

Е. Л. НИКОЛАИ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

I

ФИЗМАТГИЗ • 1962

Е. Л. НИКОЛАИ • ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

И

Е. Л. НИКОЛАИ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

СТАТИКА. КИНЕМАТИКА

ИЗДАНИЕ ДВАДЦАТОЕ
СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебника
для высших технических учебных заведений*



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1962

Николай Евгений Леопольдович. Теоретическая механика. Часть 1

Редактор *Д. В. Жарков*

Техн. редактор *Е. А. Ермакова*

Корректоры: *А. А. Байкова* и *Э. И. Богданова*

Печать с матриц. Подписано к печати 1/II 1962 г. Бумага 60×90 1/16. Физ. печ. л. 17,5.
Условн. печ. л. 17,5. Уч.-изд. л. 19,0. Тираж 50 000 экз. Цена книги 67 коп. Заказ № 206.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к тринадцатому изданию	7
От издательства	8

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Введение	9
§ 1. Статика, кинематика, динамика (9).— § 2. Векторы. Сложение и вычитание векторов (10).— § 3. Умножение вектора на скаляр. Единичный вектор (13).— § 4. Проекция вектора на ось и на плоскость (14).— § 5. Проекция суммы векторов на ось и на плоскость (17).	
Глава I. Аксиомы статики	19
§ 6. Материальная точка. Первая аксиома. Сила (19).— § 7. Силы внутренние и внешние. Абсолютно твердое тело. Вторая аксиома. Третья аксиома. Перенесение точки приложения силы вдоль ее линии действия (21).— § 8. Статически эквивалентные системы сил. Равнодействующая. Четвертая аксиома (24).— § 9. Пятая аксиома. Действие и противодействие. Примеры (24).— § 10. Равновесие не твердых тел. Шестая аксиома (29).	
Глава II. Сложение сил, приложенных в одной точке и лежащих в одной плоскости	30
§ 11. Параллелограмм сил. Треугольник сил (30).— § 12. Многоугольник сил. Условия равновесия сил, приложенных в одной точке (32).— § 13. Проекция силы на ось. Разложение силы по осям координат (35).— § 14. Нахождение равнодействующей сил, приложенных в одной точке по способу проекций (37).— § 15. Уравнения равновесия сил, приложенных в одной точке (39).— § 16. Сложение сил, действующих по одной прямой (40).— § 17. Сложение сил, линии действия которых пересекаются в одной точке (41).— § 18. Равновесие трех непараллельных сил (42).	
Глава III. Сложение пар, лежащих в одной плоскости	43
§ 19. Сложение двух параллельных сил, направленных в одну и ту же сторону (43).— § 20. Сложение двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны (45).— § 21. Пара сил. Момент пары (46).— § 22. Условие эквивалентности пар (47).— § 23. Сложение пар. Условие равновесия пар (50).	

Глава IV. Сложение сил, расположенных как угодно на плоскости	52
§ 24. Момент силы относительно точки (52).— § 25. Приведение силы к данной точке (52).— § 26. Приведение системы сил, расположенных как угодно на плоскости, к силе и паре. Главный вектор и главный момент (53).— § 27. Случай, когда силы находятся в равновесии. Уравнения равновесия (55).— § 28. Случай, когда силы приводятся к паре (56).— § 29. Случай, когда силы приводятся к одной равнодействующей. Теорема о моменте равнодействующей (56).— § 30. Выражение момента силы через проекции силы на координатные оси (57).— § 31. Задачи, статически определенные и статически неопределенные (58).— § 32. Примеры на определение опорных реакций (60).— § 33. Другие примеры на применение уравнений равновесия (63).— § 34. Определение линии действия равнодействующей (65).— § 35. Сложение параллельных сил на плоскости. Уравнения равновесия параллельных сил (66).	
Глава V. Способ веревочного многоугольника	69
§ 36. Первый случай. Многоугольник сил не замкнут (69).— § 37. Второй случай. Многоугольник сил замкнут (72).— § 38. О фигуре равновесия нити (75).	
Глава VI. Определение усилий в брусках фермы	76
§ 39. Диаграмма Максвелла-Кремоны (76).— § 40. Способ Риттера (80).	
Глава VII. Сложение сил, приложенных в одной точке и не лежащих в одной плоскости	82
§ 41. Многоугольник сил. Параллелепипед сил (82).— § 42. Проекция силы на ось. Разложение вектора на составляющие по осям координат (84).— § 43. Определение равнодействующей сил, приложенных в одной точке, по способу проекций. Уравнения равновесия (85).	
Глава VIII. Сложение пар в пространстве	87
§ 44. Условие эквивалентности пар (87).— § 45. Момент пары как вектор (88).— § 46. Сложение пар. Условие равновесия пар (89).	
Глава IX. Момент силы относительно точки и относительно оси	92
§ 47. Момент силы относительно точки (92).— § 48. Векторное произведение двух векторов (93).— § 49. Момент силы относительно оси (95).— § 50. Зависимость между моментом силы относительно точки и моментом силы относительно оси (96).— § 51. Главный момент системы сил относительно точки и относительно оси (97).— § 52. Зависимость между главными моментами системы сил относительно точки и относительно оси (98).	
Глава X. Сложение сил, расположенных как угодно в пространстве	99
§ 53. Приведение силы к данной точке (99).— § 54. Приведение системы сил, расположенных как угодно в пространстве, к силе и паре (100).— § 55. Случай, когда силы находятся в равновесии (101).— § 56. Случай, когда силы приводятся к паре (101).— § 57. Случай, когда силы приводятся к равнодействующей. Теорема о моменте равнодействующей (102).— § 58. Случай, когда силы приводятся к динаме. Центральная ось (104).— § 59. Векторное произведение двух геометрических сумм. Проекция векторного произведения двух	

векторов на оси координат (107). — § 60. Выражения моментов силы относительно координатных осей через проекции силы на те же оси (109). — § 61. Вычисление главного вектора и главного момента по способу проекций (110). — § 62. Уравнения равновесия сил, расположенных как угодно в пространстве (112). — § 63. Условие равновесия твердого тела с двумя закрепленными точками. Определение опорных реакций (113). — § 64. Определение главного вектора и главного момента опытным путем (117). — § 65. Сложение параллельных сил в пространстве. Уравнения равновесия параллельных сил (119). — § 66. Сложение параллельных сил по способу последовательного сложения (121). — § 67. Центр параллельных сил (123). — § 68. Координаты центра параллельных сил (123).

Глава XI. Центр тяжести 125

§ 69. Центр тяжести твердого тела. Центр тяжести объема (125). — § 70. Центр тяжести площади. Статический момент плоской фигуры. Центр тяжести линии (127). — § 71. Некоторые элементарные приемы определения центров тяжести и статических моментов (129). — § 72. Первая теорема Гюльдена (133). — § 73. Вторая теорема Гюльдена (135). — § 74. Центры тяжести некоторых простейших геометрических фигур (136). — § 75. Применение веревочного многоугольника к определению центра тяжести площадей (141).

ОТДЕЛ ВТОРОЙ КИНЕМАТИКА

Глава XII. Уравнения движения точки 143

§ 76. Кинематика. Динамика (143). — § 77. Траектория. Уравнение движения (144). — § 78. Уравнения движения в прямоугольных координатах (145). — § 79. Уравнения движения в полярных координатах (149).

Глава XIII. Скорость 150

§ 80. Скорость равномерного движения (150). — § 81. Скорость какого угодно движения (152). — § 82. Векторная производная (154). — § 83. Простейшие правила векторного дифференцирования (155). — § 84. Скорость как векторная производная от радиуса-вектора (157). — § 85. Проекция скорости на прямоугольные координатные оси (159). — § 86. Другой вывод проекций скорости на координатные оси (163).

Глава XIV. Ускорение 164

§ 87. Ускорение прямолинейного равномерно переменного движения (164). — § 88. Некоторые сведения из геометрии (167). — § 89. Ускорения какого угодно движения (169). — § 90. Проекция ускорения на прямоугольные координатные оси (171). — § 91. Касательное ускорение и нормальное ускорение (175). — § 92. Графики расстояния, скорости и ускорения (180).

Глава XV. Поступательное движение твердого тела и вращение твердого тела вокруг неподвижной оси 183

§ 93. Поступательное движение твердого тела (183). — § 94. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси (186).

Глава XVI. Относительное движение 191

§ 95. Относительное движение точки (194). — § 96. Уравнения относительного движения. Относительная скорость и относительное

ускорение (197). — § 97. Теорема об элементарном перемещении точки. Девиация (198). — § 98. Теорема сложения скоростей (201). — § 99. Теорема сложения ускорений в том случае, когда переносное движение поступательное (204). — § 100. Теорема сложения ускорений в том случае, когда переносное движение есть вращение вокруг неподвижной оси. Добавочное или кориолисово ускорение (207). — § 101. Проекции скорости и ускорения на оси полярных координат (211). — § 102. Относительное движение твердого тела (215).

Глава XVII. Плоско-параллельное движение твердого тела 215

§ 103. Разложение плоского движения на поступательное движение и на вращение. Уравнения плоского движения. Угловая скорость и угловое ускорение плоской фигуры (215). — § 104. Скорости точек плоской фигуры. Мгновенный центр скоростей (219). — § 105. План скоростей (225). — § 106. Ускорение точек плоской фигуры. Мгновенный центр ускорений (228). — § 107. План ускорений (232). — § 108. Теорема о перемещении плоской фигуры. Мгновенный центр скоростей как предельное положение центра вращения (236). — § 109. Центроиды (239). — § 110. Сложение вращений плоской фигуры (242). — § 111. Применение сложения вращений к нахождению мгновенных центров скоростей для звеньев плоского механизма (248).

Глава XVIII. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки . 250

§ 112. Эйлеровы углы. Уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной точки (250). — § 113. Теорема о перемещении твердого тела вокруг неподвижной точки. Мгновенная ось и угловая скорость твердого тела (251). — § 114. Угловое ускорение (253). — § 115. Скорости точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки (255). — § 116. Векторная формула вращательной скорости (258). — § 117. Ускорения точек твердого тела (258). — § 118. Аксоиды (262). — § 119. Теорема сложения угловых скоростей (264). — § 120. Проекции угловой скорости на координатные оси, неизменно связанные с твердым телом (267). — § 121. Проекции скорости точки твердого тела на координатные оси, связанные с телом (269).

Глава XIX. Общий случай движения твердого тела 270

§ 122. Разложение движения твердого тела на поступательное движение и на вращение. Уравнения движения твердого тела. Угловая скорость (270). — § 123. Скорости точек твердого тела. Мгновенная винтовая ось (273). — § 124. Теорема сложений ускорений в случае какого угодно переносного движения (276).

Предметный указатель 278

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРИНАДЦАТОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем, тринадцатом издании первая часть моей «Теоретической механики» выходит в несколько переработанном виде.

Основное содержание книги осталось без изменения; переработке подверглись отдельные ее места в связи с тем, что в изложении статики и кинематики введены (согласно принятой в настоящее время программе по теоретической механике для вузов) элементы векторной алгебры и векторного анализа.

Введение векторного метода необычайно упрощает изложение многих вопросов механики. Вместе с тем, нужно признать, что в некоторых случаях слишком прямолинейное проведение этого метода может не только не облегчить, а, наоборот, затруднить начинающим изучать механику усвоение предмета. Начинающему читателю не всегда легко рассмотреть механическую сущность трактуемых вопросов за недостаточно привычными ему формальными векторными операциями, в которые облечено изложение вопроса. Поэтому мне казалось, что введение элементов векторного метода в учебник, предназначенный для начинающих изучать механику, должно быть сделано с надлежащей осторожностью.

При изложении теоретической механики можно пользоваться тремя методами: методом геометрическим, методом аналитическим (или координатным) и, наконец, векторным методом, основанным на применении символики векторной алгебры и векторного анализа. Ни один из этих методов я не считал возможным исключить при составлении настоящего издания моей книги. При изложении каждого вопроса курса я выбирал тот метод, который, как мне казалось, проще и короче ведет к цели. Конечно, элемент субъективности в решении вопроса о целесообразности в каждом данном случае того или другого метода неизбежен. Насколько удачно этот вопрос решается в предлагаемой книге — предоставляется судить читателю.

Самые первые основы векторной алгебры изложены во введении в статику. Все дальнейшие необходимые сведения из векторной алгебры и векторного анализа даются по мере надобности в соответствующих местах книги.

Что касается самого содержания излагаемого здесь курса механики, то некоторые дополнения введены во втором отделе, посвя-

щенном кинематике. В главу XVIII (вращение твердого тела вокруг неподвижной точки) вновь включены вопросы: угловое ускорение (§ 114), ускорения точек твердого тела (§ 117), проекции скорости точки твердого тела на координатные оси, связанные с телом (§ 121); в главу XIX (общий случай движения твердого тела) вновь вошел § 124, трактующий о теореме сложения ускорений в случае какого угодно переносного движения.

В предыдущих изданиях книга имела название «Лекции по теоретической механике», в настоящем издании это название заменено более кратким — «Теоретическая механика».

Е. Николаи

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Настоящее, двадцатое издание воспроизводится без изменений с тринадцатого издания.

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Статика, кинематика, динамика

Механика есть наука о движении материальных тел.

Под движением тел мы разумеем происходящее с течением времени их перемещение в пространстве. Движение в более широком смысле (а именно в смысле всякого изменения состояния материальных тел, живых организмов, общественных групп и т. д.) является предметом изучения других наук (физики, химии, биологии, общественных наук). Перемещение тел в отличие от других форм движения называется иногда механическим движением. В дальнейшем под термином «движение» мы будем понимать всегда именно механическое движение.

В *теоретической механике* исследуются общие законы движения материальных тел и устанавливаются общие приемы и методы для решения всех вопросов, относящихся к движению тел. Применение начал механики к решению специальных технических задач (как, например, к исследованию прочности сооружений, к изучению движения машин и т. д.) составляет содержание различных отделов *механики прикладной*.

Механические явления (т. е. явления движения материальных тел) принадлежат к категории явлений физических. В этом смысле теоретическая механика является одним из отделов *теоретической физики*.

Частным случаем движения является *равновесие* тел. Отдел механики, в котором изучаются условия равновесия тел, называется *статикой*. Законы равновесия по существу гораздо проще общих законов движения; отсюда понятно, что статика гораздо проще и элементарнее тех отделов механики, которые посвящены исследованию явлений движения тел. Ввиду этого мы и начнем в этой первой части нашего курса изучение механики со статики (отдел первый). Такой порядок изложения соответствует и историческому ходу развития механики. Основные теоремы статики были известны еще древним, плодотворное же изучение явлений движения стало возможным лишь в связи с изобретением анализа бесконечно малых в XVII веке.

Затем мы перейдем к изучению *движения* материальных тел. При этом сначала (во втором отделе настоящей части) мы будем

заниматься исследованием движения тел с чисто *геометрической* стороны. Отдел теоретической механики, в котором изучаются геометрические свойства движения, называется *кинематикой*. В кинематике движение тел рассматривается вне связи с физическими причинами движения.

Потом (во второй части курса) мы обратимся к исследованию движения материальных тел в связи с *физическими* причинами, его определяющими. Посвященный этому исследованию отдел теоретической механики называется *динамикой* (или *кинетикой*). В динамике устанавливаются самые общие законы движения материальных тел.

Таким образом, курс теоретической механики распадается на три отдела: статика, кинематика, динамика.

§ 2. Векторы. Сложение и вычитание векторов

Во всех отделах механики нам придется иметь дело с такими величинами, которым приписывается не только некоторое численное значение, но также и некоторое направление в пространстве; таковы: сила, скорость, ускорение и т. д. Вместе с тем мы будем встречаться также и с величинами, имеющими численное значение, но не имеющими направления; сюда относятся масса, энергия и т. д. Физические величины этих двух родов получают особые названия. Величины первого рода называются *векторными величинами* или *векторами*, величины второго рода — *скалярными величинами* или *скалярами*.

В качестве введения к нашему курсу скажем несколько слов о векторных величинах¹⁾.

Представляется целесообразным в самом способе обозначения делать различие между векторными и скалярными величинами. Скалярные величины мы будем обозначать теми или другими буквами, набранными обыкновенным шрифтом; для обозначения же векторов мы будем пользоваться жирным шрифтом. При этом, обозначая вектор какой-либо буквой, набранной жирным шрифтом, условимся обозначать численное значение, или модуль этого вектора (который является скалярной величиной), той же буквой, но набранной обыкновенным шрифтом. Таким образом, нужно делать различие между вектором \mathbf{a} и его численным значением a . Иногда для обозначения численного значения вектора \mathbf{a} мы будем пользоваться также символом $|\mathbf{a}|$ ²⁾.

¹⁾ Здесь приведены лишь немногие элементарнейшие сведения о векторах, которые необходимы на первых же порах при изложении статики. Подробное изложение теории векторов можно найти в книге Н. Е. Кочина, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, изд. 6, Гостехиздат, М.—Л., 1938.

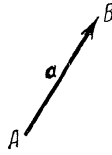
²⁾ Неудобно на письме воспроизводить жирный шрифт. Поэтому, обозначая в печати некоторые величины жирным шрифтом, в письме их обозначают обыкновенными буквами, но с поставленной над буквой чертой (например, \bar{a}).

Возьмем прямолинейный отрезок AB (черт. 1) и припишем этому отрезку определенное направление, например, от точки A к точке B ; на чертеже это направление отмечено стрелкой, поставленной у точки B . Такой отрезок, которому приписано определенное направление, является простейшим примером векторной величины.

