

## ANKÜNDIGUNG.

---

Das vorliegende Heft „Wechselstromversuche“ ist vom Standpunkte des Physikers geschrieben und behandelt in vier Kapiteln eine Reihe von Wechselstromerscheinungen und -versuchen, welche physikalisch von Interesse sind. Im ersten Kapitel wird die Leitung der Wechselströme erörtert und der Einfluß besprochen, welchen Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität im Stromkreis ausüben. Das zweite Kapitel handelt von der Induktion und den ponderomotorischen Kräften. Das dritte Kapitel ist dem magnetischen, das vierte dem elektrostatischen Drehfeld gewidmet. Die behandelten Probleme werden eingehend durchgerechnet; die zugehörigen Versuche in einer möglichst einfache Hilfsmittel in Anspruch nehmenden Form beschrieben, deren knapp gehaltene Schilderung soweit mit Zahlenangaben versehen ist, daß dem Experimentator genügende Anhaltspunkte für den Bau einer zweckentsprechenden Versuchsanordnung gegeben werden. Auf diese Weise sucht die Schrift ihr Ziel zu erreichen, die besprochenen Erscheinungen in theoretischer und experimenteller Hinsicht erschöpfend darzustellen.

Braunschweig, im Oktober 1911.

**Friedr. Vieweg & Sohn.**

**Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig.**

**DIE WISSENSCHAFT** Sammlung naturwissenschaftlicher u.  
mathematischer Einzeldarstellungen.

**Bis jetzt erschienen:**

1. Heft: **Untersuchungen über die radioaktiven Substanzen** von **Mme. S. Curie**. Übersetzt und mit Literaturergänzungen versehen von **W. Kaufmann**. Dritte Auflage. Mit 14 Abbild. Preis *ℳ* 3,—, geb. *ℳ* 3,80.
2. Heft: **Die Kathodenstrahlen** von Prof. Dr. **G. C. Schmidt**. Zweite verbesserte u. verm. Auflage. Mit 50 Abbild. Preis *ℳ* 3,—, geb. *ℳ* 3,60.
3. Heft: **Elektrizität und Materie** von Prof. Dr. **J. J. Thomson**. Autorisierte Übersetzung von **G. Siebert**. Zweite verbesserte Auflage. Mit 21 Abbildungen. Preis *ℳ* 3,—, geb. *ℳ* 3,60.
4. Heft: **Die physikalischen Eigenschaften der Seen** von Dr. **Otto Freiherr von und zu Aufsess**. Mit 36 Abbild. Preis *ℳ* 3,—, geb. *ℳ* 3,60.
5. Heft: **Die Entwicklung der elektrischen Messungen** von Dr. **O. Frölich**. Mit 124 Abbild. Preis *ℳ* 6,—, geb. *ℳ* 6,80.
6. Heft: **Elektromagnetische Schwingungen und Wellen** von Prof. Dr. **Josef Ritter v. Geitler**. Mit 86 Abbild. Preis *ℳ* 4,50, geb. *ℳ* 5,20.
7. Heft: **Die neuere Entwicklung der Kristallographie** von Prof. Dr. **H. Baumhauer**. Mit 46 Abbild. Preis *ℳ* 4,—, geb. *ℳ* 4,60.
8. Heft: **Neuere Anschauungen auf dem Gebiete der anorganischen Chemie** von Prof. Dr. **A. Werner**. Zweite durchgesehene und vermehrte Auflage. Preis *ℳ* 9,—, geb. *ℳ* 10,—.
9. Heft: **Die tierischen Gifte** von Dr. **Edwin S. Faust**. Preis *ℳ* 6,—, geb. *ℳ* 6,80.
10. Heft: **Die psychischen Maßmethoden** von Dr. **G. F. Lipps**. Mit 6 Abbild. Preis *ℳ* 3,50, geb. *ℳ* 4,10.
11. Heft: **Der Bau des Fixsternsystems** von Prof. Dr. **Hermann Kobold**. Mit 19 Abbild. und 3 Tafeln. Preis *ℳ* 6,50, geb. *ℳ* 7,30.
12. Heft: **Die Fortschritte der kinetischen Gastheorie** von Prof. Dr. **G. Jäger**. Mit 8 Abbild. Preis *ℳ* 3,50, geb. *ℳ* 4,10.
13. Heft: **Petrogenesis** von Prof. Dr. **C. Doelter**. Mit 1 Lichtdrucktafel und 5 Abbild. Preis *ℳ* 7,—, geb. *ℳ* 7,80.
14. Heft: **Die Grundlagen der Farbenphotographie** von Dr. **B. Donath**. Mit 35 Abbild. u. 1 farb. Ausschlagtafel. Preis *ℳ* 5,—, geb. *ℳ* 5,80.
15. Heft: **Höhlenkunde mit Berücksichtigung d. Karstphänomene** von Dr. phil. **Walther von Knebel**. Mit 42 Abbild. Preis *ℳ* 5,50, geb. *ℳ* 6,30.
16. Heft: **Die Eiszeit** von Prof. Dr. **F. E. Geinitz**. Mit 25 Abbild., 3 farbigen Tafeln und einer Tabelle. Preis *ℳ* 7,—, geb. *ℳ* 7,80.
17. Heft: **Die Anwendung der Interferenzen in der Spektroskopie u. Metrologie** von Dr. **E. Gehrcke**. Mit 73 Abbild. Preis *ℳ* 5,50, geb. *ℳ* 6,20.
18. Heft: **Kinematik organischer Gelenke** von Prof. Dr. **Otto Fischer**. Mit 77 Abbild. Preis *ℳ* 8,—, geb. *ℳ* 9,—.
19. Heft: **Franz Neumann und sein Wirken als Forscher und Lehrer** von Prof. Dr. **A. Wangerin**. Mit einer Textfigur und einem Bildnis Neumanns in Heliogravüre. Preis *ℳ* 5,50, geb. *ℳ* 6,20.
20. Heft: **Die Zustandsgleichung der Gase u. Flüssigkeiten u. die Kontinuitätstheorie** v. Prof. Dr. **J. P. Kuenen**. Mit 9 Abb. Preis *ℳ* 6,50, geb. *ℳ* 7,10.

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig.

## DIE WISSENSCHAFT Sammlung naturwissenschaftlicher u. mathematischer Einzeldarstellungen.

21. Heft: **Radioaktive Umwandlungen** von Prof. E. Rutherford. Übersetzt von M. Levin. Mit 53 Abbild. Preis *M* 8,—, geb. *M* 8,60.
22. Heft: **Kant und die Naturwissenschaft** von Prof. Dr. Edm. König. Preis geh. *M* 6,—, geb. *M* 7,—.
23. Heft: **Synthetisch-organische Chemie d. Neuzeit** von Prof. Dr. Jul. Schmidt. Preis *M* 5,50, geb. *M* 6,20.
24. Heft: **Die chemische Affinität und ihre Messung** von Dr. Otto Sackur. Mit 5 Abbildungen im Text. Preis *M* 4,—, geb. *M* 4,80.
25. Heft: **Die Korpuskulartheorie der Materie** von Prof. Dr. J. J. Thomson. Deutsch von G. Siebert. Mit 29 Abbild. Preis *M* 5,—, geb. *M* 5,80.
26. Heft: **Die Bindung des atmosphärischen Stickstoffs in Natur und Technik** von Dr. P. Vageler. Mit 16 Abbildungen im Text und auf 5 Tafeln. Preis *M* 4,50, geb. *M* 5,20.
27. Heft: **Die Schwerebestimmung an der Erdoberfläche** von Prof. Dr. Joh. Bapt. Messerschmitt. Mit 25 Abbildungen. Preis *M* 5,—, geb. *M* 5,80.
28. Heft: **Die Kraftfelder** von Prof. V. Bjerknes. Mit 29 Abbildungen. Preis *M* 7,—, geb. *M* 7,80.
29. Heft: **Physiologie der Stimme und Sprache** von Prof. Dr. Hermann Gutzmann. Mit 92 Abbildungen im Text und auf 2 Tafeln, zum Teil in Farbendruck. Preis geh. *M* 8,—, geb. *M* 9,—.
30. Heft: **Die atmosphärische Elektrizität. Methoden und Ergebnisse der modernen lufterlektrischen Forschung** von Prof. H. Mache und Prof. E. v. Schweidler. Mit 20 Abbildungen. Preis *M* 6,—, geb. *M* 6,80.
31. Heft: **Das Klimaproblem der geologischen Vergangenheit und historischen Gegenwart** von Dr. Wilh. R. Eckardt. Mit 18 Abbildungen und 4 Karten. Preis *M* 6,50, geb. *M* 7,10.
32. Heft: **Lichtbiologie.** Die experimentellen Grundlagen der modernen Lichtbehandlung, zusammengestellt von Dr. Albert Jesionek, Professor an der Universität Gießen. 1910. Preis *M* 4,—, geb. *M* 4,80.
33. Heft: **Die physikalisch-chemischen Eigenschaften der Legierungen.** Von Prof. Dr. Bernh. Dessau. Mit 82 Abbild. Preis *M* 7,—, geb. *M* 8,—.
34. Heft: **Die elektrische Fernübertragung von Bildern.** Von Dr. Rob. Pohl. Mit 25 Abbildungen. Preis *M* 1,80, geb. *M* 2,50.
35. Heft: **Die elektrischen Erscheinungen in metallischen Leitern.** (Leitung, Thermoelektrizität, Galvanomagnetische Effekte, Optik). Von Professor Dr. K. Baedeker. Mit 25 Abbildungen. Preis *M* 4,—, geb. *M* 4,80.
36. Heft: **Grundlagen der praktischen Metronomie.** Von Prof. Dr. K. Scheel. Mit 39 Abbildungen. 1911. Preis *M* 5,20, geb. *M* 6,—.
37. Heft: **Vergleichende Mond- und Erdkunde** von Prof. Dr. S. Günther. Mit 23 Abbildungen und 4 Tafeln. 1911. Preis *M* 5,—, geb. *M* 5,80.
38. Heft: **Das Relativitätsprinzip.** Von Dr. M. Laue. Mit 14 Abbild. 1911. Preis *M* 6,50, geb. *M* 7,20.
39. Heft: **Das Problem des absoluten Raumes und seine Beziehung zum allgemeinen Raumproblem.** Von Aloys Müller. Preis *M* 4,—, geb. *M* 4,80.

 Weitere Hefte in Vorbereitung. — Ausführliches Verzeichnis kostenlos. 

# DIE WISSENSCHAFT

SAMMLUNG

NATURWISSENSCHAFTLICHER UND MATHEMATISCHER  
MONOGRAPHIEN

---

ZWEIUNDVIERZIGSTES HEFT

---

## WECHSELSTROMVERSUCHE

VON

DR. ANTON LAMPA

O. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER K. K. DEUTSCHEN UNIVERSITÄT PRAG

---

MIT 54 TEXTABBILDUNGEN



SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH

# WECHSELSTROMVERSUCHE

VON

**DR. ANTON LAMPA**

O. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER K. K. DEUTSCHEN UNIVERSITÄT PRAG

---

MIT 54 TEXTABBILDUNGEN



SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH :

ISBN 978-3-663-00876-7

ISBN 978-3-663-02789-8 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-663-02789-8

---

**Alle Rechte,  
namentlich dasjenige der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.**

---

Copyright, 1911, by Springer Fachmedien Wiesbaden

Ursprünglich erschienen bei **Friedr. Vieweg & Sohn**, Braunschweig, Germany 1911

**Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1911**

---

MEINEM VEREHRTEN LEHRER

VIKTOR VON LANG

IN DANKBARKEIT

GEWIDMET

## VORWORT.

---

Die nachfolgende Schrift beabsichtigt, ohne erschöpfend sein zu wollen, Wechselstromerscheinungen und Wechselstromversuche darzustellen, welche in erster Linie von physikalischem Interesse sind. Der Beschränkung im Inhalt steht die eingehende Durchrechnung der behandelten Probleme gegenüber. Eine gewisse Breite der Darstellung war hier Gebot, wenn dem weiteren Leserkreis, an welchen sich „Die Wissenschaft“ wendet, gedient sein sollte. Die Beschreibung der zu den behandelten Versuchen nötigen Apparatur enthält Zahlenangaben, welche dem Experimentator ausreichende Orientierung für die Ausführung der Versuche gewähren.

Das letzte Kapitel, „Das elektrostatische Drehfeld“, berührt das interessante Problem der dielektrischen Hysterisis. Die physikalische Erforschung dieses Gebietes ist noch nicht zu abschließenden Ergebnissen gelangt. Es wurde darum ganz darauf verzichtet, auf die Rolle einzugehen, welche die dielektrische Hysterisis bei den in diesem Kapitel beschriebenen Erscheinungen allenfalls spielen könnte.

Hadersdorf-Weidlingau, im September 1911.

**Der Verfasser.**

# INHALTSVERZEICHNIS.

---

|                              |            |
|------------------------------|------------|
| Vorwort . . . . .            | Seite<br>V |
| Inhaltsverzeichnis . . . . . | VII        |

## Einleitung.

|                              |   |
|------------------------------|---|
| § 1. Grundbegriffe . . . . . | 1 |
|------------------------------|---|

### Erstes Kapitel. Die Leitung des Wechselstromes.

|  |    |
|--|----|
| § 2. Der einfache Stromkreis mit Widerstand und Selbstinduktion . . . . .            | 2  |
| § 3. Die Erzeugung von Feddersenströmen durch Kondensator-entladung . . . . .        | 9  |
| § 4. Der Impedanzversuch von Tesla . . . . .   | 14 |
| § 5. Der Impedanzversuch von P. H. Eykman . . . . .                                  | 25 |
| § 6. Der Skineffekt . . . . .  | 31 |
| § 7. Der einfache Stromkreis mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität . . . . . | 44 |

### Zweites Kapitel.

### Induktion und ponderomotorische Kräfte.

|   |    |
|---|----|
| § 8. Induktion durch einen von Wechselstrom durchflossenen Stromkreis . . . . .   | 48 |
| § 9. Die ponderomotorische Kraft zwischen dem primären und sekundären Stromkreis. Versuche von Elihu Thomson und V. v. Lang . . . . . | 53 |
| § 10. Der sekundäre Stromkreis enthält eine Kapazität. v. Langs Methode der Bestimmung der Kapazität mit der Wage . . . . .           | 68 |
| § 11. Bestimmung der Selbstinduktion mit der Wage nach W. Peukert . . . . .   | 74 |
| § 12. Der Resonanzversuch von Lodge . . . . .   | 78 |

|  | Seite |
|--|-------|
| <b>Drittes Kapitel. Das magnetische Drehfeld.</b>  |       |
| § 13. Das einfache Drehfeld . . . . .  | 85    |
| § 14. Die Herstellung des einfachen Drehfeldes mit Einphasenstrom . . . . .                                | 90    |
| § 15. Herstellung des einfachen Drehfeldes durch Dreiphasenstrom   | 97    |
| § 16. Die Herstellung des einfachen Drehfeldes mittels Gleichstrom   | 99    |
| § 17. Demonstration eines magnetischen Drehfeldes nach Rubens-Bode . . . . .                               | 102   |
| § 18. Versuche im magnetischen Drehfeld . . . . .  | 104   |
| § 19. Die Größe des Drehungsmomentes . . . . .   | 112   |
| § 20. Rotationen im reinen Wechselfeld . . . . .   | 116   |
| § 21. Die Zerlegung eines Wechselfeldes in zwei Drehfelder . .   | 121   |
| <b>Viertes Kapitel. Das elektrostatische Drehfeld.</b>   |       |
| § 22. Das elektrostatische Drehfeld. Anordnung von Arnò . .  | 127   |
| § 23. Die Drehfeldschaltung von Guye und Denso. Erste Anordnung von v. Lang . . . . .                      | 133   |
| § 24. Zweite Drehfeldanordnung von v. Lang . . . . .   | 136   |
| § 25. Die Drehfeldanordnung von Lampa . . . . .  | 140   |
| § 26. Versuche im elektrostatischen Drehfelde . . . . .  | 142   |
| § 27. Theorie der Rotationserscheinungen im elektrostatischen Drehfelde . . . . .                          | 148   |
| § 28. Rotationen im einfachen elektrostatischen Wechselfelde. Versuche von Ch. Borel und v. Lang . . . . . | 160   |
| § 29. Theorie der Rotationserscheinungen im Wechselfelde . . .   | 167   |

---

## Druckfehler,

welche vor Benutzung des Buches berichtigt werden wollen.

Es soll heißen:

Seite 3, Zeile 7 von unten statt  $\frac{w}{w'}$  richtig  $\frac{w'}{w}$ .  
" 124, " 12 " " "  $n = n_0$  "  $n = 0$ .

---

# Einleitung.

## § 1. Grundbegriffe.

Die folgende Darstellung betrifft Versuche, durch welche die besonderen Eigentümlichkeiten der Wechselströme illustriert werden. Die Physik der elektromagnetischen Strahlung bleibt von dieser Darstellung ausgeschlossen; dagegen legen wir uns keine Beschränkung in Hinsicht auf die Frequenz der zu verwendenden Wechselströme auf, setzen aber durchweg voraus, daß die Strömung als quasistationär angesehen werden darf. Die Frequenz wird also stets in einem solchen Verhältnis zu den charakteristischen Größen der Leiter vorausgesetzt, daß in einem gegebenen Moment längs des ganzen Leiters derselbe Strömungszustand besteht. Bei den zu schildernden Experimenten gelangt teilweise Wechselstrom geringer Frequenz, wie ihn die gewöhnlichen technischen Wechselstrommaschinen liefern — wir wollen ihn technischen Wechselstrom nennen —, teilweise Wechselstrom sehr hoher Frequenz zur Verwendung. Die Wechselströme sehr hoher Frequenz werden durch Kondensatorentladung erhalten. Sie werden in dieser Schrift ihrem Entdecker zu Ehren als Feddersenströme bezeichnet werden. Meßmethoden und Meßinstrumente werden in dieser Schrift nicht besprochen.

Ein Wechselstrom ist ein Strom, dessen Stromstärke eine periodische Funktion der Zeit ist. Da nach dem Fourierschen Satz eine solche Funktion in eine Summe von Sinus- und Kosinusgliedern aufgelöst werden kann, genügt es, wenn wir die Stromstärke durch eine einfache Sinus- oder Kosinusfunktion darstellen. Das Argument dieser Funktion sei  $\alpha t$ , worin  $t$  die Zeit, gemessen in Sekunden, bedeutet. Die Schwingungsdauer (in Sekunden), d. i. die Dauer einer ganzen Periode, werde mit  $\tau$  bezeichnet.  $\alpha$  und  $\tau$  sind durch die Gleichung

$$\alpha = \frac{2\pi}{\tau} \dots \dots \dots (1)$$

miteinander verbunden. Die Schwingungszahl in einer Sekunde

$$n = \frac{1}{\tau} \cdot \dots \dots \dots (2)$$

heißt die Frequenz des Wechselstromes. Ihr doppelter Wert  $2n$  führt den Namen Wechselzahl; sie gibt die Zahl der in einer Sekunde stattfindenden Hin- und Hergänge des Wechselstromes an. Aus (1) und (2) folgt

$$\alpha = 2\pi n \cdot \dots \dots \dots (3)$$

d. h.  $\alpha$  bedeutet die Anzahl der ganzen Schwingungen des Wechselstromes in  $2\pi$  Sekunden. Diese Größe führt den Namen Kreisfrequenz.

---

## Erstes Kapitel.

### Die Leitung des Wechselstromes.

#### § 2. Der einfache Stromkreis mit Widerstand und Selbstinduktion.

In einem einfachen geschlossenen Stromkreis vom Ohmschen Widerstand  $w$  und dem Selbstinduktionskoeffizienten  $L$  wirke eine periodische elektromotorische Kraft  $v = A \sin \alpha t$ . Ist  $i$  die Stromstärke, so ist  $-L \frac{di}{dt}$  die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion, so daß die Anwendung des Ohmschen Gesetzes auf den Stromkreis zu der Gleichung

$$wi = v - L \frac{di}{dt}$$

oder

$$L \frac{di}{dt} + wi = A \sin \alpha t \dots \dots \dots (1)$$

führt. Die Lösung derselben lautet:

$$i = \text{const} e^{-\frac{w}{L}t} + \frac{A}{w^2 + \alpha^2 L^2} (w \sin \alpha t - \alpha L \cos \alpha t).$$

Das erste Glied verschwindet mit zunehmender Zeit. Es darf daher außer Betracht bleiben, wenn nicht gerade die Ausbildung des Strömungszustandes speziell untersucht werden soll. Da diese

Frage für unsere Zwecke ohne Interesse ist, soll sie hier nicht diskutiert werden. Wir werden aus diesem Grunde in der weiteren Darstellung, wo wir Veranlassung haben werden, die Integrale von Gleichungen von der Art der hier erörterten anzugeben, dieses mit der Zeit verschwindende Glied überhaupt nicht anschreiben. Setzt man

$$w' = \sqrt{w^2 + \alpha^2 L^2} \dots \dots \dots (2)$$

und

$$\frac{w}{w'} = \cos \varphi, \quad \frac{\alpha L}{w'} = \sin \varphi, \quad \text{also} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\alpha L}{w} \dots \dots (3)$$

so wird

$$i = \frac{A}{w'} \sin(\alpha t - \varphi) \dots \dots \dots (4)$$

Stromstärke und elektromotorische Kraft schwingen nicht synchron, die Stromstärke bleibt hinter der elektromotorischen Kraft in Phase zurück; die Phasenverschiebung  $\varphi$  ist nach (3) um so größer, je größer das Produkt von Kreisfrequenz und Selbstinduktion gegenüber dem Ohmschen Widerstand ist. Außerdem zeigt der Stromkreis gegenüber dem Wechselstrom einen größeren Widerstand als gegen Gleichstrom. An Stelle des Ohmschen Widerstandes  $w$ , der auch Resistanz genannt wird, tritt der größere scheinbare, Wechselstromwiderstand oder Impedanz genannte Widerstand  $w' = \sqrt{w^2 + \alpha^2 L^2}$ . Das Glied  $\alpha L$  heißt induktiver Widerstand, Induktanz oder Reaktanz. Das Verhältnis der Impedanz zum Ohmschen Widerstand  $\frac{w'}{w}$  ergibt sich aus (3) gleich

$\frac{1}{\cos \varphi}$ . Gibt man dem Stromkreis die Form einer Spule, so kann man, auch bei kleiner Frequenz,  $\alpha L$  so groß machen, daß  $\varphi$  dem Werte  $\frac{\pi}{2}$  und  $\frac{w}{w'}$  dem Werte  $\infty$  nahe kommt. Allerdings ist bei Verwendung eines Eisenkernes  $L$  nicht konstant und man müßte, um streng zu bleiben, in Gl. (1)  $\frac{d}{dt}(Li)$  statt  $L \frac{di}{dt}$  schreiben.

Führt man in (4) einen neuen Nullpunkt der Zeitzählung ein, so daß die von diesem Nullpunkt gezählte Zeit  $t'$  mit der Zeit  $t$  durch die Gleichung  $\alpha t' = \alpha t - \varphi$  zusammenhängt, so wird

$$i = \frac{A}{w'} \sin \alpha t' \dots \dots \dots (5)$$

Unter dem Mittelwert der Stromstärke  $(i)_m$  versteht man ihren mittleren Wert während einer halben Schwingungsdauer. Es ist während der ersten Halbschwingung

$$(i)_m = \frac{\frac{A}{w'} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \sin \alpha t' dt'}{\frac{\tau}{2}} = \frac{2 A}{\pi w'} = \frac{2 A}{\pi \sqrt{w^2 + \alpha^2 L^2}}.$$

Derselbe Wert gilt für die dritte, fünfte usw. Halbschwingung, während in der zweiten, vierten, sechsten usw. Halbschwingung der mittlere Wert der Stromstärke gleich groß, aber negativ ist. Um von dem Vorzeichen unabhängig zu sein, hat man den Begriff der effektiven Stromstärke  $J$  eingeführt, welcher definiert ist durch  $J = \sqrt{(i^2)_m}$ , worin  $(i^2)_m$  den Mittelwert von  $i^2$  während einer ganzen Periode  $\tau$  bedeutet. Es ist

$$(i^2)_m = \frac{\frac{A^2}{w'^2} \int_0^{\tau} \sin^2 \alpha t' dt'}{\tau} = \frac{A^2}{2 w'^2} = \frac{A^2}{2(w^2 + \alpha^2 L^2)}$$

und

$$J = \frac{A}{\sqrt{2} \sqrt{w^2 + \alpha^2 L^2}} = \frac{A}{w' \sqrt{2}} \dots \dots \dots (6)$$

Analog definiert man die effektive Spannung  $V = \sqrt{(v^2)_m}$ , worin  $(v^2)_m$  der Mittelwert des Quadrates der Spannung während einer ganzen Periode ist. Es war  $v = A \sin \alpha t$ , womit

$$(v^2)_m = \frac{A^2 \int_0^{\tau} \sin^2 \alpha t dt}{\tau} = \frac{A^2}{2}$$

und

$$V = \frac{A}{\sqrt{2}} \dots \dots \dots (7)$$

wird. Effektive Stromstärke, effektive Spannung und Impedanz erfüllen das Ohmsche Gesetz, indem nach (6) und (7)

$$J = \frac{V}{w'} \dots \dots \dots (8)$$

ist.

Die Arbeit pro Sekunde in einem Stromleiter, der unter der Wechselspannung  $v = A \sin \alpha t$  steht und vom Wechselstrom  $i = \frac{A \sin \alpha t'}{w'}$  durchflossen wird, ist

$$W = \frac{\int_0^{\tau} v i dt}{\tau} = \frac{A^2}{w' \tau} \int_0^{\tau} \sin \alpha t \sin \alpha t' dt.$$

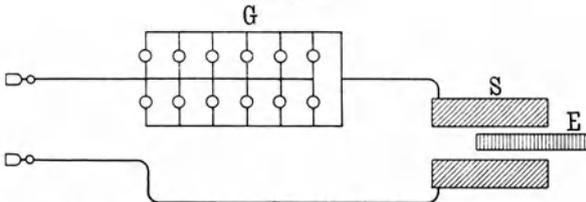
Man findet mit Rücksicht auf  $\alpha t' = \alpha t - \varphi$

$$W = \frac{A^2}{2w'} \cos \varphi = V J \cos \varphi \dots \dots \dots (9)$$

$\cos \varphi$  heißt der Leistungsfaktor.

Zur Demonstration der Impedanz mit gewöhnlichem technischen Wechselstrom bedienen wir uns einer Drahtspule, in die ein (unterteilter) Eisenkern eingeschoben werden kann; mit dieser Drahtspule schalten wir einige parallel geschaltete Glühlampen

Fig. 1.



S Querschnitt der Spule. E Eisenkern. G Glühlampen.

in den Stromkreis (Fig. 1); bei geeigneter Dimensionierung der Spule verlöschen die Lampen, wenn der Eisenkern eingeschoben wird.

Die nachstehend geschilderten Versuche sind mit einer Spule ausgeführt, die auf ein geschlitztes Messingrohr von 5,2 cm äußerem Durchmesser gewickelt ist. Die Wicklung besteht aus Kupferdraht von 1,2 mm Durchmesser, der mit Guttapercha und doppelter wachstränkter Baumwollumspinnung isoliert ist. Der Durchmesser des Drahtes samt Isolierung beträgt 3,3 mm. Der Draht ist in 28 Lagen von je 78 Windungen aufgewickelt, die

ganze Wickelung in drei Abteilungen zerlegt, von denen die innerste 14, die mittlere 8 und die äußerste 6 Lagen umfaßt. Die innerste (Abt. I) hat einen Widerstand von 4 Ohm, die mittlere (Abt. II) 4,14 Ohm, die äußerste (Abt. III) 3,98 Ohm. Der benutzte Wechselstrom (der Prager Zentrale) vollführt 48 ganze Schwingungen in der Sekunde. Durch gleichzeitige Messung der effektiven Stromstärke und der effektiven Klemmenspannung an der Spule fand man folgende Wechselstromwiderstände der Spule ohne Eisenkern: Abt. I 9,15 Ohm, Abt. II 8,98 Ohm, Abt. III 8,58 Ohm und hieraus mit den bekannten Gleichstromwiderständen die Selbstinduktionskoeffizienten Abt. I 0,000745 Henry, Abt. II 0,000692 Henry, Abt. III 0,000636 Henry. Wurden je zwei Abteilungen hintereinandergeschaltet, so ergaben sich folgende Zahlen:

|             |                    |                             |               |
|-------------|--------------------|-----------------------------|---------------|
| Abt. I/II   | Impedanz 28,3 Ohm, | Selbstinduktionskoeffizient | 0,00808 Henry |
| Abt. II/III | " 29,2 "           | " "                         | 0,00865 "     |
| Abt. III/I  | " 24,6 "           | " "                         | 0,00593 "     |

Wird nun ein Eisenkern von 27 cm Länge und 5 cm Durchmesser, der aus 1 mm starken WeicheisendrÄhten besteht, ganz in die Spule eingeschoben, so steigen die Werte der Impedanz und Selbstinduktion betrÄchtlich an. Es zeigt sich nun aber auch, in Übereinstimmung mit der oben gemachten Bemerkung, daß die Selbstinduktion und daher auch die Impedanz jetzt nicht mehr von der Stromstärke unabhängig sind, wie dies bei Verwendung der Spule ohne Eisenkern der Fall ist. Zur Illustration dieser Tatsache mögen die folgenden Messungsergebnisse dienen:

- Abt. I. Stromstärke 0,5 Amp. Klemmenspannung 31 Volt.  
 Impedanz 62 Ohm. Selbstinduktion 0,04209 Henry.  
 Stromstärke 1 Amp. Klemmenspannung 60,2 Volt.  
 Impedanz 60,2 Ohm. Selbstinduktion 0,03967 Henry.  
 Stromstärke 1,5 Amp. Klemmenspannung 89,8 Volt.  
 Impedanz 59,87 Ohm. Selbstinduktion 0,03923 Henry.  
 Stromstärke 2 Amp. Klemmenspannung 119,5 Volt.  
 Impedanz 59,75 Ohm. Selbstinduktion 0,03907 Henry.
- Abt. II. Stromstärke 0,5 Amp. Klemmenspannung 11,5 Volt.  
 Impedanz 23 Ohm. Selbstinduktion 0,00563 Henry.  
 Bei den Stromstärken 1, 1,5, 2, 2,5, 3 Amp. ergeben sich die Impedanzen 21, 21,2, 20,95, 20,96, 21 Ohm, also nahe konstant. Ihr mittlerer Wert ist 21,025 Ohm, welchem eine mittlere Selbstinduktion von 0,00467 Henry entspricht.

Abt. III. Stromstärke 1 Amp. Klemmenspannung 15,3 Volt.  
 Impedanz 15,3 Ohm. Selbstinduktion 0,00240 Henry.  
 Bei 2, 3, 4 Amp. sind die Impedanzen nahe gleich. Ihr  
 Mittelwert ist 14,39 Ohm, der Mittelwert der Selbstinduktion  
 0,00210 Henry.

Abt. I/II in Reihe. Stromstärke 0,5 Amp. Klemmenspannung 79,4 Volt.  
 Impedanz 158,8 Ohm. Selbstinduktion 0,27651 Henry.  
 Stromstärke 0,8 Amp. Klemmenspannung 120 Volt.  
 Impedanz 150 Ohm. Selbstinduktion 0,24776 Henry.

Abt. II/III in Reihe. Stromstärke 0,5 Amp. Klemmenspannung 36,2 Volt.  
 Impedanz 72,4 Ohm. Selbstinduktion 0,05690 Henry.  
 Stromstärke 1 Amp. Klemmenspannung 66,7 Volt.  
 Impedanz 66,7 Ohm. Selbstinduktion 0,04742 Henry.  
 Bei den Stromstärken 1,5 und 1,9 Amp. sind die Impe-  
 danzen nahe gleich. Ihr Mittel beträgt 64,73 Ohm, die  
 Selbstinduktion im Mittel 0,04554 Henry.

Abt. III/I in Reihe. Stromstärke 0,5 Amp. Klemmenspannung 66 Volt.  
 Impedanz 132 Ohm. Selbstinduktion 0,19086 Henry.  
 Stromstärke 1 Amp. Klemmenspannung 119,9 Volt.  
 Impedanz 119,9 Ohm. Selbstinduktion 0,15734 Henry.  
 Stromstärke 1,1 Amp. Klemmenspannung 126 Volt.  
 Impedanz 114,55 Ohm. Selbstinduktion 0,14356 Henry.

Alle drei Abteilungen hintereinandergeschaltet haben ohne Eisen-  
 kern einen Wechselstromwiderstand von 56,8 Ohm und eine  
 Selbstinduktion von 0,03386 Henry. Mit Eisenkern ergibt sich  
 bei direktem Anschluß an die Leitung bei einer Klemmenspannung  
 von 129 Volt eine Stromstärke von 0,45 Amp., welcher ein  
 Wechselstromwiderstand von 287 Ohm und eine Selbstinduktion  
 von 0,97 Henry entspricht.

Ferner wurde ein Glühlampenrheostat, der zwölf sechzehn-  
 kerzige Lampen in Parallelschaltung trägt, mit den in Reihe ver-  
 bundenen Abteilungen I und II der Spule in den Stromkreis ge-  
 schaltet. Durch Ein- oder Herausschrauben von Lampen wird  
 der Widerstand geändert. Es wurden nun folgende Stromstärken  
 gemessen.

Ohne Eisenkern:

|          |     |        |
|----------|-----|--------|
| 2 Lampen | 0,5 | Amp.   |
| 4        | "   | 0,95 " |
| 6        | "   | 1,25 " |
| 8        | "   | 1,48 " |
| 10       | "   | 1,65 " |
| 12       | "   | 1,8 "  |

Eisenkern zur Hälfte in die Spule eingeschoben :

|          |     |        |
|----------|-----|--------|
| 2 Lampen | 0,4 | Amp.   |
| 4        | "   | 0,66 " |
| 6        | "   | 0,78 " |
| 8        | "   | 0,84 " |
| 10       | "   | 0,88 " |
| 12       | "   | 0,90 " |

Eisenkern ganz in die Spule eingeschoben :

|          |      |        |
|----------|------|--------|
| 2 Lampen | 0,25 | Amp.   |
| 4        | "    | 0,35 " |
| 6        | "    | 0,40 " |
| 8        | "    | 0,45 " |
| 10       | "    | 0,47 " |
| 12       | "    | 0,48 " |

Verwendet man nur zwei Lampen, so sinkt die gesamte Stromstärke durch vollständiges Einschieben des Eisenkernes von 0,5 auf 0,25, also in der einzelnen Lampe von 0,25 auf 0,125 Amp. Man nimmt auch deutlich eine Verminderung der Helligkeit wahr; deutlicher wird dies bei Verwendung von 10 Lampen, wo die Stromstärke im ganzen von 1,65 auf 0,47, also in der einzelnen Lampe von 0,165 auf 0,047 Amp. herabsinkt. Bei der letzteren Stromstärke ist gerade noch ein schwaches Glühen der Lampen zu beobachten. Nimmt man alle 12 Lampen, so ruft das Einschieben des Eisenkernes eine Herabsetzung der Stromstärke in der einzelnen Lampe von 0,15 auf 0,04 Amp. hervor; bei dieser Stromstärke sind die Lampen vollständig dunkel und wir erhalten so eine sinnenfällige Demonstration der Impedanz und des Prinzips der Drosselspulen, welche die Wechselstromtechnik verwendet. Die paradoxe Erscheinung, daß die Impedanzwirkung bei Verwendung von mehr Lampen deutlicher hervortritt als bei der Verwendung von wenig Lampen, findet ihre einfache Erklärung darin, daß bei vielen Lampen der Lampenwiderstand, der durch das Einschieben des Eisenkernes nicht verändert wird, einen kleineren Bruchteil des Gesamtwiderstandes des Stromkreises ausmacht, als bei wenig Lampen.

Der Quotient Impedanz/Widerstand hängt von dem Kosinus der Phasenverschiebung ab; er ist, wie wir gesehen haben, diesem umgekehrt proportional. Bei gegebenen  $L$  und  $w$  hängt dieser Wert nur von der Frequenz des Wechselstromes ab, da  $tg \varphi = \frac{\alpha L}{w}$

$= 2 \pi n \frac{L}{w}$ . Um den Einfluß einer großen Frequenz zu zeigen, wird man daher zweckmäßig Feddersenströme verwenden. Wir wollen aus diesem Grunde nun zunächst die Erzeugung von solchen Strömen besprechen.

### § 3. Die Erzeugung von Feddersenströmen durch Kondensatorentladung.

Die Möglichkeit periodischer Entladungen eines Kondensators ist zuerst von W. Thomson <sup>1)</sup> (Lord Kelvin) im Jahre 1855 auf theoretischem Wege abgeleitet worden, nachdem bereits Helmholtz <sup>2)</sup> in seiner Abhandlung über die Erhaltung der Kraft die Entladung einer Flaschenbatterie als ein Hin- und Herschwanke der Elektrizität zwischen beiden Belegungen aufgefaßt hatte. Feddersen <sup>3)</sup> hat dann, ganz unabhängig von der Theorie, die oszillatorische Kondensatorentladung experimentell erwiesen. Wir gehen bei unseren Betrachtungen von einem Kugelkondensator aus. Die innere Kugel habe den Radius  $r_1$  und werde mit der Elektrizitätsmenge  $+e$  geladen. Auf der Innenseite der äußeren Hohlkugel, welcher der äußere Radius  $r_2$  zugehört, wird dann die Elektrizitätsmenge  $-e$  induziert. Die auf der äußeren Oberfläche dieser Hohlkugel induzierte Menge  $+e$  werde abgeleitet. Das Potential in der Oberfläche der inneren Kugel ist also  $\frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2}$ , das Potential auf der äußeren gleich Null, die Potentialdifferenz zwischen innerer und äußerer Kugel demnach

$$v = e \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

Wir verbinden nun die innere und äußere Kugel durch einen Draht vom Ohmschen Widerstand  $w$  und der Selbstinduktion  $L$ . Ist  $i$  die Stärke des Entladungsstromes, so gilt die Gleichung

---

<sup>1)</sup> Phil. Mag. [4] 5, 393 (1855). Wieder abgedruckt in W. Thomson, *Mathematical and physical papers* 1, 540.

<sup>2)</sup> Wissenschaftl. Abhandl. 1, 46.

<sup>3)</sup> Pogg. Ann. 103, 69 (1858); 108, 497 (1859); 112, 452 (1861); 113, 437 (1861); 116, 132 (1862). Neudruck in Ostwalds *Klassikern der exakten Wissenschaften*, Nr. 166.

$$wi = v - L \frac{di}{dt} \dots \dots \dots (2)$$

Andererseits ist  $i$  bestimmt durch die Gleichung

$$-de = i dt,$$

da der Strom  $i$  in der Zeit  $dt$  die Menge  $de$  von der inneren Kugel wegführt. Die Differentiation von (1) liefert

$$dv = de \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = -i dt \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

oder

$$\frac{dv}{dt} = -i \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Differenziert man (2) nach der Zeit und substituiert den eben gefundenen Wert von  $\frac{dv}{dt}$ , so resultiert

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + w \frac{di}{dt} + i \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 0.$$

Nun ist  $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{C}$ , wenn  $C$  die Kapazität des Kugelkondensators ist. Wir können die letzte Gleichung daher auch schreiben:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{w}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{CL} = 0 \dots \dots \dots (3)$$

Diese Gleichung beschreibt allgemein die Entladung eines Kondensators von der Kapazität  $C$  durch einen Draht vom Widerstand  $w$  und der Selbstinduktion  $L$ . Ein partikuläres Integral derselben lautet  $i = e^{\alpha t}$ . Für  $\alpha$  erhält man aus Gl. (2):

$$\alpha = -\frac{w}{2L} \pm \sqrt{\frac{w^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}.$$

Ist  $\frac{1}{CL} > \frac{w^2}{4L^2}$ , so kann  $\alpha$  in der Form

$$\alpha = -\frac{w}{2L} \pm i \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{w^2}{4L^2}}$$

geschrieben werden und das vollständige Integral der Gl. (3) erhält die Form

$$i = e^{-\frac{w}{2L}t} \left( A' e^{it} \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{w^2}{4L^2}} + B' e^{-it} \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{w^2}{4L^2}} \right)$$

oder

$$i = e^{-\frac{w}{2L}t} \left( A \cos t \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{w^2}{4L^2}} + B \sin t \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{w^2}{4L^2}} \right),$$

worin  $A', B', A, B$  Konstanten sind. Der Entladungsstrom ist periodisch, seine Amplitude nimmt mit wachsender Zeit ab, die Entladung erfolgt in gedämpften Schwingungen. Die Schwingungsdauer ist bestimmt durch die Gleichung

$$\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{w^2}{4L^2}} = \frac{2\pi}{\tau}$$

oder

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{w^2}{4L^2}}} \dots \dots \dots (4)$$

Ist, wie dies bei Anordnungen zur Erzeugung von Wechselströmen hoher Frequenz gewöhnlich der Fall ist,  $\frac{w^2}{4L^2}$  sehr klein gegen  $\frac{1}{CL}$ , so kann man einfach schreiben:

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL}}} = 2\pi \sqrt{CL} \dots \dots \dots (5)$$

Ist  $\frac{w^2}{4L^2} > \frac{1}{CL}$  oder  $= \frac{1}{CL}$ , so finden keine Oszillationen statt, die Ladung des Kondensators sinkt auf den Wert Null, ohne daß, wie bei der oszillatorischen Entladung, Umladungen der beiden Kondensatorbelegungen stattfinden würden.

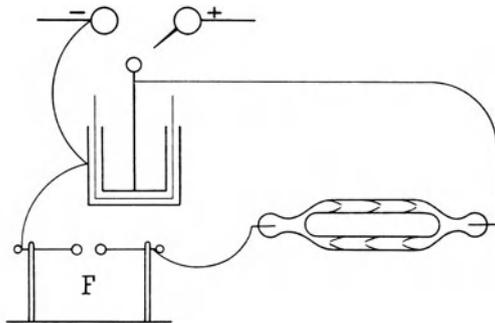
Es ist nicht Aufgabe dieser Schrift, die Versuche Feddersens zu schildern, ebensowenig sollen die zahlreichen späteren Versuche besprochen werden, durch welche die vorstehende Theorie verifiziert werden kann. Qualitativ kann das Auftreten von Oszillationen sehr leicht nachgewiesen werden. Paalzow<sup>1)</sup> schaltete zu diesem Zwecke in den Entladungskreis einer Batterie

---

<sup>1)</sup> Pogg. Ann. 118, 178 (1863).

eine Geißlersche Röhre. Ist die Entladung oszillatorisch, so tritt an beiden Elektroden blaues Glimmlicht auf oder die ganze Röhre ist von einer weißlichen Entladung erfüllt, der dunkle Zwischenraum, welcher bei einseitig gerichteter Entladung die positive Lichtsäule von dem negativen Glimmlicht trennt, ist verschwunden. Beobachtet man das Bild der Röhre in einem rasch rotierenden Spiegel, so erscheint es vielfach, und in den abwechselnden Bildern liegt das Glimmlicht auf entgegengesetzten Seiten. Man kann den Paalzowschen Versuch abändern, indem man eine Holtz'sche Doppeltrichterröhre verwendet. Die Entladung geht immer durch jene Röhre, in welcher die weiten Öffnungen der Trichter dem positiven Pol zugekehrt sind. Wir treffen nun eine Versuchsanordnung, wie sie in Fig. 2 skizziert ist. Von dem

Fig. 2.



einen Pol (in der Figur dem positiven) einer Influenzmaschine ohne Leidener Flasche führt eine Leitung zu einer Spitze, welche gegen den Knopf einer Leidener Flasche gerichtet ist. Von dem anderen Pol der Maschine führt eine Leitung zur äußeren Belegung der Flasche und von da zu einer Funkenstrecke, deren anderer Pol mit der einen Elektrode der Holtz'schen Doppelröhre verbunden ist. Die zweite Elektrode ist mit der inneren Belegung der Leidener Flasche verbunden. Bringt man zunächst die beiden Pole der Funkenstrecke in Berührung und setzt die Influenzmaschine in Gang, so bleibt die Potentialdifferenz zwischen den beiden Belegungen der Leidener Flasche konstant gleich der Potentialdifferenz zwischen den beiden Polen der Maschine, wir müssen eine kontinuierliche, stets in gleicher Richtung erfolgende Entladung durch

die Röhre erhalten. Dies zeigt auch der Versuch. Die Entladung geht nur durch den einen Zweig der Doppelröhre, in der Figur durch die untere. Zieht man aber die beiden Pole der Funkenstrecke auseinander, so muß die Leidener Flasche erst zu jener Potentialdifferenz aufgeladen werden, welche ausreichend ist, um einen Funken in der Funkenstrecke zu erzeugen, damit eine Entladung der Flasche durch die Röhre stattfinden kann. Ist diese Entladung oszillatorisch, so müssen nun beide Teile der Röhre, entsprechend dem abwechselnden Vorzeichen ihrer beiden Pole, aufleuchten. Dies wird durch den Versuch bestätigt. Man könnte wieder einen rasch rotierenden Spiegel zur näheren Analyse des Entladungsvorganges verwenden, und würde dann sehen, daß die Entladungen in den beiden Zweigen der Röhre nicht gleichzeitig sind, sondern abwechselnd vor sich gehen. Da die Oszillationen gedämpft sind, ist die erste Halbschwingung die intensivste. Man beobachtet in der Tat, daß jener Zweig der Röhre, durch welchen die erste Halbschwingung hindurchgeht, das ist derjenige, durch welchen die Entladung bei zusammengeschobener Funkenstrecke erfolgt (in der Figur der untere), heller leuchtet als der andere.

Von Feddersen angefangen, haben die Experimentatoren, welche den Entladungsvorgang von Kondensatoren studierten, zumeist mit kleinen Kapazitäten gearbeitet. Eine Anordnung zur Herstellung und Demonstration von Kondensatorschwingungen von etwa 1 bis 2 Sekunden Schwingungsdauer hat O. Wiener angegeben<sup>1)</sup>. W. König wiederholte diese Versuche, bediente sich aber anderer Mittel zur Demonstration<sup>2)</sup>. In jüngster Zeit hat O. Martiensen<sup>3)</sup> Versuche mit einer sehr großen Kapazität angestellt, die hier beschrieben werden sollen. Er benutzte eine Kapazität  $C$  von 1000 Mikrofarad ( $10^{-3}$  Farad), die aus 500 parallel geschalteten Kondensatoren von je 2 Mikrofarad, wie sie in Telephonzentralen verwendet werden, zusammengesetzt war. Als Selbstinduktion  $L$  diente eine Drosselspule von nahe 1000 Henry und einem Widerstand von etwa 50 Ohm. Der Eisenkern der Drosselspule hatte einen Querschnitt von etwa 100 cm<sup>2</sup> und bestand aus 0,5 mm starkem Dynamoblech. Die Wickelung bestand

---

<sup>1)</sup> Verh. d. Deutsch. Phys. Ges., 9. Jahrg., S. 470 (1907).

<sup>2)</sup> Physik. Zeitschr., 9. Jahrg., S. 788 (1908).

<sup>3)</sup> Verh. d. Deutsch. Phys. Ges., 12. Jahrg., S. 2 (1910).

aus parallel geschalteten Spulen mit je 6500 Windungen eines doppelt mit Baumwolle umsponnenen Kupferdrahtes von 1,5 mm Durchmesser. Das Gewicht der Wickelung betrug etwa 130, das des Eisenkernes etwa 80 kg. Bei den angeführten Werten von  $C$  und  $L$  ist  $CL$  gerade gleich 1 und die Schwingungsdauer  $\tau = 2\pi$ , d. i. etwa  $\approx 6,3$  Sekunden.

In den Entladungsstromkreis war ein Gleichstromampere-meter mit Nullpunkt in der Mitte eingeschaltet, und man konnte bei der langen Schwingungsdauer direkt am Amperemeter beobachten, wie der Strom zunimmt und abnimmt, die Richtung wechselt, wieder zunimmt usw. Geladen wurde der Kondensator durch Anlegen einer Spannung von 110 Volt. Die Dämpfung des Entladungsstromes kam darin zum Ausdruck, daß das Ampere-meter nach etwa 10 halben Schwingungen zur Ruhe kam. Wegen Verwendung eines Eisenkernes ist die Selbstinduktion nicht konstant; bei geringer Stromstärke ist die auf den Eisenkern wirkende magnetisierende Kraft gering, die Permeabilität nimmt aber mit der magnetisierenden Kraft ab und damit auch die Selbstinduktion; dies kam in einer allmählichen Abnahme der Schwingungsdauer zum Ausdruck.

Wurden in den Entladungskreis noch 400 Ohm induktionslosen Widerstandes eingeschaltet, so war die Dämpfung beträchtlich vergrößert; bei Zuschaltung von 4000 Ohm hatte die Entladung bereits aperiodischen Charakter; der Zeiger des Amperemeters stieg zu einem maximalen Ausschlag an, von welchem er dann ganz allmählich auf Null herabsank.

#### § 4. Der Impedanzversuch von Tesla.

Tesla leitet Feddersenströme durch einen dicken Kupferbügel  $ABA'$  (Fig. 3), der an mehreren Stellen Glühlampen im Nebenschluß enthält. Die Lampen leuchten, während sie dunkel bleiben, wenn Gleichstrom oder technischer Wechselstrom durch den Bügel geschickt wird. In Fig. 3 ist eine Versuchsanordnung skizziert, welche die Erscheinung zu demonstrieren gestattet.  $P_1$  und  $P_2$  sind die Pole eines Hochspannungstransformators (10000 oder besser 20000 Volt) oder der Sekundärspule eines größeren Ruhmkorff, 1 und 2 die beiden Belegungen einer Kapazität  $C$ . Die oszillatorischen Entladungsströme dieser Kapazität gehen wegen der hohen Selbstinduktion der Transformator- bzw. Ruhmkorff-

wicklung praktisch vollständig durch die aus der Funkenstrecke  $F$  und dem Kupferbügel mit seinen Nebenschlüssen gebildete Strombahn.

Wir geben die Theorie dieses Teslaschen Versuches zunächst für den Fall einer einzigen Nebenschließung (Fig. 4). Es sei das Potential der Kondensatorplatte 1  $= A_1 \sin at$ , das der Kondensatorplatte 2  $= A_2 \sin at$ , so daß die Potentialdifferenz der beiden Belegungen  $= (A_1 - A_2) \sin at = A \sin at$  ist. Für die weitere

Fig. 3.

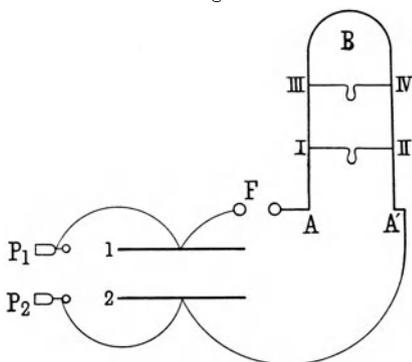
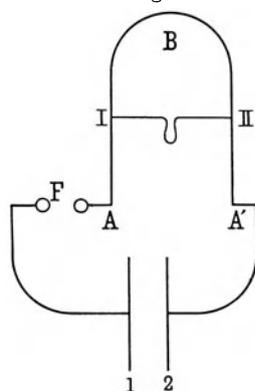


Fig. 4.



Berechnung des Vorganges machen wir wieder die Annahme, daß die Strömung quasistationär ist, d. h. daß der Strom in allen Punkten der Leitung merklich dieselbe Phase hat. Diese Voraussetzung trifft bei der Verwendung von Feddersenströmen (Schwingungszahl bis 1 Million in der Sekunde) in einer relativ kurzen Leitungsbahn, wie sie hier vorliegt, zu. Die Potentiale in den Punkten I und II seien  $v_1$  und  $v_2$ . Es sei weiter der Widerstand der Leitung von der Belegung 1 bis zum Punkte I (inkl. Funkenstrecke)  $= \varrho_1$ , deren Selbstinduktionskoeffizient  $A_1$ , die Stromstärke in diesem Teil der Leitung  $j_1$ ; dieselben Größen in der Leitung von der Belegung 2 bis zum Punkte II mögen die Werte  $\varrho_2$ ,  $A_2$ ,  $j_2$  haben. Für die übrigen Teile der Leitung seien die Werte derselben die folgenden: in der Leitung I II:  $w_2$ ,  $L_2$ ,  $i_2$ , in der Leitung I B II:  $w_3$ ,  $L_3$ ,  $i_3$ . Zunächst bemerkt man, daß  $j_1 = i_2 + i_3$  (im Punkte I) und  $i_2 + i_3 = j_2$  (im Punkte II) sein muß. Es ist also auch  $j_1 = j_2$  und wir setzen  $j_1 = j_2 = i_1$ .

Die gegenseitige Induktion der betrachteten Teile der Leitung aufeinander sei zu vernachlässigen. Wir haben dann die folgenden Gleichungen:

$$\text{für den Leiter I: } A_1 \frac{di_1}{dt} + \varrho_1 i_1 = A_1 \sin \alpha t - v_1$$

$$\text{„ „ „ II 2: } A_2 \frac{di_1}{dt} + \varrho_2 i_1 = v_2 - A_2 \sin \alpha t;$$

diese Gleichungen liefern durch Addition, wenn  $A_1 + A_2 = I_1$ ,  $\varrho_1 + \varrho_2 = w_1$  und  $v_1 - v_2 = v$  gesetzt wird:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + w_1 i_1 = A \sin \alpha t - v.$$

Ferner gelten

$$\text{für das Leiterstück I II: } L_2 \frac{di_2}{dt} + w_2 i_2 = v_1 - v_2 = v$$

$$\text{„ „ „ IBII: } L_3 \frac{di_3}{dt} + w_3 i_3 = v_1 - v_2 = v.$$

Wir haben so vier Gleichungen für die vier Unbekannten  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ ,  $v$ . Wir wollen dieselben symbolisch schreiben, indem wir  $A \sin \alpha t = V$ ,  $L_1 \frac{d}{dt} + w_1 = W_1$ ,  $L_2 \frac{d}{dt} + w_2 = W_2$ ,  $L_3 \frac{d}{dt} + w_3 = W_3$  setzen:

$$W_1 i_1 = V - v \dots \dots \dots (1)$$

$$W_2 i_2 = v \dots \dots \dots (2)$$

$$W_3 i_3 = v \dots \dots \dots (3)$$

$$i_2 + i_3 = i_1 \dots \dots \dots (4)$$

Es folgt aus (2) und (3):  $i_3 = \frac{W_2}{W_3} i_2$ ; dieser Wert von  $i_3$  in

(4) eingesetzt, ergibt  $i_2 = \frac{W_3}{W_2 + W_3} \cdot i_1$ . Addiert man (1) und

(2), so folgt  $W_1 i_1 + W_2 i_2 = V$  oder mit dem eben gefundenen

Werte von  $i_2$ :  $W_1 i_1 + \frac{W_2 W_3}{W_2 + W_3} i_1 = V$ , aus welcher Gleichung

$$i_1 = \frac{W_2 + W_3}{W_1 W_2 + W_2 W_3 + W_3 W_1} V \text{ folgt. Hiermit findet man weiter}$$

$$i_2 = \frac{W_3}{W_1 W_2 + W_2 W_3 + W_3 W_1} V$$

und 
$$i_3 = \frac{W_2}{W_1 W_2 + W_2 W_3 + W_3 W_1} V.$$

Wir erhalten somit das Gleichungssystem:

$$(W_1 W_2 + W_2 W_3 + W_3 W_1) i_1 = (W_2 + W_3) V$$

$$(W_1 W_2 + W_2 W_3 + W_3 W_1) i_2 = W_3 V$$

$$(W_1 W_2 + W_2 W_3 + W_3 W_1) i_3 = W_2 V$$

oder, wenn wir auf die Bedeutung unserer Symbole zurückgehen:

$$\left[ \left( L_1 \frac{d}{dt} + w_1 \right) \left( L_2 \frac{d}{dt} + w_2 \right) + \left( L_2 \frac{d}{dt} + w_2 \right) \left( L_3 \frac{d}{dt} + w_3 \right) \right. \\ \left. + \left( L_3 \frac{d}{dt} + w_3 \right) \left( L_1 \frac{d}{dt} + w_1 \right) \right] i_1 = \left[ \left( L_2 \frac{d}{dt} + w_2 \right) \right. \\ \left. + \left( L_3 \frac{d}{dt} + w_3 \right) \right] A \sin \alpha t$$

$$\left[ \left( L_1 \frac{d}{dt} + w_1 \right) \left( L_2 \frac{d}{dt} + w_2 \right) + \left( L_2 \frac{d}{dt} + w_2 \right) \left( L_3 \frac{d}{dt} + w_3 \right) \right. \\ \left. + \left( L_3 \frac{d}{dt} + w_3 \right) \left( L_1 \frac{d}{dt} + w_1 \right) \right] i_2 = \left( L_3 \frac{d}{dt} + w_3 \right) A \sin \alpha t$$

$$\left[ \left( L_1 \frac{d}{dt} + w_1 \right) \left( L_2 \frac{d}{dt} + w_2 \right) + \left( L_2 \frac{d}{dt} + w_2 \right) \left( L_3 \frac{d}{dt} + w_3 \right) \right. \\ \left. + \left( L_3 \frac{d}{dt} + w_3 \right) \left( L_1 \frac{d}{dt} + w_1 \right) \right] i_3 = \left( L_2 \frac{d}{dt} + w_2 \right) A \sin \alpha t,$$

oder weiter:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A} \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \mathfrak{B} \frac{d i_1}{dt} + \mathfrak{C} i_1 &= A (w_2 + w_3) \sin \alpha t + A \alpha (L_2 + L_3) \cos \alpha t \\ \mathfrak{A} \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \mathfrak{B} \frac{d i_2}{dt} + \mathfrak{C} i_2 &= A w_3 \sin \alpha t + A \alpha L_3 \cos \alpha t \\ \mathfrak{A} \frac{d^2 i_3}{dt^2} + \mathfrak{B} \frac{d i_3}{dt} + \mathfrak{C} i_3 &= A w_2 \sin \alpha t + A \alpha L_2 \cos \alpha t \end{aligned} \right\} (5)$$

worin

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A} &= L_1 L_2 + L_2 L_3 + L_3 L_1 \\ \mathfrak{B} &= (w_1 L_2 + w_2 L_1) + (w_2 L_3 + w_3 L_2) + (w_3 L_1 + w_1 L_3) \\ \mathfrak{C} &= w_1 w_2 + w_2 w_3 + w_3 w_1 \end{aligned} \right\} (6)$$

sind.

