений мультииндекса  $\alpha$ , таких что

$|\alpha| \geq n$ , т.е. число членов в сумме (6.91), то

$$N = (n + 1)(n + 2)(n + 3)/6. \quad (6.92)$$

Пусть множество значений мультииндекса  $\alpha$  каким-либо образом упорядочено и  $\alpha_i = (k_i, l_i, m_i)$  его  $i$ -е значение. Тогда для  $\theta(x)$  имеем

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^N a_i (x - q_c)^{\alpha_i} = \sum_{i=1}^N a_i (x_1 - q_{c_1})^{k_i} (x_2 - q_{c_2})^{l_i} (x_3 - q_{c_3})^{m_i}, \quad (6.93)$$

где  $a_i = a_{\alpha_i}$  —  $i$ -я компонента  $N$ -мерного вектора  $a$  коэффициентов многочлена (6.93), и

$$Q[\theta(x)] = \int_{\Omega} dV_x \int_0^{\infty} c(x, t) \left[ t - \sum_{i=1}^N a_i (x_1 - q_{c_1})^{k_i} (x_2 - q_{c_2})^{l_i} \times \right. \\ \left. \times (x_3 - q_{c_3})^{m_i} \right]^2 dt. \quad (6.94)$$

Дифференцируя (6.94) по  $a_i$ , получаем

$$\partial Q / \partial a_i = -2 \int_{\Omega} dV_x \int_0^{\infty} c(x, t) (x_1 - q_{c_1})^{k_i} (x_2 - q_{c_2})^{l_i} (x_3 - q_{c_3})^{m_i} \times \\ \times \left[ t - \sum_{j=1}^N a_j (x_1 - q_{c_1})^{k_j} (x_2 - q_{c_2})^{l_j} (x_3 - q_{c_3})^{m_j} \right] dt. \quad (6.95)$$

Условия стационарности  $\partial Q / \partial a_i = 0$  дадут нам  $N$  уравнений для коэффициентов  $a_i$ :

$$b_i = D_{ij} a_j, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (6.96)$$

где

$$b_i = \int_{\Omega} dV_x \int_0^{\infty} c(x, t) (x_1 - q_{c_1})^{k_i} (x_2 - q_{c_2})^{l_i} (x_3 - q_{c_3})^{m_i} t dt = \\ = c_{\underbrace{1 \dots 1}_{k_i} \underbrace{2 \dots 2}_{l_i} \underbrace{3 \dots 3}_{m_i}}^{(p_i, 1)}(q_c, 0); \quad (6.97)$$

$$D_{ij} = \int_{\Omega} dV_x \int_0^{\infty} c(x, t) (x_1 - q_{c_1})^{k_i + k_j} (x_2 - q_{c_2})^{l_i + l_j} (x_3 - q_{c_3})^{m_i + m_j} dt = \\ = c_{\underbrace{1 \dots 1}_{k_i + k_j} \underbrace{2 \dots 2}_{l_i + l_j} \underbrace{3 \dots 3}_{m_i + m_j}}^{(p_i + p_j, 0)}(q_c), \quad p_i = k_i + l_i + m_i. \quad (6.98)$$

Дифференцируя (6.95) по  $a_j$ , получаем матрицу вторых производных функции  $Q$ :

$$\partial^2 Q / \partial a_i \partial a_j = 2D_{ij}. \quad (6.99)$$

Покажем, что матрица  $D$ , элементы которой определяются формулой (6.98), положительно определенная. Для этого рассмотрим систему

функций

$$f_l = (x_1 - q_{c_1})^{k_l} (x_2 - q_{c_2})^{l_l} (x_3 - q_{c_3})^{m_l}$$

и определим скалярное произведение  $(f_l, f_j)$  формулами

$$(f_l, f_j) = \int_{\Omega} \nu(\mathbf{x}) f_l(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}}, \quad (6.100)$$

где  $\nu(\mathbf{x}) = \int_0^{\infty} c(\mathbf{x}, t) dt \geq 0$ . Тогда

$$D_{ij} = (f_i, f_j), \quad (6.101)$$

откуда следует, что  $D$  – матрица Грамма, и поскольку функции  $f_l$  линейно независимы, то она положительно определенная. Положительная определенность матрицы  $D$  обеспечивает существование и единственность решения уравнения (6.96) и минимальность функции  $Q$  на этом решении.

Путь многочлен  $\theta(\mathbf{x})$  – решение уравнения (6.96) и  $Q[\theta(\mathbf{x})]$  – минимальное значение функционала  $Q$ . Тогда в качестве приближенного значения  $(\Delta\theta)^2$  будем рассматривать величину

$$(\Delta\hat{\theta})^2 = Q[\theta(\mathbf{x})]/c^{(0,0)}. \quad (6.102)$$

Легко видеть, что справедливо неравенство  $\Delta\theta \leq \Delta\hat{\theta}$ . Поскольку  $Q[\theta(\mathbf{x})]$  имеет вид (6.94), то формула (6.102) выражает  $(\Delta\hat{\theta})^2$  через пространственно-временные моменты функции  $c(\mathbf{x}, t)$ .

Рассмотрим подробно случай линейной аппроксимации  $\tau(\mathbf{x})$ , т.е.  $n = 1$ . В этом случае выражение (6.93) для  $\theta(\mathbf{x})$  можно записать в виде

$$\theta(\mathbf{x}) = \tau_0 + \mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{q}_c), \quad (6.103)$$

где  $\tau_0 = a_1$ ;  $u_1 = a_2$ ;  $u_2 = a_3$ ;  $u_3 = a_4$ . Из формулы (6.103) видно, что  $\theta(\mathbf{x})$  есть время прихода в точку  $\mathbf{x}$  плоскости с нормалью  $\mathbf{u}/|\mathbf{u}|$ , распространяющейся со скоростью  $u/(\mathbf{u}\mathbf{u})$  так, что  $\theta(\mathbf{q}_c) = \tau_0$ . Обозначим эту плоскость  $\Sigma_{\theta}$ . Здесь  $\mathbf{u}$  – вектор медленности.

С учетом соотношений  $c^{(1,0)}(\mathbf{q}_c) = 0$  и  $c^{(1,1)}(\mathbf{q}_c, 0) = c^{(1,1)}(\mathbf{q}_c, \tau_c)$  уравнение (6.96) может быть сведено к системе уравнений

$$\tau_c = \tau_0, \quad \mathbf{w} = \mathbf{W}\mathbf{u}, \quad (6.104)$$

откуда имеем

$$\theta(\mathbf{x}) = \tau_c + \mathbf{w}^T \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{q}_c), \quad (6.105)$$

$$(\Delta\hat{\theta})^2 = (\Delta\tau)^2 - \mathbf{w}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{w}. \quad (6.106)$$

Все полученные соотношения справедливы и для функции  $c(\mathbf{x}, t)$ , сосредоточенной на плоскости или прямой. В этих случаях в выражениях для  $\theta(\mathbf{x})$  и для моментов  $c(\mathbf{x}, t)$  следует рассматривать  $\mathbf{x}$  как двумерный вектор или скаляр.

Формулы (6.64) и (6.67) дают оценки для времени действия очага в целом и для средних размеров очаговой области, формулы (6.106) и (6.86) – оценки для осредненного по пространству локального времени

действия источника и для осредненных по времени размеров мгновенного очага. Получим соотношение, связывающее эти величины. Пусть  $2l_u$  — оценка размера очаговой области в направлении нормали к плоскости  $\Sigma_\theta$ , а  $2\hat{d}_u$  — осредненный по времени размер мгновенного очага в том же направлении. Тогда в формулах (6.67) и (6.86) следует положить  $r = u/\sqrt{u \cdot u}$  и, учитывая, что  $u = W^{-1}w$ , из (6.67), (6.86) и (6.106) получим

$$\hat{d}_u/l_u = \Delta\hat{\theta}/\Delta\tau. \quad (6.107)$$

При условии, что локальное время действия много меньше времени действия источника в целом, т.е.  $\Delta\hat{\theta}/\Delta\tau \ll 1$ , из формул (6.67), (6.86) и (6.106) следует, что справедливо приближенное равенство  $\Delta\tau \approx |u|l_u$ , и из (6.107) имеем

$$\hat{d}_u/\Delta\hat{\theta} \approx 1/|u| \quad (6.108)$$

(напомним, что  $1/|u|$  — скорость распространения плоскости  $\Sigma_\theta$ ). Соотношения (6.107) и (6.108) свидетельствуют о согласованности предлагаемых оценок пространственных (6.67), (6.86) и временных (6.63), (6.106) характеристик очага землетрясения.

В качестве примера рассмотрим источник, представляющий собой частный случай идеальной плоской подвижки. Пусть скачок смещений имеет постоянное направление  $b$  и разрыв распространяется в прямоугольной плоской области  $\Sigma$  с постоянной скоростью  $v$ , направленной вдоль одной из сторон прямоугольника.

Итак, скачок смещений  $[u(x, t)]$  на плоскости  $\Sigma$  задаем в виде

$$[u(x, t)] = b \Delta u(x, t), \quad (6.109)$$

где  $b$  — постоянный единичный вектор;  $\Delta u(x, t) = |[u(x, t)]|$ . Если  $n$  — единичная нормаль к плоскости разрыва  $\Sigma$ , то тензор избыточных напряжений такого источника имеет вид (1.20), (1.21). Подставляя в эти формулы  $[u(x, t)]$  в виде (6.109), получаем

$$\dot{\Gamma}_{jk}(x, t) = \mu(x) \Delta \dot{u}(x, t) (b_j n_k + b_k n_j) \delta_\Sigma,$$

откуда имеем

$$\dot{\Gamma}_{jk}^{(0,0)} = (b_j n_k + b_k n_j) \int_\Sigma \mu(x) \Delta u(x, \infty) d\Sigma.$$

Поскольку рассматривается идеальная подвижка, скачок смещений  $[u(x, t)]$  лежит в плоскости  $\Sigma$ . Следовательно, и вектор  $b$  лежит в той же плоскости и ортогонален вектору  $n$ , т.е. справедливо равенство  $b_j n_j = 0$ , из которого следует соотношение

$$\sum_{j,k=1}^3 (b_j n_k + b_k n_j)^2 = 2.$$

Используя это соотношение и полагая модуль сдвига  $\mu(x)$  равным постоянному значению  $\mu$  на плоскости разрыва, для скалярного поля  $c(x, t)$ , определяемого формулой (6.57), получим

$$c(x, t) = \alpha \Delta \dot{u}(x, t) \delta_\Sigma, \quad (6.110)$$

где  $\alpha = 2\mu^2 \int_\Sigma \Delta u(x, \infty) d\Sigma$ .

Выберем систему координат так, чтобы плоскость разрыва совпадала с координатной плоскостью  $(x_1, x_2)$ , а стороны прямоугольника, в котором распространяется разрыв, были параллельными координатным осям: скорость распространения разрыва параллельна оси  $x_1$ , а фронт разрыва — оси  $x_2$ . Тогда закон, по которому испаривается разрыв, может быть задан в виде

$$\Delta u(x, t) = \begin{cases} f(t - x_1/v) & \text{при } x \in \Sigma, \\ 0 & \text{при } x \notin \Sigma, \end{cases} \quad (6.111)$$

где  $\Sigma$  — прямоугольная область  $(0 < x_1 < L_1, 0 < x_2 < L_2, x_3 = 0)$ ;  $f(\tau)$  — функция, монотонно возрастающая от нуля при  $\tau \leq 0$  до некоторого предельного значения  $D$  при  $T \leq \tau$ . Производная  $\varphi(\tau) = \dot{f}(\tau)$  — неотрицательная функция, равная нулю при  $\tau \leq 0$  и  $T \leq \tau$ . Из формул (6.110) и (6.111) для функции  $c(x, t)$  имеем

$$c(x, t) = \alpha \varphi(t - x_1/v) \delta(x_3),$$

где  $\alpha = 2\mu^3 L_1 L_2 D$ .

Пространственно-временные моменты функции  $c(x, t)$  выражаются через параметры рассматриваемой модели следующими формулами:

$$c^{(0,0)} = 2(\mu L_1 L_2 D)^2, \quad (6.112)$$

$$q_c^T = (L_1/2, L_2/2, 0), \quad (6.113)$$

$$\tau_c = \tau_\varphi + L_1/(2v), \quad (6.114)$$

$$W_{11} = L_1^2/12, \quad W_{22} = L_2^2/12, \quad (6.115)$$

$$W_{33} = W_{12} = W_{13} = W_{23} = 0,$$

$$w^T = (L_1^2/(12v), 0, 0), \quad (6.116)$$

$$(\Delta\tau)^2 = (\Delta\tau_\varphi)^2 + L_1^2/(12v^2), \quad (6.117)$$

где  $\tau_\varphi = \int_0^\infty \varphi(\tau) \tau d\tau / \int_0^\infty \varphi(\tau) d\tau$  — временной центроид функции  $\varphi(\tau) = \dot{f}(\tau)$ ;

$(\Delta\tau_\varphi)^2 = \int_0^\infty \varphi(\tau) (\tau - \tau_\varphi)^2 d\tau / \int_0^\infty \varphi(\tau) d\tau$ ; величина  $2\Delta\tau_\varphi$  — оценка времени нарастания функции  $f(\tau)$ .

Обозначив через  $2l_{x_1}$ ,  $2l_{x_2}$  и  $2l_{x_3}$  оценки средних размеров очаговой области в направлениях координатных осей, из формул (6.115) и (6.67) получим

$$l_{x_1} = L_1/(2\sqrt{3}), \quad l_{x_2} = L_2/(2\sqrt{3}), \quad l_{x_3} = 0.$$

В аналогичных обозначениях оценки средних размеров мгновенного очага в соответствующих направлениях даются выражениями

$$\hat{d}_{x_1} = (\Delta\tau_\varphi / \Delta\tau) L_1 / (2\sqrt{3}), \quad \hat{d}_{x_2} = l_{x_2}, \quad \hat{d}_{x_3} = 0.$$



Формула (6.106) с учетом соотношений (6.115), (6.116) и (6.117) дает оценку среднего локального времени действия источника в виде

$$\Delta \hat{\theta} = \Delta \tau_{\varphi}. \quad (6.118)$$

Поскольку для рассматриваемой модели из выражения (6.104) с учетом (6.115) и (6.116) имеем

$$\mathbf{u}^T = (1/v, 0, 0), \quad (6.119)$$

соотношения (6.107) и (6.108) принимают вид:

$$\hat{d}_{x_1} / l_{x_1} = \Delta \hat{\theta} / \Delta \tau, \quad \hat{d}_{x_1} / \Delta \hat{\theta} \approx v.$$

Приведенные формулы могут быть использованы при описании очага землетрясения обсуждаемой моделью. Они дают возможность по пространственно-временным моментам тензора  $\hat{\Gamma}_{ij}$  суммарной степени 0, 1 и 2 оценить параметры модели. Пусть нам известны указанные моменты, и они не противоречат гипотезе об идеальной плоской подвижке. Из формул (6.59) получим моменты функции  $c(x, t)$ . Оси введенной выше системы координат параллельны собственным векторам матрицы  $\mathbf{W}$ , причем ось  $x_3$  параллельна собственному вектору, соответствующему нулевому собственному значению, а ось  $x_1$  параллельна вектору  $\mathbf{w}$  (вектор  $\mathbf{w}$  должен быть параллелен одному из собственных векторов матрицы  $\mathbf{W}$ , в противном случае рассматриваемая модель не описывает источник). Приведя матрицу  $\mathbf{W}$  к диагональному виду, из формул (6.115) оценим размеры прямоугольника  $\Sigma$ . Подстановка полученных значений  $L_1$ ,  $L_2$  и вектора  $\mathbf{q}_c$  в формулу (6.113) даст нам положение начала координат, связанного с вершиной прямоугольника  $\Sigma$ . Выразив из соотношения (6.104) вектор  $\mathbf{u}$  и подставив его в формулу (6.119), получим значение скорости распространения разрыва  $v$ . Задавая значение модуля сдвига в области разрыва, из выражения (6.112) получим оценку для максимальной подвижки  $D$ . И наконец, формулы (6.114) и (6.118) дают возможность вычислить временной центрост  $\varphi(\tau)$  и время нарастания подвижки  $2\Delta\tau_{\varphi}$ . Таким образом, рассмотренные выше соотношения дают возможность оценить значения величин, характеризующих процессы, протекающие в очаговой области, по моментам тензора избыточных напряжений, определяемым из длиннопериодных записей сейсмических волн. Эти же соотношения могут быть использованы для оценки значений параметров некоторых моделей очага землетрясения.

**Связь моментов тензора избыточных напряжений с моментами эквивалентной силы.** Поле смещений среды, которые возбуждаются источником с тензором избыточных напряжений  $\Gamma_{ij}(x, t)$ , является решением краевой задачи (1.1)–(1.6) (силу  $f_i$  следует заменить на эквивалентную силу  $g_i$ , определяемую соотношением (1.12)). Из корректности постановки этой задачи следует, что эквивалентная сила  $\mathbf{g}(x, t)$  однозначно определяется возбуждаемым ею полем смещений  $\mathbf{u}(x, t)$ . Тензор же избыточных напряжений  $\Gamma_{ij}(x, t)$ , как это следует из соотношения (1.12), определяется смещениями (посредством  $\mathbf{g}(x, t)$ ) с точностью до тензора

$\dot{\Gamma}_{ij}(x, t)$ , для которого справедливо равенство

$$\dot{\tilde{\Gamma}}_{ij,j} \equiv 0.$$

Для определения функции  $g_i(x, t)$  из соотношений (1.1)–(1.3) необходимо знать смещения  $u(x, t)$  в любой точке среды. Если же нас интересуют моменты эквивалентной силы  $\dot{g}_{i;k_1 \dots k_m}^{(m,n)}$  или моменты ее временной производной  $\dot{\dot{g}}_{i;k_1 \dots k_m}^{(m,n)}$ , то, как будет показано ниже, они могут быть выражены через смещения среды или их спектр в некотором конечном числе точек на свободной поверхности (моменты  $\dot{g}^{(m,n)}$  и  $\dot{\dot{g}}^{(m,n)}$  определяются формулой (1.56), в которой  $\dot{\Gamma}_{ij}$  следует заменить соответственно на  $g_i$  или на  $\dot{g}_i$ ).

Выясним, могут ли моменты тензора  $\dot{\Gamma}_{ij}$  быть выражены через моменты эквивалентной силы. Из определения моментов  $\dot{g}_i$  и  $\dot{\Gamma}_{ij}$  (6.56), формулы (1.12) и теоремы Гаусса–Остроградского имеем

$$\dot{g}_i^{(0,n)}(\tau) = \dot{\dot{g}}_i^{(0,n)}(\tau) \equiv 0, \quad (6.120)$$

$$\begin{aligned} \dot{\dot{g}}_{i;k_1 \dots k_m}^{(m,n)}(\mathbf{q}, \tau) &= \dot{\Gamma}_{ik_1 ik_2 \dots k_m}^{(m-1,n)}(\mathbf{q}, \tau) + \\ &+ \dot{\Gamma}_{ik_2 k_3 \dots k_m k_1}^{(m-1,n)}(\mathbf{q}, \tau) + \dot{\Gamma}_{ik_3 k_4 \dots k_m k_1 k_2}^{(m-1,n)}(\mathbf{q}, \tau) + \\ &+ \dots + \dot{\Gamma}_{ik_m k_1 \dots k_{m-1}}^{(m-1,n)}(\mathbf{q}, \tau); \quad n \geq 0; m \geq 1; i, k_1, \dots, k_m = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (6.121)$$

Соотношение (6.120) естественно, так как нулевой (по пространству) момент  $\dot{g}$  является равнодействующей внутренних сил. В правой части формулы (6.121) суммируются все элементы момента  $\dot{\Gamma}^{(m-1,n)}$ , получаемые циклической перестановкой индексов  $k_1, \dots, k_m$ .

Зафиксируем значения  $m$  и  $n$ , тогда задавая значения индексов  $i, k_1, \dots, k_m$ , можем получить из формулы (6.121) систему уравнений для элементов момента  $\dot{\Gamma}_{ij;k_1 \dots k_{m-1}}^{(m-1,n)}(\mathbf{q}, \tau)$ . В случае, когда  $m = 1$ , соотношение (6.121) принимает вид

$$\dot{\dot{g}}_{i;k}^{(1,n)}(\mathbf{q}, \tau) = \dot{\Gamma}_{ik}^{(0,n)}(\tau). \quad (6.122)$$

Из (6.56) и из симметрии тензора  $\dot{\Gamma}_{ij}$  следует симметрия момента  $\dot{\dot{g}}_{ij;k_1 \dots k_m}^{(m,n)}$  по индексам  $i, j$  и по индексам  $k_1, \dots, k_m$ ; момент же  $\dot{\dot{g}}_{i;k_1 \dots k_m}^{(m,n)}$  симметричен по индексам  $k_1, \dots, k_m$ . Из формулы (6.122) следует симметрия момента  $\dot{\dot{g}}_{i;k}^{(1,n)}$  по индексам  $i$  и  $k$ . В общем случае число различных элементов тензора  $\dot{\Gamma}_{ij;k_1 \dots k_{m-1}}^{(m-1,n)}$ , обладающего указанной симметрией, определяется равенством

$$N_{\Gamma} = 3m(m+1).$$

Итак, число неизвестных в системе уравнений (6.121) равно  $N_{\Gamma}$ . Число же уравнений определяется количеством различных элементов тензора

$\dot{g}_{i; k_1 \dots k_m}^{(m, n)}$ , которое с учетом его симметрии при  $m \geq 2$  равно величине  $N_g = 3(m+1)(m+2)/2$ .

Из рассмотрения, проведенного в работе [110], следует линейная независимость этих уравнений. Таким образом, при  $m \geq 2$  формула (6.121) определяет систему  $N_g$  уравнений для  $N_\Gamma$  неизвестных, причем

$$N = N_\Gamma - N_g = 3(m+1)(m-2)/2. \quad (6.123)$$

Легко видеть, что при  $m=2$   $N=0$ , т.е. число уравнений совпадает с числом неизвестных. В этом случае формула (6.121) принимает вид

$$\dot{g}_{i; k_1 k_2}^{(2, n)}(\mathbf{q}, \tau) = \dot{\Gamma}_{i k_1; k_2}^{(1, n)}(\mathbf{q}, \tau) + \dot{\Gamma}_{i k_2; k_1}^{(1, n)}(\mathbf{q}, \tau). \quad (6.124)$$

Циклическая перестановка индексов  $i, k_1, k_2$  в левой части (6.124) дает

$$\dot{g}_{k_1; k_2 i}^{(2, n)}(\mathbf{q}, \tau) = \dot{\Gamma}_{k_1 k_2; i}^{(1, n)}(\mathbf{q}, \tau) + \dot{\Gamma}_{k_1 i; k_2}^{(1, n)}(\mathbf{q}, \tau), \quad (6.125)$$

$$\dot{g}_{k_2; i k_1}^{(2, n)}(\mathbf{q}, \tau) = \dot{\Gamma}_{k_2 i; k_1}^{(1, n)}(\mathbf{q}, \tau) + \dot{\Gamma}_{k_2 k_1; i}^{(1, n)}(\mathbf{q}, \tau). \quad (6.126)$$

Единственное решение системы уравнений (6.124)–(6.126) имеет вид

$$\dot{\Gamma}_{i k; k_2}^{(1, n)}(\mathbf{q}, \tau) = 0,5 \left[ \dot{g}_{i; k_1 k_2}^{(2, n)}(\mathbf{q}, \tau) + \dot{g}_{k_1; k_2 i}^{(2, n)}(\mathbf{q}, \tau) - \dot{g}_{k_2; i k_1}^{(2, n)}(\mathbf{q}, \tau) \right]. \quad (6.127)$$

Итак, моменты  $\dot{\Gamma}^{(m-1, n)}$  при  $m \leq 2$  однозначно выражаются через моменты  $\dot{g}^{(m, n)}$  формулами (6.122) и (6.127). При  $m > 2$  число неизвестных в системе (6.121) превышает число уравнений (см. формулу (6.123)), и моменты тензора избыточных напряжений не могут быть однозначно выражены через моменты эквивалентной силы. Это становится возможным, если использовать некоторую априорную информацию об источнике [112].