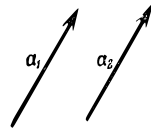
Всякий вектор a , имеющий определенное численное значение a и определенное направление, может быть *графически* изображен прямолинейным отрезком AB (черт. 2), длина которого содержит a единиц длины (произвольно выбранных), а направление совпадает с направлением вектора; на чертеже это направление отмечено стрелкой. Точка A называется началом вектора, точка B — концом вектора. Иногда мы будем обозначать данный вектор двумя буквами AB , причем в последнем случае условимся писать на первом месте букву, поставленную у начала вектора, а на втором — букву, поста-



Черт. 1.



Черт. 2.



Черт. 3.

вленную у конца вектора. Если бы вектор a имел направление от точки B к точке A , то его нужно было бы обозначить через BA .

Два вектора a_1 и a_2 (черт. 3) называются *равными*, если они численно равны, параллельны и направлены в одну и ту же сторону.

Для обозначения равенства векторов мы будем писать обыкновенный знак равенства:

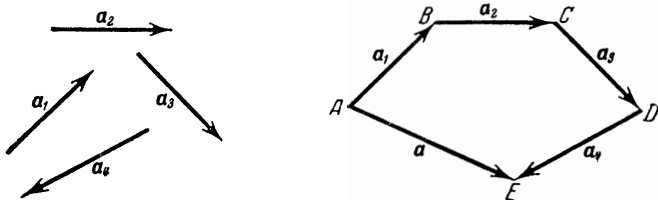
$$a_1 = a_2.$$

Если векторы, входящие в какую-либо векторную формулу, обозначены двумя буквами, то над этими буквами мы будем ставить черточку. Так, для обозначения равенства векторов AB и CD мы будем писать

$$\overline{AB} = \overline{CD}.$$

Представим себе несколько векторов, например четыре вектора a_1, a_2, a_3, a_4 (черт. 4), и сделаем следующее построение. Из произвольной точки A проведем вектор \overline{AB} , равный вектору a_1 ; из конца B построенного отрезка проведем вектор \overline{BC} , равный вектору a_2 ; из конца C этого отрезка проведем вектор \overline{CD} , равный вектору a_3 ; наконец, из точки D проведем вектор \overline{DE} , равный вектору a_4 . Затем соединим прямой линией начало A первого вектора с концом E последнего вектора. Вектор \overline{AE} (которому мы приписываем направление от точки A к точке E) обозначим

буквой a . Построенный таким образом вектор a называется *суммой* данных векторов a_1, a_2, a_3, a_4 , а только что описанное построение называется *сложением* векторов; векторы a_1, a_2, a_3, a_4 получают название *составляющих* векторов.



Черт. 4.

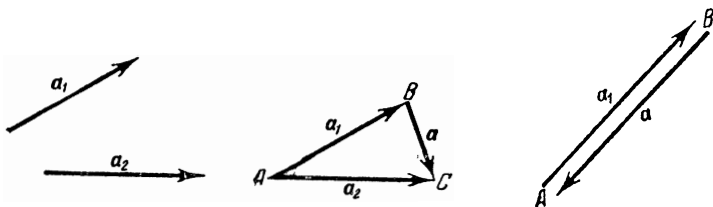
Для обозначения сложения векторов мы будем писать обыкновенный знак сложения:

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

Если нам заданы n векторов a_1, a_2, \dots, a_n и если их сумма есть a , то мы будем писать:

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Возьмём два вектора a_1 и a_2 (черт. 5). Отложим от произвольной точки A векторы \overline{AB} и \overline{AC} , равные векторам a_1 и a_2 , и соединим



Черт. 5.

Черт. 6.

точки B и C прямой линией; вектор \overline{BC} (которому приписываем направление от B к C) обозначим буквой a . Вектор a , который, будучи сложен с вектором a_1 , дает вектор a_2 , называется *разностью* векторов a_2 и a_1 ; описанное построение называется *вычитанием* векторов.

Для обозначения вычитания векторов будем писать обыкновенный знак вычитания:

$$a = a_2 - a_1.$$

Отметим частный случай $a_2 = 0$. В этом случае точка C совпадает с точкой A и, следовательно, вектор a численно равен вектору a_1 , но направлен в противоположную сторону (не от A к B ,

а от B к A , черт. 6). Вместе с тем только что установленная формула принимает в этом случае вид

$$\mathbf{a} = -\mathbf{a}_1.$$

Отсюда мы сделаем заключение, что $-\mathbf{a}_1$ есть вектор, численно равный вектору \mathbf{a}_1 , но имеющий направление, противоположное направлению вектора \mathbf{a}_1 .

§ 3. Умножение вектора на скаляр. Единичный вектор

Положим, нам дан некоторый вектор \mathbf{a} и положительная скалярная величина m . Построим новый вектор, численное значение которого равно численному значению a данного вектора, умноженному на число m , а направление совпадает с направлением данного вектора \mathbf{a} . Полученный новый вектор называется *произведением* вектора \mathbf{a} на скаляр m и обозначается через $m\mathbf{a}$.

Итак, чтобы *умножить* данный вектор на какую-либо положительную скалярную величину, нужно умножить численное значение вектора на эту величину, не изменяя направления вектора.

Мы уже знаем, что вектор $-\mathbf{m}\mathbf{a}$ отличается от вектора $m\mathbf{a}$ только противоположным направлением. Отсюда следует, что умножение вектора \mathbf{a} на отрицательную скалярную величину $-m$ сводится к умножению численного значения a данного вектора на число m с изменением направления вектора на противоположное.

Если два вектора \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 равны, то и векторы: $m\mathbf{a}_1$ и $m\mathbf{a}_2$, полученные от умножения данных векторов на какой-либо скаляр m , также равны. Следовательно, если

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2,$$

то и

$$m\mathbf{a}_1 = m\mathbf{a}_2.$$

Итак, *векторное равенство не нарушается от умножения обеих его частей на одну и ту же скалярную величину.*

Возьмем несколько векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ (черт. 7) и сложим их. Для этого построим многоугольник $MNPQR$, стороны которого изображают данные векторы. Сумму \overline{MR} данных векторов обозначим через \mathbf{a} . Следовательно,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4.$$

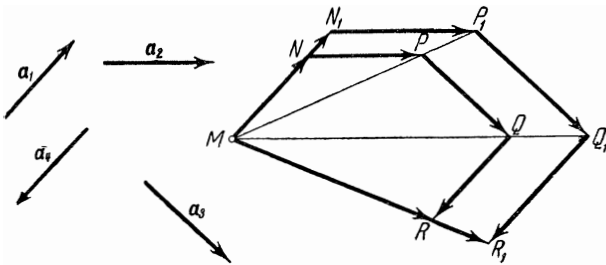
Соединим теперь точки P и Q с точкой M прямыми линиями и отложим от точки M по направлениям отрезков MN, MP, MQ, MR отрезки $MN_1 = m \cdot MN, MP_1 = m \cdot MP, MQ_1 = m \cdot MQ, MR_1 = m \cdot MR$, где m есть какое-либо положительное число. Соединив точки N_1, P_1, Q_1, R_1 последовательно прямыми линиями, получим новый многоугольник $MN_1P_1Q_1R_1$, подобный многоугольнику $MNPQR$.

Стороны этого нового многоугольника параллельны сходственным сторонам многоугольника $MNPQR$ и равны этим сходственным сторонам, умноженным на данное число m . Отсюда следует, что векторы $\overline{MN_1}$, $\overline{N_1P_1}$, $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{Q_1R_1}$, $\overline{MR_1}$ равны векторам ma_1 , ma_2 , ma_3 , ma_4 , ma .

Но вектор $\overline{MR_1}$ есть сумма векторов $\overline{MN_1}$, $\overline{N_1P_1}$, $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{Q_1R_1}$. Следовательно, получаем:

$$ma = ma_1 + ma_2 + ma_3 + ma_4.$$

Полученный результат можно формулировать следующим образом: чтобы умножить сумму векторов на данное положительное число, достаточно умножить каждый составляющий вектор на это число.



Черт. 7.

Мы предположили сейчас число m положительным. Совершенно так же доказывается аналогичное предположение в случае отрицательного m .

Вектор, численное значение которого равно единице, называется *единичным* вектором или *ортом*. Положим, нам дан вектор a . Возьмем единичный вектор, имеющий направление вектора a ; обозначим этот единичный вектор через e (так что $e = 1$). Векторы a и e имеют одинаковое направление, а численное значение вектора a равно численному значению вектора e , умноженному на число a . Следовательно:

$$a = ae.$$

Отсюда следует, что всякий вектор может быть представлен как произведение его численного значения на соответствующий единичный вектор.

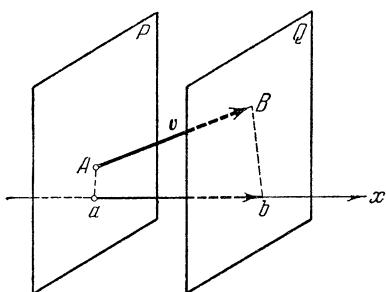
§ 4. Проекция вектора на ось и на плоскость

Осью называется неограниченная прямая линия, которой приписано определенное направление.

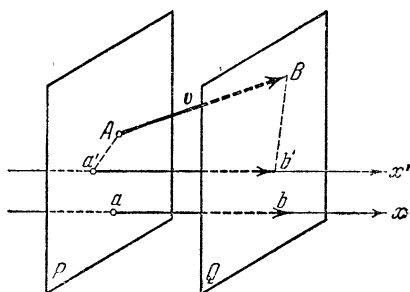
Возьмем вектор φ и ось x (черт. 8), которой приписываем направление, указанное на чертеже стрелкой. Обозначим начало

и конец вектора \boldsymbol{v} буквами A и B и проведем через точки A и B плоскости P и Q , перпендикулярные к оси x . Точки пересечения a и b этих плоскостей с осью x называются *проекциями* точек A и B на ось x .

Величина отрезка ab , взятая со знаком $+$, если направление этого отрезка совпадает с направлением оси x , и со знаком $-$ в противном случае, называется *проекцией* вектора \boldsymbol{v} на ось x ¹⁾; обозначим эту проекцию через v_x . Итак, $v_x = \pm ab$, причем тот или другой знак в этой формуле берется согласно только что формулированному правилу. Следует обратить внимание на то, что проекция вектора на какую-либо ось является величиной скалярной.



Черт. 8.



Черт. 9.

Заметим, что для построения точек a и b можно и не проводить плоскостей P и Q . Достаточно опустить из точек A и B перпендикуляры Aa и Bb на ось x ; основания a и b этих перпендикуляров и будут проекциями точек A и B на ось x .

Возьмем теперь две параллельные и одинаково направленные оси x и x' (черт. 9) и спроектируем на них вектор \boldsymbol{v} . Для этого проведем через начало и конец вектора A и B плоскости P и Q , перпендикулярные к осям x и x' . Отметим проекции a и b точек A и B на ось x и проекции a' и b' тех же точек на ось x' .

Проекции ab и $a'b'$ вектора \boldsymbol{v} на оси x и x' численно равны (как отрезки параллельных, заключенные между параллельными плоскостями) и имеют одинаковые знаки. Итак, *проекции вектора на две параллельные и одинаково направленные оси равны между собой*.

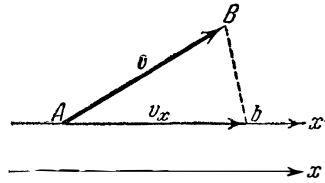
Этим обстоятельством можно воспользоваться при построении проекции данного вектора на данную ось. Вместо того чтобы проектировать вектор на данную ось, часто представляется более удобным проектировать вектор на ось, параллельную данной

¹⁾ Вектор, изображенный отрезком ab , называется *составляющей* вектора \boldsymbol{v} по оси x .

и одинаково с нею направленную, но проходящую через начало вектора.

В таком случае построение проекции вектора на ось представляется в следующем виде.

Даны вектор \boldsymbol{v} и ось x (черт. 10). Через начало вектора A проводим ось x' , параллельную оси x и одинаково с нею направленную. Из конца вектора B опускаем перпендикуляр Bb на ось x . Величина



Черт. 10.

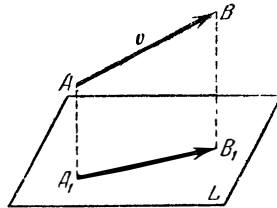
отрезка Ab , взятая с соответствующим знаком, и есть проекция v_x вектора \boldsymbol{v} на ось x . Согласно сделанному выше условию мы считаем ее положительной, если направление отрезка Ab совпадает с направлением оси x , и отрицательной в противном случае.

В дальнейшем при проектировании вектора на данную ось мы будем обыкновенно пользоваться построением, указанным на черт. 10.

Из треугольника ABb (прямоугольного при вершине b) следует, что

$$v_x = v \cos(\boldsymbol{v}, x), \quad (1)$$

где (\boldsymbol{v}, x) есть угол, заключенный между направлением вектора \boldsymbol{v} и направлением оси x . На черт. 10 проекция положительна; пред-



Черт. 11.

лагаем читателю убедиться, что формула (1) остается справедливой и в случае отрицательной проекции v_x .

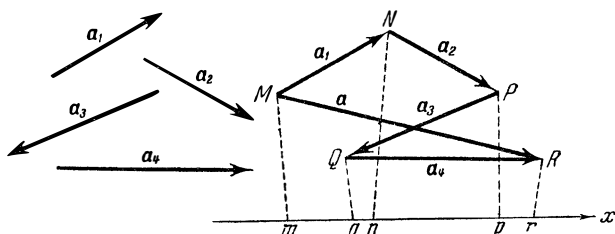
Положим, нам даны вектор \boldsymbol{v} и плоскость L (черт. 11). Опустим из начала A и конца B вектора перпендикуляры AA_1 и BB_1 на плоскость L . Основания этих перпендикуляров A_1 и B_1 называются проекциями точек A и B на плоскость L . Вектор же $\overline{A_1B_1}$ (которому

мы приписываем направление от A_1 к B_1) называется *проекцией вектора \boldsymbol{v} на плоскость L* .

Заметим еще раз, что проекцию вектора на ось мы рассматриваем как величину скалярную. Проекция же вектора на плоскость сама является векторной величиной.

§ 5. Проекция суммы векторов на ось и на плоскость

Возьмем несколько векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ и ось x (черт. 12). Построим сумму \boldsymbol{a} данных векторов и спроектируем векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$, а также их сумму \boldsymbol{a} на ось x . Для этого из точек



Черт. 12.

M, N, P, Q, R опускаем перпендикуляры Mm, Nn, Pp, Qq, Rr на ось x . Обозначая проекции векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}$ на ось x через

$$a_{1x}, a_{2x}, a_{3x}, a_{4x}, a_x,$$

имеем:

$$a_{1x} = mn, \quad a_{2x} = np,$$

$$a_{3x} = -pq,$$

$$a_{4x} = qr, \quad a_x = mr.$$

Но из чертежа видно, что

$$mr = mn + np - pq + qr.$$

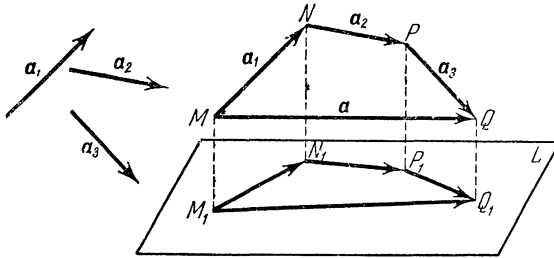
Следовательно:

$$a_x = a_{1x} + a_{2x} + a_{3x} + a_{4x}.$$

Итак, *проекция суммы векторов на данную ось равна сумме проекций составляющих на ту же ось*.

Возьмем опять несколько векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ и плоскость L (черт. 13). Построим сумму данных векторов и спроектируем векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$, а также их сумму \boldsymbol{a} на плоскость L . Для этого из точек M, N, P, Q опускаем перпендикуляры MM_1, NN_1, PP_1, QQ_1

на плоскость L . Векторы $\overline{M_1N_1}$, $\overline{N_1P_1}$, $\overline{P_1Q_1}$ суть проекции данных векторов на плоскость L , а вектор $\overline{M_1Q_1}$ есть проекция их суммы \mathbf{a} на ту же плоскость.



Черт. 13.

Но из чертежа видно, что вектор $\overline{M_1Q_1}$ есть сумма векторов $\overline{M_1N_1}$, $\overline{N_1P_1}$, $\overline{P_1Q_1}$. Следовательно, проекция суммы векторов на данную плоскость равна сумме проекций составляющих на ту же плоскость.

Г Л А В А I

АКСИОМЫ СТАТИКИ

§ 6. Материальная точка. Первая аксиома. Сила

Как уже сказано в § 1, теоретическая механика покоится на ограниченном числе истин, которые называются *аксиомами* данной науки и которые являются результатом наблюдения окружающего нас мира; все остальное содержание механики выводится как следствие из принятых аксиом. Впервые система аксиом механики была установлена Ньютоном в его сочинении «*Philosophiae naturalis principia mathematica*»¹⁾.

Изложение ньютоновых общих аксиом механики мы отложим до начала части II этого курса, посвященной динамике. Теперь же, приступая к изложению статики, мы ограничимся установлением частных аксиом, которые достаточны, чтобы обосновать на них статику (но недостаточны для обоснования всей механики).

Заметим, что в число этих аксиом статики войдут некоторые из ньютоновых общих аксиом; другие же истины, которые мы сейчас примем без доказательства в качестве аксиом, могут быть выведены из ньютоновых аксиом как следствия.

