

**W. Schüle: Der Luftwiderstand
auf Grund der neueren Versuche.**

**Sonderabdruck aus der Zeitschrift
des Vereines deutscher Ingenieure.**

===== Jahrgang 1910, Seite 12. =====

Fachgebiet: Mechanik.

Preis für Mitglieder . . . 0,70 Mk.

Preis für Nichtmitglieder 1,40 Mk.

Portozuschlag für das Ausland 0,05 Mk.

ISBN 978-3-662-24307-7
DOI 10.1007/978-3-662-26421-8

ISBN 978-3-662-26421-8 (eBook)

Der Luftwiderstand auf Grund der neueren Versuche.

Von Professor W. Schüle in Breslau.

Zahlreiche Versuche sind ausgeführt worden, um den Bewegungswiderstand zu ermitteln, den in fortschreitender Bewegung befindliche Körper verschiedener Gestalt durch die Luft erleiden. Eine ganze Reihe von Formeln ist aufgestellt worden, um diesen Widerstand im einfachsten Falle, dem einer ebenen gegen die Bewegungsrichtung unter dem Winkel α geneigten Platte, zu berechnen¹⁾. Versuche sowohl wie empirisch oder theoretisch abgeleitete Formeln lieferten zum überwiegenden Teil weit voneinander abweichende Werte²⁾. Bisher ist es nicht einmal gelungen, die wesentlichen Einflüsse, die den Luftwiderstand der ebenen Platte bedingen, wenigstens ihrer Größenordnung nach voneinander zu sondern, geschweige daß es eine mechanisch wohl begründete und mit den Versuchen übereinstimmende Theorie des Luftwiderstandes gäbe.

Durch die neuere Entwicklung der Luftschiffahrt ist die praktische Bedeutung dieser Frage erheblich gewachsen; wird doch die Antriebsarbeit der lenkbaren Luftfahrzeuge in erster Linie durch den Luftwiderstand bedingt. Bei denjenigen Fahrzeugen, die ohne Ballon fliegen sollen, muß der Luftwiderstand außerdem das Mittel zur Hebung von Maschinen-gewicht und Nutzlast bieten, und eine ähnliche, sehr bedeutungsvolle Rolle spielt der Luftwiderstand bei den Höhenstauern der neuesten Ballon-Luftschiffe.

In den letzten Jahren sind zwei Versuchsreihen bekannt geworden, die von vornherein das größte Vertrauen verdienen, nämlich die Versuche von G. Eiffel, dem Erbauer des Eiffel-Turmes, die von 1903 bis 1905 ausgeführt und 1907 in einem besonders, prächtig ausgestatteten Werk³⁾ veröffentlicht wurden; zweitens die Versuche von Prof. A. Frank in Hannover, die in dieser Zeitschrift 1906 S. 593 und 1908 S. 1522 mitgeteilt sind.

Eiffel ließ Platten mit Oberflächen bis 1 qm aus 115 m Höhe einem senkrechten Drahtseil entlang vom Eiffelturm frei herabfallen; Frank führte seine Versuche mit Körpern von $\frac{1}{100}$ bis $\frac{3}{100}$ qm Stirnfläche durch, die an einem 13 m langen Pendel unter dem Einfluß ihres Eigengewichtes Schwingungen ausführten. Bei dieser großen Verschiedenheit sowohl in der ganzen Versuchsordnung als auch in der Größe der verwendeten Oberflächen und der Geschwindigkeiten dürfte es ein erhebliches Interesse bieten und für die Erkenntnis der Vorgänge von Nutzen sein, beide Versuchsreihen einem eingehenden kritischen Vergleich zu unterziehen. Dieser Vergleich und die daraus zu ziehende Nutzanwendung für die Berechnung der Luftwiderstände ebener Platten ist die Aufgabe der vorliegenden Arbeit.

Von ganz besonderem Interesse und für die Erkenntnis vom Wesen des Luftwiderstandes von ausschlaggebender Bedeutung sind die Frankschen Versuche aus 1908, die den Reibungswiderstand der Luft an den zur Bewegungsrichtung parallelen Flächen betreffen. Es liegt nahe, die Ergebnisse dieser Versuche zu vergleichen mit dem, was

über die Strömungswiderstände von Gasen und Dämpfen in Rohrleitungen bekannt ist. Sichere Unterlagen nach dieser Richtung bieten die bekannten Versuche des Bayerischen Dampfkessel-Revisionsvereines und diejenigen von Fritzsche an der Dresdener Technischen Hochschule.

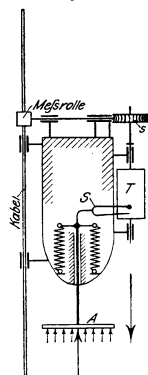
Hinsichtlich der Anordnung, Durchführung und Berechnung der Frankschen Versuche kann auf diese Zeitschrift verwiesen werden. Dagegen ist es, um sich ein Urteil über die Eiffelschen Ergebnisse bilden zu können, unumgänglich, das Wesentliche der Versuchseinrichtungen Eiffels zu kennen⁴⁾.

Der Grundgedanke dieser Versuche besteht darin, daß der Körper A (meist eine ebene Platte), Fig. 1, dessen Luftwiderstand gemessen werden soll, mit einem andern, schwereren Körper von verhältnismäßig nicht zu großem Luftwiderstand verbunden wird. Beim gemeinsamen freien Fall bewegt sich die ganze Masse im Anfang fast mit der natürlichen Beschleunigung der Schwere ($g = 9,81 \text{ m/sk}^2$). Selbst in tieferen Lagen, bei erheblicher Geschwindigkeit, vermochte der Luftwiderstand W , der gemessen werden sollte, im Verein mit demjenigen des übrigen Körpers die Fallbewegung innerhalb des verfügbaren Fallraumes von 95 m nicht erheblich zu verzögern. Am Ende des Fallweges betrug die Fallgeschwindigkeit fast stets gegen 40 m/sk, während dem Fall im luftleeren Raum $\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 95} = 43,3 \text{ m/sk}$ entsprechen würden.

Der Widerstand W konnte auf dem größten Teil der Fallstrecke bei Geschwindigkeiten von 15 bis 40 m/sk in folgender Weise gemessen werden. Aus dem Schema Fig. 1 ist ersichtlich, daß der Widerstandskörper A am Ende einer gerade geführten lotrechten Stange befestigt ist. Die Stange trägt am oberen Ende zwei geeichte Spiralfedern (je nach der Größe der Platten A von verschiedener Stärke), die durch den Luftwiderstand auf Zug in Anspruch genommen und gedehnt werden. Ihre elastische Verlängerung f wird mittels eines fest mit ihnen verbundenen Schreibstiftes (S) in wahrer Größe auf eine rotierende Trommel T aufgezeichnet, die mit berußtem Papier bespannt ist. Aus f läßt sich in gewisser Weise (s. unten) W berechnen.

Der zu einer bestimmten Durchbiegung f gehörige Fallweg und die Fallzeit werden auf der Trommel durch den gleichen Stift verzeichnet: der Weg dadurch, daß die Trommel mittels einer Schneckenradübersetzung s von einem Rädchen aus angetrieben wird, das sich beim Fall auf dem Kabel abrollt (das Rädchen wird durch eine starke Feder an das Kabel angedrückt); die Fallzeit dadurch, daß der Schreib-

Fig. 1.



¹⁾ Vergl. Eiffel, *Résistance de l'air*, S. 69 u. 78 Fig. 16 u. 17.
²⁾ *Recherches expérimentales sur la résistance de l'air, exécutées à la tour Eiffel*, par G. Eiffel, Paris 1907; vergl. auch Z. 1908 S. 463, 1039.

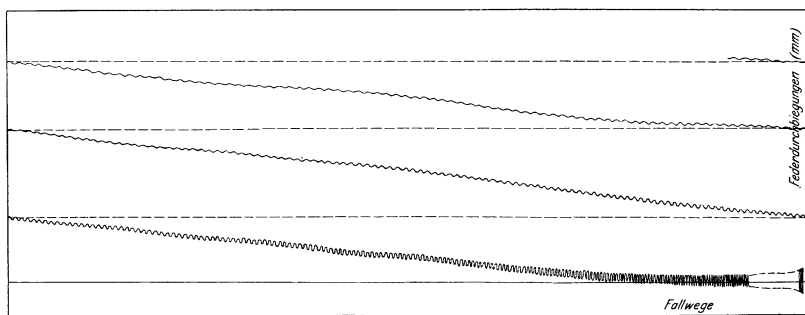
³⁾ Bezüglich der weiteren Einzelheiten muß ich auf das Eiffelsche Werk verweisen.

stift an dem einen Zinken einer Stimmgabel befestigt ist, deren Schwingungszeit $\frac{1}{100}$ sk beträgt. Auf dem beruhten Papier wird so während des Falles eine schraubenförmig ansteigende Linie verzeichnet, die in der Abwicklung wie Fig. 2 aussieht. Die Abszissen ergeben die Fallwege, die Ordinaten die Federdurchbiegungen, die Zahl der Wellen die Fallzeit. Die augenblickliche Fallgeschwindigkeit kann einfach als Mittelwert aus der Zahl der Wellen, die in einer

weitere Schlüsse zu ziehen. Eiffel hat indessen diesem Umstande dadurch Rechnung getragen, daß nur solche Versuche zur Berechnung verwertet wurden, bei denen die Ersatzgleichung mit erheblicher Genauigkeit zutrif. Zur Prüfung dieses Umstandes wurde ein graphisches Verfahren verwendet, dessen Erläuterung hier zu weit führen würde.

Fig. 4 zeigt die Gesamtanordnung im Schema. Jeder Kegel enthält eine gesonderte Meßvorrichtung. Die Ver-

Fig. 2.



kurzen Strecke um den betreffenden Punkt herum enthalten sind, bestimmt werden. Der Luftwiderstand ergibt sich nun wie folgt. Für den beweglichen Teil vom Gewichte G allein gilt nach Fig. 3 gemäß dem Beschleunigungsgesetz:

$$G + f - W = \frac{G}{g} p,$$

mit p als Augenblickswert der Beschleunigung. Daraus:

$$W = f + G \left(1 - \frac{p}{g}\right).$$

Der Luftwiderstand W ist also nicht mit der Federspannung identisch, sondern stets größer als diese, da immer $p < g$ ist. Dies rührt daher, daß der Luftwiderstand nicht nur die Federn zu spannen, sondern auch denjenigen Teil des Gewichtes G zu heben hat, der durch die Massenbeschleunigung nicht aufgebraucht wird. Dies ist eben der Betrag $G \left(1 - \frac{p}{g}\right)$. Dieses Glied stellt für die Versuche eine umständlich zu ermittelnde Berichtigung dar.

Um seinen Wert zu erhalten, muß nämlich die Beschleunigung der Fallbewegung ermittelt werden. Man könnte zu diesem Zweck das Diagramm der Geschwindigkeiten und zugehörigen Zeiten benutzen, in dem bekanntlich die Neigung der Kurventangente der Beschleunigung entspricht ($p = \frac{dv}{dt}$). Eiffel hat es vorgezogen, sie aus den Fallwegen (h) und den zugehörigen Fallzeiten zu bestimmen, gemäß

$$p = \frac{d^2 h}{dt^2}.$$

Zu diesem Zweck ersetzt Eiffel die wirkliche Zeit-Wegkurve durch eine angenäherte Kurve mit der Gleichung $h = \frac{1}{2} g t^2 - at^3 - bt^4$.

Daraus wird

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = g - 6t(a + 2bt),$$

oder

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = g(1 - \lambda t)$$

mit

$$\lambda = \frac{6}{g}(a + 2bt).$$

Es gilt sonst als bedenklich, aus einer Ersatzkurve durch Differentiation, und wie hier gar durch doppelte,

suche wurden fast ausnahmslos mit nur einem Widerstandskörper A ausgeführt, um gegenseitige Beeinflussungen zu verhindern. Das durch diese einseitige Anordnung entstehende Kippmoment muß indessen zu Querdrücken auf das Kabel geführt haben, deren ungleichmäßiger, verzögernder Einfluß (infolge der Reibung in den Führungen BB) in manchen Versuchsergebnissen deutlich erkennbar ist. Die Blattfedern F sind zur Bremsung am Ende des Fallweges bestimmt; ihre Enden enthalten die Kabelführungen.

Die Körper, deren Widerstand ermittelt wurde, bestanden zum größten Teil aus ebenen Platten von quadratischer, rechteckiger und kreisförmiger Gestalt (die Rechtecke in den Verhältnissen von Fig. 5). Sie wurden entweder nach Fig. 6 senkrecht zur Fallrichtung oder nach Fig. 7 schief dazu, unter dem Neigungswinkel α gegen die Lotrechte, angeordnet. Im letzteren Falle waren immer zwei Flächen nötig, um Querdrücke von der Führungsstange fern zu halten. Die geneigten Flächen wurden entweder mit einer Kante zusammenstoßend, Fig. 7 (Winkel- oder Keilstück), oder wie in Fig. 8 mit einem größeren Zwischenraum verwendet. Der letztere Fall ist sowohl für die Luftschiffahrt als auch für das Gesetz des Widerstandes als solches von größtem Interesse.

Schließlich wurden auch Zylinder, Kegel (60°) und Kugelschalen untersucht, s. die spätere Figur 23.

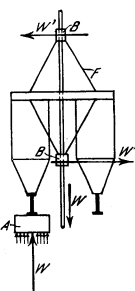
Die Ergebnisse seiner Versuche stellt Eiffel durch die übliche Formel

$$W = K F c^2$$

dar, worin F die Projektion der verdrängenden Oberfläche auf eine zur Bewegungsrichtung senkrechte Ebene, c die Geschwindigkeit in der Bewegungsrichtung und K eine Konstante ist, die aus dem Versuch zu ermitteln ist.

Für eine und dieselbe Fläche wurde K bei Geschwindigkeiten von 15 bis 40 m/sk in allen Fällen so gut wie unveränderlich gefunden, womit die Abhängigkeit des Luftwiderstandes vom Quadrat der Geschwindigkeit in dem untersuchten Gebiete bewiesen ist. (Ueber eine geringe Abweichung vergl. weiter unten.) Den gleichen Beweis hat Frank für die Geschwindigkeiten bis zu 6 m/sk erbracht, so daß man das Gesetz von kleinen Geschwindigkeiten bis zu sol-

Fig. 4.



chen von 40 m/sk als experimentell sehr gut begründet ansehen kann. Frank stellt seine Versuche durch die Formel

$$W = k F \frac{\gamma}{g} c^2$$

dar, worin F und c die gleiche Bedeutung wie oben haben und γ das Gewicht von 1 cbm Luft im jeweiligen Zustand ist. Die Eiffelschen Konstanten beziehen sich auf Luft von 15° C und 760 mm Druck. Dafür ist

$$\gamma = 1,293 \cdot \frac{273}{273 + 15} = 1,226.$$

Somit gilt:

$$k = \frac{9,81}{1,226} K = 8 K.$$

Fig. 6.

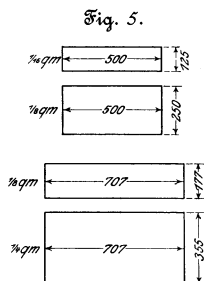
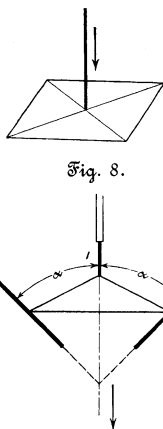
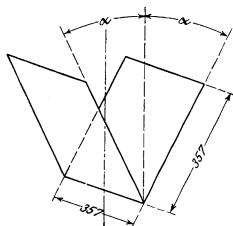


Fig. 7.

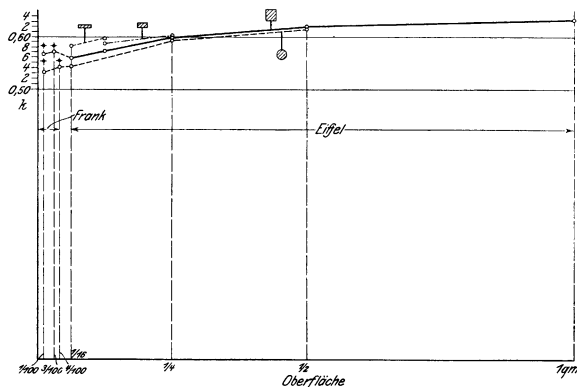


Man hat also die Eiffelschen Konstanten mit 8 zu multiplizieren, um sie mit den Frank'schen vergleichbar zu machen.

Zur Bewegungsrichtung senkrechte, ebene Flächen.

