

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Исковских, И. Р. Шафаревич, Алгебраические поверхности, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления*, 1989, том 35, 131–263

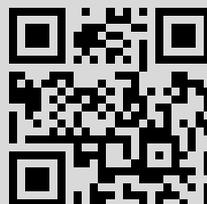
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 109.188.127.34

4 декабря 2015 г., 09:56:04





УДК 512.774

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

В. А. Исковских, И. Р. Шафаревич

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	132
§ 1. Основные инварианты	134
§ 2. Примеры	137
§ 3. Кривые на алгебраической поверхности	147
3.1. Дивизоры	147
3.2. Алгебраическая эквивалентность	149
3.3. Линейная эквивалентность	151
3.4. Многообразия Пикара и Альбанезе	154
3.5. Дивизоры на расслоениях	155
§ 4. Индексы пересечения	156
4.1. Основные свойства	156
4.2. Формула присоединения	159
§ 5. Численная эквивалентность дивизоров	162
5.1. Теорема Римана — Роха	162
5.2. Конус эффективных классов кривых	163
§ 6. Бирациональные отображения	169
6.1. σ -процесс	169
6.2. Бирациональные преобразования	171
6.3. Стягивание	176
§ 7. Минимальные модели	180
7.1. Основная теорема	180
7.2. Доказательство основной теоремы	183
7.3. Единственность минимальной модели	186
§ 8. Бирациональная классификация	189
8.1. Основные результаты	189
8.2. Обсуждение теоремы 1	192
8.3. Неравенство Кастельнуово — де Франчиса	193
8.4. Обсуждение теоремы 2	195
§ 9. Поверхности общего типа	198
9.1. Модули	198
9.2. География поверхностей	200
9.3. Поверхности, близкие к рациональным	203
§ 10. Эллиптические поверхности	204
10.1. Семейства групп	204
10.2. Вырожденные слои	208
10.3. Якобиево расслоение	214
10.4. Классификация	217
10.5. Применения	219
§ 11. Поверхности канонической размерности 0	221
11.1. Поверхности Энриквеса	221

11.2. Абелевы поверхности	223
11.3. Биэллиптические поверхности	226
§ 12. Поверхности типа КЗ	228
12.1. Основные инварианты	228
12.2. Проективная геометрия	229
12.3. Топология	230
12.4. Аналитическая геометрия	231
12.5. Применения	234
12.6. Обобщения	236
§ 13. Линейчатые и рациональные поверхности	236
13.1. Линейчатые поверхности	236
13.2. Рациональные поверхности	240
13.3. Поверхности дель Пеццо	242
13.4. Снова линейчатые поверхности	247
§ 14. Комплексные аналитические поверхности	248
14.1. Мероморфные функции	248
14.2. Когомологии	249
14.3. Поверхности, для которых $a(X)=0$ или $a(X)=1$	251
14.4. Униформизация	253
§ 15. Эффекты конечной характеристики	255
15.1. Нарушение теоремы Бертини	255
15.2. Факторы по неприведенной групповой схеме	256
15.3. Неприведенность схемы Пикара	256
15.4. Нарушение соотношений симметрии $h^{p,q}=h^{q,p}$	257
15.5. Отсутствие аналога теорем Лефшеца и Лյорота	258
15.6. Нарушение теоремы об обращении в нуль	258
15.7. Изменения в классификации	259
Литература	260

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель этого обзора — показать читателю связную картину теории алгебраических поверхностей, разъяснить постановку ее задач и описать ее основные методы. Если доказательства и приводятся, то лишь для того, чтобы выявить основные идеи, работающие в этой области. С деталями доказательств читатель может познакомиться по литературе, указанной в конце статьи.

Теория алгебраических поверхностей справедливо считается одной из красивейших глав алгебраической геометрии. Основы ее были заложены более 100 лет назад А. Клебшем, который ввел важнейший численный инвариант поверхности *геометрический род* — аналог рода алгебраической кривой, поставил задачи бирациональной классификации поверхностей и разобрал ряд основных примеров. Его идеи были систематически развиты М. Нётером. Украшением и венцом теории явилась классификация алгебраических поверхностей, построенная на рубеже XIX и XX веков итальянской школой алгебраической геометрии — Г. Кастельнуово, Ф. Энриквесом и Ф. Севери. В ту же эпоху А. Пуанкаре и Э. Пикар создали основы топологических и аналитических методов исследования поверхностей, а в 20-е годы их идеи были до конца реализованы С. Лефшецом.

Последующее развитие можно охарактеризовать как переос-

мысление этой теории в духе новых для математики концепций, в основном — в трех направлениях: теории комплексных аналитических многообразий, геометрии над полями положительной характеристики и изучения поверхностей как расслоений на кривые. Последнее направление принесло наибольшие плоды в теории чисел в связи с применением к теории алгебраических кривых с рациональными коэффициентами (т. е. теории диофантовых уравнений) интуиции «арифметических поверхностей».

Несмотря на богатство полученных в ней результатов, теория алгебраических поверхностей далека от той завершенности, которой достигла теория кривых. Построенную итальянской школой теорию можно описать как бирациональную классификацию основных типов поверхностей по их простейшим численным инвариантам. Здесь мы имеем очень полную и стройную картину. Гораздо меньше известно о том, какие значения могут эти инварианты принимать. Наконец, о том, от каких непрерывных параметров зависит множество поверхностей с заданными численными инвариантами (т. е. о теории их модулей), не известно почти ничего.

Алгебраические поверхности, т. е. алгебраические многообразия размерности 2, по сложности непосредственно следуют за алгебраическими кривыми. В них впервые возникают «многомерные эффекты», типичные для многообразий размерности >1 . Однако ряд подобных явлений встречается впервые лишь в размерности 3. Можно думать, что многообразия произвольной размерности уже не отличаются принципиально от многообразий размерности 3, так что в алгебраической геометрии имеются три критические размерности: 1, 2 и ≥ 3 .

То же промежуточное место алгебраических поверхностей видно и при сопоставлении с топологией. Гладкая алгебраическая поверхность над полем комплексных чисел является четырехмерным дифференцируемым многообразием и таким образом теория алгебраических поверхностей тесно связана с четырехмерной топологией. С другой стороны, теория алгебраических поверхностей (особенно классификация алгебраических поверхностей — см. § 8) весьма напоминает топологию трехмерных многообразий в том виде, который она приобрела в последние годы в работах Терстона и др.

Обе эти связи указывают на то, что теория алгебраических поверхностей аналогична «маломерной топологии» — топологии многообразий размерности 3 и 4, в то время как алгебраические многообразия размерности 3 и больше являются аналогом «стабильного случая» — топологических многообразий размерности ≥ 5 .

Мы предполагаем, что читатель знаком с основами алгебраической геометрии — теориями алгебраических кривых, дивизоров, индексов пересечений и дифференциальных форм на ал-

гебраических многообразиях, а также с основными теоремами о когомологиях алгебраических когерентных пучков. Такие понятия, как числа Бетти или эйлерова характеристика, читатель может воспринимать ограничиваясь поверхностями над полем комплексных чисел в стандартном топологическом смысле или, в общем случае, с точки зрения l -адических когомологий.

Мы часто ссылаемся на обзоры [5], [19] и на первую статью данного сборника (ее при ссылках мы будем именовать «КАМ»), но предполагается лишь, что читатель знаком с самыми основными понятиями и результатами, изложенными там. Некоторые же факты, для дальнейшего особенно важные, в нашем обзоре напоминаются. В связи с этим мы позволяем себе некоторую свободу в изложении: определенные понятия, заимствованные из упомянутых обзоров, при разборе примеров считаются известными, хотя позже, когда они появляются в систематическом развитии теории, мы напоминаем их еще раз.

В центре нашего внимания будет теория алгебраических поверхностей над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0; пояснять теорию мы будем часто ограничиваясь случаем, когда k есть поле комплексных чисел \mathbb{C} .

Однако мы попытаемся осветить также, хотя и гораздо менее подробно, две большие примыкающие области — теорию алгебраических поверхностей над полями конечной характеристики и теорию двумерных комплексных аналитических многообразий. Что касается алгебраических поверхностей над алгебраически незамкнутым полем или двумерных схем арифметического происхождения (например, над \mathbb{Z}), они полностью остаются за пределами этого обзора.

Постоянным читателем и критиком рукописи нашей статьи был В. И. Данилов. Ему мы обязаны столь многими замечаниями и советами, что перечислить их было бы невозможно. В частности, изложение теории минимальных моделей алгебраических поверхностей в § 7 основано на рукописи, которую он нам предоставил. Мы рады выразить ему нашу глубокую благодарность.

§ 1. Основные инварианты

Под *алгебраической поверхностью* в этом обзоре будет подразумеваться алгебраическая поверхность в проективном пространстве (почти всегда без особых точек) или ее открытое (в топологии Зарисского) подмножество, т. е. квазипроективная поверхность. Это оправдывается тем, что абстрактное полное неособое алгебраическое многообразие размерности 2 проективно, хотя для многообразий с особыми точками это, вообще говоря, не верно. (Об этом см. [42], [78].)

Говоря об алгебраических поверхностях, полезно все время иметь в виду простейший тип алгебраических многообразий—

кривые. В то время как там разные определения приводили к единственному инварианту — роду, в теории поверхностей мы имеем несколько целочисленных инвариантов, связанных между собой рядом соотношений.

Прежде всего, это — топологические инварианты — числа Бетти b_i , $i=0, 1, 2, 3, 4$ (для алгебраической поверхности X , определенной над \mathbb{C} , — числа Бетти пространства $X(\mathbb{C})$, в общем случае — l -адические числа Бетти). Ввиду теоремы двойственности Пуанкаре, они сводятся к b_1 и b_2 . Мы обозначим через $e(X)$

эйлерову характеристику
$$\sum_{i=0}^4 (-1)^i b_i = 2 - 2b_1 + b_2.$$

Другой тип инвариантов определяется через когомологии когерентных пучков: это — числа $h^{p,q} = \dim H^q(X, \Omega_X^p)$, $0 \leq p+q \leq 2$, где Ω_X^p — пучок p -мерных дифференциальных форм на X . Эти инварианты связаны соотношениями

$$h^{p,q} = h^{2-p, 2-q} \quad (1)$$

(следствие теоремы двойственности — см., например, КАМ, гл. II, §5).

Над полем комплексных чисел из теории Ходжа следует (см. [39])

$$h^{p,q} = h^{p,q}, \quad (2)$$

$$b_1 = h^{1,0} + h^{0,1}, \quad (3)$$

$$b_2 = h^{2,0} + h^{1,1} + h^{0,2}. \quad (4)$$

Тем самым те же соотношения имеют место и над произвольным полем характеристики 0.

Наконец, еще одним инвариантом является *канонический класс* $K_X = c_1(\Omega_X^2)$ алгебраической поверхности X . Это — класс дивизоров на X , содержащий дивизоры дифференциальных 2-форм ([5], гл. I, § 7 и § 3). Его индекс пересечения с собой $(K, K) = (K^2)$ дает еще один важный целочисленный инвариант (подробнее об индексах пересечения на поверхности см. § 4). Из теоремы Римана—Роха следует *формула Нётера*

$$\frac{(K^2) + e(X)}{12} = 1 - h^{0,1} + h^{0,2}. \quad (5)$$

Число $1 - h^{0,1} + h^{0,2} = \sum (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{O}_X)$ обозначается через $\chi(\mathcal{O}_X)$ (или $\rho_a(X)$) и называется *арифметическим родом* поверхности X . Число $h^{2,0} = \dim H^0(\Omega_X^2)$ обозначается через ρ_g (или ρ) и называется *геометрическим родом*. Это — число линейно независимых регулярных дифференциальных 2-форм на X . Наконец, $h^{0,1} = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ обозначается через q и называется *иррегулярностью*. Из (2) и (3) следует, что над полем характеристики 0 $q = \frac{1}{2} b_1$.

Дальше размерность пространства $H^i(X, \mathcal{F})$ мы будем обозначать через $h^i(X, \mathcal{F})$ или $h^i(\mathcal{F})$.

Число $P_n = l(nK) = h^0(nK_X)$ называется n -кратным родом поверхности. Его можно интерпретировать как число линейно независимых регулярных дифференциальных 2-форм ω степени n ; локально $\omega = f(dx \wedge dy)^n$, где x и y — локальные параметры, а f — регулярная функция.

Числа $h^{1,0}$, $h^{2,0}$ и P_n являются бирациональными инвариантами — это следует из их интерпретации через дифференциальные формы ([5], гл. II, § 7). Из (1) следует, что то же верно для $h^{0,2}$ (и для b_1 , $h^{0,1}$ в характеристике 0 — из (2) и (3)). Числа $h^{1,1}$, b_2 , (K^2) не инвариантны относительно бирационального изоморфизма гладких проективных поверхностей.

В теории кривых принципиально разную роль играют кривые рода $g=0$, $g=1$ и $g>1$. Это проявляется, например, при рассмотрении n -кратных канонических отображений φ_{nK} , задаваемых n -кратным каноническим классом nK ([19]). Для $g=0$ $H^0(nK)=0$, так что отображение φ_{nK} не определено; для $g=1$ $H^0(nK)=k$, так что φ_{nK} является отображением в точку при любом $n \geq 1$; для $g>1$ отображение φ_{nK} при $n \geq 3$ является изоморфным вложением.

В соответствии с этим вводится важный бирациональный инвариант κ — каноническая (или кодаирова) размерность, имеющий смысл для любых полных неособых алгебраических многообразий X и определяемый следующим образом:

$$\kappa = \kappa(X) = \begin{cases} \max_n \dim \varphi_{nK}(X), & \text{если } H^0(nK) \neq 0 \text{ хотя бы для} \\ n & \text{одного } n \geq 1, \\ -\infty, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где K — канонический дивизор на X и $\varphi_{nK}(X)$ — образ X при n -кратно каноническом рациональном отображении. Из определения ясно, что $\kappa(X)$ может принимать значения $-\infty, 0, 1, \dots, \dots, \dim X$. В случае кривых, следовательно, $\kappa = -\infty \Leftrightarrow g=0$, $\kappa=0 \Leftrightarrow g=1$, $\kappa=1 \Leftrightarrow g>1$. Для поверхностей: $\kappa = -\infty \Leftrightarrow (\forall n \geq 1) [P_n=0]$, $\kappa=0 \Leftrightarrow (\forall n \geq 1) [P_n \leq 1]$ и $(\exists n_0) [P_{n_0}=1]$, при $\kappa=1$ и $\kappa=2$, как мы увидим в §§ 8—10, числа P_n растут, начиная с некоторого n_0 , как многочлены от n степени 1 и 2 соответственно. Можно сказать, следовательно, что κ выражает асимптотическое поведение бирациональных инвариантов P_n при $n \rightarrow \infty$.

Задача бирациональной классификации поверхностей заключается в описании их геометрических свойств в зависимости от значений дискретных инвариантов P_n , $h^{p,q}$, b_i , (K^2) и — в первую очередь — в характеристизации поверхностей по значениям их канонической размерности $\kappa = -\infty, 0, 1$ и 2 (подробнее об этом см. в § 8).

Примером наиболее простого по формулировке и в то же время очень нетривиального вопроса, относящегося к классификации, может служить т. н. «проблема рациональности»: как при помощи указанных инвариантов выделить ра-

циональные поверхности (т. е. поверхности, бирационально изоморфные \mathbf{P}^2)? Иными словами, для каких поверхностей X поле $k(X)$ изоморфно полю $k(x, y)$ рациональных функций от двух переменных? Ответ получен в § 13.

Отметим, что в одномерном случае рациональные кривые характеризуются единственным условием — обращением рода кривой в нуль.

§ 2. Примеры

Здесь мы приведем ряд важных примеров алгебраических поверхностей и укажем для них значения инвариантов, введенных в § 1. Большей частью эти значения могут быть вычислены по формулам (1)–(5) или при помощи кохомологических методов, описанных в КАМ.

Пример 1. Гладкая поверхность X_d степени d в \mathbf{P}^3 . Она задается одним неприводимым уравнением $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ степени d . Для нее

$$b_1 = h^{1,0} = h^{0,1} = 0, \quad b_2 = d^3 - 4d^2 + 6d - 2,$$

$$e = d^3 - 4d^2 + 6d, \quad q = 0$$

$K = (d-4)H$, где H — гиперплоское сечение, (1)

$$(K^2) = d(d-4)^2,$$

$$p_g = \frac{(d-1)(d-2)(d-3)}{6}.$$

В частности, при $d=1$ $X = \mathbf{P}^2$, $K_{\mathbf{P}^2} = -3H$, где H — прямая, и $K_{\mathbf{P}^2}^2 = 9$. В виде иллюстрации проверим это непосредственно. По определению, K — это класс дивизоров любой дифференциальной 2-формы. На \mathbf{P}^2 выберем аффинные координаты x, y и рассмотрим 2-форму $\omega = dx \wedge dy$. Так как в любой точке (a, b) аффинной плоскости $\mathbf{A}^2 \subset \mathbf{P}^2$ $(x-a, y-b)$ являются локальными координатами и, очевидно, $d(x-a) \wedge d(y-b) = dx \wedge dy$, форма ω не имеет на \mathbf{A}^2 ни нулей, ни полюсов. Выясним ее поведение на бесконечно удаленной прямой. Если $(x_0 : x_1 : x_2)$ — однородные координаты на \mathbf{P}^2 и $x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}$, то эта прямая задается уравнением $x_0 = 0$. Рассмотрим аффинную карту $\{(u, v)\} = \mathbf{A}^2$ с центром в точке $(0 : 0 : 1)$, где $u = \frac{x_1}{x_2}, v = \frac{x_2}{x_2}$ — аффинные координаты. Тогда $x = \frac{v}{u}, y = \frac{1}{u}$ и

$$\omega = dx \wedge dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du \wedge dv = \begin{vmatrix} -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \\ \frac{1}{u^2} & 0 \end{vmatrix} du \wedge dv = \frac{1}{u^3} du \wedge dv.$$

Следовательно, в аффинной карте $\{(u, v)\}$ форма ω имеет вдоль прямой $u=0$ полюс порядка 3. Так как две рассмотрен-

ные карты покрывают все \mathbf{P}^2 , кроме одной точки $(0:1:0)$, дивизор K формы ω равен $-3H$, где H — бесконечно удаленная прямая $x_0=0$.

Возвращаясь к общему случаю, опишем явно пространство $H^0(\Omega^2 X_d)$ регулярных 2-форм. Если в неоднородных координатах $x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}, z = \frac{x_3}{x_0}$ уравнение поверхности имеет вид $f(x, y, z) = 0$, а

$$\omega_0 = \frac{dx \wedge dy}{f_z'} = \frac{dy \wedge dz}{f_x'} = \frac{dz \wedge dx}{f_y'}$$

то

$$H^0(\Omega^2 X_{\alpha_d}) = \{\varphi \omega_0\}, \quad (2)$$

где $\varphi(x, y, z)$ — многочлен степени $\leq d-4$ (при $d < 4$ $H^0(\Omega^2 X_d) = 0$).

Поверхность X_2 называется *квадрикой*. Ее уравнение можно записать в виде $x_0 x_1 - x_2 x_3 = 0$. Отображение $x_1 = u_1 v_1, x_2 = u_0 v_1, x_3 = u_1 v_0, x_0 = u_0 v_0$ отождествляет X_2 с $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, где $(u_0 : u_1), (v_0 : v_1)$ — однородные координаты на множителях. При этом $s \times \mathbf{P}^1$ и $\mathbf{P}^1 \times t, s, t \in \mathbf{P}^1$, соответствуют двум семействам прямолинейных образующих на X_2 . Ясно, что $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ содержит открытое подмножество $\mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1 = \mathbf{A}^2$, поэтому квадрика рациональна. Геометрически бирациональный изоморфизм задается стереографической проекцией из точки $x_0 \in X_2$, сопоставляющей точке $x \in X_2$ точку пересечения прямой l_x , проходящей через x_0 и x , с некоторой фиксированной плоскостью $\mathbf{P}^2 \subset \mathbf{P}^3$ (рис. 1).

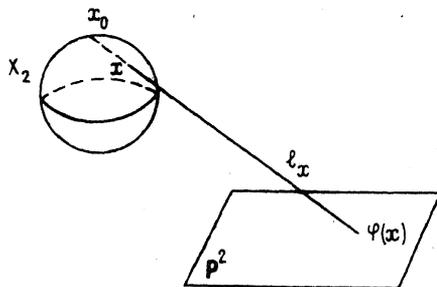


Рис. 1

Поверхность X_3 называется *кубикой*. На ней лежат 27 различных прямых (см. § 13). Кубика X_3 тоже рациональна (т. е. бирационально изоморфна \mathbf{P}^2): бирациональный изоморфизм $\varphi: X_3 \rightarrow \mathbf{P}^2$ определяется формулой $\varphi(x) = l_x \cdot L$, где $L = \mathbf{P}^2$ — плоскость в \mathbf{P}^3 , а l_x — прямая, проходящая через выбранную точку $x \in X_3$ и пересекающая две выбранные скрещенные прямые t, t' , лежащие на X_3 .

В самом простом случае, когда $d=1$, $X_1=\mathbf{P}^2$, $K=-3H$, где H —прямая. Отсюда не только $p_g(X_1)=0$, но и все $P_n(X_1)=0$ при $n \geq 1$. Кроме того, $q(X_1)=0$.

Ввиду бирациональной инвариантности этих чисел, для любой рациональной поверхности X также $P_n(X)=q(X)=0$. При $d > 3$ $p_g > 0$ —значит, такая поверхность не рациональна. Характеризация рациональных поверхностей равенствами $q(X)=0$, $P_n(X)=0$ (и даже частью этих равенств) и есть критерий рациональности поверхности (см. § 13).

Пример 2. Полным пересечением называется поверхность $X \subset \mathbf{P}^{r+2}$, являющаяся трансверсальным пересечением r гладких в точках пересечения гиперповерхностей Y_1, \dots, Y_r . Если $\deg Y_i = d_i$, $i=1, \dots, r$, то $\delta=(d_1, \dots, d_r)$ называется типом поверхности X , которая обозначается через $X_{(\delta)}$. Для $X_{(\delta)}$

$$q(X_{(\delta)})=0, \quad h^{1,0}(X_{(\delta)})=h^{0,1}(X_{(\delta)})=0, \quad b_1(X_{(\delta)})=0,$$

$$b_2(X_{(\delta)})=e(X_{(\delta)})-2,$$

$$e(X_{(\delta)})=[\binom{r+3}{2} - (r+3) \sum d_i + \sum d_i^2 + \sum_{i \neq j} d_i d_j] \prod_{i=1}^r d_i, \quad (3)$$

$$K_{X_{(\delta)}}=(\sum d_i - (r+3))H,$$

где H —гиперплоское сечение,

$$K_{X_{(\delta)}}^2=(\sum d_i - (r+3))^2 \prod_{i=1}^r d_i.$$

Формулы примера 1 получаются отсюда, если положить $r=1$. При $r=2$, $\delta=(2, 2)$ мы имеем новый тип рациональных поверхностей—пересечение двух квадрик в \mathbf{P}^4 (см. § 13). Все остальные полные пересечения (с $r > 1$ и $d_i > 1$) не рациональны.

Пример 3. Пусть X —проективное многообразие, G —конечная группа проективных преобразований, переводящая X в себя. Тогда существуют проективное многообразие Y и сюръективный морфизм $\pi: X \rightarrow Y$ такие, что $\pi(x)=\pi(x')$ тогда и только тогда, когда $x'=g(x)$ для некоторого $g \in G$, причем, если $U \subset X$ —аффинное открытое множество, инвариантное относительно G , то $V=\pi(U)$ аффинно и $k[V]=k[U]^G$ —есть кольцо инвариантов группы G в $k[U]$. Этими свойствами многообразия Y характеризуется однозначно. Оно называется фактормногообразием многообразия X по группе G и обозначается через X/G . Если X гладко и G не имеет неподвижных точек на X , то и Y гладко, в противном же случае Y может иметь особые точки (см. [17]).

Вот первый пример применения этой конструкции. Пусть $X \subset \mathbf{P}^3$ —гладкая поверхность с уравнением $x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 0$

над полем характеристики 0, $G = \{g\}$ — циклическая группа порядка 5 с образующей g , $gx_i = \varepsilon^i x_i$, $i = 0, 1, 2, 3$, $\varepsilon^5 = 1$, $\varepsilon \neq 1$, и $Y = X/G$. Легко видеть, что если $\eta \in H^0(\Omega_Y^1)$ — регулярная 1-форма, то $\pi^* \eta \in H^0(\Omega_X^1)$. Согласно примеру 1, $H^0(\Omega_X^1) = 0$ и, значит, $H^0(\Omega_Y^1) = 0$, т. е. $q(Y) = 0$. Если же $\omega \in H^0(\Omega_Y^2)$, то $\pi^* \omega \in H^0(\Omega_X^2)^G$, т. е. $\pi^* \omega$ является регулярной формой, инвариантной относительно G . В обозначениях примера 1 $H^0(\Omega_X^2) = \{\varphi \omega_0\}$, где $\varphi(x, y, z)$ — многочлен не выше 1-й степени. Очевидно, в пространстве $\{\varphi \omega_0\}$ группа G не имеет неподвижных векторов, отличных от 0, откуда следует, что $p_g(Y) = 0$. С другой стороны, квадратичный дифференциал $\omega_0^2 = z^{-7}(dx \wedge dy)^2 = \omega$ регулярен и инвариантен относительно G . Легко проверить, что $\omega = \pi^* \omega'$, где ω' — регулярный квадратичный дифференциал на Y . Поэтому $P_2(Y) \neq 0$. Это показывает, что Y не рационально, а значит, условия $q = 0$, $p_g = 0$ не достаточны для характеристики рациональных поверхностей. Y называется *поверхностью Годо*.

В случае алгебраических кривых мы уже сталкивались с разделением: кривые рода $g > 1$ являются «общим случаем», а кривые рода 1 и 0 — «особым случаем». Для алгебраических поверхностей имеет место аналогичное разделение. Оно связано с понятием канонической размерности κ : «общий случай» — $\kappa = 2$, «особые случаи» — остальные. При этом «особенные поверхности» с $\kappa < 2$ могут рассматриваться как обобщения кривых рода 1 и 0, но как кривые рода 1, так и кривые рода 0 обобщаются несколькими различными способами, которые мы сейчас опишем (примеры 4, 5, 6).

Общий принцип, управляющий подобными конструкциями, заключается в том, что аналогом кривых некоторого типа являются поверхности, обладающие расслоением на кривые (или, как еще говорят, пучком кривых) данного типа.

О п р е д е л е н и е. *Расслоением на алгебраические кривые* называются гладкая поверхность X и собственный морфизм $f: X \rightarrow V$ со связными слоями на гладкую кривую V . Кривая V называется *базой*, а кривые $X_b = f^{-1}(b)$, $b \in V$, называются *слоями*. Иногда X называется также *пучком*¹⁾ *кривых*.

Известная *теорема Бертини* утверждает, что если k — поле характеристики 0, то все слои, кроме, может быть, конечного числа, — гладкие кривые (в характеристике $p > 0$ это, вообще говоря, не верно — см. § 15). Этот результат — алгебраический аналог *теоремы Сарда* в теории дифференцируемых многообразий, согласно которой для гладкого собственного отображения $f: X \rightarrow Y$ дифференцируемых многообразий множество точек $y \in Y$, для которых отображение касательных пространств $dx_f: T_x \rightarrow T_y$ не эпиморфно, хотя бы для одного $x \in f^{-1}(y)$ имеет

¹⁾ К сожалению, традиция не позволяет избежать использования термина «пучок» в двух разных смыслах.

меру 0. Иначе говоря, для множества $U \subset Y$, дополнение которого имеет меру 0, отображение $f^{-1}(U) \rightarrow U \cap f(X)$ определяет локально тривиальное расслоение гладких многообразий ([67], гл. I, § 3).

Требование связности слоев морфизма f равносильно тому, что он не может быть разложен в композицию $X \rightarrow B' \rightarrow B$, где $B' \rightarrow B$ — нетривиальное конечное накрытие. Эта композиция называется *разложением Штейна*, если слои морфизма $X \rightarrow B'$ связны ([5]). Это, в свою очередь, означает, что поле $k(B)$ алгебраически замкнуто в $k(X)$. Тогда все слои, кроме конечного числа, неприводимы. Общий слой неприводим и гладок; его род g называется *родом пучка*. Все гладкие слои имеют тот же род g . Негладкие слои называются *вырожденными*.

Если $k = \mathbb{C}$ и расслоение $f: X \rightarrow B$ не имеет вырожденных слоев, то топологически оно локально тривиально и тогда хорошо известно соотношение $e(X) = e(B)e(F)$, где F — общий (любой невырожденный) слой. Оно легко обобщается на произвольные расслоения:

Предложение. Для расслоения $f: X \rightarrow B$

$$e(X) = e(B)e(F) + \sum_{b \in B} (e(F_b) - e(F)), \quad (4)$$

где F_b — слой $f^{-1}(b)$, а e — топологическая эйлерова характеристика. Формально сумма в (4) распространена на все слои, но отличны от 0 лишь слагаемые, соответствующие вырожденным слоям.

Соотношение (4) верно не только при $k = \mathbb{C}$, но и над любым полем характеристики 0 и даже вообще над любым полем (с небольшими видоизменениями в характеристике $p > 0$) с использованием l -адических когомологий.

Соотношение (4) особенно полезно благодаря тому, что, как мы увидим позже, $e(F_b) \geq e(F)$ для всех $b \in B$.

Понятие расслоения на кривые отражает тот общий принцип алгебраической геометрии, что любой объект полностью проявляет свое содержание лишь «в динамике», когда мы рассматриваем его меняющимся, т. е. как объект над достаточно общей базой B . Таким образом, расслоение на кривые следует мыслить как «кривую» над базой B . Кривой на самом деле является общий слой $F_\xi = f^{-1}(\xi)$ расслоения, где ξ — общая точка базы. Однако важно, что это — кривая над алгебраически незамкнутым полем $k(\xi) = k(B)$ — полем функций на кривой B .

Аналогом точки кривой является сечение морфизма $f: X \rightarrow B$, т. е. выбор точки в каждом слое F_b расслоения (конечно, «алгебраически» меняющейся вместе с b); точное определение требует задания такого морфизма $\varphi: B \rightarrow X$, что $\varphi(b) \in F_b$, или, иначе говоря, $f\varphi = 1$. Именно такой морфизм и называется *сечением* расслоения. Образ этого морфизма, т. е. кривую $\varphi(B)$,

также называют *сечением*. Легко видеть, что сечения находятся во взаимно однозначном соответствии с точками кривой F_{ξ} , рациональными над полем $k(B)$ (т. е. с координатами в этом поле).

Пример 4. В духе этих общих соображений в качестве аналогов кривых рода 0 (т. е. \mathbf{P}^1) мы имеем, кроме тривиального — поверхности \mathbf{P}^2 , еще и другие поверхности, а именно расслоения на кривые рода 0.

Определение. Поверхность X называется *линейчатой*, если существует морфизм $\pi: X \rightarrow B$ на гладкую кривую B (называемую *базой*), слои которого изоморфны \mathbf{P}^1 . Можно доказать, что расслоение $\pi: X \rightarrow B$ локально тривиально, т. е. существует такое покрытие $\bigcup U_i = B$ открытыми множествами U_i , что $\pi^{-1}(U_i) \simeq \mathbf{P}^1 \times U_i$ (см. § 13).

Линейчатые поверхности с базой $B = \mathbf{P}^1$ могут быть описаны (как абстрактные многообразия) следующим образом:

Пусть $\mathbf{P}^1 = U_0 \cup U_1$, где $U_0 = \{t \in \mathbf{P}^1 \mid t \neq 0\}$, $U_1 = \{t \in \mathbf{P}^1 \mid t \neq \infty\}$, а t — аффинная координата на \mathbf{P}^1 . Положим $X = (\mathbf{P}^1 \times U_0) \cup (\mathbf{P}^1 \times U_1)$, причем на $U_0 \cap U_1$ точки $(x, t) \in \mathbf{P}^1 \times U_0$ и $(y, t) \in \mathbf{P}^1 \times U_1$ отождествляются, если $y = xt^n$, $n \geq 0$. Полученная поверхность обозначается через F_n .

При склеивании $\mathbf{P}^1 \times U_0$ с $\mathbf{P}^1 \times U_1$ сечение $(0) \times U_0$ склеивается с $(0) \times U_1$ и дает сечение S_0 , аналогично $(\infty) \times U_0$ дает сечение S_{∞} . Очевидно, $S_0 \cap S_{\infty} = \emptyset$. Рассматривая функцию y — координату на \mathbf{P}^1 в $\mathbf{P}^1 \times U_0$, мы получим, что ее дивизор полюсов $(y)_{\infty}$ равен S_{∞} , а дивизор нулей $(y)_0$ равен $(xt^n)_0 = S_0 + nF$, где F — слой (о дивизорах см. [5], гл. III, § 3 и § 3 данной статьи). Отсюда $S_{\infty} \sim S_0 + nF$ и, так как $(S_0, F) = (S_{\infty}, F) = 1$, $(S_{\infty}^2) = n$, $(S_0^2) = -n$ (по поводу свойств индексов пересечения см. § 4). Можно показать, что S_0 — единственная кривая на $X = F_n$, имеющая отрицательный индекс самопересечения. Отсюда следует, что F_n и F_m не изоморфны при $n \neq m$.

Так как над некоторым открытым множеством $U \subset B$ $\pi^{-1}(U) \simeq \mathbf{P}^1 \times U$, линейчатые поверхности с базой \mathbf{P}^1 рациональны и называются *рационально линейчатыми поверхностями*. Для них $b_1 = h^{1,0} = h^{0,1} = 0$, $p_g = 0$. Для поверхности F_n $K = -2S_0 - (n+2)F$, где F — слой проекции $F_n \rightarrow \mathbf{P}^1$.

Более подробно о линейчатых поверхностях см. § 13. В частности, там будет доказано, что любая рациональная линейчатая поверхность изоморфна одной из поверхностей F_n .

Пример 5. Аналогично можно построить аналоги кривых рода 1: это — пучки рода 1, или *эллиптические пучки* (расслоения на эллиптические кривые). Поверхность X называется *эллиптической*, если она обладает морфизмом $f: X \rightarrow B$, общий слой которого — кривая рода 1.

Примеры эллиптических поверхностей над $B = \mathbf{P}^1$ можно построить следующим образом (мы предполагаем здесь, что характеристика поля k отлична от 2 и 3):

Пусть \mathbf{P}^1 покрыто открытыми множествами $A^1 = \mathbf{P}^1 \setminus \{\infty\}$ с координатой t и $A^1 = \mathbf{P}^1 \setminus \{0\}$ с координатой $s = \frac{1}{t}$. В $\mathbf{P}^2 \times A^1$ рассмотрим поверхность X' с уравнением $x_0 x_2^2 = x_1^3 + \alpha(t) x_0^2 x_1 + \beta(t) x_0^3$, где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — многочлены, $\deg \alpha(t) = n$, $\deg \beta(t) = m$. В неоднородных координатах $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$ ее уравнение приобретает вид

$$y^2 = x^3 + \alpha(t)x + \beta(t). \quad (5)$$

Проекция $\mathbf{P}^2 \times A^1 \rightarrow A^1$ определяет морфизм $p' : X' \rightarrow A^1$. Аналогично рассмотрим в $\mathbf{P}^2 \times A^1$ поверхность X'' с уравнением

$$v^2 = u^3 + \gamma(s)u + \delta(s),$$

где $\gamma(s) = \alpha\left(\frac{1}{s}\right)s^{4k}$, $\delta(s) = \beta\left(\frac{1}{s}\right)s^{6k}$, $k \geq \max\left(\frac{n}{4}, \frac{m}{6}\right)$.

Она обладает проекцией $p'' : X'' \rightarrow A^1$.

Отождествим открытые множества $t \neq 0$ в X' и $s \neq 0$ в X'' по формулам

$$s = \frac{1}{t}, \quad u = \frac{x}{t^{2k}}, \quad v = \frac{y}{t^{3k}}.$$

Тогда X' и X'' склеиваются в единую поверхность $X = X' \cup X''$ с проекцией $p : X \rightarrow \mathbf{P}^1$. Морфизм p гладок в окрестности слоя $p^{-1}(b)$, если $D(b) \neq 0$, где $D(t) = 4\alpha(t)^3 + 27\beta(t)^2$. Надо предположить, что D не равно тождественно нулю, тогда X — эллиптическая поверхность. Она построена нами как абстрактное многообразие, но нетрудно задать ее проективное погружение. Однако X не всегда гладка. Точки слоев $p^{-1}(b)$ с $D(b) \neq 0$ всегда не особы. Но при $D(b) = 0$ слой $p^{-1}(b)$ имеет особую точку, которая будет особой точкой поверхности X тогда и только тогда, когда $D'(b) = 0$ и $\beta(b) \neq 0$, или $\beta(b) = \beta'(b) = 0$ ('означает дифференцирование). Эти особые точки — не очень сложного типа и их нетрудно разрешить простыми бирациональными преобразованиями (подробнее об этом см. в § 6). Так мы приходим к гладким эллиптическим поверхностям.

В отличие от линейчатых поверхностей эллиптические расслоения, вообще говоря, не являются локально тривиальными: если абсолютный инвариант $J(t) = \frac{\alpha(t)^3}{4\alpha(t)^3 + 27\beta(t)^2}$ в уравнении (5) отличен от константы, то слои меняются с изменением t . Это связано с тем, что, в отличие от кривых рода 0, кривые рода 1 не все изоморфны друг другу. Поэтому эллиптическое расслоение, как правило, имеет вырожденные слои. В (5) они соответствуют корням многочлена $D(t)$.

В качестве аналога кривых рода 0 мы получили два кандидата — плоскость \mathbf{P}^2 и линейчатые поверхности. Еще большее разнообразие возникает при попытке построить аналоги

кривых рода 1. Построим аналог, отличный от эллиптических поверхностей.

Пример 6. Напомним, что абелевым многообразием называется проективное многообразие X , на котором определен такой групповой закон, что отображения сложения $X \times X \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto x + y$, и перехода к противоположному элементу $X \rightarrow X$, $x \mapsto -x$, являются морфизмами (см. [17], [59]).

Одномерное абелево многообразие — это эллиптическая кривая. Поэтому естественным ее обобщением является двумерное абелево многообразие. Таково, например, произведение $E_1 \times E_2$, где E_1 и E_2 — эллиптические кривые. Но это очень специальный пример. Более общим является якобиево многообразие $I(C)$ кривой C рода 2 (см. [19], гл. II).

Кривая C (в аффинных координатах) может быть задана уравнением $y^2 = f(x)$, где f — многочлен степени 5 без кратных корней. Многообразие $I(C)$ параметризует все классы дивизоров степени 0 на кривой C . Из теоремы Римана—Роха следует, что любой такой класс имеет представителя вида $D - D_0$, где $D > 0$, $D_0 > 0$, $\deg D = \deg D_0 = 2$ и D_0 — некоторый фиксированный дивизор. Мы возьмем за D_0 дивизор $2P$, где P — единственная точка, в которой функция x имеет полюс. Такой представитель в классе $D - D_0$ единствен, за исключением лишь случая, когда $D \in K_C$, где K_C — канонический класс C (ясно, что $D_0 = 2P \in K_C$). В последнем случае $D = D_0$, или $D = (a, b) + (a, b')$, где b и b' — два решения уравнения $y^2 = f(a)$, и $D - D_0 = (x - a) \sim 0$ (рис. 2).

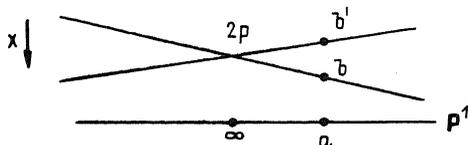


Рис. 2

Таким образом, для построения многообразия $I(C)$ надо сначала построить множество Y дивизоров D степени 2, т. е. неупорядоченных пар точек $(P, Q) \in C \times C$, а потом стянуть в нем в точку множество дивизоров $(x - a)_0$. Начнем с множества неупорядоченных пар, т. е. поверхности $Y = (C \times C) / G$, где $G = \{g\}$, $g(P, Q) = (Q, P)$ (легко проверить, что g — проективное преобразование при некотором проективном вложении $C \times C$). На поверхности Y лежит кривая E , параметризующая множество дивизоров $(x - a)_0$ и D_0 . Очевидно, $E \simeq P^1$. Можно показать (см. § 6, пример 4), что существуют такая поверхность X и морфизм $\varphi: Y \rightarrow X$, что $\varphi(E)$ — точка на X и φ является изоморфизмом $Y \setminus E$ и $X \setminus \varphi(E)$. Поверхность X и есть нужное нам $I(C)$.

В то время как абелево многообразие $E_1 \times E_2$ обладает эллиптическими расслоениями $E_1 \times E_2 \rightarrow E_1$ и $E_1 \times E_2 \rightarrow E_2$, на якобиане $I(C)$ такого расслоения, вообще говоря, нет, так что это — аналог кривой рода 1, отличный от эллиптических поверхностей.

Сдвиги на точку абелева многообразия A определяют канонический изоморфизм касательных пространств T_0 и T_a , $a \in A$, так что для A , как и для любого группового многообразия, касательное расслоение изоморфно $T_0 \times A$. Поэтому и для пучка Ω_A^1 $\Omega_A^1 \simeq \mathcal{O}_A \oplus \mathcal{O}_A$. Отсюда следует, что $h^0(\Omega_A^1) = 2$, $\Omega_A^2 = \wedge^2 \Omega_A^1 \simeq \mathcal{O}_A$ и $K_A = 0$. Кроме того,

$$q(A) = h^{0,1} = 2, \quad b_1 = 4, \\ b_2 = 6, \quad e(A) = 0$$

(в характеристике 0 это следует из формул (1) — (5) в § 1).

Наконец, приведем третий тип поверхностей, которые можно рассматривать как аналоги кривых рода 1.

Эллиптические кривые характеризуются условием $K=0$, поэтому, в качестве одного из их аналогов, естественно рассматривать поверхности X с $K_X=0$. Вообще говоря, для поверхностей с пучком эллиптических кривых $K \neq 0$ — мы имеем здесь два разных аналога эллиптической кривой. С другой стороны, для двумерного абелева многообразия A , как мы видели, $K_A=0$. Сейчас мы построим другой пример поверхности с этим свойством — еще один аналог эллиптической кривой.

Пример 7. Пусть A — двумерное абелево многообразие (читатель вполне может ограничиться случаем, когда $A = E_1 \times E_2$, где E_1, E_2 — эллиптические кривые). Предположим, что характеристика поля k отлична от 2. Обозначим через σ инволюцию $\sigma(a) = -a$ и положим $Y = A/G$, $G = \{1, \sigma\}$. Можно доказать, что σ имеет на A 16 неподвижных точек, т. е. точек порядка 2 (это очевидно для $A = E_1 \times E_2$, так как эллиптическая кривая имеет 4 точки порядка 2). В результате Y имеет 16 особых точек. Это — очень простые особые точки, так что легко построить их разрешение, т. е. гладкую поверхность X и бирациональный морфизм $\varphi: X \rightarrow Y$, являющийся вне этих точек изоморфизмом; для этого достаточно в точках поверхности Y произвести σ -процессы (о σ -процессах см. [5], гл. II, § 1 и § 6 данной статьи). При этом оказывается, что $\varphi^{-1}(y_i)$, где y_i ($i=1, \dots, 16$) — особые точки на Y , — это кривые L_i , изоморфные \mathbf{P}^1 . Поверхность X называется *куммеровой*. Ее основное свойство заключается в том, что для нее, как и для абелева многообразия A , $K_X=0$, но, в отличие от абелева многообразия, $q(X)=0$. Причина в том, что двумерная регулярная дифференциальная форма ω на A инвариантна относительно σ (например, для $A = E_1 \times E_2$ $\omega = \pi_1^*(\eta_1) \wedge \pi_2^*(\eta_2)$, где $\pi_i: E_1 \times E_2 \rightarrow E_i$ — проекции, η_i — одномерная регулярная форма на E_i и $\sigma^*\eta_i = -\eta_i$). Отсюда следует, что ω переносится на X и

(как показывает нетрудная проверка, использующая формулы преобразования φ) дает там форму с нулевым дивизором. С другой стороны, если $\eta \in H^0(\Omega_A^1)$, то $\sigma^*\eta = -\eta$, откуда нетрудно вывести, что $H^0(\Omega_X^1) = 0$. В характеристике 0 из этого следует, что $q(X) = 0$. Поверхности X , для которых $q(X) = 0$ и $K_X = 0$, называются *поверхностями типа КЗ*. Кумеровы поверхности — далеко не единственный пример поверхностей типа КЗ. Очевидно, для любой поверхности типа КЗ $\kappa = 0$. Из гладких поверхностей в \mathbf{P}^3 таковы поверхности степени 4 (пример 1), из полных пересечений — поверхности типов (2, 3), и (2, 2, 2) (пример 2).

Пример 8. Пусть A — двумерное абелево многообразие (например, над полем характеристики 0), G — конечная группа автоморфизмов, свободно действующая на A и не состоящая из одних сдвигов, и $X = A/G$. Если ω — инвариантная дифференциальная 2-форма на A , то для $g \in G$ $g^*\omega = \chi(g)\omega$, где χ — характер группы G , причем по условию $\chi \neq 1$. Отсюда легко следует, что $H^0(\Omega_X^2) = 0$, но $nK_X = 0$, так что $P_n(X) = 1$, где $n = |G|$ — порядок группы G . Легко проверить, что $q(X) = 1$, $p_g(X) = 0$.

Эту конструкцию, можно специализировать следующим образом: пусть E и B — эллиптические кривые, G — конечная группа автоморфизмов многообразия $E \times B$, перестановочная с проекцией $E \times B \rightarrow E$ и действующая на E при помощи сдвигов (иными словами, для $g \in G$, $(e, b) \in E \times B$ $g(e, b) = (e + \gamma_g, \varphi_g(e, b))$, где $\gamma_g \in E$, $\varphi_g(e, b)$ — морфизм $E \times B \rightarrow B$). Из этого следует, что G действует свободно на $E \times B$. Предположим, что G состоит не только из сдвигов (т. е. $b \mapsto \varphi_g(e, b)$ является сдвигом кривой B не для всех $g \in G$, $e \in E$). Если характеристика поля k отлична от 2 и 3, отсюда легко следует, что G не сохраняет 2-форму $\omega \in H^0(\Omega_{E \times B}^2)$ и, следовательно, для поверхности $X = (E \times B)/G$ имеем $p_g(X) = 0$, $q(X) = 1$, $K_X \neq 0$, $nK_X = 0$, где $n = |G|$. Такие поверхности называются *биэллиптическими*. (Более употребителен классический термин *гиперэллиптическая*. Удачно предположенный А. Бовилем [28] термин «биэллиптическая» позволяет избежать неоправданных ассоциаций с гиперэллиптическими кривыми.)

Пример 9. Пусть Y — поверхность типа КЗ, обладающая автоморфизмом g порядка 2 без неподвижных точек, $G = \{1, g\}$ и $X = Y/G$. Как и в примере 8, легко доказать, что для X $q = 0$, $p_g = 0$, но $P_2 \neq 0$. Поверхность X , для которой $q = 0$, $H^0(\Omega_X^2) = 0$ и $2K_X \sim 0$ (так что $P_2(X) = 1$) называется *поверхностью Энриквеса*.

Если характеристика основного поля $\neq 2$, то примером поверхности типа КЗ, обладающей автоморфизмом g с нужными свойствами, служит полное пересечение типа (2, 2, 2), заданное в \mathbf{P}^5 уравнениями

$$f_i(x_0, x_1, x_2) + h_i(x_3, x_4, x_5) = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

где f_i и h_i — квадратичные формы, причем как коники $f_1=f_2=$
 $=f_3=0$, так и коники $h_1=h_2=h_3=0$ не имеют общих точек.
 Тогда $g(x_0, \dots, x_5) = (-x_0, -x_1, -x_2, x_3, x_4, x_5)$.

§ 3. Кривые на алгебраической поверхности

3.1. Дивизоры. Кривой на алгебраической поверхности мы будем называть замкнутое неприводимое приведенное одномерное подмногообразие. Дивизором называется формальная сумма $D = \sum n_i C_i$, где $n_i \in \mathbb{Z}$, C_i — кривые. Множество $\cup C_i$ обозначается через $\text{Supp } D$. Дивизоры образуют группу: $\sum n_i C_i + \sum m_i C_i = \sum (n_i + m_i) C_i$, обозначаемую через $\text{Div } X$. Дивизор называется *эффективным*, если все $n_i \geq 0$. Это обозначается как $D \geq 0$.

По поводу дивизоров на произвольных алгебраических многообразиях см., например, [5], гл. III, § 3. Мы напомним их основные свойства.

Каждая рациональная функция $f \in k(X)$, $f \neq 0$, на гладком многообразии X определяет два эффективных дивизора — дивизор ее нулей $(f)_0$ и дивизор полюсов $(f)_\infty$. Дивизор $(f)_0 - (f)_\infty$ обозначается через (f) и называется *дивизором функции* f . Дивизоры вида (f) , $f \in k(X)^* = k(X) \setminus \{0\}$, называются *главными*. Сопоставление $f \mapsto (f)$ является гомоморфизмом группы $k(X)^*$ в $\text{Div } X$. На полном многообразии X его ядро совпадает с группой констант. Дивизоры D_1 и D_2 называются *эквивалентными*, если дивизор $D_1 - D_2$ — главный; тогда пишут $D_1 \sim D_2$.

С дивизором D на X связано линейное подпространство $L(D) \subset k(X)$, состоящее из 0 и тех функций f , для которых $(f) + D \geq 0$; его размерность обозначается через $l(D)$.

Дивизору D сопоставляется пучок $\mathcal{O}(D)$, сечения которого на открытом множестве $U \subset X$ состоят из тех функций f , для которых условие $(f) + D \geq 0$ выполнено на U . Очевидно, $\mathcal{O}(D)$ — пучок \mathcal{O} -модулей (где $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ — структурный пучок многообразия X). Он является когерентным пучком и $L(D) = H^0(X, \mathcal{O}(D))$. Отсюда следует, что $l(D)$ конечно, если X — полное многообразие. Пучки $\mathcal{O}(D_1)$, $\mathcal{O}(D_2)$ изоморфны тогда и только тогда, когда $D_1 \sim D_2$. Каждый дивизор на гладком многообразии является локально главным, т. е. в достаточно малой окрестности U любой точки имеет вид (f_U) . Функция f_U называется его *локальным уравнением* в U . Если $X = \cup U_\alpha$ — покрытие открытыми множествами, в каждом из которых дивизор D — главный и имеет локальное уравнение f_α , то D этими уравнениями определяется однозначно. Функции $\varphi_{\alpha, \beta} = f_\alpha f_\beta^{-1}$ регулярны и не обращаются в 0 на $U_\alpha \cap U_\beta$, т. е. $\varphi_{\alpha, \beta} \in \mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta)^*$. Наоборот, такой набор функций f_α задает дивизор D . Функции $\varphi_{\alpha, \beta}$ можно рассматривать как функции перехода линейного расслоения L с базой $X: L = \cup (A^1 \times U_\alpha)$ и

(a, x) отождествляется с (b, x) , $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $a, b \in A^1$, если $b = \varphi_{\alpha, \beta}(x)a$ (см. [5], гл. I, § 5). Пучок сечений этого расслоения L совпадает с $\mathcal{O}(D)$.