Всякое материальное тело мы можем представить себе мысленно раздробленным на весьма малые частицы. Частица вещественного тела, настолько малая, что размерами ее можно пренебречь, называется *материальной точкой*²⁾. В механике все вещественные тела представляются как собрания, или системы, материальных точек.

Представим себе отдельную материальную точку и предположим, что она настолько удалена от всех остальных материальных тел, что не испытывает никакого влияния со стороны других тел. Таковую находящуюся вне воздействия других тел материальную точку назовем *изолированной* материальной точкой.

¹⁾ Первое издание сочинения Ньютона появилось в 1687 году. Оно переведено на русский язык А. Н. Крыловым под заглавием «*Математические начала натуральной философии*» в «*Известиях Морской академии*», 1915, 1916, перепечатано в Собрании сочинений А. Н. Крылова, т. VI.

²⁾ Более точное определение материальной точки будет дано в динамике.

Аксиома I. *Изолированная материальная точка или находится в покое, или движется прямолинейно и равномерно.* Эта аксиома, называемая также *принципом инерции*, была открыта Галилеем.

Заметим, что движение точки называется прямолинейным, если она движется по прямой линии; оно называется равномерным, если в равные промежутки времени точка проходит равные пути.

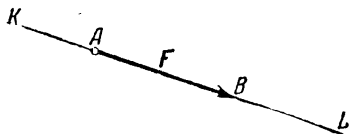
Представим себе теперь материальную точку, которая движется непрямолинейно или неравномерно. На основании только что установленной аксиомы мы заключаем, что эта точка — неизоллированная, что она находится под действием других вещественных тел. Действие других вещественных тел на данную материальную точку, результатом которого является непрямолинейное или неравномерное движение этой точки, называется *силой*. Мы говорим, что сила, действующая на данную материальную точку, *приложена* к этой точке. Данная точка называется *точкой приложения силы*.

Следует подчеркнуть, что *всякая сила есть действие одного тела на другое*. Простейшим и всем известным примером силы является сила тяжести. *Силой тяжести* или *весом* называется сила, с которой всякое тело, находящееся вблизи земной поверхности, притягивается Землей. Сила тяжести направлена вертикально вниз.

Не входя в перечисление существующих в природе сил, заметим, что всякая сила имеет определенную *величину*, которая может быть измерена. Некоторую произвольную

силу мы выбираем за единицу силы; измерить данную силу — значит найти, во сколько раз данная сила больше или меньше той силы, которая принята за единицу. Для сравнения и измерения сил служат приборы, называемые *динамометрами*. Мы примем за единицу силы вес 1 л воды при 4° С; эта единица силы называется *килограммом*¹⁾. Единицами, производными от килограмма, являются *грамм* (= 0,001 кг) и *тонна* (= 1000 кг). Величина силы, измеренная в принятых единицах, выражается некоторым числом; обозначим его буквой *F*.

Кроме определенной численной величины, всякая сила имеет определенное *направление*; так, сила тяжести направлена вертикально вниз. Следовательно, *сила есть величина векторная*. Сила *F*, приложенная к точке *A*, *графически* изображается отрезком *AB* (черт. 14), отложенным от точки приложения *A* по направлению силы. Длина отрезка *AB* содержит *F* единиц длины



Черт. 14.

¹⁾ Точнее единица силы — *килограмм* — определяется как вес платинового прототипа (хранящегося в Севре, близ Парижа) на уровне океана и на широте 45°. Вес этого прототипа не равняется в точности весу 1 л воды при 4° С.

произвольно выбранных. Точка A называется началом силы F , точка B — концом силы: у конца B ставится стрелка, указывающая направление силы. Прямая KL , на которой расположен отрезок, графически изображающий силу, называется *линией действия* силы.

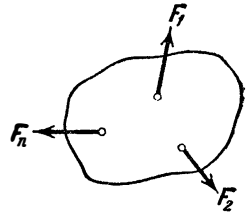
Если материальная точка A , к которой приложены силы F_1, F_2, \dots, F_n , находится в покое или движется прямолинейно и равномерно, то говорят, что силы F_1, F_2, \dots, F_n *взаимно уравновешиваются*.

§ 7. Силы внутренние и внешние. Абсолютно твердое тело.

Вторая аксиома. Третья аксиома. Перенесение точки приложения силы вдоль ее линии действия

Представим себе теперь какое-либо материальное тело конечных размеров. Как уже было объяснено в предыдущем параграфе, всякое материальное тело (твердое, жидкое или газообразное) мы представляем себе как собрание, или систему, материальных точек. Все силы, действующие на материальные точки, входящие в состав данного тела, мы распределим на две группы: на силы внутренние и силы внешние. *Внутренними* силами называются силы взаимодействия между материальными точками данного тела. *Внешние* же силы суть силы, испытываемые материальными точками данного тела со стороны других вещественных тел.

Представим себе тело, к которому приложены внешние силы F_1, F_2, \dots, F_n (черт. 15). Эти внешние силы вызывают появление внутренних сил, действующих между материальными точками данного тела; внутренние силы на чертеже не изображены. Если данное тело



Черт. 15.

находится в покое или в прямолинейном и равномерном движении, то говорят, что внешние силы F_1, F_2, \dots, F_n *взаимно уравновешиваются*; также говорят, что данное тело находится в *равновесии*.

В нашем курсе статики мы не будем заниматься изучением внутренних сил. Внутренние силы, действующие между материальными точками твердого тела, исследуются в сопротивлении материалов и в теории упругости; изучение внутренних сил в жидком и газообразном телах относится к области гидромеханики и теории газов. Нашей задачей будет установить условия, которым должны удовлетворять внешние силы F_1, F_2, \dots, F_n , чтобы тело находилось в равновесии. Но и эту задачу мы еще ограничим. Во всех дальнейших теоретических исследованиях мы будем изучать условия равновесия только одной категории тел, именно абсолютно твердых тел. *Абсолютно твердым* телом называется тело, расстояния между любыми двумя точками которого при всех условиях остаются неизменными.

В природе не существует тел, отвечающих определению абсолютно твердого тела. Все вещественные тела, как бы тверды они ни были, при известных условиях испытывают хотя бы небольшие изменения формы. Но во многих вопросах эти незначительные изменения формы (или *деформации*) играют второстепенную роль. Тогда ими можно пренебречь и рассматривать тела как абсолютно твердые.

Итак, задача нашего курса статики может быть сформулирована следующим образом: *исследовать условия равновесия внешних сил, приложенных к абсолютно твердому телу*. В какой мере результаты, полученные при изучении равновесия абсолютно твердого тела, имеют значение для решения вопроса о равновесии тел не твердых, будет выяснено в § 10.

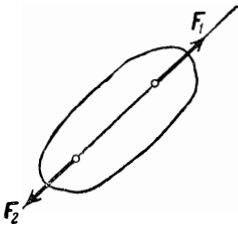
Так как в дальнейших теоретических исследованиях нам не придется упоминать о внутренних силах, то условимся для сокращения речи вместо слов «внешняя сила» говорить просто «сила». Условимся также термин «абсолютно твердое тело» заменять более кратким «твердое тело». Итак, в дальнейшем под словом «сила» (если нет определенного указания на внутреннюю силу) нужно понимать «внешняя сила», а под термином «твердое тело» следует понимать «абсолютно твердое тело».

Условие равновесия двух сил, приложенных к твердому телу, устанавливается второй аксиомой статики.

Аксиома II. *Две силы, приложенные к твердому телу, взаимно уравновешиваются тогда и только тогда, когда они равны по величине и действуют по одной прямой в противоположные стороны.*

Положим, что к твердому телу приложены две силы F_1 и F_2 (черт. 16). Эти силы взаимно уравновешиваются только в том случае, если они действуют по одной прямой и если

$$F_2 = -F_1.$$



Черт. 16.

Перейдем к третьей аксиоме.

Положим, что некоторое твердое тело находится в равновесии под действием приложенных к нему сил F_1, F_2, \dots, F_n . Положим, далее, что S_1, S_2, \dots, S_m есть группа сил, взаимно уравновешивающихся. Присоединим силы S_1, S_2, \dots, S_m к силам, действующим на наше твердое тело. Мы примем как аксиому, что присоединение взаимно уравновешивающихся сил S_1, S_2, \dots, S_m не нарушит равновесия данного тела, т. е. что при одновременном действии сил F_1, F_2, \dots, F_n и S_1, S_2, \dots, S_m оно будет оставаться в равновесии.

Положим опять, что некоторое твердое тело находится в равновесии под действием приложенных к нему сил F_1, F_2, \dots, F_n , и положим, что в число этих сил входит группа сил F_1, F_2, \dots, F_k , взаимно уравновешивающихся. Отбросим силы F_1, F_2, \dots, F_k . Мы примем как аксиому, что отбрасывание взаимно уравновешивающихся сил F_1, F_2, \dots, F_k не нарушит равновесия данного тела, т. е. что, находясь под действием сил F_{k+1}, \dots, F_n , оно будет оставаться в равновесии.

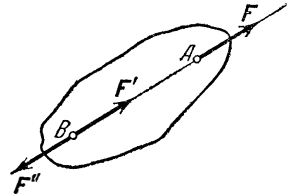
Итак, резюмируя только что сказанное, мы можем формулировать следующую третью аксиому.

Аксиома III. *Присоединение и отбрасывание сил, взаимно уравновешивающихся, не нарушают равновесия твердого тела.*

Этой аксиомой постоянно пользуются в исследованиях статики. Применим сейчас же эту аксиому к выводу важного свойства силы, приложенной к твердому телу.

Положим, что твердое тело находится в равновесии под действием силы F , приложенной к точке A (черт. 17), и других сил,

не изображенных на чертеже. Возьмем на линии действия силы F какую-либо точку B и приложим в этой точке две силы F' и F'' , численно равные силе F (так что $F = F' = F''$); силу F' направим по линии действия силы F в ту же сторону, в которую направлена сила F , а силу F'' — в сторону противоположную. Так как силы F' и F'' взаимно уравновешиваются (аксиома II), то от их присоединения равновесие тела не нарушается (аксиома III). Но силы F' и F'' также взаимно уравновешиваются (аксиома II); следовательно, не нарушая равновесия, их можно отбросить (аксиома III). Отбросив их, получим одну силу F' , которой заменена первоначально данная сила F . Следовательно, замена силы F силой F' не нарушает равновесия тела. *Итак, равновесие твердого тела не нарушается от перенесения точки приложения силы вдоль ее линии действия в любую точку тела.* Следовательно, мы имеем возможность, не нарушая равновесия тела, переносить точку приложения каждой из приложенных к нему сил вдоль ее линии действия в любую точку тела. Мы будем часто пользоваться этим приемом¹⁾.



Черт. 17.

¹⁾ Во избежание недоразумений следует заметить, что присоединение и отбрасывание взаимно уравновешивающихся внешних сил, не нарушая равновесия тела, в то же время существенно изменяют картину распределения внутренних сил в теле. Поэтому применение аксиомы III, вполне законное при исследовании вопросов о равновесии внешних сил, никоим образом не допустимо при изучении внутренних сил, возникающих в теле. В частности, и перенесение внешних сил вдоль их линий действия не может быть допущено при решении вопроса о распределении внутренних сил в теле.

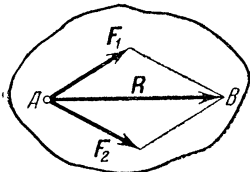
§ 8. Статически эквивалентные системы сил. Равнодействующая. Четвертая аксиома

Две системы сил F_1, F_2, \dots, F_n и P_1, P_2, \dots, P_m , приложенные к твердому телу, называются *статически эквивалентными*, если одну систему можно заменить другой, не нарушая равновесия тела.

Если система сил F_1, F_2, \dots, F_n эквивалентна одной силе R , то сила R называется *равнодействующей* данных сил F_1, F_2, \dots, F_n ; эти последние силы получают наименование составляющих сил. Замена системы сил F_1, F_2, \dots, F_n их равнодействующей R называется *сложением* сил. Обратный процесс замены силы R ее составляющими силами F_1, F_2, \dots, F_n называется *разложением* данной силы R на составляющие силы.

Положим, что сила R есть равнодействующая системы сил F_1, F_2, \dots, F_n . Возьмем силу R' , равную по величине R и направленную по той же прямой, что сила R , но в противоположную сторону. Сила R' уравнивается с силой R . Но, не нарушая равновесия, мы можем заменить силу R эквивалентной ей системой сил F_1, F_2, \dots, F_n . Следовательно, сила R' уравнивается также и с системой сил F_1, F_2, \dots, F_n . Эта сила R' называется *уравновешивающей* системы сил F_1, F_2, \dots, F_n . Итак, равнодействующая и уравновешивающая силы равны по величине и действуют по одной прямой в противоположные стороны.

Заметим сейчас же, что не всякая система сил имеет равнодействующую (и, следовательно, не всякая система сил может быть уравновешена одной силой). В дальнейшем будет установлено условие, которому должна удовлетворять система сил для того, чтобы существовала равнодействующая.



Черт. 18.

Положим, что в точке A твердого тела приложены две силы F_1 и F_2 (черт. 18). Мы примем за аксиому, что такие две силы имеют равнодействующую, которая определяется следующим образом.

Аксиома IV. *Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, приложена в этой же точке и изображается диагональю параллелограмма, построенного на данных силах.*

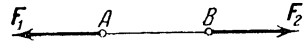
Следовательно, равнодействующая R сил F_1 и F_2 приложена в точке A , равна диагонали AB параллелограмма, построенного на силах F_1 и F_2 , и направлена от точки A к точке B .

§ 9. Пятая аксиома. Действие и противодействие. Примеры

Пятая аксиома формулируется следующим образом.

Аксиома V. *Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.*

Мы уже знаем (§ 6), что всякая сила есть действие одного тела на другое. Смысл только что формулированной аксиомы состоит в том, что если на материальную точку A (черт. 19) действует некоторая сила F_1 со стороны материальной точки B , то и на точку B действует сила F_2 со стороны точки A , причем эти две силы равны по величине и направлены по прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны. Одна из этих сил получает наименование «действия», а другая — «противодействия»¹⁾.



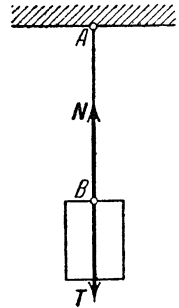
Черт. 19.

Таким образом, пятой аксиомой устанавливается, что в природе не может быть одностороннего действия силы. Иногда говорят короче: «действие равно противодействию». Эта аксиома была установлена Ньютоном.

Поясним сказанное примерами.

1. *Всемирное тяготение.* Всемирным тяготением называется сила притяжения, действующая между всякими двумя материальными телами. Земля и Луна взаимно притягиваются, причем сила притяжения Луны Землю и сила притяжения Земли Луною равны по величине и направлены по прямой, соединяющей центры Земли и Луны, в противоположные стороны.

2. *Натяжение нити и реакция нити.* Положим, что к неподвижной точке A прикреплен конец нити AB (черт. 20), к концу B которой подвешен груз. К нижнему концу нити B приложена сила T , которая представляет действие на нить подвешенного к ней груза; эта сила, называемая *натяжением* нити, равна весу подвешенного груза и направлена вертикально вниз. В то же время к той точке груза, к которой прикреплен конец B нити, приложена сила N , которая представляет действие нити на груз; эта сила называется *реакцией* (или *сопротивлением*) нити; она равна по величине натяжению T и направлена вертикально вверх.

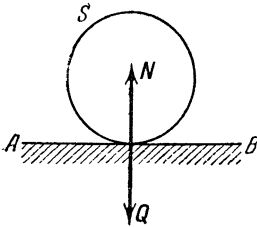


Черт. 20.

3. *Давление на плоскость и реакция плоскости.* Положим, что на неподвижной горизонтальной плоскости AB покоится шар S

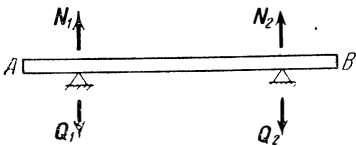
¹⁾ Во избежание недоразумений следует отметить, что если материальные точки A и B (черт. 19) не принадлежат одному и тому же твердому телу, то приложенные к ним силы F_1 и F_2 , которые мы назвали действием и противодействием, отнюдь не уравновешивают друг друга, хотя они и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Аксиома II к этим силам неприменима; эта аксиома говорит о силах, приложенных к одному и тому же твердому телу. Совершенно очевидно, что если материальные точки A и B ничем не связаны между собой, то под действием приложенных к ним сил F_1 и F_2 они не могут оставаться в равновесии; они придут в движение, удаляясь одна от другой.

(черт. 21). К плоскости AB приложена в точке касания плоскости и шара сила Q ; эта сила называется *давлением* шара на плоскость; она равна весу шара и направлена вертикально вниз. К шару S приложена, в точке касания шара с плоскостью, сила N , которая называется *реакцией* плоскости; эта сила равна по величине давлению Q и направлена вертикально вверх.



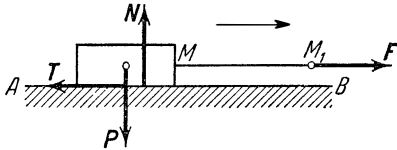
Черт. 21.

4. *Давление на опоры и опорные реакции.* Представим себе горизонтальную балку AB , лежащую на двух опорах (черт. 22). Балка производит *давления* на опоры; эти давления Q_1 и Q_2 приложены к опорам и направлены вертикально вниз. Наоборот, к балке приложены в точках соприкосновения ее с опорами силы N_1 и N_2 , которые представляют действие опор на балку. Эти силы N_1 и N_2 называются *опорными реакциями*: они равны по величине соответственно Q_1 и Q_2 , но направлены вертикально вверх.