Zahlentafel 1 enthält die Konstanten k (bezw. $8K$) von Eiffel für kreisförmige, quadratische und rechteckige Platten, sowie diejenigen von Frank für Prismen von quadratischem und rechteckigem und Zylinder von kreisförmigem Querschnitt mit senkrecht abgeschnittenen Stirnflächen. In Fig. 9 sind

Fig. 9.



Zahlentafel 1.

Widerstandskoeffizienten k gemäß $W = k F \frac{\gamma}{g} c^2$ nach Eiffel und Frank.

qm	Kreis	Quadrat	Rechteck 1:2	Rechteck 1:4	
1/16	0,544	0,560	0,582	0,575	Platten nach Eiffel
1/8	0,560	0,573	0,586		
1/4	0,590	0,597	0,600		
1/2	0,614	0,618	0,600		
1		0,631			
1/100	l = 2 d 0,553	0,582		0,575	Prismen u. Zylinder nach Frank
3/100		0,582			
4/100	l = d 0,553				
1/8		l = 1/2 d			Zylinder nach Eiffel
		l = d			
		l = 1,5 d			

die gleichen Werte als Ordinaten zu den Inhalten der verdrängenden Flächen als Abszissen aufgetragen.

Aus Fig. 9 geht zunächst allgemein hervor, daß der Widerstandskoeffizient und damit auch der Luftwiderstand auf die Flächeneinheit der Verdrängungsfläche bei gegebener Geschwindigkeit um so größer ausfällt, je größer, absolut genommen, der Inhalt der Fläche ist. Bei 1 qm Verdrängungsfläche scheint der größte spezifische Widerstand noch nicht erreicht zu sein. Dieses Ergebnis ist von wesentlicher Bedeutung, wenn auch die Widerstandswerte bei kleinen und großen Flächen nicht so verschieden sind, daß man nicht, wo es erwünscht erscheint, mit einem Mittelwert rechnen könnte. Es ist ausschließlich den Eiffelschen Versuchen zu verdanken und widerlegt in unanfechtbarer Weise gewisse gegenteilige Anschauungen (als ob der spezifische Widerstand um so kleiner sei, je größer die Fläche).

Die Frank'schen Werte für sehr kleine Flächen bestätigen dieses Gesetz, insofern sie merkbar kleiner sind als die Eiffelschen für größere Flächen. Eine später anzubringende Berichtigung macht die Übereinstimmung auch zahlenmäßig zu einer fast vollkommenen, indem die Frank'schen Werte, besonders beim Kreis, fast genau in die Verlängerung von Eiffels Kurven fallen.

Die Gestalt der Fläche (ob Kreis, Quadrat usw.) ist ebenfalls von Einfluß auf den spezifischen Widerstand, der beim Kreis am kleinsten, beim langen Rechteck am größten ist.

Winkel- und Keilflächen.

Die Seitenflächen der Winkel, Fig. 7, waren bei Eiffel quadratisch, von 357 mm Seitenlänge, also je rd. 1/8 qm Inhalt. Sie waren an der gemeinsamen Kante gelenkartig, verstellbar verbunden. Untersucht wurden die Winkel

$$2 \alpha = 56^\circ \quad 95^\circ \quad 140^\circ,$$

$$\text{also} \quad \alpha = 28^\circ \quad 47\frac{1}{2}^\circ \quad 70^\circ.$$

In Fig. 10 sind die Winkel α (also die halben Flächenwinkel) als Abszissen, die auf die Flächen-projektion F bezogenen Widerstandskoeffizienten als Ordinaten aufgetragen. Der Wert bei $\alpha = 90^\circ$ ist der frühere für die quadratische Platte von 1/8 qm.

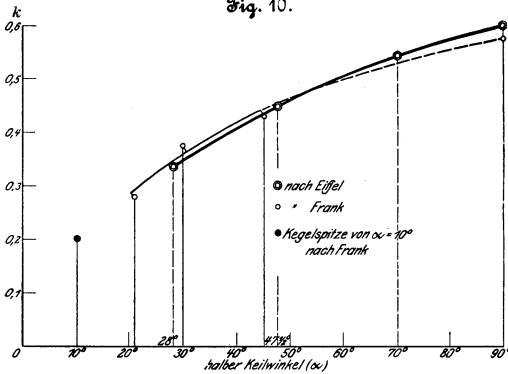
Versuche mit seitlich und oben geschlossenen Winkelstücken (Keilstücken) ergaben nur sehr geringe Unterschiede.

In die gleiche Figur sind auch die Frank'schen Werte für keilförmig zugespitzte Prismen eingetragen. Wie man sieht, stimmen die Werte in Anbetracht der sehr verschiedenen Größe der Flächen gut überein. Die Frank'schen Werte ergänzen außerdem die Eiffelschen nach dem Gebiet der kleineren Winkel zu.

Geneigte Einzelflächen (Fig. 8).

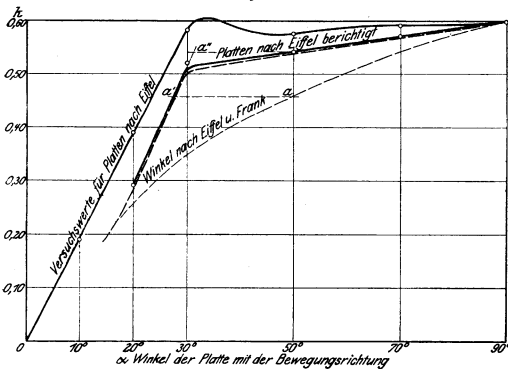
Diese Flächen bestanden aus quadratischen Platten von 0,5 m Seitenlänge, also 1/4 qm Fläche.

Fig. 10.



In Fig. 11 sind die Versuchsergebnisse in gleicher Weise wie für die Winkelflächen aufgetragen (höchste Kurve). Zum Vergleich sind auch die letzteren aufgenommen (tiefste Kurve). Der überaus große Unterschied zwischen den Einzelflächen und den Winkelflächen bei gleichem Winkel (α) gegen die Bewegungsrichtung fällt ins Auge. Man hätte Grund, zu erwarten, daß beide Werte wenigstens annähernd von gleicher Größe wären. Der spezifische Widerstand (bezogen auf die Projektion) ist z. B. bei $\alpha = 30^\circ$ für die Einzelfläche 1,67 mal so groß wie für die Winkelfläche. Bei der Fläche erreicht der Widerstand den höchsten Wert (nämlich den der normal gerichteten Fläche, $\alpha = 90^\circ$) schon bei $\alpha = 30^\circ$, während er bei den Winkelstücken von 30° aufwärts bis 90° noch um 67 vH seines Wertes zunimmt. Nirgends sind die beiden

Fig. 11.



Widerstände auch nur annähernd von gleicher Größe.

Für die Flächen hat Eiffel das Ergebnis dahin zusammengefaßt, daß der Widerstandskoeffizient von 0° bis 30° Neigung gegen die Bewegungsrichtung proportional mit dem Winkel bis zum Höchstwert anwächst und von da an bis 90° unverändert bleibt, wie dies aus Fig. 11 hervorgeht.

Für den großen Unterschied zwischen Flächen und Winkeln gibt Eiffel eine einleuchtende Erklärung, auf die ich später zurückkommen werde.

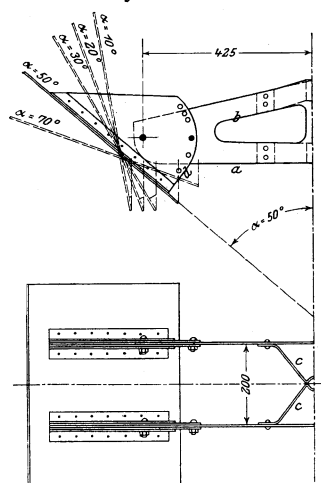
Indessen erhebt sich ein Bedenken anderer Art gegen die von Eiffel aus seinen Versuchen mit den Flächen abgeleiteten Koeffizienten. Um die Befestigung der Platten an der Meßstange sicher und starr zu machen, waren eine Anzahl Konstruktionsglieder, bestehend aus Blechplatten von 4 bis 5 mm Stärke, erforderlich. Fig. 12 und 13 zeigen die Konstruktion nach den Angaben des Eiffelschen Werkes. Der Luftwider-

stand dieser Teile, der ebenfalls auf die Meßfedern übertragen wird, ist von Eiffel bei der Berechnung der Widerstandskoeffizienten der schrägen Flächen nicht berücksichtigt worden. Die Federspannungen der Diagramme sind unverändert in die Zahlentafeln der Koeffizientenberechnung eingeführt, wie ein Vergleich der Zahlen ergibt. Nirgends in dem Eiffelschen Werke konnte ich eine Andeutung über diesen Widerstand finden.

In der Tat ist sein Einfluß nicht erheblich, solange die Platte noch wenig von der normalen Richtung abweicht. Denn in diesem Falle wird erstens ein großer Teil der Verbindungsglieder durch die Platten selbst verdeckt, und andererseits ist der Plattenwiderstand wegen der großen Flächenprojektion so bedeutend, daß der noch übrig bleibende schädliche Widerstand dagegen klein ausfällt.

Ganz anders wird dies bei stärkerer Neigung der Flächen. Die Verbindungsstücke werden bloßgelegt, beteiligen sich also mit größeren Beträgen am Luftwiderstand; aber ihr verhältnismäßiger Einfluß wird auch darum viel bedeutender, weil sowohl die Flächenprojektion der Platten als auch der auf sie bezogene Widerstandskoeffizient der Platten viel kleiner wird.

Fig. 12 und 13.



Die Flächen a, b, c usw., Fig. 12 und 13, welche den schädlichen Luftwiderstand ergeben, bestehen aus langen schmalen Rechtecken, für die nach Frank (in Übereinstimmung mit Eiffel) $k = 0,575$ gesetzt werden kann. Wenn nun die ganze Stoßfläche bekannt ist, so kann auch ihr Einfluß auf das Endergebnis leicht rechnermäßig bestimmt werden. Nach Fig. 12 und 13 berechnet sich die Summe der Stoßflächen a, b, c (einschließlich der Schrauben- und Nietköpfe) auf einer Hälfte, also für eine Platte, zu 101,5 qm. (Die Blechdicken sind aus der Eiffelschen Zeichnung zu 5 bzw. 4 mm abgemessen). Dazu kommen nun bei den steileren Lagen Teile der Kanten d und die Projektion der unteren Plattenkanten selbst, die letzteren beiden Flächen mit etwas kleineren Koeffizienten als 0,575.

Bezeichnet man mit k' den (zu ermittelnden) Widerstandskoeffizienten der Platte allein, so gilt mit F_0 als Oberfläche der Platte

$$W' = k' F_0 \sin \alpha \frac{\gamma}{g} c^2 \quad (\text{Nutzwiderstand}).$$

Ist F , die Summe aller schädlichen Stoßflächen mit dem Koeffizienten 0,575 (worauf die schräggestellten Stoßflächen in entsprechend vermindelter Größe eingehen), so ist der schädliche Widerstand

$$W'' = 0,575 F_0 \frac{\gamma}{g} c^2.$$

Der ganze (gemessene) Widerstand W entspricht der Summe $W' + W''$. Setzt man

$$W = k F \frac{\gamma}{g} c^2$$

oder
$$= k F_0 \sin \alpha \frac{\gamma}{g} c^2,$$

wobei k der von Eiffel errechnete Koeffizient ist, so hat man:

$$k F_0 \sin \alpha \frac{\gamma}{g} c^2 = k' F_0 \sin \alpha \frac{\gamma}{g} c^2 + 0,575 F_0 \frac{\gamma}{g} c^2,$$

also
$$k = k' + 0,575 \frac{F_0}{F_0 \sin \alpha},$$

somit
$$k' = k - 0,575 \frac{F_0}{F_0 \sin \alpha}.$$

Das zweite Glied rechts stellt die Berichtigung dar, die von Eiffel nicht in Rechnung gestellt ist.

Platte unter 30°; $\sin \alpha = 0,5$; $F_0 = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$ qm.	
Stoßflächen . . . 101,5 qcm ($a + b + c$ + Schrauben	
Plattenkante rd. 19,5 »	(+ Niete)
Winkel . . . » 2 »	
Fläche d . . . » 20 »	
143 qcm = 0,0143 qm.	

Somit:
$$k' = k - 0,575 \frac{0,0143}{0,25 \cdot 0,5}$$

$$= k - 0,066.$$

Nun ist nach Eiffel
$$k = 8 \cdot 0,073 = 0,584,$$
daher
$$k' = 0,518.$$

Der Koeffizient des Luftwiderstandes der Platte erscheint also hier nach der Eiffelschen Berechnung um $\frac{0,066 \cdot 100}{0,518} = 12,7$ vH zu groß.

Platte unter 20°; $\sin \alpha = 0,342$. Stoßflächen rd. 150 qcm.

Daher:
$$k' = k - 0,10$$
 und mit $k = 8 \cdot 0,049 = 0,392$:

$$k' = 0,292.$$

Der Eiffelsche Koeffizient ist um 34,3 vH zu groß.

Platte unter 10°; $\sin \alpha = 0,1736$. Stoßfläche rd. 150 qcm.

$$k' = k - 0,575 \frac{0,015}{0,25 \cdot 0,1736} = k - 0,199.$$

Nach Eiffel ist $k = 8 \cdot 0,024 = 0,192$, daher $k' = -0,007$. Für den Plattenwiderstand bleibt also nach Abzug des schädlichen Nebenwiderstandes nichts mehr übrig. Dieses Ergebnis der Berichtigung mag bedenklich erscheinen. Indessen beträgt die Plattenprojektion nur $0,25 \cdot 0,1736 = 0,0434$ qm, während die Stoßflächen $0,015$ qm groß sind. Die letzteren haben aber den höchsten Widerstandskoeffizienten $0,575$, die ersteren dagegen einen kleineren, jedenfalls erheblich weniger als $0,19$, schätzungsweise $0,15$. Der nutzbare und der schädliche Widerstand stehen also etwa im Verhältnis von $0,0434 \cdot 0,15$ zu $0,015 \cdot 0,575$ oder von $0,0065$ zu $0,0086$ (gleich 1:1,3). Der schädliche Widerstand ist allein größer als der Plattenwiderstand, den man ermitteln will. Daß unter solchen Umständen, wenn man noch die unvermeidlichen Versuchsfehler dazurechnet, das Ergebnis nicht mehr zuverlässig werden kann, ist begreiflich. Dieser Versuch muß daher gänzlich ausscheiden.

Platte unter 70°; $\sin \alpha = 0,94$. Stoßfläche rd. 90 qcm.

$$k' = k - 0,022.$$

Mit $k = 8 \cdot 0,074$ wird

$$k' = 0,570.$$

Der schädliche Einfluß beträgt hier nur noch 3,9 vH.

Platte unter 50°; $\sin \alpha = 0,766$. Stoßfläche rd. 110 qcm.

$$k' = k - 0,033; k = 0,576; k' = 0,543.$$

Die in dieser Weise berichtigten Werte k' des Plattenwiderstandes sind nun ebenfalls in Fig. 11 eingetragen

(zweite Kurve von oben). Zwischen 30° und 90° tritt an die Stelle des wellenförmigen Verlaufes eine stetig ansteigende, fast gerade Linie. Von der Strecke zwischen 0° und 30° bleibt leider nur das Stück zwischen 20° und 30° übrig. Der Punkt für 20° fällt nahe an den Frankschen Wert für das Keilstück mit dem gleichen Winkel. Das für die Tragflächen der Flugmaschinen äußerst wichtige Stück zwischen 0° und 20° fällt ganz aus.

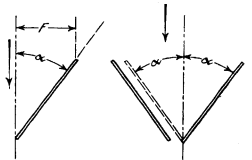
Sämtliche von Eiffel errechneten Widerstandswerte sind zu groß, in dem Gebiet der Winkel unterhalb 30° um recht erhebliche Beträge.

Die Sätze von Eiffel über die Proportionalität mit dem Winkel zwischen 0° und 30° und über das Gebiet zwischen 30° und 90° werden hinfällig. Bestehen bleibt dagegen die Tatsache, daß der Widerstand bis 30° sehr rasch, von da ab viel langsamer ansteigt.

Vergleich des Widerstandes geneigter Platten mit dem der Winkelstücke.