В качестве примера покажем, как моменты  $\dot{\Gamma}^{(m-1, n)}$  однозначно выражаются через моменты  $\dot{g}^{(m, n)}$  в предположении, что источник является идеальной плоской подвижкой. Пусть  $\Sigma$  — плоскость разрыва смещений с единичной нормалью  $\mathbf{n}$ . Тогда тензор избыточных напряжений  $\dot{\Gamma}_{jk}(\mathbf{x}, t)$  определяется формулами (1.20) и (1.21). Для момента  $\dot{\Gamma}_{jk}^{(0,0)}$  имеем

$$\dot{\Gamma}_{jk}^{(0,0)} = n_j a_k + n_k a_j, \quad (6.128)$$

где

$$a_k = \int_0^\infty dt \int_\Sigma \mu(\mathbf{x}) [\dot{u}_k(\mathbf{x}, t)] d\Sigma = \int_\Sigma \mu(\mathbf{x}) [u_k(\mathbf{x}, \infty)] d\Sigma.$$

Поскольку  $[u_k(\mathbf{x}, t)]$  лежит в плоскости  $\Sigma$ , то и вектор  $\mathbf{a}$  лежит в той же плоскости и ортогонален вектору  $\mathbf{n}$ , т.е. имеет место равенство  $a_k n_k = 0$ . Пусть  $\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{n}$  — вектор, ортогональный и вектору  $\mathbf{a}$ , и вектору  $\mathbf{n}$ . Тогда имеем  $n_k b_k = a_k b_k = 0$ . Домножив обе части (6.128) на  $b_k$  и просуммировав

по  $k$ , получим  $\dot{\Gamma}_{jk}^{(0,0)} b_k = 0$ , т.е. матрица  $\dot{\Gamma}^{(0,0)}$  имеет собственный вектор  $\mathbf{b}$ , соответствующий нулевому собственному значению. Легко видеть также, что матрица  $\dot{\Gamma}^{(0,0)}$  имеет нулевой след. Действительно, из (6.128) имеем

$$\text{Tr} \dot{\Gamma}^{(0,0)} = 2n_k a_k = 0.$$

Но поскольку сумма собственных значений матрицы  $\dot{\Gamma}^{(0,0)}$  равна ее следу, а одно из собственных значений равно нулю, то сумма двух других должна быть равна нулю. Итак, обозначив собственные значения  $\dot{\Gamma}^{(0,0)}$  через  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , имеем  $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = -\lambda, \lambda_3 = 0$ . Поскольку матрица  $\dot{\Gamma}^{(0,0)}$  симметрична, то ее собственные векторы взаимно ортогональны и образуют базис, в котором  $\dot{\Gamma}_{jk}^{(0,0)}$  имеет вид

$$\dot{\Gamma}_{jk}^{(0,0)} = \lambda \delta_{j1} \delta_{k1} - \lambda \delta_{j2} \delta_{k2}, \quad (6.129)$$

т.е. все элементы  $\dot{\Gamma}_{jk}^{(0,0)}$  равны нулю, кроме  $\dot{\Gamma}_{11}^{(0,0)} = \lambda$  и  $\dot{\Gamma}_{22}^{(0,0)} = -\lambda$ . Домножив обе части (6.128) на  $n_k$  и просуммировав по  $k$ , получим

$$\dot{\Gamma}_{jk}^{(0,0)} n_k = a_j. \quad (6.130)$$

С другой стороны, из (6.129) следует, что в базисе из собственных векторов  $\dot{\Gamma}^{(0,0)}$  справедливо соотношение

$$\dot{\Gamma}_{jk}^{(0,0)} n_k = \lambda(n_1 \delta_{j1} - n_2 \delta_{j2}). \quad (6.131)$$

В этом же базисе из формул (6.130) и (6.131) имеем равенство

$$a_j = \lambda(n_1 \delta_{j1} - n_2 \delta_{j2}),$$

домножив которое на  $n_j$ , имеем  $\lambda(n_1^2 - n_2^2) = 0$  или  $n_1^2 = n_2^2$  ( $a_3 = n_3 = 0, \mathbf{a} \perp \mathbf{b}, \mathbf{n} \perp \mathbf{b}$ ). Отсюда следует, что вектор  $\mathbf{n}$  направлен вдоль биссектрисы вертикальных углов, образованных собственными векторами  $\dot{\Gamma}^{(0,0)}$ , соответствующими ненулевым собственным значениям. Вектор  $\mathbf{a}$  направлен вдоль биссектрисы другой пары углов, образованных этими же векторами. Различить эти два вектора, зная лишь момент  $\dot{\Gamma}^{(0,0)}$ , невозможно.

В базисе  $(\mathbf{n}, \mathbf{a}/|\mathbf{a}|, \mathbf{b}/|\mathbf{b}|)$  лишь два элемента матрицы  $\dot{\Gamma}^{(0,0)}$  отличны от нуля — это элементы  $\dot{\Gamma}_{12}^{(0,0)} = \dot{\Gamma}_{21}^{(0,0)} = |\mathbf{a}|$  (что следует из формулы (6.128)). В этом же базисе в общем случае отличны от нуля лишь следующие элементы тензора  $\dot{\Gamma}_{ij}(\mathbf{x}, t)$ :

$$\dot{\Gamma}_{12} = \dot{\Gamma}_{21}, \dot{\Gamma}_{13} = \dot{\Gamma}_{31}.$$

Пусть из наблюдаемых смещений получены моменты  $\dot{\mathbf{g}}^{(m,n)}(q_0, \tau_0)$ . Как видно из формулы (6.56), зная моменты некоторой функции относительно точки  $q_0$  и момента времени  $\tau_0$ , можно получить значения моментов относительно любой другой точки  $q$  и любого другого момента времени  $\tau$ . С помощью (6.122) и (6.127) могут быть найдены моменты  $\dot{\Gamma}^{(0,n)}$  и  $\dot{\Gamma}^{(1,n)}$  для любого  $n$ . Воспользовавшись соотношениями (6.59), (6.61) и (6.62), получим значения  $q_c$  и  $\tau_c$ . Пусть  $\dot{\Gamma}^{(0,0)}$  имеет собственные

значения  $\lambda_1 = -\lambda_2$  и  $\lambda_3 = 0$ . В качестве базиса выберем единичные векторы  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{r}_3$ , где  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  параллельны биссектрисам углов, образованных собственными векторами матрицы  $\dot{\Gamma}^{(0,0)}$ , соответствующими  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , а  $\mathbf{r}_3$  — собственный вектор той же матрицы, соответствующий собственному значению  $\lambda_3 = 0$ . В этом базисе от нуля отличны лишь два элемента матрицы  $\dot{\Gamma}^{(0,0)}$ :  $\dot{\Gamma}_{12}^{(0,0)} = \dot{\Gamma}_{21}^{(0,0)}$ . Предположив, что источник является идеальной плоской подвижкой, мы можем утверждать, что в выбранном базисе справедливо либо  $\mathbf{n}^T = (1, 0, 0)$ , либо  $\mathbf{n}^T = (0, 1, 0)$ , где  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к плоскости  $\Sigma$  разрыва смещений. Кроме того, из (1.21) следует, что диагональные элементы  $\dot{\Gamma}_{ii}(\mathbf{x}, t)$  матрицы  $\dot{\Gamma}_{ij}(\mathbf{x}, t)$  равны нулю. Это дает нам возможность однозначно выразить элементы  $\dot{\Gamma}_{12;11}^{(2,0)}(\mathbf{q}_c) = \dot{\Gamma}_{21;11}^{(2,0)}(\mathbf{q}_c)$  и  $\dot{\Gamma}_{12;22}^{(2,0)}(\mathbf{q}_c) = \dot{\Gamma}_{21;22}^{(2,0)}(\mathbf{q}_c)$  тензора  $\dot{\Gamma}^{(2,0)}(\mathbf{q}_c)$  через соответствующие элементы тензора  $\dot{\mathbf{g}}^{(3,0)}(\mathbf{q}_c)$ . Действительно, поскольку  $\dot{\Gamma}_{11;21}^{(2,0)} = \dot{\Gamma}_{22;12}^{(2,0)} = 0$ , из (1.121) имеем

$$\dot{\Gamma}_{12;11}^{(2,0)}(\mathbf{q}_c) = \dot{g}_{1;211}^{(3,0)}(\mathbf{q}_c), \quad \dot{\Gamma}_{12;22}^{(2,0)}(\mathbf{q}_c) = \dot{g}_{2;122}^{(3,0)}(\mathbf{q}_c). \quad (6.132)$$

Далее из (6.59), (6.122) и (6.132) получим

$$\begin{aligned} c_{11}^{(2,0)}(\mathbf{q}_c) &= 2\dot{g}_{1;2}^{(1,0)} \dot{g}_{1;211}^{(3,0)}(\mathbf{q}_c), \\ c_{22}^{(2,0)}(\mathbf{q}_c) &= 2\dot{g}_{1;2}^{(1,0)} \dot{g}_{2;122}^{(3,0)}(\mathbf{q}_c). \end{aligned} \quad (6.133)$$

Пусть  $2l_1$  — средний размер очаговой области в направлении  $\mathbf{r}_1$ , а  $2l_2$  — в направлении  $\mathbf{r}_2$ . Тогда из (6.66) и (6.67) имеем

$$l_1^2 = c_{11}^{(2,0)}(\mathbf{q}_c)/c^{(0,0)}, \quad l_2^2 = c_{22}^{(2,0)}(\mathbf{q}_c)/c^{(0,0)},$$

и если принятое предположение относительно источника верно, то хотя бы одна из величин (6.133) равна нулю, так как одно из направлений  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  совпадает с нормалью к плоскости разрыва.

Пусть  $c_{11}^{(2,0)}(\mathbf{q}_c) = 0$ , а  $c_{22}^{(2,0)}(\mathbf{q}_c) \neq 0$ . В этом случае  $\mathbf{n} = \mathbf{r}_1$  и плоскость разрыва  $\Sigma$  совпадает с плоскостью  $x_1 = q_{c1}$ , откуда следует (см. (6.56)) равенство нулю всех элементов  $\dot{\Gamma}_{ij;k_1 \dots k_m}^{(m,n)}(\mathbf{q}_c, \tau)$  момента  $\dot{\Gamma}^{(m,n)}(\mathbf{q}_c, \tau)$ , для которых хотя бы один из индексов  $k_i$  равен единице. Если же ни один из индексов  $k_i$  не равен единице, то, используя симметрию тензора  $\dot{\Gamma}_{ij}(\mathbf{x}, t)$  и его моментов по индексам  $i$  и  $j$  и учитывая отличие от нуля лишь элементов  $\dot{\Gamma}_{12} = \dot{\Gamma}_{21}, \dot{\Gamma}_{13} = \dot{\Gamma}_{31}$ , из формулы (1.121) получим требуемое соотношение

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_{ij;k_1 \dots k_m}^{(m,n)}(\mathbf{q}_c, \tau) &= (\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1})\dot{g}_{2;1 k_1 \dots k_m}^{(m+1,n)}(\mathbf{q}_c, \tau) + \\ &+ (\delta_{i1}\delta_{j3} + \delta_{i3}\delta_{j1})\dot{g}_{3;1 k_1 \dots k_m}^{(m+1,n)}(\mathbf{q}_c, \tau). \end{aligned} \quad (6.134)$$

В случае, когда  $c_{22}^{(2,0)}(\mathbf{q}_c) = 0$ , а  $c_{11}^{(2,0)}(\mathbf{q}_c) \neq 0$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{r}_2$ , и нулю равны элементы  $\dot{\Gamma}_{ij;k_1 \dots k_m}^{(m,n)}(\mathbf{q}_c, \tau)$ , если хотя бы один из индексов  $k_i$  принимает значение 2. Для ненулевых элементов  $\dot{\Gamma}^{(m,n)}$  выполняется соотношение, получаемое из (6.134) заменой индексов 1 на 2 и 2 на 1.

Если же одновременно и  $c_{11}^{(2,0)}(q_c) = 0$ , и  $c_{22}^{(2,0)}(q_c) = 0$ , то очаговая область представляет собой прямолинейный отрезок, направленный вдоль  $r_3$ :

$$x_1 = q_{c_1}, x_2 = q_{c_2}.$$

В этом случае отличны от нуля лишь элементы  $\Gamma_{j i: k_1 \dots k_m}^{(m, n)}(q_c, \tau)$ , которые удовлетворяют следующим условиям:  $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 3$  и  $i, j$  не равны одновременно 3. Пусть  $i \neq 3$ . Тогда их (1.121) имеем

$$\dot{\Gamma}_{i j: \underbrace{3 \dots 3}_m}^{(m, n)}(q_c, \tau) = \dot{g}_{j i: \underbrace{3 \dots 3}_m}^{(m+1, n)}(q_c, \tau). \quad (6.135)$$

Таким образом, показано, что моменты  $\dot{\Gamma}^{(m, n)}$  могут быть однозначно выражены через моменты  $\dot{g}^{(m+1, n)}$  для любых  $m$  и  $n$  в предположении, что источник является идеальным плоским сдвигом.

**Связь поля смещений среды с моментами эквивалентной силы.** Рассмотрим соотношения, связывающие наблюдаемые смещения среды с моментами эквивалентной силы, которые могут быть использованы для оценки этих моментов.

Заменив в (1.9)  $\dot{f}_j$  на  $\dot{g}_j$ , получим формулу, выражающую поле смещений  $u_i$  через производную эквивалентной силы  $\dot{g}_j$ :

$$u_i(x, t) = \int_0^{te} d\tau \int_{\Omega} H_{ij}(x, y, t - \tau) \dot{g}_j(y, \tau) dV_y.$$

Заменив в этом выражении функцию  $H_{ij}(x, y, t - \tau)$  ее рядом Тейлора по степеням  $y$  и по степеням  $\tau$ , получим

$$\begin{aligned} u_i(x, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m!n!} \dot{g}_{j: k_1 \dots k_m}^{(m, n)}(0, 0) \times \\ &\times \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{\partial}{\partial y_{k_1}} \dots \frac{\partial}{\partial y_{k_m}} H_{ij}(x, y, t) |_{y=0}. \end{aligned} \quad (6.136)$$

Разлагая  $H_{ij}$  в ряд по степеням  $y$ , считаем упругие параметры среды достаточно гладкими. Для преобразований Фурье  $\hat{u}_i(x, \omega)$  и  $\hat{H}_{ij}(x, y, \omega)$  из (6.136) имеем

$$\begin{aligned} \hat{u}_i(x, \omega) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m!n!} \dot{g}_{j: k_1 \dots k_m}^{(m, n)}(0, 0) \times \\ &\times (-i\omega)^n \frac{\partial}{\partial y_{k_1}} \dots \frac{\partial}{\partial y_{k_m}} \hat{H}_{ij}(x, y, \omega) |_{y=0}. \end{aligned} \quad (6.137)$$

Поскольку соотношения (6.136) и (6.137) содержат бесконечные ряды, они не могут быть использованы для вычисления моментов  $\dot{g}^{(m, n)}$ . Однако если функцию смещений  $u_i(x, t)$  и интеграл функции Грина  $H_{ij}(x, y, t)$  подвергнуть низкочастотной фильтрации, то члены рядов (6.136) и (6.137) начнут убывать с ростом  $n$  и  $m$  и появится возможность ограничиться конечными суммами.

Большая часть энергии низкочастотного спектра поля смещений обычно переносится поверхностными волнами. Способы выделения отдельных поверхностных волн и измерения их спектральных характеристик были описаны в гл. 5. Длиннопериодные смещения в поверхностной волне или их спектр могут быть представлены соответственно в виде (6.136) и (6.137). При этом в качестве  $H_{ij}$  следует брать интеграл соответствующей длиннопериодной поверхностно-волновой функции Грина для выбранной модели среды и типа волны, а в качестве  $\hat{H}_{ij}$  его спектр  $(i\omega)^{-1} \hat{G}_{ij}$ .

Проведенное выше рассмотрение основывалось на самых общих положениях о строении среды вне очаговой области. Поэтому для описания поверхностно-волновой функции Грина можно пользоваться как формулой (1.31) для горизонтально-однородной среды, так и формулами типа (2.29) и (6.54) для различных моделей горизонтально-неоднородных сред (функция  $W^{kD}$  определена формулами (1.32),  $S(\omega) \equiv 1$ ).

Пусть  $\hat{u}_i(\mathbf{x}, \omega)$  в формуле (6.137) — низкочастотный спектр такой волны. Из соотношений (1.31), (1.32) и (6.54) следует, что величина

$\frac{\partial}{\partial y_{k_1}} \dots \frac{\partial}{\partial y_{k_m}} \hat{H}_{ij}$  пропорциональна  $\omega^m$ . Пусть начало отсчета времени выбрано так, что источник начинает действовать в момент времени, близкий к  $t = 0$ , а в качестве начала координат выбрана точка, близкая к области  $\Omega$  или принадлежащая ей. Пусть  $L = \max_{x \in \Omega} |\mathbf{x}|$ . Тогда момент  $\dot{g}^{(m,n)}(0,0)$  не

превышает величины пропорциональной  $L^m t_e^n$  (напомним, что  $t_e$  — время действия источника). Считая для сейсмического источника величины  $L$  и  $t_e$  пропорциональными, приходим к выводу, что при  $\omega t_e < 1$  члены ряда (6.137) убывают не медленнее, чем  $(\omega t_e)^{m+n}$ . Таким образом, для достаточно малых частот  $\omega$  с высокой степенью точности бесконечные суммы в формулах (6.136) и (6.137) могут быть заменены суммами нескольких первых членов, таких, что  $m + n \leq M$ . Представив в таком виде смещения (или их спектр) в поверхностных волнах, зарегистрированных в некотором числе точек на свободной поверхности, мы можем получить систему уравнений для определения моментов  $\dot{g}^{(m,n)}$  суммарной степени  $m + n \leq M$ . Различные типы поверхностных волн и различные их моды дают независимые уравнения для  $\dot{g}^{(m,n)}$ , так как несут в себе различную информацию о процессах в очаговой области. Аналогично для оценки моментов могут быть использованы записи объемных волн (см. работу [73]).

Заметим, что оценки пространственно-временных характеристик очага землетрясения не могут быть получены непосредственно из моментов эквивалентной силы (без использования моментов тензора избыточных напряжений) ввиду того, что нулевой пространственный момент  $\dot{g}_I$  тождественно равен нулю (см. формулу (6.120)).

## НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗУЧЕНИЯ РЕГИОНАЛЬНОГО СТРОЕНИЯ ЛИТОСФЕРЫ ПОВЕРХНОСТНЫМИ ВОЛНАМИ

### § 7.1. Применение методики исключения трасс для изучения земной коры Евразии

Наблюдения цифровых сейсмологических обсерваторий, и в особенности сейсмологических групп, открывают уникальную возможность получения данных о региональном строении земной литосферы. Для этой цели используются записи поверхностных волн, трассы распространения которых от эпицентра к месту регистрации пересекают районы различного тектонического строения. Получению достоверных данных способствует высокая точность измерений, обусловленная большим динамическим диапазоном цифровой регистрации, высоким уровнем отношения сигнал/шум, возможностью применения современных методов пространственно-спектрально-временного и поляризационного анализа колебаний на ЭВМ. Мы продемонстрируем возможности (далеко не все) измерений этого типа на примере анализа поверхностных волн, зарегистрированных группой НОРСАР от серии сейсмических источников в различных точках Евразии. Для обработки наблюдений поверхностных волн использовались в основном две описанные в гл. 5 методики, реализованные в соответствующие программы для ЭВМ, а именно пространственно- и спектрально-временной анализ.

При анализе данных использовалась вертикальная компонента поверхностной волны Рэлея для серии сейсмических событий в пределах южной части шельфа Баренцева моря, Русской плиты, Западного и Восточного Казахстана, Средней Азии и Китая, включая форшок и основное Газлийское землетрясение 1976 г. На рис. 7.1 показаны десять трасс распространения поверхностных волн от эпицентров до группы НОРСАР; им приданы условные номера 1–10 (на рисунке крупные цифры).

Дисперсионные кривые фазовой и групповой скоростей основной моды волны Рэлея для всех трасс приведены на рис. 7.2; они в общем сходны, за исключением дисперсионных кривых на трассах, пересекающих Прикаспийскую впадину (трассы 7,8) и южную часть шельфа Баренцева моря (трассы 9, 10). Групповые скорости здесь в широком диапазоне периодов существенно ниже, чем на других трассах. Основываясь на тектонической карте Евразии [86], мы произвели разбиение трасс на участки (на рисунке они показаны малыми цифрами) с различным тектоническим строением: Балтийский щит (участок 1 на всех трассах); Русская платформа (участок 2 трасс 2–8); шельф Баренцева моря (участок 2 трасс 9, 10); Урал, Западно-Сибирская плита и Казахская складчатая страна (участок 3 трасс 3,4); Прикаспийская депрессия (участок 3 трасс 6, 7); горные районы Тарбагатай – Тянь-Шаня (участок 4 трассы 4); Туранская плита (участок 4 трасс 6, 7); границы участков трасс показаны на рис. 7.1 разделительным знаком.