Setzt man

$$i_2 = a_2 \sin(\alpha t - \varphi_2) \quad \text{und} \quad i_3 = a_3 \sin(\alpha t - \varphi_3),$$

so liefert die Substitution dieser Werte in die beiden letzten Gleichungen (5) die Relationen

$$a_2 [\alpha \mathfrak{B} \sin \varphi_2 + (\mathfrak{C} - \alpha^2 \mathfrak{X}) \cos \varphi_2] = A w_3$$

$$a_2 [\alpha \mathfrak{B} \cos \varphi_2 - (\mathfrak{C} - \alpha^2 \mathfrak{X}) \sin \varphi_2] = A \alpha L_3$$

und

$$a_3 [\alpha \mathfrak{B} \sin \varphi_3 + (\mathfrak{C} - \alpha^2 \mathfrak{X}) \cos \varphi_3] = A w_2$$

$$a_3 [\alpha \mathfrak{B} \cos \varphi_3 - (\mathfrak{C} - \alpha^2 \mathfrak{X}) \sin \varphi_3] = A \alpha L_2,$$

aus welchen folgt:

$$a_2 = A \sqrt{\frac{w_3^2 + \alpha^2 L_3^2}{\alpha^2 \mathfrak{B}^2 + (\mathfrak{C} - \alpha^2 \mathfrak{X})^2}}$$

$$a_3 = A \sqrt{\frac{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2}{\alpha^2 \mathfrak{B}^2 + (\mathfrak{C} - \alpha^2 \mathfrak{X})^2}}$$

und

$$\frac{a_2}{a_3} = \sqrt{\frac{w_3^2 + \alpha^2 L_3^2}{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2}}.$$

Ist nun, wie dies in der gewählten Versuchsanordnung der Fall ist, der Ohmsche Widerstand  $w_3$  des Leiterteiles I B II klein gegen seine Induktanz  $\alpha L_3$ , der Ohmsche Widerstand  $w_2$  des Leiterteiles I II dagegen groß gegen die Induktanz  $\alpha L_2$  desselben, so daß  $w_3^2$  gegen  $\alpha^2 L_3^2$ ,  $\alpha^2 L_2^2$  gegen  $w_2^2$  vernachlässigt werden kann, so wird

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{\alpha L_3}{w_2} . . . . . (7)$$

Das Verhältnis der Amplituden der Ströme  $i_2$  (in der Lampe) und  $i_3$  (im oberen Teil des Bügels) hängt für ein gegebenes Wertepaar  $L_3$  und  $w_2$  von der Frequenz ab; es nimmt nach Gl. (7), solange die Bedingungen für dieselbe zutreffen, mit der Frequenz zu; die Stromstärke in der Lampe ist um so größer im Vergleich zur Stromstärke im oberen Teil des Kupferbügels, je rascher die Oszillationen vor sich gehen.

Für den Fall zweier Nebenschließungen, wie sie in Fig. 3 dargestellt sind, wird die Rechnung komplizierter. Wir wollen sie durchführen, um ein weiteres Beispiel für das Problem der Stromverzweigung von Wechselströmen zu geben. Es sei wieder

das Potential der Belegung 1  $= A_1 \sin \alpha t$ , das der Belegung 2  $= A_2 \sin \alpha t$ , die Potentialdifferenz der beiden Belegungen  $V = (A_1 - A_2) \sin \alpha t = A \sin \alpha t$ . Auch die Potentiale der Punkte I und II mögen wie oben mit  $v_1$  und  $v_2$  bezeichnet und  $v_1 - v_2 = v$  gesetzt werden. Ferner behalten wir für Stromstärke, Widerstand und Selbstinduktion in den Leiterstücken 1 I, II 2 und I II die Bezeichnungen bei, die in dem früheren Fall benutzt wurden. In den Punkten III und IV seien die Potentiale  $v_3$  und  $v_4$ , die Potentialdifferenz zwischen diesen Punkten  $v_3 - v_4 = v'$ . Die Werte des Widerstandes, der Selbstinduktion und der Stromstärke in den noch übrigen Teilen der Leitung seien die folgenden:

|                |           |                    |
|----------------|-----------|--------------------|
| im Leiterstück | I III :   | $Q'_1, A'_1, j'_1$ |
| " "            | IV II :   | $Q'_2, A'_2, j'_2$ |
| " "            | III IV :  | $w_4, L_4, i_4$    |
| " "            | III BIV : | $w_5, L_5, i_5$ .  |

Es muß nun  $j'_1 = i_4 + i_5$  (im Punkt III) und  $i_4 + i_5 = j'_2$  (im Punkt IV), also  $j'_1 = j'_2$  sein und wir setzen  $j_1 = j'_2 = i_3$ . Desgleichen muß  $j_1 = i_2 + i_3$  (im Punkt I) und  $i_2 + i_3 = j_2$  (im Punkt II), also  $j_1 = j_2$  sein; wir setzen  $j_1 = j_2 = i_1$ . Wir vernachlässigen wieder die gegenseitige Induktion der einzelnen Leiterteile; es gelten dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{für den Leiterteil 1 I: } & A_1 \frac{di_1}{dt} + Q_1 i_1 = A_1 \sin \alpha t - v_1 \\ \text{" " " II 2: } & A_2 \frac{di_1}{dt} + Q_2 i_1 = v_2 - A_2 \sin \alpha t; \end{aligned}$$

setzt man  $A_1 + A_2 = L_1$  und  $Q_1 + Q_2 = w_1$ , so erhält man durch Addition dieser beiden Gleichungen:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + w_1 i_1 = A \sin \alpha t - v.$$

Ferner gelten

$$\begin{aligned} \text{für den Leiterteil I II: } & L_2 \frac{di_2}{dt} + w_2 i_2 = v_1 - v_2 = v \\ \text{" " " I III: } & A'_1 \frac{di_3}{dt} + Q'_1 i_3 = v_1 - v_3 \\ \text{" " " IV II: } & A'_2 \frac{di_3}{dt} + Q'_2 i_3 = v_4 - v_2. \end{aligned}$$

Addiert man die letzten beiden Gleichungen, setzt  $\mathcal{A}'_1 + \mathcal{A}'_2 = L_3$  und  $\varrho'_1 + \varrho'_2 = w_3$ , so folgt

$$L_3 \frac{di_3}{dt} + w_3 i_3 = (v_1 - v_2) - (v_3 - v_4) = v - v'.$$

Endlich hat man noch

für den Leiterteil III IV:  $L_4 \frac{di_4}{dt} + w_4 i_4 = v_3 - v_4 = v'$

„ „ „ III BIV:  $L_5 \frac{di_5}{dt} + w_5 i_5 = v_3 - v_4 = v'.$

Indem wir wieder für  $L_k \frac{d}{dt} + w_k$  das Symbol  $W_k$  einführen, erhalten die gefundenen Gleichungen die Form:

$$W_1 i_1 = V - v \quad \dots \quad (8)$$

$$W_2 i_2 = v \quad \dots \quad (9)$$

$$W_3 i_3 = v - v' \quad \dots \quad (10)$$

$$W_4 i_4 = v' \quad \dots \quad (11)$$

$$W_5 i_5 = v' \quad \dots \quad (12)$$

$$i_4 + i_5 = i_3 \quad \dots \quad (13)$$

$$i_2 + i_3 = i_1 \quad \dots \quad (14)$$

Die Gleichungen (10) bis (14) gehen aus den Gleichungen (1) bis (4) des früheren Beispiels hervor, wenn die Indizes 1, 2, 3 durch die Indizes 3, 4, 5,  $V$  durch  $v$  und  $v$  durch  $v'$  ersetzt werden. Wir erhalten auf diese Weise

$$i_3 = \frac{W_4 + W_5}{W_3 W_4 + W_4 W_5 + W_3 W_3} v \quad \dots \quad (15)$$

$$i_4 = \frac{W_5}{W_3 W_4 + W_4 W_5 + W_3 W_3} v \quad \dots \quad (16)$$

$$i_5 = \frac{W_4}{W_3 W_4 + W_4 W_5 + W_3 W_3} v \quad \dots \quad (17)$$

Setzt man  $\frac{W_3 W_4 + W_4 W_5 + W_5 W_3}{W_4 + W_5} = W'_3$ , so kann man (15) schreiben:

$$W'_3 i_3 = v \quad \dots \quad (18)$$

und es bleiben die Gleichungen

$$\begin{aligned} W_1 i_1 &= V - v \\ W_2 i_2 &= v \\ W_3' i_3 &= v \\ i_2 + i_3 &= i_1, \end{aligned}$$

deren Lösungen entsprechend den Lösungen der Gleichungen (1) bis (4) lauten:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{W_2 + W_3'}{W_1 W_2 + W_2 W_3' + W_3' W_1} V \\ i_2 &= \frac{W_3'}{W_1 W_2 + W_2 W_3' + W_3' W_1} V \\ i_3 &= \frac{W_2}{W_1 W_2 + W_2 W_3' + W_3' W_1} V. \end{aligned}$$

Mit dem Werte von  $i_3$  folgt aus (18):

$$v = \frac{W_2 W_3'}{W_1 W_2 + W_2 W_3' + W_3' W_1} V,$$

welcher Wert noch in (15), (16), (17) einzusetzen ist, um die vollständigen Lösungen zu erhalten. Setzt man

$$W_1 W_2 (W_4 + W_5) + (W_3 W_4 + W_4 W_5 + W_5 W_3) (W_1 + W_2) = N,$$

so findet man:

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{W_3 W_4 + W_4 W_5 + W_5 W_3}{N} V \\ i_4 &= \frac{W_2 W_5}{N} V \\ i_5 &= \frac{W_2 W_4}{N} V \end{aligned}$$

oder, indem man auf die Bedeutung der Symbole  $V$  und  $W_k$  zu rückgeht:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A} \frac{d^3 i_2}{dt^3} + \mathfrak{B} \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \mathfrak{C} \frac{d i_2}{dt} + \mathfrak{D} i_2 &= A \mathfrak{E}_2 \sin \alpha t + A \alpha \mathfrak{F}_2 \cos \alpha t \\ \mathfrak{A} \frac{d^3 i_4}{dt^3} + \mathfrak{B} \frac{d^2 i_4}{dt^2} + \mathfrak{C} \frac{d i_4}{dt} + \mathfrak{D} i_4 &= A \mathfrak{E}_4 \sin \alpha t + A \alpha \mathfrak{F}_4 \cos \alpha t \\ \mathfrak{A} \frac{d^3 i_5}{dt^3} + \mathfrak{B} \frac{d^2 i_5}{dt^2} + \mathfrak{C} \frac{d i_5}{dt} + \mathfrak{D} i_5 &= A \mathfrak{E}_5 \sin \alpha t + A \alpha \mathfrak{F}_5 \cos \alpha t \end{aligned} \right\} (19)$$

Hierin sind:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{A} &= L_1 L_2 L_4 + L_1 L_2 L_5 + L_1 L_3 L_4 + L_1 L_4 L_5 + L_1 L_5 L_3 \\
 &\quad + L_2 L_3 L_4 + L_2 L_4 L_5 + L_2 L_5 L_3 \\
 \mathfrak{B} &= (w_1 L_2 L_4 + w_2 L_4 L_1 + w_4 L_1 L_2) + (w_1 L_2 L_5 + w_2 L_5 L_1 \\
 &\quad + w_5 L_1 L_2) + (w_1 L_3 L_4 + w_3 L_4 L_1 + w_4 L_1 L_3) + (w_1 L_4 L_5 \\
 &\quad + w_4 L_5 L_1 + w_5 L_1 L_4) + (w_1 L_5 L_3 + w_5 L_3 L_1 + w_3 L_1 L_5) \\
 &\quad + (w_2 L_3 L_4 + w_3 L_4 L_2 + w_4 L_2 L_3) + (w_2 L_4 L_5 + w_4 L_5 L_2 \\
 &\quad + w_5 L_2 L_4) + (w_2 L_5 L_3 + w_5 L_3 L_2 + w_3 L_2 L_5) \\
 \mathfrak{C} &= (w_1 w_2 L_4 + w_2 w_4 L_1 + w_4 w_1 L_2) + (w_1 w_2 L_5 + w_2 w_5 L_1 \\
 &\quad + w_5 w_1 L_2) + (w_1 w_3 L_4 + w_3 w_4 L_1 + w_4 w_1 L_3) + (w_1 w_4 L_5 \\
 &\quad + w_4 w_5 L_1 + w_5 w_1 L_4) + (w_1 w_5 L_3 + w_5 w_3 L_1 + w_3 w_1 L_5) \\
 &\quad + (w_2 w_3 L_4 + w_3 w_4 L_2 + w_4 w_2 L_3) + (w_2 w_4 L_5 + w_4 w_5 L_2 \\
 &\quad + w_5 w_2 L_4) + (w_2 w_5 L_3 + w_5 w_3 L_2 + w_3 w_2 L_5) \\
 \mathfrak{D} &= w_1 w_2 w_4 + w_1 w_2 w_5 + w_1 w_3 w_4 + w_1 w_4 w_5 + w_1 w_5 w_3 \\
 &\quad + w_2 w_3 w_4 + w_2 w_4 w_5 + w_2 w_5 w_3 \\
 \mathfrak{E}_2 &= (w_3 w_4 + w_4 w_5 + w_5 w_3) - \alpha^2 (L_3 L_4 + L_4 L_5 + L_5 L_3) \\
 \mathfrak{F}_2 &= (w_3 L_4 + w_4 L_3) + (w_4 L_5 + w_5 L_4) + (w_5 L_3 + w_3 L_5) \\
 \mathfrak{E}_4 &= (w_2 w_5 - \alpha^2 L_2 L_5) \\
 \mathfrak{F}_4 &= (w_2 L_5 + w_5 L_2) \\
 \mathfrak{E}_5 &= (w_2 w_4 - \alpha^2 L_2 L_4) \\
 \mathfrak{F}_5 &= (w_2 L_4 + w_4 L_2).
 \end{aligned}$$

Setzt man

$$\begin{aligned}
 i_2 &= a_2 \sin(\alpha t - \varphi_2) \\
 i_4 &= a_4 \sin(\alpha t - \varphi_4) \\
 i_5 &= a_5 \sin(\alpha t - \varphi_5),
 \end{aligned}$$

so findet man aus den Gleichungen (19):

$$\begin{aligned}
 a_2 &= A \sqrt{\frac{\mathfrak{E}_2^2 + \alpha^2 \mathfrak{F}_2^2}{\alpha^2 (\mathfrak{C} - \alpha^2 \mathfrak{A})^2 + (\mathfrak{D} - \alpha^2 \mathfrak{B})^2}} \\
 a_4 &= A \sqrt{\frac{\mathfrak{E}_4^2 + \alpha^2 \mathfrak{F}_4^2}{\alpha^2 (\mathfrak{C} - \alpha^2 \mathfrak{A})^2 + (\mathfrak{D} - \alpha^2 \mathfrak{B})^2}} \\
 a_5 &= A \sqrt{\frac{\mathfrak{E}_5^2 + \alpha^2 \mathfrak{F}_5^2}{\alpha^2 (\mathfrak{C} - \alpha^2 \mathfrak{A})^2 + (\mathfrak{D} - \alpha^2 \mathfrak{B})^2}}
 \end{aligned}$$

oder:

$$\frac{a_2}{a_5} = \sqrt{\frac{\mathfrak{E}_2^2 + \alpha^2 \mathfrak{F}_2^2}{\mathfrak{E}_5^2 + \alpha^2 \mathfrak{F}_5^2}}, \quad \frac{a_4}{a_5} = \sqrt{\frac{\mathfrak{E}_4^2 + \alpha^2 \mathfrak{F}_4^2}{\mathfrak{E}_5^2 + \alpha^2 \mathfrak{F}_5^2}}.$$

Um die Bedeutung dieser Ausdrücke zu erkennen, nehmen wir den extremen Fall an, daß in den Nebenschließungen, welche

die Lampen enthalten, die Induktanz verschwindend klein, in den Leiterteilen, welche dem Kupferbügel angehören, dagegen der Ohmsche Widerstand verschwindend klein sei; d. h. wir setzen  $\alpha L_2 = \alpha L_4 = 0$  und  $w_3 = w_5 = 0$ . Hiermit werden

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_2^2 + \alpha^2 \mathfrak{F}_2^2 &= \alpha^4 L_3^2 L_5^2 + \alpha^2 w_4^2 (L_3 + L_5)^2 \\ \mathfrak{G}_4^2 + \alpha^2 \mathfrak{F}_4^2 &= \alpha^2 w_2^2 L_5^2 \\ \mathfrak{G}_5^2 + \alpha^2 \mathfrak{F}_5^2 &= w_2^2 w_4^2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_2}{\alpha_5} &= \frac{\alpha^2 L_3 L_5}{w_2 w_4} \sqrt{1 + \frac{w_4^2}{\alpha^2} \left(\frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_5}\right)^2} \\ \frac{\alpha_4}{\alpha_5} &= \frac{\alpha L_5}{w_4}.\end{aligned}$$

Der erste Ausdruck nähert sich mit wachsendem  $\alpha$  dem Werte  $\frac{\alpha^2 L_3 L_5}{w_2 w_4}$ . Auch hier erhalten wir das Resultat, daß bei genügend großer Frequenz die Intensität der Ströme in den Nebenschlüssen, welche die Lampen enthalten, groß wird gegen die Intensität des Stromes in dem oberen Teil des Kupferbügels, so daß die Lampen ins Glühen kommen können.

An die vorstehend erörterte Theorie des Teslaschen Impedanzversuches mögen Zahlenangaben über einen solchen Versuch angeschlossen werden. An eine Batterie von Franklinschen Tafeln mit der Kapazität von 7200 cm wurde ein oben kreisförmig gebogener Kupferbügel von 112 cm Höhe und 24 cm Abstand der beiden parallelen Stücke, der aus 7 mm dickem Kupferdraht besteht, durch eine Funkenstrecke angeschlossen. Die Kapazität wurde von einem Hochspannungsakkumulator von 20000 Volt geladen, dessen Primärwicklung direkt an die Wechselstromleitung (Spannung 120 Volt, Periodenzahl 48) angeschlossen. Die erste Nebenschließung in einer Höhe von 27 cm (vom unteren Ende des Bügels gerechnet) enthält eine 32kerzige Glühlampe von 120 Volt, die zweite, 37,2 cm über der ersten, eine 16kerzige Glühlampe von 60 Volt, eine dritte, 27,5 cm über der zweiten, eine 6kerzige Glühlampe von 25 Volt. Die Lampen geraten durch die Entladungen des Kondensators in helle Rotglut. Die Widerstände dieser Lampen in heißem Zustande betragen 178, 68, 25 Ohm. Die letzte Lampe braucht bei heller Rotglut nahe 1 Amp. Wir wollen nun berechnen, welche Stromstärke bei

Gleichstrom durch den obersten Teil des Kupferbügels hindurchgehen müßte, damit die Lampen brennen. Wir brauchen hierzu nur noch den Widerstand des obersten Teiles des Kupferbügels zu kennen. Die Gleichungen (8) bis (14) bestimmen ja auch die Stromverteilung bei Gleichstrom, wenn unter  $W_k$  der Ohmsche Widerstand verstanden wird. Wir erhalten aus den Lösungen (16) und (17):  $W_4 i_4 = W_5 i_5$ . Hierin sind  $W_4 = 25$  Ohm,  $i_4 = 1$  Amp. Die Länge des obersten Teiles des Bügels beträgt 53 cm, sein Widerstand rund  $24,10^{-5}$  Ohm. Man findet hiermit  $i_5 = \frac{25}{24} \cdot 10^5$ , d. i. rund 100 000 Amp., eine Stromstärke, welche den Kupferbügel verdampfen würde.

Die Funkenstrecke muß bei diesen Versuchen derart beschaffen sein, daß kein dauernder Lichtbogen zwischen ihren Polen zur Ausbildung gelangt, weil sonst der Kondensator bloß zur Potentialdifferenz des Lichtbogens, nicht aber zur vollen Potentialdifferenz des offenen Transformators aufgeladen würde. Der zur Ausbildung gelangende Lichtbogen muß daher möglichst rasch zerstört werden. Tesla benutzte bei seinen Versuchen<sup>1)</sup> entweder ein magnetisches Gebläse oder ein Luftgebläse. Bei Verwendung des letzteren wird der Lichtbogen durch einen kräftigen Luftstrom abgekühlt und ausgelöscht. In dem magnetischen Gebläse, einem starken magnetischen Feld, dessen Kraftlinien senkrecht zum Lichtbogen verlaufen, wird der Lichtbogen durch die magnetische Kraft ausgebogen, verlängert und schließlich zerrissen. Das Gebläse bedeutet eine unerwünschte Komplikation der Versuchsanordnung. Himstedt<sup>2)</sup> hat gefunden, daß man das Gebläse entbehren kann, wenn man die Funkenstrecke aus Zinkkugeln herstellt, oder den Funken zwischen den abgerundeten Enden von zwei dickeren Zinkstäben (mindestens 5 mm Durchmesser) überspringen läßt. Die hierdurch erzielte Vereinfachung wird seither bei diesen und ähnlichen Versuchen allgemein be-

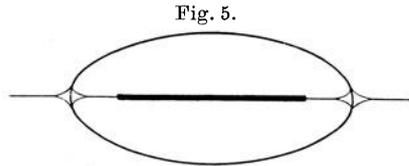
---

<sup>1)</sup> Teslas Untersuchungen über Mehrphasenströme und über Wechselströme hoher Spannung und Frequenz. Zusammengestellt von T. C. Martin, deutsch von H. Maser. Halle a. S., Verlag von W. Knapp, 1895. Ferner: E. de Fodor: Experimente mit Strömen hoher Wechselzahl und Frequenz. Mit Anmerkungen von N. Tesla. Wien, A. Hartleben, 1894.

<sup>2)</sup> Wied. Ann. 52, 475 (1894).

nutzt. Den gleichen Effekt erzielt man mit einer Funkenstrecke zwischen Messingkugeln, welche in Petroleum eingebettet sind.

Ähnliche Versuchsanordnungen wie die geschilderte von Tesla sind von Elihu Thomson<sup>1)</sup> angegeben worden. Wir müssen uns mit der Erwähnung derselben begnügen. Dagegen sei noch eines Teslaschen Versuches mit einer Glühlampe mit geradem Kohlefaden, wie sie in Fig. 5 dargestellt ist, gedacht. Mit Gleichstrom oder Wechselstrom geringer Frequenz betrieben, leuchtet die Lampe in gewöhnlicher Weise, der Faden glüht. Mit Feddersenströmen zeigt sich ein anderes Bild. Man beobachtet dann, daß die ganze Glaskugel hell erleuchtet ist; die Enden der Einführungsdrähte werden glühend und sprühen oft Funken aus, der Kohlefaden aber bleibt dunkel. Tesla scheint geneigt, dies Phänomen als eine Impedanzerscheinung aufzufassen.



Der Kohlefaden würde gewissermaßen die Rolle des Kupferbügels, das Gas die Rolle der Nebenschließung übernehmen. Es ist aber schwer vorstellbar, daß die Selbstinduktion in dem geraden Kohlefaden so viel größer sein soll als in dem umgebenden leitenden Gas. Viel eher wäre an eine einfache Stromverzweigung zu denken, unter Berücksichtigung des Umstandes, daß der Skinneffekt, von welchem später die Rede sein wird, in dem schlechter leitenden Gas kleiner ist als in der besser leitenden Kohle. Auch in Glühlampen gewöhnlicher Form tritt leicht die Erscheinung ein, daß das Gas leuchtet und der Kohlefaden dunkel bleibt, wenn man Feddersenströme durch die Lampe schickt. Hier kann allerdings die Impedanz des Kohlefadens eine Rolle spielen.

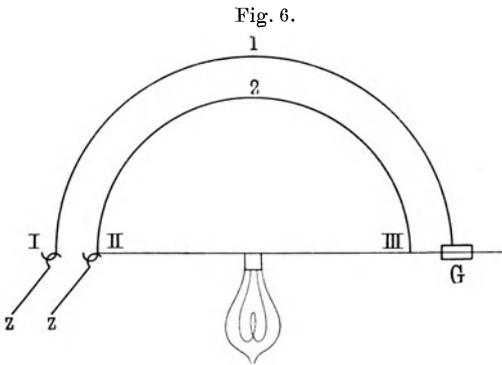
### § 5. Der Impedanzversuch von P. H. Eykman.

Eykman hat einen eleganten Impedanzversuch angegeben<sup>2)</sup>, der als eine Modifikation der Teslaschen Anordnung angesehen werden kann, aber den Einfluß klar hervortreten läßt, welchen die Änderung der Selbstinduktion auf die Stromverteilung in den

<sup>1)</sup> Electrical World, Vol. XIX, No. 9, p. 132.

<sup>2)</sup> Zeitschr. f. den physik. u. chem. Unterr. 16, 29 (1903).

einzelnen Zweigen des Stromsystems hervorruft. Der Eykmannsche Apparat (Fig. 6) besteht aus zwei halbkreisförmigen Bügeln aus dickem Kupferdraht, die sich nahezu zu einem Kreise ergänzen, und einem Nebenschluß, der eine Glühlampe enthält.  $G$  ist ein Gelenk, in welchem der Bügel 1 drehbar ist,  $z z$  sind die Stromzuleitungen. Schlägt man den Bügel 1 herab, so daß er mit dem Bügel 2 in einer Ebene, aber unterhalb des Nebenschlusses liegt (Stellung I), so leuchtet die Glühlampe, wenn Feddersenströme durch den Apparat geschickt werden. Bewegt



man nun den Bügel 1 hinauf (er ist mit einer isolierenden, an  $G$  befestigten Handhabe versehen), in die in der Figur gezeichnete Stellung II, so nimmt die Helligkeit der Lampe entsprechend der Zunahme des Drehungswinkels ab, um schließlich Null zu

werden. Die Theorie des Versuches ist folgende. Wir bezeichnen Widerstand, Selbstinduktionskoeffizient und Stromstärke im Bügel 1 mit  $w_1, L_1, i_1$ , im Bügel 2 mit  $w_2, L_2, i_2$ , im Nebenschluß mit  $w_3, L_3, i_3$ . Das Potential im Punkte I sei  $A_1 \sin \alpha t$ , im Punkte II  $A_2 \sin \alpha t$ , die Potentialdifferenz  $V = (A_1 - A_2) \sin \alpha t = A \sin \alpha t$ . Das Potential im Punkte III sei  $v'$ .

Stellung I. Die Zweige der Leitung sind voneinander entfernt, die wechselseitige Induktion kann vernachlässigt werden. Es gelten dann die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{für den Bügel 1:} \quad L_1 \frac{di_1}{dt} + w_1 i_1 &= A_1 \sin \alpha t - v' \\ \text{„ „ „ 2:} \quad L_2 \frac{di_2}{dt} + w_2 i_2 &= v' - A_2 \sin \alpha t \\ \text{„ „ Nebenschluß:} \quad L_3 \frac{di_3}{dt} + w_3 i_3 &= v' - A_2 \sin \alpha t. \end{aligned}$$

Setzt man  $v' - A_2 \sin \alpha t = v$ , so kann man diese Gleichungen schreiben:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + w_1 i_1 = A \sin \alpha t - v = V - v$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + w_2 i_2 = v$$

$$L_3 \frac{di_3}{dt} + w_3 i_3 = v,$$

wozu noch hinzutritt  $i_2 + i_3 = i_1$ .

Das vorstehende Gleichungssystem ist identisch mit dem System der Gleichungen (1) bis (4) im § 4. Das Verhältnis der Amplituden  $a_3$  und  $a_2$  der Ströme  $i_3$  im Nebenschluß und  $i_2$  im Bügel 2 wird also bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{a_3}{a_2} = \sqrt{\frac{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2}{w_3^2 + \alpha^2 L_3^2}},$$

oder, da der Widerstand  $w_2$  des Bügels klein ist gegen seine Induktanz  $\alpha L_2$ , die Induktanz der Lampe  $\alpha L_3$  klein gegen ihren Ohmschen Widerstand  $w_3$ :

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\alpha L_2}{w_3}.$$

Mittelstellung und Stellung II. Bügel 1 sei heraufgedreht, so daß die gegenseitige Induktion zwischen Bügel 1 und 2 nicht mehr vernachlässigt werden darf. Dagegen sei die Induktion zwischen den Bügeln und der Nebenschließung zu vernachlässigen. Bezeichnen wir den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion zwischen den beiden Bügeln mit  $L$ , so gibt der Strom  $i_1$  eine elektromotorische Kraft  $-L \frac{di_1}{dt}$  im Bügel 2, und der Strom  $i_2$

eine elektromotorische Kraft  $-L \frac{di_2}{dt}$  im Bügel 1. Die Gleichungen für die elektrische Strömung in den drei Leiterteilen lauten jetzt:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + w_1 i_1 + L \frac{di_2}{dt} = V - v$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + w_2 i_2 + L \frac{di_1}{dt} = v$$

$$L_3 \frac{di_3}{dt} + w_3 i_3 = v$$

$$i_2 + i_3 = i_1.$$

Wir schreiben sie symbolisch, indem wir  $L \frac{d}{dt} = A$ ,  $L_1 \frac{d}{dt} + w_1 = W_1$ ,  $L_2 \frac{d}{dt} + w_2 = W_2$  und  $L_3 \frac{d}{dt} + w_3 = W_3$  setzen:

$$\begin{aligned} W_1 i_1 + A i_2 &= V - v \\ A i_1 + W_2 i_2 &= v \\ W_3 i_3 &= v \\ i_2 + i_3 &= i_1, \end{aligned}$$

oder, indem man den Wert von  $v$ , wie er durch die 3. Gleichung dargestellt ist, in die beiden ersten einsetzt:

$$\begin{aligned} W_1 i_1 + A i_2 + W_3 i_3 &= V \\ A i_1 + W_2 i_2 - W_3 i_3 &= 0 \\ -i_1 + i_2 + i_3 &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen leitet man ab:

$$\begin{aligned} [W_1 W_2 + W_2 W_3 + W_3 W_1 + A(2W_3 - A)] i_1 &= (W_2 + W_3) V \\ [W_1 W_2 + W_2 W_3 + W_3 W_1 + A(2W_3 - A)] i_2 &= (W_3 - A) V \\ [W_1 W_2 + W_2 W_3 + W_3 W_1 + A(2W_3 - A)] i_3 &= (W_2 + A) V. \end{aligned}$$

Geht man auf die Bedeutung der Symbole zurück, so lauten diese Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U}' \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \mathfrak{B}' \frac{d i_1}{dt} + \mathfrak{C}' i_1 &= A \mathfrak{C}_1 \sin \alpha t + A \alpha \mathfrak{F}_1 \cos \alpha t \\ \mathfrak{U}' \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \mathfrak{B}' \frac{d i_2}{dt} + \mathfrak{C}' i_2 &= A \mathfrak{C}_2 \sin \alpha t + A \alpha \mathfrak{F}_2 \cos \alpha t \\ \mathfrak{U}' \frac{d^2 i_3}{dt^2} + \mathfrak{B}' \frac{d i_3}{dt} + \mathfrak{C}' i_3 &= A \mathfrak{C}_3 \sin \alpha t + A \alpha \mathfrak{F}_3 \cos \alpha t \end{aligned} \right\} (1)$$

worin die Koeffizienten die folgende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}' &= L_1 L_2 + L_2 L_3 + L_3 L_1 + L(2L_3 - L) \\ \mathfrak{B}' &= (w_1 L_2 + w_2 L_1) + (w_2 L_3 + w_3 L_2) + (w_3 L_1 + w_1 L_3) \\ &\quad + 2w_3 L \\ \mathfrak{C}' &= w_1 w_2 + w_2 w_3 + w_3 w_1 \\ \mathfrak{C}_1 &= w_2 + w_3 & \mathfrak{F}_1 &= L_2 + L_3 \\ \mathfrak{C}_2 &= w_3 & \mathfrak{F}_2 &= L_3 - L \\ \mathfrak{C}_3 &= w_2 & \mathfrak{F}_3 &= L_2 + L. \end{aligned}$$

Setzt man  $i_2 = a_2 \sin(\alpha t - \varphi_2)$  und  $i_3 = a_3 \sin(\alpha t - \varphi_3)$ , so findet man aus (1):

$$a_2 = A \sqrt{\frac{\mathfrak{G}_2^2 + \alpha^2 \mathfrak{F}_2^2}{\alpha^2 \mathfrak{B}^2 + (\mathfrak{G}' - \alpha^2 \mathfrak{A}')^2}}$$

$$a_3 = A \sqrt{\frac{\mathfrak{G}_3^2 + \alpha^2 \mathfrak{F}_3^2}{\alpha^2 \mathfrak{B}^2 + (\mathfrak{G}' - \alpha^2 \mathfrak{A}')^2}}$$

und

$$\frac{a_3}{a_2} = \sqrt{\frac{\mathfrak{G}_3^2 + \alpha^2 \mathfrak{F}_3^2}{\mathfrak{G}_2^2 + \alpha^2 \mathfrak{F}_2^2}} = \sqrt{\frac{w_2^2 + \alpha^2 (L + L_2)^2}{w_3^2 + \alpha^2 (L - L_3)^2}}.$$

$w_2$  ist klein gegen  $\alpha L_2$ , also um so kleiner gegen  $\alpha(L + L_2)$ , dagegen ist  $\alpha(L - L_3)$ , wenn der Drehungswinkel und damit  $L$  groß genug geworden ist, nicht mehr klein gegen  $w_3$ . Bei weiterem Anwachsen des Drehungswinkels wird ev.  $w_3$  klein gegen  $\alpha(L - L_3)$  und man hat dann  $\frac{a_3}{a_2} = \frac{L + L_2}{L - L_3}$ . Das Verhältnis der

Stromamplituden in der Lampe und im Bügel 2 ist dann unabhängig von der Frequenz. Da  $L_3$  klein ist gegen  $L$ , wird  $\frac{a_3}{a_2}$  weiter  $= 1 + \frac{L_2}{L}$ .  $L_2$  und  $L$  sind im allgemeinen von gleicher

Größenordnung, sie sind in der äußeren Stellung II nahe gleich groß, wenn die Radien der beiden Bügel, wie dies in der Tat der Fall ist, wenig voneinander verschieden sind; in Stellung II ist daher die Amplitude des Stromes in der Lampe etwa bloß doppelt so groß als die Amplitude des Stromes im Bügel 2. Die Stromverteilung ist in der Stellung II für die Lampe ungünstiger als in Stellung I. Da außerdem in Stellung II der Gesamtstrom  $i_1$  eine Amplitude hat, die kleiner ist als die Amplitude des Gesamtstromes  $i_1$  in Stellung I, so wird der Lampenstrom in Stellung II durch das Zusammenwirken dieser beiden Ursachen bei geeigneter Wahl der Dimensionen des Apparates so schwach, daß die Lampe nicht mehr leuchtet. Um zu beweisen, daß der Gesamtstrom  $i_1$  in der Stellung II schwächer ist als in der Stellung I, beachten wir, daß seine Amplitude  $(a_1)_I$  in der Stellung I gegeben ist durch den Ausdruck:

$$(a_1)_I = A \sqrt{\frac{(w_2 + w_3)^2 + \alpha^2 (L_2 + L_3)^2}{\alpha^2 \mathfrak{B}^2 + (\mathfrak{G} - \alpha^2 \mathfrak{A})^2}},$$

der aus der Gl. (5) des § 4 hervorgeht;  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  haben hierin die durch die Gl. (6) desselben Paragraphen festgelegte Bedeutung. Die Amplitude  $(a_1)_{II}$  des Gesamtstromes  $i_1$  in Stellung II ergibt sich aus den Gleichungen (1):

$$(a_1)_{II} = A \sqrt{\frac{(w_2 + w_3)^2 + \alpha^2(L_2 + L_3)^2}{\alpha^2 \mathfrak{B}'^2 + (\mathfrak{C}' - \alpha^2 \mathfrak{A}')^2}}.$$

Nun ist  $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + L(2L_3 - L)$  oder, da  $L_3$  sehr klein gegen  $L$ :

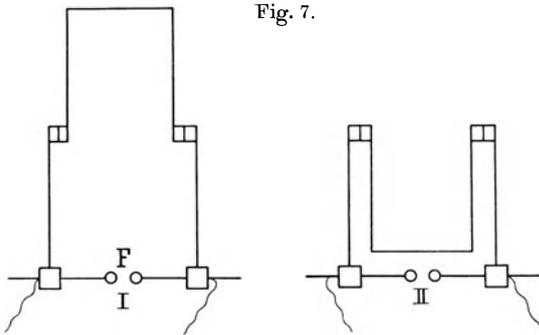
$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} - L^2; \text{ ferner}$$

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} + 2w_3L$$

$$\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}.$$

Hiermit findet man  $\mathfrak{C}' - \alpha^2 \mathfrak{A}' = (\mathfrak{C} - \alpha^2 \mathfrak{A}) + \alpha^2 L^2$ , also  $(\mathfrak{C}' - \alpha^2 \mathfrak{A}') > (\mathfrak{C} - \alpha^2 \mathfrak{A})$ ; da auch  $\mathfrak{B}' > \mathfrak{B}$ , ist  $(a_1)_{II} < (a_1)_I$ .

Nachstehend die Daten für einen solchen Eykmannschen Apparat: Durchmesser des Kupferdrahtes, aus welchem die Bügel gefertigt sind, 5 mm. Durchmesser des äußeren Bügels 44 cm, Durchmesser des inneren 39 cm. Mit zwei Leidener Flaschen von je 2250 cm Kapazität, die durch einen Wechselstromtransformator von 20 000 Volt geladen werden, gerät in Stellung I eine Glühlampe von 10 bis 20 Volt ins Glühen. Letztere Größe hängt



natürlich auch von der Größe und Beschaffenheit der Funkenstrecke ab, die ja auf die Schwingungsdauer der Entladungen Einfluß hat.

Kann<sup>1)</sup> hat einen Apparat zur Demonstration der Impedanz

<sup>1)</sup> Zeitschr. f. den physik. u. chem. Unterr. 20, 247 (1907).

angegeben, der im Prinzip dem Eykmannschen sehr ähnlich ist. Der Apparat (Fig. 7) besteht aus einem Bügel aus etwa 5 mm dickem Kupferdraht, dessen Schenkel ungefähr in der Mitte mit Scharnieren versehen sind, welche ein Drehen des oberen Teiles des Bügels gestatten, so daß er auch in Stellung II gebracht werden kann. Dieser Bügel wird auf eine Funkenstrecke  $F$  aufgesetzt. Verbindet man die Funkenstrecke über eine Hilfsfunkenstrecke mit den Belegungen einer Kapazität, die von einem Wechselstromtransformator gespeist wird, so geht in Stellung I ein lebhafter Funkenstrom über die Funkenstrecke; dreht man den Bügel nach Stellung II, so erlischt der Funkenstrom.

### § 6. Der Skineffekt.

Fließt ein konstanter Strom durch einen Draht, so erfüllt der Strom den ganzen Querschnitt des Drahtes mit konstanter Dichtigkeit; dies geht aus der experimentell erwiesenen Tatsache hervor, daß der Widerstand dem Querschnitt verkehrt proportional ist. Anders liegen die Verhältnisse bei einem veränderlichen Strom. Denken wir uns den Draht in ein Bündel von sehr dünnen Fäden zerlegt, so übersehen wir sofort, daß die einzelnen Fäden aufeinander Induktionswirkungen ausüben, die für die Amplitude und Phase der Stromstärke in jedem Faden neben seinem Widerstand und seiner Selbstinduktion mitbestimmend sind. Bereits Maxwell<sup>1)</sup> hat den Fall eines sehr langen geradlinig gespannten Drahtes von kreisförmigem Querschnitt untersucht, und Lord Rayleigh<sup>2)</sup> hat Maxwells Rechnung insbesondere mit Rücksicht auf periodische elektrische Ströme vervollständigt. Eine weitergehende Untersuchung hat dann J. Stefan<sup>3)</sup> in der Abhandlung „Über veränderliche Ströme in dicken Leitungsdrähten“ gegeben. Stefans Betrachtungsweise würde sich unmittelbar an unsere bisherigen theoretischen Überlegungen anschließen. Wir ziehen aber vor, das Problem ausgehend von den beiden Hauptgleichungen der Maxwellschen Theorie zu behandeln, da diese Methode, besonders im Falle stark magnetischen Leitungsmaterials, rascher zum Ziele führt. Wir wollen wieder voraussetzen, daß die Strö-

---

<sup>1)</sup> Maxwell, Treatise II, No. 689. Deutsche Ausgabe II, 393.

<sup>2)</sup> Phil. Mag. 31, 381 (1886).

<sup>3)</sup> Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. d. Wiss. 95, 2. Abt., Maiheft 1887.

mung quasistationär ist, d. h. überall parallel zur Drahtachse verläuft und in jedem Querschnitt des Drahtes gleiche Werte hat. Der Querschnitt des Drahtes sei kreisförmig, der Draht geradlinig ausgespannt, oder es sei mindestens der Krümmungsradius der Drahtachse überall groß gegen den Radius  $\varrho$  des Drahtquerschnittes. Unter diesen Voraussetzungen ist die Stromverteilung symmetrisch um die Drahtachse. Die spezifische Leitfähigkeit des Drahtmaterials sei  $\lambda$ , seine Permeabilität  $\mu$ . Positive Richtung der Normale und Umlaufssinn der Umrandung einer Fläche sollen im Sinne einer Rechtsschraube genommen werden. Die magnetische Feldstärke sei  $\mathfrak{H}$ , die elektrische  $\mathfrak{E}$ , die Stromstärke  $i$ , die Stromdichte  $u$ . Alle Größen seien im absoluten elektromagnetischen Maß gemessen. Die erste Hauptgleichung der Maxwell'schen Theorie lautet:

$$\int_s \mathfrak{H}_s ds = 4 \pi i.$$

Hierin ist  $\mathfrak{H}_s$  die magnetische Feldstärke in einem Punkte der geschlossenen Randkurve  $s$  einer Fläche,  $i$  der durch die Fläche hindurchfließende Strom,  $ds$  ein Bogenelement der Randkurve. Die Integration ist über die ganze Randkurve zu erstrecken. Bezeichnen wir die Fläche mit  $S$ , ein Flächenelement derselben mit  $dS$ , so ist

$$i = \int_s u dS,$$

wobei die Integration über die ganze Fläche zu erstrecken ist. Die erste Hauptgleichung nimmt dann die Form an:

$$\int_s \mathfrak{H}_s ds = 4 \pi \int_s u dS \dots \dots \dots (I)$$

In unserem Falle ist die Stromverteilung symmetrisch um die Drahtachse, die magnetischen Kraftlinien sind infolgedessen Kreise. Wählen wir eine solche Kraftlinie als Kurve  $s$ , so hat  $\mathfrak{H}_s$  in jedem Punkte von  $s$  denselben Wert  $\mathfrak{H}$  und in jedem Punkte steht  $\mathfrak{H}$  senkrecht auf  $ds$ . In Fig. 8 ist eine solche Kraftlinie  $s$  dargestellt. (Der durch die Fläche der Kraftlinie gedeckte Teil der Drahtachse ist punktiert gezeichnet.) Die an der Drahtachse angebrachte Pfeilspitze gibt die Stromrichtung an. Die Entfernung eines Punktes von der Drahtachse werde mit  $r$  bezeichnet.

Da die Drahtachse, wie erwähnt, Symmetrieachse ist, führen wir Polarkoordinaten ein; dann ist  $dS = 2\pi r dr$  und wir erhalten, da

$$\int_s \mathfrak{H}_s ds = \mathfrak{H} \int_s ds = \mathfrak{H} \cdot 2r\pi,$$

aus (I):

$$\mathfrak{H} \cdot 2r\pi = 4\pi \int_0^r u \cdot 2r\pi dr$$

oder

$$\mathfrak{H} r = 4\pi \int_0^r u r dr,$$

woraus durch Differentiation nach  $r$ :

$$\frac{\partial}{\partial r} (\mathfrak{H} r) = 4\pi u r = 4\pi \lambda \mathfrak{E} r \quad \dots \dots \dots (1)$$

Die zweite Hauptgleichung der Maxwellschen Theorie lautet:

$$\int_s \mathfrak{E}_s ds = - \frac{\partial}{\partial t} \int_s \mu \mathfrak{H}_n dS \quad \dots \dots \dots (II)$$

Hierin ist  $\mathfrak{H}_n$  die zum Flächenelement  $dS$  normale Komponente der magnetischen Feldstärke. Wir wählen nun als Fläche  $S$  das

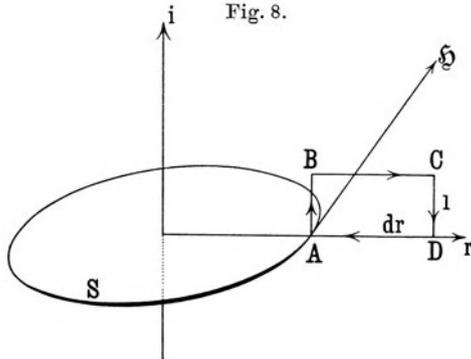


Fig. 8.

Rechteck  $ABCD$  (Fig. 8), dessen Seiten parallel zur Drahtachse und zum Radiusvektor  $r$  gelegen sind, und machen  $AB = CD = 1$ ,  $AD = BC = dr$ . Da der Pfeil  $\mathfrak{H}$  die positive Richtung der magnetischen Kraft angibt, ist nach der getroffenen Festsetzung der Umlaufssinn an dem Rechteck so zu nehmen, wie er in der Figur angegeben ist. Die elektrische Feldstärke ist wegen

der quasistationären Strömung auch bloß eine Funktion von  $r$ , in der Richtung der Drahtachse ist das Potentialgefälle konstant. Wir haben daher längs der Seite  $BC$  genau dieselben Werte von  $\mathfrak{E}_s$  wie längs der Seite  $AD$ . Da aber diese beiden Seiten im entgegengesetzten Sinne durchlaufen werden, so ist der Anteil, welchen sie zu dem Integral  $\int_s \mathfrak{E}_s ds$  liefern, gleich Null. In der

Seite  $AB$  ist  $\mathfrak{E}_s$  konstant, sein Wert sei  $\mathfrak{E}_r$ .  $\mathfrak{E}_r$  hat die Richtung von  $i$ . Diese Seite liefert den Anteil  $\mathfrak{E}_r \cdot 1 = \mathfrak{E}_r$ . In der Seite  $CD$  ist  $\mathfrak{E}_s$  ebenfalls konstant, und zwar  $\mathfrak{E}_{r+dr}$  und gleichgerichtet mit  $\mathfrak{E}_r$ . Da aber  $CD$  im entgegengesetzten Sinne zu  $AB$  durchlaufen wird, so liefert es den Anteil  $-\mathfrak{E}_{r+dr} \cdot 1 = -\mathfrak{E}_{r+dr}$ . Es ist somit

$$\int_s \mathfrak{E}_s ds = \mathfrak{E}_r - \mathfrak{E}_{r+dr} = -\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial r} dr.$$

Andererseits ist, da  $\mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}$  und  $\mu$  auf der ganzen unendlich kleinen Fläche  $ABCD = dr \cdot 1$  konstant sind:

$$\int_s \mu \mathfrak{H}_n dS = \mu \mathfrak{H} \int_s dS = \mu \mathfrak{H} \cdot ABCD = \mu \mathfrak{H} dr,$$

so daß die Gleichung (II) zu der Gleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial r} dr = dr \cdot \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$$

oder

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial r} = \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \cdot \dots \dots \dots (2)$$

führt. Aus (1) folgt

$$4 \pi \lambda \mu \mathfrak{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mu \mathfrak{H}),$$

oder mit Rücksicht auf (2):

$$4 \pi \lambda \mu \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial r} \right)$$

oder endlich:

$$4 \pi \lambda \mu \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial r}.$$

Wir multiplizieren mit  $\lambda$ ; da  $\lambda \mathfrak{E} = u$ , folgt für die mittlere Stromdichte  $u$  die Gleichung:

$$4 \pi \lambda \mu \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \dots \dots \dots (3)$$

Eine Lösung dieser Gleichung bildet die Reihe

$$u = T + \frac{c r^2}{\varrho^2} \frac{dT}{dt} + \frac{c_2 r^4}{\varrho^4} \frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{c_3 r^6}{\varrho^6} \frac{d^3 T}{dt^3} + \dots \dots \dots (4)$$

in welcher  $T$  eine bloß von der Zeit  $t$  abhängige Funktion bedeutet, welche die Stromdichte  $u_0$  in der Achse des Drahtes ( $r = 0$ ) darstellt.  $c, c_2, c_3 \dots$  sind konstante Koeffizienten, welche man durch Substitution des Ausdruckes (4) in Gl. (3) erhält, und zwar ist:

$$c = \pi \lambda \mu \varrho^2, \quad c_2 = \frac{c^2}{4}, \quad c_3 = \frac{c^3}{4 \cdot 9}, \quad c_4 = \frac{c^4}{4 \cdot 9 \cdot 16}, \dots \dots \dots (5)$$

Aus (4) erhält man die Stromdichte  $u_\varrho$  in der Oberfläche, wenn man  $r = \varrho$  setzt. Es ist

$$u_\varrho = T + c \frac{dT}{dt} + c_2 \frac{d^2 T}{dt^2} + c_3 \frac{d^3 T}{dt^3} + \dots \dots \dots (6)$$

Die mittlere Stromdichte im Draht ist

$$U = \frac{1}{\pi \varrho^2} \int_0^\varrho u \cdot 2 \pi r dr = \frac{2}{\varrho^2} \int_0^\varrho u r dr.$$

Man findet

$$U = T + \frac{c}{2} \frac{dT}{dt} + \frac{c_2}{3} \frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{c_3}{4} \frac{d^3 T}{dt^3} + \dots \dots \dots (7)$$

Wirkt in der Leitung eine periodische elektromotorische Kraft, so ist die Stromdichte an jeder Stelle, also auch in der Achse des Drahtes, eine periodische Funktion derselben Art. Es sei etwa die Stromdichte in der Drahtachse

$$u_0 = T = \sin \alpha t;$$

wir wählen also die Amplitude der Stromdichte in der Drahtachse als Einheit für das Maß der Amplituden der Stromdichte an anderen Stellen. Substituiert man diesen Wert von  $T$  in (6) und (7), so folgt:

$$u_\varrho = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t$$

$$U = C \sin \alpha t + D \cos \alpha t,$$

worin  $A, B, C, D$  die folgende Bedeutung haben:

$$A = 1 - \frac{c^2 \alpha^2}{4} + \frac{c^4 \alpha^4}{4 \cdot 9 \cdot 16} - \dots$$

$$B = c\alpha - \frac{c^3 \alpha^3}{4 \cdot 9} + \frac{c^5 \alpha^5}{4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25} - \dots$$

$$C = 1 - \frac{1}{3} \frac{c^2 \alpha^2}{4} + \frac{1}{5} \frac{c^4 \alpha^4}{4 \cdot 9 \cdot 16} - \dots$$

$$D = \frac{1}{2} c\alpha - \frac{1}{4} \frac{c^3 \alpha^3}{4 \cdot 9} + \frac{1}{6} \frac{c^5 \alpha^5}{4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25} - \dots$$

Es möge nun die Stromverteilung in einem Kupferdraht von 4 mm Durchmesser berechnet werden; zunächst bei Verwendung technischen Wechselstroms, also für etwa 50 ganze Schwingungen in der Sekunde, so daß  $\alpha = 100\pi$  ist. Der spezifische Widerstand des Kupfers ist  $\frac{1}{6} \cdot 10^4$  in absoluten elektromagnetischen

Einheiten, die Leitfähigkeit  $6 \cdot 10^{-4}$ . Die Permeabilität des Kupfers kann gleich 1 gesetzt werden. Da  $q = 0,2$  cm, findet man  $c\alpha = 0,023687$ , ferner  $A = 0,99986$ ,  $B = 0,02368$  und  $u_q = 0,99986 \sin \alpha t + 0,02368 \cos \alpha t = 1,00014 \sin(\alpha t + 1^\circ 21' 22'')$ , d. h. die Stromschwingungen haben in der Oberfläche des Drahtes eine 1.00014 mal so große Amplitude als jene in der Drahtachse und sind ihnen in der Phase um  $1^\circ 21' 22''$  voraus. Man sieht, im ganzen besteht kein großer Unterschied in der Stromverteilung gegenüber dem Gleichstrom. Das Bild ändert sich, wenn die Frequenz zunimmt. Nehmen wir etwa einen Wechselstrom von der Frequenz 50000. Dann wird  $c\alpha = 23,687$ . Die Amplitude im Abstände  $r$  von der Drahtachse ist gemäß Gleichung (4) gegeben durch

$$u_r = E \sin \alpha t + F \cos \alpha t,$$

worin

$$E = 1 - \frac{c^2 \alpha^2}{4} \left(\frac{r}{q}\right)^4 + \frac{c^4 \alpha^4}{4 \cdot 9 \cdot 16} \left(\frac{r}{q}\right)^8 - \frac{c^6 \alpha^6}{4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 36} \left(\frac{r}{q}\right)^{12} + \dots$$

$$F = c\alpha \left(\frac{r}{q}\right)^2 - \frac{c^3 \alpha^3}{4 \cdot 9} \left(\frac{r}{q}\right)^6 + \frac{c^5 \alpha^5}{4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25} \left(\frac{r}{q}\right)^{10} - \dots$$

Wir berechnen die Stromdichten in den Abständen  $r = \frac{q}{4}$ ,  $\frac{q}{2}$ ,  $\frac{3q}{4}$ ,  $q$  von der Drahtachse, d. h. also in unserem Beispiel in

0,5, 1, 1,5 mm Abstand von der Achse und in der Drahtoberfläche. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 u_{0,5} &= 0,46038 \sin \alpha t + 1,39080 \cos \alpha t \\
 &= 1,4647 \sin (\alpha t + 71^\circ 43' 26'') \\
 u_1 &= -5,72414 \sin \alpha t + 0,64916 \cos \alpha t \\
 &= 5,7609 \sin (\alpha t + 175^\circ 47' 22'') \\
 u_{1,5} &= 1,13838 \sin \alpha t - 26,06545 \cos \alpha t \\
 &= 26,09 \sin (\alpha t + 272^\circ 30' 3'') \\
 u_2 &= 123,41834 \sin \alpha t + 24,65936 \cos \alpha t \\
 &= 125,858 \sin (\alpha t + 371^\circ 17' 57'').
 \end{aligned}$$

Je tiefer wir unter die Oberfläche gehen, desto mehr nimmt die Amplitude der Stromdichte ab. In unserem Beispiel ist die Amplitude der Stromschwankungen in der Oberfläche nahe 126 mal so groß als in der Drahtachse. Außerdem besteht Phasenverschiebung, die Strömung in den tieferen Schichten ist in der Phase gegen die Strömung in der Oberfläche zurück, die Phasendifferenz nimmt mit wachsender Tiefe zu, sie beträgt in unserem Beispiel zwischen Oberfläche und Drahtachse  $371^\circ 17' 57''$ .

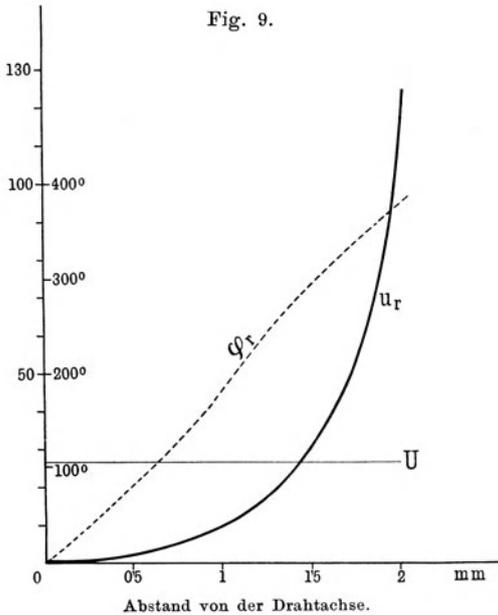
Bei einer Frequenz von 50000 weicht, wie die vorstehenden Rechnungsergebnisse zeigen, die Stromverteilung bereits recht beträchtlich von der Stromverteilung bei Gleichstrom ab. Der Strom wird jetzt in der Hauptsache von den äußeren Drahtschichten geführt, im Innern ist die Stromdichte sehr gering, wie man besonders deutlich sieht, wenn man die Amplitude der mittleren Stromdichte  $U$  berechnet. Nach der oben angegebenen Formel für  $U$  findet man in unserem Beispiel:

$$\begin{aligned}
 U &= 22,12299 \sin \alpha t - 13,01727 \cos \alpha t \\
 &= 25,67 \sin (\alpha t + 329^\circ 31' 38'').
 \end{aligned}$$

Die Amplitude der Stromdichte in 0,5 mm Tiefe unter der Oberfläche und die Amplitude der mittleren Stromstärke sind nahe gleich groß. Fig. 9 gibt ein Bild von der Zunahme der Amplituden und der Phasenverschiebung mit wachsendem Abstand von der Drahtachse. Auf der Abszissenachse sind die Abstände von der Drahtachse aufgetragen. Die Ordinatenachse trägt eine doppelte Skala; die Ziffern links bedeuten den Wert der Amplituden, ihnen gehört die voll ausgezogene Kurve  $u_r$  zu. Die Ziffern rechts stellen Winkel dar, und die gestrichelte Kurve gibt

die Abhängigkeit der Phasenverschiebung  $\varphi_r$  von dem Abstand von der Drahtachse. Die zur Abszissenachse parallele Gerade  $U$  bedeutet den Mittelwert der Stromstärke.

Die vorstehenden Beispiele zeigen, daß bei größerer Frequenz die Stromdichte im Innern des Drahtes kleiner ist als in der Nähe der Oberfläche. Je größer die Frequenz, desto dünner wird die Schicht, welche den Hauptteil des Stromes führt. Die Berechnung der Stromverteilung wird zwar bei größeren Frequenzen



wegen der langsameren Konvergenz der Reihen  $A, B, C, D, E, F$  für große Werte von  $c\alpha$  umständlicher, aber sie zeigt, daß das Verhältnis zwischen der Amplitude in der Oberfläche und jener in der Drahtachse mit wachsender Frequenz zunimmt. Man kann also den Satz aussprechen: bei großen Frequenzen findet die Strömung größtenteils in einer dünnen Oberflächenschicht statt. Man bezeichnet diese Erscheinung als Hautwirkung oder nach englischer Bezeichnungweise als Skinneffekt.