Wenn man neben einer einfachen schrägen Platte, Fig. 14, eine zweite symmetrisch zur Bewegungsrichtung anbringt, Fig. 15, so kann man erwarten, daß der Gesamtwiderstand verdoppelt wird, während der spezifische Widerstand gleich bleibt. Nach den Versuchen gilt dies jedoch nur solange, als der kürzeste Abstand der Kanten hinreichend groß ist. Verschwindet dieser Abstand ganz, wie bei Fig. 15 (gestrichelt), so wird nach den Versuchen der Gesamtwiderstand weniger als doppelt so groß, der spezifische Widerstand also kleiner als bei der einfachen Platte. Beide Platten beeinflussen sich demnach gegenseitig im Sinne einer Herabsetzung des Widerstandes. Nach Fig. 11 ist dieser Einfluß am größten und sehr erheblich in dem Gebiet zwischen $\alpha = 25^\circ$ und 60° . Bei 90° verschwindet er naturgemäß, da in beiden Fällen dann eine normale Ebene vorliegt. Bei 20° wird er ebenfalls klein, und es ist sehr wahrscheinlich, daß dies für das ganze Gebiet zwischen 20° und 0° gilt.

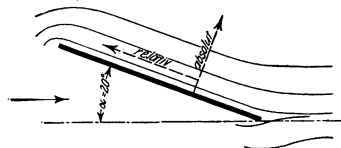
Fig. 14 und 15.



Der fast plötzliche Umschlag im Widerstandsgesetz bei 30° Plattenwinkel in Verbindung mit dem letzteren Umstand läßt es als wahrscheinlich erscheinen, daß durch die bis 30° steil ansteigende Kurve das Widerstandsgesetz der einfachen Platte rein zum Ausdruck gelangt, während es von da ab durch eine ähnliche Ursache abgeändert wird wie bei den Winkelstücken schon von 20° ab.

Welches diese Ursache sein wird, erkennt man, wenn man die Art und Weise, wie die Luft durch die normale Fläche ($\alpha = 90^\circ$) verdrängt wird, mit dem Verdrängungsvorgang bei kleinem Winkel (etwa $\alpha = 20^\circ$) vergleicht. Im letzteren Falle, Fig. 16, wird die Luft ungefähr normal zur

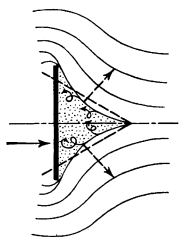
Fig. 16.



Oberfläche der Platte abgedrängt; gleichzeitig strömt sie relativ zur Fläche in paralleler Richtung nach außen, gemäß dem Strömungsbild Fig. 16. Bei der normalen Fläche ist dies so nicht möglich. Eine relative Gleitbewegung parallel zur Fläche kann hier nicht eintreten. Das Strömungsbild erhält vielmehr den Charakter der Figur 17. Unmittelbar über der

Fläche bildet sich eine in relativer Ruhe oder richtiger in unregelmäßiger wirbelnder Bewegung befindliche Luftmasse, die von der Platte in der Bewegungsrichtung mitgeführt wird. Ueber die (wohl nicht scharf begrenzte) Oberfläche dieser Luftmasse (Stauhügel, Bug) strömt die Luft in krummen Bahnen relativ nach außen. Im Endergebnis gleicht dieser Vorgang demjenigen bei einem Winkel- oder Keilstück, wie Eiffel sagt: ... »la proue d'air immobile, qui se forme audevant d'un plan normal et équivaut jusqu'à un certain point à une proue solide«.

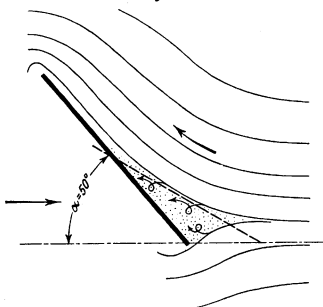
Fig. 17.



Ein solcher Lufthügel bildet sich nun sicher nicht erst bei 90° , sondern in geringerem Maße auch schon bei kleineren Winkeln. Bei 30° scheint er aber fast plötzlich zu verschwinden, wie die scharfe Wendung in der Widerstandskurve der Platte andeutet. Von da an abwärts ist der Verdrängungsvorgang offenbar nur durch den Richtungswinkel der Fläche selbst bedingt.

Neigt man umgekehrt eine Fläche, die ursprünglich der Bewegungsrichtung parallel läuft, mehr und mehr, so ist die Zunahme des Luftwiderstandes zunächst nur von derjenigen des Flächenwinkels α abhängig. Hat sich die Platte bis 30° aufgerichtet, so bildet sich ein Lufthügel, der immer steiler wird, je steiler die Platte selbst zu stehen kommt, wie z. B. Fig. 18 für $\alpha = 50^\circ$ zeigt. Der Widerstand wird daher von da ab in einer ganz andern Weise vom Neigungswinkel abhängen und jedenfalls nicht mehr im gleichen Maße wie zu-

Fig. 18.



vor mit α anwachsen. Die Widerstandskurve über 30° bildet also nicht die natürliche Verlängerung derjenigen unterhalb 30° .

Ein ähnliches Verhalten zeigen auch die Keilflächen. Noch bei 20° fällt ihr Widerstandswert nahe zusammen mit dem der Platte vom gleichen Winkel. Die Widerstandskurve biegt aber schon bei diesem Winkel nach rechts ab, das Widerstandsgesetz unterliegt also von hier ab einem neuen Einfluß. Schon hier scheint sich ein mit dem Winkel wachsender Lufthügel zu bilden, der einen geringeren Widerstand bedingt, als ihn der Kantenwinkel für sich allein ergeben würde.

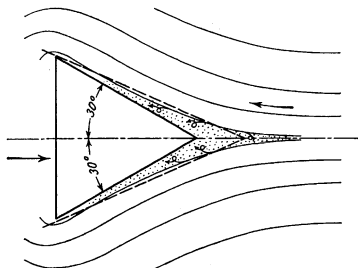
Um ein wenn auch nicht genau zutreffendes Bild zu bekommen, kann man nach Fig. 11 in die Strömungsfiguren Fig. 17, 18 und 19 diejenigen Keilwinkel eintragen, die dem tatsächlichen Widerstand entsprechen würden, wenn sich kein Stauhügel bildete. Für $\alpha = 50^\circ$ (halber Keilwinkel), Punkt a Fig. 11, erhält man so einen Plattenwinkel mit gleichem Widerstand von rd. 27° , Punkt a' Fig. 11. In gleicher Weise sind die Stauwinkel für den Keilwinkel $\alpha = 30^\circ$ sowie für die ebene Platte, $\alpha = 90^\circ$, ermittelt und in Fig. 19 und 17 eingetragen.

Ein gleiches Verfahren kann man auch für die einfachen Platten oberhalb 30° , wo sich Stauhügel bilden, anwenden und erhält z. B. für Plattenwinkel von $\alpha = 50^\circ$ aus a' einen Stauwinkel von 31° , Fig. 11. Dieser Winkel ist (gestrichelt) in Fig. 18 eingetragen.

Daß sich übrigens die Stauungen bei Keilen viel früher ausbilden als bei Platten, ist erklärlich. Die vorandringende Plattenkante, Fig. 16 und 18, läßt einen Teil der verdrängten Luft seitlich (nach unten) abströmen, während sich bei dem Keil zwei solche Ströme kreuzen müßten; anstatt dessen bildet sich eine Stauung aus.

Als wichtigste Folgerung ergibt sich aus dem Vorstehenden, daß sich zu Untersuchungen über das Luftwiderstandsgesetz, insoweit als es von dem Einfluß der Stauungen frei ist, nur solche Versuche eignen, die mit Platten

Fig. 19.



von weniger als 30° Neigung gegen die Bewegungsrichtung oder mit Keilen von weniger als 20° halbem Keilwinkel angestellt sind. Von sämtlichen Eiffelschen Versuchen bleiben daher für diesen Zweck nur zwei übrig, diejenigen mit Platten von 20° und 30° Neigung, von den Frankschen Versuchen mit Keilen nur ein Wert, derjenige für 20° halben Keilwinkel¹⁾. Dies erscheint wenig.

Sofern aber diese Werte wirklich sicher sind, was man annehmen darf, genügen sie, wie weiter unten gezeigt ist, in Verbindung mit den Frankschen Versuchen über den Reibungswiderstand an parallelen Flächen zur Aufklärung des Gesetzes für den Luftwiderstand ebener Flächen in den Gebieten, wo keine Luftstauungen auftreten, also zwischen 0° und 30° .

Luftwiderstand der zur Bewegungsrichtung parallelen ebenen Flächen (Reibungswiderstand).

Durch den folgenden Versuch hat Frank den Beweis erbracht, daß ein meßbarer Luftwiderstand auch dann auftritt, wenn die bewegten (ebenen) Flächen in ihrer eigenen Richtung fortschreiten, eine Verdrängung von Luftmengen in der bisher behandelten Art also gar nicht stattfindet.

Eine größere Zahl (z. B. 16) dünner Weißblechplatten wurde in Abständen bis 12 mm nebeneinander befestigt und am Pendel parallel durch die Luft bewegt. Die gleichen Platten wurden ohne Zwischenräume, fest aufeinandergepreßt, in gleicher Weise bewegt. Es ergab sich, daß der gesamte Luftwiderstand bei den Platten mit Zwischenräumen erheblich größer war, als ohne diese. Bei allen möglichen Veränderungen in der gegenseitigen Anordnung der Platten ergab sich immer das gleiche Resultat. Nur zeigte sich, daß bis zu einer gewissen Grenze des Plattenabstandes (von 0 an gerechnet) der Widerstand allmählich und stetig zunimmt; erst bei 12 mm Abstand erreichte er seinen höchsten Wert. Nimmt man an, daß der zusätzliche Widerstand W' , der zu dem Stirnwiderstand der Platten tritt, wenn Zwischenräume zwi-

¹⁾ Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei betont, daß selbstverständlich auch alle übrigen Versuche dieser Forscher für diesen Zweck von hohem Wert sind, aber nur mittelbar, wie im Vorangehenden gezeigt ist.

sehen den Platten sind, auch dem Quadrat der Plattengeschwindigkeit proportional ist, so kann

$$W' = k' F' \frac{\gamma}{g} c^2$$

gesetzt werden.

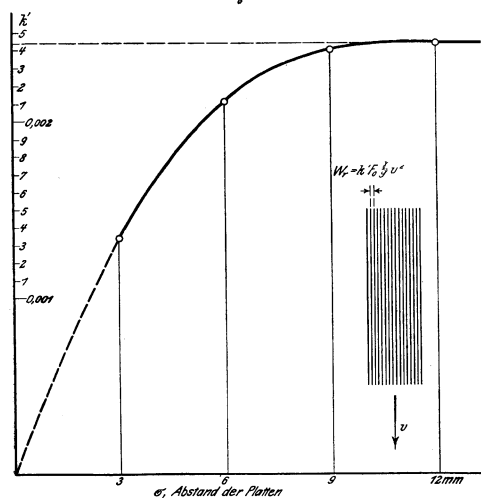
Hierin ist F' die Summe aller Seitenflächen der Platten (die eigentlichen Plattenoberflächen). Der Widerstand W' rührt ja nur von den Stößen her, die durch die Rauheiten der Oberfläche oder durch die an der Oberfläche festhaftende und von ihr mitgeführte Luftschicht auf die in absoluter Ruhe befindliche Luft ausgeübt werden, durch die sich die Flächen bewegen. Die Stöße sind um so häufiger in der Zeiteinheit, je größer die Fläche ist, je zahlreicher die Rauheiten sind. Der Widerstand, den man als »äußere Reibung« der Luft an der Fläche bezeichnen kann, wird daher, wie geschehen, der Fläche selbst proportional zu setzen sein.

Für den Koeffizienten k' ergeben sich nun aus den Versuchen von Frank die in Fig. 20 enthaltenen Werte, wenn man k' als Ordinaten und die verschiedenen Plattenabstände als Abszissen aufträgt. Der Höchstwert bei 12 mm Plattenabstand bleibt unverändert, wenn sich der Abstand weiter vergrößert. Er muß demgemäß als derjenige Reibungswert gelten, den eine einfache Platte besitzt, die parallel durch die Luft bewegt wird. Es ist nach Frank für diesen Fall

$$k' = 0,00244.$$

Würde die gleiche Fläche in der Richtung ihrer Normale fortbewegt, so würde ihr Widerstand dem Koeffizienten $k = 0,575$ entsprechen. Der Reibungswiderstand von 1 qm

Fig. 20.



paralleler Fläche ist also $\frac{0,575}{0,00244} = 236$ mal kleiner als der Stirnwiderstand der normalen Fläche von gleicher Größe.

So klein dieser Widerstand erscheinen mag, so kann er unter Umständen doch von erheblicher, ja ausschlaggebender Bedeutung werden. Wird z. B. eine ebene Platte schräg unter einem kleinen Winkel α durch die Luft bewegt, s. die später folgende Fig. 30 oder Fig. 16, wie bei den Tragflächen der Flieger (ähnlich auch bei den Luftschrauben), so ist der Verdrängungswiderstand in der Bewegungsrichtung

$$W_r = k_r F' \frac{\gamma}{g} c^2$$

mit F' als Projektion. Hierin wäre k_r identisch mit dem früheren k (Koeffizient des Gesamtwiderstandes), wenn kein Flächenreibungswiderstand vorhanden wäre.

In Wirklichkeit gleitet indessen die Fläche mit der Ge-

schwindigkeit $c \cos \alpha$ in ihrer eigenen Richtung durch die Luft (oder die Luft gleitet mit der relativen Geschwindigkeit $c \cos \alpha$ an der ruhend gedachten Fläche entlang). Die Fläche erfährt dadurch einen Reibungswiderstand in ihrer Richtung

$$W_r = 2 k' F_0 \frac{\gamma}{g} c^2 \cos^2 \alpha,$$

der in der Bewegungsrichtung die Komponente $W = W_r \cos \alpha$ ergibt. Es ist also

$$W' = 2 k' F_0 \frac{\gamma}{g} c^2 \cos^3 \alpha.$$

Der tatsächliche Widerstand ist, wenn k der durch Versuche bestimmte Koeffizient desselben ist,

$$W = k F' \frac{\gamma}{g} c^2.$$

Wegen

$$W = W_r + W'$$

ist daher

$$k = k_r + 2 k' \frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha}.$$

Wären die Versuche von Eiffel etwa bis zu Winkeln von 6° herab ausgedehnt worden, so würde sich schätzungsweise nach Fig. 11 $k = 0,10$ ergeben haben. Der Anteil der Reibung an diesem Wert ist durch den Ausdruck $2 k' \frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha}$ gegeben. Er beträgt also $\frac{2 \cdot 0,00244 \cdot 0,9945^3}{0,1045} = 0,046$. Die

Flächenreibung beteiligt sich daher in diesem Falle mit $\frac{0,046 \cdot 100}{0,10} = 46$ vH am Gesamtwiderstand. Schon hieraus geht

die außerordentliche Bedeutung der Flächenreibung für derartige Fälle hervor. Jede Theorie, die diesen Umstand nicht berücksichtigt, kann nur als völlig unhaltbar bezeichnet werden, soweit sie Flächen betrifft, die weniger als etwa 12° Neigung gegen die Bewegungsrichtung haben.

Bei der außerordentlichen Wichtigkeit des Zahlenwertes $k' = 0,00244$ der äußeren Reibung dürfte es angebracht sein, zu untersuchen, wie sich dieser Wert zu den Widerständen verhält, die strömende Gase und Dämpfe in Rohrleitungen durch die Rauigkeit der Wände erfahren. Ueber diesen Gegenstand liegen heute übereinstimmende Ergebnisse vor.

Der Rohrleitungswiderstand wird in den technisch wichtigen Fällen, ausgenommen solche mit sehr langsamer Strömung, dadurch hervorgerufen, daß sich die in fortschreitender Bewegung in der Nähe der Wandungen befindlichen Gas- oder Dampfteilchen an den Rauheiten der Wände stoßen, dabei ihrer Bewegung in Richtung der Rohrachse ganz oder teilweise verlustig gehen und bei ihrem Wiedereintritt in die fortschreitende Kernmasse von neuem beschleunigt werden müssen. Bei hinreichender Länge der Röhre gerät hierdurch schließlich die ganze Masse in eine Art unregelmäßig wirbelnde (»turbulente«) und gleichzeitig fortschreitende Bewegung. Der Widerstand, der im ganzen von den Wandflächen ausgeübt wird, läßt sich theoretisch nicht bestimmen, so wenig wie der Reibungskoeffizient zwischen zwei festen Körpern. Er ist wie der Franksche Luftreibungskoeffizient eine reine Erfahrungszahl und muß mit diesem identisch oder mindestens von gleicher Größenordnung sein.

Ist Δp der Druckabfall in einer Leitung von $l(m)$ Länge und $d(m)$ Durchmesser bei einer Geschwindigkeit von c (m/sk) und einem spezifischen Gewicht von γ (kg/cbm), so gilt nach den Versuchen von Eberle an Dampfleitungen

$$\Delta p = \beta \frac{l}{d} \gamma c^2 \text{ (kg/qcm),}$$

worin der Koeffizient β für gesättigten und überhitzten Dampf den Wert $\beta = \frac{10,55}{10^8}$ (Mittelwert) hat.