Используя как эталоны трассы, проходящие по сравнительно однородным территориям, мы нашли разностные дисперсионные кривые для от-



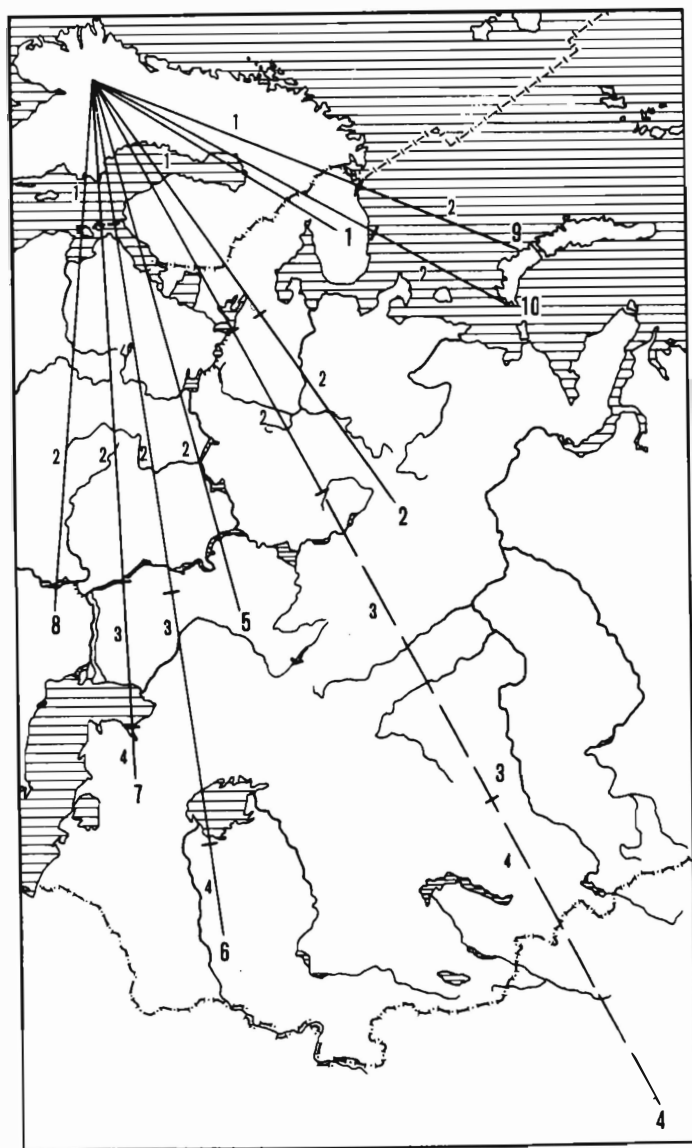


Рис. 7.1. Трассы распространения поверхностных волн от эпицентров до группы НОРСАР

Крупные арабские цифры – номера трасс, мелкие – участков, относящихся к отдельным участкам.

Вначале по этим данным методом проб и ошибок с использованием программы для расчета волн Рэлея в вертикально-неоднородной среде были найдены модели, удовлетворительно согласующиеся с наблюдаемыми данными, а затем проводилось уточнение модели путем машинного поиска по методике [198]. Уточнение не привело к заметным

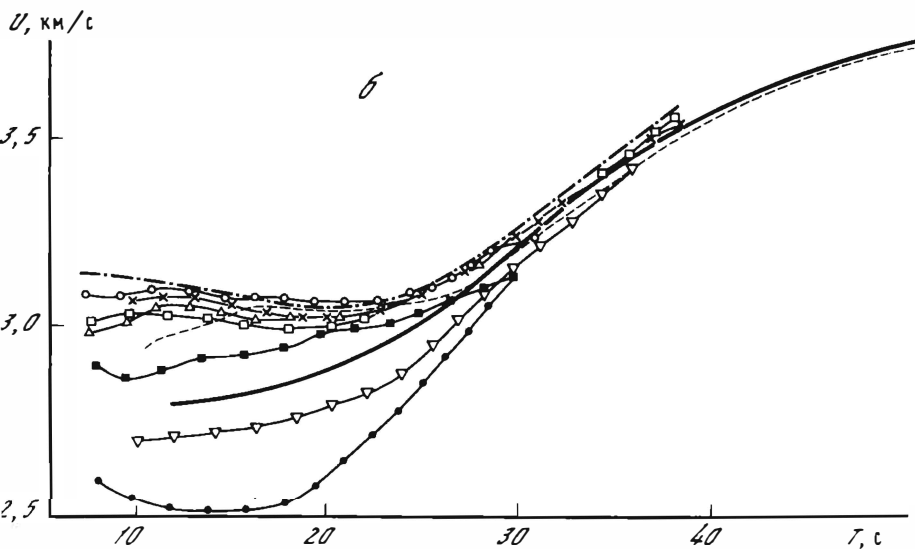
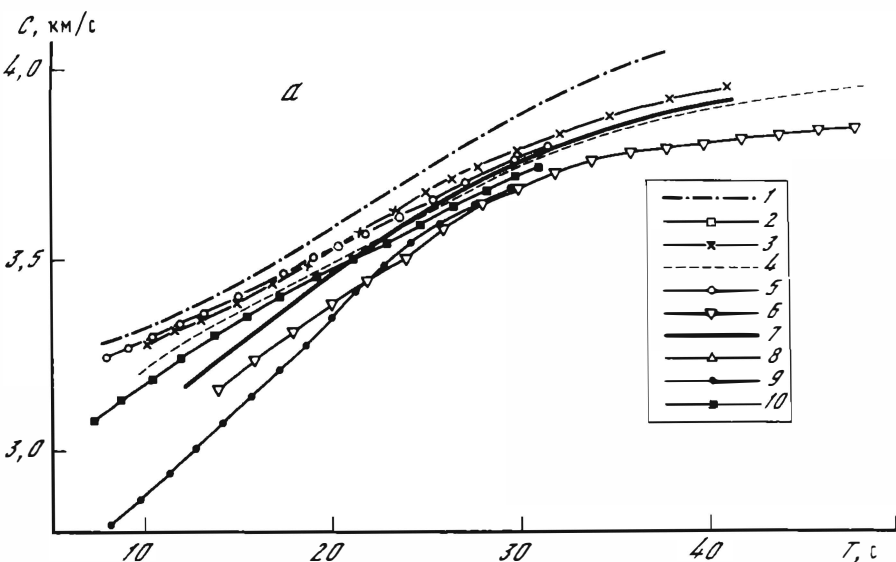


Рис. 7.2. Наблюдаемые дисперсионные кривые основной моды волны Рэлея  
 а - фазовые скорости; б - групповые скорости, 1-10 - номера трасс

изменениям полученного скоростного разреза, однако позволило оценить пределы возможных ошибок и разрешающую способность наблюдений. Установлено, что наиболее надежно оцениваются скорости поперечных волн в коре и верхах мантии, менее надежно - плотности и скорости продольных волн в коре и верхней мантии.

Ниже будут рассмотрены результаты анализа по отдельным регионам.

### 1. Балтийский щит

На бл ю д е н и я. Трасса 1 длиной около 1300 км расположена полностью в пределах одной крупной тектонической области — Балтийского щита. Данные пространственно-временного анализа указывают, что азимут подхода основного сигнала к группе очень близок к теоретическому ( $45,2^\circ$ ); каких-либо вторичных волн, превышающих уровень шума, на записях не наблюдается. Кривые групповой и фазовой скоростей основной моды волн Рэлея надежно определяются при помощи СВАНа в интервале 6—45 с. Высшие моды волн Рэлея не выделены.

Представляет интерес сопоставление наших данных, полученных одностанционным методом, с другими наблюдениями на Балтийском щите [120, 169, 172] (рис. 7.3). Во всех этих работах фазовые скорости определялись непосредственно двустанционным методом; групповые скорости получены только в работе [172] дифференцированием кривой фазовой скорости (наблюдения велись на финской части щита в меридиональном направлении). Фазовые скорости близки к наблюдаемым нами, различия всюду меньше 0,06 км/с, но носят систематический характер, так как полученные кривые имеют различный наклон. Это приводит к ощутимым различиям в групповых скоростях (до 0,15 км/с), особенно заметным на периодах около 20—30 с. Полученные в работе [169] фазовые скорости в интервале периодов 17—35 с незначительно превышают наблюдаемые нами скорости для периодов 20—30 с (трасса наблюдений Копенгаген—Пулково проходила по южной части щита). В работе [120] приводятся данные для ряда трасс на щите и, в частности, трассы Консберг—Оулу, практически являющейся частью нашей трассы. Для перекрывающегося диапазона периодов наблюдаемые фазовые скорости на 0,08—0,03 км/с превосходят найденные нами.

Интересно также сравнить наши наблюдения с данными из [20] по Канадскому щиту (см. рис. 7.3). Во всем изученном интервале периодов скорости на Канадском щите выше наблюдаемых нами на 0,03—0,1 км/с, причем наибольшие различия отмечены для периодов 20—30 с.

И н т е р п р е т а ц и я. Сходство дисперсионных кривых, полученных на разных трассах, близость азимута подхода к теоретическому и отсутствие сильных поздних вступлений свидетельствуют о большой однородности изучаемой области. Учитывая ряд преимуществ наших наблюдений перед данными других авторов (цифровая запись, высокое отношение сигнал/шум, отсутствие возможной рефракции лучей на пути эпицентр—станция), мы склонны считать наши наблюдения более точными, чем предшествующие. Это заключение оправдывает попытку уточнить скоростную модель щита, предложенную в [120, 127, 172]. Результирующая модель, а также модели других авторов и модель для Канадского щита показаны на рис. 7.4. Более полные сведения даны в табл. 7.1. Найденная нами модель имеет несколько меньшие скорости в самой верхней части коры и несколько более высокие скорости в мантии, чем модель UL 056 Нопонена и др. [172].

### 2. Русская плита

На бл ю д е н и я. Мы располагаем тремя трассами (2, 5, 8), расположенными полностью в пределах Балтийского щита и Русской плиты.

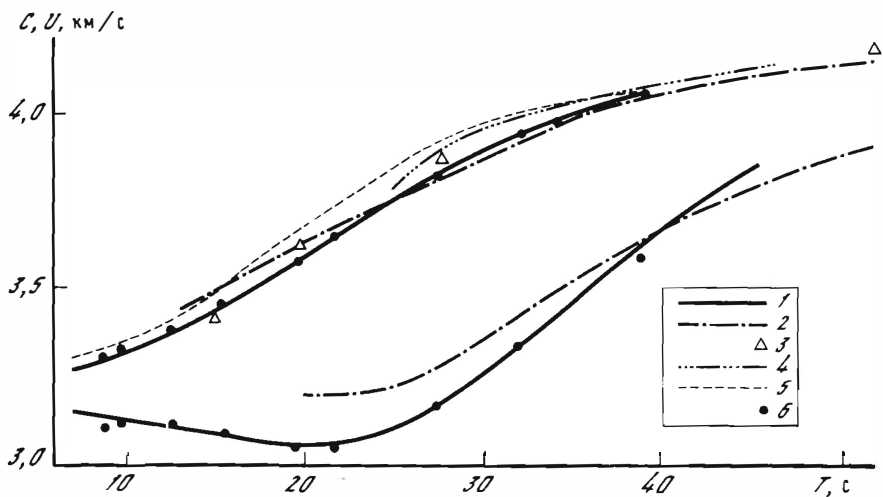


Рис. 7.3. Сравнение наблюдаемых и теоретических кривых групповой и фазовой скоростей для Балтийского щита

1 — наблюдения на трассе 1; 2 — данные из [172]; 3 — [169]; 4 — [120]; 5 — данные для Канадского щита [20]; 6 — расчетные значения для выбранной модели

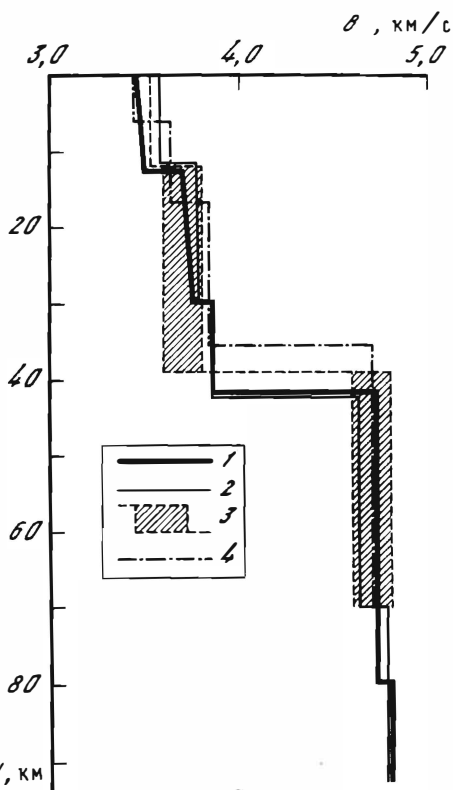


Рис. 7.4. Модели строения земной коры Балтийского щита

1 — модель для трассы 1; 2 — модель UL056 [172]; 3 — область решений из [120]; 4 — модель Канадского щита [20]

Т а б л и ц а 7.1. Модели земной коры ряда тектонических регионов Евразии по данным о дисперсии поверхностных волн

Регион	Номер трассы и участка	Номер слоя	Интервал глубин, км	Интервал скоростей $b$ , км/с
Балтийский щит	1	1	0–12	3,45–3,50
		2	12–30	3,70–3,76
		3	30–42	3,85–3,85
		4	42–80	4,72–4,72
		5	80–	4,80
Русская плита	2 <sub>2</sub>	1	0–2	2,30–2,30
		2	2–12	3,35–3,50
		3	12–22,5	3,50–3,70
		4	22,5–45	3,70–4,00
		5	45–65	4,40–4,40
		6	65–140	4,20–4,20
		7	140–	4,60
	5 <sub>2</sub>	1	0–2	2,60–2,60
		2	2–11,5	3,35–3,55
		3	11,5–22,5	3,65–3,75
		4	22,5–43	3,80–3,90
		5	43–	4,55
	8 <sub>2</sub>	1	0–2	2,60–2,60
		2	2–10	3,50–3,50
		3	10–22,5	3,70–3,75
4		22,5–43	3,80–3,90	
5		43–	4,45	
Западно-Сибирская плита	3 <sub>3</sub>	1	0–1,0	2,90–2,90
		2	1–12	3,50–3,65
		3	12–25	3,65–3,65
		4	25–43	3,75–3,75
		5	43–	4,45
Прикаспийская синеклиза	7 <sub>3</sub>	1	0–4	2,00–2,00
		2	4–16	3,00–3,00
		3	16–23	3,60–3,60
		4	23–38	3,90–3,90
		5	38–	4,60

Трасса 2 протяженностью около 2400 км пересекает среднюю часть Балтийского щита и север Московской синеклизы, небольшая часть ее проходит по южной оконечности Тиманского кряжа. Длина "шитовой" части трассы около 1500 км, "платформенной" (включая Тиманское поднятие) – 900 км. По данным ПВАНа, азимут подхода сигнала к группе слабо, но значимо отличается от теоретического ( $68,7^\circ$ ), отклоняясь приблизительно на  $2,5^\circ$  к югу в области максимума амплитуд. Никаких существенных по амплитуде последующих вступлений не отмечается. Спектрально-временной анализ позволяет уверенно выделить, помимо основной моды волны Рэлея в диапазоне периодов 8–42 с, первую высшую моду

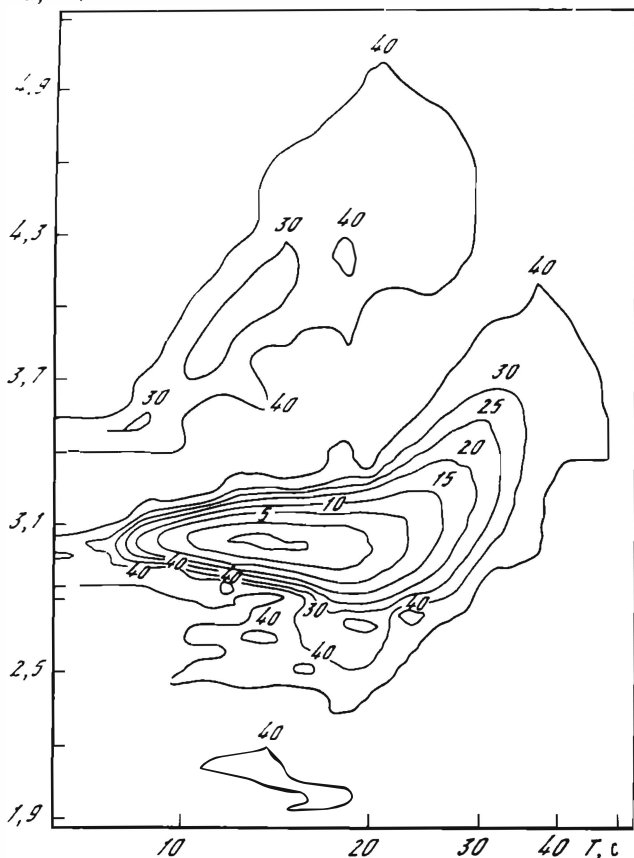
$U, \text{ км/с}$ 

Рис. 7.5. Диаграмма СВАНа для трассы 2

Цифры у кривых — ослабление интенсивности (в ДБ)

с периодами 6–30 с (рис. 7.5). Уровень максимальных амплитуд в основной моде примерно в 25 раз выше, чем в первой высшей моде.

Трасса 5 пересекает юго-восточную часть Балтийского щита и прилегающую часть Русской плиты, Московскую синеклизу, Волго-Уральскую антеклизу и заканчивается в области стыка Предуральского прогиба, Прикаспийской депрессии и крайнего юго-востока Русской плиты. Длины "щитовой" и "платформенной" частей трассы  $S_1$  и  $S_2$  равны соответственно 840 и 1990 км. Уровень сигнала весьма слаб, однако азимутальные отклонения не превышают  $1^\circ$ – $1,5^\circ$  (к югу). Надежные определения дисперсионных кривых основной моды возможны только в пределах 7–30 с.

Трасса 8 длиной около 2700 км пересекает южную часть Балтийского щита, запад Русской плиты, следует вдоль Воронежской антеклизы, пересекает Доно-Медведицкий вал и заканчивается на стыке Прикаспийской депрессии и Ставропольского поднятия. Длина "щитовой" и "платформенной" частей трассы соответственно 505 и 2175 км. Как видно из диаг-

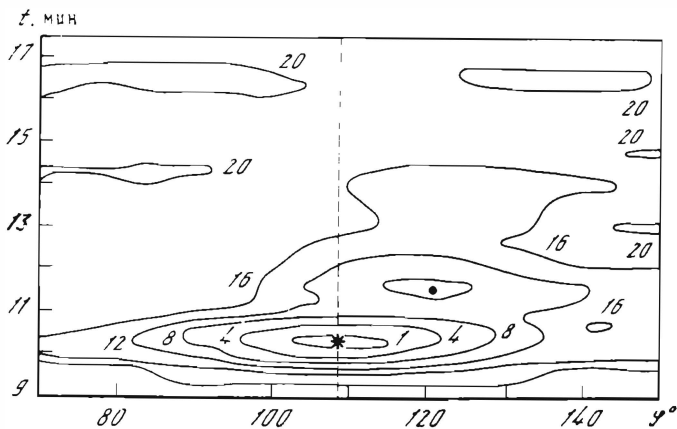


Рис. 7.6. Диаграмма пространственно-временного анализа записи для трассы 8 ( $C = 3,47$  км/с)

Цифры у кривых — величины спада  $P_c$  (в Дб). Звездочка и точка указывают положение максимумов амплитуд основного сигнала и последующего вступления

раммы ПВАНа (рис. 7.6), азимутальных отклонений основного сигнала от теоретического значения  $110^\circ$  не наблюдается. В последующих вступлениях выделяется волна с азимутом подхода  $120^\circ$ , запаздывающая относительно основного сигнала на 100–120 с. Дисперсионные кривые основной моды волны Рэлея определены в интервале 8–30 с.

**Интерпретация.** При определении дисперсионных кривых для платформенной части трасс 2, 5 и 8 мы исходили из предположения о совпадении дисперсионных кривых для трасс 1 и  $2_1, 5_1, 8_1$ . Устойчивость дисперсии на различных трассах вдоль щита делает это предположение разумным. Результирующие кривые для трасс  $2_2, 5_2$  и  $8_2$  приведены на рис. 7.7.

Они располагаются заметно ниже, чем типовые платформенные кривые, приведенные в [19, 44]. Модели земной коры, соответствующие наблюдаемой дисперсии, приведены на рис. 7.8 вместе с моделью для щита. Для всех этих моделей был зафиксирован осадочный слой мощностью 2 км. Для трасс  $5_2$  и  $8_2$  скорость поперечных волн в нем равнялась 2,6 км/с, для трассы  $2_2$  — 2,3 км/с. Поскольку наблюдаемые периоды больше 8 с, точность оценки параметров осадочного слоя невелика. Верхняя часть консолидированной коры (до глубины 12 км) для трасс  $5_2$  и  $8_2$  имеет сравнительно низкие скорости поперечных волн (меньше чем скорости на щите на тех же глубинах на 0,07–0,10 км/с). Для трассы  $2_2$  характерны пониженные скорости и в более глубоких слоях коры, большая мощность коры (45 км), низкая скорость (4,45 км/с) в кровле мантии. Данные указывают также на наличие здесь слоя пониженной скорости в мантии на глубинах более 65 км. О существовании слоя пониженной скорости в мантии на северо-востоке Русской плиты свидетельствуют также наблюдения объемных (продольных) волн [16], о пониженных скоростях в верхней мантии примыкающих к плите северных акваторий — результаты работы [156].

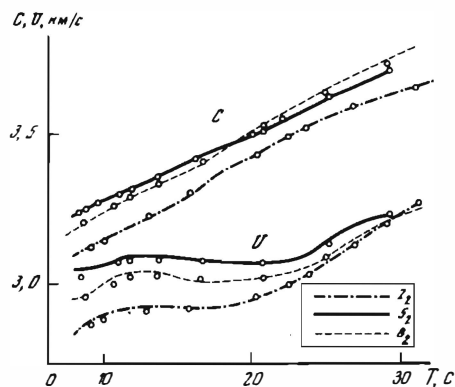


Рис. 7.7. Сравнение наблюдаемых дисперсионных кривых для участков  $2_2$ ,  $5_2$ ,  $8_2$ , расположенных на Русской плите, с расчетом

Точки – расчетные значения скоростей для моделей рис. 7.8.

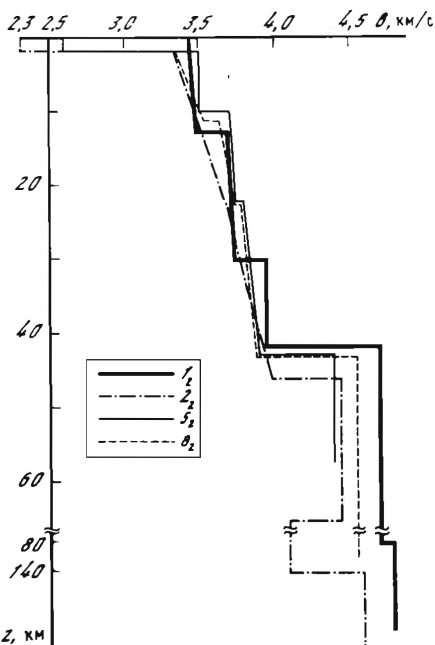


Рис. 7.8. Модели строения земной коры для различных частей Русской плиты

### 3. Западно-Сибирская плита и Казахская складчатая страна

На бл ю д е н и я. Трасса 3 (ей соответствуют три наблюдаемых записи) пересекает Балтийский щит, Русскую плиту в ее северо-восточной части, несколько южнее трассы 2, Средний Урал и юг Западно-Сибирской плиты, следуя далее вдоль границы этой плиты и Казахской складчатой страны. Общая длина трассы 3 – 4260 км, ее отдельных участков  $3_1$  (Балтийский щит),  $3_2$  (Русская плита),  $3_3$  (Урал, Западно-Сибирская плита и Казахская складчатая страна) – соответственно 1500, 1070, 1690 км.

Диаграммы СВАН свидетельствуют о небольшом, но значимом отклонении азимутов подхода основного сигнала от теоретического ( $74,7^\circ$ ) к югу на  $2-2,5^\circ$ . Устойчивых (повторяющихся на разных записях) последующих вступлений не выделяется. На диаграммах надежно прослеживается основная мода волны Рэлея в диапазоне периодов 10–50 с, существенно менее уверенно – первая высшая мода в диапазоне периодов 11–13 с и групповых скоростей 3,75–4,1 км/с. Уровень амплитуд максимума сигнала в 10 раз ниже, чем у основной моды.

