

В. И. ФИСТУЛЬ · СИЛЬНО ЛЕГИРОВАННЫЕ ПОЛУПРОВОДНИКИ

В. И. ФИСТУЛЬ

СИЛЬНО ЛЕГИРОВАННЫЕ
ПОЛУПРОВОДНИКИ



ФИЗИКА ПОЛУПРОВОДНИКОВ
И ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПРИБОРОВ

В. И. ФИСТУЛЬ

СИЛЬНО ЛЕГИРОВАННЫЕ
ПОЛУПРОВОДНИКИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

АННОТАЦИЯ

В последние годы возможности радиоэлектроники и полупроводниковой техники значительно расширились в связи с использованием сильно легированных (вырожденных) полупроводников. Они являются основой важнейших приборов: туннельных диодов, лазеров, датчиков Холла и многих других. Физические явления в сильно легированных полупроводниках и их применение привлекают внимание широкого круга физиков, химиков и инженеров. Ни в Советском Союзе, ни за рубежом до сих пор не было монографии, обобщающей обширный материал, касающийся сильно легированных полупроводников. Настоящая монография восполняет этот пробел.

Книга предназначена для физиков, химиков и металлургов, исследующих свойства полупроводниковых материалов, а также для инженеров, занимающихся технологией изготовления полупроводниковых приборов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	7
Глава 1. Энергетический спектр электронов в сильно легированных полупроводниках	11
§ 1.1. Предварительные замечания	11
§ 1.2. Энергетический спектр электронов в легированном полупроводнике (малый уровень легирования)	24
§ 1.3. Энергетический спектр электронов в легированном полупроводнике (большой уровень легирования)	31
Глава 2. Статистическая физика носителей заряда в сильно легированных полупроводниках	41
§ 2.1. Предварительные замечания	41
§ 2.2. Статистика Ферми — Дирака для свободных электронов	46
§ 2.3. Статистика электронов и дырок в полупроводниках	53
§ 2.4. Определение уровня Ферми	62
§ 2.5. Интегралы Ферми	70
Глава 3. Кинетические явления в сильно легированных полупроводниках	78
§ 3.1. Предварительные замечания	78
§ 3.2. Механизмы рассеяния	86
§ 3.3. Электропроводность и эффект Холла	102
§ 3.4. Термоэлектрические явления и теплопроводность . .	138
§ 3.5. Термоманнитные явления	168
§ 3.6. Изменение сопротивления полупроводника в магнитном поле	179
§ 3.7. Особенности явлений переноса в полупроводниках типа A ^{III} B ^V	200
Глава 4. Оптические свойства сильно легированных полупроводников	203
§ 4.1. Поглощение света	203
§ 4.2. Отражение света	228
§ 4.3. Эффект Фарадея	234

Глава 5. Поведение легирующих примесей в сильно легированных полупроводниках	239
§ 5.1. Предварительные замечания	239
§ 5.2. Экспериментальные результаты исследования поведения примесей в сильно легированных полупроводниках	246
Глава 6. Получение сильно легированных полупроводников	278
§ 6.1. Устойчивость гладкого фронта кристаллизации	278
§ 6.2. Некоторые особенности распределения примесей в сильно легированных полупроводниках	290
§ 6.3. Структурные особенности сильно легированных полупроводников	303
§ 6.4. Получение сильно легированных монокристаллов	312
Глава 7. Некоторые применения сильно легированных полупроводников	316
§ 7.1. Туннельные диоды	316
§ 7.2. Полупроводниковые источники света	351
§ 7.3. Термозлектрические устройства	357
§ 7.4. Датчики Холла и магнетосопротивления, устойчивые к ядерному излучению	360
§ 7.5. Тензометры	363
Приложения	366
П.1. Численные значения функции распределения Ферми—Дирака $f = (1 + e^{\mu^*})^{-1}$	366
П.2. Таблица интегралов Ферми целочисленных индексов	366
П.3. Таблица интегралов Ферми дробного индекса в интервале $0 \leq \mu^* \leq 20$	368
П.4. Таблица интегралов Ферми дробного индекса в интервале $-4 \leq \mu^* \leq 0$	375
П.5. Кинетические интегралы типа Φ_n	377
П.6. Кинетические интегралы типа φ_n	387
П.7. Таблица значений $\frac{u_H}{u_{H_0}}$	390
П.8. Таблица значений Холл-фактора	391
П.9. Таблица значений отношения интегралов $\frac{\Phi_4(\mu^*, a)}{\Phi_3(\mu^*, a)}$	393
П.10. Таблица значений $\frac{\sqrt{\pi} Q^\perp}{4 Q_{L_0}^\perp}$	395
Литература	397

ПРЕДИСЛОВИЕ

В предлагаемой монографии сделана попытка обобщить экспериментальный и теоретический материал, посвященный исследованию свойств сильно легированных полупроводников. Развитие этих исследований было стимулировано в последние годы появлением большого числа разнообразных полупроводниковых приборов, использующих кристаллы с большим содержанием примесей. Одновременно выяснилось, что увеличение концентрации примесей позволяет глубже изучить уже известные процессы поведения носителей заряда (рассеяние, оптические переходы), и, кроме того, оказалось, что в сильно легированных полупроводниках возникают качественно новые физические явления (разрешенные состояния в запрещенной зоне, проявление индивидуальности примесей в кинетических эффектах, политропия — существование примесей в кристалле в нескольких формах и т. д.).

Изложение теоретических и экспериментальных данных, касающихся сильно легированных кристаллов, не может быть выполнено без сравнения с обычными слабо легированными или чистыми полупроводниками. С этой целью почти в каждой главе книги имеется первый параграф «Предварительные замечания», содержащий краткое освещение уже изложенных в литературе вопросов, относящихся к свойствам чистых беспримесных полупроводников.

Некоторые разделы книги (глава 5) в значительной мере дискуссионны, и развиваемые в этих разделах взгляды с течением времени неизбежно будут меняться, и соответственно книга будет стареть. Однако если пользование книгой ускорит наступление такой старости, то автор будет считать свою задачу выполненной.

Нам казалось, что книга значительно выиграет, если в ней будет глава, посвященная проблеме получения сильно легированных полупроводников. Поэтому мы обратились к известному специалисту по этому вопросу — М. Г. Мильвидскому, который любезно согласился написать главу 6.

Я искренне признателен моим сотрудникам Э. М. Омеляновскому и Д. Г. Андрианову, внесшим существенный вклад в разработку многих вопросов, затронутых в книге.

Я особенно благодарен проф. А. Г. Самойловичу и доктору хим. наук Р. Н. Рубинштейну, которые оказали неоценимую услугу, обсуждая многие аспекты проблемы изучения сильно легированных полупроводников. Я также приношу глубокую благодарность А. Д. Фистуль за большую помощь при работе над рукописью.

Автор будет благодарен читателям за все критические замечания.

В. И. Фистуль

ВВЕДЕНИЕ

История развития науки знает немало примеров, когда к одному и тому же вопросу исследователи возвращаются спустя большие промежутки времени. Каждый такой возврат происходит, естественно, уже на более высокой ступени наших знаний, нашего понимания и нашего умения. В этом проявляется диалектичность прогресса вообще и прогресса в науке — в частности.

Не избежала такого хода развития и физика полупроводников. Характерным примером является применение сильно легированных полупроводников, т. е. полупроводников с большим содержанием примеси.

Действительно, в тридцатые годы нашего столетия, когда по инициативе А. Ф. Иоффе у нас и за рубежом началось «сознательное» освоение полупроводников, и физики, и техники имели дело с «грязными» полупроводниками, содержащими посторонние примеси в количествах $10^{19} - 10^{20} \text{ см}^{-3}$.

Однако довольно быстро была установлена необходимость получения максимально чистых полупроводниковых монокристаллов. С уменьшением содержания примесей вскрывались все новые и новые свойства этих замечательных кристаллов. Техника незамедлительно реализовывала их в практических устройствах.

В свою очередь теория того времени оперировала в основном моделью идеального полупроводника. Поэтому проверка теоретических выводов также требовала чистых и совершенных по структуре монокристаллов. Интересно отметить, что уже в то время теоретики близко подошли к понятию $p-n$ -перехода, но из-за отсутствия чистых монокристаллов $p-n$ -переход был реализован лишь в 1948 году с появлением транзистора. Одновременно с транзистором

появились совершенные полупроводниковые диоды, а затем — тетроды, кристаллические фотодиоды и ряд других приборов. Развивающаяся при этом теория p — n -переходов четко показала связь электрических свойств полупроводниковых приборов со свойствами кристалла, применяемого в них, и, в первую очередь, — с концентрацией и видом примеси по обе стороны p — n -перехода. Стало ясно, что техника полупроводниковых приборов нуждается не просто в кристаллах максимальной чистоты, а требует получения кристаллов с сознательно введенными в них примесями в точно дозированном количестве. Таким образом, послевоенная полупроводниковая электроника уже использует легированные полупроводники.

До 1958 года во всех полупроводниковых приборах использовались слабо легированные полупроводники с содержанием примеси не более 10^{16} см^{-3} . И только с появлением туннельного диода полупроводниковая техника вновь вернулась к кристаллам, содержащим примеси в количествах, достигающих до 10^{20} см^{-3} . Фактическая же область применения таких сильно легированных полупроводников значительно шире. К ней относятся также лазерные и термоэлектрические устройства, полупроводниковые катализаторы, некоторые активные элементы твердых схем. Термин «примесь», по сути дела, не обязательно понимать в буквальном смысле. «Примесью» можно называть любые точечные структурные дефекты, приводящие к нарушению идеальной периодичности внутреннего потенциального поля решетки. Предельный случай веществ рассматриваемого типа составляют неупорядоченные сплавы. Поэтому исследование сильно легированных полупроводников является составной частью более общей проблемы изучения неупорядоченных структур.

Для дальнейшего изложения прежде всего надо определить понятия слабо легированного и сильно легированного полупроводников.

Эти понятия имеют два аспекта — электронный и атомный.

Электронный аспект связан с тем, что по мере увеличения степени легирования растет и концентрация носителей заряда в полупроводнике, если речь идет о донорных и акцепторных примесях.

При малых концентрациях примеси в запрещенной зоне полупроводника, как известно, образуются локальные энергетические состояния. Большая удаленность атомов примеси друг от друга не приводит при этом к каким-либо взаимодействиям между ними.

В то же время малое число носителей заряда в разрешенных зонах приводит к тому, что они подчиняются статистике Больцмана, не учитывающей квантовую неразличимость частиц.

Такой уровень легирования, при котором практически нет никаких взаимодействий между примесными атомами, а газ носителей заряда подчиняется статистике Больцмана, с успехом может быть назван *малым уровнем легирования*, а соответствующие полупроводники — *слабо легированными*.

Можно себе представить, что дальнейшее увеличение степени легирования приведет к сокращению расстояния между примесными атомами и, следовательно, к возникновению взаимодействия между ними, т. е. к перекрытию волновых функций электронов соседних примесных центров. В этом случае локальные энергетические уровни расплываются, образуя примесную зону. Этот процесс сопровождается уменьшением энергии ионизации примесных атомов. Такой уровень легирования можно условно назвать *средним*. Относительно законов распределения носителей заряда по энергиям в примесной зоне и в разрешенных зонах в этом случае а priori ничего сказать нельзя, ибо они зависят от структуры примесной зоны и от относительного числа носителей заряда в разрешенных состояниях.

Наконец, еще большее увеличение концентрации примеси приведет к полному исчезновению энергии ионизации, т. е. к слиянию примесной зоны с зоной проводимости (в случае донорной примеси) или к слиянию с валентной зоной (в случае акцепторной примеси). Таким образом, в кристалле образуется единая разрешенная зона. Этот случай может быть отнесен к *большому уровню легирования*, а сам кристалл мы будем называть *сильно легированным*.

Возникшая в таком кристалле большая плотность свободных носителей заряда влечет уже необходимость пользоваться статистикой Ферми — Дирака. А так как газ частиц, подчиняющихся этой статистике, называется вырож-

денным, то часто термин сильно легированный полупроводник отождествляют с названием вырожденный полупроводник. Однако это не совсем правильно, ибо, например, кристалл может содержать такое количество примесей, что при комнатной температуре электронный газ вырожден, а при высокой температуре вырождение снимается из-за появления собственной проводимости в полупроводнике.

Атомный аспект. Происходящее с ростом легирования увеличение взаимодействия между примесными атомами не исчерпывается образованием примесной зоны. Такое взаимодействие может быть и более «химическим», т. е. оно может приводить к образованию ассоциаций из атомов примеси или из атомов примеси с атомами основы кристалла, которые могут при достаточно большой концентрации выпасть в кристалле в виде включений второй фазы. Если же их концентрация недостаточна для такого выпадения, то они, находясь еще в однофазном растворе, могут существенно влиять на свойства кристалла посредством взаимодействия со структурными дефектами или, возвращаясь опять к электронному аспекту, — посредством образования электрически неактивных центров.

Наконец, атомы легирующей примеси при сильном легировании оказываются полностью ионизованными, а большое число ионов, в свою очередь, сказывается на поведении электронов и дырок хотя бы, например, посредством их рассеяния.

Таким образом, оба аспекта оказываются тесно связанными и часто выступающими одновременно. В то же время в литературе атомному аспекту уделяется, как правило, меньше внимания по сравнению с электронным.

В своих работах автор пытался проводить исследования сильно легированных полупроводников с обеих точек зрения, что нашло свое отражение и в настоящей монографии.

ГЛАВА I

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ЭЛЕКТРОНОВ В СИЛЬНО ЛЕГИРОВАННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ

§ 1.1 Предварительные замечания

Уравнение Шредингера. В отдельном изолированном атоме, например в атоме водорода, имеет место лишь взаимодействие между валентным электроном и ядром. Поэтому уравнение Шредингера, выражающее по существу закон сохранения энергии, имеет простой вид:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + V_0(r)\psi(r) = E\psi(r). \quad (1.1.1)$$

Здесь в левой части уравнения первое слагаемое представляет собой кинетическую энергию взаимодействия электрона с ядром, а второе — потенциальную энергию. Их сумма равна полной энергии системы $E\psi(r)$. Решением уравнения (1.1.1) являются плоские волны типа

$$\psi(r) = e^{\pm ikr}, \quad (1.1.2)$$

где k — волновой вектор электрона, равный $k = \frac{p}{\hbar}$, а p — импульс электрона.

Подставляя (1.1.2) в (1.1.1), легко получить значение кинетической энергии электрона $E_{кин} = E - V_0$, т. е. его энергетический спектр.

Кристалл полупроводника представляет систему, состоящую из многих электронов и атомных ядер. Наиболее полные сведения о свойствах такой системы, в том числе и об ее энергетическом спектре, можно получить также, решая уравнение Шредингера, соответствующее стационарным состояниям этой системы. Однако в этом случае имеет место большое число взаимодействий: электронов друг с другом,

ядер друг с другом и электронов с ядрами. Поэтому уравнение Шредингера будет записано в виде:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} - \frac{\hbar^2}{2M} \sum_j \frac{\partial^2}{\partial R_j^2} + \sum_{j < n} \frac{Z_j Z_n e^2}{R_{jn}} + \sum_{i < k} \frac{e^2}{r_{ik}} - \sum_{ij} \frac{Z_j e^2}{r_{ij}} \right\} \times$$

кинетическая
энергия
электронов
кинетическая
энергия
ядер
потенциаль-
ная энергия
взаимодейст-
вия ядер
потенци-
альная
энергия
взаимодейст-
вия электро-
нов
потенциаль-
ная энергия
взаимодейст-
вия электро-
нов с ядрами

$$\times \psi(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}_j) = W \psi(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}_j), \quad (1.1.3)$$

где m , M — соответственно массы электронов и ядер; \mathbf{r}_i , \mathbf{R}_j — радиусы-векторы i -го электрона и j -го ядра; Z_j , Z_n — атомные номера ядер; R_{jn} , r_{ik} , r_{ij} — расстояния между соответствующими ядрами и электронами. Точное решение уравнения (1.1.3) невозможно из-за того, что волновая функция ψ зависит от огромного числа ($\sim 10^{23}$) независимых переменных. На помощь приходят два допущения: 1) адиабатическое, которое полагает все ядра неподвижными по сравнению с электронами из-за того, что $M \gg m$. Тогда из (1.1.3) можно исключить второе и третье слагаемые. 2) Одноэлектронное приближение, по которому совокупность всех электронов кроме какого-то одного заменяется эффективным зарядом. В результате потенциальная энергия всех электронов (четвертое и пятое слагаемые в (1.1.3)) заменяется некоторым внешним самосогласованным полем $V(\mathbf{r})$, наилучшим образом описывающим усредненное взаимодействие всех электронов с данным.

Таким образом, (1.1.3) сводится к уравнению, совпадающему по форме с (1.1.1). Различие заключается в том, что вместо $V_0(\mathbf{r})$ будет стоять потенциальная функция $V(\mathbf{r})$. Задача теории — наилучшим образом предположить ее вид.

Допустим, что мы имеем одномерный кристалл, который получен путем конденсации (сближения) отдельных атомов (рис. 1.1, а), располагающихся на определенных расстояниях друг от друга, равных параметру решетки a . Простое суммирование значений потенциальных функций отдельных атомов приводит к функции $V(\mathbf{r})$, отличительным свойством которой является периодичность (рис. 1.1, б), т. е.

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r} + a).$$

Решение уравнения Шредингера (1.1.1) в этом случае приводит вместо (1.1.2) к

$$\psi(\mathbf{r}) = U_k(\mathbf{r}) e^{\pm i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (1.1.4)$$

т. е. решением являются плоские волны, модулированные функцией $U_k(\mathbf{r})$, которая также периодична с периодом,

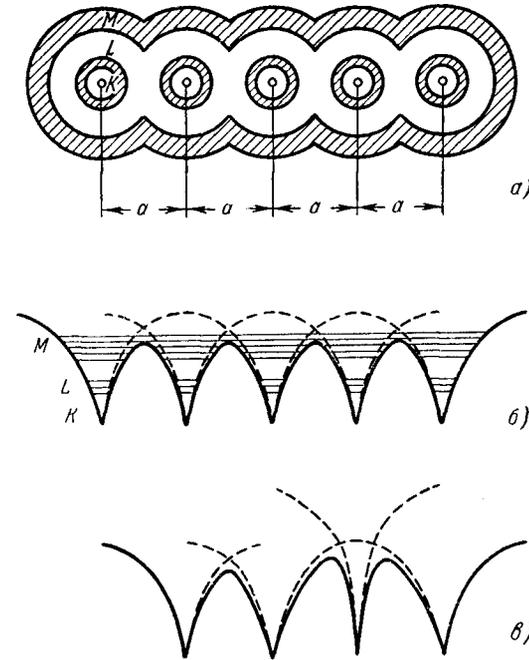


Рис. 1.1. Графическое изображение потенциальной энергии электрона в кристалле.

a — расположение атомов; б — вид потенциальной энергии; в — локальное нарушение периодического поля в кристалле (пунктирные кривые — потенциальная энергия изолированных атомов).

равным периоду решетки:

$$U_k(\mathbf{r}) = U_k(\mathbf{r} + a).$$

Это заключение часто именуют теоремой Блоха [1], а функции (1.1.4) называют блоховскими.

Зоны Бриллюэна. Можно показать, что состояние электрона с волновыми векторами k и $k' = k + 2\pi/a$ физически неразличимы. Поэтому, чтобы исчерпать все физически различные состояния электрона, достаточно рассматривать изменение волнового вектора k только в области

$$-\frac{\pi}{a_\alpha} \leq k_\alpha \leq +\frac{\pi}{a_\alpha},$$

где через a сокращенно обозначены индексы x, y, z .

Эта область в k -пространстве, содержащая все k , которым соответствуют различные состояния электрона, называется первой зоной Бриллюэна. При изменении волнового вектора в области от $-2\pi/a$ до $-\pi/a$ и от $+\pi/a$ до $+2\pi/a$ получим вторую зону Бриллюэна и т. д.

В литературе часто вектор $1/a$ называют вектором обратной решетки. Для кубической решетки первая зона Бриллюэна также, оказывается, имеет кубическую форму.

Энергетические зоны в кристаллах. Для нахождения энергетического спектра электронов, т. е. собственных значений E , нужно решить уравнение (1.1.1) при конкретном виде функции $V(r)$.

Предложены были различные способы решения. Метод слабо связанных электронов [2], в котором периодический потенциал рассматривается как малое возмущение свободного движения электрона. Метод сильно связанных электронов [3], в котором в качестве исходных волновых функций используются волновые функции электронов отдельного атома, а влияние остальных учитывается в виде возмущения. Метод ортогонализированных плоских волн (ОПВ) [4], заключающийся в построении такой функции $V(r)$, которая бы отражала почти идеальную плоскую волну в промежутке между ионами в решетке и в то же время учитывала бы резкий спад $V(r)$ вблизи иона. Таким образом, в методе ОПВ выбирается такая функция периодического потенциала, которая обладает свойствами, промежуточными между свойствами функций, используемых в методах слабо и сильно связанных электронов.

Исследования всеми методами показывают, что энергетический спектр электронов имеет сложный вид и представляет чередующиеся участки разрешенных и запрещенных значений энергии — зон. Зонная картина зависит от выбора кристаллографических направлений в кристалле.

Наилучшие результаты, подтверждаемые опытом, дает метод ОПВ. Так, Германом были рассчитаны энергетические

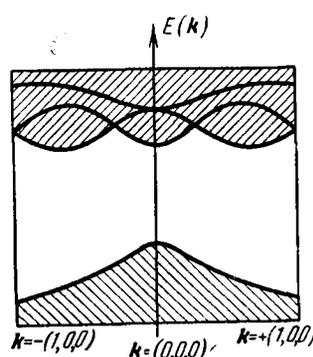


Рис. 1.2. Структура энергетических зон в германии вдоль оси [100] в зоне Бриллюэна.

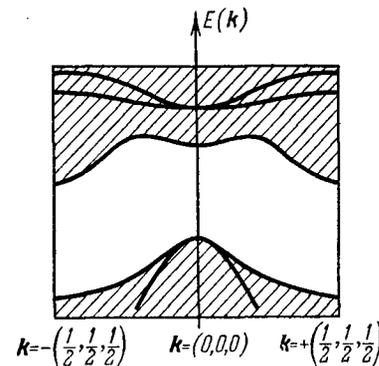


Рис. 1.3. Структура энергетических зон в германии вдоль оси [111] в зоне Бриллюэна.

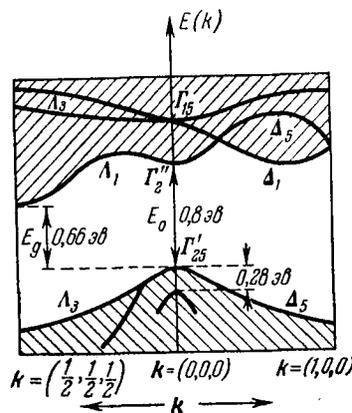


Рис. 1.4. Структура энергетических зон в германии, рассчитанная методом ОПВ.

Значения энергетических зазоров взяты из эксперимента.

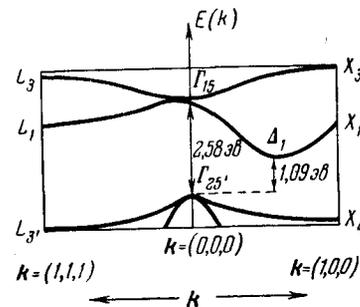


Рис. 1.5. Структура энергетических зон в кремнии, рассчитанная методом ОПВ.

Значения энергетических зазоров взяты из эксперимента.

зоны германия и кремния [5—7]. Рассмотрим для примера решение для германия (рис. 1.2 и 1.3).

Так как кривые $E(k)$ симметричны для областей $0 \leq k \leq +\pi/a$ и $0 \geq k \geq -\pi/a$, то принято изображать в левом квадранте ход $E(k)$ только для оси [111], а в правом

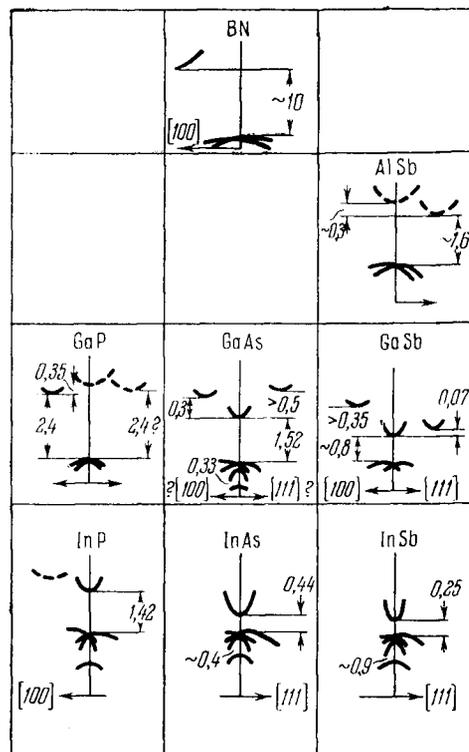


Рис. 1.6. Структура энергетических зон соединений $A^{III}B^V$.

Значения энергетических зазоров взяты из экспериментальных работ (см. [17]).

квадранте — только для оси [100] в зоне Бриллюэна. И вместо двух рис. 1.2 и 1.3 мы получаем один (рис. 1.4). Аналогичные изображения энергетического спектра для кремния и полупроводников $A^{III}B^V$ приведены на рис. 1.5—1.6 *).

*) На рис. 1.4 и 1.5 буквами Γ , Λ , Δ , X , L обозначены точки, лежащие на осях и плоскостях симметрии в зоне Бриллюэна для алмазоподобной решетки.

Числовые значения энергетических зазоров, приведенные на этих рисунках, представляют величины, найденные экспериментально.

Энергетический спектр электронов в Ge и Si. Из рис. 1.4 и 1.5 видно, что абсолютный минимум зоны проводимости в Ge и Si не лежит в точке $k = 0$. У кремния имеется шесть симметрично расположенных минимумов энергии в точках k , лежащих на осях [100]. У германия — восемь эквивалентных минимумов, расположенных вдоль направлений [111] на границе зоны Бриллюэна. Поскольку они лежат на границе зоны Бриллюэна, то, следовательно, они принадлежат одновременно двум зонам Бриллюэна, так что можно считать, что в одной зоне содержится четыре минимума.

Зависимости энергии от импульса, а также форма изоэнергетических поверхностей вблизи экстремумов энергии различны в зоне проводимости и в валентной зоне. При рассмотрении конкретного вида этой зависимости удобно пользоваться понятием *эффективной массы электрона* в твердом теле. Можно показать, что уравнение движения электрона в строго периодическом поле идеальной решетки выглядит аналогично уравнению движения свободного электрона, если вместо его массы m ввести тензорную величину, называемую *тензором обратной эффективной массы*. Она определяется как

$$\frac{1}{m_{\alpha,\beta}^*} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E(k)}{\partial k_\alpha \partial k_\beta}, \quad (1.1.5)$$

где α, β — направления главных осей тензора.

При разложении $E(k)$ в ряд вблизи экстремумов энергии, в силу четности функции $E(k)$, получается квадратичный закон дисперсии

$$E(k) = E(k_0) \pm \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 E(k)}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} \Big|_{k=k_0} (k_\alpha - k_{0\alpha})(k_\beta - k_{0\beta}). \quad (1.1.6)$$

Знак «+» соответствует разложению вблизи минимума, а знак «-» вблизи максимума энергии.

В этом случае тензор эффективной массы

$$\frac{1}{m_{\alpha,\beta}^*} = \frac{\partial^2 E(k)}{\hbar^2 \partial k_\alpha \partial k_\beta} \Big|_{E=0} \quad (1.1.7)$$

не зависит от k , т. е. при любых значениях k энергия $E(k)$ будет определяться одними и теми же параметрами $m_{\alpha, \beta}^*$.

В общем же случае произвольной зависимости $E(k)$ параметры $m_{\alpha, \beta}^*$ будут различаться.

Приводя тензор $\frac{1}{m_{\alpha, \beta}^*}$ к главным осям, можно получить из (1.1.6)

$$E(k) - E(k_0) = \pm \frac{\hbar^2}{2} \sum_{\alpha} \frac{(k_{\alpha} - k_{0\alpha})^2}{m_{\alpha}^*}. \quad (1.1.8)$$

Таким образом, вблизи экстремумов энергии в отсутствие вырождения электронных состояний изоэнергетические поверхности $E(k) = \text{const}$ имеют вид эллипсоидов. В частном случае, когда существует полная изотропия эффективной массы и она превращается в скаляр, (1.1.8) переходит в

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}, \quad (1.1.9)$$

т. е. эллипсоид превращается в сферу.

В германии и кремнии изоэнергетические поверхности в зоне проводимости являются эллипсоидами вращения с осями симметрии, направленными соответственно вдоль осей [111] и [100]

$$E(k) = \frac{\hbar^2}{2} \left[\frac{k_x^2 + k_y^2}{m_{\perp}^*} + \frac{k_z^2}{m_{\parallel}^*} \right], \quad (1.1.10)$$

где m_{\parallel}^* — компонента тензора эффективной массы вдоль оси симметрии; m_{\perp}^* — компонента тензора эффективной массы вдоль перпендикулярного направления.

Максимум энергии в валентных зонах германия и кремния лежит в центре зоны Бриллюэна в точке $k = 0$. Так как в этой точке имеется двукратное вырождение, то зависимость $E(k)$ имеет более сложный вид, чем (1.1.8):

$$E_{1,2}(k) = -\frac{\hbar^2}{2m_0} [Ak^2 \pm \sqrt{B^2 k^4 + C^2 (k_x^2 k_y^2 + k_x^2 k_z^2 + k_y^2 k_z^2)}], \quad (1.1.11)$$

где A, B, C — постоянные величины. Это выражение, взятое с положительным знаком перед квадратным корнем, описывает спектр тяжелых дырок в первой валентной

зоне, а выражение, взятое с отрицательным знаком, — спектр легких дырок во второй валентной зоне.

Изоэнергетические поверхности в (1.1.11) уже не являются эллипсоидами. Сечение таких поверхностей плоскостью (100) имеет, например, для германия вид, изображенный на рис. 1.7. Записав (1.1.11) в сферических координатах и усреднив по углам, можно получить:

$$E_{1,2}(k) \approx -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} \left[A \pm \sqrt{B^2 + \frac{C^2}{5}} \right]$$

или

$$\left. \begin{aligned} E_1(k) &\approx -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_1^*}, \\ E_2(k) &\approx -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_2^*}, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.12)$$

где $m_{1,2}^*$ — скалярные эффективные массы легких и тяжелых дырок, определяемые как

$$m_{1,2}^* = \frac{m_0}{A \pm \sqrt{B^2 + \frac{C^2}{5}}}.$$

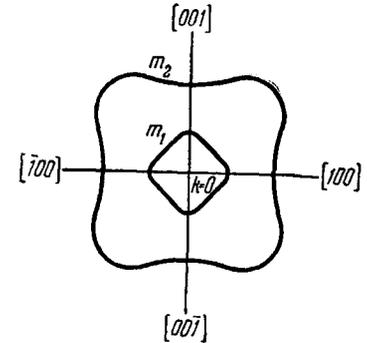


Рис. 1.7. Поверхности постоянной энергии для двух верхних валентных зон германия в сечении по плоскости (100) в k -пространстве.

m_1 — зона легких дырок; m_2 — зона тяжелых дырок.

В третьей валентной зоне, отщепленной спин-орбитальным взаимодействием, закон дисперсии квадратичен и изотропен:

$$E_3(k) = -\Delta E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_3^*},$$

где ΔE — энергетический зазор между третьей валентной зоной и зонами 1, 2 в точке $k = 0$.

Приведем здесь еще выражение вида

$$E = E_c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} [1 - \alpha k^2], \quad (1.1.13)$$

описывающее энергию вблизи минимума так называемой нестандартной зоны. На дне такой зоны эффективная масса очень мала, но поскольку энергия растет медленнее, чем квадрат волнового вектора, то состояниям с более высокой энергией будет соответствовать большая эффективная масса.

Таким образом, (1.1.13) представляет случай изотропного, но не параболического закона дисперсии. Величина α играет роль параметра, определяющего степень отклонения зоны проводимости от параболичности.

Экспериментальные данные о структуре зон. Основными опытами, подтвердившими правильность теоретических расчетов зонной структуры германия и кремния, были опыты по циклотронному резонансу [8, 9], из которых удалось определить значения эффективных масс электронов и дырок, а также параметры A , B , C . Данные этих опытов сведены в таблицу 1.1.

Таблица 1.1

	m_{\parallel}^*/m_0	m_{\perp}^*/m_0	$K_m = \frac{m_{\parallel}^*}{m_{\perp}^*}$	m_1^*/m_0	m_2^*/m_0
Германий . . .	1,58	0,08	19,3	0,33	0,042
Кремний . . .	0,98	0,19	5,15	0,49	0,16
	m_1^*/m_2^*	m_3^*	A	B	C
Германий . . .	7,9	0,077	$13,1 \pm 0,4$	$8,3 \pm 0,6$	$12,5 \pm 0,5$
Кремний . . .	3,1	0,245	$4,0 \pm 0,1$	$1,1 \pm 0,4$	$4,1 \pm 0,4$

Существование в валентной зоне германия двух сортов дырок было обнаружено в работе [10] при исследовании эффекта Холла.

Значение коэффициента анизотропии K_m было определено также при исследовании изменения удельного сопротивления в магнитном поле [11, 12]. Путем сравнения экспериментальных и теоретических данных по поглощению света в инфракрасной области были получены значения спин-орбитального отщепления ΔE третьей валентной зоны в точке $k = 0$. Эти значения указаны на рис. 1.4, 1.5. Для определения термической (т. е. минимальной) и оптической ($k = \text{const}$) ширины запрещенной зоны был проделан ряд экспериментов, из которых наиболее точные значения измеряемых величин получил Макфарлан с сотрудниками [13, 14]. Эти величины также приведены на рис. 1.4, 1.5.

Энергетическая структура полупроводников $A^{III}B^V$. Зонная структура полупроводниковых соединений типа $A^{III}B^V$ изучена менее полно по сравнению с германием и кремнием. Но многие свойства полупроводников зависят только от формы зоны проводимости в области минимума и валентной зоны в области ее максимума, так что даже получение этих сведений имеет большое значение.

Теоретические исследования структуры зон в $A^{III}B^V$, как правило, проводятся с помощью метода возмущений Германа [15]. Этот метод позволяет получить основные характеристики зонной структуры кристаллов $A^{III}B^V$, исходя из зонной структуры алмазоподобных полупроводников, занимающих промежуточное положение между компонентами соединения $A^{III}B^V$ в одном ряду периодической системы. Так, структура зон GaAs рассчитывается методом возмущений из зонной структуры Ge. Для соединения AlP исходным будет кремний. Если же соединение $A^{III}B^V$ содержит компоненты из разных рядов периодической системы, например AlSb, то для расчета его зонной схемы следует обратиться к воображаемому соединению SiSn.

В методе возмущений показывается, что внутренний потенциал $V^{III-V}(r)$ складывается из внутреннего потенциала, соответствующего алмазоподобного полупроводника $V^{IV}(r)$ и некой возмущающей добавки $\Delta V^{III-V}(r)$:

$$V^{III-V}(r) = V^{IV}(r) + \Delta V^{III-V}(r).$$

Рассматривая симметрию потенциала возмущения и привлекая экспериментальные данные, Герман получил [16] основные параметры зонной структуры $A^{III}B^V$. Таким образом, метод Германа является полумэмпирическим.

Накопившийся теоретический и экспериментальный материал позволяет сегодня представить вероятные зонные структуры кубических соединений $A^{III}B^V$ в виде, показанном на рис. 1.6. Значения энергетических зазоров, приведенные на этом рисунке, относятся к 0°K . Пересчет E_g для температуры 300°K легко сделать с помощью множителя dE_g/dT , значения которого приведены в таблице 1.2.

Пунктиром на рис. 1.6 показаны зоны, о существовании или о положении которых имеется очень мало сведений.

Сопоставление зонных структур, показанных на рис. 1.6, с зонной структурой германия и кремния (рис. 1.4, 1.5)

Таблица 1.2

Температурный коэффициент ширины запрещенной зоны соединений $A^{III}B^V$ [17] (в области 100–300 °K)

Соединение	InSb	InAs	InP	GaSb	GaAs	GaP	AlSb
$-\frac{dE_g}{dT} \cdot 10^4$ эВ	2,9	3,5	4,5	4,3	4,3	5,4	4,1

убеждает в их однотипности, хотя в $A^{III}B^V$ и существует ряд отличий. Валентная зона в $A^{III}B^V$, так же как в германии и кремнии, вырождена в центре зоны Бриллюэна и состоит из зон тяжелых и легких дырок и третьей зоны, отщепленной из-за спин-орбитального взаимодействия. Однако абсолютные максимумы валентной зоны расположены не в центре зоны Бриллюэна, а на некотором малом расстоянии от него. В соединениях $A^{III}B^V$ с относительно большим средним атомным номером (GaAs, GaSb, InAs, InP, InSb) абсолютный минимум зоны проводимости расположен в центре зоны Бриллюэна в точке $k(0, 0, 0)$. В $A^{III}B^V$ с малым средним атомным номером (AlSb, GaP) абсолютные минимумы зоны проводимости располагаются в направлениях $[111]$ и $[100]$ в зоне Бриллюэна.

Величины эффективных масс носителей заряда на дне зоны проводимости или у потолка валентной зоны по данным [17, 18] приведены в таблице 1.3.

Таблица 1.3

Значения эффективных масс носителей заряда в соединениях $A^{III}B^V$ вблизи экстремумов разрешенных зон

Соединение	InSb	InAs	InP	GaSb	GaAs	GaP	AlSb
m_n^*/m_0	0,014	0,02	0,073	0,047	0,078	0,12	0,09
m_{p1}^*/m_0	0,67	0,41		~0,5	~0,5		0,4
m_{p2}^*/m_0	0,18	0,025			0,01		

Следует отметить, что в некоторых $A^{III}B^V$, а именно в тех, что имеют большой атомный номер, из-за узости запрещенной зоны, а следовательно, из-за взаимодействия между

валентной зоной и зоной проводимости наблюдается отклонение формы зоны проводимости от параболической.

Плотность состояний в разрешенных зонах [19], т. е. число разрешенных состояний, приходящееся на единичный интервал энергии, является существенной характеристикой вещества. С ее помощью удается найти концентрацию носителей заряда в разрешенных зонах, их среднюю энергию и т. д.

Число разрешенных состояний в бесконечно малом интервале энергий ($E, E + \Delta E$) определяется выражением

$$\rho(E) dE = \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_n \int_{E \leq E(k)} \int_{E(k) \leq E + \Delta E} dk_x dk_y dk_z. \quad (1.1.14)$$

Суммирование ведется по всем энергетическим зонам. Элемент объема интегрирования в k -пространстве можно представить в виде:

$$dk_x dk_y dk_z = d\sigma dk_{\perp},$$

где $d\sigma$ — элемент изоэнергетической поверхности, dk_{\perp} — приращение волнового вектора k по нормали к этой поверхности. Так как $|\text{grad}_k E| = \frac{\partial E}{\partial k_{\perp}}$, то

$$\rho(E) = \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_n \int \frac{d\sigma}{|\text{grad}_k E|}. \quad (1.1.15)$$

Рассмотрим случаи различных зависимостей $E(k)$.

1. Простой параболический и изотропный закон дисперсии, определенный в (1.1.9).

В этом случае изоэнергетическая поверхность — сфера с площадью поверхности $\sigma = 4\pi k^2$. Тогда плотность состояний в 1 см^3 ($V = 1 \text{ см}^3$) из (1.1.15) будет:

$$\rho(E) = \frac{1}{\sqrt{2} \pi^2} \frac{m^{*3/2} \sqrt{E}}{\hbar^3}. \quad (1.1.16)$$

2. Закон дисперсии параболический, но анизотропный (1.1.10); изоэнергетические поверхности являются эллипсоидами вращения. Этот случай соответствует структуре зон проводимости германия и кремния.

Если в этом случае перейти к новым переменным

$$k'_x = \frac{k_x}{\sqrt{m_{\perp}^*}}; \quad k'_y = \frac{k_y}{\sqrt{m_{\perp}^*}}; \quad k'_z = \frac{k_z}{\sqrt{m_{\parallel}^*}},$$

то (1.1.10) преобразуется к виду, аналогичному (1.1.9):

$$E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 (k')^2}{2}.$$

При этом, так как $dk_x dk_y dk_z = (m_{\perp}^2 m_{\parallel})^{1/2} dk'_x dk'_y dk'_z$, то

$$\rho(E) = \frac{\nu}{\sqrt{2} \pi^2} \frac{(m_{\perp}^2 m_{\parallel})^{1/2}}{\hbar^3} \sqrt{E}, \quad (1.1.17)$$

где ν — число эквивалентных минимумов (4 — в германии и 6 — в кремнии).

Выражение (1.1.17) можно также записать в виде (1.1.16), если ввести понятие об *эффективной массе плотности состояний* m_N^* , которая, по определению, равна

$$m_N^* = \nu^{2/3} (m_{\perp}^2 m_{\parallel})^{1/3}.$$

(Заметим, что иногда под m_N^* понимают просто величину $(m_{\perp}^2 m_{\parallel})^{1/3}$ без множителя $\nu^{2/3}$).

З. Закон дисперсии изотропен, но не параболический (1.1.13). Этот случай соответствует зоне проводимости InSb. Плотность состояний будет приближенно определяться выражением, вывод которого можно найти в [25]:

$$\rho(E) \approx 4\pi \left(\frac{2m^*}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{E} \left(1 + \frac{5\alpha m^* E}{\hbar^2}\right). \quad (1.1.18)$$

Условием применимости этого выражения является неравенство

$$E \ll \frac{\hbar^2}{\alpha m^*}.$$

§ 1.2. Энергетический спектр электронов в легированном полупроводнике (малый уровень легирования)

Примесные уровни. Энергетические уровни электронов в запрещенной зоне полностью отсутствуют в идеальном неограниченном кристалле. Однако в реальных кристаллах всегда имеются какие-либо нарушения идеального периодического поля, изображенные на рис. 1.1, в. Причины

появления локальных нарушений могут быть самыми различными. Простейшим типом такого нарушения является введение (легирование) в решетку кристалла каких-либо чужеродных атомов, например, атомов элементов III и V групп периодической системы в германий и кремний и атомов II и VI групп в полупроводники типа A^{III}B^V. Как известно, атомы этих веществ образуют растворы замещения с соответствующими полупроводниками.

Рассмотрим в качестве примера раствор замещения примеси As в Ge. В химическом отношении элемент As пентавалентен, т. е. содержит во внешней оболочке пять электронов. За исключением лишнего, пятого электрона, ион As очень сходен с ионом Ge, так что в первом приближении можно считать, что структура энергетических уровней всего кристалла практически сохранится неизменной, если, конечно, замена атомов Ge атомами мышьяка будет произведена всего в нескольких местах. «Лишний» — пятый электрон атома As, не участвующий в четырех валентных связях решетки, будет находиться под действием периодического поля решетки и кулоновского поля иона As⁺. Потенциал этого кулоновского поля будет ослаблен по сравнению, например, с обычным потенциалом иона в вакууме из-за влияния всего кристалла в целом. В грубом приближении примесный ион можно рассматривать погруженным в среду с диэлектрической постоянной κ . Тогда потенциал иона будет

$$U(r) = \frac{e^2}{\kappa r}. \quad (1.2.1)$$

Так как кулоновский потенциал меняется достаточно медленно на расстояниях порядка параметра решетки, то задачу об энергетическом спектре электрона в таком поле можно решать в приближении эффективной массы, т. е. решать уравнение Шредингера (1.1.1), в котором потенциальная функция $V_0(\mathbf{r})$ заменена на (1.2.1). Если к этому добавить условие сферичности изоэнергетических поверхностей, то решениями будут волновые функции и значения энергии, аналогичные волновым функциям и значениям энергии обычного атома водорода с той лишь разницей, что масса и заряд электрона в нем должны быть заменены на соответствующие эффективные величины m^* и $e^* = \frac{e}{\sqrt{\kappa}}$.

Если электрон находится в связанном состоянии вблизи примесного иона, то его энергия будет [20]:

$$E_d = \frac{m^* e^{*4}}{2\hbar^2 n},$$

где n — главное квантовое число.

Или, учитывая, что первый потенциал ионизации атома водорода, находящегося в изолированном состоянии,

$$U_i = \frac{m_0 e^4}{2\hbar^2 n^2} = 13,5 \text{ эв},$$

получим:

$$E_d = -13,5 \left(\frac{m^*}{m_0} \right) \frac{1}{n^2}. \quad (1.2.2)$$

Так как за начало отсчета энергии электрона обычно принимают дно зоны проводимости, то уровень с отрицательной энергией E_d расположен под дном зоны проводимости в запрещенной зоне.

Если бы эффективная масса была равна массе свободного электрона, то из (1.2.2) следовало бы, что энергия, необходимая для ионизации атома примеси As, должна быть равна 0,0508 эв для германия и 0,0908 эв для кремния.

Аналогичный результат получается и в случае акцепторных примесей, типичным примером которых являются атомы элементов III группы в германии и кремнии. Они образуют локальные энергетические уровни, расположенные в запрещенной зоне над потолком валентной зоны. Для ионизации таких акцепторов требуется энергия E_a , которая по (1.2.2) должна быть равна E_d .

Более точная теория, позволяющая количественно рассчитывать энергии ионизации примесей E_d и E_a , была разработана в работах, учитывающих несферичность изоэнергетических поверхностей. Киттель и Митчелл [21], Кон и Латтинджер [22—25] решили эту задачу для эллипсоидальных поверхностей германия и кремния. Им удалось показать, что имеется простая функция F вида

$$F = (\pi a^2 b)^{-1/2} \exp \left[- \left(\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \right)^{1/2} \right], \quad (1.2.3)$$

которая при соответствующем выборе параметров a и b дает очень хорошее приближение при всех значениях $K_m = \frac{m_{\parallel}}{m_{\perp}}$

в интервале $0 \leq K_m^{-1} \leq 1$. С помощью этой функции в [25] получена зависимость, изображенная на рис. 1.8.

Для кремния при $K_m^{-1} = 0,19$ находим $E_d = -0,029$ эв, а для германия при $K_m^{-1} = 0,05$ получаем $E_d = -0,008$ эв. Естественно, что в случае GaAs и InSb, для которых опытами по циклотронному резонансу не обнаружена анизотропия эффективных масс [17], величина E_d будет определяться простым выражением (1.2.2).

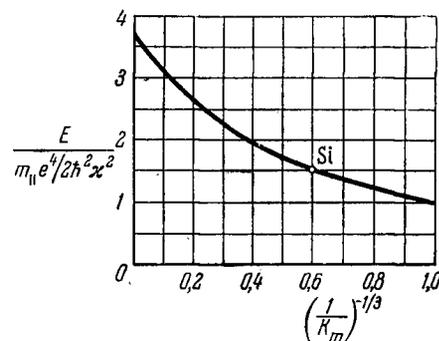


Рис. 1.8. Зависимость энергии ионизации примеси от фактора анизотропии эффективной массы электрона.

Аналогичная задача была решена в работе [26] и для акцепторных уровней в германии, причем значение E_a оказалось равным $+0,0089$ эв, если отсчет энергии вести от потолка валентной зоны.

Удовлетворительная теория акцепторных уровней в кремнии отсутствует, так как в этом случае энергия ионизации акцептора по порядку величины равна значению спин-орбитального расщепления.

Возбужденные состояния. Наряду с основными примесными уровнями в запрещенной зоне полупроводника могут существовать возбужденные состояния. Уже из общих соображений понятно, что они будут располагаться выше основного донорного уровня в полупроводнике n -типа и ниже акцепторного уровня в кристалле p -типа.

Теоретический расчет возбужденных состояний в кремнии, выполненный в [25], привел к схеме донорных уровней, приведенных в таблице 1.4.

Таблица 1.4

Значения донорных уровней в Si
(за нуль отсчета принято $E = E_c$)

Состояния	$E \times 10^2$ эв		
	P	As	Sb
Основное	-4,4	-4,9	-3,9
	-3,2	-3,3	-3,1
Возбужденные	-1,13	-1,13	-1,13
	-1,06	-1,11	-0,94
	-0,93	-0,95	-0,90
	-0,59	-0,59	-0,59
	-0,57	-0,57	-0,57

Возбужденные состояния в Si действительно были обнаружены экспериментально [27] при исследовании длинноволнового инфракрасного поглощения при температуре жидкого гелия. Положение возбужденных уровней очень хорошо согласуется с теорией.

В германии энергии ионизации основных донорных состояний значительно меньше, чем в кремнии. Поэтому возбужденные состояния в германии будут находиться под дном зоны проводимости на расстояниях $\sim 10^{-4}$ эв. Для их экспериментального обнаружения требуется привлечь оптику миллиметрового диапазона, что представляет известные трудности. С другой стороны, чрезвычайная малость энергетических зазоров между зоной проводимости германия и возбужденными состояниями примесей позволяет практически совсем их не учитывать. В кремнии же о них следует помнить при интерпретации некоторых физических явлений.

Глубокие уровни. И доноры, и акцепторы с малой энергией ионизации образуют в кристалле систему из так называемых «мелких» уровней. В отличие от них, в реальных кристаллах существуют и «глубокие» уровни. Их происхождение связано с теми случаями, когда потенциал примеси меняется так быстро, что его можно считать отличным от нуля только в небольшой пространственной области, например в пределах одной ячейки кристалла. Потенциал примесных ионов, таким образом, имеет вид локализованного возмущения и уже не может рассматриваться как кулонов-

ский. В этом случае уже нельзя пользоваться методом эффективной массы и задача становится не водородоподобной.

Теория глубоких примесных уровней в настоящее время еще не разработана.

Полная сводка известных примесных уровней в Ge, Si и некоторых $A^{III}B^V$, составленная по [18], приведена в виде таблицы 1.5. Из этой таблицы видно, что экспериментальные значения энергий ионизации находятся в согласии с теоретическими, хотя и несколько ниже их.

Проводимость по примесям. При малом уровне легирования и низких температурах, когда свободные носители в разрешенных зонах отсутствуют, все же наблюдается примесная проводимость. Это явление связано с образованием примесной зоны. Для того чтобы понять это явление, обратимся к рис. 1.9. На этом рисунке изображена энергетическая диаграмма полупроводника

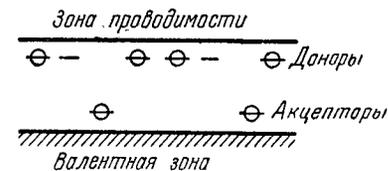


Рис. 1.9. Энергетическая диаграмма полупроводника с примесями.

n-типа, содержащего некоторое количество акцептора. Эти акцепторы способны захватить электроны не из валентной зоны, а с некоторой части доноров. В результате оказывается возможным перемещение электронов с занятого донора на другой незанятый донорный центр (рис. 1.9).

Впервые такую примесную проводимость наблюдали Буш и Лабхарт [28] в карбиде кремния. Затем она была обнаружена в большом числе полупроводников *n*- и *p*-типа. Соответствующие ссылки и подробное теоретическое рассмотрение этого явления приведены в [29].

Для нас важно, что проводимость по примесям будет происходить только, если в полупроводнике имеется частичная компенсация основных примесей неосновными.

Так как проводимость по примесям происходит туннельным эффектом без затраты какой-либо энергии активации, то можно себе представить (хотя это и неверно), что на месте локальных примесных состояний есть зона, в которой электроны движутся, обладая при этом другой эффективной массой по сравнению с электронами в зоне проводимости.

Таблица 1.5

Значения энергий ионизации примесей в Ge, Si и GaAs
(д — донор, а — акцептор, «—» означает отсчет от E_C ;
«+» означает отсчет от E_V)

Группа	Примесь	Энергия ионизации, эв				
		Ge	Si	GaAs		
I	Li	д -0,0093	д -0,033	а +0,063		
		а -0,045	д +0,24			
		а +0,32	а +0,49			
	Ag	а +0,13				
		а -0,29				
		а -0,09				
	Au	д +0,05	д +0,35			
		а +0,16	а -0,54			
		а -0,20				
		а -0,04				
	II	Be	а +0,07		а +0,26	
		Zn	а +0,03	а +0,31		
а +0,09			а +0,55			
Cd		а +0,06				
		а +0,2				
III		B	а +0,0104	а +0,046		
	Al	а +0,0102	а +0,057			
	Ga	а +0,0108	а +0,065			
	Tl	а +0,01	а +0,26			
	In	а +0,0112	а +0,16			
V	P	д -0,0120	д -0,044			
	As	д -0,0127	д -0,049			
	Sb	д -0,0096	д -0,039			
	Bi	—	д -0,069			
VI	Cr	а +0,07		д -0,0015		
		а +0,12				
	O	д -0,01			д -0,03	
	S	д -0,18			д -0,18	
	Se	д -0,14			д -0,37	д ~ -0,004
		д -0,28				
	Te	д -0,11			д ~ -0,004	
		д -0,30				

Продолжение табл. 1.5

Группа	Примесь	Энергия ионизации, эв		
		Ge	Si	GaAs
VII	Mn	а +0,16	д -0,53	а +0,095
		а -0,37		
	Fe	а +0,34	д +0,40	а +0,36
		а -0,27		
	Co	д +0,09		а +0,54
		а +0,25		
	Ni	а -0,31		а +0,53

Именно так с точки зрения «примесной зоны» и объясняется проводимость по примесям, хотя в этом случае величины E_d или E_a остаются неизменными.

§ 1.3. Энергетический спектр электронов в легированном полупроводнике (большой уровень легирования)

До сих пор рассмотрение основывалось на предположении о том, что взаимодействием примесей можно пренебречь. Это имеет место только при чрезвычайно малом содержании примесей. Так как существует малое, но конечное перекрытие волновых функций электронов соседних примесных центров, то одиночный энергетический уровень расплывается, образуя действительно «примесную зону». При этом нет необходимости иметь компенсацию примесей. Расплывание уровня происходит симметрично вверх и вниз относительно первоначального положения, и таким образом величины E_d и E_a уменьшаются.

Экспериментально такое уменьшение, найденное в работах [30, 31], показано на рис. 1.10, 1.11. Обращение энергии ионизации в нуль происходит в Ge и Si при различных концентрациях. Это обусловлено тем, что боровский радиус электронов на примесных центрах в Si примерно в три раза меньше, чем в Ge, т. е. в Si примесные состояния локализованы сильнее. Следовательно, потребуется большая концентрация примеси для одного и того же перекрытия волновых функций.

Существует несколько подходов при рассмотрении вопроса о примесных зонах. Ранний подход мы рассмотрим на примере работ Бальтеншпергера [32], Лэкса и Филлипса [33]. Современный подход — на примере работ Бонч-Бруевича [34, 35].

Модель примесной зоны при регулярном распределении примесных атомов. В этой модели считается, что примесные атомы образуют правильную решетку, построенную из водородоподобных

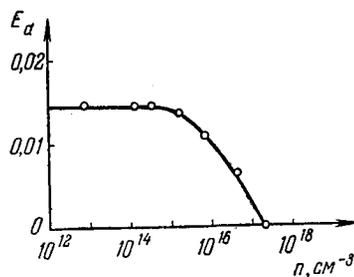


Рис. 1.10. Зависимость энергии ионизации доноров в германии от их концентрации.

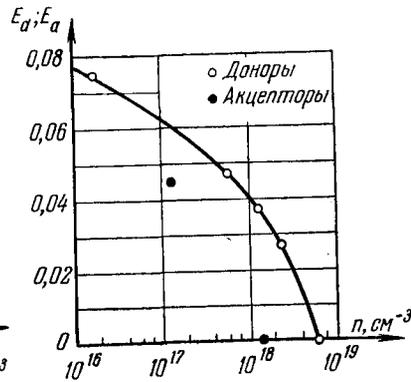


Рис. 1.11. Зависимость энергии ионизации доноров и акцепторов в кремнии от их концентрации.

центров. Разумеется, что такое регулярное распределение примесных атомов в действительности не имеет места.

Решая уравнение Шредингера внутри сферы радиуса r_s , где r_s — среднее расстояние между примесями, которое связано с плотностью примесных атомов N соотношением

$$\frac{4}{3} \pi r_s^3 = \frac{1}{N}, \quad (1.3.1)$$

и считая волновые функции блоховскими, Бальтеншпергер [32] вычислил энергию, соответствующую границам примесной зоны ΔE_n :

$$\Delta E_n = \frac{1}{0,171} \frac{m^* e^2}{m^+ 2\kappa^2 a} \left(\frac{\kappa a}{r_s} \right)^2, \quad (1.3.2)$$

где m^* и m^+ — соответственно эффективные массы электрона в зоне проводимости и в примесной зоне; a — борковский радиус, определяемый как

$$a = \frac{\hbar^2}{m^* e^2}.$$

Существенным результатом явилось то, что примесная зона имеет четкие границы, подобно зонам проводимости или валентной.

Преобразование модели Бальтеншпергера. Броди [36] попытался учесть расширение этой зоны, вызванное отклонением от регулярности распределения примеси. В качестве функции, изображающей плотность состояний внутри примесной зоны, он выбрал гауссову кривую с максимумом, лежащим при энергии, соответствующей первоначальному примесному уровню. Основная причина, оправдывающая такой выбор, заключается в том, что вычисления, проведенные в [37] для одномерной хаотической решетки, привели к кривой плотности состояний, приближающейся по форме к гауссовой. На первый взгляд нет никаких возражений против того, что и в трехмерном случае кривая будет качественно такой же.

Для определения параметров выбранной гауссовой функции нужно нормировать площадь, ограничиваемую этой кривой так, чтобы она давала общее число состояний, равное $2N$. При этом средняя квадратичная величина, определяемая с помощью этой гауссовой кривой, должна быть связана с шириной примесной зоны ΔE_n , определенной по уравнению Бальтеншпергера (1.3.2.). Эта связь может быть двоякой.

Во-первых, значение ΔE_n можно положить равным двум среднеквадратичным σ . Во-вторых, можно, например, считать, что все состояния примесной зоны заключены в квадратный ящик шириной ΔE_n и высотой, равной $\frac{N}{(2\pi)^{1/2}\sigma}$, т. е.

$$\frac{\Delta E_n N}{(2\pi)^{1/2}\sigma} = 2N,$$

а это дает

$$\Delta E_n = (8\pi)^{1/2}\sigma.$$

Из условий нормировки мы получаем следующие две функции плотности состояний:

$$\rho_1(E) = \frac{2\sqrt{2} N}{\sqrt{\pi} \Delta E_n} e^{-2\left(\frac{E}{\Delta E_n}\right)^2}, \quad (1.3.3)$$

$$\rho_2(E) = \frac{4N}{\Delta E_n} e^{-4\pi\left(\frac{E}{\Delta E_n}\right)^2} \quad (1.3.4)$$

Отметим, что все рассуждения относятся только к примесной зоне, образованной основным примесным состоянием. Зоны, соответствующие возбужденным состояниям, будут также полностью перекрываться с зоной проводимости. Это следует из рассмотрения Бальтеншпергера [32] и Конвелл [38].

Если в первом приближении примесные зоны возбужденных состояний не принимать во внимание, то, комбинируя выражение для плотности состояний в обычной зоне

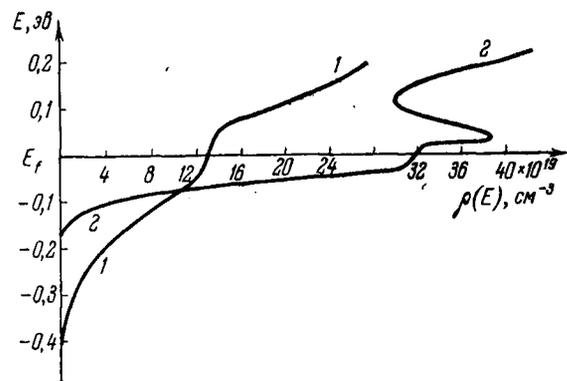


Рис. 1.12. Энергетическая зависимость плотности состояний при слиянии примесной зоны с зоной проводимости.

1 — в предположении (1.3.3) при $N_i = 2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$;
2 — в предположении (1.3.4) при $N_i = 2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$.

проводимости (1.1.16) либо с (1.3.3), либо с (1.3.4), получим общую кривую, изображающую энергетическую зависимость плотности состояний в перекрывшихся между собой зонах проводимости и примесной. На рис. 1.12 показаны примеры таких кривых.

Приведенные расчеты следует рассматривать лишь как некоторую качественную иллюстрацию того, что происходит при слиянии примесной зоны с зоной проводимости. Основной результат заключается в существовании «хвоста» разрешенных состояний ниже уровня Ферми.

Примесная зона при хаотическом распределении примеси. Такой хвост плотности состояний был получен более строгим путем в работах [33, 37, 39—41] при рассмотрении одно-

мерной цепочки хаотически расположенных атомов примеси. При этом их потенциал аппроксимировался δ -функцией.

Задача решалась методом теории возмущений. Результаты таких расчетов, выполненных по методу Лэкса и Филлипса [33] для двух концентраций донорной примеси в

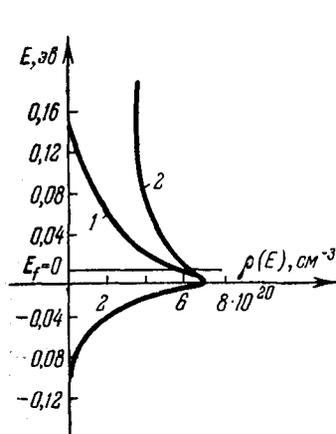


Рис. 1.13. Энергетическая зависимость плотности состояний в предположении модели примесной зоны по Лэксу и Филлипсу при $N_i = 3,4 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ и $T = 300^\circ \text{ К}$.

1 — в примесной зоне; 2 — при слиянии примесной зоны с зоной проводимости.

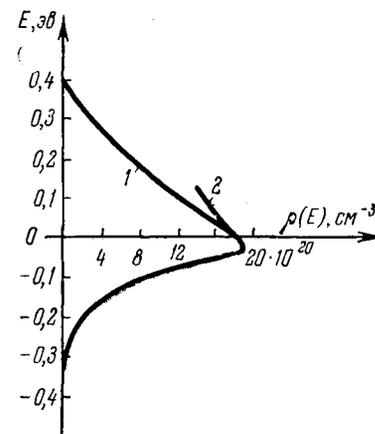


Рис. 1.14. Энергетическая зависимость плотности состояний в предположении модели примесной зоны по Лэксу и Филлипсу при $N_i = 1,3 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$ и $T = 300^\circ \text{ К}$.

1 — в примесной зоне; 2 — при слиянии примесной зоны с зоной проводимости.

германии, равных $3,4 \cdot 10^{19}$ и $1,3 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$, изображены в виде кривых на рис. 1.13 и 1.14. На этих же рисунках приведены кривые, представляющие общую плотность состояний при перекрытии примесных зон с обычной зоной проводимости.

Критика ранних работ по примесной зоне [34]. Прежде всего само понятие «примесная зона» нельзя понимать слишком буквально. Так, например, при значительном увеличении концентрации примеси одновременно будет расти и концентрация свободных носителей, а следовательно, будет сильнее проявляться эффект экранирования примесных

центров электронами. В результате примесные уровни могут вообще исчезнуть даже без образования примесных зон [42]. В германии это будет иметь место при концентрации носителей, несколько меньшей чем 10^{18} см^{-3} . В этих условиях обычная постановка задачи о примесной зоне становится беспредметной. Но это еще не означает, что в этом случае примесных зон нет вообще. Просто под примесной зоной надо понимать область значений энергий E , лежащих в запрещенной зоне, в которой плотность состояний $\rho(E)$ отлична от нуля.

Первым недостатком ранних работ [33, 39—41, 43] является рассмотрение одномерной модели. Очевидно, что таким путем можно было получить лишь качественные результаты.

Второй недостаток заключается в том, что во всех этих работах взаимодействие между электронами учитывалось только через экранирование потенциала примеси. В то же время известно [44], что электронное взаимодействие приводит к изменению закона дисперсии, и к изменению плотности состояний. Существенным изъяном ранних работ [33, 39, 40] является использование δ -образного экранированного потенциала примеси. Такая аппроксимация будет иметь смысл, если радиус экранирования R_0 мал по сравнению со средним расстоянием между атомами примеси $r_s \sim N^{-1/3}$. В сильно легированных полупроводниках R_0 может быть и больше, чем r_s . Действительно, если для оценки радиуса экранирования принять его дебаевскую аппроксимацию, то получим:

$$R_0 \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{N^{1/3}}}. \quad (1.3.5)$$

При $N \geq 10^{19} \text{ см}^{-3}$ величина R_0 оказывается не такой малой по сравнению с r_s , оцененной по (1.3.1).

С другой стороны, в [34] показано, что конкретный вид выражения, описывающего плотность состояний, довольно чувствителен к форме экранированного потенциала. Следовательно, δ -аппроксимация оказывается неудовлетворительной.

Современная теория примесных состояний. Трехмерная задача решалась Бонч-Бруевичем в [34] в предельном случае высоких концентраций. В работе принималось во внима-

ние не только взаимодействие электронов через экранированный потенциал, но и кулоновское взаимодействие.

Задача решалась с помощью функции Грина. В результате оказалось, что плотность состояний отлична от нуля всюду в запрещенной зоне. Вблизи уровня Ферми плотность состояний мало отличается от плотности состояний идеального ферми-газа, но у дна зоны проводимости* она изменяется существенным образом, убывая при $E < 0$ сначала линейно, а затем по мере удаления в глубь зоны более быстро (рис. 1.15). Однако явный вид асимптотики $\rho(E)$ при $E \rightarrow -\infty$ (факториальное убывание, как получено в [34], или экспоненциальное [45]) окончательно не установлен, так как он, по-видимому, чувствителен к выбору вида экранированного потенциала примеси.

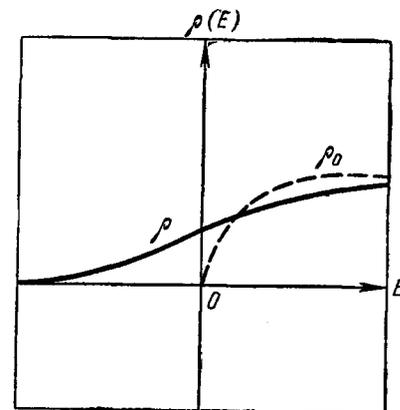


Рис. 1.15. Плотность состояний в чистом (ρ_0) и в сильно легированном (ρ) полупроводнике.

За нуль принято дно зоны проводимости чистого полупроводника.

Рассмотрение зонной структуры сильно легированного полупроводника с учетом двух зон и взаимодействия между ними [35] показало, что в этом случае в результате однозонного исследования нужно ввести лишь несущественные количественные поправки.

Было выяснено, что компенсация уменьшает плотность состояния «на хвосте» (до нуля в случае полной компенсации).

Экспериментальные исследования зонной структуры сильно легированных полупроводников. Эксперименты по изучению зонной структуры сильно легированных полупроводников можно разделить на две группы.

* Имеется в виду зона проводимости чистого беспримесного полупроводника.

К первой принадлежат работы, в которых изучалось изменение зонной структуры, обусловленное, главным образом, искажением кристаллической решетки полупроводника.

Ко второй группе относится исследование хвоста плотности состояний, распространяющегося в глубь запрещенной зоны.

Изменение параметра решетки, которое можно ожидать при сильном легировании, будет влиять на зонную структуру кристалла аналогично эффекту всестороннего сжатия.

Если обозначить сжимаемость полупроводника χ см²/кг, изменение ширины запрещенной зоны при всестороннем сжатии — dE_g/dP эв · см²/кг, то абсолютное изменение ширины запрещенной зоны ΔE_g кристалла с кубической решеткой можно определить как

$$\Delta E_g = -\frac{3}{\chi} \frac{\Delta a}{a} \frac{dE_g}{dP}, \quad (1.3.6)$$

где $\Delta a/a$ — относительное изменение параметра решетки.

Результаты экспериментального определения параметра решетки кремния, легированного бором [46, 47], приведены в таблице 1.6. В этой же таблице приведены значения ΔE_g , рассчитанные по (1.3.6).

Таблица 1.6

Изменение параметра решетки и ширины запрещенной зоны в кремнии с примесью бора

Содержание бора в образце, см ⁻³	Параметр решетки a , Å	Изменение ширины запрещенной зоны ΔE_g , эв	Содержание бора в образце, см ⁻³	Параметр решетки a , Å	Изменение ширины запрещенной зоны ΔE_g , эв
$1 \cdot 10^{14}$	5,4295	0,0	$2,6 \cdot 10^{19}$	5,4282	$1,2 \cdot 10^{-3}$
$1 \cdot 10^{17}$	—	—	$5,2 \cdot 10^{19}$	5,4281	$1,3 \cdot 10^{-3}$
$1 \cdot 10^{18}$	—	—	$1,5 \cdot 10^{20}$	5,4249	$4,25 \cdot 10^{-3}$
$1 \cdot 10^{19}$	5,4291	$0,3 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{20}$	5,4241	$5,0 \cdot 10^{-3}$

Сравнивая тетраэдрические радиусы фосфора (1,10 Å), мышьяка (1,18 Å) и бора (0,88 Å), можно предполагать, что изменения параметра решетки, а следовательно, и ширины запрещенной зоны при легировании фосфором и мышьяком

будут меньше по абсолютной величине, чем при легировании бором. (Экспериментально это не проверялось.)

Рентгеноструктурные исследования образцов германия, легированного мышьяком, проведенные автором, не обнаружили каких-либо изменений параметра решетки вплоть до концентрации мышьяка, равной $4,5 \cdot 10^{19}$ см⁻³.

Целью второй группы работ являлось исследование хвоста плотности состояний. Однако пока не опубликованы работы, которые позволили бы уточнить кривую рис. 1.15. В большинстве работ этого круга предполагалось, что ввиду очень быстрого убывания кривой $\rho(E)$ при устремлении E в глубь запрещенной зоны, все же можно говорить о какой-то эффективной ширине запрещенной зоны, соответствующей тому, что хвост обрезан надлежащим образом.

Значение такой ширины запрещенной зоны, по-видимому, можно получить из оптических исследований (поглощение света и рекомбинационное излучение). Именно эти методы использовались большинством авторов [48—52]. Подробно эти работы будут освещены в главе 4, здесь же укажем только, что в [48] было обнаружено значительное сужение (на 0,06 эв) ширины запрещенной зоны в сильно легированном германии. В [49], наоборот, получен совершенно противоположный результат — не сужение, а увеличение энергетического зазора между валентной зоной и зоной проводимости. В [50] опять-таки делается вывод о некотором сужении ($\sim 0,03$ эв) запрещенной зоны при увеличении степени легирования германия n -типа.

Дубровский, исследуя сильно легированный кремний n - и p -типа, также не обнаружил сколько-нибудь значительного изменения величины E_g [47, 52].

Наконец, в [53], анализируя результаты ряда экспериментов с сильно легированным германием, автор пришел к выводу, что сужение энергетического зазора E_g едва ли превышает величину 0,03 эв при концентрации примеси $2 \cdot 10^{19}$ см⁻³. Заметим, что в этой работе сопоставлялись в том числе и эксперименты, не связанные с оптическим поглощением.

Исследование влияния сильного легирования на ширину запрещенной зоны выполнено также на некоторых соединениях типа $A^{III}B^V$. В компенсированных InAs [54, 55], InSb [55, 56] и InP [57] наблюдалось сужение запрещенного

интервала энергий при увеличении концентрации легирующих примесей. При концентрации $2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ сужение достигает 0,078 эв для InSb и 0,059 эв для InAs.

Эффект сужения запрещенной зоны с легированием наблюдается и в некомпенсированном InSb [58].

Во всех перечисленных работах по $A^{III}B^V$ причина сужения запрещенной зоны приписывалась кулоновскому взаимодействию электронов. Однако более вероятным механизмом, обуславливающим столь сильное уменьшение запрещенной зоны, может оказаться изменение параметра решетки. Так, для InSb величина $\Delta E_g/dP$ составляет $15,5 \cdot 10^{-6} \text{ эв} \cdot \text{см}^2/\text{кг}$ [59], что на порядок больше, чем dE_g/dP для Si.

Изменение параметра решетки $\Delta a/a$, необходимое для достижения наблюдаемой в [55] величины ΔE_g , оцененное по (1.3.6), составляет 0,1% при концентрации примеси 10^{19} см^{-3} .

Прямое доказательство существования хвоста плотности состояний в запрещенной зоне сильно легированного GaAs было получено автором [60] при исследовании избыточного тока туннельных диодов. Однако результаты этой работы все же не позволили определить форму кривой рис. 1.15.

ГЛАВА 2

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В СИЛЬНО ЛЕГИРОВАННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ

§ 2.1. Предварительные замечания

Понятие о функции распределения. В общем числе частиц N имеются такие, координаты которых лежат в интервалах

$$x - x \pm \Delta x, \quad y - y \pm \Delta y, \quad z - z \pm \Delta z, \quad (2.1.1)$$

а составляющие импульсов заключены соответственно между значениями

$$p_x - p_x \pm \Delta p_x, \quad p_y - p_y \pm \Delta p_y, \quad p_z - p_z \pm \Delta p_z. \quad (2.1.2)$$

Если количество таких частиц будет ΔN , то они составят долю, равную $\Delta N/N$ от всех частиц. Доля таких частиц будет возрастать (или убывать) пропорционально изменению интервалов Δx , Δy , Δz и Δp_x , Δp_y , Δp_z . Коэффициент пропорциональности, в свою очередь, может являться функцией координат и импульсов, а кроме того, и времени t :

$$\frac{\Delta N}{N} = f(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z. \quad (2.1.3)$$

Так как $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$ — элемент объема в пространстве координат; $\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = \Delta \omega$ — элемент объема в пространстве импульсов, а $\Delta V \Delta \omega = \Delta \gamma$ — элемент объема в фазовом пространстве, то

$$\frac{\Delta N}{N} = f \Delta \gamma.$$

Функция f таким образом имеет простой физический смысл: это есть относительная концентрация частиц, содержащихся в данном фазовом промежутке, рассчитанная

на единицу фазового объема. Или, иначе: функция f — это вероятность попадания частицы в данный фазовый промежуток, рассчитанная на единицу фазового объема.

Так как сумма вероятностей определяет достоверность события, то

$$\sum \frac{\Delta N}{N} \approx \frac{1}{N} \int_{\Gamma} \Delta N = 1,$$

или

$$\sum_i f \Delta \gamma_i \approx \int_{\Gamma} f d\gamma = 1, \quad (2.1.4)$$

где интегрирование производится по всему фазовому объему Γ . Равенство (2.1.4) является условием нормировки функции f . Нетрудно видеть, что f имеет размерность плотности. Поэтому будем называть ее *плотностью распределения*. Вид этой функции будет характеризовать то или иное распределение частиц по состояниям, где под состоянием подразумевается фазовый промежуток, определяемый (2.1.1) и (2.1.2).

Аналогично, если мы будем рассматривать не N частиц, а M систем, каждая из которых состоит из многих частиц, то соответствующая плотность распределения будет:

$$\omega = \frac{\Delta N}{M}. \quad (2.1.5)$$

Теорема Лиувилля. Положение частиц в фазовом пространстве точно определено быть не может, так как степень их локализации определена элементом фазового объема, т. е. величина $\Delta \gamma$ является одновременно и мерой неопределенности положения частиц в фазовом пространстве. Оказывается, что эта неопределенность с течением времени не меняется. Это и составляет смысл теоремы Лиувилля, доказательство которой читатель найдет в любых курсах статистической физики [1—3].

Из этой теоремы вытекает следствие: плотность распределения во времени сохраняется постоянной.

Действительно, если $\Delta \gamma = \text{const}$, а количества систем M и частиц ΔN от времени не зависят, то из (2.1.5) следует, что $\omega = \text{const}$. Это значит, что плотность распределения является такой функцией от координат и импульсов, которая не меняется при движении частиц. Подобные функции,

инвариантные при движении тела, называются в механике *интегралами движения*.

Интегралы движения. К интегралам движения относятся, например, полная энергия свободной частицы E , ее количество движения P , ее момент количества движения J и др. Следовательно, мы можем представить зависимость плотности распределения ω от координат и импульсов в виде зависимости от интегралов движения

$$\omega = \omega(E, P, J, \dots). \quad (2.1.6)$$

Рассмотрим два элемента фазового объема $\Delta \gamma_1$ и $\Delta \gamma_2$. Число систем, попадающих в эти объемы, соответственно обозначим ΔM_1 и ΔM_2 . Тогда вероятности нахождения системы в $\Delta \gamma_1$ и в $\Delta \gamma_2$ будут:

$$\omega_1 = \omega_1(E_1, P_1, J_1, \dots) \Delta \gamma_1 \text{ и } \omega_2 = \omega_2(E_2, P_2, J_2, \dots) \Delta \gamma_2. \quad (2.1.7)$$

Так как системы мы считаем не взаимодействующими друг с другом, то их попадание в разные объемы $\Delta \gamma$ будут событиями независимыми. Поэтому вероятность ω одновременного нахождения первой системы в $\Delta \gamma_1$ и второй — в $\Delta \gamma_2$ будет равна произведению вероятностей отдельных событий

$$\omega = \omega_1(E_1, P_1, J_1, \dots) \omega_2(E_2, P_2, J_2, \dots). \quad (2.1.8)$$

Эти две системы можно рассматривать как одну сложную и описывать ее состояние в фазовом пространстве, элемент которого $\Delta \Gamma$ будет равен произведению $\Delta \gamma_1 \cdot \Delta \gamma_2$. Вероятность нахождения такой сложной системы в $\Delta \Gamma$ будет:

$$\omega = \omega(E_1 + E_2, P_1 + P_2, J_1 + J_2, \dots). \quad (2.1.9)$$

Приравнявая (2.1.8) и (2.1.9) и логарифмируя, получим:

$$\begin{aligned} \ln \omega(E_1 + E_2, P_1 + P_2, J_1 + J_2, \dots) = \\ = \ln \omega_1(E_1, P_1, J_1, \dots) + \ln \omega_2(E_2, P_2, J_2, \dots). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что логарифм функции ω является величиной аддитивной и складывается из логарифмов плотностей вероятностей отдельных систем, т. е.

$$\ln \omega = \ln \omega_1 + \ln \omega_2. \quad (2.1.10)$$

Если учесть, что сами интегралы движения E, P, J — тоже величины аддитивные, то соотношению (2.1.10) при

условии, что функция распределения зависит лишь от полной энергии системы, а не от энергий отдельных частиц, будет удовлетворять только линейная функция от интегралов движения, т. е.

$$\ln w = a + bE + cP + dJ, \quad (2.1.11)$$

где a, b, c, d — постоянные коэффициенты.

Распределение Гиббса. Проведенное рассмотрение относилось к системе с постоянным числом частиц. С другой стороны, число частиц N есть тоже интеграл движения и к тому же аддитивный, как E, P и J . Учтя это, для системы с переменным числом частиц мы можем записать (2.1.11) в виде:

$$\ln w = a + bE + cP + dJ + eN, \quad (2.1.12)$$

где e — постоянный коэффициент.

Если совокупность всех рассматриваемых частиц не совершает ни поступательного, ни вращательного движения, то $c = 0$ и $d = 0$. Действительно, если бы, например, коэффициент c был больше нуля, то вероятность движения всей системы частиц вправо, $e^c x^P x$, превосходила бы вероятность ее движения влево $e^{-c} x^P x$. Мы наблюдали бы макроскопическое движение системы частиц. Так же можно показать, что в этом случае компоненты c_x, c_y, c_z и d_x, d_y и d_z равны нулю. Тогда (2.1.12) перейдет в

$$\ln w = a + bE + eN, \quad (2.1.13)$$

откуда

$$w = \exp \frac{\Omega - E + \mu N}{\theta}, \quad (2.1.14)$$

где $\theta = \frac{1}{b}$, $\Omega = a\theta$, $\mu = e\theta$.

Полученное распределение (2.1.14) носит название *большого канонического распределения* или *распределения Гиббса* [4].

Рассмотрим физический смысл величин, входящих в это выражение.

Модуль распределения θ . Полагая в (2.1.13) величины a, e и N постоянными, получим:

$$w = A \exp(bE). \quad (2.1.15)$$

Так как состояния с бесконечно большой энергией должны быть бесконечно маловероятными, то величина b должна быть существенно отрицательной. Поэтому положим $b = -\theta^{-1}$, где модуль распределения θ имеет размерность энергии и определяет среднюю энергию частиц, т. е. величина θ есть температура, выраженная в некоторых «естественных» единицах. Она связана с абсолютной температурой T соотношением $\theta = kT$, где k — постоянная Больцмана.

Термодинамический потенциал Ω . Запишем (2.1.14) в виде:

$$w = \exp \frac{F - E}{\theta}, \quad (2.1.16)$$

где

$$F = \Omega + \mu N. \quad (2.1.17)$$

Подставим (2.1.16) в условие нормировки, аналогичное (2.1.4), и продифференцируем его по $1/\theta$. Так как E есть функция только координат и импульсов и, следовательно, она от $1/\theta$ не зависит, то в результате дифференцирования получим:

$$\int \left(F + \frac{1}{\theta} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{1}{\theta} \right)} - E \right) e^{\frac{F-E}{\theta}} d\gamma = 0,$$

откуда, учитывая (2.1.4) и то, что F и $1/\theta$ не зависят от переменных интегрирования, получим:

$$F + \frac{1}{\theta} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{1}{\theta} \right)} - \int E e^{\frac{F-E}{\theta}} d\gamma = 0,$$

а отсюда

$$\int E e^{\frac{F-E}{\theta}} d\gamma = F - \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} = F - T \frac{\partial F}{\partial T}.$$

Интеграл в этом выражении по общим правилам вычисления средних величин [5] есть не что иное, как средняя энергия системы \bar{E} . Поэтому

$$\bar{E} = F - T \frac{\partial F}{\partial T}. \quad (2.1.18)$$

С другой стороны, в термодинамике [4] известно такое же выражение, связывающее энергию системы E с той ее частью F , которая определяет способность системы производить

из всей их совокупности. Некоторые квантово-неразличимые частицы в этом отношении похожи на классические. К таким относятся световые кванты и многие атомы и молекулы.

Электроны принадлежат к такому виду квантово-неразличимых частиц, которые подчиняются еще и дополнительному правилу запрета: в индивидуальном состоянии не может находиться более одного электрона. Это правило носит название *принципа Паули*. Вспомним, что элементарные частицы, вообще говоря, обладают спином, т. е. механическим моментом вращения подобно обыкновенным твердым шарикам, вращающимся вокруг собственной оси. Величина спина S может быть выражена как

$$S = \pm s\hbar,$$

где s — спиновое квантовое число. Установлено, что электроны обладают спиновым числом, равным $\pm 1/2$.

Следует подчеркнуть, что для электронов состояние будет характеризоваться не только движением частицы (импульсом), но и ориентацией спина. Данным значением импульса могут одновременно обладать

$$\Delta N = 2s + 1, \quad (2.2.2)$$

частиц, т. е. два электрона.

Распределение Ферми—Дирака. Найдем распределение электронов по энергиям.

Энергия всей системы частиц складывается аддитивно из энергий отдельных частиц

$$E = \sum_0^k \Delta N_k E_k.$$

Общее число частиц в такой системе:

$$N = \sum_0^k \Delta N_k. \quad (2.2.3)$$

Используя эти выражения, представим распределение Гиббса (2.1.14) в виде

$$\omega = \exp \left[\frac{\Omega + \sum_0^k (\mu - E_k) \Delta N_k}{\theta} \right]. \quad (2.2.4)$$

Найдем $\omega_i(\Delta N_i)$ -функцию распределения частиц на i -м уровне

$$\omega_i(\Delta N_i) = \sum_{\Delta N_j (j \neq i)} \omega(\Delta N_1, \dots, \Delta N_i, \dots). \quad (2.2.5)$$

Это соотношение можно переписать так, чтобы все, что связано с i -м уровнем, выделить отдельным множителем:

$$\omega_i(\Delta N_i) = C \exp \left[\frac{(\mu - E) \Delta N_i}{\theta} \right], \quad (2.2.6)$$

где C — оставшаяся сумма.

Функция распределения частиц по всем уровням будет:

$$f = \frac{\sum_{\Delta N} \Delta N_i \omega_i}{\sum_{\Delta N} \omega_i}. \quad (2.2.7)$$

Или, подставляя (2.2.6), получим после суммирования с учетом того, что для электронов $\Delta N_i = 0, 1$, функцию распределения Ферми — Дирака:

$$f = \frac{1}{1 + \exp \left(\frac{E - \mu}{kT} \right)}. \quad (2.2.8)$$

Свойства функции Ферми—Дирака. Для анализа функции (2.2.8) рассмотрим ее производную по энергии:

$$\frac{\partial f}{\partial E} = - \frac{1}{kT} \frac{\exp \left(\frac{E - \mu}{kT} \right)}{\left[1 + \exp \left(\frac{E - \mu}{kT} \right) \right]^2}. \quad (2.2.9)$$

Если умножить числитель и знаменатель в (2.2.9) на $\exp \left(-2 \frac{E - \mu}{kT} \right)$, что не должно изменить $\partial f / \partial E$, то получим:

$$\frac{\partial f}{\partial E} = - \frac{1}{kT} \frac{\exp \left(- \frac{E - \mu}{kT} \right)}{\left[1 + \exp \left(- \frac{E - \mu}{kT} \right) \right]^2}. \quad (2.2.10)$$

Сравнивая оба эти выражения, видим, что производная сохраняет свое значение при изменении знака величины $\frac{E - \mu}{kT}$; т. е. функция $\partial f / \partial E$ — четная, а это значит, что ее

значения будут симметрично располагаться относительно точки $\frac{E-\mu}{kT} = 0$ или, что равносильно, — относительно значения энергии $E = \mu$. Это наглядно видно из рис. 2.2.

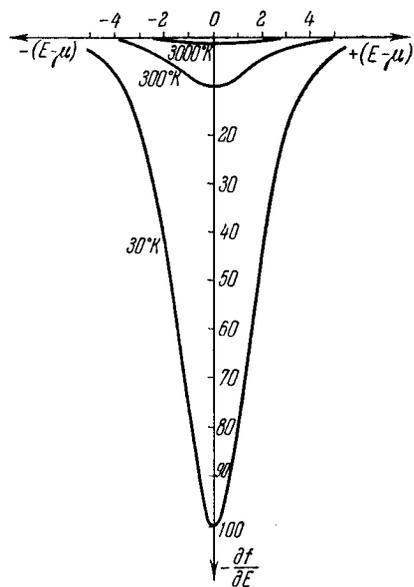


Рис. 2.2. Производная функции распределения Ферми—Дирака.

Если принять в распределении Ферми—Дирака значение энергии E за нуль отсчета энергий, то (2.2.8) удобно представить в виде

$$f = \frac{1}{1 + e^{-\mu^*}}, \quad (2.2.12)$$

где величина $\mu^* = \mu/kT$ является безразмерной и называется *приведенным электрохимическим потенциалом* или *приведенным уровнем Ферми*. Значения $f(\mu^*)$ табулированы в приложении П. 1.

Электрохимический потенциал. Остановимся еще раз на физическом смысле величины μ . В данном случае частицами, составляющими систему, являются электроны, которые

Нетрудно убедиться, что в этой точке

$$\frac{\partial f}{\partial E} = -\frac{1}{4kT}, \quad (2.2.11)$$

а так как эта производная является тангенсом угла наклона касательной к кривой $f(E)$, проведенной в точке $E = \mu$, то ясно, что в этой точке функция f убывает. Из (2.2.11) следует также, что крутизна функции $f(E)$ в точке $E = \mu$ будет уменьшаться при понижении температуры и при абсолютном нуле $\partial f/\partial E$ обращается в $-\infty$, т. е. касательная будет перпендикулярна к оси абсцисс и функция $f(E)$ приобретает ступенчатую форму (рис. 2.3).

помимо массы обладают еще и электрическим зарядом. Следовательно, возвращаясь к выражению (2.1.20), мы

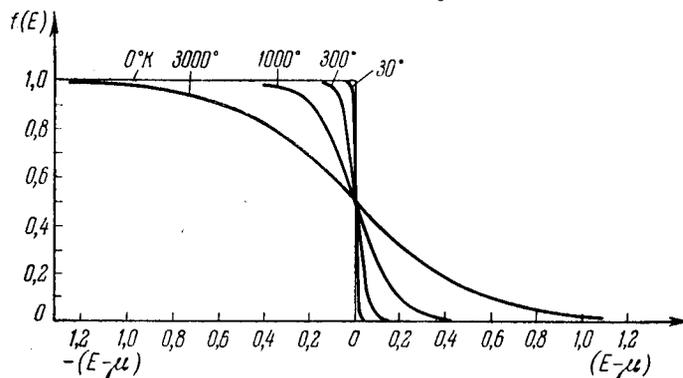


Рис. 2.3. Вид функции распределения Ферми—Дирака.

должны включить в него слагаемое, отражающее возможность изменения энергии за счет изменения количества зарядов:

$$dE|_{T=0} = dF + \mu dN + \psi dq. \quad (2.2.13)$$

В этом выражении коэффициент

$$\psi = \left. \frac{\partial E}{\partial q} \right|_{\substack{\Omega = \text{const} \\ N = \text{const}}}$$

называется *электростатическим потенциалом* и представляет ту долю работы, которая приходится на единицу заряда. Общий заряд dq равен произведению заряда электрона на число частиц, поэтому

$$dE|_{T=0} = dF + (\mu - e\psi) dN. \quad (2.2.14)$$

Новый коэффициент при dN теперь представляет алгебраическую сумму химического и электростатического потенциалов и носит название *электрохимического потенциала*. Обычно электрохимический потенциал обозначается той же буквой μ , что и химический потенциал. Мы в дальнейшем также будем придерживаться такого обозначения.

Из рис. 2.3 видно, что при $E - \mu = 0$ значения функции $f(E)$ равны 1/2 независимо от температуры.

Следовательно, мы можем отождествить электрохимический потенциал с некоторой энергией E_F , именуемой *уровнем (энергией) Ферми*, вероятность заполнения которого равна половине.

Следует помнить, что отождествление E_F и электрохимического потенциала имеет место только в условиях равновесного распределения системы электронов. Когда равновесие нарушается, тогда $E_F \neq \mu$.

Распределение Больцмана. Функция распределения Ферми—Дирака (2.2.12) при условии

$$e^{-\mu^*} \gg 1 \quad (2.2.15)$$

аппроксимируется более простой формулой

$$f = e^{\mu^*}, \quad (2.2.16)$$

совпадающей с известным распределением Больцмана [5], справедливым для частиц, подчиняющихся классической механике. На первый взгляд непонятно, как это квантово-неразличимые частицы, обладающие спином и попадающие под правило запрета Паули, могут описываться «классическим» распределением. Эта кажущаяся парадоксальность становится понятной, если вспомнить наиболее существенное отличие классических частиц от квантовых. Этим отличием является непрерывность энергетического спектра первых и дискретность вторых. С этой точки зрения условие $e^{-\mu^*} \gg 1$ эквивалентно переходу от дискретного спектра к непрерывному. Действительно, (2.2.15) будет выполняться тем лучше, чем выше температура. А при повышении температуры уровни энергии расплываются так, что расстояния между ними становятся настолько малыми, что энергетический спектр практически можно считать непрерывным. И, наоборот, по мере понижения температуры распределение частиц в электронном газе будет все более и более отличаться от больцмановского.

Таким образом, распределение Больцмана можно трактовать как предельный случай распределения Ферми—Дирака.

Критерий вырождения. Электронный газ, подчиняющийся распределению Ферми—Дирака, принято называть *вырожденным*, а величину приведенного уровня Ферми μ^* — *степенью вырождения*. Разумеется, что деление на вырожденный и невырожденный газы в значительной степени условно,

ибо нельзя провести четкую границу между ними. Это наглядно видно из рис. 2.4, на котором приведена величина δ_f , представляющая относительную ошибку в определении величины функции f при вычислении ее по формуле распределения Больцмана, а не Ферми—Дирака, т. е.

$$\delta_f = 1 - \frac{e^{-\mu^*}}{1 + e^{-\mu^*}}. \quad (2.2.17)$$

Если теперь условиться считать величину ошибки δ_f , равную, например, 8%, еще допустимой, то *границей вырождения* будет $\mu_f^* = -2$. При $\mu_f^* > -2$ электронный газ будет вырожденным, а при $\mu_f^* < -2$ — невырожденным.

Здесь мы ввели обозначения δ_f и μ_f^* , где индекс f означает, что ошибка δ и граница вырождения относятся только к определению функции распределения.

В дальнейшем станет ясно, что различные физические явления по-разному чувствительны к виду распределения. И величины δ будут отличаться друг от друга. Соответственно и границы вырождения необходимо будет приписывать различные величины μ^* .

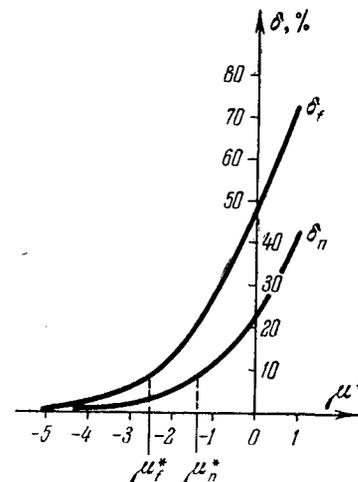


Рис. 2.4. Ошибки, возникающие при замене функции распределения Ферми—Дирака распределением Больцмана.

Индекс f относится к функции f , индекс n — к концентрации электронов.

§ 2.3. Статистика электронов и дырок в полупроводниках

Концентрация электронов в зоне проводимости. Из самых общих соображений, число электронов проводимости с энергиями в интервале dE определяется как произведение числа состояний в этом интервале $\rho(E)dE$ на вероятность заполнения их электронами $f(E)$. Полное число электронов

в зоне проводимости n , таким образом, будет:

$$n = \int_{E_c}^{\infty} f(E) \rho(E) dE. \quad (2.3.1)$$

Нижним пределом интегрирования является минимально возможное значение энергии электрона, т. е. энергия, соответствующая дну зоны проводимости E_c . Верхний предел интегрирования, вообще говоря, должен быть равен максимально возможному значению энергии электрона $E_{\text{макс}}$, которое может быть принято равным бесконечности.

Подставляя в (2.3.1) полученные ранее выражения для $f(E)$ (2.2.8) и $\rho(E)$ в виде (1.1.16), справедливые для параболической зоны проводимости, а также учитывая два возможных значения спина электрона, получим:

$$n = \int_{E_c}^{\infty} \frac{4\pi \left(\frac{2m_n^*}{h^2}\right)^{3/2} (E - E_c) dE}{1 + \exp \frac{E - \mu}{kT}}. \quad (2.3.2)$$

Принимая за нуль отсчета энергию E_c и вводя приведенные (безразмерные) уровень Ферми μ^* и энергию

$$\epsilon^* = \frac{E - E_c}{kT}, \quad (2.3.3)$$

получим:

$$n = N_c F_{1/2}(\mu^*), \quad (2.3.4)$$

где интеграл

$$F_{1/2} = \int_0^{\infty} \frac{(\epsilon^*)^{1/2} d\epsilon^*}{1 + \exp(\epsilon^* - \mu^*)} \quad (2.3.5)$$

носит название *интеграла Ферми половинного индекса*, а величина

$$N_c = 4\pi \left(\frac{2m_n^* kT}{h^2}\right)^{3/2} \quad (2.3.6)$$

имеет смысл *эффективной плотности состояний в зоне проводимости*. Действительно, в случае сильно невырожденного электронного газа ($\mu^* \ll 0$) интеграл Ферми (2.3.5) переходит в $\sqrt{\pi} e^{\mu^*}/2$, а общее число электронов при этом

будет:

$$n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} N_c e^{\mu^*}, \quad (2.3.7)$$

и, следовательно, величина n/N_c с точностью до коэффициента $\sqrt{\pi}/2$ совпадает со значением функции распределения (2.2.16), показывающей степень заполнения уровня E_c в классическом пределе. Таким образом, величина N_c эквивалентна плотности возможных состояний в зоне проводимости совершенно невырожденного полупроводника.

Подставляя в (2.3.6) числовые значения констант, получим:

$$N_c = 5,437 \cdot 10^{15} \cdot \beta^{3/2} T^{3/2}, \quad (2.3.8)$$

где $\beta = m_n^*/m_0$.

Графическое изображение зависимости (2.3.8) приведено на рис. 2.5.

Если зона проводимости в полупроводнике не параболична, то в (2.3.1) следует подставить соответствующее для этого случая выражение $\rho(E)$ — (1.1.18). В результате получим:

$$n = N_c F_{1/2}(\mu^*) + \frac{5akT}{\hbar^2} N_c F_{3/2}(\mu^*), \quad (2.3.9)$$

где

$$F_{3/2} = \int_0^{\infty} \frac{(\epsilon^*)^{3/2} d\epsilon^*}{1 + \exp(\epsilon^* - \mu^*)}$$

также носит название *интеграла Ферми*, но уже *индекса 3/2*, а не 1/2, как интеграл (2.3.5).

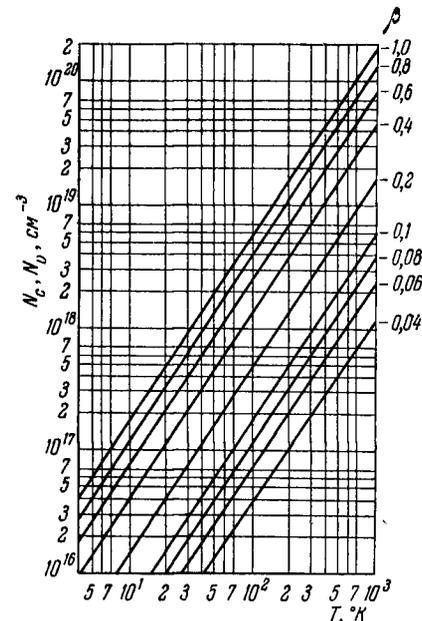


Рис. 2.5. Номограмма для вычисления значений N_c и N_v .

Поделив полученное выражение на (2.3.4), легко убедиться, что

$$\frac{5\alpha k T F_{3/2}(\mu^*)}{\hbar^2 F_{1/2}(\mu^*)} = \frac{n' - n}{n} \quad (2.3.10)$$

есть не что иное, как относительное превышение количества электронов в непараболической зоне по сравнению с параболической.

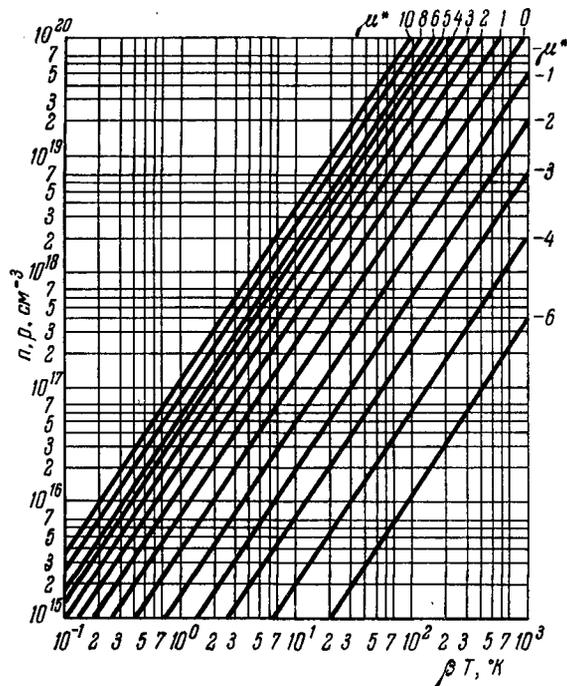


Рис. 2.6. Номограмма для вычисления концентраций электронов и дырок в разрешенных зонах полупроводника.

Зависимость плотности электронов от параметра βT для параболической зоны графически показана на рис. 2.6.

Критерий вырождения. Так же как и в предыдущем параграфе, найдем относительную ошибку δ_n в определении количества электронов при вычислении по формуле, спра-

ведливой для классического случая (2.3.7), и по общей формуле (2.3.4):

$$\delta_n = 1 - \frac{F_{1/2}(\mu^*)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp \mu^*}. \quad (2.3.11)$$

Зависимость δ_n от приведенного уровня Ферми также показана на рис. 2.4. Если и теперь считать погрешность, равную 8%, допустимой, то «границей» вырождения будет $\mu_n^* = -1,4$. Мы видим, что $\mu_i^* \neq \mu_n^*$.

Обычно принимаемая за начало вырождения величина $\mu^* = 0$ повлечет, как это видно из рис. 2.4, ошибку $\sim 20\%$ в определении концентрации электронов в зоне проводимости.

Из рис. 2.6 наглядно видно, что переходу от невырожденного состояния к вырожденному способствует малость параметра βT , т. е. чем меньше величина $\beta T|_{\mu^*=0}$, тем при меньших концентрациях наступает вырождение. Этот параметр с успехом может быть назван *приведенной температурой вырождения*.

Заметим, что обычно пользуются понятием температуры вырождения, под которой понимают истинную величину температуры, при которой электронный газ в данном полупроводнике (с данным β) оказывается вырожденным. Такое определение допустимо лишь при постоянстве эффективной массы носителей заряда. Если же величина β изменяется с температурой, как, например, в соединениях Bi с Te [29], или с увеличением концентрации электронов, как в InSb и в GaAs [7], то целесообразнее оперировать приведенной температурой вырождения.

Концентрация дырок в валентной зоне. Вероятность того, что состояние E занято дыркой эквивалентно тому, что оно не занято электроном, т. е.

$$f_p(E) = 1 - f(E) = \frac{1}{1 - \exp \frac{\mu - E}{kT}}. \quad (2.3.12)$$

Так как значения энергий в валентной зоне отсчитываются от E_v вниз, то общее число дырок в единице объема будет:

$$\rho = \int_{-\infty}^{E_v} \rho_p(E) f_p(E) dE. \quad (2.3.13)$$

Подставляя сюда $\rho_p(E)$, аналогичное (1.1.16), и $f_p(E)$ из (2.3.12), получим

$$\rho = 4\pi \left(\frac{2m_p^*}{h^2} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{E_v} \frac{(E_v - E)^{1/2} dE}{1 + \exp \frac{\mu - E}{kT}}. \quad (2.3.14)$$

Введем безразмерную энергию и для валентной зоны

$$E_p^* = \frac{E_v - E}{kT}.$$

Сопоставляя это выражение с (2.3.3), легко получить:

$$E_p^* = -E^* - E_g^*, \quad (2.3.15)$$

где E_g^* — приведенная ширина запрещенной зоны, равная

$$E_g^* = \frac{E_c - E_v}{kT}.$$

В этих обозначениях выражение для концентрации дырок (2.3.14) переписывается в форме, аналогичной выражению для концентрации электронов:

$$\rho = N_v \cdot F_{1/2}(-E_g^* - \mu^*), \quad (2.3.16)$$

где

$$N_v = 4\pi \left(\frac{2m_p^* kT}{h^2} \right)^{3/2} \quad (2.3.17)$$

представляет собой также эффективную плотность состояний в валентной зоне, а $F_{1/2}(-E_g^* - \mu^*)$ — интеграл, совершенно аналогичный интегралу (2.3.5).

Для определения N_v можно, разумеется, пользоваться тем же графиком, что и для N_c (рис. 2.5), если под величиной β понимать теперь отношение m_p^*/m_0 . Точно так же при этом можно пользоваться рис. 2.6 для подсчета плотности дырок в валентной зоне.

Закон действующих масс носителей заряда. Из элементарной теории полупроводников [8] известно, что для невырожденных газов носителей заряда справедливо соотношение

$$n_0 p_0 = n_i^2 = \frac{\pi}{4} N_c N_v e^{-\frac{E_g}{kT}}, \quad (2.3.18)$$

которое при постоянной температуре зависит только от свойств полупроводника (от m_n^* , m_p^* и E_g). Здесь индекс нуль при значениях концентраций обозначает, что они относятся к невырожденному случаю.

Перемножая (2.3.4) на (2.3.16), получим соответствующее выражение для любой степени вырождения:

$$np = N_c N_v F_{1/2}(\mu^*) F_{1/2}(-\mu^* - E_g^*). \quad (2.3.19)$$

Нетрудно убедиться, что в невырожденном случае ($\mu^* \ll 0$) это выражение действительно переходит в (2.3.18), так как оба интеграла при этом аппроксимируются экспоненциальными функциями вида $\sqrt{\pi} e^{\mu^*/2}$ и $\sqrt{\pi} e^{-\mu^* - E_g^*/2}$ (см. § 2.5). Для наглядности построим отношение

$$\begin{aligned} \frac{np}{n_0 p_0} &= \\ &= \frac{4}{\pi} \frac{F_{1/2}(\mu^*) F_{1/2}(-\mu^* - E_g^*)}{\exp(-E_g^*)} \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

в виде кривой на рис. 2.7.

Нетрудно убедиться, что практически эта кривая совпадает для всех обычных полупроводников, ибо из-за большой величины E_g^* по сравнению с μ^* (2.3.20) приближенно можно записать как

$$\frac{np}{n_0 p_0} \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu^*} F_{1/2}(\mu^*). \quad (2.3.21)$$

Сравнивая это с (2.3.11), видим, что

$$\frac{np}{n_0 p_0} \approx 1 - \delta_n,$$

т. е. отклонение произведения np от $n_0 p_0$ определяется ошибкой в вычислении концентрации электронов при замене статистического распределения Ферми распределением Больцмана.

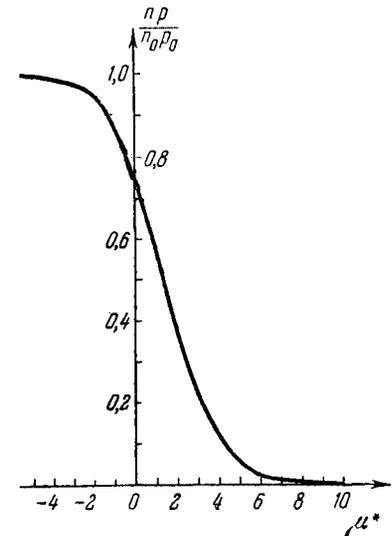


Рис. 2.7. Изменение произведения np с увеличением степени вырождения электронного газа в кристалле (при $T = 300^\circ \text{K}$).

Этот результат, вообще говоря, тривиален, так как в случае вырождения газа носителей в одной из зон газ носителей противоположного знака остается невырожденным.

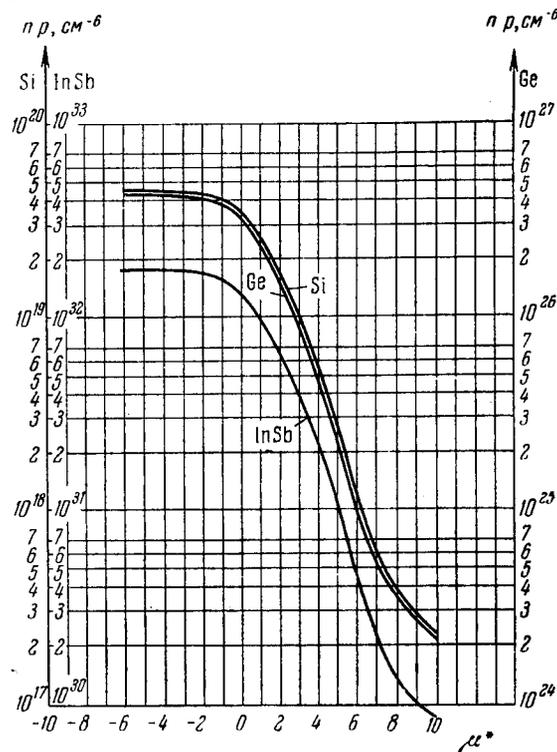


Рис. 2.8. Абсолютные значения np в зависимости от легирования Ge, Si, и InSb для разных температур.

Абсолютные значения произведения np для различных полупроводников, разумеется, будут различаться (рис. 2.8).

Концентрация электронов на локальных уровнях. На локальном уровне, например на примесном донорном центре, принципиально также могут находиться два электрона с противоположно направленными спинами. Но в действительности на нем либо вообще нет электронов, либо имеется всего один электрон, так как второй уже не может

попасть на этот уровень из-за сильного электростатического отталкивания между электронами. Иными словами, в разрешенных зонах мы рассматривали электроны, как не взаимодействующие друг с другом частицы, а электроны на локальных уровнях, наоборот, мы должны трактовать как сильно взаимодействующие (отталкивающиеся) частицы. Это обстоятельство существенно сказывается на виде функции распределения локализованных электронов. Покажем это следующим образом [9,10]. Из (2.2.4) следует:

$$e^{-\frac{\Omega_n}{kT}} = \sum_{\Delta N_1, \Delta N_2} \exp \left[\frac{\mu (\Delta N_1 + \Delta N_2) - E_1 \Delta N_1 - E_2 \Delta N_2 - A \Delta N_1 \Delta N_2}{kT} \right]. \quad (2.3.22)$$

Здесь Ω_n относится к локальному центру; энергия примесного уровня записана в виде:

$$E = \sum_k E_k \Delta N_k = E_1 \Delta N_1 + E_2 \Delta N_2 + A \Delta N_1 \Delta N_2,$$

где $E_1 = E_2 = -E_d$ — энергия ионизации донорного центра и A — энергия взаимодействия двух электронов, находящихся на одном примесном центре.