Der Skinneffekt führt eine mit wachsender Frequenz zunehmende Vergrößerung des Widerstandes herbei, da ja nicht der

ganze Drahtquerschnitt, sondern nur eine Oberflächenschicht des Drahtes den Hauptteil des Stromes führt. Bei einer vollständigeren Theorie der Kondensatorentladung muß auf den Skineffekt Rücksicht genommen werden. Ebenso spielt dieser Effekt eine Rolle bei den Impedanzversuchen, welche in den vorhergehenden Paragraphen besprochen wurden. Er vergrößert, da er selbst mit der Frequenz zunimmt, die Wirkung der gleichfalls mit der Frequenz wachsenden Induktanz.

Außer der Leitfähigkeit ist die Permeabilität des Drahtmaterials von Einfluß auf die Größe des Skineffektes. Untersuchungen wir beispielsweise das Verhalten eines Eisendrahtes von 4 mm Durchmesser bei einer Frequenz von 50 und 500 pro Sekunde. Die Leitfähigkeit des Eisens beträgt rund  $10^{-4}$  absolute Einheiten, die Permeabilität sei gleich 1000 angenommen. Wir erhalten hiermit für die Frequenz 50:

$$\begin{aligned} u_2 &= 0,96107 \sin \alpha t + 0,39306 \cos \alpha t \\ &= 1,038 \sin(\alpha t + 22^\circ 14' 17'') \end{aligned}$$

und für die Frequenz 500:

$$\begin{aligned} u_2 &= - 2,48192 \sin \alpha t + 2,29097 \cos \alpha t \\ &= 3,378 \sin(\alpha t + 137^\circ 17' 28''). \end{aligned}$$

Während bei der Frequenz 50 die Amplitude in der Oberfläche eines 4 mm starken Kupferdrahtes nur 1,00014 mal so groß ist als die Amplitude in der Drahtachse, ist sie bei Eisendraht von gleichem Durchmesser schon 1,038 mal so groß. Bei der Frequenz 500 ist sie schon 3,378 mal so groß und der Strom in der Oberfläche ist in der Phase dem Strom in der Drahtachse bereits um  $137^\circ 17' 28''$  voraus.

Bei Substanzen mit der magnetischen Permeabilität 1 ist die Größe des Skineffektes nur von der Leitfähigkeit und von der Frequenz abhängig. Bei gleicher Frequenz ist er um so kleiner, je geringer die Leitfähigkeit ist. Daher zeigen Elektrolyte den Skineffekt praktisch nicht. Bestleitende Schwefelsäure (30 Proz.) z. B. hat ein Leitvermögen von  $7388 \cdot 10^{-13}$  absoluten Einheiten. Wir wollen die Stromverteilung in einem Zylinder von 1 cm Radius bei einer Frequenz von 1 Million Schwingungen pro Sekunde berechnen. Wir haben  $c = 7388 \cdot 10^{-13} \pi$  und  $a = 2 \cdot 10^6 \pi$ , daher  $c a = 0,014583$  und finden die Amplitude in der Oberfläche des Schwefelsäurezylinders:

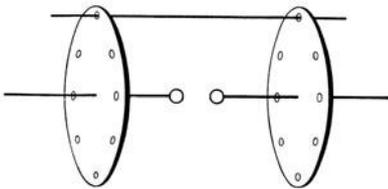
$$\begin{aligned}
 u_{\varrho} &= 0,999\,947 \sin \alpha t + 0,014\,583 \cos \alpha t \\
 &= 1,000\,05 \sin(\alpha t + 0^{\circ} 50' 8''),
 \end{aligned}$$

wenn die Amplitude in der Achse des Zylinders gleich 1 gesetzt wird. Also selbst bei dieser hohen Frequenz ist die Amplitude in der Oberfläche kaum verschieden von derjenigen in der Achse, auch sind die Schwingungen in der Oberfläche und in der Achse nahe phasengleich.

Kohlefäden von Glühlampen haben eine Leitfähigkeit von etwa  $25 \cdot 10^{-8}$  absoluten Einheiten, nehmen also eine Mittelstellung zwischen den Metallen und der bestleitenden Schwefelsäure ein. Der Skinneffekt in einem Glühlampenfaden kann demnach, trotz seiner relativen Geringfügigkeit, unter Umständen von Einfluß sein, wie dies oben zur Deutung des Tesla'schen Versuches mit der Einfadenglühlampe angenommen wurde. Dabei fällt noch ins Gewicht, daß der glühende Kohlefaden einen kleineren Widerstand hat als der kalte, der Skinneffekt daher mit Steigerung der Temperatur des Fadens zunimmt.

Zum Nachweis des Skinneffektes mit elektrischen Wellen benutzte Hertz<sup>1)</sup> eine Vorrichtung, welche als elektrodynamischer

Fig. 10.



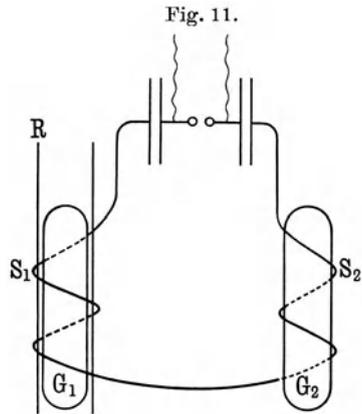
Käfig bezeichnet zu werden pflegt. Der wellenführende Draht wurde an einer Stelle durchschnitten, hierauf auf die beiden Enden kreisförmige Metallplatten, die an ihrer Peripherie 24 Löcher hatten, aufgeschoben und

zwei kleine Kugeln an die Drahtenden angesetzt, so daß eine Funkenstrecke gebildet wurde (Fig. 10). War diese kurz genug, so ging ein lebhafter Funkenstrom über, der sofort schwächer wurde, wenn ein Drahtstück durch zwei korrespondierende Löcher der beiden Metallplatten geschoben wurde. Je mehr solche Drahtstücke verwendet werden, desto schwächer wurden die Funken; waren alle 24 Drähte eingesetzt, so verschwanden die Funken vollkommen, die elektrische Strömung verlief nun vollständig in den Stäben des Käfigs.

<sup>1)</sup> Wied. Ann. 37, 395 (1889).

Das Prinzip des Hertzschen Käfigs verwendete A. Zillich<sup>1)</sup> zum Nachweis des Skinneffektes mit Feddersenströmen. Sein Apparat besteht aus einem Porzellanrohr von 60 cm Länge, 1,5 cm äußerem und 0,8 cm innerem Durchmesser. Dasselbe hat an seinen beiden Enden aufgekittete Messingkappen, deren Deckel je eine 6 mm weite Bohrung besitzen. Nahe den einander zugekehrten Kappenden sind 16 kurze Metallstifte angebracht, welche zum Befestigen von blanken, parallel zur Röhrenachse laufenden dünnen Drähten dienen. Parallel zu diesen Drähten wird zwischen den Messingkappen eine Glühlampe angeschlossen. Leitet man durch die Vorrichtung Feddersenströme, so leuchtet eine passende Lampe. Hieran ändert sich nichts, wenn durch die Bohrungen der Messingkappen ein 6 mm dicker Messingstab eingeschoben wird, während die Lampe in diesem Falle sofort verlischt, wenn durch den Apparat Gleichstrom oder technischer Wechselstrom fließt.

Oft spricht man auch von einer Schirmwirkung der oberflächlichen Schichten des Leiters für die inneren Leiterteile, die durch den Skinneffekt bedingt ist. Die „Schirmwirkung“ dünner Metallschichten kann nach J. J. Thomson<sup>2)</sup> in folgender Weise demonstriert werden. Ein Kondensatorkreis (Fig. 11) enthält zwei gleiche Spulen  $S_1$  und  $S_2$  von sehr wenigen Windungen. In die beiden Spulen werden zwei gleiche Glasröhren  $G_1$  und  $G_2$  gebracht, die auf etwa 0,1 mm Quecksilberdruck evakuiert sind. Setzt man die Entladungen des Kondensatorcircles in Gang, so leuchten die beiden Röhren hell auf. Schiebt man über die eine Röhre, z. B. über  $G_1$ , eine dünne Metallröhre  $R$  (eine Röhre aus



<sup>1)</sup> Zeitschr. f. den phys. u. chem. Unterr. **20**, 386 (1907).

<sup>2)</sup> Phil. Mag. [5] **32**, 321, 445; ferner J. J. Thomson, Recent Researches in Electricity and Magnetism, p. 100, 322, Oxford 1893. Vgl. auch J. Zenneck, Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Telegraphie, S. 476. Stuttgart 1905.

dünnem Stanniol genügt), so verlischt sie, während die andere weiterleuchtet. Auf diese Weise kann bei höheren Wechselzahlen auch die Schirmwirkung von Elektrolyten und verdünnten Gasen nachgewiesen werden.

Zum Nachweis der Schirmwirkung können auch die elektrodlosen Teslaröhren verwendet werden, welche in einem Wechselfeld hoher Frequenz leuchten. Schiebt man über eine solche Röhre eine Hülle aus Drahtnetz, so verlischt sie, und zwar vollständig erst, sobald sie von dem Netz vollständig bedeckt ist.

Der Skineffekt spielt natürlich bei allen elektrischen Strömungen von hoher Frequenz eine große Rolle und es muß daher bei einer genauen Theorie derselben auf ihn gebührend Rücksicht genommen werden.

A. Töpler<sup>1)</sup> ging von dem Teslaschen Impedanzversuch aus, um den Skineffekt nachzuweisen. Eine Glühlampe liegt im Nebenschluß zu einem dicken Kupferbügel. Sie brennt bedeutend dunkler, sobald die Oberfläche des Bügels durch ein übergeschobenes dünnes Metallblech beträchtlich vermehrt wird. Da der Querschnitt durch das dünne Blech nicht merklich vergrößert wird, ist die Herabsetzung des Widerstandes hauptsächlich der Vermehrung der Oberfläche zuzuschreiben, d. h. es ist gezeigt, daß der hochfrequente Strom hauptsächlich in der Oberfläche verläuft.

Der Verfasser hat analoge Versuche in der folgenden Weise angestellt. Es wurden halbkreisförmige Metallbügel aus verschiedenen Metallen verwendet, deren Mittellinie den gleichen Durchmesser von 33,5 cm hatte und deren kreisförmige Querschnitte so bemessen waren, daß die Bügel gleichen Ohmschen Widerstand hatten, und zwar ein Kupferbügel mit einem Durchmesser von 5 mm, ein Bügel aus Weicheisen mit dem Durchmesser von 13,15 mm und eine mit Quecksilber gefüllte Glasröhre mit dem inneren Durchmesser von 37 mm. An die Enden der Bügel wurde ein Nebenschluß gelegt, in welchen eine Glühlampe von 10 Volt eingeschaltet war. Der Bügel samt Nebenschluß wurde dann an den Plattenkondensator von 7200 cm Kapazität angeschlossen. Dieser wurde durch den Hochspannungstransformator von

<sup>1)</sup> Über die mit vielplattigen Influenzmaschinen erzeugten elektrischen Kondensatorschwingungen in ihrer Anwendung auf die sog. Teslaschen Versuche. *Elektrotechn. Zeitschr.* **12**, 595, 617 (1894).

20 000 Volt, in dessen Primärkreis ein Widerstand von etwa 5 Ohm (Spannung der Stromquelle 120 Volt, Periodenzahl 48) eingeschaltet war, geladen. Die Funkenstrecke blieb in allen Versuchen ungeändert. Um die Stromstärke in der Lampe annähernd zu bestimmen, wurde eine zweite gleiche Lampe verwendet, die von einer Akkumulatorenbatterie gespeist wurde. In dem Stromkreis dieser zweiten Lampe lag ein Regulierwiderstand und ein Amperemeter, und es wurde nun die Stromstärke in der zweiten Lampe so reguliert, daß beide Lampen gleich hell leuchteten. Es ergaben sich folgende Zahlen:

|   |      |      |
|---|------|------|
| Kupferbügel: Stromstärke in der Vergleichslampe   | 0,45 | Amp. |
| Eisenbügel:                   "                   "                   "                   " | 0,45 | "    |
| Quecksilberbügel:           "                   "                   "                   "   | 0,20 | "    |

Die spezifische Leitfähigkeit des Eisens ist etwa 7 mal kleiner als die des Kupfers. Der Skineffekt im Eisen müßte demnach, soweit die spezifische Leitfähigkeit in Betracht kommt, kleiner sein als im Kupfer. Trotz der größeren Oberfläche zeigt der Eisenbügel aber den gleichen Wechselstromwiderstand wie der Kupferbügel, wodurch der starke Einfluß der hohen Permeabilität des Eisens demonstriert ist. Anders liegen die Verhältnisse beim Quecksilber. Die spezifische Leitfähigkeit des Quecksilbers ist etwa 56 mal kleiner als die des Kupfers. Der Skineffekt im Quecksilber ist daher kleiner, dementsprechend der Wechselstromwiderstand des Quecksilberbügels auch kleiner; dieser wird durch die größere Oberfläche des Quecksilberbügels noch weiter verringert; trotzdem reichen diese Umstände nicht aus, um die Wirkung der so viel kleineren Leitfähigkeit zu kompensieren.

Die Glasröhre, welche für den Versuch mit Quecksilber gedient hatte, wurde hierauf mit bestleitender Schwefelsäure gefüllt. Die Vergleichslampe benötigte jetzt eine Stromstärke von 1 Amp. Es wurde nun ein Kupferdraht gesucht, welcher die gleiche Stromstärke in der Lampe liefert. Es ergaben

|                       |   |      |      |
|-----------------------|---|------|------|
| ein Kupferbügel, 2    | mm dick, in der Vergleichslampe                                 | 0,62 | Amp. |
| "                   " | 1,3                   "                   "                   " | 0,75 | "    |
| "                   " | 0,56                  "                   "                   " | 0,85 | "    |
| "                   " | 0,44                  "                   "                   " | 0,90 | "    |
| "                   " | 0,30                  "                   "                   " | 1,00 | "    |

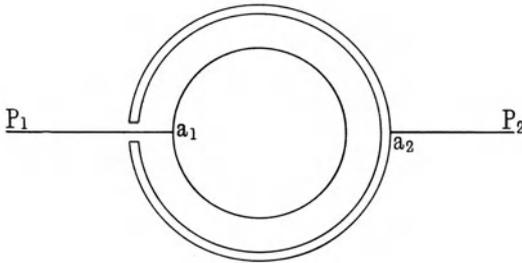
Der Kupferbügel vom Querschnitt  $\frac{\pi}{4} (0,3)^2 \text{ mm}^2$  hatte also

denselben Wechselstromwiderstand wie der Schwefelsäurebügel vom Querschnitt  $\frac{\pi}{4}(37)^2 \text{ mm}^2$ . Das Verhältnis der Querschnitte des Kupfer- und Schwefelsäurebügels ist 1:1521; dieses Verhältnis müßte rund 1:810800 sein, wenn die Ohmschen Widerstände gleich sein sollten.

### § 7. Der einfache Stromkreis mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität.

Einer der auffallendsten Unterschiede zwischen Wechselstrom und Gleichstrom besteht darin, daß eine durch eine Kapazität unterbrochene Leitung Gleichstrom nicht durchläßt, während sie Wechselstrom passieren läßt. Wir untersuchen den Fall einer einfachen Leitung; die Kapazität habe die Form eines Kugel-

Fig. 12.



kondensators (Fig. 12).  $P_1$  und  $P_2$  seien zwei Punkte mit den Potentialen  $A_1 \sin \alpha t$  und  $A_2 \sin \alpha t$  und es sei  $(A_1 - A_2) \sin \alpha t = A \sin \alpha t = V$ . Der Widerstand der Zuleitung  $P_1 a_1$  sei  $w_1$ , ihre Selbstinduktion  $L_1$ , die analogen Größen für die Zuleitung  $a_2 P_2$  seien  $w_2$  und  $L_2$ . Der Radius der inneren Kondensator-kugel sei  $r_1$ , der Radius der inneren Oberfläche der äußeren Kondensatorhohlkugel  $r_2$ , der Radius ihrer Außenfläche  $r'_2$ . Fließt ein Strom  $i_1$  in  $P_1 a_1$  zur inneren Kugel, so führt er derselben in der Zeit  $dt$  die Ladung  $de = i_1 dt$  zu. Die Ladung  $de$  auf der Innenkugel erzeugt durch Influenz eine Ladung  $-de$  auf der Innenseite und eine Ladung  $de$  auf der Außenseite der äußeren Hohlkugel. Letztere Ladung strömt in der Zeit  $dt$  ab, gibt also in der Leitung einen Strom  $i_2$ , der durch die Gleichung  $de = i_2 dt$  bestimmt, daher gleich  $i_1$  ist, so daß geschrieben werden kann:

$i_1 = i_2 = i$ . Das Potential in der Oberfläche der Innenkugel heiße  $v_1$ , das Potential in der Außenfläche der Hohlkugel  $v_2$ . Es gelten die Gleichungen :

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2} + \frac{e}{r'_2} \\ v_2 &= \frac{e}{r'_2} - \frac{e}{r_2} + \frac{e}{r'_2} = \frac{e}{r'_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

wenn  $e$  die Ladung der Innenkugel ist. Die Strömung in den Zuleitungen ist nach Gl. (1), § 2 bestimmt durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} w_1 i + L_1 \frac{di}{dt} &= A_1 \sin \alpha t - v_1 \\ w_2 i + L_2 \frac{di}{dt} &= v_2 - A_2 \sin \alpha t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

deren Addition zu der Gleichung

$$(w_1 + w_2) i + (L_1 + L_2) \frac{di}{dt} = V - (v_1 - v_2) \dots (3)$$

führt.  $w_1 + w_2 = w$  ist der Gesamtwiderstand der Zuleitungen,  $L_1 + L_2 = L$  ihre gesamte Selbstinduktion. Aus (1) folgt:

$$v_1 - v_2 = e \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{e}{C} \dots \dots \dots (4)$$

worin  $C$  die Kapazität des Kondensators bedeutet. Wir können daher schreiben:

$$w i + L \frac{di}{dt} = V - \frac{e}{C} \dots \dots \dots (5)$$

oder nach der Zeit differenzierend:

$$w \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} = \frac{dV}{dt} - \frac{1}{C} \frac{de}{dt}$$

Da  $de = i dt$ , folgt:

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + w \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dV}{dt} \dots \dots \dots (6)$$

oder, da  $V = A \sin \alpha t$ , endlich:

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + w \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = A \alpha \cos \alpha t \dots \dots \dots (7)$$

durch welche Gleichung die Strömung in den Zuleitungen zum Kondensator bestimmt wird. Diese Gleichung gilt allgemein, unabhängig von der speziellen Form des Kondensators.

Die Lösung lautet:

$$i = \frac{A}{\sqrt{w^2 + \left(\frac{1}{\alpha C} - \alpha L\right)^2}} \sin(\alpha t + \varphi) \quad \dots \quad (8)$$

worin die Phasenverschiebung  $\varphi$  des Stromes gegen die elektromotorische Kraft bestimmt ist durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{w} \left( \frac{1}{\alpha C} - \alpha L \right) \dots \dots \dots (9)$$

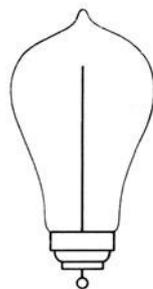
Wenn  $\frac{1}{\alpha C} > \alpha L$ , so eilt der Strom der elektromotorischen Kraft in der Phase voraus, während er in der Phase zurückbleibt, wenn  $\frac{1}{\alpha C} < \alpha L$  ist. Er ist mit der elektromotorischen Kraft in Phasenübereinstimmung, wenn  $\frac{1}{\alpha C} = \alpha L$  oder  $\alpha^2 = \frac{1}{CL}$  ist. In diesem Falle ist, wie Gl. (8) zeigt, die Amplitude der Stromstärke ein Maximum. Da  $\alpha = \frac{2\pi}{\tau}$ , kann man die Bedingung hierfür auch in der Form  $\tau = 2\pi\sqrt{CL}$  schreiben. Dies ist aber [s. Gl. (5), § 3] die Eigenschwingungsdauer des Kondensators: die Stromstärke hat den größten Wert, wenn die Schwingungsdauer des verwendeten Wechselstromes mit der Eigenschwingungsdauer des Kondensators übereinstimmt, oder, wie man dies auch ausdrückt, wenn zwischen den Schwingungen des Stromes und den Eigenschwingungen des Kondensators Resonanz besteht.

Es werde nun als Beispiel die Amplitude der Stromstärke berechnet, welche in den Zuleitungen zu einem Kondensator von 1 Mikrofaraad Kapazität fließt, der an eine Wechselstromspannung von 120 Volt und 48 Perioden angeschlossen ist. Der Widerstand der Zuleitungen sei klein gegen  $\frac{1}{\alpha C}$ , ihre Selbstinduktion Null. Nach Gl. (8) ist dann die Amplitude der Stromstärke  $A\alpha C$ . Es ist  $A = 120$  Volt,  $\alpha = 96\pi$  oder rund 300,  $C = 1$  Mikrofaraad  $= 10^{-6}$  Farad. Es wird hiermit  $A\alpha C = 0,036$  Amp. Bei

einer Kapazität von 10 Mikrofarad beträgt die Amplitude der Stromstärke bereits 0,36 Amp. Ein solcher Strom bringt eine 6 kerzige Glühlampe von 25 Volt zum Glühen. Da der Widerstand einer solchen Lampe im heißen Zustande etwa 25 Ohm beträgt, welcher Wert noch immer klein gegen  $\frac{1}{\alpha C} = \frac{1}{300 \cdot 10^{-5}} = 333$  Ohm ist, kann diese Lampe zum Nachweis des Stromes in dem letzteren Falle (10 Mikrofarad Kapazität) benutzt werden. Der Versuch entspricht dem theoretischen Resultat.

Teslas einpolige Glühlampe (Fig. 13) ist wohl einfacher, als dies Tesla getan hat, nämlich mit Hinweglassung des „Bombardements der Moleküle“<sup>1)</sup>, zu erklären, wenn man sie bloß als Kondensator auffaßt, dessen innere Belegung durch das Vakuum, die äußere durch den äußeren Luftraum gebildet wird<sup>2)</sup>. Die Funktion solcher Lampen wird wesentlich unterstützt, wenn man außen einen Ring oder eine Kappe aus Stanniol aufsetzt. Eine solche Einfadenslampe leuchtet, der Kohlefaden derselben glüht, wenn sie an den einen Pol eines Tesla-transformators, dessen zweiter Pol zur Erde abgeleitet wird, angehängt wird. Das Leuchten wird noch intensiver, wie Tesla gezeigt hat, wenn die Stanniolkappe mit einer größeren Metallplatte leitend verbunden wird. Dies stimmt ungezwungen mit der Ansicht, daß die Lampe als Kondensator aufzufassen ist. Der Ladungs- und Entladungsstrom, welcher durch den Kohlefaden fließt, verursacht das Glühen des Fadens. Um zu einer Vorstellung über die Amplitude dieser Strömung zu gelangen, betrachten wir eine kugelförmige Lampe von 2 cm Radius und 0,5 mm Wandstärke. Die Kapazität dieser Lampe ist dann, die Dielektrizitätskonstante des Glases gleich 5 gesetzt,

Fig. 13.



$$C = 5 \frac{2,05 \cdot 2}{2,05 - 2} = 410 \text{ cm} = \frac{41}{9} \cdot 10^{-19} \text{ Farad.}$$

Der verwendete Feddersenstrom mache  $10^6$  Schwingungen in der

<sup>1)</sup> Tesla, l. c., p 175.

<sup>2)</sup> Die Funktion der Lampe als Kondensator hat Tesla richtig erkannt.

Sekunde, so daß  $\alpha = 2\pi \cdot 10^6$ .  $A$  sei eine halbe Million Volt. Hiermit wird  $A\alpha C = \frac{41}{9}\pi \cdot 10^{-7} = 1,43 \cdot 10^{-6}$  Amp. Beachten wir den Skineffekt, so wird einerseits selbst bei einer kurzen geradlinigen Zuleitung  $\alpha L$  einen nicht mehr vernachlässigbaren Wert erhalten, wodurch die Amplitude der Stromstärke auf den Betrag  $\frac{A\alpha C}{1 - \alpha^2 CL}$  vergrößert wird. Andererseits verläuft der Strom eben infolge des Skineffektes zum größeren Teil in den oberflächlichen Schichten des Lampenfadens. Auch bei relativ schwachem Strom, dessen unteren Grenzwert wir berechnet haben, kann die Stromdichte in der Oberfläche des Lampenfadens groß genug werden, um dieselbe zum Glühen zu bringen.

---

## Zweites Kapitel.

### Induktion und ponderomotorische Kräfte.

#### § 8. Induktion durch einen von Wechselstrom durchflossenen Stromkreis.

In einem Stromkreis I vom Widerstand  $w_1$  und der Selbstinduktion  $L_1$  wirke eine periodische elektromotorische Kraft  $A \sin \alpha t$ . Dieser Stromkreis wirke induzierend auf einen Stromkreis II vom Widerstand  $w_2$  und der Selbstinduktion  $L_2$ . In dem zweiten Stromkreis sei keine elektromotorische Kraft vorhanden. Bezeichnen wir den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion mit  $L$ , die Stromstärken in beiden Kreisen mit  $i_1$  und  $i_2$ , so liefert das Ohmsche Gesetz für die beiden Stromkreise die Gleichungen:

$$w_1 i_1 = A \sin \alpha t - L_1 \frac{di_1}{dt} - L \frac{di_2}{dt}$$

$$w_2 i_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - L \frac{di_1}{dt},$$

oder in symbolischer Schreibweise:

$$\left. \begin{aligned} (L_1 \frac{d}{dt} + w_1) i_1 + L \frac{d}{dt} i_2 &= A \sin \alpha t \\ L \frac{d}{dt} i_1 + (L_2 \frac{d}{dt} + w_2) i_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

Aus denselben folgt:

$$\left. \begin{aligned} (L_1 L_2 - L^2) \frac{d^2 i_1}{dt^2} + (w_1 L_2 + w_2 L_1) \frac{d i_1}{dt} + w_1 w_2 i_1 \\ = w_2 A \sin \alpha t + \alpha L_2 A \cos \alpha t \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} (L_1 L_2 - L^2) \frac{d^2 i_2}{dt^2} + (w_1 L_2 + w_2 L_1) \frac{d i_2}{dt} + w_1 w_2 i_2 \\ = -\alpha L A \cos \alpha t \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

Die Lösungen dieser Gleichungen lauten:

$$i_1 = a_1 \sin(\alpha t - \varphi'_1) \dots (4)$$

$$i_2 = a_2 \sin(\alpha t - \varphi_2) \dots (5)$$

Zur Bestimmung von  $a_1$  und  $\varphi'_1$  erhält man durch Substitution von (4) in (2):

$$\left. \begin{aligned} a_1 \{ \alpha (w_1 L_2 + w_2 L_1) \sin \varphi'_1 \\ + [w_1 w_2 - \alpha^2 (L_1 L_2 - L^2)] \cos \varphi'_1 \} = w_2 A \\ a_1 \{ \alpha (w_1 L_2 + w_2 L_1) \cos \varphi'_1 \\ - [w_1 w_2 - \alpha^2 (L_1 L_2 - L^2)] \sin \varphi'_1 \} = \alpha L_2 A \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

Hieraus folgt zunächst:

$$\begin{aligned} a_1^2 &= A^2 \frac{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2}{\alpha^2 (w_1 L_2 + w_2 L_1)^2 + [w_1 w_2 - \alpha^2 (L_1 L_2 - L^2)]^2} \\ &= A^2 \frac{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2}{\alpha^2 w_1^2 L_2^2 + \alpha^2 w_2^2 L_1^2 + w_1^2 w_2^2 + 2 \alpha^2 w_1 w_2 L^2 + \alpha^4 L_1^2 L_2^2} \\ &\quad \frac{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2}{-2 \alpha^4 L_1 L_2 L^2 + \alpha^4 L^4} \end{aligned}$$

Multipliziert und dividiert man das letzte Glied des Nenners mit  $w_2^2 + \alpha^2 L_2^2$ , so daß es durch die Summe

$$\frac{\alpha^4 w_2^2 L^4}{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2} + \frac{\alpha^6 L_2^2 L^4}{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2}$$

ersetzt wird, so bekommt man weiter  $a_1^2$  gleich

$$\begin{aligned}
 & A^2 \frac{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2}{w_1^2 (w_2^2 + \alpha^2 L_2^2) + 2 \alpha^2 w_1 w_2 L^2 + \frac{\alpha^4 w_2^2 L^4}{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2}} \\
 & \quad \frac{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2}{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2} \\
 & \quad + \alpha^2 \left[ L_1^2 (w_2^2 + \alpha^2 L_2^2) - 2 \alpha^2 L_1 L_2 L^2 + \frac{\alpha^4 L_2^2 L^4}{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2} \right] \\
 = & \frac{A^2}{\left[ w_1^2 + 2 w_1 \frac{\alpha^2 w_2 L^2}{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2} + \frac{\alpha^4 w_2^2 L^4}{(w_2^2 + \alpha^2 L_2^2)^2} \right]} \\
 & \quad \frac{A^2}{+ \alpha^2 \left[ L_1^2 - 2 L_1 \frac{\alpha^2 L_2 L^2}{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2} + \frac{\alpha^4 L_2^2 L^4}{(w_2^2 + \alpha^2 L_2^2)^2} \right]} \\
 = & \frac{A^2}{\left( w_1 + \frac{\alpha^2 w_2 L^2}{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2} \right)^2 + \alpha^2 \left( L_1 - \frac{\alpha^2 L_2 L^2}{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2} \right)^2},
 \end{aligned}$$

also, wenn zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned}
 w_1 + w_2 \frac{\alpha^2 L^2}{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2} &= w'_1 \\
 L_1 - L_2 \frac{\alpha^2 L^2}{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2} &= L'_1
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

gesetzt wird, schließlich

$$a_1 = \frac{A}{\sqrt{w_1'^2 + \alpha^2 L_1'^2}} \dots \dots \dots (8)$$

Dividiert man die Gleichungen (6) durcheinander, so erhält man die Bestimmungsgleichung für  $\varphi'_1$ :

$$\frac{\alpha (w_1 L_2 + w_2 L_1) \cos \varphi'_1 - [w_1 w_2 - \alpha^2 (L_1 L_2 - L^2)] \sin \varphi'_1}{\alpha (w_1 L_2 + w_2 L_1) \sin \varphi'_1 + [w_1 w_2 - \alpha^2 (L_1 L_2 - L^2)] \cos \varphi'_1} = \frac{\alpha L_2}{w_2};$$

aus derselben folgt:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \varphi'_1 &= \frac{\alpha \{ w_2 (w_1 L_2 + w_2 L_1) - L_2 [w_1 w_2 - \alpha^2 (L_1 L_2 - L^2)] \}}{\alpha^2 L_2 (w_1 L_2 + w_2 L_1) + w_2 [w_1 w_2 - \alpha^2 (L_1 L_2 - L^2)]} \\
 &= \frac{\alpha [L_1 (w_2^2 + \alpha^2 L_2^2) - \alpha^2 L_2 L^2]}{w_1 (w_2^2 + \alpha^2 L_2^2) + \alpha^2 w_2 L^2}
 \end{aligned}$$



Für die Phasendifferenz  $\varphi_2$  endlich findet man

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_2 &= - \frac{w_1 w_2 - \alpha^2 (L_1 L_2 - L^2)}{\alpha (w_1 L_2 + w_2 L_1)} \\ &= - \frac{w_1 w_2 - \alpha^2 L_1 L_2 + \frac{\alpha^2 w_2^2 L^2}{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2} + \frac{\alpha^4 L_2^2 L^2}{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2}}{\alpha \left[ \left( w_1 + \frac{\alpha^2 w_2 L^2}{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2} \right) L_2 + w_2 \left( L_1 - \frac{\alpha^2 L_2 L^2}{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2} \right) \right]} \\ &= - \frac{\left( w_1 + \frac{\alpha^2 w_2 L^2}{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2} \right) w_2 - \alpha^2 \left( L_1 - \frac{\alpha^2 L_2 L^2}{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2} \right) L_2}{\alpha (w_1' L_2 + w_2 L_1')} \end{aligned}$$

oder

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = - \frac{w_1' w_2 - \alpha^2 L_1' L_2}{\alpha (w_1' L_2 + w_2 L_1')} \cdot \cdot \cdot \cdot (12)$$

Wäre der primäre Stromkreis allein vorhanden, so würden die Amplitude der Stromstärke und ihre Phasenverschiebung gegen die elektromotorische Kraft bestimmt sein durch die Ausdrücke  $\frac{A}{\sqrt{w_1^2 + \alpha^2 L_1^2}}$  und  $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\alpha L_1}{w_1}$  (s. Kap. I, § 2). Die Anwesenheit des zweiten Stromkreises bewirkt eine scheinbare Vergrößerung des Ohmschen Widerstandes von  $w_1$  auf  $w_1'$  und eine scheinbare Herabsetzung der Selbstinduktion von  $L_1$  auf  $L_1'$  im primären Kreis, wodurch auch die Phasendifferenz des primären Stromes gegen die elektromotorische Kraft von  $\varphi_1$  auf  $\varphi_1'$  herabgesetzt wird. Der im sekundären Kreis induzierte Strom  $i_2$  hat gegen den induzierenden Strom  $i_1$  eine Phasendifferenz  $\psi = \varphi_2 - \varphi_1'$ . Man findet für dieselbe aus (12) und (9) unschwer die Bestimmungsgleichung

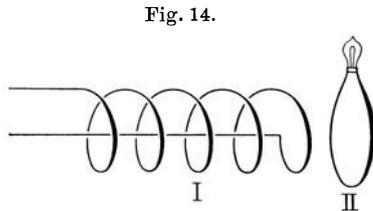
$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} (\varphi_2 - \varphi_1') = - \frac{w_2}{\alpha L_2} \cdot \cdot \cdot \cdot (13)$$

Da  $\operatorname{tg} \psi$  negativ ist, liegt  $\psi$  zwischen  $\frac{\pi}{2}$  und  $\pi$ . Es nähert sich um so mehr dem Werte  $\pi$ , je kleiner  $\frac{w_2}{\alpha L_2}$  ist. Ist dieser Quotient unendlich groß, was eintritt, wenn der sekundäre Stromkreis offen ist ( $w_2 = \infty$ ), so wird  $\psi = \frac{\pi}{2}$ ,  $i_2 = 0$  und  $i_1$  nimmt

den Wert an, welchen es hat, wenn die primäre Leitung allein vorhanden ist.

Die induzierende Wirkung eines Wechselstromes kann benutzt werden, um den oszillatorischen Charakter der Kondensator-entladung nachzuweisen. Man verfertigt sich zu diesem Zwecke aus dickem Kupferdraht eine Spule I aus mehreren Windungen (Fig. 14), durch welche der Entladungsstrom eines Kondensators hindurchgeleitet wird. Der sekundäre, aus einer einzigen Windung bestehende Stromkreis II enthält eine Glühlampe, welche durch den induzierten Strom zum Glühen gebracht wird.

Schickt man beispielsweise den Entladungsstrom der im § 4 beschriebenen Batterie von Franklinschen Tafeln, die, wie dort angegeben, geladen wird, durch eine derartige, aus



3 mm dickem Kupferdraht gefertigte Primärspule, welche acht Windungen von 16 cm Durchmesser in Abständen von 5 cm enthält, so beginnt eine 10-Volt-Lampe, die in den aus gleichem Draht gefertigten Stromkreis II von 20 cm Durchmesser eingeschaltet ist, zu glühen, wenn der sekundäre Kreis sich in 5 cm Entfernung von dem Ende der primären Spule befindet. Bei weiterer Näherung nimmt das Glühen an Intensität zu und steigert sich zur hellen Weißglut, wenn der sekundäre Kreis über den primären geschoben wird.

## § 9. Die ponderomotorische Kraft zwischen dem primären und sekundären Stromkreis.

### Versuche von Elihu Thomson und V. v. Lang.

El. Thomson beschreibt in einer populären Schrift<sup>1)</sup>, die einen Vortrag wiedergibt, interessante Versuche über die Anziehung und Abstoßung, die durch Wechselströme hervorgerufen werden. Thomson führte seine Versuche mit Wechselstrom von der Frequenz 250 aus und gebrauchte Hilfsmittel, wie sie ge-

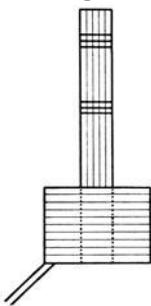
---

<sup>1)</sup> Elihu Thomson, Was ist Elektrizität? Übersetzt von Heinrich Discher. Verlag von Franz Deuticke, Leipzig und Wien, 1890.

wöhnlich nicht zu Gebote stehen. v. Lang<sup>1)</sup> gab dann eine Versuchsanordnung, welche die Durchführung der Thomsonschen Experimente mit Wechselströmen viel geringerer Frequenz und Intensität auszuführen gestattet.

Die wichtigste Änderung, welche v. Lang an der Thomsonschen Anordnung vornahm, besteht darin, daß er den Eisenkern der angewandten Drahtspule auf der einen Seite weit aus der Spule hervorragen läßt. Dieser Kern besteht natürlich aus dünnen Drähten. Legt man über das herausragende Ende desselben gut leitende Ringe und sendet durch die Spule Wechselstrom auch geringerer Frequenz, so werden die Ringe auch bei mäßiger Stromstärke in erstaunlichem Maße abgestoßen. Die Dimensionen des in Fig. 15 abgebildeten v. Langschen Apparates sind folgende.

Fig. 15.



Die Spule ist aus doppelt mit Seide umsponnenem Kupferdraht von 1,5 mm Durchmesser hergestellt und enthält 6 Lagen, jede zu 26 Windungen; ihr Gewicht beträgt etwa 0,75 kg, ihr Widerstand 0,53 Ohm. Sie wurde auf einen Holzzylinder von 35 mm Durchmesser zwischen zwei abnehmbaren Scheiben gewickelt, dann mit untergelegten Bindfaden zusammengebunden und, nachdem die Scheiben abgenommen waren, stellenweise noch mit Siegelack gefestigt. Man erhielt so nach Entfernung des Holzzylinders eine Spule, die bloß aus Draht bestand und deren Öffnung dann ganz mit Eisendrähten ausgefüllt wurde. Der auf diese

Weise gebildete Eisenkern erhielt eine Länge von 24 cm; er wird an seinem unteren Ende durch die Spule zusammengehalten, am oberen Ende und in der Mitte wird er mit Bindfaden umschnürt.

Die Versuche führte v. Lang mit dem Wechselstrom der Wiener Zentrale aus, welcher die Frequenz von etwa 43 hat. Die verwendete Spannung betrug 50 Volt. Schob man über das herausragende Ende des Eisenkernes einen Aluminiumring (Mannesmannrohr, Gewicht 17 g, Höhe 4 cm, Durchmesser 4,7 cm), so daß er auf der induzierenden Spule auflag, so wurde derselbe durch einen Strom von 5 Amp. (effektiv) von der Spule kräftig abgestoßen und blieb schließlich, mit seinem unteren Rande 10,5 cm

---

<sup>1)</sup> Viktor v. Lang, Versuche mit Wechselströmen. Wien. Sitzber. d. kais. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Klasse, 102 [IIa], Mai 1893.

über der Spule, schwebend. Die Klemmenspannung an der Spule betrug hierbei 24 Volt (effektiv).

Ein etwas kürzerer, sonst gleicher Aluminiumring (Höhe 2,4 cm) zeigte eine nur wenig schwächere Abstoßung. Sehr wirksam erwies sich auch ein Ring, der aus nicht ganz 4 Windungen eines 4 mm dicken Kupferdrahtes bestand, dessen einzelne Windungen aber mit Zinn aneinandergelötet wurden, so daß sie einen soliden Ring von 67 g Gewicht mit einem mittleren Durchmesser von 4,8 cm bildeten. Dieser Ring wurde bei der angegebenen Stromstärke um 5 cm gehoben.

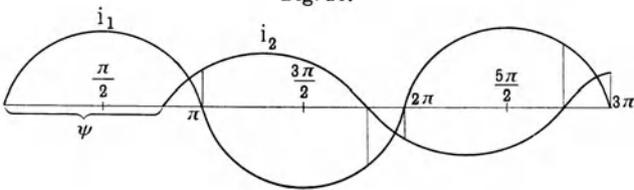
Man konnte derartige Abstoßungserscheinungen mit noch geringeren Stromstärken erhalten, wenn der Eisenkern nach beiden Seiten der Spule verlängert wurde. Will man nicht eine eigene Spule mit beiderseits herausragendem Eisenkern bauen, so genügt es, ein zweites Bündel von Eisendrähten vertikal aufzustellen und auf dieses Bündel die beschriebene Spule koaxial aufzusetzen. Man kann dann schon mit 1,5 Amp. und 12,5 Volt Klemmenspannung an der Spule ein Schweben des kürzeren Aluminiumringes in 1 cm Höhe erhalten; bei 2 Amp. und 18,5 Volt wurde dieser Ring schon 5 cm hoch gehoben.

Trieb man, wieder ohne den unteren Eisenkern, die Stromstärke auf 10 Amp., wobei die Klemmenspannung an der Spule auf 46,5 Volt stieg, so erhob sich der Aluminiumring schon fast an das Ende des Eisenkernes, während der Kupferring in der Höhe von 14 cm schwebte. Legte man bei offenem Stromkreis den Aluminiumring über den Eisenkern auf die Spule, so wurde der Ring beim Stromschluß über den Kern hinaus in die Luft geschleudert. Beim Schweben des Kupferringes konnte man eine Zunahme der Stromstärke und ein Sinken der Klemmenspannung konstatieren, und zwar stieg die Stromstärke von 10 auf 10,5 Amp., während die Klemmenspannung von 46,5 auf 46 Volt sank. Diese Differenzen wurden natürlich noch beträchtlicher, wenn man den schwebenden Ring bis zur Spule hinabdrückte, was eine Gesamtkraft von 0,6 kg erforderte.

Die vorstehend geschilderten Abstoßungserscheinungen sind auf Grund der im § 8 entwickelten Theorie verständlich. Gl. (13) dieses Paragraphen zeigt die Phasendifferenz  $\psi$  zwischen dem primären und dem im Ringe induzierten Strom abhängig vom Widerstand  $w_2$  und der Selbstinduktion  $L_2$  des Ringes; sie muß

wie dort ausgeführt wurde, immer zwischen  $\frac{\pi}{2}$  und  $\pi$  liegen. In Fig. 16 stellt  $i_1$  den primären,  $i_2$  den in dem Ringe induzierten Strom dar. Ist  $\psi$  die Phasendifferenz, so sieht man, daß  $i_1$  und  $i_2$  von  $\alpha t = \pi$  bis  $\alpha t = \pi + \psi$  entgegengesetzte, von  $\alpha t = \pi + \psi$  bis  $\alpha t = 2\pi$  gleiche, von  $\alpha t = 2\pi$  bis  $\alpha t = 2\pi + \psi$  entgegengesetzte, von  $\alpha t = 2\pi + \psi$  bis  $\alpha t = 3\pi$  gleiche Richtung haben usw. Während der Zeit, wo die Ströme gleichgerichtet sind, findet nach den Ampèreschen Gesetzen Anziehung, während der Zeit, wo sie entgegengesetzt gerichtet sind, Abstoßung statt. Anziehung und Abstoßung halten einander die Wage nur in dem äußersten Grenzfall, wenn  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , welcher aber nur eintritt, wenn  $w_2$  unendlich groß,  $i_2$  also unendlich klein ist. Es muß also in jedem Falle, wo eine ponderomotorische Kraft von

Fig. 16.



beobachtbarer Größe auftritt, diese den Charakter einer Abstoßung haben.

Zu dem gleichen Resultat gelangt man durch die Ableitung der ponderomotorischen Kräfte aus den Veränderungen des elektromagnetischen Feldes. Die Arbeit  $\delta E$ , die bei einer kleinen Verschiebung zweier Stromkreise mit den Stromstärken  $i_1$  und  $i_2$  geleistet wird, ist bestimmt durch den Ausdruck  $\delta E = i_1 i_2 \delta L$ , wenn  $L$  den gegenseitigen Induktionskoeffizienten der beiden Stromkreise bedeutet. Ist  $i_1$  fest und  $i_2$  beweglich, und  $i_1$  und  $i_2$  entgegengesetzt gerichtet, das Produkt  $i_1 i_2$  also negativ, so muß auch  $\delta L$  negativ sein, damit  $\delta E$  positiv wird, d. h. eine Arbeit darstellt, die von den ponderomotorischen Kräften der Ströme geleistet wird, d. h. der bewegliche Stromkreis  $i_2$  bewegt sich so, daß der gegenseitige Induktionskoeffizient abnimmt. Dies tritt in unserem Falle ein, wenn sich der Ring von der Primärspule entfernt, er wird von dieser abgestoßen.

Die ponderomotorische Kraft zwischen der Primärspule und dem Ring ist in jedem Moment proportional dem Produkte  $i_1 i_2$ . Nach § 8 ist, wenn  $i_1 = a_1 \sin(\alpha t - \varphi'_1)$  gesetzt wird,

$$i_2 = \frac{a_1 \alpha L}{\sqrt{w_2^2 + \alpha L_2^2}} \sin(\alpha t - \varphi_2).$$

Setzt man  $\alpha t - \varphi'_1 = T$ , so kann man wegen  $\varphi_2 - \varphi'_1 = \psi$  schreiben:  $i_1 = a_1 \sin \alpha T$  und

$$i_2 = \frac{a_1 \alpha L}{\sqrt{w_2^2 + \alpha L_2^2}} \sin(\alpha T - \psi).$$

Wenn  $2F$  eine Proportionalitätskonstante bedeutet, so ist die ponderomotorische Kraft zur Zeit  $T$ :

$$2F a_1^2 \frac{\alpha L}{\sqrt{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2}} \sin \alpha T \sin(\alpha T - \psi).$$

Die zur Beobachtung gelangende Abstoßung  $K$  ist durch den Mittelwert der ponderomotorischen Kräfte während einer halben Schwingungsdauer <sup>1)</sup> gegeben, d. h. es ist

$$\begin{aligned} K &= 2F a_1^2 \frac{\alpha L}{\sqrt{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2}} \cdot \frac{2}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \sin \alpha T \sin(\alpha T - \psi) dT \\ &= F a_1^2 \frac{\alpha L}{\sqrt{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2}} \cos \psi \quad \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

Nun folgt aus Gl. (13) des § 8:

$$\cos \psi = \frac{\alpha L_2}{\sqrt{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2}},$$

es wird somit  $K = F a_1^2 \alpha^2 L \frac{L_2}{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2}$ .

Von großem Interesse ist die Bestimmung der Stromstärke in dem abgestoßenen Ringe. Wir können dieselbe auf Grund der Gl. (11) des vorhergehenden Paragraphen vornehmen, welche

---

<sup>1)</sup> Oder auch durch den Mittelwert der ponderomotorischen Kräfte während einer ganzen Schwingungsdauer, da die Mittel der beiden Halbschwingungen einander gleich sind.

den Zusammenhang zwischen den Amplituden in dem primären und sekundären Stromkreis angibt. In Gl. (4), § 2, ist  $\frac{A}{w'}$  die Amplitude eines Wechselstromes, dessen effektive Stromstärke nach Gl. (6) desselben Paragraphen  $\frac{A}{w' \sqrt{2}}$  ist. Bezeichnen wir also die effektive Stromstärke in der Primärspule bei aufgesetztem Ring mit  $J_1$ , so ist die Amplitude dieses Stromes  $a_1 = J_1 \sqrt{2}$ . Die analogen Größen im Ring hängen in derselben Weise miteinander zusammen:  $a_2 = J_2 \sqrt{2}$ , so daß  $\frac{J_2}{J_1} = \frac{a_2}{a_1}$  oder  $J_2 = \frac{a_2}{a_1} J_1$ . Nun ist nach Gl. (11) des § 8:  $a_2 = a_1 \frac{\alpha L}{\sqrt{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2}}$ , womit zur Bestimmung von  $J_2$  die Gleichung

$$J_2 = \frac{\alpha L}{\sqrt{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2}} J_1 \dots \dots \dots (2)$$

resultiert. Ist  $w_2$  klein gegen  $\alpha L_2$ , so kann  $w_2^2$  gegen  $\alpha^2 L_2^2$  vernachlässigt werden, und man erhält

$$J_2 = \frac{L}{L_2} J_1.$$

Wäre gar keine Streuung der Kraftlinien vorhanden, so wäre  $L^2 = L_1 L_2$  und

$$J_2 = J_1 \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \dots \dots \dots (3)$$

Wir wollen die Berechnung von  $J_2$  in dem Kupferring, mit welchem v. Lang experimentierte, näherungsweise ausführen. Zunächst sind  $w_2$  und  $L_2$  zu bestimmen. Der Ring bestand, wie oben ausgeführt wurde, aus nahezu vier Windungen von 4 mm dickem Kupferdraht, die mit Zinn verlötet waren; der mittlere Durchmesser betrug 4,8 cm, das Gewicht des Ringes 67 g. Wir ersetzen diesen Ring durch einen Hohlzylinder aus Kupfer von gleichem Gewicht mit dem äußeren Durchmesser von 5,2 cm und dem inneren Durchmesser von 4,4 cm. Nimmt man das spezifische Gewicht des Kupfers = 8,9, so findet man als Höhe dieses Hohlzylinders 1,25 cm. Der Selbstinduktionskoeffizient  $L_2^0$  dieses

Leiters kann, wenn er durchweg von Luft umgeben ist, nach der Formel

$$L_2^0 = 4\pi q \left\{ \left( 1 + \frac{3m^2}{16q^2} \right) \log \text{nat} \frac{8q}{m} - \left( 2 + \frac{m^2}{16q^2} \right) \right\}$$

berechnet werden <sup>1)</sup>, worin  $q$  der mittlere Radius des Hohlzylinders und  $m$  der mittlere Abstand des Querschnittes von sich selbst ist.  $q$  ist in unserem Falle 2,4 cm. Für ein Rechteck vom Flächeninhalt  $q$  kann  $m$  annähernd  $= 0,2235 q$  gesetzt werden. Man findet hiermit  $L_2^0 = 59,375$  absolute Einheiten oder rund  $6,10^{-8}$  Henry. Da der Ring auf den Eisenkern aufgesteckt ist, ist sein Selbstinduktionskoeffizient  $L_2$  größer. Wir wollen nun annehmen, daß der Eisenkern die Selbstinduktion des Ringes in derselben Weise beeinflußt wie die Selbstinduktion der Primärspule. Dabei wollen wir voraussetzen, daß am Orte des Ringes der gesamte magnetische Kraftfluß durch den Eisenkern hindurchgeht; steigert also der Eisenkern den Kraftfluß in dem von ihm eingenommenen Raum auf den  $\mu$ fachen Wert, so wird die Selbstinduktion des Ringes  $L_2 = \mu L_2^0$ . Die gemachte Voraussetzung trifft hier zwar nicht vollständig zu (Durchmesser des Eisenkernes 3,5 cm, innerer Durchmesser des Hohlzylinders 4,4 cm), wir wollen sie aber beibehalten, da die Berechnung ohnehin nur eine approximative sein kann.

Den Widerstand  $w_2$  des Kupferringes setzen wir gleich dem Widerstand einer geraden Lamelle von der Länge  $2q\pi = 15,08$  cm und vom Querschnitt  $q$  des Ringes, der sich aus den oben mitgeteilten Daten  $= 0,6 \text{ cm}^2$  ergibt. Da der Widerstand eines Zentimeterwürfels von Kupfer rund  $\frac{1}{6} \cdot 10^{-5}$  Ohm beträgt, findet man  $w_2 = 4 \cdot 10^{-5}$  Ohm.

Die Periodenzahl des verwendeten Wechselstromes betrug 43,  $\alpha$  ist daher  $= 270,18 \text{ sec}^{-1}$ , und somit  $\alpha L_2^0 = 1,62 \cdot 10^{-5}$  Ohm. Diese Zahl ist noch mit  $\mu$  zu multiplizieren, um  $\alpha L_2$  zu erhalten.  $L_1$ , den Selbstinduktionskoeffizienten des Apparates, bestimmte v. Lang bei einer effektiven Stromstärke von 5 Amp. zu  $18,10^{-3}$  Henry. Nehmen wir an, daß sich sein Wert nicht mehr wesentlich ändert, wenn die Stromstärke weiter gesteigert

---

<sup>1)</sup> Max Wien, Wied. Ann. 53, 935 (1894). Die Formel gilt nur, falls der Skineffekt gleich Null ist. Diese Bedingung ist hier hinreichend genau erfüllt.

wird — was nach dem im § 2 gegebenen Beispiel zulässig ist —, so können wir mit dem angegebenen Werte von  $L_1$  rechnen. Den Selbstinduktionskoeffizienten der Spule ohne Eisenkern hat v. Lang nicht gemessen.

Um den Einfluß des Kernes zu ermitteln, sind wir daher auf die Rechnung angewiesen. Da wir uns nur mit einer beiläufigen Bestimmung begnügen wollen, so können wir die allerdings in Wahrheit durchaus nicht zutreffende Voraussetzung machen, daß wir auf jede Windungslage die für ein Solenoid, dessen Länge groß ist gegen seinen Querschnitt, geltenden Formeln anwenden dürfen. Wir können dann den Einfluß des Eisenkernes in der folgenden Weise annähernd ermitteln. Die Permeabilität des Kupferdrahtes und seiner Umspinnung ist merklich gleich 1. Die Feldstärke im Innern eines Solenoids von der Windungszahl  $n$  und der Länge  $l$ , das vom Strome  $i$  durchflossen ist, ist  $\frac{4\pi n i}{l}$ . Der Quer-

schnitt des Eisenkernes sei  $q_1$ . Der innere Querschnitt der ersten Windungslage ist gleich diesem Querschnitt zu setzen, wenn wir hier von der Dicke der Umspinnung absehen. Die inneren Querschnitte der übrigen Windungslagen seien  $q_2, q_3, \dots, q_6$ . Da alle Lagen gleiche Windungszahl und gleiche Länge haben, so ist die Feldstärke im Innern des Eisenkernes  $6 \cdot \frac{4\pi n i}{l}$ , welche die Kraft-

linienzahl  $6 \cdot \frac{4\pi n i}{l} \mu q_1$  im Eisenkern liefert. In dem Zwischenraum zwischen der Innenfläche der ersten und der Innenfläche der zweiten Windungslage wird die Feldstärke bloß durch die äußersten 5 Lagen erzeugt, beträgt also  $5 \cdot \frac{4\pi n i}{l}$  und liefert eine

Kraftlinienzahl  $5 \cdot \frac{4\pi n i}{l} (q_2 - q_1)$  in diesem Raum. Ebenso findet man die Kraftlinienzahl zwischen der Innenfläche der zweiten und der Innenfläche der dritten Windungslage, die nur von den äußersten 4 Lagen hervorgerufen wird, gleich  $4 \cdot \frac{4\pi n i}{l} (q_3 - q_2)$  usf.

Es umschließen somit

die erste Windungslage  $6 \frac{4\pi n i}{l} \mu q_1$ ,

die zweite Windungslage  $6 \frac{4 \pi n i}{l} \mu q_1 + 5 \frac{4 \pi n i}{l} (q_2 - q_1),$

die dritte Windungslage  $6 \frac{4 \pi n i}{l} \mu q_1 + 5 \frac{4 \pi n i}{l} (q_2 - q_1)$   
 $+ 4 \frac{4 \pi n i}{l} (q_3 - q_2),$

.....  
 die sechste Windungslage  $6 \frac{4 \pi n i}{l} \mu q_1 + 5 \frac{4 \pi n i}{l} (q_2 - q_1) + \dots$   
 $+ 2 \frac{4 \pi n i}{l} (q_5 - q_4) + 1 \cdot \frac{4 \pi n i}{l} (q_6 - q_5)$

**Kraftlinien.**

Die magnetische Energie ist gegeben durch den Ausdruck  $T = \frac{1}{2} \sum i N$ , wenn  $N$  die vom Strome  $i$  umschlungene Kraftlinienzahl ist. Haben wir ein Solenoid von  $n$  Windungen, die vom Strome  $i$  durchflossen werden, so umschlingt jede Windung alle Kraftlinien, wir haben also gewissermaßen  $n$  Ströme  $i$ , welche die Kraftlinien umschlingen, und es wird  $T = \frac{1}{2} i n N$ . Nach dieser Formel finden wir die von der ersten Windungslage herrührende magnetische Energie:

$$T_1 = \frac{1}{2} i^2 \frac{4 \pi n^2}{l} \cdot 6 \mu q_1,$$

die von der zweiten Windungslage herrührende:

$$T_2 = \frac{1}{2} i^2 \frac{4 \pi n^2}{l} [6 \mu q_1 + 5 (q_2 - q_1)],$$

die von der dritten Windungslage herrührende:

$$T_3 = \frac{1}{2} i^2 \frac{4 \pi n^2}{l} [6 \mu q_1 + 5 (q_2 - q_1) + 4 (q_3 - q_2)]$$

usw., und endlich die von der sechsten Windungslage herrührende:

$$T_6 = \frac{1}{2} i^2 \frac{4 \pi n^2}{l} [6 \mu q_1 + 5 (q_2 - q_1) + 4 (q_3 - q_2) + 3 (q_4 - q_3)$$

$$+ 2 (q_5 - q_4) + 1 (q_6 - q_5)].$$

Die gesamte magnetische Energie  $T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_6 = T$  wird demnach:

$$T = \frac{1}{2} i^2 \frac{4 \pi n^2}{l} [36 \mu q_1 + 25 (q_2 - q_1) + 16 (q_3 - q_2) + 9 (q_4 - q_3) + 4 (q_5 - q_4) + 1 (q_6 - q_5)],$$

oder, wenn die Radien der Querschnitte mit  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_6$  bezeichnet werden:

$$T = \frac{1}{2} i^2 \frac{4 \pi^2 n^2}{l} [36 r_1^2 \mu + 25 (r_2^2 - r_1^2) + 16 (r_3^2 - r_2^2) + 9 (r_4^2 - r_3^2) + 4 (r_5^2 - r_4^2) + 1 (r_6^2 - r_5^2)].$$

Die Drahtstärke betrug 1,5 mm. Setzen wir mit Berücksichtigung der Umspinnung den Durchmesser gleich 2 mm, so haben wir, da der Durchmesser des Eisenkernes 3,5 cm betrug,  $r_1 = 1,75$  cm,  $r_2 = 1,95$  cm,  $r_3 = 2,15$  cm,  $r_4 = 2,35$  cm,  $r_5 = 2,55$  cm,  $r_6 = 2,75$  cm. Die Windungszahl einer Lage war 26. Wir finden also  $l = 26 \cdot 0,2$  cm. Mit den angegebenen Zahlen ergibt sich:

$$T = \frac{1}{2} i^2 \frac{4 \cdot 26 \pi^2}{0,2} (110,25 \mu + 44,04).$$

Andererseits ist  $T = \frac{1}{2} i^2 L_1$ , wenn  $L_1$  der Selbstinduktionskoeffizient der Spule ist. Aus den beiden Ausdrücken für  $T$  folgt:

$$L_1 = 520 \pi^2 (110,25 \mu + 44,04).$$

$L_1$  wurde von v. Lang zu  $18 \cdot 10^{-3}$  Henry =  $18 \cdot 10^6$  cm bestimmt. Wir haben demnach zur Bestimmung von  $\mu$  die Gleichung

$$18 \cdot 10^6 = 520 \pi^2 (110,25 \mu + 44,04),$$

aus welcher  $\mu = 31,4$  folgt. Hiermit wird

$$\frac{\alpha L}{\sqrt{w_2^2 + \alpha^2 L_2^2}} = 97,44,$$

oder endlich nach Gl. (2), da  $J_1$  bei aufgesetztem Ring 10,5 Amp. betrug,  $J_2 = 1023$  Amp.