Auch für Luft gilt nach Fritzsche in dem Intervall der Versuche von Eberle der gleiche Wert.

Faßt man den Leitungswiderstand als eine Kraft auf, die, am inneren Umfang des Rohres gleichmäßig verteilt, auf die durchströmende Masse hemmend einwirkt und auf 1 qm Innenfläche den Wert R hat, so ist der gesamte Reibungswiderstand der Leitung gleich $\pi d l R$. Dieser Wert ist auch gleich dem Unterschied der Drücke auf den Leitungsquerschnitt am Be-

ginn und Ende der Leitung, also gleich $\Delta p \frac{\pi d^2}{4}$, oder, wenn Δp wie oben in kg/qcm ausgedrückt wird, gleich

$$10\,000 \Delta p \frac{\pi d^2}{4}.$$

Es ist daher $\pi d l R = 10\,000 \Delta p \frac{\pi d^2}{4}$,

$$\text{also } R = 10\,000 \Delta p \frac{d}{4 l}.$$

Mit dem obigen Werte von Δp wird

$$R = 10\,000 \beta \gamma \frac{c^2}{4}.$$

Nach Frank ist, wenn sich eine Fläche von 1 qm mit c m/sk durch die Luft bewegt, der Reibungswiderstand

$$R = k' \frac{\gamma}{g} c^2.$$

Es muß also $10\,000 \beta \gamma \frac{c^2}{4} = k' \frac{\gamma}{g} c^2$

sein, also $k' = 10\,000 \frac{\beta g}{4}$.

Mit dem Werte von β nach Eberle erhält man

$$k' = \frac{10^4}{10^8} \cdot \frac{10,55 \cdot 9,81}{4} = 0,00259,$$

während Frank $k' = 0,00244$ ermittelt.

Die Übereinstimmung ist demgemäß so gut, wie kaum hätte erwartet werden können. Auch abgesehen von der Zuverlässigkeit der Frankschen Versuche an sich wird man daher den Frankschen Reibungskoeffizienten als eine gut gesicherte Zahl betrachten müssen.

Man wäre, wie man jetzt erkennt, in der Lage gewesen, diesen Koeffizienten aus den Rohrleitungsversuchen herzuleiten.

Die Widerstandszahlen für ebene Stirnflächen nach den Frankschen Versuchen mit prismatischen Körpern.

Die Widerstandswerte, die aus Versuchen mit prismatischen Körpern gewonnen wurden, setzen sich zusammen aus dem Verdrängungs- und Reibungswiderstand der Stirnflächen als Hauptbetrag und dem Reibungswiderstand der übrigen Flächen (Seitenflächen) dieser Körper. Gilt für die Stirnfläche allein der Koeffizient k_s , für den ganzen Körper dagegen k , und ist F' die Summe aller Seitenflächen, so wird

$$k F \frac{\gamma}{g} c^2 = k_s F \frac{\gamma}{g} c^2 + 0,00244 F' \frac{\gamma}{g} c^2,$$

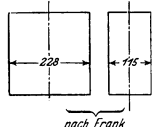
also $k_s = k - 0,00244 \frac{F'}{F}$,

mit F' als Projektion der Stirnfläche. Da es sich hier nur um eine Berichtigung handelt, so kann dahingestellt bleiben, ob der Franksche Reibungswiderstand auch für zylindrische Oberflächen genau gilt. Nach dem obigen Vergleich mit den Rohrleitungen ist dies allerdings wahrscheinlich.

Zylindrische Körper, Fig. 21. Mit l als Länge, d als Durchmesser des zylindrischen Teiles wird

$$\frac{F'}{F} = \frac{\pi d l}{\pi d^2} = 4 \frac{l}{d}.$$

Fig. 21.



Für die kleinen Zylinder von Frank ($F = 1/100$ qm) ist (nach den Skizzen in Z. 1906) $\frac{l}{d} = \text{rd. } 1,9$, daher

$$\frac{F'}{F} = 4 \cdot 1,9 = 7,6.$$

Der Koeffizient für die kreisförmige Stirnfläche allein wird also

$$k_s = k - 0,00244 \cdot 7,6 = k - 0,0185.$$

Mit $k = 0,553$ ist demnach

$$k_s = 0,5345.$$

Für die größeren Zylinder (mit $1/100$ qm Stirnfläche) ist $\frac{l}{d} = \text{rd. } 1$, somit

$$k_s = 0,553 - 0,00976 = 0,543.$$

Diese Werte k , sind nun mit den Eiffelschen Versuchen an kreisförmigen Platten (die fast keine Seitenreibung besitzen) unmittelbar vergleichbar. Sie sind in Fig. 9 eingetragen (unterhalb der schwarzen Punkte), aus der man erkennt, daß diese Berichtigung, die an und für sich unbedeutend ist, die Übereinstimmung mit Eiffels Versuchen noch verbessert. Man erkennt auch, daß es nur die Seitenreibung ist, die bei den Frankschen Versuchen das von Eiffel gefundene stetige Wachstum von k mit der absoluten Größe der Fläche verdeckt hat.

Prismen mit quadratischem Querschnitt (gerade abgeschnitten).

Für den Querschnitt von $1/100$ qm ergibt sich aus $k = 0,582$ mit $F' = 6 F$:

$$k_s = 0,567.$$

Für $1/100$ qm Querschnitt wird mit $F' = 4 F$ statt $k = 0,582$

$$k_s = 0,573.$$

Fig. 9 zeigt, daß auch hier durch die Berichtigung die Übereinstimmung mit Eiffel noch verbessert wird.

Eiffels Versuche mit zylindrischen Körpern.

Die Form und Größe der untersuchten Zylinder ist aus Fig. 22 ersichtlich. Eiffel fand:

$$\text{für I: } k = 8 \cdot 0,071 = 0,568,$$

$$\text{II: } k = 8 \cdot 0,069 = 0,552,$$

$$\text{III: } k = 8 \cdot 0,051 = 0,408.$$

Der Wert für I ist nur wenig von dem einer Kreisfläche vom gleichen Querschnitt verschieden. Mit Berücksichtigung der Seitenreibung wird

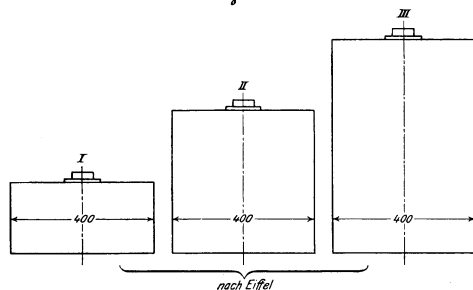
$$k = 0,568 - 2 \cdot 0,00244 = 0,563,$$

während die Kreisfläche ergab:

$$k = 0,560.$$

Schon auffällig ist indessen der merklich kleinere Widerstand des doppelt so hohen Zylinders vom gleichen Querschnitt, da dieser mit Rücksicht auf die größere Seitenreibung eher einen größeren Koeffizienten haben könnte, wie es auch bei Frank tatsächlich der Fall ist.

Fig. 22.



Ganz unmöglich erscheint es jedoch mit Rücksicht auf alles bisher Erwähnte, besonders aber in Hinsicht auf die Frankschen Ergebnisse, daß der dreimal so lange Zylinder (III) einen um 28,9 vH kleineren Widerstand haben solle als Nr. I. Es ist gar nicht ersichtlich, welcher Ursache diese außerordentliche Verminderung des Widerstandes zuzuschreiben sein sollte. Wenn auch zugegeben werden kann, daß die Längenerstreckung des Zylinders von einigem Einfluß auf den Verdrängungsvorgang sein mag, so kann dieser Einfluß auf keinen Fall so groß sein. Dies würde auch den Frankschen Versuchen widersprechen, die für einen Zylinder von rd. zweifacher Länge des Durchmessers, also noch länger als Nr. III von Eiffel, vollständig normale und nach Abzug der Seitenreibung mit den Flächenkoeffizienten übereinstimmende Werte ergaben.

Eiffel sucht diese Verminderung des Widerstandes dadurch zu stützen, daß er aus den durch Schießversuche bekannten Widerstandskoeffizienten für Zylinder von der 2,5fachen Länge des Durchmesser, die allerdings für sehr viel größere Geschwindigkeiten gelten, den Wert $k = 0,272$ für 40 m/sk herleitet. Dieser durch Extrapolation gewonnene Wert ist aber ganz bestimmt unrichtig, wenn er für gerade abgeschnittene Zylinder, wie hier, gelten soll. Denn es kann gar keine Frage sein, daß für solche Zylinder die von Frank ermittelten Werte von rd. 0,57 die richtigen sind. Es erscheint überhaupt fraglich, ob von dem Gebiet der Schallgeschwindigkeit aus, wie sie Geschosse haben (300 m/sk und mehr), eine zuverlässige Extrapolation in das Gebiet von 40 m/sk möglich ist. In der Nähe der Schallgeschwindigkeit tritt bekanntlich eine fast plötzliche Zunahme des Widerstandskoeffizienten um ein Mehrfaches auf. Nach den Versuchen von Frank ist selbst für ganz spitze Doppelkegel ($2\alpha = 20^\circ$) mit abgerundeten Uebergängen noch $k = 0,203$. Man kann den Eiffelschen Wert Nr. III daher nicht als richtig anerkennen.

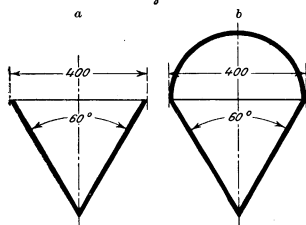
Versuche mit Kegeln (Eiffel) und Zylindern mit Kegelspitzen (Frank).

Für die Körper nach Fig. 23 fand er

- a) $k = 0,015 \cdot 8 = 0,120$,
- b) $k = 0,017 \cdot 8 = 0,136$.

Bei diesen Werten fällt zunächst auf, daß unter sämtlichen Frankenschen Versuchen mit Körpern der allerverschiedensten Form sich nicht ein einziger auch nur annähernd so kleiner Wert findet. Für einen Zylinder mit Kegelspitzen von $2\alpha = 60^\circ$ fand Frank $k = 0,352$, also dreimal (!) so viel wie Eiffel. Selbst bei einer Kegelspitze von 20° (also $\alpha = 10^\circ$), die sich tangential an ein längliches Ellipsoid anschließt, fand Frank noch $k = 0,203$, also fast das Doppelte des kleineren der Eiffelschen Werte. Bei solchen Widersprüchen muß auf einer Seite ein Fehler vorliegen.

Fig. 23.



Leider lassen sich die Eiffelschen Werte nicht nachrechnen, weil die Falldiagramme gerade für diese Kegel (wie auch für den oben erwähnten Zylinder) nicht veröffentlicht sind. Im Anschluß an die kurz gehaltene Mitteilung über die Versuche mit den Kegeln und einer hohlen Halbkugel bemerkt jedoch Eiffel selbst: »Wir haben auch einige Versuche mit konvexen Schalen (coupes convexes) und mit Kugeln gemacht, aber ihre Ergebnisse erscheinen uns mit Rücksicht auf den hohen Betrag des Berichtigungsgliedes (herrührend von der Beschleunigung) zu zweifelhaft, um sie mitzuteilen.« Ohne Zweifel besteht nun aber das gleiche Bedenken für die Kegel. Wie oben gezeigt, wird nämlich der Luftwiderstand als Summe der Federspannung (f) und des bei der beschleunigten Bewegung nicht aufgehobenen Teiles des Gewichtes von Versuchskörper und Aufhängung ($p \cdot l$) erhalten. Bei den meisten Versuchen ist nun dieses zweite Glied, dessen Bestimmung eine Unsicherheit in die Ergebnisse bringt, erheblich kleiner als das erste. Bei der Kreisplatte ist z. B. $f = 3,35$, $p \cdot l \lambda = 0,24$, beim kurzen Zylinder $f = 2,15$, $p \cdot l \lambda = 0,48$. Dagegen ist beim Kegel a) $f = 0,29$, $p \cdot l \lambda = 0,37$, beim Kegel b) $f = 0,33$, $p \cdot l \lambda = 0,45$. Während also für gewöhnlich das Berichtigungsglied der fünfte bis vierzehnte Teil des Hauptgliedes war, ist es bei dem Kegel sogar noch erheblich größer als das Hauptglied. Die Zuverlässigkeit der Ergebnisse ist dementsprechend gering.

Die Ursache kann aber auch in andern liegen. Wenn nämlich, woran zu zweifeln kein Grund ist, die Frankenschen Werte richtig sind, so würde bei den Eiffelschen Versuchen das Berichtigungsglied gar nicht die verhältnismäßige Größe erreichen können.

Bei den plattenförmigen Körpern ist nun von der ganzen Unsicherheit, die hier wie auch bei den Zylindern und Schalen auftritt, nichts zu bemerken. Es wurde aber schon früher erwähnt (S. 14), daß die unsymmetrische Anordnung der Versuchsgegenstände eine Verdrehung des ganzen Apparates während der Bewegung bedingt. Fig. 4 zeigt die verdrehenden Kräftepaare. Mit der daraus folgenden Schiefstellung ist auch eine solche der Trägerstange des Widerstandskörpers, die den Luftdruck auf die Federn überträgt, verbunden, s. Fig. 24. Ist nun der Versuchsgegenstand eine dünne Platte, so wirkt der Luftwiderstand normal zu ihrer Fläche, also in Richtung der Trägerstange, gleichgültig ob die Platte schief oder genau wagerecht steht. Hat dagegen der Versuchskörper eine erhebliche Ausdehnung in der Länge, wie die Zylinder und Kegel, so erhält er, wenn er schief steht, außer dem normalen Druck W noch einen Querdruk W_1 seitens der Luft, und zwar um so mehr, je länger er ist.

Dieser Querdruk bewirkt aber Reaktionen in der Stangenführung, die der Verschiebung der Stange Reibungswiderstände entgegensetzen. Die Reibung nimmt einen Teil des Luftwiderstandes W auf. Nur der Rest gelangt zu den Meßfedern. Wenn dies zutreffend ist, dann liegt für alle Gebilde von nicht plattenförmiger Gestalt (die übrigens bei Eiffel weit in der Minderzahl sind) ein grundsätzlicher Versuchsmangel vor.

Ob nun dies oder etwas andres die Ursache sein mag, auf keinen Fall kann man die Versuche mit den längeren Zylindern und den Kegeln als zuverlässig betrachten.

Demgegenüber erhielt nun Frank für Körper nach Fig. 25 mit

$$2\alpha = 90^\circ \quad 60^\circ$$

$$k = 0,368 \quad 0,352,$$

und für den Körper nach Fig. 26, dessen verdrängende Oberfläche sich wenig von einem Kegel unterscheidet, für

$$2\alpha = 20^\circ \quad k = 0,203.$$

Fig. 25.

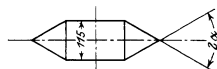
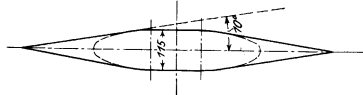


Fig. 26.



In diesen Zahlen ist der Reibungswiderstand der zylindrischen Teile und der abgewandten Kegelspitze enthalten. Für die Kegelflächen allein erhält man den Widerstandswert k_0 , wenn man den Betrag $0,00244 \frac{F'}{F}$ (wie oben) in Abzug bringt. Der Wert $\frac{F'}{F}$ besteht aus den beiden Teilen $4 \frac{l}{d}$ (Zylinder) und $\frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha}$ (hinterer Kegel, s. unten). Damit wird für

	$2\alpha = 90^\circ$	60°	20°
	$\frac{F'}{F} = 6,5$	$7,3$	$12,5$
und daher	$k_0 = 0,353$	$0,334$	$0,1725$
statt	$(k = 0,368$	$0,352$	$0,203).$

Diese Werte schließen sich bis auf denjenigen für 60° ganz nahe an die von Frank für Keile von gleichem Winkel gefundenen Werte an, so daß ein besonderer Einfluß der Spitze (im Gegensatz zur Schneide), wie ihn Eiffel auf Grund seiner Versuche mit Kegeln hervorhebt¹⁾, kaum festzustellen ist.