Величины ΔN_1 и ΔN_2 могут принимать следующие значения:

- центр свободен от электронов: $\Delta N_1 = 0; \Delta N_2 = 0,$
- центр занят первым электроном: $\Delta N_1 = 1; \Delta N_2 = 0,$
- центр занят вторым электроном: $\Delta N_1 = 0; \Delta N_2 = 1,$
- центр занят обоими электронами: $\Delta N_1 = 1; \Delta N_2 = 1.$

Учитывая эти значения, в результате суммирования в (2.3.22) получаем:

$$e^{-\frac{\Omega_n}{kT}} = 1 + 2 \exp \left(\frac{\mu + E_d}{kT} \right) + \exp \frac{2(\mu + E_d) - A}{kT}. \quad (2.3.23)$$

Так как энергия A велика из-за сильного отталкивания электронов, то последний член в правой части (2.3.23) много меньше единицы и им можно пренебречь. Тогда, логарифмируя это выражение, найдем термодинамический

потенциал

$$\Omega_{\text{ц}} = -kT \ln \left[1 + 2 \exp \left(\frac{\mu + E_d}{kT} \right) \right]. \quad (2.3.24)$$

С другой стороны, для локального центра, как и для любого уровня, будет справедливо термодинамическое соотношение

$$\mu dn = dF + S dT,$$

которое при постоянной температуре и подстановке вместо F выражения (2.1.17) приводит к

$$n = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_T, \quad (2.3.25)$$

т. е. для нахождения среднего числа локализованных электронов на донорном центре, следует продифференцировать (2.3.24):

$$n_{\text{ц}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \exp(-E_d^* - \mu^*)}. \quad (2.3.26)$$

Если общее число таких локальных центров составляет N_d , то концентрация всех локализованных электронов будет:

$$n_d = \frac{N_d}{1 + \frac{1}{2} \exp(-E_d^* - \mu^*)}. \quad (2.3.27)$$

Если бы примесные уровни были акцепторными, то мы бы получили для средней концентрации дырок p_a , находящихся на них выражение вида

$$p_a = \frac{N_a}{1 + 2 \exp(-E_a^* + \mu^* + E_g^*)}. \quad (2.3.28)$$

§ 2.4. Определение уровня Ферми

Уравнение нейтральности. Методы статистической физики позволяют найти в каждом конкретном случае уравнение для определения химического потенциала. Рассмотрим, например, случай электронного примесного полупроводника с донорными локальными центрами. Так же как и в предыдущем параграфе, будем считать энергию взаимодействия электронов проводимости очень большой. Тогда термодинамический потенциал всей системы Ω будет скла-

дываться аддитивно из потенциалов, относящихся к зоне проводимости Ω_c , валентной зоне Ω_v и локальным уровням Ω_d :

$$\Omega = \Omega_c + \Omega_v + \Omega_d. \quad (2.4.1)$$

Дифференцируя Ω по μ^* , получим в соответствии с (2.3.25) уравнение

$$n = n_c + n_v + n_d.$$

С другой стороны, $n = N_0 + N_d$ (N_0 — число состояний валентной зоне), поэтому имеем:

$$n_c = (N_d - n_d) + p. \quad (2.4.2)$$

Это равенство утверждает, что число электронов проводимости равно общему числу дырок на примесных уровнях ($N_d - n_d$) и в валентной зоне p . Поэтому оно носит название *уравнения нейтральности примесного электронного полупроводника*.

Подставляя в (2.4.2) величины n_c , n_v и n_d из (2.3.4), (2.3.16) и (2.3.27), получим уравнение нейтральности в явном виде:

$$4\pi \left(\frac{2m_n^* kT}{h^2} \right)^{3/2} F_{1/2}(\mu^*) = \frac{N_d}{2e^{E_d^* + \mu^*} + 1} + 4\pi \left(\frac{2m_p^* kT}{h^2} \right)^{3/2} F_{1/2}(-E_g^* - \mu^*). \quad (2.4.3)$$

Точно так же, в случае *примесного дырочного полупроводника*, уравнение нейтральности будет:

$$p = (N_a - p_a) + n_c. \quad (2.4.4)$$

Опять-таки, подставляя в (2.4.4) выражения (2.3.4), (2.3.16) и (2.3.28), получим:

$$4\pi \left(\frac{2m_p^* kT}{h^2} \right)^{3/2} F_{1/2}(-E_g^* - \mu^*) = \frac{N_a}{\frac{1}{2} e^{E_a^* - E_g^* - \mu^*} + 1} + 4\pi \left(\frac{2m_n^* kT}{h^2} \right)^{3/2} F_{1/2}(\mu^*). \quad (2.4.5)$$

Наконец, в случае присутствия в полупроводнике одновременно и доноров и акцепторов, *уравнение нейтральности*

приобретает вид:

$$(N_d - n_d) + p = (N_a - p_a) + n_c, \quad (2.4.6)$$

явный вид которого при необходимости читатель без труда получит самостоятельно.

Полученные уравнения нейтральности являются исходными для определения химического потенциала и его зависимости от концентрации носителей и от температуры. Однако уравнения нейтральности содержат интегралы Ферми, поэтому эти уравнения могут быть решены аналитически лишь при полном отсутствии вырождения и то только в простейших случаях.

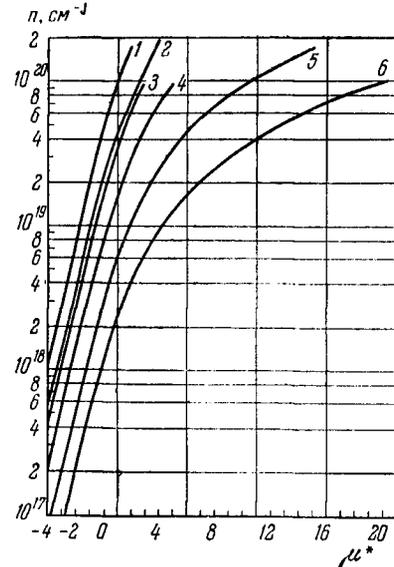


Рис. 2.9. Решение уравнения нейтральности в случае легирования Ge и Si одним типом доноров.

Кривые для Si: 1 — 500, 2 — 300, 5 — 78° К; для Ge: 3 — 500, 4 — 300, 6 — 78° К.

Случай сильно легированного полупроводника. При большой концентрации одного какого-либо вида примесей, например доноров, можно считать, что все они ионизованы в широком интервале температур. Это условие выполняется при содержании доноров, превышающем в германии $1,5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, а в кремнии — $5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ [11, 12].

Ограничим интервал температур сверху такой

величиной, при которой собственная проводимость еще не играет большой роли. При таких ограничениях значения p и n_d принимаются равными нулю и (2.4.2) упрощается:

$$n_c = N_d \\ N_c F_{1/2}(\mu^*) = N_d. \quad (2.4.7)$$

На рис. 2.9 показано решение этого уравнения для германия и кремния.

Для концентраций примесей в германии, меньших $5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, при очень низких температурах, когда не все примеси ионизованы, или, наоборот, при высоких температурах, когда нельзя сбрасывать со счета собственную проводимость, решение (2.4.7) окажется несправедливым.

Нахождение же μ^* для этого общего случая требует либо численных решений, либо разработки специальных приближенных методов, которые можно разбить на две группы — графические и аналитические.

Графические методы определения химического потенциала. Различные графические методы определения μ^* были предложены рядом авторов [13—15]. Всем им присущ общий недостаток: они или применимы лишь в определенных частных случаях, либо не учитывают вырождения электронного газа. В работе [16] рассматривается общий метод, но он слишком громоздок и практически не используется экспериментаторами.

Простой метод был предложен в [17]. Суть его заключается в том, что при определенном выборе масштаба уравнение нейтральности можно записать в таком виде, что для любых $E_g, E_d, E_a, N_a, N_d, m_n^*, m_p^*$ и T потребуется построение всего двух универсальных кривых, не зависящих от конкретных значений перечисленных параметров.

Проиллюстрируем этот метод для случая примесной проводимости полупроводника с одной донорной примесью.

Уравнение (2.4.2) примет вид:

$$n_c = N_d - n_d,$$

или, в явном виде,

$$C (\beta_n T)^{3/2} F_{1/2}(\mu^*) = \frac{N_d}{1 + 2e^{\mu^* + E_d^*}}, \quad (2.4.8)$$

где

$$C = 4\pi \left(\frac{2km_0}{h^2} \right)^{3/2}, \quad \beta_n = \frac{m_n^*}{m_0}.$$

Логарифмируя (2.4.8), получаем:

$$\lg C F_{1/2}(\mu^*) + \frac{3}{2} (\lg T + \lg \beta_n) = \\ = \lg N_d - \lg [1 + 2e^{\mu^* + E_d^*}]. \quad (2.4.9)$$

Заметим, что второй член в правой части этого уравнения зависит от μ^* как функция $\lg(1+x)$ от $2, 3 \lg x$ с точностью

до сдвига по оси абсцисс. Действительно, положим $2e^{\mu^* + E_d^*} = x$, тогда

$$2,3 \lg x - 2,3 \lg 2 - E_d^* = \mu^*.$$

Отсюда видно, что $\lg(1+x)$ будет так же зависеть от $2,3 \lg x$ как $\lg(1+2e^{\mu^* + E_d^*})$ от μ^* , если начало координат перенести по оси абсцисс влево на величину $-(2,3 \lg 2 + E_d^*) = -(0,7 + E_d^*)$. Таким образом, в (2.4.9) в функции, зависящие от μ^* , не входят значения параметров полупроводника.

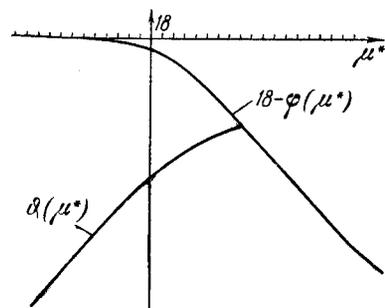


Рис. 2.10. Графики функций $\vartheta(\mu^*)$ и $[18 - \varphi(\mu^*)]$.

Левая часть уравнения (2.4.9) задается графиком $CF_{1/2}(\mu^*) = \vartheta(\mu^*)$, если начало отсчета перенести по оси ординат на величину $A = \frac{3}{2}(\lg T - \lg \beta_n)$ вверх, если $A > 0$, или вниз, если $A < 0$. Правая часть уравнения (2.4.9) задается графиком $\varphi(\mu^*)$, который изображает зависимость $\lg(1+x)$ от $2,3 \lg x$, если начало отсчета сдвинуть по оси абсцисс влево на $(0,7 + E_d^*)$ и по оси ординат на $\lg N_d$. Значение μ^* найдется как пересечение кривых $\vartheta(\mu^*)$ и $\varphi(\mu^*)$ при указанном выборе начала координат (рис. 2.10). На практике вместо $\varphi(\mu^*)$ удобнее пользоваться кривой $[18 - \varphi(\mu^*)]$, изображенной на рис. 2.10, тогда начало координат переносится по оси ординат на $\lg N_d / 10^{18}$. По оси абсцисс начало кривой отсчета $[18 - \varphi(\mu^*)]$ при построении можно заранее поместить в точку $-0,7$, и сдвиг кривой для определения μ^* надо будет производить лишь на величину E_d^* . Координатная сетка, на которую накладывают эти графики с соответствующими сдвигами, изображена на рис. 2.11.

Найдем для примера значение μ^* в германии с концентрацией мышьяка 10^{19} см^{-3} при температуре 500°К . Принимаем $E_d = 0,01 \text{ эв}$ и $\beta_n = 1/2$.

Прежде всего вычисляем величину A , которая оказывается равной 3,6. На сетку накладываем кривую $\vartheta(\mu^*)$

рис. 2.10, сдвинув ее по оси ординат на $+3,6$ (рис. 2.12). Затем на эту же сетку накладываем кривую $[18 - \varphi(\mu^*)]$, сдвинув ее по оси абсцисс влево на $E_d^* = E_d/kT = 0,01/0,043 = 0,23$ и по оси ординат на $\lg(N_d/10^{18}) = +1$, что также показано на рис. 2.12. После этого определяется μ^* как точка пересечения наложенных кривых.

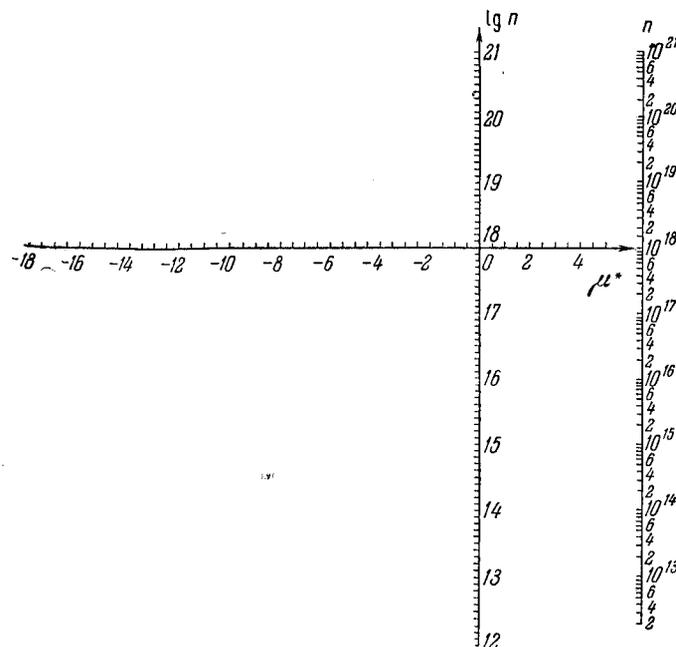


Рис. 2.11. Координатная сетка для уравнения нейтральности.

Разработанный метод несколько осложняется при учете собственной проводимости. Однако способ нахождения μ^* остается прежним. В этом случае кривая $\vartheta(\mu^*)$ определяется уже не интегралом $F_{1/2}(\mu^*)$, а интегралом $F_{1/2}(-\mu^* - E_g^*)$. Поэтому она получается зеркальным отображением прежней кривой $\vartheta(\mu^*)$, а сдвиг ее по оси абсцисс в этом случае следует производить на величину E_g^* . Уровень Ферми определяется при этом по точке пересечения кривой $\vartheta(\mu^*)$ с кривой, изображающей оба члена в правой части (2.4.3), т. е. с графиком суммы кривых $[18 - \varphi(\mu^*)]$ и $\vartheta(\mu^*)$.

Однако эта суммарная кривая, за исключением небольшой области значений μ^* , где $p \approx N_d - n_d$, совпадает либо с зависимостью $(N_d - n_d)$ от μ^* , либо с зависимостью p от μ^* . Таким образом, вне области $N_d - n_d \approx p$ правая часть (2.4.3) может быть представлена либо универсальным

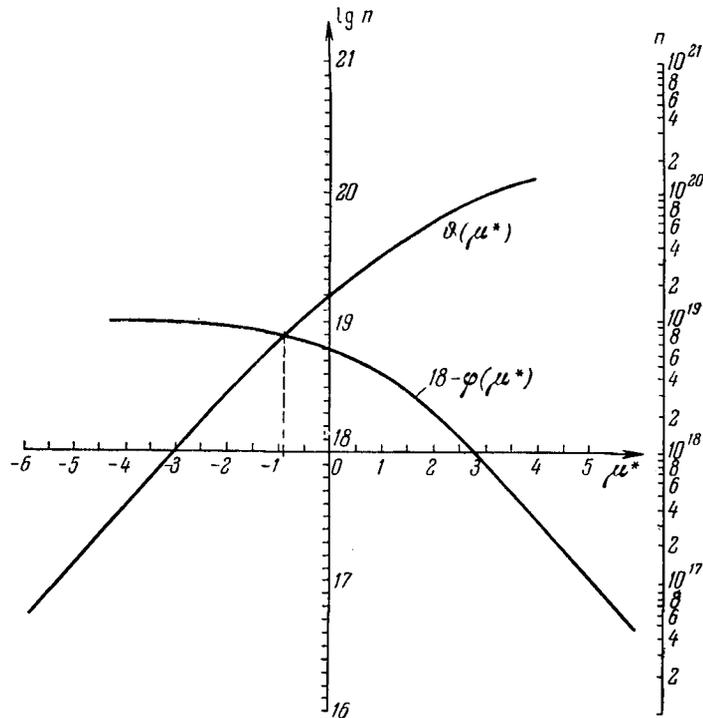


Рис. 2.12. Пример применения графического метода.

графиком $[18-\varphi(\mu^*)]$, либо универсальным графиком $\Phi^*(\mu^*)$ со сдвигом на E_g^* . Лишь в области $N_d - n_d \approx p$ требуется соответствующая интерполяция, подробности выполнения которой приведены в статье [17].

Как и все приближенные методы, рассмотренный способ определения μ^* имеет ограниченную область применения. Самое существенное ограничение заключается в условии $E_d = \text{const}$. Поэтому этот метод тем правильнее позволяет

определять μ^* , чем меньшая концентрация примесей введена в кристалл. С другой стороны, этот метод не имеет ограничений по температуре, в том числе и сверху.

Допущение $E_d = \text{const}$ приводит к тому, что зависимость $\mu^*(T)$, если ее рассматривать в достаточно широком интервале температур, имеет вид кривой с максимумом для кристалла электронного типа проводимости (рис. 2.13) или с минимумом в случае дырочного полупроводника. Со стороны низких температур, оказывается, существует температура вырождения T_1 , при которой происходит «вымерзание» носителей заряда. Со стороны высоких температур также существует вторая температура вырождения T_2 , при которой уже больший вклад вносят электроны, переходящие в зону проводимости из валентной.

В действительности в сильно легированных полупроводниках нет температуры вырождения T_1 , так как в них мелкие примесные уровни, как известно [18], отсутствуют. Поэтому при низких температурах рассмотренным методом пользоваться следует с большой осторожностью.

Аналитические методы. Для того чтобы получить возможность в аналитическом виде описать температурную и концентрационную зависимости уровня Ферми, необходимо предварительно интеграл Ферми $F_{1/2}(\mu^*)$, входящий в уравнение нейтральности, аппроксимировать каким-либо простым выражением, допуская тем самым решение уравнения нейтральности относительно μ^* . Обычно используемые аппроксимации будут рассмотрены в следующем параграфе. Подробное рассмотрение аналитических методов вряд ли имеет смысл, так как они сводятся к простому алгебраическому решению уравнения нейтральности. Кроме того, аналитические решения уступают графическим в смысле их общности, ибо любые аппроксимации имеют ограниченную область применения.

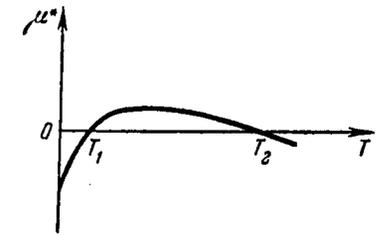


Рис. 2.13. Температурная зависимость приведенного уровня Ферми в кристалле с одним типом донорных центров в предположении $E_d = \text{const}$.

Поправки к определению уровня Ферми. В сильно легированных полупроводниках при $\mu^* \gg 1$ взаимодействие электронов друг с другом и с примесью приводят к некоторому изменению величин μ^* , которые мы до сих пор вычисляли. При этом сильнее сказывается взаимодействие с электронами, чем с примесью [19,20]. Общее выражение для уровня Ферми μ с учетом поправок, обусловленных обоими видами взаимодействия, имеет вид [19]:

$$\mu = \mu_0 \left[1 - \frac{2}{\pi} \mu_0^{-1/2} - \frac{\pi^2 (\mu_0)}{12 (kT)^2} - \pi^{-1} \mu_0^{-1/2} \left(\frac{\mu_0}{kT} \right)^2 \right], \quad (2.4.10)$$

где μ_0 — значение уровня Ферми, рассчитанное без поправок.

При увеличении концентрации носителей заряда в пределе μ стремится к μ_0 . Поэтому роль поправки (2.4.10) невелика.

§ 2.5. Интегралы Ферми

Численные значения интегралов. Фигурировавшие в предыдущих параграфах интегралы $F_{1/2}(\mu^*)$ и $F_{3/2}(\mu^*)$ принадлежат к классу интегралов, с которыми экспериментатор встречается весьма часто. При этом приходится пользоваться и таблицами значений интегралов Ферми и их аппроксимационными формулами. Интегралы Ферми различных индексов будут неоднократно встречаться при рассмотрении многих вопросов, излагаемых в этой книге.

В таблице 2.1 приведены сведения, позволяющие читателю найти необходимые ему численные значения интегралов Ферми.

Методы вычисления интегралов Ферми. Так как числитель подынтегральной функции в интеграле Ферми

$$F_n(\mu^*) = \int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{1 + \exp(x - \mu^*)} \quad (2.5.1)$$

остается конечным при $x \rightarrow 0$, то при $n < -1$ интеграл (2.5.1) расходится и, таким образом, его можно вычислить только при $n \geq -1$. В одном частном случае, при $n = 0$, интеграл Ферми выражается аналитически:

$$F_0(\mu^*) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + \exp(x - \mu^*)} = \int_0^{\infty} \frac{\exp(\mu^* - x) dx}{1 + \exp(\mu^* - x)} = \ln [1 + \exp(\mu^*)]. \quad (2.5.2)$$

Таблица 2.1

Сведения о табулированных значениях интегралов Ферми

Табулированная функция	Значения	Интервал изменения	Шаг изменения	Источник
$\frac{1}{n!} F_n(\mu^*)$	-1; 0; 1; 2; 3; 4	$0 \leq \mu^* \leq 10$	0,1	[21]
$\frac{1}{n!} F_n(\mu^*)$	1; 2; 3; 4	$-4 \leq \mu^* \leq 0$	0,1	[22]
$F_n(\mu^*)$	1/2; 3/2	$-4 \leq \mu^* \leq 20$	0,1	[23]
$F_n(\mu^*)$	-1/2; 1/2; 3/2; 5/2; 7/2; 9/2; 11/2	$-4 \leq \mu^* \leq 20$	0,1	[24]
$\frac{1}{\Gamma(n+1)} F_n(\mu^*)$	-1; 0; 2; 3; 4; -3/2; -1/2; 1/2; 3/2; 5/2; 7/2	$-4 \leq \mu^* \leq 4$ $4 \leq \mu^* \leq 10$	0,1 0,2	[25]

При вычислении интеграла (2.5.1) следует различать два случая: сильно вырожденного и сильно невырожденного электронного газа, т. е. $\mu^* \gg 0$ и $\mu^* \ll 0$.

Случай сильного невырождения $\mu^* \ll 0$. Запишем (2.5.1) в виде:

$$F_n(\mu^*) = \int_0^{\infty} \frac{x^n \exp(\mu^* - x) dx}{1 + \exp(\mu^* - x)}. \quad (2.5.3)$$

Так как $\mu^* < 0$, то $\exp(\mu^* - x) < 1$ во всей области интегрирования. Поэтому знаменатель подынтегрального выражения в (2.5.3) можно разложить в ряд и записать:

$$\begin{aligned} F_n(\mu^*) &= \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ x^n \exp(\mu^* - x) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \exp[k(\mu^* - x)] \right\} dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \exp[(k+1)\mu^*] \cdot \int_0^{\infty} x^n \exp[-x(k+1)] dx. \end{aligned}$$

Положим в последнем интеграле $(k+1)x = u$, тогда

$$F_n(\mu^*) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\exp[(k+1)\mu^*]}{(k+1)^{n+1}} \int_0^{\infty} u^n \exp(-u) du,$$

или

$$F_n(\mu^*) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\exp[(k+1)\mu^*]}{(k+1)^{n+1}} \Gamma(n+1), \quad (2.5.4)$$

где $\Gamma(n+1)$ — гамма-функция, значения которой табулированы, например, в [26]. Если ограничиться главным членом в ряду (2.5.4), то получим:

$$F_n(\mu^*) \approx \Gamma(n+1) \exp(\mu^*). \quad (2.5.5)$$

Это выражение представляет наиболее часто употребляемую аппроксимацию интегралов Ферми для невырожденного случая. Отсюда

$$\left. \begin{aligned} F_{-1/2}(\mu^*) &= \sqrt{\pi} \exp(\mu^*), & F_3(\mu^*) &= 6 \exp(\mu^*), \\ F_0(\mu^*) &= \exp(\mu^*), & F_{7/2}(\mu^*) &= \frac{105}{16} \sqrt{\pi} \exp(\mu^*), \\ F_{1/2}(\mu^*) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(\mu^*), & F_4(\mu^*) &= 24 \exp(\mu^*), \\ F_1(\mu^*) &= \exp(\mu^*), & F_{9/2}(\mu^*) &= \frac{945}{32} \sqrt{\pi} \exp(\mu^*), \\ F_{3/2}(\mu^*) &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \exp(\mu^*), & F_5(\mu^*) &= 120 \exp(\mu^*), \\ F_2(\mu^*) &= 2 \exp(\mu^*), & F_{11/2}(\mu^*) &= \frac{10395}{64} \sqrt{\pi} \exp(\mu^*), \\ F_{5/2}(\mu^*) &= \frac{15\sqrt{\pi}}{8} \exp(\mu^*), & F_6(\mu^*) &= 720 \exp(\mu^*). \end{aligned} \right\} (2.5.6)$$

Эти аппроксимации годятся тем лучше, чем больше по абсолютной величине $|\mu^*|$, т. е. они соответствуют случаю совершенно невырожденного электронного газа. Предел применимости выражений (2.5.6) легко установить, вычисляя ошибку при определении значений F_n с их помощью.

По нашим вычислениям верхний предел составляет $\mu^* = -1$. При $\mu^* = -1$ погрешность оказывается равной:

Интеграл	$F_{-1/2}$	F_0	$F_{1/2}$	F_1	$F_{3/2}$	F_2	$F_{5/2}$	F_3	$F_{7/2}$
Погрешность, %	25	18	12	9	7	5	3	2	1

Для интегралов с индексом, превышающим 7/2, погрешность еще меньше, поэтому она здесь не приводится.

Аппроксимацию более высокого порядка легко получить, оставив не один, а два первых члена в ряду (2.5.4):

$$\begin{aligned} F_n(\mu^*) &\approx \Gamma(n+1) \left[\exp(\mu^*) - \frac{\exp(2\mu^*)}{2^{n+1}} \right] = \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\exp(-\mu^*)} [1 - 2^{-n-1} \exp(\mu^*)]. \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Пользоваться такой аппроксимацией довольно неудобно, поэтому Эренберг [27] предложил заменить (2.5.7) более простым выражением вида

$$F_n(\mu^*) \approx \frac{\Gamma(n+1)}{\exp(-\mu^*) + C(n)}, \quad (2.5.8)$$

где C_n заменяет второй член в (2.5.7). Численные значения C_n приведены в табл. 2.2

Таблица 2.2

n	$-1/2$	0	$1/2$	1	$3/2$	2	$5/2$
$C(n)$	0,6	0,375	0,25	0,18	0,12	0,08	0,06
n	3	$7/2$	4	$9/2$	5	$11/2$	6
$C(n)$	0,04	0,03	0,02	0,015	0,01	0,0075	0,005

Аппроксимация (2.5.8) с $C(n)$, приведенными в таблице 2.2, дает ошибку менее 5% для области $\mu^* < -1,8$.

Случай сильного вырождения $\mu^* \gg 0$. Для области больших положительных значений μ^* Дингл [21] вывел общую формулу для вычисления $F_n(\mu^*)$ в виде:

$$F_n(\mu^*) = 2\Gamma(n+1)(\mu^*)^{n+1} \sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}} \frac{t_{2k}(\mu^*)^{-2k}}{\Gamma(n+2-2k)}. \quad (2.5.9)$$

Верхний предел суммирования $(n+1)/2$ показывает, что надо взять наибольшее целое число, содержащееся в $(n+1)/2$ (например, 1 для $n=2$; 2 для $n=3$ и т. д.). Функции t_{2k} определяются так:

$$t_0 = \frac{1}{2}; \quad t_{2k} = \frac{1}{2} (2\pi)^{2k} [1 - 2^{(1-2k)}] \frac{B_k}{(2k)!}, \quad (2.5.10)$$

где B_k — числа Бернулли, приведенные в таблице 2.3. Там же приведены и значения первых четырех функций t_{2k} .

Таблица 2.3

k	1	2	3	4
B_k	$1/6$	$1/30$	$1/42$	$1/30$
t_{2k}	$\frac{\pi^2}{12}$	$\frac{7\pi^4}{720}$	$\frac{31\pi^6}{30 \cdot 240}$	$\frac{127\pi^8}{1 \cdot 209 \cdot 600}$

Если в (2.5.9) ограничиться лишь первым членом, то мы получим простейшую аппроксимацию интегралов Ферми, справедливую при сильном вырождении

$$F_n(\mu^*) = \frac{(\mu^*)^{n+1}}{n+1}. \quad (2.5.11)$$

На рис. 2.14 показаны ошибки, возникающие при пользовании (2.5.11). Видно, что применимость этой аппроксимации, которую мы будем называть аппроксимацией первого порядка, ограничивается областью весьма больших значений μ^* . Отметим, что с повышением индекса погрешность в определении F_n возрастает. Аппроксимацию второго порядка можно получить при учете двух членов суммы в (2.5.9):

$$F_n(\mu^*) = \frac{(\mu^*)^{n+1}}{n+1} + \frac{n\pi^2}{6} (\mu^*)^{n-1}. \quad (2.5.12)$$

В связи с этим при $\mu^* \gg 0$ интегралы $F_n(\mu^*)$ приобретают вид:

$$\left. \begin{aligned} F_{-1/2} &= 2 \left((\mu^*)^{1/2} + \frac{\pi^2}{24} (\mu^*)^{-3/2} \right), \quad F_0 = \mu^*, \\ F_{1/2} &= \frac{2}{3} \left((\mu^*)^{3/2} + \frac{\pi^2}{8} (\mu^*)^{-1/2} \right), \\ F_1 &= \frac{1}{2} \left((\mu^*)^2 + \frac{\pi^2}{3} \right), \\ F_{3/2} &= \frac{2}{5} \left((\mu^*)^{5/2} + \frac{5\pi^2}{8} (\mu^*)^{1/2} \right), \\ F_2 &= \frac{1}{3} \left((\mu^*)^3 + \pi^2 \mu^* \right), \\ F_{5/2} &= \frac{2}{7} \left((\mu^*)^{7/2} + \frac{35\pi^2}{24} (\mu^*)^{3/2} \right), \\ F_3 &= \frac{1}{4} \left((\mu^*)^4 + 2\pi^2 (\mu^*)^2 \right), \\ F_{7/2} &= \frac{2}{9} \left((\mu^*)^{9/2} + \frac{63\pi^2}{24} (\mu^*)^{5/2} \right), \\ F_4 &= \frac{1}{5} \left((\mu^*)^5 + \frac{10\pi^2}{3} (\mu^*)^3 \right), \\ F_{9/2} &= \frac{2}{11} \left((\mu^*)^{11/2} + \frac{33\pi^2}{8} (\mu^*)^{7/2} \right), \\ F_5 &= \frac{1}{6} \left((\mu^*)^6 + 5\pi^2 (\mu^*)^4 \right), \\ F_{11/2} &= \frac{2}{13} \left((\mu^*)^{13/2} + \frac{143\pi^2}{24} (\mu^*)^{9/2} \right), \\ F_6 &= \frac{1}{7} \left((\mu^*)^7 + 7\pi^2 (\mu^*)^5 \right). \end{aligned} \right\} (2.5.13)$$

Нетрудно убедиться, что, отбросив вторые слагаемые в этих выражениях, мы получим аппроксимацию первого порядка (2.5.11).

Случай промежуточного вырождения $\mu^* \sim 0$. Наиболее труден для аппроксимации промежуточный случай небольших по абсолютному значению величин μ^* . С малой точностью (десятки процентов) и при $\mu^* \sim 0$ можно пользоваться приведенными выше аппроксимациями. Если же требуется более высокая точность, то приходится пользоваться только численными значениями $F_n(\mu^*)$ из соответствующих таблиц.

Рекуррентные формулы. В некоторых случаях можно вычислить значение интеграла Ферми одного какого-либо

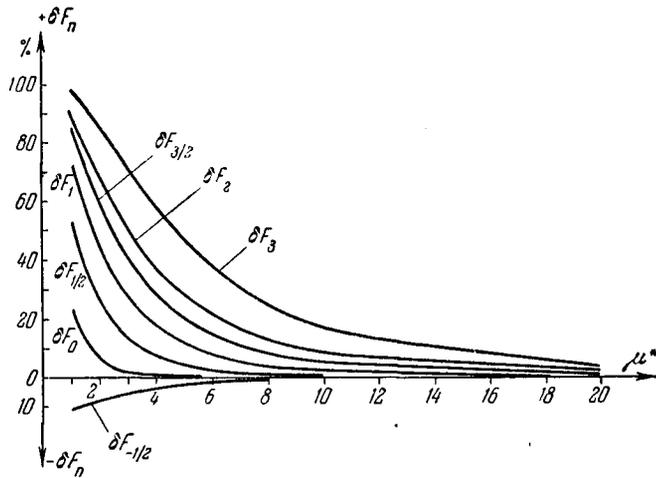


Рис. 2.14. Погрешности в определении интегралов Ферми при использовании аппроксимации (2.5.11).

индекса по известной величине интеграла Ферми другого индекса. Продифференцируем для этого интеграл

$$\frac{dF_{n+1}}{dA} = \int_0^{\infty} \frac{x^{n+1} e^{xA^{-2}}}{(A^{-1}e^x + 1)^2} dx, \quad (2.5.14)$$

где введено обозначение $e^{\mu^*} = A$. Нетрудно убедиться, что

$$\frac{d}{dx} (A^{-1}e^x + 1)^{-1} = -\frac{A^{-1}e^x}{(A^{-1}e^x + 1)^2}.$$

Подставляя это выражение в подынтегральную функцию (2.5.14), получим:

$$\frac{d}{dA} F_{n+1} = -A^{-1} \int_0^{\infty} x^{n+1} \frac{d}{dx} (A^{-1}e^x + 1)^{-1} dx,$$

что при интегрировании по частям дает для $n > -1$:

$$\frac{d}{dA} F_{n+1} = (n+1) A^{-1} F_n.$$

Поэтому

$$F_{n+1} = (n+1) \int_0^A A^{-1} F_n dA. \quad (2.5.15)$$

Если теперь воспользоваться для F_n (μ^*) выражением (2.5.8), то

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= \Gamma(n+2) \int_0^A \frac{dA}{1+AC(n)} = \\ &= \frac{\Gamma(n+2)}{C(n)} \ln [1+AC(n)]. \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

Точно так же можно получить

$$F_{n+2} = \frac{\Gamma(n+3)}{C(n)} R(n) [1+AC(n)], \quad (2.5.17)$$

где $R(n)$ -функция достаточно полно табулирована в [28]. Некоторые значения этой функции приведены в таблице 2.4.

Таблица 2.4

n	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
$R(n)$	-1,645	-0,582	0,000	0,448	0,822	1,437	1,939

Г Л А В А 3
КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ
В СИЛЬНО ЛЕГИРОВАННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ

§ 3.1. Предварительные замечания

Кинетическое уравнение. До сих пор мы рассматривали носители заряда в статистическом равновесии. Помимо этого, большой практический и теоретический интерес представляет изучение тех процессов, которые происходят при воздействии на носители внешних сил (электрическое и магнитное поля, температура и т. п.). При этом носители заряда будут находиться уже в неравновесных условиях. Возникнут явления, связанные с направленным перемещением носителей — явления переноса, чаще называемые кинетическими явлениями.

Существует несколько теоретических подходов при изучении кинетических явлений. Наиболее распространенным из них является метод кинетического уравнения Больцмана [1—3], с помощью которого удается вычислить подвижность носителей заряда, электропроводность, постоянную Холла, термо-ЭДС, теплопроводность и другие кинетические коэффициенты, характеризующие поведение полупроводника при воздействии на него внешних сил.

К другим известным методам определения кинетических коэффициентов относятся: решение уравнения движения носителей заряда, усредненных с помощью так называемой весовой функции [4,5]; метод матрицы плотности Кубо [6] и метод функций Грина [7].

Мы остановимся лишь на методе кинетического уравнения, поскольку он позволяет сравнительно просто получить ценную информацию о кинетических процессах, а получаемые при этом результаты во многих случаях

совпадают с решением аналогичных задач другими методами [8].

Мы ограничим изложение рассмотрением лишь слабых внешних сил, изменяющих (возмущающих) только функцию распределения частиц, но не их общее количество в кристалле.

Таким образом, на носители, с одной стороны, действуют внешние силы, стремящиеся упорядочить их перемещение, а с другой — столкновения, стремящиеся разупорядочить их движение. Кинетическое уравнение как раз и выражает тот факт, что изменение функции распределения частиц $f(k, r, t)$ во времени обусловлено действием этих двух конкурирующих процессов:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_n + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c. \quad (3.1.1)$$

Первый член в правой части этого уравнения представляет изменение функции f в результате переноса, т. е. воздействия внешних сил, а второй — изменение этой же функции в результате хаотических столкновений носителей. В таком общем виде кинетическое уравнение без труда можно получить как следствие уже известной нам теоремы Лиувилля (см. § 1 гл. 2).

Нас будут интересовать стационарные кинетические явления, в которых регистрируемый на опыте макроскопический эффект возникает после многочисленных микроскопических актов столкновений частиц системы. Поэтому можно считать состояние такой системы установившимся, т. е. считать $\partial f / \partial t = 0$. Следовательно, (3.1.1) перейдет в

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_n + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = 0. \quad (3.1.2)$$

Отсылая читателя к подробному выводу кинетического уравнения, например к [3], мы запишем здесь выражения для его составляющих:

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_n = \frac{1}{\hbar} (F \nabla_k f) + (v \nabla f), \quad (3.1.3)$$

где F — обобщенная внешняя сила, действующая на носитель заряда в кристалле; v — скорость носителей; ∇_k и ∇ — градиенты в пространстве волновых чисел и координат

соответственно;

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = \frac{f - f_0}{\tau} = \frac{f_1}{\tau}, \quad (3.1.4)$$

где f_1 — добавка к старой равновесной функции распределения f_0 , необходимая для получения новой функции распределения f , справедливой при действии возмущающих сил; τ — постоянная, имеющая размерность времени, физический смысл которой будет вскрыт позже. Так как мы рассматриваем действие слабых возмущающих сил, то можно наложить добавочное условие

$$f_1 \ll f_0. \quad (3.1.5)$$

Поэтому новую функцию распределения f можно представить в виде разложения

$$f(\mathbf{k}) = f_0(\mathbf{k}) + \alpha \frac{\partial f_0}{\partial E} + \beta \frac{\partial^2 f_0}{\partial E^2}, \quad (3.1.6)$$

где α и β — коэффициенты разложения. Необходимо иметь в виду, что $f_0(\mathbf{k}) \equiv f_0(E)$, так как

$$f_0 = [1 + \exp(\varepsilon^* - \mu^*)]^{-1} \text{ и } E = \hbar^2 k^2 / 2m^*$$

(мы рассматриваем параболическую зону).

Ограничиваясь в (3.1.6) первыми двумя членами разложения, запишем добавку к старой функции распределения в виде:

$$\alpha \frac{\partial f_0}{\partial E} = f_1(\mathbf{k}) = -C(E) \lambda(\mathbf{k}) \frac{\partial f_0}{\partial E}, \quad (3.1.7)$$

т. е. в виде произведения некоторых функций от \mathbf{k} и от E . Это оправдано тем, что возмущенная функция распределения должна определяться не только энергией частиц, но и их скоростью. Теперь задача сводится к отысканию явного вида $C(E)$ и $\lambda(\mathbf{k})$. Для этого сначала будем считать, что на кристалл действует лишь одна внешняя сила $e\mathcal{E}$ от однородного электростатического поля \mathcal{E} . Тогда кинетическое уравнение приобретает вид:

$$\frac{e}{\hbar} \mathcal{E} \nabla_{\mathbf{k}} f = -\frac{C(E) \lambda(\mathbf{k})}{\tau(\mathbf{k})} \frac{\partial f_0}{\partial E}. \quad (3.1.8)$$

Для того, чтобы вычислить левую часть этого выражения с точностью до первого порядка в f_1 , достаточно положить

в соответствии с (3.1.5.) $f = f_0$. При этом

$$\nabla_{\mathbf{k}} f \approx \nabla_{\mathbf{k}} f_0 = \frac{\hbar^2}{m^*} \mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial E}, \quad (3.1.9)$$

а (3.1.8.) запишется так:

$$\frac{\hbar e}{m^*} \mathcal{E} \mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial E} = -\frac{C(E) \lambda(\mathbf{k})}{\tau(\mathbf{k})} \frac{\partial f_0}{\partial E}. \quad (3.1.10)$$

Отсюда видно, что

$$\lambda(\mathbf{k}) \equiv \mathbf{k} \quad (3.1.11)$$

и

$$C(E) = -\frac{e\hbar}{m^*} \tau(\mathbf{k}) \mathcal{E}. \quad (3.1.12)$$

Таким образом, получаем

$$f_1(\mathbf{k}) = -C(E) \mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial E}, \quad (3.1.13)$$

$$f(\mathbf{k}) = f_0(\mathbf{k}) - C(E) \mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial E}. \quad (3.1.14)$$

Можно показать, что тождество $\lambda(\mathbf{k}) \equiv \mathbf{k}$ остается справедливым в случаях действия любых сил. Что же касается функции $C(E)$, то ее вид существенно меняется в зависимости от того, какие силы действуют на носители заряда в кристалле. Именно эта функция и определяет тот или иной кинетический коэффициент.

Цель метода кинетического уравнения как раз и состоит в том, чтобы выразить плотность потоков электричества \mathbf{j}_e и тепла \mathbf{q} через функцию f_1 , т. е. в конечном счете через $C(E)$.

Проиллюстрируем это на примере электропроводности.

Как известно, плотность электрического тока

$$\mathbf{j}_e = e \int \mathbf{v} dn,$$

где dn — число носителей заряда в элементе пространства волновых чисел ($dk_x dk_y dk_z = d^3k$), которое равно

$$dn = \frac{2}{(2\pi)^3} f(\mathbf{k}) d^3k.$$

В результате

$$\mathbf{j}_e = \frac{2e}{8\pi^3} \int \mathbf{v} f(\mathbf{k}) d^3k = \frac{2e\hbar}{(2\pi)^3 m^*} \int \mathbf{k} f(\mathbf{k}) d^3k. \quad (3.1.15)$$

Подставляя сюда (3.1.14) и принимая во внимание, что в отсутствие внешних сил ток равен нулю, т. е.

$$\int \mathbf{k} f_0(\mathbf{k}) d^3k = 0,$$

получим:

$$\mathbf{j}_e = - \frac{2e\hbar}{(2\pi)^3 m^*} \int \mathbf{k} C(E) \mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial E} d^3k.$$

Заменяя

$$\frac{\partial f_0}{\partial E} = \frac{m^*}{\hbar^2} \frac{\partial f_0}{\partial k}$$

и интегрируя в сферических координатах k, θ, φ , где

$$k_x = k \sin \theta \cos \varphi,$$

$$k_y = k \sin \theta \sin \varphi,$$

$$k_z = k \cos \theta,$$

$$d^3k = k^2 \sin \theta d\theta d\varphi dk,$$

найдем:

$$\mathbf{j}_e = - \frac{e}{3\pi^2 \hbar} \int_0^\infty k^3 C(E) \frac{\partial f_0}{\partial k} dk. \quad (3.1.16)$$

Или, подставляя сюда выражение для $C(E)$ из (3.1.12):

$$\mathbf{j}_e = \frac{e^2 \mathcal{E}}{3\pi^2 m^*} \int_0^\infty k^3 \tau(\mathbf{k}) \frac{\partial f_0}{\partial k} dk. \quad (3.1.17)$$

Сопоставляя это выражение с известным

$$\mathbf{j}_e = \sigma \mathcal{E},$$

получим выражение для электропроводности

$$\sigma = \frac{e^2}{3\pi^2 m^*} \int_0^\infty k^3 \tau(\mathbf{k}) \frac{\partial f_0}{\partial k} dk. \quad (3.1.18)$$

Аналогично, действуя на кристалл иными силами, можно получить выражения для других кинетических коэффициентов. Так, если на кристалл будет действовать кроме электрического еще и магнитное поле, то вместо (3.1.12) мы должны получить:

$$C(E) = C(\mathcal{E}, H)$$

, соответственно, мы найдем выражение для постоянной Холла.

Ясно, что в общем случае функция $C(E)$ является функцией приложенных сил.

В таблице 3.1 показано, к каким кинетическим эффектам приводит воздействие тех или иных внешних сил. Подробное рассмотрение большинства из этих эффектов и составит предмет следующих параграфов данной главы.

Таблица 3.1

Выражения для обобщенных сил F_i в кинетическом уравнении Больцмана

Кинетический эффект	Действующая сила	Обобщенная сила
Электропроводность . . .	\mathcal{E}	$-e \mathcal{E}$
Эффект Холла	\mathcal{E}, H	$-e \left(\mathcal{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, H] \right)$
Термо-ЭДС	∇T	$-e \nabla \left(\varphi - \frac{\mu}{e} \right)$
Теплопроводность	∇T	$-e \nabla \left(\varphi - \frac{\mu}{e} \right)$
Эффект Нернста— Эттингсгаузена	$\nabla T, H$	$-e \left\{ \nabla \left(\varphi - \frac{\mu}{e} \right) + \frac{1}{e} [\mathbf{v}, H] \right\}$
Магнетосопротивление .	\mathcal{E}, H	$-e \left(\mathcal{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, H] \right)$

Принятые обозначения: \mathcal{E} — внешнее электрическое поле; H — внешнее магнитное поле; ∇T — градиент температуры; φ — электростатический потенциал; c — скорость света; e — заряд электрона; \mathbf{v} — скорость электрона.

Время релаксации. В выражение (3.1.18) для электропроводности (а в дальнейшем мы увидим, что и в формулы для других кинетических коэффициентов) входит величина τ . Это явилось следствием того, что τ определяет вид члена столкновений (3.1.4) в кинетическом уравнении. Если его проинтегрировать, то из

$$f - f_0 = |f - f_0|_{t=0} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

видно, что τ — это время, в течение которого разность $(f - f_0)$ уменьшается в e раз по сравнению с первоначальным значением. Следовательно, время τ характеризует стремление частиц прийти к равновесию и оно называется *временем релаксации*.

Из определения следует, что, вообще говоря, τ — функция скорости частиц $\tau(k)$ или их энергии $\tau(E)$.

Использование понятия времени релаксации есть уже некое приближение, которое достаточно строго обосновано лишь в двух случаях: если столкновения частиц упругие, т. е. изменение энергии носителей заряда при столкновении мало ($\Delta E \ll E$), и если имеет место закон случайного распределения носителей заряда по скоростям, т. е. имеет место изотропность — равновероятное рассеяние их по всем направлениям.

Исследование кинетических эффектов показывает, что первое допущение практически всегда выполняется. Второе допущение выполняется в случае, если поверхности постоянной энергии — сферы. Если же они представляют собой эллипсоиды, то, строго говоря, надо учитывать анизотропию рассеяния, и при этом время релаксации уже будет не скалярной величиной, а тензором второго ранга [9,10]. В случае еще более сложного закона дисперсии, например, такого, как (1.1.11), справедливого для Ge и Si дырочного типа проводимости, вообще невозможно строго ввести понятие времени релаксации. Поэтому в этом случае теория кинетических явлений значительно усложняется [3].

Применимость кинетического уравнения. Основное условие применимости кинетического уравнения состоит в предположении о том, что понятие свободного пробега частиц имеет смысл, т. е. длительность столкновения Δt мала по сравнению с временем между двумя последовательными столкновениями τ . Критерий, соответствующий этому условию, легко получить, исходя из принципа неопределенности Гейзенберга, по которому $\Delta E \Delta t \sim \hbar$, где ΔE — неопределенность в значении энергии частицы, а Δt — длительность возмущения.

С другой стороны, в главе 2 было показано, что вблизи уровня Ферми μ функция распределения изменяется чрезвычайно быстро. Очевидно, должно иметь место неравенство $\Delta E < kT$, так как, в противном случае, значения

функции распределения будут неопределенными. Таким образом, $\hbar/\Delta t < kT$. Или заменяя Δt на τ , получим:

$$\tau > \frac{\hbar}{kT}. \quad (3.1.19)$$

Этот критерий более строго выведен в [11,12]. Его можно записать иначе, выразив величину τ через измеряемую на опыте величину подвижности

$$u > \frac{e\hbar}{m^*kT}. \quad (3.1.20)$$

Если теперь воспользоваться значениями m^* , например, для Ge и Si, то получим соответственно

$$u > \frac{1,1 \cdot 10^5}{T} \text{ и } u > \frac{5,15 \cdot 10^4}{T}.$$

Сопоставляя эти неравенства с наблюдаемыми на опыте подвижностями, мы приходим к малоутешительному выводу о применимости кинетического уравнения в случае Ge и Si лишь до концентраций порядка 10^{17} см^{-3} при 300°K . В случае низких температур метод кинетического уравнения оказывается непригодным для еще менее легированных кристаллов. Здесь мы видим полную аналогию с металлами, у которых время релаксации электронов также не удовлетворяет равенству (3.1.19) [12].

В случае металлов было показано [12], что (3.1.19) следует заменить другим критерием

$$\tau > \frac{\hbar}{\mu}. \quad (3.1.21)$$

Можно указать еще ряд работ, в которых была подтверждена правомерность такой замены [13—14].

Сильно легированные полупроводники вполне могут рассматриваться как плохо проводящие металлы. И в тех, и в других веществах уровень Ферми находится в зоне проводимости. Так как рассеиваются лишь те электроны, которые обладают энергией, равной энергии Ферми, то, следовательно, средняя энергия электронов в сильно легированных полупроводниках будет равна не kT , а μ .

Таким образом, критерий (3.1.21) оказывается здесь более справедливым, чем выражение (3.1.19).

Очевидно, что чем сильнее легирован полупроводник, тем обоснованнее применение (3.1.21) в качестве критерия применимости кинетического уравнения. Сомнительной могла показаться применимость кинетического уравнения в полупроводниках с не сильно вырожденным электронным газом. Для германия и кремния — это область концентраций носителей от 10^{17} см^{-3} до $3-5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Тем не менее в случае стационарных явлений и при промежуточном вырождении метод кинетического уравнения применим, несмотря на невыполнение (3.1.21) [15]. Поэтому дальнейшее изложение явлений переноса мы будем рассматривать в рамках кинетического уравнения.

Другой критерий применимости этого метода относится к явлениям переноса в магнитном поле. Кинетическое уравнение при этом остается по существу классическим или полуклассическим, так как в нем не учитывается квантование электронных орбит в присутствии магнитного поля. Такой приближенный подход законен только в случае слабых полей, когда энергия теплового движения kT больше расстояния между двумя соседними дискретными состояниями в магнитном поле H [11]:

$$kT > \frac{1}{2} \frac{e\hbar}{m^*c} H. \quad (3.1.22)$$

Нетрудно убедиться, что это условие легко выполняется практически для всех полупроводников и при любых температурах, пока $H < 10^4$ э.

§ 3.2. Механизмы рассеяния

Приход системы к равновесию после прекращения действия внешней силы может произойти только в результате столкновений частиц в этой системе, т. е. посредством *рассеяния*. Центры рассеяния — объекты, с которыми могут взаимодействовать («соударяться») свободные носители заряда, — могут иметь самую различную природу. Ими могут быть примесные атомы (как ионизованные, так и нейтральные), тепловые колебания атомов решетки (акустические и оптические), структурные дефекты (дислокации, вакансии) и другие. Взаимодействие носителей заряда с та-

кого рода центрами рассеяния, в конечном счете, и определяет реальные величины всех кинетических коэффициентов.

Рассеяние акустическими колебаниями атомов решетки. Существует два метода решения задачи о рассеянии свободных носителей заряда на тепловых колебаниях атомов решетки: метод, основанный на учете взаимодействия носителей с фононным газом [16], и метод деформационного потенциала [17].

В первом методе колебаниям атомов решетки приписываются свойства квазичастиц, именуемых *фононами*.

Во втором методе эти колебания представляются в виде продольных и поперечных волн. При их распространении по кристаллу на периодический потенциал внутреннего поля будет накладываться дополнительный периодический потенциал. А это, в свою очередь, повлечет изменение энергетической структуры кристалла. Появляется «рябь» на границах зон. Это эквивалентно появлению переменной потенциальной энергии носителей заряда — так называемого *потенциала деформации*.

Теория фононного подхода разрабатывалась в [18], а теория деформационного потенциала — в [19]. Полученные при этом выражения для времени релаксации приведены в таблице 3.2. Эти выражения справедливы для чистого беспримесного полупроводника. Сравнение формул для τ_L показывает, что оба метода дают один и тот же характер зависимости от температуры и от эффективной массы носителей заряда. Более того, в [20] была вскрыта связь между обеими теориями рассеяния и показано, что константы, входящие в выражения для τ_L , связаны между собой соотношением $E_1 = 2C/3$. Физический смысл константы C заключается в том, что она характеризует интенсивность взаимодействия электрона с колебаниями атомов решетки. Константа E_1 характеризует смещение дна свободной зоны при единичной объемной деформации кристалла.

Рассмотрим, насколько справедливы выражения таблицы 3.2 для сильно легированных кристаллов. Очевидно, что достаточно будет исследовать какое-либо одно из них, например первое. Вернемся к его выводу. При этом, отсылая читателя к деталям [21], мы будем исходить из

Таблица 3.2

$$\tau = \tau_0 (\epsilon^*)^{r-1/2}$$

Центры рассеяния, r	τ_0	Принятые обозначения
Акустические колебания (фононная теория), $r=0$	$\frac{9\pi}{4\sqrt{2}} \frac{\hbar^4 \omega^2 M}{C^2 a^3 (m^* kT)^{3/2}}$	ω — скорость звука; M — масса атома; C — постоянная Блоха; a — параметр решетки
Акустические колебания (теория деформационного потенциала), $r=0$	$\frac{\pi \hbar^4 C_{11}}{\sqrt{2} E_1^2 (m^* kT)^{3/2}}$	C_{11} — упругая постоянная кристалла при продольных колебаниях; $E_1 = \Omega_0 dE_0/d\Omega$; E_0 — энергия края разрешенной зоны; Ω_0 — начальный объем элементарной ячейки кристалла до деформации
Оптические колебания ($T \ll \theta_D$) в сильно легированных кристаллах, $r=1/2$	$\frac{a^3 M}{2\pi \sqrt{2} m^*} \frac{(\hbar \omega_0)^{3/2}}{(\gamma Z e^2)^2} \times$ $\times \left[\exp\left(\frac{\hbar \omega_0}{kT}\right) - 1 \right] (1-f_0)$	ω_0 — предельная частота продольных оптических колебаний; $Z e$ — заряд иона; γ — фактор, учитывающий поляризуемость ионов; f — функция Ферми; θ_D — температура Дебая
Оптические колебания ($T \ll \theta_D$) в слабо легированных кристаллах, $r=1/2$	$\frac{a^3 M}{2\pi \sqrt{2} m^*} \frac{(\hbar \omega_0)^{3/2}}{(\gamma Z e^2)^2} \times$ $\times \left[\exp\left(\frac{\hbar \omega_0}{kT}\right) - 1 \right]$	

Продолжение табл. 3.2

Центры рассеяния, r	τ_0	Принятые обозначения
Оптические колебания ($T \gg \theta_D$) вне зависимости от степени легирования, $r=1$	$\frac{a^3 M}{2\pi \sqrt{2} m^* kT} \left(\frac{\hbar \omega_0}{\gamma Z e^2} \right)^2$	
Ионы примеси, $r=2$	$\frac{\sqrt{2} m^* \kappa^2}{\pi e^4 N_i g}$; $g = \ln(1+b) - \frac{b}{1+b}$; $b = \frac{8m^* E}{\hbar^2} R_0^2$	κ — диэлектрическая постоянная N_i — концентрация ионов примеси
Нейтральные примеси, $r=1/2$	$\frac{(m^*)^2 e^2}{20 \hbar^3 \kappa N_n}$	N_n — концентрация нейтральных примесей

промежуточного результата, согласно которому время релаксации определяется как

$$\frac{1}{\tau_L} = \frac{V}{8\pi^2} \frac{m^*}{\hbar^2 k^3} \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} \omega(q) (2N_q + 1) q^3 dq, \quad (3.2.1)$$

где V — объем кристалла; k — волновое число электрона; q — волновое число фонона; $\omega(q)$ — вероятность испускания (поглощения) фонона при рассеянии; N_q — среднее число фононов, обладающих волновым числом q , т. е. функция распределения фононов. Для нас важно, что интегрирование идет во всем интервале значений q . Определим пределы этого интервала. Если энергия электронов $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$ и частота продольных акустических волн $\omega_q = vq$, где v — скорость продольных звуковых волн, то по закону сохранения энергии следует:

$$\frac{\hbar^2 (k \pm q)^2}{2m^*} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \pm \hbar v q. \quad (3.2.2)$$

Причем верхний знак соответствует поглощению фонона, а нижний — его испусканию. Отсюда

$$q = \mp 2k \cos \vartheta \pm \frac{2m^*v}{\hbar}, \quad (3.2.3)$$

где ϑ — угол между направлениями векторов k и q . Оценим второе слагаемое в (3.2.2), для чего поделим его на k :

1) чистые полупроводники:

$$\frac{2m^*v}{\hbar k} = \frac{2m^*v}{p} \approx \frac{2m^*v}{\sqrt{m^*k_0T}} = 2 \sqrt{\frac{T_{кр}}{T}}, \quad (3.2.4)$$

где $T_{кр} = m^*v^2/k_0$, а k_0 — константа Больцмана. Так как электроны распределены по Больцману, то здесь было принято среднее значение p равным $\sqrt{m^*k_0T}$. Полагая $v = 10^5$ см/сек и $m^* = 0,5 \cdot 10^{-27}$ г, получим $T_{кр} < 1^\circ$ К; поэтому при всех температурах $T \gg 1^\circ$ К можно пренебречь вторым слагаемым в (3.2.3) и

$$q = \mp 2k \cos \vartheta, \quad (3.2.5)$$

а отсюда следует, что интервал интегрирования по q будет простирается от $q_{мин} = 0$ до $q_{макс} = 2k$. Пренебрежение вторым слагаемым в (3.2.3) эквивалентно отбрасыванию второго слагаемого в (3.2.2), т. е. отбрасыванию члена, описывающего неупругость столкновений электронов с фононами.

Так как для электронов среднее значение k при 300° К составляет примерно 10^7 см, а q_0 по теории Дебая [22] равно $q_0 = (6\pi^2/a^3)^{1/3} \approx 10^8$, то $q_{макс} \ll q_0$;

2) сильно легированные полупроводники:

Основное отличие от чистых полупроводников заключается в том, что электроны распределены по Ферми—Дираку, а не по Больцману. Поэтому вместо (3.2.4) будем иметь:

$$\frac{2m^*v}{\hbar k} \approx \frac{2m^*v}{\hbar k(\mu)}, \quad (3.2.6)$$

где $k(\mu)$ — волновой вектор, соответствующий электронам, обладающим энергией Ферми.

Такая замена обусловлена тем, что даже те небольшие изменения энергии носителей заряда, которые все же имеют место при их рассеянии, не могут быть у электро-

нов с $E < \mu$, так как все состояния в этой области полностью заполнены. Лишь в узком тепловом ($\pm k_0T$) слое вблизи $E = \mu$ содержатся электроны, которые способны несколько изменять свою энергию и, следовательно, рассеиваться. Величина волнового вектора таких электронов будет при $\mu^* \geq 2$

$$k(\mu) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m^*\mu} > 10^8 \text{ см},$$

т. е. примерно на порядок больше, чем у чистых полупроводников.

Соотношение (3.2.6), таким образом, будет выполнено при всех температурах:

$$\sqrt{\frac{k_0T_{кр}}{\mu}} \ll 1.$$

Следовательно, и в случае сильно легированных полупроводников электроны рассеиваются акустическими колебаниями упруго. Значит, (3.2.5) тоже остается справедливым. Но для чистых полупроводников мы имели $q_{макс} \ll q_0$, а для сильно легированных будет $q_{макс} = 2k \approx q_0$. Поэтому, как показано в [3], следует различать два случая: $k(\mu) < q_0/2$ и $k(\mu) > q_0/2$. Если выполняется первое из этих условий, интегрирование (3.2.1) должно идти от нуля до $2k(\mu)$ и выражение для τ_L остается тем же, что и приведенное в таблице 3.2. Если же выполняется второе условие, то верхний предел интегрирования в (3.2.1) будет равен q_0 и выражение для τ_L будет иметь вид [3]:

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi^3} \frac{VMm^{*1/2}k_0\theta_D^3}{\hbar^4 C^2 T} E^{3/2}, \quad (3.2.7)$$

где θ_D — температура Дебая, равная $\theta_D = \hbar v q_0/k_0$.

В таблице 3.3. приведены граничные значения μ^* , необходимые для выполнения условия $k(\mu) > q_0/2$, начиная с которых проявляется действие (3.2.7). Видно, что только для хороших металлов (3.2.7) оказывается справедливым. В полупроводниках же при всех достижимых концентрациях носителей заряда выражения для τ_L совпадают с формулами, приведенными в таблице 3.2.

Однако в принципе это не значит, что численные значения τ_L не зависят от степени легирования полупроводника. Так, например, совершенно неясно, меняется ли

Таблица 3.3

Полупроводник	T °K	$\mu_{\text{гран}}^*$	Полупроводник	T °K	$\mu_{\text{гран}}^*$
Ge	100	81	Si	100	51
Ge	300	27	Si	300	17
Ge	500	16	Si	500	10

константа E_1 при легировании. Точно так же не очевидно постоянство параметра решетки a или модуля упругости C_{11} . Каких-либо теоретических соображений на этот счет пока не имеется. Экспериментальные же данные показывают, что, например, параметр решетки в ряде случаев может изменяться. (Этот вопрос был рассмотрен в первой главе в связи с изменением зонной структуры полупроводника при сильном легировании.)

Рассеяние оптическими колебаниями атомов решетки. Чем больше «степень ионности» кристалла, тем более вероятно взаимодействие носителей заряда с оптическими колебаниями атомов решетки. Существенное отличие от рассеяния на акустических фононах заключается в абсолютной величине ΔE — изменения энергии носителя при рассеянии. При поглощении (или испускании) акустического фонона величина $\Delta E = \pm \hbar v q$ очень мала по сравнению с E и, следовательно, рассеяние упругое. При взаимодействии же с оптическими фононами $\Delta E = \pm \hbar \omega_0$ может быть как меньше, так и больше E в зависимости от температуры. При высоких температурах, когда $\hbar \omega_0 \ll k_0 T$, величина ΔE будет мала. Рассеяние и в этом случае можно считать упругим. В области низких температур, когда $\hbar \omega_0 \gg k_0 T$, электроны могут только поглощать фононы, причем энергия их сильно изменяется. Поэтому понятие времени релаксации теряет смысл. Однако если взаимодействие носителя с оптическим фононом рассматривать происходящим в два этапа: поглощение кванта и мгновенное испускание точно такого же кванта, то время релаксации ввести все же можно [23]. При таком подходе пренебрегают временем, в течение которого электрон находится в состоянии с большой энергией. Это оказывается допустимым, так как вероятность испускания фонона, пропорцио-

нальная $N_q + 1$, при низких температурах много больше, чем вероятность поглощения фонона, которая пропорциональна N_q . Действительно, так как N_q определяется функцией Планка

$$N_q = \left[\exp \left(\frac{\hbar \omega_0}{k_0 T} \right) - 1 \right]^{-1},$$

то

$$\frac{N_q + 1}{N_q} \approx \exp \left(\frac{\hbar \omega_0}{k_0 T} \right) \gg 1.$$

Таким образом, можно считать, что и при низких температурах имеет место упругое рассеяние носителей заряда. Такое упрощение оказалось вполне оправданным, так как полученные таким путем формулы (см. табл. 3.2) совпадают с выражениями, найденными Сондхеймером [24], решавшим кинетическое уравнение вариационным методом, и Самойловичем и др. [8], применявшими метод матрицы плотности.

Вырождение электронного газа различным образом влияет на τ при высоких и низких температурах. Вырождение приводит к тому, что состояние, в которое электрон должен перейти после взаимодействия с фононом, окажется занятым. Поэтому с увеличением количества электронов вероятность перехода их в состояния с меньшим значением энергии уменьшается.

Учет этого обстоятельства, как показано в [25], приводит к появлению в интеграле столкновений (3.1.4) множителя $1 - f$. Из-за этого в отсутствие внешних сил ($f(\mathbf{k}) = 0$) решением будет фермиевская функция. Соответственно, окончательное выражение для τ , приведенное в таблице 3.2, содержит множитель $(1 - f_0)$. Это выражение справедливо при низких температурах. При высоких температурах остается справедливым [25] выражение для τ , полученное для невырожденного электронного газа и также приведенное в таблице 3.2. Это становится понятным, ибо τ в общем случае определяется величиной $(N_q + 1)$ и фермиевские члены получились из-за единицы в этом множителе [25]. При высоких температурах ($\hbar \omega_0 \ll k_0 T$) $N_q \approx k_0 T / \hbar \omega_0$, и пренебрегая единицей в $(N_q + 1)$, получаем отсутствие фермиевских членов.

Рассеяние на ионизованных примесях. Ионизованный примесный центр в решетке полупроводника создает даль-

действующее кулоновское поле с потенциальной энергией $U = e^2/\kappa r$, где κ — макроскопическая диэлектрическая постоянная. Проблема движения носителя в таком поле во многом аналогична задаче Резерфордовского рассеяния заряженных частиц ядрами атомов [26], т. е. при расчете времени релаксации можно воспользоваться формулой Резерфорда для эффективного сечения рассеяния:

$$\sigma(\theta) = \frac{e^4}{(2\kappa m^* v^2)^2} \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2}, \quad (3.2.8)$$

где θ — угол между траекториями носителя до и после столкновения с ионизованным центром.

Соотношение (3.2.8) дает возможность вычислить вероятность рассеяния в ячейке пространства квазимульсов. Однако, при интегрировании этого выражения по всему пространству, что необходимо для определения полной вероятности рассеяния, оказывается, что интеграл расходится. Это является следствием того, что в кулоновском поле частицы рассеиваются на малые углы. Очевидно, для получения конечного результата необходимо обрезать кулоновский потенциал, что и было сделано Конвелл и Вайскопфом [27]. Они ограничились рассмотрением рассеяния только в некоторой области R_0 , причем R_0 определено было ими как $R_0 = 1/2 \cdot N^{-1/3}$. Расчет, выполненный в [27], дал следующее выражение для времени релаксации в случае рассеяния на ионах примеси:

$$\tau_i = \frac{V 2m^* \kappa^2 (k_0 T)^{3/2} (e^*)^{3/2}}{\pi N_i e^4 \ln \left[1 + \left(\frac{3\kappa k_0 T}{e^2 N_i^{1/3}} \right)^2 \right]}. \quad (3.2.9)$$

В отличие от такого полуклассического решения, Бруксом и Херрингом [28] была построена более строгая теория, которая учитывала тот факт, что свободные носители заряда могут собираться вокруг заряженного центра и частично экранировать его потенциал. При этом задача состоит в том, чтобы разумно определить расстояние, на котором необходимо оборвать потенциал уже частично заэкранированного иона примеси. Для этого необходимо решить уравнение Пуассона

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(rV)}{dr^2} = \frac{4\pi q}{\kappa}, \quad (3.2.10)$$

где $V = (1/e) U(r)$, $q = e(n' - n)$ — плотность объемного заряда; n — предельная концентрация свободных носителей при больших r ; n' — переменная концентрация носителей заряда на близких расстояниях от иона.

Решением уравнения (3.2.10) является

$$V(r) = \frac{e}{\kappa r} e^{-r/R_0}, \quad (3.2.11)$$

где радиус экранирования для произвольной степени вырождения электронного газа определяется выражением

$$\frac{1}{R_0^3} = \frac{16\pi^2 e^2 (m^*)^{3/2} (2k_0 T)^{1/2}}{\hbar^3 \kappa} F_{-1/2}(\mu^*). \quad (3.2.12)$$

Нетрудно показать, воспользовавшись аппроксимацией (2.5.6), что в случае отсутствия вырождения (3.2.12) переходит в

$$R_0 = \frac{\kappa^{1/2} (k_0 T)^{1/2}}{2\pi^{1/2} e n^{1/2}}, \quad (3.2.13)$$

а в случае сильного вырождения ($\mu^* \gg 0$), используя аппроксимацию (2.5.11), получим:

$$R_0 = \frac{\hbar \kappa^{1/2}}{2e (m^*)^{1/2}} \left(\frac{3n}{\pi} \right)^{-1/6}. \quad (3.2.14)$$

Согласно [29] полное сечение рассеяния с учетом экранировки ионов электронами имеет вид:

$$\sigma = \frac{2\pi e^4}{\kappa^2 (m^*)^2 v^2} \left[\ln(1+b) - \frac{b}{1+b} \right], \quad (3.2.15)$$

где

$$b = \frac{8m^* E}{\hbar^2} R_0^2. \quad (3.2.16)$$

(При этом выражение для τ_i имеет такой же вид, как в таблице 3.2.) Следует обратить внимание на величину E в последнем выражении. Если под E понимать среднюю энергию рассеиваемых частиц, то ее следует определить как

$$E \approx \bar{E} = k_0 T \frac{F_{3/2}(\mu^*)}{F_{1/2}(\mu^*)}. \quad (3.2.17)$$

Но чем ближе распределение носителей к фермиевской ступеньке, тем менее вероятно рассеяние частиц с энер-

гиями, меньшими μ . Поэтому для идеального ферми-газа следует принять:

$$E = \mu. \quad (3.2.18)$$

Очевидно, что с увеличением концентрации носителей и с уменьшением температуры (т. е. с ростом μ) использование (3.2.18) будет более правильным. Наоборот, чем более «максвеллизировано» распределение носителей заряда, тем более справедливым оказывается соотношение (3.2.17). Простым подсчетом нетрудно убедиться, что величина $\mu^* \approx 3,5$ является той границей, ниже которой надлежит пользоваться усреднением (3.2.17), а выше которой справедливо равенство (3.2.18).

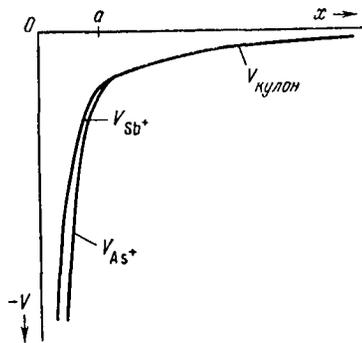


Рис. 3.1. Распределение потенциала на различных расстояниях от иона примеси.

Численное сравнение выражений (3.2.9) и того, что показано в таблице 3.2, показывает, что разница между ними при больших концентрациях примеси становится весьма существенной. Поэтому в дальнейшем мы будем пользоваться лишь формулой Брукса—Херринга.

При переходе к очень большим концентрациям радиус экранирования существенно уменьшается, что наглядно видно из (3.2.14). При этом на рассеиваемые частицы могут оказать влияние уже не кулоновские силы, а силы близкого действия [30]. Очевидно, что в таком случае законы рассеяния будут совсем иными. Качественно действие этих сил изображено на рис. 3.1, из которого следует, что близкодствующие силы различаются в зависимости от природы иона. В соответствии с этим на опыте должны наблюдаться индивидуальные отличия в рассеянии электронов различными примесями.

Количественной теории рассеяния с учетом близкодствия пока не имеется.

Рассеяние на нейтральных примесях. Теория [31—33] дает в этом случае выражение для τ_N в виде

$$\tau_N = \frac{(m^*)^2 e^2}{20\hbar^3 \kappa N_n}, \quad (3.2.19)$$

где N_n — концентрация нейтральных примесей.

При сильном легировании этот вид рассеяния практически не осуществляется, так как вплоть до самых низких температур в сильно легированных полупроводниках имеет место полная ионизация примесей.

Рассеяние электронов на электронах. В чистых беспримесных полупроводниках учет электронного взаимодействия дает для τ_i поправку до 60% [34] по сравнению с τ_i , вычисленным по формуле Брукса—Херринга. Физический смысл электрон-электронного взаимодействия заключается в перераспределении между электронами той энергии, которую они получают от электрического поля. В результате быстрые электроны получают меньший импульс за счет того, что часть энергии получают медленные электроны.

Возможно, что в сильно легированных полупроводниках роль электрон-электронного рассеяния должна уменьшаться, так как все рассеиваемые электроны имеют одну скорость, определяемую энергией Ферми.

Рассеяние на дислокациях и точечных дефектах. Из опыта следует, что дислокационное рассеяние может проявиться лишь в очень чистых кристаллах при достаточно низких температурах, т. е. в условиях устранения всех других более действенных механизмов рассеяния. В сильно легированных кристаллах осуществить эти условия практически невозможно.

Точечные дефекты приводят к рассеянию, которое определяется временем релаксации вида [35]:

$$\tau = \frac{\pi \hbar^4}{(m^*)^{3/2} (2k_0 T)^{1/2} V_0 N_d} \left(\frac{k_0 T}{E} \right)^{1/2}, \quad (3.2.20)$$

где N_d — концентрация точечных дефектов; V_0 — постоянная, характеризующая амплитуду δ -образного потенциала $V = V_0 \delta(r)$, который имеет место вблизи точечного дефекта.

Величина N_d в сильно легированных кристаллах может достигать весьма больших значений, сравнимых с концентрацией примесных ионов. Поэтому механизм рассеяния

носителей заряда точечными дефектами нельзя сбрасывать со счета при обсуждении экспериментальных данных.

Смешанное рассеяние. В реальных кристаллах действуют одновременно несколько механизмов рассеяния. По сути дела, при интерпретации результатов того или иного кинетического эффекта исследователь должен решать задачу о смешанном рассеянии носителей заряда. Для ее решения вначале необходимо выделить основные доминирующие механизмы рассеяния, а затем, если это удастся, определить их вклад в наблюдаемый кинетический эффект. При этом необходимо иметь в виду, что вклад каждого типа рассеяния может весьма сильно меняться с изменением температуры и концентрации примесей в образце. Чрезвычайно редко возникает ситуация, при которой один из механизмов рассеяния был бы намного вероятнее всех других. Если такое положение еще встречается в беспримесных полупроводниках, то в сильно легированных оно практически не реализуется. Чаще всего проявляются одновременно какие-либо два механизма рассеяния. Ими обычно бывают: рассеяние на ионах и акустических фононах, рассеяние на ионах и на оптических фононах. Первая пара механизмов должна проявляться в атомных полупроводниках с ковалентными связями между атомами, такими полупроводниками являются Ge и Si. Вторая пара механизмов должна действовать в полупроводниках с ионной межатомной связью, в том числе и в соединениях типа $A^{III}B^V$.

Задачи такого рода для слабо легированных полупроводников с бальмановским электронным газом рассматривались рядом авторов: при расчете электропроводности, эффекта Холла и термо-ЭДС [36], при вычислении коэффициента Холла [37], при изучении эффекта Нернста [38, 39]. Во всех этих работах из всего многообразия механизмов рассеяния были выбраны два: рассеяние на акустических фононах и на ионах примеси.

В случае сильно легированных полупроводников с фермиевским электронным газом аналогичная задача для этих же механизмов рассеяния рассмотрена лишь при изучении электропроводности [40] и подвижности [41, 42].

Запишем выражения для τ при одновременном действии нескольких механизмов рассеяния. Для этого обратим

внимание на то, что все формулы для $\tau(E)$ могут быть представлены в виде

$$\tau(E) = \tau_0(T) (\epsilon^*)^{r-1/2}, \quad (3.2.21)$$

причем при рассеянии на акустических фононах и на точечных дефектах $r = 0$; при рассеянии на оптических фононах $r = 1/2$ или $r = 1$ при температурах ниже или выше температуры Дебая соответственно; при рассеянии на ионах примеси $r = 2$.

Тогда, пользуясь известным правилом сложения обратных величин $1/\tau$ [43]:

$$\frac{1}{\tau} = \sum_{m=1}^m \frac{1}{\tau_m},$$

получим для одновременного действия акустических фононов и ионов примеси:

$$\tau = \frac{\tau_{0L} (\epsilon^*)^{3/2}}{(\epsilon^*)^2 + a^2}, \quad (3.2.22)$$

где принято:

$$a^2 = \frac{\tau_{0L}}{\tau_{0i}} \quad (3.2.23)$$

и

$$g(b) = \text{const},$$

т. е. предполагается, что экранирующий фактор не зависит от энергии рассеиваемых частиц, или во всяком случае этой зависимостью можно пренебречь. В дальнейшем (§ 3.3) будет показано, что, строго говоря, этой зависимостью пренебрегать нельзя, особенно в случае сильно легированных полупроводников, так как это может привести к существенным погрешностям.

Аналогично, для одновременного действия рассеяния на ионах и на оптических фононах время релаксации будет иметь вид:

$$\tau = \frac{\tau_{0L} (\epsilon^*)^2}{(\epsilon^*)^{3/2} + a^2}. \quad (3.2.24)$$

Анизотропия времени релаксации. В главе 1 было показано, что в таких полупроводниках, как Ge и Si, изотропические поверхности представляют собой эллипсоиды

вращения. Это обстоятельство влечет помимо анизотропии эффективных масс и анизотропию времени релаксации. Подробный теоретический анализ, проведенный Херрингом [44], показал, что понятие времени релаксации, зависящего только от энергии и не зависящего от положения на изоэнергетической поверхности, может, по-видимому, быть удовлетворительно применено только для описания рассеяния на нейтральных примесях и оптических фононах. Однако для рассеяния на акустических фононах и особенно на ионах примеси приближение скалярного времени релаксации, строго говоря, неприменимо. Иными словами, обрабатывая экспериментальные результаты при изучении рассеяния, необходимо учитывать анизотропию времени релаксации, под которой надо понимать случай, когда вероятность перехода $\omega_{kk'}$ (где k и k' — волновые векторы рассеиваемой частицы до и после рассеяния) зависит не только от угла рассеяния, но и от ориентировки вектора k в кристалле.

Теория явлений переноса с учетом анизотропии τ была разработана Херрингом и Фогтом [9]. Рассматривая случай, при котором главные оси эллипсоида масс совпадают с главными осями тензора времени релаксации, они показали, что процесс рассеяния для каждой эллипсоидальной изоэнергетической поверхности может быть описан с помощью трех времен релаксации, являющихся главными компонентами тензора времени релаксации. Авторы [9] исследовали анизотропию τ при рассеянии носителей заряда на акустических фононах. Таким образом, эта теория справедлива лишь для достаточно чистых не легированных кристаллов германия и кремния.

Дальнейшее развитие теория явлений переноса получила в работах Самойловича с сотрудниками [10, 45—47]. Разработав в [10] эффективный метод решения кинетического уравнения при анизотропном рассеянии носителей заряда, авторы применили его для исследования уже двух механизмов рассеяния, действующих в отдельности — на акустических фононах и на ионах примеси. В результате были получены выражения для компонент времени релаксации в обоих случаях. Найденные соотношения для τ_i^l в случае рассеяния на акустических фононах очень близки к результатам, полученным в [9]. Незначительное различие

этих выражений обусловлено несколько различным учетом анизотропии фононного спектра.

Соотношения для τ в случае примесного рассеяния были получены в [45, 46] для относительно слабо легированных полупроводников. Концентрационным критерием этих расчетов является параметр $1/b$, определяемый по (3.2.16) с учетом (3.2.12). В этих работах расчет ограничивался величинами $1/b$ от 10^0 до 10^{-2} , что соответствует содержанию примесей в Ge и Si менее 10^{17} см^{-3} .

Справедливость результатов [45, 46] подтверждается тем, что известная формула Брукса—Херринга для τ_i вытекает из этих расчетов как частный случай при переходе к изотропному τ .

Наконец, более общие формулы для компонент тензора релаксации в случае примесного рассеяния получены в [48, 49] для любых значений $1/b$ и, следовательно, для любых концентраций примеси:

$$\frac{1}{\tau_i^l} = 2C \left[\frac{\pi - 2\chi}{2} \ln \frac{\beta\rho + 1}{\beta\rho - 1} - \left(2a + \frac{\pi}{2} \right) \ln 2 + L(\chi + a) - L(\chi - a) + L\left(\frac{\pi}{2} - 2a\right) + 2L(a) - \frac{\beta}{1 + \beta^2} \ln(b + 1) \right], \quad (3.2.25)$$

$$\frac{1}{\tau_i^l} = C(\beta^2 - 1) \left[\frac{\pi - 2\chi}{2} \ln \frac{\beta\rho + 1}{\beta\rho - 1} - \left(2a + \frac{\pi}{2} \right) \ln 2 + L(\chi + a) - L(\chi - a) + L\left(\frac{\pi}{2} - 2a\right) + 2L(a) + \frac{\beta}{1 + \beta^2} \ln(b + 1) - \frac{\pi - 2\chi}{\rho(\beta^2 - 1)} \right], \quad (3.2.26)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\beta^2 = \frac{m_{\parallel} - m_{\perp}}{m_{\perp}}; \quad C = \frac{3\pi n e \sqrt{2m_{\parallel}}}{8\beta^3 \kappa^2 E^{3/2} m_{\perp}}; \quad \rho = \frac{1}{\beta} \sqrt{1 + \frac{1 + \beta^2}{b}};$$

$a = \arctg \beta$; $\chi = \arctg \rho$; L — функция Лобачевского, табулированная в [55]. Численный расчет τ_i^l и τ_i^l для Ge и Si при больших концентрациях примеси был выполнен в [50]. Результаты этого расчета удобно представить

в виде зависимости $K_r = \tau_l^l / \tau_l^i$ от величины $1/b$ (рис. 3.2). Характерно, что по мере увеличения концентрации

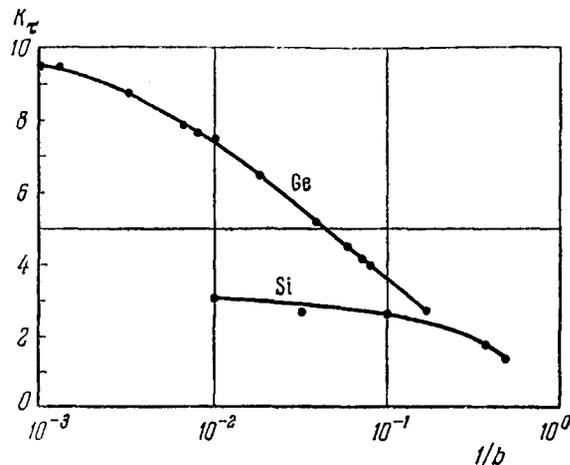


Рис. 3.2. Изменение степени анизотропии времени релаксации в Ge и Si по мере увеличения концентрации носителей.

($1/b \rightarrow 1$) значение K_r падает и при больших $1/b$ не слишком отличается от единицы. Это дает право считать примесное рассеяние в наиболее сильно легированных образцах (особенно в Si) почти изотропным.

§ 3.3. Электропроводность и эффект Холла

Удельная электропроводность σ . В первом параграфе этой главы мы получили выражение для электропроводности (3.1.18) в общем виде. Теперь мы проанализируем его до конца. Для этого проинтегрируем входящий в него интеграл по частям:

$$\sigma = -\frac{e^2}{3\pi^2 m^*} \left\{ |k^3 \tau f_0|_0^\infty - \int_0^\infty f_0 \frac{d}{dk} (k^3 \tau) dk \right\}.$$

Первое слагаемое в фигурных скобках при подстановке пределов интегрирования обращается в нуль. Беря второй

интеграл еще раз по частям и заменяя k на E (пользуясь соотношением $E = \hbar^2 k^2 / 2m^*$), а также переходя к безразмерной энергии ϵ^* , получим:

$$\sigma = \frac{8\pi e^2 (2m^* k_0 T)^{3/2}}{3m^* \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon^*} (\epsilon^*)^{3/2} \tau(\epsilon^*) d\epsilon^*, \quad (3.3.1)$$

а так как

$$\sigma = n e u_d,$$

[u_d — дрейфовая подвижность электронов, n — их концентрация, определяемая по (2.3.4)], то можно написать и выражение для дрейфовой подвижности:

$$u_d = \frac{2e}{3m^*} \frac{\int_0^\infty \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon^*} (\epsilon^*)^{3/2} \tau d\epsilon^*}{F_{1/2}(\mu^*)}. \quad (3.3.2)$$

В качестве τ в эти выражения подставим время релаксации, соответствующее смешанному механизму рассеяния (3.2.22), а в качестве f_0 — функцию Ферми (2.2.12). Тогда

$$\sigma = \frac{8\pi e^2}{3m^* \hbar^3} (2m^* k_0 T)^{3/2} \tau_{0L} \Phi_3(\mu^*, a), \quad (3.3.3)$$

$$u_d = \frac{2e}{3m^*} \tau_{0L} \frac{\Phi_3(\mu^*, a)}{F_{1/2}(\mu^*)}, \quad (3.3.4)$$

где интеграл $\Phi_3(\mu^*, a)$ имеет вид:

$$\Phi_3(\mu^*, a) = \int_0^\infty \frac{(\epsilon^*)^3 \exp(\epsilon^* - \mu^*) d\epsilon^*}{[(\epsilon^*)^2 + a^2] [1 + \exp(\epsilon^* - \mu^*)]^2}. \quad (3.3.5)$$

Численные значения этого интеграла приведены в приложении П.3, а соответствующее семейство кривых — на рис. 3.3. Анализ этого и подобных ему интегралов других индексов будет проведен в (П.5) приложения 5.

Проанализируем (3.3.3) и (3.3.4). Пусть $a^2 \ll (\epsilon^*)^2$, что соответствует случаю, когда носители в основном рассеиваются на тепловых колебаниях атомов решетки и вклад рассеяния на ионах примеси в суммарное рассеяние

пренебрежимо мал. В этом случае интеграл $\Phi_3(\mu^*, a)$ упрощается и переходит в интеграл Ферми $F_0(\mu^*)$. В этом легко убедиться, интегрируя Φ_3 по частям. В результате получаем:

$$\sigma_L = \frac{8\pi e^2}{3m^*h^3} (2m^*k_0T)^{3/2} \tau_{0L} F_0(\mu^*) \quad (3.3.6)$$

и

$$u_{\sigma L} = \frac{2e}{3m^*} \tau_{0L} \frac{F_0(\mu^*)}{F_{1/2}(\mu^*)}. \quad (3.3.7)$$

Здесь и далее мы будем употреблять дополнительный индекс L для обозначения величин, относящихся только

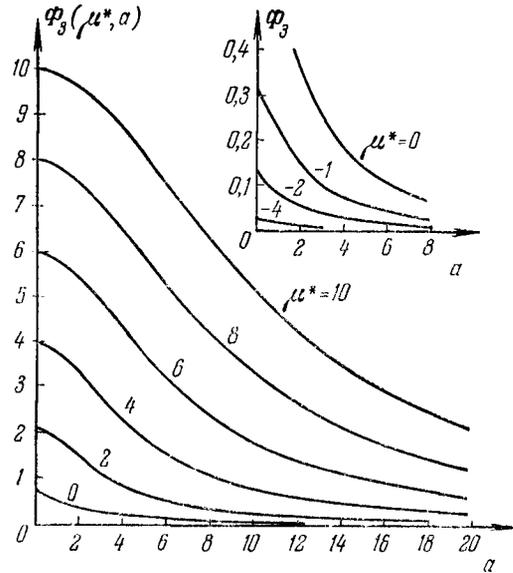


Рис. 3.3. Графическое изображение интеграла $\Phi_3(\mu^*, a)$.

к случаю рассеяния на акустических колебаниях атомов решетки.

Очевидно, из (3.3.6) и (3.3.7) можно легко получить σ_0 и $u_{\sigma 0}$ — удельную электропроводность и дрейфовую подвижность чистого беспримесного полупроводника в случае отсутствия вырождения ($\mu^* \ll 0$). Для этого достаточно

воспользоваться соотношением (2.5.5). Тогда получаем:

$$\sigma_0 = \frac{8\pi e^2}{3m^*h^3} (2m^*k_0T)^{3/2} \tau_{0L} e^{\mu^*}, \quad (3.3.8)$$

$$u_{\sigma 0} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{e}{m^*} \tau_{0L}. \quad (3.3.9)$$

Если же в (3.3.6) и в (3.3.7) положить $\mu^* \gg 0$, то мы получим выражения, справедливые для этого же чистого беспримесного полупроводника, но в случае сильного вырождения:

$$\sigma_0 = \frac{8\pi e^2}{3m^*h^3} (2m^*k_0T)^{3/2} \tau_{0L} \mu^*, \quad (3.3.10)$$

$$u_{\sigma 0} = \frac{e}{m^*} \tau_{0L} (\mu^*)^{-1/2}. \quad (3.3.11)$$

При этом мы воспользовались аппроксимациями (2.5.11) для $F_0(\mu^*)$ и для $F_{1/2}(\mu^*)$.

Рассмотрим теперь противоположный случай: $a^2 \gg (\epsilon^*)^2$, что соответствует проявлению только одного примесного рассеяния. Пренебрегая в знаменателе (3.2.22) $(\epsilon^*)^2$, видим, что интеграл $\Phi_3(\mu^*, a)$ перейдет теперь в $3 \cdot F_2(\mu^*)/a^2$, а выражения для удельной электропроводности (3.3.3) и дрейфовой подвижности (3.3.4) перейдут в

$$\sigma_i = \frac{8\pi e^2}{m^*h^3} (2m^*k_0T)^{3/2} \tau_{0i} F_2(\mu^*), \quad (3.3.12)$$

$$u_{\sigma i} = \frac{2e}{m^*} \tau_{0i} \frac{F_2(\mu^*)}{F_{1/2}(\mu^*)}. \quad (3.3.13)$$

Индекс i употреблен для обозначения величин, относящихся только к случаю рассеяния на ионах примеси.

Так же как и в случае рассеяния на акустических фонах, получим выражения для σ_i и $u_{\sigma i}$ в двух предельных случаях: $\mu^* \ll 0$ и $\mu^* \gg 0$:

$$\mu^* \ll 0 \left\{ \begin{array}{l} \sigma_i = \frac{16\pi e^2}{m^*h^3} (2m^*k_0T)^{3/2} e^{\mu^*}, \\ u_{\sigma i} = \frac{8e}{m^*\sqrt{\pi}} \tau_{0i}, \end{array} \right. \quad (3.3.14)$$

$$\mu^* \gg 0 \left\{ \begin{array}{l} \sigma_i = \frac{8\pi e^2}{3m^*h^3} (2m^*k_0T) \tau_{0i} (\mu^*)^3, \\ u_{\sigma i} = \frac{e}{m^*} \tau_{0i} (\mu^*)^{3/2}. \end{array} \right. \quad (3.3.15)$$

$$\mu^* \ll 0 \left\{ \begin{array}{l} \sigma_i = \frac{8\pi e^2}{3m^*h^3} (2m^*k_0T) \tau_{0i} (\mu^*)^3, \\ u_{\sigma i} = \frac{e}{m^*} \tau_{0i} (\mu^*)^{3/2}. \end{array} \right. \quad (3.3.16)$$

$$\mu^* \gg 0 \left\{ \begin{array}{l} \sigma_i = \frac{8\pi e^2}{3m^*h^3} (2m^*k_0T) \tau_{0i} (\mu^*)^3, \\ u_{\sigma i} = \frac{e}{m^*} \tau_{0i} (\mu^*)^{3/2}. \end{array} \right. \quad (3.3.17)$$

Теперь для дальнейшего изложения формулу (3.2.23) удобно видоизменить с учетом (3.3.7) и (3.3.13):

$$a^2 = 3 \frac{F_2(\mu^*)}{F_0(\mu^*)} \frac{u_{\sigma L}}{u_{\sigma i}}. \quad (3.3.18)$$

В таком виде параметр a^2 использовался Мансфильдом [40] при учете влияния вырождения на удельную электропроводность. Заметим, что в случае статистики Больцмана ($\mu^* \ll 0$) (3.3.18) переходит в $a^2 = 6 u_{\sigma L}/u_{\sigma i}$. Именно этот параметр фигурировал в работах [36—39], посвященных теории кинетических эффектов невырожденных полупроводников.

Для сопоставления экспериментальных данных с теоретическими в общем случае любой степени вырождения пользование формулами (3.3.3) и (3.3.4) оказывается не очень удобным, так как подстановка в них τ_{0L} из (3.2.22) делает их достаточно громоздкими. Поэтому целесообразно исключить τ_{0L} . Для этого поделим (3.3.3) на (3.3.8) и (3.3.4) на (3.3.9):

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \Phi_3(\mu^*, a) e^{-\mu^*}, \quad (3.3.19)$$

$$\frac{u_{\sigma}}{u_{\sigma 0}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Phi_3(\mu^*, a)}{F_{1/2}(\mu^*)}. \quad (3.3.20)$$

Графически оба эти выражения приведены на рис. 3.4 и 3.5. Теперь, измеряя σ или u_{σ} в сильно легированном кристалле и зная удельную электропроводность или подвижность чистого беспримесного полупроводника, можно по этим кривым найти a (μ^* считается известным), т. е. определить потом из (3.3.18) истинное значение отношения $u_{0L}/u_{\sigma i}$ исследуемого сильно легированного полупроводника.

Разумеется, что такой подход охватывает и рассчитанный ранее [36] случай смешанного рассеяния невырожденного полупроводника ($\mu^* \leq -4$).

Выясним теперь, когда оказываются справедливыми частные выражения (3.3.6), (3.3.7), соответствующие рассеянию на фонах, а когда — (3.3.12), (3.3.13), справедливые при рассеянии на одних ионах, то есть оценим, когда можно считать $a^2 \ll (\epsilon^*)^2$ и когда $a^2 \gg (\epsilon^*)^2$. Для этого найдем отношение σ/σ_L (или, что то же самое, $u_{\sigma}/u_{\sigma L}$),

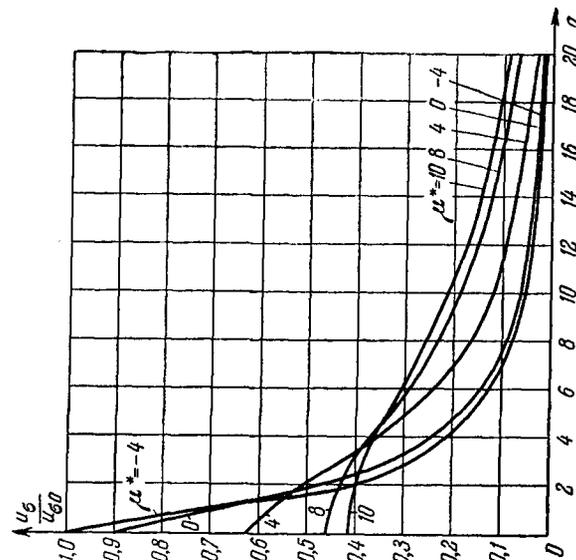


Рис. 3.5. Расчетные кривые дрейфовой подвижности при смешанном рассеянии электронов.

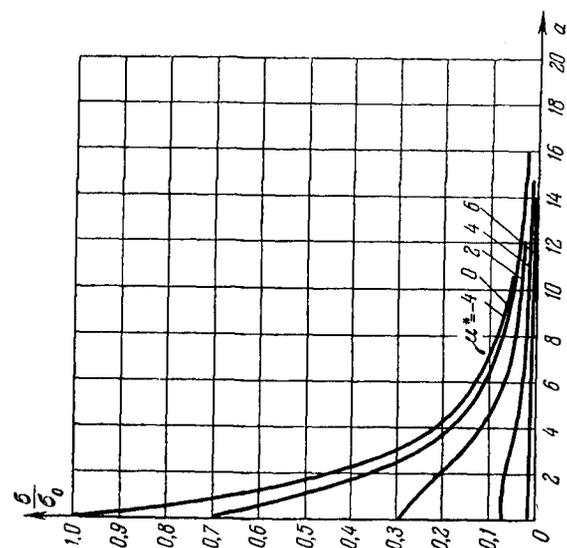


Рис. 3.4. Расчетные кривые удельной электропроводности при смешанном рассеянии носителей заряда.

поделив друг на друга соответствующие выражения:

$$\frac{\sigma}{\sigma_L} = \frac{u_{\Sigma}}{u_{\sigma L}} = \frac{\Phi_3(\mu^*, a)}{F_0(\mu^*)}. \quad (3.3.21)$$

Из соответствующих графиков на рис. 3.6 видно, что при отсутствии вырождения ($\mu^* \leq -4$) вклад ионной составляющей в суммарном рассеянии существен всюду, за

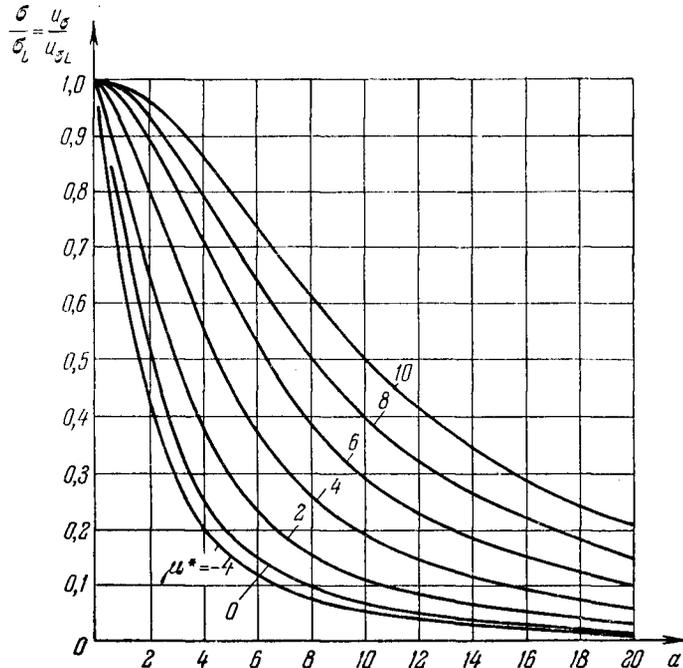


Рис. 3.6. Графики, иллюстрирующие долю решеточного рассеяния в удельной электропроводности или в дрейфовой подвижности электронов.

исключением очень малых значений a . Однако не следует забывать, что малость такого интервала значений a (от 0 до 0,2) лишь кажущаяся, так как ему соответствует весьма большой диапазон концентраций (чистые и слабо легированные полупроводники) и область средних и высоких температур.

В случае же вырождения ($\mu^* > 0$) рассеянием на ионах, как следует из кривых на рис. 3.6, можно пренебрегать при значительно больших значениях a . Например, при $\mu^* = 6$ подвижность носителей заряда с точностью до 20% обязана фоновому рассеянию при $a = 3$.

Эффект Холла. Рассмотрим теперь кристалл, помещенный в электрическое и магнитное поля с напряженностями \mathcal{E} и H соответственно (рис. 3.7). Температуру вдоль образца по-прежнему будем считать постоянной ($\nabla T = 0$). Взяв выражение для силы, действующей при этом на электроны, из таблицы 3.1, можно записать кинетическое уравнение в виде

$$\begin{aligned} \frac{e}{\hbar} \left(\mathcal{E} + \frac{1}{c} [vH] \right) \nabla_k f &= \\ &= - \frac{C(E) \hbar \frac{\partial f}{\partial E}}{\tau(k)}. \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

При этом учтено, что ∇f в (3.1.3) равно нулю из-за того, что $\nabla T = 0$.

Вычислим отдельно второй член в левой части (3.3.22), подставив f по (3.1.14) с учетом (3.1.9):

$$- \frac{e}{\hbar c} [vH] \nabla_k f = - \frac{e}{\hbar c} \left\{ [vH] \frac{\partial f_0}{\partial E} \hbar v - \nabla_k \left(\frac{\partial f}{\partial E} C(E) \mathbf{k} \right) [vH] \right\}.$$

Первое слагаемое в фигурных скобках равно нулю, так как $[vH] v = 0$, а второе слагаемое будет:

$$\nabla_k \left(\frac{\partial f_0}{\partial E} C(E) \mathbf{k} \right) [vH] = [vH] \left\{ - \frac{\partial f_0}{\partial E} C(E) - \left[\hbar \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{\partial f_0}{\partial E} C(E) \right) \right] \right\}.$$

Пренебрегая членом второго порядка малости и используя свойство скалярно-векторного произведения $[abc] = [bc] a^*$,

* См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, § 105, Физматгиз, 1962.

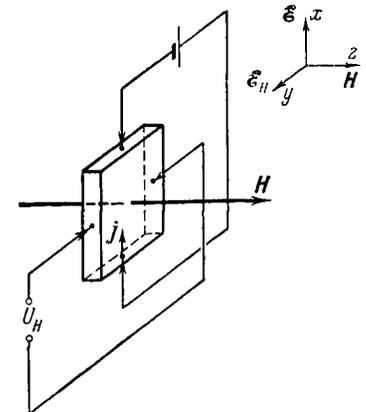


Рис. 3.7. Схема расположения образца в электрическом и магнитном полях при возникновении эффекта Холла.

получаем:

$$\frac{e}{\hbar c} [\mathbf{vH}] \nabla_k f = - \frac{e}{\hbar c} \frac{\partial f_0}{\partial E} [HC] \mathbf{v}. \quad (3.3.23)$$

Подставляя это выражение в (3.3.22) и решая его относительно $C(E)$ с учетом $\mathbf{v} = \mathbf{k} \hbar / m^*$, получим:

$$C(E) = - \frac{e\hbar}{m^*} \tau(k) \left\{ \mathcal{E} - \frac{1}{\hbar c} [HC] \right\}. \quad (3.3.24)$$

Для решения этого векторного уравнения вспомним, что если имеется уравнение типа

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + [\mathbf{b}\mathbf{x}],$$

причем

$$\mathbf{b}\mathbf{x} = \mathbf{b}\mathbf{a} \text{ [так как } (\mathbf{b}[\mathbf{b}\mathbf{x}]) \equiv 0], \quad (3.3.25)$$

то, подставляя его в правую часть вместо \mathbf{x} , получаем:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + [\mathbf{b}\mathbf{a}] + [\mathbf{b}[\mathbf{b}\mathbf{x}]],$$

но *)

$$[\mathbf{b}[\mathbf{b}\mathbf{x}]] = \mathbf{b}(\mathbf{b}\mathbf{x}) - \mathbf{x}\mathbf{b}^2. \quad (3.3.26)$$

Итак, окончательно

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{a} + [\mathbf{b}\mathbf{a}] + (\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{b}}{1 + \mathbf{b}^2}.$$

Или, возвращаясь к (3.3.24), можем записать:

$$C(E) = - \frac{e\hbar}{m^*} \tau(k) \left\{ \frac{\mathcal{E} + \frac{e\tau}{m^*c} [H\mathcal{E}] + \left(\frac{e\tau}{m^*c}\right)^2 (H\mathcal{E})H}{1 + \left(\frac{e\tau H}{m^*c}\right)^2} \right\}. \quad (3.3.27)$$

Так как мы с самого начала ограничили рассмотрение малыми полями (силами), то параметр $\frac{e\tau H}{m^*c}$ можно считать малым и разложить (3.3.27) по этому параметру в ряд.

Кстати, отсюда мы получаем критерий слабого магнитного поля

$$H \ll \frac{m^*c}{e\tau}. \quad (3.3.28)$$

Итак, разлагая (3.3.27) в ряд и ограничиваясь членами с первой степенью H , получаем:

$$C(E) = - \frac{e\hbar}{m^*} \tau(k) \left\{ \mathcal{E} + \frac{e\tau}{m^*c} [H\mathcal{E}] \right\}. \quad (3.3.29)$$

*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, § 105, Физматгиз, 1962.

Теперь мы можем подставить это выражение в (3.1.16) точно так же, как мы делали это выше при выводе формулы удельной электропроводности:

$$j_e = - \frac{e^2}{3\pi^2 m^*} \int_0^\infty k^3 \tau \frac{\partial f}{\partial k} \left\{ \mathcal{E} + \frac{e\tau}{m^*c} [H\mathcal{E}] \right\} dk \quad (3.3.30)$$

или

$$j_e = - \frac{e^2 \mathcal{E}}{3\pi^2 m^*} \int_0^\infty k^3 \tau \frac{\partial f_0}{\partial k} + \frac{e^3 [H\mathcal{E}]}{3\pi^2 m^{*2} c} \int_0^\infty k^3 \tau^2 \frac{\partial f_0}{\partial k} dk. \quad (3.3.31)$$

Первое слагаемое, представляющее обычный электрический ток через кристалл, уже анализировалось выше, а второе слагаемое, пропорциональное $[H\mathcal{E}]$, отражает проявление силы Лоренца, действующей на носители, движущиеся в магнитном поле. Таким образом, второе слагаемое описывает ток в направлении, перпендикулярном к плоскости \mathcal{E} и H , т. е. холловский ток j_H . Известно, что

$$\mathcal{E}_H = R j_H, \quad (3.3.32)$$

где величина $\mathcal{E}_H \equiv \mathcal{E}_y$ — холловская ЭДС; R — коэффициент пропорциональности, называемый *постоянной Холла*; j — плотность тока, протекающего через образец.

Перейдем в (3.3.31) от векторных величин к скалярным:

$$\left. \begin{aligned} j_x &= - \frac{e^2 \mathcal{E}_x}{3\pi^2 m^*} I_1 + \frac{e^3 H \mathcal{E}_y}{3\pi^2 m^{*2} c} I_2, \\ j_y &= - \frac{e^2 \mathcal{E}_y}{3\pi^2 m^*} I_1 + \frac{e^3 H \mathcal{E}_x}{3\pi^2 m^{*2} c} I_2, \end{aligned} \right\} \quad (3.3.33)$$

где обозначено:

$$I_i = \int_0^\infty k^3 \tau^i \frac{\partial f_0}{\partial k} dk. \quad (3.3.34)$$

Так как ток через образец течет только в направлении оси x ($j \equiv j_x$), то $j_y = 0$, и из второго уравнения системы (3.3.33) получим:

$$\mathcal{E}_y = \frac{eH}{c} \mathcal{E}_x \frac{I_2}{I_1}.$$

Или, подставляя сюда $\mathcal{E}_x = j/\sigma$, запишем

$$\mathcal{E}_y \equiv \mathcal{E}_H = \frac{eH}{c} j \frac{1}{\sigma} \frac{I_2}{I_1}. \quad (3.3.35)$$

Из сравнения этого выражения с (3.3.32) получим:

$$R = \frac{e}{c} \frac{1}{\sigma} \frac{I_2}{I_1} \quad (3.3.36)$$

и, подставляя сюда σ в общем виде из (3.1.18), найдем

$$R = \frac{3\pi^2 m^*}{ec} \frac{\int_0^\infty k^3 \tau^2 \frac{\partial f_0}{\partial k} dk}{\left[\int_0^\infty k^3 \tau \frac{\partial f_0}{\partial k} dk \right]^2} \quad (3.3.37)$$

Из (3.3.36) следует, что произведение $R\sigma$ должно иметь размерность подвижности, так как отношение I_2/I_1 имеет размерность времени. Поэтому мы можем ввести так называемую холловскую подвижность u_H , которая определяется как

$$u_H = R\sigma = \frac{e}{c} \frac{\int_0^\infty k^3 \tau^2 \frac{\partial f_0}{\partial k} dk}{\int_0^\infty k^3 \tau \frac{\partial f_0}{\partial k} dk} \quad (3.3.38)$$

Дальнейший анализ постоянной Холла и холловской подвижности мы проведем точно так же, как выше мы исследовали электропроводность и дрейфовую подвижность, т. е. в качестве τ примем выражение (3.2.22), а в качестве f_0 — функцию распределения Ферми. Тогда, беря интегралы I_1 и I_2 по частям, заменяя при этом k на E и переходя к безразмерной энергии ϵ^* , получим:

$$R = \frac{3h^3}{8\pi e (2m^*k_0T)^{3/2}} \frac{\Phi_{3/2}(\mu^*, a)}{[\Phi_3(\mu^*, a)]^2}, \quad (3.3.39)$$

$$u_H = \frac{e}{m^*} \tau_{0L} \frac{\Phi_{3/2}(\mu^*, a)}{\Phi_3(\mu^*, a)}, \quad (3.3.40)$$

где интеграл $\Phi_{3/2}(\mu^*, a)$ имеет вид:

$$\Phi_{3/2}(\mu^*, a) = \int_0^\infty \frac{(\epsilon^*)^{3/2} \exp(\epsilon^* - \mu^*) d\epsilon^*}{[(\epsilon^*)^2 + a^2]^2 [1 + \exp(\epsilon^* - \mu^*)]^2}. \quad (3.3.41)$$

Проанализируем сначала холловскую подвижность. Пусть $a^2 \ll (\epsilon^*)^2$ (рассеяние только на акустических фоновых). Нетрудно убедиться (интегрируя (3.3.41) по частям), что при этом

$$\Phi_{3/2}(\mu^*, a) \rightarrow \frac{1}{2} F_{-1/2}(\mu^*)$$

и, следовательно,

$$u_H \rightarrow u_{HL} = \frac{e}{2m^*} \tau_{0L} \frac{F_{-1/2}(\mu^*)}{F_0(\mu^*)}. \quad (3.3.42)$$

На рис. 3.8 показано, как меняется соотношение

$$\frac{u_H}{u_{HL}} = 2 \frac{\Phi_{3/2}(\mu^*, a)}{\Phi_3(\mu^*, a)} \frac{F_0(\mu^*)}{F_{-1/2}(\mu^*)}, \quad (3.3.43)$$

которое, аналогично соотношению (3.3.21), показывает, при каких μ^* и a можно считать справедливым неравенство $a^2 \ll (\epsilon^*)^2$. Этими графиками несколько удобнее пользоваться, чем кривыми рис. 3.6, так как в большинстве случаев экспериментально измеряется холловская подвижность, а не дрейфовая. А в сильно легированных полупроводниках из-за методических трудностей дрейфовую подвижность практически измерить невозможно. Наоборот, пользуясь измерениями u_H и u_{HL} , по графикам рис. 3.8 можно определить величину a , а затем по графикам рис. 3.6 оценить дрейфовую подвижность в сильно легированном образце. Впрочем, зная a , u_H можно найти и непосредственно из (3.3.18).

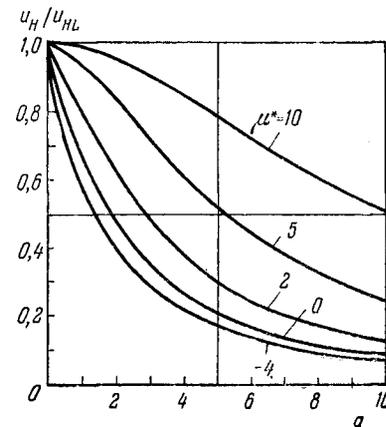


Рис. 3.8. Графики, иллюстрирующие долю решеточного рассеяния в холловской подвижности электронов.