Die Berechnung ist, wie mehrfach hervorgehoben wurde, eine annähernde. Der berechnete Einfluß des Eisenkernes auf die Selbstinduktion wird aber von dem wirklichen nicht allzusehr abweichen<sup>1)</sup>. Wir dürfen also den berechneten Wert der Strom-

<sup>1)</sup> Zum Vergleich mögen die Daten einer ähnlichen Spule dienen. Dieselbe hatte einen Eisenkern von 30 mm Durchmesser, die Spule bestand aus 13 Lagen von je 19 Windungen 2 mm dicken Kupferdrahtes;

stärke so weit gelten lassen, daß er uns eine Vorstellung von der beträchtlichen Intensität des in dem abgestoßenen Ringe induzierten Stromes gibt. Der große Wert dieser Stromstärke zusammen mit der beträchtlichen Phasenverschiebung von  $J_2$  gegen  $J_1$ , worüber Näheres weiter unten, macht uns die Größe der Kraft verständlich, mit welcher der Ring abgestoßen wird: um den Ring bis zur Spule herabzudrücken, war bei dem vorstehend berechneten Versuche eine Kraft von 0,6 kg erforderlich.

Der großen Stromstärke entspricht eine starke Wärmeentwicklung im Ringe. Die Beobachtung entspricht dieser Schlußfolgerung. v. Lang teilt in seiner Abhandlung die folgende von Lecher ausgeführte Bestimmung mit. Lechers Spule bestand aus  $8 \times 59$  Windungen etwa 2,2 mm dicken Kupferdrahtes, der Eisenkern hatte 4 cm Durchmesser. Über denselben wurde ein Kupfering von 25 mm<sup>2</sup> Querschnitt, 32 g schwer, gelegt. Ging durch die Spule ein Wechselstrom (der Innsbrucker Zentrale) von 11 Amp. effektiv, so wurde der Ring 19 cm hoch gehoben und erhitze sich in einer Minute so weit, daß er im Kalorimeter 345 g-Kal. abgab. Das entspricht einer Stromstärke von beiläufig 500 Amp.

Die starke Erwärmung, welche bei derartigen Versuchen in dem abgestoßenen Ringe eintritt, kann man bequem durch einen hohlen, mit Wasser gefüllten Ring nachweisen. Das Wasser gerät nach kurzer Zeit ins Sieden.

Für die Größe der Abstoßung ist nach Gl. (1) auch die Größe der Phasenverschiebung zwischen dem Strome im Ring

---

die Umspinnung war 0,33 mm dick. Die innerste Lage lag nicht unmittelbar an dem Eisenkern, sondern war von ihm durch einen Zylinder aus Pappe von 1,5 mm Wandstärke getrennt. Diese Spule hatte ohne Eisenkern einen Selbstinduktionskoeffizienten von 0,0029 Henry, mit Eisenkern bei 5 Amp. effektiver Stromstärke 0,0094 Henry. Der Eisenkern vergrößerte also den Selbstinduktionskoeffizienten bloß um etwa das Dreifache. Rechnet man für die Spule v. Langs  $L_1^0$  nach der Formel  $L_1^0 = 520 \pi^2 (110,25 \cdot 1 + 44,04)$ , so findet man  $L_1^0$  rund  $8 \cdot 10^{-4}$  Henry, also etwa 22mal kleiner als den Selbstinduktionskoeffizienten der Spule mit Eisenkern. Nun liegen die Verhältnisse bei dieser Spule viel günstiger. Nichtsdestoweniger ist der Quotient der Selbstinduktionen mit und ohne Eisenkern so viel größer, daß der oben errechnete Wert von  $\mu$  eher zu groß als zu klein ist.

und dem Primärstrome maßgebend. Die Phasendifferenz zwischen diesen beiden Strömen ist durch Gl. (13) des § 8 bestimmt:

$$\operatorname{tg} \psi = - \frac{w_2}{\alpha L_2}.$$

Man findet nach dieser Gleichung für unseren Kupferring

$$\operatorname{tg} \psi = - \frac{4 \cdot 10^{-5}}{50,9 \cdot 10^{-5}} = \frac{40}{509} \text{ oder } \psi = 175^\circ 30' 34''.$$

Der Strom in einem Quecksilberringe von gleichen Dimensionen würde, da sein Widerstand etwa 56 mal so groß ist wie der des Kupfer- ringes, eine Phasenverschiebung  $\psi$  erfahren, welche bestimmt ist durch  $\operatorname{tg} \psi = - \frac{56 \cdot 40}{509}$ ; man findet hieraus  $\psi = 102^\circ 48' 7''$ , einen Wert, der schon nahe an  $90^\circ$  liegt; die Abstoßung wird dementsprechend schwächer ausfallen. Blei hat einen spezifischen Widerstand, der etwa 12,35 mal so groß ist als der des Kupfers. Für einen Bleiring von gleichen Dimensionen wie der Kupferring wird  $\operatorname{tg} \psi = - \frac{12,35 \cdot 40}{509}$  und  $\psi = 135^\circ 51' 20''$ , man wird also eine stärkere Abstoßung erhalten als bei dem Quecksilberring. Bestleitende Schwefelsäure hat einen spezifischen Widerstand, der  $\frac{10^6}{69,7}$  mal so groß ist als der des Quecksilbers. Bei einem Schwefel- säurering von gleichen Dimensionen wie jenen des Kupfer- ringes ist

$$\operatorname{tg} \psi = - \frac{10^6 \cdot 56 \cdot 40}{69,7 \cdot 509}$$

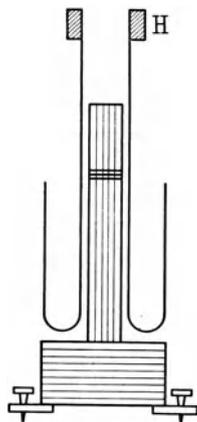
und  $\psi$  sehr nahe gleich  $90^\circ$ , die Abstoßung wird daher nahe gleich Null. Auch die Stromstärke  $J_2$  ist in diesem Falle sehr klein. Hier ist  $\alpha^2 L_2^2$  zu vernachlässigen gegen  $w_2^2$  und Gl. (2) geht über in  $J_2 = \frac{\alpha L}{w_2} J_1$ . Man findet  $J_2$  bei- läufig gleich  $2 \cdot 10^{-6}$  Amp.

Um das Verhalten flüssiger Leiter auch experimentell zu prüfen, ließ der Verfasser ein Glasgefäß, wie es in Fig. 17 dar- gestellt ist, anfertigen. Der äußere Durchmesser des inneren Glaszylinders betrug 39 mm, der innere Durchmesser des äußeren Glaszylinders 67 mm. An dem oberen Ende des inneren Glas- zylinders ist ein Holzring  $H$  aufgekittet, welcher drei Ösen trägt, in welchen die Aufhängungsfäden befestigt werden. Die Primär- spule, mit welcher die folgenden Versuche ausgeführt wurden,

bestand aus 12 Lagen von je 16 Windungen 1,5 mm dicken Kupferdrahtes und war mit drei Stellschrauben versehen. Das Glasgefäß wurde an einen dünnen Messingdraht gehängt, der über eine fixe Rolle lief. Das andere Ende des Drahtes trägt eine Wagschale, das Eigengewicht des Glasgefäßes und der in dasselbe eingebrachten Flüssigkeit wird durch Gewichte kompensiert. Die Rolle ist aus Aluminium und hat eine Stahlachse mit Spitzenlagerung. Die Einstellung auf Gleichgewicht ist auf 0,1 g möglich. Die Versuche wurden mit zwei Phasen des Prager Drehstromes ausgeführt, der 48 Perioden hat. Vor Beginn des Versuches wurde das Glasgefäß mit dem oberen Rande der Primärspule in Berührung gebracht. Ein Vorschaltwiderstand gestattet, die Stromstärke in der Primärspule zu variieren.

Erster Versuch. In das Gefäß wurden 67 g Quecksilber gegossen, welches in dem Gefäße einen Ring bildet, der an der oberen Fläche etwa 7 mm breit ist. Eine Stromstärke von 10 Amp. in der primären Spule gibt eine kaum merkliche Abstoßung, 15 Amp. führen eine Hebung des Gefäßes herbei. Die abstoßende Kraft in dem letzteren Falle wird durch Gewichte, die auf den Holzring aufgelegt werden, kompensiert und erweist sich gleich 0,4 g. Der gleiche Versuch mit 100,5 g Quecksilber ergibt bereits bei 10 Amp. deutliche Abstoßung des Gefäßes; bei 15 Amp. beträgt die abstoßende Kraft 1,3 g. Mit 207 g Quecksilber erhält man schon bei 7 Amp. Abstoßung; bei 15 Amp. ist dieselbe gleich 2,5 g. Bei 318 g Quecksilber und 15 Amp. beträgt die abstoßende Kraft 6 g.

Zweiter Versuch. 47 g bestleitender Schwefelsäure, deren Niveau sich etwa 23 mm über der tiefsten Stelle des Gefäßes befand, ergab keine Spur von Abstoßung bei 15 Amp. primärer Stromstärke. Ebensowenig konnte eine solche wahrgenommen werden, als das Gefäß 65 mm hoch mit 152 g solcher Schwefelsäure gefüllt wurde. Der Querschnitt des Schwefelsäureringes hatte in letzterem Falle beiläufig 9 cm<sup>2</sup>. Ein Prisma aus bestleitender Schwefelsäure mit 9 cm<sup>2</sup> Querschnitt hat denselben Leitungswiderstand wie ein gleich langes Kupferprisma mit einem Querschnitt von 0,001 14 mm<sup>2</sup> oder wie ein gleich langer Kupferdraht



von etwa 0,017 mm Radius. Bei einem Ring aus solchem Kupferdraht, dessen Durchmesser dem mittleren Durchmesser des Schwefelsäureringes gleich ist, würde man auch keine merkliche Abstoßung erhalten. Es wurde zum Vergleich ein Ring mit dem Durchmesser von 5,6 cm aus 0,7 mm dickem Kupferdraht hergestellt, der ungefähr 0,5 g wog. 15 Amp. im Primärkreis gaben noch keine Kraft, welche imstande gewesen wäre, diesen Ring zu heben. Bei dem Kupfering gleichen Widerstandes liegen aber die Verhältnisse günstiger als bei dem Schwefelsäurering, da die Selbstinduktion des letzteren viel größer ist als die des Kupferinges, daher die Phasenverschiebung des Stromes im Ringe gegenüber dem Primärstrom bei einem Schwefelsäurering kleiner ist als bei einem Kupfering gleichen Widerstandes.

Dritter Versuch. Es wurden endlich in das Gefäß 62 g Woodscher Legierung eingegossen. Nachdem der so entstandene Ring auf Zimmertemperatur abgekühlt war, wurde bei einer Stromstärke von 18 Amp. im Primärkreis eine abstoßende Kraft von 4,5 g gemessen. Die induzierten Ströme brachten den Ring allmählich zum Schmelzen. Als der Ring geschmolzen war, betrug die abstoßende Kraft nur mehr 2 g, während die Stromstärke im Primärkreis bei gleichem Vorschaltwiderstand etwas sank. Dieser Versuch zeigt deutlich den Einfluß des Widerstandes des Ringes auf die abstoßende Kraft, denn hier ist die Selbstinduktion in beiden Fällen nahe gleich und nur der Widerstand geändert. Nach den Messungen von C. L. Weber <sup>1)</sup> beträgt die Leitfähigkeit (reziproker Wert des in Ohm ausgedrückten Widerstandes von einem Zentimeterwürfel der Substanz) der Woodschen Legierung bei 20° etwa  $1,85 \cdot 10^4$ , der flüssigen Legierung bei 75°  $1,18 \cdot 10^4$ . Die Abnahme der Leitfähigkeit um ein Drittel ruft bereits eine Abnahme der Abstoßung um mehr als die Hälfte hervor.

Bringt man zwei Ringe über den Eisenkern, so entstehen in den beiden Ringen Ströme von gleicher Phase, zwischen welchen infolgedessen Anziehung besteht. Man kann auf diese Weise einen Ring, der durch die Abstoßung der Primärspule nur wenig gehoben wird, durch Näherung eines zweiten Ringes weiter emporheben.

v. Lang hat seinen Apparat auch als Transformatormodell benutzt. Es wurde eine Spule aus 0,6 mm dickem Kupferdraht

---

<sup>1)</sup> Wied. Ann. 27, 145 (1886).

in 12 Lagen gewickelt, welche ohne weitere Fassung nur durch Bänder und Siegellack zusammengehalten wurde. Ihre Höhe betrug 4,8 cm, ihr Widerstand 12 Ohm, der innere Durchmesser war größer als der des Eisenkernes der Primärspule, und zwar betrug er 4,6 cm. Setzt man diese Spule auf die Primärspule auf, so beobachtet man wieder Abstoßung, sobald man die Drahtenden der Spule in Berührung bringt. Eine Glühlampe von 50 Volt und 12 Ohm (im kalten Zustande), an die Spule angeschlossen, leuchtet, wenn durch die primäre Spule ein Strom von 7 Amp. bei einer Klemmenspannung von 32 Volt hindurchgeht. Schiebt man nun zwischen Spule und Eisenkern einen entsprechenden Hohlzylinder aus Kupfer, so hört das Leuchten der Lampe auf. Der Kupferzylinder war 7 cm hoch und wog 170 g. Die primäre Stromstärke stieg hierbei auf 8 Amp. Die Schirmwirkung des Kupferzylinders ist durch die in ihm induzierten kräftigen Ströme bedingt, die eine Phasendifferenz von nahe  $180^\circ$  gegen den Strom in der Primärspule haben und aus diesem Grunde die Wirkung des primären Stromes aufheben. Diese Erscheinung benutzt man seit langem zur Schwächung der induzierten Ströme in Induktionsapparaten, indem man einen Metallzylinder über die primäre Spule dieser Apparate schiebt. Der Kupferzylinder wird von der Primärspule kräftig abgestoßen. Man muß ihn daher, um das Maximum der Schirmwirkung zu erzielen und die Lampe zum gänzlichen Erlöschen zu bringen, bis zur Primärspule herabdrücken.

El. Thomson experimentierte mit einer Spule, deren Eisenkern nicht über die Spule hervorragte. Die Induktion demonstrierte er u. a. mit einer Glühlampe, die an die Klemmen einer Drahtrolle angeschlossen war. Drahtrolle und Lampe befanden sich im Innern einer zum Teil mit Wasser gefüllten Flasche. Stellt man die Flasche auf die Spule, so wird die Drahtrolle mit der Lampe etwas gehoben und die Lampe leuchtet. Dies beweist, daß die Abstoßung durch Ströme hervorgerufen wird, die in der Drahtrolle und Lampe fließen. Hebt man die Flasche, so brennt die Lampe dunkler. Man kann diesen Thomsonschen Versuch auch mit dem v. Langsches Apparate ausführen, indem man ihn umkehrt, so daß der hervorstehende Teil des Eisenkernes nach abwärts gerichtet ist. Bei dieser Anordnung kann die Schirmwirkung in der Weise demonstriert werden, daß eine dicke Kupfer-

platte zwischen Primärspule und sekundäre Drahtrolle geschoben wird. Nachdem eine Platte aus isolierendem Material keine Schirmwirkung zeigt, ist bewiesen, daß die Schirmwirkung durch Ströme bedingt ist, die in der Kupferplatte induziert werden.

Die in einer sekundären Drahtrolle induzierten Ströme können auch benutzt werden, um ein Stück Draht von größerem spezifischen Widerstand zu schmelzen oder zwei Eisenstifte, die mit den Enden der Drahtrolle verbunden sind, durch Aneinanderpressen der freien Enden zusammenschweißen. Diesen Versuch führt man am bequemsten aus, indem man einige Windungen oder auch nur einen offenen Ring aus dickerem Eisendraht herstellt und die Enden bei einwirkender Primärspule aneinanderdrückt.

### § 10. Der sekundäre Stromkreis enthält eine Kapazität. v. Langs Methode der Bestimmung der Kapazität mit der Wage.

Ähnlich wie im § 8 der Fall eines geschlossenen Stromkreises untersucht wurde, auf welchen ein zweiter von Wechselstrom durchflossener Stromkreis induzierend einwirkt, kann auch die Induktion in einem offenen, eine Kapazität enthaltenden Stromkreis berechnet werden. Im folgenden wird auf die vollständige Durchrechnung des Problems, bei welcher wie im § 8 die Rückwirkung des induzierten Kreises auf den induzierenden ersichtlich würde, verzichtet und nur die Bestimmung der zwischen den beiden Strömen auftretenden ponderomotorischen Kraft ins Auge gefaßt. Zu diesem Zwecke gehen wir nicht von der im induzierenden (primären) Kreis wirkenden elektromotorischen Kraft, sondern von der Stromstärke aus, welche in diesem Kreise während der Koppelung mit dem sekundären, die Kapazität enthaltenden Stromkreis besteht. Ihr Wert sei  $i_1 = J \sin at$ . Die Stromstärke im sekundären Kreise sei  $i_2$ , der Widerstand und die Selbstinduktion dieses Kreises mögen mit  $w_2$  und  $L_2$ , die Kapazität mit  $C$  und der Koeffizient der gegenseitigen Induktion der beiden Kreise mit  $L$  bezeichnet werden. Der Strom  $i_1$  liefert dann im sekundären Kreise eine elektromotorische Kraft  $V = -L \frac{di_1}{dt}$ . Im § 7 wurde die Gleichung (6) abgeleitet,

welche den Stromverlauf in einem eine Kapazität enthaltenden Stromkreise bestimmt, wenn in demselben eine elektromotorische Kraft  $V$  wirkt. Durch Einsetzung des angegebenen Wertes von  $V$  und der hier geltenden Bezeichnungen für die Stromstärke und die Konstanten des Stromkreises erhalten wir die Gleichung für unseren sekundären Kreis:

$$L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + w_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C} = -L \frac{d^2 i_1}{dt^2},$$

oder mit Rücksicht auf den Wert von  $i_1$ :

$$L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + w_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C} = J \alpha^2 L \sin \alpha t \quad \dots (1)$$

Das Integral derselben lautet:

$$i_2 = a \sin(\alpha t - \varphi) \quad \dots \dots \dots (2)$$

Man findet in bekannter Weise:

$$\alpha = \frac{\alpha^2 CL}{\sqrt{(1 - \alpha^2 CL_2)^2 + \alpha^2 w_2^2 C^2}} J \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\alpha w_2 C}{1 - \alpha^2 CL_2} \quad \dots \dots \dots (4)$$

Die Größe der Phasenverschiebung  $\varphi$  entscheidet darüber, ob die ponderomotorische Kraft zwischen den beiden Stromkreisen Anziehung oder Abstoßung ist. Ist  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , so besteht Anziehung, ist  $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ , so besteht Abstoßung. (Der letztere

Fall war, wie wir gesehen haben, bei der Einwirkung auf einen geschlossenen Stromkreis vorhanden.) Man überzeugt sich leicht, daß im vorliegenden Falle bei der Verwendung von technischem Wechselstrom zur Speisung der Primärspule Anziehung auftritt.

Wenn die Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen Null und  $\frac{\pi}{2}$  liegen soll, so muß  $\operatorname{tg} \varphi$  positiv oder  $\alpha^2 CL_2 < 1$  sein. Nun ist die Eigenschwingungsdauer  $\tau_2$  des sekundären Stromkreises nach § 3, Gl. (4) gleich  $2\pi\sqrt{CL_2}$ , oder  $CL_2 = \frac{\tau_2^2}{4\pi^2}$ . Andererseits ist  $\alpha = \frac{2\pi}{\tau}$ , wenn  $\tau$  die Schwingungsdauer des verwendeten Wechsel-

stromes ist. Wir haben also  $\alpha^2 CL_2 = \left(\frac{\tau_2}{\tau}\right)^2$ , und dies ist in der Tat im allgemeinen kleiner als 1, denn man müßte eine besonders große Kapazität oder Selbstinduktion im Sekundärkreise verwenden, um eine Eigenschwingungsdauer desselben zu erhalten, welche größer wäre als die des technischen Wechselstromes.

Es erübrigt nun noch die Ableitung des Ausdruckes, durch welche die Größe der auftretenden Anziehung bestimmt ist. Die ponderomotorische Kraft zwischen den beiden Stromkreisen ist in jedem Moment proportional dem Produkte  $i_1 i_2$ . Die zur Beobachtung gelangende Anziehung  $G$  ist durch den Mittelwert der ponderomotorischen Kraft während einer halben Schwingungsdauer gegeben <sup>1)</sup>, d. h. es ist, wenn  $2F$  eine Proportionalitätskonstante bedeutet:

$$G = 2F \cdot \frac{2}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} i_1 i_2 dt = 2F \cdot \frac{2}{\tau} \frac{J^2 \alpha^2 CL}{\sqrt{(1 - \alpha^2 CL_2)^2 + \alpha^2 w_2^2 C^2}} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \sin \alpha t \sin(\alpha t - \varphi) dt = F \frac{J^2 \alpha^2 CL}{\sqrt{(1 - \alpha^2 CL_2)^2 + \alpha^2 w_2^2 C^2}} \cos \varphi.$$

Aus Gl. (4) folgt:

$$\cos \varphi = \frac{1 - \alpha^2 CL_2}{\sqrt{(1 - \alpha^2 CL_2)^2 + \alpha^2 w_2^2 C^2}}.$$

Hiermit wird, wenn wir  $FL = M$  setzen:

$$G = MJ^2 \alpha^2 C \frac{1 - \alpha^2 CL_2}{1 - 2\alpha^2 CL_2 + (w_2^2 + \alpha^2 L_2^2) \alpha^2 C^2} \cdot \cdot \cdot (5)$$

Die Anziehung, welche zwischen dem primären und sekundären, die Kapazität enthaltenden Kreise auftritt, ist von v. Lang zur Bestimmung der Kapazität mit der Wage benutzt worden <sup>2)</sup>. Die Sekundärspule (Spule II) wurde an dem Arm einer Wage so aufgehängt, daß ihre Windungsebenen horizontal liegen. Darunter kam die fest aufgestellte primäre Spule gleichfalls mit horizon-

<sup>1)</sup> Siehe die Anm. auf S. 57.

<sup>2)</sup> Bestimmung der Kapazität mit der Wage. Wien. Sitz.-Ber. d. K. Akad. d. Wissensch., math.-naturw. Kl. 106 [IIa], 290—294, April 1897.

taler Lage der Windungsebenen. Spule II wurde, um ein möglichst geringes Gewicht zu erzielen, auf einen Kern von Pappe gewickelt und dazu mit Seide umspinnener Draht verwendet (Gesamtgewicht 1090 g). Die fixe Spule I war auf Holz gewickelt und bestand aus Draht, der doppelt mit Baumwolle umspinnen war. Die Dimensionen der beiden Spulen sind aus der folgenden Tabelle zu entnehmen.

|                               | Aufgehängte Spule | Fixe Spule |
|-------------------------------|-------------------|------------|
| Äußerer Durchmesser . . . . . | 24 cm             | 21 cm      |
| Innerer " . . . . .           | 15,5 "            | 18 "       |
| Höhe . . . . .                | 3,5 "             | 2 "        |
| Drahtdurchmesser . . . . .    | 0,1 "             | 0,08 "     |
| Windungszahl . . . . .        | 500               | 267        |
| Widerstand . . . . .          | 5,56 Ohm          | 7,05 Ohm   |

Von den Enden der beweglichen Spule führten zwei Spiralen aus sehr dünnem Kupferdraht zu einem Stativ mit einem Paar doppelter Klemmen, in welche dann auch die zu den Kondensatoren führenden Drähte eingespannt wurden. Zu den Versuchen wurden zwei Siemenssche Kondensatoren von je 0,5 bis 5 Mikrofarad und ein selbstverfertigter Kondensator verwendet, dessen Kapazität im nachfolgenden mit  $X$  bezeichnet ist. Die Messungen der Anziehung wurden mit einer Standwaage für Vorlesungszwecke ausgeführt, die bei einer einseitigen Belastung von 1 kg nur 1 bis 3 cg erkennen ließ. Die Kondensatoren kamen teils einzeln, teils parallel geschaltet in Verwendung und gaben bei einer effektiven Stromstärke von 1,4 Amp. in der fixen Spule im Mittel aus 3 bis 5 Beobachtungen folgende zusammengehörige Werte von  $C$  und  $G$ :

|             |             |               |
|-------------|-------------|---------------|
| 1. $C = 5$  | Mikrofarad, | $G = 0,482$ g |
| 2. $X$      | "           | 0,507 "       |
| 3. 10       | "           | 0,990 "       |
| 4. $5 + X$  | "           | 1,020 "       |
| 5. $10 + X$ | "           | 1,550 "       |

Es mögen alle Größen im elektromagnetischen Maß gemessen werden.  $C$  ist bei allen Versuchen klein (einige Mikrofarad), wir

können daher im Ausdruck (5) zweite und höhere Potenzen dieser Größe vernachlässigen, wodurch derselbe übergeht in

$$G = MJ^2\alpha^2 C(1 + \alpha^2 CL_2) \dots \dots \dots (6)$$

wofür wir kurz

$$G = PC(1 + \beta C) \dots \dots \dots (7)$$

setzen. In der letzten Gleichung ist, da  $C$  in Mikrofarad ausgedrückt werden soll,

$$\beta = \alpha^2 L_2 \cdot 10^{-6} \dots \dots \dots (8)$$

Hiernach läßt sich der Wert von  $\beta$  berechnen, wenn  $\alpha$  und  $L_2$  bekannt sind. Der von v. Lang verwendete Wechselstrom führte rund 5000 Polwechsel in der Minute aus,  $\alpha L_2$  ergab sich gleich 9,1. Aus diesen Daten berechnet man nach (8)  $\beta = 0,00241$ . Die Berechnung der Beobachtungen nach der Näherungsformel (7) kann allerdings einen Wert für  $\beta$  ergeben, der von dem nach (8) berechneten möglicherweise sehr abweicht. Man wird darum  $\beta$  aus Beobachtungen mit einer bekannten Kapazität bestimmen und den so gefundenen Wert zur Bestimmung unbekannter Kapazitäten benutzen.

Man erhält auf diese Weise aus der ersten und dritten Beobachtung:

$$G = 0,0938 C(1 + 0,00554 C) \dots \dots \dots (9)$$

und man sieht, daß der nur aus zwei Daten bestimmte Wert  $\beta = 0,00554$  wenigstens der Größenordnung nach mit dem theoretischen  $\beta = 0,00241$  übereinstimmt.

Mit Hilfe der Gl. (9) findet man aus den gemessenen Anziehungen  $G$  der zweiten, vierten und fünften Beobachtung:

$$\begin{aligned} X &= 5,25 \\ X &= 10,29 - 5 = 5,29 \\ X &= 15,26 - 10 = 5,26, \end{aligned}$$

im Mittel  $X = 5,27$  Mikrofarad. Hiermit ist die unbekannte Kapazität  $X$  mit einer Genauigkeit bestimmt, welche 1 Proz. des gefundenen Wertes bei weitem übersteigt.

Hätte man nur eine einzige Vergleichskapazität  $K$  zur Verfügung, so könnte man die Werte von  $G$  bei Einschaltung von

$K$ ,  $X$  und  $K + X$  bestimmen. Sind diese Werte etwa  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , so erhält man durch Anwendung der Gl. (7):

$$X = K \frac{b + c - a}{c + a - b}.$$

Mit Hilfe dieser Formel findet man z. B. aus den Beobachtungen 1, 2, 4 sowohl als auch aus den Beobachtungen 3, 2, 5 für  $X$  den Wert 5,25 Mikrofarad.

Bei weiteren Messungen wurde der Kondensator  $X$  mit den anderen in Reihe geschaltet und die beobachtete Anziehung mit der berechneten verglichen. Man fand im Mittel:

|                |            |                |          |           |         |
|----------------|------------|----------------|----------|-----------|---------|
| 10/ $X$ = 3,45 | Mikrofarad | $G$ beobachtet | 0,320 g, | berechnet | 0,330 g |
| 5/ $X$ = 2,57  | "          | "              | 0,237 "  | "         | 0,245 " |

Die Berechnung dieser Beobachtungen wurde nach Gl. (9) mit dem früher gefundenen Wert  $X = 5,27$  Mikrofarad ausgeführt. Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung ist ziemlich befriedigend.

Einige wenige Versuche wurden auch bei höheren Stromstärken ausgeführt, um zu sehen, ob die Anziehungen entsprechend der Gl. (5) wirklich dem Quadrate der Stromstärke proportional sind. Es wurde gefunden:

|              |              |                |         |           |        |
|--------------|--------------|----------------|---------|-----------|--------|
| bei 2,1 Amp. | 5 Mikrofarad | $G$ beobachtet | 1,15 g, | berechnet | 1,08 g |
|              | 10           | "              | 1,88 "  | "         | 1,93 " |
| bei 2,8 "    | 5            | "              | 2,46 "  | "         | 2,23 " |
|              | 10           | "              | 3,78 "  | "         | 3,96 " |

Die nicht allzu großen Abweichungen zwischen Beobachtung und Rechnung sind auf Ungenauigkeit des Amperemeters, das nur ein für Vorlesungszwecke bestimmtes Instrument war, und auf den Umstand zurückzuführen, daß sich bei höheren Stromstärken die Erwärmung der Drähte bereits störend fühlbar macht.

Analoge Versuche nach der vorstehend geschilderten, von v. Lang herrührenden Methode unternahm W. Peukert <sup>1)</sup>. L. Heymann benutzte die Methode zur absoluten Bestimmung der Kapazität <sup>2)</sup>. Dies ist ohne weiteres möglich, indem man auf die Bedeutung der Proportionalitätskonstante  $F$  eingeht. Das

<sup>1)</sup> Elektrotechn. Zeitschr. 1898.

<sup>2)</sup> Absolute Messung der Kapazität eines elektrischen Kondensators mit der Wage. Züricher Inauguraldissertation 1899.

elektrodynamische Potential des Systems der beiden Spulen ist  $p = -L \frac{i_1 i_2}{2}$ , die ponderomotorische Kraft in der Richtung ihrer gemeinsamen Achse  $a$  daher

$$G = -\frac{\delta p}{\delta a} = 1/2 \frac{\delta L}{\delta a} \cdot i_1 i_2,$$

wenn  $i_1$  und  $i_2$  Gleichströme sind, und

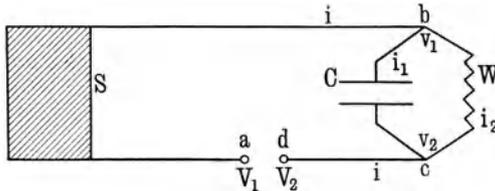
$$G = 1/2 \frac{\delta L}{\delta a} \cdot \frac{2}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} i_1 i_2 dt,$$

wenn  $i_1$  und  $i_2$  Wechselströme von der Periode  $\tau$  sind. Es ist demnach  $F = 1/4 \frac{\delta L}{\delta a} \cdot L$  kann aus den charakteristischen Größen der beiden Spulen und ihrer Entfernung berechnet werden. Heymann untersuchte auch den Einfluß, welchen die Form des verwendeten Wechselstromes auf die Messungen ausübt.

### § 11. Bestimmung der Selbstinduktion mit der Wage nach W. Peukert.

Ähnlich wie in der im vorigen Paragraphen geschilderten Methode die ponderomotorischen Kräfte zur Messung von Kapazitäten benutzt wurden, können sie auch zur Messung von Selbstinduktionen herangezogen werden. Eine diesbezügliche Methode,

Fig. 18.



die wir jetzt darstellen wollen, wurde von W. Peukert gegeben<sup>1)</sup>. Ein Rechenfehler Peukerts wurde von H. Zipp berichtigt<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Neues Verfahren zur Bestimmung von Selbstinduktionskoeffizienten. Elektrotechn. Zeitschr. 26, 922, 1087 (1905).

<sup>2)</sup> Zur Bestimmung der Selbstinduktionskoeffizienten durch Wägung. Ebenda, S. 1087 (1905).

Wir betrachten folgende Anordnung (Fig. 18). Eine Spule  $S$  mit der Selbstinduktion  $L$  liegt zwischen den Punkten  $a$  und  $b$ . Der Widerstand der ganzen Strombahn zwischen diesen Punkten ist  $w'$ , die Stromstärke in derselben  $i$ . Zwischen  $b$  und  $c$  liegt einerseits ein induktionsfreier Widerstand  $W$ , die Stromstärke in diesem Zweige heiße  $i_2$ ; andererseits eine Kapazität  $C$ , der Widerstand und die Selbstinduktion der Zuleitungen zur Kapazität von  $b$  bzw. nach  $c$  seien verschwindend klein, die Stromstärke in denselben  $i_1$ . Das induktionslose Leiterstück  $cd$  habe den Widerstand  $w''$ , die Stromstärke in demselben sei  $i'$ . Die Potentiale der Punkte  $a$  und  $d$  seien  $V_1$  und  $V_2$ , es sei  $V_1 > V_2$  und  $V_1 - V_2 = V$ . Punkt  $b$  nimmt ein Potential  $v_1$ , Punkt  $c$  ein Potential  $v_2$  an, und es sei  $v_1 - v_2 = v$ . Für den Punkt  $b$  gilt  $i = i_1 + i_2$ , für den Punkt  $c$  analog  $i_1 + i_2 = i'$ , es ist somit  $i' = i$ . Wir haben nun zunächst folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{für die Strombahn } a \text{ bis } b: & L \frac{di}{dt} + w'i = V_1 - v_1, \\ \text{„ „ „ } c \text{ „ } d: & w''i = v_2 - V_2; \end{aligned}$$

die Addition derselben liefert:

$$L \frac{di}{dt} + (w' + w'')i = V_1 - v_1 + v_2 - V_2 = V - v,$$

oder, wenn wir  $w' + w'' = w$  setzen:

$$L \frac{di}{dt} + wi = V - v \quad . . . . . (1)$$

$v_1$  und  $v_2$  sind, da der Widerstand der Zuleitungen als unendlich klein angenommen wird, auch die Potentiale der Kondensatorbelegungen. Ist  $e$  die Ladung des Kondensators, so gilt daher:

$$\frac{e}{C} = v_1 - v_2 = v.$$

Fließt nun von  $b$  ein Strom  $i_1$  zum Kondensator, so fhrt er ihm in der Zeit die Elektrizitätsmenge  $de = i_1 dt$  zu. Da  $e = Cv$ ,  $de = Cdv$ , folgt:

$$i_1 = C \frac{dv}{dt} \quad . . . . . (2)$$

Endlich gilt für den Zweig, welcher den induktionsfreien Widerstand  $W$  enthält,

$$i_2 = \frac{v}{W} \quad \dots \dots \dots (3)$$

Hierzu tritt noch die Gleichung

$$i_1 + i_2 = i \quad \dots \dots \dots (4)$$

Die Gleichungen (1) bis (4) bestimmen den Stromverlauf in der gegebenen Anordnung. Wir erhalten aus (2) und (3) mit Rücksicht auf (4):

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{WC} = \frac{i}{C} \quad \dots \dots \dots (5)$$

Nun folgt aus (1):

$$v = V - L \frac{di}{dt} - wi;$$

dies in (5) eingesetzt, führt zu der Gleichung:

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + \left(w + \frac{L}{WC}\right) \frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{C} + \frac{w}{WC}\right) i = \frac{dV}{dt} + \frac{V}{WC}$$

oder:

$$WCL \frac{d^2i}{dt^2} + (wWC + L) \frac{di}{dt} + (W + w)i = WC \frac{dV}{dt} + V \quad (6)$$

Nun sei  $V = A \sin \alpha t$ , Gl. (6) geht dann über in

$$WCL \frac{d^2i}{dt^2} + (wWC + L) \frac{di}{dt} + (W + w)i = A \alpha WC \cos \alpha t + A \sin \alpha t;$$

ihre Lösung lautet:

$$i = J \sin(\alpha t - \varphi).$$

Man findet durch Substitution dieses Ausdruckes in die vorhergehende Gleichung:

$$J[\alpha(wWC + L) \sin \varphi + (W + w - \alpha^2 WCL) \cos \varphi] = A$$

$$J[\alpha(wWC + L) \cos \varphi - (W + w - \alpha^2 WCL) \sin \varphi] = A \alpha WC,$$

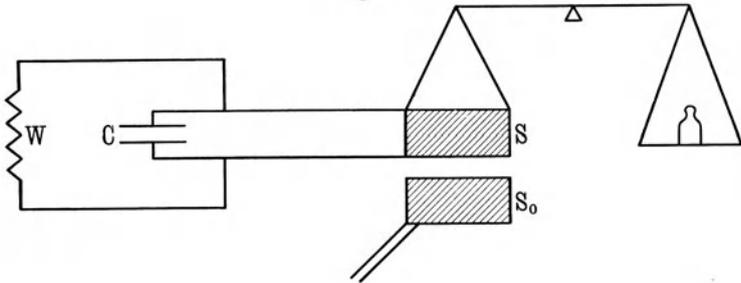
und aus diesen beiden Gleichungen:

$$J^2 = \frac{A^2(1 + \alpha^2 W^2 C^2)}{(W + w)^2 - 2\alpha^2 W^2 CL + \alpha^2 w^2 W^2 C^2 + \alpha^2 L^2(1 + \alpha^2 W^2 C^2)} \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\alpha L - \frac{\alpha W^2 C}{1 + \alpha^2 W^2 C^2}}{w + \frac{W}{1 + \alpha^2 W^2 C^2}} \dots \dots \dots (8)$$

Peukert macht nun die folgende in Fig. 19 skizzierte Anordnung. Die Spule  $S$  wird an eine Wage gehängt und durch sehr dünne Drähte mit der Kapazität  $C$  und dem induktionsfreien Widerstand  $W$  verbunden. Unter die Spule  $S$  wird koaxial eine fixe Spule  $S_0$  gestellt. Die elektromotorische Kraft  $V$  wird durch

Fig. 19.



Induktion von seiten der Spule  $S_0$  geliefert, die von einem Wechselstrom  $i_0$  durchflossen wird. Es ist also  $V = -L_0 \frac{di_0}{dt}$ , wenn der Koeffizient der gegenseitigen Induktion mit  $L_0$  bezeichnet wird. Wir setzen  $V = A \sin \alpha t$ , müssen infolgedessen  $i_0$  in der Form  $i_0 = \frac{A}{\alpha L_0} \cos \alpha t$  voraussetzen. Wir schreiben einfacher  $i_0 = J_0 \cos \alpha t$ . Nun war  $i = J \sin (\alpha t - \varphi)$ . Die ponderomotorische Kraft  $K$  zwischen den beiden Spulen ist sonach (vgl. § 10):

$$K = 2F \cdot \frac{2}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} i_0 i dt = 2F J_0 J \frac{2}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \cos \alpha t \sin (\alpha t - \varphi) dt.$$

Hierin bedeutet  $2F$  eine Proportionalitätskonstante. Die Ausrechnung des Integrals führt zu der Endformel:

$$K = -F J_0 J \sin \varphi.$$

Die Kraft ist Null, wenn  $\sin \varphi = 0$ ; dann ist auch  $tg \varphi = 0$ .  
Letzteres tritt nach Gl. (8) ein, wenn

$$\alpha L = \frac{\alpha W^2 C}{1 + \alpha^2 W^2 C^2},$$

oder, wenn  $K = 0$ , so ist

$$L = \frac{W^2 C}{1 + \alpha^2 W^2 C^2}.$$

Die Einstellung  $K = 0$  wird erreicht durch passende Wahl des  $W$ , doch könnte man natürlich auch  $C$  ändern. Die Empfindlichkeit der Einstellung ist so groß, daß Widerstandsänderungen von 0,1 Ohm schon sehr beträchtliche Ausschläge an der Wage ergeben.

### § 12. Der Resonanzversuch von Lodge.

Wirkt in einem Stromkreise vom Widerstand  $w$  und der Selbstinduktion  $L$ , der eine Kapazität  $C$  enthält, eine elektromotorische Kraft  $V$ , so gilt für die elektrische Strömung  $i$  in diesem Kreise, wie im § 7 gezeigt wurde, die Gleichung [dort Gl. (5)]:

$$w i + L \frac{di}{dt} = V - \frac{e}{C};$$

da  $\frac{e}{C} = v$  und  $i = \frac{de}{dt} = C \frac{dv}{dt}$ , wenn die Potentialdifferenz der Kondensatorplatten mit  $v$  bezeichnet wird, liefert diese Gleichung für die Potentialdifferenz der Kondensatorplatten die Relation

$$w C \frac{dv}{dt} + CL \frac{d^2 v}{dt^2} + v = V \dots \dots (1)$$

Ist die wirksame elektromotorische Kraft  $V$  eine harmonische Funktion der Zeit, etwa  $V = A \sin \alpha t$ , so ist weiter

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{w}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{CL} = \frac{A}{CL} \sin \alpha t.$$

Die Lösung derselben lautet:

$$v = a \sin (\alpha t - \varphi),$$

und man findet:

$$a = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 w^2 C^2 + (1 - \alpha^2 CL)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\alpha w C}{1 - \alpha^2 CL}.$$

Die Amplitude der am Kondensator auftretenden Potentialdifferenz  $v$  ist ein Maximum, und zwar  $\frac{A}{\alpha w C}$ , wenn  $1 - \alpha^2 CL = 0$  oder  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{CL}}$  ist. Da  $\alpha = \frac{2\pi}{\tau}$ , kann diese Bedingung auch geschrieben werden  $\tau = 2\pi\sqrt{CL}$ , d. h. die Amplitude der Potentialdifferenz  $v$  ist ein Maximum, wenn die Schwingungsdauer  $\tau$  der wirkenden elektromotorischen Kraft gleich ist der Eigenschwingungsdauer der Kapazität. Das Maximum der Resonanz zwischen der Kapazität und den erregenden Schwingungen ist an den Isochronismus zwischen den erregenden Schwingungen mit ihren Eigenschwingungen geknüpft. Ist dieser vorhanden, so beträgt die Phasendifferenz zwischen der erregenden elektromotorischen Kraft und der Potentialdifferenz des Kondensators da dann  $\operatorname{tg} \varphi = \infty$  ist,  $90^\circ$ .

Anders liegen die Verhältnisse, wenn die erregende elektromotorische Kraft eine gedämpfte Schwingung ist. Dieser Fall tritt ein, wenn die Potentialdifferenz  $V$  durch die Induktionswirkung einer Kondensatorentladung geliefert wird. Wir wollen nun diesen Fall näher untersuchen. Wir betrachten zwei Stromkreise, jeder derselben enthalte Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität. Die charakteristischen Größen der beiden Stromkreise seien durch die Indizes 1 und 2 gekennzeichnet. Die Kapazität des Stromkreises I werde geladen; die oszillatorische Entladung derselben wirke induzierend auf den Stromkreis II, die elektromotorische Kraft, welche sie auf den Stromkreis II ausübt, werde mit  $V$ , die an der Kapazität dieses Stromkreises auftretende Potentialdifferenz mit  $v$  bezeichnet. Ferner mögen die Abkürzungen  $\frac{w}{L} = 2\delta$  und  $\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{w^2}{4L^2}} = \alpha$  eingeführt werden. Für den Stromkreis II gilt die Gl. (1); wir schreiben sie

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{w_2}{L_2} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{C_2 L_2} v = \frac{V}{C_2 L_2},$$

oder mit Einführung der angegebenen Abkürzungen:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2 \delta_2 \frac{dv}{dt} + (\alpha_2^2 + \delta_2^2) v = \frac{V}{C_2 L_2} \dots \dots (2)$$

Die Zeitzählung wollen wir in einem Momente beginnen, in welchem die vom Kreise I in dem Stromkreise induzierte elektromotorische Kraft ein Maximum ist. Es besteht also zur Zeit 0 in der Umgebung des Leiterkreises eine elektrostatische Kraftverteilung. Die erste Änderung in diesem Zustande beginne damit, daß diese Kraft in der Nähe des primären Leiters abfällt. Allen diesen Voraussetzungen wird Rechnung getragen, wenn die Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft  $V$  von der Zeit durch einen  $\cos$  dargestellt wird<sup>1)</sup>. Wir müssen darum schreiben:

$$V = A e^{-\delta_1 t} \cos \alpha_1 t,$$

wobei wir die Amplitude zur Zeit 0 gleich  $A$  setzen. Die Substitution dieses Wertes von  $V$  in Gl. (2) liefert, indem wir

$$\frac{A}{C_2 L_2} = \mathfrak{A} \text{ setzen:}$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2 \delta_2 \frac{dv}{dt} + (\alpha_2^2 + \delta_2^2) v = \mathfrak{A} e^{-\delta_1 t} \cos \alpha_1 t \dots (3)$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet:

$$v = B_1 e^{-\delta_1 t} \sin(\alpha_1 t + \varphi_1) + B_2 e^{-\delta_2 t} \sin(\alpha_2 t + \varphi_2) \dots (4)$$

Die Substitution dieses Ausdruckes in Gl. (3) ergibt:

$$B_1 [(\delta_1 - \delta_2)^2 - (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)] e^{-\delta_1 t} \sin(\alpha_1 t + \varphi_1) - B_1 \cdot 2 \alpha_1 (\delta_1 - \delta_2) e^{-\delta_1 t} \cos(\alpha_1 t + \varphi_1) = \mathfrak{A} e^{-\delta_1 t} \cos \alpha_1 t$$

oder weiter:

$$\left. \begin{aligned} B_1 \{[(\delta_1 - \delta_2)^2 - (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)] \cos \varphi_1 + 2 \alpha_1 (\delta_1 - \delta_2) \sin \varphi_1\} &= 0 \\ B_1 \{[(\delta_1 - \delta_2)^2 - (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)] \sin \varphi_1 - 2 \alpha_1 (\delta_1 - \delta_2) \cos \varphi_1\} &= \mathfrak{A} \end{aligned} \right\} (5)$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

---

<sup>1)</sup> In großer Entfernung vom Erregerkreis liegen die Verhältnisse allerdings anders, denn nur in einem gewissen Bereich, dessen Ausdehnung von der Schwingungsdauer des Erregerkreises abhängt, dürfen die Änderungen des Feldes als quasistationäre angesehen werden. Die Betrachtung des allgemeinen Falles ist von dem Programme der vorliegenden Schrift ausgeschlossen. Die hier vorgetragene Theorie ist von V. Bjerknes gegeben: Über die Dämpfung schneller elektrischer Schwingungen. Wied. Ann. **44**, 74 (1891).

$$B_1 = \frac{A}{C_2 L_2 \sqrt{[(\delta_1 - \delta_2)^2 - (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)]^2 + 4 \alpha_1^2 (\delta_1 - \delta_2)^2}} \cdot (6)$$

$$tg \varphi_1 = - \frac{(\delta_1 - \delta_2)^2 - (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{2 \alpha_1 (\delta_1 - \delta_2)} \dots \dots \dots (7)$$

Um  $B_2$  und  $\varphi_2$  zu bestimmen, beachten wir, daß zur Zeit 0 der Stromkreis II elektrisch in Ruhe ist, d. h. daß für  $t = 0$  sowohl  $v = 0$  als auch  $\frac{dv}{dt} = 0$ . Diese Anfangsbedingungen führen zu den Gleichungen

$$B_2 \sin \varphi_2 = - B_1 \sin \varphi_1 \dots \dots \dots (8)$$

$$B_2 (\alpha_2 \cos \varphi_2 - \delta_2 \sin \varphi_2) = - B_1 (\alpha_1 \cos \varphi_1 - \delta_1 \sin \varphi_1) \dots (9)$$

Dividiert man die zweite dieser Gleichungen durch die erste, so erhält man:

$$\alpha_2 \cotg \varphi_2 - \delta_2 = \alpha_1 \cotg \varphi_1 - \delta_1$$

oder

$$\alpha_2 \cotg \varphi_2 = \alpha_1 \cotg \varphi_1 - (\delta_1 - \delta_2).$$

Diese Gleichung kann mit Berücksichtigung von (7) geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \alpha_2 \cotg \varphi_2 &= \alpha_1 \frac{2 \alpha_1 (\delta_1 - \delta_2)}{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) - (\delta_1 - \delta_2)^2} - (\delta_1 - \delta_2) \\ &= (\delta_1 - \delta_2) \left( \frac{2 \alpha_1^2}{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) - (\delta_1 - \delta_2)^2} - 1 \right) \\ &= (\delta_1 - \delta_2) \frac{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + (\delta_1 - \delta_2)^2}{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) - (\delta_1 - \delta_2)^2}, \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$tg \varphi_2 = \frac{\alpha_2}{\delta_1 - \delta_2} \frac{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) - (\delta_1 - \delta_2)^2}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + (\delta_1 - \delta_2)^2} \dots \dots (10)$$

Um  $B_2$  zu finden, schreiben wir Gl. (7):

$$\sin \varphi_2 = - \frac{B_1}{B_2} \sin \varphi_1.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \cos \varphi_2 &= \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_2} = \sqrt{1 - \frac{B_1^2}{B_2^2} \sin^2 \varphi_1} \\ &= \frac{1}{B_2} \sqrt{B_2^2 - B_1^2 \sin^2 \varphi_1}. \end{aligned}$$

Dies substituieren wir in Gl. (9), die wir mit Rücksicht auf Gl. (8) schreiben können:

$$\alpha_2 B_2 \cos \varphi_2 + \delta_2 B_1 \sin \varphi_1 = \delta_1 B_1 \sin \varphi_1 - \alpha_1 B_1 \cos \varphi_1.$$

Wir erhalten so:

$$\alpha_2 \sqrt{B_2^2 - B_1^2 \sin^2 \varphi_1} = (\delta_1 - \delta_2) B_1 \sin \varphi_1 - \alpha_1 B_1 \cos \varphi_1$$

oder, quadrierend und ordnend:

$$\alpha_2^2 B_2^2 = B_1^2 \{ [\alpha_2^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2] \sin^2 \varphi_1 + \alpha_1^2 \cos^2 \varphi_1 - 2 \alpha_1 (\delta_1 - \delta_2) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \}.$$

Da

$$\sin^2 \varphi_1 = \frac{tg^2 \varphi_1}{1 + tg^2 \varphi_1}, \quad \cos^2 \varphi_1 = \frac{1}{1 + tg^2 \varphi_1},$$

$$\sin \varphi_1 \cos \varphi_1 = \frac{tg \varphi_1}{1 + tg^2 \varphi_1},$$

gibt dies weiter:

$$\alpha_2^2 B_2^2 = \frac{B_1^2}{1 + tg^2 \varphi_1} \{ [\alpha_2^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2] tg^2 \varphi_1 + \alpha_1^2 - 2 \alpha_1 (\delta_1 - \delta_2) tg \varphi_1 \}.$$

Substituiert man innerhalb der geschwungenen Klammer für  $tg \varphi_1$  den Wert desselben nach Gl. (7), so folgt:

$$\alpha_2^2 B_2^2 = \frac{B_1^2}{1 + tg^2 \varphi_1} \{ [\alpha_2^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2] tg^2 \varphi_1 + \alpha_1^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2 - (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \}$$

$$= \frac{B_1^2}{1 + tg^2 \varphi_1} [\alpha_2^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2] (tg^2 \varphi_1 + 1)$$

oder

$$= B_1^2 [\alpha_2^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2]$$

$$B_2 = \frac{B_1}{\alpha_2} \sqrt{\alpha_2^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2},$$

also endlich mit Rücksicht auf (6):

$$B_2 = \frac{A \sqrt{\alpha_2^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2}}{\alpha_2 C_2 L_2 \sqrt{[(\delta_1 - \delta_2)^2 - (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)]^2 + 4 \alpha_1^2 (\delta_1 - \delta_2)^2}} \quad (11)$$

Hiermit sind nun die Konstanten der Gl. (4) bestimmt. Wir führen nun weiter die Annahme ein, daß die erregenden Schwingungen des Stromkreises I bedeutend stärker gedämpft sind als diejenigen des erregten Stromkreises II. Diese Annahme ist aus den folgenden Gründen sehr wahrscheinlich. Erstens muß die in dem erregenden Stromkreise vorhandene Funkenstrecke einen be-

trächtlichen Zuschlag zu seinem Widerstande ausmachen. Freilich darf diese Ursache nicht überschätzt werden, da ja der Widerstand des Schließungsdrahtes durch den Skineneffekt erhöht wird. Zweitens muß aber die Energieausstrahlung des primären offenen Kreises viel größer sein als die des beinahe geschlossenen sekundären, der, wie es bei Anordnungen dieser Art notwendigerweise der Fall ist, nur eine sehr kurze Funkenstrecke enthalten kann, also beinahe geschlossen ist. Wir dürfen also  $\delta_2$  als klein gegen  $\delta_1$  ansehen, welches auch absolut einen großen Wert haben wird. Aus diesem Grunde erlöschen die primären Schwingungen rasch und mit ihnen die aufgeprägten Schwingungen im sekundären Stromkreise, welche durch den ersten Term des Ausdruckes (4) dargestellt werden. Übrig bleiben die Eigenschwingungen des sekundären Kreises. Die Potentialdifferenz an der Kapazität dieses Kreises wird dann durch den zweiten Term des Ausdruckes (4) allein dargestellt:

$$v = B_2 e^{-\delta_2 t} \sin(\alpha_2 t + \varphi_2)$$

$$= \frac{A \sqrt{\alpha_2^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2}}{\alpha_2 C_2 L_2 \sqrt{[(\delta_1 - \delta_2)^2 - (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)]^2 + 4 \alpha_1^2 (\delta_1 - \delta_2)^2}} e^{-\delta_2 t} \sin(\alpha_2 t + \varphi_2).$$

Vernachlässigt man hierin  $\delta_2$  gegen  $\delta_1$ , so wird

$$B_2 = \frac{A \sqrt{\alpha_2^2 + \delta_1^2}}{\alpha_2 C_2 L_2 \sqrt{(\delta_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_1^2)^2 + 4 \alpha_1^2 \delta_1^2}}.$$

Die Amplitude der Potentialschwankungen ist ein Maximum, wenn der Nenner ein Minimum, d. i. wenn  $\alpha_2^2 = \alpha_1^2 - \delta_1^2$  ist. Während also, wenn die erregenden Schwingungen ungedämpft sind, das Maximum der Resonanz bei Isochronismus der Eigenschwingungen und der erregenden Schwingungen eintritt, ist dies nicht mehr der Fall, wenn die erregenden Schwingungen gedämpft sind. Um das Maximum der Resonanz zu erzielen, muß die erregende Schwingung eine kleinere Schwingungsdauer haben als die erregte, da die Bedingung für das Maximum der Resonanz auch geschrieben werden kann:

$$\frac{4 \pi^2}{\tau_2^2} = \frac{4 \pi^2}{\tau_1^2} - \frac{\omega_1^2}{L_1^2}.$$

Die Vernachlässigung von  $\delta_2$  neben  $\delta_1$  bringt den Ausdruck (10) in die Gestalt:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\alpha_2}{\delta_1} \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \delta_1^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \delta_1^2}.$$

Im Falle des Maximums der Resonanz wird nun  $\operatorname{tg} \varphi_2$ , also auch  $\varphi_2$  gleich Null und die an der Kapazität des sekundären Stromkreises induzierte Potentialdifferenz endlich:

$$v = \frac{A}{2 \delta_1 \alpha_2 C_2 L_2} e^{-\delta_2 t} \sin \alpha_2 t.$$

Sie ist demnach, ebenso wie bei der Erregung durch ungedämpfte Schwingungen, gegen die erregende Potentialdifferenz in der Phase um  $90^\circ$  verschoben.

O. Lodge<sup>1)</sup> verwendet zur Demonstration der Resonanz von Feddersenschwingungen zwei Leidener Flaschen, welche nach Art der Maßflasche eingerichtet sind. Die beiden Belegungen der ersten Flasche, welche durch einen Ruhmkorffschen Apparat oder eine Influenzmaschine rasch hintereinander wiederholt ge-

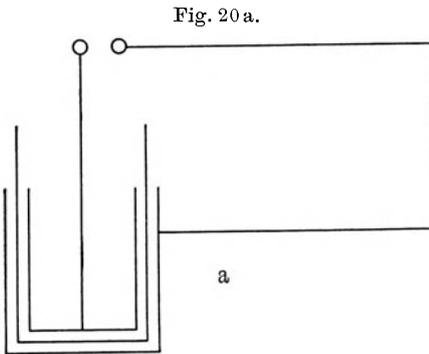


Fig. 20 a.

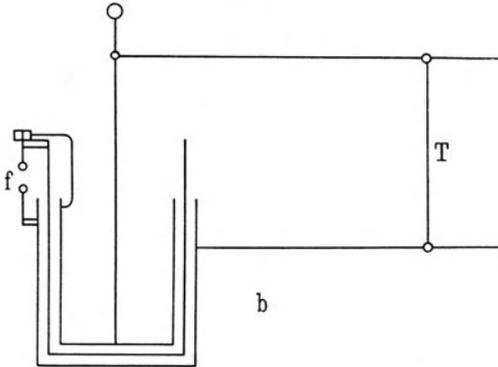
laden wird, sind durch einen Drahtbügel und eine Funkenstrecke geschlossen (Fig. 20 a). Die zweite Flasche (Fig. 20 b) von annähernd gleicher Kapazität trägt einen Bügel mit einem verschiebbaren Teil  $T$  und eine Funkenstrecke  $f$ . Durch Verschieben des beweglichen Teiles  $T$  wird sowohl der Wider-

stand als auch die Selbstinduktion des Schließungskreises verändert. Man stellt nun die Flaschen nebeneinander, so daß die Ebenen der Schließungskreise parallel sind und erreicht durch Verschiebung von  $T$  die Bedingung des Resonanzmaximums. Das Eintreten desselben dokumentiert sich in dem lebhaften Funken-

<sup>1)</sup> Lodge, Easy lecture experiment in electric resonance. Nature 41, 368 (1890).

spiel bei  $f$ . Man kann natürlich die Versuche variieren, z. B. zeigen, daß die Zuschaltung einer Kapazität, sei es bei der primären oder bei der sekundären Kapazität, die Resonanz aufhebt und eine neue Einstellung des beweglichen Bügelteiles nötig macht u. ä. Schiebt man zwischen die beiden Flaschen einen Karton, ein Brett oder sonst einen Nichtleiter, so bemerkt man

Fig. 20b.



keinen Einfluß auf den sekundären Stromkreis. Dagegen bringt ein größeres Blech, zwischen die Flaschen gestellt, die Funken bei  $f$  zum Verlöschen. Wir erhalten eine Schirmwirkung, welche durch die in der Metallplatte induzierten Ströme bedingt ist; diese haben gegen die Ströme des primären Stromkreises eine Phasenverschiebung von nahe  $180^\circ$  und heben deren Wirkung auf.