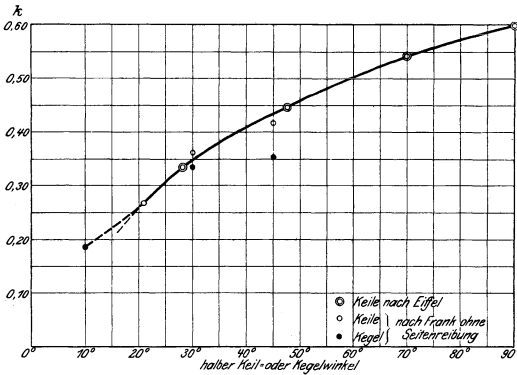
Uebrigens entstammen die Frankschen Werte für 2α = 90° und 60° einer älteren Versuchsreihe, bei der die Aufhängung noch nicht so vollkommen war wie bei den neueren Versuchen mit 2α = 20°.

Schafft man auch bei den Keilen den Reibungswiderstand der Flanken weg, so erhält man für

	2α = 90°	60°	41° 38'
	k = 0,418	0,362	0,266
statt	(0,433)	0,377	(0,281).

Diese Werte sind zusammen mit denen der Kegel in Fig. 27 aufgetragen. In der gleichen Figur sind auch die Ergebnisse Eiffels für Keile mit größeren Winkeln, bis zur normalen Fläche, enthalten.

Fig. 27.



Weitere Folgerungen aus den Versuchen.

Einfluß der Geschwindigkeit. Sowohl von Eiffel als von Frank ist auf Grund ihrer Versuche festgestellt worden, daß der gesamte Luftwiderstand W in der Bewegungsrichtung sich durch die Formel ausdrücken läßt:

$$W = k \frac{F}{g} c^2,$$

mit F als Projektion der Fläche auf eine zur Bewegungsrichtung senkrechte Ebene. Wesentlich bei dieser Formel ist, daß k für eine und dieselbe Fläche (oder für den gleichen Körper) bei verschiedenen Geschwindigkeiten einen unveränderlichen Wert hat. Im übrigen ist dieser Wert hauptsächlich von der Gestalt der Stirnoberfläche abhängig, bei ebenen Flächen im Besondern von ihrer Neigung gegen die Bewegungsrichtung.

Eiffel hat dieses Gesetz für Geschwindigkeiten zwischen 15 und 40 m/sk festgestellt, Frank für Geschwindigkeiten zwischen 0²⁾ und 6 m/sk.

Eiffel schließt zwar aus den Mittelwerten seiner Versuche mit normal stehenden ebenen Platten, daß bei einer Geschwindigkeit von rd. 33 m/sk k am kleinsten ist und von da ab sowohl bei steigender als bei fallender Geschwindigkeit wächst. Für 33 m/sk ergab sich im Mittel für alle Arten von Flächen $k_{\min} = 0,0732 \cdot 8 = 0,5856$, dagegen für rd.

19 m/sk (untere Grenze) $k = 0,0756 \cdot 8 = 0,6048$, für rd. 40 m/sk (obere Grenze) $0,074 \cdot 8 = 0,592$. Diese Unterschiede sind so gering, daß sie wohl für alle praktischen Zwecke außer acht bleiben können, um so mehr, als sie nur für normal stehende Flächen Geltung haben.

Nimmt man übrigens diese Gesetzmäßigkeit als zutreffend an, so wird die Übereinstimmung der Frankschen Werte für normal stehende ebene Flächen mit den Eiffelschen Werten, Fig. 11, noch besser. Denn die Frankschen Koeffizienten müssen in Fig. 11, da sie bei rd. 3 m/sk ermittelt sind, etwas größer erscheinen, als wenn sie (für dieselbe Größe der Fläche) bei der Geschwindigkeit von rd. 27 m/sk, wie bei Eiffel, ermittelt wären. Die betreffenden Punkte würden, wenn man sie daraufhin berichtigte, noch etwas tiefer rücken. Von einer zahlenmäßigen Ausführung dieser Berichtigung kann indessen, weil sie unerheblich ist, abgesehen werden.

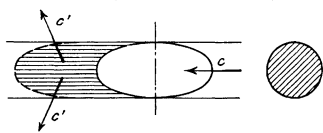
Für das Bestehen der Eiffelschen Gesetzmäßigkeit läßt sich übrigens folgendes anführen. Bei den kleinen Geschwindigkeiten fängt der Zähigkeitswiderstand der verdängten Luft an, den Wirbelwiderstand (z. B. bei der Flächenreibung) zu übertreffen, wie dies auch von den Rohrleitungen bekannt ist. Von dem Gebiet der Schallgeschwindigkeit ist andererseits bekannt, daß dort der Widerstandskoeffizient sehr viel größer ist, oder, anders ausgedrückt, mit einer höheren als der zweiten Potenz der Geschwindigkeit wächst. Beide Einflüsse werden sich allmählich mehr und mehr geltend machen, der eine gegen unten, der andre gegen oben, wodurch die von Eiffel gefundene Veränderlichkeit von k entsteht.

Man kann aber als feststehend annehmen, daß die Abweichungen von quadratischen Gesetz bis 40 m/sk und wohl noch erheblich darüber, d. h. für alle flugtechnischen Geschwindigkeiten, so geringfügig sind, daß sie völlig unberücksichtigt bleiben können.

Die wesentlichen Ursachen des Luftwiderstandes.

Wenn ein beliebiger Körper, Fig. 28 und 29, in gerader Linie mit c m/sk Geschwindigkeit durch die ruhende Luft fortschreitet, so verdrängt er in jeder Sekunde eine Luftmenge von F c cbm; F ist hierin die Fläche seiner Projektion auf eine zur Bewegungsrichtung senkrechte Ebene. Diese Luftmasse muß also in der Zeiteinheit in Bewegung gesetzt und aus dem Bauraume des Körpers in den Raum außerhalb gedrängt werden. Der gesamte Bewegungswiderstand dieser Luft wird durch Kräfte überwunden, die von der Oberfläche des Körpers auf die Luft ausgeübt werden. Ist der Körper symmetrisch zur Bewegungsrichtung, so ist die Resultante dieser Kräfte eine in die Bewegungsrichtung fallende Einzelkraft. Diese Kraft oder ihre Gegenkraft bezeichnet man als den Luftwiderstand des Körpers.

Fig. 28 und 29.



Ist der Körper unsymmetrisch, so fällt auch die Resultierende der Oberflächenkräfte nicht in die Bewegungsrichtung. Im allgemeinsten Falle lassen sich die Kraftwirkungen auf eine Einzelkraft und ein verdröhendes Kräftepaar zurückführen. In dem einfachen Falle, Fig. 30 und 31, der im folgenden als Grundfall auftritt, ist der resultierende Oberflächendruck eine normal oder (mit Rücksicht auf die Flächenreibung) schräg zur Oberfläche wirkende Kraft P. Der Luftwiderstand W ist die in die Bewegungsrichtung fallende Komponente von P. Die andre, dazu senkrechte Komponente, die keinen Arbeitsaufwand bedingt, hat man sich durch äußere Kräfte, sei es in festen Führungen oder durch das Eigengewicht oder sonstwie, aufgenommen zu denken.

¹⁾ »La résistance de l'air est très réduite si la surface se termine à l'avant par une pointe (coefficient d'un cône à 60° K = 0,015).«

²⁾ Es kann für praktische Zwecke dahingestellt bleiben, ob für ganz kleine Geschwindigkeiten, etwa unter 1 m/sk, mit Rücksicht auf die dann denkbare Vermeidung von Wirbeln (ähnlich wie bei Rohrleitungen) eine andre Gesetzmäßigkeit in Kraft tritt.

Zwei Ursachen des Bewegungswiderstandes der Luft sind ohne weiteres zu erkennen. Die eine ist der Trägheits- oder Beschleunigungswiderstand, den die in Bewegung zu setzende Luftmenge infolge ihrer Masse ausübt. Er ist nach dem Massenbeschleunigungsgesetz zu beurteilen¹⁾.

Fig. 30.

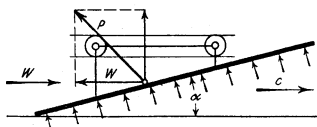
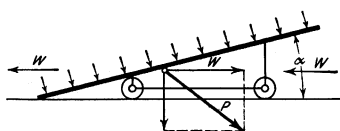


Fig. 31.



Die zweite Ursache ist der Reibungswiderstand, den die über die Stirnfläche und die Seitenflächen (bei der Platte über die Vorderfläche und zum Teil auch über die Rückfläche) abfließende Luft an diesen Flächen findet. Diese »äußere Reibung« ist nach dem Frankschen Flächenreibungsgesetz zu beurteilen.

Eine dritte wesentliche Ursache ist folgende. Die zu verdrängenden Luftmengen müssen sich nicht allein an den Oberflächen des Körpers, sondern auch aneinander vorbeischieben. Dies ist zunächst der Fall an den Stellen, wo neue Luftmengen von der Bewegung erfaßt werden und an der noch ruhenden Luft vorbeigleiten. Aber auch sonst werden innerhalb der Luftmasse Geschwindigkeitsunterschiede auftreten. Dabei ist der Zähigkeitswiderstand der Luft zu überwinden, oder es tritt bei größeren Relativgeschwindigkeiten Wirbelbewegung auf, die mit Arbeitsverlusten verbunden ist. Endlich muß die aus dem Bahnraum austretende Luft die außerhalb befindliche ruhende Luft zur Seite drängen. Sie ist zum Teil ohne besondern Arbeitsaufwand dazu imstande, vermöge der Geschwindigkeit, die sie aus dem Bahnraum mitbringt. Es ist aber fraglich, ob die letztere für den Zweck genügt, besonders in den Fällen, wo sie klein ist (wie bei schwach geneigten Flächen). Alle diese Widerstände der dritten Gruppe mögen als Widerstand der »inneren Reibung« zusammengefaßt werden.

Der Gesamtwiderstand W in der Bewegungsrichtung ist die Summe der drei Widerstände W_1, W_2, W_3 , die nacheinander von der Beschleunigung, der äußeren und der inneren Reibung der verdrängten Luftmassen herrühren.

Die Versuche über den Luftwiderstand geben unmittelbar nur über die Summe der Widerstände Aufschluß. Aufgabe des Folgenden wird es sein, in den Versuchsergebnissen von Eiffel und Frank die Einzelwiderstände zu bestimmen. Erst wenn diese zahlenmäßig bekannt sind, ist es möglich, über ihre Bedeutung zu entscheiden und dadurch zu einer genaueren Erkenntnis des Luftwiderstandes zu gelangen. Die rein theoretische Vorausbestimmung des Luftwiderstandes ohne erfahrungsmäßige Unterlagen, wie sie vielfach versucht worden ist, kann zu keinem mit den Tatsachen übereinstimmenden Ergebnis führen. Die Vorgänge sind dazu viel zu verwickelt. Man hat es hier weder mit reibungs- noch mit wirbelfreien Strömungen zu tun. Der Luftwiderstand kann

¹⁾ Irgendwelche nennenswerte Rückverwandlung der den Massen erteilten Geschwindigkeit in nutzbaren Druck, der auf der Rückseite des Körpers wirken müßte, dürfte in den meisten praktischen Fällen schon dadurch ausgeschlossen sein, daß die Luftmassen in wirbelnde Bewegung versetzt werden. Der ursprüngliche Beschleunigungswiderstand ist also im allgemeinen im vollen Werte Bewegungswiderstand.

auch keineswegs als Umkehrung des Strömungsdruckes isolierter, sei es freier oder in Kanälen geführter Strahlen behandelt werden.

Für den vorliegenden Zweck kommen nur die Versuche mit ebenen Platten und symmetrischen Winkelflächen in Frage

Die Richtung der Oberflächenkräfte. Eine reibungsfreie Oberfläche kann auf einen andern Körper, mit dem sie in Berührung kommt, nur normal gerichtete Drücke ausüben oder von seiten dieser Körper aufnehmen. Keine materielle Oberfläche ist indessen frei von Unebenheiten, vermöge deren sie stets auch tangential gerichtete Kräfte übertragen kann. Man hat bisher angenommen, daß diese tangentialen Reibungskräfte bei den für den Luftwiderstand praktisch in Frage kommenden Flächen und Geschwindigkeiten so gering seien, daß man sie gänzlich vernachlässigen könne. Eiffel bemerkt hierüber¹⁾: »Tatsächlich könnten tangentiale Kräfte, auch wenn sich solche betätigen wollten, keinen Angriffspunkt auf der glatten Oberfläche der Platten finden und wären nicht imstande, irgend welche Wirkung auf sie auszuüben«; und weiter²⁾: »Die Tatsache, daß ein Luftstrom, der eine Oberfläche in schiefer Richtung trifft, auf diese niemals einen andern als normalen Druck ausüben kann, ist von Dines und Langley experimentell bekräftigt worden. Sie ist übrigens in Übereinstimmung mit der Theorie der vollkommenen Flüssigkeiten, in deren Innerem nur normal zu den Wänden gerichtete Kräfte entstehen können.« Diese Worte geben der heute in flugtechnischen Kreisen vorherrschenden Anschauung Ausdruck.

Wenn man indessen in Betracht zieht, einen wie außerordentlichen Einfluß die gleichen tangentialen Kräfte, die hier gelugnet werden, in den Rohrleitungen und in den Düsen und Kanälen der Dampfturbinen und der Gebläse auf den Strömungsvorgang haben, so erscheint es sehr auffallend, daß bei der Bewegung von Flächen durch die Luft parallel zu ihrer Richtung dieser Einfluß ganz verschwinden solle, obwohl doch die physikalischen Erscheinungen an der Oberfläche die gleichen sind.

Man wird vielmehr auf Grund dieser bekannten Erfahrungen aussprechen können, daß die oben wieder-gegebene Anschauung grundsätzlich nicht zutreffend sein kann. Trotzdem könnte sie praktisch zu Recht bestehen; aber daß die Reibung an der Oberfläche in gewissen Fällen tatsächlich eine verschwindend kleine Rolle spielt, ist noch kein Grund dafür, daß sie dies in allen Fällen tun muß. Auf Grund des Frankschen Reibungsgesetzes habe ich schon auf S. 55 gezeigt, daß es praktische Fälle geben kann, wo die Reibung ein sehr erheblicher Teil des Widerstandes ist.

Wir gehen daher von der Tatsache aus, daß es einen merkbaren und aus der Relativgeschwindigkeit der Luft gegenüber der Fläche berechenbaren Reibungswiderstand gibt. Die Fälle, wo dieser eine untergeordnete oder gar keine, und wo er eine hervorragende Rolle spielt, werden sich dann von selbst ergeben.

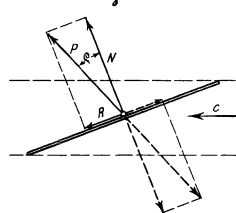
Eine ebene, gegen die Bewegungsrichtung geneigte Fläche kann demgemäß außer einem Normaldruck N auch eine Tangentialkraft R , Fig. 32, auf die Luft, durch die sie sich bewegt, ausüben. Der resultierende Druck P der Fläche auf die Luft (oder der Luft auf die Fläche) erhält also eine unter einem gewissen Winkel ϱ gegen die Normale verlaufende Richtung. Der Bewegungswiderstand hat den Wert (s. die spätere Fig. 37)

$$\begin{aligned} W &= N \sin \alpha + R \cos \alpha \\ &= P \cos (\alpha + \varrho). \end{aligned}$$

¹⁾ a. a. O. S. 65.

²⁾ Fußbemerkung S. 65.

Fig. 32.

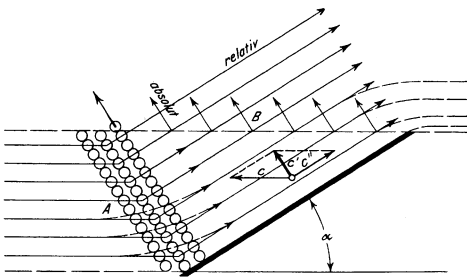


Die Bewegungsvorgänge in der verdrängten Luftmasse.

Wäre der Verdrängungsraum der schrägen Fläche nach Fig. 33 mit gleich großen glatten Kugeln angefüllt, die sich ohne gegenseitige Reibung und ohne Reibung an der Fläche bewegen könnten, so würden sie in der Richtung der Normale von der Fläche weggeschoben (absolute Bahnen) und gleichzeitig parallel zur Fläche dieser entlang nach außen laufen (relative Bahnen). Die absolute Verdrängungsgeschwindigkeit wäre $c' = c \sin \alpha$, die relative Geschwindigkeit $c'' = c \cos \alpha$. Demgemäß würde sich ein Strömungsbild nach Fig. 33 ergeben.