И н т е р п р е т а ц и я. Измерения для различных событий дают практически совпадающие дисперсионные кривые. Учитывая сходство трассы 2 и трассы  $3_1 + 3_2$ , мы исключили из наблюдаемой трассы участки  $3_1 + 3_2$ , приняв для них средние фазовые и групповые скорости основной моды такими же, как на трассе 2. Результирующие кривые приведены на рис. 7.9. Фазовые скорости весьма близки к типовым кривым Брюна [19]. Полученная модель отличается от модели Брюна несколько меньшими скоростями в нижней части коры (рис. 7.10).



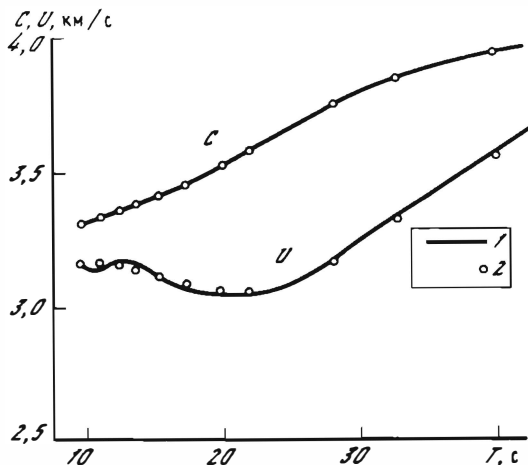


Рис. 7.9. Наблюдаемые (1) и теоретические (2) дисперсионные кривые для трассы 3<sub>3</sub> (Западно-Сибирская плита и Казахская складчатая страна)

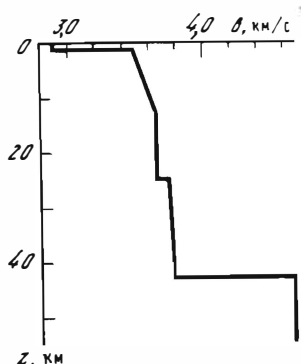


Рис. 7.10. Модель строения земной коры для участка трассы 3<sub>3</sub>

#### 4. Горные районы Тарбагатай – Восточный Тянь-Шань

На бл ю д е н и я. Трасса 4 практически совпадает с трассой 3 на всем ее протяжении, но продолжается дальше на юго-восток, пересекая восточную часть Казахской складчатой страны, мегантиклинорий Тарбагатай, восточное продолжение Тянь-Шаня и восточную оконечность Таримского массива. Общая длина трассы 5600 км, из них участок 4<sub>3</sub>, отличный от трассы 3, составляет 1350 км. Так же как и для трассы 3, по данным ПВАНа, боковые отклонения сигнала невелики (порядка 2,5° к югу от теоретического), выделяется ряд четких последующих вступлений с разными азимутами подхода: от близких к азимуту основного сигнала (70–80°) в течение первых 2–5 мин после прихода максимума основного сигнала до 105° спустя 10 мин после прихода основного сигнала. Максимальная амплитуда последующих вступлений составляет 0,2–0,4 максимума основного сигнала.

На диаграммах СВАНа выделяется основная мода волны Рэлея в интервале периодов 15–60 с и несколько последующих вступлений, наиболее четкое из которых запаздывает относительно максимума основного сигнала примерно на 220 с и соответствует азимуту подхода 70° (т.е. отклоняется к северу от теоретического); диапазон периодов, содержащихся в этом вступлении, – от 10 до 30 с.

И н т е р п р е т а ц и я. Дисперсия для участка трассы 4 оценивалась путем исключения эффекта участков 4<sub>1,2,3</sub>, совпадающих с трассой 3. Результирующие кривые групповой и фазовой скоростей приведены на рис. 7.11, они могут быть искажены интерференцией с последующими вступлениями в области периодов 15–20 с. Учитывая качественную близость кривых к кривым Брюна [19] для альпийских поясов (рис. 7.11), мы подобрали модель, удовлетворительно согласующуюся с наблюдениями

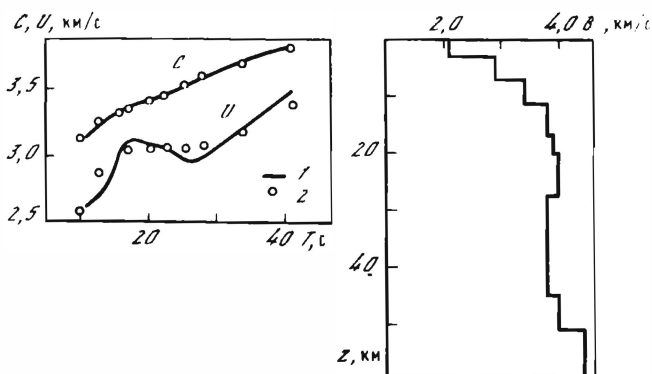


Рис. 7.11. Наблюдаемые (1) и теоретические (2) дисперсионные кривые групповой и фазовой скоростей для трассы 4<sub>4</sub> (горные районы Тянь-Шаня, Тарбагатай)

Рис. 7.12. Модель строения земной коры для участка трассы 4<sub>4</sub>

в области периодов 20–50 с. Эта модель (рис. 7.12) имеет существенно большую мощность коры и более низкие скорости в мантии, чем модели для платформ.

#### 5. Прикаспийская депрессия

Н а б л ю д е н и я. Трассы 6 и 7 пересекают не только Русскую плиту и Балтийский щит, но также Прикаспийскую синеклизу в ее центральной части и заканчиваются либо на северной окраине (трасса 7), либо в центральной части Туранской плиты (трасса 6). По данным ПВАН, максимум сигнала на трассе 7 приходит из направления, практически совпадающего с теоретическим, однако в более позднем вступлении выделяются волны, приходящие из азимутов 110 и 120° (т.е. существенно более южных), с временными задержками 60 и 120 с.

Дисперсия основной моды надежно определяется в интервале периодов 8–50 с, последующие вступления содержат значительно менее широкий диапазон периодов – от 8 до 15 с.

На трассе 6 длиной 4260 км – три наблюдаемых события: Газлийское землетрясение 8 апреля 1976 г. (форшок), его афтершок, последовавший двумя часами позже в тот же день, и основное Газлийское землетрясение 17 мая 1976. Амплитуда сигнала форшока и основного толчка настолько велика, что все каналы НОРСАРа, кроме специально заглубленного, перегружены. Поэтому пространственно-временной анализ не проводился, а спектрально-временной проведен только по записям одиночного заглубленного канала. Амплитуда сигнала афтершока мала, выделяется только фаза Эйри основного сигнала, причем азимут прихода совпадает с теоретическим (98°). Полученные кривые фазовой и групповой скоростей (см. рис. 7.2) из-за низкого значения отношения сигнал/шум менее стабильны и регулярны, чем кривые, полученные по другим трассам. Интервал наблюдаемых периодов 10–50 с.

И н т е р п р е т а ц и я. Суммарная длина "щитового" и "платформенного" участков трассы 7<sub>1,2</sub> близка к 2 500 км, а участка 7<sub>3</sub>, относящегося к Прикаспийской синеклизе, – к 750 км. Юго-восточный участок трассы

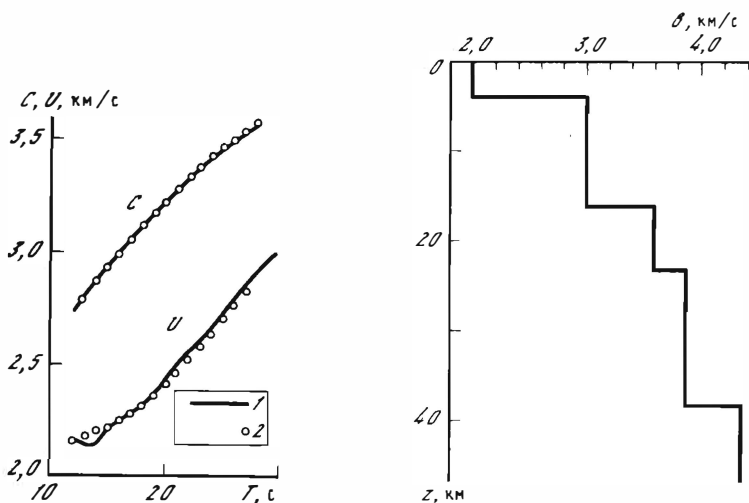


Рис. 7.13. Наблюдаемые (1) и теоретические (2) кривые групповой и фазовой скоростей для трассы 7<sub>3</sub> (Прикаспийская синеклиза)

Рис. 7.14. Модель строения земной коры на участке трассы 7<sub>3</sub>

7<sub>4</sub>, расположенный в пределах северо-западного окаймления Туранской плиты, имеет протяженность 180 км. Ввиду отсутствия независимых данных для этого участка мы приняли предположение, что дисперсия вдоль него такая же, как на Русской плите; в соответствии с этим участки 7<sub>1</sub>, 7<sub>2</sub> и 7<sub>4</sub> были объединены, им была присвоена такая же дисперсия, как трассе 8, пересекающей щит и плиту под близким азимутом. Результирующие дисперсионные кривые для участка 7<sub>3</sub> приведены на рис. 7.13. Видно, что групповые и фазовые скорости существенно ниже, чем на всех других рассмотренных участках.

Модель среды, наилучшим образом аппроксимирующая наблюдения, показана на рис. 7.14 (соответствующие ей теоретические кривые даны на рис. 7.13). Видно, что синеклиза характеризуется значительной средней мощностью осадочных пород (4 км слабоуплотненных, 12 км уплотненных со скоростями поперечных волн 3 км/с), малой мощностью гранитного слоя (7 км), не слишком значительной суммарной мощностью коры (38 км). Эти данные в целом согласуются с разрезом, полученным осреднением скоростных разрезов по профилям ГСЗ, прошедшим через синеклизу [18, 37, 91].

Трасса 6 содержит достаточно протяженный участок, принадлежащий Туранской плите в той ее части, где возможно существенное увеличение мощности коры [28]. Оценки показывают заметно более низкие скорости на участке 6<sub>3</sub> + 6<sub>4</sub> по сравнению с 7<sub>3</sub>. Это свидетельствует о более низкоскоростном разрезе на этой трассе по сравнению с 7<sub>3</sub>. Увеличение мощности осадочного комплекса к востоку, в Прикаспийской синеклизе, согласуется с данными ГСЗ; количественная интерпретация наблюдений на участке 6<sub>3</sub> из-за отсутствия независимых данных по Туранской плите не проводилась.

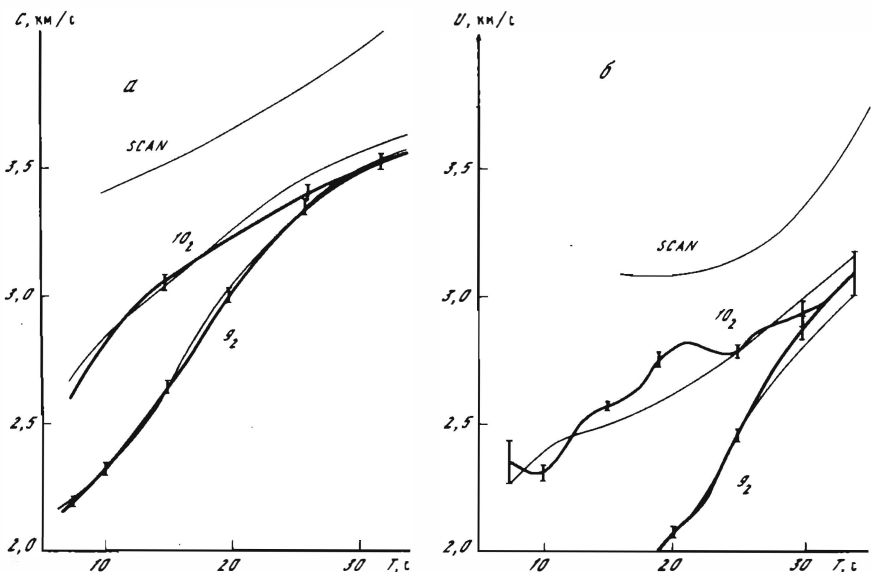


Рис. 7.15. Дисперсионные кривые фазовой (а) и групповой (б) скоростей волн Рэлея на трассах 9 и 10

Вертикальными черточками показаны среднеквадратичные ошибки наблюдений

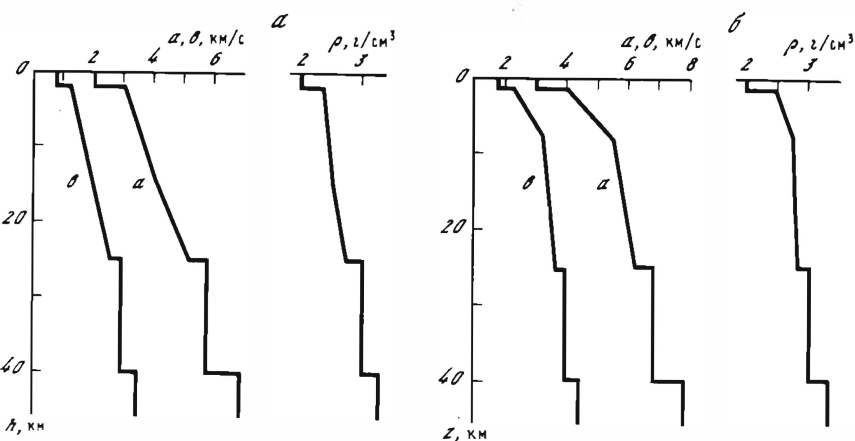


Рис. 7.16. Скоростной и плотностной разрезы для трасс 9<sub>2</sub> (а) и 10<sub>2</sub> (б)

### 6. Южная часть шельфа Баренцева моря

Наблюдения. Трассы 9 и 10 проходят через северную часть Балтийского щита и южный шельф Баренцева моря; трасса 9<sub>2</sub> пересекает шельф по линии полуостров Рыбачий — пролив Маточкин Шар, трасса 10<sub>2</sub> — от середины Кольского побережья до пролива Карские Ворота. Протяженность трасс 9 и 10 — 2400 и 2100 км, длина шельфовых участков — 900 и 700 км соответственно. На трассе 9 выполнено шесть независимых измерений скоростей с очень высокой сходимостью, на трассе

10 — три независимых измерения с несколько большим разбросом. Дисперсионные кривые для шельфовых участков  $9_2$  и  $10_2$  показаны на рис. 7.15 совместно с кривыми для модели SCAN [127], относящейся к Балтийскому щиту. Для обеих трасс характерны аномально низкие скорости волн Рэлея в широком диапазоне периодов, такие кривые весьма необычны для платформенных областей. Следует отметить, что на кривых групповой скорости для трассы 10 в интервале периодов 17–22 с имеется локальный экстремум, связанный, по-видимому, с неразрешенными при анализе интерференционными явлениями. Поэтому измерения на трассе 10 менее надежны и труднее интерпретируемы.

**И н т е р п р е т а ц и я.** Модели, аппроксимирующие строение среды на трассах 9 и 10, приведены на рис. 7.16. Разрез по трассе  $9_2$  (рис. 7.16, а) характеризуется 2-километровым слоем неконсолидированных осадочных пород ( $a = 3$  км/с), переходной зоной от менее уплотненных осадочных пород ( $a = 4$  км/с) к более уплотненным ( $a = 5$  км/с) на глубине 15 км и далее к "гранитному" слою ( $a = 6,2$  км/с на глубине 25 км), обычным "базальтовым" слоем со скоростью  $a = 6,8$  км/с на глубине 25–40 км и сравнительно низкоскоростной верхней мантией ( $a$  ниже границы  $M = 7,9$  км/с).

Разрез по трассе  $10_2$  (рис. 7.16, б) состоит: из километровой слоя осадочных пород с  $a = 3$  км/с; зоны плотных осадочных пород с быстрым нарастанием скорости  $a$  от 4 до 5,4 км/с на глубинах 2–8 км слоя, близкого по параметрам к "гранитному", с  $a = 5,4 \div 6,0$  км/с в интервале глубин 8–25 км; "базальтового" слоя и верхней мантии, как на трассе 9.

При геофизическом истолковании полученных разрезов следует учитывать, что они получены в предположении о примерном постоянстве скоростного строения среды вдоль каждого из профилей с трассами фактического распространения волн. Ни одно из этих предположений не является вполне обоснованным, однако они не могут повлиять на главный результат анализа дисперсионных кривых — выявление аномально низких скоростей в верхней части коры. Есть основания считать, что более полный учет всевозможных искажающих факторов приведет только к увеличению мощности или понижению скорости в верхней аномальной части земной коры.

Полученные данные о существовании мощной толщи осадочных пород в южной части шельфа Баренцева моря хорошо согласуются с результатами недавних, более детальных геофизических исследований [27, 150].

#### О ПРИРОДЕ ПОСЛЕДУЮЩИХ ВОЛН

Пространственно- и спектрально-временной анализы записей поверхностных волн на группе НОРСАР позволили также выявить в последующем за основной модой волны Рэлея волновом цуге ряд четких вступлений с азимутами подхода к группе, резко отличными от азимута подхода волны Рэлея и от направления на источники. Эти вступления по совокупности признаков были проинтерпретированы как поверхностные волны Рэлея, образовавшиеся в результате отражения прямой волны Рэлея от близких к вертикальным границ отдельных блоков земной коры. Для ряда вступлений удастся определить положение отражателей. Так, при наблюдении

ниях на трассах 7 и 8 четкие последующие сигналы с азимутом подхода к НОРСАРу  $120-130^\circ$  и запаздыванием относительно основного сигнала на  $120-160$  с (см. рис. 7.6) проинтерпретированы как поверхностные волны, отраженные от северо-восточного борта Днепровско-Донецкой впадины, вдоль которого происходит резкая смена физических свойств верхней части коры [28].

Одна из отражающих границ, выделенных при наблюдениях на трассе 10, расположена в средней части трассы 9 и примерно близка по простиранию к направлению этой трассы; в этом районе по некоторым работам (см. [27]) отмечалась зона разломов. Другой отражатель меньшей контрастности и глубины залегания расположен в районе  $74^\circ\text{N}$ ,  $30^\circ\text{E}$ , возможно, связан с южным ограничением Свальбардской платформы. Наконец, очень четкий отражатель приурочен к континентальному склону на западе от побережья Нарвик–Тромсё, отличающемуся большой крутизной [191]. Однако, учитывая возможные эффекты боковых уклонений поверхностных волн, нельзя рассматривать данные о положении границ как абсолютно достоверные.

Проведенные исследования показывают высокие потенциальные возможности использования одностанционного метода поверхностных волн для изучения регионального строения земной коры. Наиболее удобны для этих целей наблюдения цифровых сейсмических групп, характеризующиеся высоким отношением сигнал/шум, большой точностью измерений и разрешающей способностью по азимуту, позволяющей оценивать боковые уклонения сигналов. Результаты, полученные для районов, ранее исследованных ГСЗ, подтверждают достоверность осредненных моделей коры, получаемых по дисперсии поверхностных волн.

## § 7.2. Применение метода Бэкуса–Гилберта

Метод построения сглаженных распределений групповой скорости, описанный в § 6.4, применялся для интерпретации данных о средних групповых скоростях на трассах, пересекающих районы, характеризующиеся существенной латеральной неоднородностью коры и верхней мантии [35, 96, 97].

**Черноморская впадина** [35]. Значения групповых скоростей волн Рэлея и Лява на трассах, пересекающих Черноморскую впадину, были определены С.А. Капитановой для периодов  $10-20$  с путем обработки сейсмограмм станций Симферополь, Кишинев, Анапа, Сочи, Тбилиси и София. Использовались данные от очагов турецкой, карпатской и кавказской зон. Расположение трасс, по которым получены данные о дисперсии рэлеевских волн, изображено на рис. 7.17 (для волн Лява расположение трасс выглядит так же). Как и для волн Рэлея, так и для волн Лява были использованы данные по 54 трассам.

Как уже указывалось в § 6.4, эффективность метода определяется тем, насколько адекватно выбрана ориентация координатной системы. В данном случае одна из координатных осей была совмещена с осью Черноморской впадины, поскольку предполагалось, что распределение скоростей поверхностных волн должно быть связано с простиранием тектонической структуры в этом районе.

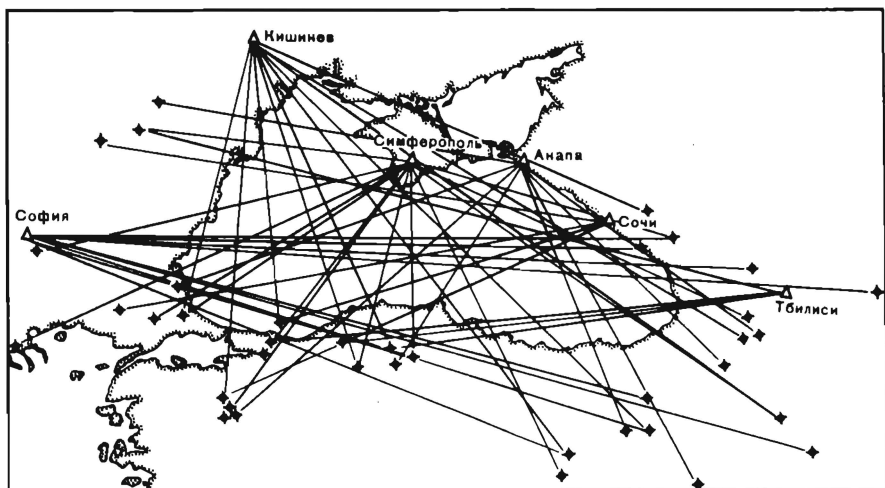


Рис. 7.17. Трассы волн Рэлея, пересекающие Черноморскую впадину

Полученное распределение скоростей волн Рэлея для периодов  $T = 10$  и  $20$  с приведено на рис. 7.18, волн Лява для периода  $T = 10$  с — на рис. 7.19. Из оценки величины  $s$ , характеризующей линейные размеры области сглаживания, можно заключить, что, кроме южного и восточного краев исследуемой области, где исходные данные отличаются низкой разрешающей способностью, полученные значения скорости представляют собой результат сглаживания по площади размером приблизительно  $200 \times 200$  км.

Реальность полученных распределений скорости подтверждается тем, что изолинии скоростей как для волн Рэлея, так и для волн Лява, соответствующие наименьшему периоду  $T = 10$  с, очень хорошо отражают рельеф Черноморской впадины. На периоде  $T = 10$  с значение групповой скорости определяется в основном мощностью осадочной толщи, а для волн Рэлея еще и толщиной водного слоя. Согласно данным ГСЗ, мощность осадочного слоя в Черноморской впадине меняется от 4–6 км в западной части до 12–14 км в области к югу от Крымского полуострова, где как раз наблюдаются минимальные значения групповых скоростей волн Рэлея и Лява.