Черт. 22.

5. *Сила трения.* Опыт показывает, что если одно тело скользит по поверхности другого, то к движущемуся телу приложена сила, направленная в сторону, противоположную движению, и называемая *силой трения*. Представим себе, что на неподвижной горизонтальной плоскости AB (черт. 23) находится тело M , к которому прикреплена нить MM_1 . Положим, что, взяв в руку конец M_1 этой нити, мы заставим тело M скользить по плоскости AB в сторону, указанную стрелкой (слева направо),



Черт. 23.

причем сообщим телу M движение прямолинейное и равномерное. К телу M будут приложены его вес P , реакция плоскости N (численно равная весу P) и сила трения T , направленная в сторону, противоположную движению. Опытами Кулона (1781) и Морена (1833) было установлено, что величина силы трения T пропорциональна величине реакции N (или, что все равно, сила трения пропорциональна давлению тела на плоскость), так что можно написать:

$$T = fN,$$

где f есть коэффициент пропорциональности, зависящий от материала трущихся тел и от степени шероховатости их поверхностей, но не зависящий от величины трущихся поверхностей и от скоро-

сти скольжения; этот коэффициент f называется *коэффициентом трения*¹⁾. Поверхности трущихся тел называются *абсолютно гладкими* в том случае, если $f=0$. Заметим, что угол φ , определенный условием $\operatorname{tg} \varphi = f$, называется *углом трения*.

Так как по предположению тело M движется прямолинейно и равномерно, то силы, к нему приложенные, должны взаимно уравновешиваться. Отсюда следует, что сила трения T должна уравновешиваться с натяжением F нити MN , т. е. должно быть $T=F$ или

$$F = fN.$$

Предположим теперь, что мы приложим к концу M_1 нити MM_1 силу F , направленную, как показано на черт. 23, но меньшую по величине, чем fN .

Из сказанного следует, что, прилагая такую силу F , мы не сможем сдвинуть тело M : оно останется в покое. Силы, приложенные к телу M , и теперь должны взаимно уравновешиваться. Следовательно, и теперь должна существовать сила трения T , уравновешивающая силу F ; эта сила трения T должна быть направлена в сторону, противоположную направлению силы F , и должна быть равна по величине силе F . Так как по предположению $F < fN$, то отсюда следует:

$$T < fN.$$

Итак, в случае *скольжения* тела M по плоскости AB мы имеем:

$$T = fN,$$

в случае же *покоя* тела M имеем:

$$T < fN.$$

Предельное (наибольшее) значение силы трения в случае покоящегося тела определяется формулой $T = fN$, так что вообще в случае покоя можно написать:

$$T \leq fN.$$

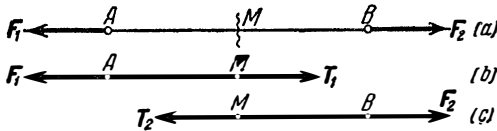
6. Внутренние силы. Внутренние силы, действующие между частицами тела, подчинены аксиоме «действие равно противодействию». Согласно этой аксиоме, внутренние силы взаимодействия между двумя частицами тела равны по величине и направлены по прямой, соединяющей эти частицы, в противоположные стороны. Мы уже заметили, что вопрос об определении внутренних сил не входит в рамки излагаемого курса. Однако, чтобы дать понятие о том,

¹⁾ Позднейшие опыты показали, что коэффициент трения f в некоторой степени зависит также от скорости, с которой одно тело скользит по поверхности другого; об этом будет сказано подробнее в части II нашего курса.

каким образом могут быть определяемы внутренние силы, рассмотрим следующий простой пример.

Представим себе брусок AB (черт. 24, a), который растягивается равными по величине силами F_1 и F_2 , приложенными к его концам; обозначим общую их величину через F , так что $F_1 = F_2 = F$. Возьмем на оси бруска какую-либо точку M и проведем мысленно в точке M сечение, перерезывающее брусок на две части AM и MB . В этом сечении мы имеем две внутренние силы: одна из них, T_1 , приложена к концу M части AM и представляет действие части MB на часть AM , другая же, T_2 , приложена к концу M части MB и представляет действие части AM на часть MB . По аксиоме «действие равно противодействию» эти две внутренние силы равны и направлены в противоположные стороны; обозначим их общую величину буквой T (так что $T_1 = T_2 = T$).

Чтобы определить величину T интересующих нас внутренних сил, обратимся к рассмотрению равновесия одной из частей бруска:



Черт. 24.

AM или MB (для большей наглядности эти части бруска изображены в отдельности на черт. 24, b и 24, c). Например, возьмем часть AM . Как весь брусок AB , так и часть его AM

находятся в равновесии; следовательно, силы, приложенные к части AM , должны взаимно уравновешиваться. К части AM приложены сила F_1 в точке A и сила T_1 в точке M ; из условия их равновесия заключаем, что

$$T = F.$$

Итак, в любом сечении бруска, растягиваемого внешними силами, действуют внутренние силы, равные внешним силам; каждая из этих внутренних сил называется *растягивающим усилием*.

Если бы внешние силы не растягивали, а сжимали брусок AB , то и в сечении M мы получили бы не растягивающие, а *сжимающие усилия*, равные внешним силам. Заметим, что растягивающие усилия принято обозначать буквой T , а сжимающие — буквой S .

Для бруска AB обе силы T_1 и T_2 являются внутренними; но для каждой из частей бруска AM и MB , взятых в отдельности, соответствующая сила T_1 или T_2 , приложенная к каждой из этих частей, является внешней. Таким образом, проведя сечение M , мы перевели интересующие нас внутренние силы в разряд внешних; в этом и состоит идея изложенного метода, который можно назвать *методом сечений*.

Этим методом пользуются всегда для определения внутренних сил. Проведя надлежащее сечение, отсекают часть тела, равновесие

которой затем и рассматривают. В число сил, приложенных к выделенной части тела, входят внутренние силы, действующие в проведенном сечении; притом, если рассматривать только выделенную часть тела, отбросив остальную его часть, то эти внутренние (по отношению ко всему телу) силы оказываются в числе внешних сил (по отношению к выделенной части тела). Затем эти силы определяются из условий равновесия выделенной части тела.

§ 10. Равновесие нетвердых тел. Шестая аксиома

Остановимся теперь на вопросе о равновесии нетвердых тел.

Положим, что некоторое материальное тело A , которое предполагаем нетвердым, находится в равновесии под действием приложенных к нему сил F_1, F_2, \dots, F_n . Представим себе тело B , тождественное по форме с данным телом A , но абсолютно твердое. Мы примем как аксиому, что если нетвердое тело A находится в равновесии под действием сил F_1, F_2, \dots, F_n , то и твердое тело B , находясь под действием тех же сил, также будет оставаться в равновесии.

Замену данного нетвердого тела A твердым телом B можно представить себе как *затвердение* тела A . В таком случае высказанная аксиома получает следующую формулировку:

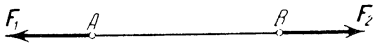
Аксиома VI. *Равновесие нетвердого тела не нарушается от затвердения данного тела.*

Этой аксиомой, которую называют иногда *принципом затвердения*, пользуются весьма часто при изучении равновесия нетвердых тел. Из этой аксиомы следует, что силы, под действием которых находится в равновесии нетвердое тело, должны удовлетворять тем же условиям равновесия, которым удовлетворяют силы, приложенные к твердому телу. Другими словами, условия равновесия твердого тела применимы и к телам нетвердым.

Следует, однако, иметь в виду, что условия равновесия, необходимые и достаточные для равновесия твердого тела, оказываются необходимыми, но еще недостаточными для равновесия нетвердого тела. Для того чтобы было обеспечено равновесие нетвердого тела, силы, к нему приложенные, должны удовлетворять не только условиям равновесия твердого тела, но еще и некоторым добавочным условиям. Выясним это на следующем простом примере.

Представим себе нить AB , которая находится в равновесии под действием двух сил, приложенных к ее концам (черт. 25). Представим себе нить затвердевшей, т. е. мысленно заменим ее абсолютно твердым стержнем AB . На основании аксиомы II условие равновесия такого стержня, находящегося под действием двух сил, приложенных к его концам, состоит в том, что эти две силы должны быть равны по величине и направлены по прямой AB в противоположные стороны. Этому же условию равновесия должны

удовлетворять и силы, приложенные к концам нашей нити. Но это условие, необходимое и достаточное для равновесия твердого стержня, еще недостаточно для равновесия нити. Силы, приложенные к концам стержня, могут либо растягивать его, либо сжимать. Добавочное условие, которому должны удовлетворять силы, приложенные к концам нити, состоит в том, чтобы эти силы растягивали



Черт. 25.

нить, но не сжимали ее, т. е. чтобы они были направлены так, как показано на черт. 25; под действием сжимающих сил равновесие нити невозможно.

Итак, необходимые и достаточные условия равновесия твердого тела являются вместе с тем необходимыми, но недостаточными условиями равновесия нетвердого тела.

Из сказанного явствует, какое значение имеет статика твердого тела для изучения равновесия любых, вообще говоря, нетвердых тел. Силы, приложенные к нетвердому телу, должны удовлетворять двояким условиям равновесия: условиям равновесия твердого тела и добавочным условиям, зависящим от физических свойств данного тела.

ГЛАВА II

СЛОЖЕНИЕ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ В ОДНОЙ ТОЧКЕ И ЛЕЖАЩИХ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

§ 11. Параллелограмм сил. Треугольник сил

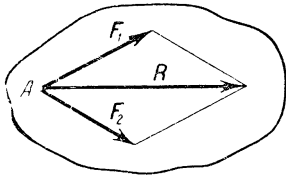
Мы обратимся теперь к исследованию вопроса о сложении сил приложенных к твердому телу; разобрав этот вопрос, мы установим вместе с тем и условия равновесия таких сил. В первых главах (главы II—VI) мы будем предполагать, что все заданные силы лежат в одной плоскости; в последующих главах (главы VII—X) рассмотрим случай, когда силы не лежат в одной плоскости. В настоящей главе разберем вопрос о сложении сил, лежащих в одной плоскости и приложенных в одной точке.

Остановимся сначала на случае двух сил, приложенных в одной точке. Положим, что в точке A твердого тела приложены две силы F_1 и F_2 (черт. 26). Мы уже знаем (§ 8), что эти две силы приводятся к одной равнодействующей R , которая приложена в той же точке A и изображается диагональю параллелограмма, построенного на данных силах.

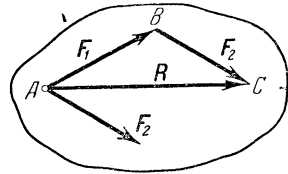
Параллелограмм, построенный на данных силах, называется *параллелограммом сил*, и изложенное правило построения равнодействующей сил F_1 и F_2 называется *правилом параллелограмма сил*.

Заметим, что построение параллелограмма сил может быть заменено также следующим более простым построением.

Положим опять, что в точке A твердого тела приложены две силы F_1 и F_2 (черт. 27). Из конца B силы F_1 проведем вектор \overline{BC} , равный силе F_2 (т. е. численно равный и параллельный силе F_2 и направленный в ту же сторону, что и сила F_2). Соединим начало A силы F_1 с концом C только что построенного вектора. Очевидно,



Черт. 26.



Черт. 27.

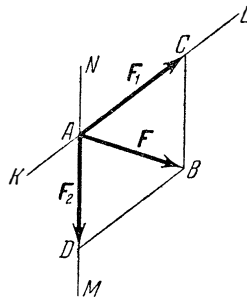
что отрезок AC и изображает равнодействующую R данных сил.

Треугольник ABC , составленный из отрезков, изображающих силы F_1 , F_2 и R , называется *треугольником сил*, и указанное правило построения называется *правилом построения треугольника сил*.

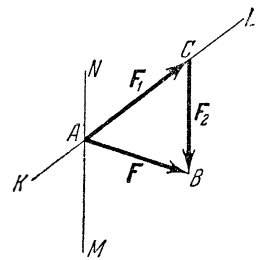
Следует обратить внимание на следующее *правило стрелок* в треугольнике сил: составляющие силы F_1 и F_2 направлены в одну сторону по обводу треугольника сил, равнодействующая же R направлена в противоположную сторону.

Построением параллелограмма сил или треугольника сил легко решается и обратная задача о *разложении* данной силы на две составляющие, приложенные в той же точке и имеющие заданные линии действия.

Положим, дана сила F , приложенная в точке A твердого тела (черт. 28)¹⁾; требуется разложить ее на две составляющие, приложенные в той же точке A , линии действия которых KL и MN заданы. Из конца B силы F проведем прямую, параллельную MN , до пересечения с KL в точке C и прямую, параллельную KL , до пересечения с MN в точке D . Получим параллелограмм сил $ACBD$; стороны его AC и AD дают как величины, так и направления искомым составляющих F_1 и F_2 .



Черт. 28.



Черт. 29.

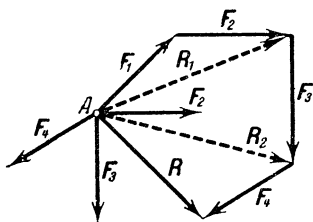
¹⁾ Очертание тела здесь и в дальнейшем на чертеже не изображаем, так как оно не имеет значения.

Чтобы решить ту же задачу при помощи построения треугольника сил, проводим из конца B силы F (черт. 29) прямую, параллельную MN до пересечения с KL в точке C . Получим треугольник сил ACB . Приписываем сторонам AC и CB направления, одинаковые по обходу треугольника и противоположные направлению силы F . Стороны AC и CB дают величины и направления искомого составляющих F_1 и F_2 .

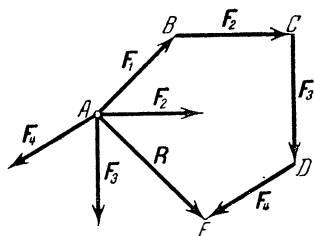
§ 12. Многоугольник сил. Условие равновесия сил, приложенных в одной точке

Перейдем теперь к случаю какого угодно числа сил, приложенных в одной точке.

Положим, что в точке A приложены силы F_1, F_2, F_3, F_4 , лежащие в одной плоскости, которую принимаем за плоскость чертежа (черт. 30); требуется сложить эти силы. Мы ограничимся рассмотрением случая четырех сил, приложенных в одной точке; наше рассуждение остается справедливым для какого угодно числа сил.



Черт. 30.



Черт. 31.

Будем складывать заданные нам силы последовательно. Сначала складываем силы F_1 и F_2 ; по правилу треугольника сил находим их равнодействующую R_1 . Затем складываем силы R_1 и F_3 ; строя опять треугольник этих сил, находим их равнодействующую R_2 .

Наконец, складывая силы R_2 и F_4 , находим их равнодействующую R , которая и есть искомая равнодействующая всех заданных сил.

Из сказанного следует, что для нахождения равнодействующей сил F_1, F_2, F_3, F_4 достаточно произвести следующее построение.

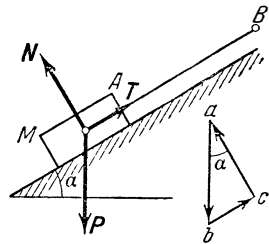
Из конца B силы F_1 (черт. 31) проводим вектор \overline{BC} , равный силе F_2 ; затем из конца C построенного вектора проводим вектор \overline{CD} , равный силе F_3 , и продолжаем так поступать, пока не исчерпаем всех заданных сил. Получим незамкнутый многоугольник $ABCDE$, который называется *многоугольником сил*. Соединяем первую и последнюю вершины многоугольника сил отрезком AE и приписываем этому отрезку направление от первой вершины A к последней E .

Вектор \overline{AE} , замыкающий многоугольник сил, дает как величину, так и направление равнодействующей R заданных сил.

Изложенное правило построения равнодействующей R называется *правилом многоугольника сил*. Обратим внимание на *правило стрелок* в многоугольнике сил: составляющие F_1, F_2, F_3, F_4 направлены в одну сторону по обводу многоугольника сил, равнодействующая же R направлена в противоположную сторону.

Вспомяная определение понятия суммы векторов (§ 2), мы можем формулировать полученный результат следующим образом: *равнодействующая какого угодно числа сил, приложенных в одной точке, приложена в той же точке и равна сумме (векторной) данных сил*. Этот результат справедлив, каково бы ни было число заданных сил. Если нам заданы n сил F_1, F_2, \dots, F_n , то, называя их равнодействующую R и применяя обычный способ для обозначения сложения векторов, можем написать:

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n.$$



Черт. 32.

Из полученного результата легко вывести *условие равновесия сил*, приложенных в одной точке. Силы, приложенные в одной точке, взаимно уравниваются, если их равнодействующая R равна нулю. В этом случае последняя вершина многоугольника сил совпадает с первой вершиной, и многоугольник сил называется *замкнутым*. Следовательно, *условие равновесия сил*, приложенных в одной точке, состоит в том, чтобы *многоугольник данных сил был замкнут*. Или иначе: *силы, приложенные в одной точке, находятся в равновесии, если их векторная сумма равна нулю*.

Приложим это условие равновесия к решению нескольких задач.

Пример 1. На абсолютно гладкой неподвижной наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α (черт. 32), покоится тело M , удерживаемое нитью AB , которая расположена параллельно наклонной плоскости и прикреплена к неподвижной точке B . Вес тела M равен P . Найти натяжение нити AB .