### Drittes Kapitel.

## Das magnetische Drehfeld.

### § 13. Das einfache Drehfeld.

Fließt durch einen Drahtkreis vom Radius  $r$  cm ein Strom, dessen Intensität im absoluten elektromagnetischen Maß  $i$  ist, so ruft derselbe im Mittelpunkt des Kreises eine Feldstärke  $\mathfrak{H} = \frac{2\pi i}{r}$  hervor. Die magnetische Kraft steht hier senkrecht auf der Ebene

des Drahtkreises, ihre Richtung ist nach der Ampèreschen Schwimmerregel zu bestimmen. Ist der durch den Draht fließende Strom ein Wechselstrom  $i = A \sin \alpha t$ , so ist das von ihm erzeugte Feld ein magnetisches Wechselfeld, dessen Stärke an der angegebenen Stelle durch den Ausdruck  $\mathfrak{H} = \frac{2\pi A}{r} \sin \alpha t$  bestimmt ist.

Nimmt man zwei Drahtkreise von gleichem Radius und ordnet sie so an, daß sie einen gemeinsamen Mittelpunkt haben, während ihre Ebenen aufeinander senkrecht stehen, und sendet nun durch beide Kreise Wechselströme, so ergibt sich ein magnetisches Feld, welches durch die Superposition der beiden von jedem Kreise erzeugten magnetischen Wechselfelder entsteht. Die Feldstärke im gemeinsamen Mittelpunkte der beiden Kreise ist leicht zu berechnen. Die Ebenen der beiden Kreise mögen vertikal stehen. Ihre Projektionen auf die durch ihren Mittelpunkt hindurchgehende Horizontalebene bilden ein rechtwinkeliges Kreuz. Wir nehmen die Spur des einen Kreises zur  $X$ -Achse, die des anderen zur  $Y$ -Achse und charakterisieren die auf jeden Kreis bezüglichen Größen durch die Indizes  $x$  und  $y$ . Die beiden Wechselströme mögen gleiche Schwingungsdauer und gleiche Amplitude haben, aber es bestehe zwischen ihnen eine Phasendifferenz  $\varphi$ , so daß etwa sei:

$$\begin{aligned} i_x &= A \sin \alpha t \\ i_y &= A \sin (\alpha t + \varphi). \end{aligned}$$

Dann ist im Mittelpunkte der beiden Kreise

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_x &= \frac{2\pi A}{r} \sin \alpha t \\ \mathfrak{H}_y &= \frac{2\pi A}{r} \sin (\alpha t + \varphi). \end{aligned}$$

Durch die Superposition dieser beiden Feldstärken entsteht im Mittelpunkt des Stromkreuzes eine Feldstärke  $\mathfrak{H}$ , welche durch die Gleichung

$$\mathfrak{H}^2 = \mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2$$

bestimmt ist. Die Feldstärke  $\mathfrak{H}_x$  ist parallel zur  $Y$ -Achse, die Feldstärke  $\mathfrak{H}_y$  parallel zur  $X$ -Achse. Der Winkel  $\psi$ , welchen die

resultierende Feldstärke mit der X-Achse einschließt, ist bestimmt durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\mathfrak{H}_x}{\mathfrak{H}_y}.$$

Führt man die Abkürzung  $\frac{2\pi A}{r} = \varrho$  ein, so ist

$$\frac{\mathfrak{H}_x}{\varrho} = \sin \alpha t$$

$$\frac{\mathfrak{H}_y}{\varrho} = \sin(\alpha t + \varphi)$$

und weiter:

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{H}_y}{\varrho} &= \sin \alpha t \cos \varphi + \cos \alpha t \sin \varphi \\ &= \frac{\mathfrak{H}_x}{\varrho} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{H}_x^2}{\varrho^2}} \cdot \sin \varphi. \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$\mathfrak{H}_x^2 - 2 \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y \cos \varphi + \mathfrak{H}_y^2 = \varrho^2 \sin^2 \varphi \quad . . . . (1)$$

Betrachten wir zunächst den Fall, daß die Phasendifferenz  $\varphi = 0$  ist. Dann ist  $\sin \varphi = 0$ ,  $\cos \varphi = 1$  und es folgt aus Gl. (1):

$$\mathfrak{H}_y = \mathfrak{H}_x,$$

und hiermit die Stärke des resultierenden Feldes:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_x \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}\pi A}{r} \sin \alpha t.$$

Der Winkel  $\psi$  ist bestimmt durch die Gleichung  $\operatorname{tg} \psi = 1$ , also ist  $\psi = 45^\circ$ . Wir erhalten demnach ein Wechselfeld mit konstanter Lage der Kraftlinien.

Ist dagegen die Phasendifferenz  $\varphi = 90^\circ$ , so ist  $\sin \varphi = 1$  und  $\cos \varphi = 0$  und wir erhalten aus (1):

$$\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2 = \varrho^2$$

oder

$$\mathfrak{H} = \frac{2\pi A}{r}.$$

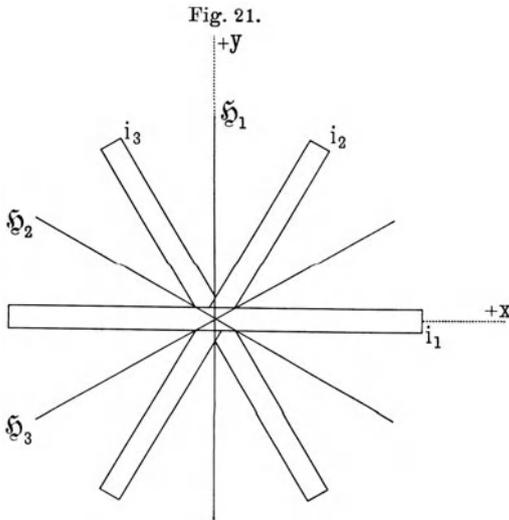
Jetzt ist die Feldstärke konstant, dagegen ist es nicht die Lage der Kraftlinien des Feldes. Da  $\varphi = 90^\circ$ , ist  $\sin(\alpha t + \varphi) = \cos \alpha t$  und

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \alpha t}{\cos \alpha t} = \operatorname{tg} \alpha t$$

oder

$$\psi = \alpha t;$$

der Winkel  $\psi$  wächst proportional mit der Zeit, die Richtung der magnetischen Kraft rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit  $\alpha = \frac{2\pi}{\tau}$ , ihre Umlaufzeit ist gleich der Schwingungsdauer der beiden Wechselströme. Die Rotation vollzieht sich unter den gewählten Bedingungen entgegengesetzt dem Sinne der Uhrzeigerbewegung, wenn wir das Koordinatensystem so gewählt haben, daß man von der positiven Hälfte der X-Achse zur positiven



Hälfte der Y-Achse durch eine der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt gerichtete Drehung gelangt.

Ein magnetisches Feld von konstanter Stärke, dessen Richtung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert, wird als ein einfaches oder kreisförmiges magnetisches Drehfeld bezeichnet.

Man kann ein einfaches Drehfeld auch in anderer Weise realisieren. Beispielsweise mit Hilfe von drei gleichen Drahtkreisen mit gemeinsamem Mittelpunkt, deren Ebenen miteinander Winkel von  $120^\circ$  einschließen (Fig. 21). In der Figur stellen die

schmalen Rechtecke die Drahtkreise, die einfachen Linien die Lage der von ihnen erzeugten Kraftlinien im Mittelpunkt des Stromsternes dar. Fließen durch die drei Kreise Wechselströme von gleicher Schwingungsdauer und Amplitude, welche gegeneinander Phasendifferenzen von  $120^\circ$  haben, so liefern sie ein einfaches magnetisches Drehfeld. Sind

$$\begin{aligned}i_1 &= A \sin \alpha t \\i_2 &= A \sin (\alpha t + 120^\circ) \\i_3 &= A \sin (\alpha t + 240^\circ)\end{aligned}$$

die drei Wechselströme, so sind die von ihnen im Mittelpunkte der Kreise erzeugten Feldstärken:

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_1 &= \frac{2\pi A}{r} \sin \alpha t \\ \mathfrak{H}_2 &= \frac{2\pi A}{r} \sin (\alpha t + 120^\circ) \\ \mathfrak{H}_3 &= \frac{2\pi A}{r} \sin (\alpha t + 240^\circ).\end{aligned}$$

Setzt man  $\frac{2\pi A}{r} = \varrho$ , so liefern diese drei Feldstärken eine Feldstärke parallel zur  $X$ -Achse, welche durch die Spur von  $i_1$  gegeben sei:

$$\mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_1 \cos 90^\circ + \mathfrak{H}_2 \cos 210^\circ + \mathfrak{H}_3 \cos 330^\circ$$

und eine Feldstärke parallel zur  $Y$ -Achse:

$$\mathfrak{H}_y = \mathfrak{H}_1 \sin 90^\circ + \mathfrak{H}_2 \sin 210^\circ + \mathfrak{H}_3 \sin 330^\circ.$$

Die Ausrechnung ergibt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_x &= -\frac{3\varrho}{2} \cos \alpha t \\ \mathfrak{H}_y &= \frac{3\varrho}{2} \sin \alpha t,\end{aligned}$$

und eine resultierende Feldstärke  $\mathfrak{H} = \sqrt{\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2} = \frac{3\varrho}{2} = \frac{3\pi A}{r}$  von konstanter Größe. Die Lage der Kraftlinien des resultierenden Feldes ist bestimmt durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\mathfrak{S}_y}{\mathfrak{S}_x} = -\operatorname{tg} \alpha t$$

oder

$$\psi = -\alpha t,$$

wenn  $\psi$  der Winkel ist, welchen sie mit der positiven Richtung der  $X$ -Achse einschließen. Die Kraftlinien rotieren mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\alpha$  und vollführen einen Umlauf während einer Schwingungsdauer der verwendeten Wechselströme. Die Rotation erfolgt hier unter den gewählten Bedingungen im Sinne der Uhrzeigerbewegung.

#### § 14. Die Herstellung des einfachen Drehfeldes mit Einphasenstrom.

Hat man nur Einphasenstrom zur Verfügung, so kann man sich ein Drehfeld, das aus zwei Kreisen besteht, herstellen, indem man zur Stromverzweigung greift. Man schaltet den einen Kreis (I) in den einen, den zweiten (II) in den anderen Zweig und erzeugt zwischen den beiden Zweigen eine Phasendifferenz. Gelingt es, diese auf  $90^\circ$  zu bringen, unter gleichzeitiger Erreichung von Gleichheit der effektiven Stromstärke in beiden Zweigen, so sind die Bedingungen für das einfache Drehfeld erfüllt.

Als Mittel zur Erzielung einer Phasenverschiebung haben wir die Selbstinduktion und die Kapazität kennen gelernt. Man wird von diesen Mitteln je nach den vorliegenden Verhältnissen Gebrauch machen, um das angestrebte Ziel zu erreichen.

Den Widerstand und die Selbstinduktion der beiden Drahtkreise, die natürlich auch aus mehreren Windungen bestehen können, setzen wir als gleich groß voraus und bezeichnen sie mit  $w$  und  $L$ . Die Potentialdifferenz zwischen den Verzweigungspunkten heiße  $V$  und sei gleich  $A \sin \alpha t$ .

Unsere Überlegungen knüpfen an die Gleichungen des § 2 und des § 7 an. Enthält eine Leitung zwischen zwei Punkten, zwischen welchen die Potentialdifferenz  $V = A \sin \alpha t$  besteht, einen Widerstand  $w$  und eine Selbstinduktion  $L$ , so ist nach § 2:

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{A}{\sqrt{w^2 + \alpha^2 L^2}} \sin(\alpha t - \varphi) \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\alpha L}{w} \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

Enthält sie außerdem eine Kapazität, so ist nach § 7:

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{A}{\sqrt{w^2 + \left(\frac{1}{\alpha C} - \alpha L\right)^2}} \sin(\alpha t + \varphi) \\ \text{tg } \varphi &= \frac{1}{w} \left(\frac{1}{\alpha C} - \alpha L\right) \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Wir betrachten nun folgende spezielle Fälle.

a) Man schaltet den Kreis II mit einem induktionsfreien Widerstand  $W$  und einer Kapazität  $C$  in Serie in den einen Zweig der Stromverzweigung, deren anderen der Kreis I bildet. Für die beiden Zweige gelten dann die Gleichungen:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{A}{\sqrt{w^2 + \alpha^2 L^2}} \sin(\alpha t - \varphi_1) \\ \text{tg } \varphi_1 &= \frac{\alpha L}{w} \\ i_2 &= \frac{A}{\sqrt{(W + w)^2 + \left(\frac{1}{\alpha C} - \alpha L\right)^2}} \sin(\alpha t + \varphi_2) \\ \text{tg } \varphi_2 &= \frac{1}{W + w} \left(\frac{1}{\alpha C} - \alpha L\right). \end{aligned}$$

Die Phasendifferenz zwischen den beiden Zweigen ist  $\psi = \varphi_1 + \varphi_2$ . Es ist

$$\text{tg } \psi = \frac{\text{tg } \varphi_1 + \text{tg } \varphi_2}{1 - \text{tg } \varphi_1 \text{tg } \varphi_2}.$$

Nun soll  $\psi = 90^\circ$ ,  $\text{tg } \psi = \infty$  sein. Dies ist erreichbar, wenn  $\text{tg } \varphi_2$  positiv, d. h.  $\frac{1}{\alpha C} > \alpha L$  ist; es muß dann  $\text{tg } \varphi_1 \text{tg } \varphi_2 = 1$  oder

$$\frac{\alpha L}{w} \cdot \frac{1}{W + w} \left(\frac{1}{\alpha C} - \alpha L\right) = 1$$

sein. Hieraus folgt:

$$\frac{1}{\alpha C} - \alpha L = \frac{(W + w)w}{\alpha L} \dots \dots \dots (3)$$

Die Bedingung der Gleichheit der Amplituden von  $i_1$  und  $i_2$  führt zu der Gleichung:

$$w^2 + \alpha^2 L^2 = (W + w)^2 + \left(\frac{1}{\alpha C} - \alpha L\right)^2 \dots (4)$$

aus welcher mit Berücksichtigung von (3)

$$W = \alpha L - w$$

folgt. Da  $W$  nicht negativ sein kann, so sieht man, daß die vorstehende Methode nur anwendbar ist, wenn  $\alpha L \geq w$ . Mit dem gefundenen Werte von  $W$  ergibt sich aus (3):

$$\frac{1}{\alpha C} = \alpha L + w.$$

Diese Gleichung ist nun in der Tat mit der ersten prinzipiellen Bedingung der Methode,  $\frac{1}{\alpha C} > \alpha L$ , verträglich.

Die Methode gestattet, die Bedingungen für das Zustandekommen eines Drehfeldes in exakter Weise zu realisieren. Sie ist auch noch anwendbar für den Fall, daß der Widerstand  $w$  verschwindend klein ist gegen die Induktanz  $\alpha L$ . Dann muß

$$W = \alpha L$$

$$\frac{1}{\alpha C} = \alpha L$$

gemacht werden. Die letzte Gleichung lehrt, daß man in diesem Falle die Kapazität so groß wählen muß, daß die Eigenschwingungsdauer der Kapazität, die durch die Selbstinduktion  $L$  geschlossen wird, gleich der Schwingungsdauer des verwendeten Wechselstromes ist. Man kann durch den Kunstgriff, in beiden Zweigen einen gleichen Widerstand  $w$  hinzuzufügen, mit einer kleineren Kapazität das Auslangen finden; doch müssen die Zusatzwiderstände  $w$  der Bedingung  $\alpha L \geq w$  genügen.

b) Eine zweite Methode ist die folgende. Man schaltet den Kreis I in Serie mit einer Selbstinduktion  $L'$ , deren Widerstand gegen  $w$  zu vernachlässigen ist, den Kreis II in Serie mit einer Kapazität  $C$ . Es gelten die Gleichungen:

$$i_1 = \frac{A}{\sqrt{w^2 + \alpha^2(L + L')^2}} \sin(\alpha t - \varphi_1)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\alpha(L + L')}{w}$$

$$i_2 = \frac{A}{\sqrt{w^2 + \left(\frac{1}{\alpha C} - \alpha L\right)^2}} \sin(\alpha t + \varphi_2)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{1}{w} \left(\frac{1}{\alpha C} - \alpha L\right).$$

Eine Phasendifferenz von  $90^\circ$  ist erzielbar, wenn  $\frac{1}{\alpha C} > \alpha L$ ; dann muß

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\alpha(L + L')}{w} \cdot \frac{1}{w} \left(\frac{1}{\alpha C} - \alpha L\right) = 1 \dots (5)$$

sein. Die Gleichheit der Amplituden erfordert:

$$\alpha(L + L') = \frac{1}{\alpha C} - \alpha L \dots \dots \dots (6)$$

Hieraus sieht man zunächst, daß in der Tat, da  $L'$  nicht negativ sein kann,  $\frac{1}{\alpha C} > \alpha L$  sein muß. Ferner führt die Substitution von (6) in (5) zu der Gleichung

$$L' = \frac{w}{\alpha} - L.$$

Dies lehrt eine weitere Bedingung der Methode kennen:  $w \geq \alpha L$ . Mit dem gefundenen Werte von  $L'$  ergibt sich endlich aus (6):

$$\frac{1}{\alpha C} = \alpha L + w.$$

Dies genügt in der Tat der Bedingung  $\frac{1}{\alpha C} > \alpha L$ . Auch diese Methode gestattet, die Bedingungen des Drehfeldes in exakter Weise zu realisieren. Für den Grenzfall  $\alpha L = 0$ , für welchen sie auch noch anwendbar ist, erhält man:

$$L' = \frac{w}{\alpha}$$

$$\frac{1}{\alpha C} = w$$

In dem sub a) besprochenen Falle findet man das Auslangen mit einer Kapazität und einem induktionsfreien Widerstand. Das legt die Frage nahe, ob man nicht auch mit einer Selbstinduktion und einem induktionsfreien Widerstand allein auskommen kann. Wir betrachten, um die Antwort auf diese Frage zu erhalten, eine Verallgemeinerung der sub b) besprochenen Methode. Kreis I wird mit einer Selbstinduktion  $L'$  und einem induktionsfreien Widerstand  $W'$  in Serie in den einen Zweig geschaltet. Den ev. nicht vernachlässigbaren Widerstand der Selbstinduktion denken wir uns unter  $W'$  subsumiert. Im anderen Zweige liegt der Kreis II in Serie mit einer Kapazität  $C$  und dem induktionsfreien Widerstand  $W$ . Es gelten dann die Gleichungen:

$$i_1 = \frac{A}{\sqrt{(W' + w)^2 + \alpha^2(L + L')^2}} \sin(\alpha t - \varphi_1)$$

$$tg \varphi_1 = \frac{\alpha(L + L')}{W' + w}$$

$$i_2 = \frac{A}{\sqrt{(W + w)^2 + \left(\frac{1}{\alpha C} - \alpha L\right)^2}} \sin(\alpha t + \varphi_2)$$

$$tg \varphi_2 = \frac{1}{W + w} \left(\frac{1}{\alpha C} - \alpha L\right).$$

Ist  $\frac{1}{\alpha C} > \alpha L$ , so führt die Bedingung einer Phasendifferenz von  $90^\circ$  zwischen den beiden Zweigen zu der Gleichung

$$tg \varphi_1 tg \varphi_2 = \frac{\alpha(L + L')}{W' + w} \cdot \frac{1}{W + w} \left(\frac{1}{\alpha C} - \alpha L\right) = 1 \quad . \quad (7)$$

während die Bedingung der Gleichheit der Amplituden von  $i_1$  und  $i_2$  die Gleichung

$$(W' + w)^2 + \alpha^2(L + L')^2 = (W + w)^2 + \left(\frac{1}{\alpha C} - \alpha L\right)^2 \quad . \quad (8)$$

ergibt. Aus (7) und (8) folgen:

$$W + w = \alpha(L + L')$$

$$\frac{1}{\alpha C} - \alpha L = W' + w.$$

Man kann nun wohl  $L'$  gleich Null wählen, ohne der Bedingung  $\frac{1}{\alpha C} > \alpha L$  zu widersprechen; dagegen ist es nicht möglich, die Kapazität im zweiten Kreise wegzulassen. Schließen wir den Kondensator  $C$  kurz, so wird seine Kapazität unendlich groß und  $\frac{1}{\alpha C} = 0$ . Es müßte also nach der letzten Gleichung  $W'$  negativ sein, und zwar auch noch in dem extremen Falle, wenn  $\alpha L = 0$  wäre.

Ebenso unmöglich ist es, die Bedingungen des Drehfeldes dadurch herzustellen, daß man in beiden Zweigen Selbstinduktionen kombiniert mit induktionsfreien Widerständen verwendet. Diese seien in den beiden Zweigen  $L_1, W_1$  und  $L_2, W_2$ . Es gelten die Gleichungen:

$$i_1 = \frac{A}{\sqrt{(W_1 + w)^2 + \alpha^2(L + L_1)^2}} \sin(\alpha t - \varphi_1)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\alpha(L + L_1)}{W_1 + w}$$

$$i_2 = \frac{A}{\sqrt{(W_2 + w)^2 + \alpha^2(L + L_2)^2}} \sin(\alpha t - \varphi_2)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\alpha(L + L_2)}{W_2 + w}.$$

Die Phasendifferenz zwischen den beiden Zweigen ist  $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ , also

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2}.$$

Sie könnte nur  $90^\circ$  werden, wenn  $\varphi_1$  oder  $\varphi_2$  einen entsprechend großen negativen Wert annähme. Dies ist aber unmöglich, da keine der Größen  $L_1, W_1, L_2, W_2$  negativ sein kann.

Annähernd allerdings kann man mit einer Selbstinduktion die Bedingungen für das Drehfeld erfüllen. Macht man  $W_1 = 0, L_2 = 0$ , so ist, falls  $w$  gegen  $\alpha L$  vernachlässigt und daher gleich Null gesetzt werden darf:

$$i_1 = \frac{A}{\alpha(L + L_1)} \sin(\alpha t - \varphi_1)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \infty, \quad \varphi_1 = 90^\circ$$

$$i_2 = \frac{A}{\sqrt{W_2^2 + \alpha^2 L^2}} \sin(\alpha t - \varphi_2)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\alpha L}{W_2}.$$

Die Gleichheit der Amplituden ist hergestellt, wenn

$$W_2 = \sqrt{2\alpha^2 L L_1 + \alpha^2 L_1^2}.$$

Macht man  $L_1$  groß,  $W_2$  dementsprechend ebenfalls groß, so daß  $\frac{\alpha L}{W_2}$  sehr klein ausfällt, so ist dann auch  $\varphi_2$  sehr klein und  $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$  nahe gleich  $90^\circ$ .

Ist andererseits  $\alpha L$  sehr klein gegen  $w$ , darf es also gleich Null gesetzt werden, so macht man  $W_2 = 0$ ,  $L_1 = 0$  und erhält:

$$i_1 = \frac{A}{W_1 + w} \sin(\alpha t - \varphi_1)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0$$

$$i_2 = \frac{A}{\sqrt{w^2 + \alpha^2 L_2^2}} \sin(\alpha t - \varphi_2)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\alpha L_2}{w}.$$

Die Gleichheit der Amplituden erfordert  $W_1 = \sqrt{w^2 + \alpha^2 L_2^2} - w$ .

Macht man nun  $L_2$  groß, so wird  $\frac{\alpha L_2}{w}$  groß und  $\varphi_2$  nahe gleich  $90^\circ$ . Da  $\varphi_1$  nahe gleich Null, wird auch die Phasendifferenz nahe gleich  $90^\circ$ .

Handelt es sich bloß darum, die Eigenschaften des Drehfeldes zu demonstrieren, so genügt eine Annäherung an das einfache Drehfeld. Diese erreicht man bereits nach dem zuletzt besprochenen Verfahren oder auch, ohne Erfüllung der strengen Bedingungen, mit einer Kapazität bzw. mit Kapazität und Selbstinduktion.

W. Weiler<sup>1)</sup> trifft folgende Anordnung. Durch die primäre (dickdrahtige) Spule einer Induktionsrolle wird ein Wechselstrom geschickt. Die sekundäre Rolle wird mit der sekundären

<sup>1)</sup> Zeitschr. f. den phys. u. chem. Unterr. 11, 136 (1898).

Rolle einer zweiten Induktionsspule verbunden, so daß diese von dem induzierten Strome durchflossen wird. Stellt man die beiden Spulen so auf, daß sie die Schenkel eines rechten Winkels bilden, so erhält man in dem Scheitel des Winkels ein Drehfeld. Dieses ist ebenfalls nicht einfach, denn die Phasenverschiebung zwischen dem primären und sekundären Strom, welche nach § 8, Gl. (13)

durch den Ausdruck  $tg \psi = -\frac{w_2}{\alpha L_2}$  bestimmt ist, kann nicht  $90^\circ$  erreichen; denn zu diesem Zwecke müßte die Induktanz  $\alpha L_2$  der beiden verbundenen sekundären Rollen verschwindend klein sein gegen ihren Widerstand  $w_2$ .

Wir haben im § 13 bei der Berechnung des Drehfeldes, welches durch zwei in der Phase um  $90^\circ$  verschiedene Wechselströme erzeugt wird, angenommen, daß die beiden Stromkreise gleichen Mittelpunkt haben und senkrecht zueinander stehen. Will man Spulen mit Eisenkernen verwenden, so kann man dieselben wie bei dem eben geschilderten Weilerschen Verfahren anordnen; oder man benutzt zwei gekreuzte Hufeisenelektromagnete mit senkrecht nach aufwärts gerichteten Schenkeln [Drehfeldmodell von W. Weiler]<sup>1)</sup>.

### § 15. Herstellung des einfachen Drehfeldes durch Dreiphasenstrom.

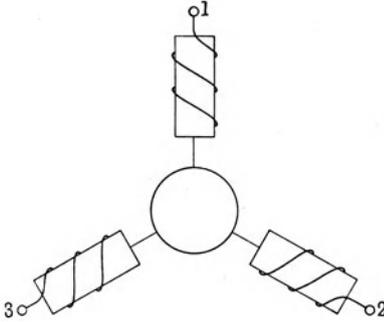
Hat man Dreiphasenstrom zur Verfügung, so kann man ein Drehfeld in verschiedener Weise erhalten. Nimmt man die Anordnung, wie sie bei der Berechnung im § 13 vorausgesetzt wurde, so kann man den Kreis I zwischen die Klemmen 1 und 2, den Kreis II zwischen die Klemmen 2 und 3, den Kreis III zwischen die Klemmen 3 und 1 der dreiphasigen Drehstromleitung schalten, oder man schaltet die Anfänge der Kreise I, II, III an die Klemmen 1, 2, 3 und verbindet die Enden derselben untereinander. Will man das Drehfeld mittels Spulen mit Eisenkern herstellen, so kann man entweder drei oder sechs Spulen verwenden. Fig. 22 stellt eine Schaltung mit drei Spulen dar. Die Achsen der Spulen schließen miteinander Winkel von  $120^\circ$  ein, 1, 2, 3 bedeuten die Klemmen der Drehstromleitung. Soll für

---

<sup>1)</sup> Weiler, Der praktische Elektriker, 3. Aufl., S. 558. Zitiert nach Thomae, Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. 12, 282 (1899).

jede Phase statt einer einzigen Spule ein Spulenpaar verwendet werden, so erhält man ein Drehfeld mit der in Fig. 23 dargestellten Schaltung. Die drei Klemmen der Drehstromleitung sind abermals mit den

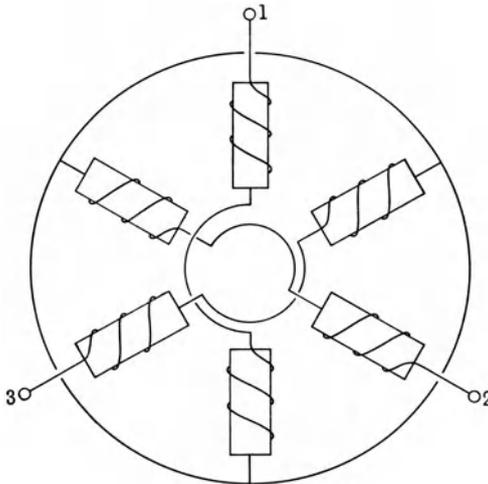
Fig. 22.



Ziffern 1, 2, 3 bezeichnet. Das mit Hilfe von sechs Spulen erhaltene Feld zeichnet sich gegenüber dem mit drei Spulen erhaltenen durch größere Homogenität aus.

Hat man einen Eisenring zur Verfügung, der, wie die Eisenkerne der bei den eben besprochenen Schaltungen verwendeten Spulen natürlich unterteilt sein muß, so kann man durch Bewickelung desselben mit drei oder sechs gleichen, auf dem Ringe symmetrisch verteilten Spulen im

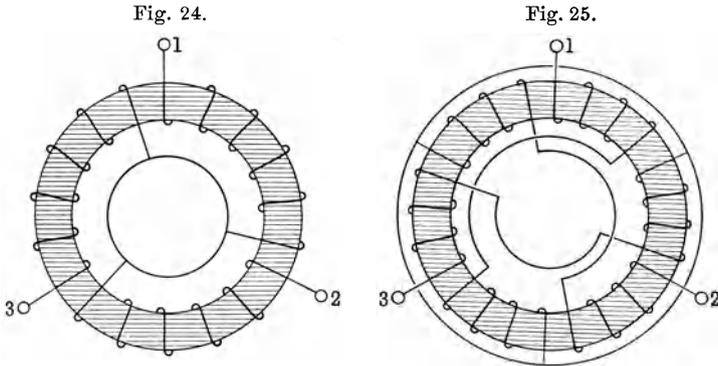
Fig. 23.



Innenraum des Eisenkernes annähernd ein einfaches Drehfeld erhalten, wenn man durch die Spulen die drei Phasen eines Dreh-

stromes in entsprechender Weise hindurchschickt. Die Schaltung mit drei Spulen zeigt Fig. 24, die Schaltung mit sechs Spulen Fig. 25. Man sieht die Analogie mit den Schaltungen Fig. 22 und 23. Eine weitere Erläuterung ist wohl nicht nötig. Die Ziffern 1, 2, 3 bedeuten die drei Klemmen einer Drehstromleitung.

Sehr bequem ist, falls man Dreiphasenstrom zur Verfügung hat, zur Herstellung eines magnetischen Drehfeldes die Verwen-



dung des Ständers oder Stators, d. i. des feststehenden, das Drehfeld liefernden Teiles eines Drehstrommotors.

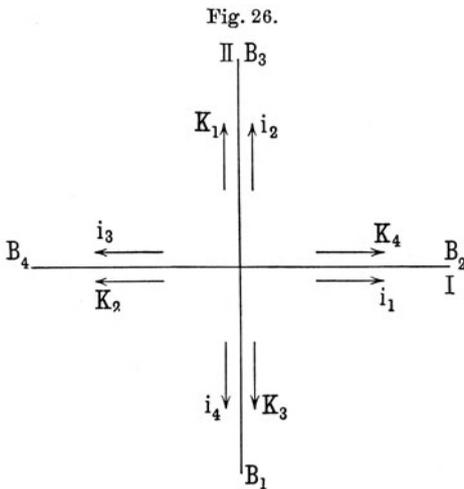
### § 16. Die Herstellung des einfachen Drehfeldes mittels Gleichstrom.

Der Wunsch, die Erscheinungen des magnetischen Drehfeldes zu demonstrieren, auch wenn weder einphasiger noch dreiphasiger Wechselstrom zur Verfügung steht, hat mehrfach zu Anordnungen Veranlassung gegeben, bei welchen ein einfaches Drehfeld mittels Gleichstrom exakt oder annähernd realisiert wird. Prinzipiell am einfachsten ist es, das magnetische Feld eines permanenten Magneten durch Rotation desselben in ein magnetisches Drehfeld zu verwandeln. Diesen Weg hat Adami<sup>1)</sup> eingeschlagen. Ein kräftiger Hufeisenmagnet wurde mit vertikal gestellten Schenkeln um seine Mittellinie in Rotation versetzt. Mit dem auf diese Weise erhaltenen Drehfeld, das ein kreis-

<sup>1)</sup> Ein Drehstrommodell zur Selbstanfertigung. Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. 17, 29 (1904).

förmiges ist, wenn die Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit vor sich geht, konnten die wichtigsten Drehfeldversuche vorgenommen werden. Um ein kräftigeres Feld zu erhalten, wird man, wie dies auch Adami tat, nicht einen permanenten Magnet, sondern einen durch Gleichstrom erregten Elektromagneten verwenden.

Ist man mit einer Annäherung an das einfache Drehfeld zufrieden, so genügt die Verwendung eines, am besten rotierenden, Umschalters, welcher den Gleichstrom der Reihe nach in die einzelnen Spulen der Drehfeldanordnung sendet. Die Richtung der magnetischen Kraft ändert sich sprunghaft. Man kann aber



durch Vermehrung der Spulenzahl den Winkel, um welchen jedesmal die Richtung der magnetischen Kraft springt, herabsetzen. Nehmen wir an, die Drehfeldanordnung bestehe aus Drahtkreisen, welche einen gemeinsamen Mittelpunkt haben und unter gleichen Winkeln gegeneinander stehen. Nehmen wir zunächst zwei Kreise und er-

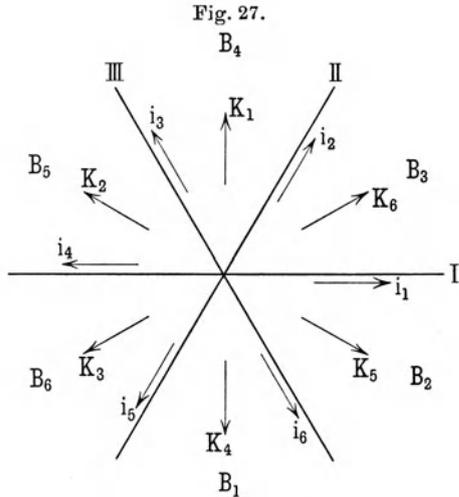
mitteln, was der Umschalter zu leisten hat, um eine kontinuierliche Drehung der magnetischen Kraft zu erzielen. In Fig. 26 sind die beiden Drahtkreise von oben gesehen dargestellt, und zwar nehmen wir an, daß die Strecken I und II die oberen Hälften der Drahtkreise repräsentieren. Zunächst fließe der Strom  $i$  im Kreise I für einen Beobachter in der Stellung  $B_1$  im Sinne des Uhrzeigers; dies ist in der Figur durch den Pfeil  $i_1$  dargestellt. Diesem Strom entspricht eine magnetische Kraft in der Richtung  $K_1$ . Nun möge der Strom auf den Kreis II übergehen. Der Beobachter wandere nach  $B_2$ , also entgegengesetzt dem Sinne der Uhrzeigerbewegung. Fließt von  $B_2$  aus gesehen

der Strom wieder im Sinne der Uhrzeigerbewegung, was durch den Pfeil  $i_2$  angedeutet ist, so erhalten wir die magnetische Kraft  $K_2$ , die mit  $K_1$  einen Winkel von  $90^\circ$  einschließt und aus ihr durch eine Drehung entgegengesetzt dem Sinne der Uhrzeigerbewegung, oder gleichsinnig der Bewegung des Beobachters, hervorgeht. Soll sich die magnetische Kraft nun weiter in demselben Sinne drehen, so muß der Strom wieder auf den Kreis I übergehen, und zwar muß er für den nach  $B_3$  gelangten Beobachter wieder im Sinne der Uhrzeigerbewegung fließen, d. h. er muß jetzt den Kreis I in der Richtung  $i_3$  durchströmen, welche der Richtung  $i_1$  entgegengesetzt ist. Desgleichen muß  $i_4$  entgegengesetzt sein  $i_2$ . Der Strom muß also für einen die Anordnung im Äquator umschreitenden, gegen den Mittelpunkt blickenden Beobachter die Drahtkreise immer in demselben Sinne durchfließen. Die

Umkreisungsrichtung des Beobachters und die

Umkreisungsrichtung des Stromes ist natürlich gleichgültig, man erhält je nachdem eine Drehung der magnetischen Kraft (von oben gesehen) entgegengesetzt oder im

Sinne der Uhrzeigerbewegung. Die Richtung der magnetischen Kraft springt jedesmal um  $90^\circ$ . Ähnliches ergibt sich bei einer aus drei Kreisen, I, II, III, bestehenden Drehfeldanordnung, wenn man die Kreise so beziffert, wie dies in der Fig. 27 angenommen ist. Die magnetische Kraft springt aber beim Übergang von einem Kreis zum nächsten bloß um  $60^\circ$ . Allgemein: Besteht das Drehfeld aus  $n$  Kreisen, so daß der Winkel zwischen zwei benachbarten Halbkreisen  $\frac{360}{2n} = \frac{180}{n}$  beträgt, und läßt man den Strom die einzelnen Kreise der Reihe nach derart durchlaufen, daß für einen

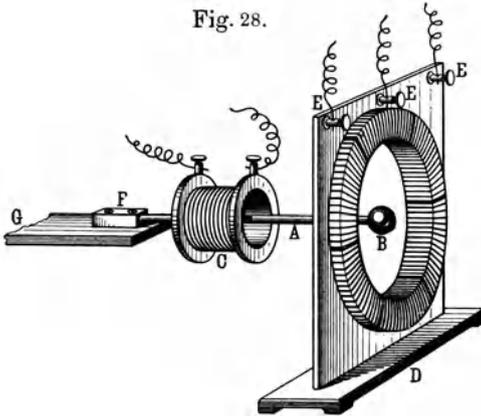


gegen den Mittelpunkt blickenden Beobachter, welcher die Anordnung im Äquator umkreist, die Umlaufsrichtung des Stromes ungeändert bleibt, so springt die magnetische Kraft beim Übergang von einem Kreis zum nächsten um  $\frac{180^\circ}{n}$ .

### § 17. Demonstration eines magnetischen Drehfeldes nach Rubens-Bode.

Über Anregung von H. Rubens arbeitete G. Bode die nachstehend beschriebene Anordnung zur Demonstration eines magnetischen Drehfeldes aus<sup>1)</sup>. Ein runder, etwa 35 cm langer und 0,5 cm starker Eisenstab *A* (Fig. 28) ist an einem Ende ein-

Fig. 28.



gespannt, das freie Ende trägt eine blank polierte Messingkugel *B*. Eine Hilfsspule *C* gestattet, den Eisenstab mittels Gleichstrom zu magnetisieren. Das freie Ende des Stabes befindet sich in einem kreisförmigen magnetischen Drehfeld, welches von einem vertikal stehenden Drehstromring *D* erzeugt wird, dessen drei Klemmen (*EEE*) mit einer Drehstrommaschine verbunden sind.

Stellt man nun zwischen den Wechselströmen und der Eigenschwingung des Stabes Resonanz her und magnetisiert mit der Hilfsspule, so gerät der Stab in lebhaftes Schwingungen und folgt

<sup>1)</sup> Verh. d. Deutsch. Phys. Ges., 11. Jahrg., Heft 2, S. 50 (1909).

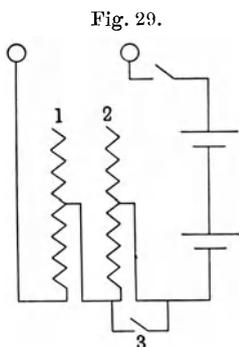
den wechselnden Richtungen des magnetischen Feldes. Schaltet man nur eine Phase des Drehstromes ein, so schwingt der Stab (infolge der blanken Kugel weithin sichtbar) in der Richtung der einen Komponente des Drehfeldes. Wählt man je eine andere Phase, so erhält man die um  $120^\circ$  verschobenen Komponenten. Beim Einschalten aller Komponenten folgt der Stab dem Drehfeld und beschreibt einen Kreis. Vertauscht man zwei Wechselströme, so ändert sich der Drehungssinn des Feldes, das freie Ende des Stabes beschreibt eine S-Linie und läuft in umgekehrtem Sinne. Mit einem permanenten Magnetstab kann man diese Versuche nicht machen, da der Magnet durch die wechselnden Felder sofort entmagnetisiert wird.

Die Resonanz wurde dadurch erreicht, daß man die Dimensionen des Stabes entsprechend der Schwingungszahl der Wechselströme wählte. Diese selbst ist variabel und die feinere Abstimmung der Periodenzahl der Maschine auf die Eigenschwingungen des Stabes geschah durch Regulierung der Tourenzahl der Maschine, indem man den Strom im Feldmagneten des den Drehstromgenerator treibenden Motors änderte. Hierbei war noch auf folgendes zu achten. Entnimmt man der Drehstrommaschine alle drei Wechselströme (bei der Demonstration des Drehfeldes), so muß mehr Arbeit geleistet werden als bei der Demonstration der Komponenten; hat man also bei diesem Versuche Resonanz hergestellt, so verlangsamt die Maschine beim Einschalten aller drei Phasen ihren Lauf, die Resonanz ist gestört und der Stab hört auf zu schwingen. Man muß deshalb in demselben Moment, in dem alle drei Phasen eingeschaltet werden, auch Widerstand in den Magnetkreis der Maschine zuschalten, damit diese nicht aus dem Takt fällt.

Dies geschah in der folgenden Weise. Da die Dimensionen des Stabes und die Maschinenspannung so gewählt wurden, daß der Drehstromgenerator so langsam lief, daß bei Einschaltung sämtlicher drei Phasen die Periodenzahl der Wechselströme geringer war als die der Eigenschwingungen des Stabes, so legte man vor das Magnetfeld des Umformers zwei Ruhstratwiderstände 1 und 2 (Fig. 29) von einigen hundert Ohm, von denen der eine (2) durch einen parallel geschalteten Schlüssel 3 leicht kurz geschlossen werden konnte. Nun schickte man eine Phase in den Drehstromring, schloß den Widerstand 2 kurz und regulierte mit

dem Widerstand 1 die Tourenzahl der Maschine, so daß der Stab in Resonanz geriet. Dann wurden alle drei Phasen eingeschaltet und gleichzeitig der bisher kurz geschlossene Widerstand 2. Mit diesem regulierte man nun weiter, bis auch hier Resonanz vorhanden war. Wollte man dann neuerdings nur mit einer Phase operieren, so wurde gleichzeitig mit dem Ausschalten der nicht gewünschten Phasen der Widerstand 2 kurz geschlossen.

Einige Schwierigkeiten bereitete das richtige Einspannen des Stabes. Man erhält nur dann eine wirkliche Kreisbewegung, wenn die Schwingungsmöglichkeit nach keiner Seite bevorzugt



ist. Spannt man den Stab in einen Schraubstock ein, so erhält man stets Ellipsen. Um das zu verhindern, wurde der Eisenstab mitten in einen viereckigen Messingklotz *F* (Fig. 28) eingelötet, dieser Klotz auf einer schweren Eisenplatte *G* aufgeschraubt und diese erst mit Schraubzwingen am Experimentiertisch befestigt.

Zur Erhöhung der äußeren Wirkung des Versuches beleuchtet man die Kugel von vorn mit konzentriertem Bogenlicht. Die Figuren, welche das Stabende durchläuft, werden dann von einem leuchtenden

Punkte beschrieben und sind auch auf große Entfernungen leicht sichtbar.

### § 18. Versuche im magnetischen Drehfeld.

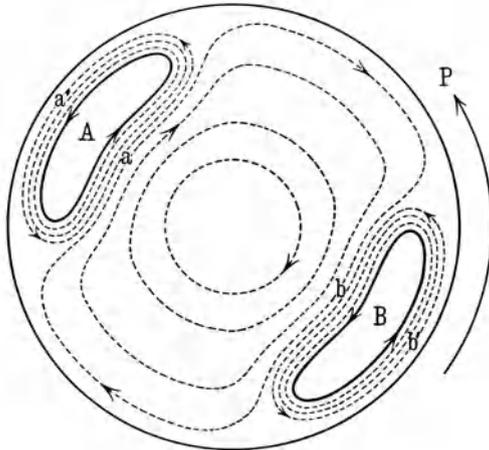
Ein beweglicher Magnet orientiert sich im magnetischen Felde entsprechend dem Verlauf der Kraftlinien; erfolgt eine Verlagerung der Kraftlinien, so folgt der Magnet, soweit dies die mechanischen Bedingungen seiner Aufhängung oder Lagerung zulassen. Das prinzipiell einfachste Mittel zum Nachweis eines magnetischen Drehfeldes ist daher eine Magnetnadel, und zwar eine Deklinationsnadel, wenn die Achse des Drehfeldes vertikal steht. Diese Orientierung wollen wir bei allen jetzt zu beschreibenden Versuchen voraussetzen. Die Deklinationsnadel gerät im Drehfelde in Rotation, ihr Rotationssinn stimmt mit dem Rotationssinne des Drehfeldes überein. Dasselbe Verhalten zeigt ein Eisenstäbchen oder Nickelstäbchen, welches an die Stelle der

Magnetnadel gesetzt wird. Aber nicht nur ferromagnetische Substanzen, wie die genannten, auch ein Wismutstäbchen, also ein Stab aus einer stark diamagnetischen Substanz, verhält sich genau in derselben Weise. Während die Magnetnadel oder Stäbchen aus ferromagnetischen Stoffen, falls keine Reibung vorhanden wäre, parallel zu den Kraftlinien mit diesen rotieren würden, würde ein reibungslos drehbares Wismutstäbchen senkrecht zu den Kraftlinien mit diesen rotieren. Infolge der Reibung bleiben die Stäbchen hinter dem Felde zurück, der Rotationssinn ist aber bei para- und diamagnetischen Stäbchen derselbe. Stäbchen aus schwach magnetischen Stoffen, z. B. Kupfer, werden vom Drehfelde nicht beeinflusst.

Eine eigentümliche Erscheinung beobachtete Verfasser in einem Drehfelde, das von einem mit Dreiphasenstrom gespeisten Statorring geliefert wurde. In das Feld wurde eine Kristallisierschale mit Wasser gestellt und auf die Oberfläche feines Eisenpulver aufgestreut. Nach kurzer Zeit wurde ein Teil des Pulvers gegen den Rand der Schale getrieben, längs dessen es in umlaufende Bewegung geriet, und zwar entgegengesetzt dem Drehungssinne des Feldes. Ein Teil des Pulvers sank unter und setzte sich in Büscheln am Rande an; diese Büschel blieben aber nicht ruhig liegen. Es wurden kontinuierlich Teile derselben losgerissen, im Sinne der Drehungsrichtung des Feldes fortgeführt, wieder am Rande abgesetzt usf. Man erhielt so zunächst den Eindruck, als ob auf der Oberfläche und auf dem Boden entgegengesetzter Drehungssinn des Feldes bestehen würde, was um so verwunderlicher wäre, als für vollständige Symmetrie der Aufstellung Sorge getragen war und die horizontale Medianebene der Wassermasse mit der horizontalen Medianebene des Statorringes zusammenfiel. Bei näherem Zusehen zeigte sich, daß in der Oberfläche an zwei diametral gegenüberliegenden Punkten Wirbel vorhanden waren, welche im Sinne des Feldes rotierten. Die Umlaufbewegung der übrigen Eisenpulverteilchen erfolgt im entgegengesetzten Sinne; sie ist der Zirkulationsbewegung der Wirbelkörper der beiden Wirbel zu danken (Fig. 30). Sind  $A$  und  $B$  die mit dem Drehfeld, dessen Rotationssinn durch den Pfeil  $P$  angedeutet ist, in gleichem Sinne rotierenden Wirbel, so sind die Geschwindigkeiten der Zirkulationsbewegung an den Stellen  $a$  und  $b$  so gerichtet, wie die Pfeile bei  $a$  und  $b$  es andeuten, während sie

bei  $a'$  und  $b'$  die entgegengesetzte Richtung haben. Es resultiert eine Zirkulation in der Oberfläche, wie sie durch die punktierten Linien angedeutet ist und durch die mitgeführten Eisenteilchen in natura sichtbar wird. Die Wirbelbewegung der Flüssigkeit ist natürlich durch die vom Drehfeld bewegten Eisenteilchen hervorgerufen, reines Wasser oder auch eine stark magnetische Flüssigkeit bleibt im Drehfelde vollkommen ruhig. Daß das Eisenpulver gegen den Rand des Gefäßes getrieben wird, ist selbstverständlich, da ja das Feld nicht absolut homogen und die Feldstärke am Rande größer ist als in der Mitte. Man müßte

Fig. 30.



nun erwarten, daß man solche Wirbel an allen Polen des Statorringes erhält. Da dies nicht der Fall ist, muß man schließen, daß nicht alle Pole gleichwertig sind, was auch durch Untersuchung derselben mit Gleichstrom festgestellt werden konnte. Auf dem Boden des Gefäßes wird die Wirbelbewegung durch die Reibung so stark beeinträchtigt, daß ihr Einfluß ganz gegen den unmittelbaren Einfluß des Drehfeldes zurücktritt. Die hauptsächlich in den Wirbelachsen der beiden Wirbel zu Boden gelangten Eisenteilchen folgen direkt der Bewegung des Feldes.

Stellt man in das Drehfeld einen Hohlzylinder aus Eisenblech, der zwischen zwei Spitzen läuft, oder die Hälfte einer Büchse aus Eisenblech, die auf einer Spitze aufsitzt, so rotiert

dieselbe ebenfalls im Sinne des Drehfeldes. Spielt hier die in dem Eisen induzierte Magnetisierung beim Zustandekommen der Drehbewegung eine Rolle, so überzeugt man sich leicht, daß sie jedenfalls nicht allein die Ursache der Drehung ist<sup>1)</sup>. Der Versuch gelingt ebensogut mit einem Hohlzylinder aus Kupfer oder einem anderen Metall von besserer spezifischer Leitfähigkeit. In dem letzteren Falle wird die Drehung durch die ponderomotorischen Kräfte bewirkt, welche der Hohlzylinder infolge der in ihm induzierten Ströme durch das Drehfeld erfährt. Um diese Verhältnisse zu erläutern, stellen wir die folgenden Überlegungen an<sup>2)</sup>.

Fig. 31 a.

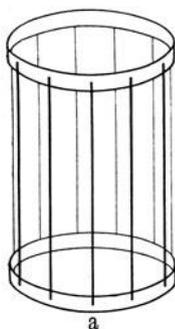


Fig. 31 b.

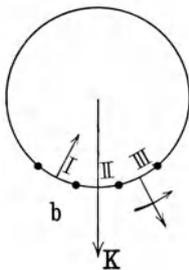
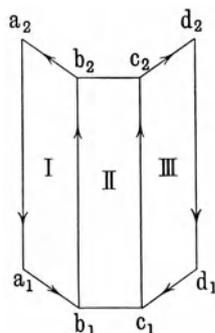


Fig. 32.



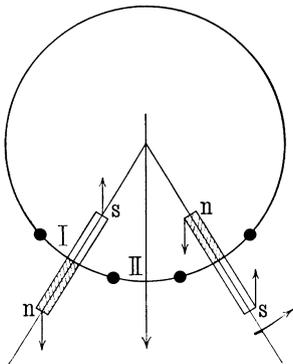
Das Drehfeld sei in der ganzen Ausdehnung des Hohlzylinders homogen und rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Den Hohlzylinder denken wir uns durch eine Reihe von parallelen, gleich weit voneinander abstehenden Metallstäben ersetzt, welche oben und unten durch zwei Metallringe verbunden sind (Fig. 31 a). In der Tat rotiert ein solcher Käfig im Drehfeld wie ein solider Hohlzylinder. Je zwei Stäbe und die zwischen ihnen liegenden Teile des Metallringes bilden ein Rechteck. In einem bestimmten Moment habe das magnetische Feld die Richtung des Pfeiles  $K$  in Fig. 31 b, der Rotationsinn des Feldes entspreche der Richtung des tangential gerichteten Pfeiles. Die magnetischen Kraftlinien treten durch

<sup>1)</sup> Vgl. diesbezüglich § 22.

<sup>2)</sup> Unsere Darstellung folgt hier prinzipiell den Ausführungen in J. Zennecks Buche: Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Telegraphie, S. 281—282. Stuttgart, F. Enke, 1905.

die Rechtecke I, II, III in demselben Sinne, nämlich von innen nach außen. Das Feld ist homogen, die Gesamtzahl der Kraftlinien, welche durch jedes dieser drei Rechtecke hindurchtreten, hängt von dem Winkel ab, welche die Normalen auf den Ebenen der Rechtecke mit der Richtung des Feldes einschließen. Steht, wie in der Figur angenommen, in dem betrachteten Moment die Ebene des Rechteckes II auf der Richtung der magnetischen Kraft senkrecht, so ist die Gesamtzahl der Kraftlinien, welche durch dieses Rechteck hindurchtreten, die Maximalzahl, welche überhaupt durch jedes der Rechtecke hindurchtreten kann. In den Rechtecken I und III ist die Gesamtzahl der hindurchtretenden Kraftlinien gleich groß, aber geringer als im Rechteck II. Es besteht aber doch ein Unterschied zwischen den Rechtecken I und III. Die magnetische Kraft verändert ihre Richtung, und in einem etwas späteren Moment als derjenige, von welchem wir ausgehen, ist die Gesamtzahl der Kraftlinien in III gewachsen, während sie in I abgenommen hat. Wenn sich das Feld um

Fig. 33.



einen unendlich kleinen Winkel dreht, nimmt die Zahl der Kraftlinien in I ab, in III zu, während sie in II ungeändert bleibt. Der Änderung der Kraftlinienzahl entspricht die Entstehung von Induktionsströmen in den Rechtecken I und III. Nach der Rechten-Hand-Regel haben die in den einzelnen Stäben induzierten elektromotorischen Kräfte die Richtung von unten nach oben; da aber bei der Drehung des Feldes die Stäbe  $b_1 b_2$  und  $c_1 c_2$  mehr Kraftlinien schneiden als die Stäbe  $a_1 a_2$  und  $d_1 d_2$  (Fig. 32), wie man

sofort einsieht, wenn man sich das Feld ruhend und die Rechtecke I, II, III unendlich wenig in entgegengesetzter Richtung gedreht denkt, wodurch ja dieselbe Änderung ihrer relativen Lage gegenüber dem Felde herbeigeführt wird, so überwiegt in dem Rechteck I die im Stabe  $b_1 b_2$ , in dem Rechteck III die im Stabe  $c_1 c_2$  induzierte elektromotorische Kraft und die induzierten Ströme in den beiden Rechtecken haben infolgedessen die in der Fig. 32

durch die Pfeile angedeutete Richtung. Wir können uns daher das Rechteck I durch einen Magneten (Fig. 33) ersetzen, dessen Südpol  $s$  innerhalb, dessen Nordpol  $n$  außerhalb des Zylinders liegt, das Rechteck III durch einen entgegengesetzt orientierten Magnet von gleichem magnetischen Moment. Diese Magnete erfahren durch das Feld Drehungsmomente, welche entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers, also im Sinne der Drehungsrichtung des Feldes wirken. Der Käfig muß infolgedessen im Sinne der Drehungsrichtung des Feldes rotieren. Das gleiche gilt natürlich für einen soliden Hohlzylinder, den wir uns in beliebig viele Rechtecke zerlegt denken können.

Schiebt man über einen isolierenden Zylinder Drahtkreise, deren Ebenen senkrecht zur Zylinderachse stehen, und orientiert den Zylinder in einem Drehfelde so, daß seine Achse mit der des Drehfeldes zusammenfällt, so rotiert er in dem Felde nicht, weil keine Induktionsströme zustande kommen.

Bei den vorstehenden Überlegungen haben wir von der Wirkung der Selbstinduktion in den einzelnen Rechtecken ganz abgesehen. Die Selbstinduktion kann aber, wie wir im § 2 gesehen haben, höchstens eine Phasendifferenz von  $90^\circ$  zwischen dem Strome und der wirkenden elektromotorischen Kraft erzeugen, die Richtung der induzierten Ströme also nicht beeinflussen. Sie darf außer Betracht bleiben, wenn es sich nur um die Bestimmung des Drehungssinnes handelt, muß dagegen berücksichtigt werden, wenn das Drehungsmoment berechnet werden soll, welches das Drehfeld ausübt. Der Betrag der Selbstinduktion aber hängt nicht nur von den Leitern selbst, sondern auch von der Permeabilität des sie umgebenden Mediums ab. Ist Eisen im Felde vorhanden, so wird dadurch die Selbstinduktion erhöht. Außerdem ist zu beachten, daß die Ströme im rotierenden Zylinder ihrerseits ein magnetisches Feld hervorrufen, welches sich über das magnetische Drehfeld superponiert. Alle diese Momente spielen eine wichtige Rolle in den Drehstrommotoren, die ja im wesentlichen mit der besprochenen Versuchsanordnung übereinstimmen. Der metallische Hohlzylinder oder der seine Stelle vertretende Käfig entspricht dem Anker, Läufer oder Rotor genannten beweglichen Teile des Motors, der in dem von dem Stator oder Ständer desselben erzeugten Drehfelde rotiert. Es war ja überhaupt ein technisches Problem, die Vermeidung der Nachteile der einphasigen

Wechselstrommotore, welches durch das von Galileo Ferraris<sup>1)</sup> begründete magnetische Drehfeld und die hierauf basierten Konstruktionen die bedeutendste Förderung erfahren hat.