На больших периодах на величину скорости начинают влиять нижележащие слои и кора в целом. Наименьшая мощность коры, по данным ГСЗ (18 км), отмечается приблизительно в той же части Черноморской впадины, которая характеризуется максимальной мощностью осадков, тогда как на краях впадины она достигает 30–34 км. Уменьшение мощности коры приводит к возрастанию групповых скоростей на периодах 20–30 с. Поэтому следует ожидать, что с увеличением периода минимум скорости, приуроченный к области максимальной мощности осадочного слоя, заменится максимальными значениями. Действительно, такую тенденцию к замене минимума максимумом можно проследить, сравнивая рис. 7.18, а и б.

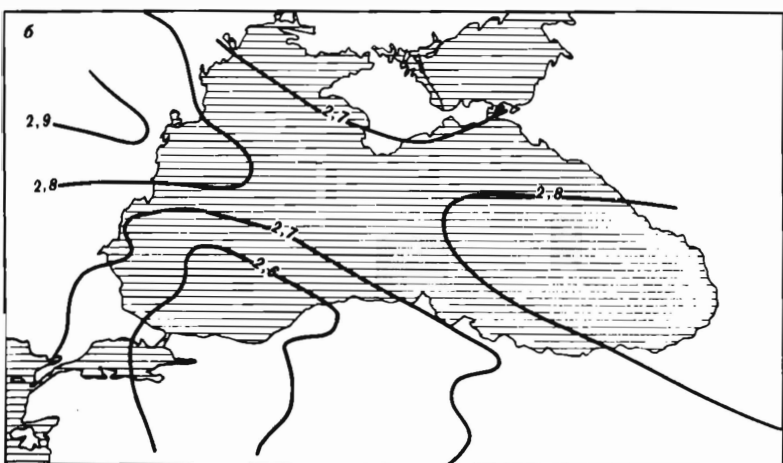
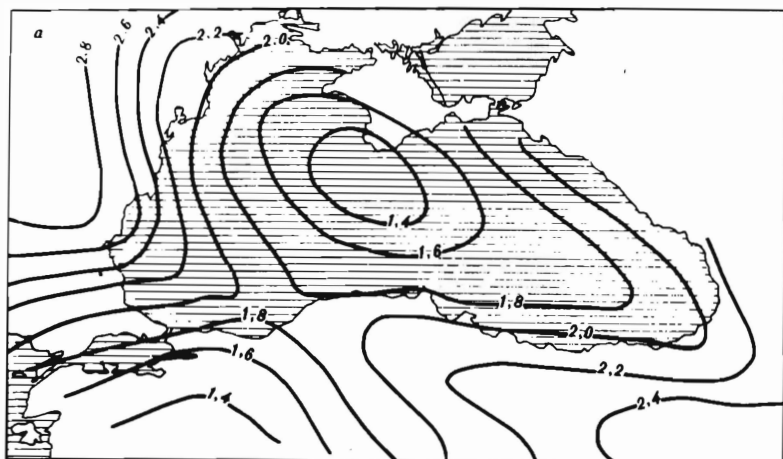


Рис. 7.18. Распределения сглаженных групповых скоростей волн Рэлея, построенные по данным о временах на трассах, изображенных на рис. 7.17

**Северная Атлантика** [96]. Данные о групповых скоростях рэлеевских волн, соответствующих периодам  $T = 20, 30, 40, 50$  и  $60$  с вдоль трасс, пересекающих Северную Атлантику, были взяты из [125], где определения групповых скоростей проводились по методике СВАНА. Для периодов  $20-50$  с использованы данные по 36 трассам, а для периода  $60$  с — по 33. Расположение трасс изображено на рис. 7.20. На этом же рисунке пунктиром показаны границы исследуемой области, по положению которых можно судить об ориентации выбранной системы координат: одна из осей координатной системы была взята в направлении оси Срединно-Атлантического хребта, другая имела направление вкрест простираения. Распределение сглаженных значений скорости приведены на рис. 7.21. Область сглаживания в этом случае имеет линейные размеры порядка  $1500$  км.

Поскольку с увеличением периода поверхностной волны увеличивается



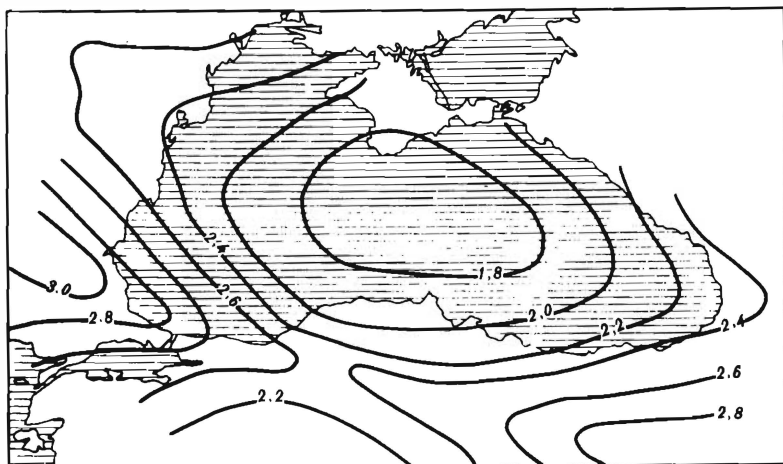


Рис. 7.19. Распределение сглаженной групповой скорости волны Лява

глубина ее проникания, то последовательное рассмотрение скорости  $U(\theta, \varphi)$  для разных периодов позволяет проследить закономерности изменения горизонтальных вариаций структуры с глубиной. Для наименьшего периода  $T = 20$  с отчетливо выражено различие между областями к западу и к востоку от Срединно-Атлантического хребта. К западу скорость поверхностной волны резко уменьшается от 4,0 до 3,5 км/с, к востоку она сохраняется почти постоянной. Таким образом, на глубинах порядка нескольких десятков километров рифтовая зона проявляется лишь как граница между двумя разнородными структурами. При увеличении периода она выявляется уже как узкая зона пониженных значений скорости поверхностной волны. При этом с увеличением периода различия в структуре западного и восточного блоков исчезают.

Пониженные значения скоростей поверхностных волн в рифтовой зоне являются отражением понижения скоростей поперечных волн в верхней мантии под Срединным Атлантическим хребтом. Это подтверждает гипотезу о поднятии более легкого вещества из мантии в этой зоне. При поднятии мантийного материала к поверхности и растекании его в обе стороны от рифта образуется резко асимметричная структура. Понижение скорости поверхностной волны в западном направлении можно объяснить, с одной стороны, утолщением коры в сторону американского континента, а с другой — уменьшением скорости упругих волн, связанным с уменьшением плотности пород коры в западном блоке по отношению к восточному. Такая плотностная асимметрия коры по разные стороны от осевой зоны срединно-океанического хребта была обнаружена и по гравитационным наблюдениям.

Интересно отметить, что скорости меняются и вдоль самого рифта, минимум скоростей выявляется приблизительно на широте  $40^\circ$  (в районе Азорских островов). Этот результат хорошо согласуется с концепцией горячих пятен, в соответствии с которой конвекция из мантии проявляется в виде узколокализованных струй; одно из таких горячих пятен расположено как раз в районе Азорских островов.

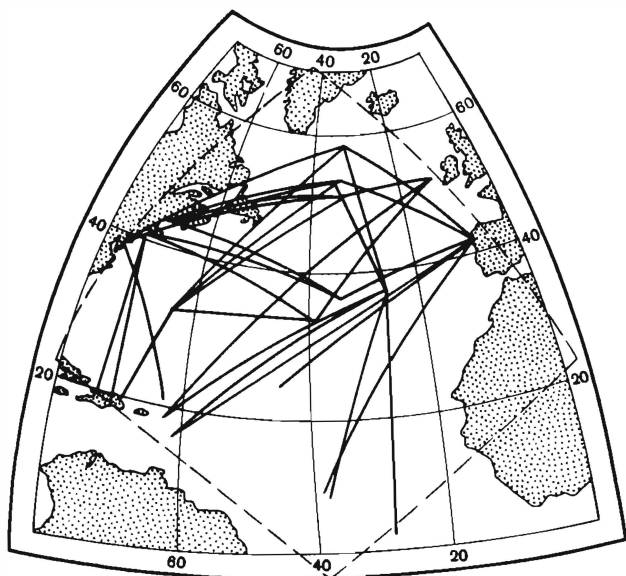
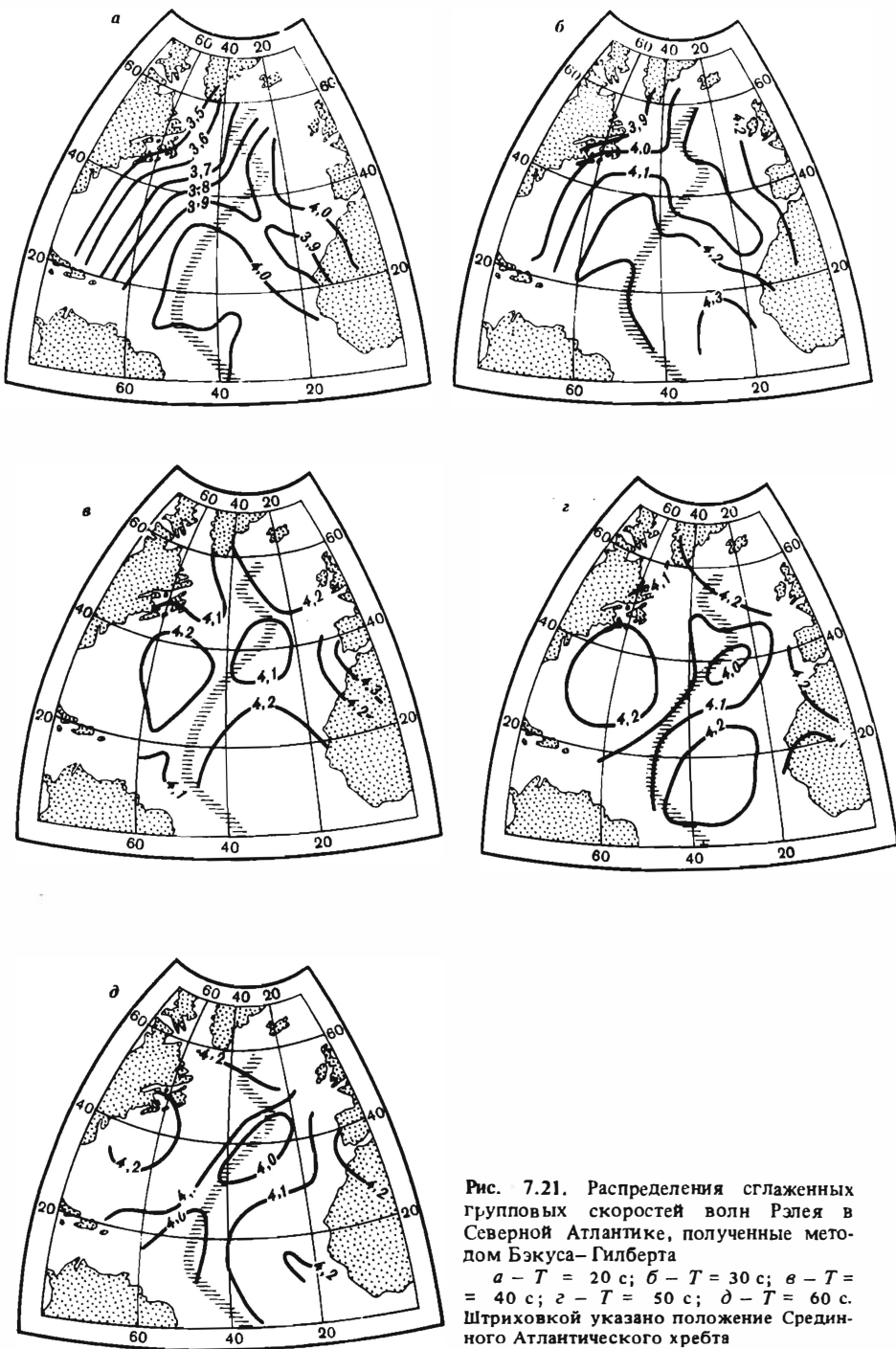


Рис. 7.20. Трассы волн Рэлея, пересекающие Северную Атлантику

**Район Киргизии.** Данные о дисперсии групповых скоростей рэлеевских волн в интервале периодов 6–12 с по трассам, пересекающим Киргизию, получены Т.М. Сабитовой и приведены на рис. 7.22. Результаты интерпретации изображены на рис. 7.23, где для наглядности заштрихованы области максимальных значений скорости, а минимальных обозначены точками. На этих же рисунках показаны известные глубинные разломы.

Волны с периодами 6–12 с проникают на глубины, соответствующие осадочному слою и верхнему слою коры. Сравнительный анализ результатов для последовательно возрастающих периодов позволяет сделать заключение об изменении горизонтальных вариаций структуры с глубиной.

К юго-востоку от Гиссаро-Кокшаальского разлома происходит резкое уменьшение скорости. Возможно, что в действительности скорость уменьшается скачкообразно на разломе, но поскольку метод позволяет определять лишь сглаженные значения скоростей, то в решении такое уменьшение получается более или менее плавным. Гиссаро-Кокшаальский разлом выделяется как граница, разделяющая область повышенных и пониженных значений групповых скоростей, начиная с периода  $T = 6$  и вплоть до  $T = 12$  с, что указывает на значительную глубинность этого разлома. Таласо-Ферганский разлом проявляется в распределении групповых скоростей как граница, разделяющая структуры, которые характеризуются существенно различным характером дисперсии в интервале периодов 6–12 с. С юго-западной стороны разлома наблюдается резкое возрастание групповой скорости (от 2,3 до 2,8 км/с) при изменении периода от 6 до 12 с. Оно является, по-видимому, следствием сильной скоростной дифференцированности осадочного чехла и верхнего этажа коры в этой зоне. Слабая дисперсия групповой скорости (от 2,5 км/с при  $T = 6$  с до 2,7 км/с при



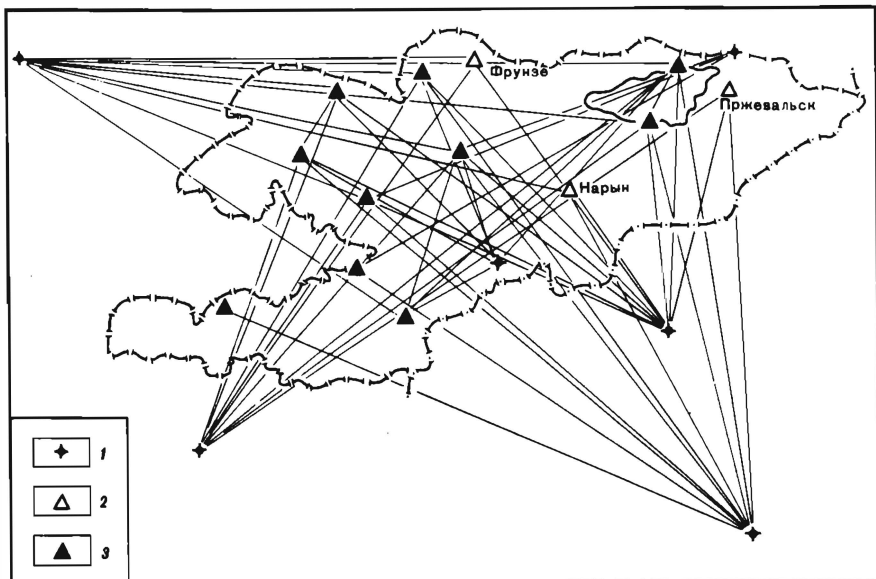


Рис. 7.22. Трассы поверхностных волн, пересекающих район киргизского Тянь-Шаня  
 1 – эпицентр; 2 – опорная сейсмическая станция; 3 – региональная

$T = 12$  с) с северо-восточной стороны разлома объясняется слабым развитием осадочного чехла в этой зоне, где на больших площадях наблюдаются выходы интрузивных пород на поверхность, а также, возможно, и более низкими значениями скоростей в базальтовом слое, определяющими групповую скорость на больших периодах. Интересно отметить, что область пониженных групповых скоростей поверхностных волн при  $T = 10 \div 12$  с, вытянутая вдоль Таласо-Ферганского разлома (к северо-востоку от него), соответствует зоне пониженных скоростей продольных волн в верхней мантии, обнаруженной по данным взрывной сейсмологии [95].

Данный район является значительно более сложным по своему строению, чем рассмотренные выше, но, несмотря на это, результаты интерпретации данных о групповых скоростях поверхностных волн, полученные с помощью описанного в § 6.4 метода, хорошо коррелируют с известными тектоническими структурами и позволяют делать выводы о латеральных вариациях глубинного строения района.

**Юго-Восточная Европа и Малая Азия** [97]. Данные о групповых скоростях волн Рэлея и Лява на трассах, пересекающих Юго-Восточную Европу и Малую Азию для периодов  $T = 10 \div 30$  с, были собраны С.Б. Николовой. По этим данным были построены карты распределения сглаженных скоростей этих волн для соответствующих периодов. Общее число трасс, использованных для инверсии, варьировало от 40 до 69 в зависимости от периода волны.

В этом районе было трудно априорно подобрать нужную ориентацию координатной системы, так как простираение структур не имеет преимущественного направления. Поэтому система координат выбиралась так,

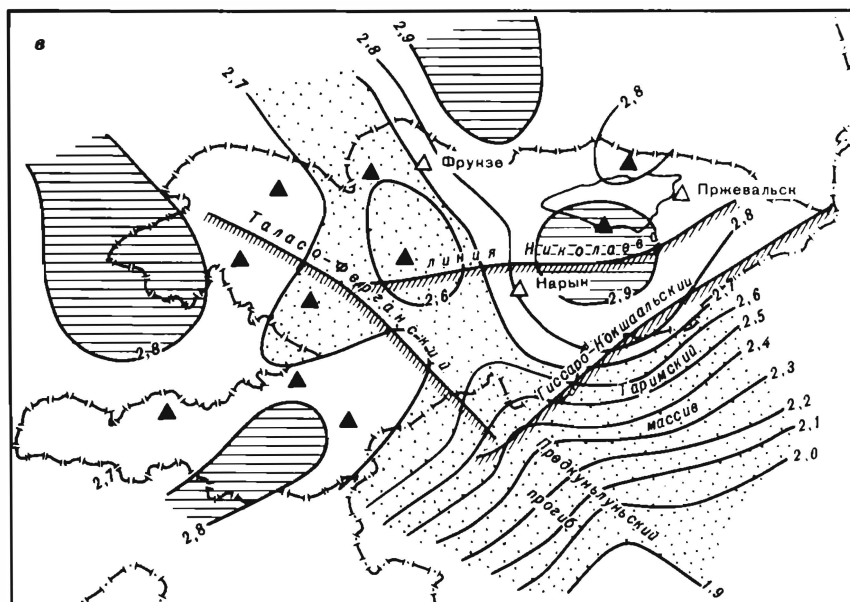
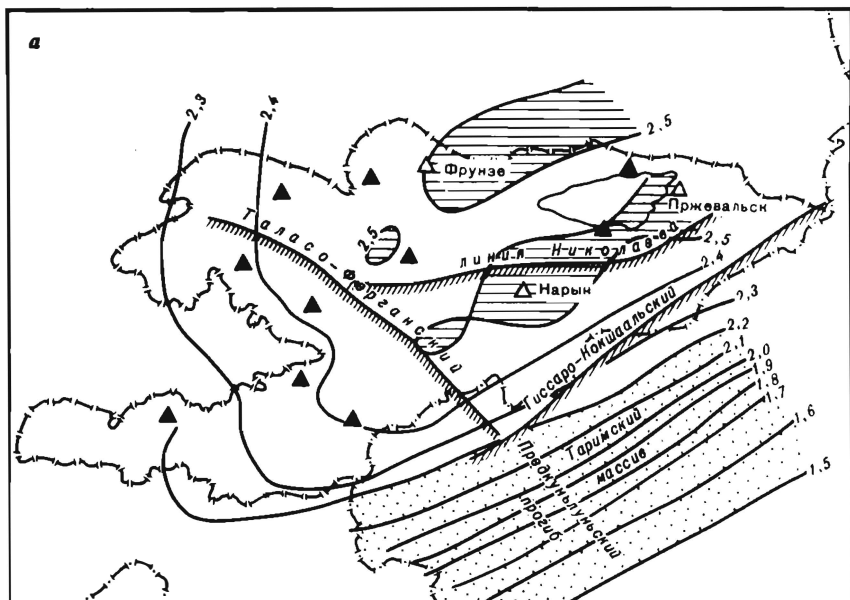


Рис. 7.23. Распределения сглаженных групповых скоростей в киргизском Тянь-Шане, соответствующие  $T=6$  с (а), 8 (б), 10 (в), 12 с (г)

1 – сейсмическая станция (а – опорная, б – региональная); 2 – глубинный разлом; 3 – изолиния групповой скорости; 4 – зона повышенных скоростей; 5 – зона пониженных скоростей

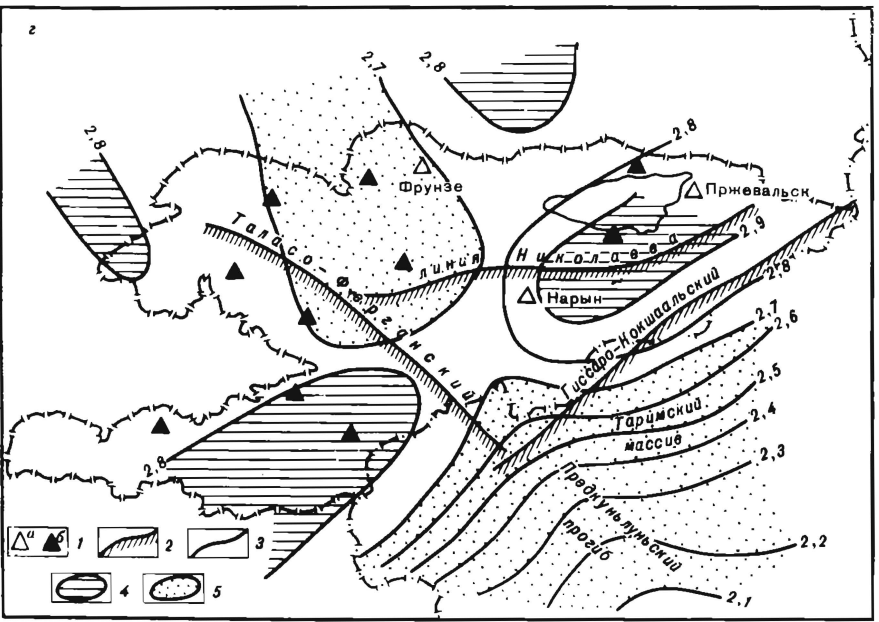
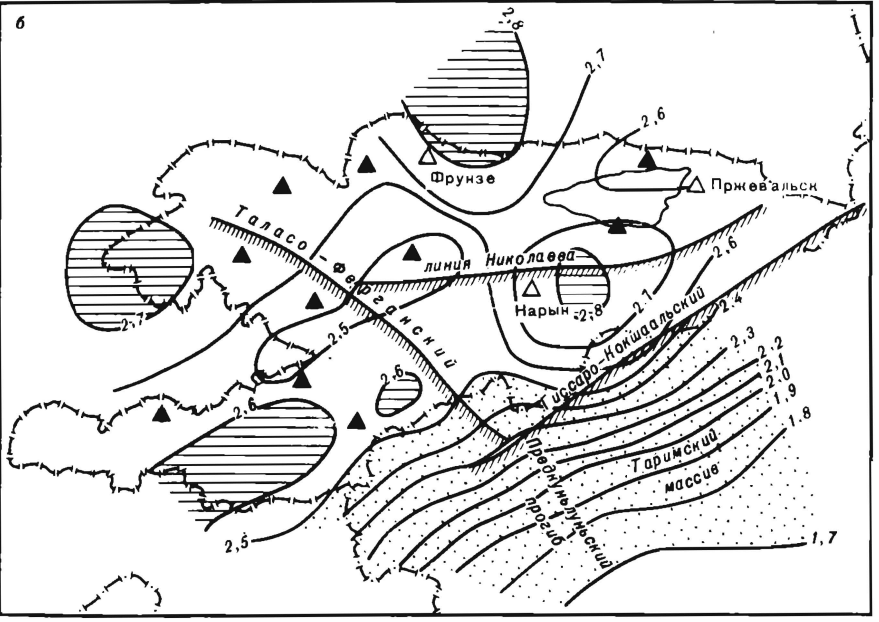