Например, если $X = \mathbb{P}^2$, то любая кривая $C \subset X$ задается уравнением $F = 0$, где F — неприводимая форма. Степень этой формы называется *степеню кривой* и обозначается через $\deg C$. Дивизор $D = \sum n_i C_i$ на \mathbb{P}^2 является главным тогда и только тогда, когда $\sum n_i \deg C_i = 0$. В этом случае $D = (f)$, где $f = \prod F_i^{n_i}$ (F_i — уравнения кривых C_i). Если x_0, x_1, x_2 — однородные координаты на \mathbb{P}^2 , то локальным уравнением дивизора D в множестве $U_\alpha = \{x_\alpha \neq 0\}$ является функция $(\prod F_i^{n_i}) x_\alpha^{-m}$, где $m = \sum n_i \deg C_i$.

Если $f: X \rightarrow B$ — морфизм гладкой поверхности X на гладкую кривую B , то слой $f^{-1}(b)$, $b \in B$, является эффективным дивизором, за локальное уравнение которого можно принять $f^*(\varphi)$, где $\varphi \in k(B)$ — любая функция, имеющая ноль первого порядка в точке b .

Поведение дивизоров при морфизме $\varphi: X \rightarrow Y$ определяется двумя отображениями.

Предположим, что $\varphi(X) \not\subset \text{Supp } D$ и D задается в открытых множествах U_i , $\bigcup U_i = Y$, локальными уравнениями f_i . Тогда функции $\varphi^*(f_i)$ в $\varphi^{-1}(U_i)$ можно взять за локальные уравнения (в покрытии $\varphi^{-1}(U_i)$) некоторого дивизора на X , который обозначается через $\varphi^*(D)$. Легко видеть, что $\mathcal{O}(\varphi^*(D)) = \varphi^* \mathcal{O}(D)$. Очевидно, $\varphi^*(f) = (\varphi^*(f))$, поэтому из $D_1 \sim D_2$ следует $\varphi^*(D_1) \sim \varphi^*(D_2)$.

Вторая операция отображает дивизоры на X в дивизоры на Y . Она обозначается через φ_* . По определению, $\varphi_* = 0$, если $\dim \varphi(X) < \dim X$. Пусть $\dim X = \dim Y$. Если $C \subset X$ — неприводимая кривая и $\dim \varphi(C) < \dim C$, то $\varphi_*(C) = 0$. Если же $\dim \varphi(C) = \dim C$, т. е. φ индуцирует морфизм конечной степени $C \rightarrow \varphi(C)$, то $\varphi_*(C) = r\varphi(C)$, где r — степень этого морфизма. На всю группу $\text{Div } X$ отображение φ_* распространяется по аддитивности. Если n — степень отображения $X \rightarrow \varphi(X)$, то

$$\varphi_* \varphi^*(D) = nD, D \in \text{Div } Y, Y = \varphi(X) \quad (1)$$

В частности, если морфизм $\varphi: X \rightarrow Y$ этален (не имеет точек ветвления), то, как легко убедиться, $K_X = \varphi^* K_Y$ и из (1) следует, что $\varphi_* K_X = nK_Y$. Если же $K_X \sim 0$, то $nK_Y \sim 0$.

Напомним, наконец, связь дивизоров с рациональными отображениями. Проективизация $PL(D)$ пространства $L(D)$ обозначается через $|D|$ и состоит из эффективных дивизоров $D' \sim D$, $D' \geq 0$. Она называется *полной линейной системой* дивизоров, ассоциированной с дивизором D . Любое подпространство такого пространства называется *линейной системой* дивизоров. Каждая линейная система дивизоров Δ определяет рациональное отображение φ_Δ многообразия X в некоторое

проективное пространство: если $\Delta = P(M)$, $M \subset L(D)$, f_0, \dots, f_n — базис M , то $\varphi_\Delta = (f_0, \dots, f_n)$.

В частности, если $\Delta = |D|$, то вместо φ_Δ пишут φ_D .

Пусть $(f_i) + D = D_i$. Может случиться, что все D_i имеют общую эффективную часть, тогда $D_i = D_i' + D^0$, где все D_i' не имеют общей компоненты. Тогда D^0 называется *неподвижной частью* линейной системы Δ , а система $\Delta' = \Delta - D^0 \subset |D - D^0|$ называется системой *без неподвижных компонент*.

Если Δ уже не имеет неподвижных компонент, то отображение φ_Δ не регулярно (т. е. не является морфизмом) в точках множества $\bigcap \text{Supp } D_i$. Отображение φ_D регулярно в тех и только тех точках $x \in X$, для которых слой пучка $\mathcal{O}(D)$ порождается (как \mathcal{O} -модуль) его сечениями над X .

3.2. Алгебраическая эквивалентность. Метод исследования кривых и дивизоров на поверхности подсказывается топологией при $k = \mathbb{C}$. Тогда множество комплексных точек $X(\mathbb{C})$ гладкой поверхности X является четырехмерным многообразием, которое обладает канонической ориентацией ([40]). Для любой кривой $C \subset X$ ее нормализация C^\vee является гладкой проективной кривой и, значит, $C^\vee(\mathbb{C})$ — компактной ориентированной поверхностью ([19]). Поэтому отображение нормализации $\nu: C^\vee(\mathbb{C}) \rightarrow C(\mathbb{C})$ превращает кривую C в двумерный цикл на многообразии $X(\mathbb{C})$. По линейности это отображение распространяется на любые дивизоры и сопоставляет дивизору D цикл и класс гомологий $\langle D \rangle \in H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$. В случае алгебраической кривой X дивизор D — это набор точек, т. е. 0-мерный цикл $\sum n_i P_i$, и его класс гомологий $\langle D \rangle \in H_0(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ определяется его степенью $\sum n_i$. Таким образом, сопоставление $D \mapsto \langle D \rangle \in H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ обобщает понятие степени дивизора на кривой, но теперь $\langle D \rangle$ — это не число, а элемент конечнопорожденной группы $H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$.

Укажем алгебраический аналог понятия гомологичности. Его идея заключается в том, что гомологичными являются дивизоры, меняющиеся в непрерывном семействе. *Алгебраическим семейством* дивизоров с базой S (где S — алгебраическое многообразие) называется локально главный дивизор ϑ на многообразии $X \times S$, носитель которого $\text{Supp } \vartheta$ не содержит слоев $X \times s$, $s \in S$. Тогда вложение $i_s: X \xrightarrow{\simeq} X \times s \rightarrow X \times S$ определяет дивизор $i_{s*}(\vartheta) = D_s$ на X . В этом смысле дивизоры D_s образуют «семейство», параметризованное точками $s \in S$.

В некоторых вопросах (например, при исследовании инфинитезимальных деформаций) важно рассматривать семейства, база которых — произвольная схема, не обязательно приведенная, однако в нашем изложении это не будет важно.

Дивизор $D \in \text{Div } X$ называется *алгебраически эквивалентным нулю*, если он имеет вид $D_{s_1} - D_{s_2}$, где D_{s_1} и D_{s_2} — элементы алгебраического семейства дивизоров со связной базой. Можно показать, что дивизоры, алгебраически эквивалентные нулю,

образуют подгруппу группы $\text{Div } X$; она обозначается через $\text{Div}_a X$. Можно доказать, что при $k = \mathbb{C}$ цикл $\langle D \rangle$, соответствующий дивизору D на алгебраической поверхности, тогда и только тогда гомологичен нулю, когда дивизор D алгебраически эквивалентен нулю ([40]). Таким образом, при $k = \mathbb{C}$ группа $\text{Div } X / \text{Div}_a X$ изоморфна образу группы $\text{Div } X$ в $H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$. В общем случае группа $\text{Div } X / \text{Div}_a X$ называется *группой Севери* (или *Нерона — Севери*) поверхности X и обозначается через S_X . Доказано, что эта группа имеет конечное число образующих. Число свободных образующих (ранг) этой группы обозначается через ρ и называется *числом Пикара* поверхности. Как и при $k = \mathbb{C}$, $\rho \leq b_2$ (число b_2 понимается как двумерное l -адическое число Бетти).

Таким образом, в группе $S_X = \text{Div } X / \text{Div}_a X$ мы пренебрегли всеми непрерывными деформациями кривых и в результате получили дискретную группу.

Пример 1. Для $X = \mathbb{P}^2$ $S_X \simeq \mathbb{Z}$ и образ дивизора $D = \sum n_i C_i$ в $\text{Div } X / \text{Div}_a X = S_X$ определяется целым числом $\sum n_i \deg C_i$.

Пример 2. Если X — кватрика, то $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Каждая кривая задается неприводимой формой $F(x_0 : x_1; y_0 : y_1)$, однородной как по переменным $(x_0 : x_1)$, так и по $(y_0 : y_1)$ (здесь $(x_0 : x_1)$ — однородные координаты точки на первом множителе, а $(y_0 : y_1)$ — на втором). Поэтому кривая F имеет две «степени»: $\deg' C$ и $\deg'' C$ — степени формы F по переменным, соответственно, $x_0 : x_1$ и $y_0 : y_1$. Дивизор $D = \sum n_i C_i$ алгебраически эквивалентен нулю тогда и только тогда, когда $\sum n_i \deg' C_i = \sum n_i \deg'' C_i = 0$. Легко видеть, что $\text{Div } X / \text{Div}_a X \simeq \mathbb{Z}l_1 \oplus \mathbb{Z}l_2$, где l_1, l_2 — образы прямоугольных образующих из двух разных систем.

Пример 3. Пусть $X = E_1 \times E_2$, где E_1 и E_2 — эллиптические кривые. «В общем случае» (например, если абсолютные инварианты J_1 и J_2 кривых E_1 и E_2 алгебраически независимы над \mathbb{Q}) $\rho_X = 2$, группа S_X изоморфна $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ и порождается кривыми $E_1 \times e_2, e_1 \times E_2$. В некоторых особых случаях $\rho_X > 2$ и новые классы в S_X порождаются графиками сюръективных гомоморфизмов $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$. Если $k = \mathbb{C}$ и $E_1 = \mathbb{C}/\Omega_1, E_2 = \mathbb{C}/\Omega_2, \Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ — решетки (см. [19]), то эти гомоморфизмы соответствуют таким комплексным числам $\alpha \neq 0$, что $\alpha\Omega_1 \subset \Omega_2$, т. е. подрешеткам решетки Ω_2 , подобным решетке Ω_1 .

В общем случае для связного семейства поверхностей число ρ имеет некоторое минимальное значение, которое подсказывает, если параметры, определяющие поверхности этого семейства («модули»), связаны некоторыми дополнительными соотношениями. Как правило, отыскание возможных значений этих «подскоков» — очень тонкая задача. Некоторые частные случаи см. в §§ 11, 12.

Пример 4. Пусть поверхность X вложена в проективное пространство \mathbb{P}^n . Пересечение ее с гиперплоскостью, ее не со-

держашей, определяет дивизор. Так как все гиперплоскости в \mathbf{P}^m образуют алгебраическое семейство, получающиеся дивизоры алгебраически эквивалентны и определяют один элемент группы S_X . Элемент $H \in S_X$, возникающий таким образом из некоторого проективного вложения $X \subset \mathbf{P}^n$, называется *очень обильным*. Положительная кратность очень обильного элемента очень обильна — надо воспользоваться отображением Веронезе. Элемент $E \in S_X$ называется *обильным*, если некоторая его положительная кратность очень обильна.

Очень обильные классы алгебраической эквивалентности — это те элементы группы S_X , которые необходимо существуют ввиду проективности поверхности X . Иногда других элементов в S_X и нет, т. е. $\rho = 1$; в некотором очень условном смысле, это — «общий случай». Например, теорема Нётера утверждает, что при $n \geq 4$ в пространстве форм степени n от 4 переменных существует такое подмножество, являющееся объединением счетного числа алгебраических подмногообразий, что форма, не принадлежащая этому подмножеству, определяет поверхность $X \subset \mathbf{P}^3$ с $S_X = ZH$, где H — плоское сечение.

С другой стороны, например для «поверхности Ферма» в \mathbf{P}^3 с уравнением $x_0^n + x_1^n + x_2^n + x_3^n = 0$, если $(n, 6) = 1$, то $\rho = 3(n-1)(n-2) + 1 > 1$, а если $(n, 6) > 1$ — ρ еще больше ([21]).

3.3. Линейная эквивалентность. Что представляет собой множество всех дивизоров, алгебраически эквивалентных данному? Ситуация будет более обозримой, если мы рассмотрим лишь эффективные дивизоры, алгебраически эквивалентные дивизору D . В примере 1 все эффективные дивизоры, эквивалентные кривой степени n , описываются отличными от нуля формами степени n , рассматриваемыми с точностью до пропорциональности. Таким образом, они параметризуются точками проективного пространства $\mathbf{P}^{\frac{n(n+3)}{2}}$.

С другой стороны, в примере 3 эффективные дивизоры, алгебраически эквивалентные дивизору $E_1 \times E_2$, имеют вид $E_1 \times a$, $a \in E_2$, т. е. параметризуются точками кривой E_2 , а эффективные дивизоры, алгебраически эквивалентные $(E_1 \times E_2) + (e_1 \times E_2)$, имеют вид $(E_1 \times a_2) + (a_1 \times E_2)$, т. е. параметризуются точками (a_1, a_2) многообразия $E_1 \times E_2$. Эти два примера обращают внимание на два типичных случая: когда множество эффективных дивизоров, алгебраически эквивалентных данному, параметризуется точками рационального (как в примере 1) или нерационального (как в примере 3) многообразия.

Рациональное семейство дивизоров на поверхности X определяется совершенно так же, как алгебраическое семейство, с той разницей, что база S должна быть рациональным многообразием. Дивизор называется *рационально* (или *линейно*) *эквивалентным нулю*, если он имеет вид $D_{s_1} - D_{s_2}$, где

D_{s_1} и D_{s_2} — элементы рационального семейства дивизоров. Дивизоры, рационально эквивалентные нулю, образуют подгруппу группы $\text{Div } X$; она обозначается через $\text{Div}_v X$. Очевидно, $\text{Div}_v X \subset \text{Div}_a X$. Дивизоры D_1 и D_2 называются *рационально* (или *линейно*) *эквивалентными*, если дивизор $D_1 - D_2$ рационально эквивалентен нулю.

Простейший случай — когда база S совпадает с \mathbf{P}^1 : семейство задается рациональной функцией $f \in k(X)$ и дивизор ϑ имеет локальное уравнение $f - t$, где t — координата на \mathbf{P}^1 . В этом случае дивизоры D_s — это «линии уровня» функции f , т. е. $D_a = (f - a)$ при $a \neq \infty$, $D_\infty = (f)_\infty$. Если $D = D_0 - D_\infty$, то $D = (f)$. Можно показать, что к этому случаю сводится общий, т. е. дивизор D тогда и только тогда линейно эквивалентен нулю, когда он является дивизором некоторой функции: $D = (f)$.

Группа $\text{Div } X / \text{Div}_v X$ называется *группой Пикара поверхности* X и обозначается через $\text{Pic } X$. Воспользовавшись сопоставлением дивизору расслоения, легко убедиться, что эта группа изоморфна $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ (в топологии Зарисского). В группу $\text{Pic } X$ можно ввести структуру схемы, согласованную с умножением. При этом связанной компонентой единицы будет группа $\text{Div}_a X / \text{Div}_v X$, обозначаемая через $\text{Pic}^0 X$. Над полем характеристики 0 она имеет структуру абелева многообразия, в общем же случае является групповой схемой, может быть не приведенной. Очевидно, $\text{Pic } X / \text{Pic}^0 X \simeq S_X$.

Проще всего пояснить ситуацию в случае $k = \mathbf{C}$. Тогда мы можем рассматривать X как комплексное аналитическое многообразие и аналитические и алгебраические линейные расслоения на $X(\mathbf{C})$ взаимнооднозначно соответствуют друг другу ([40]). Поэтому $\text{Pic } X \simeq H^1(X, \mathcal{O}_{\text{ан}}^*)$, где когомологии понимаются в комплексном смысле. Отображение $\text{exp}: f \mapsto e^{2\pi i f}$ определяет гомоморфизм пучков $\text{exp}: \mathcal{O}_{\text{ан}} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{ан}}^*$ и точную последовательность пучков (КАМ или [40])

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\text{ан}} \xrightarrow{\text{exp}} \mathcal{O}_{\text{ан}}^* \rightarrow 1, \quad (2)$$

называемую *экспоненциальной последовательностью*. Из нее следует точная последовательность когомологий:

$$0 \rightarrow H^1(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\alpha_1} H^1(X, \mathcal{O}_{\text{ан}}) \xrightarrow{\text{exp}} H^1(X, \mathcal{O}_{\text{ан}}^*) \xrightarrow{\delta_1} H^2(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\alpha_2} H^2(X, \mathcal{O}_{\text{ан}}). \quad (3)$$

Используя теорию Ходжа (см. [40] или § 14), можно дать следующую интерпретацию гомоморфизмов, входящих в эту последовательность: гомоморфизмы α_i , $i = 1, 2$, сопоставляют циклу $s \in H^i(X, \mathbf{Z})$ его составляющую типа $(0, i)$ (в частности, $H^1(X, \mathcal{O}_{\text{ан}}) \simeq \mathbf{C}^g$, $H^1(X, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}^{2g}$, $H^1(X, \mathcal{O}_{\text{ан}}) / \alpha_1 H^1(X, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{C}^g / \mathbf{Z}^{2g}$ и

является комплексным q -мерным тором); с другой стороны, δ_1 сопоставляет линейному расслоению (как элементу группы $H^1(X, \mathcal{O}_{\text{ан}}^*)$) его класс Чженя или, что то же самое, дивизору, определяющему расслоение, — его двойственный (в смысле двойственности Пуанкаре) класс когомологий. Таким образом, $\text{Кег } \delta_1$ — это классы дивизоров, гомологичные нулю, т. е., как мы видели, алгебраически эквивалентные нулю. Иными словами, $\text{Кег } \delta_1 = \text{Pic}^0 X \simeq \mathbb{C}^q / \mathbb{Z}^{2q}$.

Из последовательности (3) вытекают еще два важных следствия.

Во-первых, мы видим, что $\text{Pic}^0 X = \text{Кег } \delta_1$ состоит из расслоений, имеющих нулевой класс Чженя, а это значит, что они тривиальны как топологические расслоения. Таким образом, группа $\text{Pic}^0 X$ измеряет отклонение топологического изоморфизма линейных расслоений от аналитического (или алгебраического).

Во-вторых, $\text{Im } \delta_1 = \text{Кег } \alpha_2$ состоит из целочисленных коциклов c , для которых компонента $(0, 2)$ равна 0 : $c^{0,2} = 0$. Так как цикл c — целочисленный, а значит веществен, для него и $c^{2,0} = 0$, т. е. c является циклом типа $(1, 1)$. Иными словами, образ группы Севери S_X в $H^2(X, \mathbb{Z})$ совпадает с коциклами типа $(1, 1)$. Условие, что вещественный коцикл c имеет тип $(1, 1)$, может быть явно выражено — оно сводится к тому, что $c \cup x = 0$ для всех коциклов x типа $(0, 2)$. Так как $H^{0,2} \simeq H^0(X, \Omega^2)$ ($H^{0,2}$ совпадает с пространством регулярных дифференциальных 2-форм на X), это условие имеет вид $\int_a \omega = 0$ для всех $\omega \in H^0(X, \Omega^2)$, где d —

цикл, двойственный к c , т. е. класс гомологий, соответствующий дивизору $D \in S_X$. Этот результат называется *теоремой Лефшеца*.

Пример 5. Для поверхности X с $p_g = 0$ $H^0(X, \Omega^2) = 0$ и, значит, любой цикл является алгебраическим, т. е. $S_X \simeq H^2(X, \mathbb{Z})$. Если, сверх того, и $q = 0$, то $\text{Pic}^0 X = 0$ и $\text{Pic } X \simeq S_X \simeq H^2(X, \mathbb{Z})$. Так обстоит дело, в частности, в случае рациональной поверхности.

Пример 6. Пусть A — двумерное абелево многообразие (пример 6 в § 2). Для него $q = 2$, $b_1 = 4$, $b_2 = 6$ и (как комплексное многообразие) $A \simeq \mathbb{C}^2 / \bigoplus_{i=1}^4 \mathbb{Z} e_i$. Здесь e_i , $i = 1, \dots, 4$, соответствует некоторому базису $\sigma_1, \dots, \sigma_4$ группы $H_1(A, \mathbb{Z})$, а координаты в \mathbb{C}^2 — базису φ_1, φ_2 в $H^0(A, \Omega^1)$. Изоморфизм $A \simeq \mathbb{C}^2 / \bigoplus_{i=1}^4 \mathbb{Z} e_i$ определяется как $e \mapsto \left(\int_{a_0}^a \varphi_1, \int_{a_0}^a \varphi_2 \right)$, где интегралы берутся по некоторому пути, идущему из фиксированной точки a_0 в a . Кроме того, $H^0(A, \Omega^2) \simeq \omega \mathbb{C}$, где $\omega = \varphi_1 \wedge \varphi_2$. Базис группы $H_2(A, \mathbb{Z})$ образуют циклы $\sigma_{ij} = \sigma_i \cup \sigma_j$, $i < j$, $i, j = 1, \dots, 4$, и $\int \omega = \int_{\sigma_{1j}} \varphi_1 \int_{\sigma_j} \varphi_2 - \int_{\sigma_1} \varphi_2 \int_{\sigma_j} \varphi_1 = c_1 c'_j - c_j c'_1$, где $(c_i, c'_i) = e_i$.

Отсюда цикл $\sum n_{ij} \sigma_{ij}$ алгебраичен тогда и только тогда, когда $\sum n_{ij} (c_i c'_j - c_j c'_i) = 0$ и число Пикара ρ (ранг группы S_X) равно числу независимых целочисленных соотношений между числами $c_i c'_j - c_j c'_i$, $1 \leq i < j \leq 4$. Для «общих» c_i и c'_i таких соотношений, вообще говоря, нет — это соответствует случаю, когда тор $\mathbb{C}^2 / \bigoplus_{i=1}^4 \mathbb{Z} e_i$ не является алгебраическим многообразием.

Для алгебраических же тором, т. е. абелевых многообразий, «общим случаем» является наличие единственного соотношения, соответствующего абелевым классам дивизоров. В более исключительных случаях (например, если $A = E_1 \times E_2$, где E_1 и E_2 — эллиптические кривые) таких независимых соотношений может быть 2, 3 или 4, что соответствует $\rho = 2, 3, 4$. По той же теореме Лефшеца $\rho \leq h^{1,1} = b_2 - 2p_g$ и в нашем случае $\rho \leq 4$.

Укажем, наконец, совсем коротко, каков алгебраический эквивалент этой теории. Он основывается на том, что (при $k = \mathbb{C}$) многообразие $\text{Pic}^0 X$ не только теоретико-множественно параметризует все классы дивизоров, алгебраически эквивалентные нулю, но и дает возможность построить все алгебраические семейства таких классов. Именно, на многообразии $X \times \text{Pic}^0 X$ существует такое линейное расслоение L , что для любого многообразия S сопоставление регулярному отображению $f: S \rightarrow \text{Pic}^0 X$ пучка $(1 \times f)^* L$ на $X \times S$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между всеми такими отображениями f и элементами группы $P^0(X \times S) / \pi^* P(S)$. Здесь $P^0(X \times S)$ — группа линейных расслоений на $X \times S$, определяющих на всех подмногообразиях $X \times s$, $s \in S$, дивизор, алгебраически эквивалентный нулю, $\bar{P}(S)$ — группа всех линейных расслоений на S и π — проекция $X \times S \rightarrow S$. Этим универсальным свойством многообразие $\text{Pic}^0 X$, с точностью до изоморфизма, определяется однозначно. Но сама формулировка универсального свойства — чисто алгебраическая и может быть принята за определение для алгебраических поверхностей над произвольным полем, причем за S естественно брать произвольные схемы конечного типа над k . Встает, однако, вопрос о существовании $\text{Pic}^0 X$. Основная теорема существования утверждает, что $\text{Pic}^0 X$ (за определение которого взято указанное свойство универсальности) существует над произвольным полем k , но лишь как связная проективная групповая схема, вообще говоря, не приведенная. Однако известный простой результат утверждает, что над полем характеристики 0 любая групповая схема приведена и, значит, в этом случае $\text{Pic}^0 X$ существует как абелево многообразие. Примеры неприведенности схемы $\text{Pic}^0 X$ над полями конечной характеристики см. в § 15.

3.4. Многообразия Пикара и Альбанезе. В любом случае групповая схема $\text{Pic}^0 X$ имеет максимальную приведенную подсхему $(\text{Pic}^0 X)_{\text{red}}$, являющуюся абелевым многообразием и назы-

ваемую *многообразием Пикара*. Это многообразие связано с другим важным многообразием — *многообразием Альбанезе* $\text{Alb } X$. Так называется абелево многообразие A вместе с морфизмом $\varphi: X \rightarrow A$ (порождаемое образом $\varphi(X)$ как абстрактная группа), обладающее свойством универсальности: для любого морфизма $\psi: X \rightarrow B$ существует единственный морфизм $f: A \rightarrow B$, для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & A \\ & \searrow \psi & \swarrow f \\ & & B \end{array}$$

коммутативна. Доказано, что многообразие Альбанезе $\text{Alb } X$ существует и определено однозначно, а морфизм φ единствен с точностью до сдвига на точку из $\text{Alb } X$.

При $k = \mathbb{C}$ отображение φ задается в виде

$$\varphi(x) = \left(\int_{x_0}^x \omega_1, \dots, \int_{x_0}^x \omega_q \right),$$

где $x \in X$, $x_0 \in X$ — некоторая фиксированная точка, $\omega_1, \dots, \omega_q$ — базис пространства $H^0(X, \Omega^1)$, а все интегралы берутся по некоторому пути на X , соединяющему x_0 с x . Результат определен, конечно, только по модулю векторов $\left(\int_{\sigma} \omega_1, \dots, \int_{\sigma} \omega_q \right) \in \mathbb{C}^q$, где

$\sigma \in H_1(X, \mathbb{Z})$, образующих решетку $\Omega = \mathbb{Z}^{2g}$ в \mathbb{C}^q , $\text{Alb } X = \mathbb{C}^q / \Omega$. Если X — кривая, то мы приходим к известному определению якобиана $I(X) \simeq \text{Pic}^0 X$ кривой. Если X — поверхность, то мы получаем два разных абелевых многообразия; $\text{Pic}^0 X$ и $\text{Alb } X$, которые двойственны друг другу и, в частности, $(\text{Pic}^0 X)_{\text{red}} \simeq (\text{Alb } X) / \Gamma$, где $\Gamma \subset \text{Alb } X$ — конечная групповая подсхема ([59]).

Легко найти касательное пространство в нулевом элементе к схеме $\text{Pic}^0 X$ — оно изоморфно $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ и его размерность равна $h^{0,1}$. Поэтому $\dim \text{Pic}^0 X \leq h^{0,1}$ и равенство имеет место тогда и только тогда, когда схема $\text{Pic}^0 X$ приведена; в частности, над полем характеристики 0.

Все приведенные свойства многообразий $\text{Pic}^0 X$, $\text{Alb } X$ не специфичны для алгебраических поверхностей — они обобщаются на любые гладкие проективные многообразия (и некоторые более общие схемы). Специфика алгебраических поверхностей проявляется в том, что (в отличие от алгебраических кривых) в качестве многообразия $\text{Alb } X$ или $\text{Pic}^0 X$ для некоторой алгебраической поверхности X можно получить любое абелево многообразие — для алгебраических поверхностей не существует «проблемы Шоттки».

3.5. Дивизоры на расслоениях. В случае расслоения на кривые $f: X \rightarrow B$ мы имеем «относительный» аналог основных поня-

тий теории дивизоров. Ограничение на общий слой F_{ξ} определяет гомоморфизм группы $\text{Div } X$ на группу дивизоров $\text{Div } F_{\xi}$ кривой F_{ξ} над полем $k(B)$, определенных над этим полем. Ядром является группа Φ дивизоров, порожденных компонентами слоев (включая сами слои), — только они не пересекаются с общим слоем. Гомоморфизм $\text{Div } X \rightarrow \text{Div } F_{\xi}$ продолжается до гомоморфизма $\text{Pic } X \rightarrow \text{Pic } F_{\xi}$, где $\text{Pic } F_{\xi}$ — группа классов дивизоров кривой F_{ξ} , определенных над полем $k(B)$. Гомоморфизм $\text{Pic } F_{\xi} \rightarrow \mathbf{Z}$, сопоставляющий классу его степень, согласован с гомоморфизмом $D \mapsto (D, F)$, где F — слой, а (D, F) — степень ограничения дивизора D на F (она равна индексу пересечения D и F , который будет определен в § 4). Поэтому мы имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \Phi \rightarrow (\text{Pic } X)_F \rightarrow \text{Pic}^0 F_{\xi} \rightarrow 0, \quad (3)$$

где $(\text{Pic } X)_F$ — ядро гомоморфизма $\text{Pic } X \rightarrow \mathbf{Z} : D \mapsto (D, F)$.

§ 4. Индексы пересечения

4.1. Основные свойства. Мы начнем опять со случая $k = \mathbf{C}$ и гомологической интерпретации классов дивизоров. Как было сказано в § 3, в этом случае каждый дивизор $D \in \text{Div } X$ определяет цикл и класс гомологий $\langle D \rangle \in H_2(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$. Для двух классов $\alpha, \beta \in H_2(X, \mathbf{Z})$ определен индекс пересечения $(\alpha, \beta) \in \mathbf{Z}$, а тем самым определен и индекс пересечения (D_1, D_2) дивизоров $D_1, D_2 \in \text{Div } X$. Ту же конструкцию можно описать несколько иначе, сопоставляя дивизору D двойственный класс $[D] \in H^2(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ цикла $\langle D \rangle$ (на основании изоморфизма $H_2(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \simeq H^2(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$, выражающего двойственность Пуанкаре). Для классов $\xi, \eta \in H^2(X, \mathbf{Z})$ определено произведение $\xi \cup \eta \in H^4(X, \mathbf{Z})$. Значение этого класса на фундаментальном классе гомологий $\langle X(\mathbf{C}) \rangle$ (напомним, что $X(\mathbf{C})$ обладает канонической ориентацией) определяет тот же индекс пересечения. Таким образом, на дивизорах индекс пересечения определяется через гомоморфизм $\text{Div } X \rightarrow H^2(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ и спаривание $H^2(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \times H^2(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}$.

Теперь мы дадим алгебраическое описание индекса пересечения, служащее его определением для алгебраических поверхностей над произвольным полем. По определению два дивизора $D_1, D_2 \in \text{Div } X$ *находятся в общем положении*, если их носители не имеют общей компоненты, т. е. $\text{Supp } D_1 \cap \text{Supp } D_2$ состоит из конечного числа точек. Пусть это так, $x \in X$ — произвольная точка и f_1, f_2 — локальные уравнения эффективных дивизоров D_1, D_2 в окрестности этой точки. Легко видеть, что тогда пространство $\mathcal{O}_x / (f_1, f_2)$ конечномерно над полем k (здесь (f_1, f_2) — идеал, порожденный элементами $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_x$). Число

$$(D_1, D_2)_x = \dim_k \mathcal{O}_x / (f_1, f_2) \quad (1)$$

называется *локальным индексом пересечения* эффективных дивизоров D_1 и D_2 в точке x .

Для эффективных дивизоров D_1 и D_2 , находящихся в общем положении, их *индекс пересечения* (D_1, D_2) определяется соотношением

$$(D_1, D_2) = \sum_{x \in \text{Supp} D_1 \cap \text{Supp} D_2} (D_1, D_2)_x. \quad (2)$$

Это определение распространяется на произвольные (не обязательно эффективные) дивизоры по линейности: если $D_1 = D'_1 - D''_1$, $D_2 = D'_2 - D''_2$, $D'_1 \geq 0$, $D''_1 \geq 0$, $D'_2 \geq 0$, $D''_2 \geq 0$, то

$$(D_1, D_2) = (D'_1, D'_2) - (D''_1, D'_2) - (D'_1, D''_2) + (D''_1, D''_2).$$

Индекс пересечения обладает следующими свойствами (при условии, что все входящие в эти соотношения дивизоры находятся в общем положении):

Симметричность.

$$(D_1, D_2) = (D_2, D_1). \quad (3)$$

Билинейность.

$$\begin{aligned} (D'_1 + D''_1, D_2) &= (D'_1, D_2) + (D''_1, D_2), \\ (D_1, D'_2 + D''_2) &= (D_1, D'_2) + (D_1, D''_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Инвариантность. Если D'_1 и D''_1 алгебраически эквивалентны (в частности, линейно эквивалентны), то

$$(D'_1, D_2) = (D''_1, D_2). \quad (5)$$

Последнее свойство дает возможность перенести определение индекса пересечения на любые дивизоры (не предполагая их в общем положении): нетрудно показать (см., например, [17]), что для любых дивизоров D_1 и D_2 существует дивизор D'_1 , линейно эквивалентный D_1 и находящийся с D_2 в общем положении; тогда полагают $(D_1, D_2) = (D'_1, D_2)$, причем, ввиду (5), результат не зависит от выбора вспомогательного дивизора D'_1 . Этот индекс пересечения очевидно опять обладает свойствами (3)–(5).

В частности, теперь определено число (D, D) , которое обозначается через (D^2) .

Простейшее, но типичное применение приведенных свойств индексов пересечения — теорема Безу на \mathbf{P}^2 . Мы знаем, что $\text{Pic } \mathbf{P}^2 = \mathbf{S}_{\mathbf{P}^2} = \mathbf{ZH}$ и $(H^2) = 1$, где H — класс прямой. Для двух кривых $C_1, C_2 \subset \mathbf{P}^2$ мы имеем $C_i \sim (\deg C_i)H$. Поэтому $(C_1, C_2) = \sum (C_1, C_2)_x = ((\deg C_1)H, (\deg C_2)H) = \deg C_1 \cdot \deg C_2$. Это и есть *теорема Безу*: число точек пересечения двух кривых (взятых с надлежащими кратностями) равно произведению степеней этих кривых.

Важнейшее свойство, специфическое для индексов пересечения дивизоров, заключается в том, что для двух эффективных дивизоров D_1 и D_2 , находящихся в общем положении, $(D_1, D_2) \geq 0$. Это сразу видно из формулы (2). При $k = \mathbb{C}$ можно проиллюстрировать это свойство на примере двух трансверсально пересекающихся кривых C_1, C_2 . В этом случае $(\langle C_1 \rangle, \langle C_2 \rangle) = \sum_{x \in C_1 \cap C_2} (C_1, C_2)_x$ и локальный топологический индекс $(\langle C_1 \rangle, \langle C_2 \rangle)_x$ равен индексу пересечения касательных прямых T_{C_1} и T_{C_2} в касательной плоскости. При этом T_{C_1}, T_{C_2} и T_X имеют естественную ориентацию, а $T_{C_1} \oplus T_{C_2}$ и T_X ориентированы одинаково, так как изоморфизм между ними — комплексное линейное преобразование φ , а определитель соответствующего вещественного преобразования равен $|\varphi|^2$. Поэтому $(\langle C_1 \rangle, \langle C_2 \rangle) \geq 0$.

Очень важно, однако, иметь в виду, что для эффективного дивизора D (и даже для кривой) вполне может быть $(D^2) < 0$.

Пример 1. Пусть X — гладкая поверхность в \mathbb{P}^3 степени n , содержащая прямую L . Найдем (L^2) . Проведем плоскость \mathbb{P}_L^2 через L . Тогда кривая $H = X \cap \mathbb{P}_L^2$, высекаемая этой плоскостью на X , с одной стороны, есть кривая степени n , так что

$$H = L + C,$$

где C — дивизор, соответствующий дополнительной кривой степени $n-1$, а с другой — H эквивалентна любому другому гиперплоскому сечению H' . Отсюда $(H, L) = (H', L) = (L^2) + (L, C)$. Так как H — гиперплоское сечение, а L — прямая, $(H, L) = 1$ и по теореме Безу $(L, C) = n-1$. Отсюда $(L^2) = 2 - n$. Значит, при $n \geq 3$ $(L^2) < 0$. Пример поверхности, содержащей прямую, — «поверхность Ферма» с уравнением $x_0^n + x_1^n + x_2^n + x_3^n = 0$ (прямые: $x_0 = \xi x_1, x_2 = \eta x_3, \xi^n = \eta^n = -1$).

Из предыдущего следует, что кривая C с $(C^2) < 0$ обладает замечательным свойством: не существует алгебраической, эквивалентной ей и отличной от нее кривой — ее нельзя «пошевелить». Кривые C с $(C^2) < 0$ называются *исключительными*.

Перечислим некоторые важные свойства индексов пересечения. Сначала локальных индексов (дивизоры D_1 и D_2 предполагаются в общем положении):

1. $(D_1, D_2)_x \geq 0$ и $(D_1, D_2)_x > 0$, если $x \in \text{Supp } D_1 \cap \text{Supp } D_2$.
2. $(D_1, D_2)_x = 1$ тогда и только тогда, когда D_1 и D_2 пересекаются в x трансверсально, т. е. через точку x проходит лишь одна, и притом однократная, компонента каждого из дивизоров D_1, D_2 , x является простой точкой на каждой из них и касательные к ним в точке x различны.

3. Пусть D_1 — неприводимая кривая и x — ее r -кратная особая точка, т. е. если f — локальное уравнение D_1 в x

и $\mathfrak{m}_x \in \mathcal{O}_x$ — максимальный идеал, то $f \in \mathfrak{m}_x^r$, $f \notin \mathfrak{m}_x^{r+1}$. Тогда

$$\min_{D_2} (D_1, D_2)_x = r.$$

Из этих свойств вытекают свойства глобальных индексов:

4. Если D_1 и D_2 эффективны и находятся в общем положении, то $(D_1, D_2) \geq 0$ и, если $\text{Supp } D_1 \cap \text{Supp } D_2 \neq \emptyset$, то $(D_1, D_2) > 0$.

5. Если $\text{Supp } D_1 \cap \text{Supp } D_2 = \{x_1, \dots, x_r\}$, то $(D_1, D_2) \geq r$ и $(D_1, D_2) = r$ тогда и только тогда, когда D_1 и D_2 пересекаются трансверсально.

6. Если H — очень обильный класс, соответствующий вложению $X \subset \mathbf{P}^N$, то $(H, H) > 0$. Число (H^2) называется *степенью поверхности* X в \mathbf{P}^N . Оно равно максимальному числу точек пересечения X с подпространством $L \subset \mathbf{P}^N$ размерности $N-2$, пересечение которого с X состоит из конечного числа точек.

7. Для кривой C $(C, H) > 0$. Число (C, H) равно максимальному числу точек пересечения C с гиперплоскостью, не содержащей C , т. е. степени кривой C в \mathbf{P}^N .

8. Для эффективного дивизора $D \neq 0$ $(D, H) > 0$.

9. Если $\varphi: X \rightarrow Y$ — морфизм, то введенные в § 3 отображения φ^* и φ_* сопряжены друг другу, т. е. имеет место следующая формула проекции для $D_1 \in \text{Div } X$, $D_2 \in \text{Div } Y$:

$$(\varphi_* D_1, D_2)_Y = (D_1, \varphi^* D_2)_X. \quad (6)$$

(Ввиду согласованности отображений φ^* , φ_* с эквивалентностью дивизоров, мы можем теперь придать соотношению (6) смысл для произвольных D_1, D_2 .)

Если морфизм φ имеет конечную степень, то соотношение (6) можно применить к дивизорам $D, D' \in \text{Div } Y$, полагая $D_1 = \varphi^*(D')$, $D_2 = D$. Применяя формулу (1) из § 3, мы получим тогда

$$(\varphi^* D', \varphi^* D)_X = (\deg \varphi) (D, D')_Y \quad (7)$$

Пример 2. В связи с примером 6 из § 2 мы встретились с ситуацией, когда $\varphi: X \rightarrow Y$ — морфизм степени 2, $C_1 \subset Y$ — неприводимая кривая, $C = \varphi^*(C_1)$. В этом случае (7) дает

$$(C_1)_Y = \frac{1}{2} (C^2)_X.$$

4.2. Формула присоединения. Индексы пересечения входят в выражение для рода кривой, лежащей на поверхности («формула присоединения»). Если $C \subset X$ — гладкая кривая, то ее род дается формулой

$$g = \frac{(C^2) + (C, K_X)}{2} + 1. \quad (8)$$

Если кривая C — не гладкая и g — род ее нормализации, то

$$g = \frac{(C^2) + (C, K_X)}{2} + 1 - \delta, \quad (9)$$

где $\delta > 0$ — сумма положительных кратностей, распространенная на все особые точки C (подробнее см. в § 6).

Для гладкой кривой C равенство (8) переписывается как $(C^2) + (C, K) = 2g - 2$ и легко следует из рассмотрения на кривой C касательного расслоения T_X к поверхности, касательного расслоения T_C к кривой и их фактора $N_{C/X} = T_X/T_C$, называемого *нормальным расслоением* к C . Это просто есть утверждение о том, что $\det T_X = N_{C/X} \otimes T_C$ (как расслоение), причем простой подсчет показывает, что $(C^2) = \deg N_{C/X}$. Другая формулировка: ограничение пучка $\mathcal{O}_X(C + K_X)$ на кривую C дает канонический пучок $\mathcal{O}_C(K_C)$.

Перепишем общее соотношение (9) в более развернутом виде:

$$\frac{(C^2) + (C, K)}{2} = h^1(C, \mathcal{O}_C) - h^0(C, \mathcal{O}_C). \quad (10)$$

Рассмотрение нормализации $\nu: C^\nu \rightarrow C$ и точной последовательности пучков $0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \nu_* \mathcal{O}_{C^\nu} \rightarrow \nu_* \mathcal{O}_{C^\nu}/\mathcal{O}_C \rightarrow 0$ показывает, что

$$h^1(C, \mathcal{O}_C) = g + \delta, \quad \delta = h^0(C, \nu_* \mathcal{O}_{C^\nu}/\mathcal{O}_C). \quad (11)$$

Равенство (10) переписывается как $(C^2) + (C, K) = -2\chi(C, \mathcal{O}_C)$ и точная последовательность $0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-C) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$ показывает, что $\chi(C, \mathcal{O}_C) = \chi(X, \mathcal{O}_X) - \chi(X, \mathcal{O}_X(-C))$, а значит, $\chi(C, \mathcal{O}_C)$ зависит только от класса эквивалентности кривой C . Это дает возможность при помощи нескольких дополнительных рассуждений свести доказательство к случаю неособой кривой, т. е. к (8).

Пример 3. Пусть $X = \mathbf{P}^2$, $\deg C = n$. Тогда в группе $S_X C = nH$, где H — класс прямой, а $K_X = -3H$ (см. пример 1 из § 2). Отсюда $g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Пример 4. Пусть $X = C_1 \times C_2$, где C_1 и C_2 — кривые. Легко проверить, что $K_X = (K_{C_1} \times C_2) + (C_1 \times K_{C_2}) = (2g_1 - 2)\tilde{C}_1 + (2g_2 - 2)\tilde{C}_2$, где g_1 и g_2 — роды C_1 и C_2 , а \tilde{C}_1 и \tilde{C}_2 — образы кривых $C_1 \times c_2$ и $c_1 \times C_2$ ($c_1 \in C_1$, $c_2 \in C_2$). Пусть $C_1 = C_2 = \mathbf{P}^1$ (так что X — квадратика) и $C = n_1\tilde{C}_1 + n_2\tilde{C}_2$. Тогда формула (8) дает $g = (n_1 - 1)(n_2 - 1)$. Пусть $C_1 = C_2 = \Gamma$ и $C = \Delta$ — диагональ в $\Gamma \times \Gamma$. Тогда $\Delta \simeq \Gamma$ и формула (8) дает нам

$$(\Delta^2) = 2 - 2g, \quad (12)$$

где g — род Γ и Δ . В частности, $(\Delta^2) < 0$, если $g > 1$.

Пример 5. Пусть C — гиперэллиптическая кривая рода g , заданная уравнением $y^2 = f(x)$, и i — ее автоморфизм: $i(x, y) =$

$= (x, -y)$. В $C \times C$ рассмотрим график Γ автоморфизма i : $\Gamma = \{(c, i(c)) \mid c \in C\}$. Те же соображения, что в примере 4, показывают, что $(\Gamma^2) = 2 - 2g$.

Рассмотрим поверхность $Y = C \times C/G$, $G = \{1, g\}$, $g(c_1, c_2) = (c_2, c_1)$ (хотя автоморфизм g имеет неподвижные точки, легко убедиться, что Y — гладкая поверхность). На кривой Γ отображение g индуцирует автоморфизм i , $\Gamma/G = L \simeq \mathbf{P}^1$ и отображение $\Gamma \rightarrow L$ совпадает с $(x, y) \rightarrow x$. Формула (8) показывает, что на Y

$$(L^2) = 1 - g. \quad (13)$$

Еще одно приложение формул (9), (10) связано с предложением в § 2:

Предложение. Для слоя $F_b = f^{-1}(b)$ расслоения на кривые $f: X \rightarrow B$

$$e(F_b) \geq e(F),$$

где F — общий слой. Равенство имеет место только, если $F_b = mE$, где E — гладкая кривая, и род общего слоя семейства равен 1.

Приведем доказательство в случае, когда $F_b = \sum_{i=1}^m C_i$ не имеет кратных компонент. Рассмотрим нормализацию $F_b^\vee = \sum C_i^\vee$ (сумма несвязная) и морфизм $v: F_b^\vee \rightarrow F_b$. Тогда

$$\begin{aligned} \chi(F_b, \mathcal{O}_{F_b}) &= \chi(F_b^\vee, \mathcal{O}_{F_b^\vee}) - \delta, \\ e(F_b) &= e(F_b^\vee) - \varepsilon, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\varepsilon = \sum_{x \in F_b} (r_x - 1)$, а r_x — число точек в прообразе $v^{-1}(x)$, $x \in F_b$.

Первое из соотношений (14) следует из (1), второе — из определения эйлеровой характеристики через триангуляцию.

Наконец, для полной гладкой кривой B $e(B) = 2\chi(B, \mathcal{O}_B)$. Поэтому из (14) следует, что $e(F_b) = 2\chi(\mathcal{O}_{F_b}) + 2\delta - \varepsilon$. В частности, для гладкого слоя F $e(F) = 2\chi(\mathcal{O}_F)$. Согласно (10), $\chi(C, \mathcal{O}_C)$ одинаково для алгебраически эквивалентных кривых C . Поэтому $e(F_b) - e(F) = 2\delta - \varepsilon$; остается проверить, что $\varepsilon < 2\delta$. На самом деле, легко убедиться, что $\varepsilon \leq \delta$. В § 6 мы покажем даже, что, аналогично определению числа ε , $\delta = \sum_{x \in F_b} \delta_x$, причем

$\delta_x \geq \frac{r_x(r_x - 1)}{2} \geq r_x - 1$ при $r_x \geq 2$ (формула (11)). Отсюда видно, что $e(F_b) = e(F)$ только, если F_b — гладкая кривая (в сделанных нами предположениях). В общем случае результат тот же. Надо только иметь в виду, что $e(F_b)$ понимается как $e(\text{Supp } F_b)$ и, значит, равенство может достигаться, если $\text{Supp } F_b$ гладко,

т. е. $F_b = mE$, где E — гладкая кривая. Те же соображения показывают, что $\chi(\mathcal{O}(F)) = \chi(\mathcal{O}(F_b)) = m\chi(\mathcal{O}(E))$ (по (10), так как $(E^2) = 0$), а так как $2\chi(\mathcal{O}(F)) = e(F)$ и $2\chi(\mathcal{O}(E)) = e(E)$, равенство $e(F) = e(E)$ возможно при $m > 1$ лишь, когда $e(E) = 0$, т. е. когда E — эллиптическая кривая.

§ 5. Численная эквивалентность дивизоров

5.1. Теорема Римана — Роха. Основное численное соотношение на поверхности, использующее индексы пересечения, — это теорема Римана — Роха. Мы будем пользоваться ее частным случаем — в применении к пучкам $\mathcal{O}(D)$, соответствующим дивизорам. (По поводу общей формулировки см. КАМ, гл. 11, § 4.) Выражение $\chi(\mathcal{O}(D)) = \chi(D) = h^0(X, \mathcal{O}(D)) - h^1(X, \mathcal{O}(D)) + h^2(X, \mathcal{O}(D))$ называется *эйлеровой характеристикой дивизора D*. Теорема Римана — Роха утверждает, что

$$\chi(D) = \frac{(D^2) - (D, K)}{2} + \chi(\mathcal{O}_X), \quad (1)$$

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{(K^2) + e(X)}{12}, \quad (2)$$

где $e(X) = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 = 2b_0 - 2b_1 + b_2$ — топологическая эйлерова характеристика поверхности, b_i — числа Бетти, топологические (при $k = \mathbb{C}$) или l -адические. Формула (2) называется также *формулой Нётера*.

Практически теорема Римана — Роха применяется для вычисления $h^0(X, \mathcal{O}(D)) = l(D)$. Теорема двойственности (КАМ, гл. II, § 5) утверждает, что пространства $H^2(X, \mathcal{O}(D))$ и $H^0(X, \mathcal{O}(K-D))$ сопряжены и, значит, $h^2(X, \mathcal{O}(D)) = l(K-D)$. Слагаемое $h^1(X, \mathcal{O}(D))$ хуже всего контролируемо. Лишь в некоторых случаях удается доказать, что оно равно 0. В частности, имеет место следующий результат, верный лишь для полёй характеристики 0:

Теорема Кодаиры об обращении в нуль. Если D — обильный дивизор, то $h^1(X, \mathcal{O}(-D)) = 0$. По двойственности $h^1(X, \mathcal{O}(K+D)) = 0$ (КАМ, гл. II, § 6).

Усилением является

Теорема Раманджамы. Если $(D^2) > 0$ и $(D, C) \geq 0$ для любого эффективного дивизора C , то $h^1(X, \mathcal{O}(-D)) = 0$ ([26], [65]).

Это — усиление теоремы Кодаиры, так как для обильного дивизора D $(D^2) > 0$ и $(D, C) > 0$ при $C \neq 0$ — согласно свойствам 6 и 8 индекса пересечения. Мы увидим вскоре, что эти неравенства характеризуют обильные дивизоры.

Однако самый простой и часто применяемый прием заключается в том, чтобы, отбросив в (1) слагаемое $h^1(X, \mathcal{O}(D))$, заменить его более грубым *неравенством Римана — Роха*:

$$l(D) + l(K - D) \geq \frac{(D^2) - (D, K)}{2} + \chi(\mathcal{O}_X). \quad (3)$$

Вот классическое применение неравенства (3):

Предложение. Если $(D^2) > 0$, то при достаточно большом n один из дивизоров nD , $-nD$ эквивалентен эффективному. Более того, при $n \rightarrow \infty$ или $l(nD) \rightarrow \infty$, или $l(-nD) \rightarrow \infty$.

Причина заключается в том, что левая часть (3) для дивизора nD , $n \in \mathbb{Z}$, является квадратичной функцией от n со старшим коэффициентом $\frac{1}{2}(D^2)$. Написав неравенство (3) для nD и $-nD$, мы видим, что возможны три случая: 1) $l(nD) \rightarrow \infty$, 2) $l(-nD) \rightarrow \infty$, 3) $l(K - nD) \rightarrow \infty$ и $l(K + nD) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Надо показать, что третий случай невозможен. Предположим, что имеет место случай 3); тогда при достаточно большом n $K - nD \sim D_0 > 0$ и для $D' > 0$, $D' \sim K + nD$ отображение $D' \rightarrow D' + D_0$ определяет вложение $L(K + nD) \rightarrow L(K - nD + K + nD) = L(2K)$. Мы получаем $l(2K) \geq l(K + nD) \rightarrow \infty$ — противоречие.