Dieses Bild wird nun erheblich abgeändert, wenn man sich den Verdrängungsraum nicht mit reihenartig angeordneten Kugeln, sondern mit einer gleichförmig verteilten Masse von Kugeln besetzt denkt, die sich nach allen Richtungen gegenseitig beeinflussen. Eine solche Beeinflussung findet nicht allein durch den Stoßdruck statt, der sich nach den verschiedensten Richtungen fortpflanzt, sondern auch durch die gegenseitige Reibung und die Reibung der Kugeln an der Fläche. Aus den stumpfen Ecken der Relativbahnen bei A werden so allmähliche bogenförmige Uebergänge, wie in Fig. 33 gestrichelt angedeutet. Ist auch der Raum außerhalb der Bahn der Platte mit Kugeln gefüllt, so werden die absoluten Austrittsgeschwindigkeiten aus dem Bahnraum infolge von Stoß und Reibung rasch verschwinden und die Relativbahnen bei B allmählich wieder der Bewegungsrichtung

Fig. 33.



parallel werden, wie ebenfalls gestrichelt angedeutet. Die in den leerwerdenden Raum auf der Rückseite der Fläche eintretenden Kugeln werden keine regelmäßigen Bahnen beschreiben und ihre Geschwindigkeit bald wieder verlieren.

In ähnlicher Weise verlaufen die Bewegungen auch in einem mit Luft erfüllten Raum, wie Fig. 34 zeigt. Die Abstände der Stromfäden voneinander sind am größten über der Fläche, da wo sie dieser parallel laufen, am kleinsten an der Austrittsstelle, wo sie der Bewegungsrichtung wieder parallel werden. Durch die Querschnitte x, y, z , Fig. 34, fließen nämlich in der Zeiteinheit die gleichen Luftmengen xc bzw. yc' und zc'' . Es ist

$$xc = yc' = zc''.$$

Da nun c' als absolute Geschwindigkeit die Diagonale im Parallelogramm aus der Führungsgeschwindigkeit c und der relativen Geschwindigkeit c'' ist, so ist, wie Fig. 34 zeigt, der größte Wert, den c' annehmen kann, gleich $c \cos \alpha$; in Wirklichkeit wird wegen der Bewegungswiderstände $c' < c \cos \alpha$ sein.

Die relative Geschwindigkeit c'' kommt dadurch zustande, daß sich die absolute Geschwindigkeit c' , die der Luft von der Fläche mitgeteilt worden ist, mit der Führungsgeschwindigkeit zusammensetzt, wie das obere Parallelogramm in Fig. 34 zeigt. Da wo die Stromfäden wieder parallel werden, wird $c'' = c + c'$. Nun ist c' , wie aus dem unteren Parallelogramm hervorgeht, mindestens gleich $c \sin \alpha$, in Wirklichkeit größer; daher ist

$$c'' > c + c \sin \alpha$$

oder $c'' > c(1 + \sin \alpha).$

Demgemäß wird nun

$$\frac{x}{y} = \frac{c''}{c} < \frac{c \cos \alpha}{c}$$

oder $\frac{y}{x} > \frac{1}{\cos \alpha}.$

Ferner: $\frac{y}{z} = \frac{c'''}{c''} > \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha},$

also $\frac{z}{y} < \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}.$

Es wird z. B. für $\alpha = 25^\circ$
 $\cos \alpha = 0,906; \frac{1}{\cos \alpha} = 1,1,$

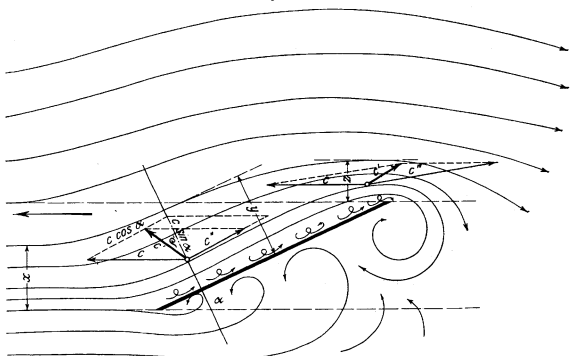
$$\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = 0,64,$$

daher $\frac{y}{z} > 1,1$

$$\frac{z}{y} < 0,64.$$

Diese Betrachtungen erlauben wenigstens einen überschlägigen Einblick in die Verdrängungsverhältnisse. Fig. 34 ist hiernach entworfen. Der genaue Verlauf wird sich schwer oder gar nicht von vornherein angeben lassen, schon deshalb nicht, weil Wirbelung und Zähigkeit in Wirklichkeit

Fig. 34.



eine große Rolle spielen dürften. Hier können nur Versuche eine Aufklärung schaffen. Auch ist zu beachten, daß der Vorgang, ausgenommen bei der senkrechten Kreisplatte, kein »ebener« ist. Durch ein Bild wie Fig. 34 werden daher die wirklichen Vorgänge nicht erschöpft. In jedem Schnitt senkrecht zur Ebene verlaufen die Stromlinien anders.

Der Reibungswiderstand.

In der Richtung der Plattenoberfläche ist der Reibungswiderstand

$$R = 0,00244 F_0 \frac{\gamma}{g} c'^2$$

wenn nur die vordere Fläche Reibung ergibt. Nimmt man dagegen an, daß die Reibung auf beiden Flächenseiten in gleicher Größe wirkt (wie es bei der parallelen Platte der Fall ist), so wird

$$R = 2 \cdot 0,00244 F_0 \frac{\gamma}{g} c'^2.$$

Bei der schrägen Platte ist nun die Luftbewegung auf der vorderen Seite eine wesentlich andre als auf der Rückseite. Der Unterschied wächst mit zunehmender Neigung. Im allgemeinen wird anzunehmen sein, daß die Reibung der hinteren Fläche kleiner ist. Sie muß bei sehr kleinen Neigungswinkeln fast gleich der Reibung auf der vorderen Fläche,

bei größeren Winkeln fast gleich null sein. Man kann daher setzen:

$$R = n 0,00244 \frac{F_0 \gamma}{g} c'^2,$$

worin n eine Zahl zwischen 1 und 2 ist.

Mit wachsender Flächengeschwindigkeit c muß auch c'' wachsen, man kann daher

$$c'' = \psi c$$

setzen, mit ψ als einem unveränderlichen oder innerhalb der gewöhnlichen Grenzen von c nur wenig veränderlichen Werte. Damit wird

$$R = n 0,00244 \frac{F_0 \gamma}{g} \psi^2 c^2.$$

Der Bewegungswiderstand, den diese Reibung verursacht, ist

$$W_2 = R \cos \alpha,$$

daher
$$W_2 = n 0,00244 \frac{F_0 \gamma}{g} \psi^2 c^2 \cos \alpha.$$

Mit
$$F_0 = \frac{F}{\sin \alpha}$$

wird hieraus
$$W_2 = n 0,00244 \psi^2 \cotg \alpha \frac{F \gamma}{g} c^2.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$k_2 = n 0,00244 \psi^2 \cotg \alpha,$$

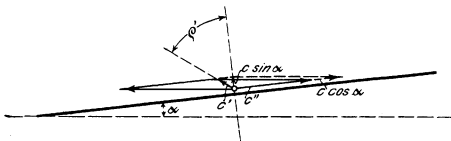
so wird

$$W_2 = k_2 \frac{F \gamma}{g} c^2.$$

Für kleine Winkel α kann sich c'' nur wenig von $c \cos \alpha$ unterscheiden, da im Grenzfall ($\alpha = 0$) $c'' = c$ werden muß. Bei der Berechnung des Reibungswiderstandes nach der Frankschen Formel ist nämlich zu beachten, daß unter der relativen Geschwindigkeit nicht die Gleitgeschwindigkeit unmittelbar an der Platte zu verstehen ist. Diese ist gar nicht angebar. Sie kann, indem eine dünne Luftschicht mitgerissen wird, ganz oder fast gleich null sein. Bei der parallel bewegten Platte in ruhender Luft ist sie um so größer, je weiter die Stelle von der Platte in normaler Richtung entfernt liegt. Die Platte kann in diesem Falle die Luft nur bis zu einer gewissen Schichtdicke beeinflussen, die von der Länge l der Platte in der Bewegungsrichtung abhängt, nach Frank bis zu rd. $\frac{1}{80} l$. In dieser Entfernung ist die absolute Luftgeschwindigkeit null, die relative gleich der Plattengeschwindigkeit c . Mit dieser ist in der Frankschen Formel zu rechnen.

Bei der schrägen Platte sind die Verhältnisse insofern anders, als die reibenden Luftmassen nicht in absoluter Ruhe sind (auch nicht in $\frac{1}{80} l$ Entfernung), sondern die absolute Verdrängungsgeschwindigkeit c' haben. Diese hat eine Komponente $c' \sin \varphi'$ parallel der Platte, und da die Plattengeschwindigkeit in Richtung der Oberfläche $c \cos \alpha$ ist, so ist die relative Gleitgeschwindigkeit, von der die Reibung abhängt, $c'' = c \cos \alpha - c' \sin \varphi'$. Nun wird c' um so kleiner, je kleiner α wird, um bei $\alpha = 0$ ganz zu verschwinden. Wenn nun φ' selbst erhebliche Beträge annimmt, so wird doch bei kleinen Winkeln $c' \sin \varphi'$ nur klein sein gegen $c \cos \alpha$, wie Fig. 35 zeigt; mit $\alpha = 0$ muß auch $c' \sin \varphi' = 0$ sein, obwohl $\varphi' = 90^\circ$, $\sin \varphi' = 1$ ist.

Fig. 35.



Sofern es sich um Berechnung des Reibungswiderstandes R handelt, kann man deshalb bei kleinen Winkeln (etwa bis $\alpha = 12^\circ$) ohne erheblichen Fehler

$$c'' = c \cos \alpha$$

setzen, also

$$\psi = \frac{c''}{c} = \cos \alpha$$

und

$$k_2 = n 0,00244 \frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha}.$$

Bei größeren Winkeln, bis zu 30° , wird man die Reibung, wenn man nach der gleichen Formel rechnet, etwas überschätzen, ohne befürchten zu müssen, daß sich ihre Größenordnung ändert. Die Reibung ist in diesem Gebiet überhaupt von geringem Einfluß.

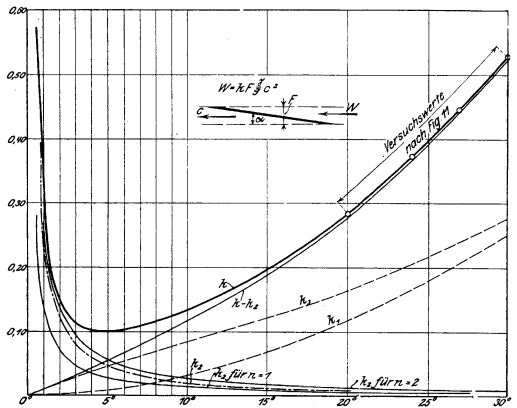
Man erhält mit $n = 1$ für die Winkel

$\alpha = 27^\circ$	24°	20°	$17^\circ 30'$	15°	12°
$k_2 = 0,0038$	$0,00458$	$0,00592$	$0,00704$	$0,00848$	$0,011$

In Fig. 36 sind diese Werte als Ordinaten eingetragen. Wie ersichtlich, ist der Einfluß der Reibung in diesem Gebiet zwar bemerkbar, aber verhältnismäßig nicht groß.

In der gleichen Figur sind auch die von der äußeren Reibung befreiten Widerstandskoeffizienten ($k - k_2$) zwischen 15° und 30° eingetragen. Diese Kurve muß nun in ihrer Verlängerung nach unten durch den Ursprung des Koordinatensystems gehen, da bei der parallelen Platte ($\alpha = 0^\circ$) lediglich die Flächenreibung als Widerstand wirkt. Diesen enthält aber

Fig. 36.



die Kurve nicht mehr. Unstatthaft wäre es dagegen, die Verlängerung der Versuchskurve (k) durch den Ursprung gehen zu lassen.

Die Kurve $k - k_2$ ist in Fig. 36 bis zum Ursprung verlängert; ihr durch die Versuche zwischen 30° und etwa 15° festgelegter Verlauf gestattet diese Verlängerung ganz zwanglos. Die Ordinaten dieser Kurve stellen den durch die Beschleunigung und durch die innere Reibung allein verursachten Bewegungswiderstand in dem Gebiete zwischen 0 und 12° dar, das durch unmittelbare Versuche nicht gedeckt ist. Da sich nun gerade für dieses Gebiet die äußere Reibung zuverlässig auf Grund des Frankschen Reibungswertes berechnen läßt, so kommt man in die Lage, auch den Gesamtwiderstand bei Winkeln zwischen 12° und 0° bestimmen zu können.

Der auf die Flächenprojektion F bezogene Widerstandskoeffizient bei kleinen Flächenwinkeln.

Zunächst leuchtet ein, daß die Kurve des Koeffizienten k in der Formel

$$W = k F \frac{\gamma}{g} c^2$$

auf keinen Fall, wie bisher angenommen, durch den Nullpunkt gehen kann. Sie muß sich vielmehr der Ordinatenachse asymptotisch nähern. Bei 0° verschwindet zwar der Verdrängungswiderstand vollständig ($k - k_2 = 0$), weil kein Verdrängungsraum mehr vorhanden ist ($F = F_0 \sin \alpha = 0$ für $\alpha = 0$); es bleibt jedoch ein endlicher Gesamtwiderstand gleich dem Widerstand der äußeren Reibung (W_2) bestehen.

Soll nun das Produkt kF endlich bleiben, wenn $F = 0$ wird, so muß $k = \infty$ werden.

Die bis 15° (und weiter) fallende Kurve der k muß somit einen tiefsten Punkt erreichen und sich von dort ab steigend der Ordinatenachse nähern. Der auf die Flächenprojektion bezogene Widerstandskoeffizient durchschreitet zwischen 0° und 12° ein Minimum.

Für die Widerstandskoeffizienten der äußeren Reibung erhält man nun bei

$\alpha = 10^\circ$	7°	6°	5°	3°	2°	1°	$0^\circ 30'$
für $n = 1$:							
$k_2 = 0,0134$	$0,0195$	$0,023$	$0,0277$	$0,0464$	$0,0699$	$0,14$	$0,28$
für $n = 2$:							
$k_2 = 0,0268$	$0,0390$	$0,046$	$0,0554$	$0,0928$	$0,1398$	$0,28$	$0,56$

Auch diese Werte sind in Fig. 36 eingetragen. Für $n=2$ fällt der Reibungswert doppelt so groß aus als für $n=1$. Die wahre Kurve k_2 wird so zwischen den Kurven für $n=1$ und $n=2$ verlaufen, daß sie bei größeren Winkeln in diejenige für $n=1$, bei kleinen in die für $n=2$ übergeht, wie in Fig. 36 eingezeichnet (strichpunktiert).

Die Ordinaten der Kurve k des Gesamtwiderstandes erhält man jetzt als Summe der Ordinaten der strichpunktierten Kurve k_2 und der leicht ausgezogenen Kurve $k - k_2$.

Wie ersichtlich, zeigt die k -Kurve ein scharf ausgeprägtes Minimum bei 5° .

Der Kleinstwert von k , der von keiner noch so flach gelegten Platte und von keinem noch so scharfen Keil unterschritten werden kann, ist $k = \text{rd. } 0,10$.

Den kleinsten Widerstand in der Bewegungsrichtung hat bei gegebener Flächenprojektion eine unter 5° geneigte Platte, oder ein Keil von 10° ganzem Keilwinkel.

Die Richtung und Größe des Oberflächendruckes.

Der resultierende Oberflächendruck P , Fig. 37, hat eine Komponente R in Richtung der Fläche, die gleich der äußeren Reibung ist. Der Bewegungswiderstand infolge der äußeren Reibung ist

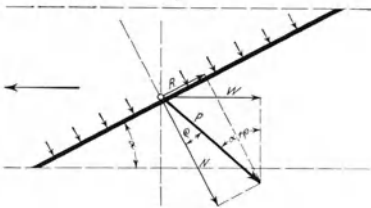
$$W_2 = R \cos \alpha.$$

$$W_2 = k_2 \frac{F \gamma}{g} c^2,$$

daher

$$R = k_2 \frac{F \gamma}{g} \frac{c^2}{\cos \alpha}.$$

Fig. 37.