Рис. 7.23 (окончание)

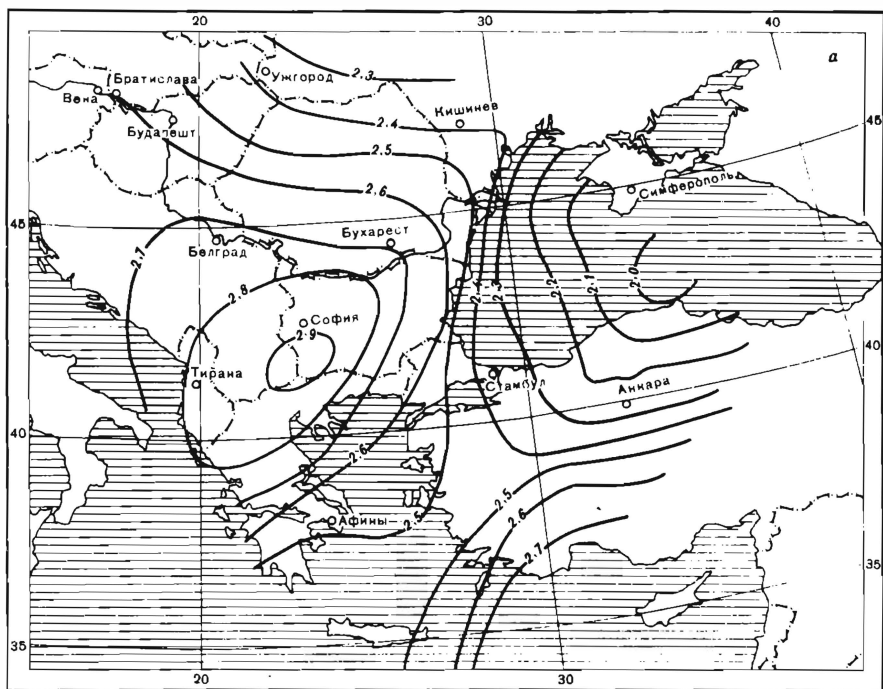


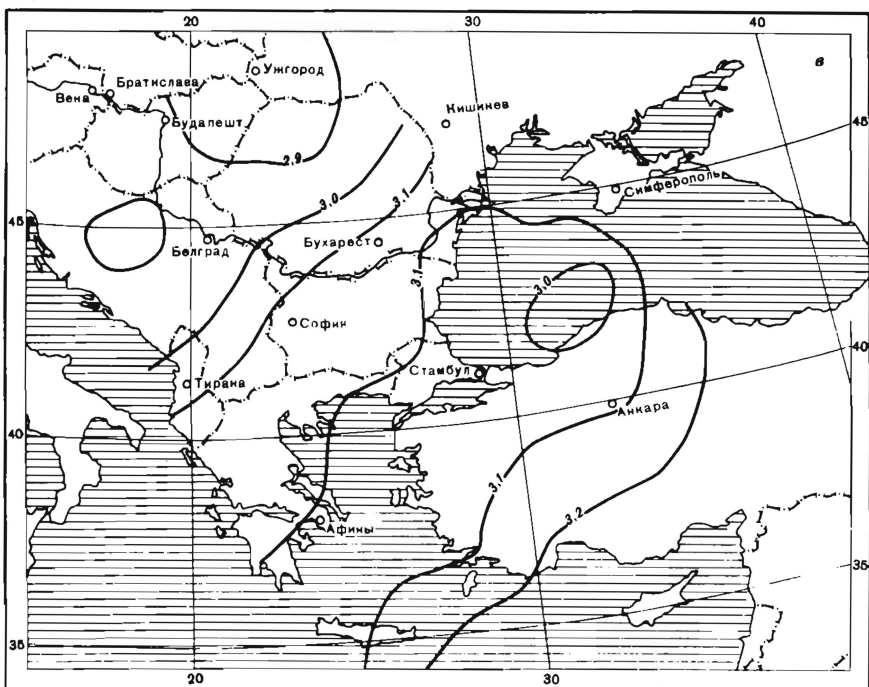
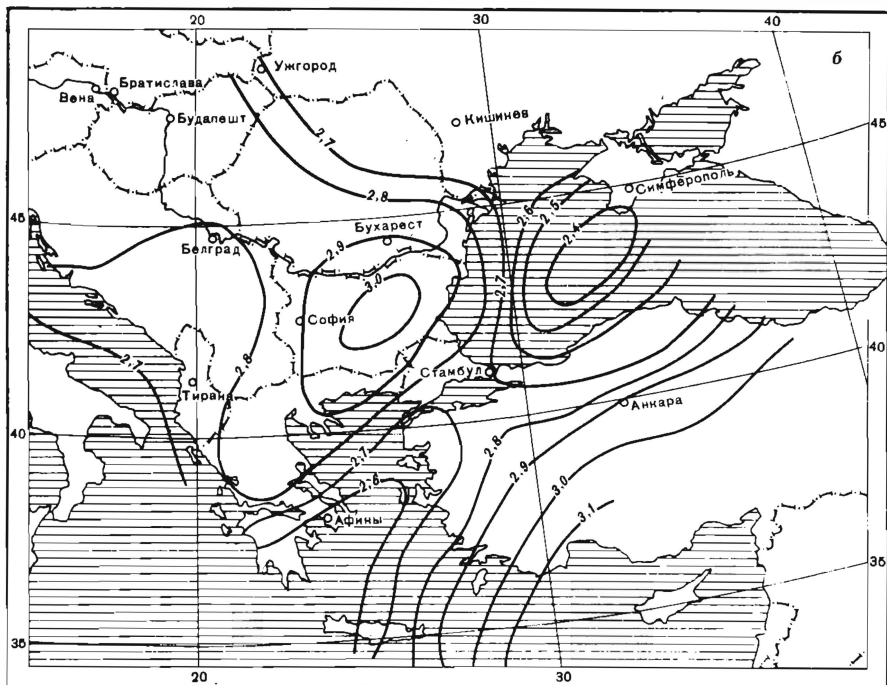
Рис. 7.24. Распределения сглаженных групповых скоростей в Юго-Восточной Европе и Малой Азии, соответствующие  $T = 10$  с (а), 20 (б), 30 с (в)

чтобы получить наибольшую контрастность в распределении скорости. Наиболее удачной оказалась система координат, в которой одна из осей параллельна вытянутости Адриатического моря. Результаты построения распределения скорости волны Рэлея показаны на рис. 7.24.

На периоде  $T = 10$  с отчетливо выявился минимум значений групповой скорости в области Черного моря и максимум в области Рило-Родопского массива и Эгейского моря. На периодах  $T = 20$  и  $30$  с вариации скоростей становятся уже менее резкими, что свидетельствует о большей однородности строения на больших глубинах.

Результаты для  $T = 10$  с хорошо согласуются с картой мощности осадочных отложений в исследуемом районе. Минимум скорости приурочен к Черноморской впадине, где отмечается наибольшая мощность осадочных отложений (до 14 км), максимум в районе Рило-Родопского массива и Эгейского моря связан с выходом на поверхность байкальского фундамента. Область Адриатического моря с большой мощностью осадков оказалась слабо выражена в распределении скоростей, что, по-видимому, связано с малым числом данных по трассам, пересекающим Адриатику.

На периодах  $T = 20$  и  $30$  с вариации в распределении скоростей сглаживаются. Выявляется минимум южнее о-ва Пелопоннес, где по данным сейсмических исследований на глубину 30 км выходит низкоскоростная астеносфера. Сильное сглаживание картины распределения скоростей на пери-





оде  $T = 30$  с объясняется еще и тем, что, как правило, в областях, характеризующихся большой мощностью осадочного слоя, наблюдается подъем поверхности Мохоровичича, что приводит к нивелировке различий в значениях скоростей на больших периодах. Однако в области Львовского прогиба, характеризующегося одновременно большой мощностью осадочного слоя и коры в целом, минимум скорости сохраняется и на больших периодах (20–30 с) и даже становится более ярко выраженным.

### § 7.3. Аномальные поверхностные волны Рэлея на северо-востоке Евразии

Тектоническая активность севера Евразии определяется, по-видимому, взаимодействием Североамериканской и Евразийской плит [79]. На северо-востоке их граница, приближаясь к полюсу относительного вращения плит, выходит на континент в районе Верхояно-Колымской тектонически активной области. Среди ее структур предположительно выделяется одна основная, выражающая главное направление тектонического развития района. Это Момский континентальный рифт, связанный с системой хр. Черского (рис. 7.25) [33]. Предположение о существовании рифта основано в первую очередь на геолого-геоморфологических исследованиях. Глубинное строение района остается почти не изученным. На существующих картах строения земной коры [85], основанных преимущественно на гравитационных данных, структура рифта не выражена. Более того, на них хр. Черского соответствует утолщение земной коры, т.е. структура, обратная предполагаемой для рифта. Таким образом, даже самые общие параметры глубинного строения, например характерная толщина земной коры крупных районов Верхояно-Колымской области, допускают пока значительную неопределенность, а от их значений существенно зависят выводы об общем характере тектонического развития области.

Для получения информации о параметрах осредненного сейсмогеологического разреза Верхояно-Колымской области и в первую очередь окрестности Момского рифта изучались характеристики поверхностных волн, пересекающих эти районы [52]. В процессе работы оказалось, что поляризационные характеристики поверхностных волн Рэлея после прохождения ими Верхояно-Колымской области принципиально отличаются от ожидаемых. Тем самым возникла и более узкая сейсмологическая проблема, связанная с не имеющими очевидного теоретического обоснования явлениями.

Нами использовались записи основных мод волн Рэлея и Лява на стационарных сейсмических станциях. В окрестности Верхояно-Колымской области находятся четыре станции: Тикси, Якутск, Магадан, Сеймчан, оснащенные приборами типа СК или СКД, позволяющими регистрировать поверхностные волны с периодами до 50 (реже 60) с. Материал подразделяется на две группы в соответствии с расположением источников волн (эпицентральных зон землетрясений). К первой группе относятся записи "далеких" землетрясений Индонезии и юго-западной части Тихого океана. Четкие поверхностные волны от этих землетрясений регистрируются на всех упомянутых станциях. Это позволяет измерять скорости волн на участках между станциями. В основном изучались две группы трасс, про-

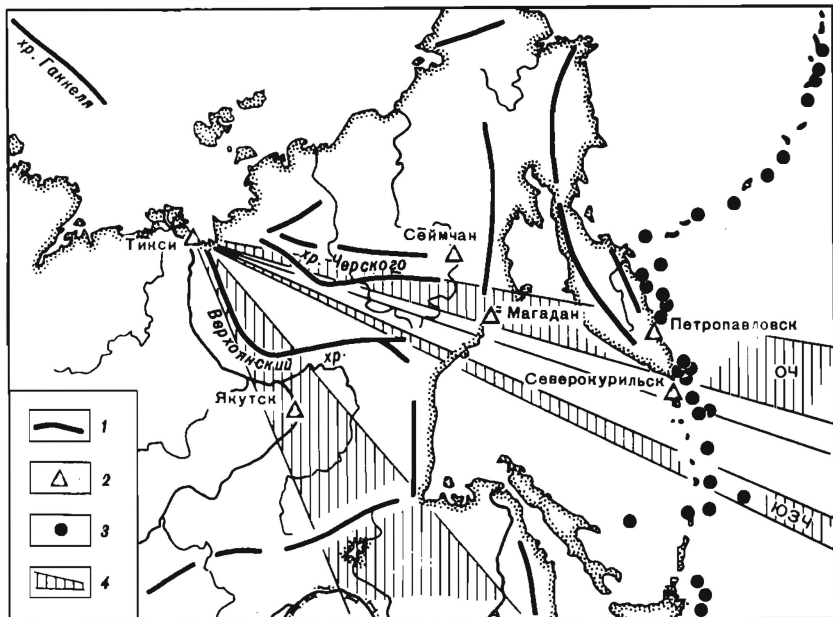


Рис. 7.25. Схема района

1 — основные структуры Верхояно-Колымской области и прилегающих территорий; 2 — сейсмическая станция; 3 — эпицентр близкого землетрясения; 4 — участок трассы волны от далекого землетрясения (заштрихованные области включают большое число трасс)

ходящих вдоль хребтов: Верхоянского (трасса ВХ) и Черского (см. рис. 7.25). Последнюю группу оказалось удобным разделить на две — трассы ЮЗЧ и ОЧ. Таким образом, при выяснении главных черт глубинного строения района хр. Черского Верхоянский хребет рассматривался как "эталон" для сравнения.

Другую группу составили записи "близких" землетрясений Курило-Камчатской и Алеутской дуг (см. рис. 7.25), полученные на станции Тикси. Соответствующие трассы покрывают сектор, охватывающий хр. Черского и его значительную окрестность. Это позволяет проследить относительно Тикси "азимутальные зависимости" характеристик поверхностных волн с целью выяснить, выделяется ли именно район предполагаемого рифта свойствами, аномальными по отношению к окружающей области.

Помимо скоростей, по всем записям измерялись поляризационные характеристики волн Рэлея и Лява. Под азимутом поляризации волны Рэлея ниже подразумевается направление линии пересечения плоскости поляризации волны и горизонтальной плоскости. Рассмотрим основные результаты измерений.

**Поляризационные аномалии волн Рэлея** (наблюдаются только в Тикси). Для волн Рэлея, приходящих в Тикси с юго-востока, азимуты поляризации значительно отличаются от направлений на эпицентры. Величина аномалий достигает  $40-50^\circ$ . Аномалии четко наблюдаются на всех записях Тикси с соответствующими направлениями на эпицентры в течение всего

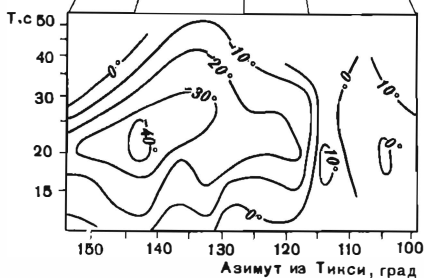
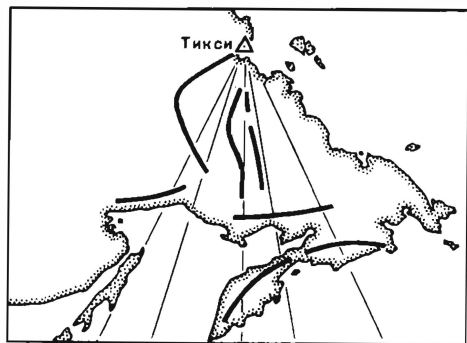


Рис. 7.26. Изолинии аномалий поляризации волн Рэлея для различных трасс, пересекающих Северо-Восток Евразии

изучавшегося периода наблюдений (1962–1978 гг.). Аномалии обладают четкой частотной зависимостью. На рис. 7.26 приведена карта изолиний аномалий поляризации волн Рэлея как функции периода колебаний и направления из Тикси на эпицентр. Результаты осреднены окном шириной  $4^\circ$  по азимуту и 0,07 по  $\lg T$ . Максимальные аномалии приходятся на периоды около 20 с. Аномалии исчезают как на коротких, так и на длинных периодах. Основная аномальная область занимает диапазон периодов 15–35 с. Заметим, что он соответствует длинам волн (60–150 км), наиболее чувствительным к строению среды на глу-

бинах границы Мохоровичича. Короткопериодные "коровые" и длиннопериодные "мантийные" волны Рэлея распространяются через Верхояно-Колымскую область без искажений.

Отметим, что в области основной поляризационной аномалии абсолютный азимут поляризации волны Рэлея практически не зависит от направления из Тикси на эпицентр и равен приблизительно  $105^\circ$  (область "устойчивых" азимутов поляризации).

**Азимутальная зависимость поляризационных аномалий.** Аномально поляризованные волны наблюдаются лишь в относительно узком интервале направлений из Тикси на эпицентры. Так, на записях волн, приходящих в Тикси с северных направлений, аналогичные эффекты отсутствуют. Одна из границ аномальной области, соответствующая азимуту  $115^\circ$ , четко видна на рис. 7.26. Приблизительно под тем же азимутом видна из Тикси граница между высокогорным районом хр. Черского и расположенными восточнее низменностями. На азимутах, больших  $145^\circ$ , поляризационные аномалии формально сохраняются, но абсолютные азимуты быстро возрастают по сравнению с характерным значением области "устойчивых" азимутов. Это позволяет предположить, что характер процессов, порождающих поляризационные аномалии на трассах с направлениями более  $145^\circ$ , отличается от трасс, соответствующих области "устойчивых" азимутов. И действительно, внимательное изучение записанных сигналов показывает, что пространственные компоненты записей волн Рэлея с направлений  $150\text{--}190^\circ$  значительно хуже коррелированы между собой, чем для записей в области основной аномалии. Возможно, что с

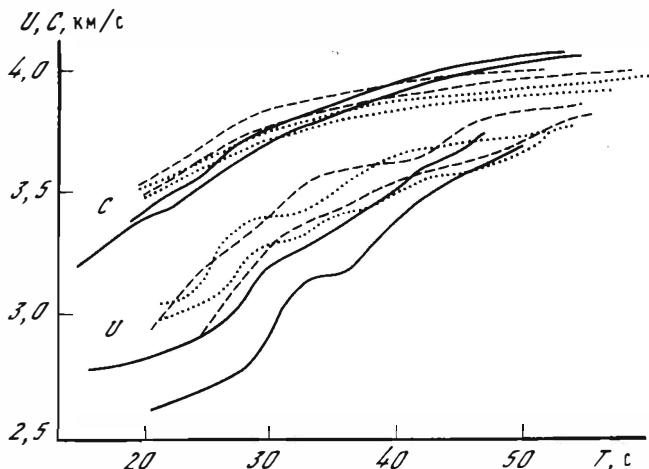


Рис. 7.27. Области экспериментальных дисперсионных кривых фазовых ( $C$ ) и групповых ( $U$ ) скоростей для районов Верхоянского хребта (сплошные линии) и хребта Черского: трасса  $ОЧ$  (точки), трасса  $ЮЗЧ$  (штрих)

направлений  $150-190^\circ$  приходят две интерферирующие волны: основная волна Рэлея, поляризованная вблизи теоретического азимута, и вторичный аномально поляризованный сигнал, генерируемый основной волной в интервале периодов  $15-35$  с.

Замечательно, что обе границы области "устойчивых" азимутов соответствуют направлениям, ограничивающих хр. Черского. Заметим, однако, что выделяющийся по области "устойчивых" азимутов интервал направлений соответствует не собственно рифтовой долине, а всей высокогорной системе хр. Черского. Таким образом, мы предполагаем, что возникновение аномальной поляризации волн связано с тем, что их лучи пересекают некоторую неоднородность, расположенную относительно Тикси в том же интервале направлений, что и хр. Черского.

**Нормальная поляризация волн Лява в Тикси.** Само по себе это утверждение не представляло бы интереса, если бы не относилось к тем же записям, на которых наблюдаются аномально поляризованные волны Рэлея. Два типа поверхностных волн, распространяясь по близким трассам, по-видимому принципиально по-разному реагируют на встречающиеся на их пути неоднородности. Отклонения азимутов поляризации волн Лява от теоретических значений в основном не превышают  $\pm 10^\circ$ , что соответствует точности измерений.

**Различия скоростей волн Рэлея на трассах ВХ, ЮЗЧ, ОЧ.** Для каждой трассы на рис. 7.27 приведены границы областей, занимаемых измеренными дисперсионными кривыми фазовых и групповых скоростей. Разброс результатов достаточно велик, но он приблизительно соответствует точности одиночного измерения. На рисунке достаточно хорошо видны следующие качественные особенности кривых.

1. Для трассы ВХ характерны обычные для горного района средней высоты дисперсионные кривые. Групповые скорости для периодов  $20-$

40 с на трассах ЮЗЧ и ОЧ лежат относительно выше. На более длинных периодах (до ~50 с) групповые скорости по всем трем трассам значимо не различаются. Дисперсионные кривые групповых скоростей трасс ЮЗЧ и ОЧ ближе к характерным средним континентальным скоростям, чем к кривым для горных районов.

2. Кривые фазовых скоростей на трассах ЮЗЧ и ОЧ имеют меньший наклон, чем кривые трассы ВХ. Это тесно связано с отмеченным различием групповых скоростей. Однако важным для интерпретации является то, что кривые фазовых скоростей пересекаются. На коротких периодах 20–30 с трасса ВХ является относительно низкоскоростной, а на длинных периодах (порядка 50 с) – высокоскоростной.

3. Трассы ЮЗЧ и ОЧ различаются только по фазовым скоростям, групповые скорости на них в пределах точности не различимы.

Обратим внимание на то, что основные различия в дисперсионных кривых для групп ВХ и ЮЗЧ приходится на периоды 20–40 с, что соответствует частотному интервалу поляризационной аномалии. Поэтому предположение о связи поляризационной аномалии со скоростной неоднородностью трассы выглядит вполне разумным.

Перейдем к обсуждению результатов. Выше подразумевалось, что большинство измеренных характеристик поверхностных волн относится именно к интересующим нас структурам Верхояно-Колымской области. Это верно лишь при условии, что волны распространяются вблизи своих теоретических трасс, т.е. дуг большого круга. Сомнения в этом возникают из-за присутствия значительных поляризационных аномалий.

В первую очередь отметим, что для волн Рэлея, аномально поляризованных в Тикси, поляризационные характеристики на остальных станциях, т.е. на "входе" Верхояно-Колымской области, близки к теоретическим. Отклонение азимутов поляризации здесь лежит в пределах  $\pm 10^\circ$ , что соответствует точности измерений. Таким образом, возникновение всех аномальных эффектов происходит в пределах Верхояно-Колымской области.