Очевидно, будет ли при $n \gg 0$ эквивалентен эффективному дивизор nD или $-nD$, зависит от знака (D, H) , где H — некоторый обильный дивизор.

5.2. Конус эффективных классов кривых. Доказанное предположение связано с очень важным инвариантом алгебраической поверхности, который мы сейчас обсудим.

Ввиду соотношения (5) из п. 4.1, индекс пересечения определяет билинейную функцию $(x, y) \in \mathbb{Z}$, $x, y \in S_X$, на группе Севери S_X . Очевидно, если x — элемент конечного порядка в S_X , то $(x, y) = 0$ для всех $y \in S_X$. Из неравенства Римана — Роха легко вывести, что верно и обратное ([52], гл. V, § 3). Иначе говоря, если $t(S_X)$ — подгруппа элементов конечного порядка в S_X и $N_X = S_X/t(S_X)$, то функция (x, y) определена на N_X и не вырождена (если $(x, y) = 0$ для всех $y \in N_X$, то $x = 0$). Дивизоры, образы которых в группе N_X совпадают, называются *численно эквивалентными*. Таким образом, D_1 и D_2 численно эквивалентны, если $(D_1, D) = (D_2, D)$ для любого дивизора D . Это обозначается через $D_1 \approx D_2$.

Группа N_X изоморфна \mathbb{Z}^ρ , где ρ — число Пикара. Такая группа N (т. е. свободный \mathbb{Z} -модуль) вместе с заданной на ней билинейной и симметрической формой $(x, y) \in \mathbb{Z}$ называется *решеткой*. Задание решетки эквивалентно заданию целочисленной квадратичной формы: если $N = \bigoplus_{i=1}^{\rho} \mathbb{Z}e_i$, $(e_i, e_j) = c_{ij}$, то $F(x_1, \dots, x_\rho) = \sum c_{ij}x_ix_j$, т. е. $F(x_1, \dots, x_\rho) = (x, x)$ при $x = \sum x_ie_i$. Переход к другому базису решетки N заменяет форму F целочисленно эквивалентной, так как сводится к целочисленному линейному преобразованию переменных x_1, \dots, x_ρ с определителем ± 1 . Из сказанного выше следует, что $\det(c_{ij}) \neq 0$. Таким

образом, для алгебраической поверхности аналогом группы Z , в котором лежат значения функции $\text{deg } D$ дивизоров D на алгебраической кривой, является гораздо более тонкий объект — решетка N_X или соответствующая ей целочисленная квадратичная форма. С помощью N_X теория алгебраических поверхностей оказывается связанной с арифметикой квадратичных форм.

Пример 1. Для $X = \mathbf{P}^2$ $N_X = Zl$, где l — класс прямой $\mathbf{P}^1 \subset \mathbf{P}^2$, и $(l^2) = 1$.

Пример 2. Если X — квадрика $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \subset \mathbf{P}^3$, то $N_X = Zl_1 + Zl_2$, где l_1 соответствует прямой $\mathbf{P}^1 \times X$, а l_2 — прямой $y \times \mathbf{P}^1$.

Матрица формы (x, y) в базисе l_1, l_2 имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Если X — гладкая кубическая поверхность в \mathbf{P}^3 , то $\rho = 7$ и квадратичная форма, соответствующая Z -модулю N_X в некотором его базисе, может быть записана в виде $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - \dots - x_7^2$ (см. § 13).

Пример 4. Пусть поверхность X' получается из X раздуванием одной точки (определение этого понятия см. в [17]; мы напомним его в следующем параграфе). Тогда $N_{X'} \approx N_X \oplus Ze$, причём $(e^2) = -1$, $(x, e) = 0$ при $x \in N_X$.

Гораздо более грубый инвариант — это пространство $N_X \otimes \mathbf{R}$, на которое форма (x, y) перенесена с N_X по линейности. Пространство $N_X \otimes \mathbf{R}$, вообще говоря, псевдоевклидово, так как (x^2) не обязательно положительно (ср. пример 1 из п. 4.1 или примеры 2, 3 выше). Оно задается своим *типом* (r, s) , где r — число положительных и s — число отрицательных коэффициентов c_i в форме $F(x_1, \dots, x_\rho) = \sum c_i x_i^2$, если форма приведена к сумме квадратов. Как мы видели, $r + s = \rho$. Тип пространства $N_X \otimes \mathbf{R}$ определяет т. н. *теорема Ходжа об индексе*:

Теорема 1. Пространство $N_X \otimes \mathbf{R}$ имеет тип $(1, \rho - 1)$.

Доказательство. Мы знаем, что в N_X есть элементы, имеющие положительный квадрат, — например, элемент H , соответствующий гиперплоскому сечению. Нам достаточно доказать, что если $(D, H) = 0$, то $(D^2) \leq 0$. Пусть $(D, H) = 0$ и $(D^2) > 0$. Тогда, согласно предложению из п. 5.1, $nD \sim D_0 > 0$ при некотором $n \neq 0$. Ввиду свойства 8 индексов пересечения (п. 4.1) отсюда следует, что $(D_0, H) > 0$; значит, $(D, H) \neq 0$ — противоречие.

Характерным свойством для псевдоевклидова пространства типа (r, s) с $r > 0$ и $s > 0$ является наличие изотропных векторов $x \neq 0$ с $(x, x) = 0$. В частном же случае $r = 1, s > 0$ появляется новое явление: конус Ω векторов с $(x, x) > 0$ не связан и состоит из двух компонент или *пол*. Действительно, для любого вектора $x_0 \in \Omega$ линейная функция (x_0, y) не обращается в 0 на $N_X \otimes \mathbf{R}$, иначе $x_0 \mathbf{R} + y \mathbf{R}$ было бы подпространством типа $(2, 0)$, что невозможно. Поэтому Ω распадается, по крайней мере, на 2 компоненты: $(x_0, y) > 0$ и $(x_0, y) < 0$. Связность каж-

дой из них проверяется просто. Мы видим, что векторы x и y , лежащие в одной компоненте, характеризуются условием $(x, y) > 0$ (рис. 3).

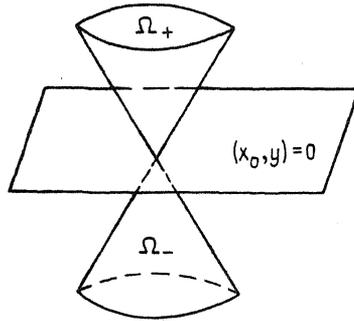


Рис. 3

В случае пространства $N_X \otimes \mathbb{R}$ одна из компонент конуса Ω выделяется тем, что в ней лежат обильные дивизоры. Мы будем обозначать ее через Ω_+ и называть *положительной* *полой*.

Важнейшим инвариантом поверхности X является множество классов решетки N_X , содержащих эффективные дивизоры. Более грубый, но более наглядный инвариант — замыкание выпуклой оболочки этих классов в пространстве $N_X \otimes \mathbb{R}$. Мы будем обозначать этот выпуклый конус через \bar{E} . Предложение из п. 5.1 показывает, что $\Omega_+ \subset \bar{E}$. Таким образом, любая алгебраическая поверхность X имеет следующие инварианты: а) решетку N_X , б) содержащее ее псевдоевклидово пространство $N_X \otimes \mathbb{R}$ типа $(1, \rho-1)$, в) выпуклый конус \bar{E} в этом пространстве, г) вектор $K_X \in N_X$ (на рисунках иногда удобнее рисовать гиперплоскость $(K_X, x) = 0$ в $N_X \otimes \mathbb{R}$).

Пример 5. Пусть X — квадратика: $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и $N_X = \mathbb{Z}l_1 + \mathbb{Z}l_2$ в обозначениях примера 2 из п. 3.2. Если $D = a_1l_1 + a_2l_2$,

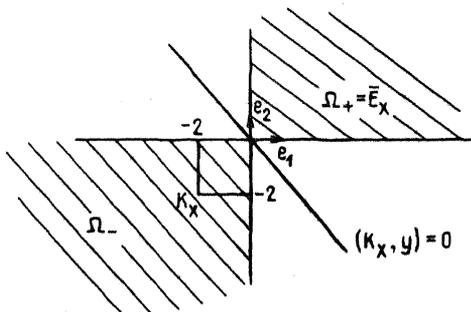


Рис. 4

где L_i — дивизоры классов l_i , $i=1, 2$, и $D > 0$, то $(D, L_1) \geq 0$ и $(D, L_2) \geq 0$, так как кривые L_i неподвижны. Отсюда следует, что $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, т. е. $\bar{E} = \Omega_+$ совпадает с положительным квадратом (рис. 4).

Пример 6. Пусть X получается из плоскости \mathbf{P}^2 раздуванием точки, l — класс прообраза раздуваемой точки и h — полный прообраз прямой. Тогда $N_X = Zh + Zl$, $(h^2) = 1$, $(l^2) = -1$, $(h, l) = 0$. Значит, Ω_+ состоит из элементов $ah + bl$ с $a > 0$, $|b| < a$. Из свойств раздувания следует, что собственный прообраз прямой эффективен и равен $h - l$ (см. § 6). Тогда для $x \in \bar{E}$ $(h - l, x) \geq 0$, так как $h - l$ соответствует неприводимой кривой $(h - l)^2 = 0$.

Рассуждая как в примере 5, получим, что \bar{E} порождается векторами l и $h - l$ (рис. 5; конус Ω_+ заштрихован вертикальными линиями, а \bar{E} — горизонтальными).

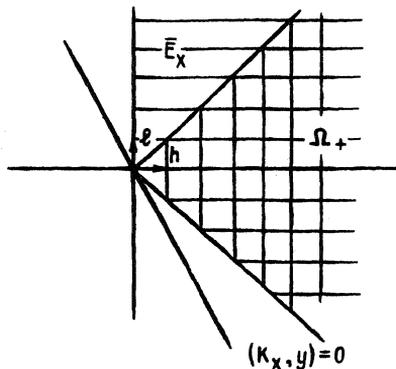


Рис. 5

Пример 7. Пусть X получается из \mathbf{P}^2 раздуванием двух точек. Как и в примере 6, $N_X = Zh + Zl_1 + Zl_2$, $h^2 = 1$, $(h, l_i) = 0$, $l_i^2 = -1$, $i = 1, 2$, $(l_1, l_2) = 0$. На рис. 5 нарисовано двумерное сечение конусов \bar{E} и Ω_+ или, если угодно, их образы на проективной плоскости $\mathbf{P}(N_X \otimes \mathbf{R})$; плоскость $(K_X, y) = 0$ пересекает конус \bar{E} по ребру (на рис. 6 — по точке).

Пример 8. Пусть X получается из \mathbf{P}^2 раздуванием трех точек, лежащих на одной прямой. Рисунок, аналогичный рис. 5, будет уже трехмерным — см. рис. 7; шар Ω_+ касается трех граней тетраэдра \bar{E} .

Пример 9. Если X — абелево многообразие, то любая кривая $C \subset X$ подвижна — ее можно сдвигать на точки из X . Поэтому $(C^2) \geq 0$ и $\bar{E} = \bar{\Omega}_+$ (например, при $\rho = 3$ это — круговой конус).

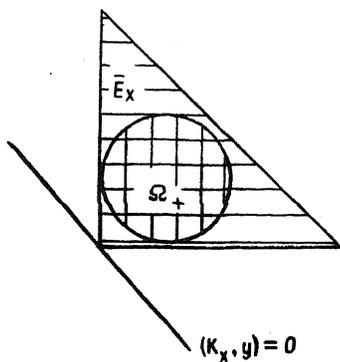


Рис. 6

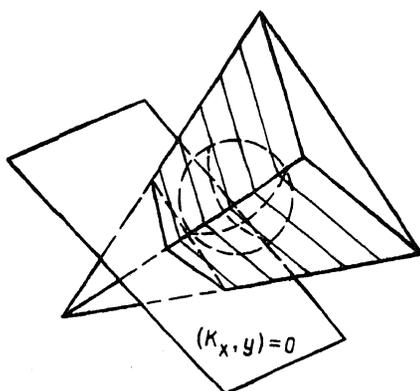


Рис. 7

В общем случае строение конуса \bar{E} может быть весьма сложным: он может иметь бесконечное число крайних лучей, накапливающихся к Ω_+ (рис. 8). Его более детальное изучение будет играть большую роль в § 7.

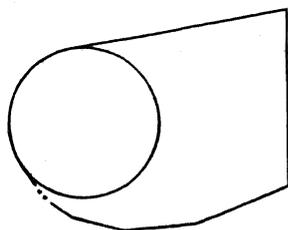


Рис. 8

В решетке N содержится еще одно важное множество — совокупность классов, содержащих обильные дивизоры (обильных классов). Его характеристику дает *критерий обильности Накаи—Мойшезона* ([42]):

Теорема 2. Класс D обилен тогда и только тогда, когда $(D^2) > 0$ и $(D, D') > 0$ для любого эффективного дивизора D' .

Необходимость этих условий очевидна — см. свойства 6 и 8 индексов пересечения (п. 4.1). Доказательство достаточности основывается на том, что, согласно предложению из п. 5.1, $nD > 0$ при некотором $n > 0$, и мы можем считать, что уже $D > 0$. Далее доказывается, что рациональное отображение φ_{nD} , определенное дивизором nD , при достаточно большом n является морфизмом (т. е. слои пучка $\mathcal{O}(nD)$ в любой точке порождаются сечениями) и, более того, является изоморфным вложением в \mathbf{P}^N . Основной причиной является то, что ограничение пучка $\mathcal{O}(nD)$ на любую кривую $C \subset X$ по условию соответствует эффективному дивизору на C и, значит, на C обладает этими свойствами.

Как и в случае эффективных дивизоров, рассмотрим замкнутый выпуклый конус \bar{A} , порожденный в пространстве $N \otimes \mathbf{R}$ множеством обильных дивизоров. Он определяется условиями $(x^2) \geq 0$ и $(x, y) \geq 0$ для всех $y \in \bar{E}$. Докажем, что условие $(x^2) \geq 0$ излишне. Действительно, множество A' , определенное условием $(x, y) \geq 0$ для всех $y \in \bar{E}$, — это конус \bar{E}^* , двойственный конусу \bar{E} . Мы знаем, что $\bar{E} \supset \Omega_+$, и элементарные соображения линейной алгебры доказывают, что конус Ω двойствен самому себе, а точнее $\Omega_+^* = \bar{\Omega}_+$, где Ω_+^* — двойственный конус, а $\bar{\Omega}_+$ — замыкание конуса Ω_+ . Из $\bar{E} \supset \Omega_+$ следует $\bar{E}^* \subset \Omega_+^* = \bar{\Omega}_+$, т. е. $A' \subset \bar{\Omega}_+$, а это и значит, что $A' = \bar{A}$. Таким образом, $\bar{A} = \bar{E}^*$ есть конус, двойственный конусу \bar{E} .

Из доказанного можно получить следующий *критерий обильности Клеймана*: дивизор H обилен тогда и только тогда, когда он положителен как линейная функция (H, y) на $E \setminus \{0\}$.

Замечание. Специфическим для поверхности свойством является то обстоятельство, что кривые и дивизоры имеют одну и ту же размерность 1. Начиная с размерности 3 и выше возникают уже два пространства, двойственных друг другу относительно формы пересечения: $N_1(X) = \{1\text{-циклы (кривые)} / \text{mod } \cong\} \otimes \mathbf{R}$ и $N^1(X) = \{(n-1)\text{-циклы (дивизоры)} / \cong\} \otimes \mathbf{R}$. Каждое из этих пространств имеет размерность ρ — ранг группы Нерона—Севери X (т. е. число Пикара). В пространстве $N^1(X)$ лежат конусы эффективных, обильных, численно эффективных классов дивизоров, а в пространстве $N_1(X)$ — конус $NE(X)$, порожденный эффективными 1-циклами. Его замыкание $NE(X)$ называется *конусом Мори* многообразия X (в на-

шем случае — это \bar{E}). Он играет очень важную роль в теории минимальных моделей многообразий размерности $n \geq 3$ (см. замечание в конце § 7).

§ 6. Бирациональные отображения

6.1. σ -процесс. Одно из основных свойств алгебраических кривых заключается в том, что рациональное отображение $\varphi: X \rightarrow \mathbf{P}^N$ алгебраической кривой в проективное пространство регулярно в неособых точках кривой. Отсюда, в частности, вытекает, что бирациональный изоморфизм гладких проективных кривых является изоморфизмом — бирациональная единственность гладкой проективной модели. Оба эти свойства не верны для алгебраических многообразий размерности > 1 и впервые этот «многомерный эффект» встречается в алгебраических поверхностях. Его классический пример — бирациональное преобразование, называемое σ -процессом (оно называется также *дилатацией*, *моноидальным преобразованием* и *раздутием*). Определение σ -процесса дано в [5] (см. также [42]); мы напомним его в частном случае поверхностей.

Пусть сначала X и точка $p \in X$ таковы, что существуют функции x и y , регулярные на X , образующие систему локальных параметров в точке p и такие, что уравнения $x=0$, $y=0$ имеют на X единственное решение — точку p . (Отсюда, конечно, следует, что поверхность X не проективна. Но всякая точка p на любой гладкой поверхности имеет подобную окрестность: надо выкинуть из поверхности дивизоры полюсов функций x и y , образующих локальную систему координат в точке p , и отличные от p решения системы $x=0$, $y=0$.) Рассмотрим поверхность $Y \subset X \times \mathbf{P}^1$, определенную уравнением

$$x\xi_1 - y\xi_0 = 0, \quad (1)$$

где $(\xi_0 : \xi_1)$ — координаты на \mathbf{P}^1 . Проекция $X \times \mathbf{P}^1 \rightarrow X$ определяет отображение $\sigma: Y \rightarrow X$, называемое σ -процессом в точке p . Очевидно, $Y \supset p \times \mathbf{P}^1$: при $x=y=0$ уравнение (1) удовлетворяются любыми значениями ξ_0, ξ_1 . С другой стороны, если в точке $q \in X$ или $x(q) \neq 0$, или $y(q) \neq 0$, то ξ_0 и ξ_1 однозначно определяются из (1). Поэтому σ определяет изоморфизм между $Y \setminus L$ (где L обозначает кривую $p \times \mathbf{P}^1$, очевидно, изоморфную \mathbf{P}^1) и $X - p$ и отображает L в p , т. е. σ — бирациональный морфизм, стягивающий L в точку.

Многообразия Y не аффинно, даже если X было аффинным, так как Y содержит проективную кривую L , но оно покрывается двумя картами: $Y = U_0 \cup U_1$, $U_0 = \{\xi_0 \neq 0\}$, $U_1 = \{\xi_1 \neq 0\}$, которые аффинны, если X аффинно. Действительно, в U_0 , полагая $t = \xi_1/\xi_0$, мы получаем $k[U_0] = k[X][t]$ и $y = xt$, а в U_1 , при $s = \xi_0/\xi_1$, $k[U_1] = k[X][s]$ и $x = ys$. Таким образом, в обеих картах максимальный идеал $\mathfrak{m}_p = (x, y)$ точки p становится глав-

ным. Прямая L имеет в U_0 уравнение $x=0$, а в U_1 — $y=0$. Пусть $C \subset X$ — кривая. Тогда кривая $C \setminus p$ (совпадающая с C , если $C \not\ni p$) имеет изоморфный прообраз $\sigma^{-1}(C \setminus p) \subset Y \setminus L$. Его замыкание в Y обозначим через $\sigma'(C)$. Эта кривая называется *собственным прообразом кривой C* .

Из указанного выше представления σ -процесса в картах U_0 и U_1 легко видеть, что если $p \in C$ и кривая C гладка в точке p , то точка пересечения кривых $\sigma'(C)$ и L однозначно определяется касательной к C в точке p (надо написать локальное уравнение f кривой C в точке p в виде $f = \alpha x + \beta y + g$, $g \in \mathfrak{m}_p^2$). Таким образом, прямая $L \simeq \mathbf{P}^1$ отождествляется с множеством направлений в касательной плоскости T_p к X в точке p , т. е. с проективизацией $\mathbf{P}(T_p)$ этой плоскости. В этом и заключается геометрический смысл σ -процесса: Y получается из X «раздуванием» точки p , которая заменяется прямой $L = \mathbf{P}(T_p)$ (рис. 9).

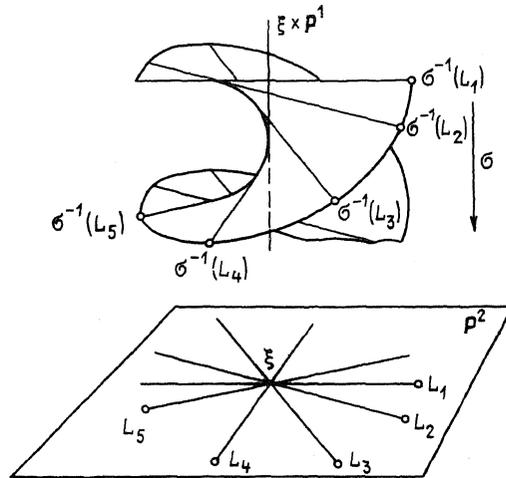


Рис. 9

Для произвольной поверхности и ее простой точки $p \in X$ σ -процесс в этой точке можно определить как абстрактное многообразие, покрыв X двумя открытыми множествами: $X = X_0 \cup X_1$, где $X_0 \ni p$ и удовлетворяет перечисленным в начале условиям, а $X_1 \not\ni p$, и положив $Y = Y_0 \cup X_1$, где $\sigma: Y_0 \rightarrow X_0$ — определенный выше σ -процесс, а склеивание Y_0 и X_1 определяется изоморфизмом $X_1 \supset X_0 \cap X_1 \simeq \sigma^{-1}(X_0 \cap X_1) \subset Y_0$. Отображение $Y \rightarrow X$, совпадающее с σ при $q \in Y_0$ и тождественное при $q \in X_1$, опять называется *σ -процессом в точке p* и обозначается через σ . Очевидно, $\sigma^{-1}(p) = L \simeq \mathbf{P}^1$ и $\sigma: Y \setminus L \rightarrow X \setminus p$ — изоморфизм.

Легко построить проективное вложение Y : если $X \subset \mathbf{P}^N$, то Y вкладывается в $\mathbf{P}^N \times \mathbf{P}^1$. Если X проективно, то и Y проективно. При проективном X σ -процесс дает простейший пример бирационального изоморфизма гладких проективных поверхностей, не являющегося изоморфизмом. Рациональное отображение $\sigma^{-1}: X \dashrightarrow Y$ — пример рационального, но не регулярно отображения гладкой поверхности в проективное пространство.

Дальше мы будем предполагать поверхность X гладкой и проективной и считать, что $\sigma: Y \rightarrow X$ есть σ -процесс в точке $p \in X$. Инварианты поверхностей X и Y связаны соотношениями:

$$\text{Pic } Y = \sigma^* \text{Pic } X \oplus \mathbf{Z}l \quad (\text{где } l \text{ — класс кривой } L) \quad (2)$$

$$\begin{cases} S_Y = \sigma^* S_X \oplus \mathbf{Z}l, & N_Y = \sigma^* N_X \oplus \mathbf{Z}l, \\ \sigma^* N_X \simeq N_X \text{ (как решетки), } & (\sigma^* N_X, l) = 0, \quad (l^2) = -1, \end{cases} \quad (3)$$

$$\rho_Y = \rho_X + 1, \quad (4)$$

$$b_2(Y) = b_2(X) + 1, \quad (5)$$

$$\begin{cases} K_Y = \sigma^* K_X + l, \\ (K_Y^2) = (K_X^2) - 1. \end{cases} \quad (6)$$

Поведение кривой при σ -процессе определяется соотношениями

$$\sigma^*(C) = \sigma'(C) + rL \quad (7)$$

(где r — кратность точки p на C , т. е. если f — локальное уравнение C в p , то $f \in \mathfrak{m}_p^r$, $f \notin \mathfrak{m}_p^{r+1}$);

$$(\sigma'(C), L) = r; \quad (8)$$

$$(\sigma'(C_1), \sigma'(C_2)) = (C_1, C_2) - r_1 r_2 \quad (9)$$

(где r_1, r_2 — кратности кривых C_1, C_2 в точке p);

$$(\sigma'(C), K_Y) = (C, K_X) + r. \quad (10)$$

Все эти соотношения легко проверяются рассмотрением локального уравнения кривой C и использованием простейших свойств индексов пересечений.

Из соотношений (7) и (8) и очевидного соотношения $(\sigma^* D, L) = 0$ (достаточно сдвинуть D с точки p) вытекает важное соотношение $(l^2) = -1$ (ср. (3)).

6.2. Бирациональные преобразования. Приведенные свойства σ -процесса позволяют легко доказать фундаментальные свойства кривых на алгебраических поверхностях и свойства рациональных отображений поверхностей.

А. Свойства кривых. Мы будем говорить, что отображение гладких поверхностей $\varphi: Y \rightarrow X$ является *произведением σ -про-*

цессов, если существует такая последовательность σ -процессов $\sigma_i, i=1, \dots, n, Y \xrightarrow{\sigma_n} X_{n-1} \xrightarrow{\sigma_{n-1}} X_{n-2} \rightarrow \dots \xrightarrow{\sigma_2} X_1 \xrightarrow{\sigma_1} X$, что $\varphi = \sigma_1 \dots \cdot \sigma_n$. Очевидно, тогда φ определяет изоморфизм $Y \setminus \cup L_i \simeq X \setminus \cup p_i$, где $L_i \subset Y$ — кривые, а $p_i \in X$ — точки. Если $C \subset X$ — кривая, то замыкание в Y кривой $\varphi^{-1}(C \setminus \cup p_i)$ является кривой; оно обозначается через $\varphi'(C)$.

Теорема 1. Для любой гладкой поверхности X и кривой $C \subset X$ существуют гладкая поверхность Y и отображение $\varphi: Y \rightarrow X$, являющееся произведением σ -процессов, такие что кривая $\varphi'(C)$ — гладкая.

Теорема отражает почти очевидный факт: σ -процесс упрощает особенность. Например, для кривой C с простейшей особенностью в точке p две касательные к ветвям в точке p при σ -процессе должны соответствовать разным точкам вклеиваемой прямой L и, значит, точка разрешается (рис. 10).

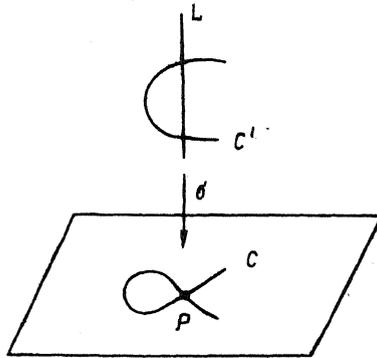
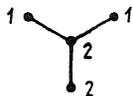


Рис. 10

Доказательство теоремы тоже почти очевидно: надо делать σ -процессы в особых точках кривой C , потом — в особых точках ее собственных прообразов и т. д. Этот процесс оборвется, так как, согласно формулам (9) и (10), число $(C^2) + (C, K)$ при одном σ -процессе уменьшается на $r^2 - r$. С другой стороны, ввиду формулы присоединения ((9) в п. 4.2) $(C^2) + (C, K) \geq -2$ и поэтому процесс оборвется.

Очевидно, кривая $\varphi'(C)$ бирационально изоморфна C . Теорема 1 дает не только явную конструкцию гладкой модели, но и метод более детального анализа особых точек. Точки любой из кривых $(\sigma_1 \dots \sigma_i)'(C)$, отображающиеся в точку $p \in C$, называются *бесконечно близкими точками порядка i* , лежащими над p . С каждой особой точкой p связывается дерево бесконечно близких точек: над p рисуют лежащие над ней бесконечно близкие точки порядка 1, над каждой из них — лежащие

над ней бесконечно близкие точки порядка 2 и т. д., пока не придут к простым точкам. Рядом с каждой точкой пишется ее кратность как особой точки кривой $(\sigma_1 \dots \sigma_i)'(C)$ на поверхности X_i . Ниже изображено дерево бесконечно близких точек для точки $(0,0)$ кривой $y^2 = x^2y^4 + x^4$:



Формула (7) легко приводит к соотношению

$$(C_1, C_2) = \sum_i r_1^{(i)} r_2^{(i)}, \quad (11)$$

где $r_1^{(i)}$ и $r_2^{(i)}$ — кратности кривых C_1 и C_2 во всех их общих бесконечно близких точках.

Применяя (8) из п. 4.2 и свойство (6) σ -процесса из п. 6.1, легко получить для кривой C на гладкой проективной поверхности формулу

$$g_C = \frac{(C^2) + (C, K_X)}{2} + 1 - \sum_i \frac{r_i(r_i - 1)}{2}, \quad (12)$$

где g_C — род нормализации кривой C , а r_i — кратности всех бесконечно близких точек, лежащих над особыми точками кривой C . В частности, для рода нормализации плоской кривой степени n получаем формулу

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \frac{r_i(r_i - 1)}{2}. \quad (13)$$

Б. Свойства отображений. Точка p гладкого многообразия X называется *точкой неопределенности* рациональной функции f , если она принадлежит носителю как дивизора нулей, так и дивизора полюсов функций f : $p \in \text{Supp}(f)_0 \cap \text{Supp}(f)_\infty$. Например, такова точка $(0,0)$ для функции y/x . Точки неопределенности возможны лишь на многообразиях размерности > 1 — это тоже «многомерный эффект». Если X — многообразие над полем вещественных или комплексных чисел $\lim_{q \rightarrow p} f(q)$ для точки неопределенности p функции f может принимать любое значение в зависимости от того, как q стремится к p .

Теорема 2 (теорема о разрешении точек неопределенности). Для рациональной функции f на гладкой поверхности X существуют такие гладкая поверхность Y и отображение $\varphi: Y \rightarrow X$, являющееся произведением σ -процессов, что функция $\varphi^*(f)$ не имеет на Y точек неопределенности.

Например, для функции y/x за φ можно взять σ -процесс в точке $(0,0)$.

Доказательство легко вытекает из того, что при σ -процессе индекс пересечения компоненты дивизора $(f)_0$ с компонентой

дивизора $(f)_\infty$, согласно (9) из п. 6.1, уменьшается, так что конечная последовательность σ -процессов обращает его в 0.

Последний σ -процесс в этой последовательности «разводит» слои отображения f , превращая f в морфизм (рис. 11).

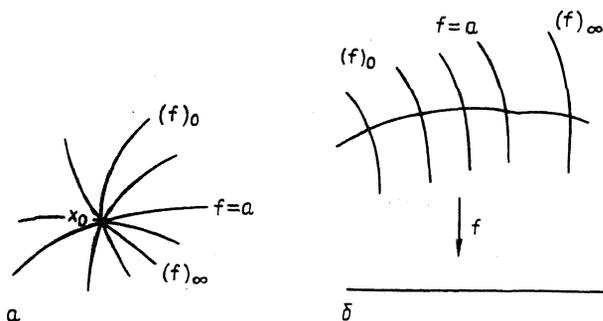


Рис. 11

Так как любое рациональное отображение $X \rightarrow \mathbf{P}^N$ задается набором функций, из теоремы 2 легко вытекает

Следствие 1. Для рационального отображения $f: X \rightarrow \mathbf{P}^N$ гладкой поверхности X в проективное пространство существуют такие гладкая поверхность Y и отображение $\varphi: Y \rightarrow X$, являющиеся произведением σ -процессов, что отображение $f \circ \varphi: Y \rightarrow \mathbf{P}^N$ регулярно.

Например, для $X = \mathbf{A}^2$, $f(v, y) = (x : y) \in \mathbf{P}^1$ за φ можно взять σ -процесс в точке $(0, 0)$.

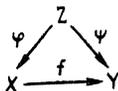
Вот полезное применение этих рассуждений:

Следствие 2. Рациональное отображение $f: X \rightarrow B$ поверхности X на кривую B рода $g(B) > 0$ является морфизмом.

Рис. 11, б) показывает, что иначе мы получили бы морфизм $f: L \rightarrow B$, что невозможно, так как $L \simeq \mathbf{P}^1$, а $g(B) > 0$ (теорема Люрота для кривых!).

Наиболее точный результат относится к структуре бирациональных изоморфизмов:

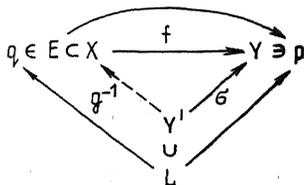
Теорема 3. Для любого бирационального изоморфизма $f: X \rightarrow Y$ гладких проективных поверхностей существуют такие гладкая проективная поверхность Z и отображения $\varphi: Z \rightarrow X$, $\psi: Z \rightarrow Y$, являющиеся произведениями σ -процессов, что диаграмма



коммутативна.

Иными словами, любой бирациональный изоморфизм представляется как композиция σ -процессов и обратных им отображений.

Ввиду следствия 1 теоремы 2 достаточно доказать, что любой бирациональный морфизм $f: X \rightarrow Y$ разлагается в произведение σ -процессов. Доказательство основывается на основной теореме Зарисского ([5]). Если f — не изоморфизм, он стягивает какую-то кривую $E \subset X$ в точку $p \in Y$. Пусть $\sigma: Y' \rightarrow Y$ — σ -процесс в точке p и $L \subset Y'$ — стягиваемая прямая. Надо доказать, что $f = \sigma \circ g$, где g — морфизм; легко проверить, что тогда g стягивает меньше кривых, чем f , и теорема вытекает из теоремы Зарисского. Если бы g не было морфизмом, рациональное отображение g^{-1} стягивало бы некоторую кривую в точку — это следует из нетрудного обобщения теоремы Зарисского на рациональные отображения. Легко видеть, что g^{-1} может стягивать только L . Пусть $g^{-1}(L) = q \in E \subset X$. Мы имеем диаграмму



Она явно противоречива и дифференциал $d_q f: T_q \rightarrow T_p$ имеет ядро, так как f стягивает кривую E ; поэтому его образ содержится в некоторой прямой $l \subset T_p$, в которую при помощи $d_{y'} \sigma$ должно тогда отображаться и $T_{y'}$ для всех точек $y' \in L$, для которых g^{-1} определено. Но достаточно взглянуть на рис. 9, чтобы увидеть, что $(d_{y'} \sigma) T_{y'}$ есть все T_p .

Замечание. Теоремы 1 и 2 верны для многообразий произвольной размерности, хотя их доказательство в общем случае гораздо сложнее (разумеется, под σ -процессами надо тогда понимать раздутия с произвольными гладкими центрами — см. [5], гл. II, § 1). Но аналог теоремы 3 не верен уже для трехмерных многообразий — она принадлежит к числу особенностей двумерного случая.

Пример 1. Стереографическая проекция f из точки p невырожденной квадрики $X \subset \mathbf{P}^3$ является бирациональным изоморфизмом X и \mathbf{P}^2 (см. рис. 1 в § 2). Отображение f не регулярно в точке p и стягивает в точки $x_1, x_2 \in \mathbf{P}^2$ две прямолинейные образующие l_1 и l_2 квадрики X , проходящие через точку p (на сфере, изображенной на рис. 1, они — мнимые). Обратное отображение f^{-1} не регулярно в точках x_1, x_2 и стягивает в точку p прямую, проходящую через x_1 и x_2 . Легко

видеть, что $f = \tau_2 \circ \tau_1 \circ \sigma^{-1}$, где σ — σ -процесс в точке p , а τ_1, τ_2 — σ -процессы в точках x_1 и x_2 .

Пример 2 (бirationальные автоморфизмы проективной плоскости). Пусть $p_0, p_1, p_2 \in \mathbf{P}^2$ — три точки, не лежащие на одной прямой. Выберем систему координат так, что $p_0 = (1:0:0)$, $p_1 = (0:1:0)$, $p_2 = (0:0:1)$, и рассмотрим преобразование $f: \mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}^2$, $f(x_0:x_1:x_2) = (x_1x_2:x_0x_2:x_0x_1)$. Такое преобразование называется *стандартным квадратичным*. Так как $f^2 = (x_0^2x_1x_2:x_0x_1^2x_2:x_0x_1x_2^2) = (x_0:x_1:x_2)$, $f^2 = 1$ (тождественное преобразование); значит, $f^{-1} = f$ и f является бирациональным автоморфизмом. Оно не регулярно в точках p_0, p_1, p_2 и стягивает прямую $x_0 = 0$ в p_0 , прямую $x_1 = 0$ — в p_1 и прямую $x_2 = 0$ — в p_2 . Легко убедиться, что $f = \sigma'_2 \circ \sigma'_1 \circ \sigma'_0 \circ \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1^{-1} \circ \sigma_0^{-1}$, где $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ — σ -процессы в точках p_0, p_1, p_2 . Иными словами, разложение, гарантируемое теоремой 3 для f , имеет вид $\varphi = \sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \sigma_0$, $\psi = \sigma'_2 \circ \sigma'_1 \circ \sigma'_0$, где $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ — σ -процессы в точках p_0, p_1, p_2 , а $\sigma'_0, \sigma'_1, \sigma'_2$ — σ -процессы, стягивающие собственные прообразы прямых $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ (рис. 12).

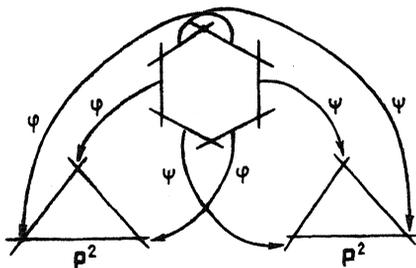


Рис. 12

Квадратичные преобразования интересны тем, что дают пример бирациональных, но не регулярных автоморфизмов плоскости \mathbf{P}^2 (легко доказать, что единственные автоморфизмы проективной плоскости — это проективные преобразования). Их роль видна из следующего результата:

Теорема 4 (теорема Нётера). Любой бирациональный автоморфизм плоскости разлагается в произведение проективного преобразования и квадратичных преобразований (соответствующих разным выборам точек p_0, p_1, p_2).

Теорема Нётера дает нам образующие группы бирациональных автоморфизмов плоскости. Можно указать и определяющие соотношения между этими образующими ([4], [9]).

6.3. Стягивание. В предшествующем изложении σ -процесс играл столь фундаментальную роль, что естественно попытать-

ся найти его характеристику, исходящую из каких-то общих свойств. Это делает следующей критерий стягиваемости Кастельнуово—Энриквеса ([42]):

Теорема 5. Гладкая кривая C на гладкой поверхности Y тогда и только тогда стягивается в неособую точку $p \in X$ (т. е. существует бирациональный морфизм $f: Y \rightarrow X$ на гладкую поверхность X с $f(C) = p$, являющийся изоморфизмом $Y \setminus C$ и $X \setminus p$), когда $C \simeq \mathbf{P}^1$ и $(C^2) = -1$.

Морфизм f строится в виде φ_D , где D — некоторый дивизор (ср. п. 3.1). Он будет стягивать кривую C в точку, если $(C, D) = 0$, — ведь D есть прообраз гиперплоскости сечения поверхности $\varphi_D(Y)$, которое мы можем выбрать не проходящим через точку p , если $\varphi_D(C) = p$. Поэтому, выбирая подходящий очень обильный дивизор H , полагают $D = H + mC$, где $m = (H, C)$. Прежде всего надо добиться, чтобы отображение φ_D было морфизмом, т. е. слои пучка $\mathcal{O}(D)$ порождались его сечениями. Это очевидно в точках $x \notin C$. Чтобы доказать это для $x \in C$, устанавливается, что ограничение $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(D)) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_Y(D)|_C)$ является эпиморфизмом: пучок $\mathcal{O}(D)|_C$ соответствует дивизору степени 0 на \mathbf{P}^1 и, значит, изоморфен \mathcal{O}_C . Для доказательства эпиморфности надо выбрать H так, что $H^1(Y, \mathcal{O}(H)) = 0$, — это всегда возможно за счет замены H на nH , $n \gg 0$, согласно общим свойствам когомологий пучков (КАМ или [42]). Тогда точные последовательности $0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(H + (k-1)C) \rightarrow \mathcal{O}_Y(H + kC) \rightarrow \mathcal{O}_C(H + kC) \rightarrow 0$ для $k = 0, \dots, m$, легко дают нужное утверждение, так как когомологии пучков, соответствующих дивизорам на $C \simeq \mathbf{P}^1$, нам известны.

Морфизм φ_D , очевидно, стягивает C и является изоморфизмом вне C , так как там $\mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{O}(H)$, а H очень обильен.

Это, однако, еще не конец доказательства, так как не доказано, что точка $p = \varphi_D(C)$ на поверхности $X = \varphi_D(Y)$ является простой. Предшествующие рассуждения даже не используют того, что $(C^2) = -1$, — достаточно условия $(C^2) < 0$. На самом деле, нетрудно точно описать получающуюся точку p (вообще говоря, особую) при любом $(C^2) = -n$. Ее пополненное локальное кольцо $\hat{\mathcal{O}}_p$ изоморфно кольцу формальных степенных рядов вида $\sum_{i+j=0(n)} a_{ij} t_1^i t_2^j$. Поэтому оно регулярно лишь при $(C^2) = -1$.

Мы знаем, что построенное сжатие $f: Y \rightarrow X$ совпадает с σ -процессом (теорема 3).

Кривые C , удовлетворяющие условиям теоремы 5, т. е. такие, что $C \simeq \mathbf{P}^1$, $(C^2) = -1$, называются (-1) -кривыми или *исключительными кривыми первого рода*.

Пример 3. Пусть $f: X \rightarrow \mathbf{P}^2$ — раздувание двух точек на плоскости \mathbf{P}^2 . Если l — прямая на \mathbf{P}^2 , проходящая через раздуваемые точки а l' — ее собственный прообраз, то $(l'^2) = -1$. Теорема 5 гарантирует существование сжатия $g: X \rightarrow$

$\rightarrow Y, g(I')=p$. Мы его, однако, уже знаем: Y — квадрика (пример 1 в п. 6.2).

Пример 4. Пусть C — кривая рода 2 с уравнением $y = f(x)$, $\deg f = 5$, $X = C \times C$, $Y = X/G$, где $G = \{1, g\}$, $g(c_1, c_2) = (c_2, c_1)$, Γ — кривая $\{(c, i(c))\}$, где i — автоморфизм $(x, y) \mapsto (x, -y)$, и L — ее образ на Y . Согласно примеру 5 в п. 4.2. $L \simeq \mathbf{P}^1$ и $(L^2) = -1$ (формула (13) в п. 4.2). Поэтому кривая L стягиваема при помощи σ -процесса. Точки получающейся поверхности взаимно однозначно параметризуют элементы группы $Cl^0(C) = Pic^0 C$ (ср. пример 5 из § 2). Она совпадает с поверхностью $I(C)$ — якобианом кривой C .

Пример 5. Пусть $f: X \rightarrow B$ — линейчатая поверхность (пример 4 из § 2), $F_b = f^{-1}(b)$ — один из ее слоев и $x \in F_b$ — точка на нем. Пусть $\sigma: X' \rightarrow X$ — σ -процесс в точке x . Морфизм $f' = f \circ \sigma: X' \rightarrow B$ имеет слой $(f')^{-1}(b') = f^{-1}(b')$ при $b' \neq b$, а $(f')^{-1}(b) = \sigma'(F_b) + L$, где $L = \sigma^{-1}(x)$. Так как $F_b^2 = 0$, по формуле (8) в п. 4.2 $(\sigma'(F_b))^2 = -1$, а так как $(\sigma'(F_b)) \simeq F_b \simeq \mathbf{P}^1$, по критерию стягиваемости Кастельнуово — Энриквеса мы можем стянуть кривую $\sigma'(F_b)$ в точку при помощи σ -процесса $\sigma': X' \rightarrow \bar{X}$. Легко видеть, что $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow B$, где $\bar{f} = f' \circ (\sigma')^{-1}$, является морфизмом, а слой его $(\bar{f})^{-1}(b)$ совпадает с $\sigma'(L) \simeq \mathbf{P}^1$. Таким образом, \bar{X} — опять линейчатая поверхность, а $\varphi = \sigma' \circ \sigma^{-1}: X \rightarrow \bar{X}$ является бирациональным преобразованием, но не изоморфизмом. Это бирациональное преобразование называется элементарным и обозначается через elm_x .

Теорема 5 подводит к важной проблеме стягивания: какие конфигурации кривых $E \subset Y$ можно стянуть в точку при помощи морфизма $f: Y \rightarrow X$, являющегося изоморфизмом вне E ? Теорема 5 дает возможность получить ответ в случае, когда точка $p = f(E)$ — простая, но для особых точек ситуация гораздо тоньше. Важное необходимое условие заключается в том, что если C_1, \dots, C_r — набор стягиваемых кривых, то матрица (C_i, C_j) отрицательно определена. Доказательство удивительно просто. Легко построить такой дивизор $D = \sum_{i=1}^r m_i C_i$, $m_i > 0$, что $(D, C_i) < 0$ для $i = 1, \dots, r$. (Надо взять кривую $H \subset Y$, отличную от всех C_i и пересекающую все их, и найти функцию g , регулярную в точке p , в которую кривые C_i стягиваются, и равную 0 на кривой $f(H)$. Тогда $f^*(g) = \sum m_i C_i + F$, где $(C_i, F) > 0$, $i = 1, \dots, r$, и можно взять $D = \sum m_i C_i$.) Нужный результат вытекает из следующего утверждения линейной алгебры:

Лемма. Если в матрице $A = (\alpha_{ij})$ $\alpha_{ij} > 0$ при $i \neq j$ и вектор Av имеет отрицательные координаты для некоторого вектора v с положительными координатами, то A отрицательно определена.

При $k = \mathbb{C}$ это необходимое условие является также и достаточным, но только X будет, вообще говоря, комплексным пространством, не обязательно алгебраическим. Над произвольным полем k этот признак тоже достаточен, но лишь в категории алгебраических пространств.

Особые точки поверхностей не относятся к теме настоящего обзора, однако об одном типе особых точек мы должны сказать, так как они естественно возникают при рассмотрении гладких поверхностей.

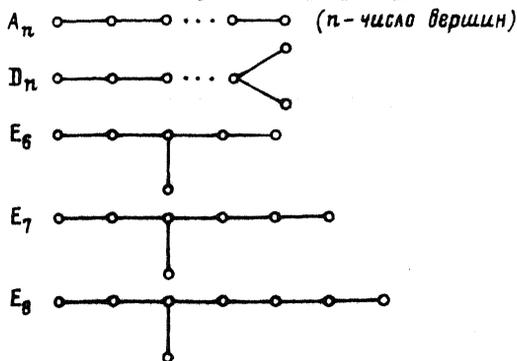
Точка $x \in X$ нормальной поверхности называется *особой точкой* (или *особенностью*) *дю Валя*, если существуют гладкая поверхность Y и морфизм $f: Y \rightarrow X$, стягивающий в точку p кривые C_1, \dots, C_r (и только их), причем $(C_i, K_Y) = 0, i = 1, \dots, r$.

(Такие точки называются также *особенностями Клейна*, *двойными рациональными особыми точками*, *простейшими* или *каноническими особенностями*.)

Поверхность Y (а также соответствующий морфизм $f: Y \rightarrow X$) называется *минимальным разрешением* особой точки x . Если поверхность X имеет несколько особых точек дю Валя, то существует общее их минимальное разрешение $Y \rightarrow X$.

Можно показать, что из нормальности особой точки, в которую стягиваются кривые C_i , следует связность множества $\bigcup C_i$, т. е. $\{C_i\}$ нельзя разбить на две группы так, что $(C_i, C_j) = 0$, если C_i и C_j лежат в разных группах.

Как мы видели, матрица (C_i, C_j) отрицательно определена; в частности, $(C_i^2) < 0$. Условие $(C_i, K_Y) = 0$ в сочетании с соотношением (9) из п. 4.2 легко дают, что кривые C_i — гладкие, изоморфны \mathbb{P}^1 и $(C_i^2) = -2$. Такие кривые называются *(-2)-кривыми*. Из того, что $(C_i + C_j)^2 < 0$, следует, что $(C_i, C_j) \leq 1$ при $i \neq j$, т. е. если C_i и C_j пересекаются, то трансверсально. Матрицы с такими условиями давно встречались и были перечислены в теории корней простых алгебр Ли. Ответ описывается при помощи графов, в которых вершины соответствуют кривым C_i и соединяются отрезком, если соответствующие кривые пересекаются. Возможны лишь следующие графы ([32]):



(При $k=C$ граф однозначно определяет достаточно малую окрестность точки p как комплексное пространство.) Их можно задать уравнениями ([22]):

$$A_n : x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0,$$

$$D_n : x^2 + y^2 z + z^{n-1} = 0, n \geq 4,$$

$$E_6 : x^2 + y^3 + z^5 = 0,$$

$$E_7 : x^2 + y^3 + yz^3 = 0,$$

$$E_8 : x^2 + y^3 + z^7 = 0.$$

Простейшей особенностью дю Валя является A_1 — это квадратичный конус.

Значение особенностей дю Валя заключается в том, что они «не влияют на канонический класс». Например, если в плоском семействе $\{X_t\}$ поверхностей все слои, кроме X_0 , гладкие, а слой X_0 имеет только особенности дю Валя, то существуют такая гладкая поверхность Y и бирациональный морфизм $Y \rightarrow X_0$, что основные инварианты поверхности Y : геометрический род p_g , q и (K^2) — те же, что и для X_t при $t \neq 0$. Поэтому поверхности с особенностями дю Валя часто естественно допускать в семействах поверхностей как «безобидные» вырождения. Это резко отличает поверхности от кривых, для которых появление особенности всегда понижает род нормализации.

Более того, на поверхностях с особенностями дю Валя можно развить теорию дивизоров (в частности, определить канонический дивизор) и теорию индексов пересечений, правда только со значениями в поле рациональных чисел \mathbb{Q} . Например, пусть $Q^0 \subset \mathbb{P}^3$ — квадратичный конус с вершиной $0 \in Q^0$. Тогда точка 0 является простейшей особенностью дю Валя в том смысле, что минимальное разрешение $Q' \rightarrow Q^0$ достигается вклеиванием только одной (-2) -кривой. Если L — прямолинейная образующая конуса Q^0 , то (L^2) можно определить следующим образом: ясно, что $2L$ эквивалентно гиперплоскому сечению H конуса Q^0 ; так как $(H^2) = 2$, $(2L, 2L) = 2$ и, следовательно, $(L^2) = \frac{1}{2}$.

§ 7. Минимальные модели

7.1. Основная теорема. Пример σ -процесса показывает, что для гладких проективных поверхностей, в отличие от кривых, существуют бирациональные изоморфизмы, не являющиеся изоморфизмами. И не только σ -процесс $X' \rightarrow X$ не обязательно является изоморфизмом, но и, вообще, поверхности X' и X могут быть не изоморфны: например, согласно формуле (4) из п. 6.1, $\rho_{X'} = \rho_X + 1$. Поэтому возникает задача (в случае кривых — три-

виальная): как с точностью до изоморфизма описать все бирационально изоморфные друг другу гладкие проективные поверхности?

Все такие поверхности X_α называются *гладкими моделями* общего для них поля $k(X_\alpha)$. Очевидно, множество моделей поля $k(X)$ всегда бесконечно: производя все новые σ -процессы, мы будем каждый раз получать неизоморфные поверхности, так как число Пикара ρ каждый раз будет возрастать. Среди этого бесконечного множества желательно выбрать, по возможности канонически, некоторые специальные модели, для чего вводится

О п р е д е л е н и е. Гладкая проективная поверхность X называется *минимальной моделью*, если всякий бирациональный морфизм $f: X \rightarrow Y$ на гладкую поверхность Y является изоморфизмом.