Из (3.3.42) можно легко получить холловскую подвижность в обоих частных случаях: отсутствия вырождения ($\mu^* \ll 0$) и сильного вырождения ($\mu^* \gg 0$). Воспользовавшись для этого выражениями (2.5.6) и (2.5.11), получаем:

$$\mu^* \ll 0: u_{H0} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e}{m^*} \tau_{0L}, \quad (3.3.44)$$

$$\mu^* \gg 0: u_{H0} = \frac{e}{m^*} \tau_{0L} (\mu^*)^{-1/2}. \quad (3.3.45)$$

В случае действия лишь одного рассеяния на ионах считаем $a^2 \gg (\varepsilon^*)^2$ и $\Phi_{s/2} \rightarrow \frac{9}{2a^4} F_{7/2}(\mu^*)$, соответственно,

$$u_H \rightarrow u_{Hi} = \frac{3}{2} \frac{e}{m^*} \tau_{0i} \frac{F_{7/2}(\mu^*)}{F_2(\mu^*)}. \quad (3.3.46)$$

А подвижности, соответствующие случаям $\mu^* \ll 0$ и $\mu^* \gg 0$, будут иметь вид:

$$\mu^* \ll 0: u_{Hi} = \frac{315\sqrt{\pi}}{64} \frac{e}{m^*} \tau_{0i}, \quad (3.3.47)$$

$$\mu^* \gg 0: u_{Hi} = \frac{e}{m^*} \tau_{0i} (\mu^*)^{3/2}. \quad (3.3.48)$$

Для общности здесь же (аналогично тому, как было получено (3.3.18)) запишем a^2 как функцию холловских подвижностей:

$$a^2 = 3 \frac{F_0(\mu^*) F_{7/2}(\mu^*)}{F_{-1/2}(\mu^*) F_2(\mu^*)} \frac{u_{H0}}{u_{Hi}}. \quad (3.3.49)$$

Представляет интерес оценить, при каких условиях неравенство $a^2 \gg (\varepsilon^*)^2$ оказывается справедливым. На рис. 3.9 представлена зависимость u_H/u_{Hi} . Из этого рисунка видно, что у невырожденных полупроводников вклад рассеяния на фонах существен вплоть до $a > 12$. У вырожденных полупроводников ($\mu^* > 0$) только при $a > 15$ можно с достаточной строгостью считать, что подвижность обусловлена в основном ионизованными примесями.

Для сравнения экспериментальных значений холловских подвижностей с теорией поделим (3.3.40) на u_{H0} чистого беспримесного полупроводника (3.3.44):

$$\frac{u_H}{u_{H0}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Phi_{s/2}(\mu^*, a)}{\Phi_s(\mu^*, a)}. \quad (3.3.50)$$

Для удобства такого сравнения в таблице 3.4 приведены данные по холловским подвижностям электронов и дырок в важнейших полупроводниках.

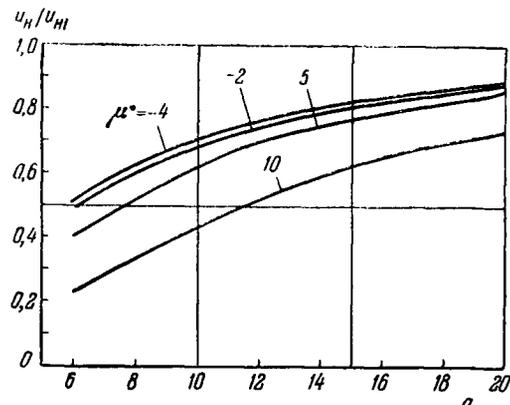


Рис. 3.9. Графики, иллюстрирующие долю холловской подвижности электронов, обусловленную примесным рассеянием.

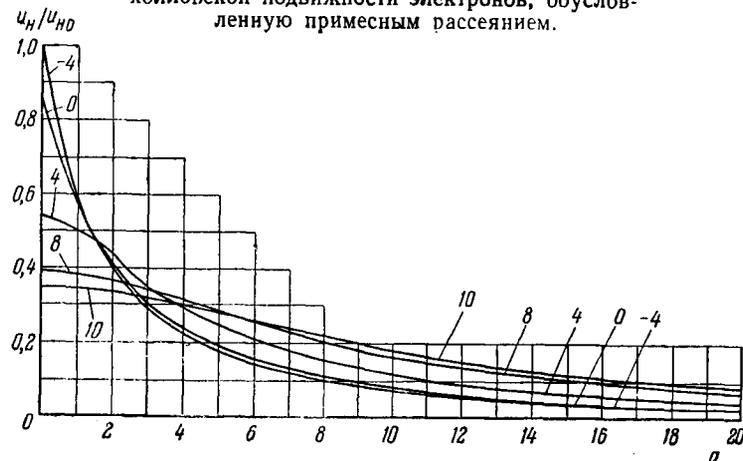


Рис. 3.10. Расчетные кривые холловской подвижности при смешанном механизме рассеяния электронов.

В приложении П. 7 приведены значения u_H/u_{H0} для различных значений μ^* и a . Для большей наглядности некоторые данные из этой таблицы приведены на рис. 3.10.

Таблица 3.4

Холловская подвижность в важнейших полупроводниках

Полупроводник	u_{H0} см ² /в · сек [64, 65]	
	электроны	дырки
Ge	$4\,500 \left(\frac{T}{300}\right)^{-1,6}$	$3\,500 \left(\frac{T}{300}\right)^{-2,3}$
Si	$1\,300 \left(\frac{T}{300}\right)^{-2,0}$	$500 \left(\frac{T}{300}\right)^{-2,7}$
AlSb	$200 \left(\frac{T}{300}\right)^{-2}$	$400 \left(\frac{T}{300}\right)^{-1,8}$
GaSb	$4\,000 \left(\frac{T}{300}\right)^{-2,0}$	$1\,400 \left(\frac{T}{300}\right)^{-0,9}$
InSb	$78\,000 \left(\frac{T}{300}\right)^{-1,6}$	$750 \left(\frac{T}{300}\right)^{-2,1}$
GaAs	$8\,500 \left(\frac{T}{300}\right)^{-1,0}$	$420 \left(\frac{T}{300}\right)^{-2,1}$
InAs	$33\,000 \left(\frac{T}{300}\right)^{-1,2}$	$460 \left(\frac{T}{300}\right)^{-2,3}$
InP	$4\,600 \left(\frac{T}{300}\right)^{-2,0}$	$150 \left(\frac{T}{300}\right)^{-2,4}$
GaP	$110 \left(\frac{T}{300}\right)^{-1,5}$	$75 \left(\frac{T}{300}\right)^{-1,5}$
PbS	$500 \left(\frac{T}{300}\right)^{-2,5}$	$500 \left(\frac{T}{300}\right)^{-2,5}$
PbTe	$1\,400 \left(\frac{T}{300}\right)^{-2,5}$	$1\,400 \left(\frac{T}{300}\right)^{-2,5}$
PbSe	$2\,000 \left(\frac{T}{300}\right)^{-2,5}$	$2\,000 \left(\frac{T}{300}\right)^{-2,5}$

Аналогичная таблица для малого числа величин a и μ^* и к тому же с некоторыми численными ошибками приведена в [41].

В заключение анализа подвижности носителей заряда рассмотрим возможность определения суммарной подвижности u по закону

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{u_{nL}} + \frac{1}{u_{ni}}. \quad (3.3.51)$$

Из-за разной зависимости τ_L и τ_i от энергии этот закон, вообще говоря, не справедлив, хотя им весьма часто пользуются.

Пользуясь выведенными выше формулами, можно построить (рис. 3.11) величину u_H ($1/u_{nL} + 1/u_{ni}$) как функцию параметра a для различных μ^* . Эта величина представляет не что иное, как погрешность определения u_H по (3.3.51). Из рис. 3.11 видно, что у невырожденных полупроводников лишь при малых a выполняется закон (3.3.51). При сильном вырождении ($\mu^* \geq 5$) это соотношение с достаточной степенью точности можно применять и при больших a .

Займемся теперь подробнее постоянной Холла. Для этого прежде всего сопоставим (3.3.38) с выражением для концентрации электронов (2.3.4). Комбинируя оба эти выражения, запишем R в виде

$$R = \frac{\mathcal{A}}{ne}. \quad (3.3.52)$$

Холл-фактор. Входящая в это выражение величина \mathcal{A} , называемая *холл-фактором*, представляет следующую комбинацию интегралов [51]:

$$\mathcal{A} = \frac{3}{2} \frac{F_{1/2}(\mu^*) \Phi_{3/2}(\mu^*, a)}{[\Phi_3(\mu^*, a)]^2}. \quad (3.3.53)$$

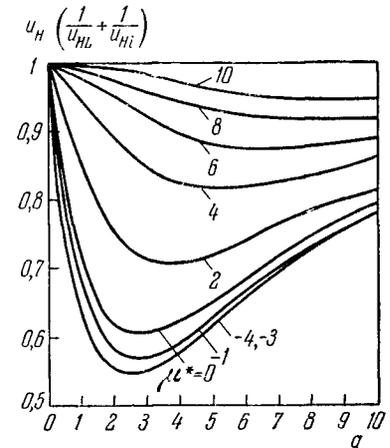


Рис. 3.11. Погрешность в определении холловской подвижности электронов при аддитивном сложении u_{nL} и u_{ni} .

Холл-фактор так же является функцией механизма рассеяния и степени вырождения, как и другие кинетические коэффициенты. Принимая по-прежнему $a^2 \ll (\epsilon^*)^2$ и $a^2 \gg (\epsilon^*)^2$, можно без труда получить выражения для \mathcal{A} , справедливые при проявлении рассеяния либо только на фонах, либо только на ионах:

$$\mathcal{A}_L = \frac{3}{4} F_{1/2}(\mu^*) \frac{F_{1/2}(\mu^*)}{F_0^2(\mu^*)}, \quad (3.3.54)$$

$$\mathcal{A}_i = \frac{3}{4} F_{1/2}(\mu^*) \frac{F_{3/2}(\mu^*)}{F_0^2(\mu^*)}. \quad (3.3.55)$$

Полагая в каждом из этих выражений $\mu^* \ll 0$ и $\mu^* \gg 0$, получим:

$$\mu^* \ll 0: \begin{cases} \mathcal{A}_L = \frac{3\pi}{8} = 1,18, \\ \mathcal{A}_i = \frac{315}{512} \pi = 1,93, \end{cases} \quad (3.3.56)$$

$$\mu^* \gg 0: \quad \mathcal{A}_L = \mathcal{A}_i = 1. \quad (3.3.57)$$

Естественно, что (3.3.56) и (3.3.57) совпадают с хорошо известными значениями [52], справедливыми в этих частных случаях.

Для определения холл-фактора в общем виде при любой степени вырождения, его значения приведены в приложении П.8 и на рис. 3.12. Нетрудно убедиться, что при всех $\mu^* < -4$ кривые $\mathcal{A}(\mu^*, a)$ ложатся на одну и ту же зависимость, совпадающую с кривой для $\mu^* = -4$. По этой кривой следует определять \mathcal{A} для всех невырожденных полупроводников [51] (величина a считается найденной, например, из таблицы П. 7).

Заметим, что аналогичная задача по определению холл-фактора для невырожденного полупроводника рассматривалась в [36, 37, 39]. Авторами была получена зависимость $\mathcal{A}(\rho_i/\rho)$, где ρ_i — удельное сопротивление полупроводника при рассеянии только на ионах, а ρ — при смешанном рассеянии на ионах и на фонах. Так как параметр ρ_i/ρ весьма неопределен, то этими решениями практически не удавалось воспользоваться.

Зависимость кинетических эффектов от концентрации носителей и температуры. Из рис. 3.4, 3.6 и 3.10 или соответствующих формул (3.3.19), (3.3.20) и (3.3.50) следует, что

величины σ , u_x и u_H сложным образом зависят от концентрации носителей и от температуры.

Проследим, в первую очередь, концентрационную зависимость. Она проявляется, в основном, через изменение $\mu^*(n)$, определяемое выражением (2.3.4) (рис. 2.9). Численные значения $\mu^*(n)$, а следовательно, и σ , u_x и u_H будут

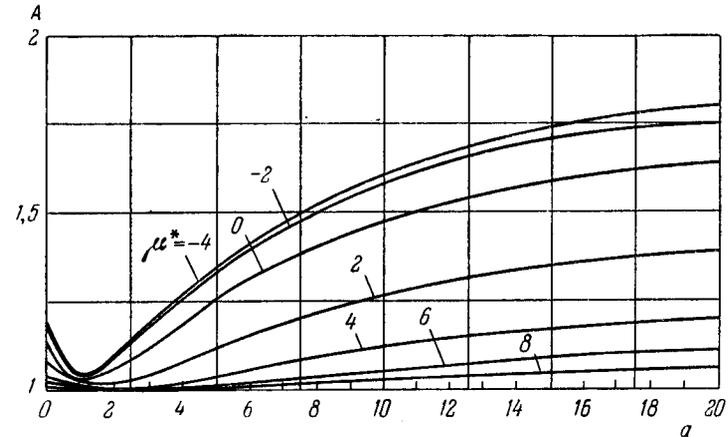


Рис. 3.12. Расчетные значения холл-фактора при смешанном механизме рассеяния электронов.

зависеть от вида полупроводника (через m^*) и от температуры. Кроме того, с изменением концентрации будет меняться вклад того или иного механизма в общее рассеяние, т. е. будет меняться величина a . Автором с сотрудниками [53] было показано, что в предельных случаях проявления каждого вида рассеяния в отдельности подвижности u_L и u_i можно представить в виде

$$u_L \sim n^{-s/2}; \quad u_i \sim n^{\frac{3}{2}s-1-\gamma}, \quad (3.3.58)$$

где s и γ — соответственно показатели в зависимостях

$$\bar{\epsilon}^* \sim n^s(\mu^*); \quad g(b) \sim n^\gamma(\mu^*). \quad (3.3.59)$$

Изменение показателя $-s/2$ в зависимости от степени вырождения показано на рис. 3.13 кривой 2. Кривая 1 представляет собой значения s . Значения величины γ изображены в виде кривых 3, 4 соответственно для 300 и 100° К.

Изменение показателя $3s/2 - 1 - \gamma$ изображено кривыми 5 и 6 для этих же температур. Последние кривые показывают, что нельзя описать концентрационную зависимость подвижности каким-либо одним степенным законом с постоянным показателем степени.

Кривые рис. 3.13 были рассчитаны для кремния. Для других полупроводников из-за различия в эффективных

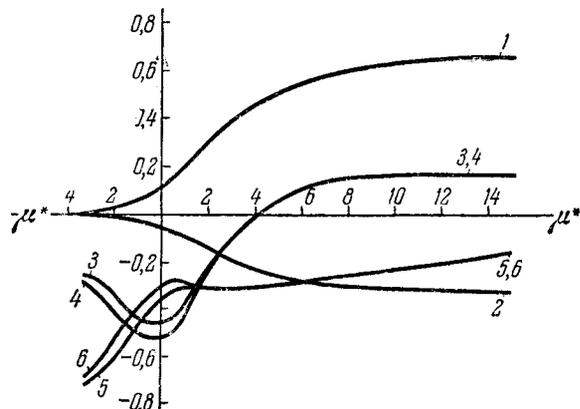


Рис. 3.13. Вспомогательные кривые для объяснения зависимости подвижности электронов от их концентрации в сильно легированном кремнии (по [53]).

массах кривые, иллюстрирующие изменение $\gamma(\mu^*)$, будут выглядеть несколько по-иному, что повлечет и изменение окончательных кривых 5 и 6. Поэтому реально имеет смысл анализировать ожидаемые концентрационные зависимости лишь в частных случаях, а именно при $a^2 \ll (\epsilon^*)^2$ и $a^2 \gg (\epsilon^*)^2$, при $\mu^* \ll 0$ и $\mu^* \gg 0$. Такой анализ читатель без труда сможет провести, воспользовавшись соответствующими формулами из этого параграфа.

Все сказанное в равной степени относится и к температурной зависимости рассмотренных выше кинетических эффектов.

Необходимость учета экранировки. В изложенной теории экранирующий множитель $g(b)$ в формуле Брукса—Херринга для τ_i предполагался постоянным, т. е. величиной, не зависящей от энергии. Поэтому этот множитель выно-

сился за знак интеграла при получении соответствующих кинетических интегралов Φ_m . Однако во многих случаях такое приближение оказывается недопустимым. Обратимся к рис. 3.14, на котором представлена зависимость $g(b)$. Хорошо видно, что при больших b ($> 10^2$) можно действительно с достаточной степенью точности полагать $g(b)$ постоянной величиной. Предельные концентрации носителей, до которых можно принимать $g(b) = \text{const}$, зависят

прежде всего от вида полупроводника. Так, например, численная оценка показывает, что при комнатной температуре в германии эта концентрация составляет примерно $1 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, а в кремнии — $5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$. При понижении температуры до 78° К эти величины изменяются в меньшую сторону почти на порядок. С увеличением концентрации легирующей примеси в полупроводнике зависимость $g(b)$ от энергии становится все

более существенной, что приводит к тому, что фактор рассеяния r в законе (3.2.21) уже не будет равен 2 при рассеянии на ионах примеси.

Учет энергетической зависимости экранирующего множителя, в основном, не меняет вида окончательных выражений, полученных в этом параграфе для кинетических эффектов. Различие будет заключаться в замене интегралов $\Phi_3(\mu^*, a)$ и $\Phi_{3/2}(\mu^*, a)$ соответственно на интегралы

$$\mathcal{F}_3(\mu^*, a) = \int_0^\infty \frac{(\epsilon^*)^3 \exp(\epsilon^* - \mu^*) d\epsilon^*}{[(\epsilon^*)^2 + a^2 g(b)] [1 + \exp(\epsilon^* - \mu^*)]^2} \quad (3.3.60)$$

и

$$\mathcal{F}_{3/2}(\mu^*, a) = \int_0^\infty \frac{(\epsilon^*)^{3/2} \exp(\epsilon^* - \mu^*) d\epsilon^*}{[(\epsilon^*)^2 + a^2 g(b)]^2 [1 + \exp(\epsilon^* - \mu^*)]^2} \quad (3.3.61)$$

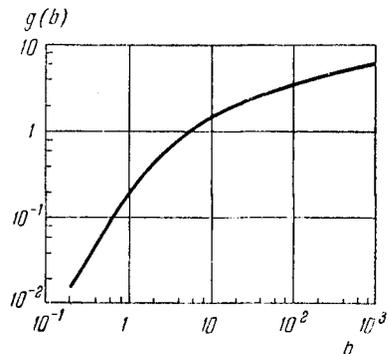


Рис. 3.14. Зависимость $g(b) = \ln(1+b) - \frac{b}{b+1}$ от энергии становится все

Очевидно, что учет непостоянства $g(b)$ имеет в основном смысл при рассеянии на ионах. Поэтому приближенно можно считать, что он существен при $a^2 g(b) > (e^*)^2$. Тогда интегралы (3.3.60) и (3.3.61) упрощаются и переходят в

$$\mathcal{F}_{1/2} \rightarrow \frac{1}{a^4} \Phi_{1/2} \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_3 \rightarrow \frac{1}{a^2} \Phi_3,$$

где

$$\Phi_{1/2} = \int_0^\infty \frac{(e^*)^{3/2} \exp(e^* - \mu^*) de^*}{[g(b)]^2 [1 + \exp(e^* - \mu^*)]^2}, \quad (3.3.62)$$

$$\Phi_3 = \int_0^\infty \frac{(e^*)^3 \exp(e^* - \mu^*) de^*}{g(b) [1 + \exp(e^* - \mu^*)]^2}, \quad (3.3.63)$$

графики значений которых приведены в приложении П.6.

Необходимость учета эффекта анизотропии. Для полупроводников, обладающих несферической симметрией изоэнергетических поверхностей, кинетические эффекты будут анизотропны. Анизотропию следует подразделять на анизотропию эффективных масс, которая характеризуется величиной $K_m = m_{\parallel}^*/m_{\perp}^*$, и анизотропию времен релаксации, характеризуемую параметром $K_{\tau} = \tau_{\parallel}/\tau_{\perp}$.

Гликсман [63] показал, что если тензор времен релаксации имеет ту же симметрию, что и тензор эффективных масс, то под параметром анизотропии кристалла следует понимать эффективную величину, равную $K = K_m/K_{\tau}$. Это как раз справедливо для германия и кремния электронного типа проводимости. В общем случае существует зависимость между K_m и K_{τ} , вскрытая в работах Самойловича с сотрудниками и рассмотренная нами в предыдущем параграфе этой главы. В том же параграфе 3.2 были приведены формулы (3.2.25) и (3.2.26), по которым надлежит вычислять времена релаксации $\tau_{\parallel}^{\parallel}$ и τ_{\perp}^{\perp} в сильно легированных полупроводниках. Времена релаксации при рассеянии электронов на акустических фононах $\tau_{\parallel}^{\parallel}$ и τ_{\perp}^{\perp} в сильно легированных кристаллах останутся теми же, что и в чистых беспримесных полупроводниках. Их можно вычислить по формулам, предложенным в [56]:

$$\tau_{\parallel}^{\parallel} = \frac{\tau_0}{s_0} \quad \text{и} \quad \tau_{\perp}^{\perp} = \frac{\tau_0}{s_1}, \quad (3.3.64)$$

где

$$\tau_0 = \frac{\pi C_{11} \hbar^4}{k T E_i^3 \sqrt{2 m_{\perp}^2 m_{\parallel} E}}$$

(обозначения см. в таблице 3.2, стр. 88),

$$s_0 = 1 + 1,88 \frac{c_2}{c_1} + 1,03 \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2,$$

$$s_1 = 1 + 1,24 \frac{c_2}{c_1} + 0,87 \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2,$$

а c_1 и c_2 — константы деформационного потенциала, подстановка которых, например, для германия приводит к выражениям [56]:

$$\tau_{\parallel}^{\parallel} = \frac{3,45 \cdot 10^{17}}{T \sqrt{E}}; \quad \tau_{\perp}^{\perp} = \frac{2,94 \cdot 10^{17}}{T \sqrt{E}}. \quad (3.3.65)$$

Холловскую подвижность при учете анизотропии следует рассчитывать по формуле [9]

$$\mu_H = \frac{e}{m_{\perp}^*} \frac{2 \langle \tau_{\parallel}^{\parallel} \tau_{\perp}^{\perp} \rangle + \frac{m_{\parallel}^*}{m_{\perp}^*} \langle \tau_{\perp}^{\perp} \rangle}{\langle \tau_{\parallel}^{\parallel} \rangle + 2 \frac{m_{\parallel}^*}{m_{\perp}^*} \langle \tau_{\perp}^{\perp} \rangle}, \quad (3.3.66)$$

где, в свою очередь, обозначено

$$\frac{1}{\tau_{\parallel}^{\parallel}} = \frac{1}{\tau_{\parallel}^{\parallel}} + \frac{1}{\tau_{\perp}^{\perp}}; \quad \frac{1}{\tau_{\perp}^{\perp}} = \frac{1}{\tau_{\perp}^{\perp}} + \frac{1}{\tau_{\parallel}^{\parallel}} \quad (3.3.67)$$

и

$$\langle y \rangle = \frac{2}{3 F_{1/2}(\mu^*)} \int_0^\infty (e^*)^{3/2} y \frac{\partial f}{\partial e^*} de^*, \quad (3.3.68)$$

а в качестве f в случае сильно легированных полупроводников следует брать функцию распределения Ферми—Дирака.

Экспериментальные результаты (электронный германий) [50, 57—61]. Данные разных авторов по измерению концентрационной зависимости удельного сопротивления для германия с примесями As, P и Sb хорошо совпадают (данные работ [57—61] и [73] приведены на рис. 3.15).

Очень важно отметить, что в случае сильно легированных образцов рассеяние электронов существенно зависит

от вида легирующей примеси. Знаменательно, что пороговая концентрация n_0 , при которой начинает проявляться «индивидуальность» примеси, различается для образцов, легированных разными примесями, и определенным образом, как будет показано ниже, зависит от температуры. Ряд авторов [30, 58] обратил внимание на корреляцию между n_0 и энергией ионизации примесей. Однако эта

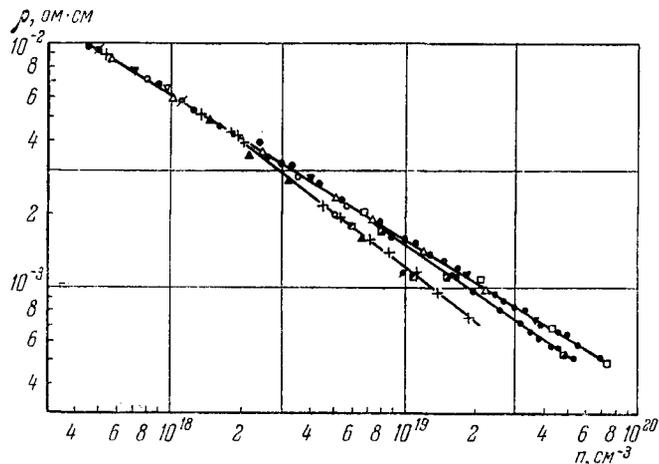


Рис. 3.15. Концентрационная зависимость удельного сопротивления сильно легированных кристаллов германия n -типа ($T = 300^\circ \text{K}$).

Нижняя кривая — Si, средняя — P, верхняя — As.

корреляция носит чисто формальный характер, поскольку при концентрациях порядка n_0 сама энергия ионизации уже равна нулю, что было показано в главе 1.

Из приведенного рисунка видно, что результаты измерений хорошо укладываются в логарифмическом масштабе на прямые линии, которые можно описать, например, для германия с примесью мышьяка эмпирическим соотношением вида [61]:

$$\rho = 1,67 \cdot 10^8 \cdot n^{-0,58} \quad \text{при} \quad 4 \cdot 10^{17} < n < 7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3},$$

которое существенно отличается от теоретической зависимости Джонсон и Ларк-Горовица [62]

$$\rho = 6,27 \cdot 10^3 \cdot n^{-0,33},$$

полученную авторами для вырожденного электронного газа классическим методом, аналогичным методу Конвелл—Вайскопфа.

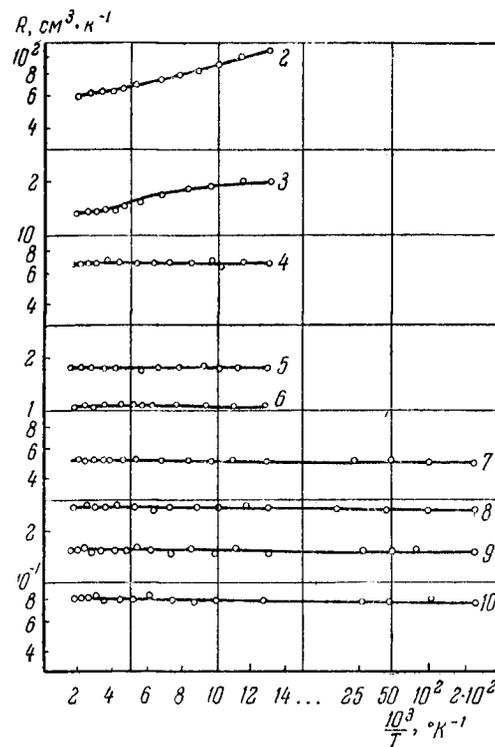


Рис. 3.16. Температурная зависимость коэффициента Холла в германии, сильно легированном мышьяком по данным [50].

Номера кривых те же, что на рис. 3.17.

Постоянная Холла практически не зависит от температуры (рис. 3.16). Зависимость $R(T)$ наблюдается лишь у образцов с концентрацией носителей менее $5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$. Она обусловлена температурной зависимостью холл-фактора \mathcal{A} вследствие изменения вклада фоновой и ионной составляющих в суммарное рассеяние.

Холловская подвижность μ_H зависит от температуры (рис. 3.17). Из рисунка видно, что по мере увеличения степени легирования наклон кривых $\mu_H(T)$ уменьшается от величины, близкой к теоретической ($-3/2$ для образца 1), до весьма малых значений для сильно легированных образцов. Так, для образцов 7—10 подвижность практически

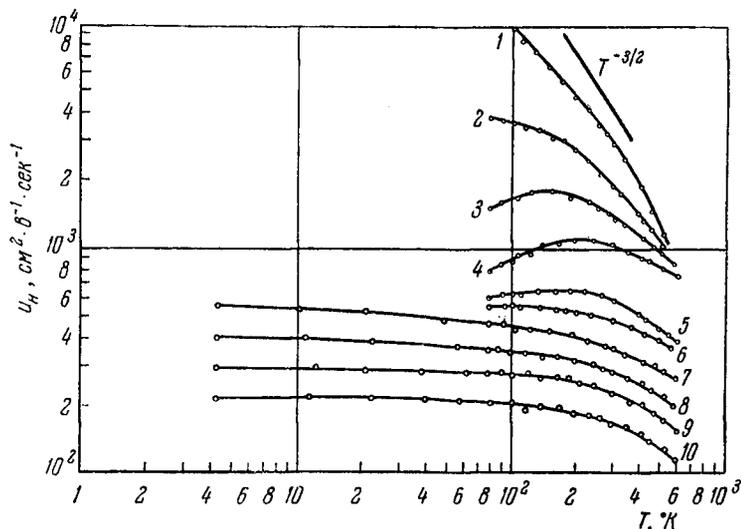


Рис. 3.17. Температурная зависимость холловской подвижности электронов в германии с примесью мышьяка по данным автора [63].

Различные кривые соответствуют разной степени легирования (значения концентрации n указаны в см^{-3}): 1 — $1,8 \cdot 10^{15}$; 2 — $9,6 \cdot 10^{15}$; 3 — $4,3 \cdot 10^{17}$; 4 — $8,85 \cdot 10^{17}$; 5 — $3,5 \cdot 10^{18}$; 6 — $6 \cdot 10^{18}$; 7 — $1,2 \cdot 10^{19}$; 8 — $2,3 \cdot 10^{19}$; 9 — $4 \cdot 10^{19}$; 10 — $7,7 \cdot 10^{19}$.

не зависит от температуры, начиная с гелиевых температур. Однако при повышении температуры от комнатной до 600°K наклон кривых $\mu_H(T)$ становится заметным, что может быть обусловлено уменьшением степени вырождения и увеличением вклада решеточной составляющей в рассеяние.

При переходе к температурной зависимости μ_H для образцов Ge с другими примесями, например с фосфором [50] (рис. 3.18), видно, что проявление индивидуальности существенно зависит от температуры. С понижением

температуры до 78°K она начинает проявляться при меньших концентрациях, чем при 300°K .

Экспериментальные результаты по измерению холловской подвижности позволяют оценить соотношение между рассеянием, обусловленным акустическими колебаниями

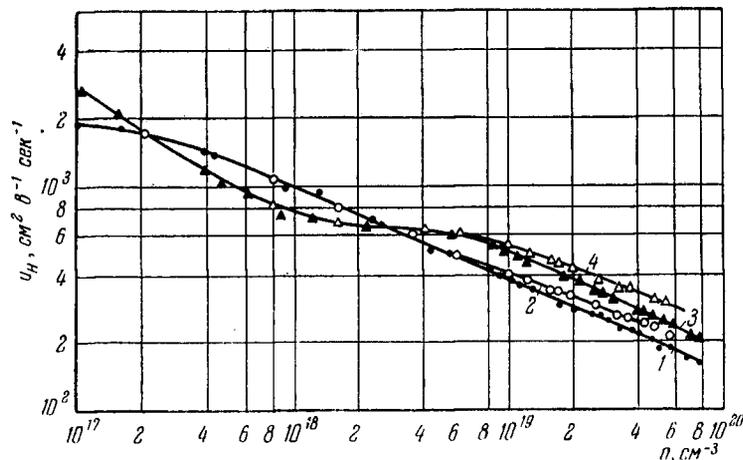


Рис. 3.18. Концентрационная зависимость холловской подвижности электронов в сильно легированном германии по данным [50].

Примесь As: кривая 1 — 300°K , 3 — 78°K ; примесь P: кривая 2 — 300°K ; 4 — 78°K .

атомов решетки, и рассеянием, вызванным ионами примесей. Это можно сделать, воспользовавшись кривыми рис. 3.10 или таблицей П.7, причем в качестве μ_{H0} была принята зависимость [64] (см. табл. 3.4):

$$\mu_{H0} = 4500 \left(\frac{T}{300} \right)^{-1,6} \text{ см}^2 \cdot \text{v}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Величина μ^* , знание которой необходимо при таком расчете, вычислялась по (2.3.4). Результаты оценки приведены на рис. 3.19, из которого следует, что по мере увеличения содержания примеси вклад ионной составляющей рассеяния быстро возрастает, так что, начиная с $n > 5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$, при 300°K можно полагать, что подвижность электронов, главным образом, определяется рассеянием на ионах примеси.

Для случая азотной температуры влияние теплового механизма рассеяния пренебрежимо мало ($a > 20$), начиная, по крайней мере, с $3 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$. Ход кривой 3 на рис. 3.19 ясно показывает, что и при 500° К преобладающим является рассеяние на ионах примеси, хотя относительный

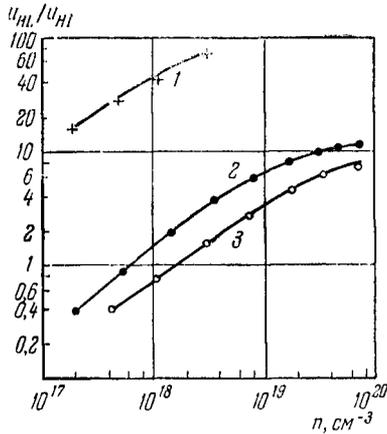


Рис. 3.19. Соотношения между холловскими подвижностями, обусловленными решеточным и примесным механизмами рассеяния электронов в сильно легированном германии (1— 100° К ; 2— 300° К ; 3— 500° К).

вклад теплового механизма рассеяния при этом больше, чем при 300° К .

Уменьшение наклона кривых 2 и 3 с ростом концентрации можно объяснить эффектом «разогрева» носителей заряда в вырожденных полупроводниках, на который обратили впервые внимание Самойлович и Коренблит [66]. Эффект заключается в том, что с увеличением степени легирования увеличивается вырождение электронного газа, т. е. повышается средняя энергия рассеиваемых частиц. Следствием этого может явиться уменьшение вклада резерфордовского рассеяния в суммарное рассеяние.

Экстраполируя гипотетически кривые 2 и 3 на рис. 3.19 к еще большим концентрациям, можно предположить, что в районе $n > 10^{20}$ (что невозможно реализовать из-за ограниченной растворимости примесей в Ge) наклон этих кривых мог бы уменьшиться до нуля и, вероятно, даже поменять знак, что в пределе привело бы к преобладанию фононного рассеяния.

Ход кривых u_{nL}/u_{ni} как функция концентрации качественно хорошо согласуется с теорией. В самом деле, если учесть, что в отсутствие вырождения u_{nL} не зависит от n , а $u_{ni} \sim n^{-1}$ (см. (3.3.58)), то u_{nL}/u_{ni} должно быть пропорционально n , что хорошо совпадает с приведенными кривыми в области концентраций, меньших 10^{19} см^{-3} . При

сильном вырождении в соответствии с (3.3.58) $u_{nL} \sim n^{-1/2}$ и $u_{ni} \sim 1/g [b (\mu^*)]$. Поэтому зависимость u_{nL}/u_{ni} от концентрации будет стремиться к насыщению с ростом n , что действительно согласуется с ходом кривых 2, 3 рис. 3.19.

Таким образом, можно считать, что в сильно легированном германии n -типа преобладает рассеяние на ионах примеси. Однако простое сопоставление экспериментальных данных по u_n с формулой Брукса — Херринга для подвижности не дает удовлетворительного согласия. Правда, при этом существует произвольность в выборе величины m^* , которая в данном случае носит характер «подгоночного» параметра. Поэтому опытные результаты можно согласовать с формулой Брукса — Херринга, если допустить определенные зависимости m^* от концентрации носителей, как это было показано автором в его ранних работах [67, 68], а также Земсковым с сотрудниками [60]. Однако такие зависимости, по-видимому, лишены физического смысла.

Более правильным является сопоставление экспериментальных результатов с теорией, учитывающей анизотропию рассеяния по уравнениям (3.2.25), (3.2.26) и (3.3.65) с последующим вычислением u_n по формуле (3.3.66). Такое сопоставление было выполнено автором с сотрудниками в работах [48, 49]. При этом холловская подвижность была вычислена для двух крайних случаев — отсутствия вырождения и, наоборот, сильного вырождения. Для первого из этих случаев средняя энергия \bar{E} принималась равной $3kT$, а для второго случая $\bar{E} = \mu$, так как точное интегрирование (3.3.66) является весьма громоздкой и сложной задачей. Приближение $\bar{E} = \mu$ было взято в связи с тем обстоятельством, что при сильном вырождении электронного газа в основном рассеиваются электроны с энергией, равной энергии Ферми μ . Расчеты в [48, 49] привели к результатам, показанным на рис. 3.20, где номерами без штриха обозначены экспериментальные кривые, соответствующие одноименным кривым на рис. 3.17, а цифры со штрихами представляют расчетные кривые. Для слабо легированных образцов видно хорошее согласие экспериментальных результатов с теорией. Отличие в абсолютных значениях u_n не превышает 50%, что скорее всего является следствием использованного приближения $\bar{E} = 3kT$. В случае

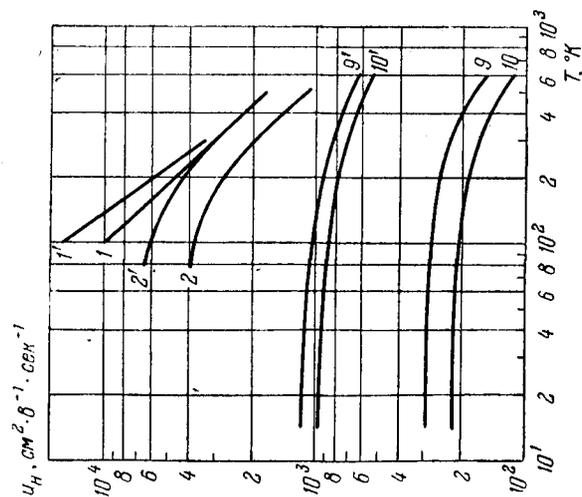


Рис. 3.20. Сопоставление экспериментальных значений подвижности электронов в германии с рассчитанными при учете аннотропии рассеяния.

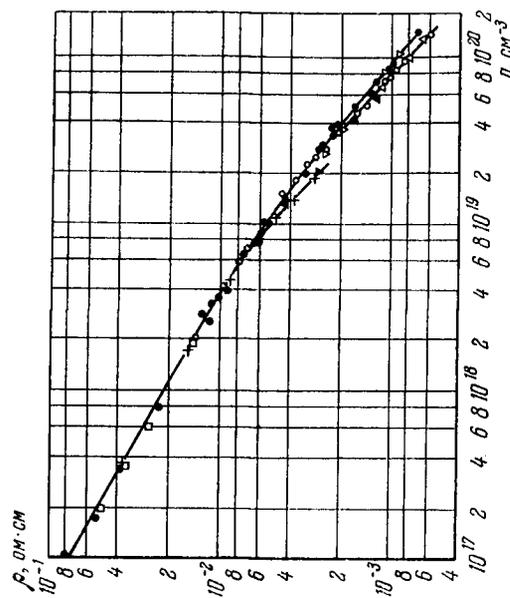


Рис. 3.21. Концентрационная зависимость удельного сопротивления сильно легированных кристаллов Si n-типа ($T = 300^\circ \text{K}$) (по данным [53, 69—73]). Нижняя кривая — Sb, средняя — P, верхняя — As.

сильно легированных образцов имеет место лишь качественное согласие, а именно, очень хорошее совпадение наклонов кривых. Абсолютные же значения рассчитанных величин μ_n превышают найденные на опыте в 3—4 раза.

Экспериментальные результаты (электронный кремний) [53, 69—72]. Экспериментальные результаты по удельной электропроводности (рис. 3.21) и эффекту Холла (рис. 3.22) для n-Si очень похожи на данные для n-Ge. В кремнии также наблюдается проявление «индивидуальности» примеси в рассеянии. Однако пороговая концентрация n_0 , начиная с которой этот эффект имеет место, примерно на полпорядка выше, чем в германии.

Что же касается температурной зависимости холловской подвижности в образцах Si с примесью As, то и здесь мы также видим (рис. 3.23) качественное подобие аналогичным кривым для n-Ge, но наклон кривых $\mu_n(T)$ для сильно легированных образцов кремния несколько больше. Если учесть, что масштаб по оси ординат растянут, то видно, что электроны в образцах 2—5 при 78°K имеют практически одну и ту же подвижность. С другой стороны, при 600°K одинаковой подвижностью характеризуются образцы 5—8. Более наглядно это видно из рис. 3.24. Здесь еще более резко по сравнению с Ge выступает температурная зависимость пороговой концентрации n_0 . Обращает на себя внимание и отличие в характере самой зависимости $\mu_n(n)$

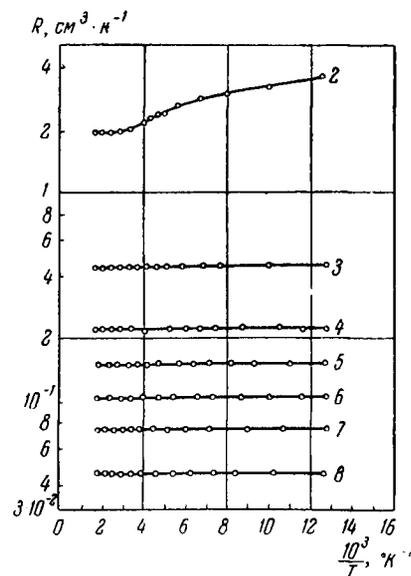


Рис. 3.22. Температурная зависимость коэффициента Холла в кремнии, сильно легированном мышьяком по данным [50].

Номера кривых те же, что на рис. 3.23.

при 78°K для кремния, заключающееся в постоянстве u_H в широком интервале концентраций от 10^{18} до $3 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$.

В [42] было оценено соотношение u_{HL}/u_{Hi} с использованием опытных данных рис. 3.23, таблицы П. 7 и выражения для u_{H0} , взятого из таблицы 3.4. Полученные таким путем

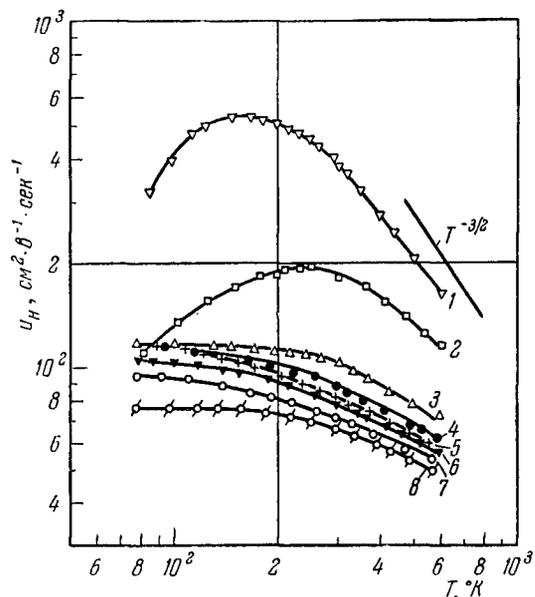


Рис. 3.23. Температурная зависимость холловской подвижности электронов в кремнии с примесью мышьяка по данным автора [53].

Разные кривые соответствуют различным концентрациям носителей n (в см^{-3}): 1 — $2,2 \cdot 10^{17}$; 2 — $3,1 \cdot 10^{18}$; 3 — $1,4 \cdot 10^{19}$; 4 — $2,8 \cdot 10^{19}$; 5 — $4,2 \cdot 10^{19}$; 6 — $6,1 \cdot 10^{19}$; 7 — $8,6 \cdot 10^{19}$; 8 — $1,4 \cdot 10^{20}$.

результаты приведены на рис. 3.25. Ход кривых совершенно подобен аналогичным кривым для германия. Поэтому в этом случае применимы все проведенные в предыдущем разделе рассуждения.

Заметим, что расчет u_{HL}/u_{Hi} в этом случае менее достоверен, чем для Ge, поскольку для Si на опыте не выполняется исходное соотношение (3.2.21). Тем не менее и в случае сильно легированного кремния, по-видимому,

можно считать, что преобладающим видом рассеяния является рассеяние на ионах примеси.

Сопоставление экспериментальных данных с теорией анизотропного рассеяния в этом случае [50, 73] обнаруживает

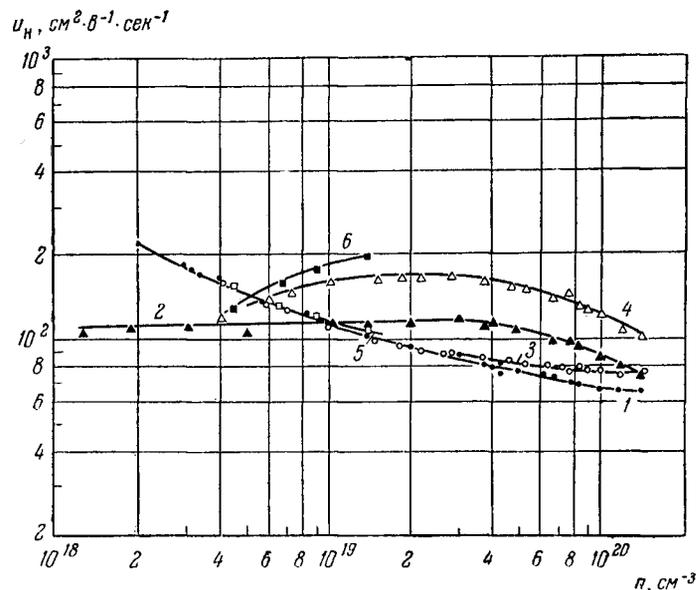


Рис. 3.24. Концентрационная зависимость холловской подвижности электронов в сильно легированном кремнии при двух фиксированных температурах по данным автора [53].

Номера на кривых соответствуют разным примесям и температурам:

Примесь T, °K	As	P	Sb
	300	1	3
78	2	4	6

так же как и для германия лишь качественную сходимость (рис. 3.26).

Причины расхождения с теорией. Одной из возможных причин количественного несовпадения расчетных и экспе-

риментальных кривых рис. 3.26 и 3.20 является неучет междолинного и электрон-электронного рассеяния. Если предположить, что при учете последнего поправка будет такая же, как в слабо легированных полупроводниках, т. е. примерно 60% [34], то расхождение уменьшится до 1,5—2 раз. Отсутствие теории электрон-электронного взаимодействия в сильно легированных полупроводниках при про-

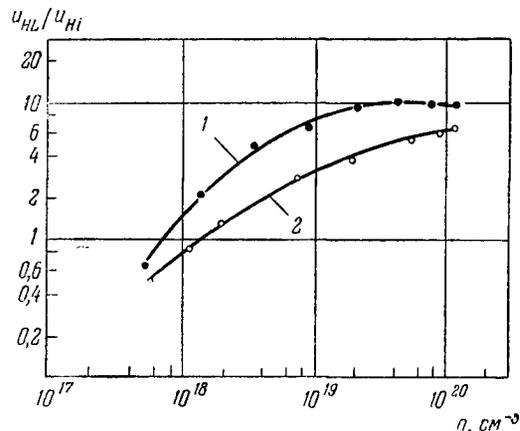


Рис. 3.25. Соотношение между холловскими подвижностями, обусловленными решеточным и примесным механизмами рассеяния электронов в сильно легированном кремнии. Кривая 1—300° К; кривая 2—500° К.

жуточном вырождении не позволяет сколько-нибудь точно оценить поправку в этом случае. А теория, развитая в [56], применима лишь в предельном случае столь сильного вырождения, которое не имеет места в реальных кристаллах типа германия и кремния.

Другой возможной причиной расхождения с теорией мог быть неучет изменения спектра носителей, о котором шла речь в главе 1. Иными словами, при сопоставлении экспериментальных данных нельзя было пользоваться значениями эффективных масс, которые известны для чистых кристаллов. Однако в [74] показано, что поправки в величине электропроводности (а следовательно, и подвиж-

ности), учитывающие изменение спектра электронов, оказываются малыми.

На наш взгляд, более принципиальная причина количественного несоответствия теоретических и экспериментальных величин подвижности заключается в том, что борновское приближение оказывается несправедливым при сильном легировании.

Как известно, условие применимости этого приближения сводится к неравенству

$$\frac{e^2}{k\hbar v_F} \ll 1, \quad (3.3.69)$$

где v_F — скорость электрона с энергией Ферми. Если считать для Ge и Si величины диэлектрической проницаемости κ не зависящими от концентрации и равными соответственно 16 и 12, то (3.3.69) уже выполняется плохо.

В действительности применимость борновского приближения становится еще более сомнительной, так как рассеяние в сильно легированных полупроводниках происходит на столь малых расстояниях, что характеристическая длина рассеяния — дебаевский радиус — становится равным постоянной решетки кристалла. В этом случае влияние среды уже нельзя описать с помощью макроскопической диэлектрической постоянной κ . Вместо нее необходимо вводить некую эффективную величину $\kappa_{\text{эфф}}$, которая будет различна при разных концентрациях, уменьшаясь с увеличением степени легирования, стремясь в пределе к единице. Нечто подобное имеет место в теории сверхпроводимости [74]. Этим обстоятельством также объясняют разницу между вычисленными и измеренными значениями энергии ионизации [75]. Можно думать, что теория, построенная с учетом

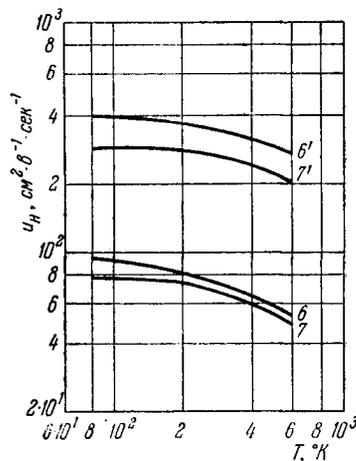


Рис. 3.26. Сопоставление экспериментальных значений подвижности электронов в кремнии с рассчитанными при учете анизотропии рассеяния.

Номера кривых те же, что на рис. 3.23.

этого обстоятельства, смогла бы объяснить и влияние природы примеси на величины подвижности.

Экспериментальные результаты (дырочный германий) [76—79]. Наиболее подробно холловская подвижность дырочного германия была изучена в [76, 77] на образцах,

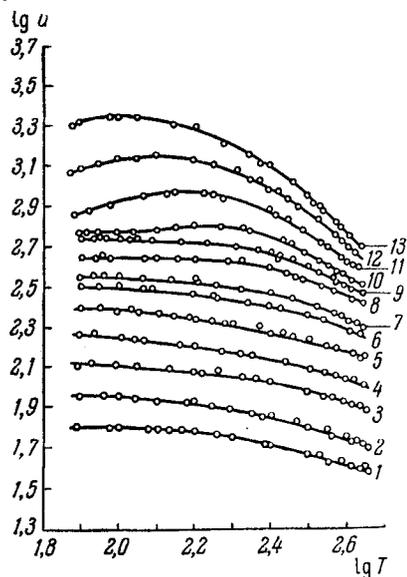


Рис. 3.27. Температурная зависимость подвижности дырок в Ge, сильно легированном Ga.

Номера на кривых соответствуют концентрации дырок (в см^{-3}) при 300°K :
 1 — $4,2 \cdot 10^{20}$; 2 — $2,0 \cdot 10^{20}$; 3 — $1,0 \cdot 10^{20}$;
 4 — $5,8 \cdot 10^{19}$; 5 — $2,7 \cdot 10^{19}$; 6 — $1,2 \cdot 10^{19}$;
 7 — $6,9 \cdot 10^{18}$; 8 — $4,9 \cdot 10^{18}$; 9 — $2,2 \cdot 10^{18}$;
 10 — $1,1 \cdot 10^{18}$; 11 — $6,8 \cdot 10^{17}$;
 12 — $2,8 \cdot 10^{17}$; 13 — $1,2 \cdot 10^{17}$.

сравнение с теорией, проведенное в [76, 77], показало, что все образцы можно разделить на две группы. К образцам первой группы относятся те, которые содержат дырки в количестве, меньшем чем $5 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$. У таких кристаллов подвижность более или менее удовлетворительно согласуется с существующими теориями рассеяния. Так, при 100°K , когда рассеяние на оптических колебаниях еще почти не сказывается, $u_{\text{выч}}/u_{\text{экс}} \leq 1,7$. При этом $u_{\text{выч}}$

легированных галлием в интервале концентраций $5 \cdot 10^{13} - 4 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$. Мы здесь приведем экспериментальные результаты из этих работ, относящиеся только к сильно легированным образцам. Температурная зависимость подвижности приведена на рис. 3.27, а концентрационная при 300°K — на рис. 3.28. На последнем рисунке приведены также результаты, полученные в более ранней работе [78]. Видно хорошее совпадение данных, полученных разными авторами.

На этом же рисунке приведены экспериментальные результаты, полученные при легировании германия другими акцепторами — алюминием и индием. Сопо-

определялось как

$$u_{\text{выч}} = \frac{u_{\text{T}} + \nu u_{\text{Л}}}{1 + \nu},$$

где u_{T} и $u_{\text{Л}}$ — соответственно подвижности тяжелых и легких дырок; $\nu = n_{\text{Л}}/n_{\text{T}}$.

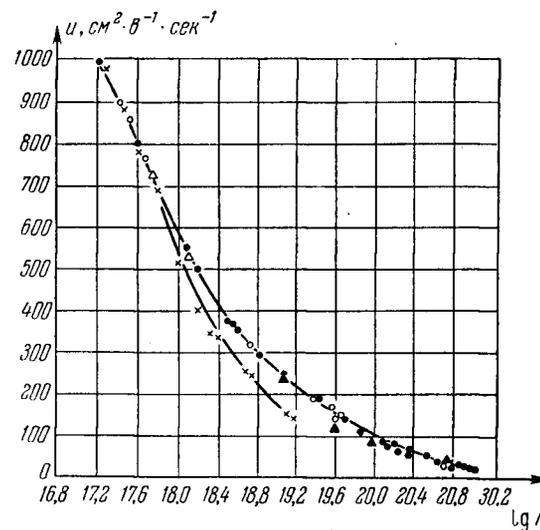


Рис. 3.28. Концентрационная зависимость подвижности дырок в образцах германия, сильно легированного галлием, алюминием и индием ($T = 300^\circ\text{K}$).

Значки на кривых: ● — Al; ○ — Ga; × — In; △ — Ga [78].

Авторы принимали $\nu = 0,04$, как следует из опытов по циклотронному резонансу. Заметим, что некоторые изменения в ν не должны существенно изменить величину $u_{\text{выч}}$, так как вклад легких дырок в подвижность составляет примерно 25% при рассеянии на колебаниях атомов решетки и около 10% при рассеянии на ионах примеси [76].

В свою очередь, значения u_{T} и $u_{\text{Л}}$ вычислялись для смешанного рассеяния на акустических колебаниях и на ионах примеси с учетом вырождения и экранировки. Учет рассеяния на оптических колебаниях, на нейтральных

примесях, учет рассеяния легких дырок на тяжелых и учет взаимодействия тяжелых дырок друг с другом приводит к еще лучшему согласию с опытом ($u_{\text{выч}}/u_{\text{экс}} \leq 1,1$) во всем диапазоне температур от 78 до 300° К и для всех образцов этой группы [77]. Однако сами авторы не придают такому совпадению сколько-нибудь серьезного значения и считают, что оно могло быть и случайным.

При переходе к высоким температурам ($300^\circ \text{К} < T < 950^\circ \text{К}$) совпадение $u_{\text{выч}}$ и $u_{\text{экс}}$ у этих же образцов нарушается, так как наблюдаемая на опыте подвижность уменьшается с температурой значительно быстрее, чем следовало бы по теории.

Еще хуже обстоит дело со второй группой образцов, содержащих дырки в количестве, большем $5 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$. Для этих образцов не удается согласовать экспериментальные данные с теорией ни при низких, ни при высоких температурах.

Авторы работ [76, 77] пришли к выводу, что несоответствие опытных данных с расчетными скорее всего объясняется отклонением спектра дырок от параболического закона по мере заполнения зоны, т. е. с ростом энергии дырок.

К обсуждению этого вопроса мы вернемся при описании экспериментальных результатов по измерению дифференциальной термо-ЭДС в *p*-германии.

В заключение этого раздела обратим внимание на то, что и в германии *p*-типа проявляется индивидуальность примеси в рассеянии (рис. 3.28), хотя она и менее выражена по сравнению с германием электронного типа проводимости.

§ 3.4. Термоэлектрические явления и теплопроводность

Дифференциальная термо-ЭДС. Рассмотрим теорию термо-ЭДС в атомном полупроводнике с простой энергетической зоной. Будем считать, что в полупроводнике на носители заряда действует лишь одна внешняя сила — градиент температуры ∇T . Так как средняя энергия (а в слабо легированных полупроводниках и число носителей заряда) возрастает при повышении температуры, то в направле-

нии $-\nabla T$ возникает поток зарядов. Если имеет место стационарное состояние и образец не включен в замкнутую электрическую цепь, то плотность тока во всех точках образца равна нулю. Это значит, что поток носителей от ∇T в кристалле компенсируется другим током, который возникает в нем под влиянием образовавшегося в кристалле поля \mathcal{E} . Электродвижущая сила, появляющаяся при этом на концах полупроводника, носит название *термоэлектродвижущей — термо-ЭДС*.

Необходимо учесть, что на истинную термо-ЭДС может накладываться дополнительная разность потенциалов ($U_{\text{к1}} - U_{\text{к2}}$), где $U_{\text{к1}}$ и $U_{\text{к2}}$ — контактные разности потенциалов между металлом и полупроводником. Для исключения этого эффекта вспомним, что условием статистического равновесия является равенство химических (или электрохимических) потенциалов во всех частях системы частиц (см. § 2.1). Поэтому мы считаем, что величина $\mu - e\phi$, где ϕ — электростатический потенциал, не меняется при переходе через контакт металл — полупроводник. При этом мы предполагаем равенство температур в металле и полупроводнике вблизи контактной границы. Так как в металле и слева и справа от полупроводника μ одно и то же, то, вычисляя $\nabla(\phi - \mu/e)$, мы тем самым исключаем из рассмотрения $\nabla U_{\text{к}}$.

Теперь, пользуясь выражением для силы F при $\nabla T \neq 0$ и подставляя его в (3.1.3), запишем кинетическое уравнение (3.1.2) в виде

$$\frac{e}{\hbar} \nabla \left(\phi - \frac{\mu}{e} \right) \nabla_k f - \mathbf{v} \nabla f = - \frac{C(E) \hbar \frac{\partial f_0}{\partial E}}{\tau(\hbar)}. \quad (3.4.1)$$

Хотя в этом случае $F = \mathcal{E}$, как и при анализе удельной электропроводности, но кинетическое уравнение отличается от (3.1.8) присутствием члена $\mathbf{v} \nabla f$, поскольку теперь ∇f отлично от нуля из-за $\nabla T \neq 0$.

Для того чтобы записать ∇f в явном виде, мы будем, так же как и раньше, считать добавку f_1 к невозмущенной функции малой по сравнению с f_0 . В этом случае

$$\nabla f \approx \nabla f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial E} \left[\frac{\mu - E}{T} \nabla T - \nabla \mu \right], \quad (3.4.2)$$

и кинетическое уравнение приобретает вид:

$$-\frac{e}{\hbar} \nabla \left(\varphi - \frac{\mu}{e} \right) \nabla_k f - \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial E} \left[\frac{\mu - E}{T} \nabla T - \nabla \mu \right] = -\frac{C(E) \hbar \frac{\partial f_0}{\partial E}}{\tau(\mathbf{k})}, \quad (3.4.3)$$

или, решая это уравнение относительно $C(E)$ с предварительной заменой $\nabla_k f$ по (3.1.9) и \mathbf{v} на $(\hbar/m^*) \mathbf{k}$, получим:

$$C(E) = -\frac{\hbar}{m^*} \tau(\mathbf{k}) \left[\frac{E - \mu}{T} \nabla T + \nabla(\mu - e\varphi) \right]. \quad (3.4.4)$$

Теперь подставим (3.4.4) в выражение для тока \mathbf{j}_e , которое справедливо при действии поля \mathcal{E} , т. е. в (3.1.16)

$$\mathbf{j}_e = \frac{e}{3\pi^2 m^*} \int_0^\infty k^3 \frac{\partial f_0}{\partial k} \tau(\mathbf{k}) \left[\frac{E - \mu}{T} \nabla T + \nabla(\mu - e\varphi) \right] dk. \quad (3.4.5)$$

В стационарных условиях $\mathbf{j}_e = 0$, т. е.

$$0 = \frac{e}{3\pi^2 m^*} \left\{ \frac{\nabla T}{T} \int_0^\infty k^3 \frac{\partial f_0}{\partial E} \tau E dk - \frac{\mu \nabla T}{T} \int_0^\infty k^3 \frac{\partial f_0}{\partial E} \tau dk + \nabla(\mu - e\varphi) \int_0^\infty k^3 \frac{\partial f_0}{\partial E} \tau dk \right\}. \quad (3.4.6)$$

Введем понятие о дифференциальной термо-ЭДС α , которую будем считать равной

$$\alpha = \frac{\mathcal{E}_T}{\nabla T} = \frac{\nabla \left(\varphi - \frac{\mu}{e} \right)}{\nabla T}, \quad (3.4.7)$$

т. е. дифференциальная термо-ЭДС — это полная термо-ЭДС, отнесенная к градиенту температуры на образце. Тогда из (3.4.6) можно получить:

$$\alpha = \frac{\nabla \left(\varphi - \frac{\mu}{e} \right)}{\nabla T} = -\frac{k_0}{e} \left[\frac{\int_0^\infty k^3 \frac{\partial f_0}{\partial k} \tau(\mathbf{k}) E dk}{\int_0^\infty k^3 \frac{\partial f_0}{\partial k} \tau(\mathbf{k}) dk} - \mu^* \right]. \quad (3.4.8)$$

Или, интегрируя оба интеграла по частям (так же как интегрировались выше интегралы в (3.1.18) и в (3.3.38)) и переходя при этом к безразмерной ε^* , получим:

$$\alpha = -\frac{k_0}{e} \left[\frac{\int_0^\infty (\varepsilon^*)^{3/2} \tau(\varepsilon^*) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon^*} d\varepsilon^*}{\int_0^\infty (\varepsilon^*)^{3/2} \tau(\varepsilon^*) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon^*} d\varepsilon^*} - \mu^* \right]. \quad (3.4.9)$$

Как и в предыдущих параграфах, принимаем в качестве f_0 функцию Ферми, а вместо τ подставляем его выражение в случае смешанного рассеяния (3.2.22), тогда окончательно получаем:

$$\alpha = -\frac{k_0}{e} \left[\frac{\Phi_4(\mu^*, a)}{\Phi_3(\mu^*, a)} - \mu^* \right], \quad (3.4.10)$$

где Φ_3 определен в (3.3.5), а Φ_4 ему аналогичен:

$$\Phi_4 = \int_0^\infty \frac{(\varepsilon^*)^4 \exp(\varepsilon^* - \mu^*) d\varepsilon^*}{[(\varepsilon^*)^2 + a^2] [1 + \exp(\varepsilon^* - \mu^*)]^2}. \quad (3.4.11)$$

Значения Φ_4/Φ_3 приведены в приложении П. 9.

Рассматривая те же частные случаи, что и выше: $a^2 \ll (\varepsilon^*)^2$ (рассеяние на фононах) и $a^2 \gg (\varepsilon^*)^2$ (рассеяние на ионах), из (3.4.10) легко получить:

$$a^2 \ll (\varepsilon^*)^2: \quad \alpha_L = -\frac{k_0}{e} \left[\frac{2F_1(\mu^*)}{F_0(\mu^*)} - \mu^* \right], \quad (3.4.12)$$

$$a^2 \gg (\varepsilon^*)^2: \quad \alpha_i = -\frac{k_0}{e} \left[\frac{4F_3(\mu^*)}{3F_2(\mu^*)} - \mu^* \right]. \quad (3.4.13)$$

Выражение (3.4.12) при $\mu^* \ll 0$ переходит в

$$\alpha_L = -\frac{k_0}{e} (2 - \mu^*), \quad (3.4.14)$$

что совпадает с известной формулой Писаренко [80].

При $\mu^* \ll 0$ (3.4.13) соответственно переходит в

$$\alpha_i = -\frac{k_0}{e} (4 - \mu^*). \quad (3.4.15)$$

При этом были использованы аппроксимации (2.5.6.)

Если использовать аппроксимацию (2.5.11), справедливую в другом крайнем случае при $\mu^* \gg 0$, то нетрудно убедиться, что и (3.4.12) и (3.4.13) переходят в $\alpha_L = \alpha_i = 0$.

Нулевые значения термо-ЭДС получились из-за грубости аппроксимации (2.5.11), в которой учтен лишь первый член разложения подынтегральной функции в $F_n(\mu^*)$. Если воспользоваться более сложной аппроксимацией (2.5.13) с учетом второго члена разложения, то мы получим формулы:

$$\alpha_L = -\frac{k_0 \pi^2}{e} \frac{1}{3 \mu^*}, \quad (3.4.16)$$

$$\alpha_i = -\frac{k_0}{e} \frac{\pi^2 \mu^*}{\pi^2 + (\mu^*)^2}, \quad (3.4.17)$$

которые совпадают с теми, что ранее были выведены для металлов [81]. Из них следует, что α существенно уменьшается при увеличении μ^* , но все же остается конечной величиной.

Области значений μ^* , при которых можно поль-

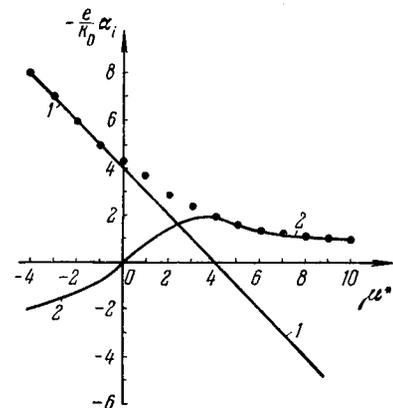


Рис. 3.29. Зависимость $\alpha_i(\mu^*)$.

1 — аппроксимация (3.4.15); 2 — аппроксимация (3.4.17); точки — точная формула (3.4.13).

зоваться аппроксимациями, легко оценить по данным рис. 3.29.

Экспериментальные результаты (термо-ЭДС Ge и Si n-типа). Изучению термо-ЭДС электронного германия посвящен ряд ранних работ [82—84], в которых исследовались образцы с концентрацией примесей до $(1-2) \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Сильно легированные образцы исследовались в более поздних работах автора [85, 86]. И те и другие результаты сведены на рис. 3.30, из которого видно, что значения термо-ЭДС образцов германия, легированных мышьяком, укладываются на прямую линию в координатах $\alpha - \lg n$ (прямая I). Эта прямая простирается до концентрации $5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Штриховая линия на рисунке — продолжение этой прямой. Ее наклон равен 81 мкВ/град , что удивительно совпадает с теоретической величиной на-

клона $k_0/e = 86 \text{ мкВ/град}$. При концентрации электронов, превышающей $5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$, наблюдается отклонение экспериментальных точек от указанной прямой в сторону меньших значений термо-ЭДС. Качественно этот результат

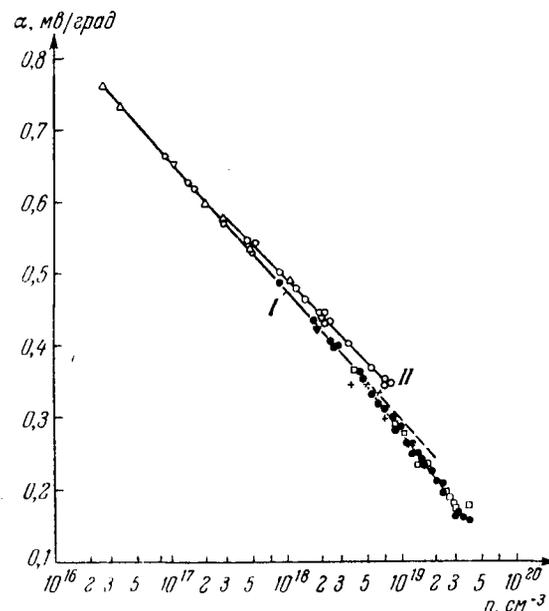


Рис. 3.30. Концентрационная зависимость термо-ЭДС в сильно легированном германии при 300° K .

Значки на линиях соответствуют различным данным: \blacktriangledown — [83]; \triangle — [84]; \bullet — As; \square — P; \circ — Sb (все по данным автора [85]).

легко объясняется. Действительно, в отсутствие вырождения $\mu^* \sim \lg n$, а при сильном вырождении концентрационная зависимость приведенного уровня Ферми значительно сильнее — $\mu^* \sim n^{2/3}$, поэтому и спад величины α при увеличении концентрации должен быть круче.

Термо-ЭДС, так же как и подвижность, определяется механизмом рассеяния, поэтому следовало ожидать различия в величинах α при легировании германия различными примесями. Действительно, из рис. 3.30 видно, что прямая II, относящаяся к образцам с сурьмой, идет выше,

чем прямая I , относящаяся к образцам с мышьяком. Тем не менее количественные различия невелики. Максимальное расхождение составляет 12%, что примерно в три раза меньше, чем расхождение в подвижностях. Это обстоятельство легко понять, если воспользоваться для простоты выражением (3.4.16), справедливым в случае сильного вырождения.

Итак, мы для всех образцов принимаем условие $\mu^* \gg 0$. Это, конечно, не соответствует действительности, но при таком подходе наглядно вскрывается качественная суть явления. Тогда получим:

$$\frac{\alpha_{Sb}}{\alpha_{As}} = \frac{\mu_{As}^*}{\mu_{Sb}^*}.$$

Величины μ^* можно выразить через подвижности, эффективные массы и поперечные сечения рассеяния Q :

$$u = \frac{e}{m^*} \cdot \frac{1}{n \cdot v \cdot Q}, \quad (3.4.18)$$

где $v = \sqrt{2\mu^*/m^*}$.

После некоторых преобразований нетрудно получить для одной и той же концентрации мышьяка и сурьмы следующее выражение:

$$\frac{\alpha_{Sb}}{\alpha_{As}} = \left(\frac{u_{Sb}}{u_{As}}\right)^2 \left(\frac{Q_{Sb}}{Q_{As}}\right)^2. \quad (3.4.19)$$

При этом значения эффективных масс m_{Sb}^* и m_{As}^* принимались одинаковыми, хотя в [59] их значения получились равными соответственно 0,14 m_0 и 0,15 m_0 , что, впрочем, могло явиться следствием ошибок эксперимента. Отношение сечений рассеяния точно неизвестно, но оно во всяком случае меньше единицы [30]. Из-за того, что второй множитель в (3.4.19) меньше единицы, отличие в термо-ЭДС будет меньше, чем квадрат отношения подвижностей.

Заметим, что в [85] не было обнаружено различия в термо-ЭДС образцов с примесью фосфора (рис. 3.30), однако и по подвижностям эти образцы не отличались от кристаллов, легированных мышьяком.

В концентрационной зависимости дифференциальной термо-ЭДС при 100° К еще резче проявляется индивидуальность примесей (рис. 3.31). На рисунке отчетливо видна

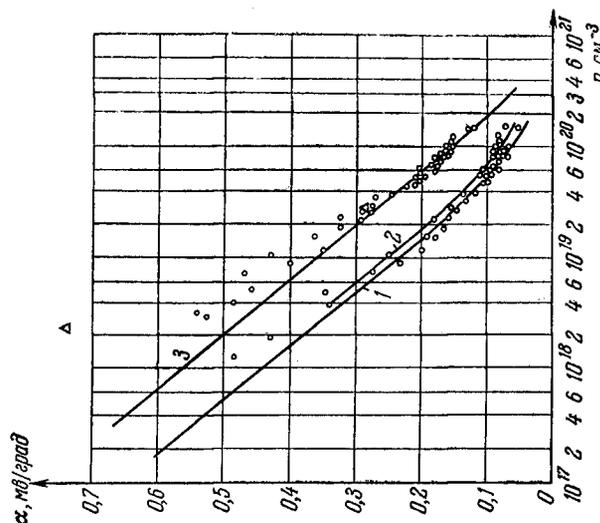


Рис. 3.32. Концентрационная зависимость термо-ЭДС образцов сильно легированного кремния.

Кривая 1 — As (100° К); кривая 2 — P (100° К); кривая 3 — As (300° К), P (300° К); Δ — из работы [87].

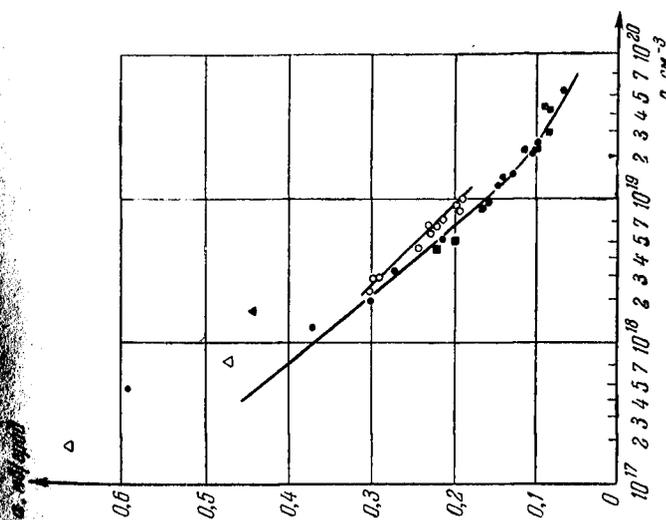


Рис. 3.31. Концентрационная зависимость термо-ЭДС в сильно легированном германии при 100° К.

Легированные примеси: ● — As; ○ — Sb; ■ — P (данные [86]); Δ — Sb [82]; ▲ — As [83].

особенность поведения концентрационной зависимости α , наблюдаемая при низких температурах: рост величины α при $n < 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Такое возрастание коэффициента термо-ЭДС можно объяснить эффектом увлечения электронов фонами.

Концентрационная зависимость α для образцов кремния с примесями мышьяка и фосфора по измерениям, проведенным автором совместно с К. В. Черкас [73], показана на рис. 3.32. При комнатной температуре в пределах

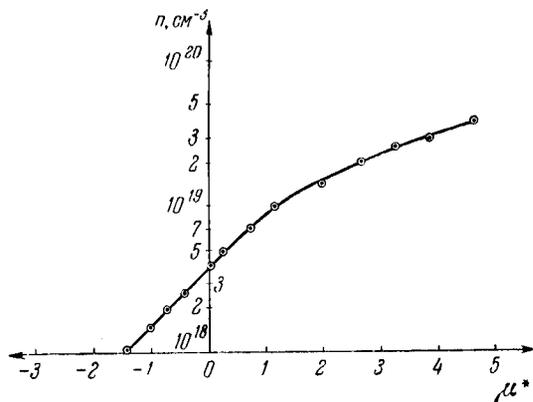


Рис. 3.33. Значения приведенного уровня Ферми в образцах германия с различной концентрацией электронов, найденные из измерений термо-ЭДС (образцы легированы As, $T = 300^\circ \text{ K}$).

точности измерений различия в α у обеих групп образцов с примесями As и P не наблюдается. При азотной температуре имеется слабое различие. Это коррелирует с концентрационной и температурной зависимостями подвижности аналогичных образцов (см. § 3.3).

Приведенные экспериментальные результаты позволяют найти степень вырождения электронного газа μ^* . Наиболее просто это можно сделать, если известен механизм рассеяния носителей заряда. Так, в первом приближении, считая рассеяние происходящим лишь на ионах примеси, из (3.4.13) была получена кривая рис. 3.33 для Ge с примесью мышьяка [85] и кривые рис. 3.34 для Si с примесью мышьяка и фосфора [73].

В германии электронный газ при 300° K уже достаточно хорошо вырожден при концентрации $4 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$, а в кремнии — при 10^{19} см^{-3} . Эти величины хорошо согласуются с данными других опытов, например с появлением туннельного эффекта в p - n -переходах (см. главу 7).

Из найденных величин μ^* , пользуясь связью μ^* с концентрацией носителей (2.3.4), можно найти эффективную

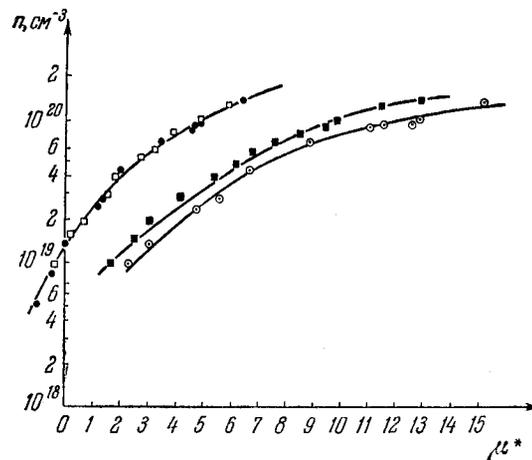


Рис. 3.34. Значения приведенного уровня Ферми в образцах кремния с различной концентрацией электронов, найденные из измерений термо-ЭДС. Легирующие примеси: \bullet — As (300° K); \square — P (300° K); \circ — As (100° K); \blacksquare — P (100° K).

массу плотности состояний. Полученные таким образом значения m_N^* оказались не зависящими от концентрации носителей заряда и для германиевых, и для кремниевых образцов. При комнатной температуре величины m_N^* , рассчитанные на один минимум в многодолинной модели зоны проводимости, равны соответственно для Ge: $0,375 m_0$ и для Si: $0,2 m_0$.

В [86] обработка результатов измерения α с последующим определением μ^* и m_N^* привела к обнаружению отрицательной величины $\frac{dm_N^*}{dT}$ (рис. 3.35). Принципиально такая зависимость может существовать, так как эффективная

масса может быть записана в виде [88]

$$\frac{1}{m^*} \sim \sum \frac{p_\alpha^2}{\Delta E},$$

где p_α — матричный элемент перехода по элементарной ячейке; α — компоненты оператора импульса.

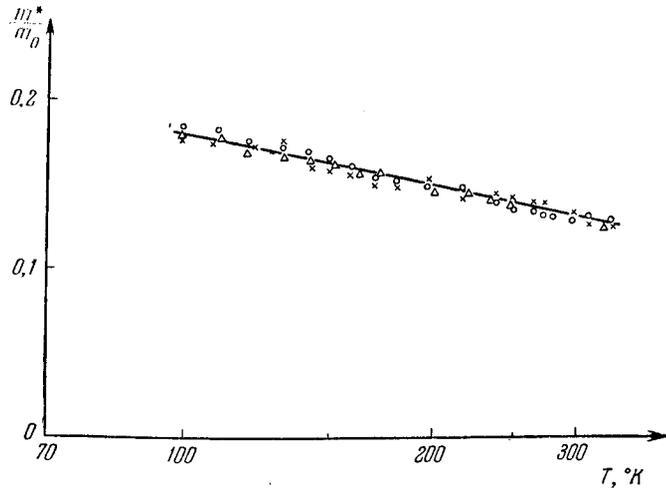


Рис. 3.35. Эффективная масса электронов, найденная из измерений термо-ЭДС сильно легированного германия n -типа. (Концентрации n , см^{-3} : \circ — $5,3 \cdot 10^{18}$; \times — $1,4 \cdot 10^{19}$; Δ — $2 \cdot 10^{19}$.)

Тогда температурный коэффициент dm_N^*/dT должен определяться температурным коэффициентом ширины запрещенной зоны. Действительно, dm_N^*/dT совпадает по знаку с dE_g/dT [92].

С другой стороны, зависимость $m_N^*(T)$, приведенная на рис. 3.35, могла явиться случайным следствием слишком упрощенной обработки экспериментальных данных. Если учесть смешанный механизм рассеяния, для чего воспользоваться значениями a , найденными в § 3.3, например, для германия с мышьяком при 300°K , то кривая $\mu^*(n)$ несколько изменится. Соответственно ослабевают и зависимость $m_N^*(T)$ на рис. 3.35, хотя все же постоянство m_N^* не наблюдается. Возможно, что учет анизотропии рассея-

ния привел бы к еще более правильным результатам, подобно тому, как это имело место при рассмотрении подвижности в § 3.3. Однако отсутствие теории термо-ЭДС с учетом анизотропии рассеяния не позволяет в настоящее время провести необходимую обработку экспериментальных данных.

Экспериментальные результаты (термо-ЭДС Ge и Si p -типа). Исследованию термо-ЭДС дырочного германия посвящен ряд работ. Но в работах [83 и 89] затрагивается

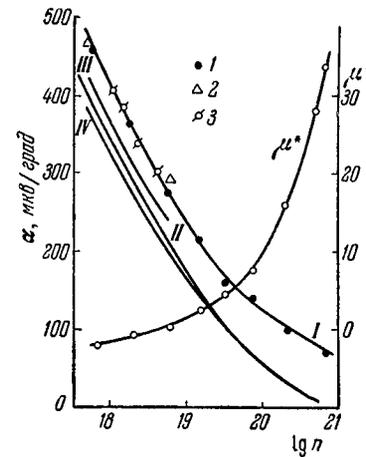


Рис. 3.36. Зависимость термо-ЭДС от концентрации дырок в кристаллах сильно легированного германия ($T = 300^\circ \text{K}$).

I — экспериментальная кривая из [90]; 1, 2, 3 — точки из разных работ: 1 — [90], 2 — [83], 3 — [89]; II, III, IV — расчетные кривые из [90]; II — расчет с учетом смешанного механизма рассеяния (акустические фононы и ионы); III — то же, что и II, но примесное рассеяние с учетом экранировки ионов дырками; IV — расчет с дополнительным учетом рассеяния дырок на оптических колебаниях.

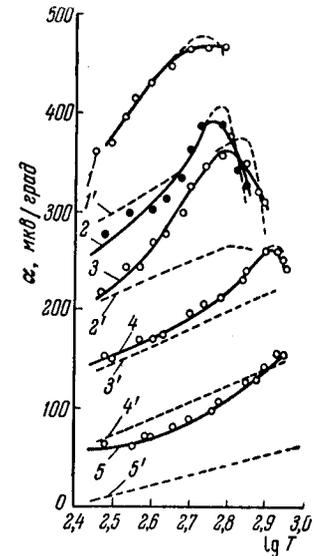


Рис. 3.37. Температурная зависимость термо-ЭДС сильно легированных кристаллов германия p -типа по данным [90].

1 — $2,2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$; 2 — $7 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$; 3 — $1,2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$; 4 — $7,8 \times 10^{19} \text{ см}^{-3}$; 5 — $7 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$; пунктир — расчетные кривые.

лишь область низких температур, а в [82] изучались поликристаллические образцы. Наиболее обстоятельное исследование выполнено в [90] на монокристаллических образцах германия, легированных геллием в интервале концентраций от $7 \cdot 10^{17}$ до $7 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$. Из рис. 3.36, на котором

приведена концентрационная зависимость α , по данным [90] и работам других авторов, видно, что результаты разных авторов хорошо совпадают. Температурная зависимость термо-ЭДС приведена на рис. 3.37.

Сопоставление найденных на опыте зависимостей $\alpha(n)$ и $\alpha(T)$ с теорией, проведенное авторами [90], не дало совпадения, хотя было проведено несколько вариантов расчета, учитывающих рассеяние на акустических и оптических колебаниях, на примесях без учета и с учетом экра-

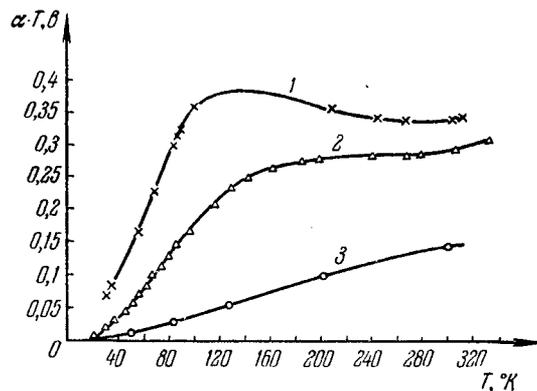


Рис. 3.38. Температурная зависимость термо-ЭДС кристаллов кремния p -типа, легированных бором.

1 — $2,0 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$; 2 — $1 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$; 3 — $1,5 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$.

нировки. Не улучшилось совпадение опытных и расчетных данных и при введении поправок на столкновения носителей друг с другом.

Авторы работы [90], анализируя свои результаты, приходят к выводу, что их можно согласовать с теорией, если допустить существование температурной зависимости эффективной массы по закону $m^* \sim T^{1.7}$, которая возникает в результате изменения спектра дырок при увеличении их энергии.

Совсем скудны экспериментальные данные по термо-ЭДС дырочного кремния. В работе [83] были исследованы образцы, легированные бором (рис. 3.38), причем они не были монокристаллическими. Каких-либо более поздних измерений термо-ЭДС кремния не опубликовано.

Электронная часть теплопроводности. До сих пор мы, рассматривая перенос носителей заряда, связывали его с прохождением по кристаллу электрического тока. Но поток электронов сопровождается еще и потоком энергии, т. е. тепловым потоком W , который можно записать в виде

$$W = \int E v dn,$$

где dn , так же как и при рассмотрении электропроводности, выражает число носителей заряда в элементе пространства волновых чисел

$$dn = \frac{2}{(2\pi)^3} f(k) d^3k.$$

Таким образом,

$$W = \frac{\hbar}{m^*} \frac{2}{(2\pi)^3} \int E k f(k) d^3k.$$

Далее, подставляя в это выражение $f(k)$ в общем виде (3.1.14) и интегрируя в сферических координатах k , θ , φ , получим *):

$$W = \frac{1}{3\pi^2 \hbar} \int E k^3 C(E) \frac{df_0}{dE} dk. \quad (3.4.20)$$

Так как в кристалле имеется градиент температуры ∇T , то $C(E)$ будет определяться тем же выражением (3.4.4), что и при возникновении термо-ЭДС. В результате получим:

$$W = -\frac{1}{3\pi^2 m^*} \left[\frac{\nabla T}{T} G_2 - \frac{\mu \nabla T}{T} G_1 + \nabla(\mu - e\varphi) G_1 \right], \quad (3.4.21)$$

где для краткости записи обозначено:

$$G_i = \int_0^\infty E^i \tau(k) k^3 \frac{df_0}{dk} dk. \quad (3.4.22)$$

Входящую в (3.4.21) величину $\nabla(\mu - e\varphi)$ получим из выражения для плотности тока j_e (3.4.6). Тогда удельная

*) При выводе считаем, что $\int E k f_0(k) d^3k = 0$, так как при отсутствии внешних сил тепловой поток в кристалле отсутствует.

теплопроводность, равная по определению

$$\kappa_e = \frac{W}{\sqrt{T}},$$

будет иметь вид:

$$\kappa_e = \frac{1}{3\pi^2 m^* T} \left(\frac{G_1^2 - G_2 G_0}{G_0} \right). \quad (3.4.23)$$

Заметим, что $G_0 \equiv I_1$, где I_1 — интеграл (3.3.34), фигурирующий во всех кинетических эффектах, рассмотренных выше. Так, например, выражение для удельной электропроводности (3.1.18) можно записать в виде

$$\sigma = - \frac{e^2}{3\pi^2 m^*} G_0. \quad (3.4.24)$$

Поделив (3.4.23) на (3.4.24), получим соотношение

$$\frac{\kappa_e}{\sigma} = - \frac{1}{e^2 T} \left(\frac{G_1^2 - G_2 G_0}{G_0^2} \right). \quad (3.4.25)$$

С другой стороны, для многих веществ опытным путем было найдено, что отношение удельной теплопроводности к удельной электропроводности при данной температуре является величиной постоянной, т. е.

$$\frac{\kappa_e}{\sigma} = LT, \quad (3.4.26)$$

где постоянная L именуется числом Лоренца, а (3.4.26) — законом Видемана — Франца.

Сравнивая два последних выражения, мы можем записать:

$$L = \frac{1}{e^2 T^2} \left(\frac{G_2 G_0 - G_1^2}{G_0^2} \right). \quad (3.4.27)$$

Для конкретизации полученных выражений, подставим в интегралы G_i время релаксации $\tau(k)$, справедливое для смешанного рассеяния (3.2.22), и функцию распределения Ферми. Тогда, интегрируя G_i по частям, получим вместо (3.4.23)

$$\kappa_e = \frac{8\pi}{3} \frac{k_0^3 T}{m^*} \frac{(2m^* k_0 T)^{3/2}}{h^3} \tau_{0L} \frac{\Phi_4^2 - \Phi_3 \Phi_5}{\Phi_3}, \quad (3.4.28)$$

вместо (3.4.25):

$$\frac{\kappa_e}{\sigma} = - \frac{k_0^3 T}{e^2} \frac{\Phi_4^2 - \Phi_3 \Phi_5}{\Phi_3^2} \quad (3.4.29)$$

и вместо (3.4.27):

$$L = \frac{k_0^3}{e^2} \frac{\Phi_3 \Phi_5 - \Phi_4^2}{\Phi_3^2}. \quad (3.4.30)$$

Проанализируем подробнее полученные соотношения. Для краткости будем писать лишь выражения для κ_e и L .

В случае рассеяния электронов на акустических колебаниях атомов решетки ($a^2 \ll (\epsilon^*)^2$) мы получаем соответственно

$$\kappa_{eL} = \frac{8\pi^2 k_0^3 T}{3 m^*} \tau_{0L} \frac{4F_1^2(\mu^*) - 3F_0(\mu^*) F_2(\mu^*)}{F_0(\mu^*)}, \quad (3.4.31)$$

$$L_L = \frac{k_0^3}{e^2} \frac{3F_0(\mu^*) F_2(\mu^*) - 4F_1^2(\mu^*)}{F_0^2(\mu^*)}. \quad (3.4.32)$$

Эти формулы еще более упрощаются в двух предельных случаях: полностью невырожденного полупроводника ($\mu^* \ll 0$) и сильного вырождения ($\mu^* \gg 0$). Их нетрудно получить, если воспользоваться аппроксимациями интегралов Ферми, приведенными в § 2.5, причем для случая $\mu^* \gg 0$ необходимо пользоваться аппроксимациями второго порядка.

В результате получим при $\mu^* \ll 0$:

$$\kappa_{eL} = \frac{16\pi^2}{3} \frac{k_0^3 T}{m^*} \tau_{0L} e^{\mu^*}, \quad (3.4.33)$$

$$L_L = 2 \left(\frac{k_0}{e} \right)^2, \quad (3.4.34)$$

а при $\mu^* \gg 0$:

$$\kappa_{eL} = \frac{8\pi^4 k_0^3 T}{9 m^*} \tau_{0L} \left(\frac{\pi^2}{3} \frac{1}{\mu^*} - \mu^* \right), \quad (3.4.35)$$

$$L_L = \frac{\pi^2 k_0^3}{3 e^2} \left(1 - \frac{\pi^2}{3} \frac{1}{(\mu^*)^2} \right). \quad (3.4.36)$$

Выражение (3.4.34) в точности совпадает с хорошо известной формулой для чистых беспримесных полупроводников [23], а (3.4.36) — для металлов. Обе формулы действительно подтверждают опытный закон Видемана — Франца.

Рассмотрим теперь противоположный случай рассеяния электронов на примесных ионах ($a^2 \gg (\epsilon^*)^2$).

Пренебрегая $(\epsilon^*)^2$ в знаменателе интегралов Φ_n , получим из (3.4.28) и (3.4.30):

$$\kappa_{ei} = \frac{8\pi k_0^2 T}{3m^*} \frac{(2m^* k_0 T)^{3/2}}{h^3} \tau_{0i} \frac{16F_3^2(\mu^*) - 15F_2(\mu^*) F_4(\mu^*)}{3F_2(\mu^*)}, \quad (3.4.37)$$

$$L_i = \frac{k_0^2}{e^2} \frac{15F_2 F_4 - 16F_3^2}{9F_2^2}, \quad (3.4.38)$$

которые при $\mu^* \ll 0$ переходят в

$$\kappa_{ei} = \frac{64\pi k_0^2 T}{m^*} \frac{(2m^* k_0 T)^{3/2}}{h^3} \tau_{0i} e^{\mu^*}, \quad (3.4.39)$$

$$L_i = 4 \left(\frac{k_0}{e} \right)^2, \quad (3.4.40)$$

а при $\mu^* \gg 0$:

$$\kappa_{ei} = \frac{8\pi k_0^2 T}{3m^*} \frac{(2m^* k_0 T)^{3/2}}{h^3} \tau_{0i} \left[\frac{\mu^* ((\mu^*)^3 + 2\pi^2)^2}{(\mu^*)^2 + \pi^2} - (\mu^*)^3 \left((\mu^*)^2 + \frac{10\pi^2}{3} \right) \right], \quad (3.4.41)$$

$$L_i = \frac{k_0^2}{e^2} \frac{1}{(\mu^*)^2 + \pi^2} \left[\left((\mu^*)^2 + \frac{10\pi^2}{3} \right) - \frac{(\mu^*)^3 + 2\pi^2}{(\mu^*)^2 + \pi^2} \right]. \quad (3.4.42)$$

Решеточная теплопроводность. В суммарную теплопроводность кристалла, помимо электронной составляющей, должна вносить вклад и теплопроводность обычной кристаллической решетки. Такая решеточная часть теплопроводности не связана с переносом тепла движущимися носителями заряда. Она связана непосредственно с рассеянием самих фононов.

Впервые теория решеточной теплопроводности была развита Дебаем [93]. Он рассматривал тепловое движение как совокупность всех возможных собственных колебаний тела. Каждое из этих колебаний создает упругие волны, которые при своем распространении в теле испытывают многократные рассеяния. Центрами рассеяния в этой теории являлись сами же упругие волны. Совершенно очевидно, что встреча двух идеально гармонических волн не может привести к их рассеянию и, следовательно, встреча таких волн не вызывает никакого теплового сопротивления. Если же имеет место ангармонизм волн, то волна, встречаясь с флуктуациями плотности (сгущения и разрежения) в кристалле, будет менять направление своего рас-

пространения, т. е. рассеиваться. Такое рассеяние создает тепловое сопротивление.

Далее Дебай ввел в рассмотрение понятие средней длины свободного пробега \bar{l} — расстояния, на которое распространяется упругая волна, прежде чем ее интенсивность уменьшится в e раз по сравнению с ее начальным значением, и получил формулу для κ_p , аналогичную формуле, вытекающей из кинетической теории газов *):

$$\kappa_p = \frac{1}{3} c_v \bar{v} \bar{l}, \quad (3.4.43)$$

где \bar{v} — средняя скорость распространения упругих волн в кристалле; c_v — теплоемкость 1 см³ кристалла.

По теории Дебая следует, что при $T > \theta_D$, где θ_D — температура Дебая (см. § 3.2), решеточная теплопроводность κ_p должна уменьшаться с ростом температуры пропорционально $1/T$, что в действительности наблюдалось многими авторами [93, 94].

Пайерлс [95, 96] видоизменил теорию Дебая в соответствии с квантовыми представлениями, рассматривая рассеяние фононов — квантов энергии колебательного спектра кристалла. Если в кристалле имеется градиент температуры, то распространение фононов уже не будет равновесным. Столкновения между фононами будут упорядочивать их движение и стремиться их к равновесному состоянию. Скорость процесса восстановления равновесного состояния фононов будет определять теплопроводность. Здесь мы имеем аналогию с восстановлением электронного равновесия при рассеянии электронов, описываемого понятием времени релаксации τ .

Пайерлс показал, что тепловое сопротивление возникает лишь, если при столкновении фононов происходит изменение направления потока энергии, т. е. имеет место соотношение

$$q_1 + q_2 = q_3 + \frac{2\pi}{a} i, \quad (3.4.44)$$

где q_1 и q_2 — волновые векторы фононов до столкновения; q_3 — после столкновения; a — параметр решетки кристалла

*) Формула Дебая отличалась лишь численным коэффициентом 1/4 вместо 1/3.

и i — единичный вектор, возможные направления которого зависят от симметрии кристалла.

Такой тип рассеяния Пайерлсом был назван U-процессом (Umklapp-процесс: процесс переброса).

Условие (3.4.44) накладывает ограничение и на энергию фононов, участвующих в процессе переброса. Лишь фононы с энергиями, большими чем $k_0 \theta_D/2$, могут испытывать переброс при столкновениях [97]. Число таких фононов N_Φ будет:

$$N_\Phi \sim \frac{f(T)}{\exp\left(\frac{k_0 \theta_D}{2k_0 T}\right) - 1},$$

что при $T \ll \theta_D$ дает $N_\Phi \sim f(T) \exp\left(-\frac{\theta_D}{2T}\right)$, а тепловое сопротивление будет равно

$$\frac{1}{\kappa_p} \sim f(T) e^{-\frac{\theta_D}{2T}}. \quad (3.4.45)$$

Здесь $f(T)$ — функция, описывающая вероятность встречи трех фононов, которая растет с температурой примерно как T^n , где n несколько больше единицы [98]. Тогда из (3.4.45) видно, что при устремлении температуры к абсолютному нулю теплопроводность должна бесконечно возрастать. Однако при переходе к низким температурам длина свободного пробега фононов уже настолько возрастает, что на их рассеянии начинают сказываться физические границы самого кристалла. В [99] был рассмотрен этот случай и для бесконечно длинного цилиндрического кристалла с идеально шероховатой поверхностью, было получено выражение для κ_p в виде

$$\kappa_p = 2,31 \cdot 10^3 r p(\bar{v}) A T^3 \text{ вт} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}, \quad (3.4.46)$$

где r — радиус кристалла; $p(\bar{v})$ — функция, зависящая от средних скоростей фононов и равная примерно 1,4 для многих кристаллов; A — константа в законе $c_v = AT^3$.

Таким образом, теория дает две совершенно противоположные зависимости $\kappa_p(T)$, проявляющиеся в двух крайних случаях: высоких и низких температур. Ожидаемые зависимости κ_p от температуры изображены на рис. 3.39.

В области максимума кривой $\kappa_p(T)$ необходимо учитывать несколько механизмов рассеяния фононов (процессы

переброса, границы кристалла, примеси, точечные дефекты и др.) по соотношению

$$\frac{1}{\kappa_p} = \sum_i \frac{1}{\kappa_{pi}}. \quad (3.4.47)$$

Формулы для каждого из членов в (3.4.47) выведены Клеменсом и приведены в [100, 101].

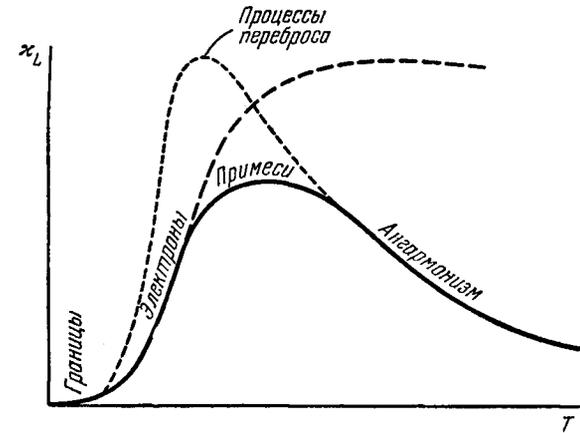


Рис. 3.39. Температурная зависимость решеточной теплопроводности при различных механизмах рассеяния фононов.

Для области, лежащей справа от максимума кривой $\kappa_p(T)$, особенно при $T > \theta_D$, теория теплопроводности развита значительно хуже. Поэтому экспериментаторам для оценки κ_p при $T > \theta_D$ приходится использовать ряд полуэмпирических зависимостей. Наибольший интерес из них представляет формула А. Ф. Иоффе:

$$\kappa_p = \frac{v}{3B} \frac{1}{T - \frac{\theta_D}{3}}, \quad (3.4.48)$$

где величина B характеризует степень анггармоничности и не зависит от температуры. Значения B различны для разных тел, но для веществ с одинаковым характером межатомных сил связи и одинаковой кристаллической решеткой

они весьма близки [102]. Эта формула применима, пока l не станет близко к значению параметра решетки.

Соотношение (3.4.48) можно записать в развернутом виде, заменив θ_D явным выражением через плотность кристалла d , сжимаемость χ и молекулярный вес A , а также выразив v как $\sqrt{E/d}$, где E — модуль упругости:

$$\kappa_p = \frac{1}{3B} \sqrt{\frac{E}{d}} \frac{1}{T - \frac{1,8 \cdot 10^{-3}}{A^{1/3} d^{1/3} \chi^{1/2}}} \quad (3.4.49)$$

Получила распространение также полуэмпирическая формула Ляйбфрида — Шлемана [103], имеющая вид

$$\kappa_p = \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{k_0}{h} \right) A a \frac{\theta_D^3}{T}, \quad (3.4.50)$$

где γ — константа Грюнайзена.

Эту же формулу можно получить и из соображений размерности [104].

Меньшее распространение получили формула Кея [105], связывающая теплопроводность кристалла с его точкой плавления, и формула Тавернье [106], который также нашел связь между κ_p и $T_{пл}$.

Для полноты следует упомянуть о работе В. П. Жузе [107], в которой найдена корреляция между κ_p и коэффициентом линейного расширения δ , и о работах [108, 109], где обоснована связь κ_p с твердостью кристалла.

Более подробное рассмотрение различных полуэмпирических зависимостей, связывающих κ_p с различными явлениями, читатель найдет в монографии [97].

Влияние примесей на κ_p . При высоких температурах ($T > \theta_D$) влияние примесей на κ_p было рассмотрено А. Ф. и А. В. Иоффе [110, 111]. Они ввели в рассмотрение понятие поперечного сечения рассеяния s каждого примесного центра:

$$s = \varphi a^2,$$

где φ — параметр.

Если в решетке кристалла содержится N атомов примеси, то полное сечение рассеяния будет $S = sN$. Число столкновений ν фононов с примесями в кристалле с простой

кубической решеткой будет определяться как

$$\nu = \frac{N \varphi a^2}{N_0 a^3},$$

где N_0 — число атомов основной решетки в 1 см^3 кристалла. Тогда

$$\frac{\kappa_0}{\kappa_{прим}} = 1 + \frac{N}{N_0} \varphi \frac{l_0}{a}, \quad (3.4.51)$$

где κ_0 и l_0 относятся к чистому беспримесному кристаллу.

В эту формулу входит величина φ . Как показали авторы этой формулы, если атомы примеси образуют в кристалле раствор замещения, то $\varphi \leq 1$; если — раствор внедрения, то $\varphi > 1$, а в случае осаждения примеси на дефектах $\varphi < 0$.

Условием применимости формулы Иоффе является малость концентрации N по сравнению с N_0 .

Другие механизмы переноса тепла в кристаллах. Помимо рассмотренных механизмов рассеяния фононов, тепло в кристаллах может переноситься и рядом других механизмов, например, за счет диффузии пар электрон — дырка [23, 112], за счет диффузии экситонов [113] и за счет переноса фотонов (электромагнитным излучением) [114]. Эти механизмы переноса тепла играют небольшую роль в обычных чистых кристаллах, а в сильно легированных полупроводниках их вклад настолько ничтожен, что подробнее их рассматривать нет необходимости.

Экспериментальное изучение решеточной теплопроводности. Обратимся прежде всего к случаю низких температур, где следует ожидать уже существенное влияние на

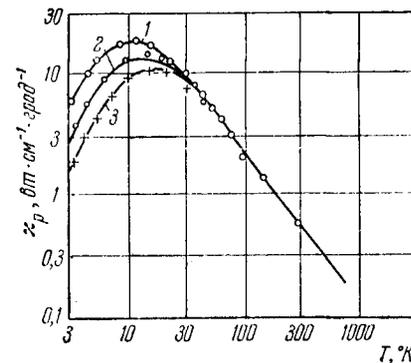


Рис. 3.40. Теплопроводность германия в зависимости от диаметра образца.

Диаметр: 1 — 1,06 см, 2 — 0,29 см, 3 — 0,16 см.

рассеяние границ кристалла и, следовательно, применимости формулы (3.4.46). Действительно, на опыте эта формула хорошо подтверждается для многих кристаллов, в том числе и для германия [115] (рис. 3.40). Из этого рисунка видно, что κ_p растет с увеличением диаметра образца, как и следует из (3.4.46). Однако наблюдаемая на опыте температурная зависимость во многих случаях была слабее, чем T^3 . Так, для алмаза было найдено [116] $\kappa_p \sim T^{2,5}$, а для германия [117] — $\kappa_p \sim T^{2,4}$ и т. п.

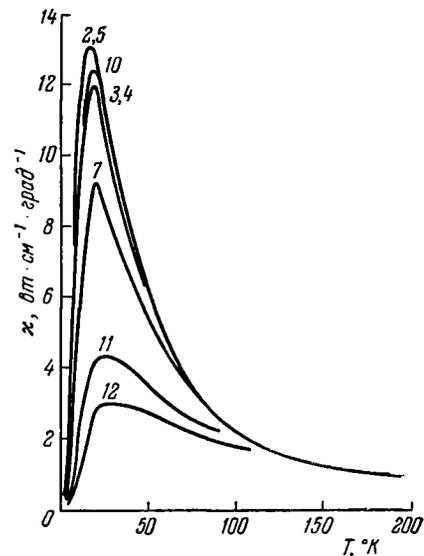


Рис. 3.41. Температурная зависимость теплопроводности германия с различным содержанием примесей по данным [119]:

№ образца	Тип проводимости	Концентрация, $с.м^{-3}$
2; 5	<i>n</i>	$1 \cdot 10^{13}$
10	<i>p</i>	$1 \cdot 10^{15}$
3; 4	<i>p</i>	$1 \cdot 10^{14}$
7	<i>p</i>	$2,3 \cdot 10^{16}$
11	<i>p</i>	$2 \cdot 10^{18}$
12	<i>p</i>	$1 \cdot 10^{19}$

Более тщательные опыты и теоретические расчеты показали, что подобные отклонения от $\kappa_p \sim T^3$ обусловлены самыми различными причинами. Например, в одних опытах отклонение было связано с мозаичной структурой кристалла [118], в других — с примесями [119], в третьих — с дефектами [120], или даже с избыточным количеством, по сравнению с естественной смесью, одного из изотопов германия [117]. Ряд опытов грешил методическими ошибками (недостаточно шероховатая поверхность или короткие образцы) [121]. Учет всех этих факторов неизменно выправлял экспериментально наблюдаемую зависимость и приводил к $\kappa_p \sim T^3$.

Неплохое качественное согласие экспериментальных данных с теорией наблюдается и в области температур, расположенных справа от максимума кривой $\kappa_p(T)$ на рис. 3.39, но меньших температуры Дебая. Для этой области была подтверждена справедливость экспоненциального закона (3.4.45), что хорошо видно, например, из рис. 3.41. Величина максимума κ_p для многих кристаллов обычно лежит в районе $(0,035 \div 0,045) \theta_D$ [122]. На рис. 3.41 видно, что высота максимума κ_p зависит от концентрации примесей. Представляет интерес применить к этим результатам формулу Иоффе (3.4.51). По этой формуле величина $\frac{\kappa_0}{\kappa_{\text{прим}}} - 1$ должна быть линейной функцией от концентрации примесных атомов. Если за κ_0 примем величину $\kappa_{\text{макс}}$ для образца 10 на рис. 3.41, тогда экспериментальные результаты укладываются на прямую линию, изображенную на рис. 3.42. Точка пересечения прямой с осью абсцисс, как легко убедиться, дает возможность оценить ϕ по соотношению

$$\frac{N}{N_0} \Big|_{\lg \left(\frac{\kappa_0}{\kappa_{\text{прим}}} - 1 \right) = 0} = \phi \frac{l_0}{a}.$$

Подставляя сюда для Ge $a \approx 5,6 \cdot 10^{-8}$ см [123] и $l_0 \approx 10^{-1}$ см (что видно из рис. 3.40 при $T \sim 25^\circ$ К), получим $\phi \approx 10^{-2}$, т. е. действительно имеем раствор замещения, как и следовало ожидать для галлия в германии.

Германий, сильно легированный донорными примесями, исследовался более подробно в [124, 125] (см. рис. 3.43 и 3.44). Аналогичная зависимость $\kappa(n)$ для сильно

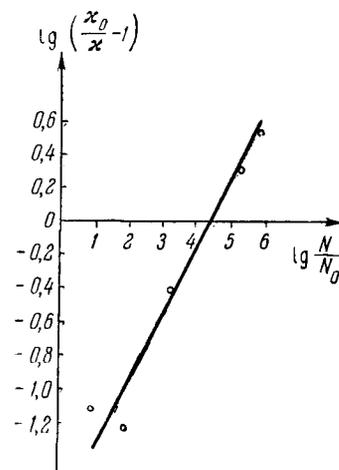


Рис. 3.42. Результаты обработки данных рис. 3.41 по формуле Иоффе.

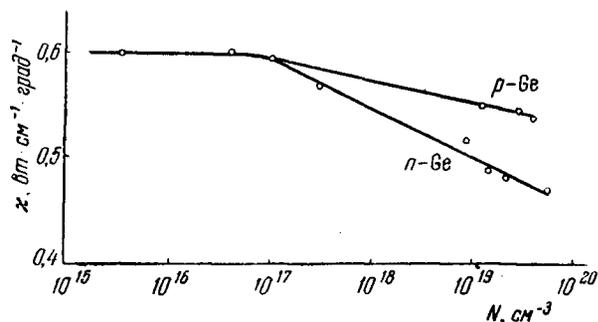


Рис. 3.43. Зависимость коэффициента теплопроводности от концентрации примеси в германии при 300° К.