Das magnetische Drehfeld ist ein bequemes Mittel, um Metallkörper von geeigneter Form in Rotation zu versetzen und Rotationsphänomene zu demonstrieren. Kreisel der gewöhnlichen Bauart geraten in dem Drehfelde nicht in Bewegung, da ihre Erstreckung parallel zur Drehungsachse zu klein ist. Umgibt man sie aber mit einem Hohlzylinder aus Kupferblech, so rotieren sie im Drehfelde. V. v. Lang demonstrierte die bekannte Erscheinung, daß sich ein hartgekochtes Ei, das in rasche Drehung versetzt wird, auf die Spitze stellt, mit einem Ei aus Kupfer. Er erzielte auf diese Weise eine beträchtliche Drehungsgeschwindigkeit, so daß die Rotation lange anhielt und das auf der Spitze stehende Ei mit seiner Unterlage bequem aus dem Drehfelde herausgehoben werden konnte.

Da die Größe des erzeugten Drehungsmomentes von der Intensität der induzierten Ströme und diese von dem spezifischen Widerstande des Materials abhängt, dokumentiert sich die Verschiedenheit der spezifischen Widerstände auch in der Fähigkeit der Körper, im Drehfelde in Rotation zu geraten. Während eine Hohlkugel oder Vollkugel aus Kupfer oder Messing, die einfach auf einer Unterlage aus Glas oder Holz aufruhrt, im Drehfelde in sehr rasche Rotation gerät, bleibt eine Hohl- oder Vollkugel aus Blei ruhig liegen.

Endlich finde noch ein von Thomae<sup>2)</sup> angegebener Drehfeldversuch Erwähnung, welchen er mit der Weilerschen Drehfeldanordnung ausführte. Das Drehfeld wurde mit Gleichstrom mit Hilfe eines Kommutators erzeugt. In Fig. 34 seien I und II die Pole des einen, III und IV diejenigen des anderen Hufeisens. Der Stromwender stehe so, daß beide Elektromagnete erregt werden, daß also beispielsweise I und III Nordpole, II und IV Südpole sind. Ein Eisenstäbchen, welches etwas kürzer ist, als der Abstand der Mittelpunkte zweier benachbarter Eisenkerne, wird auf ein auf die Polenden gelegtes Glimmerblatt gebracht;

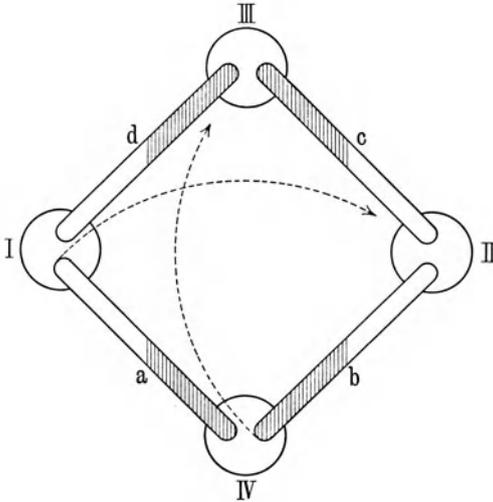
---

<sup>1)</sup> Rotaz. elettrodin. prodotte per mezzo di corr. alternate. Atti Accad. Torino 23, 360 (1888).

<sup>2)</sup> Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. 12, 282 (1899).

es stellt sich in die Richtung der Verbindungsgeraden zweier benachbarter Pole ein; es seien dies hier die Pole I und IV (Lage *a*). Wird nun bei der Drehung des Stromwenders der Strom in den Windungen von I und II unterbrochen, während er in denen von III und IV weiter besteht, so erhält das Stäbchen einen Bewegungsantrieb, welcher es in die Richtung III—IV einzustellen sucht. Da aber im nächsten Augenblicke I und II wieder erregt werden, wobei aber I Südpol, II Nordpol wird, so dreht sich das Stäbchen weiter bis in die Verbindungslinie IV—II (Lage *b*); bei dieser

Fig. 34.



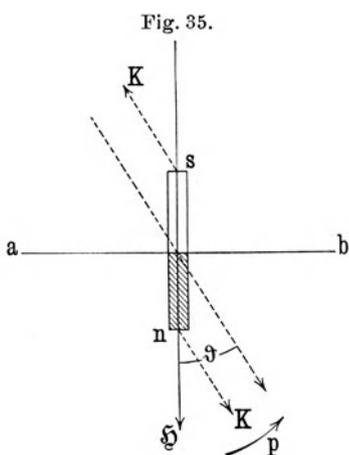
Drehung um IV bleibt das eine (in der Figur schraffierte) Ende des Stäbchens auf dem Pole IV liegen. Wenn nun bei der nächsten Vierteldrehung des Stromwenders die Pole III und IV ihre Polarität wechseln, so fliegt das vorher liegen gebliebene Ende des Stäbchens von IV nach III (Lage *c*), während das andere (nicht schraffierte) Ende auf II liegen bleibt. Nachdem sich das Stäbchen bei der nächsten Vierteldrehung in die Lage *d* gestellt hat, kehrt es nach einer weiteren Vierteldrehung in die Lage *a* zurück, worauf sich das Spiel wiederholt. Das Stäbchen wandert also fortwährend im Kreise herum und es sieht aus, als

reichte es ein Pol dem anderen zu. Es behält dabei die zuerst angenommene Polarität ständig bei.

Die Braunsche Röhre, welche bei der Untersuchung magnetischer Wechselfelder Verwendung findet, kann auch zur Untersuchung eines magnetischen Drehfeldes benutzt werden. Die auf dem in der Röhre angebrachten Phosphoreszenzschirm leuchtend werdende Spur des durch das Feld abgelenkten Kathodenstrahlenbüschels gibt ein unmittelbares Bild von der Konfiguration des Feldes. Ist das Feld kreisförmig, so ist diese Spur ein Kreis.

### § 19. Die Größe des Drehungsmomentes.

Die Berechnung der Größe des Drehungsmomentes, welches ein in ein magnetisches Drehfeld gebrachter Körper erfährt, ist keine einfache Aufgabe. In exakter Weise läßt sie sich nur lösen, wenn man von den Gleichungen des magnetischen Feldes für bewegte Körper ausgeht; die vollständige Lösung läßt sich auch nur für einfache Gestalten, z. B. die Kugel oder das Rotationsellipsoid, angeben<sup>1)</sup>. Die Durchführung einer solchen Rechnung



überschreitet die Aufgabe unserer Schrift. Um aber eine Vorstellung von den Verhältnissen zu gewinnen, untersuchen wir einen speziellen Fall unter sehr vereinfachenden Voraussetzungen.

Der Läufer sei ein Zylinder aus isolierendem Material, in welchem durch das Drehfeld keine Ströme induziert werden. Die Achse des Zylinders sei Rotationsachse des Feldes. Der Zylinder sei mit Rechtecken aus Draht bewickelt, die in sich geschlossen, aber voneinander isoliert seien. Die Ebenen der Rechtecke enthalten die Zylinderachse und schließen miteinander gleiche Winkel ein; ihre Anzahl sei  $N$ . Ein derartiger Läufer repräsentiert

<sup>1)</sup> Es sei diesbezüglich verwiesen auf R. Gans, Über Induktionen in rotierenden Leitern. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 48, 1 (1903).

einen „Kurzschlußanker“ eines Drehstrommotors. Ist  $r$  der Radius,  $h$  die Höhe des Zylinders, so ist  $q = 2rh$  der Querschnitt eines Rechteckes. Wir betrachten nun ein solches Rechteck, das, von oben gesehen, in Fig. 35 durch die Strecke  $ab$  dargestellt ist. Die Feldstärke des homogen vorausgesetzten Feldes sei  $\mathfrak{H}$ , das Feld rotiere in der durch den Pfeil  $p$  angegebenen Richtung. Steht das Rechteck  $ab$  senkrecht auf der Kraftrichtung, so gehen durch seinen Querschnitt  $q\mathfrak{H}$  Kraftlinien. Nach einer Zeit  $t$  habe sich das Feld um den Winkel  $\vartheta$  gedreht. Die Zahl der Kraftlinien ist nun kleiner geworden, und zwar beträgt dieselbe  $Z = q\mathfrak{H} \cos \vartheta$ . Dreht sich nun das Feld um den Winkel  $d\vartheta$  in der Zeit  $dt$  weiter, so ändert sich die Kraftlinienzahl um  $dZ$  und es gilt wieder:

$$Z + dZ = q\mathfrak{H} \cos(\vartheta + d\vartheta).$$

Hieraus folgt

$$dZ = q\mathfrak{H} \cos(\vartheta + d\vartheta) - Z = q\mathfrak{H} [\cos(\vartheta + d\vartheta) - \cos \vartheta]$$

und

$$\frac{dZ}{d\vartheta} = q\mathfrak{H} \frac{\cos(\vartheta + d\vartheta) - \cos \vartheta}{d\vartheta} = -q\mathfrak{H} \sin \vartheta.$$

Die induzierte elektromotorische Kraft ist:

$$V = - \frac{dZ}{dt} = - \frac{dZ}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = q\mathfrak{H} \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Ist  $\alpha$  die Winkelgeschwindigkeit und  $\tau$  die Umlaufszeit des Feldes ( $\alpha\tau = 2\pi$ ), so ist  $\vartheta = \alpha t$  und

$$V = \alpha q\mathfrak{H} \sin \alpha t \dots \dots \dots (1)$$

Wir wollen nun annehmen, daß der Widerstand  $w$  des Rechteckes groß sei, so daß nur ein schwacher Strom entsteht, dessen magnetische Wirkungen vernachlässigt werden können. Es ist dann sowohl die Selbstinduktion im Rechteck selbst als auch die Induktion des induzierten Stromes auf die anderen Rechtecke gleich Null und ebenso die Induktion der übrigen Rechtecke auf das betrachtete zu vernachlässigen. Die Stromstärke in dem Rechteck hat unter diesen Voraussetzungen den Wert

$$i = \frac{V}{w} = \frac{\alpha q\mathfrak{H}}{w} \sin \alpha t \dots \dots \dots (2)$$

Das stromdurchflossene Rechteck ist äquivalent einem Magneten von der Polstärke  $m$  und dem Polabstand  $l$ , wenn diese

Größen so gewählt werden, daß das magnetische Moment des Magneten gleich ist dem galvanischen Moment des Rechteckes

$$ml = qi.$$

Die Achse des Magneten steht senkrecht auf der Ebene des Rechteckes, seine Pole entsprechen der Richtung des induzierten Stromes. Sie sind in der Fig. 35 angegeben. Auf jeden der beiden Pole wirkt das Feld mit einer Kraft, deren Größe  $K$  gleich  $m\mathfrak{H}$  ist. Diese Kräfte geben das gesuchte Drehungsmoment:

$$\begin{aligned} D_1 &= m\mathfrak{H}l \cos(90 - \vartheta) = m\mathfrak{H}l \sin \vartheta \\ &= iq\mathfrak{H} \sin \alpha t = \frac{\alpha q^2 \mathfrak{H}^2}{w} \sin^2 \alpha t . . . . . (3) \end{aligned}$$

Das Drehungsmoment  $D_2$ , welches ein zweites Rechteck erfährt, das auf dem betrachteten senkrecht steht, erhalten wir aus dem soeben gefundenen, wenn wir  $\sin \vartheta$  durch  $\cos \vartheta$  ersetzen:

$$D_2 = \frac{\alpha q^2 \mathfrak{H}^2}{w} \cos^2 \alpha t.$$

Das gesamte Drehungsmoment  $D$ , welches auf diese beiden Stromkreise wirkt, ist

$$D = D_1 + D_2 = \frac{\alpha q^2 \mathfrak{H}^2}{w};$$

es hat einen konstanten, von der Zeit, also auch von der momentanen Stellung der beiden Rechtecke im Drehfelde unabhängigen Wert.

Sind  $N$  Rechtecke vorhanden, so teilen wir sie in  $\frac{N}{2}$  Gruppen von je zwei zueinander senkrechten Rechtecken und erhalten für das gesamte Drehungsmoment, welches ein Läufer solcher Art erfährt:

$$\mathfrak{D} = \frac{N}{2} \frac{\alpha q^2 \mathfrak{H}^2}{w} = \frac{4 \pi N r^2 h^2 \mathfrak{H}^2}{w \tau} . . . . . (4)$$

es ist proportional dem Quadrat der Feldstärke, und umgekehrt proportional der Umlaufszeit oder proportional der Umlaufszahl des Feldes.

Ein Hohlzylinder, der oben und unten einen Boden hat, kann in derartige Rechtecke, wie sie hier betrachtet wurden, zerlegt gedacht werden. Es gilt daher für ihn der gefundene Satz

unter den gemachten Voraussetzungen. Desgleichen gilt er für Hohlzylinder ohne Boden oder für den in Fig. 31 abgebildeten Läufer; denn für die induzierte elektromotorische Kraft ist nur die Änderung der Gesamtzahl der Kraftlinien, welche durch die Fläche des Leiters hindurchtreten, maßgebend, und es ist gleichgültig, ob die beiden zur Rotationsachse parallelen Leiterstücke durch Drähte verbunden sind, die Diameter des Läufers bilden, oder solche, die Teile seines Umfanges sind.

Wir wollen nun noch mit Rücksicht auf ein im § 21 zu behandelndes Problem den Einfluß der Selbstinduktion auf die Größe des Drehungsmomentes untersuchen. Ist  $L$  der Koeffizient der Selbstinduktion, so ist der Strom  $i$  zur Zeit  $t$  in dem ersten Rechteck durch die Gleichung

$$wi = V - L \frac{di}{dt}$$

bestimmt, worin  $V$  den durch Gl. (1) bestimmten Wert hat. Nach § 2 ist

$$i = \frac{\alpha q \mathfrak{S}}{\sqrt{w^2 + \alpha^2 L^2}} \sin(\alpha t - \varphi),$$

wobei  $\cos \varphi = \frac{w}{\sqrt{w^2 + \alpha^2 L^2}}$  und  $\sin \varphi = \frac{\alpha L}{\sqrt{w^2 + \alpha^2 L^2}}$  ist.

Das Drehungsmoment, welches das Drehfeld auf das Rechteck ausübt, ist nach (3):

$$D_1 = i q \mathfrak{S} \sin \alpha t.$$

Setzt man hierin den Wert von  $i$  ein, so resultiert

$$D_1 = \frac{\alpha q^2 \mathfrak{S}^2}{\sqrt{w^2 + \alpha^2 L^2}} \sin(\alpha t - \varphi) \sin \alpha t.$$

Analog findet man das Drehungsmoment auf ein zweites, zu dem ersten senkrechtes Rechteck:

$$D_2 = \frac{\alpha q^2 \mathfrak{S}^2}{\sqrt{w^2 + \alpha^2 L^2}} \cos(\alpha t - \varphi) \cos \alpha t,$$

und das gesamte Drehungsmoment  $D$ , welches auf diese beiden Stromkreise wirkt:

$$\begin{aligned}
 D &= D_1 + D_2 = \frac{\alpha q^2 \mathfrak{H}^2}{\sqrt{w^2 + \alpha^2 L^2}} [\cos(\alpha t - \varphi) \cos \alpha t \\
 &\qquad\qquad\qquad + \sin(\alpha t - \varphi) \sin \alpha t] \\
 &= \frac{\alpha q^2 \mathfrak{H}^2}{\sqrt{w^2 + \alpha^2 L^2}} \cos \varphi,
 \end{aligned}$$

und das Drehungsmoment, welches auf den ganzen, aus  $N$  Rechtecken bestehenden Läufer wirkt:

$$\mathfrak{D} = \frac{N}{2} \frac{\alpha q^2 \mathfrak{H}^2}{\sqrt{w^2 + \alpha^2 L^2}} \cos \varphi \quad . . . . . (5)$$

Das Drehungsmoment wird durch die Selbstinduktion, wie der Vergleich der Ausdrücke (4) und (5) zeigt, herabgesetzt; einerseits weil der Widerstand scheinbar erhöht wird, andererseits weil der Faktor  $\cos \varphi$  auftritt, dessen Größe vom Betrage der Phasenverschiebung  $\varphi$  abhängt.

### § 20. Rotationen im reinen Wechselfelde.

Gemäß den Ausführungen der beiden letzten Paragraphen kann ein drehbarer Metallzylinder oder eine Metallkugel zum Nachweis eines magnetischen Drehfeldes dienen. Doch ist eine auftretende Drehung noch kein Beweis für das Vorhandensein eines Drehfeldes. Zunächst ist hervorzuheben, daß das Drehfeld kein einfaches sein muß, um Drehungen hervorzurufen. Ein elliptisches Drehfeld beispielsweise, welches etwa durch zwei zueinander senkrechte Wechselfelder von ungleicher Amplitude und einer Phasendifferenz von  $90^\circ$  erzeugt wird, wirkt wie ein einfaches kreisförmiges Drehfeld. Ein solches Feld kann aber in ein reines Wechselfeld und in ein einfaches kreisförmiges Drehfeld zerlegt werden. Die letztere Komponente, welche wir mit Zenneck <sup>1)</sup> als Drehfeldkomponente bezeichnen wollen, verursacht die Rotation. Versuche, welche wir jetzt besprechen wollen, zeigen aber, daß das wirkende Feld von Haus aus nicht einmal eine Drehfeldkomponente zu haben braucht, um Rotationen hervorzurufen zu können. Sie entstehen auch in reinen Wechselfeldern, welche keine Drehfeldkomponente besitzen. Zu der Erklärung dieser eigentümlichen Erscheinungen führt die Überlegung, daß

---

<sup>1)</sup> l. c., S. 284.

ein reines Wechselfeld kein Drehungsmoment erzeugen kann. Es muß also durch die zur Realisierung der Erscheinung in das Feld eingebrachten Körper, ev. durch den in Rotation geratenden Körper allein eine Drehfeldkomponente entstehen. In der Tat bewährt sich dieser Gesichtspunkt in allen Fällen.

Der erste, der Drehungen im reinen Wechselfelde beobachtet hat, war Tesla<sup>1)</sup>. Der einfachste seiner Versuche ist folgender. Eine Spule ist mit einem langen Eisenkern versehen. Der Kern wird horizontal gelagert. Eine Kupferscheibe, die um eine horizontale Achse drehbar ist, wird neben den Eisenkern gestellt, und zwar so, daß ihre Ebene parallel ist zur Achse des Eisenkernes. Sie rotiert, wenn durch die Spule Wechselstrom geschickt wird.

v. Lang<sup>2)</sup> benutzt zu ähnlichen Versuchen den Apparat, welchen er für die Abstoßungsversuche verwendet hatte. Die Spule wird in einem geeigneten Gestell, mit dem herausragenden Eisenkern nach unten, vertikal gestellt; sie bietet jetzt nach oben eine ebene, breite Fläche dar. Über dieser Fläche befindet sich im Abstände von 4 mm eine runde Scheibe aus 1 mm dickem Kupferblech, die um ihre Achse sehr leicht beweglich ist. Diese Achse wird in vertikaler Stellung von einer Gabel getragen, welche selbst in einem Stativ befestigt ist. Man nähert das Stativ dem Apparate so weit, daß die Kupferscheibe den Eisenkern ganz bedeckt und mit ihrem Rande den des Eisenkernes berührt. Hält man nun, während ein mäßiger Strom durch die Spule geht, über die drehbare Kupferscheibe einen der bei den Abstoßungsversuchen benutzten Aluminiumringe oder den dicken Kupfering etwas exzentrisch zu dem Eisenkern, so gerät die Scheibe in Rotation, und zwar von dem Eisenkern nach dem Ringe zu. Die in der Scheibe und in dem Ringe induzierten Ströme ziehen sich ebenso wie bei dem Versuch mit zwei Ringen an. Diese Anziehung würde aber keine Bewegung zur Folge haben, wenn die Induktion in der Kupferscheibe überall die gleiche wäre; sie ist aber über dem Eisenkern stärker als außerhalb desselben, so daß sich die Kupferscheibe in dem angegebenen Sinne bewegen muß.

Mit gleichem Erfolge kann man auch einen soliden Kupferzylinder über die Scheibe bringen, oder bloß eine etwas dickere

---

<sup>1)</sup> I. c., S. 234 u. 343.

<sup>2)</sup> I. c.

Kupferplatte, wenn sie nur exzentrisch gegen die Verbindungslinie der Mittelpunkte von Kern und Scheibe gehalten wird. Auch eine Eisenplatte bewirkt in der angegebenen Stellung die Rotation der Kupferplatte, und zwar in gleichem Sinne. An der Stelle, wo sich die Eisenplatte befindet, ist offenbar das magnetische Feld am stärksten, dort werden in der Kupferscheibe auch die stärksten Ströme induziert. Diese Ströme liegen nun exzentrisch zu dem die Spule durchfließenden Strom, gegen welchen sie nahezu um  $180^\circ$  in der Phase verschoben sind; sie werden daher von der Spule in dem früher angegebenen Sinne abgestoßen.

Die beschriebenen Rotationen lassen sich aber auch, und zwar in gleichem Sinne, durch Kupfer- oder Eisenstücke hervorbringen, die zwischen die Spule und die Kupferscheibe gebracht werden. Nur muß in diesem Falle die Scheibe, um Raum für die Metallplatten zu gewinnen, gehoben werden. Der größere Abstand der Kupferscheibe bedingt aber auch einen stärkeren Strom in der Spule, während bei der ersten Stellung der Scheibe schon ein Strom von 3 Amp. genügt, um die Rotation zu erhalten.

Für die Richtigkeit der für die Rotation der Kupferscheibe gegebenen Erklärung spricht auch das folgende Experiment. Man ersetzt die Scheibe durch einen bloßen Kupferring, der an einem Stiele in seiner Ebene befestigt und mittels desselben um eine exzentrisch gelegene vertikale Achse drehbar ist. Dieser Ring wird koaxial über den Eisenkern gestellt; bringt man nun einen zweiten Ring darüber in exzentrischer Stellung, so dreht sich der bewegliche gegen den fixen hin. Die Schwierigkeit besteht in diesem Falle nur darin, den Ring zentral über den Eisenkern zu bringen, denn bei der geringsten Unsymmetrie wird der Ring schon durch die Spule aus dem Felde hinausgeworfen.

Ein weiteres Experiment v. Langs ist das folgende. Eine kleine Spule mit Eisenkern, die aus 0,4 mm dickem Kupferdraht auf Holz gewickelt ist, 48 mm Höhe, 23 mm äußeren und 9 mm inneren Durchmesser hat, wird an die Enden der Spule des Apparates angeschlossen, so daß beide Spulen parallel geschaltet sind. Hält man nun die kleine Spule, wie früher die Ringe, vertikal über die Kupferscheibe, so rotiert dieselbe ebenfalls, die Rotation kehrt sich aber um, wenn man die kleine Spule umdreht. Die Rotation erfolgt nämlich gegen die Spule oder von ihr weg, je nachdem ihr Eisenkern das magnetische Feld verstärkt oder

schwächt. Dieselbe Wirkung wie die kleine Spule zeigte die Spule ohne Eisenkern, welche bei der Verwendung des Apparates als Transformatormodell gedient hatte.

Ähnliche Versuche waren von El. Thomson<sup>1)</sup> mit dem im § 9 beschriebenen Apparate ausgeführt worden. Außer Versuchen mit Scheiben, wie sie dann ähnlich v. Lang angestellt hat, experimentierte Thomson mit Hohlkugeln aus Kupfer. Ein sehr schönes Experiment dieser Art ist das folgende. Ein teilweise mit Wasser angefülltes Glasgefäß wird über dem Eisenkern der Spule aufgehängt und die Kugel auf das Wasser gelegt. Die Kugel rollt auf der Wasseroberfläche herum und rotiert sehr rasch. Die Wirkung wird beträchtlich gesteigert, wenn ein kupferner Ring in schiefer Stellung oder exzentrisch gegen den Eisenkern über der Kugel angebracht wird.

Ein anderer Apparat Thomsons besteht aus einem ungeschlossenen, horizontal liegenden Eisenring, der eine Bewickelung trägt. Eine Kupferscheibe, die um eine horizontale Achse drehbar ist, wird in die Unterbrechungsstelle hineingeschoben. Liegt die Rotationsachse der Scheibe nicht in der Mittelebene des Ringes, so gerät sie in Rotation, sobald durch die Bewickelung des Ringes Wechselstrom fließt. „Aus diesem Apparat könnte man einen vortrefflichen Entdecker falscher Münzen machen.“ Stellt man den Eisenring vertikal, mit der Spalte nach oben, so werden Münzen aus Silber, Gold, Kupfer, die man in die Spalte hält, herausgeschleudert, sobald man sie losläßt. Ein Falsifikat aus Blei bleibt unbeeinflusst. Das Blei leitet so schlecht, daß die Induktionsströme, welche die Ursache der Erscheinung sind, zu geringe Intensität erlangen.

Endlich sei noch die folgende von Thomson gegebene Anordnung beschrieben. Ein gußeiserner Ring  $R$  (Fig. 36) trägt an einer Stelle eine kleine Bewickelung aus Kupferdraht, die Enden der Spule sind voneinander getrennt, so daß kein Strom fließen kann. Eine Eisenscheibe  $S$  mit vertikaler Achse wird über den Ring geschoben, so daß die Mittelpunkte von Ring und Scheibe übereinander liegen. Der eiserne Ring liegt mit einem Teile seines Umfanges nahe bei seiner Bewickelung auf dem Eisenkern eines von Wechselstrom durchflossenen Elektromagneten. Schließt

---

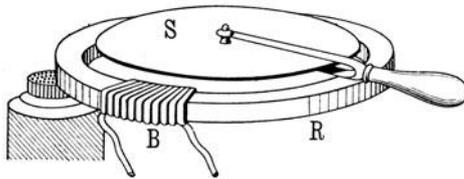
<sup>1)</sup> l. c., S. 31 u. f.

man die Bewickelung *B* kurz, so beginnt sich die Scheibe zu drehen.

Die vorstehend geschilderten Versuche können auf zwei Grundtypen zurückgeführt werden. Bei dieser Zurückführung zeigt sich deutlich das Auftreten der Drehfeldkomponente.

Der erste Typus wird durch den Teslaschen Versuch dargestellt. Die Dyssymmetrie wird durch den Läufer selbst hervorgerufen. Man kann den Versuch folgendermaßen anordnen.

Fig. 36.



Die Wechselstromspule wird horizontal gelagert (Fig. 37). Bringt man einen kleinen, um eine vertikale Achse drehbaren Kupferzylinder in die Stellung *A*, so daß bezüglich der Achse der Spule Symmetrie herrscht, so bleibt er in Ruhe. Bringt man ihn aber in die Stellung *B* oder *C*, so gerät er in lebhaftere Rotation. In

Fig. 37.

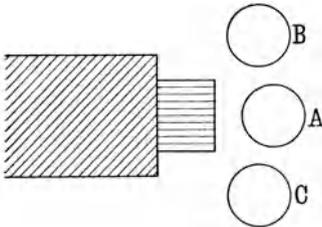
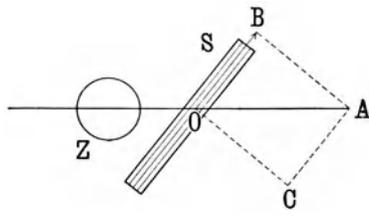


Fig. 38.



der Stellung *A* sind die im Zylinder induzierten Ströme symmetrisch zu der durch die Spulenachse gelegten Vertikalebene, die Kräfte, welche auf die beiden Zylinderhälften wirken, sind gleich groß. In Stellung *B* und *C* ist das nicht mehr der Fall, es ergibt sich ein Drehungsmoment auf den Zylinder.

Bei dem zweiten Typus wird die Dyssymmetrie durch einen Hilfskörper, z. B. durch eine Spule, hervorgerufen. Es sei (Fig. 38) ein homogenes Wechselfeld mit horizontaler Kraftichtung ge-

geben. Ein um eine vertikale Achse drehbarer Kupferzylinder  $Z$  bleibt in diesem Felde in Ruhe. Bringt man eine kurz geschlossene Spule  $S$  in der in der Figur angedeuteten Lage in das Feld, so gerät der Zylinder sofort in Rotation. Stellt  $OA$  die Amplitude der Feldstärke dar, so kann man dieselbe in zwei Komponenten  $OB$  und  $OC$  zerlegen. Die Komponente  $OB$  wird durch die Spule nicht beeinflusst. Die Komponente  $OC$  induziert aber in der Spule einen Strom, der eine Phasenverschiebung gegen die Pulsationen von  $OC$  hat. Es tritt daher zu der ursprünglichen Komponente  $OC$  noch eine zweite  $OC'$ , die ebenfalls senkrecht zu der Spule ist, aber eine Phasenverschiebung gegen  $OC$  hat. Das Feld, welches aus dem Zusammenwirken der drei Komponenten  $OB$ ,  $OC$  und  $OC'$  resultiert, ist nun nicht mehr ein reines Wechselfeld, sondern besitzt eine Drehfeldkomponente.

### § 21. Die Zerlegung eines Wechselfeldes in zwei Drehfelder.

Es seien zwei zueinander senkrechte Wechselfelder von gleicher Amplitude und gleicher Schwingungsdauer gegeben. Die Feldstärke des einen sei  $X = \frac{A}{2} \cos \alpha t$ , die des anderen  $Y = \frac{A}{2} \sin \alpha t$ . Sie liefern ein einfaches Drehfeld von der Stärke  $\sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{A}{2}$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\alpha = \frac{2\pi}{\tau}$ , worin  $\tau$  die Schwingungsdauer der beiden Wechselfelder ist. Der Winkel  $\vartheta$ , welchen das resultierende Feld zur Zeit  $t$  mit der positiven  $X$ -Richtung einschließt, ist bestimmt durch die Gleichung  $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{Y}{X} = \operatorname{tg} \alpha t$ . Hieraus folgt für  $t = 0, \frac{\tau}{4}, \frac{\tau}{2}, \frac{3\tau}{2}, \tau$  der Winkel  $\vartheta = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ . Der Winkel  $\vartheta$  wächst in demselben Sinne, in welchem die Drehung von der positiven Hälfte der  $X$ -Achse zur positiven Hälfte der  $Y$ -Achse erfolgt, also, wenn wir das Koordinatensystem in das Zifferblatt einer Uhr so legen, daß die positive Hälfte der  $X$ -Achse vom Mittelpunkte nach III, die positive Hälfte der  $Y$ -Achse nach XII weist, entgegengesetzt dem Sinne der Uhrzeigerbewegung. Ein zweites Paar zweier

zueinander senkrechter Wechselfelder, welche in demselben Koordinatensystem durch  $X' = \frac{A}{2} \cos \alpha t$  und  $Y' = -\frac{A}{2} \sin \alpha t$  dargestellt sind, geben in ähnlicher Weise ein einfaches Drehfeld von der Stärke  $\sqrt{X'^2 + Y'^2} = \frac{A}{2}$  und der Winkelgeschwindigkeit

$\alpha$ . Der Winkel  $\vartheta'$ , welchen dieses Drehfeld mit der positiven Hälfte der X-Achse einschließt, ist bestimmt durch die Gleichung  $tg \vartheta' = -tg \alpha t = -tg \vartheta$ . Dieses Drehfeld ist also in Beziehung auf Intensität und Winkelgeschwindigkeit gleich dem ersten, es rotiert aber in entgegengesetztem Sinne. Superponiert man die beiden Drehfelder, so resultiert ein Feld, welches durch die Feldstärken  $X + X'$  und  $Y + Y'$  charakterisiert ist. Nun ist  $Y + Y' = 0$ , es bleibt daher nur  $X + X' = A \cos \alpha t$ , d. i. ein reines Wechselfeld. Ein reines Wechselfeld kann also in zwei einfache Drehfelder von gleicher Amplitude und Umlaufsdauer zerlegt werden, die in entgegengesetzter Richtung rotieren; die Umlaufszeit der beiden Drehfelder ist gleich der Schwingungsdauer des Wechselfeldes, ihre Amplitude gleich der halben Amplitude desselben.

Diese ideell mögliche Zerlegung erlangt in gewissen Fällen eine praktische Bedeutung analog wie die Zerlegung eines linear polarisierten Lichtstrahles in zwei entgegengesetzt zirkularpolarisierte. G. Ferraris hat sie benutzt<sup>1)</sup>, um den folgenden, von El. Thomson herrührenden Versuch zu erklären. Zwei von den drei Klemmen eines Drehstrommotors werden mit zwei Polen einer Drehstromleitung verbunden. Im Innern ist jetzt ein reines Wechselfeld vorhanden, der Läufer bleibt in Ruhe. Man versetzt nun den Anker in Rotation, indem man die dritte Klemme des Motors mit dem dritten Pol der Leitung verbindet. Das jetzt im Innern bestehende Drehfeld bringt den Anker zum Anlaufen. Schaltet man, nachdem der Anker einigermaßen rotiert, den dritten Pol wieder ab, stellt also das Wechselfeld wieder her, so kommt der Anker nicht, wie man zunächst glauben würde, zur Ruhe, sondern seine Geschwindigkeit nimmt zu und der Motor läuft jetzt als Einphasenmotor weiter. Man kann nun den Anker bremsen; er bleibt erst stehen, sobald seine Tourenzahl unter einen gewissen Betrag herabgedrückt ist.

<sup>1)</sup> Electrician 33, 110, 129, 184 (1894).

Die Erklärung dieser eigentümlichen Erscheinung ist nach Ferraris die folgende. Es sei  $\alpha_0$  die Schwingungszahl des Wechselfeldes, seine Amplitude sei gleich  $2\mathfrak{S}$ . Wir zerlegen dieses Wechselfeld in zwei Drehfelder I und II von der Amplitude  $\mathfrak{S}$ , die in entgegengesetzter Richtung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\alpha_0$  rotieren. Der Läufer habe die in § 19 behandelte Gestalt. Er bestehe aus  $N$  unter gleichen Winkeln gegeneinander angeordneten Rechtecken vom Querschnitt  $q$ . Das Drehfeld I rotiere für den Beobachter, der in der Richtung der Rotationsachse auf die beiden Drehfelder blickt, entgegengesetzt zum Sinne, das Drehfeld II im Sinne der Uhrzeigerbewegung. Dem Anker sei eine Winkelgeschwindigkeit  $\alpha'$  entgegengesetzt zum Sinne der Uhrzeigerbewegung erteilt worden. Die Winkelgeschwindigkeit des Drehfeldes I relativ zum Anker ist dann  $\alpha_1 = \alpha_0 - \alpha'$ , die Winkelgeschwindigkeit des Drehfeldes II relativ zum Anker hingegen  $\alpha_2 = \alpha_0 + \alpha'$ . Da es nur auf die relativen Geschwindigkeiten bezüglich des Ankers ankommt, können wir den Anker als ruhend ansehen und alles auf ihn beziehen. Die Umlaufszeit des Drehfeldes I bezüglich des Ankers ist bestimmt durch die Gleichung  $\alpha_1 \tau_1 = 2\pi$ , die des Drehfeldes II ebenfalls bezüglich des Ankers durch die Gleichung  $\alpha_2 \tau_2 = 2\pi$ . Analog sind die Umlaufszahlen der beiden Drehfelder bezüglich des Ankers  $n_1 = \frac{1}{\tau_1} = \frac{\alpha_1}{2\pi}$  und  $n_2 = \frac{1}{\tau_2} = \frac{\alpha_2}{2\pi}$ . Beide Drehfelder üben auf den Anker Drehungsmomente aus; sie mögen mit  $\mathfrak{D}_1$  und  $\mathfrak{D}_2$  bezeichnet werden. Diese Drehungsmomente suchen den Anker in ihrem eigenen Drehungssinne zu drehen. Bezeichnen wir also das vom Drehfeld I ausgeübte Drehungsmoment als positiv, so ist das vom Drehfeld II ausgeübte negativ. Für die Größe der beiden Drehungsmomente erhalten wir gemäß Gl. (5) des § 19 die folgenden Ausdrücke:

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{N}{2} \frac{\alpha_1 q^2 \mathfrak{S}^2}{\sqrt{w^2 + \alpha_1^2 L^2}} \cos \varphi_1,$$

$$\mathfrak{D}_2 = -\frac{N}{2} \frac{\alpha_2 q^2 \mathfrak{S}^2}{\sqrt{w^2 + \alpha_2^2 L^2}} \cos \varphi_2;$$

oder, da  $\alpha_1 = 2\pi n_1$  und  $\alpha_2 = 2\pi n_2$ :

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{\pi N n_1 q^2 \mathfrak{H}^2}{\sqrt{w^2 + 4 \pi^2 n_1^2 L^2}} \cos \varphi_1,$$

$$\mathfrak{D}_2 = - \frac{\pi N n_2 q^2 \mathfrak{H}^2}{\sqrt{w^2 + 4 \pi^2 n_2^2 L^2}} \cos \varphi_2.$$

Bezeichnen wir die Schwingungszahl des Wechselfeldes mit  $n_0$ , die Tourenzahl des Ankers mit  $n$ , so bestehen wegen  $\alpha_0 = 2 \pi n_0$  und  $\alpha' = 2 \pi n$  die Relationen  $n_1 = n_0 - n$  und  $n_2 = n_0 + n$ . Weiter ist nach § 2:

$$\cos \varphi_1 = \frac{w}{\sqrt{w^2 + \alpha_1^2 L^2}}$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{w}{\sqrt{w^2 + \alpha_2^2 L^2}}.$$

Mit diesen Werten findet man

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{\pi N (n_0 - n) q^2 \mathfrak{H}^2 w}{w^2 + 4 \pi^2 (n_0 - n)^2 L^2}$$

$$\mathfrak{D}_2 = - \frac{\pi N (n_0 + n) q^2 \mathfrak{H}^2 w}{w^2 + 4 \pi^2 (n_0 + n)^2 L^2},$$

und das gesamte von dem reinen Wechselfeld auf den rotierenden Anker ausgeübte Drehungsmoment  $\mathfrak{D}$  durch Summation dieser beiden Ausdrücke:

$$\mathfrak{D} = \pi N q^2 \mathfrak{H}^2 w \left( \frac{n_0 - n}{w^2 + 4 \pi^2 (n_0 - n)^2 L^2} - \frac{n_0 + n}{w^2 + 4 \pi^2 (n_0 + n)^2 L^2} \right).$$

Dieser Ausdruck verschwindet für  $n = n_0$  und für einen Wert von  $n$ , welcher kleiner ist als  $n_0$ . Dazwischen bleibt er positiv und hat ein Maximum. Um ein Bild von der Größe des Drehungsmomentes für verschiedene Werte von  $n$  zu erhalten, betrachten wir einen speziellen Fall. Das Wechselfeld mache 50 Schwingungen in der Sekunde, es sei also  $n_0 = 50$ . Die einzelnen Stromleiter, aus welchen der Läufer besteht, seien Kreise aus Kupferdraht von 1,5 mm Durchmesser, ihr Umfang betrage 100 cm. Der Widerstand eines Meters von 1,5 mm dickem Kupferdraht beträgt  $w_1 = 0,0099$  Ohm oder rund  $10^{-2}$  Ohm. Der Selbstinduktionskoeffizient eines Drahtkreises vom Durchmesser  $D$  cm ist, wenn die Drahtstärke  $d$  cm beträgt,

$$L_0 = \frac{\pi D}{2} \left( 4 \log \text{nat} \frac{8D}{d} - 8 \right) \text{cm},$$

oder, wenn der Umfang des Drahtkreises mit  $u$  bezeichnet wird,

$$L_0 = \frac{u}{2} \left( 4 \log \text{nat} \frac{8u}{\pi d} - 8 \right) \text{cm}.$$

In unserem Falle ist  $u = 100 \text{ cm}$  und  $d = 0,15 \text{ cm}$ . Man findet hiermit  $L_0 = 1088 \text{ cm} = 1088 \cdot 10^{-9} \text{ Henry}$ , wofür wir abgerundet  $L_0 = 10^{-6} \text{ Henry}$  setzen wollen. Setzt man weiter näherungsweise  $4\pi^2 = 40$ , so wird  $4\pi^2 L_0^2 = 40 \cdot 10^{-12} = 40 \cdot 10^{-11}$ . Nehmen wir ferner an, der Läufer habe einen Eisenkern; die Permeabilität setzen wir, entsprechend der Berechnung im § 9, gleich 50. Wir haben dann, da  $L = \mu L_0$  ist,  $4\pi^2 L^2 = 4\pi^2 \mu^2 L_0^2 = 10^{-7}$  und es wird das Drehungsmoment  $\mathfrak{D} = [\mathfrak{D}]_1$ ,

$$[\mathfrak{D}]_1 = \pi N q^2 \mathfrak{S}^2 w_1 \cdot 10^4 \left( \frac{n_0 - n}{1 + (n_0 - n)^2 \cdot 10^{-3}} - \frac{n_0 + n}{1 + (n_0 + n)^2 \cdot 10^{-3}} \right).$$

Bezeichnen wir den Ausdruck in der Klammer mit  $M_1$ , so ergibt die Berechnung desselben für verschiedene Werte von  $n$  die folgende Tabelle:

| $n$ | $M_1$   |
|-----|---------|
| 0   | 0       |
| 10  | 2,343   |
| 20  | 3,952   |
| 30  | 3,475   |
| 40  | — 0,799 |
| 50  | — 9,091 |

Das auf den Läufer ausgeübte positive Drehungsmoment erreicht ein Maximum, wenn seine Tourenzahl etwa 20 beträgt. Steigt die Tourenzahl auf 40, so wird das Drehungsmoment negativ, es wirkt der Drehung des Läufers entgegen.

Wird das Verhältnis von Widerstand zu Selbstinduktion kleiner, so rückt die Tourenzahl des Läufers, für welche das positive Drehungsmoment den größten Wert erreicht, näher an die Schwingungszahl des Wechselfeldes heran. Wir berechnen, um dies zu zeigen, noch ein spezielles Beispiel. Die einzelnen

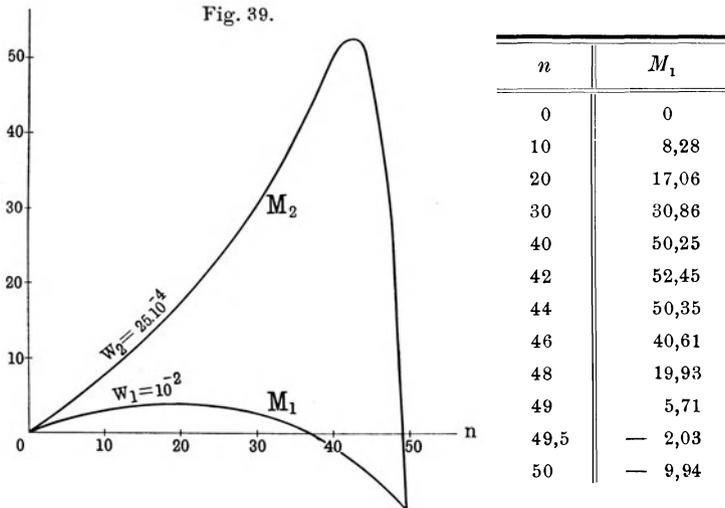
Stromkreise des Leiters seien wieder Kreise von 100 cm Umfang; sie seien aus Kupferdraht von 3 mm Durchmesser gefertigt. Der Widerstand eines Meters von 3 mm dickem Kupferdraht  $w_2$  beträgt rund  $25 \cdot 10^{-4}$  Ohm. Für den Selbstinduktionskoeffizienten  $L_0$  findet man jetzt, da  $d = 0,3$  cm ist, annähernd  $L_0 = 950$  cm  $= 950 \cdot 10^{-9}$  Henry oder rund  $10^{-12}$  Henry, d. i. nahe denselben Wert wie in dem vorigen Beispiel. Es wird hiermit das Drehungsmoment  $\mathfrak{D} = [\mathfrak{D}]_2$ ,

$$[\mathfrak{D}]_2 = \pi N q^2 \mathfrak{F}^2 w_2 10^4 \cdot 10^4 \left( \frac{n_0 - n}{625 + 10(n_0 - n)^2} - \frac{n_0 + n}{625 + 10(n_0 + n)^2} \right).$$

Der Faktor, welcher in dem vorigen Beispiel mit  $M_1$  bezeichnet wurde, hat also jetzt den Wert

$$M_2 = 10^4 \left( \frac{n_0 - n}{625 + 10(n_0 - n)^2} - \frac{n_0 + n}{625 + 10(n_0 + n)^2} \right).$$

Man berechnet jetzt folgende Tabelle:



In Fig. 39 ist der Verlauf der Funktionen  $M$  für  $w_1 = 10^{-2}$  Ohm und  $w_2 = 25 \cdot 10^{-4}$  Ohm dargestellt. Die Kurven zeigen deutlich

die Verschiebung des Maximums von  $M$  und damit des positiven Drehungsmomentes zu einer Tourenzahl, die näher an der Schwingungsdauer des Feldes liegt, wenn der Widerstand bei gleich bleibender Selbstinduktion kleiner wird.

Um von den  $M$  zu den Drehungsmomenten überzugehen, müssen sie mit  $\pi N q^2 \mathfrak{H}^2 w \cdot 10^4$  multipliziert werden. Setzen wir dieselbe Feldstärke voraus, so hat  $\pi N q^2 \mathfrak{H}^2 \cdot 10^4$  in beiden Fällen denselben Wert, der mit  $A$  bezeichnet werde. Wir erhalten somit  $[\mathfrak{D}]_1 = A w_1 M_1$  und  $[\mathfrak{D}]_2 = A w_2 M_2$ . Es war  $w_1 = 10^{-2}$  Ohm,  $w_2 = 25 \cdot 10^{-4}$  Ohm. Man erhält hiermit folgende Tabelle:

| $n$ | $[\mathfrak{D}]_1/A$ | $[\mathfrak{D}]_2/A$ |
|-----|----------------------|----------------------|
| 0   | 0                    | 0                    |
| 10  | 0,023 43             | 0,020 70             |
| 20  | 0,039 52             | 0,042 65             |
| 30  | 0,034 75             | 0,077 15             |
| 40  | — 0,007 99           | 0,125 63             |
| 42  | —                    | 0,130 13             |
| 44  | —                    | 0,125 88             |
| 46  | —                    | 0,101 53             |
| 48  | —                    | — 0,005 08           |
| 50  | — 0,090 91           | — 0,026 85           |

Das Drehungsmoment erreicht, wie die Tabelle zeigt, bei dem kleineren Widerstand größere Werte als bei dem größeren. Das Verhältnis der Maximalwerte von  $[\mathfrak{D}]_2$  (bei  $n = 42$ ) und  $[\mathfrak{D}]_1$  (bei  $n = 20$ ) beträgt  $\frac{0,130\ 13}{0,039\ 52} = 3,32$ .

## Viertes Kapitel.

### Das elektrostatische Drehfeld.

#### § 22. Das elektrostatische Drehfeld. Anordnung von Arnò.

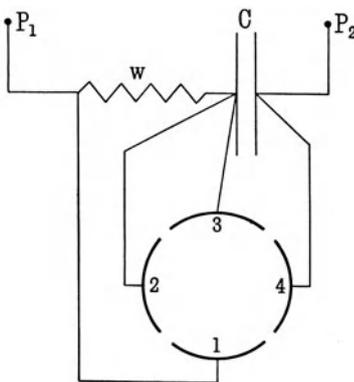
G. Ferraris zeigte <sup>1)</sup>, daß ein Eisenzylinder in einem magnetischen Drehfelde in Rotation gerät, auch wenn er so unterteilt

<sup>1)</sup> Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino 23, 360 (1888).

ist, daß in ihm Foucaultströme nicht zustande kommen können; die Rotation des Zylinders ist in diesem Falle der magnetischen Hysterese zu danken; das induzierte magnetische Moment bleibt hinter dem induzierenden rotierenden Felde zurück und es resultiert, da die Richtung der Magnetisierung mit der Richtung des induzierenden Feldes einen von Null verschiedenen Winkel einschließt, ein Drehungsmoment auf den Eisenzylinder.

Dieser Versuch von Ferraris brachte R. Arnò auf den Gedanken, eine analoge Versuchsanordnung zur Untersuchung der dielektrischen Hysterese zu verwenden. Die magnetische Kraft mußte durch eine elektrische, das magnetische Drehfeld

Fig. 40.



durch ein elektrostatisches ersetzt werden. Dieses realisierte Arnò in der folgenden Weise <sup>1)</sup>. Der von einer Wechselstrommaschine gelieferte einphasige Strom wurde durch die Primärspule eines Transformators geleitet, während die Sekundärspule durch einen induktionslosen Widerstand und einen Kondensator in Reihe geschlossen wurde. Von den Enden des Widerstandes und den Belegungen des Kondensators führten Lei-

tungen kreuzweise zu den vier Polen des Drehfeldapparates. Dieser bestand aus vier auf einer isolierenden Grundplatte vertikal aufgestellten Blechstreifen, die einen Zylinder mit vier Schlitzen bilden, wie dies in Fig. 40, die Arnòs Anordnung wiedergibt, dargestellt ist. ( $P_1$ ,  $P_2$  Pole des Transformators,  $w$  Widerstand,  $C$  Kondensator.) Die Potentialdifferenz zwischen den Belegungen des Kondensators und die Potentialdifferenz an den Enden des Widerstandes  $w$  haben eine Phasendifferenz  $\frac{\pi}{2}$ , wie die Theorie der Versuchsanordnung ergibt.

<sup>1)</sup> Atti della R. Accad. dei Lincei, 5. Ser. Rendiconti. Classe di scienze fis., matem. e nat. 1, 2<sup>o</sup> Sem., 284 (1892).

Zur Zeit  $t$  habe der Transformatorpol  $P_1$  das Potential  $V_1 = A_1 \sin \alpha t$ . Dieser Pol sei durch den Widerstand  $w$  mit der einen Belegung des Kondensators verbunden; das Potential dieser Platte sei  $v_1$ . Das Potential des zweiten Transformatorpoles  $P_2$  sei  $V_2 = A_2 \sin \alpha t$ ; er ist mit der anderen Belegung des Kondensators, deren Potential mit  $v_2$  bezeichnet werde, durch einen induktionslosen Draht vom Widerstand  $w_0$  verbunden. Die Stromstärke ist in den beiden Zuleitungen zum Kondensator die gleiche (vgl. § 7) und werde mit  $i$  bezeichnet. Es gelten dann die Gleichungen

$$w i = V_1 - v_1 \quad \dots \dots \dots (1_0)$$

$$w_0 i = v_2 - V_2$$

oder

$$(w + w_0) i = (V_1 - V_2) - (v_1 - v_2).$$

Setzt man  $A_1 - A_2 = A$ , so geht diese Gleichung über in

$$(w + w_0) i = A \sin \alpha t - (v_1 - v_2).$$

Nun ist (Gl. 4, § 7)

$$v_1 - v_2 = \frac{e}{C} \quad \dots \dots \dots (1)$$

wenn  $e$  die Ladung und  $C$  die Kapazität des Kondensators ist. Hiermit erhält man

$$(w + w_0) i = A \sin \alpha t - \frac{e}{C}$$

oder

$$(w + w_0) \frac{di}{dt} = A \alpha \cos \alpha t - \frac{1}{C} \frac{de}{dt} \quad \dots \dots (2)$$

Da weiter

$$i = \frac{de}{dt} \quad \dots \dots \dots (3)$$

erhält man schließlich aus (2):

$$(w + w_0) \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = A \alpha \cos \alpha t.$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet:

$$i = \frac{A}{\sqrt{(w + w_0)^2 + \frac{1}{\alpha^2 C^2}}} \sin(\alpha t + \varphi),$$

wobei  $\varphi$  bestimmt ist durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\alpha C(w + w_0)}.$$

Ist der Widerstand  $w_0$  zu vernachlässigen gegen  $w$ , was wir annehmen wollen, so ist

$$i = \frac{A}{\sqrt{w^2 + \frac{1}{\alpha^2 C^2}}} \sin(\alpha t + \varphi) \dots (4)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\alpha C w}.$$

Die Pole des Drehfeldes sind mit den Transformatorpolen und den Kondensatorbelegungen verbunden, wie dies in Fig. 41 angegeben ist; sie haben folgende Potentiale:

- Pol 1 das Potential  $V_1$ ,
- Pol 2 das Potential  $v_1$ ,
- Pol 3 das Potential  $v_1$ ,
- Pol 4 das Potential  $V_2 = v_2$ ;

es wirken daher in den Richtungen der Durchmesser 2–4 und 1–3 Kräfte, welche durch die Potentialdifferenzen  $v_1 - v_2$  bzw.  $V_1 - v_1$  bedingt sind. In der Mitte der Drehfeldanordnung, in einem gewissen Bereich, dürfen die beiden übereinandergelagerten Felder jedenfalls als homogen angesehen werden, wenn, wie dies vorausgesetzt ist, die Pole des Drehfeldes geometrisch gleich und symmetrisch angeordnet sind. Macht man die Richtung 2–4 zur X-Achse, die Richtung 1–3 zur Y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit dem Mittelpunkt des Drehfeldes als Anfangspunkt, so ist in der Mitte die Kraft parallel zur X-Achse

$$X = K(v_1 - v_2),$$

die Kraft parallel zur Y-Achse

$$Y = K(V_1 - v_1).$$

Hierin ist  $K$  eine Proportionalitätskonstante, die in der Mitte für beide Kräfte denselben Wert hat, was allerdings außerhalb des Bereiches, in welchem die beiden Felder homogen sind, nicht mehr der Fall ist.

Aus Gl. (1) und (3) folgt

$$v_1 - v_2 = \frac{1}{C} \int i dt,$$

d. i. mit Rücksicht auf (4):

$$v_1 - v_2 = - \frac{A}{\alpha C \sqrt{w^2 + \frac{1}{\alpha^2 C^2}}} \cos(\alpha t + \varphi).$$

Andererseits ist nach (1<sub>0</sub>)

$$V_1 - v_1 = w i = \frac{w A}{\sqrt{w^2 + \frac{1}{\alpha^2 C^2}}} \sin(\alpha t + \varphi).$$

Hiermit ist die oben gemachte Bemerkung über die Phasendifferenz der beiden wirksamen Potentialunterschiede erwiesen.

Setzen wir  $\alpha t + \varphi = \alpha T$ , so ist

$$X = - \frac{K A}{\alpha C \sqrt{w^2 + \frac{1}{\alpha^2 C^2}}} \cos \alpha T$$

$$Y = \frac{K w A}{\sqrt{w^2 + \frac{1}{\alpha^2 C^2}}} \sin \alpha T.$$

Die Resultierende  $R$  dieser Kräfte hat zur Zeit  $T$  den Wert

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{K A}{\sqrt{w^2 + \frac{1}{\alpha^2 C^2}}} \sqrt{\frac{1}{\alpha^2 C^2} \cos^2 \alpha T + w^2 \sin^2 \alpha T}$$

und schließt mit der positiven Richtung der  $X$ -Achse einen Winkel  $\psi$  ein, welcher bestimmt ist durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{Y}{X} = - \alpha C w \operatorname{tg} \alpha T.$$

Wählt man  $w = \frac{1}{\alpha C}$ , so wird

$$R = \frac{K A}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \psi = - \operatorname{tg} \alpha T.$$

Die resultierende Kraft hat dann einen konstanten, von der Zeit unabhängigen Wert und rotiert mit der konstanten Winkel-

geschwindigkeit  $\alpha$ ; wir erhalten in diesem Falle ein einfaches elektrostatisches Drehfeld, dessen Tourenzahl gleich ist der Schwingungszahl des ladenden Wechselstromes.

D. Korda hat gegenüber Arnò einen Prioritätsanspruch geltend gemacht<sup>1)</sup>. Korda hat nämlich einen Kondensator zur Erzeugung von Ozon konstruiert, in welchem das elektrostatische Drehfeld realisiert war. Dieser Apparat wurde am 30. Januar 1892 in Paris zum Patent angemeldet und am 2. Mai 1892 patentiert. Eine Beschreibung des Apparates erschien am 18. Juni 1892 in „La lumière électrique“, vol. 44, p. 583. Korda erhielt das Drehfeld in der Weise, daß er mittels vier Bürsten von dem Kollektor einer Dynamo zwei Wechselspannungen abnahm, die eine Phasendifferenz  $\frac{\pi}{2}$  gegeneinander haben. Ohne Zweifel hat

Korda, nachdem Arnòs Bericht der Accademia dei Lincei in der ersten Hälfte Oktober 1892 vorgelegt wurde, die Priorität in der Herstellung eines elektrostatischen Drehfeldes; in dem wesentlichen Punkte aber, Verwendung des Drehfeldes zur Erzeugung von Rotationen dielektrischer Körper, gebührt die Priorität Arnò; denn die Beschreibung eines kleinen elektrostatischen Motors, der auf dem Prinzip des Drehfeldes beruht, hat Korda der Kgl. ungarischen Akademie der Wissenschaften erst am 14. November 1892 überreicht, während Arnòs Beschreibung seiner Rotationsversuche sowie die eines elektrostatischen Motors, der aus einem in das Drehfeld eingehängten Ebonitzylinder bestand, der Accademia dei Lincei bereits in der ersten Hälfte Oktober 1892 vorlag. Arnò weist in seiner Erwiderung<sup>2)</sup> wohl mit Recht darauf hin, daß die Herstellung eines elektrostatischen Drehfeldes nach den Versuchen von Ferraris nicht gut Gegenstand eines Prioritätsstreites sein könne.

Auch W. Weiler gibt an, auf die Idee eines elektrostatischen Drehfeldes unabhängig von Arnò gekommen zu sein<sup>3)</sup>. Seine Anordnung, in welcher mittels eines Kommutators je zwei gegenüberliegende Pole der Drehfeldanordnung durch eine Influenzmaschine abwechselnd geladen werden, reicht zwar zur Demon-

---

<sup>1)</sup> Atti Accad. Lincei, 5. Ser. Rendic. 1, 2. Sem., 431 (1892).

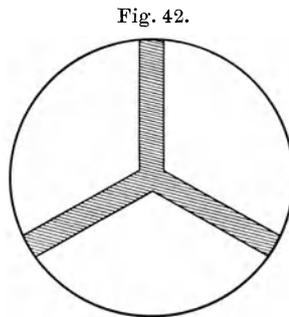
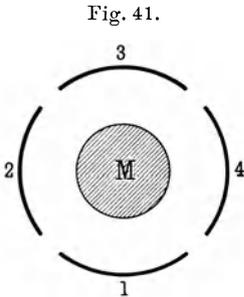
<sup>2)</sup> Dasselbst 2, 1. Sem., 179 (1893).

<sup>3)</sup> Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. 7, 1 (1893).

stration der Rotationen aus, liefert aber bloß ein Feld, das seine Richtung sprungweise ändert.

Arnò brachte später zur Erzielung größerer Feldstärke an der Drehfeldanordnung eine kleine Änderung an<sup>1)</sup>. Er stellte in das Innere des Drehfeldes (Fig. 41) einen Metallzylinder *M* konzentrisch zu den Polen des Drehfeldes. Bei dieser Anordnung können die zu untersuchenden Dielektrika allerdings nur in der Form von Hohlzylindern verwendet werden.