Согласно теореме 3 из п. 6.2, морфизм f разлагается в произведение σ -процессов, а по критерию стягиваемости Кастанельюво—Энриквеса (теорема 5 из п. 6.3) это возможно только, если на X есть исключительная (-1) -кривая. Таким образом, минимальные модели — это поверхности, не содержащие (-1) -кривых.

Если поверхность X содержит (-1) -кривую L , то, согласно той же теореме, существует σ -процесс $X \rightarrow X_1$, стягивающий L в точку. Теперь то же рассуждение можно применить к X_1 и т. д. Этот процесс оборвется, так как на каждом шаге число Пикара ρ понижается на 1. В результате мы придем к минимальной модели, т. е. любая гладкая проективная поверхность получается из минимальной модели конечным числом σ -процессов.

Таким образом, наша задача сводится к описанию минимальных моделей, бирационально изоморфных друг другу. Однако и такие модели не единственны. Например, мы знаем, что плоскость \mathbf{P}^2 и квадрика $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ бирационально изоморфны (пример 1 из § 2). Обе они — минимальные модели, так как на них нет кривых C с $(C^2) < 0$. Для \mathbf{P}^2 это следует из того, что $N_{\mathbf{P}^2} = \mathbf{Z}h$, а для $C = nh$ $(C^2) = n^2$; для квадрики же это следует из примера 5 в п. 5.2 (рис. 3). Более того, все рациональные линейчатые поверхности, кроме F_1 , построенные в примере 4 из § 2, являются минимальными моделями, так как на F_n существует единственная кривая C с $(C^2) < 0$, это — построенное в примере 4 из § 2 сечение S , $(S^2) = -n$. Мы получаем бесконечное число неизоморфных минимальных моделей. Используя понятие элементарного преобразования (пример 5 из п. 6.3), можно показать, что так обстоит дело и для любых линейчатых поверхностей: для каждой такой поверхности существует бесконечно много бирационально изоморфных ей и не изоморфных друг другу минимальных моделей. Более подробно теория линейчатых поверхностей будет изложена в § 13.

Таким образом, возникают две задачи: 1) описание множества минимальных моделей и 2) описание бирациональных изоморфизмов между ними. Мы начнем с первой. Выше были приведены очень частные примеры минимальных моделей: \mathbf{P}^2 и линейчатые поверхности. Теперь опишем гораздо более общий класс («общий случай»). Это описание связано со следующим полезным понятием:

О п р е д е л е н и е. Дивизор D (и содержащий его класс $d \in \text{Pic } X$) называется *численно эффективным*, если $(D, D') \geq 0$ для любого $D' \geq 0$.

(Очевидно, это условие достаточно проверить лишь для кривых D' .) Иными словами, образ дивизора D в группе N_X должен принадлежать выпуклому конусу \bar{A} , введенному в § 5. Как там было доказано, для такого дивизора всегда $(D^2) \geq 0$.

Связь с понятием минимальной модели основана на очевидном замечании: если на поверхности X класс K_X численно эффективен, то она является минимальной моделью. Действительно, для (-1) -кривой L из формулы присоединения следует, что $(L, K_X) = -1$.

Поразительно, что приведенные примеры исчерпывают все типы минимальных моделей:

Т е о р е м а 1. Если X — минимальная модель, то или ее канонический класс численно эффективен, или она изоморфна либо линейчатой поверхности, либо плоскости \mathbf{P}^2 .

Большая часть настоящего параграфа посвящена описанию идей, лежащих в основе доказательства этой фундаментальной теоремы. Оно базируется на более детальном изучении выпуклых конусов \bar{E} и Ω_+ , описанных в § 5.

Так как всякий дивизор есть линейная комбинация кривых, конус \bar{E} совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой конуса Ω_+ и множества классов $s \in N_X$, содержащих кривые C с $(C^2) < 0$. Такие кривые, а равно и соответствующие им векторы в N_X и $N_X \otimes \mathbf{R}$, называются *исключительными*. Они обладают важным свойством, которое отражает жесткость исключительных кривых (ср. § 4):

Лемма 1. Любой исключительный вектор в $N_X \otimes \mathbf{R}$ имеет коническую окрестность, в которой нет других исключительных векторов.

(Другими словами, в проективном пространстве $\mathbf{P}(N_X \otimes \mathbf{R})$ точки, соответствующие исключительным векторам, дискретны в дополнении к множеству $\mathbf{P}(\bar{\Omega}_+)$, где $\bar{\Omega}_+$ — замыкание Ω_+ .)

Действительно, если C — кривая с $(C^2) < 0$, то такой конической окрестностью является полупространство $(C, D) < 0$, так как для любой кривой $C' \neq C$ $(C, C') \geq 0$ (рис. 13).

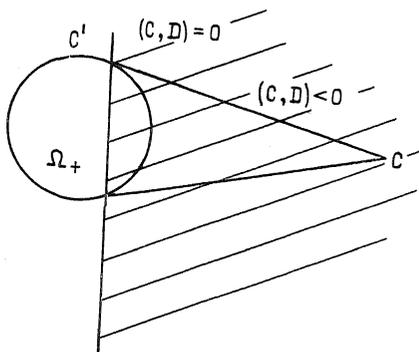


Рис. 13

Однако, как мы уже говорили, число исключительных кривых может быть бесконечным и тогда они накапливаются к границе конуса $\bar{\Omega}_+$. В любом случае, объединение $\bar{\Omega}_+$ и всех исключительных векторов замкнуто, откуда следует, что конус \bar{E} может быть описан просто как выпуклая оболочка исключительных векторов и конуса $\bar{\Omega}_+$. Очевидно, любой исключительный вектор является *крайним* для конуса \bar{E} , т. е. не может быть представлен в виде $\alpha x + \beta y$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x, y \in \bar{E}$.

В случае минимальных моделей ситуация может быть еще уточнена. Это основывается на следующем простом замечании:

Лемма 2. Исключительная кривая C , для которой $(C, K_X) < 0$, является (-1) -кривой.

Утверждение сразу вытекает из формулы присоединения. Так как $(C^2) + (C, K_X) \geq -2$, в нашем случае $(C^2) = -1$ и, ввиду (10) из п. 4.2, $g(C) = 0$ и C гладка, т. е. $C \simeq \mathbf{P}^1$.

Следствие. Для минимальной модели полупространство $(K_X, x) < 0$ не содержит исключительных векторов.

7.2. Доказательство основной теоремы. Теперь можно перейти к доказательству теоремы 1. Предположим, что канонический класс K_X для минимальной модели X не численно эффективен и рассмотрим два случая: I. $\rho_X \geq 2$ (в этом случае мы докажем, что X — линейчатая поверхность), II. $\rho_X = 1$ (мы докажем, что тогда $X \simeq \mathbf{P}^2$).

I. Класс K_X не численно эффективен и $\rho_X \geq 2$.

Чтобы доказать, что X — линейчатая поверхность, нам надо указать на ней слои $C_b = \varphi^{-1}(b)$, $b \in B$, ее расслоения $\varphi: X \rightarrow B$, причем $C_b \simeq \mathbf{P}^1$. Очевидно, $(C_b^2) = (C_b, C_b') = 0$ (так как все C_b

алгебраически эквивалентны). Из формулы присоединения ((8) в п. 4.2) следует, что $(C_b, K) = -2$. Наоборот, если для некоторой неприводимой кривой $C \subset X$ $(C^2) = 0$ и $(C, K) < 0$, то, рассуждая как при доказательстве леммы 2, мы получим, что $(C, K) = -2$, $g(C) = 0$ и $C \simeq \mathbf{P}^1$. Это объясняет, почему ключом к доказательству теоремы в случае I является отыскание кривой C с $(C^2) = 0$, $(C, K) < 0$. Идея доказательства будет яснее, если разбить доказательство на две части:

А. $\rho_X = 2$. В этом случае конус \bar{E} — просто угол (рис. 14).

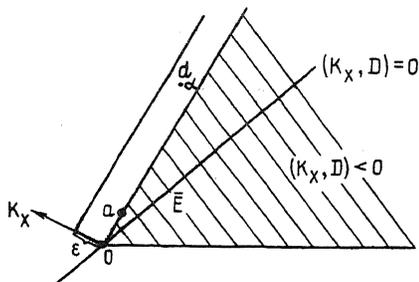


Рис. 14

Так как класс K не численно эффективен, некоторая часть угла \bar{E} попадает в полуплоскость $(K, D) < 0$. Как мы видели, в этой полуплоскости нет исключительных кривых и потому граничная прямая $0a$ принадлежит углу \bar{A} , т. е. $(a^2) = 0$. Так как $(a, K) < 0$, нам остается только доказать, что $a \in N_X \otimes \mathbf{Q}$ (мы знаем лишь, что $a \in N_X \otimes \mathbf{R}$). Если бы это было не так, то для любого $\varepsilon > 0$ существовали бы векторы $d_\alpha = \alpha a + \varepsilon K \in N_X$ со сколь угодно большим α . Выберем ε так, что $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Тогда, как легко видеть, для достаточно большого α

$$\frac{(d_\alpha^2) - (d_\alpha, K)}{2} + 1 > 0, \quad (1)$$

$$(d_\alpha, h) > 0, \quad (2)$$

$$(d_\alpha^2) < 0, \quad (3)$$

где h — некоторый обильный класс. Из неравенства Римана — Роха ((3) в п. 5.1), (1) и (2) следует, что $l(d_\alpha) > 0$, а это приводит к противоречию со следствием леммы 2.

Б. $\rho_x > 2$. Хотя наше рассуждение имеет совершенно общий характер, мы изобразим на рис. 15 случай $\rho_x = 3$, точнее — проективную плоскость $\mathbf{P}(N_x \otimes \mathbf{R})$.

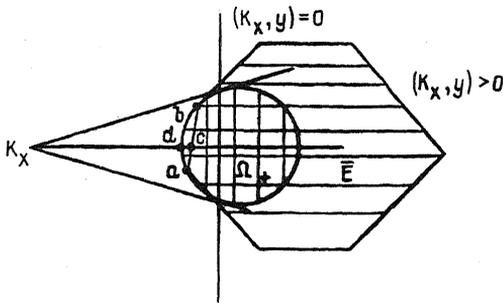


Рис. 15

По условию прямая $(K, y) = 0$ содержит внутренние точки выпуклого множества $\mathbf{P}(\bar{E})$. Согласно следствию леммы 2, полупространство $(K, y) < 0$ не содержит крайних точек этого множества, соответствующих исключительным кривым, а поэтому часть (a, b) его границы в этом полупространстве совпадает с границей сферы $\mathbf{P}(\Omega_+)$. Для всех точек d части (a, b) этой сферы $(d^2) = 0$, $(K, d) < 0$ и остается только найти точку, соответствующую целочисленному вектору $d \in N_x$. Рассмотрим точку, соответствующую вектору $c \in N_x$, очень близкую к части (a, b) и находящуюся внутри сферы $\mathbf{P}(\Omega_+)$. К плоскости, натянутой в $N_x \otimes \mathbf{R}$ на c и K , применимы все рассуждения из пункта А, откуда следует, что пересечение этой плоскости с частью (a, b) соответствует классу $d \in N_x$.

Итак, в обоих случаях, мы нашли дивизор D , который соответствует крайнему лучу конуса \bar{E} и для которого $(D^2) = 0$, $(K, D) < 0$. Кроме того, $(D, H) \geq 0$ для обильного H и из теоремы об индексе (теорема 1 из п. 5.2) следует, что $(D, H) > 0$. Из неравенства Римана — Роха опять следует, что $l(nD) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Если линейная система $|nD|$, $n \gg 0$, имеет подвижную часть D' и $nD = D' + D^0$, где D^0 — неподвижная часть, то из того, что D — крайний луч, вытекает, что D, D' и D^0 пропорциональны; мы можем заменить D на D' и считать, что $D^0 = 0$. Условие $(D^2) = 0$ показывает, что φ_{nD} — морфизм, а образ его — кривая B' . К этому морфизму можно применить разложение Штейна (§ 2), т. е. представить его в виде $\pi \cdot f$, где $\pi: B \rightarrow B'$ — конечный морфизм, а $f: X \rightarrow B$ имеет связные слои. Так как для слоя F $(F^2) = 0$ и $(F, K) < 0$, имеем, как и выше, $p_a(F) = 0$. Если F неприводим, получаем отсюда $F \simeq \mathbf{P}^1$. Если F приводим, то все его компоненты F_i пропорциональны в N_x , так как класс F определяет крайний луч. Следовательно, $(F_i, F_j) = 0$ при всех

i, j , что противоречит связности слоев. Поэтому все слои $f: X \rightarrow B$ неприводимы и изоморфны \mathbf{P}^1 .

Заметим, что для линейчатой поверхности всегда $\rho_X = 2$, так что, после того как случай Б разобран, можно сказать, что он не реализуется.

II. Класс K_X не численно эффективен и $\rho_X = 1$. В этом случае все наши рассуждения и рисунки вырождаются. Как ни странно, рассуждение в этом, самом простом случае — наименее прямое. Мы укажем основные идеи лишь в случае $k = \mathbf{C}$ (т. е. для характеристики 0). По условию $N_X = \mathbf{Z}h$, где h можно считать обильным, а $K = -nh$, $n > 0$. Отсюда $\rho_g = l(K) = 0$ и теорема Лешпеца (пример 5 из п. 3.3) показывает, что любой цикл — алгебраический, т. е. $b_2 = \rho_X = 1$. По теореме Кодаиры (п. 5.1) $h^1(X, \mathcal{O}(K)) = 0$, откуда, по двойственности, $h^1(X, \mathcal{O}) = 0$, т. е. $q = 0$ и $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$. Формула Нётера ((2) из п. 5.1) дает $(K^2) = 9$. Если $S_X \simeq H^2(X, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z} \oplus P$, где P — конечная группа, то в S_X можно так выбрать свободную образующую, что ее образ l в N_X тоже является свободной образующей и $(l^2) = 1$ (по двойственности Пуанкаре), причем $K_X = -3l$. Мы имеем ту же ситуацию, что и на \mathbf{P}^2 ; естественно предположить, что отображение f_L устанавливает изоморфизм $X \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^2$, в котором L соответствует прямой. Что это действительно так, устанавливается при помощи простой комбинации стандартных рассуждений, которые мы уже не раз применяли. Это заканчивает доказательство теоремы 1.

Заметим, что и обратно: если $X = \mathbf{P}^2$ или X — линейчатая поверхность, то класс K_X не является численно эффективным. В первом случае это следует из того, что $K_X = -3L$, где L — прямая. Во втором, если C — прямолинейная образующая линейчатой поверхности, т. е. слой морфизма $X \rightarrow B$ на кривую B , то $(C^2) = 0$ и, так как $C \simeq \mathbf{P}^1$, по формуле присоединения ((8) из п. 4.2) $(K_X, C) = -2$.

7.3. Единственность минимальной модели. Теперь перейдем ко второму из поставленных в начале параграфа вопросов.

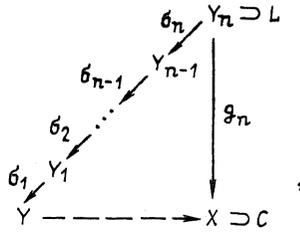
Рациональные, т. е. бирационально изоморфные \mathbf{P}^2 , и линейчатые поверхности будут разобраны в § 13. Там будет доказано, что единственные рациональные линейчатые поверхности — это поверхности F_n (пример 4 из § 2); все они минимальны, кроме F_1 , и не изоморфны друг другу. Линейчатая поверхность $X \rightarrow B$ с $g(B) > 0$ не рациональна, так как для нее $q = g(B) > 0$. Структура линейчатой поверхности, т. е. морфизм $f: X \rightarrow B$, однозначно определяется поверхностью X — можно показать, что f совпадает с отображением Альбанезе $\alpha: X \rightarrow \text{Alb } X$, а $B = \alpha(X)$. Таким образом, линейчатые поверхности с разными базами B не могут быть бирационально изоморфными. Наоборот, все поверхности с одной базой B бирационально изоморфны друг другу и, в частности, $\mathbf{P}^1 \times B$. Это следует из локальной тривиальности расслоения $X \rightarrow B$, которая будет доказана в § 13. Там же

будет доказано, что все эти поверхности получаются из $\mathbf{P}^1 \times B$ последовательностью элементарных преобразований (пример 5 в п. 6.3).

Остается самый большой класс — поверхности с численно эффективным K_X . Замечательным образом эти поверхности не могут быть бирационально изоморфными ни поверхностям двух других классов, ни друг другу (если, конечно, они не изоморфны).

Теорема 2. Если канонический класс поверхности X численно эффективен, то любое бирациональное отображение $Y \dashrightarrow X$ является бирациональным морфизмом.

Если $\varphi: Y \dashrightarrow X$ не является бирациональным морфизмом, то, согласно теореме о разрешении точек неопределенности (теорема 2 в п. 6.2), существует такая последовательность σ -процессов



что g_n — морфизм. Пусть $L \subset Y_n$ — кривая, стягиваемая σ -процессом σ_n . Если $g_n(L)$ — точка, то, как легко видеть, σ -процесс σ_n был излишним, т. е. уже g_{n-1} — морфизм. Поэтому можно предполагать, что $g_n(L) = C$ — кривая. Разлагая g_n в произведение σ -процессов (по теореме 3 в п. 6.2) и применяя формулу (9) в п. 6.1, мы получим $L = g'_n(C)$ и $(L, K_{Y_n}) \geq (C, K_X)$. Так как K_X численно эффективен, $(C, K_X) \geq 0$ и, значит, $(L, K_{Y_n}) \geq 0$. Это противоречит тому, что для (-1) -кривой L $(L, K_{Y_n}) = -1$ (по формуле присоединения в п. 4.2).

С л е д с т в и е 1. Если K_X и K_Y численно эффективны, то любой бирациональный изоморфизм $Y \dashrightarrow X$ является изоморфизмом.

Действительно, по теореме 2. отображение $Y \dashrightarrow X$ и обратное к нему $X \dashrightarrow Y$ являются бирациональными морфизмами, т. е. $Y \supset X$ — изоморфизм.

С л е д с т в и е 2. Поверхность X с численно эффективным K_X бирационально не изоморфна ни \mathbf{P}^2 , ни любой линейчатой поверхности.

Действительно, пусть Y обозначает \mathbf{P}^2 или некоторую линейчатую поверхность и предположим, что существует бирациональный изоморфизм $\varphi: Y \dashrightarrow X$. По теореме 2 φ является бирациональным морфизмом. Так как Y — минимальная поверх-

ность (на Y нет (-1) -кривых, кроме F_1 , которые бирационально изоморфны \mathbf{P}^2), то $\varphi: Y \rightarrow X$ — изоморфизм, что невозможно, так как K_X численно эффективен, а K_Y , очевидно, нет.

Рассматриваемые нами понятия и результаты имеют «относительные» аналоги для расслоений на кривые $f: X \rightarrow B$. В этом случае рассматриваются только морфизмы $\varphi: Y \rightarrow X$ расслоений $f: X \rightarrow B$ и $g: Y \rightarrow B$, перестановочные с отображениями f и g , т. е. такие, что треугольник

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varphi} & X \\ g \searrow & & \nearrow f \\ & B & \end{array}$$

коммутативен. При этом, если Y содержит (-1) -кривую L , то ее стягивание в нашей категории не всегда возможно, так как после стягивания отображение $Y' \rightarrow B$ может перестать быть морфизмом. (Например, если Y получилось разрешением точек неопределенности отображения $f': Y' \rightarrow \mathbf{P}^1$.) Однако, если L лежит в слое морфизма g , то, как легко убедиться, после ее стягивания мы опять получаем морфизм $g': Y' \rightarrow B$. В связи с этим расслоение $X \rightarrow B$ называется *относительно минимальной моделью*, если в его слоях нет (-1) -кривых. Дальше мы будем это предполагать.

Дивизор D на X называется *относительно численно эффективным*, если $(D, C) \geq 0$ для любой кривой C , являющейся компонентой слоя.

Лемма 3. Если $f: X \rightarrow B$ — относительно минимальная модель и род общего слоя этого расслоения больше 0, то канонический класс K_X относительно численно эффективен.

Так как для любых $b, b' \in B$ $F_b \cong F_{b'}$, для любой компоненты C слоя F_b $(F_b, C) = (F_{b'}, C)$. Пусть $F_b = tC + \sum m_i C_i$, $t > 0$, $m_i \geq 0$, $C \neq C_i$. Тогда $m(C^2) = -\sum m_i (C_i, C) \leq 0$, т. е. $(C^2) \leq 0$ и $(C^2) = 0$ только, если $F_b = tC$ (здесь мы пользуемся связностью слоя). Из формулы присоединения ((9) в п. 4.2) следует, что $(F_b, K_X) \geq 0$ (так как $(F_b^2) = 0$, а род общего слоя > 0). Поэтому, если $F_b = tC$, то и $(C, K_X) \geq 0$, а если $F_b \neq tC$, то $(C^2) < 0$, и тогда $(C, K_X) \geq 0$ по лемме 2, так как иначе C была бы (-1) -кривой, содержащейся в слое.

Теперь почти очевиден «относительный» аналог теоремы 2:

Теорема 3. Если расслоение $f: X \rightarrow B$ — относительно минимальная модель и род общего слоя > 0 , то любое бирациональное отображение $\varphi: Y \rightarrow X$ расслоения $g: Y \rightarrow B$, перестановочное с f и g , является бирациональным морфизмом.

Действительно, φ является бирациональным изоморфизмом общих слоев G_i и F_i расслоений Y и X (на кривых над полем $k(B)$). Но для гладких кривых бирациональный изоморфизм является изоморфизмом. В частности, φ определяет изоморфизм $\text{Div } G_i \cong \text{Div } F_i$ и поэтому φ и φ^{-1} могут стягивать на Y или X

только кривые, лежащие в слоях. Но на таких кривых канонический класс K численно эффективен, согласно лемме 3, так что доказательство теоремы 2 дословно сохраняется.

Ясно также, что справедлив и относительный аналог следствия 1 (аналог следствия 2 тривиален).

З а м е ч а н и е. В этом параграфе мы следовали идее Мори, предложившего использовать конус эффективных 1-циклов $\overline{NE}(X)$ (см. замечание в конце § 5) для построения теории минимальных моделей алгебраических многообразий в произвольной размерности $n \geq 2$ ([55]). Если K_X численно эффективен, то X является минимальной моделью по определению. В случае, когда K_X не является численно эффективным, «отрицательная часть» $\{z \in \overline{NE}(X) \mid (z, K_X) < 0\}$ конуса $\overline{NE}(X)$ оказывается довольно просто устроенной: она является рациональным полиэдром, т. е. порождается дискретным множеством крайних векторов (экстремальных лучей). С каждым таким крайним вектором R связан морфизм $\varphi_R: X \rightarrow Y$ «стягивания» R . В случае поверхностей это — либо стягивание (-1) -кривой, либо морфизм, задающий структуру линейчатой поверхности $X \rightarrow B$, либо $X = \mathbf{P}^2$ и $\overline{NE}(X) = \mathbf{R}_+$ — положительная полупрямая. В случае $n \geq 3$ картина намного сложнее: при стягивании $\varphi_R: X \rightarrow Y$ многообразия Y может приобретать особенности, хотя и не очень сложные, и для того, чтобы продолжать процесс стягивания, нужно иметь аналогичную теорию на многообразиях с такими особенностями. Оказалось, что это возможно, однако возникла еще одна трудность: некоторые стягивания крайних векторов на особых многообразиях могут выводить за пределы применимости теории. Здесь также был найден выход, приведший к успеху (по крайней мере, в размерности 3). Следует отметить, что возникающие при таком способе построения минимальные модели, как правило, имеют особенности начиная с размерности 3; в случае поверхностей, как мы видели, минимальные модели не особы и результаты совпадают с классическими (обо всем этом см., например, [55] и [49]).

§ 8. Бирациональная классификация

8.1. Основные результаты. Приступим к выполнению программы, намеченной в § 1, — классификации поверхностей по их канонической размерности $\kappa = 2, 1, 0, -\infty$ и числовым инвариантам (K^2) , q , p , P_n . Эта классификация, являющаяся центральным результатом теории поверхностей, была одним из высших достижений итальянской школы алгебраической геометрии. Начиная с этого параграфа и до конца статьи (кроме § 15) мы всегда будем предполагать, что характеристика поля равна 0.

Мы уже разделили поверхности на два типа — поверхности с численно эффективным каноническим классом (они всегда являются минимальными моделями) и поверхности, для минимальных моделей которых канонический класс не численно эффективен. Поскольку второй тип описан достаточно явно — минимальные модели являются линейчатыми поверхностями или изоморфны \mathbf{P}^2 , мы ограничимся первым типом, т. е. будем дальше считать, что канонический класс K_X поверхности X численно эффективен.

Классификация таких поверхностей определяется положением канонического класса в группе N_X по отношению к положительной поле Ω_+ конуса $(x^2) > 0$. А именно, поверхности разделяются на три класса (рис. 16):

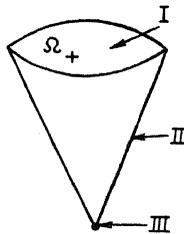


Рис. 16

I. K_X лежит внутри конуса Ω_+ , т. е. $(K_X^2) > 0$;

II. K_X лежит на границе, но $K_X \neq 0$ в N_X , т. е. $(K_X^2) = 0$, $K_X \not\approx 0$;

III. K_X лежит на границе и $K_X = 0$ в N_X , т. е. $K_X \approx 0$.

Эти три класса характеризуются также своим значением канонической размерности κ , ростом чисел P_m при $m \rightarrow \infty$ (мы будем писать $P_m \sim m^r$, если P_m растет как многочлен степени r), более тонким описанием канонического класса (оказывается, $K_X \approx 0$ только, если $nK_X = 0$ в $\text{Pic } X$ при некотором $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$) и, в некоторых случаях, прямыми геометрическими конструкциями. Результаты классификации сведены в таблице 1.

Сюда можно, конечно, присоединить IV класс — поверхности с не численно эффективным классом для минимальной модели. Они характеризуются тем, что $\kappa = -\infty$. Мы видим из таблицы 1, что для них $P_n = 0$ при $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Это можно заменить одним условием: $P_{12} = 0$. Наконец, теорема 1 в п. 7.1 говорит нам, что их минимальные модели совпадают с \mathbf{P}^2 или линейными поверхностями.

Поверхности с численно эффективным классом K_X и $(K_X^2) > 0$ называются *поверхностями общего типа*. Согласно таблице для остальных поверхностей $(K_X^2) = 0$. Заметим, что все поверхности в классе II — эллиптические, однако некоторые по-

Таблица 1

Класс	(K_X^2)	κ	P_m	Строение
I	$(K_X^2) > 0$	2	$P_m \sim m^2, P_2 \geq 2$	При $m \gg 0$ отображение Φ_{mK} является бирациональным морфизмом
II	$(K_X^2) = 0,$ $nK_X \neq 0$ при $n \neq 0$	1	$P_m \sim m, P_m \geq 2$ для $m \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$	Эллиптическая поверхность
III	$nK_X = 0$ при $n \in \{1, 2, 3, 4, 6, \dots\}$	0	$(\forall m \geq 1) [P_m \leq 1],$ $P_n = 1$ для бесконечного числа значений	Абелевы многообразия, поверхность типа $K3$ или их факторы по конечной свободно действующей группе автоморфизмов

верхности в классе III тоже могут быть эллиптическими (но такими, что $nK_X = 0$ при $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$). Наконец, поверхности в классе III могут быть описаны более детально. Факторы абелевых многообразий по конечным группам имеют (как уже отмечалось в § 2) вид $(E_1 + E_2)/G$, где E_1 и E_2 — эллиптические кривые. Такие поверхности называются *биэллиптическими*. Известен полный список всевозможных кривых E_1 и E_2 и групп G (см. § 11). Факторы поверхностей типа $K3$ (по свободно действующим инволюциям) — это т. н. *поверхности Энриквеса* (см. § 11).

Для сравнения с таблицей 1 в таблице 2 сведены данные для кривых.

Таблица 2

Класс	κ	g	$\deg K_X$	$\chi(\mathcal{O}_X)$	Строение
I	1	≥ 2	$2g - 2 > 0$	$1 - g < 0$	Отображение Φ_{mK} при $m \geq 3$ является изоморфным вложением
II	0	1	0	0	Эллиптические кривые
III	$-\infty$	0	$-2 < 0$	$1 > 0$	\mathbb{P}^1

Основная цель этого параграфа — пояснение доказательств следующих теорем (далее всегда предполагается, что класс K_X численно эффективен):

Теорема 1. Если $(K_X^2) > 0$, то отображение φ_{mK} при достаточно большом m является бирациональным морфизмом, стягивающим только (-2) -кривые, причем в особые точки ду Валя, и отображающим X на нормальную поверхность. Для этих поверхностей $\kappa(X) = 2$ и $P_2 \geq 2$.

Теорема 2. Если $(K_X^2) = 0$, то $\kappa(X) \leq 1$, X — эллиптическая поверхность, абелево многообразие, поверхность типа КЗ или поверхность Энрикеса.

Поверхности из класса I будут обсуждаться в § 9, из классов II и III — в §§ 10—12.

8.2. Обсуждение теоремы 1. Из численной эффективности класса K_X следует, что для гиперплоского сечения H $(K_X, H) > 0$. Действительно, $(K_X, H) \geq 0$, а из $(K_X, H) = 0$, ввиду $(H^2) > 0$ и $(K_X^2) > 0$, вытекало бы противоречие с теоремой об индексе (теорема 1 в п. 5.2). Поэтому из неравенства Римана—Роха следует, что $P_m \sim m^2$. Из теоремы об обращении в нуль вытекает и точная формула

$$P_m = \frac{m(m-1)}{2}(K_X^2) + \chi(\mathcal{O}_X), \quad \text{при } m \geq 2, \quad (1)$$

которая понадобится нам лишь позже.

Прежде всего убедимся, что отображение φ_{mK} является бирациональным изоморфизмом при достаточно большом m — это совсем просто. Действительно, из $(K_X, H) > 0$ следует, что $(mK_X - H, H) > 0$ и $(mK_X - H)^2 \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Как мы видели в § 5, отсюда следует, что $l(mK_X - H) > 0$ при некотором $m > 0$, т. е. $mK_X = H + D$, $D > 0$. Поэтому на $X \setminus \text{Supp } D$ отображение φ_{mK} совпадает с φ_H , т. е. является вложением.

Вопрос о том, когда φ_{mK} — морфизм, связан с положением класса K_X в конусе \bar{A} . Если K_X содержится строго внутри \bar{A} , то наше утверждение — прямое следствие критерия обильности Накаи—Мойшезона (п. 5.2). Пусть K_X лежит на границе \bar{A} , т. е. $(K_X, C) = 0$ для некоторых кривых C . Тогда φ_{mK} стягивает C при любом m . Мы видели в § 6, что кривые C с $(K_X, C) = 0$ — это (-2) -кривые.

Установим сначала, что линейная система $|mK_X|$ не имеет неподвижных компонент при достаточно большом m . Пусть E — такая компонента.

Воспользуемся точной последовательностью

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(mK_X - E) \rightarrow \mathcal{O}_X(mK_X) \rightarrow \mathcal{O}_E(mK_X|_E) \rightarrow 0.$$

Так как K_X численно эффективен, $(K_X, E) \geq 0$ и $h^0(E, \mathcal{O}_E(mK_X|_E)) \geq 1$, так что достаточно добиться равенства $h^1(X, mK_X - E) = 0$. Для этого можно воспользоваться теоремой об обращении в нуль (п. 5.1): $(mK_X - E)^2 > 0$ при

$m \gg 0$ и $(mK_X - F, E) > 0$ при $m \gg 0$, если $(K_X, E) > 0$. Если же $(K_X, E) = 0$, но $(F, E) > 0$, то это соображение не применимо; в этом случае $(E)^r = -r$, $E \simeq \mathbf{P}^1$ и можно воспользоваться некоторым усилением теоремы об обращении в нуль, которое мы формулировать не будем (см., например, [65], [48], [75]). Увеличивая m , можно добиться того, чтобы система $|mK_X|$ не имела ни одной неподвижной кривой.

Аналогично доказывается отсутствие базисных точек при достаточно большом m . Иными словами, φ_{mK} — морфизм. Мы уже видели, что он бирационален. Очевидно, стягиваться могут только (-2) -кривые, причем их конфигурации описываются графами из таблицы в п. 6.3, а значит $\varphi_{mK}(X)$ имеет только особые точки дю Валя. Теперь можно воспользоваться нормальностью таких особых точек или сослаться на общий результат, следующий из несложных соображений коммутативной алгебры: если для некоторого дивизора D отображение φ_D является морфизмом, то при некотором $m > 0$ многообразие $\varphi_{mD}(X)$ нормально. Это т. н. *теорема о проективной нормализации* ([42]). Поэтому поверхность $\varphi_{mK}(X)$ нормальна.

Другой метод исследования кратно-канонических отображений основан на теории векторных расслоений ([66]).

Замечания. 1. Можно показать, что для заданной поверхности X все ее образы $\varphi_{mK}(X)$ при $m \gg 0$ изоморфны и получаются из X просто стягиванием в точки всех связанных систем (-2) -кривых. Эта однозначно определенная модель X_{can} поверхности X называется *канонической*.

2. Аналогично теореме 1 доказывается, что X_{can} может быть построена следующим образом: положим $R = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, mK_X)$

с естественным умножением $H^0(X, mK_X) \otimes H^0(X, nK_X) \rightarrow H^0(X, (m+n)K_X)$ (можно определить R как кольцо регулярных дифференциальных 2-форм всех степеней на X); известно (см. [79]), что градуированное кольцо R конечно порождено над $H^0(X, \mathcal{O}_X) \simeq k$ и $X_{\text{can}} = \text{Proj } R$.

Мы еще ничего не сказали о доказательстве утверждения $P_2 \geq 2$ в теореме 1. Оно требует привлечения новых важных соображений и мы обсудим его в следующем пункте.

8.3. Неравенство Кастельнуово — де Франчиса. До сих пор нашим главным и почти единственным орудием было неравенство Римана—Роха, которое, как по волшебству, из геометрического свойства дивизора $D : (D^2)$ достаточно велико — извлекает большой запас функций пространства $L(D)$. Особенно часто мы применяли это рассуждение к $D = mK_X$ при $(K_X^2) > 0$ и m достаточно большим. Однако, если нас интересует конкретное значение m или, тем более, если $(K_X^2) = 0$, то неравенство Римана—Роха нам ничего не дает. Так, мы ничего не можем извлечь из формулы (1) при $m=2$, пока ничего не

знаем о знаке числа $\chi(\mathcal{O}_X)$. Здесь вступают в силу соображения нового типа.

Лемма 1. Если канонический класс K_X численно эффективен, то $e(X) \geq 0$ (неравенство Кастельнуово—де Франчиса).

Результат этот основывается на предложении из § 2 и предложении из п. 4.2, согласно которым, если существует морфизм $f: X \rightarrow C$ со связными слоями и такой, что $g(C) \geq 0$ и $g(F) \geq 0$, где F — общий слой морфизма f , то $e(X) \geq e(C)e(F) \geq 0$. При этом достаточно проверить, что $g(C) > 0$: из $g(F) = 0$ следует, что $F \simeq \mathbf{P}^1$, откуда по формуле присоединения $(F, K_X) = -2$ в противоречии с численной эффективностью класса K_X . Ввиду следствия 2 теоремы 2 в п. 6.2 достаточно построить f как рациональное отображение — оно автоматически будет морфизмом.

Доказывая лемму от противного, предположим, что $e(X) < 0$ — тогда нужное отображение f может быть построено даже с $g(C) \geq 2$. Если бы такой морфизм существовал, то из двух непропорциональных над k форм $\eta_1, \eta_2 \in H^0(C, \Omega_C^1)$ мы получили бы формы $\omega_i = f^*\eta_i \in H^0(X, \Omega_X^1)$, $i = 1, 2$, для которых $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$. Основная идея доказательства заключается в том, что верно и обратное: если $\omega_1, \omega_2 \in H^0(X, \Omega_X^1)$, $\omega_1 \notin k\omega_2$, и $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$, то существует такой морфизм $f: X \rightarrow C$, что $\omega_i = f^*\eta_i$, $\eta_i \in H^0(C, \Omega_C^1)$. Вот набросок доказательства при $k = \mathbf{C}$:

Из того, что $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$, следует, что $\omega_2 = \varphi\omega_1$, $\varphi \in k(X)$, $\varphi \notin \mathbf{C}$, т. е. φ определяет рациональное отображение $\varphi: X \rightarrow \mathbf{P}^1$.

Пусть $X' \rightarrow X \rightarrow \mathbf{P}^1$ — разрешение точек неопределенности, а $X' \xrightarrow{\psi} C \rightarrow \mathbf{P}^1$ — разложение Штейна. Рассмотрим точки, в которых существует такая система координат (u, v) , что ψ может быть записано как $(u, v) \mapsto u$, т. е. $\psi = u$; такие точки образуют открытое множество в X' . Воспользуемся замкнутостью форм ω_1 и ω_2 (см., например, § 14). Тогда локально $\omega_1 = dh$, $\omega_2 = udh$ и замкнутость ω_2 дает $\frac{\partial h}{\partial v} = 0$, т. е. $h = h(u)$. Это и показывает,

что в нашем открытом множестве $\omega_1 = \psi^*\eta_1$, $\omega_2 = \psi^*\eta_2$, где η_1 и η_2 — формы, голоморфные на некотором открытом множестве кривой C . Нетрудно доказать, что η_1 и η_2 голоморфно продолжаются на всю C , откуда и следует $g(C) \geq 2$.

Остается обеспечить существование форм $\omega_1, \omega_2 \in H^0(X, \Omega_X^1)$, $\omega_2 \notin k\omega_1$, $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$. Достаточно привлечь простые соображения из линейной алгебры:

Если E и F — конечномерные пространства, $\dim F < 2(\dim E - 1)$ и ρ — гомоморфизм $\wedge^2 E \rightarrow F$, то существуют такие $e_1, e_2 \in E$, $e_2 \notin ke_1$, что $\rho(e_1 \wedge e_2) = 0$.

Действительно, из сравнения размерностей пространства Кегр ρ и многообразия разложимых бивекторов следует, что они имеют ненулевое пересечение.

В нашем случае надо, следовательно, обеспечить выполнение неравенства $p < 2(q-2)$. Оно не обязано выполняться для поверхности X . Но мы можем предполагать, что $b_1(X) > 0$ — иначе $e(X) > 0$. Поэтому существуют неразветвленные накрытия $X' \rightarrow X$ сколь угодно большой степени N и, если $e(X) < 0$, то $e(X') = Ne(X)$ можно сделать сколь угодно малым. Ввиду формулы (4) в § 1 $e(X) \geq 2-4q+2p$ и, если $e(X') < -6$, то для X' нужное неравенство имеет место и приводит к противоречию.

Следствие. Если канонический класс K_X численно эффективен, то $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 0$, а на поверхности общего типа $\chi(\mathcal{O}_X) > 0$.

Это сразу следует из леммы 1, формулы Нётера и того, что $(K_X^2) \geq 0$, а если X — поверхность общего типа, то $(K_X^2) > 0$.

Неравенство $P_2 \geq 2$ в теореме 1 сразу вытекает из формулы (1), следствия и того, что X — поверхность общего типа.

8.4. Обсуждение теоремы 2. Здесь $(K_X^2) = 0$. Основой всех рассуждений является построение на X пучка эллиптических кривых и, когда это невозможно, отождествление X с абелевой поверхностью или поверхностью типа $K3$.

Пусть сначала $P_m(X) \geq 2$ для некоторого $m > 0$. Если линейная система $|mK_X|$ имеет неподвижную часть \bar{D} , то $mK_X = \bar{D} + D$, где D пробегает дивизоры подвижной линейной системы Δ . Так как $(K_X^2) = 0$, $(K_X, \bar{D}) + (K_X, D) = 0$, откуда, ввиду численной эффективности класса K_X , следует, что $(K_X, \bar{D}) = (K_X, D) = 0$. Отсюда, в свою очередь, $(\bar{D}, D) + (D^2) = 0$, а так как система Δ подвижна, $(\bar{D}, D) \geq 0$, $(D^2) \geq 0$ и, значит, $(\bar{D}, D) = (D^2) = 0$.

Отсюда следует, что система Δ не имеет базисных точек и, значит, отображение φ_Δ является морфизмом, а так как $\varphi_{mK} = \varphi_\Delta$, φ_{mK} — тоже морфизм. Так как Δ состоит из прообразов гиперплоских сечений $\varphi_\Delta(X)$ и $D^2 = 0$ для $D \in \Delta$, $\varphi_\Delta(X) = \varphi_{mK}(X)$ — кривая, т. е.

$\chi(X) = 1$. Пусть $X \xrightarrow{f} B \rightarrow \varphi_{mK}(X)$ — разложение Штейна морфизма φ_{mK} . Для его слоев $F_b = f^{-1}(b)$ опять $(F_b^2) = 0$. По общей теореме Бертини среди слоев морфизма f только конечное число не гладких. Для гладкого же слоя C $(C^2) = 0$, $(C, K_X) = 0$, т. е. C — эллиптическая кривая и, значит, X — эллиптическая поверхность.

Итак, остается случай $P_m \leq 1$ для всех $m \geq 1$ и, в частности, $p=0$ или $p=1$, а ввиду леммы 1 в п. 8.3 $q \leq p+1$. Таким образом, все остающееся — это разбор нескольких случаев малых p и q при $P_m \leq 1$, которые приводят к конкретно существующим типам. Поэтому такой перебор не прост, он аналогичен концу доказательства теоремы 1 из п. 7.1. Мы отметим только наиболее принципиальные моменты.

Тип А. $\chi(\mathcal{O}_X) > 0$. В этом случае возможные наборы значений: 1) $p=1, q=0$; 2) $p=q=1$; 3) $p=q=0$.

При $p=1, q=0$ по теореме Римана—Роха $\chi(\mathcal{O}_X(2K_X)) = \chi(\mathcal{O}_X) = 2$, т. е. $h^0(X, \mathcal{O}_X(2K_X)) + h^2(X, \mathcal{O}_X(2K_X)) \geq 0$. Мы можем предполагать, что $P_2 = h^2(X, \mathcal{O}_X(2K_X)) \leq 1$ и, значит, $h^2(X, \mathcal{O}_X(2K_X)) \geq 1$. Тогда по двойственности $h^0(X, \mathcal{O}_X(-K_X)) \geq 1$. Так как K_X численно эффективен, это может быть лишь при $K_X=0$, т. е. X является поверхностью типа КЗ.

При $p=q=1$ $\dim \text{Pic}^0 X = 1$ и существует такое $\sigma \in \text{Pic}^0 X$, что $\sigma \neq 0, 2\sigma = 0$. По неравенству Римана—Роха $l(\sigma) + l(K - \sigma) \geq \chi(\mathcal{O}_X) = 1$, а так как $l(\sigma) = 0, l(K - \sigma) \geq 1$. Если $D \in |K - \sigma|$ и $K_0 \in |K|$, то $2D \in |2K|$ и $2K_0 \in |2K|$; поскольку мы можем считать, что $P_2 \leq 1, 2D = 2K_0$ (как дивизоры!), откуда $D = K_0$, но это противоречит тому, что $\sigma \neq 0$, т. е. этот случай не реализуется.

При $p=q=0$ $\chi(X, \mathcal{O}_X(mK_X)) = 1$ для всех $m \in \mathbb{Z}$. Так как $l(-K_X) = 0$ (иначе $K_X \sim 0$ и $p=1$), $P_2 \geq 1$ (по неравенству Римана—Роха). Поверхности с $p=q=0, 2K_X \sim 0$ — это, как мы знаем, *поверхности Энриквеса*. Для них $\kappa = 0$. (См. о них § 11.) Они являются факторами поверхностей типа КЗ по группе второго порядка. Если же $2K_X \neq 0$, то $l(-2K_X) = 0$ и, по двойственности, $P_3 \geq 1$. Выбрав $D_2 \in |2K_X|$ и $D_3 \in |3K_X|$, мы видим, что система $|6K_X|$ содержит два различных дивизора $3D_2 \neq 2D_3$, т. е. $P_6 \geq 2$.

Тип Б. $\chi(\mathcal{O}_X) = 0$. В этом случае возможны два набора: 1) $p=1, q=2$; 2) $p=0, q=1$.

В случае $p=1, q=2$ используется отображение Альбанезе $\alpha: X \rightarrow A, \dim A = 2$. При этом $\alpha(X)$ порождает A как группу, если считать, что $\alpha(X) \neq 0$. Отсюда следует, что $\dim \alpha(X) > 0$. Если $\alpha(X)$ — кривая B , то из элементарных свойств абелевых многообразий вытекает, что $g(B) > 1$ (кривая с $g(B) = 0$ в двумерном абелевом многообразии не может содержаться, а с $g(B) = 1$ не может его породить). Тогда мы имеем расслоение $X \rightarrow B$, к которому можно применить формулы (5) из § 2 для $e(X)$. Если F — общий слой расслоения, то $g(F) > 0$; при $g(F) > 1$ из предложения в § 2 и предложения в п. 4.2 следует, что $e(X) > 0$, что противоречит $e(X) = 12\chi(\mathcal{O}_X) = 0$, а при $g(F) = 1$ мы имеем расслоение на эллиптические кривые.

Предположение $\dim \alpha(X) = 2$, т. е. $\alpha(X) = A$, приводит к случаю абелева многообразия. Доказательство основывается на рассмотрении формы $\alpha^*(\omega)$, где $\omega \in H^0(A, \Omega_A^2), \omega \neq 0$. Очевидно, $(\alpha^*(\omega)) \in K_X$. Пусть $(\alpha^*(\omega)) = \sum n_i C_i \neq 0$, где C_i — кривые. Из того, что $(\alpha^*(\omega), K_X) = 0$ и K_X численно эффективен, вытекает, что $(C_i, K_X) = 0$, а значит, $(C_i^2) = -2$ или $(C_i^2) = 0$ и, следовательно, C_i — рациональные или эллиптические кривые. Для рациональных C_i $\alpha(C_i)$ — точка на A , а из критерия стягиваемости в п. 6.3 следует, что все $\alpha(C_i)$ не могут быть точ-

ками — тогда матрица $(\alpha(C_i), \alpha(C_j))$ была бы отрицательно определенной, в то время как $\sum n_i \alpha(C_i) = 0$.

Если $\dim \alpha(C_i) = 1$, то и C_i , и $C = \alpha(C_i)$ — эллиптические кривые. Из простейших свойств абелевых многообразий следует, что C можно считать подгруппой в A , т. е. $C = \pi^{-1}(0)$, где $0 \in B = A/C$, $\pi = A \rightarrow B$ — гомоморфизм. Поэтому система $\{m_0 K\}$ содержит кривую $(\pi \alpha)^*(0)$ при некотором m_0 , а так как $l(mC) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, $l(mK) \rightarrow \infty$.

Остается случай $(\alpha^*(\omega)) = 0$. В этом случае отображение $\alpha: X \rightarrow A$ является неразветвленным накрытием, а неразветвленное накрытие абелева многообразия абелево. При $k = C$ это видно из представления $A = C^2/\Omega$, где Ω — решетка в C^2 , и неразветвленное накрытие $A \rightarrow A$ имеет вид $A' = C^2/\Omega'$, $\Omega' \subset \Omega$.

В случае $p=0$, $q=1$ опять рассмотрим отображение Альбанезе $\alpha: X \rightarrow A$, где теперь $\dim A = 1$. Слои этого отображения связны, поскольку в разложении Штейна $X \xrightarrow{\alpha'} A' \rightarrow A$ $g(A) \leq g(A') \leq q = 1$; следовательно, A' — эллиптическая кривая и, по свойству универсальности многообразия Альбанезе, $A' = A$. Более того, морфизм α — гладкий; это следует из предложения в § 2 и предложения в п. 4.2, поскольку из формулы Нётера $e(X) = 0$. Общий слой F не рационален; значит, $g(F) \geq 1$. Если $g(F) = 1$, то мы уже имеем пучок эллиптических кривых. Предположим, что $g(F) > 1$. Здесь используется следующее нетривиальное и важное утверждение:

Лемма 2. Если $\varphi: X \rightarrow B$ — гладкий морфизм со связными слоями и $g(B) \leq 1$, то все слои семейства изоморфны друг другу и, более того, при $g(B) = 0$ $X \simeq B \times F$, а при $g(B) = 1$ существует такое неразветвленное накрытие $B' \rightarrow B$, что

$$X \times_B B' \simeq F \times B', \quad (2)$$

где F — слой морфизма φ .

Это можно пояснить так. Множество всех кривых (с точностью до изоморфизма) рода $g > 1$ обладает структурой алгебраического многообразия M_g , называемого *многообразием модулей*. Известно (см., например, [2], [62]), что M_g можно представить в виде фактора некоторой ограниченной области $T_g \subset C^{3g-3}$, называемой *пространством Тейлмюллера*, по действию некоторой дискретной группы Γ_g . В группе Γ_g содержится подгруппа Γ' конечного индекса, которая действует на T_g уже свободно. Фактор $M_g' = T_g/\Gamma'$ является конечным накрытием M_g .

Морфизм $\varphi: X \rightarrow B$ определяет отображение $\psi: B \rightarrow M_g$, сопоставляющее каждой точке $b \in B$ точку $\psi(b) \in M_g$, соответствующую слою $F_b = \varphi^{-1}(b)$. Это отображение также является морфизмом — это условие входит в определение многообразия модулей. Из него можно получить отображение $\psi': B' \rightarrow M_g'$ некоторого неразветвленного накрытия $B' \rightarrow B$, как это следует

из построения многообразия модулей (через рассмотрение семейств кривых с жесткостью). Следовательно, $g(B') \leq 1$. Отображение ψ' поднимается до отображения универсальных накрывающих. Если $g(B) = 0$, то $B' = B \simeq \mathbf{P}^1$ и мы имеем отображение $\mathbf{P}^1 \rightarrow T_g$, которое, по теореме Лиувилля, является отображением в точку. В случае $g(B) = 1$ имеем также $g(B') = 1$ и отображение универсальных накрывающих $C \rightarrow T_g$ тоже постоянно, поскольку T_g — ограниченная область.

Рассуждение с пространством Тейхмюллера можно заменить более «элементарным» рассуждением, сопоставляя точке $b \in B$ якобиан $J(F_b)$, а ему — точку верхней полуплоскости Зигеля, которая очевидным образом изоморфна ограниченной области. После этого надо воспользоваться теоремой Торелли ([19]).

Из того, что $\psi(B)$ — точка в M_g , следует, что и общий слой F семейства $X \rightarrow B$ изоморфен кривой F , быть может, над некоторым расширением поля $k(B)$. Это значит, что $X \times_B B' \simeq F \times B'$ для некоторого накрытия $B' \rightarrow B$. Нетрудно показать, что наличие у накрытия $B' \rightarrow B$ точек ветвления привело бы к вырожденным слоям семейства $X \rightarrow B$, т. е. $B' \rightarrow B$ не разветвлено, что и утверждается в лемме.

Возвращаясь к рассмотрению случая $p = 0$, $q = 1$, заметим, что проекция $\pi: F \times B' = X \times_B B' \rightarrow X$ по конструкции является неразветвленным накрытием. Отсюда $\pi^*(K_X) = K_{F \times B'}$, но $\pi_*(K_{F \times B'}) = nK_X$ при некотором $n > 0$, а значит, $\pi_*(mK_{F \times B'}) = mnK_X$. Из (4) в § 2 следует, что $l(mK_{F \times B'}) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, а значит, $l(mnK_X) \rightarrow \infty$, откуда, как мы знаем, следует существование эллиптического пучка на X .