Нормальное распространение волн на "входе" Верхояно-Колымской области ничего еще не говорит о геометрии лучей внутри нее. При значительных отклонениях от окружностей большого круга априори неясно, какой из лучей, входящих в область, достигает Тикси. Установить соответствие помогает сравнение однотипных характеристик, полученных по волнам от далеких и близких землетрясений. Азимутальные зависимости поляризационных аномалий волн Рэлея от далеких и близких землетрясений хорошо соответствуют друг другу. И те и другие данные имеются на интервале направлений  $121\text{--}154^\circ$  из Тикси на эпицентры. На рис. 7.28 весь интервал разбит на четыре части, для каждой из которых приведены величины разброса максимальных аномалий, полученные отдельно для записей далеких и близких землетрясений. Хорошо видно, что сдвиг по оси направлений (например, данных далеких землетрясений) на величину порядка  $10^\circ$  значительно ухудшает соответствие результатов. Но выше мы отметили, что на "входе" Верхояно-Колымской области и направление распространения волн близко к теоретическому. Отвлекаясь от ошибок, можно сказать, что истинные лучи, совпадающие с теоретическими на "входе" Верхояно-Колымской области, в дальнейшем приходят именно в Тикси. Учитывая, что этот вывод относится к достаточно широкому ин-

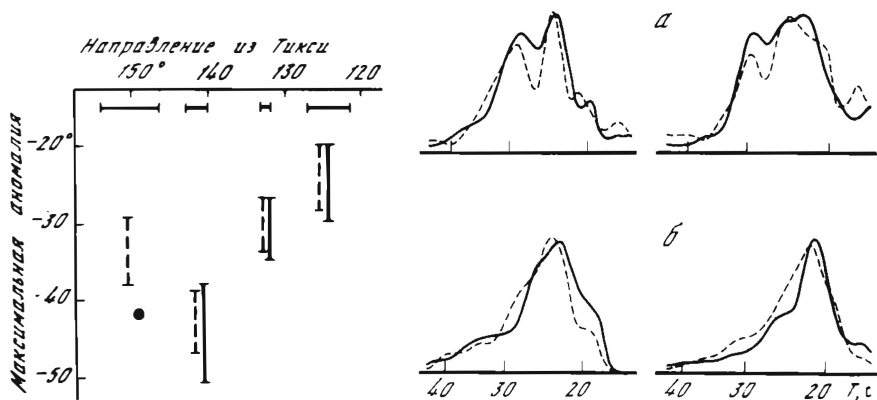


Рис. 7.28. Характеристики разброса максимальных поляризационных аномалий волн Рэлея

Сплошные линии — данные далеких землетрясений, штриховые — близких

Рис. 7.29. Спектры волн Рэлея на входе Верхояно-Колымской области (штрих) и в Тикси (сплошные линии)

а — трасса, пересекающая район Верхоянского хребта; б — то же, хр. Черского

тервалу направлений относительно Тикси (около  $30^\circ$ ), возможность значительного искажения теоретической кинематической схемы в пределах Верхояно-Колымской области следует признать маловероятной.

Могут ли поляризационные аномалии быть связаны с эффектами отражения волн Рэлея от тектонических границ? При распространении поверхностных волн в горизонтально-однородной среде без поглощения вдоль луча сохраняется форма амплитудного спектра колебаний. С другой стороны, теоретические расчеты и интерпретация реальных записей [81, 156] показывают, что коэффициенты отражения обладают существенно более узкой спектральной полосой, чем порождающая их падающая волна. На рис. 7.29 приведены сглаженные амплитудные спектры волн Рэлея, полученные на двух станциях каждый. Спектры Тикси в целом сохраняют главные черты и спектральную полосу, характерные для записей "входа". Все различия неустойчивы по ансамблю землетрясений.

Особо следует обратить внимание на отсутствие корреляции различий формы спектров с поведением поляризационных аномалий. Последние обладают простой и ярко выраженной частотной зависимостью, достигая максимальных значений около периода 20 с. Принципиальные изменения в форме спектров волны при пересечении ими Верхояно-Колымской области на этих периодах отсутствуют. Это позволяет считать, что волны Рэлея, наблюдаемые в Тикси, не испытали существенных отражений от структур литосферы.

Таким образом, простые лучевые представления не позволяют даже качественно объяснить присутствие значительных поляризационных аномалий на записях Тикси. Более вероятно, что это явление связано с какими-либо дифракционными эффектами, возникающими вблизи границы крупной линейной структуры при распространении волн вдоль нее. Такой структурой может являться Момский рифт.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян Р.А., Яновская Т.Б. Разложение групповых скоростей рэлеевских волн по сферическим функциям. — Изв. АН СССР. Физика Земли, 1973, № 11, с. 27–33.
2. Азбель И.Я., Дмитриева Л.А., Яновская Т.Б. Методика расчета геометрического расхождения в трехмерно-неоднородной среде. — В кн.: Методы и алгоритмы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1980, с. 113–126. (Вычисл. сейсмология; Вып. 13).
3. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. М.: Мир, 1983. Т. 1. 520 с.; Т. 2. 260 с.
4. Акопян С.Ц., Жарков В.Н., Любимов В.М. О динамическом модуле сдвига земных недр. — ДАН СССР, 1975, т. 223, № 1, с. 87–90.
5. Алексеев А.С., Бабич В.М., Гельчинский Б.Я. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов. — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Изд-во ЛГУ, 1961, сб. V с. 3–24.
6. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
7. Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А. Метод возмущений в теории распространения волн (пространственно-временной метод, линейные и нелинейные уравнения). — В кн.: Теория распространения волн в неоднородных и нелинейных средах. М.: Наука, 1979, с. 28.
8. Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А. Пространственно-временной лучевой метод: Линейные и нелинейные волны. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 271 с.
9. Бабич В.М., Чихачев Б.А., Яновская Т.Б. Поверхностные волны в вертикально-неоднородном упругом полупространстве со слабой горизонтальной неоднородностью. — Изв. АН СССР. Физика Земли, 1976, № 4, с. 24–31.
10. Бабич В.М., Григорьева Н.С. Пространственно-временной лучевой метод расчета волн в слабонеоднородной слоистой среде. — В кн.: Интерференционные волны в слоистых средах. Л.: Наука, 1980, с. 5–18.
11. Бабич В.М., Чихачев Б.А. Распространение волн Лява и Рэлея в слабонеоднородной среде. — Вестн. ЛГУ, 1975, № 1, с. 32–38.
12. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование: Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982. 583 с.
13. Бармин М.П. Алгоритмы регионального деления геодезических линий на сфере. М.: Мат. МЦД–Б МГК АН СССР, 1983. 25 с.
14. Бармин М.П., Левшин А.Л., Старовойт О.Е. Итеративный спектрально-временной анализ поверхностных волн. — В кн.: Математическое моделирование и интерпретация геофизических наблюдений. М.: Наука, 1984, с. 111–128. (Вычисл. сейсмология; Вып. 16).
15. Барридж Р., Вейнберг Г. Горизонтальные лучи и вертикальные моды. — В кн.: Распространение волн и подводная акустика. М.: Мир, 1980, с. 76–125.
16. Беляевский Н.А., Вольвовский Б.С., Вольвовский И.С. и др. Сейсмический разрез земной коры Восточной Европы. — В кн.: Строение земной коры и верхней мантии по данным сейсмических наблюдений. Киев: Наук. думка, 1977, с. 4–19.
17. Бергоссен К.-А., Левшин А.Л., Ратникова Л.И. Региональные исследования земной коры Евразии поверхностными волнами. — В кн.: Математические модели Земли и прогноза землетрясений. М.: Наука, 1982, с. 105–117. (Вычисл. сейсмология; Вып. 14).
18. Бронгулеев В.В., Комаров В.П. Структурные планы поверхности фундамента и подсолевого комплекса Прикаспия.

пийской синеклизы. — Бюл. МОИП. Отд. геол., 1978, т. 53(3), с. 8–23.

19. Брюн Д.Н. Поверхностные волны и строение коры. — В кн.: Земная кора и верхняя мантия. М.: Мир, 1972, с. 186–197.

20. Брюн Д., Дорман Д. Сейсмические волны и строение земной коры в районе Канадского щита. — В кн.: Строение Земли по поверхностным сейсмическим волнам. М.: Мир, 1965, с. 49–83.

21. Букчин Б.Г. Распространение волн Лява через вертикальный контакт двух четвертьпространств. — В кн.: Теория и анализ сейсмологических наблюдений. М.: Наука, 1979, с. 70–79. (Вычисл. сейсмология; Вып. 12).

22. Букчин Б.Г. Эффекты отражения и преломления волн Лява на границе океан–континент (расчет). — В кн.: Методы и алгоритмы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1980, с. 109–113. (Вычисл. сейсмология; Вып. 13).

23. Букчин Б.Г., Левшин А.Л., Ратникова Л.И. О проявлении кажущейся анизотропии в неоднородных средах. — В кн.: Логические и вычислительные методы в сейсмологии. М.: Наука, 1984, с. 116–123. (Вычисл. сейсмология; Вып. 17).

24. Булаевский В.А., Звягина Р.А., Яковлева М.А. Численные методы линейного программирования (специальные задачи). М.: Наука, 1977. 367 с.

25. Валуев В.П. Определение сейсмических разрезов по совокупности наблюдений. — В кн.: Некоторые прямые и обратные задачи сейсмологии. М.: Наука, 1968, с. 3–14. (Вычисл. сейсмология; Вып. 4).

26. Вилькович Е.В., Левшин А.Л., Нейгауз М.Г. Волны Лява в вертикально-неоднородной среде (учет сферичности, вариаций параметров, поглощения). — В кн.: Машинная интерпретация сейсмических волн. М.: Наука, 1966, с. 130–149. (Вычисл. сейсмология; Вып. 2).

27. Волк В.Э., Гапоненко Г.И., Зацепин Е.Н. и др. Строение земной коры Арктики по геофизическим данным. — В кн.: Геология Арктики: Докл. XXVII междунар. геол. конгр. М.: Наука, 1984, т. 4, с. 26–36.

28. Вольвовский И.С. Сейсмические исследования земной коры в СССР. М.: Недра, 1973. 208 с.

29. Габриэлов А.М. Дифракция волн Лява на вертикальной границе. — В кн.:

Математическое моделирование и интерпретация геофизических данных. М.: Наука, 1984, с. 165–170. (Вычисл. сейсмология; Вып. 16).

30. Гальмаков Б.Г., Ситников А.В. Поляризационный и азимутальный анализ сейсмических записей с целью изучения вторичных волн Рэлея. — Изв. АН СССР. Физика Земли, 1984, № 9, с. 40–49.

31. Гальперин Е.И. Поляризационный метод сейсмических исследований. М.: Недра, 1977. 296 с.

32. Гегечкори Т.Ш., Яновская Т.Б. Отражение рэлеевских волн на границе контакта сред с сильной скоростной дифференциацией. — Сообщ. АН ГССР, 1979, т. 95, № 3, с. 573–576.

33. Грачев А.Ф. Момский материковый рифт (Северо-Восток СССР). — В кн.: Геофизические методы разведки в Арктике. Л.: Наука, 1973, вып. 8, с. 56–75.

34. Грудева Н.П., Левшин А.Л., Малиновская Л.Н., Розенкоп Л.М. Спектры сейсмических волн двух Камчатских землетрясений. — В кн.: Распознавание и спектральный анализ в сейсмологии. М.: Наука, 1973, с. 107–117. (Вычисл. сейсмология; Вып. 10).

35. Дмитриева Л.А., Капитанова С.А., Яновская Т.Б. Применение метода Бэкуса–Гилберта для нахождения двумерного распределения скоростей поверхностных волн в области Черноморской впадины. — В кн.: Изучение строения Земли по сейсмологическим данным. Киев: Наук. думка. 1985, с. 35–67.

36. Дорофеев В.М., Жарков В.Н. Об определении механической добротности мантии Земли. — Изв. АН СССР. Физика Земли, 1978, № 9, с. 55–73.

37. Егоркин А.В., Чернышев Н.М., Белокопытов В.Н. и др. Строение подсолевых отложений Прикаспийской синеклизы по результатам региональных сейсмических исследований. — Изв. АН СССР. Сер. геол., 1979, № 10, с. 105–114.

38. Итс Е.Н., Яновская Т.Б. Отражение и преломление рэлеевских волн на вертикальной границе раздела. — В кн.: Распознавание и спектральный анализ в сейсмологии. М.: Наука, 1977, с. 214–222. (Вычисл. сейсмология; Вып. 10).

39. Итс Е.Н., Яновская Т.Б. Отражение и преломление поверхностных волн при наклонном падении на вертикальную границу. — В кн.: Теория и анализ



сейсмологических наблюдений. М.: Наука, 1979, с. 86–92. (Вычисл. сейсмология; Вып. 12).

40. *Итс Е.Н., Яновская Т.Б.* Определение коэффициентов отражения и преломления поверхностных волн на вертикальном контакте с помощью функции Грина. — Изв. АН СССР. Физика Земли, 1979, № 6, с. 11–21.

41. *Итс Е.Н., Яновская Т.Б.* Отражение и преломление поверхностных волн на криволинейной границе. — В кн.: Прогноз землетрясений и изучение строения Земли. М.: Наука, 1983, с. 87–92. (Вычисл. сейсмология; Вып. 15).

42. *Канарейкин Д.Б., Павлов Н.Ф., Потехин В.А.* Поляризация радиолокационных сигналов. М.: Сов. радио, 1966. 440 с.

43. *Кац С.А., Михайлова Н.Г.* Нетраекторный поляризационный анализ линейно-поляризованных волн, регистрируемых трехкомпонентными установками. — В кн.: Распознавание и спектральный анализ в сейсмологии. М.: Наука, 1977, с. 223–232. (Вычисл. сейсмология; Вып. 10).

44. *Кнопов Л.* Поверхностные волны и их использование в обратных задачах. — В кн.: Верхняя мантия. М.: Мир, 1975, с. 214–233.

45. *Коган С.Я.* Краткий обзор теории поглощения сейсмических волн. — Изв. АН СССР. Физика Земли, 1966, № 11, с. 1–28; № 12, с. 1–16.

46. *Колесников Ю.А., Токсез М.Н.* Применение суммирования для подавления сейсмической помехи ветрового происхождения. — В кн.: Логические и вычислительные методы в сейсмологии. М.: Наука, 1984, с. 177–188. (Вычисл. сейсмология; Вып. 17).

47. *Колесников Ю.А., Токсез М.Н.* Уменьшение чувствительности длиннопериодных вертикальных сейсмометров к колебаниям атмосферного давления. — В кн.: Математические модели строения Земли и прогноза землетрясений. М.: Наука, 1982, с. 183–189. (Вычисл. сейсмология; Вып. 14).

48. *Копсон Э.* Асимптотические разложения. М.: Мир, 1966. 159 с.

49. *Костров Б.В.* Теория очагов тектонических землетрясений. — Изв. АН СССР. Физика Земли, 1970, № 4, с. 84–101.

50. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. М.: Вышш. шк., 1965. 424 с.

51. *Лазарева А.П., Яновская Т.Б.* Влияние горизонтальных вариаций ско-

рости на амплитуды поверхностных волн. — В кн.: Вопросы геофизики. Л.: Изд-во ЛГУ, 1975, вып. 25, с. 197–207.

52. *Ландер А.В.* Аномальные явления в поверхностных волнах на северо-востоке Евразии и их связь с районом Момского рифта. — В кн.: Математическое моделирование и интерпретация геофизических данных. М.: Наука, 1984, с. 127–155. (Вычисл. сейсмология; Вып. 16).

53. *Ландер А.В.* Некоторые методические вопросы измерения спектральных характеристик и интерпретации поверхностных волн. — В кн.: Вопросы прогноза землетрясений и строения Земли. М.: Наука, 1978, с. 93–110 (Вычисл. сейсмология; Вып. 11).

54. *Ландер А.В.* О методике интерпретации результатов спектрально-временного анализа. — В кн.: Машинный анализ цифровых сейсмических данных. М.: Наука, 1974, с. 279–315. (Вычисл. сейсмология; Вып. 7).

55. *Ландер А.В.* Спектрально-временное представление линейно-диспергирующего сигнала с гауссовым спектром. — В кн.: Интерпретация данных сейсмологии и неотектоники. М.: Наука, 1975, с. 122–128. (Вычисл. сейсмология; Вып. 8).

56. *Ландер А.В., Левшин А.Л., Писаренко В.Ф., Погребинский Г.А.* О спектрально-временном анализе колебаний. — В кн.: Вычислительные и статистические методы интерпретации сейсмических данных. М.: Наука, 1973, с. 236–249. (Вычисл. сейсмология; Вып. 6).

57. *Ландер А.В., Левшин А.Л.* Азимутально-поляризационные аномалии поверхностных волн и способы их изучения. — В кн.: Развитие идей Г.А. Гамбурцева в геофизике. М.: Наука, 1982, с. 248–260.

58. *Левшин А.Л.* Метод поверхностных сейсмических волн — состояние и ближайшие перспективы. — Изв. вузов. Геология и разведка, 1980, № 8, с. 92–111.

59. *Левшин А.Л.* О влиянии горизонтальных неоднородностей на измерения поверхностных волн. — В кн.: Математическое моделирование и интерпретация геофизических данных. М.: Наука, 1984, с. 71–83. (Вычисл. сейсмология; Вып. 16).

60. *Левшин А.Л., Ратникова Л.И., Сакс М.В.* О дисперсии и поглощении упругих волн в горных породах. —

В кн.: Методы и алгоритмы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1980, с. 134–141. (Вычисл. сейсмология; Вып. 13).

61. *Левшин А.Л., Яновская Т.Б.* Отражение и преломление волн Лява на вертикальной границе. – В кн.: Исследование сейсмичности и моделей Земли. М.: Наука, 1976, с. 160–173. (Вычисл. сейсмология; Вып. 9).

62. *Левшин А.Л., Бертоссен К.А.* Особенности строения земной коры южной части шельфа Баренцева моря по данным поверхностных волн. – В кн.: Методы и алгоритмы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1980, с. 142–145. (Вычисл. сейсмология; Вып. 13).

63. *Левшин А.Л.* Поверхностные и каналовые сейсмические волны. М.: Наука, 1973. 176 с.

64. *Лидский В.Б., Нейгауз М.Г.* К методу прогонки в случае самосогретой системы второго порядка. – Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1962, и. 2, № 1, с. 161–165.

65. *Линьков Е.М., Типусев С.Я., Буценко В.В.* Помехозащищенный длиннопериодный сейсмограф. – В кн.: Геофизическая аппаратура. Л.: Недра, 1980, вып. 80, с. 78–87.

66. *Лутиков А.И.* Влияние наклонной границы на отражение и преломление рэлеевских волн. – Изв. АН СССР. Физика Земли, 1979, № 10, с. 58–66.

67. *Мацевский С.А.* Электронный сейсмограф с емкостным преобразователем. – В кн.: Методы и алгоритмы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1980, с. 173–184. (Вычисл. сейсмология; Вып. 13).

68. *Молотков Л.А.* Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л.: Наука, 1984. 201 с.

69. *Молотков Л.А.* О матричных представлениях дисперсионного уравнения для слоистых упругих сред. – Зап. науч. сем. ЛОМИ 1972, т. 25, с. 116–131.

70. *Молотков Л.А.* О распространении упругих волн в средах, содержащих тонкие плоскопараллельные слои. – В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Наука, 1961, сб. V, с. 240–280.

71. *Нейгауз М.Г., Шкаоинская Г.В.* Метод расчета поверхностных волн Рэлея в вертикально-неоднородном полупространстве. – В кн.: Машинная

интерпретация сейсмических волн. М.: Наука, 1966, с. 121–129. (Вычисл. сейсмология; Вып. 2).

72. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 375 с.

73. *Павлов В.М., Гусев А.А.* К возможности восстановления движения в очаге глубокого землетрясения по полю объемных волн в дальней зоне. – ДАН СССР, 1980, т. 255, № 4, с. 824–828.

74. *Пикерис Х.* Теория распространения звука в мелкой воде. – В кн.: Распространение звука в океане. М.: Изд-во иностр. лит., 1951.

75. *Писаренко В.Ф.* Об оценивании спектров с помощью нелинейных функций от матрицы ковариаций. – В кн.: Вычислительные и статистические методы интерпретации сейсмических данных. М.: Наука, 1973, с. 263–285. (Вычисл. сейсмология; Вып. 6).

76. *Плешингер А.* Сбор и обработка широкополосных сейсмических записей. – В кн.: Автоматизация сбора и обработки сейсмологической информации. М.: Радио и связь, 1983, с. 35–47.

77. *Попов М.М.* Метод суммирования гауссовых пучков в изотропной теории упругости. – Изв. АН СССР. Физика Земли, 1983, № 9, с. 39–50.

78. *Рао С.Р.* Линейные статистические методы и их применения. М.: Наука, 1968. 547 с.

79. *Савостин Л.А., Карасик А.М., Зоненшайн Л.П.* История раскрытия Евразийского бассейна Арктики. – ДАН СССР, 1984, т. 275, № 5, с. 1156–1161.

80. *Санто Т.* Разделение юго-западной части Тихого океана на районы с одинаковой дисперсией волн Рэлея. – В кн.: Строение Земли по поверхностным сейсмическим волнам. М.: Мир, 1965, с. 169–211.

81. *Сихарулидзе Д.И.* Строение Земли по поверхностным волнам. Тбилиси: Мецниереба, 1978. 245 с.

82. *Сихарулидзе Д.И., Манджгаладзе Л.В.* Моделирование горизонтального отражения волн Рэлея от вертикальной границы раздела двух четвертьпространств. – Сообщ. АН ГССР, 1977, т. 85, № 2, с. 345–347.

83. *Старовойт О.Е., Феофилактов В.Д., Шульпин Л.А., Ярошевич М.И.* Кварцевый деформограф Центральной сейсмологической обсерватории "Об-

нинск". — Изв. АН СССР. Физика Земли, 1971, № 11, с. 85–94.

84. Старовойт О.Е., Захарова А.И., Мишаткин В.Н., Бармин М.П. Система сбора, обработки и хранения сейсмологической информации. — В кн.: Автоматизация сбора и обработки сейсмологической информации. М.: Радио и связь, 1983, с. 53–61.

85. Тектоника Якутии. Новосибирск: Наука, 1975. 198 с.

86. Тектоническая карта Евразии/Под ред. А.Л. Яншина. М.: ГИН АН СССР, ГУГК МИНГЕО СССР, 1966.

87. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 223 с.

88. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 662 с.

89. Феофилактов В.Д. Помехи в длиннопериодной сейсмометрии. М.: Наука, 1977. 152 с.

90. Форсайт Дж., Мальком М., Муллер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980.

91. Циммер В.А. О природе глубинных границ раздела в Прикаспийской впадине. — В кн.: Строение земной коры в верхней мантии по данным сейсмических исследований. Киев: Наук. думка, 1977, с. 302–306.

92. Чесноков Е.М. Сейсмическая анизотропия верхней мантии Земли. М.: Наука, 1977. 149 с.

93. Чинери М.А., Ганн А.Г. Современные методы сбора, обработки и хранения сейсмологической информации. — В кн.: Автоматизация сбора и обработки сейсмологической информации. М.: Радио и связь, 1983, с. 28–34.

94. Шкадинская Г.В. Методы расчета поверхностных волн Рэлея в радиально-неоднородном шаре. — В кн.: Алгоритмы интерпретации сейсмических данных. М.: Наука, 1971, с. 178–188. (Вычисл. сейсмология; Вып. 5).

95. Юдахин Ф.Н. Геофизические поля, глубинное строение и сейсмичность Тянь-Шаня. Фрунзе: Илим, 1978. 246 с.

96. Яновская Т.Б. Распределение групповых скоростей поверхностных волн в Северной Атлантике. — Изв. АН СССР. Физика Земли, 1982, № 2, с. 3–11.