Тело M находится в равновесии под действием следующих трех сил: его собственного веса P , реакции наклонной плоскости N (которая направлена перпендикулярно к наклонной плоскости) и реакции нити T , которая равна по величине искомому натяжению нити. Эти три силы мы будем считать приложенными в одной точке (в центре тяжести тела M). Следовательно, мы имеем три силы, которые приложены в одной точке и находятся в равновесии; согласно вышесказанному, многоугольник этих сил должен быть замкнут.

Строим многоугольник сил P, T и N и требуем, чтобы он был замкнут. Для этого из произвольной точки a проводим вектор \overline{ab} , равный весу тела P , затем из точки b проводим прямую, параллельную линии действия силы T , а из точки a — прямую, параллельную линии действия силы N ;

последние две прямые пересекаются в точке c . Мы получили замкнутый многоугольник abc (в данном случае прямоугольный треугольник). Стороны bc и ca этого многоугольника дают нам величины сил T и N . Имея в виду, что угол при вершине a равен α , получаем:

$$T = P \sin \alpha.$$

Пример 2. Найти угол естественного откоса грунта, для которого коэффициент трения равен 0,8.

Углом естественного откоса называется наибольший угол, который откос насыпи может образовать с горизонтом. Угол естественного откоса определяется как наибольший угол наклона откоса насыпи, при котором частица земли M (черт. 33), находящаяся на откосе насыпи, удерживается в равновесии силой трения T . Из этого условия легко определить величину угла естественного откоса.

Частица земли M находится в равновесии под действием трех сил: ее веса P , реакции наклонной плоскости откоса N и силы трения T . Строим многоугольник сил P , T и N и требуем, чтобы он был замкнут. Для этого из произвольной точки a проводим отрезок ab , численно равный и параллельный силе P ; затем из точек b и a проводим прямые, соответственно параллельные линиям действия сил T и N . Получаем замкнутый многоугольник сил abc , в котором стороны bc и ca равны силам T и N . Обозначая угол, образованный откосом насыпи с горизонтом, через α и замечая, что в прямоугольном треугольнике abc угол при вершине a также равен α , выводим из этого треугольника:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{T}{N}.$$

С другой стороны, мы знаем (§ 9), что

$$T \leq fN,$$

где f есть коэффициент трения. Следовательно:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq f.$$

Этому условию должен удовлетворять угол α для того, чтобы было возможно равновесие частицы M , находящейся на откосе насыпи. Наибольшее значение угла α , удовлетворяющее полученному условию, и есть угол естественного откоса. Обозначая угол естественного откоса через α_0 , получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = f.$$

Полагая здесь $f = 0,8$, находим $\operatorname{tg} \alpha_0 = 0,8$, откуда $\alpha_0 = 38^\circ 40'$.

Мы назвали углом трения (§ 9) угол, тангенс которого равен коэффициенту трения; следовательно, полученный теперь результат можно формулировать так: угол естественного откоса равен углу трения для данного грунта. Отсюда следует, что, измеряя угол естественного откоса, можно определить угол трения, а значит, и коэффициент трения для любого грунта.

Пример 3. Бруски AC и BC (черт. 34) прикреплены в точках A и B к вертикальной стенке, а в точке C соединены между собой; брусок AC горизонтален, брусок CB образует с горизонтом угол α ; соединения в точках A , B и C — шарнирные. К шарнирному болту C приложена вертикальная сила P . Найти усилия в брусках AC и BC .

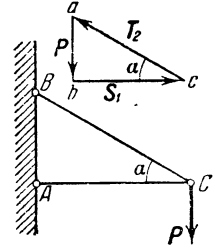
Заметим прежде всего, что под действием нагрузки P бруски AC и BC будут либо растянуты, либо сжаты; изгибающих усилий в них быть не

может. В самом деле, брусок AC находится под действием двух сил, приложенных к его концам со стороны шарнирных болтов A и C . Так как брусок AC находится в равновесии, то эти две силы должны взаимно уравновешиваться, т. е. должны быть равны по величине и направлены по одной прямой, именно по оси бруска AC , в противоположные стороны. Следовательно, эти силы будут либо растягивать, либо сжимать брусок. То же можно повторить и про брусок BC .

Заметим здесь, что то же самое относится к бруском, входящим в состав любой конструкции, составленной из прямолинейных брусков, соединенных своими концами, если все соединения шарнирные и если нагрузки приложены к шарнирным болтам. Все бруска такой конструкции испытывают усилия растягивающие или сжимающие, но не изгибающие. В этом состоит идея мостовой фермы. Подробнее об этом будет сказано в главе VI.

Обратимся теперь к шарнирному болту C . Шарнирный болт C находится в равновесии под действием трех сил: данной нагрузки P и реакций брусков AC и BC .

Эти реакции направлены по прямым AC и BC , равны тем силам, которые приложены к концам брусков AC и BC со стороны шарнирного болта C , а следовательно, равны и искомым усилиям в брусках. Строим многоугольник упомянутых трех сил и требуем, чтобы он был замкнут. Для этого из произвольной точки a проводим отрезок ab , изображающий силу P , затем из точек b и a проводим прямые, соответственно параллельные прямым AC и BC . Получаем замкнутый многоугольник сил abc , в котором стороны bc и ca изображают реакции брусков AB и BC . Направления этих реакций указывают, что брусок AC сжат, а брусок BC растянут. Обозначая реакции брусков AC и BC (или, что все равно, усилия в этих брусках) через S_1 и T_2 (напомним, что сжимающие усилия обозначаются буквой S , а растягивающие — буквой T), находим из треугольника abc



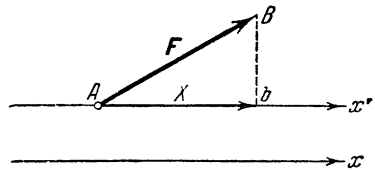
Черт. 34.

$$S_1 = P \operatorname{ctg} \alpha, \quad T_2 = \frac{P}{\sin \alpha}.$$

§ 13. Проекция силы на ось. Разложение силы по осям координат

В § 4 было дано определение понятия проекции вектора на ось. Применим теперь высказанные в этом параграфе соображения к понятию проекции силы на ось.

Дана сила F , приложенная в точке A , и ось x (черт. 35), которой приписываем направление, указанное на чертеже стрелкой. Через точку A проводим ось x' , параллельную оси x и одинаково с ней направленную. Из конца B силы F опускаем перпендикуляр Bd на ось x' . Алгебраическая величина отрезка Ab , которому приписываем направление от точки A к точке b , называется проекцией силы F на ось x ; обозначим эту проекцию буквой X . Мы считаем проекцию X



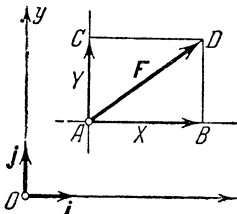
Черт. 35.

положительной, если направление отрезка Ab совпадает с направлением оси x , и отрицательной в противном случае.

Из прямоугольного треугольника ABb следует, что

$$X = F \cos (F, x), \quad (1)$$

где (F, x) есть угол, заключенный между направлением силы F и направлением оси x . На черт. 35 проекция X положительна; легко видеть, что равенство (1) справедливо и при отрицательном X . Заметим, что величина F в равенстве (1) всегда положительна; из этого равенства видно, что $X > 0$, если угол (F, x) острый, и $X < 0$, если угол (F, x) тупой. Если $(F, x) = 0^\circ$, т. е. направление силы F совпадает с направлением оси x , то $X = F$; если же $(F, x) = 180^\circ$, т. е. направление силы F противоположно направлению оси x , то $X = -F$. Важно отметить, что $X = 0$ при $(F, x) = 90^\circ$; таким образом, проекция силы на ось обращается в нуль, если сила направлена перпендикулярно к оси.



Черт. 36.

Дана опять сила F , приложенная в точке A (черт. 36). Возьмем две взаимно перпендикулярные оси x и y и разложим силу F на две составляющие, направленные параллельно этим осям. Для этой цели проведем через точку A две прямые, параллельные осям x и y , и построим на этих прямых прямоугольник, в котором данная сила F является диагональю.

Силы, изображаемые сторонами этого прямоугольника, называются *составляющими или компонентами* силы F по осям x и y .

Вспомня определение понятия проекции силы, мы заключаем, что величины компонентов силы F (взятые с тем или другим знаком в зависимости от направления этих компонентов) равны проекциям силы F на оси x и y ; обозначим эти проекции через X и Y . С другой стороны, в § 3 мы видели, что всякий вектор может быть представлен как произведение его величины на соответствующий единичный вектор. Обозначим единичные векторы, направленные по осям x и y , через i и j . В таком случае компоненты силы F мы можем представить в виде произведений Xi и Yj .

Так как сила F равна сумме ее составляющих, то

$$F = Xi + Yj.$$

Это равенство мы будем называть *формулой разложения данной силы на составляющие по осям координат*.

Следует всегда иметь в виду существенное различие между проекциями силы и компонентами силы: компоненты силы являются векторами в отличие от проекций силы, которые мы рассматриваем как величины скалярные.

Покажем теперь, что, зная проекции силы на две взаимно перпендикулярные оси x и y , легко определить как величину, так и направление силы. В самом деле, из черт. 36 видно, что сила F представляется диагональю прямоугольника, стороны которого численно равны проекциям X и Y . Отсюда следует, что

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (2)$$

Далее, для проекций X и Y имеем равенства:

$$X = F \cos(\mathbf{F}, x), \quad Y = F \cos(\mathbf{F}, y);$$

отсюда следует:

$$\cos(\mathbf{F}, x) = \frac{X}{F}, \quad \cos(\mathbf{F}, y) = \frac{Y}{F}. \quad (3)$$

Формулами (2) и (3) определяются величина и направление силы F , если известны ее проекции X и Y .

§ 14. Нахождение равнодействующей сил, приложенных в одной точке, по способу проекций

Воспользуемся соображениями, высказанными в конце предыдущего параграфа, для определения равнодействующей сил, приложенных в одной точке.

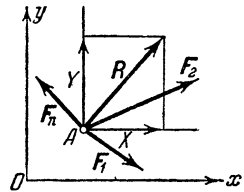
Даны силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные в точке A (черт. 37). Требуется найти вычислением величину и направление их равнодействующей R .

Возьмем две взаимно перпендикулярные оси x и y . Согласно замеченному в конце предыдущего параграфа, задача будет решена, если мы найдем проекции равнодействующей R на оси x и y .

Мы уже знаем, что равнодействующая R равна векторной сумме данных сил F_1, F_2, \dots, F_n . С другой стороны, в § 5 было показано, что проекция суммы векторов на какую-либо ось равна сумме проекций составляющих на ту же ось. Отсюда мы заключаем, что *проекция равнодействующей R на какую угодно ось равна сумме проекций составляющих F_1, F_2, \dots, F_n на ту же ось.*

Следовательно, обозначая проекции сил F_1, F_2, \dots, F_n на оси x и y через $X_1, Y_1; X_2, Y_2; \dots; X_n, Y_n$, а проекции равнодействующей R на те же оси через X, Y , имеем:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n.$$



Черт. 37.

Входящие сюда проекции сил F_1, F_2, \dots, F_n легко вычисляются по формулам:

$$X_1 = F_1 \cos(F_1, x), \quad X_2 = F_2 \cos(F_2, x), \quad \dots, \quad X_n = F_n \cos(F_n, x),$$

$$Y_1 = F_1 \cos(F_1, y), \quad Y_2 = F_2 \cos(F_2, y), \quad \dots, \quad Y_n = F_n \cos(F_n, y).$$

Иногда эти формулы сокращенно выражаются в виде:

$$X = \sum X_i,$$

$$Y = \sum Y_i,$$

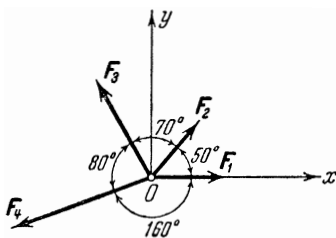
где \sum есть знак суммирования, а X_i и Y_i — проекции силы F_i на оси x и y (причем $i = 1, 2, \dots, n$), т. е.

$$X_i = F_i \cos(F_i, x),$$

$$Y_i = F_i \cos(F_i, y).$$

Таким же образом суммирование будет представляться и в дальнейшем.

Вычислив проекции равнодействующей X и Y , находим затем величину и направление равнодействующей по формулам:



Черт. 38.

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

$$\cos(R, x) = \frac{X}{R}, \quad \cos(R, y) = \frac{Y}{R}.$$

Пример 4. Даны силы $F_1 = 10$ кг, $F_2 = 10$ кг, $F_3 = 15$ кг, $F_4 = 20$ кг, приложенные в одной точке. Направления сил указаны на черт. 38: $(F_1, F_2) = 50^\circ$; $(F_2, F_3) = 70^\circ$; $(F_3, F_4) = 80^\circ$; $(F_4, F_1) = 160^\circ$. Найти равнодействующую этих сил.

Выбираем за ось x линию действия силы F_1 , ось y проводим через точку приложения данных сил перпендикулярно к оси x , как показано на чертеже.

При помощи тригонометрических таблиц находим:

$$\begin{array}{ll} X_1 = 10 & Y_1 = 0, \\ X_2 = 10 \cos 50^\circ = 6,428, & Y_2 = 10 \cos 40^\circ = 7,660, \\ X_3 = 15 \cos 120^\circ = -7,500, & Y_3 = 15 \cos 30^\circ = 12,990, \\ X_4 = 20 \cos 160^\circ = -18,794, & Y_4 = 20 \cos 110^\circ = -6,840. \end{array}$$

Отсюда

$$X = -9,866, \quad Y = 13,810,$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 16,972 \text{ кг.}$$

$$\text{Далее: } \cos(R, x) = \frac{X}{R} = -0,5813, \quad \cos(R, y) = \frac{Y}{R} = 0,8137, \text{ откуда}$$

$$(R, x) = 125^\circ 32', 5;$$

$$(R, y) = 35^\circ 32', 5.$$

§ 15. Уравнения равновесия сил, приложенных в одной точке

Применим полученные в предыдущем параграфе уравнения к тому случаю, когда данные силы F_1, F_2, \dots, F_n взаимно уравновешиваются. В § 12 мы видели, что силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные в одной точке, находятся в равновесии, если их равнодействующая R равна нулю. Но из равенства

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

следует, что $R = 0$, если $X = 0$ и $Y = 0$.

Вспомогая выражения, полученные для проекций X и Y равнодействующей, заключаем, что силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные в одной точке, находятся в равновесии, если удовлетворены уравнения

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0; \quad Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = 0.$$

Эти уравнения называются *уравнениями равновесия сил*, приложенных в одной точке.

В рассматриваемом случае мы получаем два уравнения равновесия. Мы сможем решить при помощи этих уравнений задачу (в которой имеются силы, приложенные в одной точке и находящиеся в равновесии), если число неизвестных (искомых) величин в задаче равно двум. Если число неизвестных в задаче больше, чем две, то имеющихся в нашем распоряжении уравнений будет недостаточно для определения всех неизвестных. Задачи, которые не могут быть решены при помощи уравнений статики твердого тела, называются *статически неопределенными*. Для решения таких задач необходимо принять в расчет незначительные изменения формы, или деформации, испытываемые всеми телами под действием приложенных к ним сил; методы решения статически неопределенных задач излагаются в курсе сопротивления материалов. Задачи, решаемые при помощи уравнений статики твердого тела, мы будем называть *статически определенными*.

Из сказанного следует, что задача, в которой имеются силы, приложенные в одной точке и находящиеся в равновесии, будет статически определенной, если число неизвестных в ней равно двум.

При решении задач важно надлежащим образом выбрать ось проекций. При выборе этих осей следует, вообще говоря, руководствоваться следующим правилом: оси проекций следует направлять перпендикулярно к линии действия одной из неизвестных сил. При таком выборе осей проекций неизвестная сила исключается из соответствующего уравнения равновесия, и решение уравнений равновесия упрощается.

Пример 5. Решить задачу примера 1 при помощи уравнений равновесия.

Тело M (черт. 39) находится в равновесии под действием силы тяжести P , реакции наклонной плоскости N и реакции нити T . Неизвестными

величинами являются реакции N и T ; следовательно, задача — статически определенная.

Возьмем линии действия сил T и N за оси проекций x и y , направив эти оси, как показано на черт. 39. Проектируя силы T , N и P на эти оси, получаем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} T + P \cos(90^\circ + \alpha) &= 0, \\ N + P \cos(180^\circ - \alpha) &= 0, \end{aligned}$$

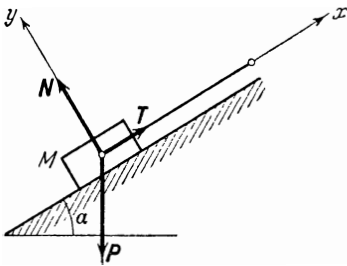
или

$$T - P \sin \alpha = 0, \quad N - P \cos \alpha = 0,$$

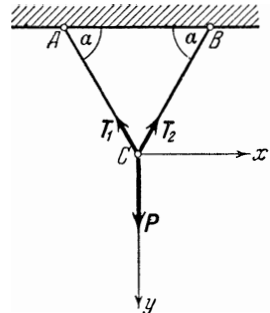
откуда находим:

$$T = P \sin \alpha, \quad N = P \cos \alpha.$$

Пример 6. Бруски AC и BC , наклоненные к горизонту под углом α , прикреплены в точках A и B к горизонтальной стенке, а в точке C соединены между собой (черт. 40); соединения в точках A , B и C — шарнирные.



Черт. 39.



Черт. 40.

К шарнирному болту C приложена вертикальная сила P . Найти усилия в брусках AC и BC .