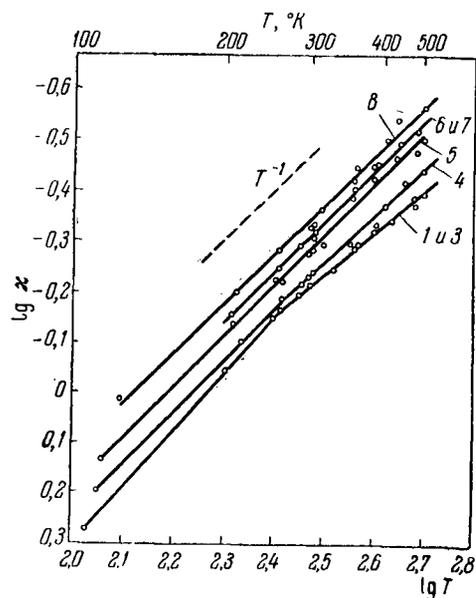


Рис. 3.44. Температурная зависимость теплопроводности германия с примесью мышьяка (концентрация As—в см^{-3}).

1 — $3,6 \cdot 10^{15}$; 3 — $1 \cdot 10^{17}$; 4 — $3 \cdot 10^{17}$; 5 — $8,8 \cdot 10^{17}$;
6 — $1,3 \cdot 10^{18}$; 7 — $2 \cdot 10^{18}$; 8 — $5,4 \cdot 10^{18}$.

легированного кремния с примесью мышьяка [126] приведена на рис. 3.45.

Следует отметить, что применение формулы Иоффе (3.4.51) к электронным образцам германия и кремния позволило обнаружить непостоянство параметра ϕ (в отличие от германия p -типа). Так, например, в германии n -типа его значение меняется от 50 при $N = 5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ до 3,3 при $N = 5 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$. Так как хорошо известно, что мышьяк

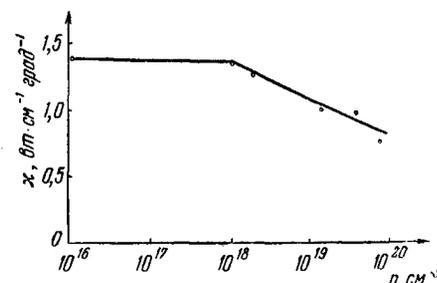


Рис. 3.45. Зависимость коэффициента теплопроводности от концентрации примесей в кремнии при 300° К.

в германии образует раствор замещения, то найденные величины $\phi > 1$ свидетельствуют о том, что в сильно легированном германии n -типа рассеяние фононов происходит не на атомах мышьяка, а на иных центрах, количество которых растет с увеличением степени легирования. Авторы работы [125] предположили, что такими центрами являются вакансии, содержание которых N_V , как известно, растет с легированием полупроводника донорами по закону [127]:

$$N_V = N_{Vi} \frac{N}{n_i}, \quad (3.4.52)$$

где N_{Vi} и n_i — соответственно концентрация вакансий и электронов в собственном полупроводнике.

Так как величина N_{Vi} равна примерно 10^{17} см^{-3} , то очевидно, что прирост новых вакансий скажется лишь при концентрации доноров того же порядка, что действительно имеет место (см. рис. 3.43). Однако глубокие исследования, в результате которых можно было бы подтвердить вакан-

сионный механизм теплопроводности в сильно легированных германии и кремнии, очевидно, надлежит еще про- вести.

Менее всего имеется экспериментальных данных для области температур, превышающих температуру Дебая. Если, например, сравнить с экспериментальными кривыми

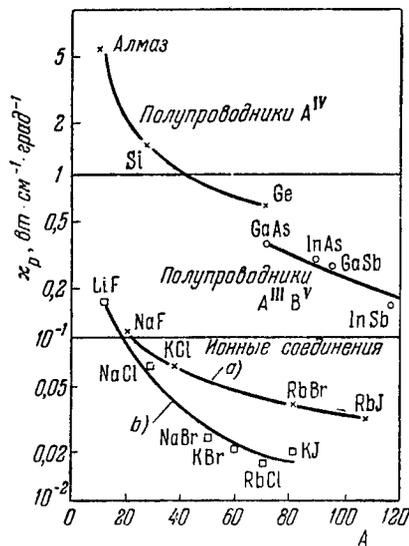


Рис. 3.46. Зависимость теплопроводности от среднего молекулярного веса полупроводника.

рис. 3.47—3.49. Эти зависимости получены путем вычитания $\kappa_e(T)$ из измеренной на опыте суммарной теплопроводности $\kappa(T)$. Вычисление κ_e все авторы производили весьма приближенно, предполагая, что вырождение отсутствует и проявляется только механизм рассеяния на акустических колебаниях атомов решетки, т. е. κ_e вычислялась по закону Видемана — Франца с использованием для числа Лоренца формулы (3.4.34).

Учет вырождения, т. е. применение формулы (3.4.32), приводит к некоторому изменению зависимостей $\kappa_p(T)$.

на рис. 3.46 формулу (3.4.49), из которой следует, что при данной температуре $\lg \frac{1}{\kappa_p}$ должен быть пропорционален $\frac{1}{3} \lg A$, то видно, что (3.4.49) хорошо подтверждается. Характерно, что с увеличением доли ионной связи κ_p уменьшается, что и следует из (3.4.48), ибо у полупроводников с ионной связью атомов температуры Дебая ниже, чем у кристаллов с ковалентными связями (см. табл. 3.5) [65].

Экспериментально найденные зависимости $\kappa_p(T)$ и $\kappa_p(n)$ для некоторых соединений типа $A^{III}B^V$ показаны на

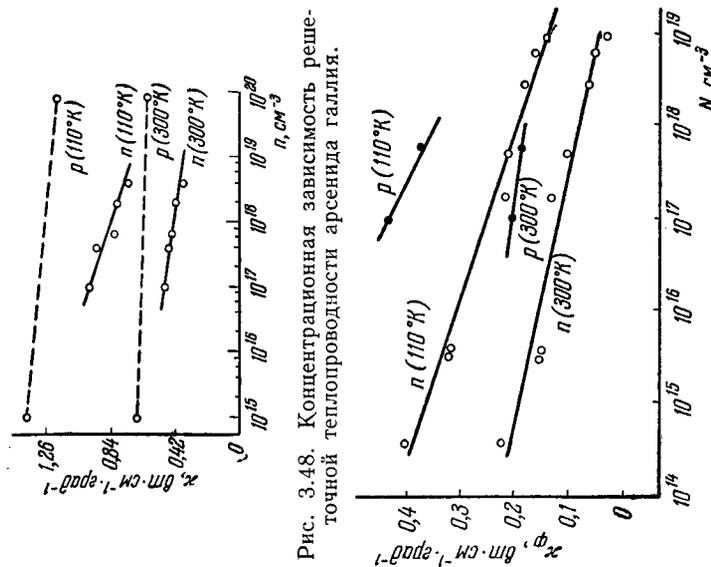


Рис. 3.48. Концентрационная зависимость решеточной теплопроводности арсенида галлия.

Рис. 3.49. Концентрационная зависимость решеточной теплопроводности антимоныда индия.

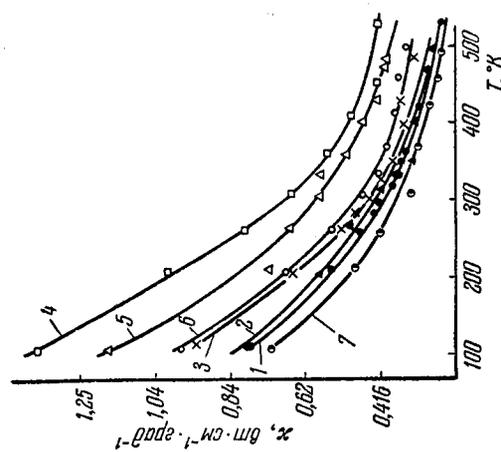


Рис. 3.47. Зависимость теплопроводности образцов арсенида галлия n - и p -типа от температуры (концентрация — в см^{-3}).

1 — $n = 2 \cdot 10^{18}$; 2 — $n = 6,4 \cdot 10^{17}$; 3 — $n = 4,0 \cdot 10^{17}$; 4 — $p = 10^{16}$; 5 — $p = 10^{15}$; 6 — $n = 1 \cdot 10^{17}$; 7 — $n = 4 \cdot 10^{16}$.

Таблица 3.5
Температура Дебая Ge, Si и полупроводниковых соединений A^{III}B^V

Полупроводник	$\theta_D, ^\circ\text{K}$	Полупроводник	$\theta, ^\circ\text{K}$
Ge	406	GaSb	250
Si	689	InP	420
AlSb	370	InAs	280
GaAs	355	InSb	170

В заключение приведем таблицу экспериментальных результатов определения решеточной доли теплопроводности κ_p , составленную по данным, приведенным в [65, 97].

Таблица 3.6
Решеточная теплопроводность полупроводников при комнатной температуре

Полупроводник	$\kappa_p, \text{вт} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$	Полупроводник	$\kappa_p, \text{вт} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$
Ge	0,64	AlSb	0,6
Si	1,45	GaAs	0,37
Se	0,02	InAs	0,29
Te	0,03	GaSb	0,27
GaP	1,1	InSb	0,15
InP	0,8		

Соотношение между электронной и решеточной компонентами теплопроводности. Соотношение между электронной и решеточной компонентами теплопроводности меняется при переходе от диэлектриков к металлам, т. е. при увеличении числа носителей заряда. В диэлектриках свободных электронов нет и для них $\kappa = \kappa_p$. В металлах, наоборот, электронов очень много ($\sim 10^{22} \text{см}^{-3}$) и поэтому $\kappa_e > \kappa_p$. Например, по оценкам [128] $\frac{\kappa_e}{\kappa_p}$ в металлах составляет $3 \cdot 10^3$.

Полупроводники занимают промежуточное положение между металлами и изоляторами. Нетрудно провести гру-

бую оценку для двух предельных случаев сильно легированного и чистого полупроводника. Определим κ_e для металла по формуле (3.4.36), справедливой при $\mu^* \gg 0$. Тогда по закону Видемана — Франца получим:

$$\kappa_e = 2,45 \cdot 10^{-8} \sigma T \text{ вт} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}.$$

Определяя κ_p при помощи формулы (3.4.51), запишем отношение κ_e/κ_p в виде

$$\frac{\kappa_e}{\kappa_p} = 2,45 \cdot 10^{-8} \sigma T \frac{1}{\kappa_0} \left(1 + \varphi \frac{N}{N_0} \frac{l_0}{a} \right). \quad (3.4.53)$$

Из этого выражения видно, что вклад электронной составляющей повышается с увеличением концентрации примесей.

Величина κ_e/κ_p сложным образом зависит от температуры из-за температурных зависимостей $\sigma(T)$ и $\kappa_0(T)$. В простейшем случае, когда концентрацию носителей и их подвижность можно считать не зависящими от температуры, а $\kappa_0 \sim 1/T$, отношение κ_e/κ_p будет почти постоянным.

В области $\mu^* < 0$ число Лоренца определяется по (3.4.34) и в этом случае

$$\kappa_e = 1,47 \cdot 10^{-8} \sigma T \frac{1}{\kappa_0} \left(1 + \frac{N}{N_0} \frac{l_0}{a} \right). \quad (3.4.54)$$

Оценка показывает, что в сильно легированных германии и кремнии величины κ_e хотя и малы, но вполне измеримы. Так, для наиболее легированных образцов германия ($N = 5 \cdot 10^{19} \text{см}^{-3}$) и кремния ($N = 8 \cdot 10^{19} \text{см}^{-3}$) величины $\frac{\kappa_e}{\kappa_p}$ равны соответственно 0,02 и 0,006. Эти значения вычислены в предположении рассеяния на ионах примеси. Если учесть смешанный механизм рассеяния, то легко показать, воспользовавшись соответствующими формулами, приведенными выше, что величины κ_e/κ_p практически остаются неизменными. Это обстоятельство обусловлено тем, что число Лоренца слабо чувствительно и к изменению механизма рассеяния, и к степени вырождения.

Для других полупроводников экспериментальные результаты, хотя и скудные, но все же имеются. Так, κ_e

было измерено для PbTe [129], для селенида висмута Bi_2Se_3 [130] и некоторых других термоэлектрических материалов. Анализ экспериментальных результатов, относящихся к этим полупроводникам, читатель найдет в [97, 98, 131].

§ 3.5. Термомагнитные явления

Поперечный эффект Нернста — Эттингсгаузена (Н.—Э.). Поместим полупроводник с градиентом температуры на нем ∇T в магнитное поле \mathbf{H} (рис. 3.50). Возникающая при этом сила Лоренца будет отклонять носители заряда, так же как и в обычном эффекте Холла (см. § 3.3), с той лишь разницей, что движение свободных носителей обусловлено не внешним электрическим полем \mathcal{E} , а полем $\nabla(\varphi - \frac{\mu}{e})$, как и в случае возникновения термо-ЭДС. Появляющаяся в этом случае дополнительная электродвижущая сила $\mathcal{E}_{\text{Н.—Э.}}$ в направлении оси y носит название ЭДС Нернста — Эттингсгаузена — ЭДС Н.—Э. Ее явный вид найдем из выражения для плотности тока \mathbf{j} , которое определим, как и прежде, из (3.1.16) при подстановке $C(E)$. Таким образом задача опять сводится к отысканию $C(E)$. Для этого, используя соответствующее выражение для F (табл. 3.1), запишем кинетическое уравнение в виде

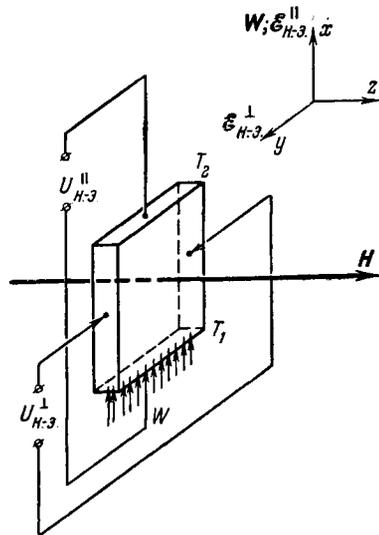


Рис. 3.50. Схема расположения в магнитном поле образца с градиентом температуры при возникновении термомагнитных эффектов.

для плотности тока \mathbf{j} , которое определим, как и прежде, из (3.1.16) при подстановке $C(E)$. Таким образом задача опять сводится к отысканию $C(E)$. Для этого, используя соответствующее выражение для F (табл. 3.1), запишем кинетическое уравнение в виде

$$\frac{e}{\hbar} \left\{ \nabla \left(\varphi - \frac{\mu}{e} \right) + \frac{1}{\hbar c} [\mathbf{vH}] \right\} \nabla_k f - \mathbf{v} \nabla f = - \frac{C(E) \hbar \frac{df_0}{dE}}{\tau(\mathbf{k})}. \quad (3.5.1)$$

В левой части этого уравнения сделаем преобразование с помощью (3.3.23) и (3.4.2). При этом (3.5.1) перейдет в

В левой части этого уравнения сделаем преобразование с помощью (3.3.23) и (3.4.2). При этом (3.5.1) перейдет в

$$\mathbf{v} \frac{df_0}{dE} \left[\frac{\mu - E}{T} \nabla T - \nabla \mu \right] + \frac{\hbar}{m^*} \nabla (e\varphi) + \frac{e}{\hbar c} \mathbf{v} \frac{df_0}{dE} [HC] = \frac{C(E) \hbar \frac{df_0}{dE}}{\tau(\mathbf{k})}.$$

Заменяя \mathbf{v} на $\frac{\hbar}{m^*} \mathbf{k}$ и решая относительно $C(E)$, получим:

$$C(E) = - \frac{\hbar}{m^*} \left\{ P - \frac{e}{\hbar c} [HC] \right\}, \quad (3.5.2)$$

где через P мы обозначили выражение

$$P = \frac{E - \mu}{T} \nabla T + \nabla (\mu - e\varphi). \quad (3.5.3)$$

Уравнение (3.5.2) имеет тот же вид, что и (3.3.24). Решая его тем же методом, получим:

$$C(E) = - \frac{\hbar}{m^*} \tau(\mathbf{k}) \left\{ \frac{P + \frac{e}{m^* c} \tau(\mathbf{k}) [HP] + \left(\frac{e}{m^* c} \right)^2 \tau^2(\mathbf{k}) (HP) \mathbf{H}}{1 + \left[\frac{e}{m^* c} \tau(\mathbf{k}) \mathbf{H} \right]^2} \right\}. \quad (3.5.4)$$

И в случае эффекта Н.—Э. ограничимся слабым полем \mathbf{H} , тогда получим по аналогии с (3.3.29):

$$C(E) = - \frac{\hbar}{m^*} \tau \left\{ P + \frac{e}{m^* c} \tau [H, P] \right\}. \quad (3.5.5)$$

Подставляя это выражение в (3.1.16) и переходя от векторов к скалярным величинам, запишем составляющие \mathbf{j}_c по координатным осям:

$$\left. \begin{aligned} j_{cx} &= a_1 \nabla_x \left(\frac{\mu}{e} - \varphi \right) + b_1 \nabla_x T - \\ &\quad - a_2 \nabla_y \left(\frac{\mu}{e} - \varphi \right) - b_2 \nabla_y T, \\ j_{cy} &= a_2 \nabla_x \left(\frac{\mu}{e} - \varphi \right) + b_2 \nabla_x T - \\ &\quad - a_1 \nabla_y \left(\frac{\mu}{e} - \varphi \right) + b_1 \nabla_y T, \\ j_{cz} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.5.6)$$

где коэффициенты a_1 , a_2 , b_1 , b_2 имеют вид:

$$a_1 = -\frac{e^2}{3\pi^2 m^*} \int_0^\infty k^3 \tau \frac{\partial f_0}{\partial k} dk, \quad (3.5.7)$$

$$a_2 = -\frac{e^3}{3\pi^2 (m^*)^2 c} H \int_0^\infty k^3 \tau^2 \frac{\partial f_0}{\partial k} dk, \quad (3.5.8)$$

$$b_1 = -\frac{ek_0}{3\pi^2 m^*} \left\{ \int_0^\infty k^3 \tau E \frac{\partial f_0}{\partial k} dk - \frac{\mu}{k_0 T} \int_0^\infty k^3 \tau \frac{\partial f_0}{\partial k} dk \right\}, \quad (3.5.9)$$

$$b_2 = -\frac{e^2 k_0}{3\pi^2 (m^*)^2 c} \left\{ \int_0^\infty k^3 \tau^2 E \frac{\partial f_0}{\partial k} dk - \frac{\mu}{k_0 T} \int_0^\infty k^3 \tau^2 \frac{\partial f_0}{\partial k} dk \right\}. \quad (3.5.10)$$

Нетрудно убедиться, что (3.5.6) включает и ранее рассмотренные кинетические эффекты. Так, полагая $\nabla T = 0$ (при этом $\nabla \mu = 0$) и $H = 0$, легко получить (3.1.17), а следовательно, и σ . Полагая в (3.5.6) $\nabla T = 0$, но $H \neq 0$, мы получим систему из двух уравнений, совпадающую с (3.3.33) и соответствующую эффекту Холла. Если в (3.5.6) считать $H = 0$, но $\nabla T \neq 0$, то из $j_{ex} = 0$ легко найти $\nabla_x \left(\frac{\mu}{e} - \varphi \right)$, а значит, и дифференциальную термо-ЭДС α , т. е. (3.4.7).

Таким же способом получим так называемую *постоянную Н.* — \mathcal{E} . Q^\perp , которую определим из соотношения

$$\mathcal{E}_{H. - \mathcal{E}} \equiv \mathcal{E}_y = -Q^\perp H \nabla_x T, \quad (3.5.11)$$

где \mathcal{E}_y показано на рис. 3.54, а индекс \perp показывает, что вектор магнитного поля H перпендикулярен к градиенту температуры ∇T .

Эффект Н. — \mathcal{E} . мы считаем изотермическим, т. е. $\nabla_y T = 0$. Поэтому

$$\nabla_y \left(\frac{\mu}{e} - \varphi \right) = -\nabla_y \varphi = \mathcal{E}_y.$$

Из (3.5.6) легко найти

$$\nabla_y \left(\frac{\mu}{e} - \varphi \right) = \mathcal{E}_y = -\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^2 + a_2^2} \nabla_x T. \quad (3.5.12)$$

Сравнивая это выражение с (3.5.11) после подстановки коэффициентов (3.5.7) — (3.5.10), получим:

$$Q^\perp = \frac{k_0}{m^* c} \frac{I_1 (I_{2E} - \mu^* I_2) + I_2 (I_{2E} - \mu^* I_1)}{I_1^2 + \frac{e^2}{(m^*)^2 c^2} I_2^2}, \quad (3.5.13)$$

где

$$I_i = \int_0^\infty k^3 \tau^i \frac{\partial f_0}{\partial k} dk, \quad (3.5.14)$$

$$I_{iE} = \int_0^\infty k^3 \tau^i E \frac{\partial f_0}{\partial k} dk. \quad (3.5.15)$$

Для дальнейшего анализа (3.5.13) поступим так же, как и при исследовании других кинетических коэффициентов: подставим в интегралы вместо f_0 функцию распределения Ферми, а вместо τ — его выражение для смешанного рассеяния (3.2.22).

Проинтегрировав интегралы в (3.5.13) по частям и переходя к безразмерной энергии ϵ^* , получим:

$$Q^\perp = \frac{k_0}{m^* c} \tau_{0L} \times \frac{\Phi_{1/2}(\mu^*, a) \Phi_4(\mu^*, a) - \Phi_3(\mu^*, a) \Phi_{11/2}(\mu^*, a)}{\Phi_8^2(\mu^*, a)}, \quad (3.5.16)$$

где

$$\Phi_{11/2}(\mu^*, a) = \int_0^\infty \frac{(\epsilon^*)^{11/2} \exp(\epsilon^* - \mu^*) d\epsilon^*}{[(\epsilon^*)^2 + a^2]^2 [1 + \exp(\epsilon^* - \mu^*)]^2}; \quad (3.5.17)$$

интегралы Φ_3 , Φ_4 , $\Phi_{1/2}$ были определены в предыдущих параграфах.

При $a^2 \ll (\epsilon^*)^2$, т. е. в отсутствие примесного рассеяния, (3.5.16) перейдет в

$$Q_L^\perp = \frac{k_0}{m^* c} \tau_{0L} \frac{F_1(\mu^*) F_{-1/2}(\mu^*) - \frac{3}{2} F_0(\mu^*) F_{1/2}(\mu^*)}{F_0^2(\mu^*)}, \quad (3.5.18)$$

что совпадает с формулами, полученными в [11, 66].

Если при этом еще положить $\mu^* \ll 0$, то получим хорошо известное выражение, справедливое для чистых

полупроводников:

$$Q_{L0}^{\perp} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{k_0}{m^*c} \tau_{0L}, \quad (3.5.19)$$

или, учитывая, например, (3.3.44), перепишем (3.5.19) в виде

$$Q_{L0}^{\perp} = \frac{1}{2} \frac{k_0}{ec} u_{H0}, \quad (3.5.20)$$

или, учитывая (3.3.9), в виде

$$Q_{L0}^{\perp} = \frac{3\pi}{16} \frac{k_0}{ec} u_{\sigma 0}, \quad (3.5.21)$$

где u_{H0} и $u_{\sigma 0}$ — холловская и дрейфовая подвижности чистого беспримесного полупроводника соответственно.

Отметим, что в литературе приводится обычно последняя формула без указания того, какая именно подвижность в нее входит [11]. Поэтому часто вычисленная из (3.5.21) подвижность отождествляется с холловской, что, конечно, является неправильным.

В противоположном предельном случае, когда носители рассеиваются только на ионах примеси, $a^2 \gg (\epsilon^*)^2$, (3.5.16) перейдет в

$$Q_i^{\perp} = \frac{k_0}{m^*c} \tau_{0i} \frac{18F_3(\mu^*) F_{7/2}(\mu^*) - \frac{33}{2} F_2(\mu^*) F_{9/2}(\mu^*)}{9F_{3/2}^2(\mu^*)}, \quad (3.5.22)$$

которое при $\mu^* \ll 0$, в свою очередь, дает

$$Q_i^{\perp} = -\frac{945}{128} \sqrt{\pi} \frac{k_0}{m^*c} \tau_{0i}, \quad (3.5.23)$$

или, используя (3.3.47) и (3.3.15), получим соответственно

$$Q_i^{\perp} = -\frac{3}{2} \frac{k_0}{ec} u_{Hi}, \quad (3.5.24)$$

$$Q_i^{\perp} = -\frac{945}{974} \pi \frac{k_0}{ec} u_{\sigma i}. \quad (3.5.25)$$

В случае сильно легированных полупроводников ($\mu^* \gg 0$) при использовании аппроксимации первого порядка (2.5.11)

величины Q_L^{\perp} и Q_i^{\perp} равны нулю. Если использовать аппроксимацию второго порядка (2.5.13), мы получим соответственно

$$Q_L^{\perp} = \frac{\pi^2}{6} \frac{k_0}{m^*c} \tau_{0L} (\mu^*)^{-3/2}, \quad (3.5.26)$$

$$Q_i^{\perp} = -\frac{\pi^2}{2} \frac{k_0}{m^*c} \tau_{0i} (\mu^*)^{1/2}. \quad (3.5.27)$$

В общем случае при любой степени вырождения и любом a экспериментальные результаты удобно сопоставлять с теорией по формуле (3.5.28), которая легко получается путем деления (3.5.16) на (3.5.19):

$$\frac{Q_L^{\perp}}{Q_{L0}^{\perp}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\Phi_{9/2} \Phi_4 - \Phi_3 \Phi_{11/2}}{\Phi_3^2}. \quad (3.5.28)$$

Численные значения $Q_L^{\perp}/Q_{L0}^{\perp}$ для некоторых величин μ^* и a приведены в приложении П. 10. Значение Q_{L0}^{\perp} при этом соответствует постоянной Н. — Э. чистого беспримесного полупроводника.

На рис. 3.51 показано семейство кривых, построенных по соотношению (3.5.28).

Экспериментальные результаты. Из данных работы [132], приведенных на рис. 3.52 и 3.53, видно, что с ростом концентрации примеси зависимость $Q^{\perp}(T)$ ослабевает и при $n >$

$> 10^{18} \text{ см}^{-3}$ величина коэффициента Q^{\perp} практически от температуры не зависит. Концентрационная зависимость Q^{\perp} ,

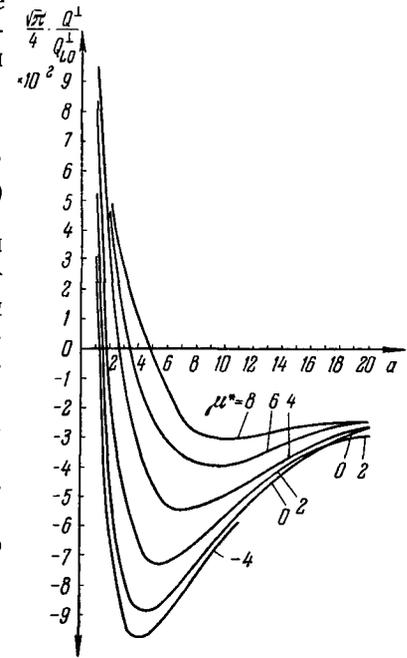


Рис. 3.51. Расчетные кривые коэффициента поперечного эффекта Н.—Э. при смешанном рассеянии электронов.

измеренная при 120° К, показывает, что по мере увеличения степени легирования величина коэффициента Н.—Э. — Э.

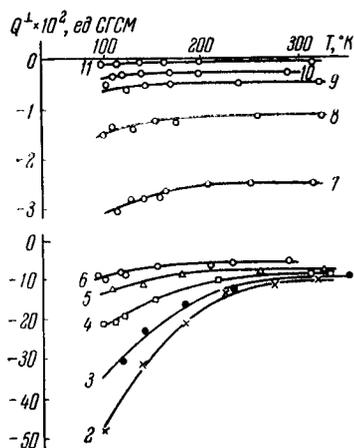


Рис. 3.52. Температурная зависимость постоянной Н.—Э. в сильно легированном германии с мышьяком:

№ образца	2	3	4	5	6
Концентрация электронов, $см^{-3}$ (при $T=300^{\circ}К$)	$6,5 \cdot 10^{16}$	$1,1 \cdot 10^{17}$	$1,4 \cdot 10^{17}$	$3,2 \cdot 10^{17}$	$4,3 \cdot 10^{17}$
№ образца	7	8	9	10	11
Концентрация электронов, $см^{-3}$ (при $T=300^{\circ}К$)	$3,2 \cdot 10^{18}$	$5,9 \cdot 10^{18}$	$1,1 \cdot 10^{19}$	$2,5 \cdot 10^{19}$	$3,9 \cdot 10^{19}$

вначале возрастает по абсолютной величине, а затем при $n > 10^{17} см^{-3}$ начинает падать. Характерно, что у всех исследованных образцов эффект Н.—Э. имеет отрицательный знак. Приведенные результаты были качественно объяснены в [132]*). Эти объяснения сводятся к следующему.

*) В [132] ошибочно приведены данные, относящиеся к образцу с $n = 1,7 \cdot 10^{16} см^{-3}$. В действительности и у этого образца наблюдался отрицательный знак эффекта Н.—Э.

В общем случае выражение для эффекта Нернста можно записать в виде

$$Q^{\perp} = \frac{k_0}{ec} \mathcal{N}(\mu^*) \frac{u_H}{\mathcal{A}}, \quad (3.5.29)$$

где $\mathcal{N}(\mu^*)$ — комбинация из интегралов Ферми различных индексов.

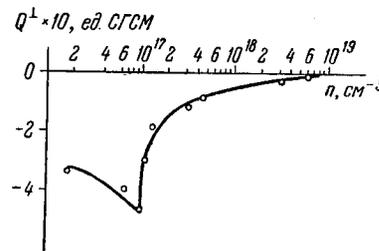


Рис. 3.53. Концентрационная зависимость постоянной Н.—Э. при 120° К в образцах германия, легированного мышьяком.

Функции $\mathcal{N}(\mu^*)$ имеют различный вид при различных значениях r в законе $\tau = \tau_0 (e^*)^r$ (рис. 3.54.) На этом же рисунке приведена кривая $\mathcal{N}(\mu^*)$, найденная из эксперимента, т. е. вычисленная из соотношения (3.5.29), при подстановке в него подвижности u_H , найденной опытным путем при 120° К. Холл-фактор $e\mathcal{H}$ можно принять при этом равным единице. Значения μ^* вычислялись из соотношения (2.3.4) по экспериментальной величине n и величине m^* , принятой для германия равной $0,57 m_0$.

При малых концентрациях примеси $\mathcal{N}(\mu^*)$, рассчитанная по экспериментальным данным, стремится к теоретической величине для случая рассеяния на акустических фоновых. Это означает, что при $n \leq 1,7 \cdot 10^{16} см^{-3}$ весьма существенно взаимодействие электронов с тепловыми колебаниями решетки.

Тем не менее при этом содержании примеси преобладающую роль играет примесное рассеяние. Это видно из того, что $\mathcal{N}(\mu^*)$ отрицательна, что соответствует рассеянию на

ионах примеси *). Однако при больших концентрациях примеси экранирующий множитель $g(b)$ в формуле для времени релаксации при рассеянии на ионах начинает зависеть от энергии электронов. Следствием этого являются, как было показано в § 3.3, уменьшение фактора r и расхождение кривых 3 и 2 на рис. 3.54 при увеличении степени вырождения.

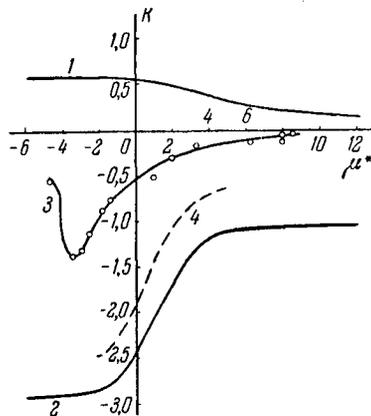


Рис. 3.54. Зависимость кинетического коэффициента поперечного эффекта Н.—Э. в германии n -типа от степени вырождения электронного газа.

1 — при рассеянии на акустических фоновых; 2 — при рассеянии на ионах примеси; 3 — из экспериментальных данных [132]; 4 — расчет с учетом экранировки.

не наблюдается. По-видимому, и обработка экспериментальных данных по эффекту Н.—Э. требует разработки теории этого эффекта с учетом анизотропии рассеяния.

Почти аналогичным образом выглядят зависимости $Q_{\perp}(n, T)$ для сильно легированных образцов кремния (рис. 3.55), найденные в [133]. Особенностью этих резуль-

*) В иностранной литературе очень часто используются противоположные обозначения: $Q_{\perp} < 0$ — соответствует рассеянию электронов на акустических фоновых, а $Q_{\perp} > 0$ — рассеянию на ионах примеси.

татов является перемена знака $Q_{\perp}(\mu^*)$ с отрицательного на положительный при $\mu^* = 1$ (300°K) и при $\mu^* = 3$ (100°K). Это соответствует концентрациям примеси $4,5 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ и $1 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$. Оценка соотношения между u_{HNL} и u_{Ni} (см. рис. 3.25) показывает, что такую перемену знака Q_{\perp}

Для количественного сравнения теории с экспериментом обратимся к решению интегралов типа (3.3.62) и (3.3.63), графики которых приведены в приложении П. 6.

Тогда выражение для Q_{\perp} примет вид:

$$Q_{\perp} = \frac{2k_0}{\sqrt{\pi} m^* c} u_{\text{HNL}} \frac{\Phi_{3/2} \Phi_4 - \Phi_{1/2} \Phi_3}{\Phi_3^2} \quad (3.5.30)$$

Вычисляя теперь $\mathcal{K}(\mu^*)$, мы приходим к кривой 4 на рис. 3.54, которая несколько лучше совпадает с экспериментом при больших концентрациях, но полного совпадения все же

нельзя объяснить подавляющей ролью решеточного рассеяния. Качественное объяснение этого факта, предложенное авторами [133], заключается в предположении, что рассеяние электронов происходит не в кулоновском поле иона примеси, а на ином близкодействующем поле. Другими словами, рассеиваемый электрон в случае сильного легирования чувствует «сердцевину» иона. Следует отметить, что эта приближенная теория, развитая в [133], дает удовлетворительное согласие рассчитанных и экспериментальных значений Q_{\perp} лишь по порядку величины.

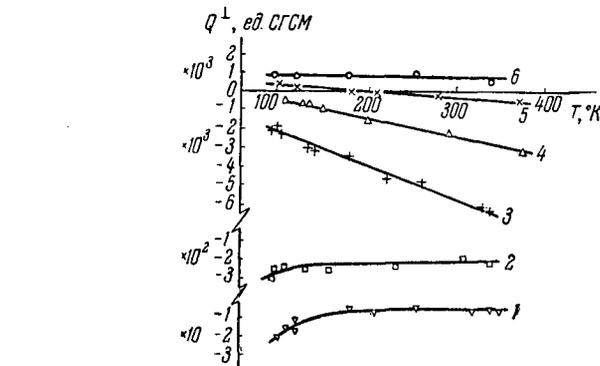


Рис. 3.55. Температурная зависимость коэффициента поперечного эффекта Н. Э. в образцах кремния, сильно легированного мышьяком:

№ образца	1	2	3	4	5	6
Концентрация носителей, см^{-3} (при 77°K)	$1,2 \cdot 10^{16}$	$3,9 \cdot 10^{17}$	$7,7 \cdot 10^{17}$	$1,9 \cdot 10^{19}$	$3,9 \cdot 10^{19}$	$9,5 \cdot 10^{19}$

Результаты экспериментальных исследований эффекта Н.—Э. арсенида галлия и антимонида индия приведены на рис. 3.56 и 3.57. Их обсуждение будет проведено в § 3.7.

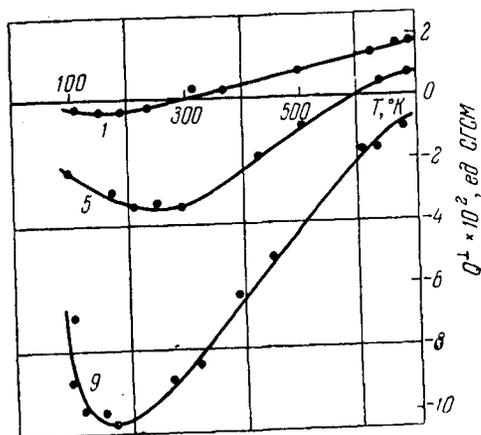


Рис. 3.56. Температурная зависимость коэффициента Нернста—Эттингсгаузена в кристаллах арсенида галлия по данным [134].

1 — $n = 1 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$; 5 — $n = 3 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$;
9 — $n = 2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$.

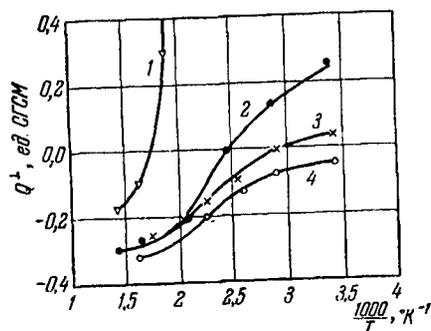


Рис. 3.57. Температурная зависимость коэффициента Нернста—Эттингсгаузена в кристаллах антимонида индия по данным [154].

1 — $p = 5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$; 2 — $n = 3,5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$;
3 — $n = 2,4 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$; 4 — $n = 8 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$

Из других термомагнитных эффектов следует упомянуть продольный эффект Нернста, принцип возникновения которого ясен из рис. 3.50. Какие-либо экспериментальные данные по этому эффекту в сильно легированных полупроводниках отсутствуют. Опытные данные, относящиеся к слабо легированным кристаллам, приведены в [11]. Попытки автора измерить продольный эффект Нернста в сильно легированном германии показали, что этот эффект почти на порядок слабее, чем поперечный эффект Н.—Э. Поэтому экспериментальные результаты по исследованию продольного эффекта не столь надежны, чтобы получать с их помощью информацию о механизме рассеяния электронов.

§ 3.6. Изменение сопротивления полупроводника в магнитном поле

В предыдущих параграфах рассматривались кинетические явления (эффекты Холла и Нернста — Эттингсгаузена), определяемые величиной напряженности магнитного поля в первой степени. Это так называемые нечетные эффекты по магнитному полю. Существуют и другие — четные кинетические эффекты, определяемые квадратом напряженности магнитного поля. Из них мы рассмотрим лишь относительное изменение удельного сопротивления полупроводника $\Delta\rho/\rho_0$ в магнитном поле, кратко именуемое *магнетосопротивлением*.

Общая теория магнетосопротивления. Расчет будем вести для полупроводника с многодолинной моделью энергетической поверхности электронов, т. е. для таких полупроводников, как германий и кремний n -типа.

В основу расчета положим ряд предположений:

а) Энергия электрона вблизи каждого минимума может быть аппроксимирована (при соответствующем выборе координат) квадратичной функцией квазиимпульса $\hbar k$, т. е.

$$E = \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{k_1^2}{m_1} + \frac{k_2^2}{m_2} + \frac{k_3^2}{m_3} \right), \quad (3.6.1)$$

где m_i — компоненты тензора эффективной массы по i -й оси, а k_i — компоненты волнового вектора по той же оси.

б) Изоэнергетическая поверхность электронов в германии описывается четырьмя кристаллографически эквивалентными эллипсоидами вращения, ориентированными вдоль направлений [111] в зоне Бриллюэна (рис. 3.58),

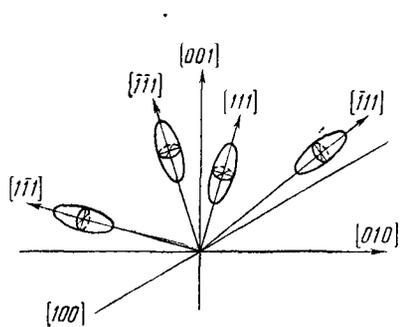


Рис. 3.58. Ориентация эллипсоидов энергии в электронном германии.

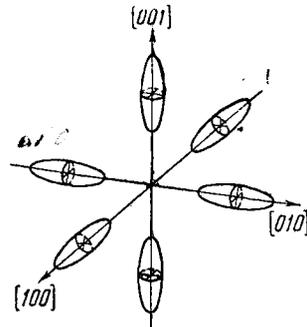


Рис. 3.59. Ориентация эллипсоидов энергии в электронном кремнии.

а в кремнии — шестью эллипсоидами, ориентированными вдоль направлений [100] (рис. 3.59). Таким образом, $m_1 = m_2 = m_{\perp}$ и $m_3 = m_{\parallel}$.

в) В процессах релаксации имеют место переходы только между состояниями, находящимися в пределах одного комплекта эллипсоидов, т. е. между эллипсоидами, описывающими один и тот же минимум. Это предположение справедливо при не слишком высоких температурах.

г) Время релаксации является анизотропным и в главных осях эллипсоидов энергии (3.6.1) может быть описано диагональным тензором $\{\tau_{ii}\}$ с компонентами:

$$\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{\perp}, \quad \tau_{33} = \tau_{\parallel}. \quad (3.6.2)$$

Это предположение оправдано в случаях, когда процессы релаксации приводят либо к хаотическому, случайному распределению скоростей электронов, либо не меняют их энергии [135].

д) Компоненты тензора релаксации (3.6.2) зависят только от энергии электронов при данной температуре.

е) Градиент температуры на образце отсутствует.

В этих предположениях кинетическое уравнение примет вид:

$$\frac{e}{\hbar} \left(\mathcal{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] \right) \nabla_{\mathbf{k}f} = - \frac{C(E) \hbar \frac{\partial f_0}{\partial E}}{\tau_{ii}}. \quad (3.6.3)$$

Тогда для определения $C(E)$ получаем алгебраическое уравнение:

$$\frac{\{m_{ii}\}}{\{\tau_{ii}\}} C(E) - \frac{e}{c} [CH] = \mathcal{E}$$

или

$$\{u_0\}^{-1} C(E) - \frac{e}{c} [CH] = \mathcal{E}, \quad (3.6.4)$$

где $\{u_0\}$ — тензор подвижности в отсутствие магнитного поля. Его компоненты определяются по правилу:

$$u_{0ik} = m_{ii}^{-1} \tau_{ik}. \quad (3.6.5)$$

Решение уравнения (3.6.4) в случае произвольного магнитного поля приводит к [136]

$$C(E) = \frac{\{u_0\} \mathcal{E} + \|u_0\| \frac{e}{c} [\mathcal{E} \{u_0\}^{-1} \mathbf{H}] + \frac{e^2}{c} \|u_0\| (\mathcal{E} \mathbf{H}) \mathbf{H}}{1 + \frac{e^2}{c^2} \|u_0\| (\{u_0\}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{H})}. \quad (3.6.6)$$

Здесь $\|u_0\|$ — детерминант тензора (3.6.5).

В случае слабого магнитного поля (3.6.6) упрощается и переходит в

$$C(E) = \{u_0\} \mathcal{E} + \|u_0\| \frac{e}{c} [\mathcal{E} \{u_0\}^{-1} \mathbf{H}] + \frac{e^2}{c} \|u_0\| (\mathcal{E} \mathbf{H}) \mathbf{H}. \quad (3.6.7)$$

Подставляя (3.6.7) в выражение для плотности тока j_e (3.1.16), которое будет справедливо для одного комплекта эллипсоидов, запишем i -ю компоненту

$$j_i = \sigma_{ik} \mathcal{E}_k + \sigma_{ikl} \mathcal{E}_k H_l + \sigma_{iklm} \mathcal{E}_k H_l H_m \quad (3.6.8)$$

и получим выражения для компонент тензоров $\{\sigma\}$, которые

впервые были получены в [135]:

$$\sigma_{ik} = -\frac{aB_i}{m_i^2} \langle \tau_i \rangle \delta_{ik}, \quad (3.6.9)$$

$$\sigma_{ikl} = \frac{abB_i}{m_i^2 m_k} \langle \tau_i \tau_k \rangle \delta_{ikl}, \quad (3.6.10)$$

$$\sigma_{iklm} = -\frac{ab^2 B_i}{m_i^2 m_k m_l} \langle \tau_i \tau_k \tau_l \rangle \frac{\delta_{ilk} \delta_{lim} + \delta_{lmk} \delta_{til}}{2}. \quad (3.6.11)$$

В этих выражениях приняты следующие обозначения величин:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{e^2}{4\pi^3 \hbar^3}; & b &= \frac{e}{c}, \\ B_1 = B_2 &= 2^{1/2} 3^{-1} \pi m_{\perp}^2 m_{\parallel}^{1/2}, \\ B_3 &= 2^{1/2} 3^{-1} \pi m_{\perp} m_{\parallel}^{3/2} \end{aligned} \right\} \quad (3.6.12)$$

и тензоров:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ik} &= \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k, \end{cases} \\ \delta_{123} = \delta_{231} = \delta_{312} &= +1, \\ \delta_{213} = \delta_{132} = \delta_{321} &= -1. \end{aligned} \right\} \quad (3.6.13)$$

Все другие компоненты тензора δ_{ikl} равны нулю. Принятое выше обозначение $\langle x \rangle$ означает усреднение вида

$$\langle x \rangle = \int_0^{\infty} x E^{s/2} \frac{\partial f_0}{\partial E} dE. \quad (3.6.14)$$

Окончательно компоненты тензоров $\{\sigma\}$ принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} &= -aB_1 \frac{\langle \tau_{\perp} \rangle}{m_{\perp}^2}, \\ \sigma_{33} &= -aB_3 \frac{\langle \tau_{\parallel} \rangle}{m_{\parallel}^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.6.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{123} = -\sigma_{213} &= abB_1 \frac{\langle \tau_{\perp}^2 \rangle}{m_{\perp}^3}, \\ \sigma_{231} = \sigma_{312} = -\sigma_{132} = -\sigma_{321} &= abB_1 \frac{\langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel} \rangle}{m_{\perp}^2 m_{\parallel}}, \end{aligned} \right\} \quad (3.6.16)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1123} = \sigma_{2211} &= ab^2 B_1 \frac{\langle \tau_{\perp}^2 \tau_{\parallel} \rangle}{m_{\perp}^3 m_{\parallel}}, \\ \sigma_{1133} = \sigma_{2233} &= ab^2 B_1 \frac{\langle \tau_{\perp}^3 \rangle}{m_{\perp}^4}, \\ \sigma_{3311} = \sigma_{3322} &= ab^2 B_3 \frac{\langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel}^3 \rangle}{m_{\perp} m_{\parallel}^3}, \\ \sigma_{1212} = \sigma_{2121} = \sigma_{2323} = \sigma_{3232} &= \\ = \sigma_{3131} = \sigma_{1313} &= -ab^2 B_1 \frac{\langle \tau_{\perp}^3 \tau_{\parallel} \rangle}{m_{\perp}^3 m_{\parallel}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.6.17)$$

Все другие компоненты тензоров $\{\sigma\}$ равны нулю.

Дальнейшие вычисления будут проводиться по схеме, предложенной в [137].

Магнетосопротивление германия. Тензоры (3.6.15) — (3.6.17) в соответствии с предположением б) получены в координатной системе, одна из осей которой совпадает с направлением [111] в германии. Однако для дальнейшего изложения удобнее преобразовать эти тензоры к новой системе координат с осями, направленными вдоль ребер кубической ячейки. Матрица такого преобразования (рис. 3.60):

$$A_{i'}^i = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} & -2 \\ 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

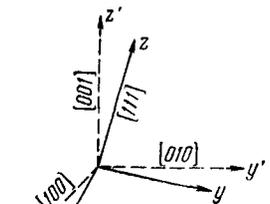


Рис. 3.60. Преобразование системы координат.

Здесь нижний индекс со штрихом означает номер столбца, а верхний индекс без штриха — номер строки. Преобразуем тензоры (3.6.15) — (3.6.17) согласно хорошо известному

правилу

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{i'k'} &= \sum_{i,k} \sigma_{ik} A_{i'}^i A_{k'}^k, & \sigma_{i'k'l'} &= \sum_{i,k,l} \sigma_{ikl} A_{i'}^i A_{k'}^k A_{l'}^l, \\ \sigma_{i'k'l'm'} &= \sum_{i,k,l,m} \sigma_{iklm} A_{i'}^i A_{k'}^k A_{l'}^l A_{m'}^m. \end{aligned} \right\} (3.6.18)$$

Тогда новые компоненты тензоров $\{\sigma\}$ будут:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{i'k'} &= \frac{1}{3} (2\sigma_{11} + \sigma_{33}) \delta_{i'k'}, \\ \sigma_{i'k'l'} &= \frac{1}{3} (\sigma_{123} + \sigma_{231} + \sigma_{312}) \delta_{i'k'l'}, \\ \sigma_{i'k'l'm'} &= \frac{2}{9} (\sigma_{1133} + \sigma_{3311} + 2\sigma_{1313}) \\ &\quad \text{при } i' = k' = l' = m', \\ \sigma_{i'k'l'm'} &= \frac{1}{18} (7\sigma_{1122} + 4\sigma_{1133} + 4\sigma_{3311} - 3\sigma_{1212}) \\ &\quad \text{при } i' = k' \neq l' = m', \\ \sigma_{i'k'l'm'} &= \frac{1}{18} (\sigma_{1122} - 2\sigma_{1133} - 2\sigma_{3311} + 15\sigma_{1212}) \\ &\quad \text{при } i' = l' \neq k' = m', \\ \sigma_{i'k'l'm'} &= \frac{1}{18} (\sigma_{1122} - 2\sigma_{1133} - 2\sigma_{3311} - 3\sigma_{1212}) \\ &\quad \text{при } i' = m' \neq k' = l'. \end{aligned} \right\} (3.6.19)$$

Тензоры для трех других эллипсоидов можно получить путем последовательных поворотов системы координат вокруг одной из кубических осей.

Вообще говоря, имеются и другие компоненты тензоров (3.6.19), отличные от нуля, но мы их не приводим, так как в дальнейшем при суммировании по всем четырем комплектам эллипсоидов они взаимно уничтожаются.

Теперь можно найти полную плотность тока \mathbf{j} , проходящего через кристалл, как сумму плотностей тока \mathbf{j}_s в каждом комплексе эллипсоидов. При этом i -я компонента полной плотности тока будет:

$$j_i = \sum_{ik} \mathcal{E}_k + \sum_{ikl} \mathcal{E}_k H_l + \sum_{iklm} \mathcal{E}_k H_l H_m, \quad (3.6.20)$$

где компоненты тензоров $\{\Sigma\}$ выражаются через компоненты тензоров (3.6.19).

Суммирование по всем четырем комплектам эллипсоидов приводит к следующему результату:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{ik} &= -\frac{4aB_1}{3} \left(2 \frac{\langle \tau_{\perp} \rangle}{m_{\perp}^2} + \frac{\langle \tau_{\parallel} \rangle}{m_{\perp} m_{\parallel}} \right) \delta_{ik}, \\ \Sigma_{ikl} &= \frac{4abB_1}{3} \left(\frac{\langle \tau_{\perp}^2 \rangle}{m_{\perp}^3} + 2 \frac{\langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel} \rangle}{m_{\perp}^2 m_{\parallel}} \right) \delta_{ikl}, \\ \Sigma_{iklm} &= \frac{8}{9} ab^2 B_1 \left(\frac{\langle \tau_{\perp}^3 \rangle}{m_{\perp}^4} - 2 \frac{\langle \tau_{\perp}^2 \tau_{\parallel} \rangle}{m_{\perp}^3 m_{\parallel}} + \frac{\langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel}^2 \rangle}{m_{\perp}^2 m_{\parallel}^2} \right) \\ &\quad \text{при } i = k = l = m, \\ \Sigma_{iklm} &= \frac{4}{9} ab^2 B_1 \left(2 \frac{\langle \tau_{\perp}^3 \rangle}{m_{\perp}^4} + 5 \frac{\langle \tau_{\perp}^2 \tau_{\parallel} \rangle}{m_{\perp}^3 m_{\parallel}} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel}^2 \rangle}{m_{\perp}^2 m_{\parallel}^2} \right) \text{ при } i = k \neq l = m, \\ \Sigma_{iklm} &= \frac{4}{9} ab^2 B_1 \left(\frac{\langle \tau_{\perp}^3 \rangle}{m_{\perp}^4} + 7 \frac{\langle \tau_{\perp}^2 \tau_{\parallel} \rangle}{m_{\perp}^3 m_{\parallel}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel}^2 \rangle}{m_{\perp}^2 m_{\parallel}^2} \right) \text{ при } i = l \neq k = m, \\ \Sigma_{iklm} &= -\frac{4}{9} ab^2 B_1 \left(\frac{\langle \tau_{\perp}^3 \rangle}{m_{\perp}^4} - 2 \frac{\langle \tau_{\perp}^2 \tau_{\parallel} \rangle}{m_{\perp}^3 m_{\parallel}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel}^2 \rangle}{m_{\perp}^2 m_{\parallel}^2} \right) \text{ при } i = m \neq k = l. \end{aligned} \right\} (3.6.21)$$

Все другие компоненты тензоров (3.6.21) равны нулю.

Для нахождения гальваномагнитных кинетических коэффициентов запишем уравнение, обратное уравнению (3.6.20):

$$\mathcal{E}_k = \Lambda_{kr} j_r + \Lambda_{krs} j_r H_s + \Lambda_{krst} j_r H_s H_t. \quad (3.6.22)$$

Подставляя это выражение в (3.6.20), получаем уравнения для определения тензоров $\{\Lambda\}$:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ik} \Lambda_{kr} j_r &= j_i, \\ \Sigma_{ik} \Lambda_{krs} j_r H_s + \Sigma_{ikl} \Lambda_{kr} j_r H_l &= 0, \\ \Sigma_{ik} \Lambda_{krst} j_r H_s H_t + \Sigma_{ikl} \Lambda_{krs} j_r H_l H_s + \Sigma_{iklm} \Lambda_{kr} j_r H_l H_m &= 0, \end{aligned}$$

из которых находим:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{ik} &= \frac{1}{\sigma_0} \delta_{ik}, \\ \Lambda_{ikl} &= -\frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_{ikl} = -R \delta_{ikl}, \\ \Lambda_{iklm} &= \frac{1}{\sigma_0^2} \left[-\Sigma_{iklm} + \frac{1}{\sigma_0} \Sigma_{iam} \Sigma_{akl} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.6.23)$$

В этих равенствах R — постоянная Холла и σ_0 — проводимость кристалла в отсутствие магнитного поля, определяемая из

$$\Sigma_{ik} = \sigma_0 \delta_{ik}. \quad (3.6.24)$$

Компоненты тензора Λ_{1111} и Λ_{1122} определяют продольное и поперечное магнетосопротивление. Действительно, из (3.6.24) следует:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{K}_{100}^{100} &= \frac{\Lambda_{1111}}{R^2 \sigma}, \\ \mathcal{K}_{100}^{010} &= \frac{\Lambda_{1122}}{R^2 \sigma}, \end{aligned} \right\} \quad (3.6.25)$$

где \mathcal{K}_{ikl}^{mnp} — кинетические коэффициенты магнетосопротивления, определяемые как [138]

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right)_{ikl}^{mnp} = \mathcal{K}_{ikl}^{mnp} u_H^2 H^2. \quad (3.6.26)$$

Согласно (3.6.21), (3.6.23) и (3.6.25), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{K}_{100}^{100} &= \frac{2B (K_m^2 \langle \tau_{\perp}^2 \rangle - 2K_m \langle \tau_{\perp}^2 \tau_{\parallel} \rangle + \langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel}^2 \rangle)}{3 K_m (K_m \langle \tau_{\perp}^2 \rangle + 2 \langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel} \rangle)^2}, \\ \mathcal{K}_{100}^{010} &= \frac{B (2K_m^2 \langle \tau_{\perp}^2 \rangle + 5K_m \langle \tau_{\perp}^2 \tau_{\parallel} \rangle + 2 \langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel}^2 \rangle)}{3 K_m (K_m \langle \tau_{\perp}^2 \rangle + 2 \langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel} \rangle)^2} - 1, \end{aligned} \right\} \quad (3.6.27)$$

где для краткости записи введено обозначение $2K_m \langle \tau_{\perp} \rangle + \langle \tau_{\parallel} \rangle = B$.

Для определения \mathcal{K}_{110}^{110} , \mathcal{K}_{100}^{001} и $\mathcal{K}_{110}^{1\bar{1}0}$ необходимо преобразовать тензоры (3.6.21) к новой системе координат

(рис. 3.61). Матрица такого преобразования

$$A_{i' i}^i = \frac{V\sqrt{2}}{2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Используя правило (3.6.18), получим в новой системе координат

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{K}_{110}^{110} &= \frac{\Lambda_{2'2'2'2'}}{R^2 \sigma_0}, \\ \mathcal{K}_{100}^{001} &= \frac{\Lambda_{2'2'1'1'}}{R^2 \sigma_0}, \\ \mathcal{K}_{110}^{\bar{1}10} &= \frac{\Lambda_{2'2'2'2'}}{R^2 \sigma_0}. \end{aligned} \right\} \quad (3.6.28)$$

Нетрудно показать, что

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{K}_{110}^{110} &= \frac{1}{2} \mathcal{K}_{100}^{100}, \\ \mathcal{K}_{110}^{001} &= \mathcal{K}_{100}^{010}, \\ \mathcal{K}_{110}^{\bar{1}10} &= \frac{1}{2} \mathcal{K}_{100}^{100} + \mathcal{K}_{100}^{010}. \end{aligned} \right\} \quad (3.6.29)$$

Эти соотношения обычно называют соотношениями симметрии.

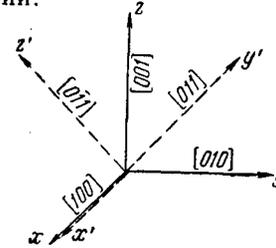


Рис. 3.61. Преобразование системы координат.

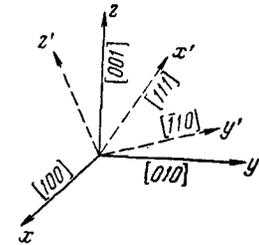


Рис. 3.62. Преобразование системы координат.

Точно так же преобразуем (3.6.21) к новой системе координат в соответствии с рис. 3.62. Матрица такого перехода

$$A_{i' i}^i = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

В результате получим кинетические коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{K}_{111}^{111} &= \frac{\Lambda_{1'1'1'1'}}{R^2 \sigma_0}, \\ \mathcal{K}_{110}^{110} &= \frac{\Lambda_{1'1'2'2'}}{R^2 \sigma_0}, \end{aligned} \right\} \quad (3.6.30)$$

что, в свою очередь, дает:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{K}_{111}^{111} &= \frac{1}{3} \mathcal{K}_{100}^{100}, \\ \mathcal{K}_{111}^{110} &= \frac{B(8K_m^2 \langle \tau_{\perp}^3 \rangle + 11K_m \langle \tau_{\perp}^2 \tau_{\parallel} \rangle + 8 \langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel}^2 \rangle)}{9 K_m (K_m \langle \tau_{\perp}^2 \rangle + 2 \langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel} \rangle)^2} - 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.6.31)$$

Формулы кинетических коэффициентов (3.6.27) и (3.6.31) значительно упрощаются, если считать, что K_{τ} не зависит от энергии, т. е. если τ_{\parallel} и τ_{\perp} являются одинаковыми функциями энергии. Выражения \mathcal{K}_{ikl}^{mnp} , соответствующие этому случаю, приведены в таблице 3.7.

В случае смешанного рассеяния при анизотропном рассеянии необходимо складывать обратные значения одноименных компонент тензоров релаксации в соответствии с (3.3.67). При этом τ_{\parallel}^i и τ_{\perp}^i берутся из (3.2.25) и (3.2.26), а τ_{\parallel}^{\perp} и τ_{\perp}^{\parallel} — из (3.3.64).

Здесь следует отметить, что при смешанном рассеянии учет анизотропии приводит к двум параметрам a_1 и a_2 вместо (3.2.23)

$$a_1^2 = \frac{\tau_{0L}^{\parallel}}{\tau_{0i}^{\parallel}} \quad \text{и} \quad a_2^2 = \frac{\tau_{0L}^{\perp}}{\tau_{0i}^{\perp}}. \quad (3.6.32)$$

Соответственно будем иметь:

$$\tau_{\parallel} = \frac{\tau_{0L}^{\parallel} (\varepsilon^*)^{3/2}}{(\varepsilon^*)^2 + a_1^2} \quad \text{и} \quad \tau_{\perp} = \frac{\tau_{0L}^{\perp} (\varepsilon^*)^{3/2}}{(\varepsilon^*)^2 + a_2^2}. \quad (3.6.33)$$

Если все же принять с некоторым приближением $a_1^2 = a_2^2$, то подстановка в выражения таблицы 3.7 соотноше-

Таблица 3.7

Кинетические коэффициенты магнетосопротивления в германии n -типа

Направление вектора J	Направление вектора H	Обозначения \mathcal{K}_{ikl}^{mnp}	Кинетические коэффициенты магнетосопротивления
[100]	[100]	\mathcal{K}_{100}^{100}	$\frac{2}{3} \cdot \frac{(K-1)^2 (2K+1) \langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel}^2 \rangle \langle \tau_{\parallel} \rangle}{K(K+2)^2 \langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel} \rangle^2}$
[100]	[010]	\mathcal{K}_{100}^{010}	$\frac{1}{3} \cdot \frac{(2K^2+5K+2)(2K+1)}{K(K+2)^2} \times$ $\times \frac{\langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel}^2 \rangle \langle \tau_{\parallel} \rangle}{\langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel} \rangle^2} - 1$
[110]	[110]	\mathcal{K}_{110}^{110}	$\mathcal{K}_{110}^{110} = \frac{1}{2} \mathcal{K}_{100}^{100}$
[110]	[001]	\mathcal{K}_{110}^{001}	$\mathcal{K}_{110}^{001} = \mathcal{K}_{100}^{010}$
[110]	[110]	\mathcal{K}_{110}^{110}	$\mathcal{K}_{110}^{110} = \frac{1}{2} \mathcal{K}_{100}^{100} + \mathcal{K}_{100}^{010}$
[111]	[111]	\mathcal{K}_{111}^{111}	$\mathcal{K}_{111}^{111} = \frac{1}{3} \mathcal{K}_{100}^{100}$
[111]	[110]	\mathcal{K}_{111}^{110}	$\frac{1}{9} \cdot \frac{(8K^2+11K+8)(2K+1)}{K(K+2)^2} \times$ $\times \frac{\langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel}^2 \rangle \langle \tau_{\parallel} \rangle}{\langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel} \rangle^2} - 1$

ний (3.6.33) и функции Ферми в качестве f_0 приводит к формулам магнетосопротивления, приведенным в таблице 3.8. Естественно, что эти формулы лучше применимы при $a < 1$ и $a > 1$, а в области $a \sim 1$ надо учитывать (3.6.32) и интегралы $\langle \tau^i \rangle$ приобретут весьма сложный вид.

Если теперь в выражениях таблицы 3.8 поочередно полагать $a^2 \ll (\varepsilon^*)^2$ и $a^2 \gg (\varepsilon^*)^2$, мы получим \mathcal{K}_{ikl}^{mnp} , справедливые при проявлении в отдельности рассеяния на фонах и на ионах (табл. 3.9) [138].

В каждом из этих случаев можно полагать $\mu^* \gg 0$ и $\mu^* \ll 0$, тогда мы получим \mathcal{K}_{ikl}^{mnp} , справедливые для сильно

Таблица 3.8

Кинетические коэффициенты магнетосопротивления при смешанном рассеянии носителей заряда на ионизованных примесях и акустических фоновых

\mathcal{N}_{ikl}^{mpn}	Кинетические коэффициенты магнетосопротивления
	Германий <i>n</i> -типа
\mathcal{N}_{100}^{100}	$\frac{2}{3} \cdot \frac{(K_m - 1)^2 (2K_m + 1)}{K_m (K_m + 2)^2} \frac{\Phi_1(\mu^*, a) \Phi_3(\mu^*, a)}{\Phi_{\frac{3}{2}}^2(\mu^*, a)}$
\mathcal{N}_{100}^{100}	$\frac{1}{3} \cdot \frac{(2K_m^2 + 5K_m + 2)(2K_m + 1)}{K_m (K_m + 2)^2} \frac{\Phi_1(\mu^*, a) \Phi_3(\mu^*, a)}{\Phi_{\frac{3}{2}}^2(\mu^*, a)} - 1$
\mathcal{N}_{111}^{110}	$\frac{1}{9} \cdot \frac{(8K_m^2 + 11K_m + 8)(2K_m + 1)}{K_m (K_m + 2)^2} \frac{\Phi_1(\mu^*, a) \Phi_3(\mu^*, a)}{\Phi_{\frac{3}{2}}^2(\mu^*, a)} - 1$
	Кремний <i>n</i> -типа
\mathcal{N}_{100}^{100}	0
\mathcal{N}_{100}^{010}	$\frac{(K_m^2 + K_m + 1)(2K_m + 1)}{K_m (K_m + 2)^2} \frac{\Phi_1(\mu^*, a) \Phi_3(\mu^*, a)}{\Phi_{\frac{3}{2}}^2(\mu^*, a)} - 1$
\mathcal{N}_{110}^{110}	$\frac{1}{2} \cdot \frac{(K_m - 1)^2 (2K_m + 1)}{K_m (K_m + 2)^2} \frac{\Phi_1(\mu^*, a) \Phi_3(\mu^*, a)}{\Phi_{\frac{3}{2}}^2(\mu^*, a)}$
\mathcal{N}_{111}^{110}	$\frac{1}{3} \cdot \frac{(2K_m^2 + 5K_m + 2)(2K_m + 1)}{K_m (K_m + 2)^2} \frac{\Phi_1(\mu^*, a) \Phi_3(\mu^*, a)}{\Phi_{\frac{3}{2}}^2(\mu^*, a)} - 1$

легированного [138] и для чистого беспримесного полупроводника [137]. Для этого надо лишь воспользоваться аппроксимациями интегралов Ферми, приведенными в § 2.5.

Разумеется, что выражения таблицы 3.8 охватывают и случаи полупроводников с изотропным рассеянием ($K_r = 1$) и с изотропным законом дисперсии ($K_m = K_r = 1$).

Магнетосопротивление кремния. Кремний отличается от германия тем, что тензоры (3.6.15)–(3.6.17) определены в координатной системе с осями, параллельными ребрам кубической ячейки. Это оказалось следствием ориентации эллипсоидов энергии в Si вдоль осей [100].

Таблица 3.9
Кинетические коэффициенты магнетосопротивления при рассеянии на ионах примеси и акустических фоновых

\mathcal{N}_{ikl}^{mpn}	Рассеяние на ионах примеси	Рассеяние на акустических фоновых
	Германий <i>n</i> -типа	
\mathcal{N}_{100}^{100}	$\frac{16}{27} \cdot \frac{(K_m - 1)^2 (2K_m + 1)}{K_m (K_m + 2)^2} \times \frac{F_2(\mu^*) F_3(\mu^*)}{F_{7/2}^2(\mu^*)}$	$\frac{8}{3} \cdot \frac{(K_m - 1)^2 (2K_m + 1)}{K_m (K_m + 2)^2} \times \frac{f(\mu^*) F_0(\mu^*)}{F_{-1/2}^2(\mu^*)}$
\mathcal{N}_{100}^{010}	$\frac{8}{27} \cdot \frac{(2K_m^2 + 5K_m + 2)(2K_m + 1)}{K_m (K_m + 2)^2} \times \frac{F_2(\mu^*) F_3(\mu^*)}{F_{7/2}^2(\mu^*)} - 1$	$\frac{4}{3} \cdot \frac{(2K_m^2 + 5K_m + 2)(2K_m + 1)}{K_m (K_m + 2)^2} \times \frac{f(\mu^*) F_0(\mu^*)}{F_{-1/2}^2(\mu^*)} - 1$
\mathcal{N}_{111}^{110}	$\frac{8}{81} \cdot \frac{(8K_m^2 + 11K_m + 8)(2K_m + 1)}{K_m (K_m + 2)^2} \times \frac{F_2(\mu^*) F_3(\mu^*)}{F_{7/2}^2(\mu^*)} - 1$	$\frac{4}{9} \cdot \frac{(8K_m^2 + 11K_m + 8)(2K_m + 1)}{K_m (K_m + 2)^2} \times \frac{f(\mu^*) F_0(\mu^*)}{F_{-1/2}^2(\mu^*)} - 1$

\mathcal{N}_{ikl}^{mp}	Рассеяние на ионах примеси	Рассеяние на акустических фононах
	Кремний <i>n</i> -типа	
\mathcal{N}_{100}^{100}	$\frac{8}{9} \cdot \frac{(K_m^2 + K_m + 1)(2K_m + 1)}{K_m(K_m + 2)^2} \times \frac{F_3(\mu^*) F_5(\mu^*)}{F_{7/2}^2(\mu^*)} - 1$	$4 \cdot \frac{(K_m^2 + K_m + 1)(2K_m + 1)}{K_m(K_m + 2)^2} \times \frac{f(\mu^*) F_0(\mu^*)}{F_{-1/2}^2(\mu^*)} - 1$
\mathcal{N}_{100}^{010}	$\frac{4}{9} \cdot \frac{(K_m - 1)^2(2K_m + 1)}{K_m(K_m + 2)^2} \times \frac{F_2(\mu^*) F_5(\mu^*)}{F_{7/2}^2(\mu^*)}$	$2 \cdot \frac{(K_m + 1)^2(2K_m + 1)}{K_m(K_m + 2)^2} \times \frac{f(\mu^*) F_0(\mu^*)}{F_{-1/2}^2(\mu^*)}$
\mathcal{N}_{110}^{110}	$\frac{8}{27} \cdot \frac{(2K_m^2 + 5K_m + 2)(2K_m + 1)}{K_m(K_m + 2)^2} \times \frac{F_2(\mu^*) F_5(\mu^*)}{F_{7/2}^2(\mu^*)} - 1$	$\frac{4}{3} \cdot \frac{(2K_m^2 + 5K_m + 2)(2K_m + 1)}{K_m(K_m + 2)^2} \times \frac{f(\mu^*) F_0(\mu^*)}{F_{-1/2}^2(\mu^*)} - 1$

Суммирование по всем шести эллипсоидам дает следующие выражения для тензоров $\{\Sigma\}$:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{ikh} &= 2(\sigma_{111} + \sigma_{222} + \sigma_{333}) \delta_{ikh} = \\ &= -2aB_1 \left(2 \frac{\langle \tau_{\perp} \rangle}{m_{\perp}^2} + \frac{\langle \tau_{\parallel} \rangle}{m_{\perp} m_{\parallel}} \right) \delta_{ikh}, \\ \Sigma_{ikl} &= 2(\sigma_{123} + \sigma_{231} + \sigma_{312}) \delta_{ikl} = \\ &= 2abB_1 \left(\frac{\langle \tau_{\perp}^2 \rangle}{m_{\perp}^3} + 2 \frac{\langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel} \rangle}{m_{\perp}^2 m_{\parallel}} \right) \delta_{ikl}, \\ \Sigma_{iklm} &= 2(\sigma_{1122} + \sigma_{1133} + \sigma_{3322}) = \\ &= 2ab^2B_1 \left(\frac{\langle \tau_{\perp}^4 \rangle}{m_{\perp}^4} + \frac{\langle \tau_{\perp}^2 \tau_{\parallel} \rangle}{m_{\perp}^2 m_{\parallel}} + \frac{\langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel}^2 \rangle}{m_{\perp}^2 m_{\parallel}^2} \right) \\ &\quad \text{при } i = k \neq l = m, \\ \Sigma_{iklm} &= 2(\sigma_{1212} + \sigma_{1313} + \sigma_{3232}) = \\ &= -6ab^2B_1 \frac{\langle \tau_{\perp}^2 \tau_{\parallel} \rangle}{m_{\perp}^3 m_{\parallel}} \quad \text{при } i = l \neq k = m. \end{aligned} \right\} (3.6.34)$$

Все другие компоненты тензоров $\{\Sigma\}$ равны нулю.

Расчет \mathcal{N}_{100}^{100} и \mathcal{N}_{100}^{010} , выполненный в соответствии с (3.6.23) и (3.6.25), приводит к

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{N}_{100}^{100} &= 0, \\ \mathcal{N}_{100}^{010} &= \frac{B(K_m^2 \langle \tau_{\perp}^2 \rangle + K_m \langle \tau_{\perp}^2 \tau_{\parallel} \rangle + \langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel}^2 \rangle)}{K_m(K_m \langle \tau_{\perp}^2 \rangle + 2 \langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel} \rangle)^2} - 1. \end{aligned} \right\} (3.6.35)$$

То, что $\mathcal{N}_{100}^{100} = 0$, видно и из следующего рассуждения. Так как в кремнии главные направления тензора подвижности (3.6.5) в каждом эллипсоиде совпадают с осями [100], [010] и [001], то скорость электрона \mathbf{v} будет коллинеарна вектору $\boldsymbol{\varepsilon}$ при продольном эффекте вдоль любого из ребер кубической ячейки. Следовательно, \mathbf{v} будет коллинеарна и вектору \mathbf{H} . Это означает, что сила Лоренца при этом будет равна нулю, а значит, будет равно нулю и изменение сопротивления в магнитном поле при продольном эффекте.

Преобразуя тензоры (3.6.34) к новой системе координат (рис. 3.60) и используя равенства (3.6.28), получим:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{N}_{110}^{110} &= \frac{B}{2} \cdot \frac{(K_m^2 \langle \tau_{\perp}^2 \rangle - 2K_m \langle \tau_{\perp}^2 \tau_{\parallel} \rangle + \langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel}^2 \rangle)}{K_m (K_m \langle \tau_{\perp}^2 \rangle + 2 \langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel} \rangle)^2}, \\ \mathcal{N}_{110}^{001} &= \mathcal{N}_{110}^{010}, \\ \mathcal{N}_{110}^{110} &= \mathcal{N}_{109}^{010} - \mathcal{N}_{110}^{110}. \end{aligned} \right\} (3.6.36)$$

Для того чтобы вычислить \mathcal{N}_{111}^{111} и \mathcal{N}_{111}^{110} , преобразуем тензоры (3.6.34) соответственно рис. 3.61 и, используя (3.6.30), найдем:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{N}_{111}^{111} &= \frac{4}{3} \mathcal{N}_{110}^{110}, \\ \mathcal{N}_{111}^{110} &= \frac{B}{3} \cdot \frac{(2K_m^2 \langle \tau_{\perp}^2 \rangle + 5K_m \langle \tau_{\perp}^2 \tau_{\parallel} \rangle + 2 \langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel} \rangle)}{K_m (K_m \langle \tau_{\perp}^2 \rangle + 2 \langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel} \rangle)^2} - 1. \end{aligned} \right\} (3.6.37)$$

Выражения \mathcal{N}_{ikl}^{mnp} для Si в предположении независимости K_{τ} от энергии приведены в таблице 3.10, а их явный вид — в таблицах 3.8 и 3.9.

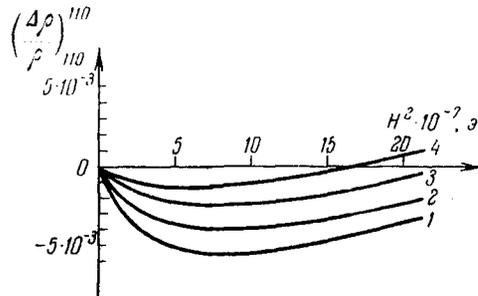


Рис. 3.63. Отрицательное магнетосопротивление в сильно легированном образце германия с мышьяком.

1 — $T = 1,88^\circ \text{K}$; 2 — $T = 2,5^\circ \text{K}$; 3 — $T = 3,3^\circ \text{K}$;
4 — $T = 4,2^\circ \text{K}$.

Экспериментальное исследование магнетосопротивления сильно легированных полупроводников. Исследования магнетосопротивления сильно легированных полупроводников

Таблица 3.10

Кинетические коэффициенты магнетосопротивления в кремнии n -типа

Направление вектора J	Направление вектора H	Обозначения \mathcal{N}_{ikl}^{mnp}	Кинетические коэффициенты магнетосопротивления
[100]	[100]	\mathcal{N}_{100}^{100}	0
[100]	[010]	\mathcal{N}_{100}^{010}	$\frac{(K^2 + K + 1)(2K + 1)}{K(K + 2)^2} \times$ $\times \frac{\langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel}^2 \rangle \langle \tau_{\parallel} \rangle}{\langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel} \rangle^2} - 1$
[110]	[110]	\mathcal{N}_{110}^{110}	$\frac{1}{2} \cdot \frac{(K - 1)^2 (2K + 1) \langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel}^2 \rangle \langle \tau_{\parallel} \rangle}{K(K + 2)^2 \langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel} \rangle^2}$
[110]	[001]	\mathcal{N}_{110}^{001}	$\mathcal{N}_{110}^{001} = \mathcal{N}_{100}^{010}$
[110]	[110]	\mathcal{N}_{110}^{110}	$\mathcal{N}_{110}^{110} = \mathcal{N}_{100}^{010} - \mathcal{N}_{110}^{110}$
[111]	[111]	\mathcal{N}_{111}^{111}	$\mathcal{N}_{111}^{111} = \frac{4}{3} \mathcal{N}_{110}^{110}$
[111]	[110]	\mathcal{N}_{111}^{110}	$\frac{1}{3} \cdot \frac{(2K^2 + 5K + 2)(2K + 1)}{K(K + 2)^2} \times$ $\times \frac{\langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel}^2 \rangle \langle \tau_{\parallel} \rangle}{\langle \tau_{\perp} \tau_{\parallel} \rangle^2} - 1$

целесообразно рассматривать в отдельности при низких (гелиевых) и при более высоких температурах (азотной и комнатной).

При $4,2^\circ \text{K}$ в полупроводниках наблюдается отрицательное магнетосопротивление, т. е. уменьшение сопротивления в магнитном поле (рис. 3.63). В [139—142] было показано на образцах германия с мышьяком и сурьмой, что магнетосопротивление состоит из двух компонент: обычной, предполагающей возрастание сопротивления кристалла в магнитном поле, и аномальной компоненты $\Delta\rho < 0$. Такое отрицательное сопротивление не укладывается в рамки описанной в этом параграфе теории.

Рассмотрение этого явления базируется на модели дополнительного рассеяния носителей заряда на локализованных спинах электронов частично изолированных примесных атомов [143]. Верхний предел слабого поля существенно отличается для этих двух компонент — аномальная компонента достигает насыщения в то время, как обычная

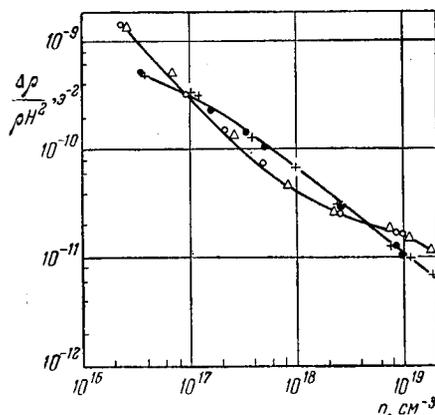


Рис. 3.64. Зависимость $\frac{\Delta\rho}{\rho H^2} \Big|_{100}^{100}$ и $\frac{\Delta\rho}{\rho H^2} \Big|_{110}^{110}$ от концентрации электронов в сильно легированном германии.

- — $\frac{\Delta\rho}{\rho H^2} \Big|_{100}^{100}$; + — $\frac{\Delta\rho}{\rho H^2} \Big|_{110}^{110}$ при 300° К;
- — $\frac{\Delta\rho}{\rho H^2} \Big|_{100}^{100}$; △ — $\frac{\Delta\rho}{\rho H^2} \Big|_{110}^{110}$ при 77° К.

компонента еще проявляет зависимость $\Delta\rho/\rho_0 \sim H^2$. Используя это обстоятельство, в [144—147] путем графического дифференцирования экспериментальной кривой рис. 3.63 удалось разделить эти компоненты.

В [139] на нескольких образцах изучалась зависимость составляющей отрицательного магнетосопротивления от напряженности магнитного поля в диапазоне температур от 1,88° К до 4,2° К.

Отрицательное магнетосопротивление наблюдалось кроме германия и в других полупроводниках: в InSb *n*-типа [144], в InSb *p*-типа [145], в GaAs *n*-типа [146—149], в InAs *n*-типа [150].

В [142] отмечается, что отрицательное магнетосопротивление наблюдается при таких концентрациях и при таких температурах, когда основной вклад в удельное сопротивление вносит проводимость по примесной зоне.

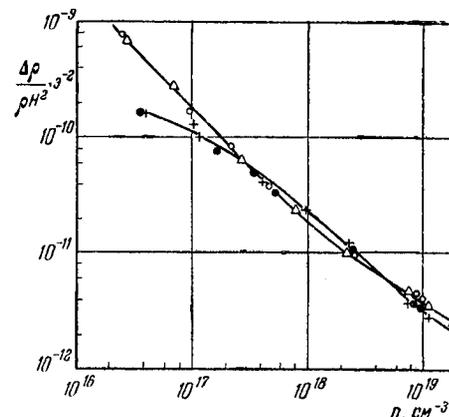


Рис. 3.65. Зависимость $\frac{\Delta\rho}{\rho H^2} \Big|_{100}^{010}$ и $\frac{\Delta\rho}{\rho H^2} \Big|_{110}^{001}$ от концентрации электронов в сильно легированном германии.

- — $\frac{\Delta\rho}{\rho H^2} \Big|_{100}^{010}$; + — $\frac{\Delta\rho}{\rho H^2} \Big|_{110}^{001}$ при 300° К;
- — $\frac{\Delta\rho}{\rho H^2} \Big|_{100}^{010}$; △ — $\frac{\Delta\rho}{\rho H^2} \Big|_{110}^{001}$ при 77° К.

Анализ уже достаточно богатого экспериментального материала по исследованию отрицательного магнетосопротивления показывает, что его интерпретация все же еще далека до завершения.

При более высоких температурах (77 и 300° К) магнетосопротивление изучалось наиболее подробно в образцах германия, легированного мышьяком [140, 141, 151, 152]. Обработка экспериментальных данных показала хорошее соответствие теории, описанной в этом параграфе. Во всех образцах наблюдается квадратичная зависимость магнетосопротивления от напряженности магнитного поля в диапазоне полей до $1 \cdot 10^4$ гс.

Основные экспериментальные результаты представлены на рис. 3.64—3.66. Эти данные показывают, что симметрич-

ные соотношения (3.6.29) и (3.6.31) выполняются с достаточной хорошей точностью во всем интервале больших концентраций примесей. При малых концентрациях их справедливость была надежно установлена ранее [54].

Это позволяет считать, что модель четырех эллипсоидов вращения с главными осями вдоль направлений [111] для зоны проводимости германия остается справедливой и при большой концентрации легирующей примеси. Поэтому автором [151] было проведено вычисление фактора анизотропии K из выражений, приведенных в таблице 3.7. Это легко сделать, исключив из них кинетические интегралы (рис. 3.67). Там же приведены теоретические кривые, рассчитанные по формулам (3.3.67), (3.2.25), (3.2.26) и (3.3.64). При расчете теоретических кривых величина K_m принималась равной 20, т. е. считалось, что K_m не меняется при пере-

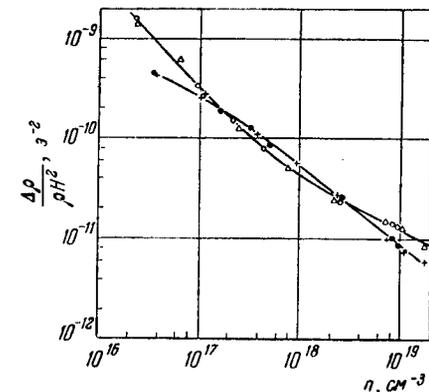


Рис. 3.66. Зависимость $\frac{\Delta\rho}{\rho H^2} \left|_{110}^{111}$ и $\left(\frac{1}{2} \frac{\Delta\rho}{\rho H^2} \right|_{100}^{100} + \frac{\Delta\rho}{\rho H^2} \right|_{100}^{010}$) от концентрации электронов в сильно легированном германии.

$$\begin{aligned} \bullet & - \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta\rho}{\rho H^2} \right|_{100}^{100} + \frac{\Delta\rho}{\rho H^2} \right|_{100}^{010} \Big); \\ + & - \frac{\Delta\rho}{\rho H^2} \Big|_{110}^{110} \text{ при } 300^\circ \text{ K}; \\ \circ & - \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta\rho}{\rho H^2} \right|_{100}^{100} + \frac{\Delta\rho}{\rho H^2} \right|_{100}^{010} \Big); \\ \triangle & - \frac{\Delta\rho}{\rho H^2} \Big|_{110}^{110} \text{ при } 77^\circ \text{ K}. \end{aligned}$$

ходе от чистого беспримесного германия к сильно легированному. На кривых 1 и 2 рис. 3.67 отчетливо видны четыре участка. На первом участке кривой 1 в области концентраций свободных носителей заряда $n \leq 4 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ рассеяние практически обусловлено акустическими колебаниями атомов решетки, а так как при этом время релаксации почти изотропно, т. е. $K_z \sim 1$, то и $K = K_m = 20$. В области концентраций от $4 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ до $3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ (вто-

рой участок кривой 1) имеет место смешанное рассеяние носителей заряда на акустических фонах и на ионах примеси. При этом с ростом концентрации легирующей примеси увеличивается вклад рассеяния на заряженных центрах. Поскольку этот вид рассеяния существенно анизотропен, то, следовательно, $K_z > 1$, а $K < 20$. Это под-

тверждается еще и тем, что второй участок кривой 2 проявляется при меньших концентрациях ($2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} < n < 2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$), так как при температуре жидкого азота вклад рассеяния на ионизованных примесях увеличивается. При еще большем легировании (третий участок кривой 1) вклад рассеяния ионами, безусловно, увеличивается, однако влияние экранирования ионов свободными электронами препятствует дальнейшему уменьшению K .

Более отчетливо это видно из рис. 3.2, из которого следует, что с увеличением $1/b$ (т. е. при увеличении концентрации n) анизотропия рассеяния на ионах примеси уменьшается. Из рис. 3.67 видно, что расхождение между теоретическими и экспериментальными кривыми в случае сильно легированных образцов ($n > 10^{17} \text{ см}^{-3}$) не превышает 25%. А так как при расчете $\tau_{||}^{\pm}, \tau_{\perp}^{\pm}, K_m$ и μ^* были использованы значения $m_{||}$ и m_{\perp} , определенные методом циклотронного резонанса при температуре жидкого гелия в образцах чистого нелегированного германия, то авторы [48, 49] делают вывод о неизменности анизотропии эффективных масс в кристаллах электронного германия при введении в них большой концентрации примеси.

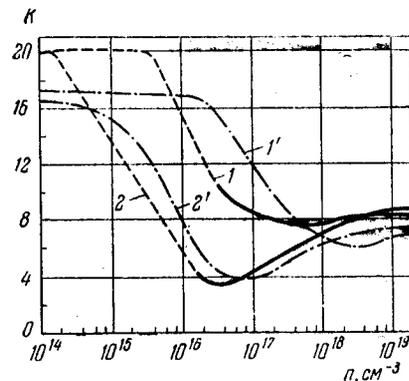


Рис. 3.67. Зависимость эффективного параметра анизотропии от концентрации примеси.

1 и 1' — экспериментальная и теоретическая кривые при 300° K; 2 и 2' — то же при 77° K.

§ 3.7. Особенности явлений переноса в полупроводниках типа $A^{III}B^V$

Полупроводниковые соединения типа $A^{III}B^V$ отличаются от моноатомных полупроводников в первую очередь тем, что в химической связи атомов, составляющих их решетку, имеется некоторая доля ионной связи. Поэтому в явлениях переноса может играть значительную роль рассеяние электронов оптическими фононами. Это отличие делает задачу интерпретации явлений переноса в $A^{III}B^V$ чрезвычайно сложной. Количественный анализ явлений переноса в этом случае может быть выполнен лишь с помощью кинетических интегралов, в которых подынтегральная функция будет содержать значение времени релаксации, учитывающее уже три механизма рассеяния, т. е. с помощью выражений вида:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{\tau_{0L} (e^*)^{3/2}}{(e^*)^2 + b^2 (e^*)^{3/2} + a^2} \quad \text{при } T < \theta_D, \\ \tau &= \frac{\tau_{0L} (e^*)^{3/2}}{(e^*)^2 + b^2 e^* + a^2} \quad \text{при } T > \theta_D, \end{aligned} \right\} \quad (3.7.1)$$

где

$$b^2 = \frac{\tau_{00}}{\tau_{0i}},$$

θ_D — температура Дебая, а τ_{00} — множитель $\tau_0(T)$ в выражении (3.2.21) для случая оптических фононов. При этом кинетические интегралы значительно усложняются по сравнению с интегралами вида $\Phi_n(\mu^*, a)$. Поэтому детальный количественный анализ кинетических эффектов в кристаллах $A^{III}B^V$ до сих пор отсутствует.

Качественную оценку этих явлений имеет смысл производить для отдельных ограниченных интервалов температур, концентраций примесей и для каждого из кристаллов $A^{III}B^V$ в отдельности. Такая оценка подробно проведена в большом числе оригинальных работ, систематизированных в [153, 154].

Мы ограничимся здесь лишь иллюстрацией экспериментальных зависимостей $u(n)$ для основных полупроводников из класса $A^{III}B^V$ (рис. 3.68).

Вторым существенным отличием $A^{III}B^V$ от германия и кремния является значительная непараболичность зоны проводимости. Поэтому подынтегральная функция в кинетических интегралах, кроме того, должна учитывать и поправку на непараболичность зоны. Неучет этой поправки приводит даже к неправильной качественной интерпретации опытных данных. Так, например, из простой теории эффекта Нернста—Эттингсгаузена (как это было показано

тических интегралах, кроме того, должна учитывать и поправку на непараболичность зоны. Неучет этой поправки приводит даже к неправильной качественной интерпретации опытных данных. Так, например, из простой теории эффекта Нернста—Эттингсгаузена (как это было показано

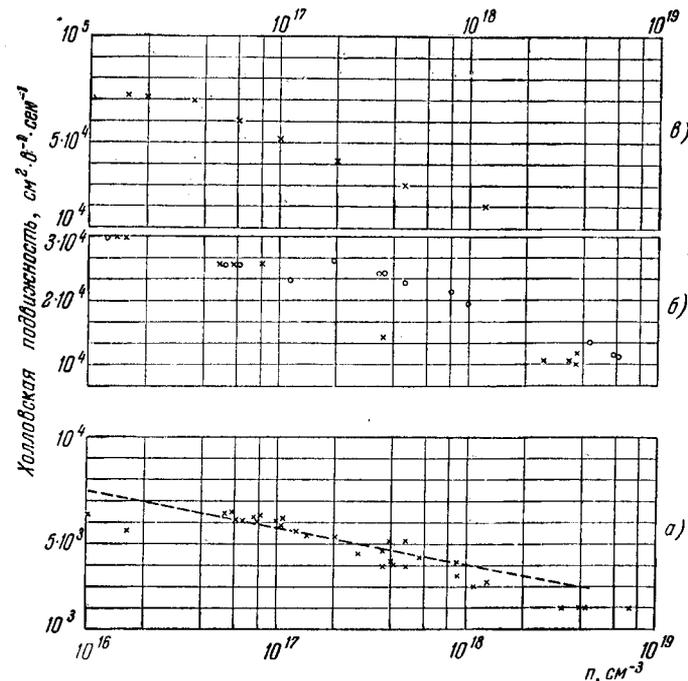


Рис. 3.68. Концентрационная зависимость холловской подвижности электронов в InSb, InAs и в GaAs.

○ — образцы, прошедшие термообработку; × — нетермообработанные образцы. а — n-GaAs [153]; б — n-InAs [153]; в — n-InSb [155].

в § 3.5) следует, что положительный знак Q^\perp однозначно определяется рассеянием носителей заряда акустическими колебаниями атомов решетки, а отрицательный знак Q^\perp свидетельствует о преобладании рассеяния на ионах примеси. Именно так первоначально интерпретировались экспериментальные данные по исследованию $Q^\perp(n, T)$ в $A^{III}B^V$, показанные на рис. 3.56 и 3.57.

Однако решение задачи с учетом непараболичности [156—159] показало, что коэффициент Н.—Э. в случае сильного вырождения определяется как

$$Q \sim \frac{1}{2} - r - \left(1 - \frac{m_2}{m_3}\right), \quad (3.7.2)$$

где приняты следующие обозначения:

$$m_2 = \left| \hbar^2 k \left(\frac{dE}{dk} \right)^{-1} \right|_{E=\mu}; \quad m_3 = \left| \hbar^2 \left(\frac{d^2E}{dk^2} \right)^{-1} \right|_{E=\mu}.$$

Если зона параболична, то $m_2 = m_3$ и $Q^\perp \sim \frac{1}{2} - r$, т. е. Q^\perp будет положительным только при $r = 0$.

Для непараболической зоны $m_2 \neq m_3$, поэтому коэффициент Q^\perp может быть положительным и при значениях r , отличных от нуля, т. е. в этом случае по знаку Q^\perp еще нельзя судить о механизме рассеяния.

ГЛАВА 4

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СИЛЬНО ЛЕГИРОВАННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

§ 4.1. Поглощение света

Коэффициент поглощения. Поглощение света твердым телом характеризуется коэффициентом поглощения α , который определяется из выражения

$$\frac{J}{J_0} = \frac{(1-R)^2}{e^{\alpha d} - R^2 e^{-\alpha d}}, \quad (4.1.1)$$

где в левой части стоит отношение интенсивности прошедшего света J к интенсивности падающего J_0 , а в правой части R представляет собой коэффициент однократного отражения от поверхности образца толщины d .

Спектральная зависимость коэффициента поглощения. Полная спектральная зависимость коэффициента поглощения в таких материалах, как Ge или Si, показана на рис. 4.1. Для объяснения ее хода обратимся к зонной диаграмме, например, германия (рис. 1.4). Если энергия кванта падающего света достаточно велика для того, чтобы вырвать электрон из валентной зоны и перебросить его в зону проводимости ($h\nu \gg E_g$), начинается быстрый рост коэффициента поглощения α . Так как абсолютный минимум зоны проводимости смещен по оси k относительно вершины валентной зоны, то переброс электрона происходит с изменением его первоначального значения квазиимпульса. Такое изменение требует участия в процессе переброса кроме фотона и электрона еще и какого-либо третьего тела, которое заберет часть импульса на себя. Таким третьим телом может быть фонон или ион примеси. Сами переходы с участием третьего тела называются *непрямыми*.

Дальнейшее увеличение энергии падающих квантов света до величины $h\nu = E_0$ (см. рис. 1.4) вызовет *прямые* переходы, т. е. непосредственный переброс электронов из вершины валентной зоны на уровни в зоне проводимости, лежащие при том же значении квазимпульса k . На кривой α ($h\nu$) на рис. 4.1 при этом наблюдается излом с дальнейшим резким возрастанием α .

Если энергия квантов падающего света настолько мала, что они не могут перебрасывать электроны из валентной зоны в зону проводимости, электроны могут совершать переходы внутри разрешенной зоны, приводя также к поглощению света. Это, так называемое *поглощение свободными носителями* (левые ветви кривой рис. 4.1).

В сильно легированных полупроводниках этот вид поглощения настолько велик, что он существенно

маскирует край кривой собственного поглощения, по которому обычно определяют ширину запрещенной зоны.

Поглощение свободными носителями. По классической теории Друде [1] действительная часть высокочастотной проводимости может быть записана в виде

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m} \frac{\tau}{1 + \omega^2\tau^2} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega^2\tau^2}, \quad (4.1.2)$$

где τ — время релаксации электронов при взаимодействии с рассеивающими центрами; σ_0 — удельная электропроводность, измеренная на постоянном токе.

Коэффициент поглощения связан с проводимостью выражением

$$\alpha = \frac{4\pi\sigma}{cn}, \quad (4.1.3)$$

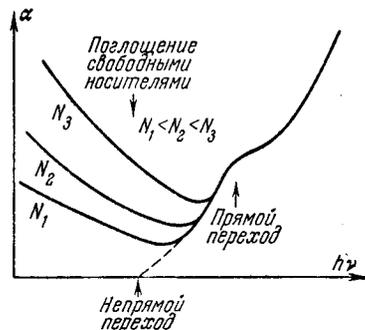


Рис. 4.1. Спектральная зависимость коэффициента поглощения света в кристаллах типа германия (N — концентрация примесей).

в котором n — показатель преломления световых волн; c — скорость света в пустоте.

В главе 3 было показано, что величины τ для электронов и дырок при комнатной температуре составляют 10^{-12} — 10^{-13} сек. Следовательно, в диапазоне частот, больших 10^{12} *гц*, выполняется соотношение $\omega\tau \gg 1$ и выражение для коэффициента поглощения примет вид:

$$\alpha = \frac{4\pi}{cn} \frac{\sigma_0}{\omega^2\tau^2}. \quad (4.1.4)$$

Сравнение с экспериментом показывает, что классическое рассмотрение оказывается слишком грубым для описания спектральной зависимости коэффициента поглощения свободными носителями.

Квантовомеханическое рассмотрение такого процесса поглощения света было выполнено в работах [2] и [3]. В первой из них рассматривался кристалл со сферической зоной проводимости, что не соответствует германию и кремнию. В качестве центров рассеяния принимались фононы. В сильно легированных полупроводниках, как было показано в предыдущей главе, рассеяние происходит преимущественно на ионах примеси.

Во второй работе уже была учтена несферичность зоны проводимости и рассматривалось рассеяние на ионах примеси. В качестве действующего потенциала ионов в [3] принимался экранированный кулоновской потенциал.

Недостатком этой работы является допущение борновского приближения, которое не выполняется для большинства полупроводников [4]. Мейер [5] приводит выражения для коэффициента поглощения, полученные без борновского приближения, но он не учитывал экранировки кулоновского потенциала, что при рассеянии на ионах примеси представляется обязательным. Такое обобщение выполнено в работе [6], в которой для σ_i получена зависимость:

$$\sigma_i(x) = 7 \cdot 10^{-28} \cdot \frac{NN_i}{v^3 (kT)^{3/2}} (1 - e^{-2x}) I(x), \quad (4.1.5)$$

где $x = \frac{h\nu}{2kT}$; N_i — число ионов; N — число электронов.

При $x \gg 1$

$$I(x) = \frac{2m^*kT}{h^2} \left(1 + \frac{1}{6x} - \frac{1}{15x^2} + \frac{1}{35x^3} - \dots \right). \quad (4.1.6)$$

Подставляя (4.1.5) в (4.1.3), нетрудно получить выражение для коэффициента поглощения

$$\alpha \sim NN_i v^{-3}. \quad (4.1.7)$$

Заметим, что аналогичный расчет, выполненный без борновского приближения, но и без учета экранировки [4], дает более сильную частотную зависимость α :

$$\alpha \sim NN_i v^{-3.5}. \quad (4.1.8)$$

Если рассеяние происходит не на ионах примеси, а на фононах, то выражения для α имеют вид [7]:

$$\alpha \sim Nv^{-3/2} \quad (4.1.9)$$

для акустических фононов и

$$\alpha \sim Nv^{-3} \quad (4.1.10)$$

для оптических фононов.

Приведенные выражения показывают, что в зависимости от механизма рассеяния частотная зависимость коэффициента поглощения оказывается разной. Интересно, что и концентрационная зависимость α при этом тоже различна. В случае примесного рассеяния коэффициент поглощения пропорционален произведению концентраций ионов примеси и электронов, т. е. квадрату концентрации носителей тока. При рассеянии на фононах коэффициент поглощения зависит от концентрации электронов в первой степени.

Собственное поглощение. Характер спектральной зависимости коэффициента поглощения определяется двумя факторами: зависимостью плотности состояний от энергии $\rho(E)$ в разрешенных зонах и зависимостью вероятности перехода от энергии падающего света.

В ряде работ [8—12] расчет характеристики $\alpha = f(h\nu)$ для Ge и Si был проведен при упрощающих предположениях о сферичности обеих зон, участвующих в процессе поглощения света. Естественно, что рассчитанная таким образом зависимость $\alpha \sim v^2$ вблизи края поглощения не совпадает с наблюдавшейся экспериментально кривой $\alpha = f(h\nu)$ в этой области спектра.

Особенно большое значение приобретает исследование кривой $\alpha = f(h\nu)$ вблизи края поглощения при наличии вырождения, т. е. в сильно легированных полупроводниках.

В этом случае из процесса исключаются энергетические состояния, расположенные вблизи экстремума той зоны, в которой расположен уровень Ферми, т. е. как раз та область, для которой упрощающие предположения работ [8—12] еще могли иметь какой-то смысл.

В [13, 14] была сделана попытка количественного анализа формы спектральной зависимости коэффициента поглощения вблизи ее края без упрощающих предположений относительно закона дисперсии электронов и энергетической зависимости вероятности перехода.

Дальнейшее изложение мы проведем на основе этих работ.

Прямые переходы. Пусть электрон из начального состояния в валентной зоне с волновой функцией ψ_{ik_i} , поглотив квант света, переходит в состояние с волновой функцией ψ_{fk_f} в зоне проводимости. Волновые функции начального и конечного состояний имеют вид функций Блоха:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{ik_i}(\mathbf{r}) &= U_{ik_i}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}), \\ \psi_{fk_f}(\mathbf{r}) &= U_{fk_f}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}), \end{aligned} \right\} \quad (4.1.11)$$

где $U_{ik_i}(\mathbf{r})$ и $U_{fk_f}(\mathbf{r})$ — действующие потенциалы с периодом, равным параметру решетки.

Будем считать импульс фотона k_ϕ значительно меньше импульса электрона в начальном и конечном состояниях

$$k_\phi \ll k_i, k_f. \quad (4.1.12)$$

Это предположение не выполняется лишь в некоторой области непосредственно вблизи верхушки зоны. Так, например, для Si при энергии фотона в 1 эВ соотношение (4.1.12) справедливо для состояний в валентной зоне, удаленных от вершин зоны уже на 10^{-5} эВ. Тогда закон сохранения импульса при прямом переходе приобретает простой вид:

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_f.$$

Вероятность перехода электрона из состояния с волновой функцией ψ_{ik_i} в валентной зоне в состояние с волновой функцией ψ_{fk_f} в зоне проводимости будем характеризовать матричным элементом вероятности прямого перехода M_d . Явный вид его в данном изложении не понадобится. Тем

более, что в него входят потенциалы U_{ik_i} и U_{fk_f} , точный вид которых не известен. Полное число прямых переходов получается суммированием по всем состояниям, совместимым с законом сохранения энергии, с учетом зависимости вероятности перехода от энергии.

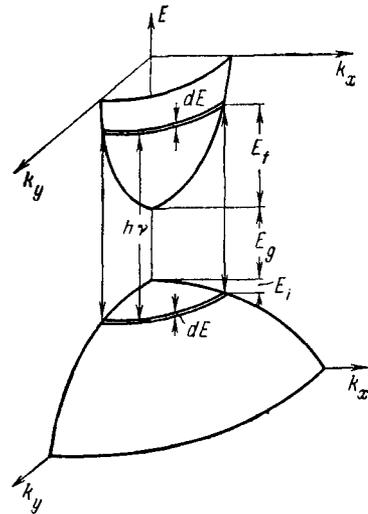


Рис. 4.2. Схема энергетических поверхностей в k - E -пространстве, иллюстрирующая прямые переходы (сечение поверхностью $k_z = 0$). Верхние области показывают состояния, принимающие участие в процессе прямых переходов при данной энергии фотона.)

где m_i и m_f — эффективные массы плотности состояний начальной и конечной зон, а

$$E = h\nu - E_g. \quad (4.1.14)$$

Схема энергетических поверхностей в пространстве, иллюстрирующая прямые переходы, приведена на рис. 4.2. Плотность состояний в валентной зоне в интервале энергий от E_i до $E_i + dE_i$ будет:

$$\rho(E_i) dE_i = \frac{2\pi}{h^3} (m_i)^{3/2} \cdot E_i^{1/2} dE_i, \quad (4.1.15)$$

Очевидно, что при любой зависимости E от k в начальной и конечной зонах каждому состоянию в валентной зоне с данным значением вектора k_i соответствует только одно состояние в зоне проводимости с тем же значением вектора k_f . Таким образом, энергии электрона в начальной зоне E_i и в конечной зоне E_f однозначно определяются энергией фотона. В простейшем частном случае изотропных зон с квадратичным законом дисперсии при данной энергии фотона $h\nu$ в процессе прямых переходов принимают участие только состояния, расположенные на сферах с энергиями

$$E_i = \left(\frac{m_f}{m_i + m_f} \right) E \quad (4.1.13)$$

и

$$E_f = \left(\frac{m_i}{m_i + m_f} \right) E,$$

а плотность состояний, участвующих в прямых переходах при энергиях фотонов, заключенных в интервале $(h\nu, h(\nu + d\nu))$, будет:

$$N_i(E) dE = \frac{2\pi}{h^3} m_i^{3/2} \left(\frac{m_f}{m_i + m_f} \right)^{3/2} E^{1/2} dE. \quad (4.1.16)$$

Если вероятность перехода не зависит от энергии, то зависимость $\alpha(E)$ определится простым соотношением:

$$\alpha(E) = \frac{n}{N_c} |M_d|^2 N_i(E) = AE^{1/2}. \quad (4.1.17)$$

Отклонение от параболичности начальной и конечной зон может быть учтено введением в (4.1.13) и соответственно в (4.1.16) эффективных масс, зависящих от энергии.

Обратим внимание на то, что для всех полупроводников эффективная масса электронов обычно существенно меньше эффективной массы дырок. С учетом этого обстоятельства из (4.1.13) следует, что энергия дырок составит лишь небольшой процент от энергии, определенной в (4.1.14). Так, для Ge, у которого вблизи $k = 0$ $m_n^* = 0,036m_0$ и $m_p^* = 0,34m_0$, энергия дырок составит всего 10% от $(h\nu - E_g)$, т. е. в этом случае можно считать, что мы не выходим за пределы параболического участка вершины валентной зоны при рассмотрении края прямых переходов.

Итак, только непараболичность зоны проводимости, если она существует, может обусловить отклонение измеряемой на опыте кривой $\alpha(h\nu)$ для прямых переходов от кривой, описываемой (4.1.17). С другой стороны, появление зависимости вероятности прямого перехода от энергии также может вызвать отклонение от зависимости (4.1.17) вблизи края поглощения. Если переход при $k = 0$ разрешен, то вероятность не зависит от энергии. В работах [12, 15] показано, что в случае «запрещенных» переходов вероятность перехода растет пропорционально k^2 . Для параболических зон это дает в (4.1.17) дополнительный множитель E . В случае же непараболичности зон энергетическая зависимость вероятности перехода определяется характером дисперсии электронов в непараболической зоне и оказывается более сложной. Таким образом, непараболичность зон проявляется в спектральной зависимости двояко: в увеличении плотности состояний по сравнению с плотностью состояний,

определяемой неизменной эффективной массой, и в увеличении вероятности перехода с ростом энергии. Оба эти эффекта изменяют коэффициент поглощения в одну сторону, и поэтому их действие не может быть разделено экспериментально из одних только оптических исследований.

В этом смысле увеличение вероятности перехода с энергией формально равносильно еще большему увеличению плотности состояний при постоянной вероятности. Это обстоятельство было использовано Дубровским [13, 14] для описания эффективной плотности состояний с учетом вероятности перехода путем введения так называемой «действующей» эффективной массы электронов $m_{gi,f}$. Тогда вместо (4.1.15) будет:

$$\rho_{\text{эфф}}(E_{i,f}) dE_{i,f} = |M_d(E_{i,f})|^2 \rho(E_{i,f}) dE_{i,f} = \frac{2\pi}{\hbar^3} [m_{gi,f}(E_{i,f})]^{3/2} \cdot E_{i,f}^{1/2} dE_{i,f}. \quad (4.1.18)$$

Так как $E_f \gg E_i$, то определяющую роль играет структура зоны проводимости. Вводя $m_{gf}(E_f)$ вместо m_f , полагая на основании (4.1.13) $E_f \approx E$ (при $m_i > m_f$) и используя (4.1.18), получаем для эффективной плотности состояний, участвующих в прямых переходах вместо (4.1.16), выражение

$$N_{\text{эфф}}(E) dE = \frac{2\pi}{\hbar^3} \left[\frac{m_i}{m_i + m_{gf}(E)} \right]^{3/2} [m_{gf}(E)]^{3/2} E^{1/2} dE. \quad (4.1.19)$$

Коэффициент поглощения будет:

$$\alpha(E) = \text{const} \cdot N_{\text{эфф}}(E). \quad (4.1.20)$$

Отсюда следует, что отклонение от (4.1.17) наблюдаемой на опыте кривой $\alpha(E)$ для прямых переходов вблизи края поглощения определяет эффективную непараболичность зоны проводимости, характеризующую зависимость «действующей» эффективной массы от энергии.

В сильно легированных полупроводниках, когда имеет место фермиевское вырождение в одной из зон, состояния вблизи экстремума этой зоны оказываются заполненными носителями заряда. Поэтому край кривой поглощения в этом случае сдвигается в сторону больших энергий. Это — так называемый бурштейновский сдвиг [16].

Рассмотрим для примера дырочный вырожденный полупроводник, в котором пусть даже выполняется (4.1.17).

Минимальная энергия электрона в валентной зоне этого полупроводника будет равна энергии на уровне Ферми. На основании приведенных выше рассуждений можно заключить, что при всех энергиях $E_i > \mu$ никаких изменений в спектре не будет по сравнению с невырожденным материалом. Вблизи $E_i = \mu$ должен наблюдаться резкий спад поглощения до нуля (рис. 4.3).

Таким образом, экстраполяция к нулю кривой поглощения $\alpha^2 = f(h\nu)$ из области $E_i \gg \mu$ всегда дает величину зазора между экстремальными точками начальной и конечной зон и не может быть использована для определения положения уровня Ферми.

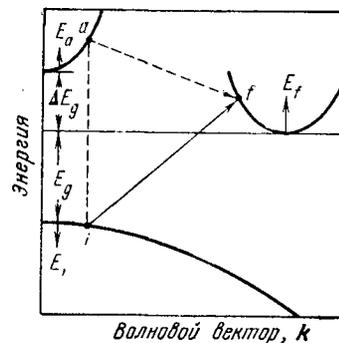


Рис. 4.4. Схема энергетических зон, поясняющая процесс непрямого перехода $i-f$ с участием промежуточного состояния a .