Die Komponente von P in Richtung der Bewegung ist gleich dem gesamten Bewegungswiderstand W . Man hat also

$$W = P \sin(\alpha + \varphi),$$

dennach mit

$$W = k F \frac{\gamma}{g} c^2$$

den gesamten Oberflächendruck

$$P = k F \frac{\gamma}{g} c^2 \frac{1}{\sin(\alpha + \varphi)}.$$

Nun ist nach Fig. 37

$$\frac{R}{P} = \sin \varphi.$$

Mit den Werten von R und P erhält man daher

$$\sin \varphi = \frac{k_2 \sin(\alpha + \varphi)}{k \cos \alpha},$$

oder

$$\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{k}{k_2} \cos \alpha.$$

Daraus folgt leicht:

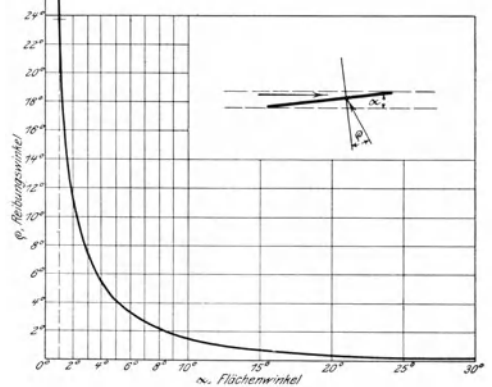
$$\cotg \varphi = \left(\frac{k}{k_2} - 1 \right) \cotg \alpha$$

oder

$$\tg \varphi = \frac{k_2}{k - k_2} \tg \alpha.$$

Hiernach sind in Fig. 38 die Winkel φ als Ordinaten zu den Flächenwinkeln α als Abszissen eingetragen, wobei für k_2 die strichpunktierte Kurve in Fig. 36 zugrunde gelegt ist. Noch bei 6° Neigung der Fläche beträgt die Abweichung der Oberflächenkraft von der Normalen erst rd. 3° , bei 10° Neigung nur rd. $1^\circ 30'$. Von 6° Neigung an wächst aber φ sehr schnell; bei 2° Neigung ist schon $\varphi = \text{rd. } 11^\circ$ geworden, bei 1° Neigung = rd. 24° . Sinngemäß wird $\varphi = 90^\circ$ bei $\alpha = 0$, d. h. der parallelen Platte.

Fig. 38.



Die von der Beschleunigung und der inneren Reibung verursachten Teilwiderstände W_1 und W_3 .

Die Summe der Teilbeträge W_1 und W_3 des Luftwiderstandes ist jetzt berechenbar, nachdem der Gesamtwiderstand W und derjenige der äußeren Reibung W_2 bekannt sind. Es ist

$$W_1 + W_3 = W - W_2.$$

Dieser Summe entspricht der Koeffizient $k - k_2$ (erste Kurve unter der des Gesamtwiderstandes) in Fig. 36. Der Widerstand W_1 läßt sich aus der Geschwindigkeit c' ermitteln, auf welche die Luftmassen beschleunigt werden. Ist W' die in Richtung von c' , Fig. 34, aufzuwendende Beschleunigungskraft, so gilt nach dem Satze vom Antrieb:

$$W' t = m c',$$

worin t die Zeit ist, in welcher die Luftmasse m in die Geschwindigkeit c' versetzt wird. Es wird somit

$$W' = \frac{m}{t} c'.$$

Nun ist $\frac{m}{t}$ die sekundlich beschleunigte Luftmasse, und

diese ist gleich $\frac{F \gamma}{g} c$, Fig. 28, S. 10. Daher wird

$$W' = \frac{F \gamma}{g} c c'.$$

W' fällt nicht in die Bewegungsrichtung der Platte. Der in der letzteren Richtung wirkende Teilwiderstand W_1 muß aber die gleiche sekundliche Arbeit verrichten wie W' . Es ist also

$$W_1 c = W' c',$$

oder

$$W_1 = \frac{c'}{c} W'.$$

Man erhält daher

$$W_1 = \frac{F \gamma}{g} c'^2.$$

Für c' ergibt sich nach Fig. 34:

$$c' = c \frac{\sin \alpha}{\cos \varrho'}$$

Es wird daher

$$W_1 = \frac{F \gamma}{g} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \varrho'} c'^2$$

Setzt man

$$k_1 = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \varrho'}$$

so wird

$$W_1 = k_1 \frac{F \gamma}{g} c'^2$$

ϱ' bewegt sich in den Grenzen von $\infty 0^\circ$ (bei größeren Winkeln) bis höchstens 90° (bei der parallelen Platte). Der Mindestwert von c' ist nach Fig. 34 $c' = c \sin \alpha$, also der Mindestwert von k_1 gleich $\sin^2 \alpha$. Auch bei kleinen Winkeln dürfte gemäß Fig. 35 c' sich nicht allzuviel von $c \sin \alpha$ unterscheiden, da bei $\alpha = 0^\circ$ $c' = 0$ werden muß. Man kann daher überschlägig $c' = c \sin \alpha$, somit $k_1 = \sin^2 \alpha$ setzen. Hiernach ist in Fig. 36 die Kurve der Beschleunigungskoeffizienten k_1 eingetragen (gestrichelt).

Da nun W , W_1 und W_2 einzeln dem Quadrat von c und dem Werte $\frac{F \gamma}{g}$ proportional sind, so trifft dies auch für W_3 zu. Es wird

$$W_3 = k_3 F \frac{\gamma}{g} c^2$$

worin sich jetzt k_3 ermitteln läßt nach

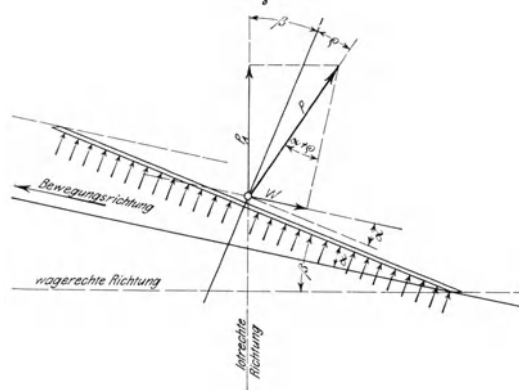
$$k_3 = k - k_2 - k_1$$

Auch die Werte von k_3 (Widerstandskoeffizienten der inneren Reibung) sind in Fig. 36 eingetragen. Man erkennt, daß bei allen Flächenwinkeln die innere Reibung einen größeren Beitrag zum Gesamtwiderstand liefert als die Beschleunigung. Von 15° abwärts ist k_3 sogar ein Mehrfaches von k_1 . Daran würde sich auch nicht viel ändern, wenn wirklich bei den kleinen Winkeln der Beschleunigungskoeffizient $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \varrho'}$ erheblich größer als $\sin^2 \alpha$ wäre.

Der Auftrieb schräger ebener Platten.

Eine unter dem Winkel β gegen die Wagerechte geneigte Platte, Fig. 39, werde unter dem Winkel α gegen ihre eigene Richtung fortbewegt. Sie erfährt durch die Luft einen

Fig. 39.



Druck P , der mit der Normale den Winkel ϱ einschließt. ϱ ist abhängig von α und kann aus Fig. 38 entnommen werden. P hat eine lotrechte Komponente P_A , die als Auftrieb bezeichnet wird, weil sie dem Eigengewicht der Platte und ihrer sonstigen Gewichtbelastung entgegenwirkt. Bei hinreichender Geschwindigkeit ist P_A imstande, die Platte zu tragen. Die zum Antrieb in der Bewegungsrichtung erforderliche Triebkraft W ist die in diese Richtung fallende Komponente von P . Man erhält nach Fig. 39

$$P_A = P \cos(\beta + \varrho),$$

$$W = P \sin(\alpha + \varrho).$$

Der letztere Wert kann auch geschrieben werden:

$$W = k F \frac{\gamma}{g} c^2,$$

wenn F die Projektion der Fläche auf eine zur Bewegungsrichtung senkrechte Ebene ist. k sind die zu α nach Fig. 36 gehörigen Widerstandskoeffizienten.

Daraus folgt nun:

$$P_A = k F \frac{\gamma}{g} c^2 \cos(\beta + \varrho)$$

Führt man an Stelle von F die Fläche F_0 der Platte selbst ein, so wird wegen

$$F = F_0 \sin \alpha$$

$$P_A = k F_0 \frac{\gamma}{g} c^2 \frac{\cos(\beta + \varrho)}{\sin(\alpha + \varrho)} \sin \alpha$$

und

$$W = k F_0 \frac{\gamma}{g} c^2 \sin \alpha.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$k_A = k \frac{\cos(\beta + \varrho)}{\sin(\alpha + \varrho)} \sin \alpha$$

(Widerstandskoeffizient des Auftriebes)

und

$$k_0 = k \sin \alpha$$

(Widerstandskoeffizient des Antriebes, bezogen auf die Plattenfläche),

so wird der Auftrieb:

$$P_A = k_A F_0 \frac{\gamma}{g} c^2$$

und der Antrieb:

$$W = k_0 F_0 \frac{\gamma}{g} c^2.$$

Das Verhältnis des erreichbaren Auftriebes zu der in Anwendung gebrachten Triebkraft wird

$$\frac{P_A}{W} = \frac{\cos(\beta + \varrho)}{\sin(\alpha + \varrho)}.$$

Mit Bezug auf die ähnlichen Verhältnisse bei der schiefen Ebene (oder Schraube) könnte man diesen Wert als Uebersehungsverhältnis der schrägen Platte bezeichnen.

Die Antriebsarbeit in PS ist

$$N = \frac{Wc}{75},$$

daher mit dem Werte von W

$$N = k F \frac{\gamma}{g} \frac{c^3}{75} = k_0 F_0 \frac{\gamma}{g} \frac{c^3}{75}.$$

Der mit 1 PS Antriebsarbeit erreichbare Auftrieb ist somit

$$\frac{P_A}{N} = \frac{75 \cos(\beta + \varrho)}{c \sin(\alpha + \varrho)}$$

oder

$$= \frac{75 P_A}{c W}.$$

Mit

$$c^2 = \frac{g P_A}{\gamma k_A F_0}$$

wird hieraus

$$\frac{P_A}{N} = 75 \frac{P_A}{W} \sqrt{\frac{\gamma}{g} k_A \frac{F_0}{P_A}}.$$

Es ist auch

$$N = \frac{P_A}{75 \left(\frac{P_A}{W} \right)} \sqrt{\frac{g P_A}{\gamma k_A F_0}}$$

oder

$$F_0 = \frac{g P_A}{\gamma k_A} \left(\frac{P_A}{N} \right)^2 \frac{1}{5625 \left(\frac{P_A}{W} \right)^2}.$$

In diesen Ausdrücken sind k_A und $\frac{P_A}{W}$ nur von den Flächenwinkeln α und β sowie von ϱ und k abhängig; sie können mit den Werten von ϱ aus Fig. 38 und von k aus Fig. 36 nach den obigen Beziehungen bestimmt werden.

Man kann hiernach berechnen, wie viel PS erforderlich sind, um mit einer Fläche von gegebener Größe F_0 und gegebenen Winkeln α und β einen Auftrieb von P_A kg zu erzielen.

Umgekehrt gibt die letzte Gleichung an, wieviel Plattenfläche nötig ist, um bei gegebenen Winkeln α und β mit einer gegebenen Leistung N einen vorgeschriebenen Auftrieb P_A zu erhalten.

Wenn die Fläche F_0 wie in Fig. 39 nicht wagerecht

sondern schräg aufwärts fortschreitet, so wird die Last, die mit F_0 verbunden ist, nicht nur getragen, sondern auch gehoben, es wird also nutzbare Hubarbeit verrichtet.

Die senkrechte Komponente der Geschwindigkeit ist nach Fig. 39 gleich $c \sin(\beta - \alpha)$, somit die sekundliche Hubarbeit in PS

$$N_n = \frac{P_A}{75} c \sin(\beta - \alpha).$$

Das Verhältnis von Nutzarbeit und Antriebsarbeit wird daher

$$\eta = \frac{N_n}{N} = \frac{P_A}{W} \sin(\beta - \alpha)$$

oder

$$\eta = \frac{\cos(\beta + \varrho)}{\sin(\alpha + \varrho)} \sin(\beta - \alpha)$$

(Wirkungsgrad der Lasthebung).

Wagerechter Flug.

Am einfachsten liegen die Verhältnisse, wenn $\beta = \alpha$ ist, d. h. die Fläche in wagerechter Richtung (aber geneigt unter dem Winkel α) fortschreitet. Dafür wird der Antriebskoeffizient

$$(k_A)_0 = k \cotg(\alpha + \varrho) \sin \alpha,$$

das Verhältnis von Auftrieb zu Antrieb

$$\left(\frac{P_A}{W}\right)_0 = \cotg(\alpha + \varrho),$$

die Antriebsarbeit

$$N = \frac{P_A}{75} \sqrt{\frac{g}{\gamma} \frac{P_A}{(k_A)_0 F_0}},$$

die notwendige Tragfläche bei gegebener Leistung

$$F_0 = \frac{g}{\gamma} \frac{P_A}{(k_A)_0} \left(\frac{P_A}{N}\right)^2 \frac{1}{5625} \left(\frac{P_A}{W}\right)_0^2,$$

der Wirkungsgrad der Lasthebung

$$\eta = 0.$$

In Fig. 40 sind die Werte von $\left(\frac{P_A}{W}\right)_0$ (Uebersetzungsverhältnisse) als Ordinaten zu den Flächenwinkeln α als Abszissen aufgetragen. Es ist aus Fig. 40 ersichtlich, daß der mit 1 kg Antriebskraft erzielbare Auftrieb einen größten Wert bei dem Winkel von rd. 5° hat. Dieser Größtwert beträgt 6,18 kg. Sowohl bei größeren als bei kleineren Winkeln α wird der Auftrieb für 1 kg Antrieb rasch kleiner, besonders oberhalb etwa 7° und unterhalb 4° .

Ohne Berücksichtigung der Flächenreibung wäre mit $\varrho = 0$

$$\frac{P_A}{W} = \cotg \alpha.$$

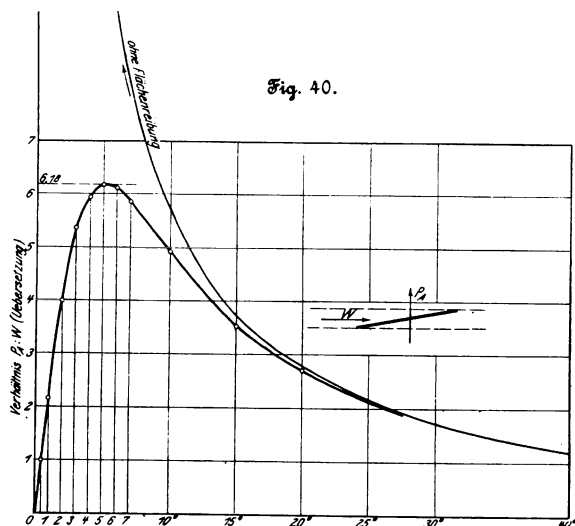
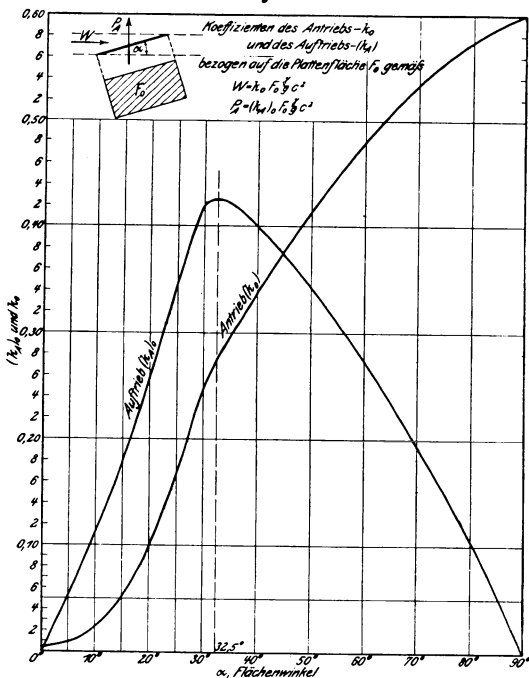


Fig. 40.

Fig. 41.



In Fig. 40 sind auch diese Werte eingetragen. Bis etwa 15° herab ist die Reibung, wie man erkennt, von geringem Einfluß auf die Uebersetzung. Bei 6° dagegen ist der wahre

Auftrieb infolge der Flächenreibung schon $\frac{\cotg 6^\circ}{6,11} = \frac{9,51}{6,11} = 1,56$ mal kleiner als derjenige, den man ohne Rücksicht auf die Reibung nach der bisherigen Rechnungswise erhält. Bei kleineren Neigungswinkeln ist das Mißverhältnis noch viel größer. Die Nichtberücksichtigung der Reibung hat somit bei Winkeln unter 10° , also gerade bei den für die Flugtechnik wichtigsten Flächenneigungen, eine grobe Abweichung der Rechnung von den wirklichen Verhältnissen zur Folge.