§ 9. Поверхности общего типа

9.1. Модули. Поверхности общего типа являются аналогом кривых рода $g > 1$. Идеально было бы получить для них такую же картину, какую мы имеем для кривых, — выделение некоторых дискретных инвариантов, аналогичных роду, и параметризацию множества поверхностей с заданными дискретными инвариантами точками некоторого конечномерного многообразия. Эти вопросы мы и обсудим в настоящем параграфе.

В качестве целочисленных инвариантов поверхностей нам встречались $e(X)$, (K_X^2) , p , q , b_1 , b_2 . Они связаны соотношениями $e(X) = 2 - 2b_1 + b_2$, $b_1 = 2q$, $(K_X^2) + e(X) = 12(1 - q + p)$, так что независимыми можно считать $e(X)$, (K_X^2) и p . Но из формулы (1) в п. 8.2 следует, что при заданных (K_X^2) , $\chi(\mathcal{O}_X)P_m$ при $m \geq 2$ может принимать только конечное число значений, а так как $p \leq P_2$ и, ввиду леммы 1 в п. 8.3, $1 - q + p \geq 0$, это верно также для p и q . Поэтому дальше мы примем за основные инварианты (K_X^2) и $e(X)$.

Параметризация поверхностей с заданными (K_X^2) , $e(X)$ точками конечномерного многообразия основывается на тех же идеях, которые используются для кривых: строится некоторое проективное вложение поверхности $\Phi: X \hookrightarrow \mathbf{P}^N$, которое однозначно определено поверхностью X с точностью до проективного преобразования, и доказывается, что для поверхностей X с заданными инвариантами (K_X^2) , $e(X)$ как N , так и степень поверхности $\Phi(X)$ в \mathbf{P}^N могут принимать только конечное число значений. Таким образом, задача сводится к проективной классификации поверхностей заданной степени в заданном проективном пространстве \mathbf{P}^N с точностью до проективных преобразований (или к какому-то варианту этой задачи).

Вложение $\Phi: X \hookrightarrow \mathbf{P}^N$ тоже строится по аналогии с кривыми — как кратно-каноническое вложение Φ_{mk} . Мы видим, что для всякой поверхности общего типа отображение Φ_{mk} , соответствующее некоторой кратности m канонического класса, является, при достаточно большом m , бирациональным морфизмом, стягивающим только (-2) -кривые, причем в особенности дю Валя. Однако, чтобы рассматривать все поверхности вместе, нам нужно знать, что для них этим свойством обладает отображение Φ_{mk} с одним и тем же m для всех них. Так, для всех кривых рода $g > 1$ отображение Φ_{3k} является вложением. Для поверхностей имеет место похожий факт:

Теорема 1. Для любой минимальной поверхности общего типа X отображение Φ_{5k} является бирациональным морфизмом в \mathbf{P}^N , $N = l(5K) - 1$, образ $\Phi_{5k}(X)$ нормален и может иметь только особые точки дю Валя ([26], [29], [66]).

Согласно (1) в п. 8.2, $\Phi_{5k}(X) \subset \mathbf{P}^N$, где $N = 10(K_X^2) + \chi(\mathcal{O}_X) - 1$, и это есть поверхность степени $((5K_X)^2) = 25(K_X^2)$. Более того, ее многочлен Гильберта (см. КАМ) равен $\frac{25}{2}(K_X^2)T^2 - \frac{5}{2}(K_X^2)T + \chi(\mathcal{O}_X)$. Поверхности заданной степени в заданном пространстве \mathbf{P}^N параметризуются точками конечномерного многообразия — многообразия модулей.

Можно также воспользоваться и тем, что двумерные подсхемы $Y \subset \mathbf{P}^N$ с заданным многочленом Гильберта $P(X)$ параметризуются точками конечномерной схемы Гильберта $\text{Hilb}_{\mathbf{P}^w}$ ([41], епр. 221). Ее открытое подмножество U параметризует образы $\Phi_{5k}(X)$ гладких поверхностей с заданными инвариантами (K^2) , $e(X)$. При этом поверхности X и X' изоморфны тогда и только тогда, когда их образы $\Phi_{5k}(X)$ и $\Phi_{5k}(X')$ переводятся друг в друга проективным преобразованием группы $\text{PGL}(N+1, k)$. Иначе говоря, группа $\text{PGL}(N+1, k)$ действует на U , а поверхности X взаимнооднозначно соответствуют орбитам этой группы на U .

Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между поверхностями X рассматриваемого типа и элементами множества $U/PGL(N+1)$. Как известно, вопрос о том, когда факторпространству алгебраического многообразия по действию алгебраической группы можно придать структуру алгебраического многообразия, — весьма тонкий. Даже как топологическое пространство такое фактормножество может быть очень «диким»: если существуют незамкнутые орбиты, то оно не хаусдорфово. Однако в нашей ситуации удается (хотя и очень не просто) доказать существование на нужном факторе алгебраической структуры, откуда следует ([62], [60], [39])

Теорема 2. Для минимальных поверхностей X с заданными инвариантами $n=(K_X^2)$, $m=e(X)$ существует классифицирующее их квазипроективное многообразие модулей $M_{m,n}$.

Заканчивая этот круг вопросов, заметим, что отображение φ_{mK} при $m \leq 4$ может не быть бирациональным, однако отображение φ_{3K} является бирациональным изоморфизмом, за исключением небольшого числа случаев:

Теорема 3. Для минимальной поверхности X общего типа отображение φ_{3K} является бирациональным изоморфизмом, кроме случаев $(K_X^2)=2$, $\rho_g(X)=3$ и $(K_X^2)=1$, $\rho_g(X)=2$.

В этих исключительных случаях φ_{3K} не бирационально.

9.2. География поверхностей. ([26], [34]). Перейдем теперь ко второму вопросу, необходимому для классификации поверхностей общего типа: какие значения инвариантов (K_X^2) и $e(X)$ реализуются? Описание возможных значений пар чисел $n=(K_X^2)$, $m=e(X)$ для минимальных поверхностей общего типа носит название *географии поверхностей*. Сначала мы суммируем известные нам необходимые условия: $n > 0$, $m > 0$, $n+m \equiv 0 \pmod{12}$ (из теоремы Римана—Роха). К ним присоединяются два важных неравенства. Одно из них — *неравенство Нётера*:

$$p \leq \frac{1}{2} (K_X^2) + 2. \quad (1)$$

Оно нетрудно выводится, если применить к кривым линейной системы $|K|$ теорему Клиффорда ([19]) об алгебраических кривых. Из неравенства Нётера следует, что

$$5(K_X^2) - e(X) + 36 \geq 0, \text{ если } (K_X^2) \text{ четно}; \quad (2)$$

$$5(K_X^2) - e(X) + 30 \geq 0, \text{ если } (K_X^2) \text{ нечетно}. \quad (3)$$

Надо воспользоваться тем, что $\chi(\mathcal{O}_X) \leq p+1$, и формулой Нётера ((2) в п. 5.1), выражающей χ через (K_X^2) и $e(X)$.

Второе — *неравенство Богомолова—Мильки* ([20], [54]):

$$(K_X^2) \leq 3e(X). \quad (4)$$

Доказательство его гораздо тоньше. Известны два метода.

Один опирается на теорию, использующую идею, на которой основывалось доказательство леммы 1 в п. 8.3. Однако этих соображений недостаточно (они приводят только к гораздо более слабому неравенству $(K_X^2) \leq 8e(X)$). Существенная новая идея заключается в том, чтобы, кроме пучка Ω_X^1 , рассмотреть его симметрические степени $S^n \Omega_X^1$ (см. [72] и доклад Ф. А. Богомолова в [20]).

Другой метод применим лишь при $k = C$ и основан на введении на X римановой метрики особого типа (кэлеровой метрики Калаби—Яо). Выражение $3e(X) - (K_X^2)$ записывается как интеграл по X от некоторой неотрицательной плотности и, значит, неотрицательно. При этом получается важное дополнение к неравенству (4) — оно превращается в равенство для поверхности общего типа X тогда и только тогда, когда X изоморфно фактору B/G , где $B \subset C^2$ — шар $|z_1|^2 + |z_2|^2 < 1$, а G — дискретная группа автоморфизмов ([76]).

Нарисуем на плоскости (m, n) область D , соответствующую сформулированным необходимым условиям, — она отделяется от $(0, 0)$ прямой $m+n=12$, ограничивается снизу прямой $m=5n+36$ и сверху — прямой $n=3m$ (рис. 17).

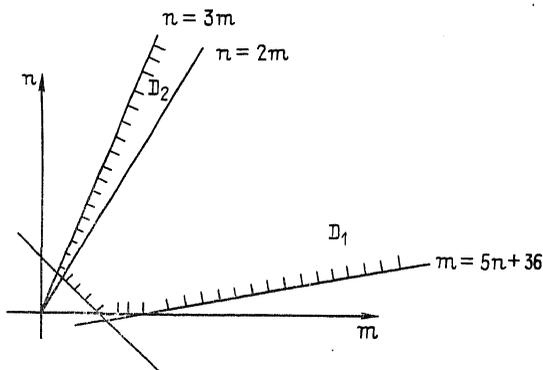


Рис. 17

В «географии» существенную роль играет вопрос о *сигнатуре поверхности* $\tau = b^+ - b^-$, если квадратичная форма, определенная в $H^2(X, R)$, имеет тип (b^+, b^-) . Из т. н. теории Ходжа следует, что $b^+ = 2p + 1$, $b^- = b_2 - 2p - 1$; значит, $\tau = 4p + 2 - b_2$; из теоремы Римана—Роха теперь следует $\tau = \frac{(K^2) - 2e}{3}$.

Прямая $\tau = 0$ (т. е. $n = 2m$) делит область D на две части — нижнюю D_1 (соответствующую $\tau < 0$) и верхнюю D_2 (соответствующую $\tau > 0$). Подавляющее большинство поверхностей лежит в области D_1 . Примеры их легко конструируются и удается доказать, что почти все точки этой области реализуются.

Теорема 4. Для любой пары $(n, m) \in D_1$ с $n+m \equiv 0 \pmod{12}$ существует минимальная поверхность с $(K_X^2) = n, e(X) = m$, кроме, может быть, следующих: $n-2m+3k=0$, где $k=1, 2, 3, 5, 7$.

Граничные точки области D_2 (лежащие на прямых $n=3m$ и $n=2m$) можно получить в виде U/G , где U — ограниченная однородная область в \mathbb{C}^2 , а G — ее дискретная группа автоморфизмов, действующая свободно в U . Как доказал Э. Картан, такая область изоморфна или шару B , или бицилиндру $D \times D$, где D — круг $|z| < 1$. В обоих случаях т. н. теорема пропорциональности Хирцебруха утверждает, что отношение $(K_X^2)/e(X)$ для $X=U/G$ зависит только от области U и равно $(K^2)/e$ для двойственного к U симметрического пространства, которое для B совпадает с \mathbb{P}^2 , а для $D \times D$ — с $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и, значит, равно 3 или 2 соответственно ([43]).

Важным во многих отношениях классом поверхностей, изображаемых точками области D_2 , являются т. н. *поверхности Кодаиры*.

Пример. Поверхность Кодаиры дает пример гладкого расслоения на кривые $X \rightarrow B$, не являющегося локально тривиальным. Для такого расслоения $g(B) > 1, g(F) > 1$. (Случай $p=0, q=1$ см. в теореме 2 из п. 8.1.)

Пусть C и D — гладкие полные неприводимые кривые рода > 1 , выбранные так, что в прямом произведении $C \times D$ существует нетривиальное сечение Γ_0 для проекции $C \times D \rightarrow C$. Иными словами, Γ_0 — график морфизма $\gamma: C \rightarrow D$, для которого $\gamma(C)$ не совпадает с одной точкой (и, значит, $\gamma(C) = D$) (рис. 18). Пусть $B \rightarrow D$ — неразветвленное накрытие степени

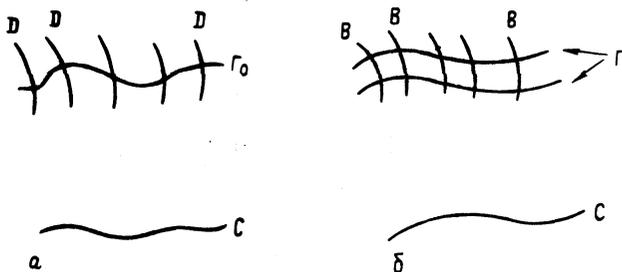


Рис. 18

$n \geq 2$ и Γ — прообраз Γ_0 при морфизме $B \times C \rightarrow D \times C$. В $B \times C$ дивизор Γ определяет « n -кратное неразветвленное сечение» проекции $B \times C \rightarrow C$, т. е. высекает на каждом слое $B \times c, c \in C, n$ точек, меняющихся вместе с c и не сливающихся (рис. 18, б при $n=2$). Предположим, что существует циклическое накрытие степени $r \geq 2$ $X \rightarrow B \times C$, разветвленное в Γ . Тогда слои F_c проекции $X \rightarrow C$ являются r -кратными циклическими накры-

тиями слоя $B \times C$, разветвленными в n разных точках $(B \times C) \cap \Gamma$. Поэтому, согласно формуле для рода накрытия ([19]), все они — кривые одного рода $rg + \frac{(r-1)(n-2)}{2}$, где g — род кривой B , т. е. расслоение не имеет вырожденных слоев. Из того, что сечение Γ_0 было выбрано нетривиальным, следует, что точки ветвления $\Gamma_c \rightarrow B$ меняются вместе с c , т. е. расслоение не является локально тривиальным. Нетрудно проверить, что эту ситуацию действительно можно реализовать. Полученные таким образом поверхности называют *поверхностями Кодаиры*. Если род кривой B равен g , то простое вычисление показывает, что

$$\frac{(K_X^2)}{e(X)} = 2 + \frac{1 - \frac{1}{r^2}}{(2g-1) - \frac{1}{r}}. \quad (5)$$

Отсюда следует, что все эти поверхности изображаются точками области D_2 (левая часть равенства (5) принимает значения между 2 и 7/3) (см., например, [26]).

Хотя граничные точки области D_2 и примеры Кодаиры связаны с поверхностями, для которых группа $\pi_1(X)$ бесконечна, имеется много примеров и односвязных поверхностей, соответствующих точкам области D_2 .

Известно, что «угловые коэффициенты» точек области D разбросаны достаточно равномерно — числа $(K_X^2)/e(X)$ всюду плотны на отрезке $[1/5, 3]$.

9.3. Поверхности, близкие к рациональным. В заключение скажем еще об одном типе поверхностей общего типа — тех поверхностях, для которых $p=q=0$. Они интересны тем, что «близки к рациональным» и связаны с общей темой — выяснением условий, характеризующих рациональные поверхности. Для такой поверхности X $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$ и, значит, $(K_X^2) + e(X) = 12$, $b_1 = 0$, $e(X) = 2 + b_2$ и $(K_X^2) + b_2 = 10$. Так как $(K_X^2) > 0$ и $b_2 > 0$, все поверхности этого типа распадаются на 9 классов в соответствии со значением $(K_X^2) = 9, 8, \dots, 1$ (и, соответственно, $b_2 = 1, 2, \dots, 9$). Доказано, что поверхности любого из 9 классов существуют. Поверхности с $(K_X^2) = 9$, $b_2 = 1$ интересны тем, что для них не только p и q , но и (K_X^2) и b_2 , т. е. все встречавшиеся нам численные инварианты, такие же, как и для плоскости \mathbb{P}^2 . Поэтому их иногда называют *ложными плоскостями*. Поскольку для них $(K_X^2) = 3e(X)$, они, как было сказано выше, представляются в виде B/G , где $B \subset \mathbb{C}^2$ — шар, а G — дискретная группа его автоморфизмов. Казалось бы, естественно их таким образом и строить, однако до сих пор явно построить соответствующую группу G не удалось. Построена же поверхность общего типа с $p=q=0$, $(K_X^2) = 9$ при помощи p -адической униформизации ([61]).

Аналогично, поверхности общего типа с $p=q=0$, $(K_X^2)=8$, $b_2=2$ называются *ложными квадриками*. Их пример можно построить в виде $X=(C_1 \times C_2)/G$, где C_1, C_2 — кривые рода g_1, g_2 , G — конечная группа, действующая на C_1 и C_2 и диагонально на $C_1 \times C_2$. Если $|G|=(g_1-1)(g_2-1)$, то $(K_X^2)=8$, а если $C_1/G \simeq C_2/G \simeq P^1$, то $p=q=0$ для X . Свободно действующую группу с этими свойствами можно реализовать, взяв $C_1 \simeq C_2$ с уравнением $x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 = 0$, $G \simeq \mathbb{Z}/5 \times \mathbb{Z}/5$, действие G на C_1 по формуле $g(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0 : \varepsilon_1 x_1 : \varepsilon_2 x_2)$, $\varepsilon_1^5 = \varepsilon_2^5 = 1$, а на C_2 — в виде φ_g , где $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{Z}/5 \times \mathbb{Z}/5)$ задается матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_5) \simeq \text{Aut}(\mathbb{Z}/5 \times \mathbb{Z}/5)$ ([28]).

Наконец, другой крайний случай: $p=q=0$, $(K_X^2)=1$, $b_2=9$ — интересен тем, что может быть реализован в виде односвязной поверхности общего типа. Это показывает, что условий $p=q=0$, $\pi_1(X)=0$ не достаточно для характеристики плоскости P^2 (25)]. В § 10 мы скажем, как аналогичный пример строится в классе эллиптических поверхностей.

В заключение отметим, что из приведенных соображений вытекает следующая характеристика плоскости P^2 при $k=C$: если поверхность X гомеоморфна P^2 , то она изоморфна P^2 . Из предположения следует, что $b_1=q=0$, $b_2=1$; значит, все циклы алгебраичны и $p=0$ (согласно тривиальной части теоремы Лефшеца в п. 3.3). Если K_X не численно эффективен, то X изоморфна P^2 по теореме 1 в п. 7.1 (для линейчатой поверхности $b_2 \neq 1$).

Если же K_X численно эффективен, то по теореме Римана—Роха ((2) в п. 5.1) $(K_X^2)=9$. Отсюда X — поверхность общего типа. Так как $e(X)=3$, $(K_X^2)=3e(X)$ и, по неоднократно упоминавшемуся результату, $X \simeq B/G$, где B — шар, а $G \simeq \pi_1(X)$, что противоречит односвязности P^2 , а значит и X .

Неизвестно, однако, существуют ли дифференцируемые многообразия, гомеоморфные, но не диффеоморфные комплексной проективной плоскости $P^2(C)$, т. е. имеются ли на P^2 гладкие структуры, отличные от естественной («экзотические» гладкости).

§ 10. Эллиптические поверхности

10.1. Семейства групп. Напомним (пример 5 в § 2), что *эллиптической поверхностью* называется поверхность X с морфизмом $f: X \rightarrow B$ на гладкую кривую, слои которого связны, а род общего слоя равен 1. Общий слой F_ξ расслоения $f: X \rightarrow B$ является эллиптической кривой над полем $k(B)$ (не обязательно обладающей рациональной точкой), а так как такие поля имеют много общего с полями алгебраических чисел (оба типа

полей «одномерны»), теория эллиптических поверхностей во многом аналогична арифметике эллиптических кривых.

Из теории эллиптических кривых (из теоремы Римана — Роха для кривых) следует, что если кривая F_{ξ} имеет рациональную точку \mathcal{O} над полем $k(B)$ (а это означает, что расслоение $f: X \rightarrow B$ имеет сечение $\varphi: B \rightarrow X$), то эта кривая над полем $k(B)$ изоморфна кривой с уравнением (в аффинных координатах) $y^2 = x^3 + ax + b$. (Мы будем, ради краткости формул, предполагать дальше, что характеристика поля отлична от 2 и 3.) Значит, эллиптическая поверхность бирационально изоморфна поверхности в $\mathbf{P}^2 \times B$ с уравнением

$$y^2 = x^3 + ax + \beta \quad (\alpha, \beta \in k(B)). \quad (1)$$

Уравнение (1) называется *вейерштрассовой нормальной формой*. Поверхность (1) не обязана быть гладкой, но ее общий слой гладок. Она может иметь лишь изолированные особые точки, лежащие в конечном числе слоев.

Опять из теоремы Римана — Роха для кривых следует, что все элементы группы $\text{Pic}^0 F_{\xi}$ в точной последовательности (3) из п. 3.5 имеют представителей вида $\alpha - \mathcal{O}$, где α — точка на F_{ξ} , рациональная над полем $k(B)$, т. е. $\alpha \in F_{\xi}(k(B))$, а групповой закон в $\text{Pic}^0 F_{\xi}$ превращает $F_{\xi}(k(B))$ в группу. Нетрудно проверить, что, за исключением тривиального случая, когда $X \simeq B \times E$, где E — эллиптическая кривая над k , проекция $f: X \rightarrow B$ определяет изоморфизм $\text{Pic}^0 B \simeq \text{Pic}^0 X$ (иначе говоря, $q(X) = g(B)$, где $g(B)$ — род кривой B). Поэтому, если $X \not\simeq B \times E$, то при ограничении $\text{Pic} X$ на общий слой F_{ξ} вся группа $\text{Pic}^0 X$ переходит в 0. Так как образ этого ограничения совпадает со всей группой $\text{Pic} F_{\xi}$, она дискретна. Более того, она конечно порождена, поскольку группа $\text{Pic} X / \text{Pic}^0 X \simeq S_X$ конечно определена. Значит, это верно и для группы $\text{Pic}^0 F_{\xi}$, которая является группой точек $F_{\xi}(k(B))$ общего слоя, т. е. кривой F_{ξ} с уравнением (1) с координатами в поле $k(B)$. Это — геометрический аналог теоремы Морделла — Вейля об эллиптических кривых над полем алгебраических чисел.

Эллиптическую поверхность $f: X \rightarrow B$ можно (за счет сжатия (-1) -кривых, лежащих в слоях) считать относительно минимальной моделью (ср. конец § 7). Дальше мы будем всегда это предполагать. При этом она, конечно, может не быть минимальной моделью, т. е. может содержать (-1) -кривые, которые нельзя стянуть без того, чтобы f не перестало быть морфизмом.

Пример 1. Пусть C_1 и C_2 — две кубические кривые с уравнениями $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ на \mathbf{P}^2 , имеющие 9 точек пересечения (x_1, \dots, x_9) . Пусть $\sigma: X \rightarrow \mathbf{P}^2$ получается раздуванием этих 9 точек. Тогда рациональное отображение $f: X \rightarrow \mathbf{P}^1$, заданное формулами $(F_1: F_2)$, будет морфизмом, а X — эллиптической поверхностью. Его слой соответствуют кривым $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$. Кривые $L_i \subset X$, $L_i = \sigma^{-1}(x_i)$, как следует из свойств σ -процесса,

являются сечениями этой эллиптической поверхности. Все они являются (-1) -кривыми, но после сжатия любой из них отображение на B перестает быть морфизмом (рис. 19).

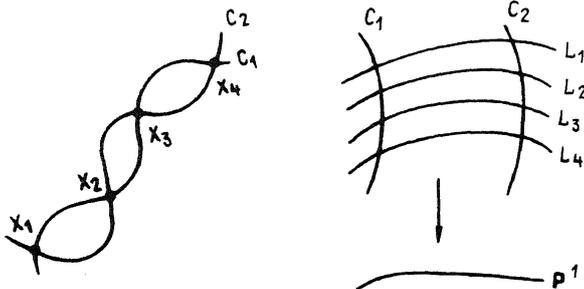


Рис. 19

Сформулируем важное следствие теоремы 3 в п. 7.3:

Теорема 1. Любой бирациональный автоморфизм эллиптической поверхности X , перестановочный с морфизмом $f: X \rightarrow B$, является автоморфизмом (мы предполагаем X относительно минимальной).

Пример 2. Предположим, что расслоение $f: X \rightarrow B$ имеет сечение $\varphi: B \rightarrow X$, $\varphi(B) = S_0$. Тогда любой неособый слой F приобретает структуру абелевой группы, в которой точка $o = S_0 \cdot F_{\xi}$ (пересечение S_0 с общим слоем F_{ξ}) будет нулем. Пусть существует еще одно сечение S . На любом неособом слое F оно определяет точку $\alpha = S \cdot F$ и сдвиг t_S на эту точку. Сдвиг t_S на сечении S определен пока на открытом множестве, полученном из X выбрасыванием вырожденных слоев. Он определяет на X рациональное отображение (что очевидно, если рассмотреть его на общем слое F_{ξ} , который не вырожден). Теорема 1 гарантирует, что это рациональное отображение t_S является морфизмом — и даже автоморфизмом — поверхности X .

Пример 3. Рассмотрим ситуацию примера 1, причем выберем пучок кубик $\lambda F + \mu G = 0$ так, чтобы его вырожденные слои были неприводимыми кубиками (с единственной двойной особой точкой); на самом деле, это — «общий случай». Поверхность, полученная раздуванием 9 точек $\{F=0, G=0\}$, определяет эллиптическое семейство $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, у которого рациональные кривые L_i , $i=1, \dots, 9$, будут сечениями. Примем L_1 за S_0 и обозначим образ L_i в N_X через α_i . Тогда в последовательности (3) из п. 3.5 $\alpha_i - \alpha_1 \in (\text{Pic } X)_F$, а $\Phi = \mathbb{Z}F$. Так как, с другой стороны, α_i , $i=1, \dots, 9$, независимы в N_X (ср. (2) в п. 6.1), элементы $\alpha_i - \alpha_1$, $i=2, \dots, 9$, независимы в $(\text{Pic } X)_F$ и t_{α_i} , $i=2, \dots, 9$, определяют группу автоморфизмов поверхности X , изоморфную \mathbb{Z}^8 . В частности, из любого сечения L_i при помощи

этой группы мы получаем бесконечное число сечений L , для которых $(L^2) = -1$, $L \simeq \mathbf{P}^1$, т. е. на X имеется бесконечное число (-1) -кривых.

Другое применение этой конструкции заключается в том, что $\alpha_i - \alpha_1$ определяют 8 независимых рациональных точек в группе $F_{\xi}(k(\mathbf{P}^1)) = F_{\xi}(k(t))$, $t = \lambda/\mu$. Нашу конструкцию можно провести и при $k = \mathbf{Q}$. Полагая $t = c \in \mathbf{Q}$, мы получим из F_{ξ} кубическую кривую $F_c: \lambda F_1 + \mu G = 0$ над \mathbf{Q} , а из $\alpha_i - \alpha_1 - 8$ независимых точек на ней. Теорема Гильберта «о неприводимости» гарантирует, что при достаточно общем выборе c эти точки также будут независимы на F_c , т. е. $\text{rk } F_c(\mathbf{Q}) \geq 8$. Это — один из приемов конструировать кубические кривые большого ранга над \mathbf{Q} .

Эллиптическая кривая над полем k является алгебраической группой. Естественно предположить, что эллиптическое расслоение $X \rightarrow B$ является, в некотором смысле, «семейством алгебраических групп», т. е. что на его слоях F_b можно ввести алгебраическую структуру, «рационально» зависящую от точки $b \in B$. Сейчас мы выясним, в какой мере это возможно сделать.

Для введения структуры алгебраической группы на эллиптической кривой E на ней необходимо выбрать точку o — нулевой элемент. Аналогично, для превращения эллиптического расслоения $X \rightarrow B$ в семейство групп надо выбрать в каждом слое F_b нулевую точку o_b , рационально зависящую от b , т. е. сечение $\varphi: B \rightarrow X$. Предположим, что такое сечение φ существует. Оно определяет на общем слое F_{ξ} рациональную (над полем $k(B)$) точку, пользуясь которой в F_{ξ} можно ввести структуру алгебраической группы над полем $k(B)$, т. е. определить морфизм $\mu: F_{\xi} \times F_{\xi} \rightarrow F_{\xi}$ кривых над этим полем. Геометрически это задает рациональное отображение $\mu: X \times_B X \rightarrow X$, где $X \times_B X$ — расслоенное произведение над B . Его смысл в том, что $\mu(x, x') = x \oplus x'$, если $x, x' \in F_b$, слой F_b — гладкий, а $x \oplus x'$ — сумма относительно группового закона на F_b , для которого $\varphi(b)$ — нулевой элемент. Нашей первой целью является выяснение области регулярности отображения μ .

Теорема 2. Отображение μ регулярно в точках $(x, x') \in F_b \times F_b$, если x и x' — простые на слое F_b .

Это непосредственно следует из теоремы 1.

Если S — любое сечение, определяющее точку $\eta \in F_{\xi}$ на общем слое, то сдвиг t_S на это сечение определяет автоморфизм $t_S: X \rightarrow X$, перестановочный с проекцией $X \rightarrow B$ (ср. пример 2). Очевидно, для сечений S и S' $\mu(t_S(x), t_{S'}(x')) = t_{S+S'}\mu(x, x')$. Так как через любую неособую точку слоя локально можно провести сечение, таким образом можно распространить μ с тех точек, где он регулярен, на все точки. (Наше рассуждение относилось к достаточно малой окрестности слоя F_b , но и вопрос о регулярности отображения — локальный.)

Таким образом, каждый вырожденный слой F_b тоже является группой, если выбросить его особые точки. В частности, надо

выбросить все кратные компоненты. Обозначим эту группу через $F_b^\#$. Она, вообще говоря, не связна. Ее связная компонента нуля — это та компонента, которую пересекает сечение S_0 , выбранное для определения группового закона. Если ее обозначить через F_b^0 , то группа $F_b^\#/F_b^0$ конечна.

Объединение всех открытых множеств $F_b^\#$, $b \in B$ (в частности, $F_b^\# = F_b$, если слой F_b — гладкий), является открытым множеством $X^\# \subset X$ и определяет, согласно теореме 2, семейство групп (вообще говоря, не собственных, так как не все слои проективны) над базой B . Иначе говоря, это — схема групп над B , называемая *моделью Нерона* поверхности X . Точно так же слои F_b^0 определяют семейство $X^0 \subset X^\#$. Очевидно, X^0 , $X^\#$ и X разлагаются только в точках вырожденных слоев.

Пример 4. Пусть все слои расслоения $X \rightarrow B$, заданного уравнением (1), являются гладкими эллиптическими кривыми, т. е. мы имеем семейство эллиптических кривых, параметризованное кривой B . Поскольку эллиптическая кривая однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется значением абсолютного инварианта $I = \frac{\alpha^3}{4\alpha^2 + 27\beta^2}$, по условию I регулярен на всей проективной базе B и, значит, является константой. Поэтому все слои изоморфны некоторой единственной эллиптической кривой E . В частности, общий слой F_ξ изоморфен F , но лишь над некоторым конечным расширением $k(B')$ поля $k(B)$. Накрытие $B' \rightarrow B$ должно быть неразветвленным, иначе, как легко видеть, семейство $X \rightarrow B$ имело бы негладкие слои. Накрытие $B' \rightarrow B$ можно выбрать нормальным (т. е. накрытием Галуа). Ясно, что мы имеем изоморфизм $X \times_{B'} B' \simeq E \times B'$, сохраняющий групповой закон (в другой терминологии $X \rightarrow B$ является формой постоянной групповой схемы $E \times B \rightarrow B$). Отсюда просто получается следующий способ конструкций подобных расслоений: надо взять свободно действующую группу Γ автоморфизмов кривой B' , для которой $B'/\Gamma = B$, и мономорфизм $\varphi: \Gamma \rightarrow \text{Aut}^0 C$, где $\text{Aut}^0 C$ — группа автоморфизмов, сохраняющих групповую структуру на C ; пусть $G \subset \text{Aut}(B' + C)$, $G = \{(g, \varphi(g)) \mid g \in \Gamma\}$; тогда $X = (B' \times C)/G$. Так как $|\text{Aut}^0 C| \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$, такие же значения возможны и для $|G|$. В частности, если кривая B — эллиптическая, то ее неразветвленное накрытие B' — тоже эллиптическая кривая и Γ состоит из ее сдвигов. Таким образом, мы получаем серию примеров биэллиптических поверхностей (пример 8 в § 2). Очевидно, для них $nK_X = 0$ при $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

10.2. Вырожденные слои. Выясним, какие у эллиптического расслоения могут быть вырожденные слои.

Пример 5. Пусть $\pi: B' \rightarrow B$ — циклическое накрытие степени n базы B , имеющее ветвление кратности n в точке $b'_0 \in B'$,

и s — автоморфизм этого накрытия. Пусть E — эллиптическая кривая и $a \in E$ — ее точка порядка n , а $\gamma: E \rightarrow E$ — автоморфизм $x \rightarrow x + a$ порядка n . Рассмотрим произведение $X' = B' \times E$, его автоморфизм $g = (s, \gamma)$ и фактор $X = X'/\{g\}$. Мы имеем очевидный морфизм $f: X \rightarrow B = B'/\{s\}$. Если $b \in B$ не является точкой ветвления накрытия π и $\pi^{-1}(b) = (b'_1, \dots, b'_n)$, то прообраз b в X — это кривые $b'_1 \times E, \dots, b'_n \times E$, переводящиеся друг в друга изоморфно под действием g . Поэтому слой $f^{-1}(b)$ не вырожден и изоморфен E . Если же $b_0 = \pi(b'_0)$, то кривая $b'_0 \times E$ инвариантна относительно g , которое действует на ней как s . Если t — локальный параметр в точке b_0 , то за локальное уравнение слоя $f^{-1}(b_0)$ можно взять t . Отсюда легко видеть, что слой F_{b_0} есть nE' , где $E' = E/\{\gamma\}$. Слои F_b при b , близких b_0 , наматываются на F_{b_0} и в пределе при $b \rightarrow b_0$ покрывают его n раз. Мы имеем здесь пример кратного слоя.

Подобные конструкции встречаются в трехмерной топологии (с заменой тора E на окружность). Расслоения на окружности, некоторые слои которых являются кратными, называются там *расслоениями Зейферта*.

Слой F_b эллиптического расслоения называется кратным, если кратности всех его компонент > 1 . Очевидно, если поверхность имеет хоть один кратный слой F_{b_0} , то она не имеет сечения — для любой кривой C , пересекающей слои, $(C, F_{b_0}) > 1$. Обратное верно локально: в некоторой окрестности (при $k = \mathbb{C}$ — в комплексной, в общем случае — в этальной топологии) некротного слоя существует сечение. Надо выбрать компоненту, входящую в вырожденный слой с кратностью 1, и через ее простую точку провести кривую, трансверсальную этой компоненте.

Опишем структуру вырожденных некротных слоев. Начнем с результата, относящегося к любым расслоениям на кривые:

Предложение. Пусть $F = \sum_1^r n_i C_i$ — вырожденный слой

семейства $f: X \rightarrow B$. Тогда квадратичная форма $\sum (C_i, C_j) x_i x_j \leq 0$ для $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}$ и равенство имеет место только, если вектор (x_1, \dots, x_r) пропорционален (n_1, \dots, n_r) .

Это — следствие того, что $(C_i, C_j) \geq 0$ при $i \neq j$, $(C_i, F) = 0$ и связности слоя. Нужный результат вытекает отсюда при помощи простого «линейно-алгебраического» рассуждения.

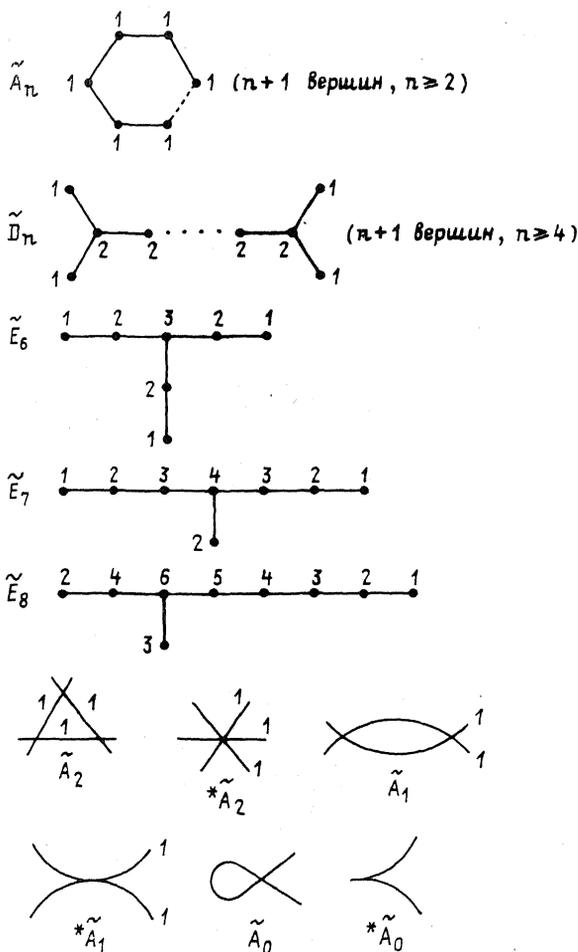
Отметим аналогии сформулированного предложения с теоремой Ходжа об индексе (теорема 1 в п. 5.2) и критерием стягиваемости в п. 6.3.

Возвращаясь к эллиптическим поверхностям, заметим, что для невырожденного слоя F $(F^2) = 0$ и, по формуле присоединения ((8) в п. 4.2), $(K_X, F) = 0$. Поэтому $(K_X, F) = 0$ для любого слоя. В частности, если слой C неприводим, то формула (9) в

п. 4.2 дает, что или он гладок, или $g(C)=0$ и $\delta=1$, откуда легко вывести, что он имеет одну особую точку с разделенными касательными или двойную точку типа $y^2=x^3$.

Если же слой приводим, то для любой его компоненты C_i $(C_i^2) < 0$, поэтому $(C_i, K_X) \geq 0$ (мы предполагаем поверхность X относительно минимальной). Но из $(K_X, F)=0$ следует тогда $(C_i, K_X)=0$, а из формулы (9) в п. 4.2 — что $(C_i^2) = -2$ и $g(C_i)=0$. Из предложения на с. 209 вытекает, что если слой имеет компоненты C_i, C_j , то $(C_i, C_j) \leq 2$, а если число компонент > 2 , то $(C_i, C_j) \leq 1$. Все матрицы (a_{ij}) , обладающие свойствами предложения, т. е. отрицательно полуопределенные, и такие,

Таблица 1



(числа обозначают кратности, с которыми кривые входят в слой)

что $a_{ij} \in \{-2, 0, 1\}$, перечислены в теории корней простых алгебр Ли (см. [32]). Они описываются графами, как в п. 6.3. При этом, однако, в некоторых простейших случаях, граф не определяет взаимного расположения компонент (например, $(C_i, C_j) = 2$ может означать две точки пересечения или касания в одной точке). В таблице 1 эти простейшие случаи расположены в двух последних строчках; компоненты изображаются на них не точками графа, а линиями.

Полезно иметь ввиду, что, кроме принятых нами обозначений, заимствованных из теории корней, иногда применяются другие, введенные Кодаррой. Они сопоставлены в таблице 2.

Таблица 2

\tilde{A}_n	\tilde{D}_n	\tilde{E}_6	\tilde{E}_7	\tilde{E}_8	$*\tilde{A}_2$	$*\tilde{A}_1$	$*\tilde{A}_0$
I_{n+1}	I_{n-4}^*	IV*	III*	II*	IV	III	II

Таблица 1 очень похожа на список особенностей дю Валя, приведенный в п. 6.3. Связь между ними следующая: если в любом слое из таблицы 1 отбросить какую-то компоненту кратности 1, получится граф особенности дю Валя, обозначенной тем же символом без \sim . Поэтому все компоненты, за исключением одной, можно стянуть в особую точку дю Валя, а оставшаяся компонента даст неприводимый слой полученной (особой) эллиптической поверхности. Оказывается, все такие поверхности описываются уравнениями типа (1) (по крайней мере, локально в окрестности слоя), т. е. имеют вейерштрассову нормальную форму. Наоборот, исходная поверхность является минимальным разрешением особенности полученной.

Таблица 3

$r=s=0$ $d > 2$ \tilde{A}_n $n=d-1$	$r=2, s=3$ $d > 6$ $\tilde{D}_n, n > 4$ $n=d-2$	$r=s=1$ $*\tilde{A}_0$ $d=2$	$r=1, s \geq 2$ $*\tilde{A}_1$ $d=3$
$r \geq 2, s=2$ $*\tilde{A}_2$ $d=4$	$r=2, s=3$ \tilde{D}_4 $d=6$	$r > s, s=4$ \tilde{E}_6 $d=8$	$r=3, s \geq 5$ \tilde{E}_7 $d=9$
$r > 4, s=5$ \tilde{E}_8 $d=10$			

Таблица 3 показывает, как по вейерштрассовой форме узнать тип слоя, с которого мы начинали. При этом для порядков нуля функций α и β в точке $b \in B$ мы полагаем $v_b(\alpha) = r$, $v_b(\beta) = s$. Если одновременно $r \geq 4$, $s \geq 6$, то за счет преобразования $x = t^2 u$, $y = t^3 v$, где t — локальный параметр в точке b , можно получить уравнение типа (1), в котором r уменьшилось на 4, а s — на 6. Поэтому дальше предполагается, что или $r < 4$, или $s < 6$. В таблице 3, кроме того, $d = v_b(D)$, где $D = 4\alpha^3 + 27\beta^2$.

Отметим, что во всех случаях $d = v_b(D)$ совпадает с эйлеровой характеристикой слоя — факт, который может быть осмыслен и доказан в более общей ситуации.

Тип группы F_b^*/F_b^0 указан в таблице 4.

Таблица 4

F_b	$\tilde{A}_n, * \tilde{A}_n$	\tilde{D}_n $n \equiv 1 \pmod{2}$	\tilde{D}_n $n \equiv 0 \pmod{2}$	\tilde{E}_6	\tilde{E}_7	\tilde{E}_8
F_b^*/F_b^0	$\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	0

Одномерная связная группа F_b^0 является эллиптической кривой, если слой F_b не вырожден, изоморфна мультипликативной группе для слоев типа A_n и аддитивной — во всех остальных случаях.

Теория корней используется не только как вспомогательное средство при выводе перечня типов вырожденных слоев (таблица 1) — в ней находят отражение все приведенные свойства этих слоев. Установим связь между теорией корней и теорией решеток, связанных с вырожденными слоями.

В решетке N_X подрешетка $F^\perp = \{x \in N_X \mid (x, F) = 0\}$ является неположительно определенной. Элементы $x \in F^\perp$, для которых $(x^2) = -2$, называются ее *корнями*. Им соответствуют классы, содержащие линейные комбинации компонент слоев D с $(D^2) = -2$. Сами компоненты являются простыми корнями. Скалярное произведение (x, y) , очевидно, переносится на решетку $F^\perp/F\mathbb{Z}$. Ее подрешетка R , порожденная корнями, отрицательно определена, а корни образуют корневую систему R_F . Ее простые корни соответствуют компонентам слоев, не пересекающим нулевое сечение S_0 . При разложении ее в сумму ортогональных неразложимых систем $R_F = \bigoplus R_i$ неразложимые слагаемые R_i соответствуют различным приводимым слоям расщепления $f: X \rightarrow B$. Если $Q(R_i)$ — подрешетка, порожденная корневой системой R_i , и $Q(R_i)^*$ — двойственная решетка, то $Q(R_i)^*/Q(R_i) \simeq F_b^*/F_b^0$, где F_b — приводимый слой, соответствующий системе R_i . Наконец, кратности, с которыми компоненты входят в слой, имеют следующий смысл: пусть слой

F_b соответствует корневой системе R_i ; в ней существует такой базис r_1, \dots, r_m , состоящий из корней, что любой корень выражается в виде $\pm \sum a_j r_j$, $a_j \geq 0$; существует максимальный положительный корень $\rho = \sum b_j r_j$ такой, что если $r = \sum a_j r_j$ — корень, то $b_j \geq a_j$; тогда, если C_j — компоненты, соответствующие простым корням r_j , и C_0 — компонента, пересекающая сечение S_0 , то $F_b = C_0 + \sum b_j C_j$.

Существует важная процедура упрощения вырожденных слоев, связанная с переходом к накрытиям базы. Если $B' \rightarrow B$ — такое накрытие, то поверхность $X' = X \times_B B'$, вообще говоря, — не гладкая. Ее минимальное разрешение особенностей дает опять эллиптическую поверхность $\bar{X} \rightarrow B'$, как правило — с более простыми слоями. При надлежащем выборе накрытия можно получить поверхность без кратных слоев и с вырожденными слоями только типа \tilde{A}_n . Эти вырожденные слои называются *стабильными*. Слои типа \tilde{D}_n при этой процедуре приводят к A_{2n+3} , а все остальные дают неособые слои (это легко проверить, исходя из таблицы 3). Такое упрощение есть весьма, частный случай общей *теоремы о полустабильной редукции* ([24]). Из этой же процедуры вытекает, что кратные слои всегда могут быть получены процессом, подобным примеру 2; надо только вместо семейства $B' \times E$ рассматривать некоторое семейство $X' \rightarrow B'$ без кратных слоев. Отсюда следует, что кратный слой F_b всегда имеет вид $m\bar{F}$, где \bar{F} — не кратный слой, в котором группа \bar{F}^0 — эллиптическая кривая или мультипликативная группа (чтобы в ней существовали точки конечного порядка!), т. е. \bar{F} — гладкая кривая или слой типа \tilde{A}_n .

Как мы видели в связи с выводом формулы присоединения ((9) в п. 4.2), ограничение пучка $\mathcal{O}_X(C + K_X)$ на гладкую кривую C дает пучок $\mathcal{O}_C(K_C)$. Для эллиптической поверхности X отсюда вытекает, что ограничение пучка $\mathcal{O}_X(K_X)$ на любой невырожденный слой F_b есть пучок \mathcal{O}_{F_b} . Отсюда легко следует, что некоторая кратность класса K_X содержит дивизор, составленный из компонент слоев, т. е. $rK_X \sim \sum n_i C_i$, где C_i — компоненты слоев. Но раньше мы видели, что для любой компоненты C вырожденного слоя $(C, K_X) = 0$ (в предположении, что X — относительно минимальная модель). Из предложения на с. 209 вытекает тогда, что K_X пропорционален целочисленной комбинации слоев, т. е. $rK_X = \sum n_i F_{b_i}$. Если $f: X \rightarrow B$ имеет сечение, то K_X равен такой комбинации. Таким образом, для эллиптических поверхностей с сечением $K_X = f^*(M)$, где M — некоторый класс дивизоров на кривой B . Можно показать, что $\mathcal{O}_B(M) = \mathcal{O}_B(K_B) \otimes R^1 f_* \mathcal{O}_X$. Нетрудно также показать ([26], [30]), что $\text{deg } R^1 f_* \mathcal{O}_X = \chi(\mathcal{O}_X)$, откуда следует

$$K_X = f^*(M), \quad \text{deg } M = 2g - 2 + \chi(\mathcal{O}_X). \quad (2)$$

С другой стороны, $\deg M = (K_X, S)$, где S — любое сечение семейства $X \rightarrow B$. Отсюда

$$(S^2) = -\chi(\mathcal{O}_X). \quad (3)$$

В частности, если X — рациональная поверхность, то $(S^2) = -1$, т. е. всякое сечение является (-1) -кривой.

Нетрудно вычислить и другие инварианты поверхности. Если $X \simeq B \times E$, где E — эллиптическая кривая, то $q(X) = g(B) + 1$. В остальных случаях, $q(X) = g(B)$. По теореме Римана—Роха $e(X) = 12\chi(\mathcal{O}_X)$, а по (5) в § 2 $e(X) = \sum e(F_b)$, причем значение $e(F_b)$ можно сразу увидеть из списка выродивших слоев в таблице 1. Очевидно, $e(X) \geq 0$ и $\chi(\mathcal{O}_X) = 1/12e(X) \geq 0$.

В частности, если $B \simeq \mathbf{P}^1$ и $X \not\simeq \mathbf{P}^1 \times E$ (тривиальный случай $X = \mathbf{P}^1 \times E$ мы не будем рассматривать), то $K_X \sim (r-2)E$ для некоторого целого $r \geq 0$, $\chi(\mathcal{O}_X) = r$, $q = 0$ и $p_g = r-1$. Нетрудно доказать, что вейерштрассову нормальную форму можно выбрать в виде

$$y^2 = x^3 + a(t)x + b(t), \quad (4)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — многочлены степеней $4r$ и $6r$. Это дает полную картину эллиптических поверхностей, обладающих сечением. При заданном числе r они образуют конечномерное семейство, параметризованное коэффициентами многочленов a и b в (4). Многочлены a, b удовлетворяют условиям: они не имеют общего корня кратности ≥ 4 в a и кратности ≥ 6 в b и $4a^3 + 27b^2 \neq 0$, а единственные преобразования, при которых поверхность (4) переходит в изоморфную, $a \rightarrow \alpha^2 a$, $b \rightarrow \alpha^3 b$, где $\alpha \in k$, $\alpha \neq 0$.

10.3. Якобиево расслоение ([18], [26], [63]). Рассмотрим теперь эллиптические расслоения $X \rightarrow B$, не имеющие сечения. Тогда на слоях уже нельзя ввести групповую структуру, рационально зависящую от точки b , так как в слое нельзя даже рационально выбрать нулевую точку. Пример такой ситуации дает абелева поверхность A , обладающая подгруппой — эллиптической кривой E . Гомоморфизм $A \rightarrow A/E = B$ определяет эллиптическое расслоение, все слои которого изоморфны E . Если бы существовало сечение $\varphi: B \rightarrow A$, то, согласно простейшим свойствам абелевых многообразий, φ можно было бы выбрать как гомоморфизм, а тогда мы имели бы $A \simeq E \times B$ (как группы).

Легко построить пример, когда это не так (при $k = \mathbf{C}$), — используя представление $A = \mathbf{C}^2/\Omega$. В случае, когда сечения нет, все же определена операция сложения $A * E \rightarrow A$, т. е. действие E на любом слое расслоения $A \rightarrow B$. Указанную операцию можно интерпретировать как послойное действие расслоения $J = E \times B$ на X , т. е. морфизм $J \times_B X \rightarrow X$. При этом J является уже расслоением с сечением. Аналогичная ситуация имеет место и в общем случае. С каждым эллиптическим расслоением $X \rightarrow B$ можно связать эллиптическое расслоение $J \rightarrow B$, имеющее

сечение, и рациональное отображение $\psi: J \times_B X \rightarrow X$, перестановочное с проекциями на B и обладающее свойствами:

- 1) ψ регулярно на множестве неособых точек слоев J и X ;
- 2) если слой F_b семейства X — не кратный, то на множестве $G_b^\# \times F_b^\#$ (где G_b — слой семейства J) ограничение ψ_b морфизма ψ определяет действие группы $G_b^\#$, которое свободно и транзитивно (напомним, что $F_b^\#$ и $G_b^\#$ обозначают множества простых точек слоев F_b и G_b).

Семейство J однозначно этими свойствами определяется; оно называется *якобиевым семейством* семейства X .