энергия электрона в ней, как следует из (4.1.13), почти равна энергии (4.1.14).

Непрямые переходы. Схема, иллюстрирующая непрямые переходы, показана на рис. 4.4. Переход из начального

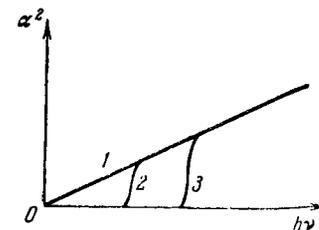


Рис. 4.3. Зависимость $\alpha^2 = f(E)$ для прямых переходов между параболическими зонами в случае независимости вероятности перехода от энергии.

1 — без вырождения; 2, 3 — при наличии вырождения ($\mu_1 > \mu_2$).

Если опытным путем удастся промерить всю кривую $\alpha^2 = f(h\nu)$, то сдвиг ее относительно нуля по оси энергий, вообще говоря, все равно не равен μ . Из (4.1.13) следует, что этот сдвиг в $1 + \frac{m_i}{m_f}$ раз больше μ . Например, для германия этот сдвиг более чем на порядок будет превышать энергию, равную уровню Ферми.

В вырожденном германии n -типа сдвиг края поглощения оказывается почти равным μ в зоне проводимости, так как

состояния в зоне i в конечное состояние в зоне f можно рассматривать как двухступенчатый процесс: электрон с импульсом k_i , близким к нулю, под действием света с энергией $h\nu$, совершает прямой переход в зону проводимости в виртуальное состояние, а затем рассеивается каким-либо центром рассеяния и переходит в конечное состояние f с импульсом k_f . В сильно легированных полупроводниках наиболее вероятными центрами рассеяния являются ионы примеси.

Время нахождения электрона в виртуальном состоянии ничтожно, поэтому для всего перехода в целом имеет место сохранение энергии. Полная вероятность непрямого перехода $|M_t|^2$ будет определяться уже известной нам вероятностью прямого перехода $|M_d|^2$ и матричным элементом вероятности рассеяния электрона $|M_s|^2$:

$$|M_t|^2 = \frac{|M_d|^2 |M_s|^2}{|\Delta E_g + E_a - E_f|^2}. \quad (4.1.21)$$

Если считать, что M_s не зависит от энергии начального и конечного состояний электрона, то энергетическая зависимость полной вероятности непрямого перехода будет определяться лишь знаменателем в (4.1.21).

Рассмотрим сначала кремний, для которого $E_{g0} - E_g \geq \geq 1,5$ эВ [17] (рис. 1.5), т. е. при рассмотрении края поглощения будет выполнено неравенство

$$\Delta E_g = E_{g0} - E_g \gg E_a, E_f. \quad (4.1.22)$$

В этом случае знаменатель в (4.1.21) можно положить равным $E_{g0} - E_g$ и, следовательно,

$$|M_t| = \text{const} |M_d|.$$

Аналогично рассмотренному выше случаю прямых переходов для коэффициента поглощения можно написать:

$$\alpha_{if}(E) = \frac{n}{N_c} \frac{dN}{dt} = \text{const} |M_d|^2 N_{if}(E), \quad (4.1.23)$$

где $N_{if}(E)$ — концентрация пар состояний в начальной и конечной зонах. Закон сохранения энергии в этом случае имеет вид:

$$E = E_i + E_f. \quad (4.1.24)$$

Будем сначала считать M_d не зависящим от энергии. Для сферических зон с квадратичным законом дисперсии среднее число $\bar{N}_{if}(E)$ будет:

$$\bar{N}_{if}(E) = \left(\frac{2\pi}{h^3}\right)^2 (2m_i)^{3/2} (2m_f)^{3/2} \times \\ \times \int \int E_i^{1/2} E_f^{1/2} \delta(E - E_i - E_f) dE_i dE_f. \quad (4.1.25)$$

Обозначая

$$\bar{\rho}_i = \frac{2\pi}{h^3} (2m_i)^{3/2} \quad \text{и} \quad \bar{\rho}_f = \frac{2\pi}{h^3} (2m_f)^{3/2},$$

получим после первого интегрирования

$$\bar{N}_{if}(E) = \bar{\rho}_i \bar{\rho}_f \int_0^{E_{i\text{макс}}} E_i^{1/2} (E - E_i)^{1/2} dE_i. \quad (4.1.26)$$

Для сильно легированного вырожденного полупроводника n -типа $E_{i\text{макс}} = E - \mu$. Интегрируя (4.1.26) с таким верхним пределом, получим:

$$\bar{N}_{if}(E) = \frac{E^2}{8} \bar{\rho}_i \bar{\rho}_f \left[\frac{2}{E} \left(1 - \frac{2\mu}{E}\right) (E\mu - \mu^2)^{1/2} + \right. \\ \left. + \arcsin \left(1 - \frac{2\mu}{E}\right) + \frac{\pi}{2} \right]. \quad (4.1.27)$$

Если вырождение отсутствует ($\mu = 0$), то это выражение переходит в

$$\bar{N}_{if}(E) = \frac{\pi}{8} \bar{\rho}_i \bar{\rho}_f E^2. \quad (4.1.28)$$

В действительности же в кремнии закон дисперсии более сложен, к тому же вероятность перехода может зависеть от энергии. Поэтому трудно ожидать совпадения эксперимента с приведенной выше простой теорией.

Дубровский [13, 14] рассмотрел не прямые переходы в кремнии, введя по аналогии с анализом прямых переходов некую «действующую» эффективную массу m_{gd} , которая будет учитывать и обыкновенное увеличение плотности состояний из-за несферичности зон, и дополнительное увеличение плотности состояний из-за энергетической зависимости вероятности перехода.

Зависимость «действующей» эффективной массы от энергии записывается Дубровским в виде

$$[m_{gd}(E)]^{3/2} = \bar{m}_{gd}^{3/2} + a(\bar{m}_{gd}E)^{3/2}; \quad \bar{m}_{gd} = m_d, \quad (4.1.29)$$

где

$$m_d^{3/2} = m_{i1}^{3/2} + m_{i2}^{3/2} + m_{i3}^{3/2}.$$

При этом спиной орбитальным отщеплением третьей зоны пренебрегается.

Введение переменной массы означает, что плотность состояний в рассматриваемой зоне при энергии E_i от ее вершины равна плотности состояний при такой же энергии в параболической зоне с эффективной массой (4.1.29). Полную концентрацию пар состояний получим, интегрируя (4.1.26) после замены ρ_i в нем на $\bar{\rho}_i (1 + aE_i^{3/2})$:

$$N_{if}(E) = \bar{\rho}_i \bar{\rho}_f \left\{ \frac{E^2}{8} \left[\frac{2}{E} \left(1 - \frac{2\mu}{E} \right) (E\mu - \mu^2)^{1/2} + \arcsin \left(1 - \frac{2\mu}{E} \right) + \frac{\pi}{2} \right] + \frac{4a}{105} [8E^{7/2} - \mu^{3/2}(35E^2 - 42E\mu + 15\mu^2)] \right\}. \quad (4.1.30)$$

В отсутствие вырождения ($\mu = 0$) это выражение переходит в

$$N_{if}(E) = \bar{\rho}_i \bar{\rho}_f \left(\frac{\pi}{8} E^2 + \frac{32}{105} aE^{7/2} \right). \quad (4.1.31)$$

На рис. 4.5 показан ход кривых $\alpha(E)$ для кремния, вычисленных Дубровским по (4.1.23) с учетом (4.1.27) и (4.1.30) для $\mu = 0,05$ эв и с учетом (4.1.28) и (4.1.31) для $\mu = 0$. Величина a , фигурирующая в (4.1.30), является подгруппным параметром в руках экспериментатора. Подбор значения a , при котором достигается наилучшее совпадение с экспериментом, позволяет определить характер зависимости «действующей» эффективной массы от энергии. Анализ прямых переходов в сильно легированном кремнии облег-

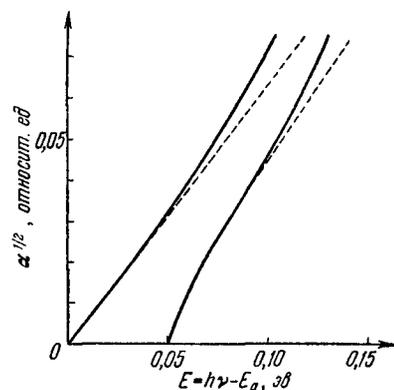


Рис. 4.5. Зависимость $\alpha^{1/2} = f(E)$, вычисленная по (4.1.23) для $\mu = 0,05$ эв и по (4.1.31) для $\mu = 0$ с действующей массой, определяемой (4.1.29) с параметром $a = 10$. (Пунктирные линии вычислены по (4.1.27) и (4.1.28) с постоянной эффективной массой.)

чающей» эффективной массы от энергии. Анализ прямых переходов в сильно легированном кремнии облег-

чен тем, что удалось упростить выражение (4.1.21). В германии величина $E_{g0} - E_g$, входящая в знаменатель, равна всего 0,15 эв [17], поэтому неравенство (4.1.22) для германия не выполняется. Из-за этого для германия необходимо учитывать энергетическую зависимость вероятности непря-

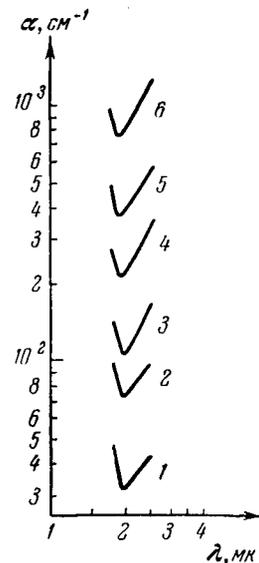


Рис. 4.6. Коэффициент поглощения германия, сильно легированного мышьяком ($T = 300^\circ\text{K}$).

Номера кривых соответствуют разным концентрациям электронов в см^{-3} (при $T = 300^\circ\text{K}$): 1 — $5 \cdot 10^{18}$; 2 — $8 \cdot 10^{18}$; 3 — $1,2 \cdot 10^{19}$; 4 — $2,3 \cdot 10^{19}$; 5 — $4 \cdot 10^{19}$; 6 — $6,2 \cdot 10^{19}$.

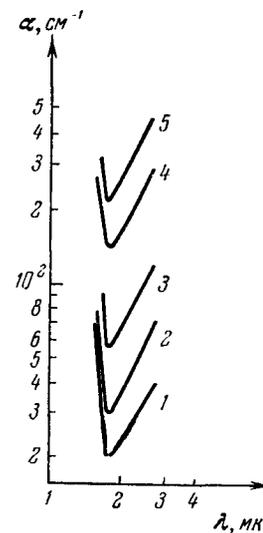


Рис. 4.7. Коэффициент поглощения германия, сильно легированного мышьяком ($T = 4,2^\circ\text{K}$).

Номера кривых те же, что на рис. 4.6.

мого перехода, обусловленную знаменателем в (4.1.21). Такой учет произвел Гартман [18].

Экспериментальные исследования поглощения в сильно легированном германии. Наиболее подробно поглощение света исследовано в образцах германия, сильно легированного As [19—21] и Ga [22].

Рассмотрим сначала данные, относящиеся к электронному германию. На рис. 4.6 и 4.7 приведены спектральные

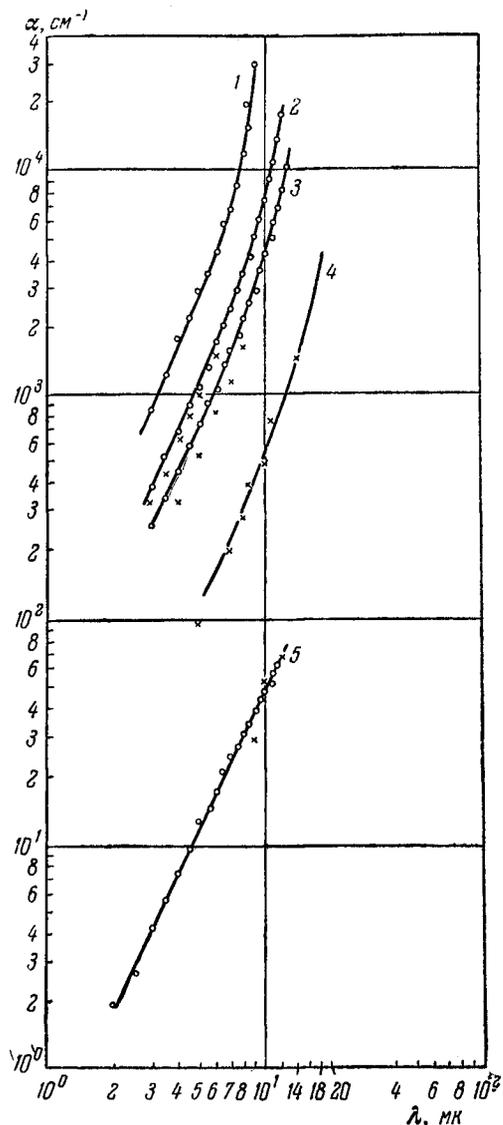


Рис. 4.8. Спектральная зависимость коэффициента поглощения света свободными носителями заряда в германии *n*-типа.

(Концентрация электронов при 300° К, см^{-3} : 1 — $3,6 \cdot 10^{19}$; 2 — $1,8 \cdot 10^{19}$; 3 — $1,35 \cdot 10^{19}$; 4 — $4,8 \cdot 10^{18}$; 5 — $8 \cdot 10^{17}$.)

зависимости коэффициента поглощения, найденные Панковым [21]. Эти результаты получены из измерений пропускания света сквозь образцы с учетом многократного отражения света от его поверхностей. Характер спектральной зависимости показывает, что имеют место два процесса поглощения: поглощение на свободных носителях при больших длинах волн и поглощение при коротких длинах волн в области края основной полосы поглощения. Чтобы выделить этот второй процесс поглощения, необходимо экстраполировать данные по поглощению на свободных носителях (правые ветви кривых рис. 4.6, 4.7) в область меньших длин волн и вычесть экстраполированные значения из величин α , найденных на опыте при этих длинах волн. Ошибки, связанные с такой экстраполяцией, могут быть весьма существенными, поэтому изучению закона этой экстраполяции, т. е. изучению спектральной зависимости коэффициента поглощения на свободных носителях был посвящен ряд специальных работ. Данные, характеризующие этот вид поглощения в образцах германия, сильно легированного различными донорными примесями, приведены на рис. 4.8. Там же для сравнения приведена спектральная зависимость коэффициента поглощения для образца с малой концентрацией атомов мышьяка. Эти данные, а также данные рис. 4.6 и 4.7 показывают, что характер зависимости коэффициента поглощения на свободных носителях от длины волны не меняется с легированием и вплоть до самых больших концентраций можно считать применимым закон $\alpha \sim \lambda^2$.

В результате учета поглощения на свободных носителях Панков [21] получил спектральную зависимость коэффициента поглощения для межзонных переходов (рис. 4.9). Эти кривые показывают, что энергетический зазор, соответствующий прямому переходу из вершины валентной зоны в минимум зоны проводимости при $k = (0,0,0)$, уменьшается с ростом концентрации примеси. В еще большей степени уменьшается ширина запрещенной зоны для непрямого перехода из вершины валентной зоны в минимум зоны проводимости при $k = (1,1,1)$. Количественные данные такого уменьшения Δ_{000} и Δ_{111} , найденные в работе [21] при 4,2° К, приведены в табл. 4.1.

Аналогичные данные по спектральной зависимости коэффициента поглощения в сильно легированном германии,

Таблица 4.1

$N, \text{см}^{-3}$	$5 \cdot 10^{18}$	$8 \cdot 10^{18}$	$1,2 \cdot 10^{19}$	$2,3 \cdot 10^{19}$	$4,0 \cdot 10^{19}$
$\Delta_{000} \cdot 10^3, \text{эВ}$	28	32	38	52	60
$\Delta_{111} \cdot 10^3, \text{эВ}$	59	57	66	79	93

но с примесью фосфора были получены Хаасом [23]. Им также было найдено уменьшение энергетических зазоров и при $k = (0,0,0)$ и при $k = (1,1,1)$ (табл. 4.2). Однако, абсолютные значения Δ_{000} и Δ_{111} , характеризующие сужение этих зазоров, отличаются от величин, найденных Панковым.

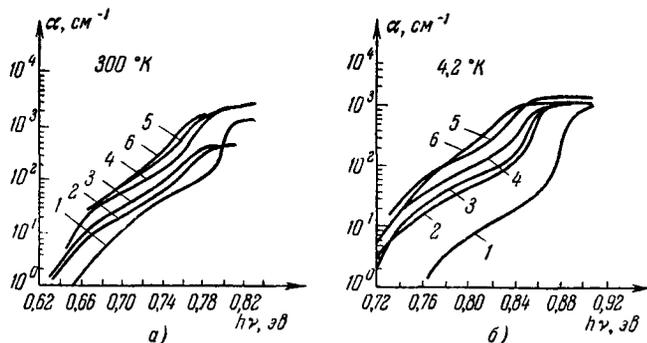


Рис. 4.9. Спектральная зависимость коэффициента поглощения при межзонных переходах в германии, легированном мышьяком по данным [21].

Номера кривых те же, что на рис. 4.6.

Наиболее вероятной причиной расхождения этих данных является неопределенность экстраполяции поглощения свободными носителями в области основного поглощения. Однако не исключена и причина, связанная с различным влиянием примесей фосфора и мышьяка на зонную структуру сильно легированного германия. Кроме того, данные обоих авторов трудно сравнивать из-за того, что они получены при различных температурах.

Таблица 4.2

Значения сужения энергетических зазоров при $k = (0, 0, 0)$ и при $k = (1, 1, 1)$ в сильно легированном германии по данным [23]

Примесь	P	P	P	P	P	As
	$N, \text{см}^{-3}$	$2,4 \cdot 10^{18}$	$4,5 \cdot 10^{18}$	$9,6 \cdot 10^{18}$	$1,95 \cdot 10^{19}$	$4,3 \cdot 10^{19}$
$\Delta_{000} \cdot 10^3, \text{эВ} (300^\circ \text{K})$	16	25	25	37	66	40
$\Delta_{000} \cdot 10^3, \text{эВ} (200^\circ \text{K})$	19	25	28	41	53	39
$\Delta_{000} \cdot 10^3, \text{эВ} (80^\circ \text{K})$	11	19	25	38	51	39
$\Delta_{111} \cdot 10^3, \text{эВ} (300^\circ \text{K})$	13	25	24	35	50	41
$\Delta_{111} \cdot 10^3, \text{эВ} (200^\circ \text{K})$	21	33	34	45	65	54
$\Delta_{111} \cdot 10^3, \text{эВ} (80^\circ \text{K})$	27	31	40	47	70	54

Теперь перейдем к экспериментальным данным по исследованию поглощения в сильно легированном германии p -типа. На рис. 4.10 и 4.11 показаны опытные данные, полученные в [22] при исследовании образцов германия с примесью галлия. Концентрации дырок в исследованных образцах приведены в таблице 4.3.

Таблица 4.3

Концентрация дырок в образцах, соответствующих рис. 4.10 и 4.11

№ образца	1	2	3	4	5
$p, \text{см}^{-3}$	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{17}$	$6 \cdot 10^{17}$	$1,5 \cdot 10^{18}$	$6,3 \cdot 10^{18}$
№ образца	6	7	8	9	10
$p, \text{см}^{-3}$	$8,7 \cdot 10^{18}$	$1,6 \cdot 10^{19}$	$2,5 \cdot 10^{19}$	$3,6 \cdot 10^{19}$	$7,3 \cdot 10^{19}$

При температурах 293 и 80° К на кривой 1 (слабо легированный образец) ясно видны области непрямых и прямых межзонных переходов и область поглощения свободными

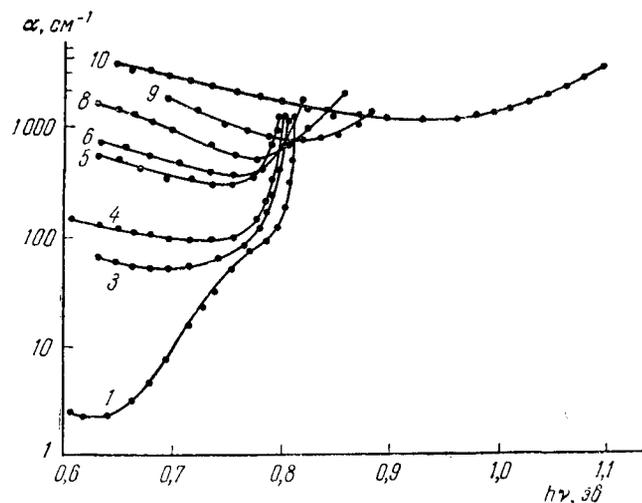


Рис. 4.10. Коэффициент поглощения в германии, сильно легированном галлием (293° К).

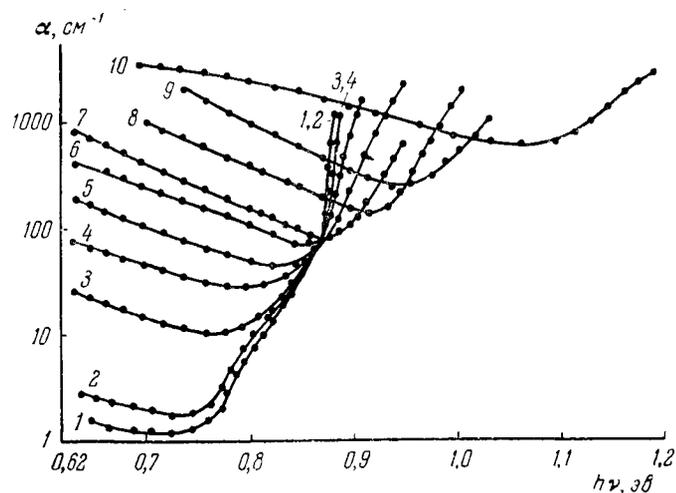


Рис. 4.11. Коэффициент поглощения в германии, сильно легированном галлием (80° К).

носителями. С ростом концентрации дырок участки кривых, отражающие эти области, претерпевают изменения. Поглощение на свободных носителях при увеличении степени легирования растет и достигает значений, сравнимых с собственным поглощением на прямых переходах при содержании галлия порядка 10^{19} см^{-3} .

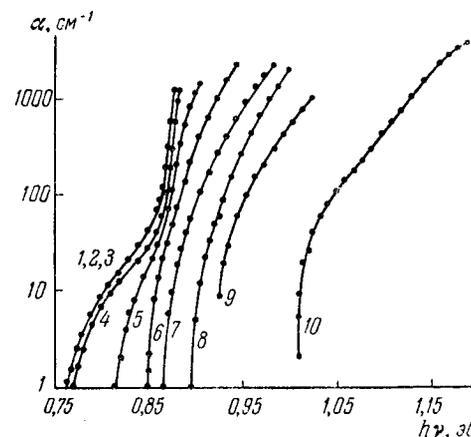


Рис. 4.12. Спектральная зависимость коэффициента поглощения при межзонных переходах в германии, легированном галлием по данным [22] (80° К).

Из приведенных рисунков видно, что уже при $p \sim 6 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ области прямых и непрямых переходов неразличимы. Причем коэффициент поглощения начинает слабее зависеть от частоты падающего света. Более наглядно это видно из рис. 4.12, на котором приведены те же кривые, что и на предыдущем рисунке, за вычетом поглощения свободными носителями [22].

Характерно, что при возрастании легирования происходит увеличение пороговой энергии, соответствующей краю поглощения. Авторы работы [22] объясняют это тем, что в вырожденном германии электрон при непрямом переходе должен перебрасываться не из вершины валентной зоны, а с уровня Ферми (с точностью до kT) в зоне проводимости, так как все уровни энергии $E > \mu$ свободны от электронов.

Поэтому в этом случае должно наблюдаться увеличение энергии, соответствующей краю поглощения на величину μ . Для случая прямых переходов пороговая энергия должна возрастать на большую величину, которую авторы [22] оценивают из закона сохранения энергии

$$\frac{k^2}{2m_n^*} + \frac{k^2}{2m_p^*} + E_{g0} = h\nu.$$

Если учесть, что в вырожденном германии p -типа второе слагаемое равно μ , то

$$h\nu = E_{g0} + \mu \left(1 + \frac{m_p^*}{m_n^*} \right).$$

Отсюда видно, что так как $m_p^* > m_n^*$, то пороговая энергия в этом случае должна увеличиваться на значительную величину. Для германия эта величина составит почти 10μ (а не 2μ , как предполагалось в [22]). Эти качественные рассуждения, конечно, в какой-то степени отражают истинную картину изменения края поглощения с легированием. Но из-за невыполнения неравенства (4.1.22) в германии, даже и интерпретация опытных данных, проведенная в работах [21, 23] для n -германия и в [22] — для p -германия, оказывается сомнительной.

Экспериментальные исследования поглощения в сильно легированном кремнии. На рис. 4.13 приведена зависимость $\alpha = f(h\nu)$, полученная при комнатной температуре для образцов кремния n -типа с большим содержанием мышьяка [13]. Частотная зависимость поглощения свободными носителями для сильно легированных образцов описывается соотношением $\alpha \sim \nu^{3.5}$. Из рис. 4.14 видно, что поглощение свободными носителями увеличивается с концентрацией как $N^{1.7}$, что достаточно близко к ожидаемой зависимости (4.1.7) в случае рассеяния электронов ионами примеси. Однако наблюдаемая частотная зависимость $\alpha \sim \nu^{3.5}$ характерна для примесного рассеяния без учета экранировки ионов электронами (4.1.8). Так как в сильно легированных полупроводниках учет экранирования представляется обязательным, то указанное обстоятельство остается непонятным. После экстраполяции в область края собственного поглощения и вычитания экстраполированных значений из суммарных величин α , измеренных на опыте, Дубров-

ский получил результаты, приведенные на рис. 4.15. Все кривые имеют прямолинейные участки при больших $h\nu$. Ширина запрещенной зоны, найденная экстраполяцией прямолинейного участка кривой 1 к нулю поглощения ($E = h\nu - E_g = 0$), оказалась равной $1,036$ эв.

На первый взгляд экстраполяция двух других кривых приведет к явному уменьшению ширины запрещенной зоны.

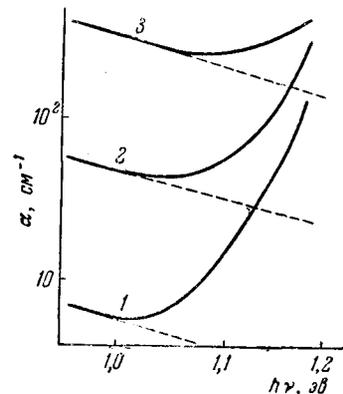


Рис. 4.13. Спектр поглощения кремния, легированного мышьяком по данным [13].

$$1 - 1,7 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}; \quad 2 - 6 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}; \\ 3 - 2,2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}.$$

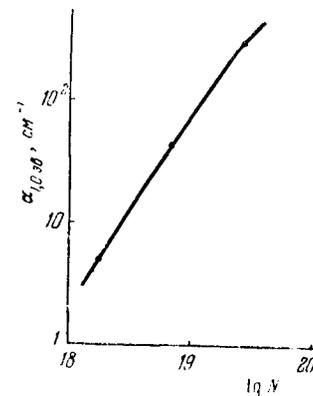


Рис. 4.14. Зависимость коэффициента поглощения квантов света с энергией $1,0$ эв от концентрации электронов в n -Si.

Построено по данным рис. 4.13.

Однако, как указано в [13], экстраполяция в этом случае незаконна. Действительно, в области $h\nu < 1,036$ эв на этих кривых наблюдается поглощение, медленно меняющееся с частотой. Это дополнительное поглощение делает невозможной оценку ширины запрещенной зоны путем простой экстраполяции прямолинейных участков кривых 2 и 3 на рис. 4.15.

Прямыми опытами Дубровский показал [13], что это дополнительное поглощение обусловлено рассеянием света в образце. Дополнительное рассеяние наблюдалось только в сильно легированных образцах кремния n -типа с концентрацией электронов 10^{18} см^{-3} и более. С увеличением концентрации росла и интенсивность рассеянного света.

Физическая причина эффекта рассеяния, по-видимому, могла быть связана с образованием в кристалле включений второй фазы, которые, как было показано в [24], вполне могут образовываться при очень больших концентрациях примеси в кремнии. На рис. 4.15 сплошные кривые 2, 3

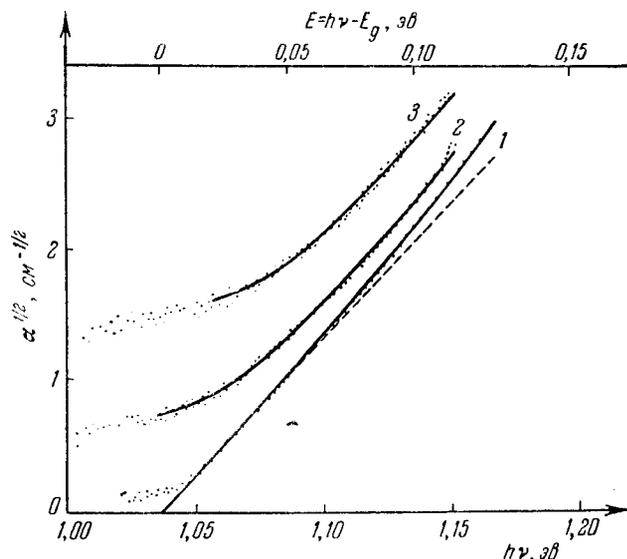


Рис. 4.15. Край основной полосы поглощения в кремнии, сильно легированном мышьяком.

1 — $1,7 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$; 2 — $6 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$; 3 — $2,2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$.

представляют теоретические зависимости $\alpha^{1/2} = f(h\nu)$. Кривая 2 получена сложением «коэффициента поглощения», обусловленного рассеянием, который равен $0,58 \text{ см}^{-1}$ при $h\nu = 1,05 \text{ эВ}$ и меняется по закону $\alpha \sim \nu^{4,6}$, и коэффициента поглощения, вычисленного с (4.1.31), с «действующей» эффективной массой (4.1.29) и параметром α , равным 4,5.

Сплошная кривая 3 получена аналогично, но «коэффициент поглощения» из-за рассеяния был равен $2,45 \text{ см}^{-1}$ при $h\nu = 1,05 \text{ эВ}$ и коэффициент поглощения для не прямых переходов вычислялся уже с учетом вырождения, т. е. с учетом (4.1.30) со значением $\mu = 0,02 \text{ эВ}$. Необходимые при этих вычислениях величины $\bar{\rho}_i$, $\bar{\rho}_j$ и α определялись из

прямолинейного участка кривой 1, соответствующей относительно слабо легированному образцу. Сплошные кривые 2 и 3, полученные расчетным путем, хорошо совпадают с экспериментальными точками.

Таким образом, метод «действующей» эффективной массы в виде (4.1.29), предложенный Дубровским, представляется

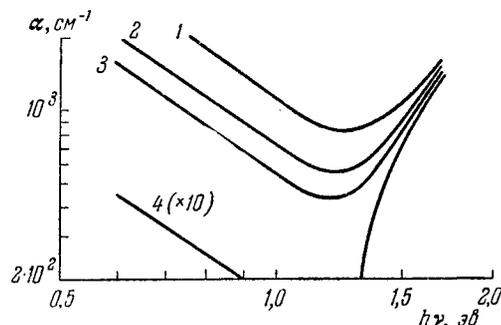


Рис. 4.16. Энергетический спектр поглощения в кремнии, сильно легированном бором (300° К):

1 — $2 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$; 2 — $9,7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$; 3 — $6 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$; 4 — $8 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$.

весьма плодотворным. Совпадение с экспериментом показывает также, что модель не прямых переходов между параболической зоной проводимости и непараболической валентной зоной с рассеянием на ионах примеси, положенная в основу теории поглощения в кремнии, оказалась правильной.

Спектральная зависимость коэффициента поглощения для образцов кремния p -типа, легированных бором, показана на рис. 4.16. В отличие от n -типа на участке кривых, соответствующем поглощению свободными носителями, имеет место закон $\alpha \sim \nu^{-2}$. Экстраполяция к большим значениям $h\nu$ и вычитание экстраполированных величин из измеренного суммарного коэффициента поглощения дает спектральную зависимость $\alpha(h\nu)$ для собственного поглощения (рис. 4.17). Видно, что увеличение концентрации дырок до 10^{20} см^{-3} сдвигает край поглощения в область больших энергий на величину, примерно равную $0,03 \text{ эВ}$.

К сожалению, из-за больших погрешностей в определении малых значений коэффициента поглощения на фоне сильного поглощения свободными носителями край поглощения в области $\alpha < 10 \text{ см}^{-1}$ на образцах с концентрациями дырок выше 10^{19} см^{-3} не поддается непосредственному определению. В то же время именно в этой области значений

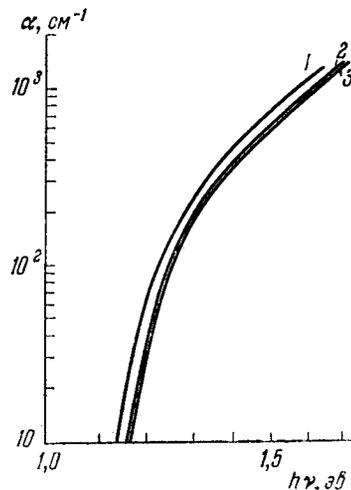


Рис. 4.17. Край основной полосы поглощения в кремнии, сильно легированном бором.

1 — 10^{19} см^{-3} ; 2 — $6 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$;
3 — $2 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$.

а форма кривой $\alpha(h\nu)$ претерпевает резкие изменения в вырожденном материале, аналогичные тем, что имеют место в кремнии *n*-типа.

Экспериментальные исследования поглощения в сильно легированных полупроводниках типа $A^{III}B^V$. Существенной особенностью большинства соединений типа $A^{III}B^V$ является малая эффективная масса электронов в зоне проводимости. Это способствует наступлению сильного вырождения уже при относительно небольшой концентрации примесей. Следствием этого является ярко выраженный бурштейновский сдвиг, т. е. оптические переходы электронов из валентной зоны на уровень Ферми в зоне проводимости, который растет с увеличением степени легирования. На опыте, таким образом, наблюдается кажущееся увеличение ширины запрещенной зоны. Этот эффект наблюдался в InSb [48], InAs [49—51], GaAs [52] и других $A^{III}B^V$.

Уменьшение ширины запрещенной зоны за счет перекрытия примесных зон с основными в $A^{III}B^V$ можно наблюдать только в условиях малого бурштейновского сдвига, а это возможно лишь в сильно легированных компенсированных кристаллах. Такие эксперименты были выполнены на InSb [53], InAs [54], InP [55] и GaAs [56], [57].

Второй существенной особенностью $A^{III}B^V$ является непараболичность зоны проводимости, и поэтому поглощение

уже не подчиняется выражению (4.1.17). Теория поглощения с учетом непараболичности зоны разработана Кейном [58].

В $A^{III}B^V$, как и в германии и кремнии, при сильном легировании большую роль играет поглощение на свободных носителях. В кристаллах $A^{III}B^V$ *n*-типа экспериментально наблюдается закон $\alpha \sim \lambda^p$. Значения *p* лежат между 2 и 3,0 (см. табл. 4.4 [59]). Эти значения указывают на значительную долю участия оптических фононов в рассеянии электронов ($p = 2,5$ [64]) и малую роль рассеяния на ионизованных примесях ($p = 3,5$). Поглощение свободными носителями в кристаллах $A^{III}B^V$ *p*-типа, как правило, оказывается не зависящим от длины волны. Это объясняется предположением о существовании в валентной зоне большинства $A^{III}B^V$ нескольких подзон. Поперечное сечение поглощения σ_p превышает σ_n более чем на порядок.

Изучение поглощения света свободными носителями при различных уровнях легирования показало, что коэффициент поглощения пропорционален концентрации носителей заряда. Однако коэффициент поглощения на свободных носителях также обратно пропорционален эффективной массе, а она начинает зависеть от концентрации при сильном вырождении электронного газа. Поэтому, начиная с определенных концентраций, линейная зависимость коэффициента поглощения от концентрации носителей (примесей) нарушается.

Более подробное освещение оптических свойств $A^{III}B^V$ читатель найдет в [65].

Таблица 4.4

Значения поперечного сечения поглощения при 9 мк и показателя степени в законе $\alpha \sim \lambda^p$

Соединение	$n, \text{ см}^{-3}$	$\sigma = \frac{\alpha}{n}, \text{ см}^2$	p	Источник
InSb	$(1-3) \cdot 10^{17}$	2,3	2	[60]
InAs	$(0,3-8) \cdot 10^{17}$	3,6	3,0	[61]
InP	$(0,4-4) \cdot 10^{17}$	4,5	2,6	[55]
GaAs	$(1-10) \cdot 10^{17}$	4,7	3,1	[62]
AlSb	$(0,4-4) \cdot 10^{17}$	15	2	

§ 4.2. Отражение света

Коэффициент отражения. Отражение света от твердых тел характеризуется коэффициентом отражения R , равным отношению интенсивностей отраженного и падающего света.

Коэффициент отражения связан с показателем преломления n и показателем поглощения k известной формулой Френеля [17]

$$R = \frac{(n-1)^2 + k^2}{(n+1)^2 + k^2}, \quad (4.2.1)$$

где $k = \frac{1}{4\pi} \frac{\alpha}{\lambda}$, а λ — длина волны падающего света.

Отражение в инфракрасной области спектра. Из измерений коэффициента отражения в инфракрасной области спектра Шпитцер и Фэн [25], а до них еще и Толпыго [26] предложили определять величину эффективной массы носителей заряда. Этот метод в области, где поглощением можно пренебречь, дает связь между R и m^* в виде

$$\left(\frac{1 + \sqrt{R}}{1 - \sqrt{R}} \right)^2 = \kappa_0 - \frac{Ne^2\lambda^2}{m^*\pi c^2}, \quad (4.2.2)$$

где κ_0 — диэлектрическая постоянная чистого беспримесного полупроводника; N — концентрация носителей заряда в образце.

Первым применением этого метода к исследованию сильно легированных германия и кремния была работа [27], в которой был обнаружен значительный рост эффективной массы электронов при легировании германия мышьяком.

В следующих работах [28, 29] была надежно показана ошибочность такого вывода. Спектральная зависимость коэффициента отражения $R(\lambda)$ для германия по измерениям автора имеет вид, изображенный на рис. 4.18, а значения m^* при разных концентрациях показаны на рис. 4.19. Видно, что в пределах ошибок опыта эффективная масса может считаться постоянной. Аналогичный результат был получен и при исследовании сильно легированного кремния [30].

Изучение отражения света от образцов германия и кремния, сильно легированных различными примесями пятой группы периодической системы [28—30], позволило выявить некоторые различия в величинах эффективных масс электронов (табл. 4.5).

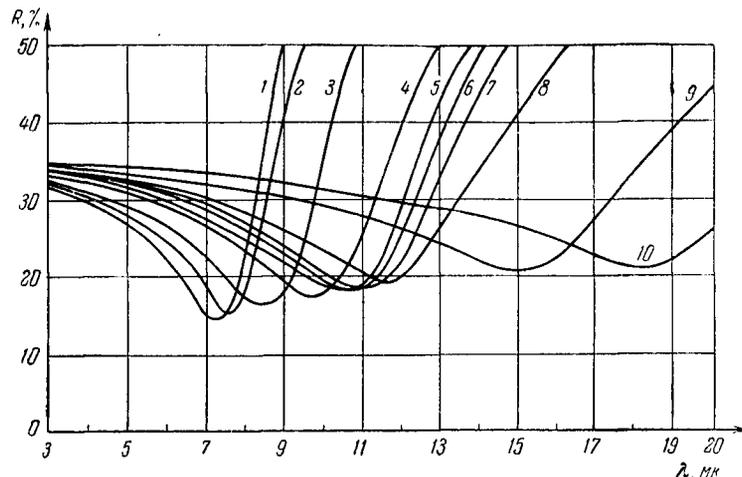


Рис. 4.18. Зависимость коэффициента отражения от длины волны падающего света для кристаллов германия с различной концентрацией мышьяка.

Образцы с концентрацией (см^{-3}): 1 — $3,6 \cdot 10^{19}$; 2 — $3,2 \cdot 10^{19}$; 3 — $2,5 \cdot 10^{19}$; 4 — $1,9 \cdot 10^{19}$; 5 — $1,8 \cdot 10^{19}$; 6 — $1,5 \cdot 10^{19}$; 7 — $1,3 \cdot 10^{19}$; 8 — $1,2 \cdot 10^{19}$; 9 — $8,3 \cdot 10^{18}$; 10 — $4,5 \cdot 10^{18}$.

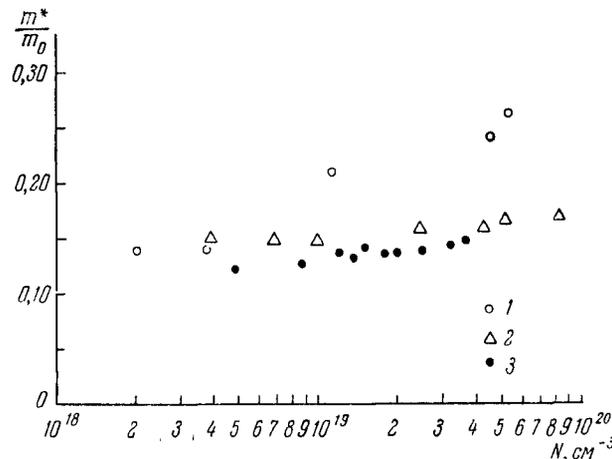


Рис. 4.19. Зависимость эффективной массы электронов от концентрации мышьяка в кристаллах германия по данным:

1 — [27]; 2 — [28]; 3 — автора [29].

Спектральная зависимость коэффициента отражения света от сильно легированных образцов германия p -типа по измерениям автора приведена на рис. 4.20.

В кремнии, в отличие от германия n -типа, кривые $R(\lambda)$ не поддаются простой интерпретации из-за существования нескольких подзон в валентной зоне германия. Спектр отражения образцов кремния показан на рис. 4.21 (см. [13]).

Таблица 4.5

Значения $\frac{m_n^*}{m_0}$ в германии и кремнии, легированных различными донорными примесями (составлено по [28—30])

Полупроводник \ Донор	Германий	Кремний
	As	0,160
P	0,166	0,300
Sb	0,140	0,258

жду точками L'_3 и L'_1 (см. рис. 1.4). Таким образом появилась возможность определить ширину запрещенной зоны не только в точке $k = 0$. Исследования ультрафиолетового отражения от большого числа материалов [34—37] позволили получить обширные сведения об их зонной структуре.

Влияние сильного легирования на структуру ультрафиолетового отражения германия изучалось в [38]. Авторы этой работы обнаружили, что максимум в отражении при энергии 2,2 эв сдвигается в сторону меньших энергий на величину, равную примерно 0,03 эв при концентрациях порядка 10^{19} см^{-3} . Этот сдвиг наблюдался ими в образцах, легированных как донорной, так и акцепторной примесью.

В сильно легированном кремнии вплоть до концентраций порядка 10^{20} см^{-3} , наоборот, не наблюдалось никакого сдвига максимумов отражения при 3,4 эв и при 4,3 эв ни в случае донорной, ни в случае акцепторной примесей [13].

Отражение в ультрафиолетовой области спектра. При исследовании спектральной зависимости коэффициента отражения германия и кремния Филлипс и Тафт [31, 32] обнаружили максимумы с энергиями, равными 2,5 эв и 4,4 эв в Ge и 3,5 эв в Si.

Филлипс [33] высказал предположение о связи максимума в отражении при 2,5 эв в Ge с прямыми переходами из валентной зоны в зону проводимости на границе зоны Бриллюэна в направлении [111] ме-

Переход $L'_3 \rightarrow L'_1$ в Ge захватывает абсолютный минимум зоны проводимости, но не касается вершины валентной

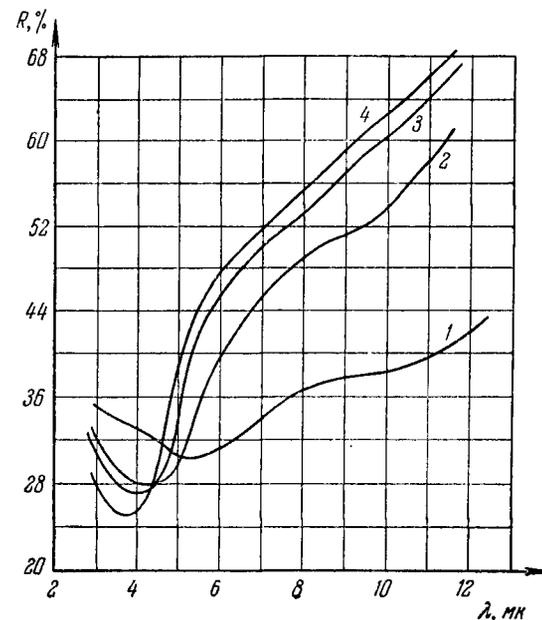


Рис. 4.20. Отражательная способность германия p -типа, сильно легированного галлием.

Концентрация галлия в образцах, см^{-3} : 1 — $3,9 \cdot 10^{19}$; 2 — $7,8 \cdot 10^{19}$; 3 — $1 \cdot 10^{20}$; 4 — $1,2 \cdot 10^{20}$.

зоны. Казалось бы, что это обстоятельство должно определять разное влияние легирования донорными и акцепторными примесями на минимальную энергию этого перехода. В Ge n -типа существенно должно проявляться увеличение минимальной энергии перехода, вызванное фермиевским вырождением, т. е. проникновением уровня Ферми в глубь зоны проводимости. При легировании акцепторами изменение минимальной энергии перехода $L'_3 \rightarrow L'_1$ может быть обусловлено только кулоновским взаимодействием и изменением параметра решетки, но оба эти фактора, во-первых, незначительны, во-вторых, нет оснований пред-

полагать, что изменение расположения экстремальных точек разрешенных зон из-за электронного взаимодействия и уменьшения параметров решетки будет различным в материалах *n*- и *p*-типа. Наоборот, исследования края собственного поглощения в Ge, легированном донорными [21, 23] и акцепторными примесями [22], показывают, что эти эффекты приблизительно одинаковы. Таким образом, в Ge

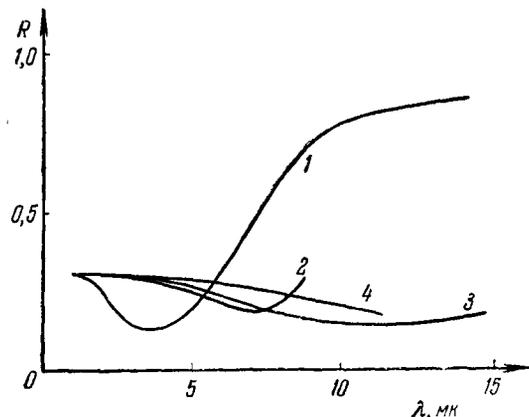


Рис. 4.21. Спектральная зависимость коэффициента отражения света от образцов сильно легированного кремния.

1 — $2 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$ (В); 2 — $5 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ (В); 3 — $2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ (As); 4 — $1 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ (As).

n- и *p*-типа следовало ожидать разницу в энергетическом положении максимума при 2,2 эВ на величину, равную положению уровня Ферми в электронном германии. При концентрации 10^{19} см^{-3} и комнатной температуре это составило бы $\sim 0,05$ эВ. Поэтому одинаковое уменьшение энергии этого максимума в Ge *n*- и *p*-типа на 0,03 эВ, найденной в [38], является неожиданным. Для его объяснения в [39] высказано предположение об одинаковости кривизны обеих разрешенных зон вблизи границы зоны Брюллюэна в направлении [111] в сильно легированном германии.

В связи с этим предположением большой интерес представляет изучение пика отражения при 3,4 эВ в сильно ле-

гированном кремнии. В [39] предполагалось, что этот пик соответствует переходу $\Gamma_{25'} \rightarrow \Gamma_{15}$, но из-за того, что валентная зона и зона проводимости в кремнии вблизи точки $k = 0$ имеют противоположные направления изменения энергии разрешенных состояний с ростом величины волнового вектора, отсутствие смещения максимума в отражении при 3,4 эВ уже не может быть обусловлено одинаковой кривизной зон, как в случае перехода $L_{3'} \rightarrow L_1$ в Ge. С другой стороны, анализ показывает [13], что если переход $\Gamma_{25'} \rightarrow \Gamma_{15}$ обуславливает максимум при 3,4 эВ, то следует ожидать смещения его на величину

$$\Delta E = \frac{m_i + m_f}{m_f} \mu_i,$$

где m_i и m_f — эффективные массы в начальной и конечной зонах; μ_i — уровень Ферми в начальной зоне.

Оценка дает для образца Si с содержанием бора 10^{20} см^{-3} величину $\Delta E = 0,1$ эВ. Эта величина находится вне ошибок эксперимента и легко могла бы быть измерена. Поэтому отсутствие смещения максимума при 3,4 эВ в сильно легированном Si вынудило Дубровского считать этот максимум соответствующим не переходу $\Gamma_{25'} \rightarrow \Gamma_{15}$, а скорее переходу $L_{3'} \rightarrow L_1$ [13].

Отражение света от кристаллов $A^{III}B^V$. Опыты по отражению света от InSb [66, 67], InAs [67, 68], InP [55, 69] и GaAs [62] электронного типа проводимости были предприняты для определения значений эффективных масс электронов. Основные результаты этих работ сведены в таблице 4.6.

Таблица 4.6

Значения эффективных масс электронов в кристаллах $A^{III}B^V$, найденные из опытов по отражению

Соединение	$N, \text{ см}^{-3}$	m_n^*/m_0
InSb	$3,5 \cdot 10^{17}$	0,023
	$4,2 \cdot 10^{17}$	0,029
	$1,2 \cdot 10^{18}$	0,032
	$2,8 \cdot 10^{18}$	0,040
InAs	$4,0 \cdot 10^{18}$	0,041
	$2,4 \cdot 10^{17}$	0,030
	$1,3 \cdot 10^{18}$	0,034
InP	$5,0 \cdot 10^{18}$	0,053
	$5 \cdot 10^{18}$	$0,2 \div 0,26$
GaAs	$5 \cdot 10^{17}$	0,079
	$5,4 \cdot 10^{18}$	0,086

§ 4.3. Эффект Фарадея

Эффект Фарадея заключается во вращении плоскости поляризации световой волны, проходящей через кристалл и направленной параллельно магнитному полю. Детальное рассмотрение физики этого явления читатель найдет, например, в [40]. Вращение плоскости поляризации количественно характеризуется углом поворота θ , который может быть определен по формуле [41]

$$\theta = \frac{\omega l}{2c} (n_R - n_L), \quad (4.3.1)$$

где ω — круговая частота; l — толщина образца; n_R и n_L — коэффициенты преломления для право- и левополяризованных по кругу компонент, в которые плоско поляризованная волна может быть разложена.

Положительное значение θ соответствует вращению по часовой стрелке для волны, распространяющейся вдоль направления магнитного поля в сторону от наблюдателя.

В области длин волн инфракрасного диапазона вращение плоскости поляризации может быть связано как свободным, так и связанным носителям.

В сильно легированных полупроводниках будет иметь место эффект Фарадея на свободных носителях заряда. Простой классический анализ этого случая показывает [42, 43], что величина θ будет иметь вид:

$$\theta = \frac{e^3 B N \lambda^2 l}{8 \pi c^3 \kappa_0 n m^{*2}}, \quad (4.3.2)$$

где N — концентрация свободных носителей заряда; B — магнитная индукция; κ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума; λ — длина волны, а n — коэффициент преломления падающего на образец света.

Вывод этого выражения предполагает выполнение следующих условий:

$$\omega^2 \tau \gg 1; \quad \omega^2 \gg \omega_c^2; \quad n^2 \gg k^2, \quad (4.3.3)$$

где k — коэффициент поглощения света образцом; τ — время релаксации; ω_c — циклотронная частота, равная

$$\omega_c = \frac{eB}{m^*}.$$

Соотношения (4.3.3) в полупроводниках выполняются в области длин волн за краем поглощения.

Более строгое исследование эффекта Фарадея на свободных носителях [44], выполненное в рамках кинетического уравнения Больцмана, дает выражение, аналогичное (4.3.2), но уже с учетом зонной структуры полупроводника. Для такого полупроводника, как германий, изоэнергетическая поверхность которого представляется в виде четырех эллипсоидов вращения, направленных вдоль направления [111] в кристалле, выражение для θ оказывается содержащим параметр анизотропии K [45]:

$$\theta = \frac{Ne^3 B \lambda^2 l}{8 \pi^2 c^3 n \kappa_0} \cdot \frac{K(K+2)}{3m_{\parallel}^2}. \quad (4.3.4)$$

Для того же германия, но обладающего дырочным типом проводимости, угол поворота плоскости поляризации определяется так:

$$\theta = - \frac{e^3 B \lambda^2 l}{8 \pi^2 c^3 n \kappa_0} \left(\frac{p_T}{m_T^2} + \frac{p_L}{m_L^2} \right), \quad (4.3.5)$$

где p_T и p_L — концентрации тяжелых и легких дырок, а m_T и m_L — их эффективные массы. Характерно, что для связанных электронов теория дает выражение (при $\omega > \omega_c$)

$$\theta = \frac{Ne^3 \omega^2 B l}{2 \pi c \kappa_0 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 m^{*2}}, \quad (4.3.6)$$

из которого следует, что квадратичная зависимость θ от длины волны в этом случае уже не имеет места.

Отличительными чертами теоретических выражений для θ в случае эффекта Фарадея на свободных носителях является прямая пропорциональность между θ , концентрацией носителей и квадратом длины волны падающего света, а также обратная пропорциональность θ величине m^{*2} . В связи с этим экспериментальное изучение эффекта Фарадея может представлять двойной интерес: при известной эффективной массе по измеренным значениям θ может быть определена концентрация носителей заряда N либо соотношение между p_T и p_L , и, наоборот, — если известна концентрация носителей, то можно найти значение эффективной массы m^* .

Экспериментальные результаты исследования эффекта Фарадея. Результаты изучения вращения Фарадея в легированных монокристаллах германия *n*-типа показаны на рис. 4.22. Эти данные показывают, что действительно выполняется квадратичная зависимость $\theta \sim \lambda^2$. Такая зависимость была обнаружена многими авторами на самых

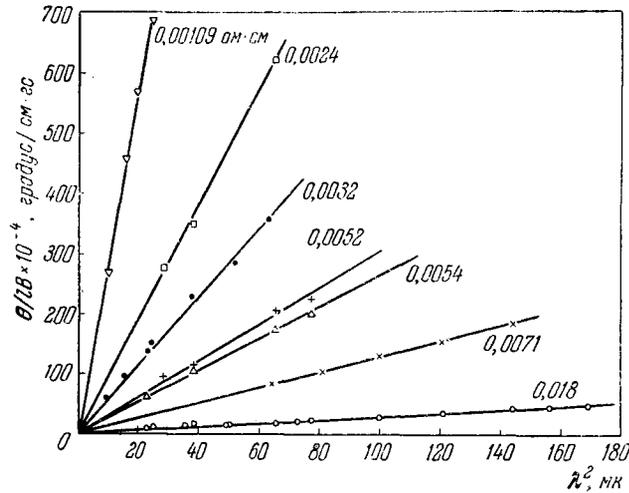


Рис. 4.22. Спектральная зависимость угла поворота плоскости поляризации света в образцах германия по данным [41].

Цифры на кривых — удельное сопротивление образцов при 300° К.

различных полупроводниковых материалах. Значительный интерес представляют данные изучения эффекта Фарадея, выполненные при различных температурах, которые мы изложим на основании работ [46,47]. Наиболее важным результатом этих работ явилось обнаружение температурной зависимости эффективной массы электронов. Экспериментальные данные из этих работ приведены на рис. 4.23 и 4.24.

Так как авторы работ [46, 47] ставили себе целью в основном изучение зависимости $m_n(T)$, а не самой величины m_n , то тщательным исследованиям подвергались лишь температурные зависимости величин θ , N и n , поскольку остальные величины в формуле (4.3.2) от

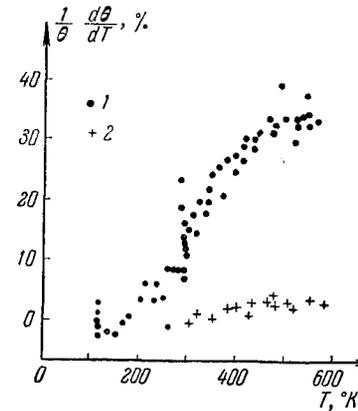


Рис. 4.23. Температурная зависимость угла поворота плоскости поляризации в образцах германия и кремния.

1 — германий $N = 5,8 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$;
2 — кремний $N = 3,7 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$
($T = 293^\circ\text{K}$).

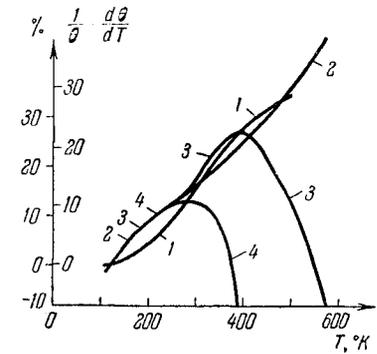


Рис. 4.24. Температурная зависимость угла поворота плоскости поляризации в образцах полупроводников АІІІВ (при $T = 293^\circ\text{K}$).

1; 2 — правая шкала: 1 — InSb, $N = 0,75 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$; 2 — GaAs, $N = 1,2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$; 3; 4 — левая шкала: 3 — InAs, $N = 2,9 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, 4 — InAs, $N = 3,3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$.

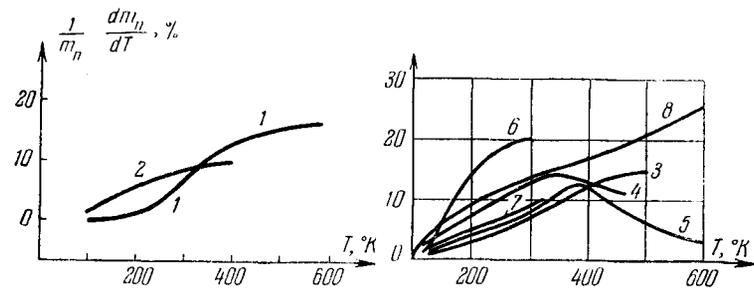


Рис. 4.25. Изменение эффективных масс электронов в образцах Ge, Si и АІІІВ по данным эффекта Фарадея.

Номера кривых соответствуют табл. 4.7

температуры не зависят (ростом длины образца l при этом пренебрегалось). Величина изменения эффективной массы с температурой определялась по формуле

$$\frac{1}{m_n} \frac{dm_n}{dT} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{N} \frac{dN}{dT} - \left[\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dT} + \frac{1}{n} \frac{dn}{dT} \right] \right\}. \quad (4.3.7)$$

Вычисленные таким образом значения $\frac{1}{m_n} \frac{dm_n}{dT}$ для различных полупроводников приведены на рис. 4.25, а характеристики соответствующих образцов указаны в таблице 4.7.

Таблица 4.7

Характеристики образцов, на которых получены данные рис. 4.25

№ образца	Полупроводник	N , см ⁻³ (при 293° К)	№ образца	Полупроводник	N , см ⁻³ (при 293° К)
1	Ge	$5,8 \cdot 10^{17}$	5	InAs	$2,9 \cdot 10^{17}$
2	Si	$3,7 \cdot 10^{17}$	6	InP	$7,3 \cdot 10^{16}$
3	InSb	$7,5 \cdot 10^{17}$	7	InP	$2,4 \cdot 10^{17}$
4	InAs	$3,7 \cdot 10^{16}$	8	GaAs	$1,2 \cdot 10^{17}$

ГЛАВА 5

ПОВЕДЕНИЕ ЛЕГИРУЮЩИХ ПРИМЕСЕЙ В СИЛЬНО ЛЕГИРОВАННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ

§ 5.1. Предварительные замечания

Большинство задач, интересующих физику полупроводников, связано с влиянием малых концентраций примесей на свойства кристалла. При этом атомы примесей в решетке твердого тела находятся на достаточно больших расстояниях друг от друга, и поэтому в таких слабо легированных полупроводниках в первом приближении пренебрегают их взаимодействием. При сильном легировании такое взаимодействие в принципе уже может проявиться. Кроме того, при сильном легировании возможны и обычные виды взаимодействия примесей с атомами основного вещества и со структурными дефектами.

Совершенно очевидно, что даже при максимальной возможной растворимости примеси в кристалле эта система еще может быть уподоблена сильно разбавленному раствору. Действительно, из рис. 5.1 и 5.2 видно, что максимально возможные концентрации

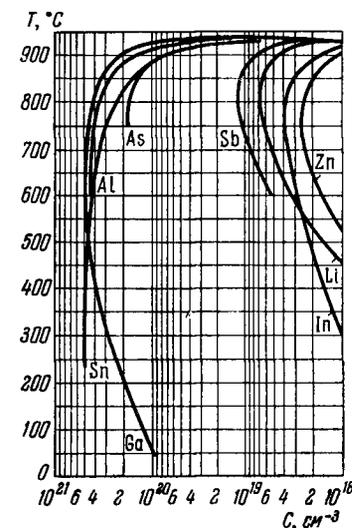


Рис. 5.1. Растворимость примесей в твердом германии по данным [1].

донорных легирующих примесей в германии равны примерно $2 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$, а в кремнии — $2 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-3}$, что составляет 0,4 и 3,0 ат. % соответственно. Поэтому и в случае легированного полупроводника для рассмотрения поведения примесей могут быть использованы некоторые законы

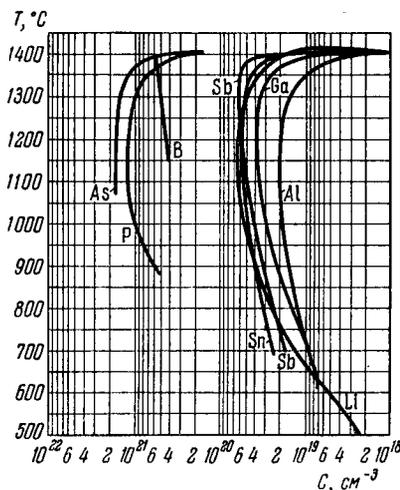


Рис. 5.2. Растворимость примесей в твердом кремнии по данным [1].

компонент, участвующих в реакции; $K_C(T)$ — константа равновесия реакции, которая зависит только от температуры.

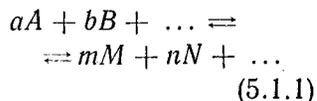
Из закона действующих масс вытекает важное следствие: в условиях равновесия системы концентрации всех веществ, участвующих в реакции, связаны между собой таким образом, что изменение концентрации одного из них повлечет изменение концентраций и остальных. Это изменение будет происходить до тех пор, пока константа равновесия не примет прежнее значение.

Закон (5.1.2), полученный для разбавленных растворов слабых электролитов, может быть применен и в случае более концентрированных растворов, если ввести понятие активности. Под активностью a_i принято понимать отношение давления пара p_i рассматриваемой компонент

физической химии идеальных растворов.

Такими законами являются

1. Закон действующих масс, который основан на химической термодинамике и для реакции типа



записывается в виде

$$\frac{C_M^m C_N^n}{C_A^a C_B^b \dots} = K_C(T), \quad (5.1.2)$$

где $C_A, C_B, \dots, C_M, C_N, \dots$ — концентрации

в данном растворе к давлению пара p_i^0 чистой компоненты при одной и той же температуре:

$$a_i = \frac{p_i}{p_i^0}. \quad (5.1.3)$$

2. Закон Рауля, который представляет собой соотношение, связывающее относительное понижение упругости пара над раствором и относительную концентрацию (молярную долю) растворенного вещества в растворе:

$$\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{n}{N + n}, \quad (5.1.4)$$

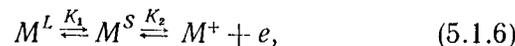
где n и N — число молей растворенного вещества и растворителя соответственно.

3. Закон Генри, который формулирует соотношение, связывающее растворимость газа в жидкости x при постоянной температуре с его давлением p в виде

$$x = \Gamma p, \quad (5.1.5)$$

где Γ — константа Генри.

Основные виды межпримесных взаимодействий. В слабо легированных кристаллах основным видом взаимодействия является донорно-акцепторное. Природа этого взаимодействия связана с кулоновским притяжением разноименных ионов [2]. Рассмотрим растворенное вещество M , находящееся в равновесии и с полупроводником, и с внешней фазой, в которой активность вещества M постоянна. Тогда можно написать следующие реакции:



где M^L и M^S — неионизованные частицы соответственно во внешней и в твердой фазах, а M^+ — ионизованное вещество в твердой фазе.

По закону действующих масс будем иметь:

$$K_1 = \frac{N_{M^S}}{N_{M^L}}, \quad (5.1.7)$$

$$K_2 = \frac{n N_{M^+}}{N_{M^S}}, \quad (5.1.8)$$

откуда следует:

$$nN_{M^+} = N_{M^+}K_1K_2 = K_3. \quad (5.1.9)$$

Из выражения (5.1.8) видно, что всякое увеличение концентрации электронов будет по закону действующих масс понижать растворимость вещества M в твердой полупроводниковой фазе. Наоборот, уменьшение концентрации электронов, которое имеет место при введении акцепторов, будет повышать растворимость вещества M .

Более строгая оценка влияния акцепторов на растворимость доноров была получена в [3] при использовании (5.1.9) и соотношения

$$np = n_i^2, \quad (5.1.10)$$

справедливого в отсутствии вырождения электронного и дырочного газов.

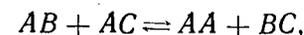
Другое проявление того же донорно-акцепторного взаимодействия заключается в образовании ионных пар. Этот эффект был рассчитан в [4]. При этом проводилась аналогия полупроводника с водным раствором, в котором также наблюдается образование ионных пар. Различия обусловлены меньшими диэлектрическими постоянными кристаллов и более сильным сближением ионов в твердом теле по сравнению с водным раствором.

В сильно легированных кристаллах донорно-акцепторное взаимодействие практически исключено, так как в таких кристаллах даже специальными технологическими усилиями невозможно добиться высокой степени компенсации. В сильно легированных кристаллах отсутствует практически и такой вид взаимодействия, который описывается обычным ионизационным равновесием

$$D^0 \rightleftharpoons D^+ + e. \quad (5.1.11)$$

Действительно, как было показано в предыдущей главе, при сильном легировании все атомы легирующей примеси ионизованы и никаким изменением температуры эту реакцию сдвинуть влево нельзя. Этот вид взаимодействия в сильно легированных полупроводниках может иметь место лишь для примесей, образующих глубокие уровни в запрещенной зоне.

Малоизученные взаимодействия. В литературе имеется ряд высказываний о некоторых взаимодействиях, проявление которых, на наш взгляд, как раз только и возможно при сильном легировании. Это прежде всего образование соединений в полупроводниках. Телтов высказал предположение [5], что в кремнии может протекать образование пары из двух донорных ионов, таких как фосфор, с образованием молекулы, аналогичной молекуле водорода H_2 , т. е. образование соединения типа $P^+ : P^+$. Однако, как указано в [6], сообщений, подтверждающих существование такой ассоциации, нет. В той же работе говорится о том, что Фриш теоретически предсказал образование полимерных агрегатов BC по реакции



где компоненты B и C растворены в веществе A .

Считая, что A и B подвижны и внутримолекулярная реакция отсутствует, он нашел, что при концентрации пар 10^{19} см^{-3} и коэффициенте диффузии $10^{-10} \text{ см}^2/\text{сек}$ возможно образование агрегатов радиусом около 2000 \AA . Экспериментальных подтверждений существования в полупроводниках подобных полимерных образований также не имеется.

Также мало изучены взаимодействия типа вакансии — вакансии, вакансии — атом и вакансии — ион. В то же время при сильном легировании эти виды взаимодействия могут играть большую роль. Это предположение прежде всего обусловлено существенным увеличением концентрации вакансий при легировании кристалла. Так, Лонжини и Грин [7] указали, что для случая полной ионизации акцепторных вакансий и при таких температурах, когда $N_d \gg n_i$, имеет место соотношение

$$\frac{N_V}{N_{Vi}} \approx \frac{N_d}{n_i}, \quad (5.1.12)$$

где N_{Vi} и N_V — концентрации вакансий акцепторного типа в чистом полупроводнике и в кристалле с донорами соответственно.

Отсюда видно, что при введении достаточно большого числа доноров число равновесных вакансий может повышаться на несколько порядков. Доказательство этого положения было получено в [8] при изучении самодиффузии

германия в кристаллах, сильно легированных мышьяком ($N_{As} = 6 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$), и для сравнения в кристаллах с примесью галлия ($N_{Ga} = 5 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$). Авторы [8] нашли, что максимальная диффузия наблюдалась в кристаллах n -типа, а в Ge p -типа она была даже медленнее по сравнению с чистым полупроводником.

Постановка исследований поведения примесей в сильно легированных полупроводниках. При проведении исследований кинетических эффектов в сильно легированных монокристаллах автором с сотрудниками были обнаружены некоторые аномалии в свойствах изученных образцов. Примером такой аномалии является исследование удельной электропроводности образцов германия, сильно легированного фосфором. До проведения наших опытов имелось указание [9] о совпадении зависимости удельного сопротивления от концентрации носителей для германия, легированного фосфором и мышьяком. С другой стороны, в [10] при $n \geq 10^{19} \text{ см}^{-3}$ эти зависимости оказались несовпадающими. Такое противоречие побудило автора провести тщательное исследование электропроводности германия с примесью фосфора и сравнить полученные данные с электропроводностью германия, легированного мышьяком. Результаты измерений [11] представлены на рис. 5.3. Прямая 1 на этом рисунке соответствует образцам германия, легированного мышьяком. Экспериментальные точки на ней отсутствуют во избежание загромождения рисунка (со всеми экспериментальными точками эта прямая имеется на рис. 3.15).

Основной результат заключается в том, что точки, соответствующие германию с фосфором, легли на ту же линию, за исключением одного образца с концентрацией $3,8 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$. Его удельная электропроводность совпала с кривой, приведенной по данным работы [10]. Таким образом, за исключением одного образца, в этой работе были получены результаты, согласующиеся с данными, опубликованными в [9] и не совпадающие с данными исследования [10]. Трудно было предположить, что в какой-либо из цитированных работ измерения ошибочны. Действительно, проведенное затем автором тщательное обследование большого числа образцов германия, легированного фосфором, показало существование некоего естественного раз-

броса значений ρ у образцов с одной и той же концентрацией носителей заряда. Подавляющая часть образцов имела значения ρ , совпадающие либо с прямой 1, либо с прямой 2 на рис. 5.3, но были и такие образцы, удельное сопротивление которых имело промежуточные значения.

Характерно, что подобные образцы проявляли аномальные свойства и в других кинетических эффектах. Так,

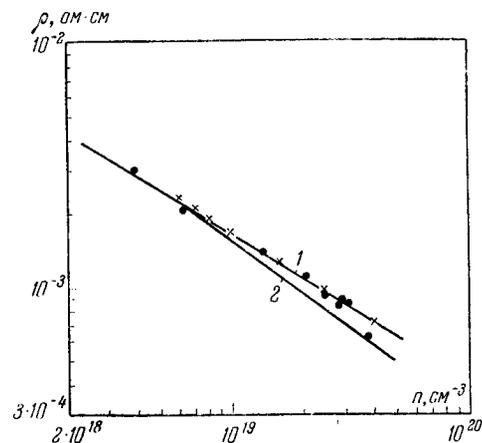


Рис. 5.3. Зависимость удельного сопротивления сильно легированного германия от концентрации электронов.

1 — германий с мышьяком; 2 — германий с фосфором (по данным [10]); точки — германий с фосфором и крестики — германий с мышьяком по данным [11].

например, они обладали несколько меньшими значениями дифференциальной термо-ЭДС, о чем упоминалось в работе [12]. Аналогичные аномалии наблюдались и в ряде образцов сильно легированного кремния, что было также замечено автором в работе [13].

Естественно было предположить, что наблюдаемые аномалии связаны с природой и поведением самих примесей при сильном легировании.

Привлечение таких разнообразных методов исследования, как радиоактивационный, масс-спектральный и металлографический анализы примесного состава кристаллов,

однозондовый метод исследования неоднородности, инфракрасное просвечивание образцов, исследование решеточной теплопроводности, предела упругости, позволили в значительной степени подтвердить предположение о природе наблюдаемых аномалий.

§ 5.2. Экспериментальные результаты исследования поведения примесей в сильно легированных полупроводниках

Обнаружение политропии легирующих примесей. Для объяснения перечисленных в § 5.1 аномалий в свойствах сильно легированных полупроводников необходимо было допустить, что при большом уровне легирования в ряде образцов концентрация носителей, измеренная по эффекту Холла, меньше истинной концентрации примеси в образце. Такое несоответствие может быть в принципе обусловлено несколькими причинами, а именно: существованием холл-фактора, значение которого больше единицы; неполной ионизацией атомов легирующей примеси и присутствием в кристалле некоторой доли атомов легирующей примеси в форме, не проявляющей донорных свойств.

Первое из этих предположений следовало отклонить, так как анализ холл-фактора \mathcal{A} даже с учетом смешанного механизма рассеяния, выполненный в [14] и приведенный в главе 3, показал, что холл-фактор в сильно легированных образцах почти не отличается от единицы.

Второе предположение также следует исключить из рассмотрения, так как известно (см. гл. 1), что при сильном легировании мелкие локальные уровни примесей в запрещенной зоне отсутствуют и, следовательно, неполная ионизация атомов легирующей примеси не может иметь место.

Оставалось изучить третье предположение, т. е. опять-таки проверить выполнимость ионизационного равенства

$$N^0 = N^+ + e, \quad (5.2.1)$$

где N^0 и N^+ — концентрации нейтральных и ионизованных атомов легирующей примеси соответственно.

Это соотношение ранее неоднократно проверялось экспериментально. Так, было найдено [15], что в диапазоне концентраций легирующих примесей от 10^{15} до $5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ оно достаточно хорошо выполняется. В некоторых ранних работах, например в [16], было обнаружено несоответствие количества свободных носителей содержанию примеси при

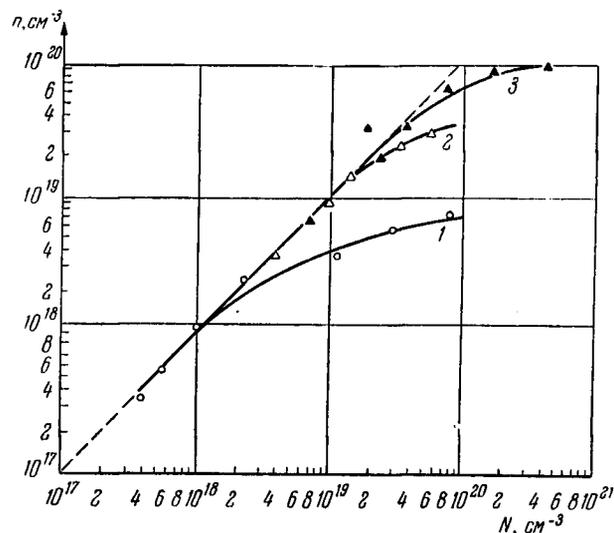


Рис. 5.4. Сопоставление концентраций носителей и примесей As и Sb в германии и кремнии.

Кривые на рисунке соответствуют: 1 — Ge — Sb; 2 — Ge — As; 3 — Si — As.

сильном легировании, но этот факт объяснялся, как правило, недостаточной точностью химических анализов, с которыми сравнивались данные холловских измерений.

Для проверки (5.2.1) в ряде сильно легированных монокристаллов германия и кремния автором было проведено параллельное определение холловской концентрации носителей и концентрации примесей радиоактивационным методом в его гамма-спектрометрической форме без разрушения образца. Результаты анализа этими методами сопоставлены на рис. 5.4. На этом рисунке по оси ординат отложена концентрация носителей, а по оси абсцисс — концентрация

примесей. Видно, что во всех трех системах «полупроводник — примесь» имеет место отклонение экспериментальных данных от прямой, проведенной под углом 45° , т. е. общая концентрация легирующей примеси, начиная с некоторых пороговых значений, превышает концентрацию носителей заряда. Разумеется, пороговые значения концентрации

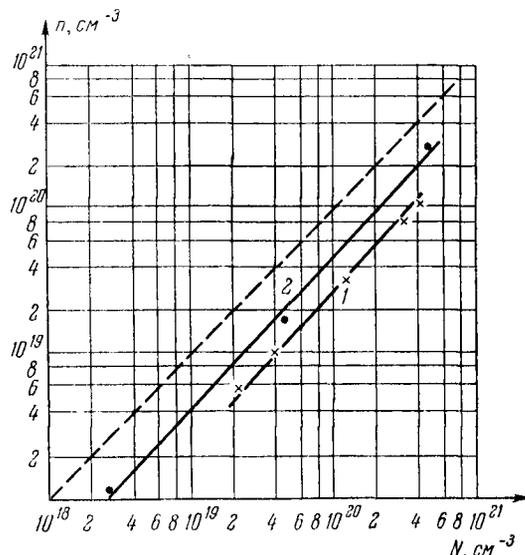


Рис. 5.5. Сопоставление концентраций носителей и примеси фосфора в кремнии.

1 — по данным автора; 2 — по данным [16].

и величина отклонения от прямой на рис. 5.4 зависят от конкретных условий выращивания кристаллов. Однако в общем случае существует определенная корреляция с пределом растворимости. Чем выше предел растворимости примеси, тем при больших концентрациях наступает отклонение от равенства (5.2.1). Важно отметить, что это отклонение наступает задолго до достижения предела растворимости примеси в полупроводнике.

Несколько иной характер связи n с N имеет место в системе Si—P. Данные холловских измерений с радиоактивным определением фосфора для этой системы

показаны на рис. 5.5. Видно, что значение концентраций носителей отличается от содержания атомов фосфора на постоянную величину. Характерно, что ранние исследования [16], выполненные с привлечением обычного химического анализа, также привели к аналогичному результату. Отличие от данных автора заключается лишь в абсолютном значении расхождения, которое, безусловно, связано с конкретными режимами выращивания монокристаллов.

К сожалению, радиоактивный анализ не позволяет определять фосфор в германии, поэтому не имелось возможности определить концентрацию атомов фосфора в тех образцах, результаты исследования которых обсуждались в § 5.1 (рис. 5.3). Анализировать же фосфор в Ge каким-либо другим методом вряд ли целесообразно из-за низкой точности анализов. Полученные результаты убедительно показывают, что при высокой концентрации примеси в кристалле не вся она входит в твердый раствор замещения. Часть примеси находится в состояниях, где она не проявляет донорных свойств. Таким образом, при большом уровне легирования, легирующая примесь существует в кристалле одновременно в нескольких формах. Такое «многообразие» было названо автором *политропией* примеси. Аналогичный эффект в монокристаллах германия с примесью мышьяка был замечен в [10]. В образцах Si—As, Si—Sb, Ge—Sb подобные явления наблюдались впервые в работах [17, 18].

Обнаружение политропии примесей в сложных полупроводниках. Несколько позднее политропия доноров была обнаружена в арсениде галлия с примесью селена [19] и в нашей работе [20] — в арсениде галлия с примесью теллура. При этом селен определялся нефелометрическим анализом, а теллур — с помощью полярографического анализа на ртутном электроде.

Контрольными опытами было установлено, что чувствительность этого метода составляет примерно $4 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ теллура, а погрешности определений не превышают 10%.

На рис. 5.6 хорошо видно, что и в случае теллура и в случае селена обнаруживается явление политропии. Внешне различие заключается лишь в крутизне кривых и в величинах пороговой концентрации, начиная с которой этот эффект проявляется.

Ионизационное равновесие в полупроводниках, легированных акцепторами. Имеет смысл остановиться на сопоставлении концентраций, найденных из эффекта Холла и химическим анализом в случае кристаллов p -типа. В работах [19, 21] попутно с изучением подвижности и термо-ЭДС было найдено несоответствие между концентрациями дырок p и содержанием акцепторов N , выражаемое неравенством $p > N$, т. е. противоположное тому, которое было найдено

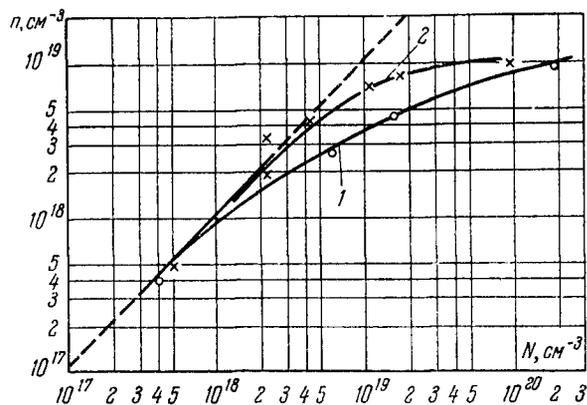


Рис. 5.6. Кривые, иллюстрирующие явление политропии в арсениде галлия.
1 — GaAs + Se; 2 — GaAs + Te.

для доноров. Такое несоответствие было обнаружено в работах [21, 22] при определении N с помощью спектрального анализа в образцах германия, сильно легированного галлием. Автор использовал для исследования аналогичных образцов радиоактивационный анализ [23]. В результате оказалось, что даже в наиболее сильно легированных образцах ($N = 5 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$) расхождение между p и N не превышало 20%, а при меньших концентрациях оно еще ниже. Кстати, даже то незначительное расхождение, которое наблюдалось, было разного знака при многократных измерениях на одном и том же образце. Этот факт явно указывал на случайное происхождение различия в измеренных величинах.

Причина несовпадения наших результатов с данными работ [21, 22] заключается, по-видимому, в различном испарении анализируемой примеси из образца, в котором она находится в виде раствора, и из эталона, представляющего простую механическую смесь основного вещества и примеси, вводимой в эталон в виде окиси. Такая ошибка в спектральном анализе, как было показано в [24], устраняется при изготовлении эталона на основе графита. При этом происходит восстановление окисла анализируемой примеси углеродом и ее испарение из эталона приближается к условиям испарения из образца.

Позднее в работе [25] было установлено отсутствие расхождения между p и N и для GaAs p -типа, легированного цинком.

О термине «политропия». Необходимо отметить причины, побудившие ввести новый термин для эффекта существования легирующих примесей в нескольких формах. Действительно, на первый взгляд можно было воспользоваться известным понятием полиморфизма, аллотропии или, например, амфотерности.

Первые два понятия как известно, применяются для обозначения структурных различий веществ, например моноклинной и триклинной серы, красного и белого фосфора и т. п. Многоформие же легирующих примесей, хотя и может быть связано со структурными дефектами (дислокациями, вакансиями), но практически оно не меняет структуру основного кристалла. Поэтому использование терминов «полиморфизм» и «аллотропия» вложило бы в наблюдаемый эффект слишком определенный «структурный» смысл, который, возможно, и не столь велик в данном случае.

Понятие амфотерности означает двойственность. Оно применяется для описания существования элемента в одном соединении в виде катиона, а в другом — в виде аниона. В полупроводниках свойство амфотерности проявляет, например, золото. Поэтому понятие амфотерности в применении к эффекту многоформия ассоциировалось бы с разноименной зарядностью, хотя вторая форма существования легирующей примеси может быть и электрически неактивна. Более того, эта форма вообще может представлять соединение легирующей примеси с каким-либо третьим элементом, например с кислородом.

Возможные проявления политропии примесей. Политропия примесей в сильно легированных монокристаллах полупроводников может быть связана с различными факторами: образованием структурных комплексов ближнего порядка типа M_xA_y (M — полупроводник, A — примесь) в неупорядоченных твердых растворах; осаждением легирующей примеси на различных структурных дефектах, например, образованием «примесных атмосфер» на дислокациях; присутствием включений второй фазы; образованием специфических примесных субструктур типа ячеистой структуры [26]; присутствием атомов примеси в междоузлиях и т. д.

Рассмотрим последовательно главные из перечисленных факторов.

Комплексообразование. Из экспериментальных данных, представленных выше на рис. 5.4—5.6, можно попытаться получить сведения о той форме, в которой находится избыточная примесь, не проявляющая донорных свойств. Для этого предположим, что в кристалле имеет место равновесие между различными формами, в которых находится легирующая примесь. Рассмотрим наиболее вероятные реакции, приводящие к такому равновесию. При этом концентрацию атомов примеси, проявляющую донорные свойства, обозначим n , т. е. n равно концентрации носителей, а полную концентрацию атомов легирующей примеси обозначим N , и она равна той, которая определяется химическим анализом. Простейшая реакция будет иметь вид:



где A — химический символ легирующей примеси; m — число атомов легирующей примеси в комплексе (квазимолекуле), который не проявляет донорных свойств.

Константа равновесия этой реакции K_m будет:

$$K_m = \frac{[A_m]}{[A_1]^m}. \quad (5.2.3)$$

Полная концентрация легирующей примеси N определится суммой

$$N = [A_1] + [A_m],$$

или, учитывая, что $[A_1] \equiv n$, и пользуясь (5.2.3), получим:

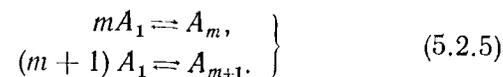
$$N = n(1 + K_m n^{m-1}).$$

Это выражение удобно привести к виду

$$\lg \left(\frac{N}{n} - 1 \right) = \lg K_m + (m-1) \lg n. \quad (5.2.4)$$

Таким образом, если явление политропии обусловлено существованием кроме атомов примеси в виде A_1 еще и комплексов типа A_m , то между N и n должна существовать зависимость (5.2.4). Она показывает, что, откладывая в логарифмическом масштабе величины $\frac{N}{n} - 1$ в функции от n , мы получим прямую линию с углом наклона, тангенс которого равен $m-1$.

Далее, представляет интерес рассмотреть две реакции, действующие одновременно:



В этом случае полная концентрация N будет:

$$N = n + mK_m n^m + (m+1)K_m K_{m+1} n^{m+1},$$

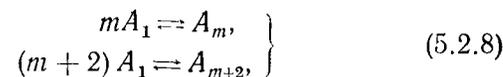
а после преобразования получим:

$$\frac{\frac{N}{n} - 1}{n^{m-1}} = mK_m \left(1 + \frac{m+1}{m} K_{m+1} n \right). \quad (5.2.6)$$

Найти величину m по экспериментальным данным N и n в этом случае можно с помощью вспомогательной кривой

$$y = 1 + z. \quad (5.2.7)$$

Действительно, построив в логарифмическом масштабе эту кривую и наложив на нее экспериментальные кривые (5.2.6), вычисленные при разных значениях m , можно (при наилучшем совпадении) по сдвигу кривых по осям найти и m , и mK_m . Точно так же можно рассмотреть и другие возможные реакции, например,



и любые другие такого типа.

Нельзя исключить из рассмотрения и случай протекания всех реакций типа (5.2.2) одновременно, т. е.

$$\left. \begin{aligned} A_1 &\rightleftharpoons A_1^*, \\ 2A_1 &\rightleftharpoons A_2, \\ 3A_1 &\rightleftharpoons A_3, \\ \dots & \\ mA_1 &\rightleftharpoons A_m, \\ \dots & \\ \infty A_1 &\rightleftharpoons A_\infty. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.9)$$

Полная концентрация легирующей примеси будет:

$$N = \sum_{m=1}^{\infty} mK_m n^m. \quad (5.2.10)$$

Если предположить, что вероятность образования A_m падает с увеличением номера m , то можно показать, что (5.2.10) перейдет в

$$N = \sum_{m=1}^{\infty} m(K'n)^m, \quad (5.2.11)$$

где

$$K' = \frac{K_{m+1}}{K_m}.$$

Выражение (5.2.11) есть не что иное, как геометрическая прогрессия, выражение для суммы которой позволяет получить:

$$\lg\left(1 - \sqrt{\frac{n}{N}}\right) = \text{const} + \lg n. \quad (5.2.12)$$

Это — уравнение прямой линии с углом наклона 45° при построении зависимости $\left(1 - \sqrt{\frac{n}{N}}\right)$ от n в логарифмическом масштабе.

Таким образом, вид комплексов A_m можно попытаться вскрыть, обрабатывая кривые рис. 5.4—5.6 по формулам (5.2.4), (5.2.6) и (5.2.12). В результате такой попытки оказалось, что для германия и кремния кривые рис. 5.4 хорошо подчиняются формуле (5.2.4). Соответствующие данные приведены на рис. 5.7. Для системы Ge—Sb,

Ge—As и Si—As (прямые 1, 2, 3) тангенс угла наклона прямых оказался равен трем, а следовательно, $m = 4$. Это значит, что в германии и кремнии явление политропии связано с присутствием в кристалле, кроме обычных атомов Sb и As в виде раствора замещения, еще и комплексов Sb_4 и As_4 . Отсутствие других комплексов, например Sb_2 , As_2 , Sb_3 , As_3 и т. д., легко доказывается тем, что обработка кривых рис. 5.4 не удовлетворяет закону (5.2.12), который должен был выполняться в этом случае.

На том же рис. 5.7 приведена обработка экспериментальных данных для системы Si—P (прямая 4), выполненная также по формуле (5.2.4). Так как тангенс угла наклона в этом случае оказался равным нулю, то величина m равна единице. Это, в свою очередь, свидетельствует о том, что атомы фосфора, не проявляющие донорных свойств, здесь одноатомны. Они могут присутствовать в форме, например, атомов внедрения.

Попытка обработать кривые рис. 5.6 показала, что наилучший результат получается при использовании выражения (5.2.6). На рис. 5.8 построена вспомогательная кривая 1, передающая формулу (5.2.7). Для примеси Se в арсениде галлия, задаваясь поочередно значениями $m = 1, 2, 3, \dots$, мы убедились, что более всего подходит величина $m = 2$. Полученная при этом зависимость

$$\left(\frac{N}{n} - 1\right)/n^{m-1} = f(n) \quad (5.2.13)$$

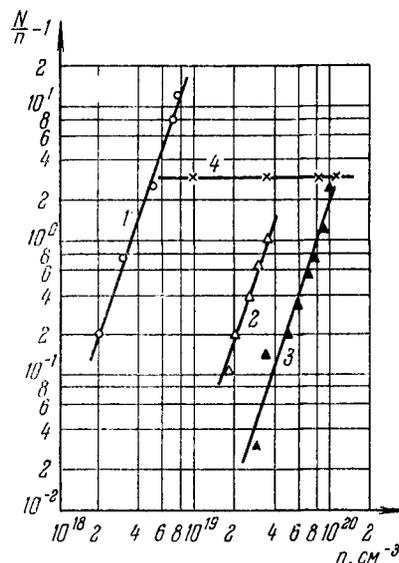


Рис. 5.7. Результаты обработки кривых рис. 5.4. и 5.5.

представлена на рис. 5.8 в виде кривой 2. Перемещая эту кривую параллельно осям координат, удалось вполне удовлетворительно совместить ее с кривой 1. На том же рисунке приведена кривая 3, получающаяся в предположении $m = 1$. Перемещая эту кривую вдоль осей, нетрудно убедиться, что ее не удастся совместить с кривой 1. Еще худшие результаты получаются, если предположить $m \geq 3$.

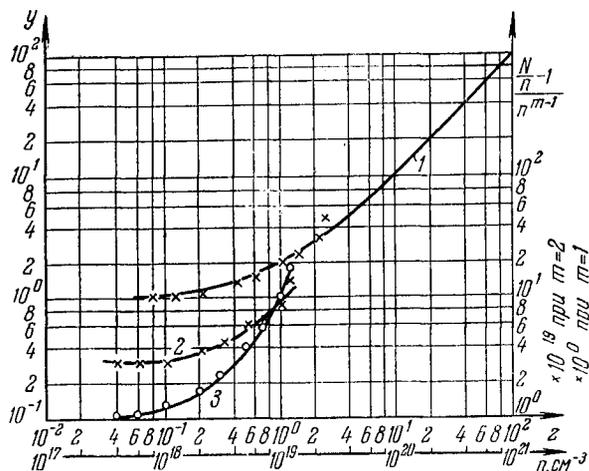


Рис. 5.8. Результаты обработки кривых рис. 5.6.

Точно так же не удалось совместить экспериментальную и вспомогательную кривые в случае построений, соответствующих различным m для реакции типа (5.2.8).

Таким образом, для системы GaAs—Se приходится считать, что селен в кристалле GaAs находится в трех видах: Se_1 , Se_2 и Se_3 .

Атомарный селен, очевидно, является обычным раствором замещения и проявляет при этом донорные свойства. Образования Se_2 и Se_3 , скорее всего, находятся в виде соединений типа $GaSe_2$ и Ga_2Se_3 . Именно присутствием в GaAs соединений галлия с селеном пытались объяснить кривую рис. 5.6 авторы работы [19]. Попытка аналогичным образом обработать результаты для системы GaAs—Te не привела к положительному результату. Причина этого пока остается неясной.

Выполненный в данном разделе анализ причин политропии следует рассматривать лишь как первое приближение, которое если и не доказывает существования комплексов в кристалле, то во всяком случае показывает, что их присутствие может объяснить расхождение в концентрациях, найденных химическим анализом и из измерений коэффициента Холла.

Прямое подтверждение образования в кристаллах комплексов, хотя и несколько иного типа, было получено при исследовании масс-спектров кремния, которые целесообразно рассмотреть подробнее.

Масс-спектральные исследования сильно легированных монокристаллов кремния и германия [27, 28]. На масс-спектрограммах наряду с линиями, отвечающими ионам

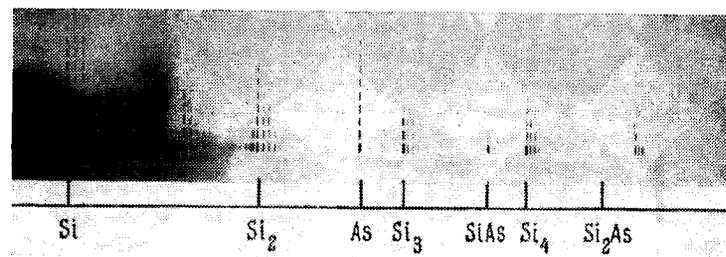


Рис. 5.9. Типичная масс-спектрограмма монокристалла кремния, легированного мышьяком.

As^+ , была зафиксирована линия, принадлежащая ионам $(SiAs_2)^+$, но ее интенсивность была чрезвычайно слабой, на уровне $10^{-8}\%$, т. е. на границе чувствительности прибора.

В спектре масс наблюдались четкие линии, соответствующие ионам $(SiAs)^+$, $(Si_2As)^+$ и $(Si_3As)^+$. Интенсивность линий для отдельных ионов убывала в порядке их перечисления. Одна из таких спектрограмм показана для примера на рис. 5.9. Кроме таких комплексов в масс-спектре кремния обнаружены линии, отвечающие сложным образованиям типа Si_m , где $m = 1, 2, 3, \dots, 7$, которые в дальнейшем мы будем именовать *кластерами*. Аналогичные кластеры обнаружены и в масс-спектрах германиевых образцов. В масс-спектре образцов германия с мышьяком

присутствуют линии с $\frac{m}{e} = 146$. Однако их происхождение нельзя однозначно приписывать ионам комплекса GeAs, так как на эту линию накладывается линия от ионов изотопов $Ge^{72}Ge^{74}$ с той же массой.

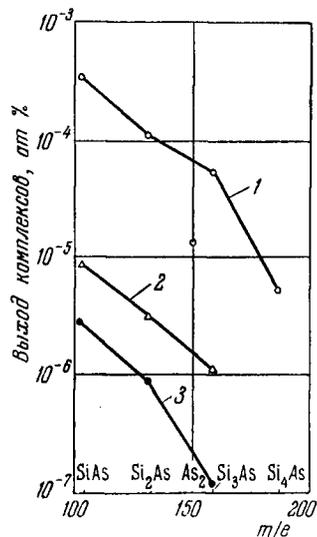


Рис. 5.10. Содержание комплексов в масс-спектрах монокристаллов кремния, сильно легированных мышьяком.

Концентрация носителей n , $см^{-3}$:
1 — $9,6 \cdot 10^{19}$; 2 — $7,7 \cdot 10^{19}$; 3 — $2,7 \cdot 10^{19}$.

Кластеры типа Si_m обнаруживались и другими авторами, анализирующими полупроводники с помощью масс-спектрографа типа MS-7. Так, в [29] указывалось, что кластеры образуются в искре ионного источника, но склонность к их образованию у различных веществ разная.

В нашей работе [27] специальными экспериментами было установлено, что комплексы и кластеры все же в большей мере отражают реальную структуру исследуемого кристалла. Так, например, изменение режимов работы ионного источника не влияло на выход этих образований; растворение образцов в смеси плавиковой и азотной кислот с последующим нанесением продуктов на графитовые электроды приводило к исчезновению в спектре линий комплексов и кластеров, присутствовавших в спектре исходного кристалла.

Кроме того, предварительная термообработка образцов до анализа приводила, при прочих равных условиях, к изменению концентрации кластеров и комплексов, регистрируемых масс-спектрометром.

Представлялось интересным изучить выход комплексов и кластеров в зависимости от степени легирования полупроводника. Такое исследование было проведено на образцах кремния [27, 28].

На рис. 5.10 приведены данные концентрационной зависимости выхода комплексов SiAs, Si₂As и Si₃As при

анализе сильно легированных мышьяком кристаллов кремния. При концентрации носителей $n < 10^{18} см^{-3}$ суммарная концентрация комплексов мала и составляет не более 10^{-7} ат. %. С возрастанием содержания мышьяка в кристалле

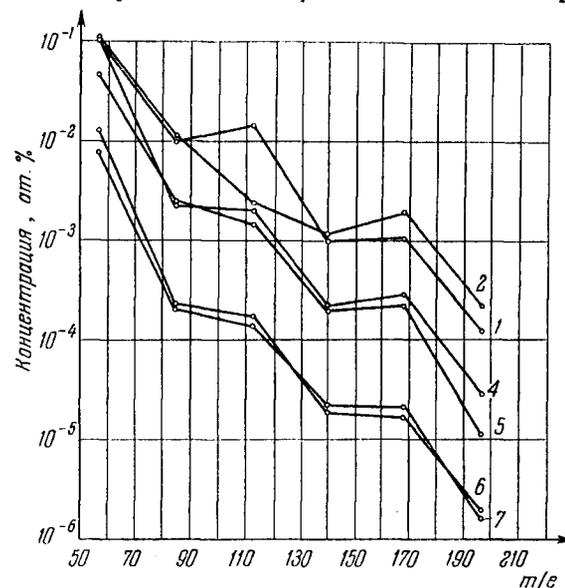


Рис. 5.11. Содержание кластеров в масс-спектрах монокристаллов кремния.

№ образца	Концентрация электронов, $см^{-3}$	№ образца	Концентрация электронов, $см^{-3}$
1	$1 \cdot 10^{15}$	4	$2,7 \cdot 10^{19}$
2	$1,07 \cdot 10^{17}$	5	$9,6 \cdot 10^{19}$
		6,7	$\sim 1 \cdot 10^{20}$

выход комплексов увеличивается и достигает $3 \cdot 10^{-4}$ ат. % при $n \sim 1 \cdot 10^{20} см^{-3}$. В образце кремния, содержащем максимальное количество мышьяка, кроме указанных выше комплексов зарегистрирована линия $\frac{m}{e} = 150$, соответствующая ионам As_3^+ ($\sim 10^{-5}$ ат. %).

Выход кластеров также в значительной степени зависит от концентрации легирующей примеси в кристалле. Однако

эта зависимость противоположна той, что наблюдается для комплексов. Из рис. 5.11 хорошо видно, что при изменении содержания примеси от 10^{15} см^{-3} (кривая 1) до 10^{17} см^{-3} (кривая 2) концентрация кластеров практически не меняется. При дальнейшем росте степени легирования содержание кластеров начинает существенно уменьшаться и при $n = 10^{20} \text{ см}^{-3}$ (кривые 6, 7) максимальное различие в концентрациях кластеров составляет почти два порядка. Еще большее увеличение концентрации мышьяка снова приводит к увеличению концентрации кластеров. Аналогичная зависимость наблюдается и для образцов германия.

При выполнении масс-спектральных исследований кремния была отмечена корреляция в концентрационной зависимости выхода кластеров и комплексов со структурой монокристаллов: при малой концентрации мышьяка кристаллы кремния содержат дислокации и при этом наблюдается большой выход кластеров, но комплексы отсутствуют. При концентрации мышьяка около $(4 \div 5) \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ дислокации исчезают, несколько снижается выход кластеров и в масс-спектре появляются комплексы типа SiAs. Эта картина проявляется еще более четко при дальнейшем увеличении содержания мышьяка вплоть до концентрации, равной 10^{20} см^{-3} . При этом в кристаллах вновь появляются дислокации, возрастает снова выход кластеров, уменьшается выход комплексов, но регистрируются образования типа As_2 .

Совокупность приведенных экспериментальных данных позволяет сделать определенный вывод о существовании тесной связи между образованием комплексов и кластеров с особенностями структуры монокристаллов.

Включения второй фазы. Следующим естественным шагом в изучении политропии примесей должна была явиться попытка прямого определения в кристаллах комплексов или химических соединений, которые могут находиться в них в виде включений второй фазы. Такие включения при выращивании сильно легированных монокристаллов могут образовываться либо непосредственно в процессе кристаллизации, либо в процессе охлаждения выращенного кристалла в результате распада пересыщенного твердого раствора. Образование пересыщенных твердых растворов в нашем случае маловероятно: изученные примеси обла-

дают ретроградной растворимостью в германии и кремнии, при этом растворимость их при низких температурах, как правило, выше, чем при температуре плавления основного компонента [1]. И действительно, длительная термообработка при 400°C монокристаллов кремния, легированных фосфором и мышьяком, до концентраций $\sim 1 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$ не приводит к уменьшению концентрации носителей заряда в них, которое должно было бы происходить, если бы твердые растворы были пересыщенными. Для образования включений второй фазы непосредственно в процессе кристаллизации, как это следует из вида диаграмм состояния германия и кремния с легирующими элементами V группы, содержание легирующей примеси в системе должно быть достаточно высоким, чтобы дать расплав близкого к эвтектическому составу. Например, в системах Ge—As и Si—As, где образуются соединения, расплав эвтектического состава содержит соответственно 41 и 40,5 ат. % мышьяка; еще выше содержание легирующей добавки в расплавах эвтектического состава для систем Ge—Sb и Si—Sb.

Концентрации такого порядка в практических случаях выращивания сильно легированных монокристаллов германия и кремния могут достигаться лишь при крайне неоднородном легировании.

Возможность присутствия включений второй фазы изучалась на примере сильно легированных мышьяком, сурьмой и алюминием монокристаллов кремния. Металлографический анализ кристаллов, легированных As, после травления в хромовом травителе [30] показал, что до концентраций носителей заряда $(6 \div 7) \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ образцы имеют монокристаллическую структуру с характерным для выращенных по методу Чохральского слитков периодическим распределением примесей в объеме по «полосам роста». При более высоких концентрациях в кристаллах появляется ячеистая субструктура, которая при $n > 1,5 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$ сменяется поликристаллической структурой. В кристаллах, легированных Sb, ячеистая субструктура наблюдается уже при $n \sim 6 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$, однако при дальнейшем увеличении концентрации область распространения ячеистой структуры мала и наблюдается резкий переход к поликристаллической структуре. В монокристаллах с Al ячеистая субструктура отсутствует, а переход

к поликристалличности происходит через многократное двойникование, которое начинается уже в образцах с концентрацией дырок, равной примерно $4 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$. Во всех исследованных кристаллах по мере приближения к области поликристаллической структуры наблюдается увеличение плотности дислокаций. Особенно резко плотность дислокаций возрастает в кристаллах, легированных алюминием, имеющим наименьший коэффициент распределения. Наряду с дислокационными ямками травления в монокристаллах с Al и Sb наблюдались глубокие ямки травления неизвестного происхождения гораздо больших размеров. Образование таких ямок может быть обусловлено наличием в кристаллах включений второй фазы. Для выявления таких включений исследуемые образцы обрабатывались в специально подобранных избирательных травителях, которые, слабо или совсем не действуя на кремний, должны были хорошо растворять предполагаемые включения: 5%-ный раствор NaOH при комнатной температуре для образцов с Al, смесь кислот HCl : HNO₃ (3 : 1) при комнатной температуре для образцов с Sb, кипящий раствор HCl (1 : 1) для образцов с As.

Включения второй фазы хорошо обнаруживаются при инфракрасном просвечивании образцов. Этим методом были обнаружены включения в сильно легированном кремнии с примесями алюминия и сурьмы. В кристаллах с Al эти включения крупнее и выявляются уже в процессе оптической полировки образцов перед травлением. Последующее травление позволяет вскрыть многочисленные мелкие включения. Наиболее четко включения второй фазы в исследованных образцах выявляются при наблюдении в инфракрасном микроскопе. Распределение включений в объеме кристалла подчиняется определенным кристаллографическим закономерностям: в большинстве случаев плоскостями преимущественной сегрегации примесей являются плоскости (111).

Кроме того, на образцах измерялась микротвердость. Ее величина для образцов кремния без включений колеблется в пределах $950\text{--}1200 \text{ кг/мм}^2$, в местах включений в кристаллах, легированных Al, микротвердость снижается до 175 кг/мм^2 , что близко к литературным данным для микротвердости Si—Al эвтектики [31]. Это свидетельствует,

по-видимому, о том, что обнаруженные включения являются скоплением атомов алюминия. Значительные колебания микротвердости наблюдаются и в содержащих включения кристаллах, легированных Sb. Включения второй фазы в кристаллах кремния с Ga и Sb при сильном легировании были обнаружены и другими авторами [32, 33].

В монокристаллах кремния с мышьяком включения второй фазы нам выявить не удалось, хотя в этих кристаллах и наблюдалось весьма неравномерное распределение значений микротвердости.

Примесные атмосферы на дислокациях. Образование примесных атмосфер на дислокациях может происходить как за счет упругого взаимодействия полей напряжений атомов примеси и дислокаций, так и за счет электрического (кулоновского) взаимодействия. Примесные атмосферы на дислокациях были обнаружены при исследовании в инфракрасном свете монокристаллов кремния, сильно легированных сурьмой и алюминием [34]. Осаждение легирующих примесей на дислокациях привело к естественному декорированию дислокаций и сделало их видимыми при наблюдении в инфракрасном микроскопе. Сопоставление картин инфракрасной микроскопии с результатами травления на дислокации показало, что: 1) далеко не все дислокации декорируются легирующей примесью; 2) мелкие выпадения второй фазы, не связанные с дислокациями, образуют ямки, близкие по форме к дислокационным ямкам травления; 3) крупные включения второй фазы зарождаются, как правило, у дислокаций и уже отсюда распространяются в объеме кристалла.

Косвенные доказательства существования примесных атмосфер на дислокациях были получены и при исследовании картин травления монокристаллов кремния, сильно легированных фосфором и мышьяком. В бездислокационных монокристаллах, содержащих $10^{18}\text{--}10^{19} \text{ см}^{-3}$ мышьяка или фосфора были обнаружены очень четкие периодические неоднородности распределения примеси. При той же концентрации легирующей примеси в кристаллах, выращенных в тех же условиях, но содержащих $\sim 5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-2}$ дислокаций, эти неоднородности были выражены намного слабее. Уменьшение периодических неоднородностей в последнем случае можно, по-видимому, связать с осаждением части легирующей примеси на дислокациях, что приводит к

выравниванию концентрации легирующей примеси в соседних слоях монокристалла. Аналогичное явление было обнаружено в [35] при изучении слоистого распределения кислорода в слабо легированных монокристаллах кремния с разной плотностью дислокаций.

Примесные субструктуры. При поисках включений второй фазы в ряде образцов сильно легированного кремния



Рис. 5.12. Ячеистая структура в монокристалле сильно легированного кремния.

была обнаружена ячеистая структура (рис. 5.12) типа той, что описана в [25] для ряда легкоплавких металлов.

В полупроводниковых кристаллах ячеистая структура до появления работы [18] изучалась только для германия с примесью галлия [36]. Ячеистая структура является следствием ячеистого строения фронта кристаллизации.

Причина появления ячеистой структуры фронта, в свою очередь, состоит в том, что благодаря отеснению примеси вблизи фронта возникает градиент равновесной температуры кристаллизации Γ и при некотором Γ_0 фронт становится неустойчивым относительно малых возмущений его формы. Обычно [25, 36, 37] превращение плоского фронта в яче-

стый связывают с появлением концентрационного переохлаждения расплава, т. е. с условием $\Gamma > G_1$, где G_1 — градиент температуры в расплаве. Теоретический анализ величины Γ_0 выполнен в [38] и будет рассмотрен в главе 6.

Теоретические и экспериментальные оценки показывают, что концентрация легирующей примеси на границах ячеек значительно превышает среднюю ее концентрацию в монокристалле [39, 40]. В качестве примера на рис. 5.13 показано распределение удельного сопротивления в поперечном сечении монокристалла

кремния, легированного мышьяком, с ячеистой субструктурой [41]. Для исследования был выбран образец с относительно невысоким содержанием As и сравнительно слабо развитой правильной ячеистой субструктурой, на котором наблюдалось хорошее совпадение концентрации носителей по холловским измерениям и содержания примесей по данным радиоактивационного анализа. Это в значительной мере уменьшало вероятность присутствия легирующей примеси в образце в электрически неактивном состоянии и позволяло достаточно однозначно определять характер распределения легирующей примеси в образце по величине удельного сопротивления.