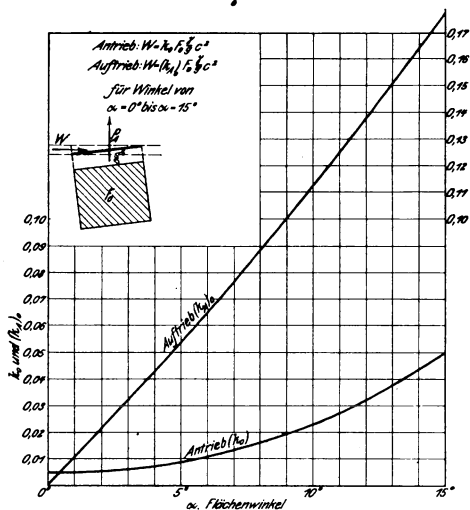
Der Winkel von 5° erscheint mit Berücksichtigung der Oberflächenreibung als der für den Auftrieb günstigste. Er ergibt den größten Auftrieb bei gegebenem Antrieb.

In Fig. 41 sind ferner die auf die wirkliche Oberfläche (F_0) bezogenen Koeffizienten k_0 und $(k_A)_0$ für Antrieb und Auftrieb als Ordinaten zu α als Abszissen aufgetragen. Absolut genommen ist der Auftrieb am größten bei $32^\circ 30'$. Das Verhältnis von Auftrieb und Antrieb ist aber hier (wie aus Fig. 40 ersichtlich) viel ungünstiger als bei kleineren Winkeln. Fig. 41 kann Verwendung finden, um die Antriebskraft und -arbeit sowie den Auftrieb in einfacher Weise zu bestimmen (s. auch die Formeln in Fig. 41 oben). Fig. 42 enthält das Gleiche in größerem Maßstabe von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 15^\circ$.

Einfluß der Stirnwiderrstände.

Außer den Tragflächen, die den Auftrieb bewirken, besitzen die Flugmaschinen mehr oder weniger große Stirnflächen (und Seitenflächen), die zwar Luftwiderstand, aber keinen Auftrieb ergeben. Die hierfür aufzuwendende motorische Arbeit geht für den Auftrieb verloren.

Fig. 42.



Ist F_s die Summe aller Stirnflächen, k_s ihr durchschnittlicher Widerstandskoeffizient, so ist der Gesamtwiderstand

$$W_g = k_0 F_0 \frac{\gamma}{g} c^2 + k_s F_s \frac{\gamma}{g} c^2$$

$$= k_0 F_0 \frac{\gamma}{g} c^2 \left(1 + \frac{k_s F_s}{k_0 F_0} \right),$$

oder

$$W_g = W \left(1 + \frac{k_s F_s}{k_0 F_0} \right),$$

wenn W der Widerstand ausschließlich der Stirnflächen ist. Die Antriebsleistung wird

$$N_g = N \left(1 + \frac{k_s F_s}{k_0 F_0} \right),$$

das Verhältnis von Antrieb und Antriebsleistung

$$\frac{P_A}{W_g} = \frac{P_A}{W} \frac{1}{1 + \frac{k_s F_s}{k_0 F_0}},$$

daher auch ähnlich wie früher

$$N_g = \frac{P_A}{W} \left(1 + \frac{k_s F_s}{k_0 F_0} \right) \sqrt{\frac{g}{\gamma} \frac{P_A}{k_A F_0}}.$$

Hierin sind $\frac{P_A}{W}$, k_0 , k_A wie oben zu bestimmen.

Die notwendige Tragfläche, wenn Leistung, Neigung der Tragflächen und Antrieb vorgeschrieben sind, folgt aus der letzten Gleichung, jedoch nicht so einfach wie oben ohne Stirnwiderstände. Setzt man

$$\frac{g}{\gamma} \frac{P_A}{k_A} \left(\frac{P_A}{N} \right)^2 \frac{1}{5625 \left(\frac{P_A}{W} \right)^2} = B,$$

so wird

$$F_0^2 = B \left(F_0 + \frac{k_s F_s}{k_0} \right)^2.$$

Aus dieser kubischen Gleichung ist F_0 zu berechnen. Ein erster Näherungswert ist $F_0 = B$; er ist gleich der Tragfläche, die ohne Stirnwiderstände nötig wäre (vergl. oben). F_0 ist stets größer als B , und zwar verhältnismäßig um so mehr, je geringere Neigung die Tragflächen haben.

Zur Erläuterung der Formeln dienen nachstehende Beispiele.

1) Man soll durch eine unter 5° gegen die Wagerechte geneigte ebene Fläche, die motorischen Antrieb erhält, einen Mann samt dem Gewicht der Flugmaschine, zusammen 300 kg,

in der Luft schwebend erhalten. Die Antriebschraube soll 30 PS, entwickeln können. Wieviel qm Tragfläche sind erforderlich und mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der Flieger in wagerechter Richtung?

- a) ohne Rücksicht auf die Stirnwiderstände,
 - b) mit Berücksichtigung einer senkrechten ebenen Stirnfläche von 0,3 qm.
- a) Mit $P_A = 300$ kg, $N = 30$ PS, $\left(\frac{P_A}{W} \right)_0 = 6,18$ nach Fig.

40, $(k_A)_0 = 0,052$ nach Fig. 42 und $\frac{g}{\gamma} = 8$ wird

$$F_0 = 8 \frac{300}{0,052} \left(\frac{300}{30} \right)^2 \frac{1}{5625 \cdot 6,18^2} = 21,5 \text{ qm},$$

$$c^2 = \frac{8 \cdot 300}{0,052 \cdot 21,5} = 2150$$

$$c = 46,3 \text{ m/sk} = 167 \text{ km/st.}$$

Die Geschwindigkeit nimmt einen sehr hohen Wert an. b) Der Teil des Stirnwiderstandes, der keinen Auftrieb erzeugt, bedingt eine Vergrößerung von F_0 .

Mit $k_s = 0,58$, $k_0 = 0,0085$, $F_s = 0,3$ qm, $B = 21,5$ erhält man F_0 gemäß der Beziehung

$$F_0^2 = B \left(F_0 + \frac{k_s F_s}{k_0} \right)^2$$

aus

$$F_0^2 = 21,5 \left(F_0 + 20,4 \right)^2.$$

Es wird

$$F_0 = 45,3 \text{ qm},$$

gegen 21,5 qm ohne Stirnwiderstände.

Die letzteren sind hier von sehr bedeutendem Einfluss auf die erforderliche Tragfläche. — Die Fahrgeschwindigkeit erhält den Wert

$$c^2 = \frac{8 \cdot 300}{0,052 \cdot 45,3}; c = 31,9 \text{ m/sk} = 115 \text{ km/st.}$$

2) Es sei eine Tragfläche von 40 qm und ein Flächenwinkel $\alpha = 12^\circ$ gegeben. Die Maschine soll mit 25 m/sk wagerecht fahren. Wie groß ist der Auftrieb und die Antriebsleistung?

Nach Fig. 42 wird für $\alpha = 12^\circ$

$$k_A = 0,138, k_0 = 0,032;$$

dann ist mit $\frac{\gamma}{g} = \frac{1}{8}$ der Auftrieb

$$P_A = 0,138 \frac{\gamma}{g} 40 \cdot 25^2 = 434 \text{ kg},$$

der Antrieb $W = 0,032 \frac{\gamma}{g} 40 \cdot 25^2 = 100 \text{ kg},$

die Antriebsleistung

$$N = \frac{100 \cdot 25}{75} = 33,3 \text{ PS.}$$

Mit 0,5 qm Stirnfläche und $k_s = 0,58$ wird der Stirnwiderstand 22,8 kg und die erforderliche Schraubeneistung 40,6 PS.

Es sei nochmals daran erinnert, daß die Figuren 40, 41 und 42 nur für wagerechte Bewegungsrichtung gelten. Für schräge Auffahrt gelten die allgemeineren Formeln oben für k_A . Der Reibungswinkel ϱ kann jedoch in jedem Fall aus Fig. 38 entnommen werden.

Zusammenfassung.

Die wesentlichen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit sind folgende:

- 1) Das von Eiffel durch Versuche mit ebenen, zur Bewegungsrichtung senkrechten Platten gefundene Gesetz der Abhängigkeit des spezifischen Widerstandes von der absoluten Größe der Fläche (je kleiner die Fläche, desto kleiner der spezifische Widerstand) wird durch die Versuche von Frank auch für wesentlich kleinere Flächen als die von Eiffel verwendeten voll bestätigt. Die Zahlenwerte von Eiffel und Frank sind in bester Übereinstimmung.
- 2) Die Versuche von Eiffel und Frank mit Keilflächen stimmen überein und ergänzen sich hinsichtlich des Umfanges.
- 3) Die Ergebnisse der Frankschen Versuche mit senkrecht abgeschnittenen Kreiszyllindern und mit Kegeln verschiedener Neigung stehen im schärfsten Widerspruch mit denen

der entsprechenden Versuche Eiffels. Der Fehler dürfte auf Seite Eiffels liegen.

4) Die von Eiffel aus seinen Versuchen mit geneigten ebenen Platten hergeleiteten Widerstandswerte bedürfen einer wesentlichen Berichtigung, die zur Folge hat, daß die von Eiffel für solche Platten ausgesprochenen Gesetzmäßigkeiten hinfällig werden, ausgenommen den plötzlichen Wechsel des Widerstandsgesetzes bei 30° Neigung.

5) Die (verbesserten) Werte Eiffels können als zuverlässiger Ausdruck des Widerstandsgesetzes ebener Platten zwischen 20° und 90° Neigung gelten, sowohl der Art nach, als hinsichtlich der Absolutwerte des Luftwiderstandes.

6) Der Franksche Koeffizient für die Oberflächenreibung der Luft ist in vorzüglicher Übereinstimmung mit dem Widerstandskoeffizienten der Dämpfe und Gase in Rohrleitungen nach den neuesten Versuchen.

7) In dem Gebiete zwischen 10° und 0° Flächenneigung wird die Oberflächenreibung von entscheidendem Einfluß auf den spezifischen Widerstand.

8) Durch Vereinigung der Versuche Eiffels mit Platten von 20° bis 30° Neigung mit dem Frankschen Reibungsgesetz läßt sich der Luftwiderstand in dem für die Flugtechnik wichtigsten Gebiet zwischen 0° und 15° mit Sicherheit herleiten. Bei 5° Neigung durchschreitet der auf die Einheit der Flächenprojektion bezogene Widerstand einen Kleinstwert ($k_{\min} = 0,1$ in der Formel $W = k F \frac{\gamma}{g} c^2$).

9) Der Luftwiderstand besteht aus drei wesentlichen Teilen: dem Beschleunigungswiderstand, dem Widerstand der äußeren Reibung und dem der inneren Reibung. Die äußere Reibung kommt erst von 15° abwärts in Betracht. Die Beschleunigung und die innere Reibung sind (abgesehen von den ganz kleinen Winkeln) von gleicher Größenordnung, jedoch überwiegt bei allen Winkeln die innere Reibung.

10) Die Richtung der resultierenden Oberflächenkraft ebener Flächen beginnt erst von etwa 5° Neigung an (abwärts) erheblich von der Normale abzuweichen (bei 5° Flächenneigung ist die Abweichung 4°, bei 1° Neigung rd. 24°).

11) Der Auftrieb geneigter ebener Platten bei waagrechter Bewegung ist unter 5° Flächenneigung im Verhältnis zum Antrieb (Vortrieb) am größten, und zwar rd. 6,2 mal so groß wie der Vortrieb.

12) Der absolut größte Auftrieb tritt bei rd. 32° Flächenwinkel auf.

Nachbemerkung.

Luftwiderstand von rechteckigen Flächen in verschiedenen Lagen.

Die oben entwickelten Werte des Widerstandes und Auftriebes geneigter ebener Platten beruhen, abgesehen von dem Einfluß des Reibungswiderstandes, im wesentlichen auf Eiffels Versuchen mit quadratischen geneigten Platten. Versuche von Dines, Langley und andern haben demgegenüber ergeben, daß rechteckige geneigte Platten unter Umständen erheblich kleinere Widerstandswerte aufweisen als quadratische von gleicher Flächengröße und Neigung, wenn nämlich das Rechteck mit seiner schmalen Seite senkrecht zur Bewegungsrichtung liegt¹⁾.

Diese Erscheinung wird erklärlich, wenn man beachtet, daß der Druck der Luft auf quadratische Platten in der Hauptsache durch die relative Luftströmung entlang der Platte bedingt wird, gemäß dem Strömungsbild Fig. 16, S. 5. Eine derartige Strömung wird aber unmöglich, wenn die zur

Bewegungsrichtung senkrechte Rechteckseite schmal ist gegenüber der in die schräge Richtung fallenden Seite. Den Grenzfall bildet ein gerader Stab mit rechteckigem Querschnitt und im Verhältnis zur Dicke erheblicher Länge, der in schräger Lage durch die Luft bewegt wird; oder auch eine ebene, verhältnismäßig dünne Platte mit geradliniger Umgrenzung, die sich in ihrer Ebene schräg zu ihren Seiten fortbewegt. Die Luftteilchen, die von der vorangehenden Kante des Stabes erreicht werden, können natürlich nicht den langen Weg über die ganze Stablänge einschlagen, sondern werden seitlich (senkrecht zur Bewegungsebene) abströmen, ebenso wie bei einem schmalen Rechteck, das senkrecht zu seiner Oberfläche fortschreitet. Bewegt sich der Stab mit c m/sk Geschwindigkeit, so wird der Luftwiderstand normal zur Stabrichtung so groß wie bei einem senkrecht stehenden Rechteck, das mit der Geschwindigkeit $c \sin \varphi$ fortschreitet, weil die Art der Luftverdrängung in beiden Fällen die gleiche ist, die Verdrängungsgeschwindigkeit beim schrägen Stab aber nur $c \sin \varphi$ ist. Mit k_* als Widerstandskoeffizient des senkrechten schmalen Rechteckes ($k_* = \text{rd. } 0,6$) und F_0 als verdrängender Oberfläche wird der Luftwiderstand senkrecht zur Stabrichtung $k_* F_0 \frac{\gamma}{g} (c \sin \varphi)^2$, also in der Bewegungsrichtung

$$W = k_* F_0 \frac{\gamma}{g} (c \sin \varphi)^2 \sin \varphi,$$

und bezogen auf die Projektion $F = F_0 \sin \varphi$

$$W = k_* \sin^2 \varphi F \frac{\gamma}{g} c^2.$$

In diesem Fall ist also das \sin^2 -Gesetz für den Luftwiderstand erfüllt, aber nicht deshalb, weil etwa die innere (und äußere) Reibung wegfiel und allein der Beschleunigungsdruck übrig bliebe, der dem \sin^2 -Gesetz folgt, sondern aus dem obigen ganz andern Grunde.

Der Widerstandskoeffizient einer sehr schmalen schrägen Fläche wird gemäß der letzten Formel

$$k = k_* \sin^2 \varphi.$$

Dieser Wert kann nun den oben angegebenen Grenzwert $k = 0,1$ der quadratischen (und lang rechteckigen) Flächen sehr bedeutend unterschreiten. Für $\varphi = 6^\circ$ wird z. B.

$$k = k_* 0,1^2,$$

also

$$k = \text{rd. } 0,006$$

(ohne Rücksicht auf Seitenreibung).

Ist nun die Fläche nicht sehr schmal, die schmale Seite z. B. nur $\frac{1}{10}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ der langen Seite, so wird ein Teil der verdrängten Luft seitlich, ein andrer der Fläche entlang abströmen. Die Widerstandswerte solcher Rechtecke werden demnach zwischen $k_* \sin^2 \varphi$ und den Werten von k für Quadrate liegen müssen, was auch die Versuche nachweisen. Auf diesen Zusammenhang hat wohl Lancheater zuerst hingewiesen.

Für die Flugmaschinen kommen nun, soweit es sich um Trag- und Steuerflächen handelt, derartige Fälle kaum in Frage. Hier steht immer die lange Rechteckseite senkrecht zur Bewegungsrichtung, weil eben dann der Druck der Luft bei gleicher Oberfläche erfahrungsgemäß am größten ist. Dagegen ist es ziemlich sicher, daß das längliche Rechteck auch bei schräger Lage (wie dies von der senkrechten Lage bekannt ist) einen etwas größeren Luftwiderstand ergibt als ein gleich großes Quadrat von gleicher Neigung. Sehr erheblich dürfte allerdings der Unterschied nicht sein. Gegebenenfalls kann das oben benutzte Verfahren in ganz gleicher Weise auf lange Rechtecke, mit der langen Seite senkrecht zur Bewegung, Anwendung finden, wenn erst Versuche mit solchen Platten bei Neigungswinkeln unterhalb 30° vorliegen.

¹⁾ Vergl. Lancheater, Aerodynamik, S. 177; auch Eiffel S. 69 Fig. 46.