Таким образом, $F_b^\#$ является однородным пространством группы $G_b^\#$, элементы которой действуют без неподвижных точек. Следовательно, если выбрана точка $x_0 \in F_b^\#$, то $g \rightarrow \psi(y, x_0)$, $y \in G_b^\#$, определяет изоморфизм $F_b^\#$ и $G_b^\#$, который, однако, зависит от выбора x_0 . Если бы по точке в каждом слое можно было выбрать алгебраически, мы получили бы изоморфизм J и X , но для этого надо было бы иметь сечение в X , которого как раз и нет. Связь между группой $G_b^\#$ и кривой $F_b^\#$ — такая же, как между аффинным пространством A и пространством его векторов V . В общем случае аналогичное понятие называется *главным однородным пространством*. Таким образом, эллиптическое расслоение $X^\# = \bigcup G_b^\#$ является расслоением главных однородных пространств или, иначе, главным однородным пространством своего якобиева расслоения J . Послойную операцию $J^\# \times_B X^\# \rightarrow X^\#$ мы будем дальше обозначать как сложение.

Эту ситуацию полезно сопоставить с простой ее моделью теорией одномерных векторных расслоений над базой B . Для такого расслоения $L \rightarrow B$ пространство $L \setminus S_0$, где S_0 — нулевое сечение, является расслоением главных однородных пространств над мультипликативной группой G_m , т. е. над расслоением групп $B \times G_m$.

Эллиптические расслоения классифицируются по своим якобиевым расслоениям, которые мы считаем уже известными. В множестве $I(J)$ всех эллиптических расслоений с заданным якобиевым расслоением J можно ввести групповую операцию. Суммой расслоений X' и X'' называется такое расслоение X , для которого существует рациональное отображение $\eta: X' \times_B X'' \rightarrow X$, перестановочное с проекциями на базу, регулярное в множестве неособых точек слоев и связанное с действием якобиева семейства J условием, что послойно $\eta(x' + y', x'' + y'') = y' + y'' + \eta(x', x'')$, $x' \in F'_b$, $x'' \in F''_b$, $y', y'' \in G_b$, где F' и F'' — слои расслоений X' и X'' . Такое главное однородное пространство X существует и единственно. Нулем является само якобиево расслоение J . Эта группа аналогична группе $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ одномерных векторных расслоений. Группа $I(J)$ — периодическая. Ес-

ли $C \subset X$ — кривая, не содержащаяся в слоях проекции $X \rightarrow B$, и степень отображения $C \rightarrow B$ равна n , то элемент, соответствующий расслоению X в группе $I(J)$, аннулируется умножением на n .

Основная масса элементов группы $I(J)$ возникает за счет кратных слоев. Если F_b — кратный слой расслоения $X \rightarrow B$, то $F_b = m\bar{F}_b$, где F_b — гладкая кривая или слой типа \tilde{A}_n . Оказывается, послойное действие $J \times_B X \rightarrow X$ можно продолжить как морфизм на слои $G_b \subset J$ и F_b , но теперь действие $G_b^\#$ на $\bar{F}_b^\#$ будет иметь стационарную циклическую подгруппу порядка m , которая определяется некоторой точкой порядка m в группе G_b^0 . Это видно в примере 3 (п. 10.1), где $J = B \times E$, а кратный слой изоморфен $E/\{a\}$. Таким образом, каждому кратному слою расслоения X сопоставляется инвариант — точка конечного порядка соответствующего слоя $F_b \subset J$. Так возникает гомоморфизм

$$\tau: I(J) \rightarrow \bigoplus_{b \in B} (G_b^0)_t, \quad (5)$$

где $(G_b^0)_t$ — подгруппа элементов конечного порядка в G_b^0 .

Он является эпиморфизмом, если J имеет хотя бы один вырожденный слой. Наличие кратного слоя является препятствием к существованию даже дифференцируемого сечения (при $k = \mathbb{C}$), т. е., если $\tau \neq 0$, X не изоморфно J даже как дифференцируемое расслоение. Поэтому отображение τ аналогично сопоставлению одномерному расслоению L его характеристического класса $c(L) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ (если рассматривать L как главное однородное пространство над $B \times \mathbb{C}^*$).

Остается описать ядро $I_0(J)$ гомоморфизма τ . При $k = \mathbb{C}$, если J имеет хотя бы один вырожденный слой, $I_0(J)$ состоит из расслоений, имеющих дифференцируемое сечение и, как дифференцируемые расслоения, изоморфных J . Поэтому $I_0(J)$ является аналогом многообразия Пикара. Его исследование основывается на точной последовательности, являющейся аналогом экспоненциальной точной последовательности $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow 1$ ((2) в п. 3.3),

$$0 \rightarrow \Gamma \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Z}^0 \rightarrow 0, \quad (6)$$

где \mathcal{Z}^0 — пучок локальных сечений семейства $J^0 = \bigcup_{b \in B} G_b^0$, \mathcal{F} — пучок сечений одномерного расслоения, слоем которого над точкой $b \in B$ является касательное пространство в нулевой точке к группе G_b^0 , а Γ — пучок дискретных групп $R^1 f_* \mathbb{Z}$, слой которого над точкой $b \in B$ есть $H_1(G_b^0, \mathbb{Z})$. Точная последовательность (6) переносит на семейство J представление индивидуальной эллиптической кривой в виде $E = \mathbb{C}/\Omega$, $\Omega \simeq H_1(E, \mathbb{Z})$.

Группа $I_0(J)$ изоморфна т. н. *группе Брауэра* поверхности J и, с точностью до конечных групп, изоморфна $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^r$, где $r = b_2 - \rho$ — «число трансцендентных циклов» ([51], гл. V, § 3).

Пример 6. Пусть A — двумерное абелево многообразие, содержащее одномерное абелево подмногообразие (эллиптическую кривую) E . Пусть $A/E = B$ — тоже эллиптическая кривая.

Гомоморфизм $A \rightarrow B$ превращает A в расслоение над B , слои которого изоморфны E (ср. пример в начале этого пункта). Сдвиги на элементы $a \in E$ превращают его в главное однородное пространство над $E \times B$, причем, если $A \not\cong E \times B$, оно не имеет сечения. Нетрудно показать, что так получают все элементы группы $I_0(E \times B)$. Иными словами, группа $I_0(E \times B)$ изоморфна группе $\text{Ext}(B, E)$ расширений B при помощи E .

10.4. Классификация ([26], [29]). Канонический класс произвольной эллиптической поверхности вычисляется по формуле, аналогичной (2), но учитывающей кратные слои ([1]): если эти слои имеют вид $n_1 E_1, \dots, n_r E_r$, где E_i не делимы в N_X , то

$$K_X = f^*(M) + \sum (n_i - 1) E_i, M \in \text{Cl}(B),$$

$$\text{deg } M = 2g - 2 + \chi(\mathcal{O}_X). \quad (7)$$

Так как в $N_X \otimes \mathbf{Q} E_i = \frac{1}{n_i} F$, из (7) в $N_X \otimes \mathbf{Q}$

$$K_X = \gamma(X) F$$

$$\gamma(X) = 2g - 2 + \chi(\mathcal{O}_X) + \sum \left(1 - \frac{1}{n_i}\right). \quad (8)$$

Эллиптические поверхности делятся на 3 класса в зависимости от того, будет ли $\gamma(X) > 0, = 0$ или < 0 .

В первом случае при некотором $m > 0 \cong mK_X$ численно эквивалентно эффективному дивизору, во втором $K_X \cong 0$, в третьем — $mK_X \cong D > 0$ при некотором $m > 0$. Очевидно, в первом случае $mK_X \cong m'F$ и поэтому $\kappa(X) = 1$, в третьем $\kappa(X) = -\infty$, во втором $\kappa(X) = 0$, если $m_1 K_X \sim 0$ при некотором $m_1 \neq 0$, и $\kappa(X) = -\infty$, если это не так. Мы вскоре увидим, что при $\gamma(X) = 0$ всегда $m_1 K_X \sim 0$ при некотором $m_1 \neq 0$, так что $\kappa(X) = 0$.

В первом и третьем случаях поверхность имеет единственное эллиптическое расслоение — его неприводимые слои однозначно характеризуются тем, что являются неприводимыми компонентами кривых линейной системы $|mK_X|$ при достаточно большом $m > 0$ в первом случае и достаточно малом $m < 0$ — в третьем.

Во втором случае может существовать несколько разных эллиптических расслоений.

Пример 7. Абелево многообразие $X = E_1 \times E_2$, где E_1 и E_2 — эллиптические кривые, имеет два расслоения: $X \rightarrow E_1$ и $X \rightarrow E_2$.

Пример 8. Если поверхность $X_4 \subset \mathbf{P}^3$ содержит прямую L , то плоскость H , проходящая через L , высекает на X_4 , кроме L , кубическую кривую, а пучок плоскостей, проходящих через L , — расслоение на кубические кривые. Если поверхность X_4

содержит две не компланарные прямые, то на ней существует два разных эллиптических расслоения.

Случай $\gamma(X) > 0$ (т. е. $\kappa(X) = 1$) — «общий»: по теореме Римана — Роха $\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{12}e(X)$ и из неравенства $e(X) \geq 0$ и предложения в § 2 следует, что он имеет место при $g \geq 2$, при $g = 1$ и $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 1$, при $g = 0$ и $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 2$.

Оставшиеся случаи легко перечисляются. При $g = 1$ всегда $\gamma(X) \geq 0$; для $\gamma(X) = 0$ мы должны иметь $\chi(\mathcal{O}_X) = 0$, а значит, ввиду теоремы Римана — Роха ((2) в п. 5.1), $e(X) = 0$. Ввиду предложения в § 2 и предложения в п. 4.2, отсюда следует, что вырожденных слоев нет, а из леммы 2 в п. 8.4 вытекает, что при некотором неразветвленном накрытии Галуа базы $B' \rightarrow B$ $g(B') = 1$ и $X \times_B B' \simeq B' \times E$, где E — эллиптическая кривая. Отсюда $X = (B' \times E)/G$, где G — конечная группа автоморфизмов, свободно действующая на $B' \times E$, т. е. X — биэллиптическая поверхность.

Рассмотрим якобиево расслоение $J = J(X)$. Ввиду примера 4 (10.1) существуют такие эллиптическая кривая E и неразветвленное накрытие $B' \rightarrow B$, что $g(B') = 1$, $J \times_B B' \simeq E \times B'$ и $J \simeq (E \times B')/G$, где $|G| \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Для $X' = X \times_B B'$ $J(X') \simeq E \times B'$ и, согласно примеру 6 (п. 10.3), X' является абелевым многообразием, $X' \simeq A \supset E$, $A/E \simeq B'$. Так как $A = X' \rightarrow X$ — неразветвленное накрытие, степень которого равна $|G|$, и $K_A = 0$, $nK_X = 0$ при $n \in \{2, 3, 4, 6\}$. В любом случае $12K_X = 0$.

При $g = 0$ мы должны найти все решения соотношений

$$\gamma(X) = 0; \quad \sum_1^r \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = 2 - \chi(\mathcal{O}_X), \quad \chi(\mathcal{O}_X) = 0, 1, 2, \quad (9)$$

$$\gamma(X) < 0; \quad \sum_1^r \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) < 2 - \chi(\mathcal{O}_X), \quad \chi(\mathcal{O}_X) = 0, 1, 2. \quad (10)$$

Ответы в случае $\gamma(X) = 0$, т. е. для соотношений (9), сведены в таблице 5.

Таблица 5

N	$\chi(\mathcal{O}_X)$	r	Кратности слоев	K_X	Название поверхности	$\kappa(X)$
1	2	0		0	поверхность типа $K3$	0
2	1	2	(2, 2)	$2K_X \sim 0$	поверхность Энриквеса	0
3	0	4	(2, 2, 2, 2)	$2K_X \sim 0$	биэллиптическая	0
4	0	3	(3, 3, 3)	$3K_X \sim 0$	—»—»—	0
5	0	3	(2, 4, 4)	$4K_X \sim 0$	—»—»—	0
6	0	3	(2, 3, 6)	$6K_X \sim 0$	—»—»—	0

Легко видеть, что в случае 1 $q=0, p=1$, в случае 2 $q=0, p=0$. В случаях 3—6 $q=1, p=0$ и они не дают новых поверхностей. Действительно, для них многообразие Альбанезе является эллиптической кривой B и отображение Альбанезе $\alpha: X \rightarrow B$ приводит к рассмотренному случаю $\gamma(X)=0, g(B)=1$.

Таким образом, при $\gamma(X)=0$ всегда $12K_X=0$; в частности, $\kappa(X)=0$.

Если же $\kappa(X) < 0$, $-K_X$ численно эффективен. Поэтому, если X — минимальная модель, она — линейчатая по теореме 1 в п. 7.1. В противном случае пусть $X \rightarrow Y$ — морфизм на ее минимальную модель. Из (2) в п. 6.1 следует, что $(K_Y^2) > 0$ и $(D, K_Y) = (\sigma^*(D), K_X) \leq 0$ для $D > 0$. Поэтому Y — опять рациональная или линейчатая (легко видеть, что она обязательно рациональная).

10.5. Применения. Эллиптические поверхности имеют много приложений. Укажем некоторые из них.

1. Из теории эллиптических кривых известно, что если $E \subset \mathbf{P}^2$ — гладкая кубическая кривая, на которой выбрана нулевая точка 0 и введен закон сложения, то точки p_1, \dots, p_9 тогда и только тогда высекаются кривой G степени 3, когда $\sum p_i = \mathcal{O}$ (в смысле этого закона сложения). Тогда $\lambda E + \mu G$ — пучок кубик. Если раздуть точки p_i , получим поверхность X с пучком эллиптических кривых (пример 1 в п. 10.1). Аналогично, если $\sum p_i = \varepsilon_n$ — точка порядка n на E , то цикл $n \sum p_i$ высекается кривой G степени $3n$, имеющей n -кратные особые точки во всех точках p_i . Нормализация кривой G имеет, по (12) в п. 6.2, род 1. Кривые $\lambda F^n + \mu G$ образуют пучок кривых рода 1 на \mathbf{P}^2 .

Если раздуть точки p_i , опять получим поверхность Y с пучком эллиптических кривых и с n -кратным слоем, соответствующим кривой F_0^n . Построенная ранее поверхность является ее якобиевым расслоением. Такие пучки эллиптических кривых называются *пучками Альфана*. Можно показать, что любая рациональная эллиптическая поверхность получается из некоторого пучка Альфана (надо только доказать слияние точек p_i и вырождения кривых в кривые типа \tilde{A}_n и $^* \tilde{A}_n, n=0, 1, 2$). Это значит, что любой пучок кривых бирационального рода 1 (т. е. нормализации которых имеют род 1) на \mathbf{P}^2 получается из некоторого пучка Альфана бирациональным автоморфизмом плоскости ([7]).

2. Пусть по-прежнему X — эллиптическая поверхность, полученная раздуванием 9 точек пересечения двух кубик на \mathbf{P}^2 , а Y_{p_1, p_2} соответствует элементу группы $I(X)$ главных однородных пространств, имеющих якобиево расслоение X , причем Y_{p_1, p_2} имеет 2 кратных слоя кратности p_1, p_2 , где $p_1 \neq p_2$ — простые числа. Не трудно показать, что для всех поверхностей $Y \subset I(X)$ $q = p_g = 0$. Кроме того, можно доказать, что $\kappa_1(Y_{p_1, p_2}) = 0$. Это

следует из того, что если F — слой эллиптического семейства на Y , то гомоморфизм $\pi_1(F) \rightarrow \pi_1(Y)$ — эпиморфизм. Поэтому группа $\pi_1(Y)$ абелева и, так как $q=0$, конечна. Из теоремы двойственности следует, что кручение в $\pi_1(Y) = H_1(Y_{p_1, p_2}, \mathbb{Z})$ совпадает с кручением в $H_2(Y_{p_1, p_2}, \mathbb{Z}) \simeq \text{Pic } Y_{p_1, p_2}$. Предположим, что $D \in \text{Div } Y_{p_1, p_2}$ и $nD \sim 0$, $n > 1$, т. е. $D \approx 0$; тогда из теоремы Римана — Роха легко следует $l(K - D) \geq 1$, откуда вытекает, что D эквивалентен линейной комбинации компонент слоев. Если на X вырожденные слои неприводимы (т. е. имеют тип \tilde{A}_0 или $^* \tilde{A}_0$), то $D \sim mF + k_1 E_1 + k_2 E_2$, где $p_i E_i$ — кратные слои. Мы можем считать, что $0 \leq k_i < m$. Отсюда и из соотношений $p_i E_i \sim F$, $nD \sim nmF + nk_1 E_1 + nk_2 E_2$ вытекает $p_1 p_2 m + k_1 p_2 + k_2 p_1 = 0$, а это приводит к противоречию.

С другой стороны, поверхность Y_{p_1, p_2} не рациональна — эллиптическое семейство на ней имеет 2 кратных слоя, а на рациональной поверхности оно происходит из пучка Альфана и имеет единственный кратный слой. Таким образом, построен пример нерациональной поверхности с $q = p = \pi_1(X) = 0$ ([8]).

Мы упоминали в конце § 9 аналогичный пример в классе поверхностей общего типа.

3. Так как для X и для Y_{p_1, p_2} $p_g = 0$ (см. выше), для них $H_2(\mathbb{Z}) \simeq \text{Pic } X \simeq N_X$. Для X , согласно формуле (2) в п. 6.1, квадратичная форма, определенная в N_X , имеет вид $x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{10}^2$. Для Y_{p_1, p_2} из стандартных формул следует, что $b_2 = 10$ и индекс (разность между числом положительных и отрицательных квадратов в форме в $N_Y = H_2(Y, \mathbb{Z})$) равен -8 . Согласно одной теореме Рохлина, если форма в $H_2(X)$ для дифференцируемого четырехмерного односвязного многообразия X четна, то индекс делится на 16. Поэтому указанная форма для Y_{p_1, p_2} нечетна. Но общая теорема об унимодулярных неопределенных квадратичных формах утверждает, что они определяются своим типом (числом положительных и отрицательных квадратов) и четностью. Поэтому для X и Y_{p_1, p_2} они эквивалентны. Наконец, односвязные четырехмерные многообразия определяются квадратической формой с точностью до гомотопического типа, а согласно результатам Фридмана и с точностью до гомеоморфизма. Таким образом, X и Y_{p_1, p_2} имеют одинаковый гомотопический тип. В то же время, Дональдсон построил инвариант, позволяющий различать такие многообразия с точностью до диффеоморфизма. Этот инвариант различен, в частности, для Y_{2p_1} и Y_{2p_2} (при $p_1 \neq p_2$). Таким образом, существует бесконечное число четырехмерных многообразий одного гомотопического (и даже топологического) типа, не диффеоморфных друг другу ([73]).

В последнее время при помощи развития тех же методов было получено несколько новых результатов о топологии алгебраических многообразий.

Доказано, что на любой односвязной алгебраической (проективной) поверхности X , за исключением, быть может, плоскости с не более, чем 7 раздутыми точками, и квадрики, существует «экзотическая» гладкость, т. е. 4-мерное гладкое многообразие, гомеоморфное, но не диффеоморфное $X(\mathbb{C})$.

Для плоскости с 9 раздутыми точками (как в рассмотренном примере) и для поверхностей типа $K3$ установлено существование бесконечного числа различных «экзотических» гладкостей. В последнем случае всякая такая гладкость обладает квазикомплексной структурой, которая, однако, не интегрируема. Эти примеры показывают отличие 4-мерных гладких компактных многообразий от многообразий размерности $n \geq 5$, для которых, согласно результатам С. П. Новикова, существует лишь конечное число различных гладкостей.

Показано, наконец, что все алгебраические поверхности, полученные раздутием плоскости в фиксированном числе $d \geq 8$ точек, гомеоморфны (но, вообще говоря, не диффеоморфны).

§ 11. Поверхности канонической размерности 0

Мы по-прежнему рассматриваем лишь поверхности, являющиеся минимальными моделями.

Из теоремы 2 в п. 8.1 следует, что поверхность с $\kappa=0$ изоморфна абелевой поверхности или поверхности типа $K3$ либо имеет эллиптический пучок, а в теореме 2 из п. 8.1 описаны поверхности с эллиптическим пучком и $\kappa=0$. Таким образом, имеются следующие 4 типа поверхностей с $\kappa=0$:

- I. поверхности типа $K3$,
- II. поверхности Энриквеса,
- III. абелевы поверхности,
- IV. биэллиптические поверхности.

Поверхности типа $K3$ посвящен следующий параграф. Здесь мы рассмотрим подробнее оставшиеся случаи.

11.1. Поверхности Энриквеса. По определению $2K_X \sim 0$, $p(X) = q(X) = 0$.

Предложение. Для поверхности Энриквеса $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$, $l(X) = 12$, $b_2 = 10$, $H_2(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{10} + \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\pi_1(X) \simeq H_1(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Универсальная накрывающая для X является поверхностью типа $K3$. Многообразие Пикара равно 0 и все двумерные циклы алгебраичны, т. е. $S_X \simeq H_2(X, \mathbb{Z})$.

Значения $\chi(\mathcal{O}_X)$, $l(X)$ и b_2 находятся из формулы Нётера ((2) в п. 5.1). Так как размерность многообразия Пикара равна $q(X)$, оно равно 0. Из того, что $p(X) = 0$, и теоремы Лефшеца (п. 3.3) следует, что все циклы алгебраичны, т. е. $S_X \simeq H_2(X, \mathbb{Z})$. Так как $K_X \neq 0$ в S_X и $2K_X = 0$, в S_X , а значит, и в $H_2(X, \mathbb{Z})$ есть элемент второго порядка. Из формулы универсальных коэффициентов следует, что тогда есть элемент второго порядка и в $H_1(X, \mathbb{Z})$, а значит, существует неразветвленное

накрытие степени 2 $Y \rightarrow X$. Тогда $K_Y = 0$, $l(Y) = 24$, откуда $q(Y) = 0$, т. е. Y — поверхность типа КЗ. В следующем параграфе мы поясним, почему поверхности типа КЗ односвязны. Таким образом, Y — универсальная накрывающая для X и, значит, $\pi_1(X) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

В примере 9 из § 2 мы построили поверхность Энриквеса как фактор поверхности типа КЗ, заданной уравнениями

$$f_1 + h_1 = 0, \quad f_2 + h_2 = 0, \quad f_3 + h_3 = 0, \quad (1)$$

где $f_i(x_0, x_1, x_2)$ и $h_i(x_3, x_4, x_5)$ — квадратичные формы, по инволюции $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5) \rightarrow (x_0 : x_1 : x_2 : -x_3 : -x_4 : -x_5)$.

Можно показать, что любая поверхность Энриквеса может быть так получена ([74]). Это задание дает возможность определить число параметров от которых зависят поверхности Энриквеса. Так как каждая из квадратичных форм $f_1, f_2, f_3, h_1, h_2, h_3$ имеет 6 коэффициентов, в уравнения входит 36 коэффициентов. Поверхность переходит в изоморфную при линейных преобразованиях трех переменных x_0, x_1, x_2 , трех переменных x_3, x_4, x_5 и трех уравнений (1). Всего в этих преобразованиях участвует $3^2 \cdot 3 = 27$ коэффициентов, но умножение всех переменных x_0, \dots, x_5 на $\alpha \neq 0$ совпадает с умножением всех уравнений (1) на α^2 так что остается 26 независимых коэффициентов. Поэтому множество неэквивалентных поверхностей Энриквеса зависит от $36 - 26 = 10$ параметров и составляет связное 10-мерное многообразие. Этому эвристическому подсчету можно дать точное обоснование. Именно, в общей теории деформаций аналитических многообразий доказывается, что (по крайней мере, локально) многообразие модулей для деформаций многообразия X существует и гладко, если $h^2(X, \mathcal{T}_X) = 0$ (\mathcal{T}_X — пучок сечений касательного расслоения), и размерность его равна $h^1(X, \mathcal{T}_X)$. Для поверхности Энриквеса легко показать, что $h^2(X, \mathcal{T}_X) = 0$, $h^1(X, \mathcal{T}_X) = 10$.

Мы приведем еще две конструкции поверхностей Энриквеса:

А. Пусть $Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ — квадрика и B — гладкая кривая в классе $4H$, где H — плоское сечение. Легко показать, что существует двулистное накрытие $Y \rightarrow Q$, разветвленное в заданном дивизоре D , если $D \equiv 0 \pmod{2}$. В частности, существует такое накрытие $Y \rightarrow 0$ с ветвлением в B . Так как $K_Q = -2H$, прямое вычисление дает $K_Y = 0$ и Y является поверхностью типа КЗ. Рассмотрим на Q автоморфизм τ , действующий как обращение $(x_0 : x_1) \rightarrow (x_0 : -x_1)$ на каждом из \mathbb{P}^1 . Он имеет на Q 4 неподвижные точки p_1, p_2, p_3, p_4 . Легко проверить, что кривую B можно выбрать инвариантной относительно τ и не проходящей через точки $p_1 - p_4$. В этом случае τ подымается на Y и дает там инволюцию τ' . Если ν — автоморфизм накрытия $Y \rightarrow Q$, то $g = \nu\tau$, как легко видеть, не имеет неподвижных точек и $X = Y/G$, где $G = \{1, g\}$, является поверхностью Энриквеса.

Достоинство этого представления заключается в том, что оно делает очевидным существование на X двух пучков эллип-

тических кривых. Именно, проекция $Y \rightarrow \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\pi_i} \mathbf{P}^1$ (где π_i — проекция на i -й множитель, $i=1, 2$) определяет пучок кривых, являющихся двулиственными накрытиями прямой $\pi_i^{-1}(c)$, $c \in \mathbf{P}^1$, разветвленными в четырех точках пересечения $\pi_i^{-1}(c) \subset B$, т. е. эллиптическими кривыми. Оба эти пучка спускаются на X . Каждый из них дает как раз тот пучок, при помощи которого мы получали поверхность Энриквеса в теореме 2 в п. 8.1.

Приведенную конструкцию можно обобщить, допуская у B такие особенности, которые приводят у Y к особенностям дю Валя, и разрешая потом эти особенности. Но и таким образом можно получить не все поверхности Энриквеса, а только «общие» — имеющие два разных эллиптических пучка. Аналогичную конструкцию можно провести, заменив квадрику Q на квадратичный конус, — так получаются «специальные» поверхности Энриквеса, имеющие единственный эллиптический пучок ([74]).

Б. Классическая конструкция поверхности Энриквеса (ему самому принадлежащая) задает ее как нормализацию поверхности 6-й степени в \mathbf{P}^3 , дважды проходящей через ребра тетраэдра. Если принять этот тетраэдр за координатный, то уравнение поверхности 6-й степени приобретает вид

$$x^2y^2z^2 + x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + xyzf_2(x, y, z) = 0, \quad (2)$$

где f_2 — многочлен 2-й степени.

Формула для канонического класса гладкой поверхности X степени n в \mathbf{P}^3 : $K_X = (n-4)H$, где H — сечение плоскостью (пример 1 в § 2), может быть обобщена на случай, когда X — нормализация поверхности $X' \subset \mathbf{P}^3$ степени n , дважды проходящей через кривые C_1, \dots, C_r (и не имеющей более сложных особенностей): $K_X = (n-4)H - \sum C_i$. В нашем случае система $|K_X|$ состоит из квадратиков, проходящих через ребра тетраэдра; таких квадратиков не существует и, значит, система $|K_X|$ пуста, т. е. $p_g(X) = 0$. Система $|2K_X|$ состоит из поверхностей 4-й степени, проходящих через ребра тетраэдра. Такая поверхность (приводимая) существует — это сумма граней тетраэдра. Поэтому $P_2(X) > 0$. Нетрудно тем же путем показать, что $2K_X = 0$.

Заметим, что в форме (2) могут быть представлены не все поверхности Энриквеса, а лишь те, которые при разборе предшествующей конструкции были названы «общими» (см., например, [1]).

11.2. Абелевы поверхности ([59]). По определению *абелева поверхность* — это проективная поверхность, являющаяся алгебраической группой (которая автоматически абелева). Для нее $K_X = 0$, так как существует форма $\omega \in H^2(X, \Omega^2)$, инвариантная относительно сдвигов, для которой очевидно $(\omega) = 0$. Кроме того, ввиду тривиальности касательного расслоения (как у любой

алгебраической группы), $l(X) = 0$ и, значит, $\chi(\mathcal{O}_X) = 0$, откуда $q = 2$. Мы видели в § 8, что условиями $K_X = 0$, $q = 2$ абелевы поверхности характеризуются. Дальше в этом пункте X будет обозначать абелеву поверхность.

Из формулы присоединения следует, что для кривой $C \subset X$ $C^2 \equiv 0 \pmod{2}$, откуда $(D^2) \equiv 0 \pmod{2}$ для любого $D \in S_X$. При помощи сдвига $t_a: x \mapsto x + a$ мы можем перевести кривую C в кривую $t_a(C)$, находящуюся с C в общем положении. С другой стороны, кривые $t_a(C)$, $a \in X$, образуют алгебраическое семейство и, значит, алгебраически эквивалентны. Поэтому $(C^2) = (C, t_a(C)) \geq 0$ — на X нет исключительных кривых (как уже упоминалось, не существует нетривиальных отображений рациональных кривых в абелеву многообразия).

Простейшим инвариантом решетки N_X является число $\pi(X) = \min \left\{ \frac{1}{2} (C^2) \mid (C^2) > 0, C \in N_X \right\}$. Например, если $X = E_1 \times E_2$, где E_1 и E_2 — эллиптические кривые, то для $C = (E_1 \times e_2) + (e_1 \times E_2)$ $(C^2) = 2$, $\pi(X) = 1$. Если $X = g(C)$ — якобиан кривой C рода 2 (пример 6 в § 2), то C вкладывается $X: c \mapsto (c - c_0) \in \text{Pic}^0 X$ (при некоторой фиксированной точке c_0). Считая, что $C \subset X$, мы получим по формуле присоединения $(C^2) = 2$ и, значит, опять $\pi(X) = 1$. Но существуют абелевы поверхности с любым заданным значением $\pi(X)$. Например, если E_1 и E_2 — достаточно общие эллиптические кривые, $e_1 \in E_1$ и $e_2 \in E_2$ — точки порядка n , $a = (e_1, e_2) \in E_1 \times E_2$ и $X = (E_1 \times E_2) / \langle a \rangle$, то, как нетрудно проверить, $\pi(X) = n$.

Абелева поверхность X вместе с обильным классом дивизоров h называется *поляризованной* (абелевой) *поверхностью*, а число $\frac{1}{2} (h^2)$ — *степенью поляризации*. Таким образом, $\pi(X)$ — это наименьшая степень поляризации поверхности X . В случае $\pi(X) = 1$ абелева поверхность с соответствующим классом дивизоров называется *главнополяризованной*.

Можно показать, что абелевы поверхности с $\pi(X) = 1$ — это либо якобианы кривых рода 2, либо имеют вид $E_1 \times E_2$ (эти два случая имеют пересечение). Любое абелево многообразие может быть представлено, аналогично рассмотренному примеру, в виде X/Γ , где X — абелево многообразие, $\pi(X) = 1$ и $\Gamma \subset X$ — конечная подгруппа.

Можно показать, что все абелевы поверхности X с заданным значением инварианта $\pi(X)$ могут быть вложены как поверхности одной и той же степени в одно и то же проективное пространство, где они образуют неприводимое семейство поверхностей. Из этого можно вывести, что они (с точностью до изоморфизма) параметризуются точками некоторого неприводимого многообразия. Размерность этого «многообразия модулей» равна 3 (для любого значения π).

Эту картину можно пояснить более наглядно в случае $k = \mathbb{C}$. Любой комплексный тор размерности 2 имеет вид \mathbb{C}^2/Ω , где $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ — четырехмерная решетка. Пусть e_1, e_2, e_3, e_4 — ее базис. Можно выбрать e_1, e_2 за координатные векторы $(1, 0), (0, 1)$ в \mathbb{C}^2 ; тогда решетка задается векторами $e_3 = (\alpha, \beta), e_4 = (\gamma, \delta)$. Условие независимости над \mathbb{R} векторов e_1, e_2, e_3, e_4 выражается тогда условием

$$\begin{vmatrix} \operatorname{Im} \alpha & \operatorname{Im} \beta \\ \operatorname{Im} \gamma & \operatorname{Im} \delta \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3)$$

Таким образом, произвольный тор определяется четырьмя параметрами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ с условием (3).

Мы уже говорили (пример 6 в § 2), что не всякий тор $X = \mathbb{C}^2/\Omega$ изоморфен (как комплексное аналитическое многообразие) алгебраической поверхности. Именно, если σ_{ij} — базисные циклы в $H_2(X, \mathbb{Z})$ — образы $e_i \wedge e_j$, то любой алгебраический цикл $C = \sum a_{ij} \sigma_{ij}$ дает соотношение

$$\sum a_{ij} \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_j \\ \eta_i & \eta_j \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

если координаты базисных векторов e_i равны (ξ_i, η_i) . Соотношение (4) можно переписать в виде

$$CAC^T = 0, \quad (5)$$

где $A = (a_{ij})$ — кососимметрическая матрица типа $(4, 4)$ а C — «матрица периодов» типа $(2, 4) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \dots & \xi_4 \\ \eta_1 & \dots & \eta_4 \end{pmatrix}$. Соотношения (4) и (5) можно слегка усилить. Для этого надо рассмотреть число $\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = \int_C \sum_{i,j=1,2} \lambda_i \bar{\lambda}_j dz_i \wedge \bar{d}z_j$.

Простое вычисление показывает, что $\varphi(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0$, причем $\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ только, если прообраз C в \mathbb{C}^2 есть прямая, параллельная прямой $\bar{\lambda}_1 z_1 + \bar{\lambda}_2 z_2 = 0$. В этом случае C является сдвигом эллиптической кривой и $(C^2) = 0$. Таким образом, если кривая C выбрана обильной, то $\varphi(\lambda_1, \lambda_2)$ — положительно определенная эрмитова форма. Это можно переписать как

$$CAC^* > 0, \quad (6)$$

где > 0 означает положительную определенность.

Теорема 1. Тор \mathbb{C}^2/Ω с матрицей периодов C тогда и только тогда изоморфен алгебраической поверхности, когда выполняются соотношения (5) и (6) с некоторой целочисленной кососимметрической матрицей A .

Необходимость мы показали. Достаточность доказывается при помощи прямой конструкции вложения в некоторое проективное пространство при помощи т. н. θ -функций.

Для более явной записи соотношений (5) и (6) надо воспользоваться удобным выбором базиса — как в \mathbb{C}^2 , так и в решетке Ω .

Выбор базиса в Ω приводит к замене $A \mapsto M^T A M$, где M — унимодулярная целочисленная матрица. Как известно, таким образом можно привести A к виду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix},$$

где $D = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$, $\delta_1 | \delta_2$. Так как во все соотношения D входит с точностью до скалярного множителя, мы можем даже считать $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Выбрав, как и раньше, e_1 и e_2 за базис в \mathbb{C}^2 , мы приведем C к виду $C = (E, U)$, где E — единичная, а U — любая матрица порядка 2. Легко проверить, что тогда соотношения (5) — (6) принимают вид

$$(UD)^T = UD, \quad (7)$$

$$\text{Im}(UD) > 0, \quad (8)$$

где $\text{Im}(UD)$ — матрица, состоящая из мнимых частей, а знак > 0 означает положительную определенность.

Вспомним, что матрица A возникла из коэффициентов алгебраического цикла $s = \sum a_{ij} \sigma_{ij} \in H_2(X, \mathbb{Z})$. Отождествляя $H_2(X, \mathbb{Z})$ с $H^2(X, \mathbb{Z}) = \wedge^2 H^1(X, \mathbb{Z})$, мы можем рассматривать A как бивектор и вычислить (s, s) как квадрат этого бивектора. Легко получается, что $(s, s) = 2d$. Таким образом, мы можем считать, что d совпадает с введенным выше инвариантом $\pi(X)$.

При фиксированном d (т. е. $\pi(X)$) и D положим $Z = UD$. Тогда неравенства (8) описывают открытое множество в трехмерном пространстве симметрических (по (7)) матриц Z .

Если $\rho(X) > 1$, то, кроме того цикла C с $(C^2) = d$, которым мы пользовались при выводе соотношений (5) и (6), существует не пропорциональный ему цикл C' . Он дает соотношение, аналогичное (7), т. е. квадратичное соотношение между элементами матрицы $Z \subset \mathbb{H}_2$. Таким образом, в области \mathbb{H}_2 определено счетное число поверхностей и, если точка Z не принадлежит ни одной из них, то для соответствующей поверхности X $\rho(X) = 1$; если Z принадлежит только одной, то $\rho(X) = 2$; если Z принадлежит пересечению двух, то $\rho(X) = 3$; если — пересечению трех, то $\rho(X) = 4$ (рис. 20).

11.3. Биэллиптические поверхности. По определению это — поверхности $X = E \times B/G$, где E, B — эллиптические кривые, G — конечная подгруппа сдвигов на E , действующая на B не только сдвигами, но и нетривиальными групповыми автоморфизмами. Оказывается, имеется всего несколько возможностей для подобных конструкций и все они могут быть явно описаны.

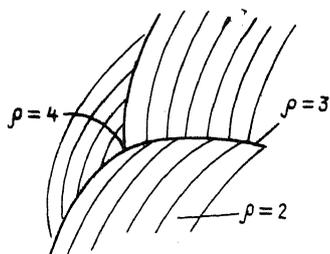


Рис. 20

Так как G является конечной подгруппой группы автоморфизмов кривой B , G представляется в виде полупрямого произведения $T \times H$, где $T \subset B$ — подгруппа сдвигов, а H — нетривиальная подгруппа группы автоморфизмов B , сохраняющих групповую структуру. Из теории эллиптических кривых известно, что вся группа таких автоморфизмов изоморфна $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, с $n \in \{2, 3, 4, 6\}$; следовательно, такой же вид имеет и H . С другой стороны, G является подгруппой группы сдвигов кривой E , которая, очевидно, абелева. Следовательно, произведение $T \times H$ — прямое; это означает, что элементы из T инвариантны относительно H . Легко перечислить все неподвижные точки относительно действия H :

для отражения $x \mapsto -x$ — это точки второго порядка;

для кривой $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ и автоморфизма $x \mapsto ix$ — это точки 0 и $\frac{1+i}{2}$;

для кривой $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \rho\mathbb{Z}$, $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, и автоморфизма $x \mapsto \rho x$ — это точки $0, \pm \left(\frac{1-\rho}{3}\right)$;

для той же кривой и автоморфизма $x \mapsto -\rho x$ — это только точка 0 .

Кроме того, так как $G = T \times H$ — подгруппа сдвигов на кривой E , G порождается двумя элементами, кроме случая $B_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, где $B_2 \subset B$ — подгруппа точек 2-го порядка.

Из вышеизложенного уже нетрудно получить полный список биэллиптических поверхностей ([28]):

Теорема 2. Всякая биэллиптическая поверхность является одной из следующих:

- 1) $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ действует на B отражением $x \mapsto -x$;
- 2) $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ участвует на B посредством $x \mapsto -x, x \mapsto x + \varepsilon$, где $\varepsilon \in B_2$;
- 3) $B = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$, $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ с действием $x \mapsto ix$;
- 4) $B = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$, $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ с действием $x \mapsto ix, x \mapsto x + \frac{1+i}{2}$;

5) $B = C/Z + \rho Z$, $G = Z/3Z$ с действием $x \mapsto \rho x$;
 6) $B = C/Z + \rho Z$, $G = Z/3Z \times Z/3Z$ с действием $x \mapsto \rho x$,
 $x \mapsto x + \frac{1-\rho}{3}$;

7) $B = C/Z + \rho Z$, $G = Z/6Z$ с действием $x \mapsto -\rho x$.

В случаях 1) и 2) имеем $2K \sim 0$, в случаях 3) и 4) $4K \sim 0$, в случаях 5) и 6) $3K \sim 0$ и, наконец, в случае 7) $6K \sim 0$, так что в любом случае $12K \sim 0$.

З а м е ч а н и е. Если в приведенной выше конструкции $T=0$, т. е. G состоит из автоморфизмов групповой структуры группы B , то мы получаем поверхности, построенные в примере 4 из п. 10.1. Они соответствуют случаям 1), 3), 5) и 7).

§ 12. Поверхности типа $K3$

12.1. Основные инварианты. Напомним (ср. пример 7 в § 2), что *поверхность типа $K3$* — это алгебраическая поверхность X , для которой $K_X=0$, $h^1(X, \mathcal{O}_X)=0$.

Из формулы Нётера ((2) в п. 5.1) следует тогда, что $b_2=22$, $\rho_g=1$, $h^{1,1}=20$. Из формулы присоединения ((9) в п. 4.2) вытекает, что для неприводимой кривой C (C^2) четно и $(C^2) \geq -2$. При этом $(C^2) = -2$ тогда и только тогда, когда кривая C — рациональная и гладкая. Такие кривые называются *(-2)-кривыми*. Если кривая C — гладкая рода 1 (эллиптическая), то $(C^2)=0$, а если $(C^2)=0$, то C — или эллиптическая, или рациональная, имеющая одну двойную точку типа узла или острия (последнее легко следует из формулы (9) в п. 4.2).

Основным инвариантом поверхности X типа $K3$ является ее группа Севери S_X (ввиду того, что $h^1(X, \mathcal{O}_X)=0$, $S_X = \text{Pic } X$). Из теоремы Римана—Роха легко следует, что S_X не имеет кручения, т. е. $S_X = N_X$. Решетка S_X четна, т. е. для $x \in N_X$ x^2 четно. Это следует по линейности из того, что (C^2) четно, если C — неприводимая кривая. Из того, что основное поле имеет характеристику 0 (как мы все время предполагаем), следует, что ранг ρ решетки S_X не превосходит $h^{1,1}=20$. Простейший инвариант, связанный с X и S_X , — это минимальное значение $\frac{1}{2}(x^2)$ для $x \in S_X$ и $(x^2) > 0$. Мы назовем его *классом поверхности X* и обозначим через π_X .

Например, для двойного накрытия плоскости $X \rightarrow \mathbf{P}^2$ с ветвлением в кривой 6-го порядка $\pi_X=1$, для неособой поверхности степени 4 в \mathbf{P}^3 $\pi_X=2$, для полного пересечения типа (2, 3) в \mathbf{P}^4 $\pi_X=3$, для полного пересечения типа (2, 2, 2) в \mathbf{P}^5 $\pi_X=4$.

Из двух двойственных друг другу конусов E и \bar{A} , введенных в п. 5.2, мы будем здесь пользоваться конусом \bar{A} замыканием конуса обильных дивизоров. Мы знаем, что $\bar{A} \subset \Omega_+$, где Ω_+ —

положительная пола конуса $\Omega: (x^2) \geq 0$, выделенная условием $(x, h) > 0$, где h — класс обильного дивизора. Из теоремы Римана—Роха следует, что для дивизора $D \in \Omega$ на поверхности типа КЗ или $D > 0$, или $-D > 0$, а если $D \in \Omega_+$, то $D > 0$. Конус \bar{A} определяется условием $(x, c) \geq 0$, где c — класс кривой C .

Простое рассуждение показывает, что для дивизора $D > 0$ на поверхности типа КЗ из $(D^2) > 0$ следует $(D, C) > 0$ для любой неприводимой кривой C , кроме, может быть, (-2) -кривых. Таким образом, $x \in \bar{A}$, если $(x, c) \geq 0$ для всех классов c , содержащих (-2) -кривые.

В проективном пространстве $\mathbf{P}(S_X \otimes \mathbf{R})$ внутренность конуса Ω_+ определяет открытое множество U (это — т. н. модель Кэли—Клейна геометрии Лобачевского). Пересечение полупространств $(x, c) \geq 0$ для всех $c \in S_X$, содержащих (-2) -кривые, — это выпуклый многогранник (быть может, с бесконечным числом уходящих в бесконечность вершин).

Согласно сказанному выше, этот многогранник совпадает с образом \bar{A} в $\mathbf{P}(S_X \otimes \mathbf{R})$ и мы снова будем обозначать его через \bar{A} (рис. 21).

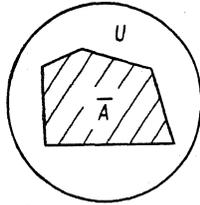


Рис. 21

Многогранник \bar{A} имеет следующую важную интерпретацию: легко проверить, что любой элемент $c \in S_X$, для которого $c^2 = -2$, определяет автоморфизм $x \mapsto x + (x, c)c$, сохраняющий скалярное произведение в S_X , задаваемое индексом пересечения; такие автоморфизмы называются *отражениями*, а порожденная ими подгруппа в группе $\text{Aut } S_X$ всех автоморфизмов решетки S , сохраняющих скалярное произведение, обозначается через $W(S_X)$; отражения (как и любые автоморфизмы из $\text{Aut } S_X$) определяют движения пространства Лобачевского U ; группа $W(S_X)$ является дискретной группой движений; из теории групп, порожденных отражениями, следует, что \bar{A} — фундаментальная область группы $W(S_X)$.

12.2. Проективная геометрия. Пусть дивизор $D \subset X$ очень обилен и $\varphi_D: X \rightarrow \mathbf{P}^N$ — вложение, соответствующее линейной системе $|D|$. В этом случае $h^1(X, \mathcal{O}(D)) = 0$ и из теоремы Римана—Роха следует, что $\varphi_D(X)$ — поверхность степени $2g - 2$.

в g -мерном пространстве (где $g=N$), а общее гиперплоское сечение этой поверхности — каноническая кривая рода g .

Рассмотрим более общую ситуацию: C — неприводимая кривая на поверхности X типа $K3$, $(C^2) > 0$ и φ_C — рациональное отображение, соответствующее линейной системе $|C|$.

Теорема 1. Система $|C|$ не имеет базисных точек, т. е. отображение φ_C — морфизм. Его образ $\varphi_C(X)$ является нормальной поверхностью и общая кривая системы $|C|$ — гладкая. Степень морфизма $\varphi_C: X \rightarrow \varphi_C(X)$ равна 1 или 2. При $\deg \varphi_C = 1$ ни одна гладкая кривая системы $|C|$ не является гиперэллиптической, а при $\deg \varphi_C = 2$ все они — гиперэллиптические. В последнем случае система $|2C|$ задает бирациональный морфизм.

Теперь мы опишем ситуацию в обоих возможных случаях $\deg \varphi_C \in \{1, 2\}$, причем окажется, что случай $\deg \varphi_C = 2$ — исключительный (его можно рассматривать как аналог гиперэллиптических кривых в теории поверхностей типа $K3$).

Теорема 2. Если $\deg \varphi_C = 1$, то поверхность $\varphi_C(X)$ имеет лишь особые точки дю Валя типов A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 (ср. п. 6.3). Морфизм $\varphi_C: X \rightarrow \varphi_C(X)$ является минимальным разрешением этих особых точек и стягивает конфигурации рациональных кривых, изображенных в конце § 6. Этот случай ($\deg \varphi_C = 1$) имеет место всегда при $\pi_X > 6$. Таким образом, любая поверхность типа $K3$ класса $\pi > 6$ изоморфна поверхности степени 2π в $\mathbf{P}^{\pi+1}$.

Теорема 3. Если $\deg \varphi_C = 2$, то поверхность $\varphi_C(X)$ изоморфна или \mathbf{P}^2 , или линейчатой поверхности F_n , или конусу над рациональной кривой Γ_n степени n в \mathbf{P}^n (т. е. Γ_n — образ \mathbf{P}^1 при отображении Веронезе v_n). Во всех случаях $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. В частности, можно выбрать C так, что $(C^2) = 2\pi_X$. Тогда при $\pi = 1$ $\varphi_C(X) = \mathbf{P}^2$, при $\pi \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ $\varphi_C(X) = F_{\pi-2}$ или $\varphi_C(X)$ — конус над $\Gamma_{\pi-2}$. Можно точно указать кривую ветвления двулистного накрытия $\varphi_C: X \rightarrow \varphi_C(X)$. Если $\varphi_C(X) = \mathbf{P}^2$, то это — кривая 6-й степени, гладкая или имеющая такие особенности, что соответствующее двулистное накрытие имеет особенности дю Валя. Если $\varphi_C(X) = F_{\pi-2}$, то кривая ветвления лежит в классе $-2K_{F_{\pi-2}} = 4S + 2\pi f$, где f — класс слоя линейчатой поверхности $F_{\pi-2}$, а S — сечение s ($S^2 = -\pi + 2$ (ср. пример 4 в § 2) и с такими же условиями на особенности. Аналогичное описание имеется и для случая конуса над $\Gamma_{\pi-2}$ ([38], ехр. IV).

12.3. Топология. Пусть теперь X — поверхность типа $K3$ над полем комплексных чисел. Для соответствующего четырехмерного топологического многообразия $X(\mathbf{C})$ $b_1 = 0$, $b_2 = 22$. Кроме того, $X(\mathbf{C})$ односвязно (мы укажем ниже, из каких соображений это вытекает). Поэтому $H^1(X, \mathbf{Z}) = 0$, а $H^2(X, \mathbf{Z})$ не имеет кручения. Основным топологическим инвариантом

является решетка $H^2(X, \mathbf{Z})$ (далее мы обозначаем $X(\mathbf{C})$ просто через X). Она четна—это устанавливается аналогично четности решетки S_X из топологического аналога формулы присоединения: $(x, x) \equiv (\omega_2, x) \pmod{2}$ для $x \in H^2(X, \mathbf{Z})$, где ω_2 —второй класс Штифеля—Уитни, причем $\omega_2 \equiv K_X \pmod{2}$. Из теоремы двойственности Пуанкаре следует, что решетка $H^2(X, \mathbf{Z})$ унимодулярна, т. е. обладает базисом $\{e_i\}$ с определителем Грама $\det|e_i, e_j| = \pm 1$. Наконец, из теории Ходжа (см., например, § 14) следует, что пространство $H^2(X, \mathbf{R}) = H^2(X, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{R}$ имеет тип (3, 19). Общая теорема теории целочисленных квадратичных форм утверждает ([68]), что унимодулярная решетка E однозначно определяется тем, является ли она четной, и типом пространства $E \otimes \mathbf{R}$. Отсюда вытекает возможность указать в явном виде решетку $H^2(X, \mathbf{Z})$ —она изоморфна прямой сумме трех двумерных решеток U_2 с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и двух восьмимерных решеток E_8 , где E_8 —четная унимодулярная положительно определенная решетка. E_8 можно описать так: $E_8 = E' + e\mathbf{Z}$, где $E' \subset \mathbf{Z}e_1 + \dots + \mathbf{Z}e_8$,

$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$; E_8 состоит из $\sum_{i=1}^8 a_i e_i$, $a_i \in \mathbf{Z}$, $\sum a_i \equiv 0 \pmod{2}$, а

$e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 e_i$. Так как решетки $H_2(X, \mathbf{Z})$ и $H^2(X, \mathbf{Z})$ изоморфны,

то же верно и для $H_2(X, \mathbf{Z})$.

Известная теорема топологии утверждает, что односвязное четырехмерное компактное многообразие M однозначно определяется решеткой $H^2(X, \mathbf{Z})$ с точностью до гомотопического типа. Таким образом, все поверхности типа $K3$ имеют один гомотопический тип. На самом деле, они даже диффеоморфны, но это следует из более тонких соображений (см. ниже).

Важным топологическим свойством поверхностей типа $K3$ является их неразложимость: они не могут быть представлены в виде связной суммы двух других гладких многообразий. Не исключено, что поверхности типа $K3$ относятся к небольшому числу «элементарных» односвязных четырехмерных многообразий, в виде связной суммы которых могут быть представлены все другие.

12.4. Аналитическая геометрия. Основными аналитическими инвариантами поверхности X типа $K3$, определенной над полем комплексных чисел, являются интегралы $\int_{\sigma_1} \omega, \dots, \int_{\sigma_{22}} \omega$ однозначно (с точностью до множителя) определенной двумерной дифференциальной формы $\omega \in H^2(X, \Omega_X^2)$, $\omega \neq 0$, по 22 базисным циклам $\sigma_1, \dots, \sigma_{22}$ группы $H_2(X, \mathbf{Z})$.