Шарнирный болт C находится в равновесии под действием нагрузки P и реакций брусков AC и BC . Эти реакции направлены по прямым AC и BC и равны искомым усилиям в брусках; обозначим их через T_1 и T_2 .

Возьмем за оси x и y горизонтальную и вертикальную прямые, проходящие через точку C , и направим оси x и y , как показано на черт. 40. Проектируя силы P , T_1 и T_2 на эти оси, получаем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} T_2 \cos \alpha + T_1 \cos(180^\circ - \alpha) &= 0, \\ P + T_1 \cos(90^\circ + \alpha) + T_2 \cos(90^\circ + \alpha) &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} T_2 \cos \alpha - T_1 \cos \alpha &= 0, \\ P - T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \alpha &= 0, \end{aligned}$$

откуда находим:

$$T_1 = T_2 = \frac{P}{2 \sin \alpha}.$$

§ 16. Сложение сил, действующих по одной прямой

Положим, что в точке A (черт. 41) приложены силы F_1 , F_2 , F_3 , F_4 , действующие по одной прямой, причем силы F_1 и F_2 направлены в одну сторону, а силы F_3 и F_4 — в другую. Требуется сложить эти силы.

Воспользуемся геометрическим решением задачи о сложении сил, приложенных в одной точке, т. е. решим задачу построением многоугольника сил. Мы знаем, что равнодействующая R данных сил приложена в той же точке A ; для нахождения величины и направления равнодействующей R строим многоугольник данных сил; замыкающая сторона этого многоугольника определяет как величину, так и направление равнодействующей R . Этот многоугольник построен на черт. 41. В данном случае все стороны многоугольника сил лежат на одной прямой; для большей ясности на черт. 41 стороны F_1 , F_2 и стороны F_3 , F_4 , R изображены на двух параллельных прямых. Черт. 41 построен в предположении, что

$$F_1 + F_2 > F_3 + F_4.$$

В этом случае, как видно из чертежа,

$$R = F_1 + F_2 - F_3 - F_4;$$

направление равнодействующей R совпадает с направлением сил F_1 и F_2 . Следовательно, *величина равнодействующей сил, действующих по одной прямой, равна алгебраической сумме величин данных сил, взятых с соответствующими знаками.*

Конечно, если бы было:

$$F_3 + F_4 > F_1 + F_2,$$

то мы получили бы

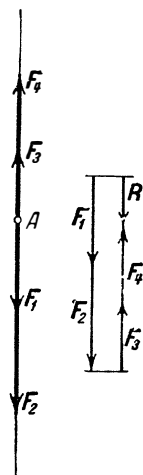
$$R = F_3 + F_4 - F_1 - F_2,$$

а направление равнодействующей R совпало бы с направлением сил F_3 и F_4 .

Силы F_1 , F_2 , F_3 , F_4 взаимно уравниваются в том случае, если $R = 0$, или

$$F_1 + F_2 - F_3 - F_4 = 0.$$

Итак, *силы, действующие по одной прямой, взаимно уравниваются, если алгебраическая сумма их величин равна нулю.*



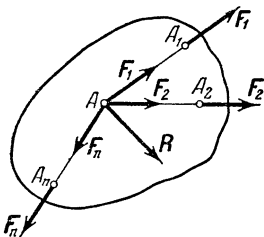
Черт. 41.

§ 17. Сложение сил, линии действия которых пересекаются в одной точке

Эта задача сводится непосредственно к вопросу о сложении сил, приложенных в одной точке, стоит только перенести точки приложения данных сил вдоль их линий действия в общую точку пересечения этих прямых.

В самом деле, положим, что даны силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные в точках A_1, A_2, \dots, A_n (черт. 42); линии действия данных сил пересекаются в общей точке A . Перенесем точки приложения всех заданных сил вдоль их линий действия в точку A . Тогда мы

будем иметь силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные в одной точке A . Складывая эти силы, мы найдем их равнодействующую R , которая будет приложена в той же точке A и будет равна векторной сумме данных сил F_1, F_2, \dots, F_n .



Черт. 42.

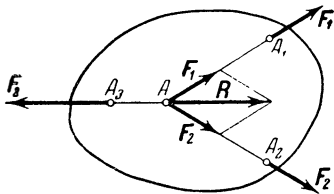
Итак, *равнодействующая сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, равна векторной сумме данных сил и приложена в общей точке пересечения линий действия составляющих сил.*

Силы F_1, F_2, \dots, F_n находятся в равновесии, если $R=0$. Следовательно, *силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, взаимно уравниваются, если векторная сумма данных сил равна нулю.*

§ 18. Равновесие трех непараллельных сил

Докажем следующую теорему: *три силы, расположенные в одной плоскости, взаимно уравнивающиеся и непараллельные, пересекаются в одной точке.*

В самом деле, положим, что в точках A_1, A_2, A_3 приложены силы F_1, F_2, F_3 (черт. 43), расположенные в одной плоскости, непараллельные и взаимно уравнивающиеся. Так как данные силы не параллельны, то линии действия двух из них, например F_1 и F_2 , наверное пересекутся в некоторой точке A . Перенесем точки приложения сил F_1 и F_2 вдоль их линий действия в точку A ; сложив эти силы, найдем их равнодействующую R , приложенную также в точке A .



Черт. 43.

Но, по условию, силы F_1, F_2, F_3 находятся в равновесии. Следовательно, сила F_3 должна взаимно уравниваться с равнодействующей R сил F_1 и F_2 ; а это возможно только в том случае, если силы F_3 и R равны по величине и действуют по одной прямой в противоположные стороны. Следовательно, линия действия силы F_3 проходит через точку A , что и требовалось доказать.

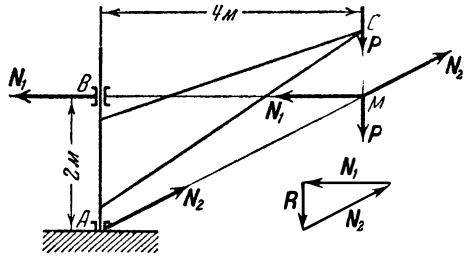
Пример 7. Вертикальная стойка подъемного крана (черт. 44) опирается на подпятник A и подшипник B ; в точке C приложена вертикальная нагрузка $P=2\text{ т}$; длина стойки AB равна 2 м ; вылет крана (расстояние точки C от оси вращения крана) равен 4 м . Найти опорные реакции крана.

Реакция N_1 подшипника B направлена горизонтально, реакция же N_2 подпятника A складывается из вертикальной и горизонтальной составляющих

и, следовательно, направлена наклонно к горизонту. Для определения линии действия реакции N_2 воспользуемся только что доказанной теоремой.

Так как три силы P , N_1 и N_2 взаимно уравновешиваются и не параллельны, то они должны пересекаться в одной точке. Построим точку пересечения M линий действия P и N_1 и соединим точку M прямой линией с точкой A . Прямая AM и есть искомая линия действия реакции N_2 .

Перенесем теперь точки приложения сил P , N_1 и N_2 вдоль их линий действия в точку M . Получим три силы, приложенные в одной точке и взаимно уравновешивающиеся;



Черт. 44.

многоугольник этих сил должен быть замкнут. Строим многоугольник сил P , N и N_2 и замечаем, что он подобен треугольнику ABM . Из подобия выводим

$$N_1 = P \frac{4}{2} = 4m, \quad N_2 = P \frac{\sqrt{20}}{2} = 4,472 m.$$

ГЛАВА III

СЛОЖЕНИЕ ПАР, ЛЕЖАЩИХ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

§ 19. Сложение двух параллельных сил, направленных в одну и ту же сторону

В предыдущей главе мы разобрали вопрос о сложении сил, лежащих в одной плоскости и приложенных в одной точке. Нам предстоит теперь обратиться к тем случаям, когда заданные силы приложены в различных точках тела и расположены как угодно в данной плоскости. В дальнейшем (в главе IV) мы увидим, что задача сложения таких сил может быть приведена к двум более простым задачам, а именно: к сложению *пар*, приложенных в одной точке, и к сложению так называемых *пар сил*. С первой из этих задач мы уже ознакомились. В настоящей главе мы рассмотрим теорию сложения пар.

Однако предварительно остановимся на вопросе о сложении двух параллельных сил, приложенных к твердому телу.

В двух точках A и B одного и того же твердого тела (которое на чертеже не изображено) приложены силы F_1 и F_2 , параллельные и направленные в одну и ту же сторону (черт. 45). Требуется сложить эти силы.

Соединим точки A и B прямой линией и приложим в точках A и B две равные по величине силы S_1 и S_2 , направленные по прямой AB в противоположные стороны. (Такие две силы, как взаимно уравновешивающиеся, имеем право приложить согласно аксиоме III.)

Сложив силы F_1 и S_1 , приложенные к точке A , по правилу параллелограмма сил, получим их равнодействующую T_1 . Точно

так же, складывая силы F_2 и S_2 , приложенные в точке B , получим их равнодействующую T_2 .

Продолжим линии действия сил T_1 и T_2 до пересечения в точке M и перенесем точки приложения сил T_1 и T_2 вдоль их линий действия в точку M . Разлагая силу T_1 , приложенную в точке M , на две составляющие, параллельные силам F_1 и S_1 , получим составляющие, равные силам F_1 и S_1 (это следует из равенства параллелограммов, построенных при точке A и при точке M). Точно так же, разлагая силу T_2 , приложенную в точке M , на две составляющие, параллельные

силам F_2 и S_2 , получим составляющие, равные F_2 и S_2 .

Две силы S_1 и S_2 , приложенные в точке M , взаимно уравновешиваются. Силы F_1 и F_2 , приложенные в точке M , направлены по одной прямой в одну и ту же сторону. Складывая эти две силы, получим их равнодействующую R , которая имеет величину, равную сумме их величин:

$$R = F_1 + F_2,$$

и направлена по той же прямой в ту же сторону.

Эта сила R и есть равнодействующая данных параллельных сил F_1 и F_2 .

Итак, силы F_1 и F_2 имеют равнодействующую, которая по величине равна сумме их величин, им параллельна и направлена в ту же сторону.

Продолжим линию действия силы R до пересечения с прямой AB в точке C и перенесем точку приложения силы R вдоль ее линии действия в точку C .

Определим положение точки C на прямой AB . Из подобия треугольников MCA и MKL имеем:

$$\frac{AC}{S_1} = \frac{MC}{F_1}, \quad \text{или} \quad AC \cdot F_1 = MC \cdot S_1. \quad (1)$$

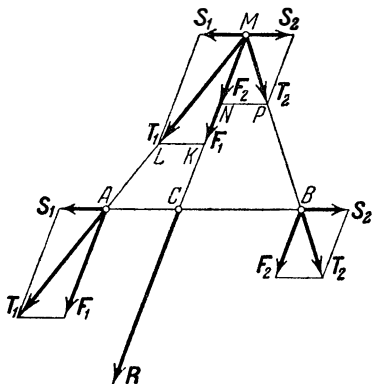
Из подобия треугольников MCB и MNP имеем:

$$\frac{BC}{S_2} = \frac{MC}{F_2}, \quad \text{или} \quad BC \cdot F_2 = MC \cdot S_2. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2), имея в виду, что $S_1 = S_2$, заключаем:

$$AC \cdot F_1 = BC \cdot F_2, \quad \text{или} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}. \quad (3)$$

Итак, отрезки AC и BC обратно пропорциональны величинам F_1 и F_2 . Следовательно, точка C делит отрезок AB на части, обратно пропорциональные величинам сил F_1 и F_2 .



Черт. 45.

Перепишем пропорцию (3) так:

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1}.$$

В пропорции каждый предыдущий член относится к своему последующему, как сумма предыдущих относится к сумме последующих; следовательно:

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AC + BC}{F_1 + F_2}.$$

Но $AC + BC = AB$ и $F_1 + F_2 = R$. Следовательно:

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R}.$$

Отрезки AC и BC проще всего определяются из последних равенств. Получаем:

$$AC = AB \frac{F_2}{R}, \quad BC = AB \frac{F_1}{R}.$$

При помощи полученных результатов легко решается задача о разложении данной силы на две составляющие, ей параллельные и направленные в ту же сторону.

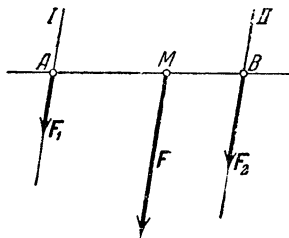
Положим, дана сила F , приложенная в точке M (черт. 46). Требуется разложить эту силу на две составляющие F_1 и F_2 , действующие по прямым I и II , параллельным линии действия данной силы F .

Проведем через точку M прямую, пересекающую прямые I и II в точках A и B ; эти точки можно принять за точки приложения искомым составляющих F_1 и F_2 . Составляющие F_1 и F_2 должны удовлетворять уравнениям:

$$F_1 + F_2 = F, \quad \frac{AM}{F_2} = \frac{BM}{F_1} = \frac{AB}{F}.$$

Из последних равенств находим:

$$F_1 = F \frac{BM}{AB}, \quad F_2 = F \frac{AM}{AB}.$$



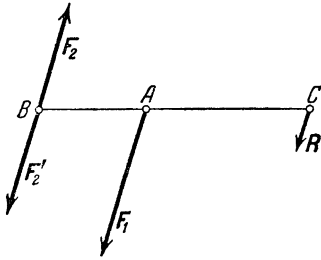
Черт. 46.

§ 20. Сложение двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны

В точках A и B одного и того же твердого тела приложены силы F_1 и F_2 , параллельные и направленные в противоположные стороны (черт. 47). Требуется сложить эти силы.

Предполагаем, что силы F_1 и F_2 не равны по величине (случай равных по величине сил будет рассмотрен в следующем параграфе). Положим, что $F_1 > F_2$.

Разложим силу F_1 на две составляющие, ей параллельные и направленные в ту же сторону; обозначим эти составляющие через F'_2 и R . Величину составляющей F'_2 выберем равной величине силы F_2 и приложим эту составляющую в точке B . Величина второй составляющей R и ее точка приложения C найдутся из условий:



Черт. 47.

$$F_1 = F'_2 + R,$$

$$\frac{AB}{R} = \frac{AC}{F'_2} = \frac{BC}{F_1},$$

откуда, имея в виду, что $F'_2 = F_2$, получаем:

$$R = F_1 - F_2, \quad (1)$$

$$AC = AB \frac{F_2}{R}, \quad BC = AB \frac{F_1}{R}. \quad (2)$$

Но две равные по величине и противоположные силы, приложенные в точке B , взаимно уравниваются. Остается сила R , которая и есть искомая равнодействующая данных сил F_1 и F_2 .

Мы видим, что и в этом случае отрезки AC и BC обратно пропорциональны величинам сил F_1 и F_2 .

§ 21. Пара сил. Момент пары

Система двух равных по величине, параллельных и противоположно направленных сил F_1 и F_2 , приложенных к твердому телу (черт. 48), называется *парой сил*. Понятие пары сил введено в науку Пуансо¹⁾.

Если положим $F_1 = F_2$ в равенствах (1) и (2) предыдущего параграфа, то получим:

$$R = 0, \quad AC = \infty, \quad BC = \infty.$$

Отсюда заключаем, что пара сил не имеет равнодействующей.

Вместе с тем силы, составляющие пару, не находятся в равновесии (по аксиоме II). Следовательно, пара сил представляет пример совокупности сил, не находящихся в равновесии и не имеющих равнодействующей.

Расстояние между линиями действия сил, составляющих пару, называется *плечом* пары; обозначим его буквой p . *Моментом* пары называется взятое со знаком $+$ или $-$ произведение величины одной из сил пары на плечо.

Полагая $F_1 = F_2 = F$ и обозначая момент пары буквой m , имеем:

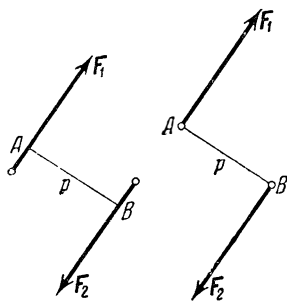
$$m = \pm Fp.$$

¹⁾ L. Poinsot, *Éléments de statique*. Первое издание сочинений Пуансо появилось в 1803 г. Существуют русские переводы этой книги.

Тот или другой знак в этой формуле определяется по следующему правилу. Если пара стремится повернуть плоскость чертежа в сторону, противоположную вращению часовой стрелки, то в выражении момента пары берем знак $+$, в противном случае берем знак $-$.

Заметим, что силы, составляющие пару, взаимно уравновешиваются в том частном случае, когда плечо p равно нулю; в этом случае и момент равен нулю.

Заметим еще, что, перенося точку приложения одной из сил, составляющих пару, вдоль ее линии действия, всегда можно достигнуть того, чтобы прямая, соединяющая точки приложения сил A и B , была перпендикулярна к линиям действия сил пары (черт. 49). Тогда отрезок AB и есть плечо пары. В дальнейшем всегда будем считать, что прямая, соединяющая точки приложения сил пары, перпендикулярна к линиям действия этих сил.



Черт. 48.

Черт. 49.

Как видно из самого определения, момент пары есть величина, имеющая размерность силы, умноженной на длину. Если силы, составляющие пару, выражены в килограммах, а плечо пары — в метрах, то момент будет выражен в *килограммометрах*. Так, например, если силы, составляющие пару, равны каждая по 10 кг, а плечо пары равно 2 м, причем направление вращения пары — по часовой стрелке, то момент пары будет

$$m = - 20 \text{ кгм.}$$

Таким образом, за единицу момента мы принимаем килограммометр, т. е. момент пары, состоящей из двух сил по 1 кг каждая, приложенных на концах плеча длиной в 1 м.