Hat man Dreiphasenstrom zur Verfügung, so kann man nach Arnò ein elektrostatisches Drehfeld in sehr einfacher Weise herstellen<sup>2)</sup>, indem man eine kreisförmige Metallplatte von 12 cm Durchmesser in drei gleiche Sektoren mit dem Zentriwinkel von



120° zerschneidet und hierauf auf einer isolierenden Grundlage voneinander getrennt befestigt, wie dies in Fig. 42 dargestellt ist. Die so vorbereitete Platte wird horizontal aufgestellt und jeder der Sektoren mit je einem Pol einer Dreiphasenstromleitung verbunden. Zylinder aus isolierendem Material, welche man coaxial mit der Platte über dieselbe hängt, geraten in Drehung und zeigen das Bestehen eines elektrostatischen Drehfeldes an.

### § 23. Die Drehfeldschaltung von Guye und Denso. Erste Anordnung von v. Lang.

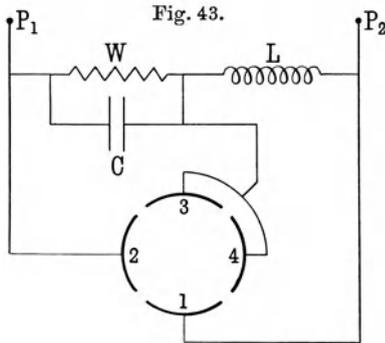
Guye und Denso<sup>3)</sup> bedienten sich zur Herstellung eines elektrostatischen Drehfeldes von hoher Spannung einer Anordnung,

<sup>1)</sup> Atti Accad. Lincei, 5. Ser. Rendic. 3, 1. Sem., 272 (1894).

<sup>2)</sup> Dasselbst 8, 2. Sem., 167 (1899).

<sup>3)</sup> Eclairage electr. 39, 201 (1904).

welche eine Abänderung des Arnòschen Arrangements darstellt. Dieselbe ist in Fig. 43 skizziert. Hier sind  $P_1$  und  $P_2$  die Pole der Wechselspannung,  $W$  ein großer induktionsloser Widerstand,  $L$  ein großer Widerstand mit Selbstinduktion,  $C$  eine variable Kapazität. Aber auch diese Anordnung, deren Theorie wir nicht entwickeln wollen, leidet an dem gleichen Nachteil wie diejenige von Arnò. Es wurde im vorigen Paragraphen bei Besprechung der ersten Anordnung Arnòs hervorgehoben, daß man das Feld nur in einem gewissen Bereiche in der Mitte als homogen ansehen kann. Dieser Bereich



ist aus dem Grunde nicht groß, weil zwei benachbarte Pole des Drehfeldes (2 und 3 in Fig. 40) stets das gleiche Potential haben. Auch bei der Anordnung von Guye und Denso sind, wie die Fig. 43 zeigt, zwei Pole mit demselben Punkte der Strombahn verbunden, folglich stets auf gleichem Potentiale, das Feld kann

daher auch nur in einem kleinen Bereiche in der Mitte homogen sein.

Das einfachste Mittel, ein homogenes Drehfeld von größerer Ausdehnung zu erhalten, wäre jedenfalls das, einen geladenen Plattenkondensator in Rotation zu versetzen. Abgesehen von der Unbequemlichkeit einer solchen Anordnung wäre es aber auch nicht leicht, so große Tourenzahlen zu erreichen, wie sie schon bei der Verwendung technischer Wechselströme erzielt werden. Es ist daher nicht zu verwundern, daß diese Anordnung von keinem Experimentator benutzt worden ist. Die Aufgabe, bei Anwendung von Wechselstrom ein einfaches Drehfeld, das in größerer Ausdehnung homogen ist, herzustellen, ist von V. v. Lang in zweifacher Weise gelöst worden.

Bei seiner ersten Anordnung<sup>1)</sup> benutzte er zwei gleiche Transformatoren; in den primären Kreis des ersten Transfor-

<sup>1)</sup> Versuche im elektrostatischen Drehfelde. Sitz-Ber. d. K. Akad. d. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., 115, IIa, März 1906.

mators wurde Widerstand, in den des anderen ein Kondensator gelegt. Die Enden je eines der sekundären Kreise wurden mit je einem Paar gegenüberliegender Pole des Drehfeldes verbunden. Ist  $w$  der Widerstand,  $L$  die Selbstinduktion der primären Spulen der beiden Transformatoren,  $W$  der Widerstand, welcher in den Stromkreis des einen,  $C$  die Kapazität, welche in den Stromkreis des zweiten eingeschaltet wurde, und ist  $A \sin \alpha t$  die Wechselspannung, so gilt für den Strom  $i_1$  im ersten Transformator nach § 2 die Gleichung

$$L \frac{di_1}{dt} + (w + W)i_1 = A \sin \alpha t \dots \dots \dots (1)$$

während der Strom  $i_2$  im zweiten Transformator nach § 7 durch die Gleichung

$$L \frac{d^2 i_2}{dt^2} + w \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C} = A \alpha \cos \alpha t \dots \dots \dots (2)$$

bestimmt ist. Nach den angeführten Paragraphen ist

$$i_1 = \frac{A}{\sqrt{(w + W)^2 + \alpha^2 L^2}} \sin(\alpha t - \varphi_1), \quad \text{tg } \varphi_1 = \frac{\alpha L}{w + W}$$

$$i_2 = \frac{A}{\sqrt{w^2 + \left(\frac{1}{\alpha C} - \alpha L\right)^2}} \sin(\alpha t + \varphi_2), \quad \text{tg } \varphi_2 = \frac{1}{w} \left(\frac{1}{\alpha C} - \alpha L\right).$$

$i_2$  eilt, wenn  $\frac{1}{\alpha C} > \alpha L$ , in der Phase um  $\varphi_2$  der Wechselspannung voraus,  $i_1$  bleibt hinter ihr um  $\varphi_1$  zurück. Die Phasendifferenz zwischen  $i_1$  und  $i_2$  ist  $\varphi_1 + \varphi_2$ . Soll sie  $90^\circ$  betragen, so muß

$$\text{tg}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\text{tg } \varphi_1 + \text{tg } \varphi_2}{1 - \text{tg } \varphi_1 \text{tg } \varphi_2} = \infty$$

oder  $\text{tg } \varphi_2 = \frac{1}{\text{tg } \varphi_1}$  sein. Setzt man die Werte für  $\text{tg } \varphi_2$  und  $\text{tg } \varphi_1$  ein, so erhält man:

$$L \frac{1}{C} - wW = w^2 + \alpha^2 L^2 = w'^2 \dots \dots \dots (3)$$

Hierin ist  $w'$  der Wechselstromwiderstand der Primärspule. Die Forderung, daß beide Ströme gleiche Amplitude haben sollen, führt zu der Gleichung

$$(w + W)^2 + \alpha^2 L^2 = w^2 + \left(\frac{1}{\alpha C} - \alpha L\right)^2$$

oder

$$2 w W + W^2 = \left(\frac{1}{\alpha C}\right)^2 - 2 \frac{L}{C} \dots \dots \dots (4)$$

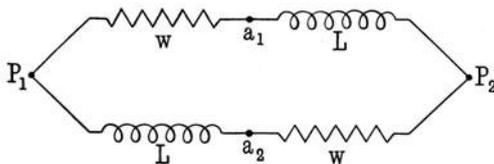
Sind  $W$  und  $C$  nach (3) und (4) bestimmt, so haben die beiden Ströme in den Primärspulen der beiden Transformatoren gleiche Amplitude, aber eine Phasendifferenz von  $\frac{\pi}{2}$ . Es werden infolgedessen die von ihnen in den Sekundärspulen der Transformatoren induzierten elektromotorischen Kräfte ebenfalls gleiche Amplitude, aber eine Phasendifferenz von  $90^\circ$  haben. Hiermit sind die Bedingungen für das elektrostatische Drehfeld erfüllt.

Die Methode ergab gute Resultate; ihr Nachteil besteht darin, daß sie nicht bloß zwei Transformatoren, sondern auch einen Kondensator von sehr großer Kapazität erfordert. Bei den Versuchen von v. Lang war  $W = 24$  Ohm,  $C = 134$  Mikrofara.

### § 24. Zweite Drehfeldanordnung von v. Lang.

Bei seiner zweiten Drehfeldanordnung, welche nur einen Transformator benötigt, benutzt v. Lang<sup>1)</sup> eine Stromverzweigung im Anschluß an eine von H. Görges<sup>2)</sup> angegebene Schaltung. Wir betrachten zunächst diese Schaltung von Görges (Fig. 44).

Fig. 44.



Der Punkt  $P_1$  habe ein Potential  $A_1 \sin \alpha t$ , der Punkt  $P_2$  ein Potential  $A_2 \sin \alpha t$  und es sei  $A_1 - A_2 = A$ . Diese beiden Punkte seien durch zwei gleiche aus je einem induktionslosen Widerstand  $w$  und je einer Selbstinduktion  $L$ , deren Widerstand verschwindend klein sei, bestehende Leitungen miteinander ver-

<sup>1)</sup> Versuche im elektrostatischen Drehfelde, l. c.  
<sup>2)</sup> Elektrotechn. Zeitschr. 19, 164 (1898).

bunden; die Widerstände und Selbstinduktionen seien in der in der Figur angegebenen Weise geschaltet. Es herrscht in beiden Zweigen dieselbe Stromstärke  $i$ , welche bestimmt ist durch die Gleichung

$$L \frac{di}{dt} + wi = A \sin \alpha t,$$

deren Lösung lautet:

$$i = \frac{A}{\sqrt{w^2 + \alpha^2 L^2}} \sin(\alpha t - \varphi), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\alpha L}{w}.$$

Untersuchen wir nun die Potentiale der Punkte  $a_1$  und  $a_2$ , welche in den beiden Zweigen zwischen Widerstand und Selbstinduktion liegen. Sind diese Potentiale  $v_1$  und  $v_2$ , so bestehen die Gleichungen

$$V_1 - v_1 = wi$$

$$v_2 - V_2 = wi$$

aus welchen folgt:

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 &= (V_1 - V_2) - 2wi = A \sin \alpha t - \frac{2A}{\sqrt{w^2 + \alpha^2 L^2}} \sin(\alpha t - \varphi) \\ &= A \sin \alpha t \left( 1 - \frac{2w \cos \varphi}{\sqrt{w^2 + \alpha^2 L^2}} \right) + \frac{2w \sin \varphi}{\sqrt{w^2 + \alpha^2 L^2}} A \cos \alpha t. \end{aligned}$$

Wir wählen nun  $w$  und  $L$  so, daß der Faktor von  $A \sin \alpha t$  verschwindet. Dies ist der Fall, wenn  $w = \alpha L$  gemacht wird.

Denn dann ist  $\operatorname{tg} \varphi = 1$ , also  $\varphi = 45^\circ$  und  $\sin \varphi = \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,

$\sqrt{w^2 + \alpha^2 L^2} = w \sqrt{2}$  und es wird

$$\frac{2w \cos \varphi}{\sqrt{w^2 + \alpha^2 L^2}} = \frac{2w \sin \varphi}{\sqrt{w^2 + \alpha^2 L^2}} = 1,$$

und

$$v_1 - v_2 = A \cos \alpha t.$$

Die Wechselspannung  $A \cos \alpha t$  zwischen den Punkten  $a_1$  und  $a_2$  hat demnach dieselbe Amplitude wie die Wechselspannung  $A \sin \alpha t$  zwischen den Punkten  $P_1$  und  $P_2$ , ist aber gegen sie in der Phase um  $\frac{\pi}{2}$  verschoben. Man kann diese beiden Wechselspannungen zur Realisierung eines elektrostatischen Drehfeldes

benutzen, indem man die Pole 1, 2, 3, 4 (die Numerierung schreitet längs des Umfanges des Drehfeldes fort) mit den Punkten  $P_1, a_1, P_2, a_2$  verbindet.

Setzen wir etwa

$$V_1 = +\frac{A}{2} \sin \alpha t, \quad V_2 = -\frac{A}{2} \sin \alpha t,$$

so ist

$$v_1 = +\frac{A}{2} \cos \alpha t, \quad v_2 = -\frac{A}{2} \cos \alpha t.$$

Man sieht, daß der Nachteil der Anordnungen von Arnò und von Guye und Denso hier vermieden ist; es haben alle vier Pole des Drehfeldes verschiedene Potentiale, und zwar besteht zwischen je zwei benachbarten Polen stets eine Phasendifferenz  $\frac{\pi}{2}$ .

v. Lang verbindet die beiden Pole der Sekundärspule eines Transformators durch zwei gleiche Strombahnen, die aus je einem

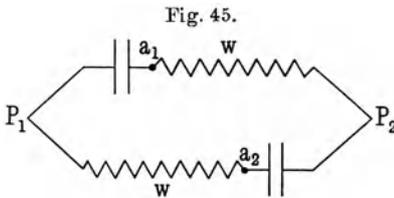


Fig. 45.

induktionslosen Widerstand und je einer Kapazität bestehen, in der in Fig. 45 dargestellten Ordnung. Es sei  $C$  die Größe der Kapazitäten,  $w$  die der induktionslosen Widerstände. Der Widerstand der anderen

Zuleitungen zu den Kapazitäten sei gegenüber  $w$  verschwindend klein. Es gilt dann nach § 7, Gl. (7) (in welcher  $L = 0$  einzusetzen ist) für jeden der beiden Zweige die Gleichung

$$w \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{d}{dt} (V_1 - V_2) = A \alpha \cos \alpha t,$$

wenn  $i$  die Stromstärke,  $V_1 = A_1 \sin \alpha t$  das Potential von  $P_1$ ,  $V_2 = A_2 \sin \alpha t$  das Potential von  $P_2$  und  $A_1 - A_2 = A$  ist. Die Lösung dieser Gleichung lautet:

$$i = \frac{A}{\sqrt{w^2 + \frac{1}{\alpha^2 C^2}}} \sin(\alpha t + \varphi), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\alpha w C}.$$

Der Punkt  $a_1$  im oberen Zweige habe das Potential  $v_1$ , der Punkt  $a_2$  im unteren das Potential  $v_2$ . Nun sind

$$\begin{aligned} v_1 - V_2 &= w i \\ V_1 - v_2 &= w i, \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 = 2 w i - (V_1 - V_2) &= \frac{2 w A}{\sqrt{w^2 + \frac{1}{\alpha^2 C^2}}} \sin(\alpha t + \varphi) - A \sin \alpha t \\ &= \left( \frac{2 w \cos \varphi}{\sqrt{w^2 + \frac{1}{\alpha^2 C^2}}} - 1 \right) A \sin \alpha t + \frac{2 w \sin \varphi}{\sqrt{w^2 + \frac{1}{\alpha^2 C^2}}} A \cos \alpha t. \end{aligned}$$

Wir wählen nun  $w$  und  $C$  so, daß der Faktor von  $A \sin \alpha t$  verschwindet. Dies trifft zu, wenn  $\alpha C w = 1$  gemacht wird. Denn dann ist  $\operatorname{tg} \varphi = 1$ ,  $\sin \varphi = \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$  und

$$\sqrt{w^2 + \frac{1}{\alpha^2 C^2}} = w \sqrt{2},$$

und es wird

$$v_1 - v_2 = A \cos \alpha t.$$

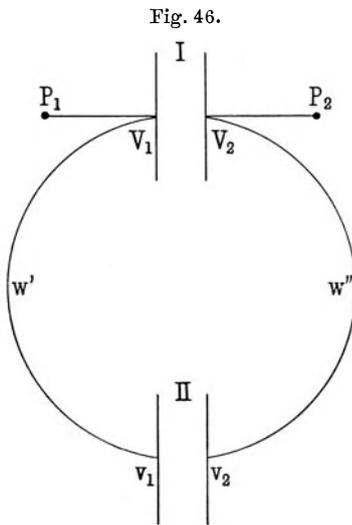
Indem wir also den Pol 1 der Drehfeldvorrichtung mit  $P_1$ , den Pol 2 mit  $a_1$ , den Pol 3 mit  $P_2$ , den Pol 4 mit  $a_2$  verbinden, erhalten wir ein einfaches elektrostatisches Drehfeld, da die Wechselspannungen  $V_1 - V_2$  und  $v_1 - v_2$  gleiche Amplitude, aber eine Phasendifferenz von  $\frac{\pi}{2}$  haben. Auch hier sind, wie bei Verwendung der Görgesschen Schaltung, alle vier Pole des Drehfeldes auf verschiedenem Potential und es besteht zwischen je zwei benachbarten Polen eine Phasendifferenz von  $\frac{\pi}{2}$ .

Bei den Versuchen von v. Lang, der mit Wechselstrom von 2500 Perioden pro Minute ( $\alpha = 2\pi \cdot 40,6$ ) arbeitete, war  $C = 0,001$  Mikrofarad, so daß  $w = 3,8$  Megohm gemacht werden mußte. Man sieht, wie bequem die Anordnung ist; die großen Widerstände stellt man sich leicht aus Flüssigkeitssäulen her, und so kleine Kapazitäten sind ebenfalls bequem herzustellen. v. Langs Kondensatoren bestanden aus kleinen Bechergläsern von 10,5 cm Höhe und einem äußeren Umfange von 18 cm, die Glasdicke betrug beiläufig 1 mm. Diese Gläser wurden bis zu

einem Abstände von 1,5 cm vom Rande außen und innen mit Stanniol belegt, das Innere noch bis zur selben Höhe mit Graphit angefüllt, in welchem die Zuleitung eingebettet wurde. Jedes dieser Gläser stand in einem 6 cm hohen Metallgefäß, in welchem die andere Zuleitung befestigt war. Die Widerstände waren aus U-förmig gebogenen Glasröhren von 60 cm Länge und 3,5 mm innerem Durchmesser gebildet; diese Röhren wurden mit Wasser von der Wasserleitung gefüllt. Die genaue Abgleichung der Widerstände geschah durch mehr oder weniger tiefes Eintauchen der als Elektroden dienenden Platindrähte.

### § 25. Die Drehfeldanordnung von Lampa.

Eine einfache Anordnung zur Herstellung eines elektrostatischen Drehfeldes hat der Verfasser angegeben<sup>1)</sup>; er verbindet



zwei gegenüberliegende Pole der Drehfeldvorrichtung mit den Polen der Sekundärwicklung eines Transformators und setzt jeden dieser beiden Pole mit je einem Nachbarpol durch einen sehr großen induktionslosen Widerstand in Verbindung. Die Theorie dieser Anordnung ist die folgende. Es seien (Fig. 46)  $P_1$  und  $P_2$  die Pole des Transformators mit den Potentialen  $V_1 = A_1 \sin \alpha t$  und  $V_2 = A_2 \sin \alpha t$  und es sei  $A_1 - A_2 = A$ . Diese Pole sind durch Widerstände, die wir sehr klein wählen, mit zwei gegenüberliegenden Polen der Drehfeldvorrichtung verbunden.

Dieses Polpaar bildet einen Kondensator von der Kapazität  $C$  und ist in der Figur als Kondensator I eingezeichnet. Das zweite Polpaar bildet ebenfalls einen Kondensator von derselben Kapazität

<sup>1)</sup> Sitz.-Ber. d. K. Akad. d. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., 116, IIa, Mai 1907.

zität  $C$ , der in der Figur als Kondensator II dargestellt ist. Er ist durch die sehr großen Widerstände  $w'$  und  $w''$  mit dem Kondensator I verbunden. Die beiden Platten des Kondensators I haben die Potentiale der Punkte  $P_1$  und  $P_2$ , mit welchen sie durch sehr kleine Widerstände verbunden sind. Die Potentiale der Platten des Kondensators II seien  $v_1$  und  $v_2$ . Setzen wir  $w' + w'' = w$ , so gilt für den den Kondensator II enthaltenden Kreis die Gl. (3) des § 7 (in welcher  $L = 0$  zu setzen ist):

$$wi = (V_1 - V_2) - (v_1 - v_2) . . . . . (1)$$

Bezeichnet man die Ladung des Kondensators zur Zeit  $t$  mit  $e$ , so ist nach § 7  $de = idt$  und  $e = C(v_1 - v_2)$ . Hiermit folgt aus Gl. (1):

$$w \frac{de}{dt} + \frac{e}{C} = V_1 - V_2 = A \sin \alpha t;$$

die Lösung dieser Gleichung lautet:

$$e = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 w^2 + \frac{1}{C^2}}} \sin(\alpha t - \varphi), \quad \operatorname{tg} \varphi = \alpha w C;$$

hieraus folgt für die gesuchte Potentialdifferenz des zweiten Polpaars:

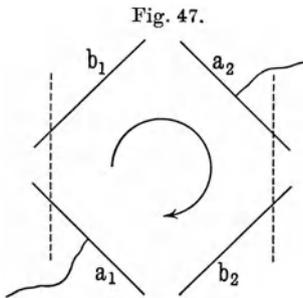
$$v_1 - v_2 = \frac{e}{C} = \frac{A}{\sqrt{1 + \alpha^2 w^2 C^2}} \sin(\alpha t - \operatorname{arctg} \alpha w C).$$

Die Potentialdifferenz des zweiten Polpaars hat bei einem endlichen Werte der Widerstände  $w$  eine kleinere Amplitude als die Potentialdifferenz des ersten Polpaars und ist in ihrer Phase gegen dieselbe verzögert. Die Phasenverschiebung würde  $90^\circ$  betragen, wenn  $w = \infty$  wäre; dann wäre aber auch die Amplitude von  $v_1 - v_2 = 0$ . Es ist also nicht möglich, mit dieser Schaltung ein einfaches elektrostatisches Drehfeld herzustellen; wir erhalten aber ein Feld mit einer Drehfeldkomponente, und dieses genügt auch für die qualitative Beobachtung der Rotationserscheinungen. Für diesen Zweck eignet sich die Schaltung besonders infolge ihrer großen Einfachheit.

Die Anlegung der Widerstände geschah in der einfachsten Weise in der Art, wie sie in Fig. 47 angedeutet ist, indem die Platten  $a_1, a_2$  an die Pole des Transformators angeschlossen und

die Widerstände  $w'$  und  $w''$  einfach über je zwei Platten gelegt wurden. Legt man sie über die Platten  $a_1$  und  $b_1$  einerseits,  $a_2$  und  $b_2$  andererseits, so erhält man ein Drehfeld, welches, von oben gesehen, im Sinne der Uhrzeigerbewegung rotiert; verbindet man  $a_1$  mit  $b_2$  und  $a_2$  mit  $b_1$ , so erhält man ein entgegengesetzt rotierendes Feld. Der Rotationssinn entspricht der theoretischen Überlegung.

Als Widerstand  $w$  wurden zuerst Holzstäbe versucht. Der Versuch gelang, es zeigte sich aber bei mehrfacher Wiederholung, daß der Feuchtigkeitsgehalt des Holzes von großem Einfluß ist. Sehr gut ausgetrocknetes Holz hat einen zu großen Widerstand, nasses Holz einen zu kleinen. Man erhält mit diesen Materialien



kein Drehfeld, entsprechend der oben entwickelten Theorie. Diese wurde noch durch weitere Versuche mit anderen Materialien bestätigt. Glas, Siegellack, Paraffin wirken als Überbrückungswiderstände nicht, weil ihre Leitfähigkeit zu klein ist, Metalle und Bogenlampenkohle hinwiederum nicht wegen zu großer Leitfähigkeit. Als ein sehr geeigneter Überbrückungswiderstand,

dessen Größe von der Luftfeuchtigkeit unabhängig ist, erwiesen sich Geißlersche Röhren. Speziell erwiesen sich als gut brauchbar Röhren mit kapillarem Mittelteil, wie sie zur Beobachtung der Spektren der Füllungsgase dienen. Desgleichen sind von guter Wirkung Kerzenflammen, welche man statt der Überbrückungswiderstände in die Spalten zwischen zwei Platten stellt. Auch Zigarren sind als Überbrückungswiderstände geeignet. Bezüglich der Zigarren gilt das vom Holz Gesagte. Sie wirken nicht, wenn sie zu trocken oder zu naß sind. Man könnte die Fähigkeit, ein Drehfeld hervorzurufen, geradezu als Grundlage für einen Apparat zur Prüfung des richtigen Feuchtigkeitsgrades von Zigarren benutzen.

## § 26. Versuche im elektrostatischen Drehfelde.

Die Rotation von Isolatoren im elektrostatischen Drehfelde wurde zuerst von Arnò beobachtet. Seine verschiedenen Ver-

suchsanordnungen wurden bereits besprochen. Später hat dann v. Lang ausgedehnte Versuche im elektrostatischen Drehfelde ausgeführt, die wir jetzt, zunächst ohne Rücksicht auf ihre theoretische Bedeutung, besprechen wollen. Die Drehfeldanordnung kann entweder nach Art der Arnòschen, oder auch aus rechteckigen Platten (wie in Fig. 48 angenommen) hergestellt werden. Statt Blechplatten kann man auch, wie dies v. Lang auch getan hat, Platten aus Drahtnetz nehmen. Die Größe der rechteckigen Platten betrug bei v. Lang gewöhnlich  $12 \times 7$  cm, bei den Versuchen mit Flüssigkeiten  $4 \times 6,5$  cm. Die Verwendung kleinerer Platten gestattet die Erreichung größerer Feldstärken. Die Potentialdifferenz zwischen zwei gegenüberliegenden Plattenpaaren betrug 9000 Volt. Bezüglich der Konstruktionsdetails der Drehfeldanordnung v. Langs verweisen wir auf die Originalabhandlung<sup>1)</sup> und erwähnen nur, daß in die Zuleitungen zum Drehfelde ein Hochspannungskommutator eingeschaltet war, der es ermöglicht, den Drehungssinn des Feldes zu ändern. Die zunächst zu beschreibenden Versuche stammen im Prinzip von Arnò, doch ist die v. Langsche Form derselben für die Demonstration vor einem größeren Auditorium geeigneter, weshalb wir uns auch an die Ausführungen v. Langs halten.

Die Drehung von Isolatoren im Drehfelde kann man sehr augenfällig mit Hilfe von Papierzylindern zeigen. Ein Blatt Schreibpapier, etwa  $10 \times 20$  cm, wird über einen soliden Holzzyylinder gerollt, die Enden zusammengeklebt und der so erhaltene papierene Hohlzyylinder von dem Holzkern herabgezogen; in das eine Ende wird dann noch ein Boden eingefügt, indem man aus Papier eine entsprechende Kreisfläche schneidet, an derselben aber etwa sechs kleine Ansätze ( $3 \times 5$  mm) läßt, die umgebogen und an die innere Fläche des Zylinders geklebt werden. In die Mitte des Bodens wird dann mit einem Korkbohrer noch ein Loch von entsprechendem Durchmesser gemacht, um den Zylinder auf ein Hütchen stecken zu können, das sich auf der Spitze einer Nähnadel mit äußerst geringer Reibung dreht. Dieses Hütchen besteht aus einer kleinen, sehr leichten Messingscheibe, die in ihrer Mitte einen kleinen Hohlzyylinder mit einem Achatstein trägt: Gesamtgewicht 1,2 g. Der äußere Durchmesser dieses Zylinders

---

<sup>1)</sup> Versuche im elektrostatischen Drehfelde, I. c.

betrug 4,5 mm. Macht man das Loch im Boden des Papierzylinders etwas größer, so ist es durch kleine Verschiebungen des Papierzylinders immer möglich, dem Papierzylinder eine vertikale Stellung zu geben. Die Nähnadel ist in einem eigens hierzu gefertigten Stativchen befestigt, welches in die Mitte der Drehfeldanordnung gestellt werden kann und gestattet, die Spitze der Nadel nach Bedarf höher oder tiefer zu stellen.

Die Länge der benutzten Papierzylinder betrug ungefähr 10 cm, der Durchmesser etwa 5 cm. Um die Drehung auch in größerer Entfernung beobachten zu können, wurden ihre Mantelflächen mit Farbstreifen vertikal oder spiralförmig bemalt. Die Anwendung von paraffiniertem Papier ergab keine wesentlichen Vorteile, außer daß Zylinder aus diesem Material etwas widerstandsfähiger sind.

Stellt man nun einen solchen Zylinder in die Mitte des Drehfeldes und erregt dasselbe, so gerät er alsbald im Sinne der Drehung des Feldes in lebhaftere Rotation, deren Richtung sich umkehrt, wenn der Drehungssinn des Feldes mit Hilfe des Kommutators geändert wird. Die Rotation tritt noch ein, wenn die Potentialdifferenz zwischen zwei gegenüberliegenden Polen auf 4500 Volt herabgesetzt und ihre Entfernung auf 30 cm erhöht wird. Auf gleiche Weise kann man auch Holz- und Pappschachteln in Drehung versetzen, indem man in den Boden derselben ein Loch macht und sie dann mit Hilfe des Achathütchens auf der Nadelspitze balanciert. Es wurden auf diese Weise Schachteln von 20 cm Durchmesser und 10 cm Höhe in Rotation versetzt. Man kann auch mehrere drehbare Papierzylinder in das Drehfeld bringen, welche dann gleichzeitig rotieren.

Aber auch außerhalb der Drehfeldanordnung kann ein Papierzylinder in Drehung geraten, besonders in Punkten der Diagonalen des Drehfeldes. In solchen Punkten verlaufen die Kraftlinien zweier benachbarter Pole senkrecht zueinander, und da sie sich, wie gezeigt worden ist, in der Phase um  $90^\circ$  unterscheiden, so ergeben sie ein Drehfeld, und zwar eines mit einem Drehungssinn, der entgegengesetzt ist dem Drehungssinn des Drehfeldes im Innern.

Lampa beobachtete <sup>1)</sup>, daß der Feuchtigkeitsgehalt für die Brauchbarkeit der Papierzylinder als Indikatoren des Drehfeldes

---

<sup>1)</sup> Über eine einfache Anordnung zur Herstellung eines elektrostatischen Drehfeldes, I. c.

entscheidend ist. Trocknet man die Papierzylinder vollkommen aus, indem man sie etwa längere Zeit über eine durch eine Bunsenflamme erhitzte Metallplatte hängt, so rotieren sie in dem Drehfelde nicht. Sie tun dies ebensowenig, wenn sie sehr feucht sind. Man braucht einen solchen Papierzylinder nur einige Minuten in ein Becherglas zu hängen, auf dessen Boden sich siedendes Wasser befindet, um ihn als Drehfeldindikator unbrauchbar zu machen.

Sehr schön kann man mit dem elektrostatischen Drehfelde die Durchlässigkeit der Isolatoren und die Undurchlässigkeit der Leiter für elektrische Kraftlinien zeigen. Man stülpt zu diesem Zwecke über den rotierenden Papierzylinder einmal einen Glaszylinder, das andere Mal einen Zylinder aus Drahtnetz; im letzteren Falle hört der Zylinder zu rotieren auf, wenn die Maschen des Netzes gegenüber der Feldstärke eng genug sind, während der Glaszylinder keinen Einfluß ausübt.

Mit Hilfe der Spitze können auch andere Isolatoren als Papier in Rotation versetzt werden, nur dürfen sie kein großes Gewicht haben, da sonst die Reibung zu groß wird. v. Lang hat auf diese Weise auch eine kleine Kristallisierschale aus Glas, in deren Boden ein entsprechendes Loch gebohrt war, zur Drehung gebracht, ebenso Scheiben aus Wachs, Hartgummi u. dgl. Schwerere Gegenstände müssen an Fäden aufgehängt werden, deren Torsion der Drehung entgegenwirkt, so daß es bei schwachen Kräften nur zu einer Ablenkung aus der Ruhelage kommt. So fand v. Lang, daß aufgehängte hohle Glaskugeln bis zu einem Durchmesser von 8 cm sehr gut rotieren, wobei es gleichgültig ist, ob sie evakuiert sind oder nicht. Zu diesem Versuche können Glühlampen verwendet werden, auch unbrauchbar gewordene, indem man sie mit der Fassung nach oben in das Drehfeld hängt.

Die Körper, welche zur Rotation gebracht werden sollen, brauchen nicht Rotationskörper zu sein. So zeigten ganz unregelmäßige Stücke von Bernstein, Stangenschwefel, Paraffin usw. sehr gut die Dreherscheinung, ebenso ein prismatischer Quarzkristall mit sehr unregelmäßig ausgebildeten Enden; dieser bei den weiteren Untersuchungen v. Langs viel verwendete Kristall hatte eine Länge von 4 cm und ein Gewicht von 5,6 g. Die genannten Körper waren mittels 70 cm langer Seidenfäden, deren Durchmesser etwa 0,05 mm betrug, in das Drehfeld gehängt worden.

Weitere Untersuchungen v. Langs erstreckten sich auf das Verhalten von Isolatoren innerhalb isolierender Flüssigkeiten. Da zeigten sich auch Drehungen entgegengesetzt der Drehung des elektrostatischen Feldes. Wir wollen solche Drehungen als negative, solche, welche im Sinne der Drehung des Feldes erfolgen, als positive bezeichnen.

Bei diesen Versuchen wurden die festen Isolatoren an Fäden aufgehängt. Untersucht wurden: Glas, Quarz, Hartgummi, Paraffin, Schwefel und Bernstein. Unter 17 benutzten Flüssigkeiten fanden sich nur drei, und zwar Äther, Chloroform und Xylol, in welchen die Drehung negativ war. Die übrigen Flüssigkeiten zerfallen in zwei Klassen: in solche, in welchen die Drehung wie in Luft, d. i. in positivem Sinne erfolgt, und in solche, in welchen gar keine Drehung stattfindet.

Die untersuchten Flüssigkeiten lassen sich aber in Beziehung auf die absorbierende Wirkung, welche sie auf die elektrischen Kraftlinien ausüben, in zwei Gruppen teilen. Zur Untersuchung dieser Wirkung wurde ein ringförmiges Gefäß aus zwei Bechergläsern, die koaxial ineinander gestellt wurden, gebildet. In das innere Glas wurde etwas Quecksilber gegossen, um zu verhindern, daß es gehoben wird, wenn der ringförmige Zwischenraum mit Flüssigkeit angefüllt wurde. Der durch die beiden Gläser gebildete Hohlzylinder hatte eine Wandstärke von 1,6 cm und eine Höhe von 7 cm; in ihn wurde der Isolator gehängt. Es hoben nun von den benutzten Flüssigkeiten die Rotation vollständig auf: Wasser, Alkohol, Karbolsäure, Anilin, Äthylacetat, Amylacetat. Taucht man also einen Isolator in eine Flüssigkeit dieser Gruppe, so ist es nicht verwunderlich, daß das Drehfeld ohne Wirkung auf ihn bleibt. Die Flüssigkeit schirmt die elektrische Kraft vollständig ab wie eine Hülle von Metall.

Die Flüssigkeiten, welche keine solche Schirmwirkung ausüben, ergeben teils positive, teils negative Drehung der oben aufgezählten Isolatoren. Die normale, positive Drehung im Sinne des Feldes wurde beobachtet bei Benzol, Toluol, Benzin, Schwefelkohlenstoff, Petroleum, Olivenöl, Terpentinöl, Rizinusöl<sup>1)</sup>; negative Drehung, entgegengesetzt der Drehung des Feldes, wie schon erwähnt, bei Äther, Chloroform, Xylol.

---

<sup>1)</sup> Wegen der großen Zähigkeit dieses Öles tritt hier die Drehung nur andeutungsweise in Erscheinung.

v. Lang untersuchte auch, ob nicht schlecht leitende Flüssigkeiten selbst im Drehfelde rotieren. Spuren solcher Rotationen wurden allerdings bemerkt, zu einer eigentlichen Drehung der ganzen Flüssigkeit kommt es, offenbar wegen der zu großen Reibung, nicht.

Es mögen schließlich noch einige gelegentliche Beobachtungen v. Langs angeführt werden. Kleine Hartgummispäne in Chloroform bewegen sich sehr lebhaft längs des Gefäßrandes unterhalb der Oberfläche in dem durch die Kapillarität gehobenen Flüssigkeitsvolumen in positivem Sinne. Eine kleine plankonvexe Linse aus Hartgummi (Durchmesser 14 mm), welche auf Chloroform schwimmend ins Drehfeld gebracht wird, rotiert lebhaft negativ, geht aber an den Rand und rollt dort in positivem Sinne weiter. Mit Korkteilchen konnte keine Bewegung erzielt werden. Streut man auf Petroleum im Drehfelde Lycopodium, so fällt ein Teil zu Boden, ohne eine Drehung der Flüssigkeit anzuzeigen, ein Teil sammelt sich aber an der Oberfläche zu kleinen Flecken, die lebhaft in positivem Sinne rotieren und sich, wenn sie an die Gefäßwand gelangen, in demselben Sinne weiter bewegen. Die Flecke erreichen aber nicht den Rand selbst, sondern gehen nur bis dahin, wo die Erhöhung der Flüssigkeit durch die Kapillarität beginnt. Diese Vorwärtsbewegung der Flecke ist in einem engen Gefäße (3 cm Durchmesser) nicht mehr wahrzunehmen, während ihre Rotation noch immer stattfindet. In Benzol wurde ebenfalls keine Bewegung der Flüssigkeit beobachtet, Hartgummispäne gehen darin direkt zu Boden, Korkteilchen rotieren zwar lebhaft um ihre Achse, ohne aber eine Flüssigkeitsbewegung anzuzeigen. Ebenso rotieren Lycopodiumhäutchen lebhaft, halten sich aber ziemlich in der Mitte des Gefäßes; erst wenn sie so groß gemacht werden, daß sie den Rand des Gefäßes berühren, so bleiben sie stehen.

Ein gewöhnliches Radiometer mit einseitig geschwärzten Aluminiumflügeln rotiert im elektrostatischen Drehfelde, wie auch schon von anderen Forschern beobachtet wurde, in positivem Sinne. v. Lang untersuchte dann auch einige von Puluj<sup>1)</sup> angegebene Radiometer auf ihr Verhalten im elektrostatischen Drehfelde. Ein einziges derselben wurde vom Drehfelde beein-

---

<sup>1)</sup> Sitz.-Ber. d. K. Akad. d. Wiss. Wien 81, II, 864 (1881).

flußt, und zwar das aus einem drehbaren Glimmerzylinder mit fester, einseitig geschwärtzter Platte im Zentrum bestehende; im Drehfelde rotierte der Glimmerzylinder in negativem Sinne, und zwar schien der Versuch in schwächerem Felde fast besser zu gehen.

Dieses Experiment legte nahe, das Verhalten eines Glimmerzylinders in Flüssigkeiten zu untersuchen. Ein Glimmerblatt von 5,5 cm Höhe und 13 cm Breite wurde zusammengerollt und zwischen zwei Messingringe von 2 cm Durchmesser gesteckt; der so gebildete Zylinder gab in Äther negative Rotation. Ein ähnlicher Zylinder von größerem Durchmesser zeigte die Erscheinung weniger gut. Überhaupt scheinen bei gleichem Gewichte pro Längeneinheit Hohlzylinder im Nachteile gegen solide Zylinder zu sein, was wohl daher rührt, daß durch die pro Gewichtseinheit so viel größere Oberfläche der Hohlzylinder die Reibung stärker wächst als das Drehungsmoment.

## § 27. Theorie der Rotationserscheinungen im elektrostatischen Drehfelde.

Die erste Drehfeldanordnung, die Arnösche, verdankt ihren Ursprung dem Problem der Hysteresis der Dielektrika. Es ist hier nicht der Ort, auf dieses Problem einzugehen. v. Schweidlers „Studien über die Anomalien im Verhalten der Dielektrika“<sup>1)</sup> geben eine zusammenfassende Darstellung der Schicksale dieser Frage. Die Rotationserscheinungen im elektrostatischen Drehfelde sind jedenfalls nicht ausreichend, um eine eindeutige Antwort zu erhalten. Auch ein hysteresisfreies Dielektrikum erfährt, wenn es eine gewisse Leitfähigkeit besitzt, im elektrostatischen Drehfelde ein Drehungsmoment. Dies soll nun gezeigt werden, und zwar speziell für den Fall einer Kugel, für welche Körpergestalt die Theorie besonders einfach ist<sup>2)</sup>.

Eine Kugel vom Radius  $R$  befinde sich im Ursprunge eines Koordinatensystemes, auf welches alle Angaben bezogen werden sollen. Sie soll aus einem homogenen leitenden Dielektrikum be-

---

<sup>1)</sup> Dasselbst, mathem.-naturw. Kl., 116, IIa, Juni 1907.

<sup>2)</sup> Siehe A. Lampa, Über Rotationen im elektrostatischen Drehfelde. Sitz.-Ber. d. K. Akad. d. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., 115, IIa, Dezember 1906.

stehen, ihre Dielektrizitätskonstante sei  $\varepsilon_i$ , ihre Leitfähigkeit  $\lambda_i$ . Sie sei umgeben von einem anderen unendlich ausgedehnten, homogenen, leitenden Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_a$  und der Leitfähigkeit  $\lambda_a$ . Die Leitfähigkeiten sowie alle anderen noch vorkommenden elektrischen Größen seien im elektrostatischen Maßsystem gemessen.

Es seien nun ferner periodische elektrostatische Kräfte gegeben, welche bei Abwesenheit der Kugel zwei zueinander senkrechte homogene Wechselfelder ergeben würden, die gegeneinander eine Phasendifferenz von  $\frac{\pi}{2}$  besitzen, also ein einfaches elektrostatisches Drehfeld ergeben.

Durch die Kugel wird dieses Feld gestört, und die Aufgabe besteht nun darin, das Feld bei Anwesenheit der Kugel zu berechnen und die ponderomotorischen Kräfte zu bestimmen, welche die Kugel durch das Feld erfährt.

Wir wählen die  $X$ - und  $Y$ -Achse parallel zu den Feldrichtungen, die  $Z$ -Achse senkrecht dazu; die beiden Feldstärken parallel zu den Achsen seien  $X = A \cos \alpha t$  und  $Y = A \sin \alpha t$ . Die Konstante  $A$  schreiben wir zur Vereinfachung später auftretender Ausdrücke in der Form  $\frac{a}{R}$ , worin  $a$  wieder eine Konstante ist, und haben

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{a}{R} \cos \alpha t \\ Y &= \frac{a}{R} \sin \alpha t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Diese beiden Feldstärken geben ein Drehfeld, welches, von der positiven Hälfte der  $Z$ -Achse aus gesehen, entgegengesetzt dem Sinne der Uhrzeigerbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\alpha$  rotiert. Den Feldstärken  $X$  und  $Y$  entsprechen zwei Potentiale

$$\begin{aligned} \Phi_x &= -\frac{a}{R} x \cos \alpha t + C \\ \Phi_y &= -\frac{a}{R} y \sin \alpha t + C; \end{aligned}$$

wir können hierin unbeschadet der Allgemeinheit  $C = 0$  setzen, wodurch bloß festgesetzt wird, daß der Wert des Potentials im

Koordinatenanfangspunkte als Nullpunkt des Potentials gelten soll. Wir setzen also, indem wir noch Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \omega \sin \vartheta \\ y &= \varrho \sin \omega \sin \vartheta \\ z &= \varrho \cos \vartheta \end{aligned}$$

einführen:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_x &= -\frac{a}{R} \varrho \cos \omega \sin \vartheta \cos \alpha t \\ \Phi_y &= -\frac{a}{R} \varrho \sin \omega \sin \vartheta \sin \alpha t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Wirkt in einem homogenen leitenden Dielektrikum an einer Stelle eine elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}$ , so erhalten wir daselbst eine elektrische Strömung parallel zu  $\mathfrak{E}$ , die sich aus dem Leitungsstrom und aus dem Verschiebungsstrom zusammensetzt. Ist  $j$  die Dichtigkeit dieser Strömung,  $\lambda$  die Leitfähigkeit,  $\varepsilon$  die Dielektrizitätskonstante, so gilt die Gleichung

$$j = \lambda \mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \dots \dots \dots (3)$$

Diese Gleichung wenden wir nun auf unseren Fall an. Da ist nun zunächst zu bedenken, daß die Feldstärke nicht nur durch die ursprünglichen Potentiale, sondern auch durch die Potentiale der an der Kugeloberfläche auftretenden Ladungen bestimmt ist. Bezeichnen wir allgemein das ursprüngliche Potential mit  $\Phi$ , welches im ganzen Raume der Gleichung  $\nabla^2 \Phi = 0$  genügen soll, das Potential der auftretenden Ladungen mit  $\varphi$ , so ist die Feldstärke  $\mathfrak{E}$  in der Richtung  $r$ :

$$\mathfrak{E} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right).$$

Bezeichnet man die Komponenten der elektrischen Strömung parallel zu den Koordinatenachsen mit  $u, v, w$ , so folgen für dieselben aus (3) die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\lambda \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \\ v &= -\lambda \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \\ w &= -\lambda \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) - \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

Diese Gleichungen sind nun für den Innenraum der Kugel und für den Außenraum derselben zu spezialisieren. Hierbei ist zu bedenken, daß die Normalkomponente der vom Potential  $\Phi$  herrührenden Feldstärke beim Durchschreiten der Oberfläche des Leiters sich stetig ändert, während dies bei der Normalkomponente des vom Potential  $\varphi$  herrührenden Feldes nicht der Fall ist. Es brauchen daher die Differentialquotienten von  $\Phi$  keine besondere Kennzeichnung, während die Differentialquotienten von  $\varphi$  mit einem Index zu versehen sind, welcher angibt, ob sie sich auf den Innen- oder Außenraum der Kugel beziehen. Es soll nun der Innenraum durch den Index  $i$ , der Außenraum durch den Index  $a$  charakterisiert werden. Wir erhalten aus (4):

$$\left. \begin{aligned} u_i &= -\lambda_i \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) - \frac{\varepsilon_i}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) \\ v_i &= -\lambda_i \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) - \frac{\varepsilon_i}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) \\ w_i &= -\lambda_i \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right) - \frac{\varepsilon_i}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} u_a &= -\lambda_a \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} \right) - \frac{\varepsilon_a}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} \right) \\ v_a &= -\lambda_a \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial y} \right) - \frac{\varepsilon_a}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial y} \right) \\ w_a &= -\lambda_a \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial z} \right) - \frac{\varepsilon_a}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

Wir bezeichnen den Winkel, welchen die Normale  $n$  in einem Punkte der Trennungsfläche der beiden Medien mit den positiven Achsenrichtungen einschließt, mit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und denken uns die Normale vom Innenraum nach dem Außenraum gerichtet. Es besteht dann in der Richtung der Normalen eine Strömung

$$\begin{aligned} \text{im Innenraum: } & u_i \cos \alpha + v_i \cos \beta + w_i \cos \gamma, \\ \text{im Außenraum: } & u_a \cos \alpha + v_a \cos \beta + w_a \cos \gamma. \end{aligned}$$

Die Differenz dieser Größen an einem Punkte der Trennungsfläche  $(u_i - u_a) \cos \alpha + (v_i - v_a) \cos \beta + (w_i - w_a) \cos \gamma$  gibt dann die Zunahme der Elektrizitätsmenge pro Flächeneinheit in der Zeiteinheit an diesem Punkte der Trennungsfläche. Dem Flächenelemente  $do$  strömt also in der Zeit  $dt$  eine Elektrizitätsmenge

$[(u_i - u_a) \cos \alpha + (v_i - v_a) \cos \beta + (w_i - w_a) \cos \gamma] do dt$  zu. Bezeichnen wir die Flächendichte mit  $\sigma$ , ihre Zunahme in der Zeit  $dt$  mit  $d\sigma$ , so ist die Zunahme der Ladung des Flächenelementes andererseits  $d\sigma do$ . Aus der Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für diese Größe folgt:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = (u_i - u_a) \cos \alpha + (v_i - v_a) \cos \beta + (w_i - w_a) \cos \gamma \quad (7)$$

Der Differentialquotient ist als partieller zu schreiben, da  $\sigma$  auch eine Funktion von  $x, y, z$  ist.

Andererseits ist nach einem bekannten Satze der Potentialtheorie

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial n} (\Phi + \varphi)_a - \frac{\partial}{\partial n} (\Phi + \varphi)_i \right],$$

worin die Werte der Differentialquotienten in der Trennungsfläche zu bilden sind. Da nach einer früheren Bemerkung in der Oberfläche  $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_a = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_i$ , so ist weiter

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial \varphi_a}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) \dots \dots \dots (8)$$

worin  $\frac{\partial \varphi_a}{\partial n}$  und  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial n}$  die Werte der Differentialquotienten in der Trennungsfläche bedeuten. Aus (7) und (8) folgt:

$$\begin{aligned} (u_i - u_a) \cos \alpha + (v_i - v_a) \cos \beta + (w_i - w_a) \cos \gamma \\ = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_a}{\partial n} \right). \end{aligned}$$

In diese Gleichung setzen wir die Werte der Strömungskomponenten gemäß (5) und (6) ein. Indem wir hierbei berücksichtigen,

$$\text{daß } \frac{\partial}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial}{\partial z} \cos \gamma = \frac{\partial}{\partial n},$$

erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} & 4\pi \lambda_a \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial n} \right) + \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial n} \right) \\ & - 4\pi \lambda_i \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) - \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_a}{\partial n} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

Zu den Gleichungen (8) und (9) für die Trennungsfläche kommen noch Gleichungen für das Innere der beiden Medien. Setzen wir  $\Phi + \varphi = \Psi$ , so ist die Dichte der freien Elektrizität  $\mu$  bestimmt durch die Gleichung

$$\nabla^2 \Psi = -4\pi\mu,$$

ihre Änderungsgeschwindigkeit durch

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi = -4\pi \frac{\partial \mu}{\partial t}.$$

Wir betrachten ein Volumelement  $dx dy dz$  mit den Koordinaten  $x, y, z$ . Durch die Seitenfläche  $dy dz$  mit der Koordinate  $x$  strömt in der Zeit  $dt$  die Elektrizitätsmenge  $u dy dz dt$  in das Volumelement ein, durch die ihr gegenüberliegende Seitenfläche  $dy dz$  mit der Koordinate  $x + dx$  die Elektrizitätsmenge  $\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dy dz dt$  aus dem Volumelemente heraus. Analoge Werte ergeben sich bei den anderen Seitenflächen. Die Differenz zwischen Einstromung und Auströmung ist

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx dy dz dt,$$

oder pro Volumeinheit:

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt;$$

letztere Größe ist aber die in der Zeit  $dt$  erfolgende Änderung der Dichte der freien Elektrizität  $d\mu$ . Wir haben also:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi = 4\pi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Diese Gleichung ergibt mit Berücksichtigung von (4):

$$(1 + \varepsilon) \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi = -4\pi\lambda \nabla^2 \Psi,$$

oder integrierend:

$$\nabla^2 \Psi = (\nabla^2 \Psi)_0 \cdot e^{-\frac{4\pi\lambda}{1+\varepsilon} t}.$$

Wäre also auch die Dichtigkeit der freien Elektrizität anfänglich nicht gleich Null, so nähert sie sich doch diesem Werte mit wachsender Zeit und kann niemals zunehmen. Wir haben also für das Innere der beiden Medien  $\nabla^2 \Psi = 0$ , oder, da  $\nabla^2 \Phi = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi_i &= 0 \\ \nabla^2 \varphi_a &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Außerdem muß an der Trennungsfäche der beiden Medien

$$\varphi_i = \varphi_a \dots \dots \dots (11)$$

sein.

Die vorstehend abgeleiteten Gleichungen bestimmen das Problem vollkommen. Ehe wir daran gehen, sie auf den speziellen Fall einer Kugel anzuwenden, bemerken wir, daß man durch die Spezialisierung  $\varepsilon_i = \varepsilon_a = 0$  zu den Gleichungen gelangt, von welchen H. Hertz in seiner Abhandlung „Über die Verteilung der Elektrizität auf der Oberfläche bewegter Leiter“<sup>1)</sup> und v. Schweidler in der Abhandlung „Über Rotationen im homogenen elektrischen Felde“<sup>2)</sup> ausgegangen sind. Unsere Gleichungen gelten streng, solange die Kugel ruht. Sobald sie sich bewegt, müßte man von den Gleichungen des elektromagnetischen Feldes für bewegte Körper ausgehen. Wir nehmen also die Kugel als ruhend an und stellen uns die Aufgabe, das Drehungsmoment zu berechnen, welches sie durch das elektrostatische Drehfeld erfährt. Das Drehfeld resultiert aus den durch die Potentiale (2) charakterisierten Feldern. Die Größen des X-Feldes sollen durch den Index  $x$ , jene des Y-Feldes durch den Index  $y$  charakterisiert werden. Wir haben dann für die X-Richtung

$$\Phi_x = - \frac{a}{R} \rho \cos \omega \sin \vartheta \cos \alpha t \dots \dots \dots (12)$$

Für die Potentiale der Oberflächenladung im Innen- und Außenraum machen wir die Ansätze:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{xi} &= \frac{a}{R} \rho \cos \omega \sin \vartheta (A_x \sin \alpha t + B_x \cos \alpha t) \\ \varphi_{xa} &= aR^2 \frac{1}{\rho^2} \cos \omega \sin \vartheta (A_x \sin \alpha t + B_x \cos \alpha t) \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

<sup>1)</sup> Wied. Ann. 13, 266 (1881). Ges. Werke 1, 135.

<sup>2)</sup> Sitz.-Ber. d. K. Akad. d. Wiss. Wien 106, IIa, Juli 1897.

worin  $A_x$  und  $B_x$  Konstanten sind, deren Wert den Bedingungen des Problems entsprechend zu bestimmen ist.

$\varphi_{xi}$  und  $\varphi_{xa}$  genügen der Gleichung  $\nabla^2 \varphi = 0$ , und für die Trennungsfläche ( $\varrho = R$ ) ist  $\varphi_{xa} = \varphi_{xi}$ , der gewählte Ansatz ist möglich. Die Normale  $n$  fällt mit dem Radiusvektor  $\varrho$  zusammen. Aus (12) und (13) erhält man die Werte der Differentialquotienten nach  $\varrho$  für die Trennungsfläche ( $\varrho = R$ ):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \varrho} &= -\frac{a}{R} \cos \omega \sin \vartheta \cos \alpha t \\ \frac{\partial \varphi_{xi}}{\partial \varrho} &= \frac{a}{R} \cos \omega \sin \vartheta (A_x \sin \alpha t + B_x \cos \alpha t) \\ \frac{\partial \varphi_{xa}}{\partial \varrho} &= -\frac{2a}{R} \cos \omega \sin \vartheta (A_x \sin \alpha t + B_x \cos \alpha t) \end{aligned} \right\} \cdot (14)$$

Die Ausdrücke (14) tragen wir in Gl. (9) ein und erhalten nach entsprechender Reduktion:

$$\begin{aligned} &[\alpha(\varepsilon_a - \varepsilon_i) + \alpha(2\varepsilon_a + \varepsilon_i + 3)B_x - 4\pi(2\lambda_a + \lambda_i)A_x] \sin \alpha t \\ &- [4\pi(\lambda_a - \lambda_i) + 4\pi(2\lambda_a + \lambda_i)B_x + \alpha(2\varepsilon_a + \varepsilon_i + 3)A_x] \cos \alpha t = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung muß für jeden beliebigen Wert von  $t$  erfüllt sein, es müssen daher die Koeffizienten von  $\sin \alpha t$  und  $\cos \alpha t$  einzeln gleich Null sein, so daß wir zur Bestimmung der Konstanten  $A_x$  und  $B_x$  die Gleichungen erhalten:

$$\begin{aligned} -4\pi(2\lambda_a + \lambda_i)A_x + \alpha(2\varepsilon_a + \varepsilon_i + 3)B_x &= -\alpha(\varepsilon_a - \varepsilon_i) \\ \alpha(2\varepsilon_a + \varepsilon_i + 3)A_x + 4\pi(2\lambda_a + \lambda_i)B_x &= -4\pi(\lambda_a - \lambda_i), \end{aligned}$$

aus welchen sich ergibt:

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \frac{4\pi}{\alpha} \frac{3[(\varepsilon_a + 1)\lambda_i - (\varepsilon_i + 1)\lambda_a]}{\frac{16\pi^2}{\alpha^2}(2\lambda_a + \lambda_i)^2 + (2\varepsilon_a + \varepsilon_i + 3)^2} \\ B_x &= -\frac{\frac{16\pi^2}{\alpha^2}(2\lambda_a + \lambda_i)(\lambda_a - \lambda_i) + (2\varepsilon_a + \varepsilon_i + 3)(\varepsilon_a - \varepsilon_i)}{\frac{16\pi^2}{\alpha^2}(2\lambda_a + \lambda_i)^2 + (2\varepsilon_a + \varepsilon_i + 3)^2} \end{aligned} \right\} (15)$$

Für das Feld in der  $Y$ -Richtung hat man analog den Ansatz:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_y &= -\frac{a}{R} \varrho \sin \omega \sin \vartheta \sin \alpha t \\ \varphi_{yi} &= \frac{a}{R} \varrho \sin \omega \sin \vartheta (A_y \sin \alpha t + B_y \cos \alpha t) \\ \varphi_{y\alpha} &= a R^2 \frac{1}{\varrho^2} \sin \omega \sin \vartheta (A_y \sin \alpha t + B_y \cos \alpha t) \end{aligned} \right\} \cdot (16)$$

Die Durchführung der Rechnung ergibt:

$$\left. \begin{aligned} A_y &= B_x \\ B_y &= -A_x \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

Nach Gl. (8) ergibt sich für die Flächendichte der Oberflächenladung, welche durch die Wirkung des Wechselfeldes in der X-Richtung hervorgerufen wird:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{3a}{4\pi R} \cos \omega \sin \vartheta (A_x \sin \alpha t + B_x \cos \alpha t) \\ &= \frac{3a}{4\pi R} \cos \omega \sin \vartheta \cdot M, \end{aligned}$$

und für die durch das Feld in der Y-Richtung hervorgerufene Dichte:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{3a}{4\pi R} \sin \omega \sin \vartheta (A_y \sin \alpha t + B_y \cos \alpha t) \\ &= \frac{3a}{4\pi R} \sin \omega \sin \vartheta (B_x \sin \alpha t - A_x \cos \alpha t) \\ &= \frac{3a}{4\pi R} \sin \omega \sin \vartheta \cdot N, \end{aligned}$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} M &= A_x \sin \alpha t + B_x \cos \alpha t \\ N &= B_x \sin \alpha t - A_x \cos \alpha t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

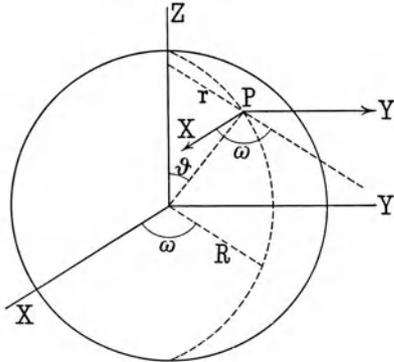
gesetzt ist. Die durch das Drehfeld induzierte Dichte  $\sigma$  ist somit:

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_y = \frac{3a}{4\pi R} \sin \vartheta (M \cos \omega + N \sin \omega) \dots (19)$$

Nun können wir das Drehungsmoment, welches die Kugel durch das Drehfeld erfährt, wie folgt berechnen.