Эти числа определяют поверхность X однозначно. Точная формулировка такова ([15], [26]):

Теорема 4 (аналог теоремы Торелли для поверхностей типа $K3$). Пусть X и X' — поверхности типа $K3$, h и h' — обильные классы дивизоров, ω и ω' — голоморфные 2-формы на них. Пусть $\varphi: H_2(X, \mathbf{Z}) \rightarrow H_2(X', \mathbf{Z})$ — некоторый изоморфизм решеток, переводящий класс $[h]$ в $[h']$. Если для некоторого базиса $\sigma_1, \dots, \sigma_{22}$ решетки $H_2(X, \mathbf{Z})$ и базиса $\sigma'_i = \varphi_*(\sigma_i)$ решетки $H_2(X', \mathbf{Z})$ $\int_{\sigma_i} \omega = \lambda \int_{\sigma'_i} \omega'$, $i=1, \dots, 22$, с $\lambda \in \mathbf{C}$, то изоморфизм

φ индуцируется единственным изоморфизмом $f: X \rightarrow X'$ поверхностей.

Точка $p_x = \left(\int_{\sigma_1} \omega, \dots, \int_{\sigma_{22}} \omega \right)$ называется *периодом поверхности* X . Выясним, какие точки получаются таким образом. Пусть e_1, \dots, e_{22} — базис в $H^2(X, \mathbf{Z})$, дуальный выбранному базису $\sigma_1, \dots, \sigma_{22}$ в $H_2(X, \mathbf{Z})$, и для $x = (x_1, \dots, x_{22})$, $y = (y_1, \dots, y_{22})$, $\Phi(x, y) = \sum_{i,j=1}^{22} (e_i, e_j) x_i y_j$. Тогда очевидное соотношение $\omega \wedge \omega = 0$ легко переписывается в виде

$$\Phi(x, x) = 0, \quad (1)$$

где $x = p_x$, а из того, что $\int_x \omega \wedge \bar{\omega} > 0$, следует

$$\Phi(x, \bar{x}) > 0. \quad (2)$$

Наконец, так как h — алгебраический класс, $\int_{[h]} \omega = 0$, откуда вытекает линейное соотношение

$$h(x) = \sum h_i x_i = 0, \quad (3)$$

если $[h] = \sum h_i \sigma_i$

Соотношение (3) определяет линейное пространство E размерности 21. Так как вектор $p_x \in E$ определен лишь с точностью до пропорциональности, его естественно рассматривать как точку в проективном пространстве $\mathbf{P}(E)$ размерности 20. Уравнение (1) определяет квадрику размерности 19 в $\mathbf{P}(E)$, а неравенство (2) — открытое множество в этой квадрике. Обозначим его через $\Omega(h)$.

Мы можем теперь рассмотреть произвольную решетку \mathbf{L} , изоморфную решеткам $H_2(X, \mathbf{Z})$ для поверхностей типа $K3$, некоторый вектор $h \in \mathbf{L}$ с $h^2 > 0$ и базис в \mathbf{L} и при помощи соотношений (1), (2), (3) определить область $\Omega(h)$.

Как уже говорилось, квадратичная форма $\Phi(x, x)$, определенная на $H^2(X, \mathbf{R}) = H^2(X, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{R}$, имеет тип (3, 19). Так

как $(h^2) > 0$, ее ограничение на подпространство $h(x) = 0$ имеет тип (2,29). Отсюда следует, что в некоторой системе однородных координат область $\Omega(h)$ может быть задана соотношениями

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - \dots - z_{21}^2 &= 0, \\ |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 - \dots - |z_{21}|^2 &> 0. \end{aligned} \quad (4)$$

К счастью для теории поверхностей типа КЗ, она встречалась и хорошо исследована в других разделах математики. В теории автоморфных функций она называется «областью Картана IV типа» ([71]), в специальной теории относительности — «трубой будущего» ([3]). Конечно, в определении можно заменить 21 на любое число $n > 2$.

Это многообразие не связно — легко показать, что на нем $z_1 \neq 0$, $\text{Im} \left(\frac{z_2}{z_1} \right) \neq 0$ и оно распадается на две связные компоненты: $\text{Im} \left(\frac{z_2}{z_1} \right) > 0$ и $\text{Im} \left(\frac{z_2}{z_1} \right) < 0$.

На нем действует большая группа Ли $G_h(\mathbf{R})$ — подгруппа вещественной ортогональной группы квадратичной формы $\Phi(x, x)$, сохраняющая вектор h . Многообразие $\Omega(h)$ однородно относительно группы $G_h(\mathbf{R})$, является симметрическим однородным пространством и может быть изоморфно отображено на ограниченную область в \mathbf{C}^{19} ([71]).

Теорема 5. Любая точка $x \in \Omega(h)$ может быть получена в виде $x = \rho x$ (т. е. периода) для некоторой поверхности X типа КЗ и обильного класса $h \in H_2(X, \mathbf{Z})$.

(По поводу доказательства теорем 4 и 5 см. [11], [15], [39].)

Замечание. Если в решетке \mathbf{L} существует вектор a с $(a^2) = -2$ и $a(x) = 0$, то точка $x \in \Omega(h)$ соответствует поверхности типа КЗ, в которой класс h не обилен. Отображение, определенное классом h или $2h$, стягивает все векторы $a \in H_2(X, \mathbf{Z})$ с $(a^2) = -2$, $a(x) = 0$ в особые точки дю Валя.

Обозначим через $\check{\Omega}(h)$ множество тех $x \in \Omega(h)$, для которых таких векторов a нет. Легко доказать, что оно открыто. Над областью $\check{\Omega}(h)$ существует расслоение $\mathcal{X}_h \rightarrow \check{\Omega}(h)$, топологически тривиальное и такое, что слой над точкой $x \in \check{\Omega}(h)$ — это та поверхность X типа КЗ, для которой $\rho x = x$.

Мы видели, что для того, чтобы поверхность X сопоставить точку ρx , надо выбрать базис $\{\sigma_i\}$ в $H_2(X, \mathbf{Z})$. Мы можем всегда выбирать базис с некоторой фиксированной матрицей Грама (σ_i, σ_j) . Слои расслоения $\mathcal{X}_h \rightarrow \check{\Omega}(h)$ — это поверхности с фиксированным базисом такого типа; такие объекты называются *отмеченными поверхностями типа КЗ*. Одна и та же поверхность имеет много структур отмеченной поверхности. Все они переводятся друг в друга группой $G_h(\mathbf{Z})$ целочисленных автоморфизмов формы $\Phi(x, x)$, сохраняющих h .

Факторпространство $\check{\Omega}(h)/G_h(\mathbf{Z})$ описывает поверхности типа КЗ уже с точностью до изоморфизма.

Зависимость от выбора обильного класса h также легко учесть. Переход к другому вектору h' , получающемуся из h автоморфизмом решетки \mathbf{L} , дает нам те же поверхности. В теории квадратичных форм доказывается, что два вектора $h, h' \in \mathbf{L}$ эквивалентны относительно группы $\text{Aut}(\mathbf{L})$, если $(h^2) = (h'^2)$ и h, h' примитивны (т. е. не делятся в \mathbf{L} на целое число > 1). Мы можем, конечно, предполагать h примитивным и тогда многообразие $\check{\Omega}(h)$ определяется только числом (h^2) . Таким образом, семейство \mathcal{X}_h описывает все поверхности с заданным $\pi = \frac{1}{2}(h^2)$.

12.5. Применения. Теоремы 4 и 5 дают возможность детально выяснить структуру поверхностей типа КЗ.

Следствие 1. Все поверхности типа КЗ с заданным классом параметризуются точками 19-мерного неприводимого аналитического пространства $\check{\Omega}(h)/G_h(\mathbf{Z})$. Можно доказать, что это пространство является алгебраическим многообразием.

На уровне отмеченных поверхностей, где ситуация несколько проще, дополнения $\Omega(h) \setminus \check{\Omega}(h)$ тоже соответствуют поверхностям типа КЗ, у которых (-2) -кривые в классах a с $(a^2) = -2$, $h(a) = 0$, стянуты в особые точки дю Валя. Все пространства $\Omega(h)$ содержатся в одной области Ω , определенной только условиями (1) и (2). Точки $x \in \Omega$, не принадлежащие ни одному подпространству $\check{\Omega}(h)$, тоже соответствуют поверхностям типа КЗ, но не алгебраическим (см. § 14).

Следствие 2. Для любого целого $n \geq 1$ существуют поверхности X типа КЗ с $S_X = \mathbf{Z} \cdot h$, $(h^2) = 2n$.

Таким образом, все значения класса π реализуются. Они заполняют «большинство» точек области $\Omega(h)$ при $(h^2) = 2\pi$. Точки, соответствующие поверхностям, у которых еще один класс a становится алгебраическим, занимают, согласно теореме Лэфшеца (п. 3.3), гиперплоскость $a(x) = 0$. Отсюда вытекает

Следствие 3. Среди поверхностей типа КЗ с заданным значением инварианта π реализуются все значения числа Пикара ρ : $1 \leq \rho \leq 20$.

Более точный результат таков:

Следствие 4. Решетка H тогда и только тогда реализуется в виде $H \simeq S_X$ для некоторой поверхности X типа КЗ, когда $H \otimes \mathbf{R}$ имеет тип $(1, r-1)$, $r \leq 20$, и существует примитивное вложение $\varphi: H \hookrightarrow \mathbf{L}$ (т. е. из $n\mathbf{l} \in \varphi(H)$, $\mathbf{l} \in \mathbf{L}$, $n \in \mathbf{Z}$ следует $\mathbf{l} \in \varphi(H)$). Множество всех поверхностей X , для которых $S_X \cong H$ для некоторой такой решетки H , параметризуется точками неприводимого многообразия размерности $20-r$, $r = \text{rk } H$, причем для «большинства» точек $S_X = H$.

Из существования расслоения $\mathcal{E}_h \rightarrow \check{\Omega}(h)$ вытекает, что все поверхности типа КЗ с заданным классом π диффеоморфны. Рассмотрение пересечений подпространств $\Omega(h)$ в Ω дает больше:

С л е д с т в и е 5. Все поверхности типа КЗ диффеоморфны.

С л е д с т в и е 6. Поверхности типа КЗ односвязны.

Ввиду следствия 5 это достаточно проверить для одной из них, например — для куммеровых поверхностей, что совсем просто.

Теорема 4 может, в частности, быть применена к изучению автоморфизмов поверхностей типа КЗ.

Из нее вытекает, что группа $\text{Aut } X$ автоморфизмов поверхности X типа КЗ совпадает с группой таких автоморфизмов решетки $H_2(x, \mathbf{Z})$, которые переводят вектор p_x в пропорциональный и некоторый обильный класс h — снова в обильный. Последнее условие равносильно тому, что g переводит эффективные циклы в эффективные, т. е. сохраняет многогранники \bar{E} и \bar{A} .

Можно показать, что ограничение группы $\text{Aut } X \subset \subset \text{Aut } H_2(X, \mathbf{Z})$ с $H_2(X, \mathbf{Z})$ на подгруппу алгебраических циклов S_X определяет гомоморфизм с конечным ядром. Образ же этого гомоморфизма имеет конечный индекс в группе всех автоморфизмов решетки S_X , сохраняющих многогранник \bar{A} . Последняя группа изоморфна $\text{Aut } S_X / W(S_X)$, где $W(S_X)$ — группа, порожденная отражениями, введенная в п. 1. Таким образом, «с точностью до конечных групп», группа $\text{Aut } X$ изоморфна $\text{Aut } S_X / W(S_X)$. В частности, имеет место

С л е д с т в и е 7. Группа $\text{Aut } X$ конечна тогда и только тогда, когда индекс $(\text{Aut } S_X : W(S_X))$ конечен.

Последнее условие равносильно тому, что объем многогранника \bar{A} в пространстве Лобачевского конечен.

Таким образом, вопрос о конечности группы $\text{Aut } X$ полностью определяется решеткой S_X . Более конкретно, эта группа конечна, если $\rho=1$ ($\rho = \text{rk } S_X$). При $\rho=2$ она конечна, если в S_X есть вектор x с $(x^2)=0$ или $(x^2)=-2$. При $\rho \geq 3$ существует лишь конечное число неизоморфных решеток S_X , дающих конечную группу $\text{Aut } X$. Число их для каждого значения ρ указано в таблице ([13], [14]):

$\rho = \text{rk } S_X$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Число решеток S_X	27	14	10	10	9	12	10	9	4	4	3	3	1	1	1	1	0	0

Чтобы привести пример того, насколько детально изучены автоморфизмы поверхностей типа КЗ, изложим результаты теории симплектических автоморфизмов. Автоморфизм g поверх-

ности X типа $K3$ умножает дифференциальную форму $\omega \in H^0(X, \Omega^2)$, $\omega \neq 0$, на константу $\chi(g)$. Он называется *симплектическим*, если $\chi(g) = 1$. Описаны все конечные группы симплектических автоморфизмов. Они связаны с известной простой группой Матве M_{23} , которая реализуется как четырехжды транзитивная группа подстановок множества Ω_{23} из 23 элементов. Доказано, что конечная группа G тогда и только тогда реализуется как группа симплектических автоморфизмов поверхности типа $K3$, когда она может быть вложена в группу Матве M_{23} , так что действие ее на множестве Ω_{23} разбивает это множество не менее чем на 5 орбит. Имеется 11 максимальных подгрупп группы M_{23} с этим свойством. Для каждой из них можно явно указать поверхности типа $K3$, на которых она действует. Наибольший порядок 960 имеет группа симплектических автоморфизмов поверхности в \mathbf{P}^3 с уравнением $X^4 + Y^4 + Z^4 + T^4 + 12XYZ = 0$. Это единственная поверхность четвертой степени с такой группой линейных автоморфизмов ([57]).

12.6. Обобщения. Теория поверхностей типа $K3$ столь богата красивыми закономерностями, что возникает вопрос: не является ли она лишь простейшим случаем какой-то более общей теории? Возможно, таких теорий существует несколько — подобно тому, как эллиптические кривые — частный случай и кривых произвольного рода, и абелевых многообразий произвольной размерности. По крайней мере одно такое обобщение теории поверхностей типа $K3$ сейчас известно — это теория *симплектических алгебраических многообразий*. Так называются односвязные многообразия четной размерности $2r$, обладающие такой формой $\omega \in H^0(\Omega^2)$, что ω^r не обращается в 0 ни в одной точке. Такие многообразия над полем комплексных чисел обладают красивыми дифференциально-геометрическими свойствами, их описание далеко продвинуто при помощи интегралов формы ω по циклам $\sigma \in H_2(X, \mathbf{Z})$ ([27], [38]).

§ 13. Линейчатые и рациональные поверхности

13.1. Линейчатые поверхности. Рассмотрим последний класс поверхностей — поверхности с канонической размерностью $-\infty$. Они характеризуются тем, что для их минимальных моделей канонический класс не численно эффективен. Согласно теореме 1 в п. 7.1 эти поверхности совпадают с линейчатыми (т. е. расщелеными со слоем \mathbf{P}^1 над кривой B) и плоскостью \mathbf{P}^2 .

Из классификации, приведенной в § 8, и теоремы 2 из п. 8.1 вытекает, что для поверхностей с численно эффективным каноническим классом $P_m \neq 0$ при $m \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ и, значит, $P_{12} \neq 0$. Таким образом, имеет место

Теорема 1. Поверхность бирационально изоморфна линейчатой поверхности или плоскости \mathbf{P}^2 тогда и только тогда, когда для нее $P_{12} = 0$.

Пусть $X \rightarrow B$ — линейчатая поверхность. К ней можно применить общую идеологию расслоений — рассмотреть ее общий слой как кривую рода 0 над полем функций $R = k(B)$. Мы сталкиваемся здесь с теорией кривых рода 0 над алгебраически незамкнутым полем, которая, однако, гораздо проще, чем теория кривых рода 1. Если C — алгебраическая кривая рода 0 над полем R , то из теоремы Римана — Роха следует, что ее канонический класс K_C (который определен над полем R) имеет степень -2 и класс $-K$ задает вложение $C \hookrightarrow \mathbf{P}^2$ (тоже определенное над R), образом которого является коника. Применяя это к общему слою линейчатой поверхности X как кривой рода 0 над полем $R = k(B)$, мы видим, что X бирационально изоморфна поверхности, заданной (если характеристика поля k отлична от 2) уравнением

$$\alpha x_0^2 + \beta x_1^2 + \gamma x_2^2 = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma \in k(B)), \quad (1)$$

причем этот изоморфизм согласован с проекцией на базу B .

Изучение коник (1) над произвольным полем R — вопрос не тривиальный, если поле R достаточно сложно (например, $R = \mathbf{Q}$ или $R = k(Y)$, где $\dim Y > 1$). Однако в случае поля $R = k(B)$, $\dim B = 1$, он решается просто. Основой является

Л е м м а. Коника (1) обладает точкой с координатами в поле $k(B)$.

Это — частный случай т. н. теоремы Тзена, согласно которой любое уравнение $F(x_0, \dots, x_n) = 0$, где $F \in k(B)[T_0, \dots, T_n]$ — форма степени $\leq n$, имеет ненулевое решение в поле $k(B)$ (КАМ, гл. IV, § 5). Доказательство теоремы Тзена очень элементарно. Например, в случае коники (1), если поле $k(B) = k(t)$ чисто трансцендентно, можно считать $\alpha, \beta, \gamma \in k[t]$, записать

$$x_i = \sum_{m=0}^N c_{im} t^m, \quad i = 0, 1, 2, \text{ и убедиться, что при достаточно боль-}$$

шом N на коэффициенты c_{im} получается меньше, чем $3(N+1)$ соотношений. Общий случай сводится к случаю $k(B) = k(t)$ простым техническим приемом.

Из леммы следует, что и кривая C над полем $k(B)$ — общий слой семейства $X \rightarrow B$ кривых рода 0 — имеет рациональную точку P , определенную над полем $k(B)$. Применяя опять теорему Римана — Роха, легко убедиться, что $l(P) = 2$ и линейная система $|P|$ задает изоморфизм $C \simeq \mathbf{P}^1$, определенный над полем $R = k(B)$. Этот изоморфизм можно интерпретировать как проектирование φ коники (1) из ее рациональной точки P (рис. 22).

Таким образом, $C \simeq \mathbf{P}^1$ как кривая над $k(B)$, откуда вытекает

Т е о р е м а 2. Линейчатая поверхность $f: X \rightarrow B$ бирационально изоморфна произведению $B \times \mathbf{P}^1$, причем бирациональное преобразование $X \dashrightarrow \mathbf{P}^1 \times B$ перестановочно с проекцией на B .

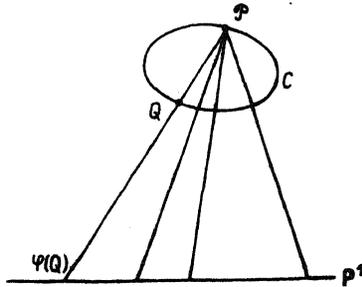


Рис. 22

Как из формулировки теоремы, так и из хода ее доказательства вытекает

Следствие. Линейчатая поверхность $f: X \rightarrow B$ обладает сечением $\sigma: B \rightarrow X$ с $f\sigma=1$.

Рациональная точка P , которую мы строим, это и есть рациональное отображение σ с нужным свойством, а рациональное отображение гладкой кривой в проективную поверхность является морфизмом.

Можно значительно уточнить строение бирационального преобразования в теореме 2. Пусть $S = \sigma(B)$ — сечение, т. е. $S \subset X$, $(S, F_b) = 1$, где $F_b = f^{-1}(b)$. Из общих свойств когерентных пучков следует, что ограничение пучков $\mathcal{O}_X(S) \rightarrow \mathcal{O}_F(S|_F)$ определяет эпиморфизм

$$H^0(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X(S)) \rightarrow H^0(F_b, \mathcal{O}_F(S|_{F_b})) \rightarrow 0 \quad (2)$$

для достаточно малой аффинной окрестности U любой точки $b \in B$. Дивизор $S|_{F_b}$ — это точка на F_b и $H^0(F_b, \mathcal{O}_{F_b}(S|_{F_b})) = = k \cdot 1 + kx$, где $x \in F_b$ — «координата» по проективной прямой F_b . Из эпиморфизма (2) вытекает, что функция x является ограничением некоторой функции φ на X , которая при ограничении на F_b , а значит, и на близкие слои, определяет на них координату. Следовательно, для достаточно малого U определен изоморфизм $f^{-1}(U) \simeq U \times \mathbf{P}^1$. Иными словами, верна

Теорема 3. Линейчатая поверхность $X \rightarrow B$ является локально тривиальным расслоением (в топологии Зарисского) со слоем \mathbf{P}^1 (или, коротко, \mathbf{P}^1 -расслоением).

Структурной группой этого расслоения является, очевидно, группа $\text{Aut } \mathbf{P}^1 = \text{PGL}(2)$.

Если рассуждение, доказывающее теорему 3, провести более детально, мы получим следующую конструкцию: если $S \subset X$ — сечение линейчатой поверхности $f: X \rightarrow B$, то пучок $f_*\mathcal{O}_X(S)$ является локально свободным ранга 2 и совпадает с пучком сечений векторного расслоения ранга 2 над B : $\mathcal{E} \rightarrow B$; поверхность X получается из \mathcal{E} , если каждый слой E_b заменить его проективизацией $\mathbf{P}(E_b) \simeq \mathbf{P}^1$, т. е. $X \simeq \mathbf{P}(\mathcal{E})$. Это доказывает половину следующего утверждения:

Теорема 4. Любая линейчатая поверхность представляется в виде $\mathbf{P}(\mathcal{E})$, где \mathcal{E} — векторное расслоение ранга 2. При этом $\mathbf{P}(\mathcal{E}_1) \simeq \mathbf{P}(\mathcal{E}_2)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \otimes L$, где L — линейное расслоение (т. е. ранга 1).

Другое уточнение бирационального преобразования из теоремы 2 использует понятие элементарного преобразования линейчатой поверхности (пример 5 в п. 6.3).

Теорема 5. Бирациональное преобразование $X \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^1 \times B$ может быть получено как последовательность элементарных преобразований.

Идея доказательства. Чтобы фиксировать изоморфизм некоторой кривой с \mathbf{P}^1 , надо задать на ней точки, соответствующие 0, ∞ и 1. Аналогично, локально тривиальное расслоение $X' \rightarrow B$ изоморфно $\mathbf{P}^1 \times B$, если на нем даны сечения S_0, S_∞ и S_1 , попарно не пересекающиеся. Каждое локально тривиальное расслоение $X \rightarrow B$ имеет бесконечно много сечений (их достаточно построить на открытом множестве $U \subset B$) и, в частности, три разных. Поэтому остается при помощи элементарных преобразований добиться, чтобы они не пересекались. Пусть, например, сечения S и S_1 пересекаются трансверсально в точке $x \in X$ (рис. 23а). Раздув точку x , мы вклеим кривую L и разведем собственные прообразы S', S_1', F_b' сечений S, S_1 и слоя F_b , где $b = f(x)$ (рис. 23 б, в).

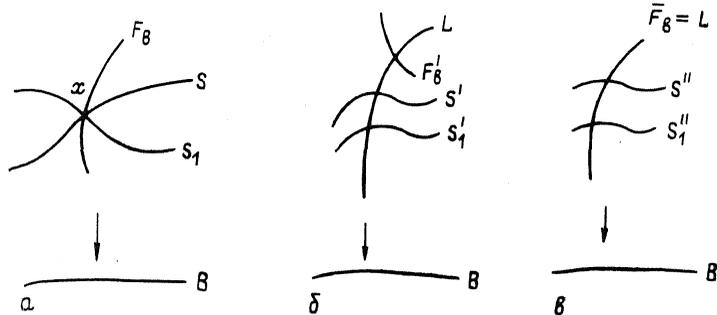


Рис. 23

После элементарного преобразования кривая F_b' сжимается, слоем становится образ кривой L , а образы сечений S и S_1 в слое над точкой b уже не пересекаются.

Если сечения S и S_1 в точке x не трансверсальны, то для их «разведения» требуется большое число элементарных преобразований.

Следствие. Если $X \rightarrow B$ — линейчатая поверхность над кривой рода g , то $(K_X^2) = 8(1-g)$, $N_X \simeq \mathbf{Z}^2$.

Оба утверждения вытекают из формул (2) и (5) в п. 6.1, из которых видно, что (K_X^2) и группа N_X при одном элементарном преобразовании не меняются.

13.2. Рациональные поверхности. Теперь мы перейдем к рациональным поверхностям. Среди минимальных поверхностей, для которых канонический класс не численно эффективен, они выделяются условием $q=0$. Действительно, такая поверхность, если она относительно минимальна, есть либо \mathbf{P}^2 , либо линейчатая поверхность с базой \mathbf{P}^1 , которая, согласно теореме 2, бирационально изоморфна $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, т. е. рациональна. Ввиду теоремы 1 мы можем даже сказать, что рациональные поверхности характеризуются условиями $q=0, P_{12}=0$. Но верен и более точный результат:

Теорема 6 (критерий рациональности Кастельнуово — Энриквеса). Поверхность X рациональна тогда и только тогда, когда $q=p_2=0$.

Мы можем считать X относительно минимальной моделью. Ввиду теоремы 1 в п. 7.1 нам достаточно показать, что ее канонический класс не может быть численно эффективным. Предположим, что это не так; тогда $(K_X^2) \geq 0$. По двойственности $l(2K_X) = \dim H^2(X, \mathcal{O}_X(-K_X))$ и из неравенства Римана — Роха и $P_2=0$ вытекает

$$l(-K_X) \geq (K_X^2) + 1$$

(так как $q=0$ и $p_g=0$ ввиду $P_2=0$). Поэтому $-K_X \sim D \geq 0$. Если $D \neq 0$, это противоречит тому, что K_X численно эффективен, а если $D=0$ — тому, что $p_g=P_2=0$.

Если же X рациональна, то $q=P_2=0$, поскольку q и P_2 — бирациональные инварианты.

Мы встречали ряд поверхностей (поверхности Энриквеса, поверхности Годо), для которых $p_g=q=0$, но которые не рациональны.

Никакого обобщения теоремы 6 на многообразия размерности ≥ 3 не известно.

Важным следствием полученного критерия является решение т. н. *проблемы Люрота* (впрочем, для этого нам было бы достаточно и более слабого критерия $q=0, P_{12}=0$).

Прежде чем ее сформулировать, напомним, что алгебраическое многообразие Y называется *унирациональным*, если существует сюръективное рациональное отображение $g: \mathbf{P}^n \rightarrow Y$. Иначе говоря, отображение $g^*: k(Y) \rightarrow k(\mathbf{P}^n)$ реализует поле рациональных функций $k(Y)$ на Y в качестве подполя чисто трансцендентного расширения — поля рациональных функций от n переменных $k(x_1, \dots, x_n) \simeq k(\mathbf{P}^n)$. Классическая *теорема Люрота* утверждает, что всякая unirational кривая рациональна (т. е. всякое подполе степени трансцендентности 1 поля рациональных функций от одной переменной изоморфно полю рациональных функций от одной переменной).

Из критерия рациональности Каstellьнуово—Энриквеса вытекает обобщение теоремы Люрота на случай размерности 2:

С л е д с т в и е (двумерный аналог теоремы Люрота). Всякая унирациональная поверхность (над алгебраически замкнутым полем характеристики 0) рациональна.

Действительно, пусть $g: \mathbf{P}^2 \dashrightarrow X$ — рациональное сюръективное отображение, $\sigma: Z \rightarrow \mathbf{P}^2$ — разрешение неопределенностей отображения g и $h: Z \rightarrow X$ — сюръективный морфизм такой, что $g \circ \sigma = h$. Так как Z — неособая рациональная поверхность, $q(Z) = P_2(Z) = 0$. С другой стороны, так как отображение h сепарабельно, отображения $h^*: H^0(X, \Omega_X^1) \rightarrow H^0(Z, \Omega_Z^1)$ и $h^*: H^0(X, (\Omega_X^2)^{\otimes 2}) \rightarrow H^0(Z, (\Omega_Z^2)^{\otimes 2})$ являются вложениями. Отсюда $q(X) = P_2(X) = 0$ и по теореме 6 поверхность X рациональна.

В высших размерностях ($\dim X \geq 3$) аналог теоремы Люрота не верен. Соответствующие примеры были получены в [10], [23], [35] в 1971 г. При $\dim X = 3$ интерес их заключается в том, что они открывают новую главу алгебраической геометрии — теорию многообразий, близких, в некотором смысле, к рациональным, но не рациональным. (Наиболее изученные из них — *многообразия Фано*, для которых класс $-K_X$ обилен; в размерности 2 они называются *поверхностями дель Пеццо*.) С ростом размерности построение контрпримеров к аналогу теоремы Люрота становится проще и при большой размерности вопрос решается методами чистой теории полей ([68]).

Обратимся к минимальным моделям рациональных поверхностей. Как мы видели, они изоморфны или \mathbf{P}^2 , или линейчатым поверхностям $X \rightarrow \mathbf{P}^1$ с базой \mathbf{P}^1 . Для исследования последнего класса можно воспользоваться теоремой 4 в п. 13.1 и тем, что расслоения ранга 2 над \mathbf{P}^1 устроены очень просто. Имеет место общий результат: векторное расслоение над \mathbf{P}^1 однозначно разлагается в прямую сумму одномерных ([41]). Так как одномерные расслоения описываются элементами группы $\text{Pic } \mathbf{P}^1 \simeq \mathbf{Z}$ и, значит, соответствуют пучкам $\mathcal{O}(n)$, из теоремы 4 в п. 13.1 легко вытекает

Теорема 7. Любая линейчатая поверхность $X \rightarrow \mathbf{P}^1$ изоморфна $\mathbf{P}(\mathcal{O} + \mathcal{O}(n))$, $n \geq 0$.

Легко видеть, что теорема 7 означает существование на каждой линейчатой поверхности $X \rightarrow \mathbf{P}^1$ двух непересекающихся сечений. На этом пути можно дать другое ее доказательство, не апеллирующее к расслоениям.

Легко проверить, что поверхности $\mathbf{P}(\mathcal{O} + \mathcal{O}(n))$ совпадают с теми поверхностями F_n , которые мы построили в примере 4 из § 2. Поверхность F_n имеет единственное сечение S с $(S^2) = -n$. Поэтому F_1 не минимальна — это просто плоскость \mathbf{P}^2 с раздутой точкой, остальные F_n минимальны. $F_0 \simeq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ и имеет две разные структуры линейчатой поверхности. При $n > 1$

на F_n такая структура единственна. Легко проверить, что $\text{Pic } F_n = \mathbf{Z}f_n + \mathbf{Z}S_n$, где f_n — класс слоя, а S_n — сечения с $(S_n^2) = -n$, $K_{F_n} = -(n+2)f_n - 2S_n$. Класс $af_n + bS_n$ содержит эффективный дивизор тогда и только тогда, когда $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Поверхности F_n встречаются как поверхности малой степени в пространстве \mathbf{P}^N . А именно, как поверхности X с $\text{deg } X = N-1$.

Линейная система $|af_n + bs_n|$ на F_n , где s_n — класс сечения S_n , не имеет базисных точек и неподвижных компонент при $b \geq 0$ и $a \geq bn$, $a \neq 0$, и очень обильна при $b \geq 1$ и $a > bn$. В частности, для $H \sim af_n + s_n$ имеем $H^2 = 2a - n$, $\dim |af_n + s_n| = 2a - n + 1$, так что при $a > n$ линейная система $|H|$ задает вложение $\varphi_{|H|} : F_n \rightarrow \mathbf{P}^N$ на поверхность степени $N-1$, где $N = 2a - n + 1$. При этом слои морфизма $\pi_n : F_n \rightarrow \mathbf{P}^1$ отображаются на прямые, заметающие поверхность $\varphi_{|H|}(F_n)$ — это объясняет происхождение термина «линейчатая поверхность». В случае $a = n$, $n > 0$ отображение $\varphi_{|H|} : F_n \rightarrow \mathbf{P}^{n+1}$ является бирациональным морфизмом на конус $F_n^0 \subset \mathbf{P}^{n+1}$ над нормальной рациональной кривой степени n в \mathbf{P}^n , стягивающий сечение S_n в вершину конуса (являющаяся при $n \geq 2$ изолированной особой точкой).

Для всякого алгебраического многообразия $X \subset \mathbf{P}^N$, не лежащего ни в какой гиперплоскости,

$$\text{deg } X \geq \text{codim } X + 1. \quad (3)$$

Для образов $X = \varphi_H(F_n)$, $H \sim af_n + s_n$, поверхностей F_n неравенство (3) превращается в равенство. Одна из классических теорем Энриквеса дает полную классификацию всех многообразий $X \subset \mathbf{P}^N$, для которых в (3) выполняется равенство. В частности, для поверхностей получается следующий результат ([40]): пусть $X \subset \mathbf{P}^N$ — неприводимая поверхность, не лежащая ни в какой гиперплоскости, для которой в (3) выполнено равенство, т. е. $\text{deg } X = N-1$, тогда X — одна из следующих поверхностей:

а) линейчатая рациональная поверхность, т. е. образ F_n при отображении $\varphi_H : F_n \rightarrow \mathbf{P}^N$, $H \sim af_n + s_n$, $a > n$, $N = 2a - n + 1$;

б) конус F_{N-1}^0 над нормальной рациональной кривой степени $N-1$ в \mathbf{P}^{N-1} ;

в) поверхность Веронезе $V_4 \subset \mathbf{P}^5$ — образ \mathbf{P}^2 при отображении полной линейной системой коник ([40]).

13.3. Поверхности дель Пеццо. В связи с эллиптическими поверхностями мы уже встречались с тем, что иногда удобнее отказаться от (в других случаях очень полезного) свойства минимальности ради сохранения других, более важных свойств поверхности (в том числе — наличия эллиптического расслоения). Сейчас мы приведем другой пример подобного рода. Он связан с поверхностями, которые являются антиподами поверхностей общего типа — для них обильен класс $-\mathcal{K}$.

О п р е д е л е н и е. Неособая проективная поверхность X называется *поверхностью дель Пеццо*, если антиканонический дивизор $-K_X$ обилен.

По теореме Кодаиры об обращении в нуль и двойственности Серра из определения немедленно получаем, что для всех $m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{O}_X(mK_X)) &= 0 \text{ при } m \geq 1, \\ h^1(\mathcal{O}_X(mK_X)) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$h^2(\mathcal{O}_X(mK_X)) = h^0(\mathcal{O}_X((1-m)K_X)).$$

Отсюда, в частности, $h^1(\mathcal{O}_X) = q(X) = 0$, $h^2(\mathcal{O}_X) = p(X) = 0$ и при $m \geq 1$ $h^0(\mathcal{O}_X(mK_X)) = P_m(X) = 0$; следовательно, поверхность X , согласно теореме 6, рациональна. По формуле Нётера $1 \leq \leq (K_X^2) = 10 - \text{rk Pic } X \leq 9$ и по формуле Римана — Роха

$$h^0(\mathcal{O}_X(-K_X)) = K_X^2 + 1 \quad (5)$$

Число $d = K_X^2$ мы будем называть *степенью поверхности X* . Наибольшее целое число $r > 0$ такое, что $-K_X \sim rH$ для некоторого дивизора H , называется *индексом поверхности X* . Из неравенств $1 \leq K_X^2 \leq 9$ следует $1 \leq r \leq 3$. Приведем некоторые результаты о поверхностях дель Пеццо:

$r = 3 \Leftrightarrow d = 9 \Leftrightarrow X \simeq \mathbf{P}^2$; антиканоническое вложение $\varphi_{|-K_X|}: X \rightarrow \rightarrow \mathbf{P}^9$ реализует X в виде поверхности степени 9 в \mathbf{P}^9 ;

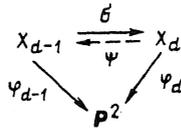
$r = 2 \Leftrightarrow X \simeq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$; антиканоническое вложение реализует X в виде поверхности степени 8 в \mathbf{P}^8 .

Дальше мы ограничимся остающимся случаем $r = 1$; тогда $1 \leq d \leq 8$.

(i) Антиканоническое отображение $\varphi_{|-K_X|}: X \rightarrow \mathbf{P}^d$ является изоморфизмом на поверхности степени d в \mathbf{P}^d при $3 \leq d \leq 8$, накрытием степени 2 с ветвлением в кривой 4-й степени при $d = 2$ и рациональным отображением с одной базисной точкой и неприводимыми эллиптическими слоями при $d = 1$;

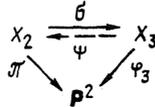
(ii) При $1 \leq d \leq 8$ поверхность X является раздутием \mathbf{P}^2 в $9-d$ точках $P_1, \dots, P_{9-d} \in \mathbf{P}^2$, находящихся в общем положении, — образ X при антиканоническом отображении $\varphi_{|-K_X|}$ совпадает с образом рационального отображения $\mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}^d$, задаваемого линейной системой $|3L - P_1 - \dots - P_{9-d}|$ кривых 3-й степени, проходящих через точки P_1, \dots, P_{9-d} , где L — класс прямой на \mathbf{P}^2 .

Если X_d — поверхность дель Пеццо степени $(K^2) = d$ и $\varphi_d: X_d \rightarrow \mathbf{P}^2$ — соответствующая комбинация $9-d$ σ -процессов, то при $3 \leq d \leq 7$ проектирование из достаточно общей точки $x \in X_d$ определяет бирациональный изоморфизм $\psi: X_d \rightarrow X_{d-1}$, обратный σ -процессу в точке x , причем диаграмма



коммутативна. Любая поверхность X_{d-1} может быть так получена из надлежащей X_d .

При $d=3$ эта диаграмма вырождается в



где π — двулистное накрытие, разветвленное в кривой 4-й степени.

(iii) Исключительные кривые на поверхности дель Пеццо могут быть только (-1) -кривыми — см. лемму 2 в п. 7.1. При вложении φ_K они являются прямыми. Число их конечно. Для доказательства рассмотрим важную подрешетку $K_X^\perp \subset N_X$, $K_X^\perp = \{x \in N_X \mid (x, K_X) = 0\}$. Она инвариантно определена поверхностью X .

Из теоремы об индексе следует, что K_X^\perp отрицательно определена. Если $x \in N_X$ соответствует (-1) -кривой на поверхности X_d , то $(x^2) = (x, K) = -1$, $y = x \mp dK$, $x \in K_X^\perp$ и $y^2 = -d(d+1)$. Очевидно, число таких векторов $y \in K^\perp$ конечно.

Не трудно доказать, что конус \bar{E} для поверхности дель Пеццо порожден (-1) -векторами (ср. примеры 5–8 в п. 5.2). Этот конус обладает исключительно высокой симметрией и связан с теорией корней. Именно, можно показать, что при $d \leq 6$ решетка K_X^\perp порождена векторами $y \in K_X$ с $(y^2) = -2$. Эти векторы образуют систему корней R_d , которая следующим образом вычисляется по значению $d = (K_X^2)$ при $1 \leq d \leq 6$:

d	1	2	3	4	5	6
R_d	E_8	E_7	E_6	D_5	A_4	$A_1 \times A_2$

Каждый корень $p \in R_d$ определяет отражение $x \mapsto x + (x, p)p$, являющееся автоморфизмом решетки N_X и переводящее класс K_X в себя. Все отражения порождают конечную группу $W(R_d)$, называемую группой Вейля системы корней R_d . Оказывается, группа $W(R_d)$ совпадает с группой симметрий конуса \bar{E} . Более того, она совпадает с группой симметрий конуса Ω .

Более того, она совпадает с группой перестановок (-1) -кривых, сохраняющих отношения инцидентности между ними. Группа $W(R_d)$ хорошо изучена в теории корней. Ее порядок равен

d	1	2	3	4	5	6
$ W(R_d) $	$2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$	$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$	$2^7 \cdot 3 \cdot 5$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	$2^2 \cdot 3$

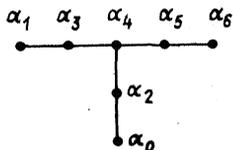
Развивая те соображения, при помощи которых мы доказали конечность числа исключительных кривых, можно найти и их число $\Lambda(d)$:

d	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Lambda(d)$	240	56	27	16	10	6	3	1

Остановимся подробнее на случае кубики в \mathbf{P}^3 ($d=3$). Конфигурация 27 прямых, лежащих на этой поверхности, является одним из самых классических геометрических объектов — ей посвящено множество работ и несколько книг. Поэтому интересно представить себе, как этот вопрос выглядит с современной точки зрения.

Оказывается, геометрические свойства конфигурации прямых на поверхности дель Пеццо лучше всего объясняются теорией соответствующих корневых систем R_d . В частности, для кубической поверхности — это система корней E_6 .

Напомним, что простым корням $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ системы R соответствуют т. н. *фундаментальные веса* $\tilde{\omega}_i$ ($i=1, \dots, l$), определенные тем, что $\tilde{\omega}_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$. Среди них имеются особенно важные — *микровеса*. Один из способов их построения таков: дополним систему R до расширенной системы \tilde{R} , присоединив к ней корень α_0 . Для системы E_6 мы получим систему \tilde{E}_6 :



Тогда микровеса — это те фундаментальные веса $\tilde{\omega}_i$, для которых простой корень α_i получается из α_0 при помощи автоморфизма графа, соответствующего R . Если интегрировать простые корни α_i как компоненты вырожденного слоя эллип-

тического пучка, то это — те компоненты, которые входят в слой с кратностью 1.

В частности, для E_6 микровесами являются $\tilde{\omega}_1$ и $\tilde{\omega}_6$. Группа Вейля $W(R)$ действует на множестве весов системы R . В частном случае системы E_6 орбиты $W(E_6)\tilde{\omega}_1$ и $W(E_6)\tilde{\omega}_6$ обоих микровесов состоят из 27 элементов. Здесь уже появляется число 27.

Чтобы установить связь с прямыми на кубике, надо рассмотреть вложение решетки $Q(E_6)$, соответствующей системе корней E_6 , в унимодулярную решетку N . Так как дискриминант решетки $Q(E_6)$ равен 3, она не может быть вложена в унимодулярную решетку того же ранга (т. е. 6). Рассмотрим случай, когда $\text{rk}N=7$. Тогда относительное дополнение L решетки $Q(E_6)$ в N должно быть одномерным и тоже иметь дискриминант 3, т. е. $L \simeq \xi Z$, $(\xi^2)=3$ и $[N : Q(E_6) \oplus L]=3$. Легко видеть, что существует единственная решетка N с этим свойством — это решетка S_X для кубики X . При этом $\xi = K_X$. Веса $\tilde{\omega}$ системы E_6 определяются на решетке $Q(E_6)$ векторами $x \in N$: $\tilde{\omega}(u) = (x, u)$, $u \in Q(E_6)$. В частности, веса орбит $W(E_6)\tilde{\omega}_1$ и $W(E_6)\tilde{\omega}_6$ обоих микровесов получаются из векторов $x \in N \simeq S_X$, соответствующих прямым l_i , которые интерпретируются как прямые для одной орбиты и как коники — для другой (инвариантно различать $\tilde{\omega}_1$ и $\tilde{\omega}_6$ нельзя).

Аналогичная интерпретация имеется для других поверхностей дель Пеццо.

При $d=4$ поверхность $X \subset \mathbf{P}^4$ является полным пересечением двух квадрик. Случай $d=2$ также интересен. Он связан, как мы видели, с проектированием $\pi : X_3 \rightarrow \mathbf{P}^2$ кубики на плоскости из точки $x \in X_3$ (x надо выбрать не лежащей ни на одной прямой). Сама точка x является точкой неопределенности; разрешая ее, мы получаем морфизм $\pi' : X_2 \rightarrow \mathbf{P}^2$, имеющий ветвление в кривой четвертой степени $C_4 \subset \mathbf{P}^2$. При этом исключительные кривые на X_2 получают парами из 27 прямых на X_3 как образы прямой и коники, проходящей через прямую и точку x . Еще одна пара — это прямая, получающаяся раздуванием точки x , и образ пересечения X_3 с касательной плоскостью в точке x . При морфизме π' эти пары прямых склеиваются и отображаются в знаменитые 28 двойных касательных к кривой C_4 .

В случае $d=1$ линейная система $|-K_X|$ является пучком эллиптических кривых с одной базисной точкой $P \in X$. Если $\sigma : X \rightarrow \mathbf{P}^2$ — раздутие восьми точек $P_1, \dots, P_8 \in \mathbf{P}^2$ в общем положении, то $P_0 = \sigma(P)$ — это девятая точка пересечения пучка кубических кривых на \mathbf{P}^2 , проходящих через P_1, \dots, P_8 . Пусть $\sigma' : X' \rightarrow X$ — раздутие точки $P \in X$; тогда линейная система $|-K_{X'}| = |\sigma'^*(-K_X) - \sigma'^{-1}P|$ уже не имеет базисных точек и задает морфизм $\varphi_{|-K_{X'}|} : X' \rightarrow \mathbf{P}^1$, слоями которого являются

неприводимые приведенные (в силу обильности $-K_X$) кривые рода 1. Мы получаем, таким образом, рациональную эллиптическую поверхность, с которой мы уже встречались (пример 1 в п. 10.1). На ней лежит бесконечно много (-1) -кривых. Число 8 раздуваемых в случае $d=1$ точек — предельное: можно показать, что на поверхности, полученной раздуванием любых 9 точек в общем положении на \mathbf{P}^2 , лежит бесконечно много (-1) -кривых.

(iv) Группа $\text{Pic } X = S_X$ поверхности дель Пеццо не имеет кручения, $\rho(X_d) = 10 - d$ при $1 \leq d \leq 8$. При $d \leq 7$ она порождается (-1) -кривыми. При $d=3$, если представить кубику $X_3 \subset \mathbf{P}^3$ как плоскость \mathbf{P}^2 , раздутую в точках P_1, \dots, P_6 ,

$$\sigma: X_3 \rightarrow \mathbf{P}^2,$$

то все (-1) -кривые (т. е. прямые на X_3) можно получить так: шесть прямых $\sigma^{-1}(P_1), \dots, \sigma^{-1}(P_6)$;

пятнадцать прямых $\sigma_{\text{соб.}}^{-1}(L_{ij})$ — собственных прообразов прямых $L_{ij} \subset \mathbf{P}^2$, проходящих через точки $P_i, P_j, 1 \leq i < j \leq 6$;

шесть прямых $\sigma_{\text{соб.}}^{-1}(C_i)$ — собственных прообразов неприводимых коник C_i , проходящих через пять точек $\{P_1, \dots, P_6\} - P_i$ ($1 \leq i \leq 6$).

Точно такое же описание имеет место при $d=4$; при $d > 4$ оно еще проще (коники не нужны), а при $d < 3$ аналогично, но несколько сложнее (по этому поводу см. [12], [47]).

13.4. Снова линейчатые поверхности. Технику векторных расслоений, которой мы пользовались при выводе теоремы 7 в п. 13.2, можно применить и к исследованию линейчатых поверхностей с базой B рода > 0 . Однако теория векторных расслоений в этом случае далеко не так проста, как при $B \simeq \mathbf{P}^1$. Далеко не всякое двумерное расслоение \mathcal{E} является прямой суммой одномерных. Но верно, что всегда существует точная последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}' \rightarrow 0,$$

в которой \mathcal{L} и \mathcal{L}' — одномерные расслоения ([42]). Таким образом, здесь возникает задача изучения расширений одномерных расслоений. Группа $\text{Ext}(\mathcal{L}', \mathcal{L})$ всех таких расширений является конечномерным векторным пространством над полем k . Таким образом, двумерные расслоения, а значит и линейчатые поверхности, группируются в конечномерные семейства. Вопрос об отождествлении тех элементов этих семейств, которые приводят к изоморфным линейчатым расслоениям, довольно тонкий. В некоторых случаях множество «линейчатых поверхностей с точностью до изоморфизма» нельзя снабдить структурой алгебраического многообразия. Однако есть тип расслоений и линейчатых поверхностей, для которых это возможно — они называются *стабильными* и параметризуют

ются точками т. н. многообразий модулей, которые детально исследованы и обладают рядом красивых свойств (см., например, [64]).

§ 14. Комплексные аналитические поверхности

В этом параграфе мы расскажем (более сжато, чем в предшествующих) о том, как свойства проективных алгебраических поверхностей обобщаются на компактные комплексно-аналитические многообразия размерности 2 (мы будем называть их *комплексными поверхностями*).

14.1. Мероморфные функции. Аналогом рациональных функций является мероморфные функции на комплексном компактном многообразии X . Если X связно, то они образуют поле $\mathcal{M}(X)$. Имеет место

Теорема 1. Поле $\mathcal{M}(X)$ конечно порождено, его степень трансцендентности над \mathbb{C} не превосходит размерности многообразия X ([17]).

Обозначим эту степень трансцендентности через $a(X)$. Таким образом, для комплексной поверхности, $a(X)$ равно 2, 1 или 0.

Теорема 2. Комплексная поверхность X является алгебраической тогда и только тогда, когда $a(X) = 2$ ([26]).

На комплексной поверхности X одномерные замкнутые подмногообразия порождают группу дивизоров $\text{Div } X$. Дивизорам соответствуют линейные расслоения, но, вообще говоря, не всякое линейное расслоение определяется дивизором. Понятие линейного расслоения в общем случае более естественно и удобно, чем понятие дивизора. Например, если Ω^1 — кокасательное расслоение на X , то $\wedge^2 \Omega^1$ — линейное расслоение (обозначаемое через ω_X). Линейные расслоения относительно тензорного умножения образуют группу, которая изоморфна $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, где \mathcal{O}_X^* — пучок ростков, не обращающихся в 0, голоморфных функций на X , а H^1 выполняется в комплексной топологии (только такие когомологии и будут встречаться в этом параграфе). Из точной экспоненциальной последовательности пучков $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow 0$ проистекает гомоморфизм $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$, который для линейного расслоения $L \in H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ мы будем обозначать через $c(L)$.

Теорема 3. Комплексная поверхность алгебраична тогда и только тогда, когда на ней существует линейное расслоение L с $c(L)^2 > 0$ ([26]).

Приведем примеры комплексных поверхностей с $a(X) < 2$.

Пример 1. В примере 6 из п. 3.3 мы видели, что для «общего» выбора решетки $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ на комплексном торе $X = \mathbb{C}^2 / \Omega$ всякий дивизор D и, в частности, любая кривая C гомологичны 0. Сдвигая кривую C на точку $a \in X$, мы можем получить

кривую $a+C$, пересекающую C , и, если $a+C \neq C$, $(a+C, C) > 0$, а это противоречит тому, что C гомологично 0. Если же $a+C=C$ всякий раз, когда $(a+C) \cap C \neq \emptyset$, то, как нетрудно убедиться, C — подгруппа в X или класс смежности по подгруппе. Легко проверить, что при «общем» выборе решетки Ω тор \mathbb{C}^2/Ω не имеет комплексно-аналитических подгрупп. Таким образом, на X вообще нет кривых. Но тогда нет и непостоянных мероморфных функций, так как для такой функции f дивизор полюсов $(f)_\infty$ состоит из кривых. Поэтому в этом случае $a(X)=0$. Можно построить и торы с $a(X)=1$.

Пример 2. Исходя из тора X с $a(X) < 2$ можно построить куммерову поверхность Y (ср. пример 7 в § 2). Так как $\mathcal{M}(Y) \subset \mathcal{M}(X)$ и $[\mathcal{M}(X) : \mathcal{M}(Y)] = 2$, $a(Y) = a(X)$. Так строятся примеры поверхностей Y типа $K3$ с $a(Y)$, равным 0 или 1.