§ 22. Условие эквивалентности пар

В этом параграфе мы покажем замечательное свойство пар сил, которое и лежит в основании теории сложения пар. Это свойство состоит в том, что, не нарушая равновесия, можно всегда заменить всякую данную пару другой парой, момент которой равен моменту данной пары. Другими словами, мы покажем, что *две пары, моменты которых равны, статически эквивалентны*.

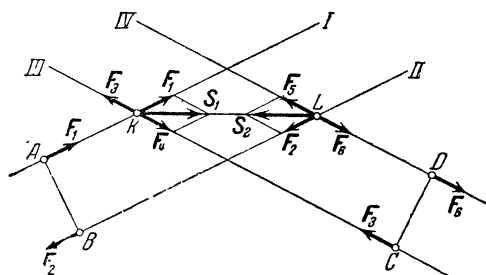
Прежде чем доказать это условие эквивалентности пар, обратимся к следующей вспомогательной теореме.

Вспомогательная теорема. *Не нарушая равновесия, можно перенести данную пару в любое положение в ее плоскости.*

Дана пара, состоящая из равных по величине и противоположно направленных сил F_1 и F_2 с плечом AB (черт. 50).

Возьмем произвольно расположенный отрезок $CD = AB$ и покажем, что, не нарушая равновесия, можно перенести данную пару так, чтобы ее плечо совпало с отрезком CD .

Проведем линии действия I и II сил F_1 и F_2 и восставим в точках C и D перпендикуляры III и IV к отрезку CD . Отметим точку пересечения K прямых I и III , а также точку пересечения L прямых II и IV .



Черт. 50.

Перенесем теперь точки приложения сил F_1 и F_2 вдоль их линий действия I и II в точки K и L . Затем приложим в точках K и L взаимно уравновешивающиеся и направленные соответственно по прямым III и IV силы F_3 , F_4 , F_5 и F_6 , численно рав-

ные силам F_1 и F_2 . Сложим силу F_1 , приложенную в точке K , с силой F_4 .

Построив на силах F_1 и F_4 параллелограмм (в данном случае ромб), получим их равнодействующую S_1 . Точно так же, складывая силу F_2 , приложенную в точке L , с силой F_5 , получим их равнодействующую S_2 .

Но параллелограммы, построенные при точках K и L , равны; следовательно, $S_1 = S_2$. Далее сила S_1 (как диагональ ромба) делит пополам угол между силами F_1 и F_4 . Но прямая KL (как диагональ ромба, образованного прямыми I , II , III и IV) также делит пополам этот угол. Отсюда следует, что сила S_1 направлена по прямой KL . Точно так же убедимся, что и сила S_2 направлена по той же прямой KL . Значит, силы S_1 и S_2 равны по величине и действуют по одной прямой в противоположные стороны и, следовательно, взаимно уравновешиваются. Остаются силы F_3 и F_6 , действующие соответственно по прямым III и IV . Перенесем точки приложения этих сил вдоль прямых III и IV в точки C и D .

После всех этих операций данная пара оказывается перенесенной в требуемое положение.

Перейдем теперь к доказательству указанного выше условия эквивалентности пар.

Теорема. *Две пары, моменты которых равны, статически эквивалентны.*

Даны пары F_1 , F_2 с плечом AB и S_1 , S_2 с плечом CD (черт. 51).

Предполагаем, что моменты этих пар равны (т. е. имеют равные численные значения и одинаковые знаки), и докажем, что пары статически эквивалентны (т. е. одна из пар может быть заменена другой без нарушения равновесия).

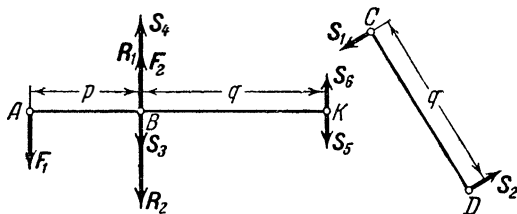
Положим $F_1 = F_2 = F$, $S_1 = S_2 = S$ и обозначим $AB = p$, $CD = q$. Обозначая моменты данных пар через m_1 и m_2 , имеем:

$$m_1 = F \cdot p, \quad m_2 = S \cdot q,$$

причем согласно чертежу (черт. 51) оба момента взяты со знаком $+$ ¹⁾.

По условию $m_1 = m_2$, т. е.

$$F \cdot p = S \cdot q. \quad (1)$$



Черт. 51.

Отложим от точки B по продолжению отрезка AB отрезок $BK = CD = q$ и приложим в точках B и K взаимно уравновешивающиеся силы S_3, S_4, S_5, S_6 , численно равные S и направленные перпендикулярно к прямой BK ($S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = S$).

Складывая силу F_2 , приложенную в точке B , с силой S_4 , получим равнодействующую R_1 , равную по величине $F + S$, приложенную в точке B и направленную перпендикулярно к прямой AK в ту же сторону, что и сила S_4 .

Сложим также силу F_1 , приложенную в точке A , с силой S_5 ; мы получим равнодействующую R_2 , также равную $F + S$, направленную перпендикулярно к прямой AK в ту же сторону, что и сила S_5 , и приложенную в точке, делящей отрезок AK на части, обратно пропорциональные силам F_1 и S_5 , или, что то же, силам F и S . Но отрезок AK делится на части, обратно пропорциональные силам F и S в точке B , ибо по условию (1) имеем:

$$\frac{AB}{BK} = \frac{p}{q} = \frac{S}{F}.$$

Следовательно, и вторая равнодействующая R_2 приложена в точке B . Итак, в точке B приложены две равные по величине силы R_1 и R_2 , направленные по одной прямой в противоположные стороны; эти силы взаимно уравновешиваются. Остаются силы S_3 и S_6 , которые образуют пару с плечом BK .

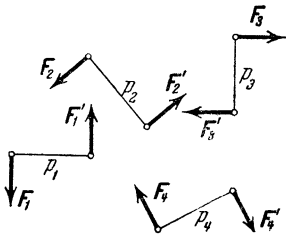
Таким образом, данная пара F_1, F_2 с плечом AB заменена парой S_3, S_6 с плечом BK . На основании вспомогательной теоремы эта

¹⁾ Предлагаем читателю убедиться, что доказываемая теорема остается справедливой и в том случае, если моменты обеих данных пар отрицательны.

последняя пара может быть перенесена так, чтобы ее плечо совпало с отрезком CD . После этого данная пара F_1, F_2 с плечом AB оказывается замененной парой S_1, S_2 с плечом CD , т. е. пары F_1, F_2 и S_1, S_2 оказываются статически эквивалентными.

§ 23. Сложение пар. Условие равновесия пар

Даны пары $F_1, F'_1; F_2, F'_2; F_3, F'_3$ и F_4, F'_4 с плечами p_1, p_2, p_3 и p_4 (черт. 52); пары F_1, F'_1 и F_2, F'_2 стремятся повернуть плоскость



Черт. 52.

чертежа против часовой стрелки, пары F_3, F'_3 и F_4, F'_4 — по часовой стрелке. Обозначая моменты этих пар через m_1, m_2, m_3 и m_4 , имеем:

$$m_1 = F_1 p_1, \quad m_2 = F_2 p_2, \\ m_3 = -F_3 p_3, \quad m_4 = -F_4 p_4.$$

Возьмем произвольный отрезок $AB = d$ и приведем данные пары к плечу d , т. е. заменим данные пары эквивалентными им парами $P_1, P'_1; P_2, P'_2; P_3, P'_3$ и P_4, P'_4 с плечом d . Величины сил P_1, P_2, P_3 и P_4 определяются из равенств:

$$m_1 = P_1 d, \quad m_2 = P_2 d, \quad m_3 = -P_3 d, \quad m_4 = -P_4 d.$$

Складываем силы P_1, P_2, P_3 и P_4 , приложенные в точке A . Эти силы направлены по одной прямой; предполагая, что $P_1 + P_2 > P_3 + P_4$, получим их равнодействующую R , имеющую величину

$$R = P_1 + P_2 - P_3 - P_4,$$

направленную по той же прямой в ту же сторону, в которую направлена сила P_1 .

Также сложим силы P'_1, P'_2, P'_3 и P'_4 , приложенные в точке B . Их равнодействующая R' равна по величине силе R , приложенной в точке A , параллельна ей и направлена в противоположную сторону.

Итак, данные пары $F_1, F'_1; F_2, F'_2; F_3, F'_3$ и F_4, F'_4 приводятся к одной паре R, R' , которая называется их *равнодействующей парой*.

Покажем, что *момент равнодействующей пары равен сумме моментов составляющих пар*.

В самом деле, обозначая момент равнодействующей пары через m , имеем:

$$m = R d = (P_1 + P_2 - P_3 - P_4) d = P_1 d + P_2 d - P_3 d - P_4 d = \\ = m_1 + m_2 + m_3 + m_4.$$

Мы предположили, что $P_1 + P_2 > P_3 + P_4$. Легко убедиться, что полученный результат не изменится и в случае $P_1 + P_2 < P_3 + P_4$.

Если $P_1 + P_2 = P_3 + P_4$, то силы, приложенные в точках A и B , а следовательно, и эквивалентные им пары $F_1, F'_1; F_2, F'_2; F_3, F'_3$ и F_4, F'_4 находятся в равновесии.

В этом случае имеем $R = 0$; следовательно:

$$m = 0 \quad \text{и} \quad m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0.$$

Итак, данные пары взаимно уравновешиваются, если сумма их моментов равна нулю. В этом состоит условие равновесия пар.

Полученные результаты остаются справедливыми, каково бы ни было число данных пар. Если нам даны n пар с моментами m_1, m_2, \dots, m_n , то они складываются в одну равнодействующую пару, момент которой m равен:

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

Конечно, момент каждой составляющей пары должен быть взят в этой сумме со своим знаком, определяемым направлением вращения данной пары. Равновесие пар имеет место в том случае, когда

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = 0.$$

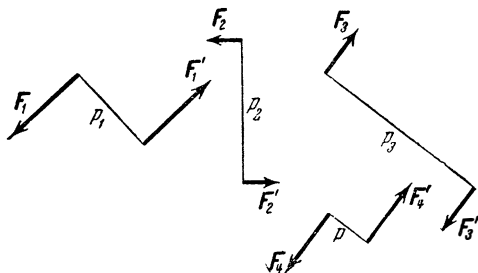
Пример 8. Даны пары $F_1, F'_1; F_2, F'_2; F_3, F'_3$ (черт. 53); $F_1 = F'_1 = 5$ кг, $F_2 = F'_2 = 2$ кг, $F_3 = F'_3 = 3$ кг, плечи $p_1 = 20$ см, $p_2 = 30$ см, $p_3 = 40$ см. Требуется сложить эти пары.

Определяем момент равнодействующей пары:

$$m = 5 \cdot 20 + 2 \cdot 30 - 3 \cdot 40 = 40 \text{ кгсм.}$$

За равнодействующую пару можно взять любую пару F, F' с плечом p , момент которой равен $m = 40$ кгсм. Например:

$$\begin{aligned} F &= 2 \text{ кг}, & p &= 20 \text{ см}, \\ F &= 4 \text{ кг}, & p &= 10 \text{ см}, \\ F &= 10 \text{ кг}, & p &= 4 \text{ см и т. д.} \end{aligned}$$



Черт. 53.

Пример 9. Изменить величину сил пары F_3, F'_3 в предыдущем примере так, чтобы пары $F_1, F'_1; F_2, F'_2; F_3, F'_3$ находились в равновесии.

Имеем условие равновесия:

$$5 \cdot 20 + 2 \cdot 30 - F_3 \cdot 40 = 0,$$

откуда следует:

$$F_3 = 4 \text{ кг.}$$

ГЛАВА IV

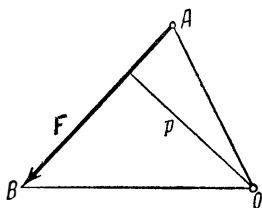
СЛОЖЕНИЕ СИЛ, РАСПОЛОЖЕННЫХ КАК УГОДНО
НА ПЛОСКОСТИ

§ 24. Момент силы относительно точки

Приступая к вопросу о сложении сил, расположенных как угодно на плоскости, остановимся прежде всего на понятии момента силы относительно какой-либо точки.

Даны сила F и точка O (черт. 54). Опустим перпендикуляр из точки O на линию действия силы F . Этот перпендикуляр назовем *плечом* силы F относительно точки O ; длину плеча обозначим буквой p . *Моментом силы F относительно точки O* называется взятое со знаком $+$ или $-$ произведение величины силы F на длину плеча p . Обозначая момент силы F символом $m(F)$, имеем:

$$m(F) = \pm F \cdot p.$$



Черт. 54.

Тот или другой знак в этой формуле определяется по следующему правилу. Если сила F стремится повернуть плоскость чертежа вокруг точки O в сторону, противоположную вращению часовой стрелки, то в выражении момента берем знак $+$; в противном случае берем знак $-$.

Точка O называется *центром* момента.

Произведение $F \cdot p$ равно удвоенной площади треугольника AOB (черт. 54). Следовательно, имеем еще другое выражение момента силы F относительно точки O :

$$m(F) = \pm 2 \Delta AOB.$$

Отметим важный частный случай. Имеем

$$m(F) = 0,$$

если $p = 0$, т. е. момент силы относительно точки равен нулю, если линия действия силы проходит через центр момента.

Заметим еще, что момент силы, как и момент пары, есть величина, имеющая размерность силы, умноженной на длину. Если сила выражена в килограммах, а плечо в метрах, то момент силы выражается в килограммометрах.

§ 25. Приведение силы к данной точке

Дана сила F , приложенная в точке A (черт. 55). Возьмем произвольную точку O и приложим к ней две взаимно уравновешивающиеся силы, из коих одна равна силе F (эта сила отмечена на черт. 55 двумя черточками), другая же (мы обозначим ее через

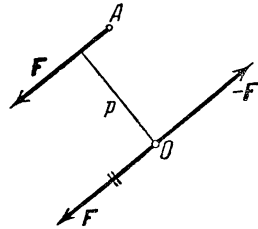
— F) численно равна силе F , но направлена в противоположную сторону.

Данная сила F заменена силой F , приложенной в точке O (и отмеченной на чертеже двумя черточками), и парой $F, -F$.

Следовательно, указанным способом точку приложения данной силы можно перенести в любую точку, присоединяя к ней некоторую пару. Замену данной силы F , приложенной в точке A , силой F , приложенной в точке O (и отмеченной двумя черточками), и парой $F, -F$, будем называть *приведением данной силы F к точке O* ; пару $F, -F$, получаемую при приведении силы F к точке O , будем называть *присоединенной парой*.

Найдем момент присоединенной пары $F, -F$. Опуская перпендикуляр из точки O на линию действия той силы F , которая приложена в точке A , получим плечо пары p ; момент пары равен

$$m = F \cdot p$$



Черт. 55.

(в выражении момента берем знак $+$, соответственно черт. 55). Но произведение $F \cdot p$ равно также моменту данной силы F (приложенной в точке A) относительно точки O . Следовательно, обозначая этот момент знаком $m(F)$, получаем:

$$m = m(F),$$

т. е. *момент присоединенной пары, получаемой при приведении силы F к точке O , равен моменту данной силы F относительно точки O .*

§ 26. Приведение системы сил, расположенных как угодно на плоскости, к силе и паре. Главный вектор и главный момент

Обращаемся теперь к задаче сложения сил, расположенных как угодно на плоскости.

Даны силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные в точках A_1, A_2, \dots, A_n (черт. 56). Требуется сложить эти силы.

Следуя примеру Пуансо¹⁾, воспользуемся способом приведения всех сил к одной точке. Возьмем произвольную точку O , которую назовем центром приведения, и приведем все данные силы F_1, F_2, \dots, F_n к точке O , как было объяснено в предыдущем параграфе.

В результате этого приведения получим силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные в точке O и отмеченные на черт. 56 двумя черточками, и присоединенные пары $F_1, -F_1; F_2, -F_2; \dots; F_n, -F_n$.

¹⁾ L. Poinso, Éléments de statique.

Моменты этих пар m_1, m_2, \dots, m_n , согласно замеченному выше, равны моментам данных сил F_1, F_2, \dots, F_n относительно точки O , т. е.

$$\begin{aligned} m_1 &= m(F_1), \\ m_2 &= m(F_2), \\ &\dots \dots \dots \\ m_n &= m(F_n), \end{aligned}$$

где $m(F_1), m(F_2), \dots, m(F_n)$ суть моменты данных сил относительно точки O .

Силы F_1, F_2, \dots, F_n , отмеченные двумя черточками, приложены в одной точке O . Складывая эти силы, получаем их равнодействующую R , приложенную в той же точке и равную сумме сил F_1, F_2, \dots, F_n .

Складывая пары $F_1, -F_1; F_2, -F_2; \dots, F_n, -F_n$, получаем равнодействующую пару, момент которой m равен сумме моментов составляющих пар. Следовательно,

$$\begin{aligned} m &= m_1 + m_2 + \dots + m_n = \\ &= m(F_1) + m(F_2) + \dots + m(F_n), \end{aligned}$$

т. е. момент равнодействующей пары равен сумме моментов данных сил относительно точки O .