Хорошо видно, что распределение носит периодический характер. В области границ ячеек удельное сопротивление минимально. Расстояние между впадинами (200—250 мк) на кривой распределения удельного сопротивления оказалось практически равно ширине ячеек (220—250 мк), определенной при металлографическом исследовании образца. Как видно из приведенных результатов, концентрация легирующей примеси в области границ ячеек почти в два раза выше, чем в их объеме. Еще большая степень неоднородности наблюдается в образцах с сильно развитой

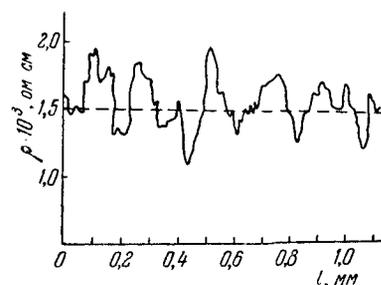


Рис. 5.13. Распределение удельного сопротивления по пластине сильно легированного кремния.

Измерено однозондовым методом.

ячейстой структурой, как было показано впоследствии в работе [40].

Преимущественная сегрегация легирующих примесей по границам ячеек в значительной мере способствует проявлению в этих областях рассмотренных выше источников политропии. Склонность к образованию ячейстой субструктуры и степень неоднородности, обусловленная ею, при прочих равных условиях, возрастают с уменьшением коэффициента распределения примеси (для примесей с $k < 1$) и с ростом ее концентрации в кристалле. Из теории [38] следует, что чем меньше коэффициент распределения легирующей примеси, тем при меньших критических концентрациях ее будет развиваться ячейстая субструктура в монокристалле. С этим в значительной степени связано то, что при одинаковых условиях выращивания явления политропии в кристаллах, легированных разными примесями, начинают проявляться при разных концентрациях. Это согласуется с эмпирической корреляцией между началом отклонения кривых рис. 5.4 от прямой и коэффициентом распределения примеси.

Влияние термообработки. Как было отмечено выше, явления политропии проявляются в сильно легированных германии и кремнии значительно раньше достижения предельной растворимости примеси в кристалле. Если часть примеси не входит в твердый раствор замещения, хотя сам твердый раствор еще далек от насыщения, то такая система с термодинамической точки зрения не является устойчивой. Можно было бы предполагать, что с течением времени в таких кристаллах будет происходить увеличение концентрации носителей заряда за счет дополнительного перехода атомов примеси в твердый раствор. Действительно, этот эффект был обнаружен после длительного хранения образцов германия, легированных до высоких концентраций мышьяком в эксикаторе при комнатной температуре. В ряде образцов наблюдалось увеличение концентрации электронов до 20 ÷ 80%. При этом наибольшие изменения наблюдались в образцах, имевших первоначально наибольшее отклонение от прямой на рис. 5.4. Аналогичное, хотя и несколько меньшее увеличение концентрации носителей имело место и в сильно легированных образцах германия с фосфором [23].

Очевидно, что термообработка сильно легированных монокристаллов может ускорить процесс перехода легирующей примеси в твердый раствор. Этот вопрос был изучен в [18]. Специально отобранный монокристалл германия с As, в котором наблюдалось значительное расхождение данных холловских измерений и радиоактивационного анализа, был подвергнут отжигу в атмосфере водорода при температуре 870° С в течение трех часов с последующей закалкой в воду. В результате термообработки концентрация носителей заряда в кристалле увеличивалась почти вдвое: с $2,5 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ до $4 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$, а данные холловских измерений и активационного анализа практически совпали. Металлографическое исследование кристалла до термообработки показало, что плотность дислокаций в нем составляет 10^4 см^{-2} . Дислокационные ямки травления имели характерные «хвосты», которые образуют обычно в поле зрения сетку и соединяют отдельные ямки между собой (рис. 5.14, а). После термообработки эта сетка полностью исчезала (рис. 5.14, б). По-видимому, образование «хвостов» обусловлено осаждением легирующей примеси на дислокациях и на других дефектах структуры. При термообработке осажденная на дефектах примесь переходит в твердый раствор, приводя к значительному увеличению концентрации носителей заряда в образце. Интересно отметить, что термообработка привела к заметному уменьшению выхода кластеров в исследованном образце: до термообработки концентрация кластеров Ge_2 и Ge_3 в кристалле составляла соответственно $3,4 \cdot 10^{-1}$ и $4,5 \cdot 10^{-4}$ ат.%, а после термообработки — соответственно $1 \cdot 10^{-3}$ и $3,8 \cdot 10^{-5}$ ат. %.

Этот факт, по-видимому, лишний раз указывает на органическую взаимосвязь явлений политропии со структурными особенностями монокристаллов.

Монокристаллы кремния, легированные Р и As с концентрацией носителей $(8 \div 9) \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$, были подвергнуты отжигу в атмосфере водорода при температуре 1200° С в течение 24 часов с последующей закалкой в воду. В отличие от германия, все образцы до термообработки имели ячейстую субструктуру, типа показанной на рис. 5.12, и не обнаруживали дислокационных ямок травления. Увеличение концентрации носителей заряда в результате термообработки в этом случае не превышало 10—12%.

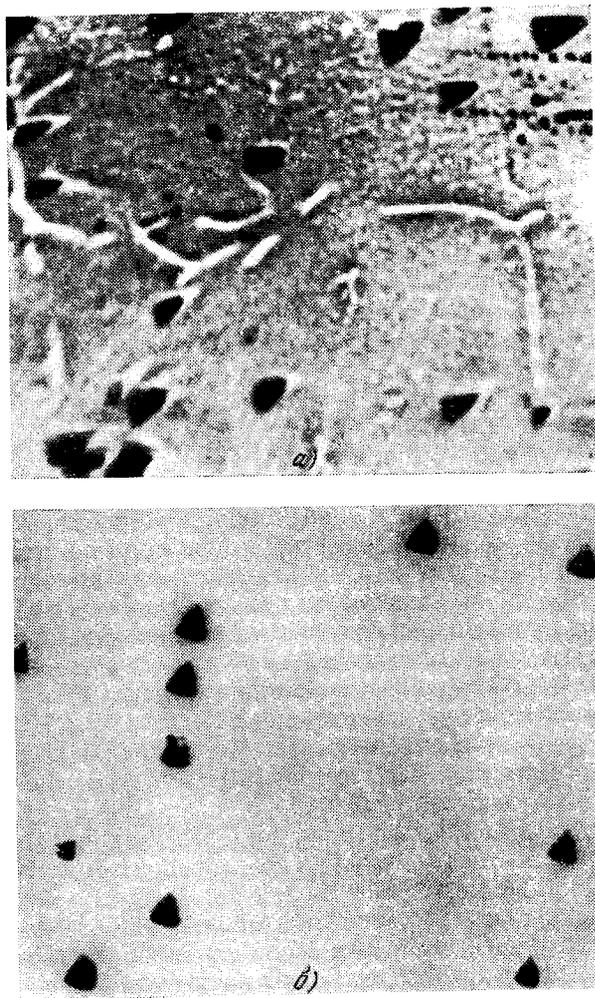


Рис. 5.14. Дислокационные ямки травления в монокристалле сильно легированного германия.
а — до термообработки, *б* — после термообработки.

В ряде образцов концентрация носителей вообще не изменилась. Во всех образцах сохранилась ячеистая субструктура, не изменился выход кластеров, а данные холловских измерений и активационного анализа по-прежнему не совпали [41].

По-видимому, политропия примесей в исследованных сильно легированных образцах кремния связана, в основном, с наличием ячеистой субструктуры, которая не устраняется при термообработке.

Связь явления политропии с некоторыми физическими свойствами кристалла. Вернемся теперь к исходным исследованиям, а именно к кинетическим эффектам в образцах, обнаруживающих явление политропии примесей. Так как в результате термообработки образцов германия с мышьяком удается в значительной мере уменьшить политропию, то представилось возможным сопоставить величины кинетических эффектов до и после термообработки. В результате оказалось, что после термообработки подвижность электронов уменьшилась и новое значение подвижности, если сравнивать с данными рис. 3.18, хорошо соответствует новой величине концентрации носителей, которая установилась в образце после термообработки. То есть избыточная концентрация примеси мышьяка, находящаяся в кристалле в форме, не проявляющей донорных свойств, имеет очень малое сечение рассеяния и практически не влияет на величины кинетических эффектов. Можно думать, что эта форма существования мышьяка является электрически нейтральной.

Иной результат выявляется в образцах германия с фосфором. Термообработка этих образцов также повышала концентрацию свободных электронов (при этом, конечно, уменьшалась и их подвижность), но изменение подвижности было таково, что образцы перемещались с кривой 1 на кривую 2 (см. рис. 5.3). Этот результат говорит в пользу того, что при легировании фосфором в германии имеется такая вторая форма существования фосфора, которая обладает сечением рассеяния, сравнимым с сечением для ионов примеси. К сожалению, устойчивость к термообработке не позволила оценить в полной мере влияние политропии на рассеяние электронов в кремнии. Но, основываясь на тех малых изменениях концентрации носителей

(10 ÷ 15%), которые все же наблюдаются после термообработки кремния, можно заключить, что им сопутствовали изменения в подвижности в строгом соответствии с кривыми рис. 3.24. То есть и в случае кремния, легированного мышьяком, фосфором и сурьмой вторая форма существования легирующей примеси вероятнее всего электрически нейтральна.

Далее, можно было предполагать, что политропия будет проявляться в возникновении уровней в глубине запрещенной зоны. Если вторая форма существования легирующей примеси представляет собой комплекс типа M_xA_y , или A_n , то из общих соображений энергетическое положение таких квазимолекул весьма грубо можно определить как $\frac{E}{\kappa^2}$, где E — энергия ионизации соединения M_xA_y , или соединения A_n в свободном состоянии, а κ — диэлектрическая постоянная кристалла.

Если даже считать, что E равно 20—30 эв, то мы получим величины $\frac{E}{\kappa^2}$, равные 0,078—0,11 эв. Это эквивалентно интервалу температуры 900—1300°К. Таким образом, комплексообразование будет мало, если закалка материала производится при относительно высокой температуре. Это действительно, как указывалось выше, наблюдается экспериментально.

Одним из способов изучения глубоких уровней, связанных с комплексами, могло бы явиться исследование избыточных токов туннельных диодов. Действительно, величина избыточного тока чрезвычайно чувствительна к присутствию глубоких уровней в запрещенной зоне полупроводника [44].

Опыты с закаленным материалом показали, что при закалке избыточный ток резко уменьшается. Впервые это было показано в работе [45] на примере туннельных диодов из германия с мышьяком, а затем в [46] на примере диодов из германия с фосфором. Эти результаты хорошо объясняются данными по комплексообразованию и термообработке кристаллов. Более того, из кривых рис. 5.4 следует, что при одной и той же концентрации примесей, при прочих равных условиях, должна иметь место следующая последовательность в величинах избыточных токов: $i_{Ge-P} >$

$> i_{Ge-As}$. Эта последовательность действительно была установлена экспериментально [47].

Характерно, что, основываясь на результатах, показывающих отсутствие явления политропии в кристаллах p -типа, можно легко предсказать отсутствие какого-либо влияния термообработки (закалки) на избыточный ток туннельных диодов, изготовленных из германия с акцепторными примесями — бором, галлием и алюминием. Опытные данные [47] действительно подтверждают это утверждение.

Обсуждение экспериментальных результатов исследования политропии примесей. Качественное обсуждение экспериментальных результатов, приведенных в этой главе, мы проведем на основании воззрения об единстве структурных особенностей вещества во всех трех агрегатных состояниях: твердая фаза (кристалл), расплав полупроводника (жидкость) и паровая фаза (газ).

Обратимся сначала к структуре жидкого расплавленного полупроводника. Мы не будем здесь повторять содержание большого числа работ, посвященных строению жидкости. Опишем лишь последние представления, имеющиеся в литературе, и во многом обязанные исследованиям Я. И. Френкеля [48], В. И. Данилова [49] и Е. Г. Швидковского [50]. Согласно этим представлениям, в любой момент времени все частицы жидкости могут быть разделены на две группы.

Первая группа состоит из частиц, совершающих колебательные движения около центров колебаний, совпадающих со статистически расстроенной структурой упорядоченной кристаллической решетки. Таким образом, эта группа частиц характеризуется структурой квазикристалла. Такие упорядоченные группировки частиц охватывают области малой протяженности — порядка десятков ангстрем.

Во вторую группу входят частицы, движущиеся по закону случайных блужданий (структура хаотического размещения).

Таким образом, тепловое движение в жидкости одновременно содержит черты теплового движения твердого тела (колебания) и газа (хаотическое движение). Любая частица может переходить из первой группы во вторую и обратно. Поэтому структура жидкости представляет

собой результат динамического равновесия между частями обеих групп.

Структура реальной жидкости во многом будет определяться кинетикой установления этого равновесия, изучение которой представляет самостоятельную и до сих пор не решенную проблему. Для нас важно отметить две характерные особенности жидкого состояния.

Первая заключается в том, что структурными единицами жидкости в принципе могут быть не только отдельные атомы, но и сложные образования типа молекул. Так, например, доказано [51] присутствие многоатомных молекул в простых неметаллических жидкостях N_2 , O_2 , O_3 , P_4 , S_8 . В [52] подробно изучался состав пара над расплавленными металлами Cu , In , Ga , Bi , Cd , Sn и было убедительно показано, что на опыте наблюдаемые многоатомные образования не являются продуктами каких-либо вторичных реакций в паровой фазе, а отражают структуру расплавленного металла (жидкости).

Вторая особенность жидкого состояния заключается в том, что это состояние вещества является промежуточным между паровой и твердой фазами и переход жидкости в эти состояния происходит непрерывным образом. При понижении температуры жидкости все более проявляются молекулярные силы, стремящиеся к агрегации всего комплекса молекул в кристаллическую структуру, характерную для данных сил при данной температуре. Отсюда и происходит сходство структур жидкости и кристалла вблизи точки затвердевания. Таким образом, эта характерная черта жидкости позволяет нам считать, что процесс кристаллизации уже подготовлен в расплаве. То есть свойства кристалла в большой степени уже заложены в жидкой фазе.

Точно так же при высоких температурах энергия теплового движения увеличивается и этот вид движения становится преобладающим по сравнению с межмолекулярными силами. Структура жидкости стремится к беспорядочному размещению частиц, т. е. к структуре газообразной фазы.

Имеется достаточное количество экспериментов [50], свидетельствующих в пользу непрерывного перехода (без большого изменения свойств) большинства жидкостей (в том

числе и металлических), с одной стороны, в кристалл, а с другой стороны, в газ.

Основываясь на приведенных двух особенностях жидкого состояния, можно представить себе следующую картину, проливающую некоторый свет на совокупность экспериментальных данных, изложенных в этой главе.

Расплав полупроводника (для примера возьмем кремний) имеет структуру жидкости, состоящую из неких квазикристаллов и хаотически блуждающих атомов Si . Допустим, что квазикристаллы представляют собой кластеры типа Si_m , где $m \geq 1$. Энергия связи частиц в кластерах с $m > 1$ будет выше, чем у простой пары колеблющихся частиц ($m = 1$). Из общих соображений очевидно, что вероятность образования кластеров должна убывать с увеличением номера m .

Если кластеры в расплаве действительно существуют, то различие в энергиях связи у разных кластеров проявится в различии температур кристаллизации основного кристалла и субкристалла из кластеров. То есть температура кристаллизации кластеров $T_{ок}$ будет выше температуры кристаллизации основного кристалла T_0 . Поэтому при вытягивании монокристалла по Чохральскому мы получаем кристалл, в котором «заморожены» кластеры Si_m .

Такого рода включения будут являться структурными дефектами в решетке обычного кристалла кремния. При масс-спектральном анализе в искровом источнике ионов при отрыве атомов от поверхности образца образования Si_m , обладающие повышенной энергией связи, имеют вероятность попасть в канал искрового разряда в виде целой молекулы. Соответственно в спектре масс регистрируются ионы кластеров $Si_2—Si_8$ (рис. 5.11). При получении кристаллов кремния, легированных, например, мышьяком, в расплаве могут образовываться уже не только квазикристаллы типа Si_m , но и комплексы $SiAs_m$ и Si_mAs , а при очень больших концентрациях — даже As_m . При кристаллизации в твердом теле малая доля этих образований сохраняется. При этом неизбежно должно уменьшаться содержание кластеров Si_m , т. е. легирующая примесь замещает не только атомы кремния, находящиеся в узлах обычной решетки, но и атомы в кластерах Si_m . С увеличением степени легирования будет возрастать количество

комплексов Si_nAs_m и уменьшаться содержание кластеров Si_m . Это согласуется с результатами масс-спектрального анализа (рис. 5.10 и 5.11). Комплексы типа Si_nAs_m можно рассматривать как зародыши второй фазы, хотя они и не имеют видимых границ раздела, и, следовательно, сам монокристалл кремния является однофазным. Но при очень большой концентрации эти зародыши разрастаются и выпадают в кристалле в виде включений, которые и наблюдались экспериментально с помощью металлографического анализа и при инфракрасном просвечивании.

Таким образом, возможно, что комплексы являются прообразом будущих химических соединений.

Совершенно очевидно, что кластеры типа As_m и Sb_m (или $SiAs_m$, $SiSb_m$) не будут проявлять донорных свойств только при четных значениях m .

Действительно, в случае нечетного m все указанные образования обладали бы лишним электроном, который в силу малости энергии ионизации все равно был бы в зоне проводимости. В случае же четного значения m «лишние» электроны связывали бы атомы в гелиоподобную модель и при этом они не участвовали бы в заполнении зоны проводимости. Это и было вскрыто при анализе кривых рис. 5.4. К сожалению, ограниченные возможности масс-спектрометра MS-7 не позволили автору анализировать ионы со столь большими значениями $\frac{m}{e}$, как 296 для As_4 и тем более — 484 для Sb_4 .

Высказанное выше положение о сплошной непрерывности в изменении свойств при переходе из одного агрегатного состояния вещества в другое не следует понимать слишком упрощенно. Имеются опыты [50] с Bi , в которых показано, что упорядоченность атомов в жидком висмуте совершенно отличается от упорядоченности в твердом. По-видимому, нечто подобное мы имеем в случае легирования кремния фосфором, хотя в паровой фазе существуют кластеры фосфора P_m [53], а в твердом кремнии, по-видимому, их нет (в противном случае трудно объяснить различие в кривых рис. 5.5 и 5.4).

Выше уже говорилось, что кластеры в твердом теле являются одновременно и структурными дефектами. Действительно, квазикристаллы в жидкости не могут представ-

лять собой сплошного заполнения узлов кристаллической решетки. Швидковский [50] указывает, что «подавляющее количество веществ при плавлении увеличивает объем приблизительно на 10%, что отвечает ста вакантным узлам кристаллической решетки в кубике с длиной ребра, равной десяти средним межатомным расстояниям. Наличие незамещенных узлов должно обязательно повести к статистической расстройке атомного размещения (относительно идеальной упорядоченности кристаллической решетки), а следовательно, к локальным понижениям высоты потенциального барьера межчастичных взаимодействий». Отсюда следует, что должна существовать связь между поведением атомов основного вещества и атомов примесей со структурными дефектами — дислокациями и вакансиями. Действительно, четкое проявление такой связи было обнаружено опытным путем. Подробно этот вопрос будет рассмотрен в следующей главе.

Объяснение явления политропии, приведенное выше, может быть принято лишь в случае существования кластеров в жидком расплаве. Однако это до сих пор доказано только для неметаллических жидкостей. Имеется достаточное количество косвенных опытов, говорящих в пользу аналогичных явлений и в металлических жидкостях. Все же сегодня все эти опыты еще не позволяют с уверенностью считать молекулярное строение металлов доказанным. Поэтому развитую выше картину следует рассматривать лишь как попытку связать в единую систему имеющуюся в настоящее время совокупность экспериментальных данных. Такая попытка скорее носит характер постановки вопроса. Безусловно, истинный механизм явлений, приводящих к политропии примесей, весьма сложен и, как представляется автору, затрагивает фундаментальные вопросы физики не только твердого, но и жидкого состояния вещества.

К сожалению, исследование явления политропии наталкивается на большое число методических трудностей. Перед исследователем в данном случае стоит задача обнаружения «квазивключений» в кристалле, хотя сам кристалл еще является однофазным с точки зрения обычных понятий. Такого рода включения вряд ли можно обнаружить рентгеновскими методами, так как уже 1% одной фазы, представ-

ляющей собой «примесь» к другой, не может быть найден рентгеноструктурным анализом. Из-за малых размеров этих включений неприменим и электронно-микроскопический анализ. Больше можно надеяться на локальный анализ по вторичному рентгеновскому излучению при электронной бомбардировке кристалла [54], если удастся достичь достаточно высокой разрешающей силы этого метода. В настоящее время этот метод позволяет анализировать объем $\sim 1,0 \text{ мк}^3$, что для изучения политропии примесей имеет лишь смысл вспомогательного метода.

Полезную информацию, по-видимому, могут дать опыты по рассеянию рентгеновских лучей, γ -лучей, а возможно, и нейтронов. Большие надежды автор возлагает в дальнейшей работе на методы, связанные с прохождением ультразвука в кристаллах и жидкостях. Наконец, представляется обязательным изучение вязкостных свойств в жидком расплаве вблизи температуры кристаллизации.

Чрезвычайно важно выполнить тщательное исследование зависимости состава пара над системой полупроводник — примесь от концентрации примесей и температуры образца.

Безусловно, следует попытаться осмыслить полученные экспериментальные данные и количественно. Для этой цели в первую очередь необходимо рассмотреть термодинамику и кинетику процесса кристаллизации при условии, что жидкость не мономерна, а содержит определенное количество различных двух-, трех- и вообще m -мерных кластеров.

Некоторое начало такого подхода, возможно, удастся получить, развивая представления о гетерофазных флуктуациях, рассмотренных Я. И. Френкелем [48], на которых основана и обычная теория спонтанной кристаллизации [49]. При этом скорость зарождения m -мерного комплекса в объеме жидкой фазы можно записать в виде, аналогичном скорости обычных центров кристаллизации [49]:

$$g_m = N_1^{*k} \exp \left[-\frac{E_m}{k_0 T} \right] \exp \left[-\frac{c \sigma_m}{T (\Delta T_m)^2} \right]. \quad (5.2.14)$$

Здесь E_m — энергия активации перехода атома в m -мерный комплекс; c — постоянная; σ_m — величина, аналогичная поверхностному натяжению; ΔT_m — концентрационное пе-

реохлаждение расплава за счет кристаллизации m -мерного комплекса — $\Delta T = T - T_{0k}$.

Так как в состоянии равновесия

$$N_m^{*k} = K_1 g_m, \quad (5.2.15)$$

то концентрация m -мерного комплекса будет:

$$\frac{N_m^{*k}}{N_1^{*k}} = K_1 \exp \left[-\frac{E_m}{k_0 T} \right] \exp \left[-\frac{c \sigma_m}{T (\Delta T_m)^2} \right]. \quad (5.2.16)$$

Это выражение имеет максимум при некоторой температуре, превышающей истинную температуру кристаллизации из-за того, что $T_{0k} > T_0$.

Экспериментальное обнаружение этого максимума могло бы служить отправным моментом для построения теории кристаллизации жидкости, содержащей многомерные образования — кластеры и как дальнейшее ее развитие — теорию кристаллизации легированной, т. е. содержащей комплексы, жидкости.

ГЛАВА 6

ПОЛУЧЕНИЕ СИЛЬНО ЛЕГИРОВАННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ *)

Свойства выращиваемого кристалла определяются, в первую очередь, природой кристаллизующегося вещества, особенностями процесса кристаллизации, а также условиями роста кристалла. Последние во многом зависят от аппаратного оформления процесса. При прочих равных обстоятельствах значительное влияние на процесс роста и свойства слитка оказывают природа и концентрация легирующей примеси. Особенно большую роль последние факторы играют при выращивании сильно легированных монокристаллов полупроводников.

В настоящей главе мы не будем останавливаться на рассмотрении общих вопросов теории и практики выращивания монокристаллов, а постараемся сосредоточить основное внимание на тех особенностях процесса кристаллизации, которые связаны с наличием в системе примесей в сравнительно высоких концентрациях. Рассмотрение будет проведено в применении к выращиванию из расплава, которое является в настоящее время наиболее распространенным методом получения монокристаллов.

§ 6.1. Устойчивость гладкого фронта кристаллизации

Отличительной особенностью выращивания сильно легированных монокристаллов полупроводников является то, что они часто растут в условиях, когда гладкий (плоский) фронт кристаллизации становится не стабильным. Основной

причиной такой неустойчивости, приводящей к появлению ячеистой структуры (см. рис. 5.12), является концентрационное переохлаждение, обусловленное высоким содержанием примеси в расплаве. Остановимся на этом подробнее.

Распределение легирующей примеси в расплаве у границы раздела фаз оказывает значительное влияние на процесс роста кристалла. При коэффициенте распределения k , меньшем единицы (наиболее часто реализуемый на практике случай), примесь будет оттесняться в расплав растущим слитком. В условиях идеального перемешивания концентрация примеси в ванне расплава будет равномерной на протяжении всего процесса выращивания.

В большинстве практических случаев при росте кристаллов перемешивание является далеко не полным, и у поверхности растущего слитка в расплаве появляется слой, обогащенный примесью. Концентрация примеси в этом случае будет возрастать до момента установления динамического равновесия, когда количество примеси, оттесняемое в расплав растущим слитком, становится равным количеству ее, отводимому от фронта кристаллизации за счет диффузии

и конвекционного перемешивания. Схематически распределение примеси у границы раздела фаз показано на рис. 6.1, а. В связи с тем, что расплаву каждого состава отвечает своя равновесная температура кристаллизации, на основании рис. 6.1, а можно схематически представить кривую распределения равновесных температур кристаллизации в поперечном слое расплава (рис. 6.1, б). Для успешного роста кристалла, в расплаве должен существовать определенный положительный градиент температур. Обычно

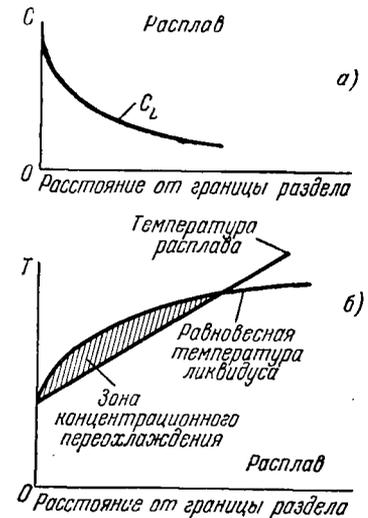


Рис. 6.1. Распределение примеси (а) и равновесных температур кристаллизации (б) у границы раздела фаз в расплаве.

*) Глава 6 написана М. Г. Мильвидским.

тепловые условия выращивания подбирают так, чтобы реальная температура расплава была выше, чем температура кристаллизации (за исключением небольшого переохлаждения непосредственно на границе раздела фаз). При распределении равновесных температур кристаллизации типа, показанного на рис. 6.1, б, даже при положительном температурном градиенте в расплаве на некотором расстоянии от фронта кристаллизации может появиться область, где температура расплава будет ниже температуры ликвидуса. Расплав в этой области будет переохлажден. Такое переохлаждение называется «концентрационным», так как оно является следствием изменения концентрации примеси в расплаве [1]. При выращивании монокристаллов с малым содержанием примесей вероятность появления концентрационного переохлаждения очень мала. Однако при получении сильно легированных полупроводников оно легко может возникнуть.

Математический анализ концентрационного переохлаждения основан на рассмотрении распределения примеси в расплаве. Атомы примеси, оттесняемые в расплав растущим слитком, отводятся от фронта кристаллизации за счет диффузии и конвекции в расплаве. Последнюю необходимо учитывать при выращивании из перемешиваемых расплавов. Вводя понятие диффузионного слоя [2—5], можно провести одинаковую математическую обработку для случаев перемешиваемых и неперемешиваемых расплавов — вся разница будет заключаться в выборе граничных условий.

Рассмотрение проведем для одномерного случая в стационарном состоянии с учетом следующих предположений: 1) диффузия примесей в твердой фазе пренебрежимо мала; 2) кривые ликвидус и солидус в интересующем нас интервале концентраций являются линейными, а коэффициент распределения примесей постоянен и не зависит от концентрации; 3) распределение истинных температур в расплаве линейно.

Распределение примеси может быть получено при решении диффузионного уравнения (6.1.1) с использованием граничных условий (6.1.2) и (6.1.3):

$$D \frac{d^2C}{dx^2} + f \frac{dC}{dx} = 0. \quad (6.1.1)$$

Здесь $C(x)$ — концентрация примеси в расплаве на расстоянии x от фронта кристаллизации; D — коэффициент диффузии примеси в расплаве; f — скорость роста кристалла.

При выращивании из неперемешиваемого расплава

$$C(\infty) = C_L. \quad (6.1.2a)$$

При выращивании из перемешиваемого расплава

$$C(\delta) = C_L. \quad (6.1.2b)$$

В обоих случаях на границе раздела

$$D \frac{dc}{dx} + f(C_0 - C_S) = 0, \quad (6.1.3)$$

$$C_S = kC_0, \quad (6.1.4)$$

где C_0 — концентрация примеси в расплаве на границе раздела фаз, C_S — концентрация примеси в твердой фазе.

Толщину диффузионного слоя δ можно рассчитать из следующего выражения [2]:

$$\delta = 1,6 \cdot D^{1/3} \cdot \nu^{1/6} \cdot \omega^{-1/2}, \quad (6.1.5)$$

где ν — кинематическая вязкость расплава; ω — угловая скорость вращения кристалла.

Решения написанных выше уравнений имеют вид:

а) для выращивания из неперемешиваемого расплава [6]:

$$C(x) = C_L \left[1 + \frac{1-k}{k} \exp\left(-\frac{f}{D}x\right) \right], \quad (6.1.6)$$

$$C_0 = \frac{C_L}{k}; \quad (6.1.7)$$

б) для выращивания из перемешиваемого расплава:

(при $0 \leq x \leq \delta$)

$$C(x) = \frac{kC_L}{k + (1-k) \exp\left(-\frac{f\delta}{D}\right)} \left[1 + \frac{1-k}{k} \exp\left(-\frac{fx}{D}\right) \right] \quad (6.1.8a)$$

и (при $x > \delta$)

$$C_x = C_L. \quad (6.1.8b)$$

При этом

$$C_0 = \frac{C_L}{k + (1-k) \exp\left(-f \frac{\delta}{D}\right)}. \quad (6.1.9)$$

Используя соотношения (6.1.4), (6.1.7) и (6.1.9), уравнения (6.1.6) и (6.1.8a) можно привести к виду:

$$C(x) = C_S + \frac{1-k}{k} C_S \exp\left(-\frac{fx}{D}\right); \quad (6.1.10)$$

здесь $C(x)$ выражено через C_S вместо C_0 или C_L .

Температура ликвидус для любой концентрации примеси определяется фазовой диаграммой

$$T_E(x) = T_0 + mC(x), \quad (6.1.11)$$

где m — наклон линии ликвидус (в нашем случае $m = \text{const}$); T_0 — температура плавления чистого вещества.

При линейном распределении температур в расплаве истинная температура в нем $T_A(x)$ выражается в виде

$$T_A(x) = T_0 + mC_0 + G_L(x), \quad (6.1.12)$$

где G_L — температурный градиент в расплаве.

Величина переохлаждения $S(x)$ может быть найдена из уравнений (6.1.11) и (6.1.12):

$$S(x) = -m[C_0 - C(x)] - G_L(x). \quad (6.1.13)$$

Необходимым условием наличия концентрационного переохлаждения является $S(x) > 0$. С учетом уравнения (6.1.13) это условие эквивалентно следующему неравенству:

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)_{x=0} > 0. \quad (6.1.14)$$

Используя уравнения (6.1.14), (6.1.10) и (6.1.13), можно получить условия существования концентрационного переохлаждения при выращивании как из перемешиваемых, так и неперемешиваемых расплавов в виде

$$C_S \geq C_{Sc}, \quad (6.1.15)$$

где

$$C_{Sc} = \frac{k}{1-k} \left[-\frac{D}{fm} \right] G_L. \quad (6.1.16)$$

В условиях существования концентрационного переохлаждения гладкий фронт кристаллизации становится неустойчивым [7, 8]. Любое продвижение участка границы раздела в расплав, вызванное случайными флуктуациями, будет распространяться в область переохлажденной зоны. Образовавшийся таким образом выступ будет отталкивать примесь в расплав и создавать распределение примеси перед собой, аналогичное тому, которое имеет место в других

точках границы раздела (рис. 6.2). Это приведет к установлению градиента концентраций между вершиной выступа и областью около его основания. В результате в направлении от вершины выступа (область более высокой концентрации) возникнет поток примеси, приводящий к понижению концентрации вблизи точки B и соответственно к возможности роста кристалла в этой точке. В то же самое время концентрация примеси вблизи основания выступа будет повышаться, а температура плавления падать. В результате различия концентраций перед точками A и B кристалл в этих точках будет расти с одинаковыми скоростями, несмотря на то, что температура в точке B выше, чем в A . Таким образом, выступ, образовавшийся на границе раздела в результате случайных флуктуаций, становится стабильным.

Высота растущего слоя, таким образом, определяется тем, что он растет в направлении повышения температуры. Однако выступ не может распространяться за пределы области, определяемой равновесной температурой плавления чистого вещества. Другое ограничение на длину выступа накладывает скорость диффузии примеси из области расплава вблизи конца растущего выступа. Диффузией примеси определяется также понижение температуры плавления у основания выступа.

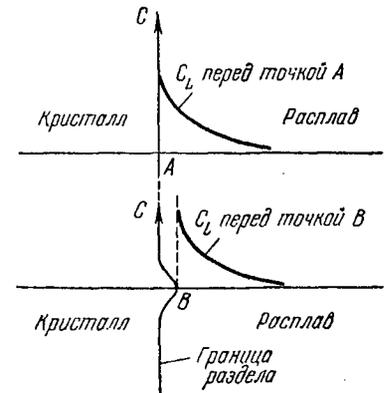


Рис. 6.2. Распределение примеси в расплаве у границы раздела фаз с выступом на ее поверхности.

Влияние выступа распространяется на весьма ограниченную область поверхности фронта кристаллизации. За пределами этой области на фронте кристаллизации могут появиться новые стабильные выступы. Первоначально возникающие выступы располагаются на границе раздела случайным образом. Однако по мере увеличения количества выступов «сферы влияния» отдельных выступов перекрываются и фронт кристаллизации приобретает ячеистую структуру (рис. 5.12).

Более детальный теоретический анализ показывает, что наличие переохлаждения в расплаве не является условием, достаточным для нарушения устойчивости гладкого фронта кристаллизации. В [9] для выяснения условия устойчивости сравнивается теплоотвод от выступа с теплоотводом от плоского фронта. В более общем виде на основе теории малых возмущений задача решена Воронковым [10]. Гладкий фронт становится неустойчивым при выполнении условия

$$\Gamma > G = \frac{\kappa_1 G_1 + \kappa_2 G_2}{\kappa_1 + \kappa_2}, \quad (6.1.17)$$

где Γ — градиент равновесной температуры кристаллизации; κ — коэффициент теплопроводности; G — градиент температуры у границы раздела фаз, а индексы 1 и 2 относятся соответственно к расплаву и твердой фазе.

Таким образом, в критерий перехода к ячеистой структуре входит не градиент температуры в расплаве G_1 , а усредненный по двум фазам градиент G , который больше, чем G_1 при $\kappa_1 > \kappa_2$.

Подставляя в уравнение (6.1.17) выражение для Γ [10], можно найти критическую концентрацию примеси в твердой фазе, при которой образуются ячейки [11]:

$$C_{Sc} = D \frac{Q \cdot k}{k_0 T_0^2 (1 - k)^2 f}. \quad (6.1.18)$$

Здесь Q — теплота плавления на единицу объема расплава; k_0 — постоянная Больцмана.

Таким образом, решающими факторами нарушения стабильности гладкого фронта кристаллизации при выращивании сильно легированных монокристаллов являются: тепловые условия у границы раздела фаз, скорость роста, природа и концентрация легирующей примеси.

Необходимо отметить, что при выращивании сильно легированных монокристаллов полупроводниковых соединений (например, $A^{III}B^V$) источником появления концентрационного переохлаждения и ячеистой структуры может явиться отклонение расплава от стехиометрического состава.

Экспериментальная проверка теории концентрационного переохлаждения при кристаллизации чистых металлов была осуществлена в ряде работ [7, 12, 13]. Полученные результаты подтвердили выводы теории о линейной зависимости между критической концентрацией примеси в кристалле и отношением G_1/f в соответствии с уравнением (6.1.16).

Влияние концентрационного переохлаждения на особенности роста монокристаллов полупроводниковых материалов изучалось меньше. Рядом авторов были обнаружены характерные примесные субструктуры в слитках германия, легированных висмутом [14, 15], оловом [16], железом, марганцем и кобальтом [17—19], кремнием [20], никелем [21].

Первые качественные исследования влияния концентрационного переохлаждения на рост монокристаллов германия, легированных до высоких концентраций галлием, были осуществлены Боллингом с сотрудниками [22]. Кристаллы выращивались в горизонтальных графитовых лодочках в направлении [321], структура поверхности фронта кристаллизации исследовалась методом декантации. Концентрация галлия в расплаве измерялась в пределах от 0,014 до 0,75 ат.%. При содержании галлия свыше 0,043 ат. % в кристаллах были обнаружены двойники. При дальнейшем повышении концентрации галлия плотность двойникования сильно возросла. Поверхность раздела приобретала бугристую структуру, причем максимальное количество бугорков наблюдалось у границ двойников. И только когда содержание галлия достигало 0,2 ат.%, поверхность раздела становилась ячеистой, причем образовавшиеся ячейки представляли собой группы хорошо развитых пирамид. Исходя из теоретических оценок (см. (6.1.16)), следовало бы ожидать, при использованных в работе условиях роста, образования зоны концентрационного переохлаждения перед границей раздела при содержании галлия порядка 0,01 %. Поскольку ячеистая струк-

тура не возникала при содержании галлия меньше 0,2%, авторы делают вывод о том, что образование выступов на границе раздела в случае германия затруднено и для возникновения ячеистой структуры необходимо большее переохлаждение, чем для металлов. Это может быть вызвано как различием в механизмах роста между большинством металлов и германием, так и значительным увеличением в случае германия энергии границы раздела при формировании выступов.

Та же система, но в условиях выращивания кристаллов из перемешиваемого расплава по методу Чохральского была исследована в работе [23]. В отличие от Боллинга, авторы пришли к выводу, что для возникновения ячеистой структуры в монокристаллах германия, легированных галлием, величина критического градиента переохлаждения должна быть мала. Наиболее вероятной причиной такого резкого расхождения данных различных исследователей является значительная неопределенность в выборе численных значений величин, входящих в формулу для оценки критических концентраций примеси, вызывающих появление ячеистой структуры, и, в первую очередь, коэффициентов диффузии и теплопроводности. Данные по коэффициентам диффузии примесей в расплаве и коэффициентам теплопроводности полупроводников вблизи температуры плавления начали появляться позднее [11, 24—28]. Подробные исследования по выращиванию сильно легированных монокристаллов германия и кремния в условиях концентрационного переохлаждения приведены в работе [29]. Монокристаллы кремния выращивались по методу Чохральского, а монокристаллы германия — методом зонного выравнивания в направлении [111]. И в том, и в другом случае с помощью измерения электропроводности и эффекта Холла определялась критическая концентрация примеси в слитке, необходимая для появления поликристаллической структуры. Эта концентрация рассматривалась автором как предел легирования. Полученные результаты собраны в таблице 6.1. В той же таблице приведены литературные данные по максимальной растворимости соответствующих примесей в германии и кремнии, а также значения концентраций примесей, необходимых для появления концентрационного переохлаждения, рассчитанные по уравнению (6.1.16).

Таблица 6.1

Пределы легирования C_{Si} различных примесей в германии и кремнии ($f=1$ м.м.мин)

Кристалл	Примесь	Предел легирования C_{Si} , с.м. ⁻³	Предел растворимости C_{Si} , с.м. ⁻³	$ m $, град/с.м. ³ по данным [30]	β по данным [31]	D , с.м. ² /сек по данным [3,29]	C_{Sc} , с.м. ⁻³
Ge	Ga	$2 \cdot 10^{20}$	$5 \cdot 10^{20}$	$5,9 \cdot 10^{-21}$	0,087	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{19}$
	In	$0,8 \cdot 10^{18}$	$4 \cdot 10^{18}$	$8,0 \cdot 10^{-21}$	0,001	$(1,0 \cdot 10^{-4})$	$1,2 \cdot 10^{17}$
	P	$3 \cdot 10^{19}$	$1,8 \cdot 10^{20}$	$(7,6 \cdot 10^{-21})^*$	0,030	$(0,5 \cdot 10^{-4})$	$5,1 \cdot 10^{18}$
	As	$2 \cdot 10^{18}$	$1,3 \cdot 10^{19}$	$8,6 \cdot 10^{-21}$	0,020	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^{18}$
	Sb	$6 \cdot 10^{18}$	$4 \cdot 10^{20}$	$7,1 \cdot 10^{-21}$	0,003	$0,7 \cdot 10^{-4}$	$2,7 \cdot 10^{17}$
Si	B	$3 \cdot 10^{20}$	$6 \cdot 10^{20}$	$(9,3 \cdot 10^{-21})$	0,800	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$4,3 \cdot 10^{20}$
	P	$8 \cdot 10^{19}$	$1,4 \cdot 10^{20}$	$(9,3 \cdot 10^{-21})$	0,350	$5,1 \cdot 10^{-4}$	$1,7 \cdot 10^{20}$
	Sb	$2,5 \cdot 10^{19}$	$6,7 \cdot 10^{19}$	$5,5 \cdot 10^{-21}$	0,023	$1,5 \cdot 10^{18}$	$6,4 \cdot 10^{18}$

*) В скобки заключены расчетные значения.

Как следует из приведенных данных, достигаемые на практике пределы легирования в 2—10 раз ниже максимальной растворимости примесей в кристалле. Это свидетельствует о том, что условия выращивания значительно отличаются от равновесных. Основным фактором, влияющим на величину предела легирования, является концентрационное переохлаждение. В то же время концентрации примесей, необходимые для его появления, в большинстве случаев значительно ниже, чем достигаемые пределы легирования. По-видимому, для появления поликристаллической структуры необходима определенная величина концентрационного переохлаждения и предел легирования характеризует ту концентрацию примесей, при которой эта величина переохлаждения достигается. То, что для фосфора и мышьяка в кремнии получились обратные результаты, автор связывает с недостаточной чистотой легирующих добавок.

Следует иметь в виду, что в работе [29] не учитывалось влияние по крайней мере двух важных факторов. Во-первых, как известно, [32] при высоких концентрациях легирующей донорной примеси в кристалле далеко не вся она является электрически активной, поэтому использование электрических измерений для определения содержания

примеси в данном случае может привести к большой ошибке. Во-вторых, величина C_{Sc} сопоставляется с пределом легирования, в качестве которого рассматривается концентрация примеси непосредственно на границе с поликристаллом. В то же время, как показали исследования других авторов [11], ячеистая структура может появиться в слитке значительно раньше перехода к поликристаллу, а соответственно



Рис. 6.3. Начальная стадия развития ячеистой структуры в продольном сечении сильно легированного монокристалла кремния.

и при меньшей концентрации легирующей примеси в образце. Различие между критической концентрацией, необходимой для появления ячеистой структуры и пределом легирования, может быть весьма значительным, изменяясь с изменением условий роста. Например в [11], при выращивании по методу Чохральского со скоростью 1,3 мм/мин монокристаллов кремния, легированных мышьяком, ячеистая структура появлялась при $C_S = 6,8 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$, а предел легирования составлял примерно $2,2 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$.

Экспериментальная проверка условий устойчивости гладкого фронта кристаллизации, описываемых уравнением (6.1.18), была осуществлена в работе [11]. В данной работе исследовались выращенные по методу Чохральского в направлении [111] монокристаллы кремния, легированные до высоких концентраций алюминием, сурьмой, мышьяком и фосфором. Градиенты G_1 и G_2 измерялись путем вращения термодипар в кристалл. Серия измерений с различными скоростями роста и различными экранировками позволила определить коэффициенты теплопроводности κ_1 и κ_2 [26]. Концентрация примеси в области кристалла, предшествующей ячейкам, определялась по измерениям эффекта Холла с соответствующей поправкой на явление политропии по данным [32]. На рис. 6.3 приведен типичный пример начальной стадии развития ячеистой структуры в продольном сечении (110) сильно легированного монокристалла кремния. Гладкие ранее «полосы роста» становятся волнистыми, свидетельствуя о периодической деформации гладкого фронта кристаллизации.

Для проверки пропорциональности между C_S и G/f кристаллы, легированные мышьяком, выращивались при различных скоростях роста и градиентах G . Результаты, представленные на рис. 6.4, показывают, что линейный закон хорошо соблюдается. Зная величину C_S для различных примесей в данных условиях роста, с помощью формулы (6.1.18) можно найти коэффициенты диффузии примеси в расплаве. Они оказались равными $3 \cdot 10^{-4}$, $1 \cdot 10^{-4}$, $6 \cdot 10^{-5}$ и $5 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{сек}$ соответственно для Al, Sb, As и P.

Анализ устойчивости гладкого фронта [10] показывает, что первоначально фронт становится неустойчивым относительно периодического возмущения с периодом d . Величина

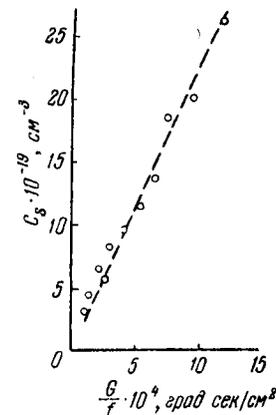


Рис. 6.4. Зависимость критической концентрации примеси от условий роста для сильно легированных мышьяком монокристаллов кремния.

d имеет, таким образом, смысл ширины ячеек в начальной стадии их развития и дается выражением (см. [10])

$$d = 2\pi \sqrt[3]{\frac{2D}{k \cdot f \cdot G} \frac{\sigma T_0}{Q}}, \quad (6.1.19)$$

где Q — теплота плавления полупроводника, рассчитанная на 1 г расплава.

Коэффициент поверхностного натяжения на границе твердой и жидкой фаз σ , входящий в эту формулу, может зависеть от концентрации примеси. При не слишком малых k формула (6.1.19) дает хорошее согласие с опытом. Так, принимая по аналогии с германием [33] $\sigma = 200$ эрг/см², получаем при $f = 1,3$ мм/мин и $G = 35$ град/см для кремния, легированного мышьяком, $d = 220$ мк, в то время как ширина ячеек в этих условиях равна 200—250 мк.

Экспериментальные данные по устойчивости гладкого фронта кристаллизации при выращивании сильно легированных монокристаллов других полупроводников, в частности полупроводниковых соединений, в литературе практически отсутствуют. Тем не менее концепция концентрационного переохлаждения может быть, по-видимому, применена и к ним. Действительно, ячеистая структура наблюдалась на поверхности фронта кристаллизации монокристаллов антимонида индия, выращиваемых из расплавов, обогащенных индием или галлием [66].

Особенно большую роль концентрационное переохлаждение может играть при выращивании монокристаллов разлагающихся полупроводниковых соединений, где отклонение от стехиометрии может произойти из-за частичного испарения легколетучего компонента. Экспериментальные данные по получению арсенида галлия свидетельствуют о том, что уже незначительные отклонения состава расплава от стехиометрического в процессе выращивания приводят к резкому снижению выхода монокристаллов [31].

§ 6.2. Некоторые особенности распределения примесей в сильно легированных полупроводниках

Неравномерное распределение примесей в монокристалле может быть связано с действием как случайных, так и закономерных факторов. Случайные — обусловлены неконтро-

лируемыми изменениями в процессе кристаллизации вследствие несовершенства аппаратуры для выращивания монокристаллов. К ним можно отнести: колебания мощности в цепи нагревателя при отсутствии стабилизации теплового режима установки, асимметрию теплового поля в расплаве у границы раздела фаз, колебания скорости роста из-за плохого качества изготовления механических приводов и отсутствия стабилизации их питания и т. д. Неоднородности, обусловленные действием случайных факторов, не воспроизводятся при переходе от одной установки к другой и даже при проведении последовательных плавов на одной и той же установке. Для устранения случайных неоднородностей необходимо обеспечить строгую стабилизацию теплового режима и работы механических приводов, а также высокое качество изготовления и сборки всех частей установки выращивания монокристаллов.

Действие закономерных факторов обусловлено особенностями самого процесса выращивания монокристалла. Сюда можно отнести естественную сегрегацию примеси по длине выращиваемого слитка, неравномерное распределение примеси в объеме, обусловленное периодическим характером процесса кристаллизации, появлением при росте различных кристаллографических граней, формой фронта кристаллизации, природой и концентрацией самой примеси и т. д. Неоднородности этого типа могут быть изучены и сведены к минимуму при выборе соответствующих условий выращивания.

Хорошо известно, что примеси с коэффициентами распределения, отличающимися от единицы, в процессе кристаллизации распределяются по длине слитка неравномерно: примеси с $k > 1$ собираются в начальной части кристалла, примеси с $k < 1$ оттесняются к его концу. Особенно большое значение эта естественная сегрегация примесей по длине приобретает в случае выращивания сильно легированных монокристаллов, когда изменение концентрации примеси в расплаве и в слитке ведет к изменению условий стабильности гладкого фронта кристаллизации и нарушению монокристаллической структуры. Естественно, что на протяжении ряда лет внимание исследователей было направлено на разработку таких методов выращивания, которые обеспечили бы равномерное распределение

примеси по длине монокристалла. Многие из предложенных методов основаны на поддержании постоянной концентрации легирующей примеси в расплаве на протяжении всего процесса. В применении к выращиванию по методу Чохральского здесь, прежде всего, следует указать на метод плавающего тигля [34—37], а также на метод подпитки расплава слитком того же состава, что и выращиваемый [38—40]. При зонной плавке большое распространение получил метод зонного выравнивания [41]. К сожалению, большинство авторов учитывает изменение концентрации примеси в расплаве лишь за счет сегрегации и не учитывает возможности испарения. Поэтому применение предложенных методов ограничено случаями легирования мало летучими примесями или условиями, когда испарение примеси из расплава подавлено.

При легировании летучими примесями наибольшего предпочтения заслуживает метод, использующий компенсирующее влияние испарения накапливающейся в расплаве примеси (при $k < 1$) [42—44]. Метод основан на подборе таких условий выращивания кристалла (скорость роста, атмосфера в печи, условия перемешивания и т. д.), при которых в каждый момент времени количество примеси, отгесняемое в расплав растущим слитком, равно количеству ее, испаряющемуся со свободной поверхности расплава.

Из других методов выращивания монокристаллов с равномерным распределением примеси по длине следует отметить метод программирования скорости роста [3] или скорости вращения монокристалла [46]. Метод основан на зависимости эффективного коэффициента распределения легирующей примеси от условий выращивания монокристалла. Программирование ведется так, чтобы изменение концентрации примеси в расплаве за счет сегрегации компенсировалось соответствующим изменением коэффициента распределения.

Более детальные исследования показали, что распределение примеси по длине выращиваемого кристалла в реальных условиях далеко от гладкой кривой и носит периодический характер. Периодическая неоднородность распределения примесей по «полосам роста» является серьезным источником объемной неоднородности и изучалась в ряде работ [47—50]. Периодические колебания в содержании примесей

наблюдались как в кристаллах, выращенных по методу Чохральского, так и в кристаллах, полученных горизонтальной зонной или направленной кристаллизацией. В вытянутых монокристаллах обнаружено несколько систем «полос роста» помимо периодических неоднородностей, связанных с вращением кристалла и тигля (шаг которых равен частному от деления значения скорости роста на соответствующую величину скорости вращения), наблюдались и мелкие «полосы роста» с периодом 3—20 мк (рис. 6.5).



Рис. 6.5. Периодическая неоднородность распределения примесей по «полосам роста» в продольном сечении сильно легированного монокристалла кремния.

Последние обнаружены также в кристаллах, выращенных без вращения. Периодическая неоднородность, связанная с вращением кристалла и тигля, обусловлена, по-видимому, периодическими колебаниями скорости роста из-за наличия в расплаве у границы раздела фаз асимметричного температурного поля. Более сложным эффектом являются мелкие полосы роста, наблюдаемые в кристаллах, полученных разными методами. Причины их возникновения кроются, по-видимому, в периодическом характере самого процесса кристаллизации, одним из внешних проявлений которого могут быть обнаруживаемые на практике автоколебания раздела фаз [53]. С этой точки зрения большой интерес представляет работа [54], где возникновение автоколебаний фронта кристаллизации рассматривается с позиций отклонения от термодинамического равновесия на границе раздела фаз.

В ряде работ [51, 55] появление периодических неоднородностей связывают с наличием концентрационного переохлаждения в расплаве. Последнее при выращивании монокристаллов полупроводников, как мы видели выше, достигается лишь при высоких концентрациях легирующей примеси и приводит к нарушению устойчивости гладкого фронта кристаллизации. В то же время полосы роста обнаруживаются и в очень чистых монокристаллах. Тем не менее наблюдаемая в сильно легированных монокристаллах зависимость величины периодической неоднородности от природы легирующей примеси и, в первую очередь, от величины коэффициента распределения [49, 56] свидетельствует о том, что накопление примеси в диффузионном слое расплава у фронта кристаллизации может играть определенную роль в процессе образования полос роста. При анализе причин возникновения периодических неоднородностей следует иметь в виду и возможное влияние конвекционных потоков в расплаве, вызывающих колебания температуры у фронта кристаллизации [57].

Одним из источников неравномерного распределения примесей в объеме монокристалла может явиться зависимость величины эффективного коэффициента распределения от ориентировки поверхности фронта кристаллизации. В работах [13, 58] при исследовании распределения сурьмы в германии было показано, что последовательное изменение направления выращивания от [100] к [110] и к [111] ведет к изменению коэффициента распределения в среднем на 5—10% при скоростях роста кристаллов до 20 см/час. Исследованиями особенностей распределения легирующих примесей в монокристаллах InSb было установлено, что при выращивании в направлении [111] в ряде случаев на выпуклой в сторону расплава границе раздела фаз развивается плоская грань (111) макроскопических размеров. Эффективные коэффициенты распределения Te, Se, S и ряда других примесей на грани (111) и на соседних с нею участках поверхности фронта кристаллизации различаются в несколько раз, что приводит к значительной неоднородности распределения этих примесей в объеме монокристаллов и к появлению так называемых «каналов» [59—61]. Это явление было названо «эффектом грани». Аналогичный эффект был обнаружен при выращивании монокристаллов

германия [50], кремния [62], арсенида галлия [63]. Оказалось, что при благоприятных условиях роста любая из плотноупакованных плоскостей системы (111) может давать «эффект грани». Значительное влияние на возможность развития граней оказывает форма фронта кристаллизации, ориентировка кристалла, тепловые условия раздела фаз, природа и концентрация легирующей примеси. Величина «эффекта грани» для различных примесей в одном и том же материале сильно различается. То же самое наблюдается для аналогичных примесей в разных полупроводниках.

Уже общее теоретическое рассмотрение показывает, что для появления плотноупакованной грани (111) на поверхности раздела фаз и для поддержания роста в пределах грани необходимо большее переохлаждение расплава, чем на соседних участках фронта кристаллизации. С учетом большего переохлаждения расплава при кристаллизации в пределах грани (111) в [64] сделана попытка объяснить увеличение концентрации легирующей примеси в области канала изменением состава кристаллизующейся фазы с понижением температуры кристаллизации, согласно кривой солидуса. Такое рассмотрение приводит к выводу о том, что интенсивность проявления «эффекта грани» должна возрастать с увеличением равновесного коэффициента распределения примесей (при $k < 1$), что далеко не всегда соблюдается на практике. По-видимому, более правильным является учет различия скоростей ступенчатого (слоистого) роста вдоль границы раздела фаз в пределах грани и на соседних с нею участках поверхности фронта кристаллизации, а также влияния адсорбции примесей в поверхностном слое растущего кристалла [65]. К сожалению, большая неопределенность значений величин, входящих в формулу для эффективного коэффициента распределения примесей в пределах грани [65], затрудняет точную экспериментальную проверку теории. Тем не менее теория позволяет дать качественное объяснение целому ряду экспериментально установленных фактов. Например, различие в поведении донорных и акцепторных примесей в монокристаллах кремния и германия (первые обнаруживают более высокую склонность к проявлению «эффекта грани») может быть, по-видимому, объяснено различием энергий их адсорбции на поверхности твердого тела, обусловленным проявлением

кулоновского взаимодействия в адсорбированном слое. Сравнительно небольшое изменение эффективных коэффициентов распределения легирующих примесей из-за проявления «эффекта грани» в кремнии, по сравнению с аналогичными эффектами в германии и особенно антимоне индия, — уменьшением адсорбции примесных атомов на поверхности кристалла с увеличением температуры плавления основного вещества. Следует иметь в виду, что возможность специфической адсорбции примесей в поверхностном слое фронта кристаллизации может обусловить не только абсолютную величину эффекта, но и в значительной степени повлиять на кинетику развития самой грани.

Рассмотренные выше особенности распределения легирующих примесей в объеме слитка присущи не только сильно легированным монокристаллам. В то же время специфика роста в условиях концентрационного переохлаждения приводит к возникновению неоднородностей, характерных только для сильно легированных полупроводников. К числу таких специфических неоднородностей относятся *сегрегация примесей по границам ячеек и внедрения второй фазы*. Рассмотрим эти явления более подробно.

Как было показано выше, образование выступов на поверхности фронта кристаллизации приводит к возникновению диффузионного потока примеси в направлении от вершины выступа к его основанию (см. рис. 6.2), следствием чего является повышение концентрации примесей по границам ячеек (для примесей с $k < 1$).

Теоретический анализ распределения примесей в кристалле при образовании ячеистых субструктур для случая выращивания из перемешиваемых расплавов приведен в работах [67, 68]. В предположении установившегося распределения примеси у поверхности раздела фаз, отсутствия диффузии в твердой фазе и постоянной концентрации примеси в объеме ячейки в [67] получено следующее выражение для средней величины избыточной концентрации примеси на границе ячейки (имеются в виду примеси с коэффициентами распределения $k < 1$):

$$\overline{\Delta C} = \frac{k^0 D}{m(1-k^0)} \left\{ \frac{[mC_\infty(1-k^0)/k^0 D] + \frac{G_S(0)}{f}}{W + k^0/(1-k^0)} \right\}, \quad (6.2.1)$$

где k^0 — равновесный коэффициент распределения примеси; D — коэффициент диффузии примеси в расплаве; m — наклон линии ликвидус; f — скорость кристаллизации; C_∞ — концентрация примеси в объеме расплава; $G_S(0)$ — температурный градиент в твердой фазе у границы раздела; W — отношение площади границ ячеек к общей площади ячеек на поверхности раздела.

Внося D под знак квадратных скобок и учитывая, что для перемешиваемых расплавов в установившемся состоянии величина $\frac{C_\infty}{k^0} = C_L(0)$ равна концентрации примеси в расплаве на фронте кристаллизации, а величина $\frac{D}{f} = \delta$ равна толщине диффузионного слоя [68], получим:

$$\overline{\Delta C} = \frac{k^0}{m(1-k^0)} \left\{ \frac{[mC_L(0)(1-k^0)] + G_S(0)\delta}{W + k^0/(1-k^0)} \right\}. \quad (6.2.2)$$

Преобразуем эту формулу для случая выращивания из перемешиваемых расплавов. Перемешивание расплава должно приводить к существенному уменьшению величин $C_L(0)$ и δ . Решение задачи распределения примеси в расплаве, перемешиваемом вращающимся кристаллом, для установившегося состояния было получено в [3] в следующем виде:

$$\frac{C_L(0) - C_S}{C_\infty - C_S} = e^\Delta, \quad (6.2.3)$$

где $\Delta = \frac{f\delta}{D}$; C_S — концентрация примеси в кристалле, определяемая как $C_S = k^0 C_L(0)$.

Из уравнения (6.2.3) можно найти величину $C_L(0)$ для перемешиваемых расплавов:

$$C_L(0) = \frac{C_\infty e^\Delta}{1 - k^0(1 - e^\Delta)}. \quad (6.2.4)$$

Толщина диффузионного слоя δ для перемешиваемых расплавов определяется по (6.1.5.). После подстановки значений $C_L(0)$ и δ в выражение (6.2.2) его можно, по-видимому, использовать для ориентировочной оценки степени сегрегации примесей по границам ячеек в кристаллах,

выращиваемых из перемешиваемых расплавов:

$$\overline{\Delta C} = \frac{k^0}{m(1-k^0)} \times \left\{ + \left[\frac{m(1-k^0) \frac{C_\infty e^{\Delta}}{1-k^0(1-e^{\Delta})}}{W + \frac{k^0}{1-k^0}} \right] + G_S(0) 1,6D^{1/3} \nu^{1/6} \omega^{-1/2} \right\} \quad (6.2.5)$$

Исследованию сегрегации примесей по границам ячеек в сильно легированных мышьяком монокристаллах кремния посвящена работа [69]. Теоретическая оценка величины $\overline{\Delta C}$ для образцов с правильной ячеистой структурой производилась по формуле (6.2.5). В образцах с сильно развитой неправильной ячеистой субструктурой, которая обычно наблюдается в области кристалла, непосредственно предшествующей дендритной кристаллизации, для оценки величины $\overline{\Delta C}$ можно, по-видимому, без особых погрешностей воспользоваться упрощенной формулой, выведенной в [67] в предположении, что, при фиксированных температурном градиенте в твердом теле и скорости кристаллизации, концентрация легирующей примеси в расплаве значительно превышает критическую величину, необходимую для возникновения концентрационного переохлаждения:

$$\overline{\Delta C} \approx \frac{C_\infty}{W + k^0/(1+k^0)} \quad (6.2.6)$$

Результаты расчетов представлены в таблице 6.2.

Результаты теоретической оценки степени сегрегации были сопоставлены с результатами, полученными из экспериментальных данных. Исследование структурных особенностей сильно легированных мышьяком монокристаллов показало, что ячеистая субструктура в них носит блочный характер. Углы разориентировки между блоками и фрагментами зависят от степени развития ячеистой субструктуры и меняются в пределах от 30 сек до нескольких минут [70].

Наиболее вероятной причиной блочного характера ячеистой субструктуры является преимущественная сегрегация примесей по границам ячеек. Повышенная концентрация

Таблица 6.2

Степень сегрегации примесей по границам ячеек в сильно легированных мышьяком монокристаллах кремния

№№ образца		1*)	2**)	3**)	4**)	
Средняя концентрация мышьяка в кристалле $C_S, \text{см}^{-3}$		$2,5 \cdot 10^{20}$ ***)	$7,9 \cdot 10^{19}$	$7,9 \cdot 10^{19}$	$6,0 \cdot 10^{19}$	
Угол разориентировки между блоками, ϑ . . .		$5'20''$	$2'00''$	$1'50''$	$1'10''$	
Линейная плотность дислокаций в границе $N_D, \text{см}^{-1}$ по (6.2.8) . .		$4,0 \cdot 10^4$	$1,5 \cdot 10^4$	$1,4 \cdot 10^4$	$9 \cdot 10^3$	
Степень сегрегации мышьяка по границам ячеек, ΔC	Теоретическая оценка	атомные доли	0,019	0,0063	0,0063	0,0054
		см^{-3}	$9,5 \cdot 10^{20}$	$3,1 \cdot 10^{20}$	$3,1 \cdot 10^{20}$	$2,7 \cdot 10^{20}$
	По величине угла ϑ	атомные доли	0,017	0,0065	0,0059	0,0039
		см^{-3}	$8,5 \cdot 10^{20}$	$3,2 \cdot 10^{20}$	$3,0 \cdot 10^{20}$	$2,0 \cdot 10^{20}$
*) Сильно развитая неправильная ячеистая структура. **) Правильная ячеистая структура. ***) $C_S = 2,5 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$ по данным активационного анализа.						

легирующей примеси в области границы (для примесей с $k < 1$) может явиться источником значительных местных внутренних напряжений, под влиянием которых здесь будут возникать ряды дислокаций. Возникновение дислокаций в результате неравномерного распределения примесей в кристалле рассмотрено в [67, 71, 72]. Задаваясь изменением концентрации примеси в области границы, авторы оценивали плотность вводимых за счет этого дислокаций и получали хорошее совпадение с экспериментальными данными.

Зная плотность дислокаций в границе, можно решить обратную задачу — оценить степень сегрегации примеси по границам ячеек. Будем считать границы ячеек наклонными, с малыми углами наклона и примем дислокационную модель границы. Тогда по величине угла разориентировки между блоками нетрудно определить линейную плотность дислокаций в границе.

Расстояние D_d между дислокациями в границах определяется как

$$\frac{b}{D_d} = 2 \sin \frac{\phi}{2}, \quad (6.2.7)$$

а для малых углов разориентировки $\frac{b}{D_d} \approx \phi$ [73]. Здесь b — вектор Бюргерса единичной дислокации ($b = 3,84 \cdot 10^{-8}$ см), ϕ — угол разориентировки. Отсюда линейная плотность дислокаций в границе

$$N_D = \frac{1}{D_d} \approx \frac{\phi}{b}. \quad (6.2.8)$$

Величина углов разориентировки между блоками для исследованных образцов и результаты расчета плотности дислокаций в границах, полученные по формуле (6.2.8), представлены в таблице 6.2.

Линейная плотность дислокаций в границе связана с местным изменением концентрации примеси $\overline{\Delta C}$ соотношением [67]:

$$N_D = \frac{1}{b} \left(\frac{\overline{\Delta C} \Delta \lambda}{\lambda} - \epsilon_l \right), \quad (6.2.9)$$

где ϵ_l — предел упругости; λ — атомный радиус атомов растворителя (например, Si); $\Delta \lambda$ — абсолютная разность атомных радиусов атомов растворителя (Si) и растворенного вещества (As).

В предположении, что все упругие макроскопические напряжения снимаются при образовании дислокаций (для случая ячеистых субструктур это предположение, по-видимому, достаточно хорошо соблюдается), величиной ϵ_l в формуле (6.2.9) можно пренебречь, и тогда

$$N_D \approx \overline{\Delta C} \frac{\Delta \lambda}{\lambda}. \quad (6.2.10)$$

Результаты расчетов величины $\overline{\Delta C}$ по формуле (6.2.10) с подстановкой в нее значений N_D , определенных по величине углов разориентировки, также представлены в таблице 6.2. В расчете использованы следующие численные значения входящих в формулу величин: $b = 3,84 \cdot 10^{-8}$ см; $\lambda_{Si} = 1,34 \cdot 10^{-8}$ см; $\lambda_{As} = 1,46 \cdot 10^{-8}$ см [74].

Для непосредственной оценки степени сегрегации примеси по границам ячеек был использован однозондовый метод измерения удельного сопротивления. Как видно из рис. 5.13 (см. выше), распределение удельного сопротивления по образцу носит периодический характер. В области границ ячеек удельное сопротивление минимально. Расстояние между впадинами на кривой распределения удельного сопротивления практически равно ширине ячеек, определенной при металлографическом исследовании образцов. Величина $\overline{\Delta C}$, рассчитанная по величине удельного сопротивления в области границы, равна $5,5 \cdot 10^{19}$ см⁻³, а теоретическая оценка, проведенная для того же образца по формуле (6.1.5), дает $\overline{\Delta C} = 1,9 \cdot 10^{20}$ см⁻³.

Как видно из приведенных выше данных, для большинства исследованных образцов результаты теоретической оценки степени сегрегации хорошо согласуются со значениями, полученными по величине углов разориентировки между блоками в предположении дислокационной природы границ ячеек. Для образцов со слабо развитой ячеистой структурой теория дает более высокие значения $\overline{\Delta C}$. И теоретические, и экспериментальные оценки показывают, что концентрация легирующей примеси по границам ячеек значительно превышает среднюю ее концентрацию в кристалле.

Включения второй фазы являются крайним случаем неоднородности в объеме монокристалла и характерны для наиболее сильно легированных слитков. Включения второй фазы были обнаружены в монокристаллах кремния, сильно легированных алюминием, сурьмой [77, 75], фосфором [76], галлием [78]; в монокристаллах германия, легированных мышьяком и галлием [79, 50], и в ряде других материалов. Для выявления включений использовались методы электрохимического и химического травления в различных средах, микрорентгеновский анализ, инфракрасная микроскопия,

измерение микротвердости. Для примесных элементов, дающих с полупроводником диаграмму состояния чисто эвтектического типа, выделения второй фазы носят характер эвтектики, например, в монокристаллах кремния, легированных алюминием и сурьмой, присутствуют легирующие

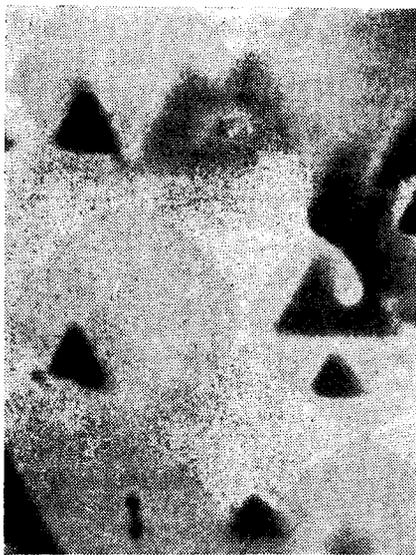


Рис. 6.6. Включения второй фазы в сильно легированных монокристаллах кремния при наблюдении в инфракрасном микроскопе (увеличение — 20).

в процессе охлаждения выращенного кристалла в результате распада пересыщенного твердого раствора. Образование пересыщенных твердых растворов для большинства рассмотренных выше систем маловероятно, так как примеси обладают ретроградной растворимостью в полупроводнике, при этом растворимость их при низких температурах, как правило, мало отличается от растворимости вблизи температуры плавления основного компонента [31]. Наиболее вероятной причиной образования включений является неравновесный

примеси в элементарном виде [75, 77]. Для систем, где возможно образование соединений полупроводник — легирующая примесь, выделения могут быть в форме соответствующих соединений. Например, в монокристаллах кремния, легированных до высоких концентраций мышьяком, обнаружены включения арсенида германия. Типичная картина распределения включений в объеме сильно легированного монокристалла кремния представлена на рис. 6.6.

Включения второй фазы при выращивании сильно легированных монокристаллов могут образовываться либо непосредственно в процессе кристаллизации, либо

захват растущим кристаллом капля расплава, сильно обогащенных примесями с очень малыми коэффициентами распределения при кристаллизации в условиях значительного концентрационного переохлаждения.

При теоретическом рассмотрении вопросов распределения примесей в кристаллах величина коэффициента распределения примеси принимается, как правило, постоянной. Это приближение является достаточно правомочным при выращивании кристаллов с малым содержанием примесей. При значительном содержании легирующей примеси в расплаве температура плавления кристаллизующего вещества может заметным образом измениться. В соответствии с ходом линий фазового равновесия на диаграммах состояния при этом должна измениться и величина коэффициента распределения. Для систем, образующих идеальные растворы, зависимость коэффициента распределения от температуры описывается соотношением [80]:

$$k = \exp \frac{Q}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_p} \right), \quad (6.2.11)$$

где R — универсальная газовая постоянная.

Для некоторых систем это соотношение хорошо выполняется на практике, например для системы германий — галлий [80]. Однако в ряде случаев наблюдаются весьма существенные отклонения от идеального поведения. Аномально резкое изменение коэффициента распределения в определенной области концентраций легирующей примеси обнаружено при выращивании легированных цинком монокристаллов антиминоида индия [81], антиминоида галлия [82] и арсенида галлия [83]. В связи с этим к выбору значений эффективных коэффициентов распределения при выращивании сильно легированных монокристаллов следует подходить осторожно и лучше всего использовать величины, определенные экспериментально.

§ 6.3. Структурные особенности сильно легированных полупроводников

Если содержание легирующей примеси еще далеко от предельной растворимости, а кристалл растет в условиях достаточной стабильности гладкого фронта кристаллизации.

повышение концентрации примеси в образце не является дополнительным источником дислокаций. Даже, наоборот, в ряде случаев увеличение концентрации легирующей примеси способствует получению бездислокационных монокристаллов [84, 85].

В [85] исследовались монокристаллы кремния, легированные до высоких концентраций бором, алюминием, фосфором, мышьяком и сурьмой. Кристаллы выращивались в направлении [111]. При этом не принималось никаких специальных мер для предотвращения развития дислокаций в слитках: плотность дислокаций в затравках составляла $5 \cdot 10^9$ — $1 \cdot 10^4$ $см^{-2}$; кристаллы выращивались без «перетяжек», в условиях значительных осевых температурных градиентов, фронт кристаллизации был заметно искривлен.

Плотность дислокаций в кристаллах определялась с помощью химического травления, декорирования медью, а также рентгенографически. Все три метода давали хорошо согласующиеся результаты.

В монокристаллах *p*-типа, легированных бором и алюминием, дислокации были обнаружены по всей длине слитков. Иначе вели себя монокристаллы *n*-типа: при определенной концентрации легирующей примеси дислокации в кристаллах исчезали. При легировании фосфором и мышьяком кристаллы становились бездислокационными, начиная с удельных сопротивлений $0,03$ $ом \cdot см$ ($N = 5 \cdot 10^{17}$ $см^{-3}$), а при легировании сурьмой — с $0,08$ $ом \cdot см$ ($N = 1 \cdot 10^{17}$ $см^{-3}$). Исследование верхних частей таких монокристаллов показало, что большая часть дислокаций, наследуемых слитком из затравки, постепенно прорастает к поверхности: это приводит к уменьшению плотности и, наконец, к исчезновению дислокаций. Увеличение начальной концентрации донорной легирующей примеси в кристалле при прочих равных условиях ускоряет процесс исчезновения дислокаций. Кристаллы *n*-типа остаются бездислокационными в широком диапазоне концентраций легирующей примеси.

Одним из решающих факторов, определяющих переползание дислокаций к поверхности, является увеличение концентрации вакансий. При выращивании бездислокационных монокристаллов кремния для пересыщения вакансиями даже рекомендуется на начальной стадии процесса вытягивать

кристалл с повышенными скоростями [86]. Принимая во внимание вакансионный механизм выхода дислокаций на поверхность кристалла, полученные результаты авторы [85] объясняют следующим образом.

Вакансии в германии и кремнии играют роль акцепторных центров. В связи с этим введение в кристалл донорной или акцепторной примеси может приводить к изменению концентрации вакансий за счет смещения электронно-дырочного равновесия в ту или иную сторону [87]. Если концентрация легирующей примеси N в кристалле намного меньше концентрации собственных носителей n_i в интервале температур пластической деформации материала, то концентрация вакансий в слитке при прочих равных условиях определяется тепловыми условиями выращивания. Когда величины N и n_i становятся сравнимыми, должно проявляться влияние легирующей примеси — наличие доноров будет приводить к увеличению концентрации вакансий в кристалле, а акцепторов — к ее уменьшению.

В соответствии с [88] (см. гл. 5) для случая полной ионизации акцепторных вакансий и при таких температурах, когда $N_D > n_i$, концентрация генерируемых вакансий в присутствии донорной примеси определяется выражением (5.1.12).

Таким образом, при введении достаточно большого количества донорной примеси равновесная концентрация вакансий в кристалле может значительно возрастать.

Очевидно, что вакансии наиболее полно способствуют переползанию дислокаций в монокристаллах при достаточно высоких температурах, когда дислокации обладают сравнительно большой подвижностью. Для кремния это — температуры выше 700° С. Расчеты показывают, что при 700° С концентрация n_i равна $5 \cdot 10^{17}$ $см^{-3}$ и возрастает до $3,0 \cdot 10^{19}$ $см^{-3}$ при 1400° С. В связи с этим следует ожидать, что заметное влияние донорных примесей на концентрацию вакансий, а соответственно и на переползание дислокаций в процессе выращивания монокристаллов, будет проявляться, начиная с $n_i \approx 5 \cdot 10^{17}$ $см^{-3}$, что хорошо согласуется с экспериментальными данными. В пользу предположения о повышенной концентрации вакансий в монокристаллах кремния, сильно легированных донорными примесями, говорят и результаты исследования механических свойств

бездислокационных образцов; введение донорных примесей приводит к разупрочнению монокристаллов *n*-типа и снижению энергии активации движения дислокаций, акцепторные примеси оказывают обратное влияние [89, 90].

Бездислокационные сильно легированные монокристаллы германия были получены при введении в образцы галлия [84]. При обсуждении полученных результатов



Рис. 6.7. Структура внешней поверхности сильно легированного монокристалла кремния.

авторы также исходят из того, что концентрация легирующей примеси оказывает существенное влияние на равновесную концентрацию вакансий. Рассматривая рост в условиях, когда переход дислокаций из затравки в кристалл ограничен, они считают, что при введении акцепторной примеси происходит снижение равновесной концентрации вакансий, приводящее к уменьшению размеров призматических петель, образующихся при конденсации вакансий, и затрудняющее генерацию новых дислокаций под влиянием термических напряжений. Последнее подтверждается результатами исследования дислокаций в сильно легированных монокристаллах германия *n*- и *p*-типа при их деформации.

Структурные особенности сильно легированных монокристаллов в условиях развития примесных структур рассмотрены на примере германия и кремния в работах [24, 49, 70]. Характерной особенностью сильно легированных монокристаллов является большая ширина «естественных» граней на поверхности слитка по сравнению с нелегированными кристаллами, выращенными в тех же условиях. При определенной концентрации легирующей примеси в кристалле, определяемой условиями выращивания, на поверхности слитка появляются характерные «борозды» (рис. 6.7). Борозды, как правило, начинаются от граней и распростра-

няются по обе стороны от них, образуя «елочку». Первоначально борозды имеют вид правильных тонких волокон. По мере выращивания кристалла и увеличения концентрации легирующей примеси в нем глубина борозд увеличивается, они становятся менее правильными и меняют свое направление и, наконец, сменяются дендритной структурой. Поверхность отрыва таких кристаллов от расплава имеет ярко выраженное ячеистое строение.

При травлении сильно легированных монокристаллов выявляется периодическое распределение примеси в объеме. При этом «полосы роста» в продольных и поперечных сечениях выражены в таких кристаллах более четко, чем в слабо легированных кристаллах. Для сильно легированных кристаллов характерно присутствие каналов, обусловленных проявлением эффекта грани. При приближении к области ячеистой структуры на фоне полос роста при травлении выявляются характерные бугорчатые образования, которые часто располагаются вполне закономерно, образуя в продольных и поперечных сечениях замысловатые картины с ясно выраженной центральной симметрией (рис. 6.8, *a*). С увеличением концентрации легирующей примеси количество таких образований в слитке увеличивается. Затем они сменяются ячеистой структурой. При фронте кристаллизации, выпуклом в сторону расплава, ячеистая структура начинает обычно развиваться от края слитка, а при вогнутом фронте — от его центра. Часто (особенно на ранних стадиях развития ячеистой структуры) не наблюдается однозначной связи структуры с бороздами на внешней поверхности кристалла: борозды появляются обычно значительно раньше, что характерно для кристаллов, выращенных с повышенными скоростями. По мере развития ячеистой субструктуры увеличивается растравливание границ между волокнами, а сами волокна становятся менее правильными.

Форма ячеек и направление их развития в значительной степени зависят от кристаллографической ориентировки кристалла в процессе выращивания. Так, например, при выращивании в направлении [111] сильно легированных мышьяком монокристаллов кремния ячеистая субструктура в поперечном сечении имеет на ранней стадии развития форму правильных волокон, располагающихся преимущественно в направлениях [110] (рис. 6.8, *b*). В результате

двойниковогоания по плоскости (111), расположенной под углом $19^{\circ}28'$ к оси роста, направление роста изменяется на [511], а ячейки в поперечном сечении приобретают форму правильных полиэдров (рис. 6.8, в).

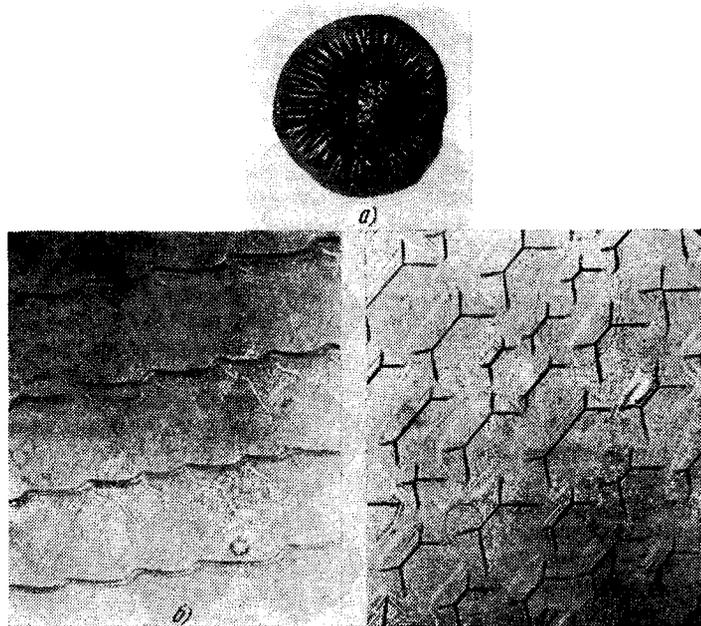


Рис. 6.8. Структурные особенности сильно легированных монокристаллов кремния (поперечное сечение).

а — бугорчатая структура; б — ячеистая структура при росте в направлении [111]; в — ячеистая структура при росте в направлении [511].

Интересно отметить, что и в области кристалла с ячеистой структурой (особенно на ранней стадии ее развития) сохраняется характерный для всего слитка периодический характер роста. В частности, при наличии в кристалле заметной спирально-слоистой неоднородности ячеистая структура развивается в первую очередь в слоях, обогащенных примесью.

Рентгенографическое исследование сильно легированных монокристаллов кремния [70] показало, что сильно развитая ячеистая структура в слитке имеет блочный характер; углы разориентировки между блоками достигают $12'$, что свидетельствует о значительном несовершенстве решетки монокристалла. Действительно, в области сильно развитой ячеистой субструктуры плотность дислокаций в кристаллах возрастает и достигает значений 10^4 — 10^5 $см^{-2}$ на границе перехода к дендритной структуре [70]. В [23] были обнаружены ряды дислокаций в области границ сильно развитых неправильных ячеек, а в [56] — дефекты типа дефектов упаковки. Источником структурных дефектов во всех этих случаях являются дополнительные напряжения, возникающие в кристалле из-за сегрегации примесей по границам ячеек.

Теоретическое рассмотрение генерации дислокаций из-за сегрегации примесей по границам ячеек проведено Тиллером [72]. Автор делает три предположения: 1) избыточная примесь сосредоточена в узком слое непосредственно по границам ячеек; 2) выполняется закон Вегарда, т. е. если ближайшие расстояния между прилежащими атомами в примесном веществе и в растворителе равны соответственно R_S и r_S , то среднее ближайшее расстояние между соседними атомами в сплаве, содержащем x частей примеси, дается выражением $R_{\text{сплава}} = r_S - x\Delta r$, где $\Delta r = r_S - R_S$; 3) все напряжения на границах ячеек при возникновении рядов дислокаций снимаются.

Результаты, полученные при этих предположениях для случая ячеек гексагональной формы, записываются следующим образом. Число дислокаций на 1 $см^2$ в плоскости, параллельной границе раздела,

$$\rho_{\parallel} = 4\Delta C \frac{|\Delta r|}{d \cdot r_S^3}, \quad (6.3.1)$$

где d — ширина ячейки; ΔC — избыточная концентрация примеси на границе.

В плоскости, перпендикулярной к границе раздела,

$$\rho_{\perp} = \frac{\rho_{\parallel}}{2}. \quad (6.3.2)$$

Из этих результатов следует, что в реальных условиях роста плотность дислокаций на границах ячеек, обусловленная сегрегацией примесей, может достигать $\sim 10^7$ $см^{-2}$.

В более поздней работе [67] Тиллер приводит общую формулу для числа дислокаций в единице объема кристалла, обусловленных микросегрегацией примесей:

$$n = \frac{\Phi}{b} \left(\frac{\overline{\Delta C} \Delta \lambda}{\lambda} - \epsilon_i \right), \quad (6.3.3)$$

где Φ — геометрический фактор, а остальные величины — те же, что и в (6.2.9). Для вытянутых ячеек $\Phi \approx \frac{4}{d}$, где d — расстояние между границами ячеек; для ячеек правильной формы $\Phi \approx \frac{8}{a}$. В любом плоском сечении плотность дислокаций должна составлять примерно $\frac{n}{2}$ линий на 1 см^2 .

Наблюдаемые в наиболее сильно легированных монокристаллах включения второй фазы также могут обусловить резкое увеличение плотности дислокаций в образце. В этом случае источником генерации дислокаций являются значительные внутренние напряжения, возникающие в слитке вблизи включений. Резкое увеличение плотности дислокаций вблизи включений наблюдалось в монокристаллах кремния, легированных алюминием и сурьмой [75], а также в монокристаллах германия с мышьяком [92], галлием [50], висмутом [93]. Отличительной особенностью этих дислокаций является то, что они, как правило, сосредоточены в непосредственной близости от включений и слабо распространяются в остальной объем кристалла (рис. 6.9).

Большие внутренние напряжения, обусловленные наличием резкого градиента концентрации примеси в образце, могут приводить к возникновению большого количества дислокаций и в процессах диффузии. Значительное увеличение плотности дислокаций в монокристаллах кремния при диффузии в них фосфора или бора обнаружено в ряде работ [94—97]. Аналогичные результаты получены при диффузионном введении цинка в арсенид галлия [98].

Таким образом, если при получении слабо легированных монокристаллов полупроводников основным источником возникновения дислокаций являются, по-видимому, термические напряжения, то при сильном легировании сама примесь оказывает весьма существенное влияние на процесс генерации дислокаций.

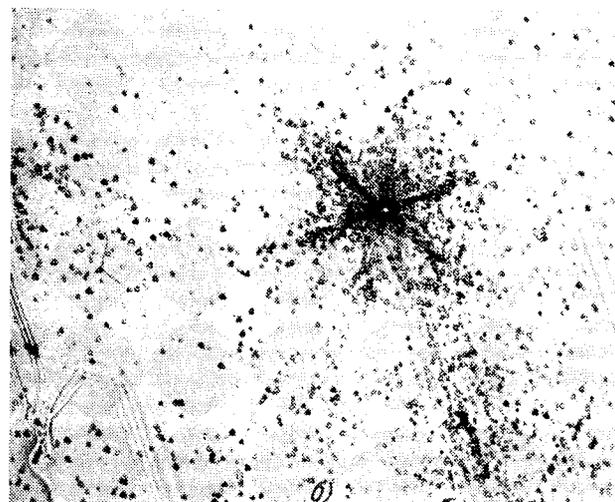
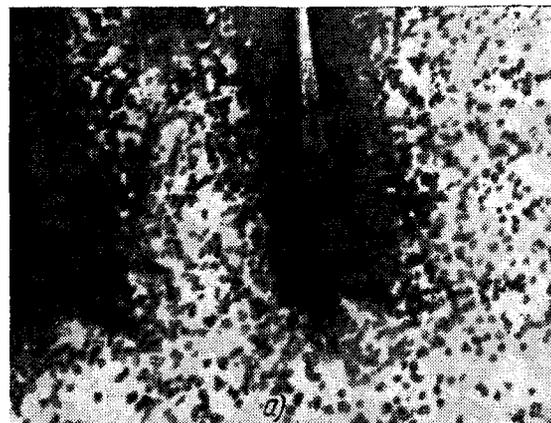


Рис. 6.9. Увеличение плотности дислокаций вблизи включений в сильно легированных монокристаллах кремния.

а) — Si — Al; б) — Si — Sb ($\times 150$).

§ 6.4. Получение сильно легированных монокристаллов

Для получения сильно легированных монокристаллов полупроводников можно использовать процессы кристаллизации из расплава, из газовой фазы, а также диффузию.

Так как вероятность концентрационного переохлаждения при кристаллизации из расплава в условиях значительного содержания легирующей примеси в системе расплав — кристалл весьма велика, то при этом требуется тщательный подбор режимов выращивания монокристалла. Рекомендуется выращивать кристаллы с меньшими скоростями, чем для слабо легированных полупроводников, а также в условиях хорошего перемешивания расплава и значительного положительного температурного градиента у границы раздела фаз [99, 100].

Наиболее распространенным методом выращивания сильно легированных монокристаллов из расплава является метод Чохральского. Большую роль играет правильность выбора легирующей добавки. Легирующая примесь должна обладать высокой растворимостью в полупроводнике и иметь достаточно близкий к единице коэффициент распределения — все это облегчает ее введение в кристалл. С этой точки зрения для германия наиболее благоприятной легирующей примесью является галлий, гораздо труднее выращивать монокристаллы германия, легированные до высоких концентраций сурьмой, мышьяком и фосфором. Для получения сильно легированных монокристаллов кремния успешно используются бор, фосфор, мышьяк. Легирование до высоких концентраций арсенида галлия и антимонидов можно осуществлять цинком и теллуrom.

Легирующая примесь может быть введена в расплав либо в элементарном состоянии, либо в виде лигатуры (сплава полупроводника с легирующей примесью) [99—100]. Если примесь обладает большой летучестью из расплава, то выращивание монокристаллов производят, как правило, в атмосфере инертного газа. Перспективным методом получения сильно легированных монокристаллов является легирование из газовой фазы. В этом случае над расплавом обычно пропускают смесь инертного газа или водорода с каким-либо легко летучим соединением легирующей

примеси, например галогенидом [101, 102] или гидридом [103]. Расплав взаимодействует с газовой фазой и восстанавливает легирующий элемент из его соединения. Восстановленный легирующий элемент частично растворяется в расплаве. Регулируя содержание легирующей примеси в газовой фазе, а также скорость газового потока, можно в широких пределах изменять концентрацию и характер распределения примеси в выращиваемом образце, в том числе получать однородные по длине сильно легированные монокристаллы. Легированием из газовой смеси галлия и треххлористого мышьяка в процессе выращивания по Чохральскому были получены сильно легированные мышьяком монокристаллы кремния [101]. Галогениды элементов V группы были использованы при получении сильно легированных монокристаллов кремния в процессе бестигельной зонной плавки [102]; в [103] для этих целей использовался фосфин.

При выращивании монокристаллов разлагающихся полупроводниковых соединений типа арсенидов и фосфидов элементов III группы, когда процесс проводится в герметичной и термостатированной при высокой температуре аппаратуре, для легирования из газовой фазы могут успешно использоваться легирующие примеси в элементарном состоянии. В этом случае высокая температура стенок рабочей ампулы обеспечивает достаточно высокую упругость паров легирующей примеси в рабочем пространстве, а следовательно, и в кристалле.

Оригинальной разновидностью кристаллизации из расплава является метод «испарения растворителя» [104, 105]. В этом методе используются расплавы, обогащенные до значительных концентраций (10—20%) легирующей примесью. Расплав поддерживается при постоянной температуре, а летучая легирующая примесь из него постепенно испаряется. При этом расплав становится пересыщенным по отношению к полупроводнику и последний кристаллизуется на специально вводимой в ванну затравке. Затравка может вращаться и по мере кристаллизации подниматься вверх. Преимуществом этого процесса является то, что он протекает в изотермических условиях, что способствует повышению гомогенности получаемых монокристаллов. Таким путем получены монокристаллы германия и кремния,

легированные до высоких концентраций мышьяком и сурьмой.

Выращивание сильно легированных монокристаллов из расплава можно осуществить и по варианту плавки с температурным градиентом [106], а также направленной кристаллизацией в лодочке. Последний метод широко используется при получении сильно легированных монокристаллов разлагающихся полупроводниковых соединений [107].

В настоящее время кристаллизацией из расплава успешно выращиваются монокристаллы германия, легированные галлием до концентраций $(1 \div 2) \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$, мышьяком — до $(6 \div 8) \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ [99, 100]; монокристаллы кремния, легированные бором до концентраций $(2 \div 4) \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$, мышьяком и фосфором — до $(1 \div 1,5) \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$ [29, 75]; монокристаллы арсенида галлия, легированные цинком до $(1 \div 2) \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$, теллуrom — до $1 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ [107, 108], а также сильно легированные монокристаллы ряда других полупроводников.

Кристаллизация из газовой фазы получила широкое распространение в связи с развитием технологии получения монокристаллических эпитаксиальных пленок. Этим методом сравнительно просто могут быть получены сильно легированные монокристаллы. Легирующая примесь вводится в рабочее пространство печи либо в виде легколетучего соединения (галогенида, гидрида), либо в элементарном состоянии. Добавка элементарной примеси используется обычно при кристаллизации полупроводниковых соединений с летучей компонентой. Концентрация примеси в газовой фазе регулируется составом газовой смеси, а в случае элементарных добавок — температурой источника. Кристаллизация из газовой фазы производится при более низких температурах, чем при выращивании из расплава. Так как большинство легирующих примесей в основных полупроводниках обладает ретроградной растворимостью, то при кристаллизации из газовой фазы температура подложки может быть выбрана близкой к температуре, соответствующей максимальной растворимости примеси в полупроводнике — это обеспечит введение примеси в кристалл с максимальной концентрацией. Увеличению предельно достижимой концентрации примеси в образце способствуют и очень малые скорости роста, имеющие место при кри-

сталлизации из газовой фазы. Кристаллизацией из газовой фазы успешно выращиваются сильно легированные монокристаллические пленки кремния [108], арсенида галлия [109, 110] и ряда других полупроводников.

Одним из методов получения сильно легированных монокристаллов является диффузия. В этом случае в качестве исходных монокристаллов используются заранее выращенные монокристаллы. Для легирования монокристаллов используется метод диффузионного проникновения примеси в образец при высокотемпературном отжиге. Процессы диффузии осуществляются обычно в специальных высокотемпературных печах, где создается устойчивая атмосфера паров примеси над кристаллом. Концентрация примеси в образце определяется содержанием ее в газовой фазе и температурой диффузии. Часто примесь наносят непосредственно на образец химически, электролитически или путем напыления, а затем отжигают кристалл в атмосфере инертного газа. Одним из основных недостатков диффузионного метода легирования является большая длительность процесса, так как основные электрически активные примеси с мелкими уровнями образуют с полупроводником твердые растворы замещения и имеют очень малые коэффициенты диффузии в кристалле. Тем не менее легирование путем диффузии нашло широкое распространение [111—114].

ГЛАВА 7

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ
СИЛЬНО ЛЕГИРОВАННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

§ 7.1. Туннельные диоды

Принцип действия туннельного диода. До появления туннельного диода физика и техника полупроводниковых приборов оперировала с полупроводниками, концентрация примеси в которых не превышала 10^{16} — 10^{17} см^{-3} . Соответственно и концентрация свободных носителей заряда в них была

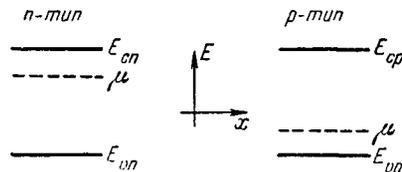


Рис. 7.1. Положение уровня Ферми в слабо легированном полупроводнике.

такого же порядка и даже меньше. При этом относительное расположение уровня Ферми и границ зон в таких полупроводниках имело вид, приведенный на рис. 7.1. Энергетическая структура $p-n$ -перехода (в условиях термодинамического равнове-

сия), образованная в таких кристаллах, соответствовала схеме рис. 7.2. Толщина $p-n$ -перехода, как известно [1], определяется выражением

$$L = 1,05 \cdot 10^8 \left[\frac{\kappa (U_k - U)}{2\pi e} \cdot \frac{N_d + N_a}{N_d \cdot N_a} \right]^{1/2} \text{ см}, \quad (7.1.1)$$

где κ — диэлектрическая постоянная; e — заряд электрона; N_d и N_a — концентрации ионизованных доноров и акцепторов по обе стороны $p-n$ -перехода; U_k — контактная разность на переходе и U — внешнее напряжение, приложенное к нему.

При концентрациях примесей 10^{16} — 10^{17} см^{-3} толщина $p-n$ -перехода в германии составляет примерно 10^{-4} — 10^{-5} см . Электрическое поле \mathcal{E} в таком переходе в отсутствие смещения также невелико. Для германия, например, оно составит величину

$$\mathcal{E} \approx \frac{U_k}{L} \sim 10^3 - 10^4 \text{ в/см}.$$

Таким образом, $p-n$ -переход в обычном диоде характеризуется достаточно большой толщиной и относительно малой напряженностью поля. В этом случае заброс электронов в свободную зону, т. е. преодоление ими некоторого энергетического барьера, может происходить лишь при сообщении им дополнительной энергии. Случай сильных полей в обычном $p-n$ -переходе реализуется лишь при больших напряжениях. При этом сильное поле ($\mathcal{E} \sim 10^5$ в/см) приводит к возникновению добавочных носителей заряда,

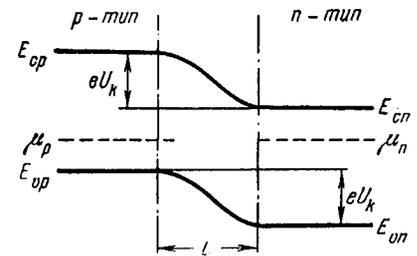


Рис. 7.2. Схема энергетических зон в $p-n$ -переходе обычного полупроводникового диода.

число которых значительно увеличивается с ростом поля. Большим числом работ (основные из них изложены в [2, 3]) было установлено, что наиболее вероятным механизмом, обуславливающим увеличение числа носителей, является

Рис. 7.3. Положение уровня Ферми в сильно легированном полупроводнике.

ударная ионизация. Наряду с ударной ионизацией сильное поле может непосредственно перебрасывать носители из заполненной зоны в свободную. Такое вырывание по своей природе сходно с холодной эмиссией электронов из металла. Наиболее отчетливо этот механизм проявился в туннельных диодах, появившихся в 1958 году [4].

В отличие от обычных полупроводников, в туннельном диоде применяются полупроводники, содержащие примеси в количестве 10^{18} — 10^{20} см^{-3} . Энергетический спектр их

уже будет описываться схемой, представленной на рис. 7.3. Структура зон в условиях равновесия в $p-n$ -переходе, изготовленном в таком полупроводнике, показана на рис. 7.4. Толщина $p-n$ -перехода в этом случае, как следует из (7.1.1), уменьшится до $100-200 \text{ \AA}$. Напряженность поля на переходе резко возрастет до величины 10^5-10^6 в/см . В этих условиях электрону в зоне проводимости n -области кристалла не надо сообщать дополнительную энергию для преодоления энергетического барьера. Он может оказаться на другой стороне $p-n$ -перехода

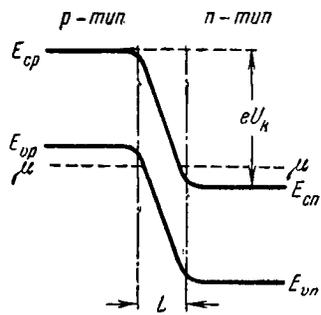


Рис. 7.4. Схема энергетических зон (при отсутствии смещения) в $p-n$ -переходе туннельного диода.

в валентной зоне в силу так называемого *туннельного перехода*, обязанного *туннельному эффекту* [5], при котором он как справа, так и слева от барьера находится на одном энергетическом уровне. При этом можно считать, что токи справа налево и слева направо равны по величине и общий ток равен нулю. Если к такому $p-n$ -переходу приложить малое напряжение в пропускном направлении, то уровни

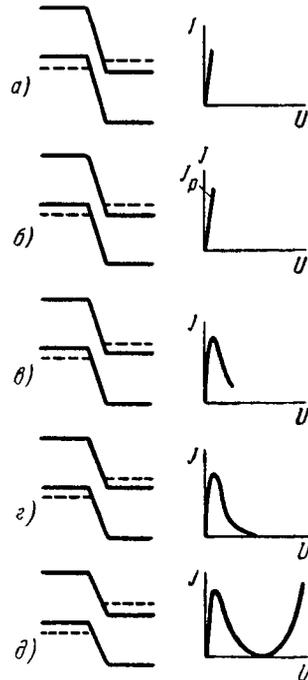


Рис. 7.5. Схема энергетических зон и вольтамперная характеристика туннельного диода при различных значениях положительного смещения.

Ферми по обе стороны перехода не будут уже находиться на одной горизонтали (рис. 7.5, а). Количество электронов, просачивающихся справа налево, будет больше, чем количество электронов, проходящих слева направо. Через $p-n$ -переход потечет ток, характеристика которого приведена на том же рисунке справа.

Если увеличить смещение до величины, при которой уровень Ферми μ_p окажется на одной горизонтали с краем зоны E_{cn} , ток увеличится и достигнет значения J_p (рис. 7.5, б). Дальнейшее увеличение приложенного напряжения повлечет уменьшение тока (рис. 7.5, в), так как против той части электронов, которые могли бы перейти налево, оказываются запрещенные уровни. Наконец, при расположении краев зон E_{vp} и E_{cn} на одной горизонтали, ток упадет до нуля (рис. 7.5, г). Дальнейшее увеличение смещения вызывает протекание через $p-n$ -переход обычного диодного тока (рис. 7.5, д). Нетрудно убедиться, что смещение $p-n$ -перехода в противоположном направлении приведет к сильному росту тока.

Таким образом, ток туннельного диода является суммой двух токов — туннельного и обычного диффузионного. В реальных приборах туннельный ток никогда не спадает до нуля. Он может достигать достаточно больших величин, составляющих, например, в кремниевых туннельных диодах $1/4$ от величины J_p [6]. Этот вопрос будет рассмотрен ниже.

Туннельный эффект в полупроводниках. Туннельный эффект — явление квантовомеханическое. Оно может быть понято из рассмотрения рис. 7.6. На этом рисунке показана толщина барьера в обычном диоде (ac) и в туннельном (ab). Видно, что из-за узости второго барьера имеется отличная от нуля вероятность нахождения частицы справа от этого барьера.

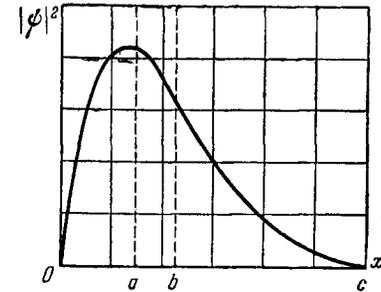


Рис. 7.6. Плотность вероятности нахождения электрона в пространстве.

Для простоты взят одномерный случай.

Ясно, что коэффициент просачивания частицы P , например, слева направо сквозь барьер будет определяться формулой

$$P = \frac{|\psi_{0a}|^2}{|\psi_{bc}|^2}, \quad (7.1.2)$$

где ψ_{0a} и ψ_{bc} — амплитуды волновых функций частицы по обе стороны от барьера, значения которых определяются из уравнения Шредингера.

Впервые для полупроводника (но не для $p-n$ -перехода) механизм туннельного эффекта количественно рассмотривался Зенером [7]. Выражение для коэффициента просачивания, наиболее корректно полученное в работе [8], имеет вид:

$$P = \exp\left(-\frac{\pi}{2e\hbar\mathcal{E}} \sqrt{2m^* E_g^{3/2}}\right), \quad (7.1.3)$$

где m^* — эффективная масса электрона, E_g — ширина запрещенной зоны для данного полупроводника.

Это выражение получено для барьера треугольной формы. Конкретизация формы барьера вряд ли имеет смысл, так как длина волны де-Бройля проходящей частицы должна быть много меньше ширины барьера, т. е. электрическое поле не должно меняться на расстоянии, равном длине волны де-Бройля. Легко показать, что λ составляет примерно 30 \AA , а толщина $p-n$ -перехода, как уже указывалось, — 100 \AA , т. е. условие квазиклассичности не выполняется. Тем не менее такой подход позволяет понять основные закономерности явления.

Для того чтобы получить выражение для числа электронов, просачивающихся сквозь барьер в единице объема за единицу времени W , надо выражение (7.1.2) умножить на число валентных электронов N в единице объема и на частоту столкновений частиц с барьером. Таким образом, окончательно имеем [6]:

$$W = N \frac{ae\mathcal{E}}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{\pi}{2e\hbar\mathcal{E}} \sqrt{2m^* E_g^{3/2}}\right], \quad (7.1.4)$$

где a — период решетки кристалла.

Из этого выражения следует, что больший эффект будет наблюдаться в полупроводниках с малыми величинами E_g

и m^* . Для наглядности на рис. 7.7 приведены результаты расчетов по формуле (7.1.4) для некоторых полупроводников [9].

Дальнейшее развитие теории туннельного эффекта в полупроводниках получила в работе Франца и Теворда [10] и особенно в работах Келдыша [11, 12]. Келдыш рассмотрел трехмерную задачу и получил выражение для W в виде [11]

$$W = \frac{1}{4} N \frac{a^3 e^2 \mathcal{E}^2 \sqrt{m_{\parallel}}}{\pi \hbar^2 \sqrt{E_0}} \exp\left[-\frac{\pi}{2e\hbar\mathcal{E}} \sqrt{m_{\parallel}} E_0^{3/2} + f(\gamma)\right], \quad (7.1.5)$$

где E_0 — характеристическая энергия межзонного перехода электрона; $f(\gamma)$ — фактор, определяющий угловую зависимость; m_{\parallel} — некая формальная величина, определяемая как

$$m_{\parallel} = \frac{1}{\sum_i (\cos \gamma_i)^2 / m_i}, \quad (7.1.6)$$

где, в свою очередь, m_i^{-1} — главные значения тензора $(m_{ik}^*)^{-1}$, а γ_i — углы между направлением поля и главными осями этого тензора.

Выражение (7.1.5) отличается от (7.1.4) иной зависимостью от поля предэкспоненциального множителя и наличием угловой зависимости в экспоненте. Но наиболее существенное отличие заключается в трактовке величин E_0 и m_{\parallel} . Эти величины принимают соответственно значения E_g и m^* только в том случае, если наивысшее состояние валентной зоны и наинизшее состояние зоны проводимости соответствуют одному и тому же значению квазимпульса (рис. 7.8, а). В этом случае обычно говорят, что имеет место *прямой переход*. Если же указанные состояния не совпадают, то величина E_0 , отождествляемая с красной границей

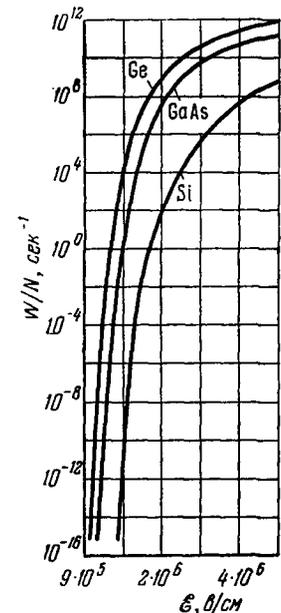


Рис. 7.7. Вероятность туннельного перехода электрона в зависимости от напряженности поля от $p-n$ -перехода.

поглощения света для данного полупроводника, будет всегда больше чем E_g . В силу этого, величины критических полей, соответствующие ощутимым значениям W , должны быть больше, чем те, которые следуют из (7.1.4).

Келдыш далее показал, что если имеется какое-либо взаимодействие, изменяющее квазиимпульс электрона, то прохождение электрона в зону проводимости возможно и при смещении максимума валентной зоны относительно

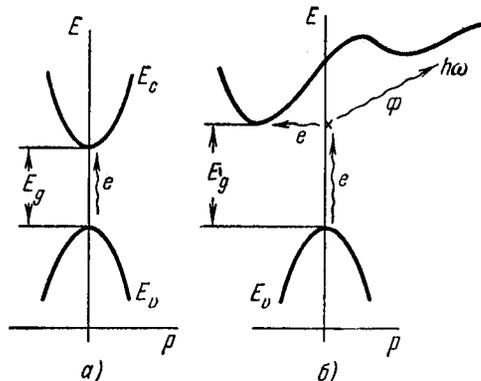


Рис. 7.8. Туннельный эффект в различных полупроводниках:
а — прямой туннельный переход; б — непрямой туннельный переход.

минимума зоны проводимости (рис. 7.8, б). Этот переход называется *непрямым*. Взаимодействиями, изменяющими квазиимпульс электрона, могут являться столкновения электронов друг с другом, с примесными атомами, с фононами. В последнем варианте взаимодействия величина W будет определяться так [12]:

$$W \sim \left(\frac{e\hbar\mathcal{E}}{\sqrt{2m_{\parallel}^*} E_g^{3/2}} \right)^{3/2} \exp \left[f(\gamma) - \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2m_{\parallel}^*}}{e\hbar\mathcal{E}} (E_g - \hbar\omega)^{3/2} \right] \times \\ \times \left\{ \bar{N}(T) + [1 + \bar{N}(T)] \exp \left(-\frac{4}{3} \frac{\sqrt{2m_{\parallel}^*} E_g}{e\hbar\mathcal{E}} \hbar\omega \right) \right\}, \quad (7.1.7)$$

где ω — частота фонона; $\bar{N}(T) = (e^{\hbar\omega/kT} - 1)^{-1}$. В отличие от (7.1.5), здесь m_{\parallel}^* — приведенная эффективная масса электрона и дырки.

Количественное рассмотрение туннельного эффекта в *p-n*-переходе. На основании качественных рассуждений, относящихся к описанию рис. 7.5, Есаки [4] предположил, что туннельный ток из зоны проводимости *n*-области кристалла в валентную зону *p*-области $J_{c \rightarrow v}$ будет, кроме вероятности туннельного эффекта, пропорционален еще и вероятности $f_c(E)$ нахождения электрона в зоне проводимости справа от перехода (рис. 7.5) на энергетическом уровне E , вероятности незанятости этого же уровня в валентной зоне слева от перехода $[1 - f_v(E)]$ и плотности энергетических состояний в зонах $\rho_c(E)$ и $\rho_v(E)$:

$$J_{c \rightarrow v} \sim \int_{E_c}^{E_v} W_{c \rightarrow v} f_c(E) [1 - f_v(E)] \rho_c(E) \rho_v(E) dE. \quad (7.1.8)$$

Аналогично и для туннельного перехода из валентной зоны слева в зону проводимости справа:

$$J_{v \rightarrow c} \sim \int_{E_c}^{E_v} W_{v \rightarrow c} f_v(E) [1 - f_c(E)] \rho_c(E) \rho_v(E) dE. \quad (7.1.9)$$

Полный ток Есаки рассматривает как разность этих токов. При этом он считает, что зоны параболичны и что $W_{c \rightarrow v} = W_{v \rightarrow c}$, тогда

$$J \sim \int_{E_c}^{E_v} W [f_c(E) - f_v(E)] \sqrt{(E - E_c)(E_v - E)} dE. \quad (7.1.10)$$

Это выражение, основанное лишь на общих физических рассуждениях, дано Есаки без доказательства, поэтому оно не может являться количественным выражением вольт-амперной характеристики туннельного диода. Тем не менее его простота и наглядность позволяют уяснить физическую природу туннельного диода.