Пример 3. Пусть $W = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, G — бесконечная циклическая группа, порожденная гомотопией $g(z_1, z_2) = (\alpha z_1, \alpha z_2)$, $|\alpha| < 1$. Фактор $X = W/G$ является комплексной поверхностью. Отображение $X \rightarrow \mathbb{P}^1$, $(z_1, z_2) \mapsto (z_1 : z_2)$, определяет на X расслоение, слои которого изоморфны $(\mathbb{C} \setminus 0)/G'$, $G' = \{g^r\}$, $g^r z = \alpha^r z$, т. е. тору \mathbb{C}^2/Ω' , где $\Omega' = 2\pi_1 \cdot \mathbb{Z} + \log \alpha \cdot \mathbb{Z}$. Нетрудно убедиться, что X голоморфна $S^3 \times S^1$, откуда следует, что для нее $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, а значит, она не алгебраична (для алгебраической поверхности $b_1 = 2g$ четно и $b_2 > 0$, так как для обильного H (H^2) > 0 и, значит, цикл $\langle H \rangle \neq 0$ в $H_2(X, \mathbb{C})$).

Определение. Комплексная поверхность X называется *поверхностью Хопфа*, если ее универсальная накрывающая изоморфна W . Таким образом, $X = W/G$.

Доказано, что группа G , свободно и дискретно действующая на W с компактным фактором, имеет циклическую подгруппу конечного индекса. Поверхность Хопфа X называется *примарной*, если группа $G \simeq \pi_1(X)$ — циклическая. Если $G = \{T\}$, то известны простые нормальные формы, к которым можно привести автоморфизмы T аналитическими заменами координат.

14.2. Когомологии. Когомологии произвольного компактного комплексного многообразия связаны со спектральной последовательностью с первым членом $E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega_X^p)$, сходящейся к $H^{p+q}(X, \mathbb{C})$.

Для комплексной поверхности эта спектральная последовательность вырождается в члене E_1 . Отсюда

$$b_1 = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) + \dim H^0(X, \Omega_X^1), \quad (1)$$

$$b_2 = \dim H^2(X, \mathcal{O}_X) + \dim H^1(X, \Omega_X^1) + \dim H^0(X, \Omega_X^2). \quad (2)$$

Важным является вопрос о том, в какой мере для произвольной комплексной поверхности X выполняется теория Ходжа. Говорят, что для произвольного компактного комплексного многообразия *имеет место теория Ходжа*, если разбиение m -мерных диф-

ференциальных форм на слагаемые типа (p, q) , $p+q=m$, содержащих p дифференциалов dz_i и q дифференциалов \bar{z}_i , переносится на классы когомологий. Более конкретно, любая форма ω^m с $d\omega^m=0$ должна быть когомологична форме $\sum_{p+q=m} \eta^{p,q}$ с $d\eta^{p,q}=0$ и, если $\sum_{p+q=m} \eta^{p,q} = d\xi^{m-1}$ с $d\eta^{p,q}=0$, то для всех p , $q\eta^{p,q} = d\xi_{p,q}^{m-1}$, где $\xi_{p,q}^{m-1}$ — некоторая форма.

Тогда имеет место разложение групп когомологий

$$H^m = \bigoplus_{p+q=m} H^{p,q}, \quad (3)$$

где $H^{p,q}$ — классы, содержащие замкнутые формы типа (p, q) . Очевидно, $H^{p,q} = H^{q,p}$, так что, например, (3) дает $b_1 = 2\dim H$ и, в частности, b_1 четно. Из теории Ходжа вытекает просто, что $H = H^0(X, \Omega^m)$ — это пространство голоморфных форм степени m и все такие формы замкнуты.

Теория Ходжа имеет место для проективных многообразий. Это связано с тем, что на проективном пространстве, а тем самым, на любом проективном многообразии, можно ввести кэлерову метрику ([17], [40]). Но наличие теории Ходжа не обязательно связано с существованием кэлеровой метрики, пример чего дают комплексные поверхности.

Теорема 4. Для двумерных когомологий комплексной поверхности имеет место теория Ходжа. Таким образом,

$$H^2(X, \mathbb{C}) = H^{2,0} \oplus H^{1,1} + H^{0,2}, \quad H^{0,2} = \bar{H}^{2,0}. \quad (4)$$

Для одномерных когомологий это, вообще говоря, не так, но верны некоторые следствия теории Ходжа:

(i) Одномерные голоморфные дифференциальные формы замкнуты, так что $H^0(X, \Omega^1) \subset H^1(X, \mathbb{C})$.

(ii) Образы $H^0(X, \Omega^1)$ и $H^0(X, \bar{\Omega}^1)$ в $H^1(X, \mathbb{C})$ не пересекаются ([26], [38]).

Из (1), (i) и (ii) следует $2 \dim H^0(X, \Omega^1) \leq b_1 \leq \dim H^0(X, \Omega^1) + q$, где, как и раньше, мы полагаем $q = \dim H(X, \mathcal{O}_X)$. Поэтому

$$b_1 \leq 2q. \quad (5)$$

Из разложения (4) легко следует, что произведение на H^2 , определенное как $(\xi, \eta) = \int_X \xi \wedge \bar{\eta}$, положительно определено на $H^0(X, \Omega^2) \oplus H^0(X, \bar{\Omega}^2)$, откуда

$$2p_g \leq b_2^+, \quad (6)$$

где $p_g = \dim H^0(X, \Omega^2)$, а (b_2^+, b_2^-) — тип квадратичной формы в $H^2(X, \mathbb{R})$, определенной умножением $H^2 \times H^2 \rightarrow H^4$.

Теорема Римана—Роха сохраняет силу для комплексных поверхностей, хотя доказательство ее другое—оно опирается на теорему об индексе эллиптического дифференциального оператора. С теоремой Римана—Роха связана теорема об индексе, которая дает выражение для индекса $\tau = b^+ - b^-$ в виде $1/3(c(\omega_X)^2 - 2e(X))$. Соединяя их, легко получить

$$(b^+ - 2p_g) + (2q - b_1) = 1. \quad (7)$$

Положим $\Delta = 2q - b_1$. Из (5), (6) и (7) следует $\Delta \geq 0$ и, значит, Δ равно 0 или 1. Поэтому возможны случаи:

$$\Delta = 0, \quad b_1 = 2q, \quad b^+ = 2p_g + 1,$$

$$\Delta = 1, \quad b_1 = 2q - 1, \quad b^+ = 2p_g.$$

Первый случай имеет место для алгебраических поверхностей и «близких к ним» (точнее, получающихся непрерывной деформацией их комплексной структуры). Второй характеризует «типично неалгебраические» комплексные поверхности. Например, он имеет место для поверхности Хопфа (пример 3). (По поводу вышеизложенного см. [30].)

14.3. Поверхности, для которых $a(X) = 0$ или $a(X) = 1$. Перейдем к более систематическому описанию указанных поверхностей.

Теорема 5. Комплексная поверхность X , для которой $a(X) = 1$, обладает таким гомоморфным отображением $f: X \rightarrow B$ на алгебраическую кривую B , что для всех $b \in B$, кроме, быть может, конечного числа, $f^{-1}(b)$ — эллиптическая кривая. При этом $M(X) = f^*M(B)$ ([2]).

Поверхности описанного типа называются *эллиптическими*. Значительная часть описанной в § 10 теории эллиптических алгебраических поверхностей переносится на комплексный случай — структура вырожденных слоев, построение якобиева семейства $J \rightarrow B$, группы $I(J)$. Как и в алгебраическом случае, кратные слои могут быть уничтожены за счет перехода к конечному накрытию $V' \rightarrow B$ и $X' \rightarrow X \times_B V'$. Дальше мы ограничимся случаем семейств без кратных слоев. Их группу мы обозначим через $I_0(J)$. Для ее описания используется аналог экспоненциальной точной последовательности (2) в п. 3.3. Мы рассмотрим два случая: а) расслоение J не изоморфно $B \times E$, где E — эллиптическая кривая и б) $J \simeq B \times E$. В первом случае группа $H^2(B, G)$ в точной когомологической последовательности, соответствующей точной последовательности (6) из п. 10.3. конечна, группа $H^1(B, \mathcal{F})$ — конечномерное векторное пространство \mathbb{C}^N , а группа $H^1(B, \Gamma)$ — конечно порожденная абелева группа.

Теорема 6. Якобиево семейство J является алгебраической поверхностью. В случае а) все семейства, составляющие группу $I_0(J)$, имеют инвариант $\Delta = 0$; группа $I_0(J)$ изоморфна $(\mathbb{C}^N/H) + \mathcal{A}$, где H — конечно порожденная группа, а \mathcal{A} — конеч-

ная абелева группа; элемент $\alpha \in I_0(I)$ тогда и только тогда определяет алгебраическую поверхность, когда порядок его конечен. В случае б) всем элементам из $I_0(J)$ соответствуют поверхности с $\Delta=0$ или $\Delta=1$ в зависимости от того, равен ли 0 образ при гомоморфизме $H^1(B, \mathcal{G}^0) \rightarrow H^2(X, \Gamma) \simeq \mathbb{Z}^2$; элементы с $\Delta=0$ образуют группу, изоморфную $\mathbb{C}^g/H^1(B, \mathbb{Z})$ ($g=g(B)$), в которой элементам конечного порядка соответствуют алгебраические поверхности ([50], III).

Примером поверхности типа б) служит поверхность Хопфа, описанная в примере 3. Вообще, примарная поверхность Хопфа X — эллиптическая тогда и только тогда, когда $X=W/\bar{G}$, $G=\{T\}$, а автоморфизм Γ в надлежащей системе координат имеет вид $T(z_1, z_2) = (\alpha_1 z_1, \alpha_2 z_2)$ $|\alpha_1| < 1$, $|\alpha_2| < 1$ и $\alpha_1^m = \alpha_2^n$ при некоторых целых m и n . Тогда отображение $(z_1, z_2) \mapsto (z_1^m : z_2^n)$ определяет расслоение $X \rightarrow \mathbb{P}^1$.

Среди эллиптических поверхностей с $\Delta=1$ отметим поверхности $X \rightarrow B$ с эллиптической базой B . Они называются *поверхностями Кодаиры* (это — не те поверхности Кодаиры, которые были введены в § 9!). Они интересны тем, что для них каноническое расслоение ω_X тривиально. Для них $b_1=3$, $b_2=4$. Вместе с торами и поверхностями типа КЗ (для которых $H^1(X, \mathcal{O})=0$, $\pi_1(X)=0$, $e=24$, $b_2=22$) это — единственные комплексные поверхности с тривиальным каноническим расслоением. Универсальная направляющая поверхностей Кодаиры изоморфна \mathbb{C}^2 . Они представляются в виде \mathbb{C}^2/G , где G — некоторые специальные группы аффинных преобразований \mathbb{C}^2 .

Перейдем теперь к поверхностям с $a(X)=0$, т. е. к поверхностям, на которых все мероморфные функции постоянны.

Теорема 7. Если поверхность X с $a(X)=0$ и $\Delta=0$ не содержит (-1) -кривых, то она является или комплексным тором \mathbb{C}^2/Ω , или комплексной поверхностью типа КЗ ([50], IV).

Итак, остаются поверхности с $a(X)=0$, $\Delta=1$. Такие поверхности иногда называются *поверхностями типа VII* (по номеру, который они имели в классификации, построенной Кодаирой). О них известно гораздо меньше.

Теорема 8. Для поверхности типа VII $b_1=1$, $H^2(X, \mathcal{O}) = H^0(X, \Omega^2) = 0$.

Одним из примеров являются неэллиптические поверхности Хопфа, например $X = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \{T\}$, где $T : (z_1, z_2) \rightarrow (\alpha_1 z_1, \alpha_2 z_2)$, причем $\alpha_1^a \neq \alpha_2^b$ ни при каких целых a и b . Есть и другие поверхности типа VII — т. н. *поверхности Иноуз*. Для них, как и для поверхностей Хопфа, $b_2=0$. Но существуют и поверхности типа VII с $b_2 > 0$ ([26]). Никакой их общей теории неизвестно.

Описанная картина строения комплексных поверхностей показывает место, которое занимают среди них алгебраические поверхности. Две поверхности X и Y называются *деформациями* друг друга, если существуют такие гладкое многообра-

ние \mathcal{X} и гладкое гомоморфное отображение $f: \mathcal{X} \rightarrow B$ на связанное многообразие B , что X и Y являются слоями морфизма $f: X=f^{-1}(b_1), Y=f^{-1}(b_2), b_1, b_2 \in B$. В этих предположениях семейство $\mathcal{X} \rightarrow B$ как дифференцируемое расслоение локально тривиально и поэтому X и Y должны быть диффеоморфны. В частности, две комплексные поверхности, для одной из которых $\Delta=0$, а для другой $\Delta=1$, не могут быть деформациями друг друга. Напомним, что для алгебраических поверхностей $\Delta=0$.

Теорема 9. Комплексная поверхность X тогда и только тогда является деформацией алгебраической поверхности, когда для нее $\Delta=0$. В этом случае на ней можно ввести кэлерову метрику ([50], III).

Ситуацию ярко иллюстрирует пример комплексных торов. Любой из них имеет вид \mathbb{C}^2/Ω и однозначно определяется заданием базиса в Ω , т. е. четырех линейно независимых над \mathbb{R} векторов в \mathbb{C}^2 . За счет выбора базиса в \mathbb{C}^2 можно считать, что первый и второй векторы — это $(0, 1)$ и $(1, 0)$. Если третий и четвертый векторы равны (a_1, a_2) и (b_1, b_2) , то условие линейной независимости означает

$$\begin{vmatrix} \operatorname{Im} a_1 & \operatorname{Im} a_2 \\ \operatorname{Im} b_1 & \operatorname{Im} b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

и можно считать (за счет порядка векторов), что этот определитель > 0 . Множество комплексных торов связно, так что все двумерные торы образуют связное семейство \mathcal{M} размерности 4, среди которого содержатся и алгебраические торы, составляющие, как мы видели в § 11, счетное число трехмерных подмногообразий.

Из приведенного выше описания следует, что существенные алгебраические поверхности, имеющие неалгебраические деформации, — это эллиптические поверхности, абелевы многообразия и поверхности типа КЗ. В частности, любая деформация поверхности общего типа — алгебраическая.

Таким образом, предшествующее описание комплексных поверхностей можно (очень условно) резюмировать, сказав, что основную массу их составляют алгебраические поверхности, меньшую часть — деформации некоторых специальных алгебраических поверхностей и еще меньшую — очень специальные, «специфически комплексные» поверхности, не являющиеся деформацией алгебраических. Последние характеризуются топологически — нечетностью первого числа Бетти b_1 . (Подробно обо всем этом см. [50], [51].)

14.4. Униформизация. Закончим этот параграф несколькими замечаниями об униформизации комплексных и, в частности, алгебраических поверхностей. Для алгебраических кривых униформизация дает очень яркую их картину ([19]): кривая S или изоморфна \mathbb{P}^1 , или представляется в виде \mathbb{C}/Ω , где

$\Omega \subset \mathbb{C}$ — решетка, или представляется в виде D/Γ , где D — диск $|z| < 1$. Это связано с тем, что если $S \subset \mathbb{P}^1$, то фундаментальная группа S — «очень большая», во всяком случае — бесконечна. Ввиду этого вопрос об униформизации алгебраических поверхностей прежде всего требует выяснения того, какими могут быть их фундаментальные группы.

Последний вопрос интересен также ввиду того, что фундаментальные группы алгебраических поверхностей — такие же, как у любых проективных многообразий размерности ≥ 2 . Точнее говоря, если X — проективное многообразие размерности ≥ 2 и H — его гладкое двумерное сечение, то вложение $H \hookrightarrow X$ определяет изоморфизм

$$\pi_1(H) \simeq \pi_1(X). \quad (8)$$

Это следует из теоремы Лефшеца, согласно которой для многообразия X размерности ≥ 3 и гиперплоскости сечения H вложение $H \hookrightarrow X$ определяет изоморфизм (8). Теорема легко следует из основных положений теории Морса ([53]) или может быть выведена из еще более элементарных соображений.

В резком контрасте с алгебраическими кривыми очень многие поверхности односвязны. Так, односвязна любая поверхность в \mathbb{P}^3 . Это следует из той же теоремы Лефшеца: поверхность степени n можно рассматривать как плоское сечение образа \mathbb{P}^3 при отображении Веронезе, заданном одночленами степени n . Так же доказывается, что односвязны полные пересечения. Гладкие проективные модели поверхностей $z^n = f(x, y)$ односвязны, если кривая $f(x, y) = 0$ — гладкая или имеет не слишком сложные особенности. Вообще, возникает впечатление, что односвязность поверхности — это «общий случай».

Близкими к односвязным являются поверхности с конечной фундаментальной группой. Легко построить примеры поверхностей с любой наперед заданной конечной фундаментальной группой.

Естественным аналогом униформизации кривых рода $g > 1$ можно считать представление поверхности в виде фактора U/G , где $U \subset \mathbb{C}^2$ — ограниченная однородная область, а G — дискретная группа ее автоморфизмов. Таких областей, с точностью до изоморфизма, существует две: шар $|z_1|^2 + |z_2|^2 < 1$ и гиперцилиндр $|z_1| < 1, |z_2| < 1$. Мы уже встречались с их факторами. Это — поверхности общего типа. В «географии поверхностей» они располагаются на двух прямых (см. рис. 16 в § 9): для первого типа $(K^2)/e = 3$, для второго — $K^2/e = 2$, где e — эйлерова характеристика. (По поводу них см. [37] и [44].)

Существуют, однако, и неоднородные ограниченные области, факторами которых являются проективные поверхности. Существует, например, ограниченная область U , группа авто-

морфизмов которой G дискретна, но столь велика, что фактор U/G компактен и является проективной поверхностью ([16]).

§ 15. Эффекты конечной характеристики

Геометрия над полем конечной характеристики представляет собой яркую главу алгебраической геометрии, аналогичную геометрии алгебраических многообразий над полем комплексных или вещественных чисел. Ее систематическое изложение должно составить содержание отдельного обзора.

В этом параграфе мы лишь в общих чертах укажем на некоторые типичные эффекты, которые появляются в теории алгебраических поверхностей над полем конечной характеристики.

15.1. Нарушение теоремы Бертини. Напомним, что, согласно этой теореме, если $f: X \rightarrow Y$ — морфизм алгебраических многообразий над полем характеристики 0 и X гладко, то существует такое непустое открытое множество $U \subset Y$, что морфизм $f^{-1}(U) \rightarrow U$ гладок. В частности, все слои $f^{-1}(u)$, $u \in U$, — приведенные и гладкие.

Над полем характеристики $p > 0$ теорема Бертини нарушается при самом типичном для конечной характеристики отображении Фробениуса $x \mapsto x^p$, скажем, прямой на себя. Иными словами, это — проявление того факта, что в конечной характеристике из $f' = 0$ не следует, что f — постоянная функция.

Более яркая форма нарушения теоремы Бертини возникает, когда мы предполагаем, что общий слой F_{ξ} морфизма f является геометрически неприводимым (т. е. неприводимым над алгебраическим замыканием $\bar{k}(\xi)$ поля $k(\xi)$) гладким многообразием. С таким явлением мы впервые встречаемся в теории поверхностей при $\dim X = 2$, $\dim Y = 1$. Рассуждения, приведенные в п. 13.1 в связи с изучением линейчатых поверхностей, проходят для полей произвольной характеристики и показывают, что если род общего слоя морфизма $f: X \rightarrow Y$ равен 0, то аналог теоремы Бертини имеет место в любой характеристике. Если же этот род равен 1, то мы впервые встречаемся с интересными противоречащими примерами.

Если характеристика основного поля равна 2, то таким примером является поверхность в $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{A}^1$, заданная уравнением $\xi_0 \xi_2^2 = \xi_1^3 + a(t) \xi_1 \xi_0^2 + b(t) \xi_0^3$, где $(\xi_0: \xi_1: \xi_2)$ — однородные координаты на \mathbf{P}^2 , а t — координата на \mathbf{A}^1 . В однородных координатах $x = \xi_1/\xi_0$, $y = \xi_2/\xi_0$ она записывается уравнением

$$y^2 = x^3 + a(t)x + b(t). \quad (1)$$

Особая точка на поверхности (1) имеет координату t_0 с $D(t_0) = 0$, где $D(t) = (a')^2 a \times (b')^2$, но для любого $t = t_0$ кривая (1) имеет особую точку $x = a(t_0)^{1/2}$, $y = b(t_0)^{1/2}$, являю-

щуюся острием типа $u^2=v^3$. Поэтому, если $D(t) \neq 0$, $Y \subset \mathbb{A}^1$ определено условием $D(t) \neq 0$, X — часть поверхности (1), заданная условием $D(t) \neq 0$, и $f(x, y, t) = t$, то теорема Бертини не выполнена.

Аналогичные примеры существуют и в характеристике 3:

$$y^2 = x^3 + a(t). \quad (2)$$

Поверхности (1) и (2) и соответствующие расслоения $X \rightarrow \mathbb{A}^1$ (и их естественные обобщения, когда a и b — функции на произвольной кривой C) называются *квазиэллиптическими*. Если $\pi: X \rightarrow C$ определяет такой пучок, то $mK_X = \pi^*(D)$, $D \in \text{Div } C$, $m \geq 0$. Можно показать, что если общий слой расслоения $X \rightarrow Y$ (X — поверхность, Y — кривая) имеет род 1, то теорема Бертини нарушается лишь в характеристиках 2 и 3 и единственные противоречащие ей примеры — это квазиэллиптические расслоения. Однако, если род слоя — произвольный, такие примеры существуют в любой характеристике p : например, поверхность $y^p = x^m + a(t)$, $m > 1$, $m \not\equiv 0 \pmod{p}$ ([31]).

15.2. Факторы по неприведенной групповой схеме. Мы уже не раз употребляли полезный метод конструкции поверхностей в виде фактора X/G , где G — конечная группа автоморфизмов поверхности X (см. пример 3 в § 2 и дальше). В геометрии над полем конечной характеристики сюда необходимо присоединить и случаи, когда G — конечная групповая схема, не обязательно приведенная. Например, над полем характеристики 2 теряет смысл прием построения поверхностей, описанный в примере 9 из § 2 (так как в таком поле $-1=1$). Точнее говоря, он должен быть модифицирован. Рассмотрим групповую схему μ_2 , определенную над кольцом $k[\varepsilon]$, $\varepsilon^2=1$, отображением умножения $k[\varepsilon] \rightarrow k[\varepsilon] \otimes k[\varepsilon]$, $\varepsilon \mapsto \varepsilon \otimes \varepsilon$. Формально это выглядит как определение группы второго порядка ($\varepsilon^2=1$) с той разницей, что теперь кольцо $k[\varepsilon]$ имеет нильпотенты $k(\varepsilon+1)$ и схема $\text{Spec} k[\varepsilon]$ состоит из единственной точки, но не приведена. Если P_i — квадратичные формы от x_0, x_1, x_2 , а Q_i — от x_3, x_4, x_5 ($i=1, 2, 3$), то $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5) \rightarrow (\varepsilon x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon x_4 : \varepsilon x_5)$ — действие групповой схемы μ_2 на поверхности X , заданной в \mathbf{P}^5 уравнениями $P_i + Q_i = 0$ ($i=1, 2, 3$). Нетрудно показать, что $X = Y/G$ — гладкая поверхность при «общем» выборе форм P_i и Q_i и является поверхностью Энриквеса: на ней $K_X \neq 0$, $2K_X = 0$, $H^1(\mathcal{O}_X) = 0$ ([31], III).

15.3. Неприведенность схемы Пикара. Как уже говорилось, схема Пикара $\text{Pic } X$ алгебраической поверхности X имеет связную компоненту $\text{Pic}^0 X$, являющуюся собственной связной, даже проективной, групповой схемой над полем k , а факторгруппа $S_X = \text{Pic } X / \text{Pic}^0 X$ является группой с конечным числом образующих. Как доказывается в теории алгебраических групп, собственная связная групповая схема над полем характеристики 0 всегда приведена, т. е. является абелевым многообразием

(см., например, [59]). В случае, когда характеристика поля k отлична от 0, это, вообще говоря, не так.

Как было сказано в п. 3.4, $\dim(\text{Pic}^0 X)_{\text{red}} = \dim \text{Alb } X$. Так как касательное пространство в нулевой точке к схеме $\text{Pic}^0 X$ (или, что то же, $\text{Pic } X$) изоморфно $H^1(X, \mathcal{O}_X)$, $\dim \text{Alb } X \leq h^{0,1}$ и схема Пикара $\text{Pic}^0 X$ приведена тогда и только тогда, когда

$$\dim \text{Alb } X = h^{0,1}. \quad (3)$$

Приведем пример того, что равенство (3) может нарушаться ([46]). Пусть характеристика поля k равна 2, C — эллиптическая кривая над k , имеющая ненулевую точку c_0 порядка 2 (т. е. не суперсингулярная кривая). Положим $Y = C \times C$; рассмотрим автоморфизм $s: (c_1, c_2) \mapsto (c_1 + c_0, -c_2)$ и фактор $X = Y/G$, $G = \{1, s\}$. Очевидно, s не имеет неподвижных точек, так что X гладко, а отображение $\pi: Y \rightarrow X$ сепарабельно и не разветвлено. Отсюда следует, что $K_X = 0$ и $p_g(X) = h^{2,0} = 1$. Так как $e(Y) = 0$ и $e(X) = \frac{1}{2}e(Y) = 0$, формула Нётера (2) в п. 5.1 дает

$\chi(X) = 0$, а значит, $h^{0,1} = 2$. Для вычисления $\dim \text{Alb } X$ воспользуемся тем, что $\text{Alb } X$ классифицирует морфизмы $X \rightarrow A$, где A — абелево многообразие. В частности, существует такой морфизм $\alpha: X \rightarrow \text{Alb } X$, что $\alpha(X)$ порождает $\text{Alb } X$.

Положим $\pi\alpha = \beta: C \times C \rightarrow \text{Alb } X$. За счет изменения морфизма α на сдвиг многообразия A , мы можем считать, что $\beta(0) = 0$. По известному и просто доказываемому свойству абелевых многообразий (см., например, [17]) такой морфизм является гомоморфизмом, т. е. $\beta = (\gamma_1, \gamma_2)$, где $\gamma_i: C_i \rightarrow \text{Alb } X$ — гомоморфизмы для $i = 1, 2$. Очевидно, $\beta \circ s = \beta$, откуда сразу следует $\gamma_2 = 0$, т. е. $\text{Alb } X = \alpha(X) = \beta(C_1)$ и, значит, $\dim \text{Alb } X = 1$. Аналогичные примеры можно построить над полем любой положительной характеристики.

15.4. Нарушение соотношений симметрии $h^{p,q} = h^{q,p}$. Пример можно найти среди поверхностей Энриквеса. Рассмотрим в \mathbb{P}^5 инволюцию $s: (x_0: x_1: x_2: y_0: y_1: y_2) \mapsto (y_0: y_1: y_2: x_0: x_1: x_2)$. Пространство инвариантных квадратичных форм имеет базис $x_i x_j + y_i y_j$, $x_i y_j + y_i x_j$, $i, j = 0, 1, 2$. При общем выборе трех таких форм F_1, F_2, F_3 поверхность Y , определенная уравнениями $F_1 = F_2 = F_3 = 0$, будет гладкой и s не будет иметь на ней неподвижных точек. Мы уже говорили, что Y — поверхность типа $K3$, а $X = Y/G$, $G = \{1, s\}$, — поверхность Энриквеса. Так как $H^0(Y, \Omega_Y^1) = 0$, а $\pi: Y \rightarrow X$ — сепарабельное накрытие, на X $h^{1,0} = 0$. С другой стороны, ненулевая форма $\omega \in H^0(Y, \Omega_Y^2)$ под действием автоморфизмов $g \in G$ должна умножаться на характер группы G . Пусть теперь характеристика поля k равна 2. Тогда G имеет только единичный характер со значениями в k , т. е. $g^*(\omega) = \omega$, и поэтому $\omega = \pi^*(\eta)$, $\eta \in H^0(X, \Omega_X^2)$. Отсюда следует, что $K_X = 0$ (в отличие от случая характеристики $\neq 2$, когда

$K_X \neq 0$, но $2K_X = 0$). В частности, $p_g(X) = 1$. Теперь формула Нётера вместе с соотношением $e(X) = \frac{1}{2} e(Y) = 12$ показывает, что на X $h^{0,1} = 1$.

15.5. Отсутствие аналога теорем Лефшеца и Люрота. Отображение $S_X \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_l)$ (для произвольного простого числа l , отличного от характеристики поля k) имеет конечное ядро. Отсюда следует, что неравенство

$$\rho \leq b_2 \quad (4)$$

верно в любой характеристике. Уже тривиальная часть теоремы Лефшеца показывает, что в характеристике 0 неравенство (4) является строгим, если $p_g(X) > 0$ (см. п. 3.3). Если поле k имеет характеристику $p > 0$, то неравенство (4) может превращаться в равенство при $p_g(X) > 0$; в этом случае алгебраические циклы порождают всю группу когомологий $H^2(X, \mathbb{Q}_l)$ и поверхность X называется *суперсингулярной*. Это заведомо так, если поверхность X унирациональна: существует рациональное отображение $f: Y \rightarrow X$ с $f(Y)$, плотным в X . Действительно, разрешая точки неопределенности отображения f , мы можем считать его морфизмом. Пусть $\xi \in H^2(X, \mathbb{Q}_l)$; тогда $f_* f^*(\xi) = (\deg f) \xi$, поверхность Y заведомо суперсингулярна и, значит, $f^*(\xi)$ выражается через алгебраические циклы, откуда следует, что это верно и для ξ .

Остается привести пример унирациональной поверхности X с $p_g(X) > 0$ — противоречащий пример к аналогу теоремы Люрота. Изящный пример — «поверхность Ферма» с уравнением

$$x_0^{p+1} + x_1^{p+1} - x_2^{p+1} - x_3^{p+1} = 0 \quad (5)$$

(см. [70]). Полагая $x_0 = y_0 + y_1$, $x_1 = y_0 + y_1$, $x_2 = y_2 + y_3$, $x_3 = y_2 - y_3$, запишем уравнение (5) в виде

$$y_0^p y_1 + y_1^p y_0 - y_2^p y_3 - y_3^p y_2 = 0$$

или, в неоднородных координатах, в виде

$$x^p y + y^p x = z^p + z. \quad (6)$$

Положим $y = t^p$. Тогда (6) дает $(xt - z)^p = z - xt^2$, т. е. $u^p = v$ при $u = xt - z$, $v = z - xt^2$. Поэтому $k(X) \subset k(x, t, z) = k(u, t)$, а значит X унирациональна. Поверхность (5) рациональна при $p = 2$, но при $p = 3$ — это поверхность типа $K3$, а при $p > 3$ — общего типа, так что для нее $p_g(X) > 0$ при $p > 2$.

15.6. Нарушение теоремы об обращении в нуль. Примеры существуют в любой характеристике $p > 0$, но мы не будем их подробно описывать (см. доклад Рэйно в [20]). Соответствующая гладкая поверхность X расслоена над кривой C рода $g > 1$. Слой морфизма $\pi: X \rightarrow C$ — все не гладкие — имеют острие типа $u^2 = v^p$ (при $p \neq 2$). Нормализация каждого слоя рациональна.

Таким образом, в этом случае тоже нарушается теорема Бертини (ср. п. 15.1). Поверхность X — квазиэллиптическая при $p = 2, 3$ и общего типа при $p \geq 5$.

15.7. Изменения в классификации. Классификация алгебраических поверхностей, изложенная в §§ 7, 8, переносится на поля положительной характеристики с очень небольшими изменениями основных результатов, хотя с заметным усложнением доказательств. Эти изменения относятся лишь к случаям, когда каноническая размерность κ равна 1 или 0 ([31]). В случае $\kappa = 1$ к эллиптическим поверхностям в характеристике 2 и 3 добавляются квазиэллиптические (ср. п. 15.1). При $\kappa = 0$ возможны следующие наборы инвариантов:

b_2	b_1	e	$\chi(\mathcal{O})$	$q = h^{0,1}$	p_g	Тип поверхности
22	0	24	2	0	1	$K3$
6	4	0	0	2	1	Абелевы
2	2	0	1	0	0	Биэллиптические (классические)
10	0	12	0	0	1	Энриквеса (классические)
2	2	0	2	1	0	Неклассические биэллиптические
10	0	12	1	1	1	Неклассические Энриквеса

Случаи, расположенные над чертой, — те же, что и в нулевой характеристике. Биэллиптические поверхности (называемые в этом случае *классическими*) получаются как факторы абелевых многообразий $E_1 \times E_2$, где E_i — эллиптические кривые, по конечным групповым схемам (не обязательно приведенным), свободно действующим на них. Все возможные типы таких действий перечислены. Для этих поверхностей многообразие Альбанезе одномерно (изогенно кривой E_1 или E_2) и отображение $X \rightarrow \text{Alb } X$ является эллиптическим пучком, все слои которого не вырождены.

Поверхности Энриквеса (называемые в этом случае *классическими*) имеют $K_X \neq 0$, $2K_X = 0$; они получаются как факторы поверхности $K3$ по группе второго порядка, а в случае характеристики 2 — по групповой схеме μ_2 (ср. п. 15.2). Их схема Пикара приведена в любой характеристике и имеет кручение $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Случаи, расположенные под чертой, встречаются в характеристике 2 или 3. Неклассические биэллиптические поверхности являются факторами поверхностей вида $E \times C$, где E — эллиптическая кривая, C — рациональная кривая, имеющая

одну особую точку — острие (особенность конечной характеристики сказывается в том, что фактор особой поверхности оказывается гладким). Многообразие Альбанезе опять одномерно, но расслоение $X \rightarrow \text{Alb } X$ — квазиэллиптическое. Неклассические поверхности Энриквеса встречаются только в характеристике 2. Для них $K_X = 0$, схема $\text{Pic}^0 X$ имеет порядок 2 и не приведена. Если $\text{Pic}^0 X \simeq \mu_2$, то X — фактор поверхности типа КЗ по группе $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (ср. пример 3 в § 2). Остается еще одна возможность: $\text{Pic}^0 X = \alpha_2$ — ядро (как схема) морфизма $x \mapsto x^2$ в аддитивной группе G_a . В этом случае X является фактором по групповой схеме, изоморфной α_2 , некоторой особой поверхности, минимальное разрешение особенностей которой есть суперсингулярная поверхность типа КЗ.

Все «неклассические» типы поверхностей связаны с одним интересным соотношением между инвариантами произвольной алгебраической поверхности. Применяя формулу Нётера ((2) в п. 5.1) к выражению $t = 2 - 2b_1 + b_2$, можно переписать его так:

$$10 - 8q + 12p_g = K^2 + b_2 - 2\Delta,$$

где $\Delta = 2q - b_1$. В таком виде это соотношение встречалось в § 14, где мы видели, что для комплексной поверхности $\Delta = 0$ или $\Delta = 1$ в зависимости от четности b_1 ; значит, для алгебраической поверхности $\Delta = 0$. Для алгебраического многообразия X над произвольным алгебраически замкнутым полем b_1 четно ([52]) и $b_1/2 = \dim \text{Alb } X$, откуда следует, что Δ четно, $\Delta \geq 0$ и $\Delta = 0$ тогда и только тогда, когда схема $\text{Pic}^0 X$ приведена. Случаи, названные нами «неклассическими», в точности совпадают с теми, для которых $\Delta > 0$ (при $\kappa = 0$). Для произвольной поверхности доказано, что $\Delta \leq 2p_g$. Таким образом, в случаях сведенных в таблице, Δ принимает единственное возможное положительное значение 2. Поверхности общего типа с $\Delta > 0$ существуют в любой характеристике ([31], I—III).

ЛИТЕРАТУРА

Обзоры [5] и [6] дают необходимую для статьи основу в общих вопросах алгебраической геометрии. Руководства столь же широкого характера являются [17], [40] и [42]. Отдельным вопросам алгебраической геометрии посвящены книга [2] (модули римановых поверхностей), обзор [19] (алгебраические кривые и римановы поверхности), книги [53] (эталные когомологии), [59] и [71] (абелевы многообразия), [60] и [62] (общие проблемы теории модулей), [41] (общие вопросы теории схем).

Представление о классических достижениях в теории алгебраических поверхностей можно составить по обзорам [33], [36] и [77]. Более современные книги, посвященные общей теории алгебраических поверхностей, — [1], [20] и [26] (последняя — только над полем комплексных чисел, но включая и теорию неалгебраических компактных поверхностей), [28] и обзор [30] (ряд результатов для случая конечной характеристики).

Отдельные вопросы теории поверхностей: дивизоры, схемы Пикара — [57] (классификация поверхностей содержится во всех указанных общих обзорах); поверхности общего типа — [29], [39], [66], [72]; новейший обзор по «географии поверхностей» — [34]; эллиптические поверхности — [18], [30], [63];

поверхности Энриквеса — [45], [74]; поверхности типа $K3$ — [11], [13], [14], [15], [38], [57]; рациональные поверхности — [21], [16]; линейчатые поверхности — [64]; комплексно-аналитические поверхности — [26], [50], [51]; проблемы конечной характеристики затрагиваются в [30], [31], [46], [53], [65] (статья Рэйно), [70].

Работы [10], [23], [35], [49], [56], [68] могут помочь представить себе трудности, возникающие при переходе от поверхностей к многообразиям размерности 3 и больше.

1. Алгебраические поверхности // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1965.— 75.— С. 1—215
2. Альфорс Л., Берс Л. Римановы поверхности и квазиконформные отображения. М.: ИЛ, 1961.— 176 с.
3. Владимиров В. С., Сергеев А. Г. Комплексный анализ в трубе будущего // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направл.— 1985.— 8.— С. 191—261
4. Гизатуллин М. Х. Определяющие соотношения для кремоновой группы плоскости // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1984.— 46, № 5.— С. 909—970
5. Данилов В. И. Алгебраические многообразия и схемы // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направл.— 1988.— 23.— С. 172—302
6. — Когомологии алгебраических многообразий // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направл.— 1989.— 36.— С. 5—130
7. Долгачев И. В. Рациональные поверхности с пучком эллиптических кривых // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1966.— 30, № 5.— С. 1073—1100
8. — О гипотезе Севери относительно односвязных алгебраических поверхностей // Докл. АН СССР.— 1966.— 170, № 2.— С. 249—252
9. Исковских В. А. Простое доказательство теоремы Гизатуллина о соотношениях в группе Кремона // Тр. Мат. ин-та АН СССР.
10. —, Манин Ю. И. Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Лյоро-та // Мат. сб.— 1971.— 86, № 1.— С. 140—166
11. Куликов В. С. Вырождения поверхностей типа $K3$ и поверхностей Энриквеса // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1977.— 41, № 5.— С. 1008—1042
12. Манин Ю. И. Кубические формы.— М.: Наука, 1972.— 304 с.
13. Никулин В. В. О факторгруппах групп автоморфизмов гиперболических форм по подгруппам, порожденным 2-отражениями. Алгебро-геометрические приложения // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Сер. Соврем. пробл. мат.— 1981.— 18.— С. 1—114
14. — Поверхности типа $K3$ с конечной группой автоморфизмов и группой Пикара ранга 3 // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1984.— 165.— С. 119—149
15. Пятецкий-Шапиро И. И., Шафаревич И. Р. Теорема Торелли для алгебраических поверхностей типа $K3$ // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1971.— 35, № 3.— С. 530—572
16. Шабат Г. Б. О комплексной структуре областей, накрывающих алгебраические поверхности // Функци. анализ и его прил.— 1977.— 11.— С. 67—75
17. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии.— 2 изд., перераб. и доп.— М.: Наука, 1988.— Т. 1, 345 с. Т. 2, 304 с.
18. — Главные однородные пространства, определенные над полем функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1961.— 64.— С. 316—346
19. Шокуров В. В. Римановы поверхности и алгебраические кривые // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направл.— 1988.— 23.— С. 5—171
20. Algebraic surfaces / Centro Internazionale Matematico Estivo.— Liguori, 1981.— 300 с.
21. Aoki N., Shioda T. Generators of the Neron—Severi group of a Fermat surface // Arithmetic and Geometry. I.— Boston: Birkhäuser, 1983.— С. 1—11
22. Artin E. Some numerical criteria for contractibility of curves on algebraic surfaces // Amer. J. Math.— 1962.— 84.— С. 485—496

23. *Artin M., Mumford D.* Some elementary examples of unirational varieties which are not rational // Proc. London Math. Soc.— 1972.— 25.— C. 75—95
24. —, *Winters G.* Degenerate fibres and stable reduction of curves // Topology.— 1971.— 11, № 4.— C. 373—383
25. *Barlow R. N.* Some new surfaces with $p_g=0$.— Thesis.— Warwick, 1982
26. *Barth W., Peters C., Van de Ven A.* Compact complex surfaces.— Springer, 1984.— 304 c.
27. *Beauville A.* Variétés kählériennes dont la première classe de Chern est nulle // J. Different. Geom.— 1983.— 18.— C. 755—782
28. — Surfaces algébriques complexes // Asterisque.— 1978.— № 54.— C. 1—172
29. *Bombieri E.* Canonical models for surfaces of general type // Publ. Math. IHES.— 1973.— 42.— C. 171—219
30. —, *Husemoller D.* Classification and embeddings of surfaces // Proc. Symp. Pure Math.— 1975.— 29.— C. 329—420
31. —, *Mumford D.* Enriques' classification of surfaces in characteristic p . I. Global analysis.— Princeton Univ. Press, 1969.— C. 325—339; II. Complex analysis and algebraic geometry.— Cambridge Univ. Press, 1972.— C. 23—42; III. Invent. math.— 1976.— 35.— C. 197—232
32. *Bourbaki N.* Éléments de mathématiques. Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 4, 5, 6.— Hermann, 1968.— 288 c. (Пер.: Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Гл. 4—6.— М.: Мир, 1972.— 334 c.)
33. *Castelnuovo G., Enriques F.* Die algebraische Flächen vom Gesichtspunkt der birationalen Transformationen // Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften. III.— 1914.— C. 677—768
34. *Chen Z.* On the geography of surfaces // Math. Ann.— 1987.— 277.— C. 141—164
35. *Clemens C., Griffiths P.* The intermediate Jacobian of the cubic threefold // Ann. Math.— 1972.— 95.— C. 281—356
36. *Enriques F.* La superficie algebriche.— Bologna: Zanichelli, 1949.— 364 c.
37. *Geer, van der G.* Hilbert modular surfaces.— Springer, 1980.— 291 c.
38. Geometrie des surfaces K3: modules et periodes / Seminaire Palaiseau // Asterisque.— 1985.— 126.— C. 1—192
39. *Gieseker D.* Global moduli for surfaces of general type // Invent. math.— 1977.— 43.— C. 233—282
40. *Griffiths P., Harris J.* Principles of algebraic geometry.— N. Y.: Wiley & Sons, 1978.— 813 c. (Пер. Гриффитс Ф., Харрис Д. Принципы алгебраической геометрии. Т. 1, 2.— М.: Мир, 1982.— 862 c.)
41. *Grothendieck A.* Fondements de la géométrie algébrique / Secrétariat Math.— Paris, 1962.
42. *Hartshorn R.* Algebraic geometry.— N. Y.: Springer, 1977.— 496 c. (Пер.: Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия.— М.: Мир, 1981.— 600 c.)
43. *Hirzebruch F.* Collected papers. Bd. I.— Springer, 1987.— n. 16.— C. 345—360
44. *Holzapfel R.-P.* A class of minimal surfaces in the unknown region of surface geography // Math. Nachr.— 1980.— 98.— C. 221—232
45. *Horikawa E.* On the periods of Enriques surfaces // Math. Ann.— 1978.— I: 234.— C. 73—108; II: 235.— C. 217—246
46. *Igusa J.-I.* On some problems in abstract algebraic geometry // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1955.— 41, № 11.— C. 964—967
47. *Kanev V.* Spectral curves, simple Lie algebras and Prym-Tjurin varieties / Inst. of Math. Bulgarian Acad. Sci.— Preprint.— 1987.— 35 c.
48. *Kawamata Y.* A generalization of Kodaira-Ramanujam vanishing theorem // Math. Ann.— 1982.— 261.— C. 43—46
49. —, *Matsuda K., Matsuki K.* Introduction to the minimal model problem // Advanced Studies in Pure Mathematics. Vol. 10.— Tokyo, 1987.— C. 284—360
50. *Kodaira K.* On compact analytic surfaces // Ann. Math.— I: 1960.— 71.— C. 11—152; II: 1963.— 77.— C. 563—626; III: 1963.— 78.— C. 1—40

51. — On the structure of compact complex analytic surfaces // Amer. J. Math.— I: 1964.— 86.— С. 751—798; II: 1966.— 88.— С. 682—721; III: 1969.— 90.— С. 55—83; IV: 1969.— 90.— С. 1048—1066
52. *Milne J. S.* Étale cohomology.— Princeton Univ. Press, 1980. (Пер.: *Милн Дж.* Этальные когомологии.— М.: Мир, 1983.— 392 с.)
53. *Milnor J.* Morse Theory.— Princeton Univ. Press, 1963.— 153 с. (Пер.: *Милнор Д.* Теория Морса.— М.: Мир, 1965.— 184 с.)
54. *Miyazaka Y.* On the Chern classes numbers of surfaces of general type // Invent. math.— 1977.— 42.— С. 225—237
55. *Mori S.* Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective // Ann. Math.— 1982.— 115.— С. 133—176
56. — Classification of higher-dimensional varieties // Proc. Symp. Pure Math.— 1987.— 46.— С. 269—331
57. *Mukai S.* Finite groups of automorphisms of K3-surfaces and the Mathieu group // Invent. math.— 1988.— 94, № 1.— С. 183—221
58. *Mumford D.* Lectures on curves on an algebraic surface.— Princeton Univ. Press, 1966.— 200 с. (Пер.: *Мамфорд Д.* Лекции о кривых на алгебраической поверхности.— М.: Мир, 1968.— 236 с.)
59. — Abelian varieties. Oxford Univ. Press, 1970.— 300 с. (Пер.: *Мамфорд Д.* Абелевы многообразия.— М.: Мир, 1971.— 300 с.)
60. — Stability of projective varieties // L'Ens. Math.— 1977.— № 24.— С. 1—88
61. — An algebraic surface with K ample, $K=9$, $p=q=0$ // Amer. J. Math.— 1970.— 101.— С. 233—244
62. —, *Fogarty J.* Geometric invariant theory.— 2d ed.— Springer, 1982.— 220 с.
63. *Ogg A.* Cohomology of abelian varieties over function fields // Ann. Math.— 1962.— 76.— С. 185—212
64. *Ramanan S.* Vector bundles over algebraic curves // Proc. Int. Congr. Math. Helsinki.— 1978.— 11.— С. 543—547
65. *Ramanujam C. P.* A tribute.— Springer, 1978.— 361 с.
66. *Reider I.* Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces // Ann. Math.— 1988.— 127.— С. 309—316
67. *de Rham G.* Varieties differentiables.— Hermann, 1955 (Пер.: *де Рам Ж.* Дифференцируемые многообразия.— М.: ИЛ, 1956.— 250 с.)
68. *Saitman D. J.* Noether's problem over algebraically closed field // Invent. math.— 1984.— 72.— С. 71—84
69. *Shioda T.* An example of unirational surface in characteristic p // Math. Ann.— 1974.— 211, № 3.— С. 233—236
70. *Serre J. P.* Cours d'arithmétique.— Press Universitaires de France, 1970 (Пер.: *Серр Ж. П.* Курс арифметики.— М.: Мир, 1972.— 184 с.)
71. *Siegel C. L.* Analytic functions of several complex variables // Inst. Adv. Studies.— Princeton, 1949 (Пер.: *Зигель К.* Автоморфные функции нескольких комплексных переменных.— М.: ИЛ, 1954.— 167 с.)
72. *Van de Ven A.* Some recent results on surfaces of general type: Sem. Bourbaki, Exp. 500, 1976/77 // Lect. Notes Math.— 1977.— № 677.— С. 155—166
73. — On the differentiable structure of certain algebraic surfaces: Sem. Bourbaki, Exp. 667, 1985/86 // Asterisque.— 1987.— № 145—146.— С. 299—312
74. *Verra E.* On Enriques surface as a fourfold cover of P // Math. Ann.— 1983.— 266.— С. 241—250
75. *Viehweg E.* Vanishing theorem // J. reine und angew. Math.— 1982.— 335.— С. 1—8
76. *Yau S. T.* On Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1977.— 74.— С. 1789—1799
77. *Zariski O.* Algebraic surfaces.— 2d ed.— Springer, 1971.— 270 с.
78. — Introduction to the problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces // Publ. Math. Soc. Japan.— 1958.— 4.— С. 1—89
79. — The theorem of Riemann—Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface, Appendix by D. Mumford // Ann. Math.— 1962.— 76.— С. 560—615

УДК 512.73

И. В. И. Данилов. Когомологии алгебраических многообразий. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 35 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1989, 5—130

Обзор посвящен изложению основных понятий и фактов о когомологиях алгебраических многообразий и применению их к геометрическим задачам. Состоит он из четырех глав.

В гл. 1 приводятся необходимые понятия гомологической алгебры: комплексы, спектральные последовательности, пучки и их когомологии.

В гл. 2 рассказывается о когомологиях когерентных пучков: теоремы конечности и Римана — Роха, двойственность, когомологии де Рама.

Гл. 3 имеет дело с комплексными многообразиями и классической топологией. Именно здесь зародились те понятия и результаты, которые были образцом при обобщении на абстрактные алгебраические многообразия. Мы лишь бегло касаемся теории Ходжа.

В гл. 4 речь идет об этальной топологии, с помощью которой удалось перенести на абстрактный случай такие понятия, как числа Бетти, теорему Лефшеца о неподвижных точках и т. п. Начинается она с формулировки гипотез Вейля, давших стимул к поиску «абстрактных когомологий»; заканчивается доказательством этих гипотез П. Делинем. Библ. 79.

УДК 512.774

И. В. А. Исковских, И. Р. Шафаревич. Алгебраические поверхности. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 35 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1989, 131—263

В обзоре представлена связанная картина теории алгебраических поверхностей, разъяснены типичные постановки задач и описаны основные методы их решений. Изложение ведется на сравнительно элементарном уровне — доказательства даются лишь в тех случаях, когда они необходимы для выявления новых идей развития теории. В центре внимания авторов находится комплексная задача бирациональной классификации неособых проективных поверхностей над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 и даже более конкретно — над полем комплексных чисел. Некоторые отличия, возникающие в случае полей ненулевой характеристики, описаны в отдельном параграфе. Статья содержит также очень краткое изложение теории двумерных компактных комплексных многообразий в ее сопоставлении с алгебраической теорией. Библ. 79.

Технический редактор *З. А. Прусакова*

Корректор *Н. В. Шуликина*

Сдано в набор 14.03.89

Подписано в печать 11.09.89

Формат бумаги 60×90¹/₁₆

Бум. кн.-журн.

Литературная гарнитура

Высокая печать.

Усл. печ. л. 17,0

Усл. кр.-отт. 17,0

Уч.-изд. л. 17,41

Тираж 800 экз.

Заказ 2004

Цена 3 р. 90 к.

Адрес редакции: 125219, Москва, А-219, Балтийская ул., 14. Тел. 155-43-29

Производственно-издательский комбинат ВИНТИ,
140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403

ISSN 0233—6723. ИНТ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 35. 1989. 1—272.