97. Яновская Т.Б., Николова С.Б. Распределение групповых скоростей поверхностных волн Рэлея и Лява в Юго-Восточной Европе и Малой Азии. — Геофиз. журн. Болг. АН, 1984, т. 10, № 4, с. 83–92.

98. Яновская Т.Б., Порохова Л.Н. Обратные задачи геофизики. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 210 с.

99. Яновская Т.Б. Метод решения обратной кинематической задачи сейсмiky для горизонтально-неоднородной среды. — В кн.: Методы и алгоритмы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1980, с. 96–101. (Вычисл. сейсмология; Вып. 13).

100. Abo-Zena A.M. Dispersion function computations for unlimited frequency values. — Geophys. J., 1979, vol. 58, p. 91–105.

101. Agnew D., Berger J., Buland R. et al. International deployment of accelerometers: A network for very long period seismology. — Trans. Amer. Geophys. Union, 1976, vol. 57, p. 180–188.

102. Alsop L.E. Transmission and reflection of Love waves at the vertical discontinuity. — J. Geophys. Res., 1966, vol. 71, p. 3969–3984.

103. Alsop L.E., Goodman A.S., Gregeresen S. Reflection and transmission of inhomogeneous waves with particular application to Rayleigh waves. — Bull. Seismol. Soc. Amer., 1974, vol. 64, p. 1635–1652.

104. Anderson D.L., Dziewonski A.M. Upper mantle anisotropy: Evidence from free oscillations. — Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1982, vol. 69, p. 383–404.

105. Anderson D.L. Surface wave tomography. — Trans. Amer. Geophys. Union, 1984, vol. 65, N 16, p. 147–148.

106. Backus G. Geographical interpretation of measurements of average phase velocities of surface waves over great circular and great semi-circular paths. — Bull. Seismol. Soc. Amer., 1964, vol. 57, N 2, p. 571–610.

107. Backus G., Gilbert F. The resolving power of gross Earth data. — Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1968, vol. 16, p. 169–205.

108. Backus G., Gilbert F. Uniqueness in the inversion of inaccurate gross Earth data. — Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1970, vol. 226, p. 123–192.

109. Backus G., Mulcahy M. Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic sources. 1. Continuous displacements. — Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1976, vol. 46, p. 341–362.

110. Backus G., Mulcahy M. Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic sources. 2. Discontinuous displacements. — Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1976, vol. 47, p. 301–330.

111. *Backus G.* Interpreting the seismic glut moments of total degree two or less. — *Bull. Astron. Soc.*, 1977, vol. 51, p. 1–25.
112. *Backus G.* Seismic sources with observable glut moments of spatial degree two. — *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 1977, vol. 51, p. 27–45.
113. *Blum P.A., Gaulon R.* Detection et traitement des ondes sismiques de tres basses frequences. — *Ann. géophys.*, 1971, vol. 27, p. 123–140.
114. *Boore D.M.* Love waves in nonuniform wave guides: Finite difference calculations. — *J. Geophys. Res.*, 1970, vol. 75, p. 1512–1527.
115. *Boore D.M.* Finite difference methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials. — In: *Methods in computational physics*. N.Y.: Acad. press, 1972, p. 1–137.
116. *Bukchin B.G., Levshin A.L.* Propagation of Love waves across a vertical discontinuity. — *Wave Motion*, 1980, vol. 2, p. 293–302.
117. *Bungum H., Husebye E.S., Ringdal F.* The NORSAR array and preliminary results of data analysis. — *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 1971, vol. 25, p. 115–126.
118. *Bungum H., Capon J.* Coda pattern and multipath propagation of Rayleigh waves at NORSAR. — *Phys. Earth and Planet. Intern.*, 1974, vol. 9, p. 111–127.
119. *Burton P.W.* Estimation of  $Q_T$  from seismic Rayleigh waves. — *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 1973, vol. 36, p. 167–189.
120. *Calcagnile G., Panza G.F.* Crust and upper mantle structure under the Baltic shield and Barents Sea from dispersion of Rayleigh waves. — *Tectonophysics*, 1978, vol. 47, p. 59–71.
121. *Capon J.* High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. — *Proc. IEEE*, 1969, vol. 57, p. 1408–1418.
122. *Capon J.* Analysis of Rayleigh-wave multipath propagation at LASA. — *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 1970, vol. 60, N 5, p. 1701–1731.
123. *Cara M.* Filtering of dispersed wave trains. — *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 1973, vol. 33, p. 65–80.
124. *Cerveny V., Molotkov I.A., Psenčík I.* Ray method in seismology. Pr., 1977. 214 p.
125. *Christensen D.H., Kimball J.K., Mauk F.J.* Rayleigh wave group velocity dispersion in the North and South Atlantic oceans. — *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 1980, vol. 70, p. 1187–1809.
126. *Crampin S.* A review of wave motion in anisotropic and cracked elastic media. — *Wave Motion*, 1981, vol. 3, N 4, p. 343–391.
127. *Der Z.A., Landisman M.* Theory for errors resolution and separation of unknown variables in inverse problems with application to the mantle and crust in Southern Africa and Scandinavia. — *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 1972, vol. 27, p. 137–178.
128. *Drake L.A.* Rayleigh waves at the continental boundary by finite element method. — *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 1972, vol. 62, p. 1259–1268.
129. *Dunkin J.W.* Computation of modal solution in layered elastic media at high frequencies. — *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 1965, vol. 55, p. 335–358.
130. *Dziewonski A.M., Anderson D.L.* Preliminary reference Earth model. — *Phys. Earth and Planet. Intern.*, 1981, vol. 3, p. 1157–1180.
131. *Dziewonski A., Bloch S., Landisman M.* A technique for the analysis of transient seismic signals. — *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 1969, vol. 59, p. 427–44.
132. *Dziewonski A., Mills J., Bloch S.* Residual dispersion measurement: A new method of surface wave analysis. — *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 1972, vol. 62, p. 129–139.
133. *Dziewonski A.* On regional differences in dispersion of mantle Rayleigh waves. — *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 1971, vol. 22, p. 289–325.
134. *Ewing M., Mueller S., Landisman M., Sato Y.* Transient analysis of earthquake and explosion arrivals. — *Pure and Appl. Geophys.*, 1959, vol. 44, p. 83–118.
135. *Flinn E.A.* Signal analysis using rectilinearity and direction of particle motion. — *Proc. IEEE*, 1965, vol. 53, N 12, p. 1874–1876.
136. *Frez J., Schwab F.* Structural dependence of the apparent initial phase of Rayleigh waves. — *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 1976, vol. 44, N 2, p. 311–331.
137. *Gjévik B.* Ray tracing for seismic surface waves. — *Geophys. J.*, 1974, vol. 39, p. 29–39.
138. *Gregersen S.* Surface waves in isotropic, laterally inhomogeneous media. — *Pure and Appl. Geophys.*, 1974, vol. 114, p. 821–832.

139. *Gregersen S., Alsop L.E.* Amplitudes of horizontally refracted waves. — *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 1974, vol. 64, p. 535–553.
140. *Gregersen S.* Possible mode conversion between Love and Rayleigh waves at the continental margin. — *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 1978, vol. 54, p. 121–127.
141. *Gregersen S., Alsop L.E.* Mode conversion of Love waves at the continental margin. — *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 1976, vol. 66, p. 1855–1872.
142. *Haskell N.A.* The dispersion of surface waves in multilayered solid media. — *Bull. Seismol. Soc., Amer.*, 1953, vol. 43, p. 17–34.
143. *Herrera I.* On a method to obtain a Green function for multilayered half-space. — *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 1964, vol. 54, p. 1087.
144. *Hudson J.A., Knopoff L.* Transmission and reflection of surface waves at a corner. — *J. Geophys. Res.*, 1964, vol. 69, p. 281.
145. *Its E.N., Yanovskaya T.B.* Propagation of surface waves in a half-space with vertical, inclined or curved interfaces. — *Wave Motion*, 1985, vol. 7, p. 79–84.
146. *Jackson D.D.* Interpretation of inaccurate, insufficient and inconsistent date. — *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 1972, vol. 28, p. 97–110.
147. *Jobert N., Jobert G.* An application of ray theory to the propagation of waves along a laterally heterogeneous spherical surface. — *Geophys. Res. Lett.*, 1983, vol. 10, N 12, p. 1148–1151.
148. *Kazi M.H.* Spectral representation of Love wave operator. — *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 1976, vol. 47, p. 225–249.
149. *Kennett B.L.N., Clarke T.J.* Rapid calculation of surface wave dispersion. — *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 1983, vol. 72, p. 619–631.
150. *Kijko A., Mitchell B.J.* Multi-mode Rayleigh wave attenuation and Q in the crust of the Barents shelf. — *J. Geophys. Res.*, 1983, vol. 88, p. 3315–3328.
151. *Knopoff L., Hudson J.A.* Transmission of Love waves past a continental margin. — *J. Geophys. Res.*, 1964, vol. 69, p. 1649–1653.
152. *Knopoff L.* A matrix method for elastic wave problems. — *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 1964, vol. 54, p. 431–438.
153. *Lay T., Kanamori H.* Geometric effects of global lateral heterogeneity on long-period surface wave propagation. — *J. Geophys. Res.*, 1985, vol. 90, N B1, p. 605–621.
154. *Levshin A.L., Pisarenko V.F., Pogrebinsky G.A.* On a frequency–time analysis of oscillations. — *Ann. Geophys.*, 1972, vol. 28, p. 211–218.
155. *Leveque J.J.* Regional upper mantle S-velocity models from phase velocities of great-circle Rayleigh waves. — *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 1980, vol. 63, p. 23–43.
156. *Levshin A.L., Berteussen K.A.* Anomalous propagation of surface waves in the Barents Sea as inferred from NORSAR recordings. — *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 1979, vol. 56, p. 97–118.
157. *Lysmer J., Drake L.A.* The propagation of Love waves across nonhorizontally layered structures. — *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 1981, vol. 61, p. 1233–1251.
158. *Lysmer J.* Lumped mass method for Rayleigh waves. — *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 1970, vol. 60, p. 89–104.
159. *Mal A.K., Knopoff L.* Transmission of Rayleigh waves at a corner. — *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 1965, vol. 55, p. 455–466.
160. *Malischewski P.* Surface waves in media having lateral inhomogeneities. — *Pure and Appl. Geophys.*, 1976, vol. 114, p. 833–843.
161. *Malischewski P.* The influence of curved discontinuities on the propagation of surface waves. — *Gerlands. Beitr. Geophys.*, 1974, Bd. 83, N 5, S. 355–362.
162. *McGarr A., Alsop L.E.* Transmission and reflection of Rayleigh waves at vertical boundaries. — *J. Geophys. Res.*, 1967, vol. 72, p. 2169–2180.
163. *Means J.D.* The use of the three dimensional covariance matrix in analysing the polarization properties of plane waves. — *J. Geophys. Res.*, 1972, vol. 77, p. 5551–5559.
164. *Mendiguren J.* Inversion of surface wave data i. source mechanism studies. — *J. Geophys. Res.*, 1977, vol. 82, p. 889–894.
165. *Mills J.M.* Great circle Rayleigh wave attenuation and group velocity. Regionalization and pure path models for shear velocity and attenuation. — *Phys. Earth and Planet. Inter.*, 1978, vol. 17, p. 323–352.
166. *Nakanishi I., Kanamori H.* Effects of lateral heterogeneity and source process time on the linear moment tensor inversion of long-period Rayleigh waves. — *Bull. Seismol. Soc., Amer.*, 1982, vol. 72, p. 2063–2080.

167. *Nakanishi I., Anderson D.L.* World-wide distribution of group velocity of mantle Rayleigh waves as determined by spherical inversion. — *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 1982, vol. 72, p. 1185–1194.
168. *Nakanishi I., Anderson D.L.* Measurements of mantle velocities and inversion for lateral heterogeneity and anisotropy. 1. Analysis of great-circle phase velocities. — *J. Geophys. Res.*, 1983, vol. 88, p. 10267–10283.
169. *Neunhofer H., Guth D.* Dispersion of seismic surface waves in middle and northern Europe. — In: *Seismology and solid Earth physics. B.: Zentralinst. Phys. Erde*, 1976, vol. 31, p. 399–403.
170. *Nolet G., Panza G.* Array analysis of seismic surface waves: Limits and possibilities. — *Pure and Appl. Geophys.*, 1974, vol. 114, p. 775–796.
171. *Nolet G.* Higher modes and the determination of upper mantle structure: Ph. D. thesis/Veining-Meinesz lab. Utrecht Univ. Utrecht, 1976. 90 p.
172. *Noponen I.* Surface wave velocities in Finland. — *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 1966, vol. 56, p. 1093–1104.
173. *Oliver J., Murphy L.* Seismological global network. — *Science*, 1971, vol. 174, p. 256–261.
174. *Panza G.* Phase velocity determination of fundamental Love and Rayleigh waves. — *Pure and Appl. Geophys.*, 1976, vol. 114, p. 753–763.
175. *Patton H.* Crust and upper mantle structure of the Eurasian continent from the phase velocity and Q of surface waves. — *Rev. Geophys. and Space Phys.*, 1980, vol. 18, N 3, p. 605–625.
176. *Patton H.* Reference point equalization method for determining the source and path effects of surface waves. — *J. Geophys. Res.*, 1965, vol. 70, p. 1441–1448.
177. *Peterson J. et al.* The seismic research observatory. — *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 1976, vol. 66, N 6, p. 2049–2068.
178. *Plešinger A., Horalek J.* The seismic broadband recording and data processing system FBV/DPS and its seismological applications. — *Geophys. J.*, 1976, vol. 42, p. 201–217.
179. *Popov M.M., Pšeničik I.* Computation of ray amplitudes in inhomogeneous media with curved interfaces. — *Stud. geophys. et geod.*, 1978, vol. 22, N 3, p. 248–258.
180. *Rodi W.L. et al.* A fast accurate method for computing group velocity partial derivatives for Rayleigh and Love modes. — *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 1975, vol. 65, p. 1105–1114.
181. *Roult G., Romanowicz B.* GEOSCOPE, a new long period global network — first results. — *Trans. Amer. Geophys. Union*, 1983, vol. 65, N 58, p. 220.
182. *Santo T., Sato Y.* World-wide survey of the regional characteristics of group velocity dispersion of Rayleigh waves. — *Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo Univ.*, 1966, vol. 44, p. 939–964.
183. *Sato R.* Love waves propagated across transitional zone. — *Jap. J. Geophys.*, 1961, vol. 2, p. 117–134.
184. *Sato Y., Santo T.* World-wide distribution of the group velocity of Rayleigh waves as determined by dispersion data. — *Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo Univ.*, 1969, vol. 47, p. 31–41.
185. *Schlue J.W., Knopoff L.* Inversion of surface-wave phase velocities for an anisotropic structure. — *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 1978, vol. 54, p. 697–702.
186. *Schlue J. W.* Seismic surface wave propagation in three dimensional finite-element structures. — *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 1981, vol. 71, p. 1003–1010.
187. *Schwab F., Knopoff L.* Surface wave dispersion computations. — *Bull. Seismol. Soc., Amer.*, 1970, vol. 60, p. 321–344.
188. *Schab F., Nakanishi K., Cuscito M. et al.* Surface wave computations and the synthesis of theoretical seismograms at the high frequencies. — *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 1984, vol. 74, p. 1555–1578.
189. *Sobel P.A., Seggern D.H. von.* Application of surface-wave ray tracing. — *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 1978, vol. 68, N 5, p. 1359–1380.
190. *Souriau A., Souriau M.* Test of tectonic models by great circle Rayleigh waves. — *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 1983, vol. 73, p. 533–551.
191. *Talwani M., Eldholm O.* Boundary between continental and oceanic crust at the margin of rifted continents. — *Nature*, 1973, vol. 241, N 5388, p. 325–330.
192. *Tatham R.* Surface-wave dispersion applied to the detection of sedimentary basins. — *Geophysics*, 1975, vol. 40, N 1, p. 40–55.
193. *Thomson W.T.* Transmission of elastic waves through a stratified solid. — *J. Appl. Phys.*, 1950, vol. 21, p. 89–93.
194. *Toksoz M.N., Ben-Menahem A.* Velocities of mantle Love and Rayleigh

waves over multiple path. — Bull. Seismol. Soc. Amer., 1963, vol. 53, p. 741–764.

195. *Tsai Y.B., Aki K.* Simultaneous determination of the seismic moment and attenuation of the seismic surface waves. — Bull. Seismol. Soc. Amer., 1969, vol. 59, p. 275–287.

196. *Weidner D.J., Aki K.* Focal depth and mechanism of mid-ocean ridge earthquakes. — J. Geophys. Res., 1973, vol. 78, N 11, p. 1818–1831.

197. *Wielandt E., Streckeisen G.* The leaf-spring seismometer: Design and performance. — Bull. Seismol. Soc. Amer., 1982, vol. 72, p. 2349–2367.

198. *Wiggins R.A.* The general linear

inverse problem: Implication of surface waves and free oscillations for earth structure. — Rev. Geophys., 1972, vol. 10, p. 251–285.

199. *Wiggins R.A.* A fast, new computational algorithm for free oscillations and surface waves. — Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1976, vol. 47, p. 135–150.

200. *Woodhouse J.H.* Surface waves in the laterally varying layered structure. — Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1974, vol. 37, p. 461–490.

201. *Yanovskaya T.B.* Solution of the inverse problem of seismology for laterally inhomogeneous media. — Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1984, vol. 79, p. 293–304.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	3
<b>Часть I. ВОПРОСЫ ТЕОРИИ . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>Глава 1. Поверхностные волны в вертикально-неоднородных средах . . . . .</b>	<b>7</b>
§ 1.1. Уравнения движения упругой среды . . . . .	7
§ 1.2. Источники сейсмических возмущений . . . . .	10
§ 1.3. Поверхностные волны в вертикально-неоднородном полупространстве, возбуждаемом точечными источниками . . . . .	12
§ 1.4. Физическая трактовка полученных формул; элементарные примеры . . . . .	19
§ 1.5. Учет сферичности; вариационные формулы . . . . .	24
§ 1.6. Учет неупругих явлений . . . . .	29
§ 1.7. Теоретические сейсмограммы . . . . .	31
<b>Глава 2. Поверхностные волны в средах со слабой горизонтальной неоднородностью . . . . .</b>	<b>32</b>
§ 2.1. Постановка задач на распространение поверхностных волн в полупространстве со слабой горизонтальной неоднородностью . . . . .	32
§ 2.2. Распространение стационарных поверхностных волн . . . . .	34
§ 2.3. Распространение нестационарных поверхностных волн . . . . .	41
§ 2.4. Метод расчета геометрического расхождения пространственно-временных лучей . . . . .	51
§ 2.5. Отражение и преломление пространственно-временных лучей на границе . . . . .	56
§ 2.6. Пространственно-временные лучи и геометрическое расхождение в сферическом случае . . . . .	59
§ 2.7. О конфигурации пространственно-временных лучей . . . . .	63
<b>Глава 3. Поверхностные волны в средах с вертикальными контактами . . . . .</b>	<b>65</b>
§ 3.1. Постановка задачи . . . . .	65
§ 3.2. Обзор существующих теоретических результатов . . . . .	69
§ 3.3. Приближенный метод расчета коэффициентов отражения—прохождения поверхностных волн на контакте . . . . .	77
§ 3.4. Численный метод расчета поля смещений . . . . .	84
§ 3.5. Случай наклонного контакта и другие возможные осложнения модели . . . . .	86
<b>Глава 4. Алгоритмы расчета поверхностных волн . . . . .</b>	<b>89</b>
§ 4.1. Матричный алгоритм решения одномерных краевых задач . . . . .	89
§ 4.2. Численный метод решения одномерных краевых задач . . . . .	99
§ 4.3. Расчет лучей в горизонтально-неоднородной среде . . . . .	103
§ 4.4. Расчет коэффициентов отражения—прохождения . . . . .	111
<b>Часть II. ВОПРОСЫ ИНТЕРПРЕТАЦИИ НАБЛЮДЕНИЙ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН . . . . .</b>	<b>125</b>
<b>Глава 5. Регистрация, выделение и измерение параметров поверхностных волн . . . . .</b>	<b>125</b>
§ 5.1. Способы и средства регистрации поверхностных волн . . . . .	125



§ 5.2. Система унификации, архивирования и доступа к данным . . . . .	128
§ 5.3. Принципы обработки записей поверхностных волн . . . . .	130
§ 5.4. Спектрально-временной анализ . . . . .	149
§ 5.5. Линейный поляризационный анализ . . . . .	160
§ 5.6. Пространственный анализ поверхностных волн . . . . .	175
<b>Г л а в а 6. Методы количественной интерпретации наблюдений . . . . .</b>	<b>180</b>
§ 6.1. Обзор современных подходов к решению обратной задачи поверхностных волн . . . . .	180
§ 6.2. Применение методов наименьших квадратов и сингулярных разложений . . . . .	185
§ 6.3. Применение методов квадратичного программирования . . . . .	187
§ 6.4. Моделирование экспериментальных данных в блочной структуре . . . . .	189
§ 6.5. Метод Бэкуса—Гилберта . . . . .	199
§ 6.6. Влияние горизонтальной неоднородности среды на измерения поглощения поверхностных волн . . . . .	206
§ 6.7. Анизотропия или неоднородность? . . . . .	213
§ 6.8. Оценка параметров очага землетрясения . . . . .	219
<b>Г л а в а 7. Некоторые результаты изучения регионального строения литосферы поверхностными волнами . . . . .</b>	<b>237</b>
§ 7.1. Применение методики исключения трасс для изучения земной коры Евразии . . . . .	237
§ 7.2. Применение методики Бэкуса—Гилберта . . . . .	251
§ 7.3. Аномальные поверхностные волны Рэлея на северо-востоке Евразии . . . . .	262
<b>Литература . . . . .</b>	<b>268</b>

Анатолий Львович Левшин  
Татьяна Борисовна Яновская  
Александр Викторович Ландер  
Борис Григорьевич Букчин  
Михаил Петрович Бармин  
Людмила Ивановна Ратникова  
Елизавета Николаевна Итс

**ПОВЕРХНОСТНЫЕ СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ  
В ГОРИЗОНТАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ  
ЗЕМЛЕ**

*Утверждено к печати  
ордена Ленина Институтом физики Земли  
им. О.Ю. Шмидта*

Редактор *Н.П. Грудева*  
Редактор издательства *Ю.Г. Тихомирова*  
Художник *А.Н. Бобрович*  
Художественный редактор *С.А. Литвак*  
Технический редактор *Г.П. Каренина*  
Корректор *З.Д. Алексеева*

Набор выполнен в издательстве  
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 31108

Подписано к печати 24.02.87. Т—05634  
Формат 60 X 90 1/16. Бумага офсетная № 1  
Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная  
Усл.печ.л. 17,5. Усл.кр.-отт. 17,7. Уч.-изд.л. 18,9  
Тираж 500 экз. (допечатка). Тип. зак. 1303  
Цена 2 р. 90 к.

Ордена Трудового Красного Знамени  
издательство "Наука"  
117864 ГСП-7, Москва В-485,  
Профсоюзная ул., д. 90

Ордена Трудового Красного Знамени  
1-я типография издательства "Наука"  
199034, Ленинград В-34, 9-я линия, 12