В частном случае в предположении, что *p*- и *n*-области кристалла вырождены в одинаковой степени, причем так, что уровень Ферми внутри зон находится на расстоянии $2k_0T$ от E_v и E_c соответственно, (7.1.10) переходит в (7.1.11) [14]:

$$J = -A \frac{(E_v - E_c)^2 \left[1 - \exp \left(\frac{eU}{k_0T} \right) \right]}{[m + n] e^{\frac{\alpha}{2}} + \left[1 + \exp \left(\frac{eU}{k_0T} \right) \right]}, \quad (7.1.11)$$

где

$$m = \exp\left(-\frac{\mu_c - E_c}{k_0 T}\right), \quad n = \exp\left(\frac{E_v - \mu_v}{k_0 T}\right), \quad \alpha = \frac{E_v - E_c}{k_0 T}.$$

Идеи Есаки были развиты в работе Иванчика [15], который, пользуясь методом Томаса — Ферми [16], вычислил ход потенциала в $p-n$ -переходе, обе стороны которого — вырожденные полупроводники. Зная ход потенциала, Иванчик вычисляет туннельный ток, выражение которого довольно громоздко, и поэтому здесь не приводится. Достаточно сказать, что формулу Иванчика, данную им в виде интеграла, можно представить полиномом восьмой степени, чтобы стало ясным, насколько трудно ее сопоставить с результатами эксперимента. Качественно же она вполне удовлетворительно передает зависимость туннельного тока от величины смещения (рис. 7.9).

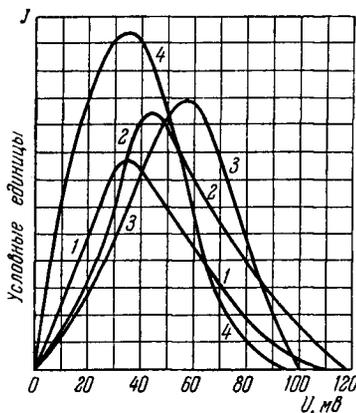


Рис. 7.9. Расчетные зависимости тока от напряжения на $p-n$ -переходе туннельного диода:

1 — по данным Есаки; 2 — по данным Прайса; 3 — по данным Иванчика; 4 — по данным Кэйна.

Квантовомеханически задача о туннельном токе сквозь $p-n$ -переход рассматривалась Прайсом и Радклифом [16]. Их решение для прямых переходов представлено в виде интеграла

$$J = \frac{2\pi e m_r^* P \mathcal{E}}{ah^3} \int [f_c(E) - f_v(E)] g(E_1) g(E_2) dE, \quad (7.1.12)$$

где m_r^* — приведенная эффективная масса, равная

$$m_r^* = \frac{m_p^* m_n^*}{m_p^* + m_n^*}. \quad (7.1.13)$$

Множители $g(E)$ равны нулю вне области перекрытия зон, а внутри этой области они равны единице.

Для этой области интеграл (7.1.12) можно проинтегрировать в пределах от нуля до $E_v - eU$:

$$J = \frac{2\pi e m_r^* k_0 T E_g P}{ah^3 L} \left\{ k_0 T \left[\ln\left(1 + e^{\frac{E_v - \mu - eU}{k_0 T}}\right) + \ln\left(1 + e^{\frac{-\mu - eU}{k_0 T}}\right) - \ln\left(1 + e^{\frac{E_v - \mu - 2eU}{k_0 T}}\right) - \ln\left(1 + e^{\frac{\mu}{k_0 T}}\right) \right] \right\}. \quad (7.1.14)$$

Если подставить в (7.1.14) выражения (7.1.1) и (7.1.3), определяющие L и P , то формула, описывающая вольтамперную характеристику, становится трудно обозримой для экспериментатора.

Сравнивая расчеты по формулам Есаки, Иванчика и Прайса, приведенные на рис. 7.9, можно видеть, что все они дают качественное сходство с наблюдаемыми на опыте вольтамперными характеристиками туннельного тока. К сожалению, отсутствие четкого представления о численных значениях величин, входящих в расчетные формулы, затрудняет количественное сопоставление этих формул с опытом.

Более целесообразным, на наш взгляд, является подход Кэйна [17] и Бонч-Бруевича [18].

Кэйн предположил, что электрическое поле в $p-n$ -переходе туннельного диода однородно. В этом случае при температуре абсолютного нуля выражение для плотности туннельного тока имеет вид:

$$j = \frac{em^*}{18h^3} \exp\left\{-\frac{\pi(m^*)^{1/2} E_g^{3/2}}{2\sqrt{2}\hbar\mathcal{E}}\right\} \int \exp\left(-\frac{2E_{\perp}}{\bar{E}_{\perp}}\right) dE dE_{\perp}, \quad (7.1.15)$$

где

$$E_{\perp} = \frac{\hbar^2(k_y^2 + k_z^2)}{2m^*}, \quad (7.1.16)$$

$$\bar{E}_{\perp} = \frac{\sqrt{2}\hbar\mathcal{E}}{\pi(m^*)^{1/2} E_g^{3/2}}. \quad (7.1.17)$$

Множитель перед интегралом представляет собой коэффициент просачивания электронов из-за туннельного эффекта. Этот множитель в теории Кэйна считается постоянным.

Вид вольтамперной характеристики, следовательно, зависит от хода функции $D(U)$, которой Кэйн обозначает интеграл в выражении (7.1.15). Аналитически функция $D(U)$ представляется Кэйном в виде большого числа формул, описывающих по участкам всю вольтамперную характеристику туннельного диода. При графическом построении результатов расчетов по формулам Кэйна все участки смыкаются непрерывно, образуя единую плавную кривую $D(U)$. На рис. 7.9 для примера приведена зависимость $D(U)$ для случая

$$E_{cn} - \mu_n = E_{vp} - \mu_p$$

при прямых туннельных переходах.

Кэйн рассмотрел также и не прямые переходы. Это рассмотрение читатель найдет в статье [17].

Бонч-Бруевич в ранней работе [18] рассматривает не всю вольтамперную характеристику, а лишь ее экстремальные точки. Так, напряжение U_p , соответствующее максимуму туннельного тока, он определяет формулой

$$U_p = \frac{1}{6e} \{ 2(E_{vp} - \mu_p) - (\mu_n - E_{cn}) + \\ + \sqrt{[2(E_{vp} - \mu_p) + (\mu_n - E_{cn})]^2 + 4(E_{vp} - \mu_p)(\mu_n - E_{cn})} \}. \quad (7.1.18)$$

В настоящее время, по-видимому, такой подход наиболее целесообразен с точки зрения экспериментатора. При этом получаются простые и удобные для пользования выражения, и величины, входящие в них, имеют ясный физический смысл и определенные числовые значения.

Полную теорию вольтамперной характеристики туннельного диода для случаев прямых и не прямых переходов, для $T = 0$ и для $T \neq 0$, выполненную с учетом неоднородного (по распределению поля) $p-n$ -перехода, читатель найдет в более поздних работах В. Л. Бонч-Бруевича с П. С. Серебрянниковым [71, 72].

Полупроводники, применяемые в туннельных диодах. Качественная картина, описывающая принцип действия туннельного диода, позволяет сделать вывод о необходимости

применения в них вырожденных полупроводников. При комнатной температуре в таких полупроводниках все примеси ионизованы [19, 20], поэтому можно найти степень легирования, необходимую для осуществления туннельного эффекта. Это легко сделать, воспользовавшись выражением (2.3.4), связывающим концентрацию носителей и уровень Ферми. Для приближенной оценки можно считать, что началом вырождения будет условие $\mu_n = E_c$, т. е. $\mu^* = 0$. В последнем столбце таблицы 7.1 приведены значения минимально необходимой концентрации доноров, обеспечивающей получение $p-n$ -перехода с туннельным эффектом в различных полупроводниках. В действительности требуется еще большая степень легирования.

Таблица 7.1

Полупроводник	$\frac{m^*}{m_0}$	E_g , эВ	$n_{экр}$, см ⁻³	$(N_d)_{мин}$, см ⁻³
Ge	0,15	0,65	$4 \cdot 10^{19}$	$3,5 \cdot 10^{18}$
Si	0,27	1,10	$1,4 \cdot 10^{20}$	$8,5 \cdot 10^{18}$
GaAs	0,06	1,35	$7 \cdot 10^{19}$	$9,0 \cdot 10^{17}$
InSb	0,04	0,18	$6 \cdot 10^{17}$	$4,8 \cdot 10^{17}$

Получение подобных сильно легированных полупроводников, как было показано в главе 6, является далеко не тривиальной задачей. Сильное легирование можно провести с малым числом примесей, имеющих большие значения предельной растворимости. Для германия и кремния этот вопрос достаточно хорошо исследован (см. рис. 5.1 и 5.2), а для полупроводников — соединений элементов III и V групп периодической системы (GaAs, InSb, GaSb и др.) пределы растворимости примесей достоверно пока не установлены. Имеются лишь сведения [27, 28, 29], позволяющие утверждать, что наиболее пригодны системы n -типа: GaAs + Sn, InSb + Te и p -типа: GaAs + Zn, InSb + Cd.

В то же время туннельный эффект наблюдался и в арсениде галлия с примесями серы и селена [21], хотя в этих случаях имеется опасность образования химических соединений этих элементов с GaAs.

Свойства кристалла определяют плотность туннельного тока не только через значение концентрации носителей (примесей), но и посредством таких параметров, как ширина запрещенной зоны и величина эффективной массы, так как эти величины входят в выражение для вероятности туннельного эффекта (7.1.3). Очевидно, что материалы с малыми эффективными массами и с малыми величинами E_g требуют меньше примесей для достижения одной и той же плотности тока. Сравнительные данные по m^* и E_g для различных материалов по данным [22] приведены в таблице 7.1 *). В четвертом столбце этой таблицы показаны значения $n_{\text{эkv}} = \frac{N_d N_a}{N_d + N_a}$, необходимые для достижения плотности туннельного тока, равной 10^4 а/см^2 [23]. Эти данные показывают, что более предпочтительными материалами являются арсенид галлия и антимонид индия.

Образование p — n -перехода. Само по себе применение сильно легированных полупроводников в качестве исходного кристалла при образовании p — n -перехода с туннельным эффектом является условием необходимым, но не достаточным. Как уже указывалось, концентрация примесей на другой стороне p — n -перехода должна также приводить к вырождению электронного газа. Большая концентрация должна сочетаться с резким (ступенчатым) спадом ее в области перехода. Только в этом случае переход будет достаточно тонким и в нем возникает необходимое для туннельного эффекта сильное поле.

Из известных способов получения p — n -переходов: диффузионного, вплавного и др., наиболее подходит метод вплавления. Он заключается [24] во вплавлении металлической капли, содержащей акцепторную примесь, в электронный кристалл или донорной примеси в кристалл с дырочной проводимостью.

Большая концентрация примеси во вплавной области достигается, в первую очередь, выбором соответствующего металла для вплавления. Из рис. 5.1 и 5.2 следует, что наиболее подходящими для вплавления в электронный гер-

*) Приводимые рассуждения являются лишь качественными, так как неясно, какая эффективная масса существенна в процессе туннельного эффекта. Кроме того, в $A^{111}B^V$ эффективная масса значительно изменяется с ростом концентрации примеси.

маний являются Ga и Al, в дырочный германий — As, а в кремний — Al, B и As. Практически при вплавлении используются не чистые металлы, а сплавы типа InGa [24], SnGa [25] или, в случае кремния, AlB [6].

Естественно, что при вплавлении сплавов концентрация основного элемента, обеспечивающего инверсию знака проводимости во вплавной области, будет ниже величин, определяемых кривыми солидус (рис. 5.1 и 5.2). Грубую оценку концентрации примесей во вплавной области в этом случае можно получить с помощью графиков (рис. 7.10, 7.11), рассчитанных в [26] и в [27] в предположении об идеальности растворов, образующихся при вплавлении бинарных сплавов в германий. Величина A , отложенная на оси абсцисс этих графиков, определяет глубину вплавления l по соотношению

$$l = A \frac{G}{S}, \quad (7.1.19)$$

где G — навеска вплавляемой металлической капли (шарика); S — площадь, занимаемая этой каплей при вплавлении.

Величина γ на рисунках обозначает процентное содержание Ga в сплавах InGa и SnGa; T — температура вплавления сплава.

Кривые рис. 5.1, 5.2 и графики на рис. 7.10, 7.11 справедливы лишь при медленных равновесных процессах охлаждения расплавленной зоны в кристалле. Практически это никогда не имеет места. Наоборот, в ряде работ [27, 28] показано, что больший туннельный эффект достигается при резком (быстром) охлаждении. Этот факт имеет простое объяснение: при резком охлаждении значительно повышается содержание примесей в рекристаллизованной области. Оценка величины концентрации в этом случае почти невозможна, хотя ее знание крайне важно, так как она входит в величину $n_{\text{эkv}}$.

Существенное влияние на качество p — n -перехода с туннельным эффектом оказывает время вплавления, так как при больших выдержках примеси успеют продиффундировать на расстояния, достаточные для значительного размывания границ p — n -перехода [9].

При толщине перехода 100 — 150 \AA диффузию на расстоянии ΔL , равном 10 \AA , по-видимому, можно еще считать

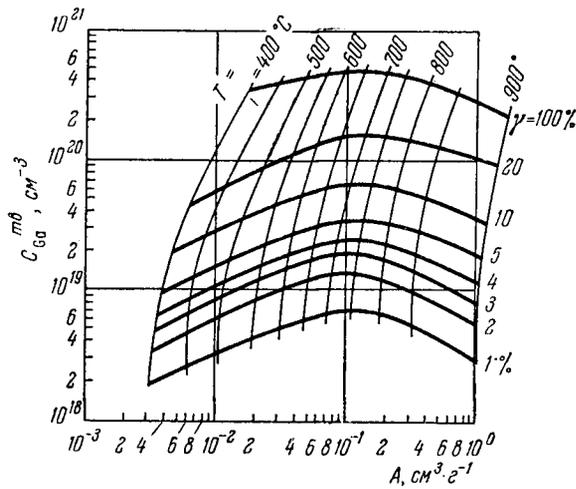


Рис. 7.10. Распределение концентраций галлия во впаивной области германиевого $p-n$ -перехода при впаивании в германий сплава $In-Ga$.

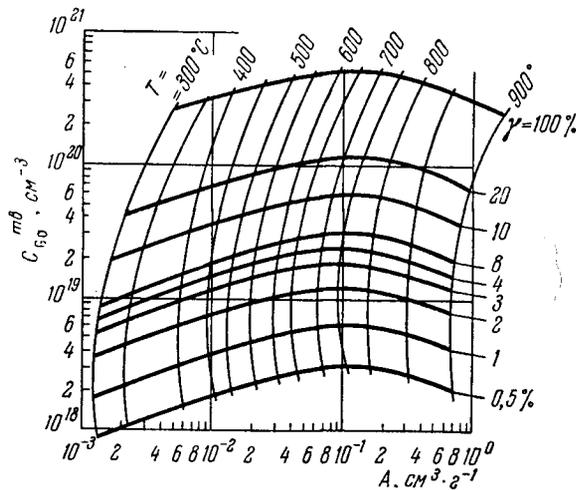


Рис. 7.11. Распределение концентраций галлия во впаивной области германиевого $p-n$ -перехода при впаивании в германий сплава $Sn-Ga$.

допустимой. Тогда, если диффузия подчиняется закону Фика [29]:

$$D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = \frac{\partial N}{\partial t}, \quad (7.1.20)$$

где D — коэффициент диффузии, то максимально допустимое время выдержки t_{\max} можно оценить из соотношения

$$\frac{Dt_{\max}}{(\Delta L)^2} \leq 1. \quad (7.1.21)$$

На рис. 7.12 показаны величины t_{\max} в зависимости от температуры впаивания для ряда систем полупроводник—вплавляемая примесь. При правильно проведенном технологическом процессе впаивная область получается однородной (рис. 7.13, а). Некачественные процессы приводят к двум видам дефектов структуры перехода (рис. 7.13, б, 7.13, в).

В двух последних случаях ток через кристалл будет иметь компоненту нетуннельного происхождения, связанную с существованием участков металл — полупроводник n -типа, шунтирующих $p-n$ -переход. Доля этого тока в общем токе может быть изменена при травлении перехода. Соответственно следует ожидать и изменения качества перехода, которое удобно характеризовать (см. рис. 7.13) отношением токов J_p/J_v , где J_v — минимальный туннельный ток (рис. 7.14, з). Действительно, подобные изменения наблюдаются на опыте [9, 30].

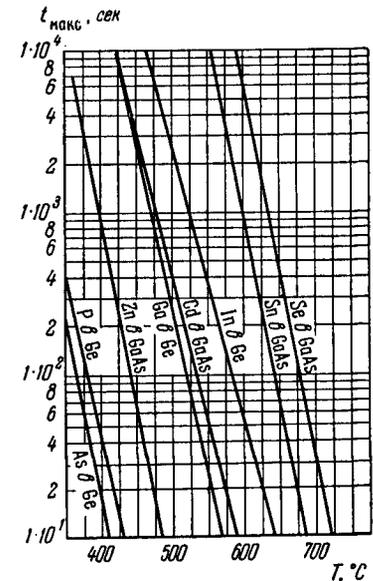


Рис. 7.12. Допустимое время выдержки температуры при впаивании в кристалл легирующих примесей.

Эквивалентная схема туннельного диода. Для определения параметров, которыми характеризуют туннельные

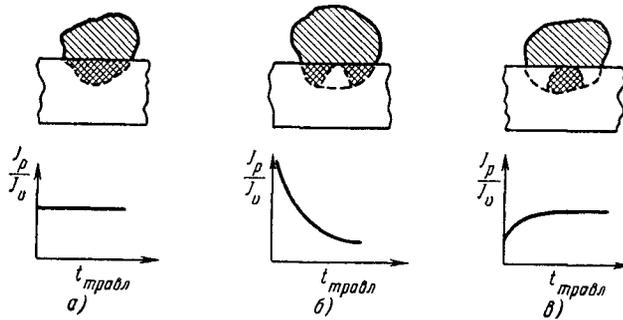


Рис. 7.13. Виды структур вплавной области при образовании вплавного $p-n$ -перехода.

диоды, обратимся к его эквивалентной схеме, предложенной Соммерсом [23] (рис. 7.14, а). На этой схеме C — емкость

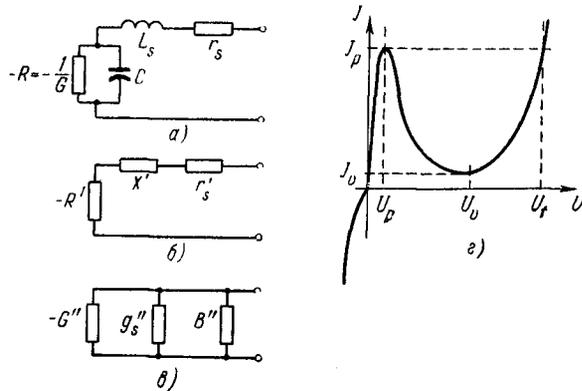


Рис. 7.14. Эквивалентная схема и вольтамперная характеристика туннельного диода.

$p-n$ -перехода; r_s — сопротивление потерь; L_s — индуктивность диода; R — отрицательное сопротивление, определяемое углом наклона падающего участка вольтамперной характеристики туннельного диода (рис. 7.14, z).

Вольтамперная характеристика туннельного диода относится к «N»-типу. Существенным отличием характеристики такого типа является однозначность функциональной зависимости тока, протекающего через диод, от приложенного к нему напряжения и наличие точки с бесконечно большим сопротивлением на границе между отрицательной и положительной ветвями (в отличие от приборов с «S»-характеристикой, где напряжение является однозначной функцией тока, а сопротивление на соответствующей границе переходит через нуль).

Свойства туннельного диода, которые определяют перспективу его технических применений, достаточно хорошо описываются перечисленными выше параметрами [23, 29, 31, 32].

Пиковый ток. Концентрационная зависимость пикового тока J_p следует из концентрационной зависимости вероятности туннельного эффекта. Действительно, расчет [33] дает для J_p выражение, аналогичное уравнению (7.1.3):

$$J_p = J_0 S \exp \left[-BE_g \left(\frac{\epsilon m^*}{n_{\text{экр}}} \right)^{1/2} \right], \quad (7.1.22)$$

где J_0 — коэффициент пропорциональности в единицах плотности тока; B — постоянная, зависящая от выбора единиц, и S — площадь $p-n$ -перехода.

Выражение (7.1.22) показывает, что величина максимального тока для данного полупроводника весьма сильно зависит от эквивалентного легирования. Этот вывод удовлетворительно подтверждается на опыте, что видно из рис. 7.15, построенного нами по данным работ [34, 35]. Интересно отметить, что легирование кристалла разными примесями приводит (даже при одной и той же концентрации) к разным величинам J_p . Так, Фурукава наблюдал [35] увеличение туннельного тока в $p-n$ -переходах в германии, легированном мышьяком, по сравнению с переходами в германии с примесью сурьмы. Это коррелирует и с различными величинами подвижности электронов в этих случаях (см. гл. 3).

Так как в (7.1.22) фигурирует величина $n_{\text{экр}}$, то следует ожидать сильную зависимость J_p (а следовательно, и J_p/J_0) и от концентрации примесей во вплавной области кристалла. Однако проследить эту зависимость прямым способом не

удается из-за невозможности определить концентрацию. Косвенно эта зависимость наблюдалась во многих работах [20, 28, 34, 36].

На рис. 7.16, заимствованном из работы [36], неизвестная концентрация неявно входит в величины U_p , отложенные по оси ординат. Этот рисунок следует понимать как

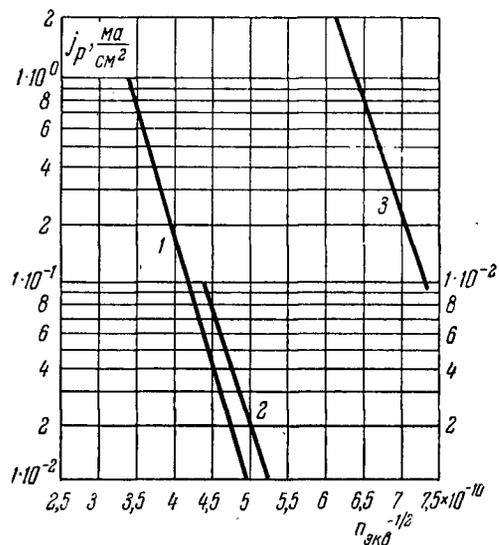


Рис. 7.15. Зависимость плотности тока, протекающего через туннельный диод, от эквивалентного легирования.

1 — исходный кристалл Ge + As; 2 — исходный кристалл Ge + Sb (правый масштаб тока); 3 — исходный кристалл Ge + P.

диаграмму, иллюстрирующую кривые распределения. Из нее видно, что при одной и той же концентрации N_d могут получаться приборы с различными значениями U_p , причем они будут характеризоваться и различными величинами J_p/J_v . Эта диаграмма весьма полезна при выборе исходного кристалла германия, необходимого для получения данного значения отношения токов J_p/J_v .

Для других материалов подобных диаграмм, к сожалению, не имеется.

Нетрудно убедиться, что туннельный ток должен меняться и с изменением температуры p - n -перехода. Ток

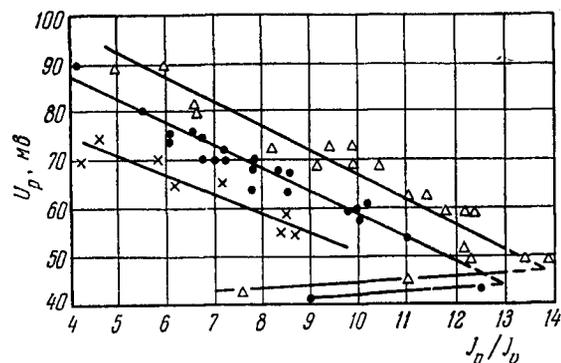


Рис. 7.16. Кривые, иллюстрирующие распределение туннельных диодов по значениям I_p/I_v .

Δ — $3,5 \cdot 10^{19}$ донорных атомов в $см^3$; \bullet — $2,5 \cdot 10^{19}$ донорных атомов в $см^3$; \times — $1,8 \cdot 10^{19}$ донорных атомов в $см^3$.

будет меняться вследствие температурной зависимости уровней Ферми как в p -, так и в n -областях кристалла, а также вследствие температурной зависимости ширины запрещенной зоны. Обе эти зависимости для германия n -типа схематически показаны на рис. 7.17. Выше некоторой достаточно низкой температуры T_k положение уровня Ферми снижается. Поэтому степень вырождения будет тоже уменьшаться. Уменьшение ширины запрещенной зоны, однако, повлечет к увеличению степени вырождения. В материале с относительно малым количеством примесей температурный интервал, связанный с вырождением, будет меньшим, следовательно, изменение μ от температуры явится пре-

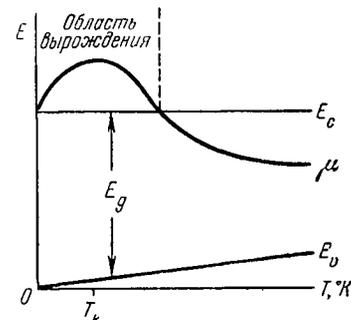


Рис. 7.17. Температурные изменения уровня Ферми и ширины запрещенной зоны в вырожденном полупроводнике.

довательно, изменение μ от температуры явится пре-

обладающим фактором. В сильно легированных образцах реализуются условия, при которых нельзя сбрасывать со счета и второй механизм температурного воздействия.

В первых работах, посвященных туннельным диодам [4, 37, 38], экспериментаторы оперировали с полупроводниками, относительно слабо легированными ($N_d \leq 1 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$), и поэтому они наблюдали падение

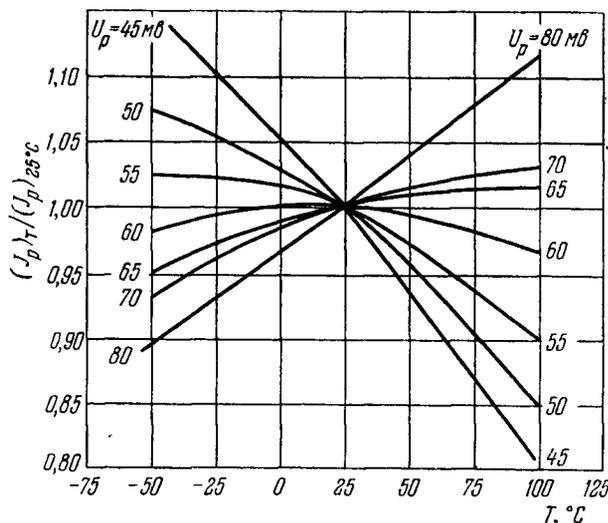


Рис. 7.18. Температурные зависимости тока J_p .

туннельного тока с увеличением температуры. Более поздние исследования [34, 39] обнаружили и второй тип температурной зависимости.

Нагляднее всего температурная зависимость туннельного тока выступает при исследовании величины J_p . На рис. 7.18 показано относительное изменение J_p от температуры для германиевого туннельного диода по данным Кэди [36]. В качестве параметра опять-таки фигурирует величина напряжения U_p .

В тех случаях, когда осуществляются непрямые туннельные переходы, вероятность туннельного эффекта, как следует из (7.1.7), должна расти с температурой. Поэтому даже

в случае кристаллов с относительно небольшим содержанием примеси может наблюдаться не уменьшение, а увеличение тока с температурой. Это проявляется, например, в германии, легированном сурьмой. Рост тока с температурой в диодах такого типа наблюдался уже при концентрации сурьмы $5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ [39]. Это замечательно согласуется с экспериментальным наблюдением взаимодействия электронов с фононами в процессе туннельного эффекта в подобных p - n -переходах [40].

Систематического исследования температурной зависимости для туннельных диодов, изготовленных на основе соединений типа $A^{III}B^V$ и на основе Si, пока не опубликовано. Однако, основываясь на зонной структуре этих полупроводников, можно ожидать, что в $A^{III}B^V$ будут прямые туннельные переходы и, следовательно, вид зависимости будет качественно подобен кривым рис. 7.18. В случае Si-диодов, где туннельные переходы — непрямые [40], при всех концентрациях должен наблюдаться рост тока при увеличении температуры.

Интервал рабочих температур туннельных диодов в основном определяется шириной запрещенной зоны, и поэтому он различен для разных полупроводников (табл. 7.2).

Таблица 7.2

Полупроводник	J_p/J_v	U_p , мВ	U_v , мВ	U_f , мВ	$T_{\text{макс}}$, °C	RC, сек	J_p/C , мА/пксф
Ge	10—15	40—70	270—350	450	250	$0,5 \cdot 10^{-9}$	0,3—1
Si	3—4	80—100	400—500	700	400	$0,2 \cdot 10^{-8}$	< 0,5
GaAs	40—70	90—120	450—650	1000	600	$0,1 \cdot 10^{-9}$	10—15
GaSb	15—20	30—50	200—250	450	300	$0,1 \cdot 10^{-9}$	
InSb	7—10			200	25	$0,5 \cdot 10^{-11}$	

Избыточный ток. Упрощенная трактовка зонной структуры в p - n -переходе (рис. 7.5, д) предопределяет спад туннельного тока до нуля. Однако в реальных диодах это не наблюдается, и ток при напряжении U_v может иметь большую величину.

В одной из первых работ по туннельным диодам [41] Эсаки высказал мысль о «туннельной» природе избыточного

тока. Он считал, что глубокие уровни в запрещенной зоне, с которыми связывался избыточный ток, обязаны своим происхождением дислокациям. Позднее экспериментально были установлены независимость тока J_v от давления [42], от температуры [43] и весьма слабая зависимость от концентрации доноров и акцепторов [44]. Все эти опытные факты говорили в пользу туннельной природы избыточного тока. В настоящее время на основании дополнительных данных [43, 45] предложена определенная модель [44], объясняющая туннельный эффект через глубокие уровни.

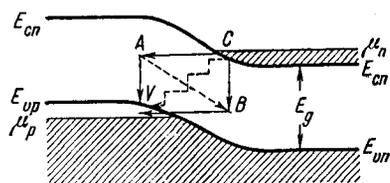


Рис. 7.19. Схема, поясняющая возникновение избыточных токов в туннельном диоде.

- 1) электрон из зоны проводимости справа попадает на уровень A , с которого уже затем попадает в валентную зону;
- 2) электрон из C переходит на глубокий уровень B и с него уже просачивается в валентную зону;
- 3) электрон попадает в валентную зону путем $CABV$ при наличии примесной зоны;
- 4) многоступенчатый переход электрона из C через локальные уровни с излучением энергии.

Механизм туннельного перехода с излучением энергии в виде фотонов или фононов рассматривался теоретически Кэйном [45], который показал, что подобные переходы в германии практически происходить не могут. Действительно, экспериментально ни в одной работе фотоны не наблюдались, хотя примененные методики обладали большим запасом (более чем на порядок [44]) по чувствительности.

Наиболее вероятный путь — это CBV . Туннельный переход из B в V есть не что иное, как ионизация полем, теоретически рассмотренная Францем [46], который показал, что вероятность перехода будет иметь тот же вид, что и для межзонных переходов при условии замены E_g на энергию ионизации примеси. В результате такого подхода Чиновец с сотрудниками [44] получил выражение для

Схематически эта модель показана на рис. 7.19. На этом рисунке приведено несколько возможных механизмов туннельного перехода:

избыточного тока J_{ex} в виде

$$J_{ex} = \ln A + \ln D_{ex} - \frac{\alpha_{ex} L^{1/2}}{2} [E_g - eU_{ex} + e(\mu_v + \mu_c)], \quad (7.1.23)$$

где D_{ex} — плотность состояний в запрещенной зоне (плотность уровней B); U_{ex} — напряжение смещения (в вольтах), где преобладает избыточный ток; μ_v и μ_c — положения уровней Ферми в соответствующих зонах кристалла;

$$\alpha_{ex} = \theta \left[\frac{8}{3} \cdot \frac{(m^*)^{1/2}}{e\hbar} \right], \quad (7.1.24)$$

где θ — множитель, численно близкий к единице.

Выражение (7.1.23) легко проверяется опытом, так как D_{ex} , L , E_g и U_{ex} можно менять независимо и изучать их влияние на поведение J_{ex} .

Подробное исследование [44] весьма убедительно подтвердило справедливость (7.1.23) для Si-диодов, а следовательно, и туннельную природу избыточного тока. Наконец, достоверность рассмотренной модели была окончательно подтверждена после того, как удалось обнаружить в области избыточных токов при азотной температуре еще дополнительный участок с отрицательной проводимостью [47]. Более того, специальное введение в кристалл примесей золота [48] привело к обнаружению двух максимумов на участке избыточного тока, соответствующих двум уровням золота 0,35 эв и 0,54 эв ниже дна зоны проводимости. Точно так же Чиновец [48] зарегистрировал пять максимумов и связал их с уровнями вакансий фосфора.

Интересной работой в этой области является исследование полного сопротивления Z туннельного диода из GaAs на сверхвысоких частотах, предпринятое Есаки [48]. Он обнаружил в области избыточных токов осцилляции величины Z в зависимости от частоты. Период этих осцилляций составлял примерно 10^{-8} сек. Физическая интерпретация этого времени неясна, но, учитывая, что эквивалентная схема в данном случае являлась схемой с задержкой, Есаки предположил, что им измерялось время пребывания электрона на уровне B в схеме рис. 7.19.

Определение уровней примесей в запрещенной зоне по появлению дополнительных максимумов на вольтамперной

характеристике туннельного диода получило название *туннельной спектроскопии*. С помощью этого метода были успешно определены глубокие акцепторные уровни Cu, Fe, Ni и Co в сильно легированном арсениде галлия [49, 50].

Не исключена возможность технического использования дополнительных участков с отрицательной проводимостью на характеристике туннельного диода.

Характеристические напряжения. С природой туннельных токов J_p и J_v связаны напряжения U_p и U_v , соответствующие этим токам. В первом приближении характеристические напряжения не зависят от методов изготовления диодов. Более строгое рассмотрение показывает, что и U_p и U_v определяются величиной $n_{экв}$, т. е. концентрациями примесей по обе стороны от $p-n$ -перехода.

Явная аналитическая зависимость U_p и U_v от степени вырождения в обеих частях кристалла неизвестна. Экспериментально показано, что U_p несколько увеличивается с повышением концентрации примесей в исходном кристалле [28, 34]. В подобных исследованиях необходимо учитывать изменение U_p за счет падения напряжения на сопротивлении r_s . Величина напряжения U_v также увеличивается по мере повышения концентрации примесей в n - и p -областях кристалла [34]. Это согласуется с представлениями, развитыми в работе [19].

Отрицательное сопротивление. Отрицательное сопротивление не является сопротивлением в обычном смысле этого слова. Но поскольку дифференциальные уравнения, описывающие поведение систем с положительным и отрицательным затуханием аналогичны, понятие «отрицательное сопротивление» является общепринятым.

Отрицательное сопротивление (или отрицательное затухание) приводит к возрастанию энергии в системе и становится возможным благодаря присутствию в ней источника энергии. В случае туннельного диода таким источником является батарея смещения, устанавливающая диод в точку вольтамперной характеристики с отрицательным наклоном. Для этой батареи сопротивление туннельного диода всегда положительно. Однако при определенных величинах смещений, соответствующих падающему участку, туннельный диод обладает отрицательным дифференциальным сопротивлением.

В дальнейшем изложении для краткости будем называть это сопротивление просто отрицательным сопротивлением.

Подробный анализ токовых параметров прибора, рассмотренный выше, предопределяет характер изменения отрицательного сопротивления — R .

Минимальное отрицательное сопротивление равномерно изменяется обратно пропорционально вероятности туннельного эффекта (7.1.3) для данного материала. Учитывая (7.1.1), можно видеть, что чем больше концентрация свободных носителей (т. е. примесей) по обе стороны от $p-n$ -перехода, тем меньше минимальное отрицательное сопротивление. Практически нижний предел R определяется максимальной растворимостью примесей в полупроводниковом кристалле и возможностью получения наиболее резкого распределения их концентрации вблизи $p-n$ -перехода. Отметим, что R обратно пропорционально площади перехода.

Емкость $p-n$ -перехода определяется известным выражением [51]

$$C = 1,05S \left[\frac{\kappa \epsilon N_d N_a}{8\pi (U_k - U) (N_d + N_a)} \right]^{1/2}, \quad (7.1.25)$$

где S — площадь $p-n$ -перехода; остальные обозначения те же, что и в (7.1.1).

Эта зависимость неоднократно проверялась [52—54] в широком интервале напряжений и была показана ее справедливость вплоть до смещений, при которых начинает сказываться обычный диодный ток [54]. В этом диапазоне напряжений абсолютная величина емкости меняется всего на 20—30%.

Характерно, что фактор качества $k = \frac{J_p}{C}$ не зависит от площади и является по существу лишь функцией $n_{экв}$.

Это позволило Кэди [36] построить кривые (рис. 7.20) для германиевых туннельных диодов. Из этого рисунка вытекает, в частности, что при использовании германия n -типа практически трудно создать туннельные диоды с фактором качества $\frac{J_p}{C} > 1$. Но это можно сделать, применяя другие материалы, например, в случае использования GaAs фактор k составлял примерно 10 *ма/нкф* [55]. Типичные значения J_p/C для диодов различного типа приведены в таблице 7.2.

Постоянная времени. Вторым фактором, не зависящим от площади перехода и зависящим лишь от эквивалентного легирования, является постоянная времени диода RC ,

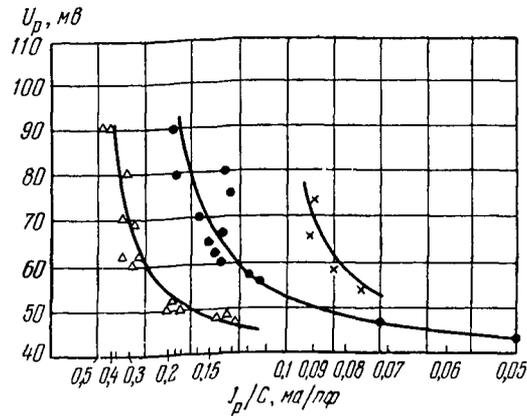


Рис. 7.20. Кривые, иллюстрирующие распределение туннельных диодов по значениям J_p/C .
 Δ — $3,5 \cdot 10^{19}$ донорных атомов на см^3 ; \bullet — $2,5 \cdot 10^{19}$ донорных атомов на см^3 ; \times — $1,8 \cdot 10^{19}$ донорных атомов на см^3 .

которая почти экспоненциально растет с концентрацией свободных носителей [23, 54] (рис. 7.21).

Обычно наблюдаемые на опыте величины RC для диодов из различных полупроводников приведены в таблице 7.2.

Сопротивление потерь. Применение в туннельных диодах полупроводников с малым удельным сопротивлением обуславливает и малые величины сопротивления потерь r_s . Так, для германиевых туннельных диодов величина r_s при измерениях на постоянном токе имеет порядок единиц или долей ома.

В туннельных диодах нельзя пользоваться для оценки r_s формулами, справедливыми для обычных диодов. Это объясняется тем, что по обе стороны от туннельного перехода находятся полупроводники с примерно одинаковыми удельными сопротивлениями. У обычных диодов основная толщина полупроводника всегда более высокоомна и она в основном определяет сопротивление потерь. Более того, расчет [56] показывает, что если туннельный диод изготавливается

путем сплавления акцепторной примеси в германий электронного типа проводимости, то почти все сопротивление потерь сосредоточено во впадной области. В этом случае величина r_s должна быть обратно пропорциональна площади p - n -перехода. Это действительно наблюдалось на опыте [30].

Заметим, что в этом случае величина r_s/R уже не зависит от площади перехода и, таким образом, является фактором качества туннельного диода, зависящим от $n_{\text{экв}}$ так же, как и постоянная времени RC .

Конструктивное оформление туннельных диодов. Кроме обычных требований, предъявляемых к конструкции полупроводникового диода, к туннельному диоду предъявляется условие малой индуктивности L_s . А именно, величина L_s должна быть ниже величины $L_{\text{макс}}$, определяемой равенством

$$L_{\text{макс}} = RCr_s. \quad (7.1.26)$$

Типичные значения параметров германиевых туннельных диодов ($RC \sim 10^{-9}$ сек, $r_s \sim 1$ ом) требуют для выполнения равенства (7.1.26) индуктивности, меньшей 10^{-9} гн. Обычные же диоды, у которых электрический контакт с p - n -переходом осуществляется тонкими проволоками, имеют индуктивности, не меньше $3 \cdot 10^{-9}$ гн. Поэтому в туннельных диодах электрический контакт осуществляется либо мембраной [9] (рис. 7.22, а), либо путем прижима массивного электрода [57] (рис. 7.22, б), либо с помощью лепестка [58] (рис. 7.22, в). Последняя конструкция обеспечивала величину L_s , равную $4,0 \cdot 10^{-10}$ гн.

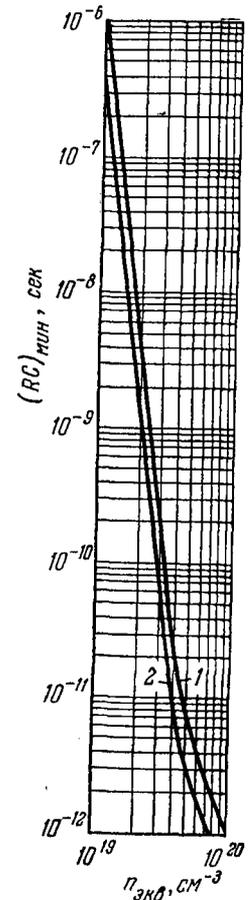


Рис. 7.21. Зависимость постоянной времени туннельного диода от эквивалентного легирования для диодов из Ge (кривая 1) и GaAs (кривая 2).

Наилучшим электрическим контактом с малой индуктивностью является непосредственная припайка плоской пластины к вплавленной металлической капле (рис. 7.22, *з*). В этом случае индуктивность туннельного диода снижается

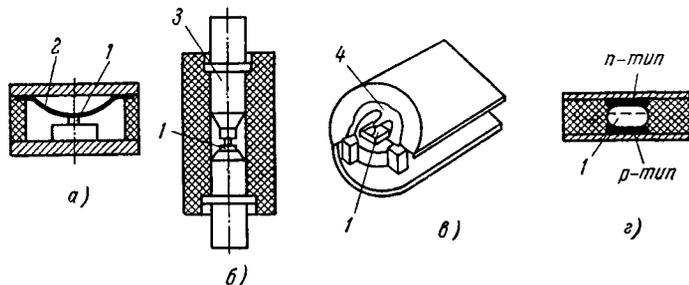


Рис. 7.22. Виды конструкций туннельных диодов.

1 — кристалл; 2 — мембрана; 3 — прижимной электрод; 4 — контактный лепесток.

до величины, которая определяется геометрией самого кристалла с вплавленной металлической каплей.

Режимы работы схем с туннельными диодами. Туннельные диоды могут использоваться в схемах усилителей, генераторов, преобразователей, переключателей. Необходимые соотношения между параметрами диодов и схем в этих устройствах устанавливаются на основании анализа устойчивости. Эти соотношения можно выявить, рассматривая простейшую схему, содержащую туннельный диод, подключенный к источнику смещения через сопротивление r и индуктивность L (величины L и r включают в себя сопротивление потерь r_s и индуктивность L_s диода) (рис. 7.23). Уравнение установившегося режима

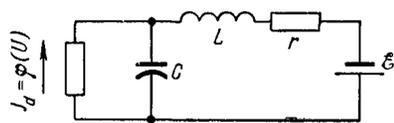


Рис. 7.23. Эквивалентная схема туннельного диода, подключенного к источнику смещения $r = r_s + r_1 + r_n$; $L = L_s + L_1$ (индексы s относятся к диоду; индекс 1 — к туннельному диоду, индекс n — к нагрузке).

Уравнение установившегося режима

$$U + rJ_d = \mathcal{E} \quad (7.1.27)$$

(графическое решение которого совместно с вольтамперной характеристикой диода дано на рис. 7.24) определяет состояние равновесия этой схемы.

Поведение простейшей схемы на отрицательной ветви характеристики определяется дифференциальным уравнением 2-го порядка [59]:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \left(\frac{r}{L} - \frac{G}{C}\right) \frac{dU}{dt} + \frac{U}{LC} + \frac{r}{LC} \Phi(U) + \frac{1}{C} \frac{dC}{dU} \left(\frac{dU}{dt}\right)^2 = \mathcal{E} \frac{1}{LC}. \quad (7.1.28)$$

Согласно Ляпунову, уравнение (7.1.28) может быть линеаризовано для определения условий устойчивости точек равновесия по отношению к малым возмущающим отклонениям. Линеаризованное уравнение имеет вид [60]:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \left(\frac{r}{L} - \frac{G}{C}\right) \frac{dU}{dt} + \frac{1-rG}{LC} U = 0, \quad (7.1.29)$$

или после перехода к безразмерным параметрам:

$$\ddot{U} + (p-s)\dot{U} + (1-ps)U = 0, \quad (7.1.30)$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $p = \omega_0 r C$; $s = \omega_0 L G$, дифференцирование по параметру $t_1 = \omega_0 t$ обозначено \dot{U} и \ddot{U} .

Устойчивость состояний равновесия проверяется анализом корней характеристических уравнений, соответствующих дифференциальным уравнениям (7.1.29) или (7.1.30). Равновесие устойчиво лишь в том случае, если действительные части обоих корней характеристического уравнения отрицательны. К тем же условиям устойчивости приводит

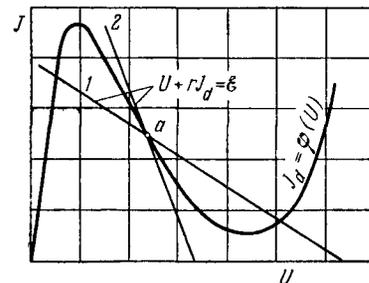


Рис. 7.24. Графическое распределение состояний равновесия схемы рис. 7.23.

1 — $r > \frac{1}{G}$, равновесие в точке a всегда неустойчиво; 2 — $r < \frac{1}{G}$, устойчивость равновесия в точке a определяется выполнением дополнительного условия $r > \frac{LG}{C}$.

требование отсутствия нулей комплексного сопротивления в правой половине плоскости комплексной частоты [52, 61].

В случае

$$ps > 1 \quad \left(r > \frac{1}{G} \right) \quad (7.1.31)$$

корни уравнения действительны и имеют разные знаки; уравнение описывает систему с отталкивающей силой, характеризующуюся неустойчивым равновесием типа седла независимо от соотношений между остальными параметрами системы. В этом режиме туннельный диод может быть использован для переключения.

При

$$ps < 1 \quad \left(r < \frac{1}{G} \right) \quad (7.1.32)$$

нагрузочная прямая пересекает вольтамперную характеристику только в одной точке и условия устойчивости по постоянному току выполняются.

Комплексные корни имеют место при выполнении неравенства

$$p + s < 2, \quad (7.1.33)$$

когда интегральные кривые на фазовой плоскости имеют вид вложенных друг в друга спиралей. Асимптотической точкой всех этих кривых является фокус; в системе возможны периодические колебания.

Устойчивость фокуса определяется по Ляпунову. При

$$p > s \quad \left(r > \frac{LG}{C} \right) \quad (7.1.34)$$

равновесие устойчиво. Область устойчивого фокуса, заключенная между осью абсцисс и прямыми $p = s$ и $p + s = 2$, характеризуется затухающими синусоидальными колебаниями.

Они могут существовать при выполнении условий

$$p > s, \quad p + s < 2. \quad (7.1.35)$$

Режим, соответствующий этой области, используется в усилителях: при

$$p < s \quad \left(r < \frac{LG}{C} \right), \quad p + s < 2 \quad (7.1.36)$$

фокус неустойчив.

В режиме, соответствующем области, заключенной между осью ординат и прямыми $p = s$, $p + s = 2$, возможно генерирование периодических колебаний.

В области между гиперболой $ps = 1$ и прямой $p + s = 2$ состояние равновесия является узлом, а процесс носит аperiodический характер. Устойчивость также определяется критерием $p > s$. Соотношения, поясняющие возможные режимы работы туннельного диода, показаны на рис. 7.25 [60].

Отметим, что для выполнения условий устойчивости на всех частотах, где туннельный диод активен, должно соблюдаться выражение (7.1.34).

В случае частотно-зависимых $L(\omega)$ и $r(\omega)$ выражение (7.1.34) имеет вид:

$$r(\omega) > \frac{L(\omega)G}{C}. \quad (7.1.37)$$

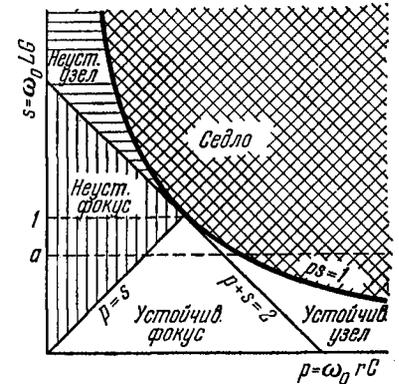


Рис. 7.25. Диаграмма устойчивости туннельного диода.

В общем случае система может быть более сложной, чем та, которая рассмотрена на рис. 7.23. Описание таких систем приводит к дифференциальным уравнениям более высокого порядка, чем второй. Непосредственное вычисление корней таких уравнений затруднительно. Условия устойчивости в этом случае могут быть определены на основе критерия Гурвица — Раута (см., например, [62]).

Рассмотрение конкретных схем генераторов, усилителей, переключателей и многих других устройств, использующих туннельные диоды, читатель найдет в [32, 71], а библиографию по туннельным диодам — в [64].

Применение туннельных диодов для физических исследований. Квантовомеханическая природа туннельного диода предоставила в распоряжение экспериментаторов возможность прямого исследования взаимодействия электронов с фононами.

Впервые подобные взаимодействия наблюдались в работе [40]. Авторы, изучая вольтамперную характеристику

туннельных диодов при гелиевых температурах, обнаружили характерные изломы в ее прямой ветви (рис. 7.26). Напряжения, при которых возникали эти изломы, в точности соответствовали энергиям фононов, существующих в полупроводнике. В германии, легированном сурьмой, наблюдались все четыре акустических фонона: два продольных и два поперечных.

В германии с примесями фосфора и мышьяка изломы на характеристике не наблюдались. Это свидетельствует либо

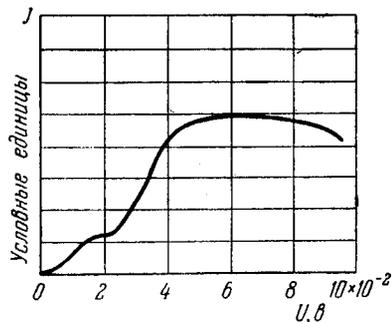


Рис. 7.26. Экспериментальные кривые, обнаруживающие участие фононов в туннельном эффекте.

о прямых туннельных переходах в таких кристаллах, либо о непрямых переходах с рассеянием на примесях, что представляется более вероятным. Этот результат подтверждается также видом температурной зависимости туннельного тока и измерениями обратной ветви вольтамперной характеристики [65].

Электронно - фононные взаимодействия наблюдались также в кремниевых туннельных диодах [40]. Такие исследования приобрели даже количественный характер. Холл [48] показал, что вольтамперную характеристику, имеющую изломы, можно разложить на сумму нескольких подобных кривых (см. пункт на рис. 7.27, а). Кривые сдвинуты по оси напряжений на величины, пропорциональные $\hbar\omega_i$ соответствующих фононов. Их амплитуды имеют различную величину из-за разной степени взаимодействия фононов с электронами. Более наглядной картина становится при исследовании второй производной туннельного тока по напряжению (рис. 7.27, б). Тщательное изучение показало, что каждая из пунктирных кривых рисунка 7.27, а спадает к оси напряжения не резко, а асимптотически. Это явление трактуется в [48] как следствие размытия нижней границы зоны проводимости внутри запрещенной зоны полупроводника.

о прямых туннельных переходах в таких кристаллах, либо о непрямых переходах с рассеянием на примесях, что представляется более вероятным. Этот результат подтверждается также видом температурной зависимости туннельного тока и измерениями обратной ветви вольтамперной характеристики [65].

Электронно - фононные взаимодействия наблюдались также в кремниевых

Исследования при низких температурах туннельного тока диодов, изготовленных из полупроводников-соединений (типа $A^{III}B^V$ и др.), привели к обнаружению взаимодействия электронов с поляронами [66].

Исследование вольтамперной характеристики туннельного диода в сильных магнитных полях [67] позволяет определять эффективную массу носителей заряда. Такое определение основано на известном эффекте де-Хааса — ван-Альфена. В туннельных диодах этот эффект проявляется

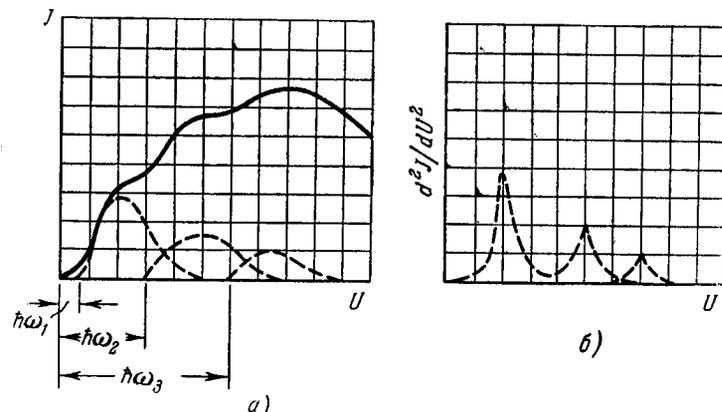


Рис. 7.27. Кривые, иллюстрирующие участие фононов в туннельном эффекте (по данным Холла [48]).

в виде осцилляций тока, протекающего через диод. Чиновец, изучая туннельные диоды из $PbTe$ в полях свыше 40 000 гс, зарегистрировал девять и более таких осцилляций [48]. Измеряя их период, можно найти величину магнетона Бора, равную

$$\mu = \frac{e\hbar}{m^*c}, \quad (7.1.38)$$

и, следовательно, эффективную массу m^* . Исследование поведения туннельных диодов в магнитном поле, по-видимому, представляет и практический интерес из-за уменьшения величины J_p/J_v при увеличении напряженности поля [67, 68].

Измерения прямых и обратных токов в туннельном диоде позволяют судить о вероятности туннельного эффекта, а,

следовательно, и о всех величинах, входящих в определяющие ее выражения (7.1.4) и (7.1.5).

В работах [42, 69] для этого измерялась зависимость ширины запрещенной зоны E_g от гидростатического давления, действующего на диод. А в [70] была найдена величина D_{ex} из уравнения (7.23), т. е. плотность разрешенных состояний в запрещенной зоне кристалла. Наконец, выше уже упоминалось о туннельной спектроскопии, которая позволяет изучать глубокие ловушки в запрещенной зоне полупроводника.

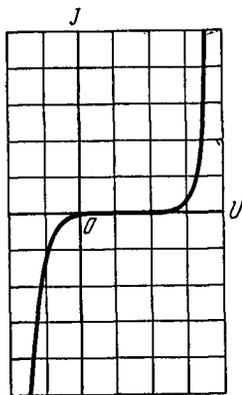


Рис. 7.28. Вольтамперная характеристика обращенного диода.

положительная сторона перехода является либо невырожденным, либо слабо вырожденным полупроводником. При этом вольтамперная характеристика имеет вид, изображенный на рис. 7.28.

Теория вольтамперной характеристики обращенного диода была построена [79] на основе теории характеристики туннельного диода. Параметры обращенного диода зависят от характеристик полупроводникового материала точно так же, как и параметры туннельного диода.

Наиболее перспективными областями применения обращенных диодов являются: использование в высокочастотных детекторах и смесителях при работе на малом сигнале (в частности, в смесителях с низкой промежуточной частотой) и в детекторах видеосигнала, где обращенные

Приведенными примерами далеко не исчерпываются возможности туннельных диодов. Их интенсивное исследование, несомненно, будет еще долго приносить ценную информацию о физических явлениях в твердом теле.

Другие приборы с туннельным $p-n$ -переходом. Кроме туннельных диодов в настоящее время получили распространение так называемые *обращенные диоды* и *туннельные триоды*. Обращенный диод [73—78] отличается от туннельного тем, что одна сторона $p-n$ -перехода представляет сильно легированный (сильно вырожденный) полупроводник, а противо-

диоды обладают значительно меньшими низкочастотными шумами, чем применяющиеся для этих целей точечные диоды [77]. Обращенные диоды можно также использовать в качестве однонаправленного элемента в вычислительных устройствах с туннельными диодами, где обычные диоды из-за большого прямого падения напряжения на них и инерционности применяться не могут.

Туннельный триод [80, 81] представляет собой прибор, в котором коллектор является обычным $p-n$ -переходом, а эмиттер — $p-n$ -переходом с туннельным эффектом. Такая структура прибора открывает новые возможности при построении ряда электронных схем, особенно в области вычислительной техники.

§ 7.2. Полупроводниковые источники света

Принцип действия. Рассмотрим ансамбль частиц, не находящийся в термодинамическом равновесии. Для простоты будем считать, что частицы могут находиться всего в двух возможных состояниях: n и m , причем $n > m$. Если на этот ансамбль подействовать направленным излучением с частотой ν_{nm} , то число переходов вверх с уровня n на уровень m будет:

$$N_{mn} = B_{mn} u_\nu N_n, \quad (7.2.1)$$

а число переходов вниз на уровень m будет:

$$N_{nm} = (A_{nm} + u_\nu B_{nm}) N_n. \quad (7.2.2)$$

В этих выражениях A и B — некие постоянные, характеризующие систему частиц; N_n и N_m — количества частиц, находящихся в состояниях n и m ; u_ν — плотность направленного излучения, которая связана с вероятностью перехода P_{mn} соотношением

$$P_{mn} = B_{mn} u_\nu.$$

Если $N_n < N_m$, то потери падающего пучка света составят $B_{nm} u_\nu (N_m - N_n)$ квантов в секунду. Спонтанное излучение $A_{nm} N_n$ квантов можно рассматривать как рассеянное излучение. Следовательно, в данном случае система частиц имеет положительный коэффициент поглощения

и представляет собой обычную наиболее часто встречающуюся систему.

Если же в рассматриваемом ансамбле частиц более высокое энергетическое состояние n было бы заселено большим числом частиц по сравнению с низким энергетическим состоянием m ($N_n > N_m$), то коэффициент поглощения уже будет отрицательным. Ансамбль с таким распределением частиц называется ансамблем с *инверсной населенностью*.

Отрицательный коэффициент поглощения в этом случае означает, что данный ансамбль будет спонтанно излучать. Такой ансамбль будет также усиливать излучение частоты

$$\nu = \frac{E_n - E_m}{h},$$

т. е. будет обладать лазерным действием.

Для осуществления лазера кроме отрицательного поглощения необходимо поместить рассматриваемый ансамбль частиц в резонатор, с помощью которого можно вывести электромагнитное излучение.

Простейший резонатор представляет собой систему из двух зеркал, известную в классической оптике, как интерферометр Фабри — Перо.

Для получения состояний с инверсной населенностью в полупроводниках могут быть использованы различные переходы электронов: зона — зона, зона — уровень примеси, межпримесные переходы.

Для установления инверсной населенности необходимо, чтобы суммарное поглощение в данном переходе было отрицательным. Следуя рассмотрению [82], это условие можно записать в виде

$$n_r P_1 [f_c (1 - f_v) - f_v (1 - f_c)] > 0, \quad (7.2.3)$$

где n_r — число фотонов в заданном состоянии; P_1 — вероятность прямого и обратного переходов (которые приняты одинаковыми); f_c и f_v — функции распределения электронов в зоне проводимости и в валентной зоне полупроводника.

Из (7.2.3) следует, что $f_c > f_v$, а это значит, что

$$\mu_c - \mu_v > E_g, \quad (7.2.4)$$

если функции распределения являются фермиевскими.

Выражение (7.2.4) справедливо в случае прямого перехода зона—зона (см. рис. 7.8, а). Если переход — не прямой (рис. 7.8, б), то вместо (7.2.4) будем иметь:

$$\mu_c - \mu_v > E_g - \hbar\nu, \quad (7.2.5)$$

где $\hbar\nu$ — энергия фона, участвующего в непрямом переходе.

В [82] показано также, что в случае перехода из экситонного состояния условие получения инверсной населенности будет:

$$\mu_c - \mu_v > E_g - \hbar\nu - |E_{np}|, \quad (7.2.6)$$

где E_{np} — энергия связи электрона и дырки в экситонную пару.

Если переход носителей происходит из одной из основных зон на уровне примеси с энергией ионизации E_i , расположенные вблизи края другой зоны, то справедливо условие

$$\mu_c - \mu_v > E_g - |E_i|. \quad (7.2.7)$$

Используемые полупроводники. В полупроводниках поглощение света за счет прямых переходов имеет, как правило, большую вероятность по сравнению с поглощением на свободных носителях. Поглощение за счет не прямых переходов сравнимо с поглощением свободными носителями. Это обстоятельство затрудняет получение отрицательного поглощения с использованием не прямых межзонных переходов.

Поэтому более вероятно получение лазерного действия в полупроводнике с прямыми межзонными переходами. При этом из условия (7.2.4) следует, что газ носителей заряда по крайней мере в одной из зон должен быть вырожденным. Таким образом, для осуществления лазера на полупроводнике необходимо применять достаточно сильно легированные кристаллы.

Вторым требованием к полупроводниковому материалу для лазеров является выбор кристалла с зонной структурой, обеспечивающей большую вероятность прямых переходов. Сравнение зонных структур различных полупроводников (рис. 1.4—1.6) показывает, что наиболее подходящим материалом является арсенид галлия. Действительно, первые полупроводниковые лазеры были осуществлены именно

на этом материале [83—85]. Это не исключает использование для создания лазеров и других полупроводников, с более сложным энергетическим спектром в том числе и не сильно легированных [86—89].

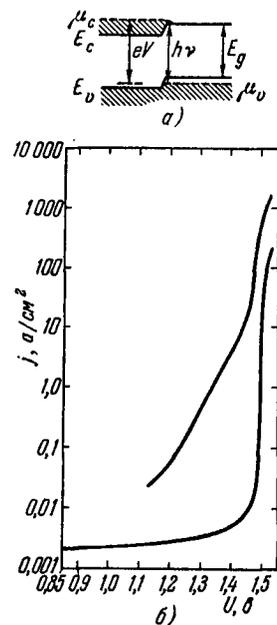


Рис. 7.29. а — диаграмма энергетических уровней вблизи $p-n$ -перехода при смещении $u \approx E_g/e$ в вырожденном полупроводнике; б — вольтамперная характеристика диффузионных диодов из GaAs при $8 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ (нижняя кривая) и при $1,6 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ (верхняя кривая) ($T = 4,2^\circ \text{ К}$).

Если потери энергии на побочных видах поглощения света в кристалле будут перекрыты, то, при наличии состояния с инверсной населенностью, $p-n$ -переход будет генерировать свет.

Вслед за наблюдением интенсивных и узких линий рекомбинационного излучения из диодов GaAs появились

Экспериментальные результаты. Эффективная излучательная рекомбинация в $p-n$ -переходе, изготовленном в GaAs при пропускании тока в прямом направлении, наблюдалась в ряде работ [90, 91]. При 77° К излучение имело максимум с энергией около $1,47 \text{ эв}$. Энергетическая диаграмма вблизи $p-n$ -перехода при смещении $U \approx \frac{E_g}{e}$ показана на рис. 7.29, а,

а вольтамперные характеристики диодов изображены на рис. 7.29, б. Они обнаруживают сильное возрастание прямого тока при напряжении около $1,5 \text{ в}$ ($\approx E_g/e$). При больших значениях тока в зоне проводимости будет находиться много электронов, а в валентной зоне — много дырок, с которыми они могут рекомбинировать, и вблизи $p-n$ -перехода будет существовать инверсная населенность. Такой инжекционный способ создания инверсной населенности в $p-n$ -переходе в вырожденном полупроводнике был ранее предсказан теоретически [92].

Если потери энергии на побочных видах поглощения света в кристалле будут перекрыты, то, при наличии состояния с инверсной населенностью, $p-n$ -переход будет генерировать свет.

сообщения об аналогичных экспериментах с другими соединениями $A^{III}B^V$ с прямыми межзонными переходами: InP [93], InAs [94], InSb [95] и GaSb [96].

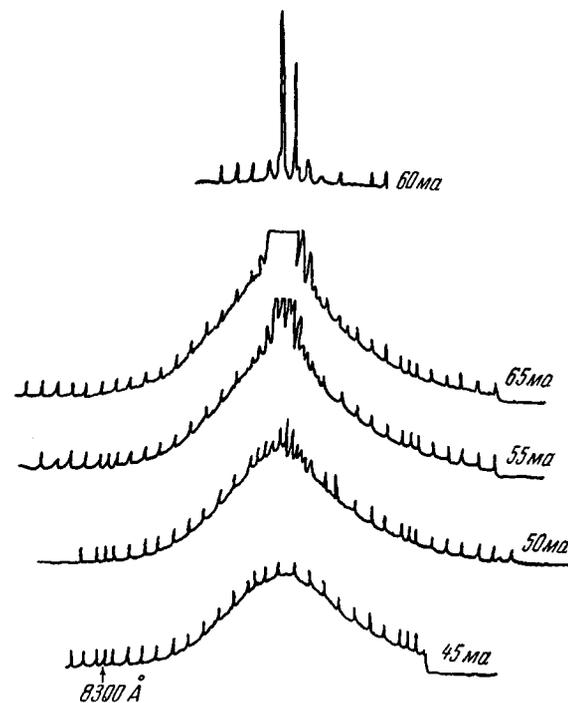


Рис. 7.30. Спектр типичного диода из GaAs вблизи порога генерации (55 ма) при 4° К .

Расстояние между метками составляет $11,3 \text{ Å}$.

При увеличении тока в прямом направлении, начиная с некоторого порогового значения, наблюдается сужение линии рекомбинационного излучения, затем появляются узкие моды *) и, наконец, появляется направленность испускаемого диодом света (рис. 7.30). Повышение темпе-

*) Модами называются различные типы колебаний электромагнитного поля.

ратуры до азотной повышало величину порогового тока более чем в 15 раз. Первоначально лазерный эффект в диодах GaAs наблюдался только при импульсном пропускании тока. Однако совершенствование технологии изготовления диодов быстро привело к созданию приборов, генерирующих свет в непрерывном режиме [97].

Из основных экспериментальных результатов следует упомянуть о наблюдении лазерного действия в твердых растворах Ga (As_{1-x}P_x) [98] и (In_{1-x}Ga_x)As [99], а также о создании лазеров на InP [100] и InAs [101].

В таблице 7.3 приведены длины волн света, генерируемого диодами из различных полупроводников.

Таблица 7.3

Полупроводник	T, °К	λ, Å	Полупроводник	T, °К	λ, Å
GaAs	77	8400	InAs	2	51 000
	300	9000		4	53 000
InP	4	9000	Ga (As _{1-x} P _x)		вплоть до 6600
	77	9100			

Вряд ли целесообразно приводить далее многочисленные экспериментальные данные по инжекционным полупроводниковым источникам света, которые читатель найдет в обзорных статьях [102—105]. Развитие лазерной техники происходит столь интенсивно, что ее обобщение, по-видимому, еще преждевременно.

Метод изготовления. Инжекционный лазер на *p-n*-переходе является обычным диодом, имеющим форму резонатора, назначение которого состоит в геометрическом отборе определенных мод. В [102] описано изготовление лазерного диода из кристалла GaAs со сколотыми гранями. Это достигается путем использования естественных сколов вдоль плоскости (110) кристалла. Таким образом, из GaAs вырезаются исходные пластинки GaAs со сторонами, перпендикулярными к одной или нескольким плоскостям (110). Применяемые кристаллы легированы Si, Ge, Se или Te до концентрации носителей $3 \cdot 10^{18} \div 6 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Электронно-дырочный переход изготавливается методом диф-

фузии. В качестве диффузанта применяется Zn в виде его соединения ZnAs₂.

Контакты к *p*- и *n*-областям кристалла изготавливаются с помощью обычных методов, обзор которых можно найти в [106].

§ 7.3. Термоэлектрические устройства

Принцип действия [107], [108]. Рассмотрим термопару (рис. 7.31) с ветвями, имеющими параметры $\alpha_1, \sigma_1, \kappa_1$ и $\alpha_2, \sigma_2, \kappa_2$ соответственно. Площади поперечного сечения ветвей: S_1 и S_2 , а их длины l_1 и l_2 . Предполагая, что отвод тепла происходит только в направлении оси *x*, вычислим коэффициент, представляющий отношение количества тепла, отбираемого от источника, к количеству тепла, преобразуемого в электрическую энергию — его называют *КПД термопары*. Другая интересующая нас величина — максимальное различие температур, которое можно достичь, экстрагируя тепло от источника.

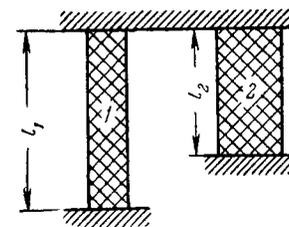


Рис. 7.31. Термопара из двух ветвей.

Поток тепла в одной из ветвей термопары *i* (*i* равно 1 или 2) по оси *x* будет:

$$q_i = \mp \alpha_i J T - \kappa_i S_i \frac{dT}{dx} \quad (7.3.1)$$

(здесь сохранены обозначения гл. 3).

Генерация тепла на единице длины за счет джоулевого нагрева будет:

$$\frac{J^2}{\sigma_i A_i} = - \kappa_i S_i \frac{d^2 T}{dx^2}. \quad (7.3.2)$$

Решая это уравнение при граничных условиях:

$$(T)_{x=0} = T_{\text{гор}}; \quad (T)_{x=l} = T_{\text{хол}},$$

находим:

$$q_i = \frac{J^2 \left[x - \left(\frac{l}{2} \right) \right]}{\sigma_i S_i} - \frac{\kappa_i S_i (T_{\text{хол}} - T_{\text{гор}})}{l_i}. \quad (7.3.3)$$

Мощность охлаждения источника тепла q равна сумме величин q_1 и q_2 при $x = 0$. Учитывая, что токи в ветвях термопары текут в противоположном направлении, получим:

$$q = (\alpha_2 - \alpha_1) J T_{\text{гор}} - \frac{J^2 R}{2} - K(T_{\text{хол}} - T_{\text{гор}}), \quad (7.3.4)$$

где $R = \frac{l_1}{S_1 \sigma_1} + \frac{l_2}{S_2 \sigma_2}$ — общее электрическое сопротивление последовательно соединенных ветвей; $K = \frac{S_1 \kappa_1}{l_1} + \frac{S_2 \kappa_2}{l_2}$ — общая теплопроводность параллельно соединенных ветвей.

Полный поток расходуемой электрической энергии в одной ветви будет:

$$w_i = \pm \int_{T_{\text{гор}}}^{T_{\text{хол}}} \alpha_i J dT + \int_0^{l_i} \frac{J^2 dx}{\sigma_i S_i} = \mp \alpha_i J (T_{\text{хол}} - T_{\text{гор}}) + \frac{J^2 l_i}{\sigma_i S_i},$$

а для обеих ветвей:

$$w = (\alpha_2 - \alpha_1) J (T_{\text{хол}} - T_{\text{гор}}) + J^2 R. \quad (7.3.5)$$

Коэффициент преобразования тепловой энергии в электрическую (КПД термопары) Φ , равный отношению q/w , примет вид:

$$\Phi = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) J T_{\text{гор}} - \frac{J^2 R}{2} - K(T_{\text{хол}} - T_{\text{гор}})}{(\alpha_2 - \alpha_1) J (T_{\text{хол}} - T_{\text{гор}}) + J^2 R}. \quad (7.3.6)$$

Найдем величину тока J_Φ , соответствующего максимальному КПД, $\Phi_{\text{макс}}$, для данного градиента температур. Для этого положим $d\Phi/dT = 0$, тогда

$$J_\Phi = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) (T_{\text{хол}} - T_{\text{гор}})}{R(\sqrt{1 + Z T_M} - 1)}, \quad (7.3.7)$$

где T_M — средняя температура, равная $\frac{T_{\text{хол}} + T_{\text{гор}}}{2}$;

$$Z = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{KR}.$$

Коэффициент $\Phi_{\text{макс}}$ будет равен

$$\Phi_{\text{макс}} = \frac{T_{\text{гор}}}{T_{\text{хол}} - T_{\text{гор}}} \frac{\sqrt{1 + Z T_M} - \frac{T_{\text{хол}}}{T_{\text{гор}}}}{\sqrt{1 + Z T_M} + 1}. \quad (7.3.8)$$

Из условия $dq/dJ = 0$ получим значение J_q , соответствующее максимальной мощности охлаждения:

$$J_q = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) T_{\text{гор}}}{R}, \quad (7.3.9)$$

и КПД по мощности

$$\Phi_q = \frac{\frac{1}{2} Z T_{\text{гор}}^2 - (T_{\text{хол}} - T_{\text{гор}})}{Z T_{\text{хол}} T_{\text{гор}}}. \quad (7.3.10)$$

Из (7.3.1) легко найти $(T_{\text{хол}} - T_{\text{гор}})_{\text{макс}}$:

$$(T_{\text{хол}} - T_{\text{гор}})_{\text{макс}} = \frac{1}{2} Z T_{\text{гор}}^2. \quad (7.3.11)$$

Так как величина Z определяет и максимальный перепад температур и КПД термопары для любого малого градиента температур, то она является общей характеристикой термопары.

Для данных двух термопарных материалов имеется максимум величины Z , который достигается при оптимальном соотношении между размерами ветвей. Для этого необходимо, чтобы произведение RK стало минимальным. Это будет при

$$\left(\frac{S_1/l_1}{S_2/l_2}\right) = \sqrt{\frac{\sigma_2 \kappa_2}{\sigma_1 \kappa_1}}. \quad (7.3.12)$$

Если это условие выполнено, то

$$Z = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{\left[\left(\frac{\kappa_1}{\sigma_1}\right)^{1/2} + \left(\frac{\kappa_2}{\sigma_2}\right)^{1/2}\right]^2}. \quad (7.3.13)$$

Таким образом, исследование термоэлектрических материалов заключается в поисках таких пар полупроводников, для которых Z , определяемое по (7.3.13), будет максимальным.

Для характеристики термопар обычно вводят отдельные коэффициенты z_i для каждой из ветвей:

$$z_i = \frac{\alpha_i^2 \sigma_i}{\kappa_i}. \quad (7.1.14)$$

Это выражение можно переписать в несколько ином виде:

$$zT = \frac{\alpha^2/L}{1 + \frac{\kappa_p}{\kappa_e}},$$

или, так как для большинства полупроводников $\frac{\kappa_p}{\kappa_e} \gg 1$, то

$$zT \approx \frac{\alpha^2}{L \frac{\kappa_p}{\kappa_e}}. \quad (7.1.15)$$

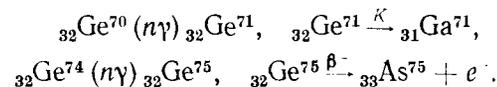
Если воспользоваться анализом величин α и L (см. гл. 3), то нетрудно выяснить связь zT со степенью вырождения μ^* , а следовательно, и со степенью легирования полупроводника. Большие величины z достигаются при значениях μ^* , близких к вырождению.

Конкретные конструкции полупроводниковых термоэлектрических устройств описаны в [108].

§ 7.4. Датчики Холла и магнетосопротивления, устойчивые к ядерному излучению

Известно, что облучение полупроводниковых кристаллов частицами высоких энергий представляет собой прямой путь создания дефектов решетки, так как правильно расположенные атомы в кристалле могут быть смещены в междузельные состояния вследствие упругого соударения с частицей. Многочисленные опыты по облучению слабо легированных монокристаллов германия, кремния и других полупроводников дейтонами, α -частицами, быстрыми электронами, быстрыми и медленными нейтронами показали, что качественно эффекты облучения различными частицами подобны, причем обычно концентрация свободных носителей заряда и проводимость полупроводниковых кристаллов после облучения уменьшаются [109]. Кроме того, было показано, что вызванные облучением изменения электрических свойств в значительной мере восстанавливаются после прогрева облученного кристалла при высоких температурах или в результате естественного восстановления, который имеет место даже при низких температурах (ниже 170° К). Исключением из этого правила является действие медленных нейтронов на Ge и Si. В этом случае в резуль-

тате определенных ядерных реакций в кристалле возникает значительный остаточный устойчивый эффект. Например, в Ge этот эффект заключается в превращении изотопов германия ${}_{32}\text{Ge}^{70}$ и ${}_{32}\text{Ge}^{74}$ в стабильные элементы — галлий и мышьяк:



Образующиеся в результате этих реакций As и Ga, являясь донорной и акцепторной примесью в германии, определяют электрофизические свойства кристалла.

Число случаев захвата медленных нейтронов данным изотопом будет:

$$N = nvt\theta_i N_0 P_i, \quad (7.4.1)$$

где nvt — интегральный поток медленных нейтронов; θ_i — эффективное сечение захвата нейтронов данным изотопом; P_i — относительное содержание изотопа; N_0 — концентрация атомов германия в 1 см^3 , равная $4,52 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$.

Необходимо отметить, что исходный германий содержит ~ 8% изотопа ${}_{32}\text{Ge}^{76}$, который в результате соответствующей ядерной реакции образует селен. Из-за малости P_i и θ_i для этого изотопа образование Se в решетке Ge можно не учитывать.

Величины эффективных сечений, соответствующие изотопические составы и периоды полураспада согласно литературным данным для Ge приведены в таблице 7.4.

Таблица 7.4

Изотоп	θ_i , барн	P_i , %	$T_{1/2}$
${}_{32}\text{Ge}^{70}$	$3,4 \pm 0,3$	20,55	12 дн.
${}_{32}\text{Ge}^{74}$	$0,62 \pm 0,6$	36,74	82 мин.
${}_{32}\text{Ge}^{76}$	$0,36 \pm 0,07$	7,69	12 час.

Зная интегральный поток nvt , θ_i и P_i , можно вычислить концентрации мышьяка и галлия, образующиеся при облучении.

Очевидно, что проблема устойчивости полупроводниковых приборов, в частности датчика Холла, к ядерному облучению будет существенно зависеть от того, насколько

много примесных центров будет создано в результате облучения.

Целесообразно использование в качестве материала для изготовления датчиков Холла сильно легированных германия, кремния или других вырожденных полупроводников, так как в этом случае влияние облучения на электрические свойства таких кристаллов, в частности, на концентрацию носителей заряда даже при очень больших интегральных потоках ядерного излучения, будет пренебрежимо мало, т. е. такой датчик Холла будет устойчивым к ядерной радиации.

Согласно (7.4.1), концентрации атомов As и Ga, образующихся при облучении германия медленными нейтронами, соответственно равны

$$N_{As} = 1,03 \cdot 10^{-2} nvt; \quad N_{Ga} = 3,16 \cdot 10^{-2} nvt.$$

Отсюда ясно, что если датчик Холла изготовлен из сильно легированного германия с концентрацией свободных носителей заряда порядка 10^{19} см^{-3} , то такой прибор будет устойчив к интегральным потокам медленных нейтронов порядка $nvt \sim 10^{20}$.

Заметим, что чувствительность такого датчика Холла будет несколько ниже, чем у датчика, изготовленного из несильно легированного германия.

Одним из основных требований, предъявляемых к датчикам Холла, является необходимость температурной стабильности прибора [110]. Весьма важным свойством сильно легированных полупроводников вообще и, в частности, германия является независимость постоянной Холла от температуры в широком температурном интервале.

Как было показано в главе 3, в диапазоне температур от 4,2 до 600° К постоянная Холла не зависит от температуры для образцов германия с концентрацией примеси $n > 2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Отсюда ясно еще одно преимущество рассматриваемых датчиков Холла, чувствительность которых, кроме устойчивости к ядерному облучению, будет температурно-стабильна с очень большой точностью в интервале температур 4,2—600° К, а возможно, и при еще более высоких температурах.

Влияние облучения в принципе также может сказываться на подвижности ввиду добавочного рассеяния носителей

заряда на дефектах. Однако в случае сильно легированных полупроводников типа Ge подвижность носителей заряда в основном обусловлена рассеянием на ионизованных примесях, так что этот эффект можно не учитывать. Кроме того, даже если этот эффект и играет какую-то роль, то постоянная Холла при этом меняться не будет.

Тем не менее автором были проведены [111] прямые опыты по облучению монокристаллов германия медленными нейтронами и исследованию магнетосопротивления и эффекта Холла облученных образцов. В результате было показано, что в качестве датчиков Холла и магнетосопротивления со стабильными свойствами при облучении могут применяться кристаллы германия с концентрацией носителей более 10^{18} см^{-3} .

§ 7.5. Тензометры

Как известно, при деформации полупроводниковых или металлических образцов их удельное сопротивление изменяется. Относительное изменение удельного сопротивления на единицу относительной деформации называется *тензочувствительностью*. Эта величина — безразмерная, вполне однозначно определяющая изменение удельного сопротивления при деформации. Однако удобнее измерять размерную величину, называемую *пьезосопротивлением* (или *тензосопротивлением*). Если X — механическое напряжение; $\frac{\Delta \rho}{\rho}$ — изменение удельного сопротивления образца при действии напряжения X , то пьезосопротивление

$$\Pi = \frac{\Delta \rho}{\rho X}. \quad (7.5.1)$$

Обычно X измеряется в $\text{дин}/\text{см}^2$, Π имеет размерность $\text{см}^2/\text{дин}$. И тензочувствительность, и пьезосопротивление — тензоры четвертого ранга, имеющие в общем случае 21 независимую компоненту. Для кристаллов кубической симметрии число независимых компонент сокращается до трех. Комбинации трех компонент Π_{11} , Π_{12} , Π_{44} полностью определяют пьезосопротивление для любого направления в кристалле. Для получения значений Π_{11} , Π_{12} , Π_{44} необходимо произвести по крайней мере три измерения на двух различно

ориентированных образцах [112]. Из этих трех измерений два должны быть «продольными» измерениями и одно — «поперечное», или наоборот. При «продольных» измерениях направление тока через образец и направление растягивающей или сжимающей силы параллельны, при «поперечных» — перпендикулярны.

Если обозначить через l , m , n косинусы углов между продольным направлением, в котором вырезан образец, и кристаллографическими осями куба x , y , z соответственно, то продольное пьезосопротивление при любой ориентации образца равно [113]

$$\frac{\Delta p}{\rho X} = \Pi_{11} - 2(l^2 m^2 + m^2 n^2 + n^2 l^2)(\Pi_{11} - \Pi_{12} - \Pi_{44}). \quad (7.5.2)$$

В том случае, когда все компоненты Π_{11} , Π_{12} , Π_{44} невелики, в эту формулу необходимо вводить поправку на изменение геометрии образца при деформации. Если образец вырезан в направлении [110] и производятся «продольные» измерения, (7.5.2) переходит в

$$\frac{\Delta p}{\rho X} \Big|_{[110]} = \frac{1}{2}(\Pi_{11} + \Pi_{12} + \Pi_{44}). \quad (7.5.3)$$

Теория [114, 115] предсказывает, что для полупроводников, имеющих минимумы энергии в направлениях [111] в k -пространстве и эллипсоидальные изоэнергетические поверхности в точках минимумов k_i , вклад компонент Π_{11} и Π_{12} в общее пьезосопротивление на два порядка меньше вклада, который вносит компонента Π_{44} . Это дает возможность для германия n -типа формулу (7.5.3) записать в виде

$$\frac{\Delta p}{\rho X} \Big|_{[110]} = \frac{1}{2} \Pi_{44}. \quad (7.5.4)$$

Теория предсказывает как величину эффекта пьезосопротивления в германии и кремнии n -типа, так и зависимость пьезосопротивления от температуры. Для вырожденного германия n -типа из теории следует, что

$$\Pi_{44} = - \frac{\Sigma_U}{3c_{44}k_0 T} \frac{u_{\perp} - u_{\parallel}}{2u_{\perp} + u_{\parallel}} r \frac{F_{r+1}(\mu^*)}{F_r(\mu^*)}, \quad (7.5.5)$$

где Σ_U — постоянная потенциала деформации; c_{44} — компонента тензора жесткости; u_{\perp} , u_{\parallel} — подвижности носите-

лей заряда, соответственно перпендикулярная и параллельная большой оси эллипсоида в k -пространстве.

Экспериментальные результаты исследования пьезосопротивления сильно легированного германия n -типа выполнены в [116, 117], а сильно легированного кремния — в [118].

На рис. 7.32 показана зависимость величины Π_{44} от температуры для образцов германия с различной степенью легирования. Оптимальная концентрация примеси для изготовления температурно-стабильных тензодатчиков из германия составляет $2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$. Тензочувствительность такого датчика равна примерно 40, если кристалл

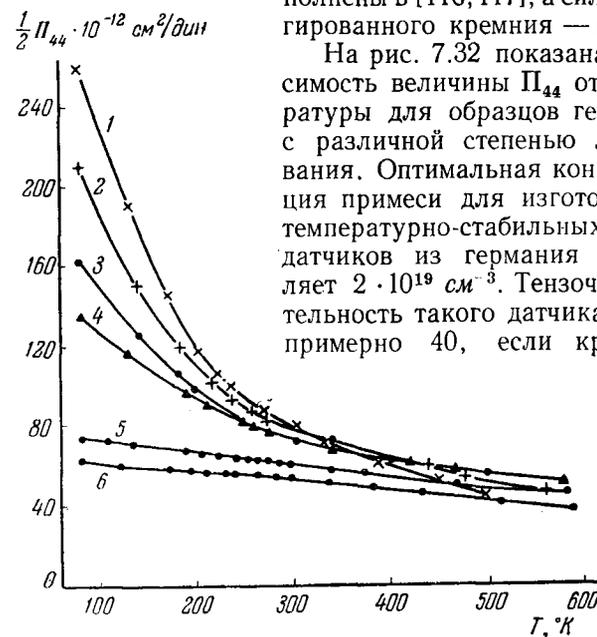


Рис. 7.32. Зависимость пьезосопротивления легированных образцов германия от температуры.

Цифры у кривых соответствуют концентрациям электронов: 1 — $4,5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$; 2 — $2,1 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$; 3 — $6,6 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$; 4 — $8,0 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$; 5 — $2,2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$; 6 — $3,3 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$.

ориентирован в направлении [110], и 60, если кристалл вырезан в направлении [111].

Эти данные, а также ряд работ по исследованию пьезосопротивления кремния [118] показывают перспективность использования сильно легированных кристаллов в качестве материала для температурно-стабильных тензодатчиков.

Продолжение табл. П. 2

ПРИЛОЖЕНИЯ

П. 1. Численные значения функции распределения Ферми—Дирака

$$f = (1 + e^{-\mu^*})^{-1}$$

μ^*	f	μ^*	f	μ^*	f
—4	0,9820	0,8	0,3100	3,2	0,0392
—3,5	0,9707	1,0	0,2689	3,4	0,0323
—3,0	0,9526	1,2	0,2315	3,6	0,0266
—2,5	0,9241	1,4	0,1978	3,8	0,0219
—2,0	0,8808	1,6	0,1680	4,0	0,0180
—1,5	0,8176	1,8	0,1418	4,5	0,0110
—1,0	0,7310	2,0	0,1192	5,0	0,0067
—0,5	0,6225	2,2	0,0997	6,0	0,0025
0,0	0,5000	2,4	0,0832	7,0	0,0009
0,2	0,4502	2,6	0,0691	8,0	0,0003
0,4	0,4013	2,8	0,0573	9,0	0,0001
0,6	0,3543	3,0	0,0474	10,0	0,00004

П. 2. Таблица интегралов Ферми целочисленных индексов

μ^*	F_0	F_1	F_2	F_3
—4	0,01815	0,01820	0,03660	0,1098
—3	0,04859	0,04920	0,09900	0,2978
—2,8	0,05904	0,05990	0,12076	0,3635
—2,6	0,07164	0,07290	0,14719	0,4436
—2,4	0,08684	0,08870	0,17943	0,5413
—2,2	0,10510	0,10788	0,21863	0,6603
—2	0,12690	0,13101	0,26626	0,8053
—1,8	0,15300	0,15893	0,32408	0,9819
—1,6	0,18390	0,19253	0,39416	1,1967

μ^*	F_0	F_1	F_2	F_3
—1,4	0,22040	0,23286	0,47900	1,4578
—1,2	0,26330	0,28112	0,58151	1,7748
—1	0,31327	0,33870	0,70500	2,1598
—0,9	0,34118	0,37135	0,77608	2,3818
—0,8	0,37111	0,40695	0,85386	2,6262
—0,7	0,40320	0,44564	0,93807	2,8949
—0,6	0,43750	0,48766	1,03234	3,1904
—0,5	0,47403	0,53322	1,13437	3,5153
—0,4	0,51298	0,58255	1,24588	3,8720
—0,3	0,55435	0,63590	1,36766	4,2631
—0,2	0,60155	0,69350	1,50050	4,6937
—0,1	0,64439	0,75561	1,64536	5,1653
0	0,69320	0,82247	1,80300	5,6822
0,2	0,79813	0,97150	2,16110	6,8601
0,4	0,91302	1,14240	2,58520	8,2824
0,6	1,03745	1,33730	3,04600	9,9790
0,8	1,17110	1,55800	3,56930	11,9951
1	1,31322	1,80630	4,12000	14,3950
1,2	1,4633	2,0837	5,213	17,213
1,4	1,61044	2,3920	6,003	20,472
1,6	1,78391	2,7324	7,021	24,493
1,8	1,95294	3,1060	8,189	28,918
2	2,12689	3,5135	9,445	34,304
2,2	2,30510	3,9570	11,004	40,3697
2,4	2,48681	4,4462	12,679	47,5187
2,6	2,67168	4,9520	14,547	55,676
2,8	2,85929	5,5050	16,641	64,936
3	3,04862	6,0957	18,870	75,722
4	4,0182	9,6267	34,592	154,21
5	5,0067	14,138	58,120	290,94
6	6,0025	19,642	91,744	513,00
7	7,0009	26,144	137,36	853,42
8	8,0003	33,645	196,99	1351,2
9	9,0001	42,145	272,61	2051,3
10	10,000	51,645	366,23	3004,8
11	11,000	62,145	479,86	4268,7
12	12,000	73,645	615,48	5906,0
13	13,000	86,145	775,10	7985,0
14	14,000	99,645	960,72	10592
15	15,000	114,15	1174,3	13778
16	16,000	129,65	1418	17659
17	17,000	146,15	1693,6	22318
18	18,000	163,65	2003,2	27854
19	19,000	182,15	2348,8	34375
20	20,000	201,65	2732,5	41985

П. 3. Таблица интегралов Ферми дробного индекса в интервале $0 \leq \mu^* \leq 20$

μ^*	$F_{-1/2}$	$F_{1/2}$	$F_{3/2}$	$F_{5/2}$	$F_{7/2}$	$F_{9/2}$	$F_{11/2}$
0	1,0722	0,678094	1,1528	3,08259	11,1837	51,2904	284,903
0,1	1,1405	0,733403	1,2586	3,38384	12,3146	56,5735	314,542
0,2	1,2109	0,792181	1,3730	3,71261	13,5560	62,3900	347,232
0,3	1,2830	0,854521	1,49646	4,07110	14,9168	68,7916	383,279
0,4	1,3566	0,920505	1,62954	4,46164	16,4091	75,8348	423,020
0,5	1,4317	0,990209	1,77279	4,88671	18,0440	83,5812	466,826
0,6	1,5079	1,06369	1,92679	5,34893	19,8341	92,0977	515,100
0,7	1,5851	1,14102	2,09209	5,85105	21,7929	101,457	568,288
0,8	1,6630	1,22222	2,26929	6,39597	23,9349	111,739	626,872
0,9	1,7415	1,30733	2,45895	6,98673	26,2754	123,028	691,385
1,0	1,8204	1,39638	2,66168	7,62653	28,8313	135,419	762,405
1,1	1,8995	1,48937	2,87806	8,31871	31,6201	149,011	840,566
1,2	1,9786	1,58632	3,10869	9,06675	34,6609	163,915	926,558
1,3	2,0575	1,68723	3,35416	9,87429	37,9738	180,247	1021,13
1,4	2,1361	1,79207	3,61506	10,7451	41,5803	198,135	1125,12
1,5	2,2144	1,90083	3,89198	11,6832	45,5032	217,717	1239,39
1,6	2,2920	2,01350	4,18550	12,6925	49,7668	239,139	1364,94
1,7	2,3691	2,13003	4,49622	13,7773	54,3968	262,562	1502,81
1,8	2,4453	2,25039	4,82470	14,9421	59,4203	288,155	1654,16
1,9	2,5208	2,37455	5,17152	16,1912	64,8661	316,103	1820,22
2,0	2,5954	2,50246	5,53725	17,5294	70,7645	346,603	2002,34
2,1	2,6690	2,63407	5,92245	18,9615	77,1476	379,864	2201,98
2,2	2,7417	2,76934	6,32766	20,4923	84,0491	416,113	2420,74
2,3	2,8133	2,90822	6,75343	21,2270	91,5043	455,591	2660,30
2,4	2,8839	3,05066	7,20030	23,8708	99,5507	498,556	2922,53
2,5	2,9535	3,19660	7,66880	25,7290	108,227	545,281	3209,40
2,6	3,0219	3,34599	8,15946	27,7070	117,575	596,061	3523,08
2,7	3,0893	3,49878	8,67277	29,8106	127,637	651,206	3865,87
2,8	3,1557	3,65491	9,20925	32,0453	138,458	711,048	4240,27
2,9	3,2210	3,81433	9,76941	34,4172	150,084	775,939	4648,95
3,0	3,2852	3,97699	10,3537	36,9321	162,566	846,252	5094,79
3,1	3,3484	4,14283	10,9627	39,5961	175,954	922,384	5580,89
3,2	3,4106	4,31181	11,5967	42,4155	190,302	1004,75	6110,56
3,3	3,4718	4,48388	12,2564	45,3966	205,664	1093,81	6687,35
3,4	3,5320	4,65898	12,9420	48,5458	222,099	1190,01	7315,06
3,5	3,5913	4,83707	13,6542	51,8698	239,666	1293,87	7997,76
3,6	3,6497	5,01810	14,3933	55,3752	258,429	1405,89	8739,81
3,7	3,7071	5,20202	15,1598	59,0687	278,451	1526,64	9545,84
3,8	3,7637	5,38880	15,9540	62,9574	299,800	1656,70	10420,8
3,9	3,8194	5,57838	16,7766	67,0481	322,545	1796,67	11370,0
4,0	3,8743	5,77073	17,6277	71,3480	346,758	1947,21	12399,1
4,1	3,9284	5,96580	18,5079	75,8644	372,514	2108,98	13514,0
4,2	3,9818	6,16356	19,4176	80,6044	399,889	2282,71	14721,2
4,3	4,0344	6,36396	20,3571	85,5756	428,964	2469,14	16027,3
4,4	4,0862	6,56698	21,3269	90,7855	459,890	2669,05	17439,7
4,5	4,1374	6,77257	22,3273	96,2416	492,542	2883,26	18965,9
4,6	4,1878	6,98070	23,3588	101,952	527,219	3112,63	20614,1
4,7	4,2376	7,19134	24,4217	107,924	563,939	3358,06	22392,7
4,8	4,2868	7,40445	25,5163	141,165	602,797	3620,49	24311,0
4,9	4,3352	7,62001	26,6431	120,684	643,887	3900,91	26378,6
5,0	4,3832	7,83797	27,8024	127,489	687,309	4200,34	28605,5
5,1	4,4306	8,05832	28,9946	134,588	733,164	4519,86	31002,6
5,2	4,4774	8,28103	30,2201	141,990	781,556	4860,57	33581,3
5,3	4,5236	8,50606	31,4791	149,701	832,593	5223,65	36353,4
5,4	4,5694	8,73339	32,7720	157,732	886,384	5610,32	39331,6
5,5	4,6146	8,96299	34,0992	166,090	943,044	6021,83	42529,3
5,6	4,6594	9,19485	35,4610	174,784	1002,69	6459,50	45960,4
5,7	4,7036	9,42893	36,8578	183,823	1065,43	6924,71	49639,8
5,8	4,7474	9,66521	38,2898	193,216	1131,40	7418,88	53582,9
5,9	4,7908	9,90367	39,7574	202,971	1200,73	7943,48	57806,1

μ^*	$F_{-1/2}$	$F_{1/2}$	$F_{3/2}$	$F_{5/2}$	$F_{7/2}$	$F_{9/2}$	$F_{11/2}$
6,0	4,8338	10,1443	41,2610	213,098	1273,53	8500,05	62326,6
6,1	4,8762	10,3870	42,8008	223,605	1349,94	9090,20	67162,3
6,2	4,9182	10,6319	44,3772	234,501	1430,10	9715,56	72332,3
6,3	4,9600	10,8789	45,9905	245,797	1514,14	10379,9	77856,2
6,4	5,0012	11,1279	47,6410	257,500	1602,20	11078,9	83755,0
6,5	5,0422	11,3790	49,3290	269,620	1694,44	11820,5	90050,4
6,6	5,0828	11,6321	51,0548	282,167	1790,99	12604,5	96765,3
6,7	5,1230	11,8873	52,8187	295,151	1892,00	13433,0	103924
6,8	5,1628	12,1444	54,6211	308,580	1997,64	14308,0	111550
6,9	5,2024	12,4035	56,4621	322,464	2108,06	15231,6	119671
7,0	5,2416	12,6646	58,3422	336,814	2223,42	16206,0	128314
7,1	5,2804	12,9277	60,2616	351,639	2343,89	17233,5	137508
7,2	5,3190	13,1927	62,2206	366,948	2469,63	18316,3	147281
7,3	5,3572	13,4596	64,2195	382,752	2600,81	19456,9	157666
7,4	5,3952	13,7284	66,2586	399,061	2737,61	20657,9	168695
7,5	5,4328	13,9991	68,3381	415,885	2880,21	21921,7	180401
7,6	5,4702	14,2717	70,4584	433,234	3028,79	23251,0	192821
7,7	5,5074	14,5461	72,6197	451,118	3183,54	24648,5	205990
7,8	5,5442	14,8224	74,8223	469,547	3344,64	26117,1	219947
7,9	5,5808	15,1005	77,0665	488,532	3512,29	27659,7	234732
8,0	5,6170	15,3805	79,3526	508,084	3686,68	29279,2	250387
8,1	5,6532	15,6622	81,6808	528,212	3868,01	30978,7	266954
8,2	5,6890	15,9458	84,0514	548,928	4056,49	32761,5	284479
8,3	5,7240	16,2311	86,4646	570,241	4252,33	34630,7	303008
8,4	5,7600	16,5183	88,9208	592,164	4455,73	36589,7	322589
8,5	5,7950	16,8071	91,4202	614,705	4666,92	38642,0	343273
8,6	5,8300	17,0978	93,9630	637,877	4886,10	40791,1	365113

ПРИЛОЖЕНИЯ

8,7	5,8650	17,3901	96,5496	661,690	5113,51	43040,7	388162
8,8	5,8990	17,6842	99,1801	686,156	5349,36	45394,5	412477
8,9	5,9334	17,9800	101,855	711,284	5593,89	47856,4	438116
9,0	5,9674	18,2776	104,574	737,087	5847,34	50430,4	465139
9,1	6,0012	18,5768	107,338	763,575	6109,93	53120,4	493610
9,2	6,0348	18,8777	110,147	790,760	6381,92	55930,7	523594
9,3	6,0682	19,1803	113,002	818,652	6663,55	58865,6	555157
9,4	6,1016	19,4845	115,902	847,264	6955,06	61929,4	588370
9,5	6,1346	19,7904	118,847	876,607	7256,72	65126,7	623304
9,6	6,1674	20,0980	121,839	906,692	7568,77	68462,0	660034
9,7	6,2002	20,4072	124,877	937,530	7891,49	71940,2	698638
9,8	6,2326	20,7180	127,961	969,134	8225,14	75566,0	739196
9,9	6,2650	21,0304	131,092	1001,51	8569,98	79344,5	781789
10,0	6,2972	21,3445	134,270	1034,68	8926,29	83280,7	826504
10,1	6,3290	21,6601	137,495	1068,65	9294,35	87379,9	873428
10,2	6,3608	21,9774	140,768	1103,44	9674,44	91647,4	922652
10,3	6,3926	22,2962	144,089	1139,04	10066,8	96088,7	974272
10,4	6,4240	22,6166	147,457	1175,48	10471,9	100709	1028380
10,5	6,4554	22,9386	150,874	1212,77	10889,8	105515	1085090
10,6	6,4866	23,2622	154,339	1250,92	11320,9	110512	1144480
10,7	6,5176	23,5873	157,853	1289,95	11765,5	115706	1206690
10,8	6,5484	23,9139	161,415	1329,85	12224,0	121103	1271800
10,9	6,5792	24,2421	165,027	1370,66	12696,5	126710	1339940
11,0	6,6096	24,5718	168,688	1412,37	13183,5	132532	1411220
11,1	6,6402	24,9031	172,398	1455,01	13685,3	138577	1485760
11,2	6,6704	25,2359	176,159	1498,58	14202,2	144851	1563700
11,3	6,7006	25,5701	179,969	1543,09	14734,4	151362	1645140
11,4	6,7306	25,9059	183,830	1588,56	15282,4	158115	1730240
11,5	6,7604	26,2432	187,741	1635,01	15846,5	165118	1819120
11,6	6,7902	26,5820	191,703	1682,44	16427,1	172379	1911920
11,7	6,8196	26,9222	195,716	1730,87	17024,3	179905	2008780
11,8	6,8492	27,2639	199,780	1780,30	17638,8	187704	2109860
11,9	6,8784	27,6071	203,895	1830,76	18270,7	195782	2215310

П. 3]

ИНТЕГРАЛЫ ФЕРМИ ДЛЯ $0 \leq \mu^* \leq 20$

371

μ^*	$F_{-1/2}$	$F_{1/2}$	$F_{3/2}$	$F_{5/2}$	$F_{7/2}$	$F_{9/2}$	$F_{11/2}$
12,0	6,9076	27,9518	208,062	1882,25	18920,4	204150	2325270
12,1	6,9368	28,2979	212,281	1934,79	19588,4	212814	2439930
12,2	6,9658	28,6455	216,551	1988,40	20274,9	221782	2559430
12,3	6,9946	28,9945	220,874	2043,07	20980,4	231064	2683940
12,4	7,0232	29,3449	225,250	2098,84	21705,2	240667	2813650
12,5	7,0518	29,6968	229,678	2155,70	22449,7	250601	2948740
12,6	7,0802	30,0501	234,159	2213,68	23214,3	260875	3089380
12,7	7,1086	30,4048	238,693	2272,79	23999,4	271497	3235760
12,8	7,1368	30,7610	243,280	2333,03	24805,4	282478	3388090
12,9	7,1650	31,1185	247,921	2394,43	25632,7	293825	3546560
13,0	7,1930	31,4775	252,616	2457,00	26481,6	305550	3711370
13,1	7,2210	31,8378	257,365	2520,74	27352,7	317662	3882730
13,2	7,2486	32,1996	262,167	2585,68	28246,3	330171	4060870
13,3	7,2764	32,5627	267,024	2651,83	29162,8	343087	4246000
13,4	7,3040	32,9272	271,936	2719,20	30102,7	356421	4438340
13,5	7,3314	33,2931	276,903	2787,81	31066,4	370183	4638140
13,6	7,3588	33,6603	281,924	2857,66	32054,3	384385	4845630
13,7	7,3860	34,0290	287,001	2928,77	33066,9	399036	5061050
13,8	7,4132	34,3989	292,133	3001,16	34104,6	414149	5284650
13,9	7,4402	34,7703	297,321	3074,84	35167,9	429734	5516700
14,0	7,4672	35,1430	302,564	3149,83	36257,2	445804	5757450
14,1	7,4940	35,5170	307,864	3226,13	37372,9	462369	6007170
14,2	7,5208	35,8924	313,219	3303,76	38515,6	479443	6266150
14,3	7,5474	36,2691	318,631	3382,74	39685,7	497038	6534650
14,4	7,5740	36,6471	324,100	3463,08	40883,7	515165	6812990
14,5	7,6006	37,0265	329,626	3544,80	42110,0	533837	7101440
14,6	7,6268	37,4072	335,208	3627,90	43365,2	553068	7400310

ПРИЛОЖЕНИЯ

14,7	7,6532	37,7892	340,848	3712,41	44649,7	572870	7709920
14,8	7,6794	38,1725	346,545	3798,33	45964,1	593257	8030570
14,9	7,7054	38,5571	352,300	3885,68	47308,7	614242	8362610
15,0	7,7314	38,9430	358,112	3974,48	48684,2	635840	8706350
15,1	7,7574	39,3303	363,983	4064,75	50091,0	658063	9062150
15,2	7,7832	39,7188	369,911	4156,48	51529,7	680926	9430340
15,3	7,8090	40,1086	375,898	4249,71	53000,7	704445	9811290
15,4	7,8346	40,4997	381,944	4344,43	54504,7	728632	10205400
15,5	7,8602	40,8921	388,048	4440,68	56042,0	753504	10612900
15,6	7,8858	41,2857	394,212	4538,46	57613,3	779075	11034300
15,7	7,9112	41,6806	400,434	4637,79	59219,1	805361	11470000
15,8	7,9364	42,0768	406,716	4738,69	60860,0	832377	11920400
15,9	7,9618	42,4743	413,057	4841,16	62536,4	860140	12385800
16,0	7,9868	42,8730	419,458	4945,22	64249,0	888666	12866700
16,1	8,0120	43,2730	425,919	5050,89	65998,2	917970	13363400
16,2	8,0370	43,6742	432,440	5158,18	67784,8	948070	13876600
16,3	8,0618	44,0767	439,021	5267,12	69609,2	978982	14406500
16,4	8,0868	44,4804	445,663	5377,70	71472,0	1010720	14953600
16,5	8,1116	44,8854	452,366	5489,95	73373,7	1043310	15518400
16,6	8,1362	45,2916	459,129	5603,89	75315,1	1076770	16101400
16,7	8,1608	45,6990	465,953	5719,52	77296,7	1111100	16703000
16,8	8,1854	46,1076	472,839	5836,87	79319,0	1146340	17323800
16,9	8,2098	46,5175	479,785	5955,95	81382,7	1182500	17964200
17,0	8,2342	46,9286	486,794	6076,77	83488,4	1219590	18624700
17,1	8,2586	47,3410	493,864	6199,35	85636,6	1257640	19305900
17,2	8,2828	47,7545	500,996	6323,70	87828,1	1296670	20008300
17,3	8,3070	48,1692	508,190	6449,85	90063,4	1336690	20732400
17,4	8,3312	48,5852	515,447	6577,80	92343,2	1377730	21478800
17,5	8,3552	49,0024	522,766	6707,58	94668,1	1419810	22248100
17,6	8,3792	49,4207	530,148	6839,19	97038,7	1462940	23040800
17,7	8,4030	49,8403	537,592	6972,66	99455,8	1507150	23857500
17,8	8,4268	50,2610	545,100	7107,99	101920	1524600	24698900
17,9	8,4506	50,6830	552,671	7245,21	104432	1598890	25565400

П. 3]

ИНТЕГРАЛЫ ФЕРМИ ДЛЯ $0 \leq \mu \leq 20$

μ^*	$F_{-1/2}$	$F_{1/2}$	$F_{3/2}$	$F_{5/2}$	$F_{7/2}$	$F_{9/2}$	$F_{11/2}$
18,0	8,4744	51,1061	560,305	7384,33	106992	1646450	26457900
18,1	8,4980	51,5304	568,003	7525,37	109601	1695190	27376800
18,2	8,5216	51,9559	575,764	7668,34	112260	1745100	28322800
18,3	8,5450	52,3825	583,589	7813,26	114969	1796230	29296600
18,4	8,5684	52,8104	591,479	7960,14	117729	1848580	30298900
18,5	8,5918	53,2394	599,433	8109,00	120541	1902190	31330300
18,6	8,6152	53,6696	607,451	8259,86	123406	1957080	32391500
18,7	8,6384	54,1009	615,533	8412,73	126323	2013260	33483300
18,8	8,6616	54,5334	623,681	8567,64	129295	2070780	34606300
18,9	8,6846	54,9671	631,894	8724,58	132321	2129640	35761400
19,0	8,7076	55,4019	640,171	8883,59	135402	2189870	36949200
19,1	8,7306	55,8378	648,514	9044,67	138540	2251510	38170500
19,2	8,7536	56,2749	656,923	9207,85	141734	2314570	39426100
19,3	8,7764	56,7132	665,397	9373,14	144985	2379080	40716800
19,4	8,7994	57,1526	673,937	9540,55	148295	2445060	42043400
19,5	8,8220	57,5931	682,543	9710,11	151664	2512550	43406600
19,6	8,8448	58,0348	691,215	9881,83	155093	2581570	44807400
19,7	8,8674	58,4776	699,953	10055,7	158582	2652140	46246600
19,8	8,8900	58,9215	708,758	10231,8	162132	2724300	47725100
19,9	8,9124	59,3666	717,630	10410,1	165744	2798070	49243700
20,0	8,9350	59,8128	726,568	10590,6	169419	2873480	50803300

П. 4. Таблица интегралов Ферми дробного индекса в интервале $-4 \leq \mu^* \leq 0$

μ^*	$F_{-1/2}$	$F_{1/2}$	$F_{3/2}$	$F_{5/2}$	$F_{7/2}$	$F_{9/2}$	$F_{11/2}$
-4,0	0,03204	0,016128	0,0242685	0,060773	0,212877	0,958331	5,27190
-3,9	0,03536	0,017812	0,0268125	0,067153	0,235245	1,05908	5,82621
-3,8	0,03904	0,019670	0,0296220	0,074201	0,259961	1,17040	6,43879
-3,7	0,04306	0,021721	0,0327240	0,081988	0,287271	1,29342	7,11577
-3,6	0,04752	0,023984	0,0361485	0,090590	0,317447	1,42937	7,86390
-3,5	0,05240	0,026480	0,0399300	0,100092	0,350788	1,57960	8,69065
-3,4	0,05778	0,029233	0,0441060	0,110588	0,387627	1,74560	9,60431
-3,3	0,06372	0,032296	0,0487140	0,122181	0,428327	1,92903	10,6140
-3,2	0,07022	0,035615	0,0538020	0,134985	0,473294	2,13173	11,7297
-3,1	0,07740	0,039303	0,0594165	0,149126	0,522971	2,35570	12,9627
-3,0	0,08526	0,043366	0,0656115	0,164742	0,577852	2,60317	14,3253
-2,9	0,09390	0,047842	0,0724470	0,181985	0,638479	2,87662	15,8309
-2,8	0,10336	0,052770	0,0799860	0,201024	0,705450	3,17875	17,4948
-2,7	0,11374	0,058194	0,0883020	0,222043	0,779426	3,51257	19,3333
-2,6	0,12512	0,064161	0,0974715	0,245246	0,861134	3,88139	21,3650
-2,5	0,13758	0,070724	0,107580	0,270857	0,951377	4,28886	23,6099
-2,4	0,15118	0,077938	0,118722	0,299122	1,05104	4,73903	26,0905
-2,3	0,16606	0,085864	0,130998	0,330312	1,16110	5,23635	28,8314
-2,2	0,18228	0,094566	0,144521	0,364725	1,28263	5,78574	31,8600
-2,1	0,19994	0,104116	0,159410	0,402686	1,41682	6,39261	35,2062

μ^*	$F_{-1/2}$	$F_{1/2}$	$F_{3/2}$	$F_{5/2}$	$F_{7/2}$	$F_{9/2}$	$F_{11/2}$
-2,0	0,21918	0,114588	0,175800	0,444554	1,56497	7,06296	38,9035
-1,9	0,24010	0,126063	0,193836	0,490723	1,72851	7,80339	42,9883
-1,8	0,26278	0,138627	0,213674	0,541623	1,90902	8,62116	47,5013
-1,7	0,28736	0,152373	0,235484	0,597724	2,10825	9,52431	52,4872
-1,6	0,31394	0,167397	0,259451	0,659544	2,32810	10,5217	57,9953
-1,5	0,34262	0,183802	0,285773	0,727646	2,57066	11,6230	64,0800
-1,4	0,37352	0,201696	0,314666	0,802644	2,83825	12,8390	70,8016
-1,3	0,40674	0,221193	0,346361	0,885212	3,13339	14,1815	78,2261
-1,2	0,44236	0,242410	0,381110	0,976079	3,45886	15,6636	86,4268
-1,1	0,48048	0,265471	0,419177	1,07604	3,81771	17,2995	95,4842
-1,0	0,52114	0,290501	0,460848	1,18597	4,21325	19,1050	105,487
-0,9	0,56444	0,317630	0,506432	1,30679	4,64916	21,0975	116,534
-0,8	0,61040	0,346989	0,556250	1,43954	5,12959	23,2959	128,732
-0,7	0,65902	0,378714	0,610647	1,58530	5,65835	25,7212	142,201
-0,6	0,71034	0,412937	0,662989	1,74527	6,24076	28,3964	157,071
-0,5	0,76434	0,449793	0,734660	1,92074	6,88184	31,3467	173,488
-0,4	0,82096	0,489414	0,805065	2,11308	7,58725	34,5997	191,608
-0,3	0,88014	0,531931	0,881628	2,32378	8,36313	38,1858	211,608
-0,2	0,94182	0,577470	0,964796	2,55444	9,21622	42,1381	233,680
-0,1	1,0059	0,626152	1,05503	2,80677	10,1538	46,4931	258,034

П. 5. Кинетические интегралы типа Φ_n

Рекуррентные формулы для вычисления интегралов Φ_n . Фигурирующие в главе 3 при рассмотрении кинетических эффектов интегралы Φ_n являются более общими по сравнению с интегралами Ферми, так как они учитывают смешанный механизм рассеяния. Интегралы типа Φ_n , описывающие основные эффекты, запишем в виде

$$\Phi_n = \int_0^\infty \frac{(e^*)^n}{(e^*)^2 + a^2} \frac{df}{de^*} de^*, \quad (\text{П.5.1})$$

где f — функция распределения Ферми — Дирака. Запись (П.5.1) справедлива, если значения индекса n целые (четные и нечетные).