Ein Flächenelement  $df$  beim Punkte  $P$  (Fig. 48), der die Koordinaten  $R, \omega, \vartheta$  hat, trägt die Ladung  $\sigma df$ . Ist  $X$  die Feldstärke des Wechselfeldes in der  $X$ -Richtung,  $Y$  jene des Wechselfeldes in der  $Y$ -Richtung, so ergeben die im Punkte  $P$  auf  $\sigma df$  wirkenden Kräfte ein Drehungsmoment an der Kugel im Werte von  $\sigma df \cdot r (Y \cos \omega - X \sin \omega)$ . Wir rechnen hierbei ein Drehungsmoment, welches entgegengesetzt dem Sinne der Uhrzeigerbewegung, also im Drehungsinne des Drehfeldes wirkt, als positiv.

Fig. 48.



Das gesamte an der Kugel wirkende Drehungsmoment  $D$  ergibt sich durch Integration über die ganze Kugeloberfläche, d. i. bezüglich der Variablen  $\vartheta$  von 0 bis  $\pi$ , bezüglich der Variablen  $\omega$  von 0 bis  $2\pi$ . Es ist also

$$D = \iint \sigma df r (Y \cos \omega - X \sin \omega),$$

oder weiter, da  $df = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\omega$ ,  $r = R \sin \vartheta$ :

$$D = R^3 \iint \sigma \sin^2 \vartheta (Y \cos \omega - X \sin \omega).$$

Setzt man hierin den Wert von  $\sigma$  aus Gl. (19) ein und führt die Integration aus, so folgt zunächst:

$$D = a R^2 (MY - NX).$$

Nun war (Gl. 1)  $X = \frac{a}{R} \cos \alpha t$ ,  $Y = \frac{a}{R} \sin \alpha t$ ; mit Verwendung dieser Werte wird

$$D = a^2 R (M \sin \alpha t - N \cos \alpha t)$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (18):

$$D = a^2 R A_x,$$

d. i. endlich unter Berücksichtigung von Gl. (15):

$$D = a^2 R \frac{4\pi}{\alpha} \frac{3 [(\varepsilon_a + 1) \lambda_i - (\varepsilon_i + 1) \lambda_a]}{\frac{16\pi^2}{\alpha^2} (2\lambda_a + \lambda_i)^2 + (2\varepsilon_a + \varepsilon_i + 3)^2} \quad (20)$$

Das Vorzeichen dieses Drehungsmomentes hängt bloß von dem Vorzeichen des Gliedes  $[(\varepsilon_a + 1) \lambda_i - (\varepsilon_i + 1) \lambda_a]$  ab. Es ist positiv, die Kugel sucht das Drehfeld mitzunehmen, wenn  $(\varepsilon_a + 1) \lambda_i > (\varepsilon_i + 1) \lambda_a$ , es ist negativ, wenn  $(\varepsilon_a + 1) \lambda_i < (\varepsilon_i + 1) \lambda_a$ .

Die von v. Schweidler (l. c.) abgeleitete Formel

$$D = a^2 R \frac{2\tau}{3} \frac{\lambda_i - \lambda_a}{1 + \frac{4\tau^2}{9} (2\lambda_a + \lambda_i)^2}$$

ergibt sich aus Gl. (20) durch die Spezialisierung  $\varepsilon_a = \varepsilon_i = 0$ , setzt also voraus, daß in den beiden Substanzen keine Verschiebungsströme zustande kommen können.

Gl. (20) kann auf die im § 26 beschriebenen Versuche v. Langs, betreffend das Verhalten fester Isolatoren in isolierenden Flüssigkeiten, angewendet werden. In den folgenden zwei kleinen Tabellen sind die Leitfähigkeiten und Dielektrizitätskonstanten der verwendeten Substanzen, soweit bekannt, zusammengestellt (wobei Glas als zu unsicher weggelassen ist):

| Stoff        | $\lambda_i$          | $\varepsilon_i$ | Stoff         | $\lambda_a$        | $\varepsilon_a$ |
|--------------|----------------------|-----------------|---------------|--------------------|-----------------|
| Quarz . . .  | $8 \cdot 10^{-15}$   | 4,7             | Äther . . .   | $2 \cdot 10^{-11}$ | 4,37            |
| Hartgummi    | $5 \cdot 10^{-16}$   | 2,8             | Chloroform .  | $1 \cdot 10^{-9}$  | 5,2             |
| Paraffin . . | $3,4 \cdot 10^{-19}$ | 2               | Xylol . . .   | $2 \cdot 10^{-11}$ | 2,5             |
|              |                      |                 | Benzol . . .  | $5 \cdot 10^{-18}$ | 2,3             |
|              |                      |                 | Toluol . . .  | $5 \cdot 10^{-16}$ | 2,4             |
|              |                      |                 | Olivenöl . .  | $1 \cdot 10^{-17}$ | 3               |
|              |                      |                 | Rizinusöl . . | $5 \cdot 10^{-16}$ | 4,8             |

Die Leitfähigkeiten sind als reziproker Widerstand des in Ohm gemessenen Widerstandes eines Kubikzentimeters der Substanz angegeben. Wir brauchen nicht auf elektrostatisches Maß umzurechnen, da es sich ja nur um den Relativwert der Größen  $(\varepsilon_a + 1) \lambda_i$  und  $(\varepsilon_i + 1) \lambda_a$  handelt. Die Leitfähigkeiten von Äther, Chloroform, Xylol sind von v. Schweidler an den von v. Lang benutzten Flüssigkeiten bestimmt worden. Die Leitfähigkeiten von Benzol, Toluol, Olivenöl, Rizinusöl sind nach Messungen von

Koller<sup>1)</sup> angegeben, alle übrigen Zahlen aus Landolt-Börnsteins Tabellen entnommen.

Zunächst findet man, daß nach der entwickelten Theorie die drei Isolatoren in Äther, Chloroform und Xylol ein negatives Drehungsmoment erfahren müssen, da für diese Kombinationen  $(\varepsilon_a + 1) \lambda_i < (\varepsilon_i + 1) \lambda_a$ . Dies steht in Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen v. Langs. Für die übrigen vier Flüssigkeiten ergibt sich folgendes. Quarz erfährt in allen vier Flüssigkeiten ein positives Drehungsmoment, ebenso Hartgummi, ausgenommen in Toluol, für welche Kombination sich  $(\varepsilon_a + 1) \lambda_i < (\varepsilon_i + 1) \lambda_a$ , aber nahe gleich Null ergibt. Für Paraffin ergibt sich in allen vier Flüssigkeiten  $(\varepsilon_a + 1) \lambda_i < (\varepsilon_i + 1) \lambda_a$ , also ein negatives Drehungsmoment. Nach den Versuchen v. Langs erfahren alle drei Isolatoren in allen vier Flüssigkeiten ein positives Drehungsmoment. Die Theorie ergibt dies mit der Ausnahme von Paraffin in allen vier Flüssigkeiten und von Hartgummi in Toluol. Bedenkt man aber, daß die zur Berechnung benutzten Zahlen nicht von Messungen an den verwendeten Substanzen stammen, so können diese Ausnahmen nicht überraschen. Im ganzen darf man wohl sagen, daß Gl. (20) die Resultate v. Langs in qualitativer Hinsicht wiedergibt.

In Luft, für welche  $\lambda_a = 0$  gesetzt werden kann, ergibt Gl. (20) in Übereinstimmung mit der Erfahrung stets ein positives Drehungsmoment. Ebenso zeigt sie, daß das Drehungsmoment Null ist, wenn die Leitfähigkeiten  $\lambda_i = \lambda_a = 0$  sind. Dies stimmt mit der im vorhergehenden Paragraphen angeführten Beobachtung an einem vollkommen getrockneten Papierzylinder. Auch die Tatsache, daß ein nasser Papierzylinder ebensowenig wie ein Zylinder aus Metallblech im elektrostatischen Drehfelde rotiert, vermag Gl. (20) zu erklären. Ist außen Luft ( $\lambda_a = 0$ ,  $\varepsilon_a = 1$ ), so erhalten wir für ein Metallblech ( $\varepsilon_i = 0$ ):

$$D = a^2 R \frac{4\pi}{\alpha} \frac{3 \lambda_i}{\frac{16\pi^2}{\alpha^2} \lambda_i^2 + 25};$$

dieser Ausdruck verschwindet für  $\lambda_i = \infty$  und ist sehr klein für größere Werte der Leitfähigkeit, so daß in einem solchen Falle

<sup>1)</sup> Sitz.-Ber. d. K. Akad. d. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., 98, IIa, Februar 1889.

das Drehungsmoment nicht mehr auszureichen braucht, um die Reibung zu überwinden.

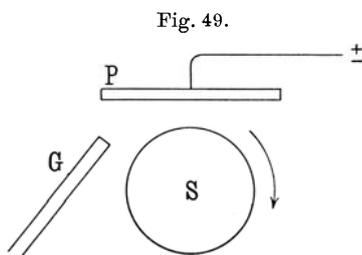
Aus den Rotationserscheinungen allein läßt sich auf die Hysteresis der Dielektrika nicht schließen. Wie vom Verfasser in der zitierten Arbeit gezeigt worden ist, ist hingegen zum Auftreten der Rotationserscheinungen nicht unbedingt erforderlich, daß das Dielektrikum Leitfähigkeit besitze. Viskose Hysteresis — d. h. zeitliches Zurückbleiben der Induktion hinter der induzierenden Feldstärke — gibt ebenfalls Veranlassung zur Entstehung eines Drehungsmomentes im elektrostatischen Drehfelde. Auf das Problem der dielektrischen Hysteresis kann natürlich hier nicht eingegangen werden. Es genügt, wenn das Zustandekommen der Rotationen unter Voraussetzung von physikalischen Eigenschaften der Isolatoren, wie sie sicher in sehr vielen Fällen vorliegen, verständlich ist.

## § 28.

### Rotationen im einfachen elektrostatischen Wechselfelde.

#### Versuche von Ch. Borel und v. Lang.

Charles Borel hat zuerst Rotationsversuche im elektrostatischen Wechselfelde angestellt <sup>1)</sup>, welche Versuchen im elektromagnetischen Drehfelde, die im § 20 besprochen worden sind, analog sind. Sein Grundversuch ist der folgende. Eine Metallplatte *P* (Fig. 49) wird mit einem Wechselfpotential geladen. Vor der Metallplatte hängt an einem Kokonfaden eine Glimmerscheibe *S*. Nähert man nun einen Glasstab *G*, so



gerät die Glimmerscheibe im Sinne des Pfeiles in Rotation. Der Rotationssinn kehrt sich um, wenn der Glasstab der Glimmerscheibe von der anderen Seite genähert wird. Er fand auch

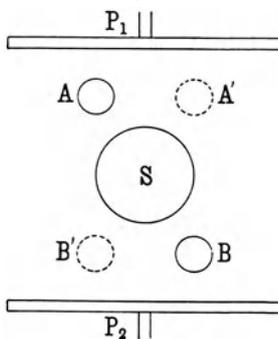
<sup>1)</sup> Recherches des constantes diélectriques principales de quelque substances cristallisées biaxes suivies d'une notice relative à des phénomènes dynamiques dus à l'électrisation résiduelle des diélectriques. Inaug.-Diss., Genf 1893. Auch in Archives des Sciences physiques et naturelles. 3<sup>me</sup> période, vol. 30. Genf 1893.

bereits, daß der Rotationssinn für verschiedene Körper verschieden ist. Verwenden wir die gleiche Terminologie wie beim elektromagnetischen Felde, so können wir sagen, daß durch das Annähern des Glasstabes in dem ursprünglich reinen elektrostatischen Wechselfelde eine Drehfeldkomponente hervorgerufen wird.

Borel benutzte zu seinen Versuchen eine Influenzmaschine und mußte daher noch einen Kommutator einschalten, welcher die nötigen Wechsel der Polarität besorgte. v. Lang versuchte dieselben Erscheinungen einfacher durch Verwendung des Wechselstromes hervorzubringen und gestaltete die Versuchsbedingungen überhaupt dadurch reiner, daß er mit einem parallelen Wechselfelde arbeitete<sup>1)</sup>.

v. Langs Apparat hatte folgende Konstruktion. Der Wechselstrom wurde zuerst durch einen Transformator (auch ein großer Funkeninduktor kann als Transformator dienen) auf die Spannung von beiläufig 9200 Volt gebracht; die Mitte der sekundären Wicklung des Transformators ist geerdet, die Enden derselben führen zu zwei Polplatten  $P_1$  und  $P_2$  (Fig. 50), welche aus Zinkblech gefertigt,  $20 \times 10$  cm groß, in der Entfernung von 17 cm einander gegenüberstehen. Die Feldstärke zwischen den Platten hatte somit eine Amplitude von etwa 1,8 elektrostatischen Einheiten. In der Mitte des Feldes befand sich die als Indikator für das Vorhandensein einer Drehfeldkomponente dienende Papierscheibe  $S$ , an einem 88 cm langen Seidenfaden aufgehängt. Die Scheibe hatte 4,52 cm Durchmesser und trug eine Gradeinteilung, um eine Drehung der Scheibe ablesen zu können. Die Versuche gewannen sehr an Reinheit, als die Scheibe von einem Becherglase umgeben wurde (Fig. 51). Der obere Rand des Glases wurde abgeschnitten; es hatte dann 15 cm Höhe, sein Durchmesser betrug 6 cm. Im Falle stärkerer Wirkungen wurden als Indikatoren auch Papierzylinder, die mit einem Achathütchen auf einer Nadelspitze (vgl. § 26) aufsaßen, verwendet.

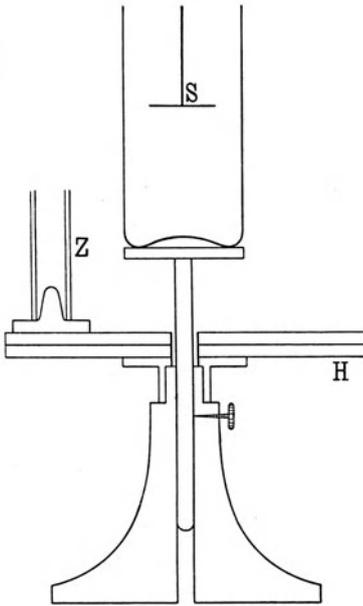
Fig. 50.



<sup>1)</sup> Versuche im elektrostatischen Wechselfelde. Sitz.-Ber. d. K. Akad. d. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., 116, IIa, Mai 1907.

Zu dem Apparate gehört noch ein schwerer Fuß (Fig. 51), welcher in seiner Mitte durchbohrt ist, wodurch eine von einem Hartgummistab getragene Hartgummischeibe höher und tiefer gestellt werden kann. Hierauf wird das erwähnte Becherglas oder das Stativ für den Papierzylinder gestellt. Auf dem Fuße ist ferner eine Holzscheibe *H* von 15 cm Durchmesser drehbar aufgesetzt. Auf dieser liegt noch eine Paraffinscheibe. Um nun

Fig. 51.



eine Substanz auf ihre Wirkung, eine Drehfeldkomponente zu erzeugen, zu prüfen, fertigt man aus derselben zwei gleiche Stäbe oder Hohlzylinder. Dickere Stäbe werden einfach auf die Paraffinscheibe gestellt, zur Aufstellung von dünneren dienen Glaszylinder *Z*, die aus einem Glasrohre bestanden, in dessen unteres Ende ein flacher Glasstopfen mit Paraffin eingekittet war. Man überzeugte sich, daß diese Glasgefäße, wenigstens in der gezeichneten tiefen Lage, keine Wirkung auf den Indikator ausübten. Eine andere Art, dünnere Stäbe in vertikaler Stellung zu verwenden, war die, daß ihr unteres Ende in kleine vier-eckige oder kreisrunde Stücke

einer 1 cm dicken Hartgummiplatte, die passende Bohrungen hatte, gesteckt wurde. Um die Mitte der Stäbe bis zur Mitte des Wechselfeldes zu heben, benutzte man gegebenenfalls Paraffinscheiben als Unterlage.

Die beiden zu untersuchenden Stäbe werden nach einer der angegebenen Arten immer symmetrisch auf einem Durchmesser der Paraffinscheibe möglichst nahe dem Becherglase, so daß nur ein Zwischenraum von etwa 3 mm blieb, aufgestellt. Die Verbindungslinie der Stäbe wurde immer unter 30° gegen die Nor-

male der Polplatten gestellt, die beiden möglichen Stellungen  $AB$  und  $A'B'$  (Fig. 50) unterscheiden sich daher um einen Winkel von  $60^\circ$ .

Nach Erregung des Feldes wurde dann bei diesen beiden Stellungen der Stäbe der Stand der Papierscheibe abgelesen; auf diese Weise eliminiert man den Fehler, der durch Exzentrizität der Scheibe hervorgerufen wird; die halbe Summe der absoluten Beträge dieser Ablesungen ist der absolute Betrag der von den Stäben bewirkten Drehung der Scheibe.

Diese Drehung wird als positiv bezeichnet, wenn der der Feldrichtung ursprünglich parallele Durchmesser der Scheibe sich so dreht, daß der spitze Winkel, den er mit der Verbindungslinie der Stäbe einschließt, größer wird.

Mit isolierenden Körpern wurden folgende Resultate erhalten:

|                            | $d$  | $l$  | $\varphi$          |
|----------------------------|------|------|--------------------|
| Schwefel . . . . .         | 1,32 | 21,7 | — 1,2 <sup>0</sup> |
| Roter Siegellack . . . . . | 1,30 | 22,3 | — 1,1              |
| Walrat . . . . .           | 1,38 | 12,8 | — 1,4              |
| Paraffin . . . . .         | 1,35 | 21,0 | — 1,1              |
| Stearin . . . . .          | 1,35 | 19,0 | — 1,3              |
| Ebonit . . . . .           | 1,21 | 20,0 | — 0,2              |
| Grünes Glas . . . . .      | 1,21 | 28,0 | — 1,4              |

$d$  bedeutet hier den Durchmesser der betreffenden zwei Stäbe in Zentimetern,  $l$  ihre Länge ebenfalls in Zentimetern,  $\varphi$  die durch sie bewirkte Drehung. Die Länge der Stäbe ist allerdings ziemlich verschieden, doch dürfte dies bei Isolatoren im Gegensatz von Leitern nicht viel bedeuten, so daß vielleicht nur bei Walrat Stäbe von etwa 21 cm Länge einen anderen Wert von  $\varphi$  zeigen würden. Die Durchmesser können wohl als gleich angesehen werden. Zwar hat die Größe des Durchmessers Einfluß auf die Größe der Drehung, diese wird aber erst bei größeren Differenzen merklich. Dies zeigt sich bei zwei an Siegellack und Paraffin angestellten Beobachtungen. Es wurde gefunden:

|                      | $d$  | $l$  | $\varphi$          |
|----------------------|------|------|--------------------|
| Siegellack . . . . . | 1,70 | 18,2 | — 2,7 <sup>0</sup> |
| Paraffin . . . . .   | 3,68 | 19,7 | — 4,7              |

Die Vergleichung mit den früheren Angaben lehrt, daß in beiden Fällen die Ablenkung mit dem Durchmesser wächst.

Weitere Versuche wurden mit guten Leitern ausgeführt. Zuerst wurden Beobachtungen an verschiedenen runden Messingstäben angestellt, um die Abhängigkeit ihrer Wirkung von Durchmesser und Länge festzustellen. In bezug auf letztere wurde beobachtet:

|                             |                           |
|-----------------------------|---------------------------|
| Messingstäbe $d = 1,21$ cm. |                           |
| Länge 10,0 cm               | $\varphi = + 2,4^{\circ}$ |
| 17,6                        | + 2,6                     |
| 21,0                        | + 4,4                     |
| 25,0                        | + 5,0                     |

Hier fällt vor allem auf, daß die Drehung positiv ist. Diese Drehung wird aber mit wachsendem Durchmesser immer kleiner und nimmt endlich negative Werte an wie bei Isolatoren. Dies ergibt sich aus folgenden Beobachtungen:

|                |               |                           |
|----------------|---------------|---------------------------|
| Länge 15,7 cm, | $d = 0,8$ cm, | $\varphi = + 4,4^{\circ}$ |
| 15,7           | 1,21          | + 2,5                     |
| 9,15           | 1,21          | + 2,4                     |
| 9,15           | 4,00          | — 13,0                    |

Verbindet man die beiden Stäbe oben oder unten durch Leiter oder Halbleiter, so nimmt die positive Drehung der Scheibe sehr große Werte an. So wurde mit zwei Stäben  $l = 25$  cm,  $d = 1,21$  cm bei gleichzeitiger Berührung mit den Händen  $\varphi = + 23^{\circ}$ , bei Verbindung derselben durch dünne Kupferstreifen  $+ 25^{\circ}$ .

Mit Messingröhren ergaben sich ähnliche Resultate. In der folgenden Tabelle bedeutet  $e$  die Wandstärke und  $d$  den äußeren Durchmesser der Röhren ( $e$  in Millimetern):

| $d$  | $e$  | $l$  | $\varphi$          |
|------|------|------|--------------------|
| 1,0  | 0,7  | 16,2 | + 3,8 <sup>o</sup> |
| 1,36 | 0,7  | 20,1 | + 2,2              |
| 2,05 | 0,55 | 19,2 | + 1,8              |
| 3,62 | 0,55 | 23,1 | — 4,9              |

Die Verbindung der Röhren durch einen Leiter oder Halbleiter führt eine starke positive Drehung herbei, auch für den Fall, daß die ursprüngliche Drehung negativ war. So gaben die letzten Röhren ( $d = 3,62$  cm) bei Verbindung durch die Hände oder durch Metall  $\varphi = + 42^{\circ}$ . Mitunter geriet bei den letzten Ver-

suchen die Scheibe sogar in Rotation nach der positiven Seite. Dies fand nämlich dann statt, wenn der verbindende Metallstreifen nicht gut auflag und zwischen demselben und der betreffenden Röhre kleine Fünkchen übersprangen. Nachdem die Ursache erkannt war, konnte die Rotation der Scheibe auch mit den Händen erzielt werden, indem die eine Hand der Röhre nur so weit genähert wurde, daß kleine Entladungen eintraten.

Bei Halbleitern werden die Verhältnisse noch komplizierter, da ihre Wirkung sehr von dem Grade ihrer Trockenheit abhängt. Untersucht wurden Zylinder aus weichem Holze und Röhren, die aus aufgerolltem Schreibpapier hergestellt worden waren. Die ersteren wurden unter anderem untersucht einmal, nachdem sie über einen Winter in einem ungeheizten Vorzimmer aufbewahrt worden waren, dann, nachdem sie während einer Nacht in Wasser gelegen waren, wodurch sie um beiläufig 11 Proz. an Gewicht zunahmen. Für die Holzzylinder wurde gefunden:

|               |               |                          |                        |
|---------------|---------------|--------------------------|------------------------|
| $d = 1,34$ cm | $l = 22,0$ cm | trocken $+ 17,6^{\circ}$ | feucht $+ 1,5^{\circ}$ |
| 2,40          | 21,0          | $+ 1,8$                  | $- 3,8$                |
| 3,65          | 21,0          | $- 10,0$                 | $- 10,3$               |
| 4,70          | 21,5          | $- 19,8$                 | $- 11,6$               |

Von den Beobachtungen mit Papierzylindern seien die folgenden angeführt. Die Zylinder wurden aus grauem Schreibpapier gefertigt, indem ein halber Bogen ( $21 \times 34$  cm) nach der schmalen Seite um einen passenden Dorn gewickelt und das Ende mit Kleister festgemacht wurde. Die Zylinder hatten daher alle die gleiche Länge von 21 cm, aber verschiedene Wandstärke, je nach ihrem Durchmesser. In der folgenden Tabelle sind die Beobachtungen mit den zimmertrockenen Zylindern zusammengestellt ( $d$  bedeutet den äußeren Durchmesser,  $e$  die Wandstärke):

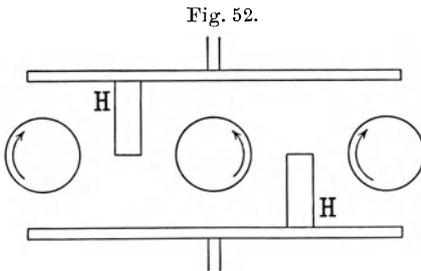
|               |               |                           |
|---------------|---------------|---------------------------|
| $d = 1,34$ cm | $e = 0,57$ mm | $\varphi = + 7,9^{\circ}$ |
| 1,75          | 0,43          | $- 7,0$                   |
| 2,00          | 0,38          | $- 7,5$                   |
| 2,20          | 0,34          | $- 9,7$                   |
| 2,40          | 0,28          | $- 12,6$                  |
| 3,00          | 0,25          | $- 16,4$                  |
| 4,40          | 0,17          | $- \infty$                |

Bei dem weitesten Zylinder geriet die Scheibe in Rotation, welche erst nach vielen Umdrehungen durch die entgegenwirkende Torsion des Aufhängefadens zum Stillstande kam.

Auch bei den Halbleitern wird die Ablenkung in positivem Sinne größer, wenn man sie durch Metall oder feuchte Halbleiter (Holz, Kork, Pappe usw.) verbindet oder beide gleichzeitig mit den Händen berührt. Bei den Holzzyllindern war diese Wirkung so stark, daß die Scheibe immer in positive Rotation geriet.

Energische Rotationen wurden mit Hilfe zweier isolierter Flammen erhalten, die an die Stelle der Ablenkungsstäbe gebracht werden. Hierzu dienten zwei Stearinkerzen, die so weit verkürzt wurden, daß ihre Flammen in die Höhe der Papierscheibe kamen. Die Verbindungslinie der Flammen schloß wieder einen Winkel von  $30^\circ$  mit der Feldrichtung ein. Die durch die zwei Flammen bewirkte Rotation ist negativ und so kräftig, daß auch die erwähnten Papierzylinder in lebhaftere Drehung geraten, eine Bewegung, die nicht gestört wird, wenn über die Papierzylinder ein Glaszylinder gestülpt wird.

Übrigens rufen die Flammen auch im konstanten elektrischen Felde Rotationen hervor, wie v. Lang gefunden hat. Diese Erscheinung gehört in das Gebiet der von Quincke entdeckten Rotationserscheinungen im konstanten elektrischen Felde<sup>1)</sup>, ein Gebiet, das wir hier nicht zu behandeln haben.



Mit den Flammen können auch Zylinder aus gut leitendem Material in Drehung versetzt werden. Dies wurde an Zylindern aus sehr dünnem Kupferblech nachgewiesen, die ähnliche Form wie die Papierzylinder hatten.

In dem Wechselfelde bleibt die Flamme vertikal, zieht sich aber zu einer Ebene zusammen, welche parallel zu den Kraftlinien an der betreffenden Stelle ist. Man kann daher Flammen dazu benutzen, um sich über den Kraftlinienverlauf in einem Wechselfelde zu orientieren.

Wie aus den vorstehend mitgeteilten Beobachtungen hervorgeht, ist die Wirkung der Halbleiter stärker als die der Leiter

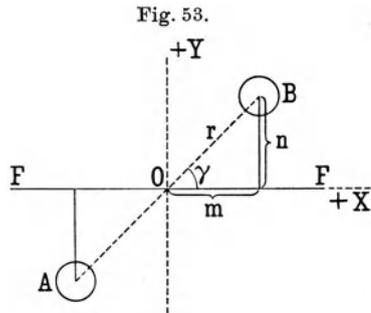
<sup>1)</sup> Ann. d. Phys. 59, 417 (1896).

und Isolatoren. Diese Tatsache diene als Ausgangspunkt für eine Anordnung, welche in Fig. 52 skizziert ist. An die beiden Polplatten wurden zwei Holzbrettchen  $HH$  gehängt; man erhielt auf diese Weise ein Drehfeld. Die Dimensionen der Holzbrettchen können in weiten Dimensionen variiert werden. Sowohl zwischen den Brettchen als auch außerhalb derselben gerät der Indikator (Papierzylinder) in Rotation. Der Drehungssinn ist in der Figur angegeben. In diesem Drehfelde konnten die gleichen Versuche ausgeführt werden wie mit den früher beschriebenen Drehfeldanordnungen. Diese eigenartige Drehfeldanordnung v. Langs bildet den Übergang zu der im § 25 besprochenen Anordnung von Lampa.

### § 29. Theorie der Rotationserscheinungen im Wechselfelde.

Die im vorhergehenden Paragraphen beschriebenen Erscheinungen beweisen, daß durch Einführung von Körpern verschiedener Art in ein Wechselfeld eine Drehfeldkomponente erzeugt wird. Eine exakte Theorie dieser Drehfeldkomponente stößt auf dieselben Schwierigkeiten wie die Theorie der Rotationen im elektrostatischen Drehfelde; sie hängt wie diese mit dem Problem der dielektrischen Hysterisis zusammen. Man kann aber zeigen, daß auch, ohne daß dielektrische Hysterisis bei den in das Feld eingeführten Körpern vorhanden ist, durch sie eine Drehfeldkomponente erzeugt wird, sofern sie nur Leitfähigkeit besitzen. Qualitative Beobachtungen dieser Wirkung sagen daher über das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein von dielektrischer Hysterisis nichts aus.

Wir betrachten nun im folgenden einen für den theoretischen Ansatz möglichst bequemen Fall. Die beiden Körper, welche in das Wechselfeld gebracht werden, seien Kugeln aus gleichem Material und von gleichem Radius. Ihre Mittelpunkte sollen in der Ebene der als Indikator dienenden Papierscheibe liegen



und von dem Mittelpunkte derselben gleich weit entfernt sein, die Verbindungslinie dieser Mittelpunkte durch den Mittelpunkt der Scheibe hindurchgehen. In Fig. 53 ist  $O$  der Mittelpunkt der (nicht gezeichneten) Scheibe, deren Ebene die Zeichenebene sei,  $A$  und  $B$  die beiden Kugeln vom Radius  $R$ . Wir nehmen an, daß die Entfernung  $2r$  der Mittelpunkte der beiden Kugeln so groß sei gegen ihren Radius  $R$ , daß die gegenseitige Einwirkung der beiden Kugeln vernachlässigt werden kann. Das Wechsel-  
feld sei homogen,  $FF$  sei eine Kraftlinie desselben. Wir benutzen Koordinatensysteme, deren  $X$ -Achse  $// FF$ , deren  $Y$ -Achse senkrecht dazu, und zwar in der Papierebene, und deren  $Z$ -Achse senkrecht zur Papierebene liegen mögen; es verlaufe die positive Hälfte der  $X$ -Achse von links nach rechts, die positive Hälfte der  $Y$ -Achse von unten nach oben, die positive Hälfte der  $Z$ -Achse von der Papierebene gegen den Beschauer. Die Feldstärke sei

$$X_0 = \frac{a}{R} \cos \alpha t \dots \dots \dots (1)$$

Ihr entspricht nach der ersten der Gleichungen (2) des § 27 ein Potential

$$\Phi = - \frac{a}{R} \varrho \cos \omega \sin \vartheta \cos \alpha t,$$

durch welches auf jeder der beiden Kugeln Ladungen hervorgerufen werden, deren Potential außerhalb der Kugeln gemäß der ersten der Gleichungen (13) des § 27 durch den Ausdruck

$$\varphi_a = a R^2 \frac{1}{\varrho^2} \cos \omega \sin \vartheta (A \sin \alpha t + B \cos \alpha t) \dots (2)$$

dargestellt wird, worin nach Gl. (15) desselben Paragraphen

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{4\pi}{\alpha} \frac{3 [(\varepsilon_a + 1) \lambda_i - (\varepsilon_i + 1) \lambda_a]}{\frac{16\pi^2}{\alpha^2} (2\lambda_a + \lambda_i)^2 + (2\varepsilon_a + \varepsilon_i + 3)^2} \\ B &= - \frac{\frac{16\pi^2}{\alpha^2} (2\lambda_a + \lambda_i) (\lambda_a - \lambda_i) + (2\varepsilon_a + \varepsilon_i + 3) (\varepsilon_a - \varepsilon_i)}{\frac{16\pi^2}{\alpha^2} (2\lambda_a + \lambda_i)^2 + (2\varepsilon_a + \varepsilon_i + 3)^2} \end{aligned} \right\} (3)$$

Für den Ausdruck (2) ist hierbei vorausgesetzt, daß ein Koordinatensystem benutzt wird, dessen Anfangspunkt im Kugel-

mittelpunkte liegt.  $\varrho$ ,  $\omega$ ,  $\vartheta$  sind Polarkoordinaten,  $\varepsilon_a$ ,  $\varepsilon_i$ ,  $\lambda_a$ ,  $\lambda_i$  haben die in § 27 angegebene Bedeutung. Da  $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$  und  $\varrho \cos \omega \sin \vartheta = x$  ist, kann man Gl. (2) auch schreiben:

$$\varphi_a = a R^2 \frac{x}{\varrho^3} (A \sin \alpha t + B \cos \alpha t) = K \frac{x}{\varrho^3} \cdot \cdot \cdot (4)$$

Dieses Potential ergibt eine Feldstärke parallel zur  $X$ -Achse:

$$X = - \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} = - \frac{K}{\varrho^3} + \frac{3 K x^2}{\varrho^5}$$

und eine Feldstärke parallel zur  $Y$ -Achse:

$$Y = - \frac{\partial \varphi_a}{\partial y} = + \frac{3 K x y}{\varrho^5}.$$

Von diesen Ausdrücken ausgehend erhalten wir die Feldstärken parallel zur  $X$ - und  $Y$ -Achse, welche von den Kugeln  $A$  und  $B$  im Punkte  $O$  erzeugt werden.

In dem Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt im Mittelpunkte der Kugel  $A$  liegt, hat  $O$  die Koordinaten  $x = +m$ ,  $y = +n$ ,  $z = 0$  und es ist für ihn  $\varrho = r$ . Die Kugel  $A$  liefert daher im Punkte  $O$  die Feldstärken

$$X_A = - \frac{K}{r^3} + \frac{3 K m^2}{r^5}$$

$$Y_B = + \frac{3 K m n}{r^5}.$$

Die Koordinaten von  $O$  hingegen in dem Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt im Mittelpunkte der Kugel  $B$  liegt, sind  $x = -m$ ,  $y = -n$ ,  $z = 0$  und es ist  $\varrho = r$ . Die Kugel  $B$  liefert daher in  $O$  die Feldstärken

$$X_B = - \frac{K}{r^3} + \frac{3 K m^2}{r^5}$$

$$Y_B = + \frac{3 K m n}{r^5}.$$

Das von beiden Kugeln zusammen im Punkte  $O$  erzeugte Feld ist somit gegeben durch die Feldstärken

$$X = X_A + X_B = -\frac{2K}{r^3} + \frac{6Km^2}{r^5}$$

$$Y = Y_A + Y_B = +\frac{6Kmn}{r^5},$$

oder, wenn man auf die durch Gl. (4) festgelegte Bedeutung von  $K$  zurückgeht:

$$X = \frac{2}{r^3} \left( \frac{3m^2}{r^2} - 1 \right) a R^2 (A \sin \alpha t + B \cos \alpha t)$$

$$Y = \frac{6mn}{r^5} a R^2 (A \sin \alpha t + B \cos \alpha t).$$

Setzt man

$$A \sin \alpha t + B \cos \alpha t = C \sin(\alpha t + \varphi),$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} C &= \sqrt{A^2 + B^2} \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{B}{A} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

sind, so wird, indem wir noch

$$\alpha t + \varphi = \alpha T \dots \dots \dots (6)$$

setzen:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{2}{r^3} \left( \frac{3m^2}{r^2} - 1 \right) a R^2 C \sin \alpha T \\ Y &= \frac{6mn}{r^5} a R^2 C \sin \alpha T \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Diese beiden Felder lassen sich zu einem resultierenden einfachen Wechselfelde zusammensetzen. Die Amplitude dieses resultierenden Feldes ist  $\sqrt{X^2 + Y^2}$ . Man findet, unter Berücksichtigung, daß  $m^2 + n^2 = r^2$  ist:

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{2}{r^3} \sqrt{\frac{3m^2}{r^2} + 1} \cdot a R^2 C.$$

Das resultierende Feld schließt mit dem ursprünglichen einen Winkel  $\beta$  ein, welcher bestimmt ist durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{Y}{X} = \frac{\frac{3mn}{r^2}}{\frac{3m^2}{r^2} - 1} = \frac{n}{m} \cdot \frac{\frac{3m^2}{r^2}}{\frac{3m^2}{r^2} - 1} \dots \dots (8)$$

Bezeichnen wir den spitzen Winkel zwischen der Verbindungslinie der beiden Kugelmittelpunkte und der Richtung des ursprünglichen Wechselfeldes mit  $\gamma$  (s. Fig. 53), so ist

$$\frac{n}{m} = \operatorname{tg} \gamma \quad \text{und} \quad \frac{m}{r} = \cos \gamma$$

und es wird

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \gamma \frac{3 \cos^2 \gamma}{3 \cos^2 \gamma - 1} \dots \dots \dots (9)$$

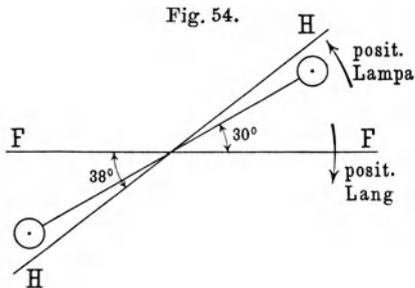
Die beiden Kugeln erzeugen also ein Wechselfeld, es heiße  $H$ , welches durch die Gleichung

$$H = \frac{2}{r^3} \sqrt{\frac{3m^2}{r^2} + 1} \cdot a R^2 C \sin \alpha T \dots \dots (10)$$

bestimmt ist. Das Feld  $H$  schließt mit dem ursprünglichen Felde einen Winkel  $\beta$  ein, hat eine andere Amplitude als dasselbe und ist in der Phase gegen das ursprüngliche Feld verschoben. Beide Felder haben hingegen gleiche Schwingungsdauer. Die Resultierende der beiden periodischen Feldstärken ist nach bekannten Sätzen im allgemeinen eine elliptische Schwingung der Feldstärke, die ihrerseits als Superposition einer zirkularen Schwingung, d. i. eines reinen elektrostatischen Drehfeldes, und einer linearen Schwingung, d. i. eines reinen Wechselfeldes aufgefaßt werden kann. Es ist hiermit gezeigt, daß in der Tat durch die Ein-

bringung der Kugeln in das Wechselfeld im allgemeinen eine Drehfeldkomponente hervorgerufen wird, also der prinzipielle Teil der Theorie der im vorhergehenden Paragraphen beschriebenen Versuche v. Langs erledigt. Voraussetzung ist nur, daß die Koeffizienten  $A$  und  $B$  von

$\lambda$  null verschieden sind, was der Fall ist, wenn wenigstens eines der beiden Medien, die Kugeln oder ihre Umgebung, Leitfähigkeit besitzt, und daß die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Kugeln nicht in die ursprüngliche Feldrichtung fällt, in welchem



Falle  $\beta = 0$  wäre und die beiden Wechselfelder wieder nur ein Wechselfeld ergeben würden.

Bei der Versuchsanordnung v. Langs war  $\gamma = 30^\circ$ . Wir finden also, wenn wir die Kugeln in diese Stellung bringen,  $\cos \gamma = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ ,  $\sin \gamma = \frac{1}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{3} \sqrt{3}$  und  $\operatorname{tg} \beta = \frac{5\sqrt{3}}{11}$

oder  $\beta = 38^\circ 13'$  oder rund  $38^\circ$ . Die beiden Felder, das ursprüngliche Feld  $FF$  und das von den Kugeln herrührende  $HH$  schließen miteinander einen Winkel von etwa  $38^\circ$  ein (Fig. 54). Für die weitere Durchführung der Theorie ist diese Stellung des Feldes  $HH$  nicht die bequemste. Am einfachsten wird die Rechnung, wenn  $HH$  auf  $FF$  senkrecht steht. Hierzu muß  $\beta = 90^\circ$ ,  $\operatorname{tg} \beta = \infty$ , also nach Gl. (9)  $3 \cos^2 \gamma = 1$  sein. Hieraus findet man  $\gamma = 54^\circ 44' 7''$ . Bei diesem Werte von  $\gamma$  wird  $\frac{3m^2}{r^2} - 1 = 3 \cos^2 \gamma - 1 = 0$  und die von den beiden Kugeln

parallel zur  $X$ -Achse gelieferte Feldstärke  $X$  gemäß Gl. (7) ebenfalls gleich Null. Die parallel zur  $Y$ -Achse gelieferte Feldstärke, welche durch die zweite Gl. (7) dargestellt ist, erhalten wir am bequemsten aus Gl. (10), in welcher wir nur  $\frac{3m^2}{r^2} = 1$  zu setzen haben:

$$Y = \frac{2\sqrt{2}}{r^3} a R^2 C \sin(\alpha t + \varphi).$$

Im Punkte  $O$  wirken also jetzt die beiden Feldstärken:

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= \frac{a}{R} \cos \alpha t \\ Y &= a R^2 \cdot D \sin(\alpha t + \varphi) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

worin  $D = \frac{2\sqrt{2} C}{r^3}$ , und  $C$  und  $\varphi$  die durch Gl. (5) bestimmten Werte bedeuten.

Die beiden einfachen Wechselfelder  $X_0$  und  $Y$  liefern ein elliptisches Drehfeld, wie man leicht durch Elimination der Zeit aus den beiden Gleichungen dieser Felder findet. Man erhält die Gleichung einer Ellipse:

$$Y^2 - 2 R^3 D \sin \varphi X_0 Y + R^6 D^2 X_0^2 = a^2 R^4 D^2 \cdot \cos^2 \varphi.$$

Das Drehfeld hat keine konstante Feldstärke; diese variiert zwischen einem Maximal- und Minimalwert, welche durch die Werte der großen und kleinen Halbachse der Ellipse bestimmt sind. Die Winkelgeschwindigkeit des Feldes ist gleichfalls nicht konstant, dagegen ist die Flächengeschwindigkeit der Feldstärke eine konstante Größe.

Von besonderem Interesse ist für uns der Drehungssinn des Feldes. Der Winkel  $\psi$ , welchen die Richtung der Feldstärke mit der positiven Richtung der X-Achse einschließt, ist bestimmt durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi &= \frac{Y}{X_0} = R^3 D \frac{\sin(\alpha t + \varphi)}{\cos \alpha t} \\ &= \frac{2\sqrt{2} R^3}{r^3} \sqrt{A^2 + B^2} \frac{\sin(\alpha t + \varphi)}{\cos \alpha t}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt der Differentialquotient von  $\operatorname{tg} \psi$  nach der Zeit:

$$\frac{d \operatorname{tg} \psi}{dt} = \frac{2\sqrt{2} R^3}{r^3} \sqrt{A^2 + B^2} \frac{\cos \varphi}{\cos^2 \alpha t}.$$

Nun ist  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A}$ ; es ist daher  $\cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$  und

$$\frac{d \operatorname{tg} \psi}{dt} = \frac{2\sqrt{2} R^3 A}{r^3 \cos^2 \alpha t}.$$

Ist der Differentialquotient positiv, so nimmt  $\psi$  mit wachsender Zeit zu, d. h. in dem gewählten Koordinatensystem: das Feld dreht sich entgegengesetzt dem Sinne der Uhrzeigerbewegung. Wenn wir diesen Drehungssinn in üblicher Weise als positiv bezeichnen, so sehen wir, daß der so definierte Drehungssinn derjenige ist, welchen v. Lang bei der angenommenen Stellung der Kugeln zu dem Indikator als negativ bezeichnet. Ist der Differentialquotient negativ, so nimmt  $\psi$  mit wachsender Zeit ab, das Feld rotiert in negativem Sinne, d. i. im Sinne der Uhrzeigerbewegung, es vollführt eine Drehung, welche von v. Lang als positiv bezeichnet wird.

Das Vorzeichen des Differentialquotienten von  $\operatorname{tg} \psi$  hängt einzig und allein vom Vorzeichen der Größe  $A$ , also davon ab, ob  $(\varepsilon_a + 1)\lambda_i$  größer oder kleiner ist als  $(\varepsilon_i + 1)\lambda_a$ . Ist  $(\varepsilon_a + 1)\lambda_i > (\varepsilon_i + 1)\lambda_a$ , so ist  $A$  positiv, das Feld rotiert entgegengesetzt

dem Sinne der Uhrzeigerbewegung, nach v. Langs Bezeichnungsweise negativ; ist  $(\varepsilon_a + 1) \lambda_i < (\varepsilon_i + 1) \lambda_a$ , so ist  $A$  negativ, das Feld rotiert im Sinne der Uhrzeigerbewegung, nach v. Langs Bezeichnungsweise negativ.

Vergleichen wir nun dieses theoretische Ergebnis mit den Versuchen von v. Lang. Das Feldmedium war immer die Luft. Angenommen, daß die Luft im Felde absolut nichtleitend sei, so ist  $\lambda_a = 0$  und  $A$  infolgedessen immer positiv. Das Feld muß daher bei der in Fig. 54 angenommenen Stellung der Kugeln entgegengesetzt dem Sinne der Uhrzeigerbewegung rotieren, ganz unabhängig davon, ob die Kugeln aus isolierendem, d. i. sehr schlecht leitendem, halbleitendem oder gut leitendem Material bestehen. Der Indikator des Drehfeldes sollte sich somit nach v. Langs Bezeichnungsweise immer im negativen Sinne drehen. Dies ist nun bei den v. Langschen Versuchen (vgl. die im § 28 mitgeteilten Beobachtungen) bei den Isolatoren und den Flammen stets, bei den Halbleitern in den meisten Fällen tatsächlich zu beobachten gewesen. Bei Metallen wurde die im Sinne der Theorie normale Drehung des Indikators nur bei großen Durchmesser der in das Feld gestellten Messingstäbe beobachtet, während bei Stäben kleineren Durchmessers der Indikator im Sinne der Uhrzeigerbewegung zu rotieren anhub. Unsere Theorie ergibt keine Abhängigkeit des Rotationsinnes des Feldes vom Kugelradius. Es bleibt zu untersuchen, ob sich eine solche zeigt, wenn die gegenseitige Beeinflussung der Kugeln berücksichtigt wird. Aber selbst wenn sich ein solcher Einfluß herausstellt, der ja möglich ist, so müßte man doch gerade erwarten, daß bei kleinen Kugelradien das normale und erst bei großen Kugelradien das anormale Verhalten eintreten sollte. Die Beobachtungen zeigen aber gerade das Umgekehrte: normales Verhalten bei großen, anormales bei kleinen Durchmessern der benutzten Stäbe. Aus diesem Grunde dürfte die Erklärung anderswo zu suchen sein.

Man könnte an einen von Null verschiedenen Wert der Leitfähigkeit des Feldmediums denken. Da sind nun zwei Möglichkeiten ins Auge zu fassen. Es kann erstens das Feld im Sinne der Uhrzeigerbewegung rotieren. Dies wäre nur möglich, wenn durch die Anwesenheit der dünneren Metallstäbe die Leitfähigkeit  $\lambda_a$  der Luft so weit gesteigert würde, daß  $(\varepsilon_a + 1) \lambda_i$

$< (\varepsilon_i + 1) \lambda_a$  würde. Das ist nun wohl ganz ausgeschlossen; wenn wir auch annehmen wollen, daß die geladenen Metallstäbe in der sie umgebenden Luft Leitfähigkeit hervorrufen, so kann doch  $\lambda_a$  niemals den Wert  $\lambda_i$  eines Metalles erreichen. Wir wollen uns daher der zweiten Möglichkeit zuwenden. Es ist nach § 27 unter einer gewissen Bedingung möglich, daß der Indikator entgegengesetzt der Drehungsrichtung des Feldes rotiert, und dieser Fall scheint eben in v. Langs Versuchen mit Metallstäben kleineren Durchmessers und mit einigen Stäben aus Halbleitern — und auch hier waren es wieder die Stäbe von kleinerem Durchmesser — vorzuliegen. Die zu der Drehungsrichtung des Feldes entgegengesetzte Rotation des Indikators tritt ein, wenn  $(\varepsilon_a + 1) \lambda'_i < (\varepsilon'_i + 1) \lambda_a$ , wobei  $\varepsilon'_i$  und  $\lambda'_i$  sich auf das Material des Indikators beziehen. Hat also die Luft eine von Null verschiedene Leitfähigkeit, während der Indikator gar nicht ( $\lambda'_i = 0$ ) oder im Vergleich zu  $\lambda_a$  sehr schlecht leitet, so wäre die Bedingung für die Rotation des Indikators entgegen der Rotation des Feldes erfüllt. Man brauchte also bloß anzunehmen, daß die Luft im Felde in einem gewissen Betrage ionisiert ist, welcher Betrag bei leitenden Stangen von kleinerem Durchmesser einen höheren Wert erreichen müßte als bei solchen Stangen von größerem Durchmesser, um die Ergebnisse v. Langs zu erklären. Dieser Annahme scheinen wenigstens prinzipielle Schwierigkeiten nicht entgegenzustehen. Denken wir an die Spitzenentladung, so werden wir es verständlich finden, daß von den Stäben geringeren Durchmessers die freie Ladung leichter gegen den Indikator hin abströmt als von den Stäben größeren Durchmessers, d. h. daß der Zwischenraum zwischen den Stäben und dem Indikator etwas reicher an Ionen ist, wenn die Stäbe dünner sind.

Der Fall, daß  $(\varepsilon_a + 1) \lambda_i < (\varepsilon_i + 1) \lambda_a$ , wobei eine Umkehrung des Rotationssinnes des Feldes eintritt, ist ungefähr realisiert in den v. Langschen Experimenten, wo die Stäbe leitend miteinander verbunden wurden. Diese Verbindung ermöglicht den freien Ladungen der beiden Stäbe, sich gegenseitig momentan zu neutralisieren, genau so wie eine große Leitfähigkeit des Feldmediums einen raschen Ausgleich dieser freien Ladungen herbeiführen würde. Während aber in letzterem Falle durch die Wirkung der Leitfähigkeit des Feldmediums auf den Indikator die Erscheinung verwickelter würde, liegen die Verhältnisse beim

Anlegen einer leitenden Verbindung einfacher. Die Rotation des Indikators entgegengesetzt zur normalen wird in diesem Falle auf die Umkehrung des normalen Umdrehungssinnes des Feldes zurückzuführen sein.

Der Rotationssinn der eigenartigen, am Schlusse des § 28 beschriebenen Drehfeldanordnung v. Langs, in welcher das Drehfeld durch Anhängen von Brettchen an die Polplatten erhalten wurde, entspricht, was noch bemerkt werden möge, vollkommen unserer Theorie, er ist normal.

Ähnlich wie die Leitfähigkeit würde dielektrische Hysteresis der Kugeln wirken. Die qualitative Untersuchung der Eigenschaft von Isolatoren, in einem einfachen elektrostatischen Drehfelde eine Drehfeldkomponente hervorzurufen, kann daher über das Vorhandensein dielektrischer Hysteresis keinen Aufschluß geben. Wir begnügen uns darum auch hier, wie dies im § 27 geschehen ist, mit der Betrachtung der Wirkung der Leitfähigkeit; unsere Theorie zeigt, daß schon durch die Leitfähigkeit allein das Auftreten einer Drehfeldkomponente bedingt ist; Leitfähigkeit aber besitzen die meisten Isolatoren in größerem oder geringerem Maße.

---

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig.

In der Sammlung

# Elektrotechnik

## in Einzel-Darstellungen

unter Mitwirkung hervorragender Fachmänner herausgegeben von **Dr. Gustav Benischke**, erschienen bisher:

1. Heft:

**Die Schutzvorrichtungen der Starkstromtechnik** gegen atmosphärische Entladungen und Überspannungen von Dr. Gustav Benischke. 2. Auflage. Mit 114 Abbildungen. 1911. (VIII u. 123 S.) *M* 3,50, geb. *M* 4,20.

2. Heft:

**Der Parallelbetrieb von Wechselstrommaschinen** von Dr. Gust. Benischke. Mit 43 Abbildungen. 1902. (4 Bl. u. 55 S.) *M* 1,20, geb. *M* 1,60.

3. Heft:

**Die Grundgesetze der Wechselstromtechnik** von Dr. Gustav Benischke. Mit 113 Abbildungen. 1902. (X u. 142 S.) *M* 3,60, geb. *M* 4,20.

4. Heft:

**Die vagabundierenden Ströme** elektrischer Bahnen von Dr. Carl Michalke. Mit 34 Abbildungen. 1904. (VII u. 85 S.) *M* 2,50, geb. *M* 3,—.

5. Heft:

**Die asynchronen Drehstrommotoren**, ihre Wirkungsweise, Prüfung und Berechnung von Dr. Gustav Benischke. Mit 2 farbigen Tafeln und 112 Abbildungen. 1904. (VIII u. 172 S.) *M* 5,50, geb. *M* 6,—.

6. Heft:

**Die elektrischen Bogenlampen**, deren Prinzip, Konstruktion und Anwendung von J. Zeidler. Mit 130 Abbildungen und 1 Kurventafel. 1905. (X u. 143 S.) *M* 5,50, geb. *M* 6,—.

7. Heft:

**Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven** von Dr. Ernst Orlich. Mit 71 Abbildungen. 1906. (VIII u. 117 S.) *M* 3,50, geb. *M* 4,—.

❧❧❧ Ausführliches Verlagsverzeichnis kostenlos. ❧❧❧

## **Elektrotechnik in Einzel-Darstellungen.**

8. Heft:

**Lichtstrahlung und Beleuchtung** von Paul Högner. Mit 37 Abbildungen und 7 Tafeln. 1906. (IX u. 66 S.)

*M* 3,—, geb. *M* 3,50.

9. Heft:

**Die elektrischen Bahnen** und ihre Betriebsmittel von Dipl.-Ing. Herbert Kyser. Mit 73 Abbildungen und 10 Tafeln. 1907. (VIII u. 135 S.)

*M* 5,50, geb. *M* 6,—.

10. Heft:

**Die Isoliermittel** der Elektrotechnik von Karl Wernicke. Mit 60 Abbildungen und 1 Tabelle. 1908. (IX u. 184 S.)

*M* 5,50, geb. *M* 6,—.

11. Heft:

**Die selbsttätige Regulierung der elektrischen Generatoren** von Dr. ing. Friedr. Natalis, OBERINGENIEUR. Mit 75 Abbildungen und 4 Tafeln. 1908. (VIII u. 112 S.)

*M* 4,—, geb. *M* 4,50.

12. Heft:

**Das elektrische Bogenlicht** von Ewald Rasch. Physikalisch-technische Grundlagen der Lichterzeugung durch elektrische Entladungsvorgänge. Mit 52 Abbildungen. 1910. (XXI u. 176 S.)

*M* 6,—, geb. *M* 7,—.

13. Heft:

**Elektrotechnische Messungen und Meßinstrumente** von Ingenieur Gustav Wernicke. Mit 92 Abbildungen. 1908. (VIII u. 138 S.)

*M* 5,—, geb. *M* 5,60.

14. Heft:

**Kapazität und Induktivität**, ihre Begriffsbestimmung, Berechnung und Messung von Prof. Dr. Ernst Orlich. Mit 124 Abbildungen und 1 Kurventafel. 1909. (VII u. 294 S.)

*M* 14,—, geb. *M* 15,—.

15. Heft:

**Die Transformatoren**, ihre Wirkungsweise, Konstruktion, Prüfung und Berechnung von Dr. Gustav Benischke. Mit 218 Abbildungen und 10 Tafeln. 1909. (X u. 220 S.)

*M* 9,—, geb. *M* 10,—.

**Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig.**

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig.

**Müller-Pouillet's**

## **Lehrbuch der Physik und Meteorologie**

In vier Bänden. 10. umgearbeitete und vermehrte Auflage. Herausgegeben von Professor Dr. **Leopold Pfaundler**.

---

Erster Band: **Mechanik und Akustik** von Prof. Dr. L. Pfaundler.  
Mit 838 Abbildungen im Text.

Geheftet *M* 10,50, geb. in Halbfranz *M* 12,50.

Zweiter Band: **Die Lehre von der strahlenden Energie (Optik)** von Prof. Dr. Otto Lummer. Mit 914 Abbildungen im Text und 21 zum Teil mehrfarbigen Tafeln. Geh. *M* 24,—, geb. in Halbfranz *M* 27,—.

Dritter Band: **Wärmelehre, Chemische Physik, Thermodynamik und Meteorologie** von Professor Dr. L. Pfaundler, Privatdozent Dr. K. Drucker, Professor Dr. A. Wassmuth, Hofrat Professor Dr. J. v. Hann. Mit 499 Abbildungen im Text und einer Tafel.

Geheftet *M* 16,—, geb. in Halbfranz *M* 18,—.

Vierter Band, erste Abteilung: **Magnetismus und Elektrizität** von Prof. Dr. Walter Kaufmann und Prof. Dr. Alfred Coehn. Mit 531 Textabbildungen. Geheftet *M* 13,—.

Die 2. (Schluß-) Abteilung des IV. Bandes befindet sich im Druck.

---

**Prof. O. D. Chwolson**

## **Lehrbuch der Physik**

Erster Band: **Einleitung, Mechanik, Einige Meßinstrumente und Meßmethoden, Die Lehre von den Gasen, Flüssigkeiten und festen Körpern.** Übersetzt von H. Pflaum, Adjunkt-Professor am Polytechnikum zu Riga. Mit 412 Abbildungen. gr. 8<sup>o</sup>.

Geheftet *M* 12,—, geb. *M* 14,—.

Zweiter Band: **Lehre vom Schall (Akustik), Lehre von der strahlenden Energie.** Übersetzt von H. Pflaum. Mit 658 Abbildungen und 3 Stereoskopbildern. gr. 8<sup>o</sup>. Geheftet *M* 18,—, geb. *M* 20,—.

Dritter Band: **Die Lehre von der Wärme.** Übersetzt von E. Berg, Abteilungschef am physikalischen Zentralobservatorium in St. Petersburg. Mit 259 Abbildungen. gr. 8<sup>o</sup>. Geheftet *M* 16,—, geb. *M* 18,—.

Vierter Band: **Die Lehre von der Elektrizität.** Übersetzt von H. Pflaum. Erste Hälfte. Mit 336 Abbildungen. Geh. *M* 16,—, geb. *M* 18,—.

Die 2. Hälfte des 4. Bandes befindet sich in Vorbereitung.