Для дробных индексов кинетический интеграл запишем в виде

$$\Phi_{k+\frac{1}{2}} = \int_0^\infty \frac{(e^*)^{k+1/2}}{((e^*)^2 + a^2)^2} \frac{df}{de^*} de^*, \quad (\text{П.5.2})$$

где k — целое число.

Можно показать, что для любого целого нечетного n будет справедливо соотношение

$$\Phi_n = (-1)^{n+1} a^{n-1} \Phi_1 + \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{j+1} S_{n-2j} a^{2j-2}, \quad (\text{П.5.3})$$

где

$$\Phi_1 = \int_0^\infty \frac{e^*}{(e^*)^2 + a^2} \frac{df}{de^*} de^*, \quad (\text{П.5.4})$$

$$S_n = \int_0^\infty (e^*)^n \frac{df}{de^*} de^* = -n F_{n-1}(\mu^*), \quad (\text{П.5.5})$$

причем

$$S_0 = -(1 + e^{-\mu^*})^{-1}, \quad (\text{П.5.6})$$

а $F_{n-1}(\mu^*)$ является обычным интегралом Ферми.

Например, интеграл Φ_3 , который входит во все кинетические эффекты, будет равен

$$\Phi_3 = S_1 + a^2 \Phi_1 = -F_0(\mu^*) + a^2 \Phi_1. \quad (\text{П.5.7})$$

Для n целого, но четного ($n = 2k$) Φ_n можно представить в виде

$$\Phi_{2k} = a^{2k} \Phi_0 + \sum_{j=1}^k S_{2k-2j} (-1)^j a^{2j}, \quad (\text{П.5.8})$$

где

$$\Phi_0 = \int_0^\infty \frac{1}{(e^*)^2 + a^2} \frac{df}{de^*} de^*. \quad (\text{П.5.9})$$

Если, например, $n = 4$, то $k = 2$ и

$$\Phi_4 = -a^2 S_2 + a^4 S_0 + a^4 \Phi_0, \quad (\text{П.5.10})$$

или, пользуясь (П.5.5) и (П.5.6), перепишем (П. 5. 10) в виде

$$\Phi_4 = 2a^2 F_1(\mu^*) - a^4 \frac{1}{1 + e^{-\mu^*}} + a^4 \Phi_0. \quad (\text{П.5.11})$$

Точно так же для $k \geq 4$ можно выразить и интегралы (П. 5. 2) с дробными индексами:

$$\Phi_{k+1/2} = S_{k-4+1/2} - 2a^2 T_{k-4} + a^2 R_{k-4} \quad (k \geq 4), \quad (\text{П.5.12})$$

где
$$S_{k-4+1/2} = -(k-4+1/2) F_{k-4+1/2-1}(\mu^*), \quad (\text{П.5.13})$$

$$T_{k-4} = \int_0^\infty \frac{(e^*)^{k-4+1/2}}{(e^*)^2 + a^2} \frac{df}{de^*} de^*. \quad (\text{П.5.14})$$

$$R_{k-4} = \int_0^\infty \frac{(e^*)^{k-4+1/2}}{((e^*)^2 + a^2)^2} \cdot \frac{df}{de^*} de^*. \quad (\text{П.5.15})$$

Из (П.5.12), например, следует, что интеграл $\Phi_{9/2}$, определяющий подвижность, можно найти по формуле

$$\begin{aligned} \Phi_{9/2} = & -\frac{1}{2} F_{-1/2}(\mu^*) - 2a^2 \int_0^\infty \frac{(e^*)^{1/2}}{(e^*)^2 + a^2} \frac{df}{de^*} de^* + \\ & + a^2 \int_0^\infty \frac{(e^*)^{1/2}}{((e^*)^2 + a^2)^2} \frac{df}{de^*} de^*. \quad (\text{П.5.16}) \end{aligned}$$

Точно так же находится и интеграл $\Phi_{11/2}$, определяющий выражение для постоянной поперечного эффекта Нернста — Эттингсгаузена Q^\perp :

$$\begin{aligned} \Phi_{11/2} = & -\frac{3}{2} F_{1/2}(\mu^*) - 2a^2 \int_0^\infty \frac{(e^*)^{3/2}}{(e^*)^2 + a^2} \frac{df}{de^*} de^* + \\ & + a^2 \int_0^\infty \frac{(e^*)^{3/2}}{((e^*)^2 + a^2)^2} \frac{df}{de^*} de^*. \quad (\text{П.5.17}) \end{aligned}$$

Таким образом, выражения (П.5.3), (П.5.8), (П.5.12) позволяют вычислить кинетические интегралы, описывающие смешанное рассеяние через табулированные интегралы Ферми и некие интегралы Φ_1 , Φ_0 , T_{k-4} и R_{k-4} , которые можно рассчитать с большей точностью, чем непосредственно интегралы Φ_n и $\Phi_{k+\frac{1}{2}}$, так как последние на бесконечности сходятся хуже.

Полученные нами рекуррентные формулы были использованы для вычисления интегралов Φ_3 , Φ_4 , $\Phi_{9/2}$ и $\Phi_{11/2}$, причем интегралы Φ_0 , Φ_1 , T_{k-4} и R_{k-4} были вычислены с помощью электронной счетной машины «Стрела». Численные значения интегралов Φ_n приведены в таблицах П.5.1—П.5.4.

Таблица П. 5.1

Численные значения интеграла $\Phi_n(\mu^*, a)$

$a \backslash \mu^*$	0	1	2	3	4	5
-4	0,018150	0,011956	0,007691	0,005237	0,003745	0,002786
-3	0,048587	0,032180	0,020752	0,014146	0,010123	0,007535
-2	0,126928	0,085222	0,055299	0,037816	0,027110	0,020202
-1	0,313262	0,217005	0,142957	0,098526	0,070955	0,053029
0	0,693147	0,508869	0,346122	0,242684	0,176578	0,132845
1	1,313262	1,043028	0,748440	0,541380	0,401620	0,306041
2	2,126928	1,821806	1,398347	1,057170	0,807562	0,627857
3	3,048587	2,760661	2,262657	1,797801	1,423407	1,135688
4	4,018150	3,769654	3,259067	2,713997	2,230106	1,830907
5	5,006715	4,798274	4,314198	3,737460	3,178263	2,683968
6	6,002476	5,827182	5,385240	4,812585	4,214602	3,652053
7	7,000912	6,851306	6,453448	5,905082	5,297331	4,694226
8	8,000336	7,870417	7,512839	6,997542	6,399254	5,778642
9	9,000124	8,885471	8,562789	8,082662	7,504879	6,883546
10	10,000046	9,897468	9,604454	9,158271	8,706371	7,995408

$a \backslash \mu^*$	6	7	8	9	10
-4	0,002141	0,001689	0,001362	0,001119	0,000934
-3	0,005791	0,004570	0,003686	0,003029	0,002529
-2	0,015539	0,012269	0,009901	0,008138	0,006796
-1	0,040869	0,032313	0,026102	0,021472	0,017941
0	0,102845	0,081575	0,066052	0,054431	0,045541
1	0,239033	0,190804	0,155221	0,128371	0,107700
2	0,497419	0,401207	0,328938	0,273667	0,230672
3	0,917032	0,750275	0,621858	0,521760	0,442733
4	1,511195	1,257555	1,056237	0,895574	0,766346
5	2,266216	1,920546	1,636912	1,404479	1,213489
6	3,151653	2,719951	2,353471	2,044678	1,785072
7	4,132387	3,628289	3,185977	2,802804	2,473064
8	5,176766	4,617221	4,110857	3,660353	3,263692
9	6,260016	5,661899	5,105214	4,597467	4,140536
10	7,364484	6,742637	6,149193	5,595484	5,086918

Продолжение табл. П. 5.1

α μ^*	11	12	13	14	15
-4	0,000791	0,000677	0,000586	0,000511	0,000450
-3	0,002140	0,001833	0,001586	0,001384	0,001219
-2	0,005752	0,004926	0,004263	0,003723	0,003277
-1	0,015192	0,013016	0,011267	0,009841	0,008665
0	0,038607	0,033106	0,028676	0,025062	0,022078
1	0,091500	0,078599	0,068179	0,059656	0,052603
2	0,196700	0,169471	0,147362	0,129198	0,114115
3	0,379552	0,328431	0,286602	0,252018	0,223148
4	0,661475	0,575586	0,504603	0,445426	0,395682
5	1,055779	0,924756	0,815180	0,722916	0,644706
6	1,566603	1,382213	1,225948	1,092889	0,979016
7	2,190066	1,947206	1,738455	1,558543	1,402964
8	2,916498	2,613465	2,349169	2,118496	1,916829
9	3,732865	3,371051	3,050848	2,767785	2,517529
10	4,624857	4,208095	3,833946	3,498977	3,199483

α μ^*	16	17	18	19	20
-4	0,000399	0,000356	0,000320	0,000288	0,000262
-3	0,001081	0,000964	0,000866	0,000781	0,000708
-2	0,002906	0,002593	0,002328	0,002101	0,001905
-1	0,007685	0,006859	0,006158	0,005558	0,005040
0	0,019587	0,017489	0,015706	0,014179	0,012861
1	0,046708	0,041733	0,037500	0,033871	0,030737
2	0,101469	0,090771	0,081648	0,073811	0,067032
3	0,198833	0,178187	0,160523	0,145306	0,132113
4	0,353540	0,317577	0,286676	0,259957	0,236716
5	0,577974	0,520677	0,471187	0,428196	0,390352
6	0,881057	0,796354	0,722743	0,658459	0,602056
7	1,267222	1,150241	1,047275	0,956819	0,877037
8	1,740108	1,584819	1,447950	1,326934	1,219589
9	2,296059	2,099751	1,925397	1,770185	1,631672
10	2,931784	2,692388	2,478081	2,285954	2,113414

Таблица П. 5.2

Численные значения интеграла $\Phi_4(\mu^*, \alpha)$

α μ^*	1	2	3	4	5
-4	0,029594	0,021778	0,016135	0,012218	0,009468
-3	0,080001	0,058947	0,043702	0,033108	0,025665
-2	0,214211	0,158389	0,117662	0,089241	0,069232
-1	0,560398	0,417961	0,312027	0,237368	0,184512
0	1,393232	1,058776	0,799277	0,612286	0,478145
1	3,165742	2,485531	1,916149	1,488146	1,172954
2	6,383243	5,232208	4,161888	3,303380	2,644169
3	11,39937	9,763251	8,056550	6,570073	5,372951
4	18,37165	16,31619	13,97130	11,74723	9,829425
5	27,34464	25,01544	22,07452	19,09228	16,36184
6	38,32798	35,80269	32,39774	28,72225	25,16803
7	51,31580	48,66126	44,90388	40,63836	36,31552
8	66,30984	63,56951	59,55053	54,80349	49,80147
9	83,30475	80,50606	76,29334	71,16239	65,57893

α μ^*	6	7	8	9	10
-4	0,007498	0,006052	0,004967	0,004138	0,003493
-3	0,020326	0,016409	0,013471	0,011225	0,009477
-2	0,054860	0,044305	0,036386	0,030323	0,025605
-1	0,146401	0,118351	0,097262	0,081106	0,068512
0	0,380615	0,308387	0,253877	0,211976	0,179237
1	0,938984	0,765040	0,631897	0,529224	0,447373
2	2,143000	1,758325	1,461080	1,229485	1,045936
3	4,421410	3,672371	3,081070	2,609395	2,231502
4	8,239760	6,944620	5,894305	5,041132	4,344507
5	13,98854	11,97852	10,29798	8,904459	7,739421
6	21,93517	19,09310	16,64023	14,54442	12,76962
7	32,21629	28,48091	25,16179	22,25014	19,70237
8	44,87878	40,25024	36,01337	32,12056	28,83144
9	59,91427	54,42591	49,27226	44,53330	40,24684

Продолжение табл. П. 5.2

α μ^*	11	12	13	14	15
-4	0,002985	0,002574	0,002242	0,001965	0,001738
-3	0,008092	0,006983	0,006079	0,005332	0,004716
-2	0,021867	0,018866	0,016427	0,014420	0,012748
-1	0,058531	0,050514	0,043992	0,038619	0,034151
0	0,153257	0,132353	0,115318	0,101283	0,089598
1	0,383218	0,331583	0,289323	0,254175	0,220065
2	0,897349	0,778309	0,680849	0,599130	0,516834
3	1,927411	1,677178	1,470670	1,296232	1,152119
4	3,771988	3,297555	2,903560	2,565399	2,288074
5	6,765491	5,962456	5,268770	4,687936	4,191646
6	11,26012	9,971705	8,871560	7,933522	7,126962
7	17,53500	15,64525	14,00680	12,58713	11,35773
8	25,81757	23,23302	20,94188	18,92685	17,15958
9	36,38961	32,94355	29,83122	27,17054	24,75706

α μ^*	16	17	18	19	20
-4	0,001547	0,001384	0,001248	0,001126	0,001026
-3	0,004199	0,003756	0,003384	0,003059	0,002779
-2	0,011347	0,010157	0,009144	0,008272	0,007516
-1	0,030399	0,027217	0,024502	0,022167	0,020142
0	0,079772	0,071446	0,064332	0,058211	0,052906
1	0,196775	0,176962	0,159774	0,145230	0,132581
2	0,462340	0,415764	0,375914	0,341091	0,294396
3	1,037174	0,925401	0,816671	0,741662	0,675059
4	2,052098	1,849396	1,674557	1,521764	1,378944
5	3,757397	3,393829	3,080945	2,807741	2,569822
6	6,428711	5,815685	5,281964	4,813842	4,407941
7	10,28417	9,354292	8,524022	7,812245	7,147676
8	15,60102	14,23463	13,03098	11,94831	11,00122
9	22,61493	20,54904	19,00546	17,49935	16,14461

Таблица П. 5.3

Численные значения интеграла $\Phi_{0/2}(\mu^*, a)$

α μ^*	0	1	2	3	4	5
-4	0,016031	0,006097	0,002678	0,001340	0,000734	0,000432
-3	0,042647	0,016416	0,007236	0,003626	0,001990	0,001170
-2	0,109636	0,043508	0,019359	0,009741	0,005358	0,0031961
-1	0,260650	0,110921	0,050508	0,025690	0,014216	0,008401
0	0,536172	0,260074	0,124540	0,064922	0,036431	0,021719
1	0,910280	0,528589	0,276526	0,151084	0,087179	0,052912
2	1,297737	0,899089	0,529350	0,310501	0,187432	0,117245
3	1,642625	1,299844	0,864732	0,552254	0,353565	0,230561
4	1,937183	1,670110	1,233553	0,857460	0,585458	0,400734
5	2,191631	1,989737	1,591746	1,191963	0,865961	0,623050
6	2,416873	2,263070	1,917385	1,525428	1,170919	0,883129
7	2,620778	2,500759	2,206068	1,839854	1,479175	1,163554
8	2,808524	2,712253	2,461576	2,128225	1,776825	1,449179
9	2,983701	2,904373	2,689854	2,390100	2,056824	1,729341
10	3,148529	3,081759	2,896458	2,627985	2,316855	1,997765

α μ^*	6	7	8	9	10
-4	0,000268	0,000174	0,000117	0,000081	0,000058
-3	0,000726	0,000471	0,000318	0,000221	0,000158
-2	0,001961	0,001274	0,000858	0,000597	0,000426
-1	0,005234	0,003406	0,002298	0,001600	0,001144
0	0,013610	0,008892	0,006019	0,004199	0,003007
1	0,033565	0,022121	0,015068	0,010563	0,007593
2	0,075962	0,050834	0,035025	0,024769	0,017926
3	0,153958	0,105374	0,073857	0,052929	0,038712
4	0,277614	0,195456	0,140052	0,102134	0,075755
5	0,449107	0,326360	0,239858	0,178544	0,134664
6	0,662137	0,497091	0,375292	0,285643	0,219465
7	0,905095	0,701295	0,543879	0,423498	0,331730
8	1,165153	0,929721	0,739832	0,589106	0,470473
9	1,431162	1,172712	0,955783	0,777430	0,632651
10	1,694865	1,421845	1,184306	0,982560	0,813959

Продолжение табл. П. 5.3

α μ^*	11	12	13	14	15
-4	0,000042	0,000032	0,000024	0,000019	0,000015
-3	0,000115	0,000086	0,000065	0,000050	0,000039
-2	0,000312	0,000233	0,000177	0,000137	0,000107
-1	0,000837	0,000625	0,000475	0,000367	0,000288
0	0,002203	0,001647	0,001253	0,000969	0,000760
1	0,005579	0,004181	0,003188	0,002469	0,001939
2	0,013245	0,009969	0,007628	0,005925	0,004664
3	0,028845	0,021860	0,016822	0,013128	0,010376
4	0,057093	0,043673	0,033871	0,0266605	0,021144
5	0,102899	0,079619	0,062344	0,049369	0,039508
6	0,170311	0,133506	0,105700	0,084492	0,068161
7	0,261696	0,208039	0,166699	0,134635	0,109589
8	0,377413	0,304409	0,247004	0,201688	0,165742
9	0,515975	0,422259	0,347031	0,286563	0,237830
10	0,674519	0,559913	0,466022	0,389178	0,326246

α μ^*	16	17	18	19	20
-4	0,000012	0,000009	0,000007	0,000006	0,000005
-3	0,000031	0,000025	0,000020	0,000017	0,000014
-2	0,000085	0,000068	0,000055	0,000045	0,000037
-1	0,000228	0,000183	0,000149	0,000122	0,000101
0	0,000604	0,000485	0,000394	0,000367	0,000323
1	0,001542	0,001240	0,001008	0,000827	0,000685
2	0,003715	0,002996	0,002439	0,002004	0,001661
3	0,008297	0,006706	0,005473	0,004507	0,003742
4	0,016987	0,013784	0,011289	0,009324	0,007762
5	0,031928	0,026040	0,021420	0,017761	0,014836
6	0,055469	0,045513	0,037636	0,031350	0,026294
7	0,089877	0,074247	0,061762	0,051716	0,043576
8	0,137070	0,114068	0,095503	0,080428	0,068115
9	0,198413	0,166399	0,140276	0,118858	0,101213
10	0,274615	0,232146	0,197100	0,168074	0,143943

Таблица П. 5.4

Численные значения интеграла $\Phi_{11/2}(\mu^*, \alpha)$

α μ^*	0	1	2	3	4
-4	0,024192	0,014730	0,008049	0,004598	0,002760
-3	0,065050	0,039801	0,021797	0,012464	0,007488
-2	0,171880	0,106490	0,058657	0,033635	0,020239
-1	0,435750	0,277940	0,155340	0,089715	0,054203
0	1,017140	0,686580	0,396300	0,232740	0,141980
1	2,094560	1,535430	0,939640	0,570420	0,355040
2	3,753690	3,000970	1,992590	1,273960	0,820430
3	5,965480	5,115710	3,702390	2,527990	1,705610
4	8,656090	7,792490	6,087200	4,444630	3,161190
5	11,75696	10,92326	9,059200	7,025910	5,264690
6	15,21643	14,42771	12,50706	10,19723	8,009600
7	18,99696	18,25450	16,33971	13,86076	11,33379
8	23,07073	22,37073	20,40451	17,92896	15,15527
9	27,41634	26,75382	24,93082	22,33525	19,39598
10	32,01671	31,38691	29,62201	27,03254	23,99163

α μ^*	5	6	7	8	9
-4	0,001733	0,001131	0,000764	0,000531	0,000378
-3	0,004703	0,003071	0,002073	0,001441	0,001027
-2	0,012725	0,008313	0,005615	0,003904	0,002785
-1	0,034165	0,022357	0,015118	0,010521	0,007508
0	0,090038	0,059162	0,040121	0,027979	0,019999
1	0,228100	0,151210	0,103200	0,072301	0,051864
2	0,539400	0,363430	0,250970	0,177390	0,128110
3	1,159460	0,800550	0,563030	0,403560	0,294640
4	2,237650	1,593660	1,148070	0,838550	0,621450
5	3,889550	2,867350	2,123680	1,586210	1,197080
6	6,166480	4,707310	3,589500	2,746760	2,115120
7	9,057320	7,146650	5,608090	4,398160	3,458470
8	12,51045	10,17219	8,200390	6,585970	5,287590
9	16,45795	13,74086	11,35267	9,323030	7,635710
10	20,83223	17,79623	15,02868	12,59590	10,51038

Продолжение табл. П. 5.4

α μ^*	10	11	12	13	14
-4	0,000276	0,000205	0,000155	0,000120	0,000093
-3	0,000749	0,000557	0,000422	0,000325	0,000253
-2	0,002031	0,001511	0,001144	0,000881	0,000687
-1	0,005479	0,004078	0,003090	0,002378	0,001856
0	0,014612	0,010887	0,008254	0,006357	0,004965
1	0,037997	0,028370	0,021547	0,016617	0,012995
2	0,094358	0,070749	0,053915	0,041697	0,032684
3	0,218890	0,165260	0,126650	0,098410	0,077438
4	0,467260	0,356260	0,275240	0,215300	0,170370
5	0,913560	0,705150	0,550400	0,434250	0,346150
6	1,641560	1,285100	1,015090	0,809031	0,650490
7	2,732490	2,171960	1,738140	1,400910	1,137320
8	4,253840	3,434710	2,786380	2,272560	1,864130
9	6,252490	5,127970	4,217690	3,481920	2,886840
10	8,752800	7,288190	6,076250	5,077290	4,255200

α μ^*	15	16	17	18	19	20
-4	0,000074	0,000059	0,000048	0,000039	0,000032	0,000027
-3	0,000200	0,000160	0,000130	0,000106	0,000087	0,000072
-2	0,000543	0,000435	0,000352	0,000287	0,000237	0,000197
-1	0,001468	0,001175	0,000950	0,000776	0,000639	0,000531
0	0,003928	0,003144	0,002544	0,002078	0,001713	0,001423
1	0,010292	0,008245	0,006675	0,005456	0,004499	0,003741
2	0,025935	0,020811	0,016871	0,013807	0,011398	0,009485
3	0,061648	0,049605	0,040311	0,033057	0,027338	0,022785
4	0,136280	0,111110	0,089791	0,073857	0,061240	0,051159
5	0,278610	0,226300	0,185390	0,153100	0,127390	0,106750
6	0,527460	0,431190	0,355220	0,294790	0,246330	0,207190
7	0,929980	0,765800	0,634910	0,529850	0,444940	0,375880
8	1,538130	1,276680	1,065890	0,895010	0,755710	0,641530
9	2,404590	2,012600	1,692810	1,430820	1,215250	1,037060
10	3,578620	3,021070	2,560600	2,179230	1,862340	1,598100

П.6. Кинетические интегралы типа φ_n

В § 3.3 было показано, что кинетические эффекты при рассеянии на ионах с учетом экранирующего фактора $g(b)$ описываются интегралами φ_n . В настоящем приложении приводятся численные значения интегралов φ_n , вычисленные нами с помощью электронной машины М-20. Так как значения интегралов φ_n вычислены с меньшей точностью, чем интегралы Φ_n , то мы их приводим не в виде таблиц, а в виде кривых на рис. П.6.1—П.6.4.

По оси абсцисс на этих графиках отложена величина D , равная

$$D = \frac{\kappa \hbar}{e^2} \left(\frac{2k_0 T}{m_N^*} \right)^{1/2}. \quad (\text{П.6.1})$$

Именно эта величина определяет функцию $g(b)$, так как

$$b = D \frac{\varepsilon^*}{F_{-1/2}(\mu^*)}, \quad (\text{П.6.2})$$

в чем нетрудно убедиться, сопоставляя (П.6.1) с выражением для b , приведенным в таблице 3.2. Для германия, кремния и арсенида галлия n -типа величины D , вычисленные нами, указаны в таблице П.6.1.

Таблица П. 6.1

Значения D для Ge, Si и GaAs
 n -типа при разных температурах

$T, ^\circ\text{K}$	4,2	78	300	500
D_{Ge}	0,397	1,7	3,35	4,36
D_{Si}	0,216	0,925	1,82	2,37
D_{GaAs}	1,36	5,96	11,8	15,23

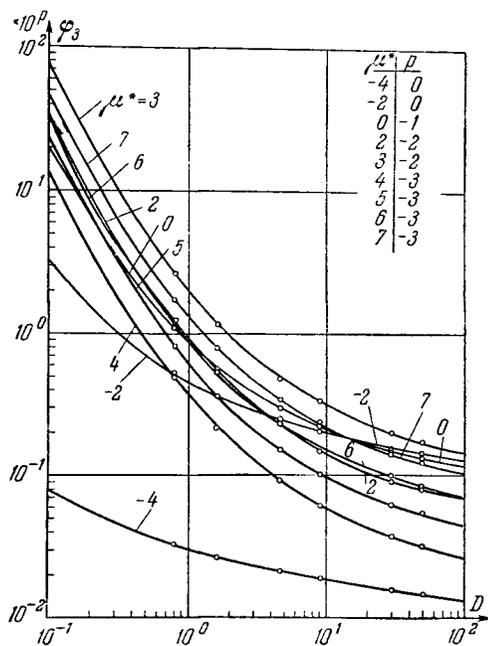
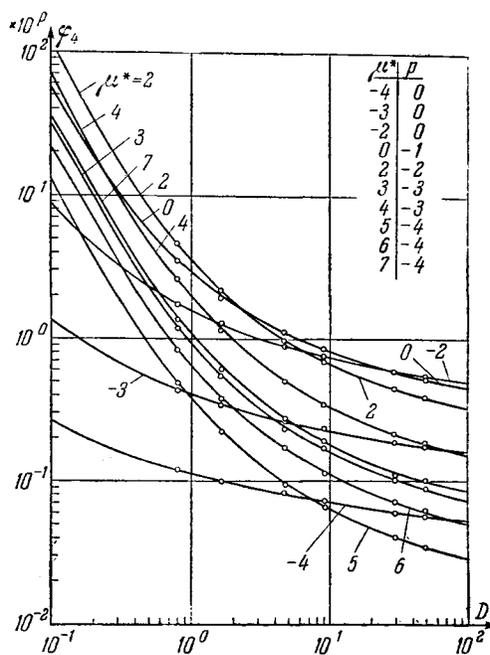
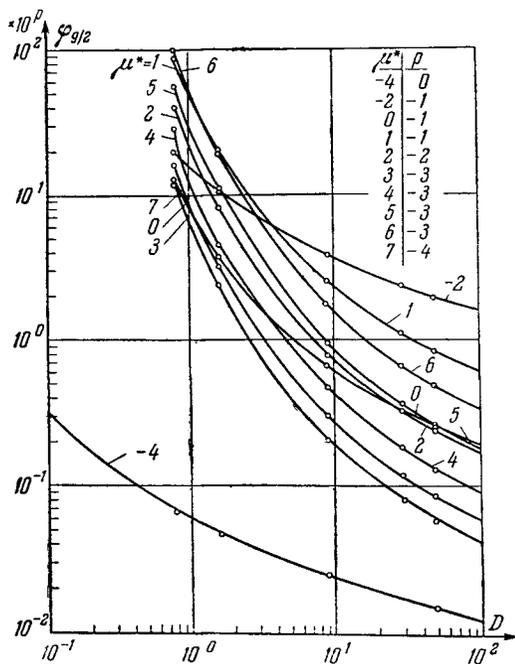
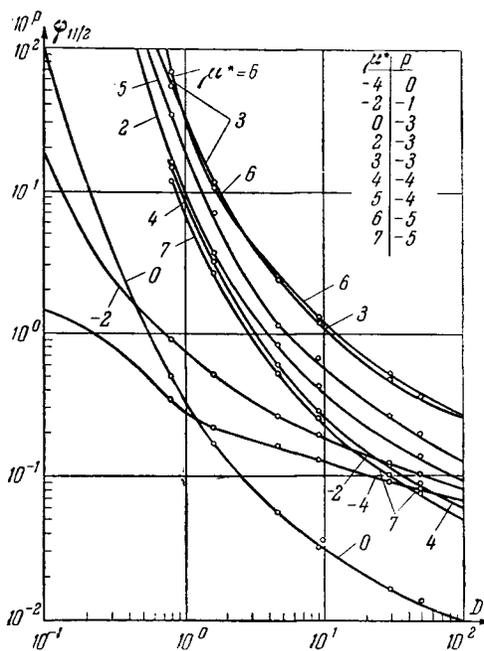
Рис. П.6.1. Значения интеграла φ_3 .Рис. П.6.2. Значения интеграла φ_4 .Рис. П.6.3. Значения интеграла $\varphi_{9/2}$.Рис. П.6.4. Значения интеграла $\varphi_{11/2}$.

Таблица П. 7

Таблица значений $\frac{u_H}{u_{H_0}}$

α μ^*	0	1	2	3	4	5	6
-4	0,9981	0,5762	0,3934	0,2891	0,2215	0,1752	0,1414
-3	0,9919	0,5764	0,3940	0,2830	0,2211	0,1754	0,1417
-2	0,9761	0,5768	0,3956	0,2911	0,2233	0,1765	0,1426
-1	0,9402	0,5776	0,3992	0,2946	0,2264	0,1790	0,1447
0	0,8741	0,5775	0,4066	0,3023	0,2331	0,1847	0,1495
1	0,7833	0,5727	0,4175	0,3170	0,2453	0,1954	0,1587
2	0,6895	0,5576	0,4274	0,3319	0,2623	0,2110	0,1726
3	0,6089	0,5321	0,4319	0,3471	0,2807	0,2294	0,1897
4	0,5448	0,5009	0,4277	0,3570	0,2967	0,2473	0,2076
5	0,4946	0,4686	0,4169	0,3604	0,3044	0,2623	0,2239
6	0,4545	0,4384	0,4018	0,3585	0,3127	0,2736	0,2370
7	0,4231	0,4121	0,3866	0,3517	0,3152	0,2787	0,2472
8	0,3968	0,3891	0,3704	0,3432	0,3135	0,2838	0,2540
9	0,3747	0,3696	0,3551	0,3339	0,3093	0,2838	0,2583
10	0,3568	0,3517	0,3398	0,3246	0,3042	0,2821	0,2600

α μ^*	7	8	9	10	11	12	13
-4	0,1164	0,0971	0,0818	0,0702	0,0600	0,0534	0,0462
-3	0,1165	0,0975	0,0824	0,0706	0,0607	0,0530	0,0463
-2	0,1173	0,0979	0,0829	0,0708	0,0613	0,0535	0,0469
-1	0,1191	0,0992	0,0842	0,0721	0,0623	0,0543	0,0477
0	0,1231	0,1030	0,0872	0,0746	0,0645	0,0562	0,0494
1	0,1310	0,1097	0,0930	0,0797	0,0689	0,0601	0,0528
2	0,1432	0,1203	0,1023	0,0878	0,0761	0,0665	0,0585
3	0,1580	0,1342	0,1139	0,0986	0,0858	0,0747	0,0663
4	0,1756	0,1498	0,1289	0,1117	0,0975	0,0857	0,0758
5	0,1920	0,1656	0,1437	0,1254	0,1104	0,0967	0,0867
6	0,2065	0,1810	0,1580	0,1385	0,1223	0,1088	0,0977
7	0,2184	0,1929	0,1708	0,1504	0,1351	0,1206	0,1079
8	0,2268	0,2031	0,1820	0,1589	0,1453	0,1317	0,1189
9	0,2336	0,2081	0,1912	0,1725	0,1555	0,1410	0,1291
10	0,2379	0,2167	0,1979	0,1809	0,1648	0,1504	0,1376

Продолжение табл. П. 7

α μ^*	14	15	16	17	18	19	20
-4	0,0420	0,0377	0,0340	0,0286	0,0247	0,0235	0,0216
-3	0,0408	0,0320	0,0324	0,0293	0,0261	0,0246	0,0223
-2	0,0416	0,0369	0,0331	0,0296	0,0267	0,0242	0,0219
-1	0,0421	0,0376	0,0335	0,0301	0,0273	0,0248	0,0226
0	0,0437	0,0389	0,0348	0,0313	0,0283	0,0257	0,0234
1	0,0468	0,0416	0,0373	0,0336	0,0304	0,0276	0,0252
2	0,0518	0,0462	0,0414	0,0373	0,0338	0,0307	0,0280
3	0,0586	0,0527	0,0467	0,0425	0,0382	0,0348	0,0323
4	0,0675	0,0604	0,0541	0,0490	0,0445	0,0405	0,0371
5	0,0773	0,0681	0,0620	0,0561	0,0509	0,0467	0,0425
6	0,0875	0,0782	0,0714	0,0646	0,0586	0,0535	0,0493
7	0,0977	0,0884	0,0799	0,0731	0,0662	0,0612	0,0561
8	0,1079	0,0977	0,0892	0,0816	0,0748	0,0688	0,0629
9	0,1172	0,1070	0,0977	0,0892	0,0816	0,0756	0,0697
10	0,1257	0,1155	0,1062	0,0977	0,0901	0,0833	0,0765

Таблица П. 8

Таблица значений холл-фактора

α μ^*	0	1	2	3	4	5	6
-4	1,1774	1,031977	1,09539	1,1821	1,2662	1,3466	1,4146
-3	1,1752	1,0313	1,0931	1,1788	1,2633	1,3406	1,4083
-2	1,1698	1,0298	1,0882	1,1709	1,2532	1,3289	1,3961
-1	1,1574	1,0264	1,0769	1,1532	1,2304	1,3018	1,3654
0	1,1351	1,0216	1,0574	1,0942	1,1885	1,2518	1,3088
1	1,1055	1,0177	1,0340	1,0797	1,1321	1,1833	1,23047
2	1,0768	1,0178	1,0162	1,0429	1,0788	1,1164	1,1524
3	1,0544	1,0174	1,0076	1,0193	1,0410	1,0664	1,0921
4	1,0386	1,0173	1,0053	1,0080	1,0190	1,0348	1,0523
5	1,0279	1,0161	1,0055	1,0032	1,0079	1,0169	1,0281
6	1,0207	1,0141	1,0060	1,0021	1,0031	1,0075	1,0143
7	1,0158	1,0121	1,0063	1,0023	1,0014	1,0031	1,0069
8	1,0123	1,0102	1,0062	1,0027	1,0010	1,0012	1,0031
9	1,0099	1,0086	1,0058	1,0030	1,0012	1,0006	1,0013
10	1,0080	1,0072	1,0053	1,0032	1,0015	1,0006	1,0005

Продолжение табл. П. 8

μ^* \backslash a	7	8	9	10	11	12	13
-4	1,4758	1,5260	1,5651	1,6121	1,6431	1,6739	1,6977
-3	1,4671	1,5226	1,5670	1,6071	1,6377	1,6659	1,6910
-2	1,4549	1,5045	1,5361	1,5855	1,6210	1,6506	1,6742
-1	1,4214	1,4697	1,5122	1,5487	1,5803	1,6075	1,6305
0	1,3592	1,4033	1,4416	1,4747	1,5034	1,5285	1,5499
1	1,2727	1,3100	1,3426	1,3711	1,3958	1,4176	1,4365
2	1,1854	1,2151	1,2414	1,2646	1,2850	1,3029	1,3186
3	1,1167	1,1393	1,1598	1,1782	1,1945	1,2090	1,2217
4	1,0698	1,0866	1,1023	1,1166	1,1295	1,1411	1,1515
5	1,0403	1,0524	1,0642	1,0792	1,0853	1,0946	1,1030
6	1,0224	1,0310	1,0396	1,0480	1,0560	1,0633	1,0701
7	1,0120	1,0179	1,0241	1,0304	1,0365	1,0423	1,0478
8	1,0061	1,0100	1,0144	1,0190	1,0236	1,0282	1,0326
9	1,0029	1,0054	1,0084	1,0117	1,0152	1,0187	1,0222
10	1,0013	1,0028	1,0048	1,0071	1,0097	1,0123	1,0151

μ^* \backslash a	14	15	16	17	18	19	20
-4	1,7241	1,7418	1,7584	1,7740	1,7822	1,8033	1,8063
-3	1,7149	1,7320	1,7482	1,7654	1,7757	1,7894	1,8006
-2	1,6990	1,7128	1,7303	1,7385	1,7445	1,7523	1,7790
-1	1,6513	1,6714	1,6822	1,6950	1,7122	1,7210	1,7326
0	1,5692	1,5859	1,6013	1,6130	1,6246	1,6342	1,6420
1	1,4532	1,4678	1,4805	1,4913	1,5014	1,5100	1,5187
2	1,3324	1,3444	1,3544	1,3650	1,3734	1,3808	1,4043
3	1,2331	1,2431	1,2520	1,2600	1,2671	1,2734	1,2790
4	1,1607	1,1690	1,1729	1,1830	1,1890	1,1943	1,1991
5	1,1106	1,1175	1,1237	1,1293	1,1343	1,1389	1,1430
6	1,0764	1,0821	1,0873	1,0920	1,0963	1,1003	1,1038
7	1,0529	1,0577	1,0632	1,0661	1,0698	1,0731	1,0762
8	1,0368	1,0407	1,0444	1,0478	1,0509	1,0538	1,0565
9	1,0256	1,0288	1,0318	1,0347	1,0374	1,0399	1,0423
10	1,0178	1,0204	1,0229	1,0253	1,0276	1,0298	1,0318

Таблица П. 9

Таблица значений отношения интегралов $\frac{\Phi_4(\mu^*, a)}{\Phi_3(\mu^*, a)}$

μ^* \backslash a	1	2	3	4	5
-4	2,47530	2,83158	3,08103	3,26257	3,39828
-3	2,48604	2,84055	3,08939	3,27057	3,40618
-2	2,51357	2,86423	3,11145	3,29183	3,42701
-1	2,58242	2,92369	3,16695	3,34533	3,47945
0	2,73790	3,05897	3,29349	3,46751	3,59927
1	3,03514	3,32095	3,53938	3,70536	3,83267
2	3,50380	3,74171	3,93682	4,09056	4,21142
3	4,12922	4,31495	4,48134	4,61920	4,73101
4	4,87356	5,0064	5,14787	5,26758	5,36863
5	5,69885	5,79840	5,90629	6,00715	6,09614
6	6,57745	6,64830	6,73188	6,81494	6,89148
7	7,48998	7,54035	7,60428	7,67148	7,73622
8	8,42520	8,46145	8,51021	8,56405	8,61820
9	9,37539	9,40185	9,43914	9,48215	9,52692

μ^* \backslash a	6	7	8	9	10
-4	3,50209	3,58303	3,64687	3,69808	3,73962
-3	3,50991	3,59070	3,65458	3,70578	3,74732
-2	3,53049	3,61115	3,67495	3,72610	3,76760
-1	3,58234	3,66264	3,72624	3,77728	3,81872
0	3,70086	3,78041	3,84359	3,89439	3,93572
1	3,92826	4,00956	4,07095	4,12261	4,15388
2	4,30824	4,38259	4,44181	4,49263	4,53430
3	4,82143	4,89470	4,95462	5,00114	5,04029
4	5,45250	5,52232	5,58046	5,62894	5,66912
5	6,17266	6,23704	6,29111	6,34004	6,37782
6	6,95990	7,01965	7,07051	7,11330	7,15357
7	7,79605	7,84968	7,89767	7,93854	7,96680
8	8,66927	8,71742	8,76055	8,77537	8,83400
9	9,57097	9,61266	9,65136	9,68648	9,72020

Продолжение табл. П. 9

α μ^*	11	12	13	14	15
-4	3,77368	3,80189	3,82546	3,84531	3,86218
-3	3,78137	3,80957	3,83314	3,85300	3,86987
-2	3,80164	3,80984	3,85341	3,87327	3,89014
-1	3,85273	3,88091	3,90448	3,92435	3,94123
0	3,96968	3,99785	4,02143	4,04133	4,05824
1	4,18818	4,21867	4,24358	4,26068	4,18351
2	4,56202	4,59258	4,62025	4,63730	4,52907
3	5,07812	5,10664	5,13141	5,14341	5,16303
4	5,70239	5,72904	5,75415	5,75943	5,78261
5	6,40805	6,44760	6,46332	6,48476	6,50164
6	7,18762	7,21432	7,23648	7,25922	7,27972
7	8,00661	8,03472	8,05704	8,07623	8,09555
8	8,85225	8,88974	8,91459	8,93410	8,95207
9	9,74844	9,77249	9,77801	9,81671	9,88387

α μ^*	16	17	18	19	20
-4	3,87661	3,88902	3,89977	3,90915	3,91735
-3	3,88429	3,89671	3,90746	3,91683	3,92503
-2	3,90457	3,91699	3,92775	3,93712	3,94533
-1	3,95567	3,96811	3,97888	3,98827	3,99649
0	4,07272	4,08520	4,09601	4,10544	4,11370
1	4,21288	4,24036	4,26066	4,28774	4,31342
2	4,55647	4,58037	4,60409	4,62114	4,35292
3	5,21631	5,19343	5,08757	5,10414	5,10971
4	5,80443	5,82346	5,84129	5,85391	5,82531
5	6,50098	6,51811	6,53869	6,55714	6,57829
6	7,29659	7,30289	7,30822	7,31077	7,32148
7	8,11554	8,13247	8,13924	8,16481	8,14980
8	8,96555	8,98186	8,99961	9,00448	9,02043
9	9,84945	9,86078	9,87093	9,88561	9,89453

Таблица П. 10

Таблица значений $\frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{Q^\perp}{Q_{L_0}^\perp}$

α μ^*	1	2	3	4	5
-4	0,0316	-0,0594	-0,0887	-0,0970	-0,0955
-3	0,0328	-0,0588	-0,0880	-0,0990	-0,0948
-2	0,0350	-0,0568	-0,0869	-0,0953	-0,0940
-1	0,0408	-0,0525	-0,0839	-0,0929	-0,0924
0	0,0517	-0,0430	-0,0769	-0,0879	-0,0888
1	0,0680	-0,0350	-0,0596	-0,0787	-0,0818
2	0,0837	-0,0205	-0,0474	-0,0653	-0,0718
3	0,0936	0,0149	-0,0280	-0,0495	-0,0594
4	0,0957	0,0294	-0,0094	-0,0328	-0,0458
5	0,0895	0,0419	0,0061	-0,0262	-0,0360
6	0,0789	0,0443	0,0140	-0,0123	-0,0217
7	0,0704	0,0508	0,0223	0,0029	-0,0125
8	0,0621	0,0480	0,0256	0,0105	0,0021
9	0,0591	0,0465	0,0289	0,0140	0,0046

α μ^*	6	7	8	9	10
-4	-0,0895	-0,0828	-0,0761	-0,0698	-0,0630
-3	-0,0896	-0,0830	-0,0752	-0,0688	-0,0598
-2	-0,0899	-0,0824	-0,0755	-0,0685	-0,0625
-1	-0,0877	-0,0814	-0,0756	-0,0679	-0,0614
0	-0,0850	-0,0795	-0,0728	-0,0665	-0,0607
1	-0,0802	-0,0755	-0,0701	-0,0643	-0,0595
2	-0,0718	-0,0695	-0,0658	-0,0609	-0,0563
3	-0,0626	-0,0620	-0,0598	-0,0575	-0,0541
4	-0,0517	-0,0538	-0,0532	-0,0511	-0,0487
5	-0,0407	-0,0448	-0,0460	-0,0451	-0,0442
6	-0,0321	-0,0354	-0,0380	-0,0387	-0,0388
7	-0,0219	-0,0273	-0,0307	-0,0326	-0,0335
8	-0,0140	-0,0243	-0,0270	-0,0290	-0,0295
9	-0,0047	-0,0130	-0,0175	-0,0199	-0,0225

Продолжение табл. П. 10

α μ^*	11	12	13	14	15
-4	-0,0575	-0,0491	-0,0440	-0,0389	-0,0354
-3	-0,0569	-0,0513	-0,0460	-0,0390	-0,0360
-2	-0,0562	-0,0518	-0,0465	-0,0418	-0,0370
-1	-0,0558	-0,0507	-0,0460	-0,0423	-0,0381
0	-0,0551	-0,0502	-0,0457	-0,0416	-0,0380
1	-0,0544	-0,0495	-0,0452	-0,0412	-0,0375
2	-0,0521	-0,0475	-0,0435	-0,0401	-0,0370
3	-0,0494	-0,0460	-0,0419	-0,0392	-0,0359
4	-0,0460	-0,0432	-0,0402	-0,0380	-0,0350
5	-0,0416	-0,0390	-0,0362	-0,0347	-0,0312
6	-0,0380	-0,0360	-0,0335	-0,0324	-0,0300
7	-0,0333	-0,0341	-0,0315	-0,0306	-0,0287
8	-0,0298	-0,0293	-0,0283	-0,0265	-0,0257
9	-0,0230	-0,0232	-0,0234	-0,0236	-0,0237

α μ^*	16	17	18	19	20
-4	-0,0317	-0,0300	-0,0287	-0,0282	-0,0281
-3	-0,0330	-0,0310	-0,0295	-0,0270	-0,0270
-2	-0,0340	-0,0320	-0,0304	-0,0274	-0,0268
-1	-0,0350	-0,0327	-0,0298	-0,0275	-0,0253
0	-0,0350	-0,0322	-0,0296	-0,0275	-0,0254
1	-0,0346	-0,0320	-0,0307	-0,0280	-0,0254
2	-0,0344	-0,0322	-0,0302	-0,0287	-0,0281
3	-0,0336	-0,0307	-0,0290	-0,0270	-0,0262
4	-0,0325	-0,0299	-0,0273	-0,0262	-0,0255
5	-0,0292	-0,0280	-0,0262	-0,0255	-0,0246
6	-0,0278	-0,0265	-0,0252	-0,0243	-0,0238
7	-0,0270	-0,0253	-0,0250	-0,0241	-0,0239
8	-0,0251	-0,0250	-0,0245	-0,0240	-0,0240
9	-0,0239	-0,0239	-0,0240	-0,0242	-0,0245

ЛИТЕРАТУРА

К главе 1

1. F. Bloch, Z. Phys. 52, 555 (1928).
2. Э. И. Адирович, Некоторые вопросы теории люминесценции кристаллов, Гостехиздат, 1956.
3. Н. Хенней, Полупроводники, ИЛ, 1962.
4. T. O. Woodruff, Solid State Phys. 4, N. Y. Acad. Press., 1957.
5. F. Herman, Phys. Rev. 93, 1214 (1954).
6. F. Herman, Phys. Rev. 95, 847 (1954).
7. F. Herman, Proc. IRE 43, 1703 (1955).
8. В. Лах, J. Mavroides, Solid State Phys. 11, 261 (1960).
9. Б. Лэкс, УФН LXX, № 1, 111 (1960).
10. R. K. Willardson, T. C. Harman, A. C. Beer, Phys. Rev. 96, 1512 (1954).
11. G. C. Pergola, D. Settle, Phys. Rev. 104, 598 (1956).
12. H. P. Furth, R. W. Wanick, Phys. Rev. 104, 343 (1956).
13. G. G. Macfarlane et al., Phys. Rev. 108, 1377 (1957).
14. G. G. Macfarlane et al., Phys. Rev. 111, 1245 (1958).
15. F. Herman, J. Electronics 1, 103 (1955).
16. F. Herman, J. Phys. Chem. Solids 8, 380 (1959).
17. К. Хилсум, А. Роуз-инс, Полупроводники $A^{III}B^V$, ИЛ, 1963.
18. «Selected Constants relative to semiconductors», Pergamon Press, N. Y., 1961.
19. А. И. Ансельм, Введение в теорию полупроводников, Физматгиз, 1963.
20. Д. И. Блохинцев, Основы квантовой механики, «Высшая школа», 1961.
21. C. H. Kittel, A. H. Mitchell, Phys. Rev. 96, 1488 (1954).
22. J. M. Luttinger, W. Kohn, Phys. Rev. 97, 863 (1955).
23. J. M. Luttinger, W. Kohn, Phys. Rev. 96, 802 (1954).
24. W. Kohn, J. M. Luttinger, Phys. Rev. 97, 1721 (1955).
25. W. Kohn, J. M. Luttinger, Phys. Rev. 98, 915 (1955).
26. W. Kohn, D. Schechter, Phys. Rev. 99, 1903 (1955).
27. E. Burstein, G. S. Picus, N. Sklar, Report on the Photoconductivity Conf., N. Y., November 1954.

28. G. Busch, H. Labhart, *Helv. Phys. acta* **14**, 463 (1946).
29. Н. Мотт и У. Туз, УФН **79**, № 4, 691 (1963).
30. P. Debye, E. Conwell, *Phys. Rev.* **93**, 693 (1954).
31. G. Pearson, J. Bardeen, *Phys. Rev.* **75**, 865 (1949).
32. W. Baltensperger, *Phil. Mag.* **44**, 1355 (1953).
33. M. Lax, J. C. Phillips, *Phys. Rev.* **110**, 41 (1958).
34. В. Л. Бонч-Бруевич, ФТТ **4**, 2660 (1962).
35. В. Л. Бонч-Бруевич, ФТТ **5**, 1852 (1963).
36. T. P. Broody, *J. Appl. Phys.*, **33**, 100 (1962).
37. H. M. James, A. S. Ginzburg, *J. Phys. Chem.* **57**, 840 (1953).
38. E. M. Conwell, *Phys. Rev.* **103**, 51 (1956).
39. H. L. Frisch, S. P. Lloyd, *Phys. Rev.* **120**, 1175 (1960).
40. В. Л. Бонч-Бруевич, А. Г. Миронов, ФТТ **3**, 3009 (1961).
41. R. H. Parmenter, *Phys. Rev.* **97**, 587 (1955).
42. В. Л. Бонч-Бруевич, ФТТ (сб. статей) **2**, 177 (1959).
43. P. Aigrain, *Physica* **20**, 978 (1954).
44. В. Л. Бонч-Бруевич, Ш. М. Коган, *Ann. of Phys.* **9**, 125 (1960).
45. Л. В. Келдыш, Г. П. Прошко, ФТТ **5**, 3378 (1963).
46. F. N. Hoepf, *Phys. Rev.* **97**, 1521 (1955).
47. Г. Б. Дубровский, Кандидатская диссертация, Ленинград, 1963.
48. J. I. Rankove, *Phys. Rev. Lett.* **4**, 31 (1960).
49. J. I. Rankove, *Phys. Rev. Lett.* **4**, 454 (1960).
50. C. Haas, *Phys. Rev.* **125**, 1965 (1962).
51. J. I. Rankove, P. Aigrain, *Phys. Rev.* **126**, 956 (1962).
52. Г. Б. Дубровский, В. К. Субашиев, ФТТ **4**, 3018 (1962).
53. H. S. Sommers, *Phys. Rev.* **124**, 1101 (1961).
54. F. Stern, R. M. Talley, *Phys. Rev.* **100**, 1638 (1955).
55. F. Stern, J. R. Dixon, *J. Appl. Phys.* **30**, 268 (1959).
56. V. Roberts, J. E. Quarrington, *J. Electronics I*, 152 (1955).
57. R. Newtman, *Phys. Rev.* **111**, 1518 (1958).
58. S. W. Kurnick, J. M. Powell, *Phys. Rev.* **116**, 597 (1959).
59. D. Long, *Phys. Rev.* **99**, 388 (1955).
60. В. И. Фистуль, А. М. Агаев, ФТТ **7**, 3042 (1965).

К главе 2

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Физматгиз, 1964.
2. М. А. Леонтович, *Статистическая физика*, Гостехиздат, 1944.
3. I. Maue, M. Maue, *Statistical Mechanics*, N. Y., 1940.
4. Дж. В. Гиббс, *Основные принципы статистической механики*, Гостехиздат, 1946.

5. А. Г. Самойлович, *Термодинамика и статистическая физика*, Гостехиздат, 1953.
6. В. Г. Левич, *Введение в статистическую физику*, Гостехиздат, 1950.
7. К. Хилсум, А. Роуз-инс, *Полупроводники A^{III}B^V*, ИЛ, 1963.
8. Р. Смит, *Полупроводники*, ИЛ, 1962.
9. P. T. Landsberg, *Proc. Phys. Soc.* **A65**, 604 (1952).
10. А. Г. Самойлович, ДАН УССР, № 3, 174 (1954).
11. P. Debye, E. Conwell, *Phys. Rev.* **93**, 693 (1954).
12. G. L. Pearson, J. Bardeen, *Phys. Rev.* **75**, 865 (1949).
13. K. Lehovec, H. Kedesday, *J. Appl. Phys.* **22**, 65 (1961).
14. В. Шокли, *Теория электронных полупроводников*, ИЛ, 1953.
15. J. S. Blakemore, *Electr. Commun.* **29**, 2 (1952).
16. E. Moser, *Zeits. f. angew. Math. Phys.* **4**, N 6 (1953).
17. Л. Л. Коренблит, Т. Г. Шрайфельд, ЖТФ **25**, 1182 (1955).
18. В. Л. Бонч-Бруевич, ФТТ (сб. статей) **2**, 177 (1959).
19. И. П. Звягин, ФТТ **5**, 581 (1963).
20. В. Л. Бонч-Бруевич, ФТТ **4**, 2660 (1962).
21. R. B. Dingle, *Appl. Sci. Research B6*, 225 (1957).
22. P. Rhodes, *Proc. Phys. Soc.* **A204**, 396 (1950).
23. J. M. McDugal, E. S. Stoner, *Trans. Roy. Soc.* **A237**, 67 (1939).
24. A. C. Beer, M. N. Chase, P. E. Choquard, *Helv. Phys. Acta* **28**, 529 (1955).
25. Дж. Блэкмор, *Статистика электронов в полупроводниках*, ИЛ, 1964.
26. Е. Янке, Ф. Эмде, *Таблицы функций с формулами и кривыми*, Гостехиздат, 1949.
27. W. Ehrenberg, *Proc. Phys. Soc. Ld. Clarendon Press A63*, 75 (1950).
28. G. O. Powell, *Phil. Mag.* **34**, 600 (1943).
29. И. А. Смирнов, Б. Я. Мойжес, Е. Д. Ненсберг, ФТТ **2**, 1992 (1960).

К главе 3

1. A. H. Wilson, *Proc. Roy. Soc.* **133A**, 458 (1931).
2. Ф. Ф. Волькенштейн, *Электропроводность полупроводников*, Гостехиздат, 1947.
3. А. И. Ансельм, *Введение в теорию полупроводников*, Физматгиз, 1962.
4. Г. Брукс, *Сб. «Проблемы современной физики»* **8**, 74, 1957.
5. Р. Смит, *Полупроводники*, ИЛ, 1962.
6. *Сб. «Вопросы квантовой теории необратимых процессов»*, ИЛ, 1962.
7. В. Л. Бонч-Бруевич, С. В. Тябликов, *Метод функций Грина в статистической механике*, Физматгиз, 1961.

8. А. Г. Самойлович, М. И. Клиnger, Л. Л. Коренблит ФТТ (сб. статей) 2, 121 (1959).
9. К. Херринг, Э. Фогт, в сб. «Проблемы физики полупроводников», стр. 167, ИЛ, 1957.
10. А. Г. Самойлович, И. Я. Коренблит, И. В. Даховский, В. Д. Искра, ФТТ 3, 3285 (1961).
11. И. М. Цидильковский, Терромагнитные явления в полупроводниках, Физматгиз, 1960.
12. Р. Пайерлс, Квантовая теория твердых тел, ИЛ, 1956.
13. V. Wieringen, Proc. Phys. Soc. A67, 206 (1954).
14. D. A. Greenwood, Proc. Phys. Soc. 71, 585 (1958).
15. H. Balesky, Physika 27, 693 (1961).
16. F. Seitz, Phys. Rev. 73, 549 (1948).
17. J. Vardeen, W. Shockley, Phys. Rev. 80, 72 (1950).
18. A. H. Wilson, Theory of Metals, Univ. Press., Cambridge, 1954.
19. W. Shockley, J. Vardeen, Phys. Rev. 77, 407 (1950).
20. Г. Е. Пикус, ЖТФ 28, 2390 (1958).
21. Г. Бете, А. Зоммерфельд, Электронная теория металлов, ОНТИ, 1938.
22. П. Дебай, Строение материи, ГИТЛ, Харьков, 1936.
23. Б. И. Давыдов, И. М. Шмушкевич, УФН 24, 21 (1940).
24. E. H. Sondheimer, D. J. Howarth, Proc. Roy. Soc. A219, 53 (1953).
25. К. С. Шифрин, ЖТФ 14, 40 (1944).
26. Н. Мотт, Г. Месси, Теория атомных столкновений, ИЛ, 1951.
27. E. M. Conwell, V. F. Weisskopf, Phys. Rev. 77, 388 (1950).
28. H. Brooks, Phys. Rev. 83, 879 (A), (1951).
29. Л. Шифф, Квантовая механика, ИЛ, 1957.
30. P. Csavinszky, J. Phys. Soc. Japan 16, 1865 (1961).
31. G. L. Pearson, J. Vardeen, Phys. Rev. 75, 865 (1949).
32. C. Erginsou, Phys. Rev. 79, 1013 (1950).
33. Б. М. Аскеров, Теория явлений переноса в полупроводниках, Изд. АН Аз. ССР, Баку, 1963.
34. L. Spitzer, R. Harp, Phys. Rev. 89, 977 (1953).
35. А. И. Ансельм, Б. М. Аскеров, ФТТ 3, 3672 (1961).
36. А. И. Ансельм, В. И. Клячкин, ЖЭТФ 22, 297 (1952).
37. H. Jons, Phys. Rev. 81, 149 (1951).
38. O. Madelung, Z. Naturforsch. 9a, 667 (1954).
39. Ю. Н. Образцов, ЖТФ 25, 995 (1955).
40. R. Mansfield, Proc. Phys. Soc. B69, 76 (1956).
41. D. V. Agarwal, Z. für Physik 163, 207 (1961).
42. В. И. Фистуль, Э. М. Омеляновский, З. И. Татаров, ФТТ 6, 974 (1964).
43. Дж. Займан, Электроны и фононы, ИЛ, 1963.
44. С. Неггин, Bell. Syst. Techn. Journ. 34, 237 (1955).
45. А. Г. Самойлович, И. Я. Коренблит, И. В. Даховский, В. Д. Искра, ФТТ 3, 2939 (1961).

46. А. Г. Самойлович, И. Я. Коренблит, И. В. Даховский, ДАН СССР 139, 355 (1961).
47. И. Я. Коренблит, ФТТ 4, 168 (1962).
48. В. И. Фистуль, Э. М. Омеляновский, Д. Г. Андрианов, И. В. Даховский, Proc. of Intern. Conference on Semicond. Paris, 1964.
49. Д. Г. Андрианов, И. В. Даховский, Э. М. Омеляновский, В. И. Фистуль, ФТТ 6, 2825 (1964).
50. Э. М. Омеляновский, Кандидатская диссертация, 1963.
51. Э. М. Омеляновский, В. И. Фистуль, Заводская лаборатория 30, № 5, 559 (1964).
52. Г. Буш, У. Винклер, Определение характеристических параметров полупроводников, ИЛ, 1959.
53. Э. М. Омеляновский, В. И. Фистуль, М. Г. Мильвидский, ФТТ 5, 921 (1963).
54. M. Gliksman, Progress in Semiconductors 3, 1 (1958).
55. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, 1951.
56. И. В. Даховский, ФТТ 5, 2332 (1963).
57. P. Debye, E. Conwell, Phys. Rev. 93, 693 (1954).
58. Y. Furukawa, J. Phys. Soc. Japan 16, 687 (1961).
59. W. G. Spitzer, F. A. Trumbore, R. A. Logan, J. Appl. Phys. 32, 1822 (1961).
60. Б. Г. Журкин, В. С. Земсков, К. В. Юркина, ФТТ 3, 3509 (1961).
61. В. И. Фистуль, А. Я. Губенко, ФТТ 3, 1617 (1961).
62. В. Шокли, Теория электронных полупроводников, ИЛ, 1953.
63. В. И. Фистуль, М. И. Глицин, Э. М. Омеляновский, ФТТ 4, 1065 (1962).
64. E. Putley, The Hall-effect and related phenomena, London, Butterworths, 1960.
65. «Selected constants relative to semiconductors», Pergamon — Press, 1961.
66. А. Г. Самойлович, Л. Л. Коренблит, УФН 57, 4, 629 (1955).
67. В. И. Фистуль, в сб. «Труды совещания по ударной ионизации и туннельному эффекту в полупроводниках», стр. 159, Баку, 1962.
68. В. И. Фистуль, Б. Н. Хусаинова, Труды института Гиредмет 10, стр. 232, Металлургиздат, 1963.
69. F. J. Morin, J. P. Maita, Phys. Rev. 96, 28 (1954).
70. R. A. Logan, J. F. Gilbert, F. A. Trumbore, J. Appl. Phys. 32, 131 (1961).
71. L. Esaki, Y. Miyahara, Solid State Electronics 1, 13 (1960).
72. Y. Furukawa, J. Phys. Soc. Japan 16, 577 (1961).
73. В. И. Фистуль, Докторская диссертация, Москва, 1965.
74. И. П. Звягин, Кандидатская диссертация, Москва, 1964; А. А. Абрикосов, ЖЭТФ 44, 2039 (1963).
75. W. Kohn, J. M. Luttinger, Phys. Rev. 98, 915 (1955).

76. О. А. Голикова, Б. Я. Мойжес, Л. С. Стильбанс, ФТТ, 3, 3105 (1961).
77. О. А. Голикова, Б. Я. Мойжес, А. Г. Орлов, ФТТ 4, 3482 (1962).
78. F. A. Trumbore, A. A. Tartaglia, J. Appl. Phys. 29, 1511 (1958).
79. М. Н. Виноградова, О. А. Голикова, Б. П. Митрин, Л. С. Стильбанс, ФТТ 2, 1429 (1960).
80. Н. Л. Писаренко, Изв. АН СССР, сер. физ., № 5—6, 631 (1938).
81. W. Ehrenberg, Electric conduction in semiconductors and metals, Oxford, 1958.
82. A. D. Middleton, W. Scanlon, Phys. Rev. 92, 219 (1953).
83. Т. Н. Geballe, G. W. Hull, Phys. Rev. 94, 1134 (1954).
84. П. И. Баранский, ФТТ 3, 1786 (1961).
85. В. И. Фистуль, К. В. Черкас, ФТТ 4, 3288 (1962).
86. К. В. Черкас, В. И. Фистуль, ФТТ 6, 16 (1964).
87. Т. Н. Geballe, G. W. Hull, Phys. Rev. 98, 940 (1955).
88. И. А. Смирнов, Б. Я. Мойжес, Е. Д. Ненсберг, ФТТ 2, 1992 (1960).
89. C. Herring, Halbleiter und Phosphore 5, 184 (1958).
90. М. Н. Виноградова, О. А. Голикова, И. Н. Дубровская, Б. Я. Мойжес, ФТТ 5, 1657 (1963).
91. О. А. Голикова, А. Г. Орлов, ФТТ 5, 1908 (1963).
92. M. Cardona, H. S. Sommers, Phys. Rev. 122, 1382 (1961).
93. P. Debye, в сб. «Vorträge über Kinetische Theorie der Materie», Teubner, 1914.
94. A. Eucken, Z. Phys. 12, 1005 (1911).
95. R. Peierls, Ann. d. Phys. 3, 1055 (1929).
96. R. Peierls, Ann. Inst. Poincaré 5, 177 (1935).
97. Дж. Драбл, Г. Голдсמיד, Теплопроводность полупроводников, ИЛ, 1963.
98. И. А. Смирнов, Кандидатская диссертация, Ленинград, 1961.
99. H. V. G. Casimir, Physica 5, 495 (1938).
100. V. Mielczarek, H. P. Frederikse, Phys. Rev. 115, 888 (1959).
101. G. A. Slack, Phys. Rev. 105, 832 (1957).
102. А. Ф. Иоффе, Физика полупроводников, Изд. АН СССР, 1957.
103. P. Klemens, Sol. St. Phys. 7, N 4 (1958).
104. А. Ф. Иоффе, Б. Я. Мойжес, Д. С. Стильбанс, ФТТ 2, 2834 (1960).
105. R. W. Keyes, Phys. Rev. 115, 564 (1959).
106. J. Tavernier, Abstracts Intern. Conf. on Semiconductor physics, Prague, 1960.
107. В. П. Жузе, ДАН СССР 99, 711 (1954).
108. В. П. Жузе, Т. А. Конторова, ЖТФ 28, 1727 (1958).

109. Т. А. Конторова, в сб. «Некоторые проблемы прочности твердого тела», Изд. АН СССР, 1959.
110. А. В. Иоффе, А. Ф. Иоффе, ДАН СССР 97, 757 (1954).
111. A. F. Ioffe, Canad. J. Phys. 34, 1342 (1956).
112. P. J. Price, Phil. Mag. 46, 1192 (1955).
113. Г. Е. Пикус, ЖТФ 26, 49 (1956).
114. L. Genzel, Z. f. Phys. 135, 177 (1953).
115. G. Slack, C. Glassbrenner, Phys. Rev. 120, 782 (1960).
116. R. Berman, Advances in Physics 2, 103 (1953).
117. Т. Н. Geballe, G. W. Hull, Phys. Rev. 110, 773 (1958).
118. P. G. Klemens, Proc. Roy. Soc. 208, 108 (1951).
119. J. Carruthers, T. Geballe, H. Rosenberg, J. Ziman, Proc. Roy. Soc. 238, 202 (1957).
120. R. Berman, Proc. Roy. Soc. 208, 90 (1951).
121. R. Berman, E. Foster, J. Ziman, Proc. Roy. Soc. 231, 130 (1955).
122. G. A. Slack, Phys. Rev. 105, 829 (1957).
123. Штрауманис, Сб. «Германий», ИЛ, 1956.
124. М. И. Алиев, В. И. Фистуль, Д. Г. Араслы, ФТТ 6, 3700 (1964).
125. М. И. Алиев, Д. Г. Араслы, В. И. Фистуль, Изв. АН Аз. ССР, № 5, 103 (1965).
126. Д. Г. Араслы, Кандидатская диссертация, Баку, 1967.
127. К. С. Фуллер, в сб. «Полупроводники», под ред. Хеннея, ИЛ, 1964.
128. Ч. Киттель, Введение в физику твердого тела, Физматгиз, 1962.
129. Е. Д. Девяткова, ЖТФ 27, 461 (1957).
130. K. Hashimoto, Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ. B2, 187 (1958).
131. М. Алиев, Теплопроводность, Баку, 1964.
132. Л. И. Доманская, Э. М. Омеляновский, В. И. Фистуль, И. М. Цидильковский, ФТТ 5, 3046 (1963).
133. Л. И. Доманская, Г. И. Харус, И. М. Цидильковский, ФТТ 7, 46 (1965).
134. О. В. Емельяненко, Д. Н. Наследов, ФТТ 1, 985 (1959).
135. C. Herring, E. Voght, Phys. Rev. 101, 944 (1956).
136. W. Sasaki, C. Yamanoishi, G. M. Hatoyama, Proc. Intern. Conf. Semiconductors, p. 159, Prague (1961).
137. V. Abeles, S. Meiboom, Phys. Rev. 95, 31 (1954).
138. Д. Г. Андрианов, В. И. Фистуль, ФТТ 5, 1480 (1963).
139. Y. Furukawa, J. Phys. Soc. Japan 18, 737 (1963).
140. Y. Furukawa, J. Phys. Soc. Japan 18, 1270 (1963).
141. Y. Furukawa, J. Phys. Soc. Japan 18, 1374 (1963).
142. М. Мирзабаев, В. М. Тучкевич, Ю. В. Шмарцев, ФТТ 5, 1625 (1963).
143. J. Toyozawa, J. Phys. Soc. Japan 17, 986 (1962).

144. H. R. Frederikse, W. R. Holser, *Canad. J. Phys.* **34**, 1377 (1956).
145. H. Fritzsche, K. Lark-Horowitz, *Phys. Rev.* **99**, 400 (1955).
146. J. T. Edmond, R. F. Broom, F. A. Cunnell, Report of the Meeting on Semiconductors, p. 109, L. (1956).
147. О. В. Емельяненко, Д. Н. Наследов, *ЖТФ* **28**, 1177 (1958).
148. О. В. Емельяненко, Т. С. Лагунова, Д. Н. Наследов, *ФТТ* **3**, 198 (1961).
149. D. N. Nasledov, *J. Appl. Phys. Suppl.* **32**, 2140 (1961).
150. Н. В. Зотова, Т. С. Лагунова, Д. Н. Наследов, *ФТТ* **5**, 3329 (1963).
151. Д. Г. Андрианов, В. И. Фистуль, *ФТТ* **6**, 470 (1964).
152. Д. Г. Андрианов, Кандидатская диссертация, Москва, 1965.
153. К. Хилсум, А. Роуз-инс, *Полупроводники A^{III}-B^V*, ИЛ, 1963.
154. O. Madelung, *Physics of III-V Compounds*, J. Wiley and Sons Inc. 1964.
155. H. Rupprecht, R. Weber, H. Weiss, *Z. Naturforsch.* **15a**, 783 (1960).
156. J. Kolodziejczak, *Acta Phys. Polon.* **21**, 637 (1961).
157. J. Kolodziejczak, L. Sosnowski, W. Zawadzki, Proc. of Intern. Conf. on Semicon. Phys. Exeter, p. 94, 1962.
158. Г. И. Гусева, И. М. Цидильковский, *ФТТ* **4**, 2490 (1962).
159. И. М. Цидильковский, *ФТТ* **4**, 2539 (1962).

К главе 4

1. П. Друде, *Оптика*, ОНТИ, 1935.
2. Н. У. Фан, W. G. Spitzer, R. J. Collins, *Phys. Rev.* **101**, 569 (1956).
3. R. Rosenber, M. Lax, *Phys. Rev.* **112**, 843 (1958).
4. S. Visvanathan, *Phys. Rev.* **120**, 376 (1960).
5. Н. J. G. Meyer, *Phys. Rev.* **112**, 298 (1958).
6. В. Допован, Proc. Phys. Soc. **76**, 574 (1960).
7. В. А. Яковлев, *ФТТ* **2**, 1624 (1960).
8. G. G. Macferlane et al., *Phys. Rev.* **108**, 1137 (1957).
9. G. G. Macferlane et al., *Phys. Rev.* **108**, 1377 (1957).
10. G. G. Macferlane et al., *Phys. Rev.* **111**, 1245 (1958).
11. D. L. Dexter, Proc. of the Photocond. Conf. at Atlantic City, p. 155, N. Y., 1956.
12. Т. Р. МсЛеан, *Progress in Semiconductor* **5**, 53, 1960.
13. Г. Б. Дубровский, Кандидатская диссертация, Ленинград, 1964.
14. Г. Б. Дубровский, *ФТТ* **5**, 3361 (1963).
15. J. Bardeen, F. J. Blatt, L. H. Hall, Proc. of the Photocond. Conf. at Atlantic City, p. 146, N. Y., 1956.

16. E. Burstein, *Phys. Rev.* **93**, 632 (1954).
17. Т. С. Мосс, *Оптические свойства полупроводников*, ИЛ, 1961.
18. R. L. Hartman, *Phys. Rev.* **127**, 765 (1962).
19. J. I. Pankove, *Ann. Phys.* **6**, 331 (1961).
20. J. I. Pankove, *Phys. Rev. Lett.* **4**, 454 (1960).
21. J. I. Pankove, P. Aigrain, *Phys. Rev.* **126**, 956 (1962).
22. В. С. Багаев, Г. П. Прошко, А. П. Шотов, *ФТТ* **4**, 3229 (1962).
23. С. Наас, *Phys. Rev.* **125**, 1965 (1962).
24. М. Г. Мильвидский, В. И. Фистуль, С. П. Гришина, *ФТТ* **6**, 2762 (1964).
25. W. G. Spitzer, H. Y. Fan, *Phys. Rev.* **106**, 882, (1957).
26. К. Б. Толпыго, Труды Института физики АН УССР, № 3, 84 (1952).
27. M. Cardona, W. Paul, H. Brooks, *Helv. Phys. Acta* **35**, 329 (1960).
28. W. G. Spitzer, F. A. Trumbore, H. A. Logan, *J. Appl. Phys.* **32**, 1822 (1961).
29. Е. П. Рашевская, В. И. Фистуль, *ФТТ* **4**, 2601 (1962).
30. L. E. Howarth, J. F. Gilbert, *J. Appl. Phys.* **34**, 236 (1963).
31. H. R. Philipp, E. A. Taft, *Phys. Rev.* **113**, 1002 (1959).
32. H. R. Philipp, E. A. Taft, *Phys. Rev.* **120**, 37 (1960).
33. J. S. Phillips, *J. Phys. Chem. Sol.* **12**, 208 (1960).
34. J. Tauc, A. Abraham, Proc. of the Semicond. Conf. Prague, p. 375 (1960).
35. Е. Ф. Гросс, В. С. Соболев, Доклад на II Всесоюзном совещании по оптическим и фотоэл. явлениям в полупроводниках, Львов, 1961.
36. M. Cardona, *J. Appl. Phys.* **32**, 958 (1961).
37. M. Cardona, *Z. Phys.* **161**, 99 (1961).
38. M. Cardona, H. S. Sommers, *Phys. Rev.* **122**, 1382 (1961).
39. H. Erenreich, H. R. Philipp, J. C. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* **8**, 59 (1962).
40. Г. С. Ландсберг, *Оптика*, Гостехиздат, 1957.
41. А. К. Walton, T. S. Moss, Proc. Phys. Soc. **78**, pt. 6 (i), N 505, 1393 (1961).
42. E. W. J. Mitchell, Proc. Phys. Soc. **B68**, 973 (1955).
43. Т. Мосс, *Оптические свойства полупроводников*, ИЛ, 1961.
44. M. J. Stephen, A. B. Lidiard, *J. Phys. Chem. Solids* **9**, 43 (1959).
45. B. Lax, S. Zwerdling, *Progress in semiconductors* **5**, 221 (1960).
46. Ю. И. Уханов, Ю. В. Мальцев, *ФТТ* **5**, 2926 (1963).
47. Ю. И. Уханов, Ю. В. Мальцев, *Изв. АН СССР, сер. физ.*, **XXVIII**, № 6, 989 (1964).
48. M. Tanenbaum, H. B. Briggs, *Phys. Rev.* **91**, 1561 (1953).

49. H. J. Hrostowski, G. H. Wheatley, W. F. Flood, *Phys. Rev.* **95**, 1683 (1954).
50. R. G. Breckenridge, R. F. Blunt, W. R. Hosler, H. P. R. Frederikse et al., *Phys. Rev.* **96**, 571 (1954).
51. W. Kaiser, H. Y. Fan, *Phys. Rev.* **98**, 966 (1955).
52. I. Kudman, L. Vieland, *J. Phys. Chem. Solids* **24**, 967 (1963).
53. V. Roberts, J. E. Quarrington, *J. Electronics* **1**, 152 (1955).
54. F. Stern, R. M. Talley, *Phys. Rev.* **100**, 1638 (1955).
55. R. Newman, *Phys. Rev.* **111**, 1518 (1958).
56. W. J. Turner, W. E. Reese, *J. Appl. Phys.* **35**, 350 (1964).
57. D. E. Hill, *Phys. Rev.* **133**, A866 (1964).
58. E. O. Kane, *J. Phys. Chem. Solids* **1**, 249 (1957).
59. F. Stern, *J. Appl. Phys.* **32**, 2166 (1961).
60. S. W. Kurnick, J. M. Powell, *Phys. Rev.* **116**, 597 (1959).
61. J. R. Dixon, D. P. Enright, *Bull. Am. Phys. Soc.* **3**, 255 (1958).
62. W. G. Spitzer, J. M. Whelan, *Phys. Rev.* **114**, 59 (1959).
63. W. J. Turner, W. E. Reese, *Phys. Rev.* **117**, 1003 (1960).
64. S. Visvanathan, *Phys. Rev.* **120**, 376 (1960).
65. O. Madelung, *Physics of III—V Compounds*, John Wiley and Sons Inc., N. Y., 1964.
66. H. Yoshinaga, R. Oetjen, *Phys. Rev.* **101**, 526 (1956).
67. W. G. Spitzer, H. Y. Fan, *Phys. Rev.* **106**, 882 (1957).
68. A. G. Chynoweth, R. A. Logan, *Phys. Rev.* **118**, 1470 (1961).
69. A. R. Calawa, R. H. Rediker, B. Lax, A. L. McWhorter, *Phys. Rev. Lett.* **5**, 55 (1961).

К главе 5

1. F. A. Trumbore, *Bell Syst. Techn. J.* **39**, 205 (1960).
2. Б. И. Болтакс, Диффузия в полупроводниках, Физматгиз, 1961.
3. H. Reiss, C. S. Fuller, *J. Metals* **8**, 276 (1956).
4. H. Reiss, C. S. Fuller, F. J. Morin, *Bell Syst. Techn. J.* **35**, 535 (1956).
5. J. Teltow, *Ann. Phys.* **5**, 63 (1949).
6. «Полупроводники», сб. под ред. Н. Б. Хеннея, гл. V, ИЛ, 1962.
7. R. L. Longini, R. F. Greene, *Phys. Rev.* **102**, 992 (1956).
8. W. M. Valenta, C. Ramasastry, *Phys. Rev.* **106**, 73 (1957).
9. Y. Furukawa, *J. Phys. Soc. Japan* **16**, 687 (1961).
10. W. G. Spitzer, F. A. Trumbore, R. A. Logan, *J. Appl. Phys.* **32**, 1822 (1961).

11. В. И. Фистуль, Э. М. Омеляновский, *ФТТ* **4**, 1370 (1962).
12. В. И. Фистуль, К. В. Черкас, *ФТТ* **4**, 3288 (1962).
13. Э. М. Омеляновский, В. И. Фистуль, М. Г. Мильвидский, *ФТТ* **5**, 921 (1963).
14. Э. М. Омеляновский, В. И. Фистуль, Заводская лаборатория **30**, 559 (1964).
15. G. L. Pearson, J. D. Struthers, H. C. Theueger, *Phys. Rev.* **77**, 809 (1950).
16. G. L. Pearson, J. Vardeen, *Phys. Rev.* **75**, 865 (1949).
17. В. И. Фистуль, М. Г. Мильвидский, Доклад на Совещании по вырожденным полупроводникам, Москва, 1962.
18. В. И. Фистуль, М. Г. Мильвидский, Э. М. Омеляновский, С. П. Гришина, *ДАН СССР* **149**, № 5, 1119 (1963).
19. L. J. Vieland, I. Kudman, *J. Phys. Chem. Solids* **24**, 437 (1965).
20. В. И. Фистуль, Э. М. Омеляновский, О. В. Пелевин, В. Б. Уфимцев, *Изв. АН СССР, Неорг. материалы* **2**, 657 (1966).
21. О. А. Голикова, Б. Я. Мойжес, А. Г. Орлов, *ФТТ*, **4**, 3482 (1962).
22. О. А. Голикова, Кандидатская диссертация, Ленинград, ЛПИ, 1964.
23. В. И. Фистуль, Докторская диссертация, Москва, 1965.
24. Н. Г. Карпель, Заводская лаборатория **30**, 1078 (1964).
25. J. Vlasak, *J. Electrochem. Soc.* **VIII**, 924 (1964).
26. К. Эльбаум, *УФН* **79**, № 3, 545 (1963).
27. М. С. Чупахин, Г. Г. Главин, В. И. Фистуль, *ДАН СССР* **150**, № 5, 1059 (1963).
28. М. С. Чупахин, Г. Г. Главин, В. И. Фистуль, в кн. *Химическая связь в полупроводниках и твердых телах*, «Наука и техника», Минск, 1965.
29. R. Brown et al., *Compound Semiconductors*, vol. 1, p. 106, N. Y. Reinhold Publ. Corp. 1962.
30. E. Erhard, A. Adler, *Zs. Metall.* **52**, 529 (1961).
31. В. М. Глазов, В. Н. Вигдорович, Микротвердость металлов, Металлургиздат, 1962.
32. H. Kodera, *Japan J. Appl. Phys.* **2**, 193 (1963).
33. J. Takashi, K. Makoto, *Japan J. Appl. Phys.* **2**, 194 (1963).
34. М. Г. Мильвидский, О. Г. Столяров, А. В. Беркова, *ФТТ* **6**, 3259 (1964).
35. T. Furuoга, *Japan J. Appl. Phys.* **1**, 135 (1962).
36. W. Bardsley, J. M. Callan et al., *Solid State Electronic* **3**, 142 (1961).
37. W. A. Tiller, J. W. Rutter, *Canad. J. Phys.* **31**, 15 (1953).
38. В. В. Воронков, *ФТТ* **6**, 2984 (1964).
39. М. Г. Мильвидский, В. В. Воронков, *ФТТ* **6**, 3736 (1964).
40. М. Г. Мильвидский, С. П. Гришина, *ФТТ* **6**, 483 (1964).

41. М. Г. Мильвидский, В. И. Фистуль, С. П. Гришина, ФТТ 6, 2762 (1964).
42. W. C. Dash, J. Appl. Phys. 27, 1153 (1956).
43. В. Г. Фомин, М. Г. Мильвидский, С. П. Гришина, Н. С. Беляцкая, М. А. Гуревич, Кристаллография 9, 219 (1964).
44. В. И. Фистуль, А. М. Агаев, ФТТ 7, 3042 (1965).
45. T. P. Vgodu, J. Appl. Phys. 33, 100 (1962).
46. Н. А. Белова, Радиотехника и электроника 8, 2091 (1963).
47. Н. А. Белова, Кандидатская диссертация, ИРЭ, Москва, 1964.
48. Я. И. Френкель, Кинетическая теория жидкости, Изд. АН СССР, 1945.
49. В. И. Данилов, Строение и кристаллизация жидкостей, Изд. АН УССР, 1956.
50. Е. Г. Швидковский, Некоторые вопросы вязкости расплавленных металлов, Гостехиздат, 1955.
51. Н. С. Грингрич, Успехи химии 15, № 3 (1946).
52. Г. М. Мартынкевич, Кандидатская диссертация, МГУ, Москва, 1961.
53. А. Н. Несмеянов, Давление пара химических элементов, Изд. АН СССР, 1961.
54. И. Б. Боровский, Н. П. Ильин, Заводская лаборатория 23, № 9 (1957).

К главе 6

1. J. W. Rutter, V. Chalmers, Canad. J. Phys. 31, 15 (1953).
2. W. G. Cochran, Proc. Camb. Phil. Soc. 30, 365 (1934).
3. J. A. Burton et al., J. Chem. Phys. 21, 1987 (1953).
4. D. T. J. Hurle, Solid. St. Electronics 3, 37 (1961).
5. Hiroshi Kodera, Japan J. Appl. Phys. 2, 9, 527, (1963).
6. W. A. Tiller et al., Acta Metallurgica 1, 428 (1953).
7. W. A. Tiller, J. W. Rutter, Canad. J. Phys. 34, 1, 96 (1956).
8. C. Elbaum, Progr. Metal. Phys. 8, 203 (1959).
9. Д. Е. Темкин, в сб. «Кристаллизация и фазовые переходы», изд. АН БССР, Минск, 1962.
10. В. В. Воронков, ФТТ 6, 2984 (1964).
11. М. Г. Мильвидский, В. В. Воронков, ФТТ 6, 3736 (1964).
12. D. Walton et al., J. Metals (N. Y.) 7, 1023 (1955).
13. T. S. Plaskett, W. C. Winegard, Canad. J. Phys. 37, 1555 (1959).
14. G. Mortimer, J. Electrochem. Soc. 105, 739 (1958).
15. В. Г. Алексеева, П. Я. Елисеев, ФТТ 1, 1135 (1960).
16. F. A. Trumbore, J. Electrochem. Soc. 103, 597 (1956).
17. W. W. Tyler, H. H. Woodbury, Phys. Rev. 96, 874 (1954).

18. W. W. Tyler et al., Phys. Rev. 97, 669 (1955).
19. H. H. Woodbury, W. W. Tyler, Phys. Rev. 100, 659 (1955).
20. S. G. Ellis, J. Appl. Phys. 26, 1140 (1955).
21. F. D. Rosi, RCA Rev. 19, 349 (1958).
22. G. F. Bolling et al., Canad. J. Phys. 34, 234 (1956).
23. W. Bardsley et al., Solid State Electronics 3, 142 (1961).
24. Б. М. Туровский, ЖФХ 36, 8 (1962).
25. Hiroshi Kodera, Japan J. Appl. Phys. 2, 212 (1963).
26. М. Г. Мильвидский, В. В. Еремеев, ФТТ 6, 1962 (1964).
27. J. C. Brice, P. A. C. Whiffin, Solid State Electr. 7, 183 (1964).
28. H. R. Shanks et al., Phys. Rev. 130, 1743 (1963).
29. Hiroshi Kodera, Japan J. Appl. Phys. 2, 527 (1963).
30. C. D. Thurmond, M. Kowalchik, Bell. Syst. Tech. J. 39, 169 (1960).
31. F. A. Trumbore, Bell. Syst. Tech. J. 39, 205 (1960).
32. В. И. Фистуль, М. Г. Мильвидский, С. П. Гришина, Э. М. Омеляновский, ДАН СССР 149, 1119 (1963).
33. D. J. Turnbull, R. E. Cech, J. Appl. Phys. 21, 840 (1950).
34. J. Leverton, J. Appl. Phys. 29, 1241 (1958).
35. С. В. Айрапетянц, Г. И. Шмелев, ФТТ 2, 4 (1960).
36. G. R. Blackwell, J. Electron. and Control 10, 459 (1961).
37. В. Н. Романенко, Изв. АН СССР, Металлургия и горное дело 2, 86 (1963).
38. Д. А. Петров, В. С. Земсков, Рост кристаллов, стр. 262, Изд. АН СССР, 1957.
39. Д. А. Петров, Б. Л. Калачев, Труды совещания по экспериментальной технике, стр. 513, Москва, 1959.
40. W. Nelson, Transistors, v. 1, publ. RCA Laboratories, 1956.
41. В. Д. Пфанн, Зонная плавка, стр. 178, ГОНТИ ЦЦМ, 1958.
42. S. E. Bradshaw, A. J. Mlawsky, J. Electronics 2, 134 (1956).
43. A. Grainor, P. Haggies, Proc. Phys. Soc. 74, 669 (1959).
44. Ю. М. Шашков, Металлургия полупроводников, стр. 67, Металлургиздат, 1960.
45. Д. А. Петров и др., Труды 3-го Совещания по полупроводниковым материалам, стр. 187, Изд. АН СССР, 1961.
46. J. Bridgers, J. Appl. Phys. 27, 746 (1956).
47. Д. А. Петров, Журн. Всесоюз. химическ. общества им. Д. И. Менделеева 5, 550 (1960).
48. Б. М. Туровский, М. Г. Мильвидский, ФТТ 3, 2519 (1961).
49. М. Г. Мильвидский, С. П. Гришина, В. В. Еремеев, Изв. АН СССР, Неорганические материалы, № 10 (1965).
50. J. A. M. Dikhoff, Phil. Techn. Rev. 25, 195 (1963/64).
51. H. Ueda, J. Phys. Soc. Jap. 16, 61 (1961).
52. H. C. Gatos et al., J. Appl. Phys. 32, 2057 (1961).

53. Г. В. Комаров, А. Р. Регель, ФТТ 5, 773 (1963).
54. В. В. Воронков, ФТТ 6, 3736 (1964).
55. М. Г. Мильвидский, Кристаллография 6, 249 (1961).
56. F. Gutberlet-Vieweg, Z. Phys. 179, 425 (1964).
57. W. R. Wilcox, Electronics News, N 473, v. 10, 1, Sec. 1, p. 5 (1965).
58. R. N. Hall, J. Phys. Chem. 57, 86 (1953).
59. K. F. Hulme, J. B. Mullin, Phil. Mag. 4, 1286 (1959).
60. K. F. Hulme, J. B. Mullin, J. Phys. Chem. Sol. 17, 1 (1960).
61. W. P. Allred, R. T. Rate, J. Electrochem. Soc. 108, 258 (1961).
62. М. Г. Мильвидский, А. В. Беркова, ФТТ 5, 709 (1963); ФТТ 5, 513 (1963).
63. Lemaу C., J. Appl. Phys. 34, 439 (1963).
64. J. A. M. Dikhoff, Solid State Electr. 1, 202 (1960).
65. A. Trainor, B. E. Bartlett, Solid State Electr. 2, 106 (1961).
66. K. F. Hulme, J. B. Mullin, Solid State Electr. 5, 211 (1962).
67. W. A. Tiller, Acta Met. 10, 681 (1962).
68. W. A. Tiller, Growth and Perfection of Crystals, p. 332, N. Y., 1958.
69. М. Г. Мильвидский, С. П. Гришина, ФТТ 6, 483 (1964).
70. М. Г. Мильвидский, В. Г. Фомин, С. П. Гришина, Кристаллография 3, 9 (1964).
71. A. I. Goss et al., Acta Met. 4, 332 (1956).
72. W. A. Tiller, J. Appl. Phys. 29, 611 (1958).
73. В. Т. Рид, Диссоциации в кристаллах, стр. 199, Metallurgizdat, 1957.
74. Я. С. Уманский и др., Физическое металловедение, стр. 138, Metallurgizdat, 1955.
75. М. Г. Мильвидский, В. И. Фистуль, С. П. Гришина, ФТТ 6, 2762 (1964).
76. P. E. Schmidt, R. Sticler, J. Electrochem. Soc. 111, 1188 (1964).
77. H. Kodera, Japan J. Appl. Phys. 2, 193 (1963).
78. Takashi Jizuka, Makoto Kikuchi, Japan J. Appl. Phys. 2, 194 (1963).
79. F. A. Trumbore, J. Electrochem. Soc. 107, 198C (1960).
80. C. D. Thurmond, M. Kowalchik, Bell. Syst. Techn. J. 39, 169 (1960).
81. U. Merten, A. P. Hatcher, J. Phys. Chem. Sol. 23, 533 (1962).
82. U. Merten, A. P. Hatcher, J. Phys. Chem. Sol. 24, 1064 (1963).
83. М. Г. Мильвидский, О. В. Пелевин, Изв. АН СССР, Неорганические материалы 1, 1454 (1965).
84. J. R. Patel et al., Metallurgy of Elemental and Compound Semiconductors, p. 45, N. Y. — L., 1960.

85. М. Г. Мильвидский, О. Г. Столяров, А. В. Беркова, ФТТ 6, 3259 (1964).
86. W. C. Dash, J. Appl. Phys. 30, 459 (1959).
87. К. С. Фуллер, Сб. «Полупроводники», стр. 183, ИЛ, 1962.
88. R. L. Longini, R. F. Greene, Phys. Rev. 102, 992 (1956).
89. М. Г. Мильвидский, О. Г. Столяров, А. В. Беркова, ФТТ 6, 3170 (1964).
90. М. Г. Мильвидский, В. Б. Освенский, О. Г. Столяров, Изв. АН СССР, Неорганические материалы 1, № 9 (1965).
91. A. Steineman, U. Zimmerlis, Solid State Electr. 6, 597 (1963).
92. G. E. Brock, C. F. Aliotta, IBM, J. Res. and Developm. 6, 372 (1962).
93. В. Г. Алексеева, П. Г. Елисеев, ФТТ 1, 1195 (1960).
94. S. Prussia, J. Appl. Phys. 32, 1876 (1961).
95. J. Washburn, G. Thomas, J. Appl. Phys. 35, 1909 (1964).
96. Hiroyuki Ino et al., Japan J. Appl. Phys. 3, 692 (1964).
97. M. L. Joshi, F. Wilhelm, J. Electrochem. Soc. 112, 185 (1965).
98. J. Black, P. Lublin, J. Appl. Phys. 35, 2462 (1964).
99. F. A. Trumbore, Metallurgy Elementary and Compound Semiconductors, p. 15, N. Y. — L., 1960.
100. В. С. Земсков и др., Труды совещания по ударной ионизации и туннельному эффекту в полупроводниках, стр. 130, Изд. АН Аз. ССР, Баку, 1962.
101. E. J. Mehalchick, P. K. Marshall, J. Electrochem. Soc. 109, 267 (1962).
102. J. Boongaard, Philips Res. Rep. 10, 319 (1955).
103. J. Coorissen, A. M. Van Run, The Institute of E. E. Paper N 3022F, March 1960.
104. F. A. Trumbore, E. M. Porbansky, J. Appl. Phys. 31, 2068 (1960).
105. W. Heinke, Z. Angew. Phys. 15, 128 (1963).
106. F. A. Trumbore et al., Phys. Chem. Sol. 11, 239 (1959).
107. Compound Semiconductors, ed. R. K. Willardson, v. 1, p. 385, N. Y., 1962.
108. М. Г. Мильвидский, О. В. Пелевин, Изв. АН СССР, Неорганические материалы 1, № 9 (1965).
109. S. Nielsen et al., Semicond. Prod. 6, 35 (1965).
110. V. J. Silvestry, F. Fang, J. Electrochem. Soc. 111, 1164 (1964).
111. F. V. Williams, Solid State Electronics 7, 833 (1964).
112. H. S. Veloric et al., J. Appl. Phys. 27, 895 (1956).
113. K. Lehovec, A. Levitas, J. Appl. Phys. 28, 106 (1957).
114. J. Halpern, R. H. Rediker, Proc. IRE 46, 1068 (1958).
115. H. Rupprecht, C. Z. Lemaу, J. Appl. Phys. 35, 1970 (1964).

К главе 7

1. В. Шокли, Физика полупроводников, ИЛ, 1953.
2. Б. М. Вул, ФТТ 2, 2961 (1961).
3. A. G. Chynoweth, Progr. in Semicond. 4, 95 (1960).
4. L. Esaki, Phys. Rev. 109, 603 (1958).
5. Э. В. Шпольский, Атомная физика I, Гостехиздат, 1951.
6. I. A. Lesk, N. Holonyak et al., IRE Wescon Conv. Record, Pt. 3, 9 (1959).
7. C. Zener, Proc. Roy. Soc. 145, 523 (1934).
8. K. B. McAfee et al., Phys. Rev. 83, 650 (1951).
9. H. J. Hartman, M. Michelitsch, W. Steinhäuser, Arch. d. Electr. Übertragung 15, 3, 125 (1961).
10. W. Franz, L. Tewordt, Halbleiterprobleme, Bd. III, Braunschweig, 1956.
11. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ 33, 994 (1957).
12. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ 34, 962 (1958).
13. R. N. Hall, F. Bardeen, F. J. Blatt, Phys. Rev. 95, 559 (1959).
14. C. W. Bates, Phys. Rev. 121, 1070 (1961).
15. И. И. Иванчик, ФТТ 3, 103 (1961).
16. P. J. Price, J. H. Radcliff, IBM J. 3, 364 (1959).
17. Е. О. Кане, J. Appl. Phys. 32, 83 (1961).
18. В. Л. Бонч-Бруевич, Радиотехника и электроника 5, 2033 (1960).
19. F. A. Trumbore, A. A. Tartaglia, J. Appl. Phys. 29, 1511 (1958).
20. L. Esaki, Solid State Physics in Electronic and Telecommunications, Vol. 1, Acad. Press Ltd—N. Y., 1960.
21. N. Holonyak, I. A. Lesk, Proc. IRE 48, 1405 (1960).
22. Р. А. Смит, Полупроводники, ИЛ, 1962.
23. H. S. Sommers, Proc. IRE 47, 1201 (1959).
24. R. N. Hall, Proc. IRE 40, 1512 (1952).
25. R. F. Rutz, IBM J. 3, 372 (1959).
26. Р. Н. Рубинштейн, В. И. Фистуль, Заводская лаборатория 27, 1242 (1961).
27. M. Michelitsch, Naturwiss. 47, 274 (1960).
28. В. И. Фистуль, И. Д. Абезгауз, Труды Совещания по ударной ионизации и туннельному эффекту в полупроводниках, Изд. АН Аз. ССР, Баку, 1962, стр. 151.
29. H. S. Sommers et al., IRE Wescon Conv. Record, Pt 3, 3 (1959).
30. G. Dermit, H. Lockword, W. Haueg, Proc. IRE 49, 519 (1961).
31. R. C. Sims, E. R. Beck et al., Proc. IRE 49, 136 (1961).
32. В. И. Фистуль, Н. З. Шварц, УФН 77, вып. 1, 109 (1962).
33. H. S. Sommers, Solid State Conference, Cornell University, 1959.
34. Н. А. Белова, А. Н. Ковалев, Радиотехника и электроника 6, 160 (1961).

35. Y. Furukawa, J. Phys. Soc. Japan 15, 730 (1960).
36. W. Cady, Colloque International sur les Dispositifs à Semiconducteurs, Paris, 20—25 Fevrier, 1961.
37. E. Spenke, Electronics Semiconductors, McGraw-Hill, N. Y., 1958.
38. R. N. Hall, IRE Transactions ED7, 1 (1960).
39. Б. М. Вул, А. П. Шотов, С. П. Гришечкина, ФТТ 3, 667 (1961).
40. N. Holonyak, I. A. Lesk et al., Phys. Rev. Lett. 3, (4), 167 (1959).
41. T. Yajima, L. Esaki, J. Phys. Soc. Japan 13, 1281 (1958).
42. S. L. Miller et al., Phys. Rev. Lett. 4, 60 (1960).
43. R. A. Logan, A. G. Chynoweth, Bull. Amer. Phys. Soc. 5, 160 (1960).
44. A. G. Chynoweth et al., Phys. Rev. 121, 684 (1961).
45. Е. О. Кане, Сб. «Материалы Межд. конф. по полупроводникам», Прага, 1960.
46. W. Franz, Handb. d. Phys., Bd. 17, 1955 Berlin, 1956.
47. N. Holonyak, J. Appl. Phys. 32, 130 (1961).
48. Материалы конференции по туннельным диодам, США, февраль 1961.
49. В. И. Фистуль, ФТТ 6, 3738 (1964).
50. В. И. Фистуль, А. М. Агаев, ФТТ 7, 3691 (1965).
51. E. Spenke, Electronics Semiconductors, McGraw-Hill, N. Y., 1958.
52. V. S. Davidson et al., Electronic Design, February, 3 (1960).
53. A. G. Chynoweth, Phys. Rev. 120 (5), 1620 (1960).
54. Фукуи, Дэнки цусин гаккай дзасси (японск.) 43, 1351 (1961).
55. Electronic news 199, 22 (1960).
56. В. И. Фистуль, Докторская диссертация, Москва, 1965.
57. NTZ, Bd. 13, Hf. 4, 191, 3—7 (1960).
58. Electronic news 4, N 175, 13 (1959); 4, N 176, 41 (1959).
59. L. Esaki, Доклад на XII Генеральной ассамблее, Лондон, 1960.
60. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебания, Физматгиз, 1959.
61. Г. Боде, Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью, ИЛ, 1948.
62. М. А. Айзерман, Лекции по теории автоматического регулирования, Физматгиз, 1958.
63. А. К. Баум, И. Я. Билинский, П. П. Трейс, Туннельные диоды в схемах промышленной электроники, «Энергия», 1965.
64. «Туннельные диоды», Сб. ст. под ред. В. И. Фистуля, ИЛ, 1961.
65. J. V. Morgan, E. O. Kane, Phys. Rev. Lett. 3, 466 (1959).
66. R. Hall, Сб. «Материалы Межд. конф. по полупроводникам», Прага, 1960.
67. A. G. Chynoweth et al., Phys. Rev. Lett. 5, 548 (1960).
68. A. R. Calawa et al., Phys. Rev. Lett. 5, 55 (1960).
69. M. J. Nathan, S. L. Miller, Bull. Amer. Phys. Soc., Ser. II, 5, 265 (1960).

70. А. М. Агаев, В. И. Фистуль, ФТТ 7, 3042 (1965).
71. В. Л. Бонч-Бруевич, П. С. Серебренников, Радиотехника и электроника 6, 2041 (1961).
72. В. Л. Бонч-Бруевич, П. С. Серебренников, Радиотехника и электроника 8, 1002 (1963).
73. S. T. Eng, IRE Trans. MTT5, 419 (1961).
74. M. M. Kaufman, Solid State Design 3, N2, 23 (1962).
75. J. Pzybylski, I. Roberts, J. Brit. IRE 22, 479 (1961).
76. E. Gottlieb, J. Giorgis, J. Electronics 36, N 27, 26 (1963).
77. W. C. Folmer, Proc. IRE 49, 1939 (1961).
78. Л. А. Логунов, Н. К. Руднева, Е. Б. Черняк, Радиотехника и электроника 9, 1258 (1964).
79. Л. А. Логунов, Кандидатская диссертация, МГУ, Москва, 1964.
80. J. A. Lesk, H. A. Jensen, Solid State Electronics 1, N3, 184 (1960).
81. A. Tewes, Radio und Fernsehen, Bd. 11, N 10, 314 (1962).
82. О. Н. Крохин, Ю. М. Попов, Дополнение в книге Б. Лендъела, Лазеры, «Мир», 1964.
83. M. I. Nathan, W. P. Dumke, et al., Appl. Phys. Lett. 1, XI, 62 (1962).
84. Р. Холл, Т. Феннер и др., в сб. «Лазеры», стр. 176, ИЛ, 1963.
85. T. M. Quist, R. N. Rediker et al., Appl. Phys. Lett. 1, XII, 91 (1962).
86. J. R. Hayes, M. Lax, W. Flood, Proc. Intern. Conf. on Semicond. Physics, p. 423 (1961).
87. Н. Г. Басов, О. Н. Крохин, Ю. М. Попов, ЖЭТФ 39, 1486 (1960).
88. Н. Г. Басов, О. Н. Крохин, Ю. М. Попов, ЖЭТФ 40, 1203 (1961).
89. О. Н. Крохин, ФТТ 4, 822 (1962).
90. J. I. Rankove, M. Massoulie, Bull. Am. Phys. Soc. 7, 88 (1962).
91. Д. Н. Наследов, А. А. Рогачев, С. М. Рывкин, Б. В. Царенков, ФТТ 4, 1062 (1962).
92. Н. Г. Басов, О. Н. Крохин, Ю. М. Попов, ЖЭТФ 40, 1879 (1961).
93. K. Weiser, R. S. Levitt, Bull. Am. Phys. Soc. 8, 29 (1963).
94. I. Melngailis, Bull. Am. Phys. Soc. 8, 202 (1963).
95. Б. М. Вул, А. П. Шотов, В. С. Багаев, ФТТ 4, 3676 (1962).
96. T. Deutsch, R. C. Ellis, D. M. Warshauer, Phys. Stat. Solidi 3, 1001 (1963).
97. D. F. Nelson, M. Gershenson et al., Appl. Phys. Lett. 2, 182 (1963).
98. N. Holonyak, S. F. Bevacqua, Appl. Phys. Lett. 1, 82 (1962)

99. И. Мелнгейлис и др., ТИИРЭ (русск. перевод) 51, № 8, 1157 (1962).
100. K. Weiser, R. S. Levitt, Appl. Phys. Lett. 2, 178 (1963).
101. I. Melngailis, Appl. Phys. Lett. 2, 176 (1963).
102. G. Burns, M. I. Nathan, Proc. IEE 52, 770 (1964).
103. L. M. Vallesse, Semicond. Prod. 6, VIII, 25 (1963).
104. R. H. Rediker, Solid St. Design. 4, VIII, 19 (1963).
105. B. Lax, Science 141, 1247 (1963).
106. Л. Либов, С. Мескин, Д. Наследов, В. Седов, Б. Царенков, ПТЭ, № 4, 14 (1965).
107. А. Ф. Иоффе, Полупроводниковые термоэлементы, Изд. АН СССР, 1956.
108. H. J. Goldsmid, Thermoelectric refrigeration, N. Y., 1964.
109. В. С. Вавилов, Действие излучений на полупроводники, Физматгиз, 1964.
110. В. П. Жузе, в сб. «Полупроводники в науке и технике», т. I, Изд. АН СССР, 1957.
111. В. И. Фистуль, Докторская диссертация, Москва, 1965.
112. Ch. S. Smith, Phys. Rev. 94, 42 (1954).
113. A. Sagar, Phys. Rev. 117, 101 (1960).
114. К. Херринг, Э. Фогт, в сб. «Проблемы физики полупроводников», ИЛ, 1957.
115. С. Неггинг, Bell. Syst. Techn. Journ. 34, 237 (1955).
116. В. С. Шадрин, Кандидатская диссертация, Новосибирск, 1964.
117. А. Ф. Городецкий, В. С. Шадрин, М. И. Иглицын, В. И. Фистуль, Авт. свид. № 164698 (1964).
118. М. Дин, Полупроводниковые тензодатчики (перев. под ред. А. Ф. Городецкого), «Энергия», 1965.

Виктор Ильич Фистуль

Сильно легированные полупроводники

М., 1967 г., 416 стр. с илл.

(Серия: «Физика полупроводников
и полупроводниковых приборов»)

Редактор *В. Я. Дубнова*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *Э. В. Автоноева*

Сдано в набор 30/IX 1966 г. Подписано к печати 1/II 1967 г. Бумага 84×108¹/₃₂. Физ. печ. л. 13. Услови. печ. л. 21,84. Уч.-изд. л. 20,38. Тираж 9000 экз. Т-01621. Цена книги 1 р. 49 к.

Заказ № 612.

Издательство «Наука»

Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 1 «Печатный
Двор» имени А. М. Горького Главполиграф-
прома Комитета по печати при Совете Мини-
стров СССР, г. Ленинград, Гатчинская ул., 26.