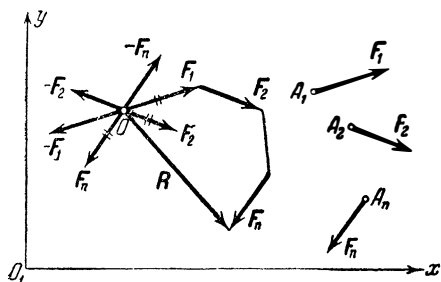
Заметим, что сумма R сил F_1, F_2, \dots, F_n , расположенных как угодно на плоскости, называется иначе *главным вектором* этих сил; сумма же моментов m этих сил относительно точки O называется их *главным моментом* относительно точки O .

Вводя эти термины, мы можем формулировать полученный результат так:

Силы, расположенные как угодно на плоскости, всегда могут быть приведены к силе, равной их главному вектору и приложенной в произвольной точке O , и к паре, момент которой равен главному моменту данных сил относительно точки O .

Для вычисления главного вектора R данных сил можно воспользоваться методом проекций. Возьмем две взаимно перпендикулярные оси O_1x и O_1y (черт. 56) и вычислим проекции главного вектора R на эти оси. Обозначая эти проекции буквами X и Y , а проекции данных сил F_1, F_2, \dots, F_n на те же оси буквами $X_1, Y_1; X_2, Y_2; \dots; X_n, Y_n$ и имея в виду, что главный вектор R равен сумме сил F_1, F_2, \dots, F_n , получаем на основании теоремы о проекции суммы векторов:

$$X = \sum X_i, \quad Y = \sum Y_i.$$



Черт. 56.

Вычислив проекции главного вектора X и Y , находим величину его R по формуле:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Направление главного вектора определяется углами (R, x) и (R, y) , образованными главным вектором с осями x и y . Имеем:

$$X = R \cos (R, x), \quad Y = R \cos (R, y),$$

откуда получаем:

$$\cos (R, x) = \frac{X}{R}, \quad \cos (R, y) = \frac{Y}{R}.$$

Этими формулами определяется направление главного вектора.

§ 27. Случай, когда силы находятся в равновесии. Уравнения равновесия

Предположим, что главный вектор R данных сил F_1, F_2, \dots, F_n и их главный момент m относительно центра приведения равны нулю, т. е.

$$R = 0, \quad m = 0.$$

Так как $R = 0$, то силы F_1, F_2, \dots, F_n , отмеченные на черт. 56 двумя черточками, взаимно уравниваются. Так как $m = 0$, то и присоединенные пары также взаимно уравниваются. Следовательно, в рассматриваемом случае данные силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные в точках A_1, A_2, \dots, A_n , находятся в *равновесии*.

В § 26 мы имели формулу:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Следовательно, для того чтобы было $R = 0$, необходимо и достаточно, чтобы было

$$X = 0, \quad Y = 0.$$

Вспомянув зависимости:

$$X = \sum X_i, \quad Y = \sum Y_i, \quad m = \sum m(F_i),$$

мы заключаем, что силы F_1, F_2, \dots, F_n , расположенные как угодно на плоскости, находятся в равновесии, если они удовлетворяют трем уравнениям:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + \dots + X_n &= 0, & Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n &= 0, \\ m(F_1) + m(F_2) + \dots + m(F_n) &= 0. \end{aligned}$$

Таковы уравнения равновесия сил, расположенных как угодно на плоскости.

§ 28. Случай, когда силы приводятся к паре

Положим, что главный вектор R данных сил равен нулю, но их главный момент m относительно центра приведения не равен нулю, т. е.

$$R=0, \quad m \neq 0.$$

В этом случае силы F_1, F_2, \dots, F_n , отмеченные на черт. 56 двумя черточками, взаимно уравниваются, но присоединенные пары не находятся в равновесии. Следовательно, данные силы приводятся к *паре*, момент которой равен

$$m = \sum m(F_i).$$

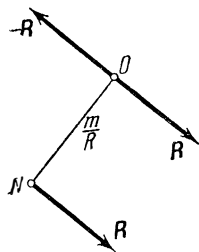
§ 29. Случай, когда силы приводятся к одной равнодействующей. Теорема о моменте равнодействующей

Предположим теперь, что главный вектор R данных сил не равен нулю, т. е.

$$R \neq 0.$$

Покажем, что в этом случае данные силы приводятся к одной *равнодействующей, равной их главному вектору R*.

В самом деле, если $m=0$, то пары $F_1, -F_1; F_2, -F_2; \dots; F_n, -F_n$ взаимно уравниваются, и данные силы приводятся к равнодействующей R , приложенной в центре приведения O .



Черт. 57.

Положим теперь, что $m \neq 0$; пусть для определенности $m > 0$. Выберем силы, составляющие равнодействующую пару (т. е. пару, полученную от сложения присоединенных пар), численно равными R ; тогда плечо этой пары придется взять равным $\frac{m}{R}$. Расположим равнодействующую пару так, чтобы одна из сил пары была приложена в точке O и была направлена противоположно главному вектору R (на черт. 57 эта сила обозначена через $-R$); другая сила пары равна R и приложена в точке N , лежащей на перпендикуляре, восставленном в точке O к линии действия силы R на расстоянии $\frac{m}{R}$ от точки O ; перпендикуляр должен быть восставлен в такую сторону от точки O , чтобы момент равнодействующей пары имел надлежащий знак (черт. 57 соответствует случаю $m > 0$). Две силы R и $-R$, приложенные в точке O , взаимно уравниваются. Следовательно, данные силы приводятся к одной равнодействующей R , приложенной в точке N .

Покажем теперь, что если данные силы приводятся к одной равнодействующей, то момент равнодействующей относительно любой точки равен сумме моментов составляющих относительно той же точки.

В самом деле, возьмем момент равнодействующей R , приложенной в точке N , относительно центра приведения O (черт. 57). Обозначая этот момент $m(R)$, будем иметь:

$$m(R) = R \cdot \frac{m}{R} = m = m(F_1) + m(F_2) + \dots + m(F_n),$$

т. е. момент равнодействующей относительно центра приведения равен сумме моментов составляющих относительно той же точки.

Но центр приведения O есть произвольно взятая точка. Следовательно, момент равнодействующей относительно любой точки равен сумме моментов составляющих относительно той же точки.

§ 30. Выражение момента силы через проекции силы на координатные оси

Воспользуемся только что доказанной теоремой о моменте равнодействующей для вывода выражения момента силы через проекции силы на координатные оси.

Дана сила F , приложенная в точке A (черт. 58). Требуется вычислить момент этой силы относительно точки O .

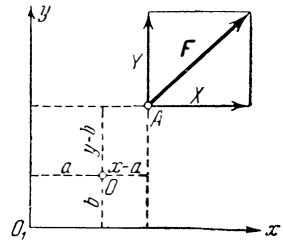
Возьмем взаимно перпендикулярные координатные оси O_1x и O_1y и обозначим координаты точки A относительно этих осей через x и y , а координаты центра момента O относительно тех же осей через a и b .

Разложим силу F на составляющие по осям x и y ; величины этих составляющих равны проекциям X и Y силы F на оси x и y . Как видно из чертежа, моменты составляющих силы F относительно точки O равны $-(y-b)X$ и $(x-a)Y$. Рассматривая силу F как равнодействующую ее двух составляющих, получаем на основании теоремы о моменте равнодействующей

$$m(F) = (x-a)Y - (y-b)X.$$

Если центр момента O совпадает с началом координат, то $a=0$ и $b=0$, и момент силы F относительно начала координат выражается формулой

$$m(F) = xY - yX.$$



Черт. 58.

§ 31. Задачи, статически определенные и статически неопределенные

В § 27 мы вывели следующие три уравнения равновесия сил, расположенных как угодно на плоскости:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + \dots + X_n &= 0, & Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n &= 0, \\ m(F_1) + m(F_2) + \dots + m(F_n) &= 0. \end{aligned}$$

В следующих параграфах мы покажем на примерах применение этих уравнений к решению задач статики, в которых мы имеем дело с телами, находящимися в равновесии под действием сил, лежащих в одной плоскости. Пока же подчеркнем то обстоятельство, что равновесие тела, находящегося под действием сил, расположенных в одной плоскости, оказывается обеспеченным, если приложенные к нему силы удовлетворяют трем уравнениям равновесия: двум уравнениям проекций и одному уравнению моментов.

Напомним, что в § 15 мы назвали *статически определенными* такие задачи статики, которые могут быть решены при помощи уравнений статики твердого тела, — в отличие от задач *статически неопределенных*, для решения которых уравнения, доставляемые статикой твердого тела, оказываются недостаточными (и при решении которых необходимо принимать во внимание деформации, испытываемые телами под действием приложенных к ним сил). При помощи нескольких уравнений мы можем найти столько неизвестных (искомых) величин, сколько имеется уравнений. Отсюда следует, что, сосчитав число неизвестных в данной задаче и сравнив это число с числом уравнений, доставляемых статикой твердого тела, мы всегда можем определить, имеем ли мы дело с задачей, статически определенной или неопределенной. Задача будет статически определенной, если число неизвестных равно числу уравнений.

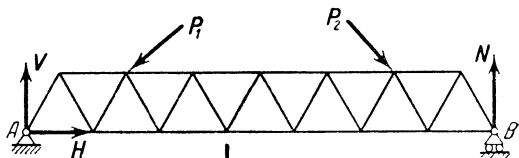
Если в рассматриваемой нами задаче мы имеем дело с телом, находящимся в равновесии под действием сил, лежащих в одной плоскости, то, как мы сейчас видели, для решения нашей задачи статика твердого тела доставляет нам три уравнения равновесия. Следовательно, такая задача будет статически определенной, если число неизвестных в ней равно трем.

Если же рассматривается равновесие системы, состоящей из двух тел (на которые действуют силы, лежащие в одной плоскости), то мы можем написать по три уравнения равновесия для каждого из этих тел. Отсюда следует, что задача окажется статически определенной, если число неизвестных в ней равно шести. Точно так же задача о равновесии системы, состоящей из трех тел (при условии действия сил в одной плоскости), будет статически определенной, если число неизвестных равно девяти и т. д.

Поясним сказанное несколькими примерами.

Представим себе мостовую ферму, которая имеет неподвижную опору A и подвижную опору B и находится под действием сил (нагрузок) P_1 , P_2 и P_3 (черт. 59). Такая ферма заменяет простую балку и называется балочной фермой. Требуется определить опорные реакции, вызываемые силами P_1 , P_2 и P_3 .

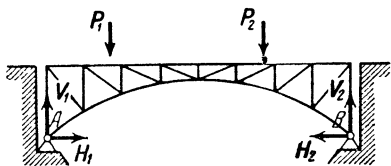
Нашу ферму можно рассматривать как твердое тело, находящееся в равновесии под действием приложенных к нему сил P_1 , P_2 , P_3 и опорных реакций в точках A и B . Так как подвижная опора может оказывать только вертикальное давление на опорную плоскость, то и опорная реакция N в точке B может быть только вертикальной. Неподвижная же опора может воспринимать давление как в вертикальном, так и в горизонтальном направлениях. Отсюда следует, что опорная реакция в точке A складывается из вертикальной составляющей V и горизонтальной составляющей H . Таким образом мы имеем три неизвестные величины сил: N , V и H . Мы заключаем, что поставленная задача является статически определенной.



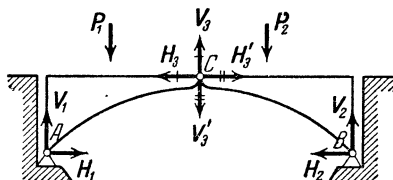
Черт. 59.

Положим теперь, что требуется определить опорные реакции для арочной фермы (черт. 60). Даны нагрузки P_1 и P_2 . Пять арки A и B шарнирно прикреплены к неподвижным опорам; такая арка называется *двухшарнирной*.

Так как обе опоры — неподвижные, то каждая опора дает по две опорные реакции — вертикальные реакции V_1 и V_2 и горизон-



Черт. 60.



Черт. 61.

тальные реакции H_1 и H_2 . Так как мы имеем четыре неизвестные реакции, то задача определения этих реакций оказывается статически неопределенной; двухшарнирная арка является в отношении определения опорных реакций системой *статически неопределимой*.

Однако дело меняется, если арка будет сконструирована из двух полуарок, соединенных в ключе арки посредством шарнира C (черт. 61); получается конструкция, называемая *трехшарнирной* аркой. Каждую полуарку мы можем рассматривать как твердое тело

и для каждой полуарки можем написать по три уравнения равновесия. Сосчитаем число неизвестных сил. На левую полуарку (кроме нагрузки P_1) действуют пятовые опорные реакции V_1 и H_1 ; затем в ключевом шарнире C приложена сила, испытываемая левой полуаркой со стороны правой. Разложим эту силу на вертикальную и горизонтальную составляющие V_3 и H_3 ; на черт. 61 эти силы отмечены одной черточкой. Так как действие равно противодействию, на правую полуарку со стороны левой действуют в ключевом шарнире C силы V'_3 и H'_3 , равные и противоположные только что упомянутым силам V_3 и H_3 (силы V'_3 и H'_3 , приложенные к правой полуарке, отмечены на черт. 61 двумя черточками); кроме того, на правую полуарку действуют нагрузка P_2 и пятовые опорные реакции V_2 и H_2 . Таким образом в числе сил, приложенных к той и другой полуарке, мы имеем шесть неизвестных величин сил: $V_1, H_1, V_2, H_2, V_3, H_3$. Так как число неизвестных равно числу уравнений, то задача определения этих неизвестных оказывается статически определенной; в отношении определения опорных реакций трехшарнирная арка является системой *статически определимой*.

§ 32. Примеры на определение опорных реакций

Переходя к решению задач при помощи уравнений равновесия

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0, \quad Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = 0, \\ m(F_1) + m(F_2) + \dots + m(F_n) = 0, \end{aligned}$$

заметим прежде всего, что мы имеем полную свободу в выборе осей x и y , на которые мы проектируем силы, а также центра, относительно которого берем их моменты.

Этим произволом в выборе осей проекций и центра моментов следует пользоваться в целях возможного упрощения тех вычислений, которые связаны с решением уравнений равновесия. Оси проекций следует, вообще говоря, направлять перпендикулярно к направлению одной из неизвестных сил, которая в таком случае исключается из соответствующего уравнения равновесия. Что же касается центра моментов, то его следует, вообще говоря, выбирать в точке пересечения линий действия двух неизвестных сил; при таком выборе обе эти неизвестные силы оказываются исключенными из уравнения моментов; в этом уравнении, следовательно, остается лишь одна неизвестная величина.

Заметим еще, что нет необходимости каждую задачу решать при помощи двух уравнений проекций и одного уравнения моментов. В некоторых случаях может оказаться удобным проектировать силы лишь на одну ось, но зато составить два уравнения моментов относительно двух различных точек, или же, оставляя уравнения проекций совсем в стороне, написать три уравнения моментов отно-

сительно трех различных точек. Этим замечанием мы будем иметь случай воспользоваться в следующем параграфе.

Может показаться, что, проектируя силы на всевозможные оси и составляя моменты относительно различных точек, мы можем получить для одного и того же тела сколько угодно уравнений равновесия и при помощи этих уравнений определить сколько угодно неизвестных величин. Конечно, такое заключение было бы неправильно. Мы можем написать для данного тела сколько угодно уравнений равновесия, но уже четвертое уравнение, а также все последующие будут следствиями первых трех уравнений; при помощи всех этих уравнений мы сможем определить только три неизвестные величины.

В этом параграфе мы остановимся на некоторых примерах определения опорных реакций при помощи уравнений равновесия.

Пример 10. Определить опорные реакции крана (черт. 62) по следующим данным: вес крана $P = 2$ т, расстояние его центра тяжести от оси вращения $a = 1$ м, вылет $c = 4$ м, длина вертикальной стойки $h = 5$ м, вес груза, подвешенного к крану, $Q = 3$ т.

Реакция подшипника A направлена горизонтально; обозначим ее буквой N . Реакция подшипника B складывается из вертикальной составляющей V и горизонтальной составляющей H . Требуется определить силы N , V и H .

Так как кран находится в равновесии под действием сил P , Q , N , V и H , то эти пять сил должны удовлетворять трем уравнениям равновесия.

Выберем оси x и y так, как показано на черт. 62. Проектируя все силы на эти оси, получим первые два уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} H - N &= 0, \\ V - P - Q &= 0. \end{aligned}$$

Затем составим уравнение моментов, взяв центр моментов в точке B ; получим:

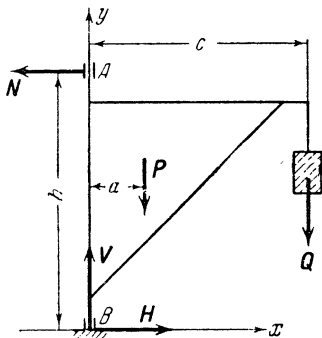
$$Nh - Pa - Qc = 0.$$

Составленные три уравнения решаем относительно неизвестных N , V и H . Подставляя заданные значения известных величин, найдем:

$$\begin{aligned} N &= \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 4}{5} = 2,8 \text{ м}, \\ V &= 2 + 3 = 5 \text{ м}, H = 2,8 \text{ м}. \end{aligned}$$

Пример 11. Балочная ферма (черт. 63) опирается на неподвижную опору A и подвижную опору B ; длина панели a , высота фермы h ; к узлам C и D приложены вертикальная сила P_1 и горизонтальная сила P_2 . Найти опорные реакции.

Реакция N подвижной опоры B направлена вертикально; реакция неподвижной опоры A складывается из вертикальной составляющей V и горизонтальной составляющей H . Так как ферма находится в равновесии под действием



Черт. 62.

сил P_1, P_2, N, V и H , то эти пять сил должны удовлетворять уравнениям равновесия.

Направив оси x и y , как показано на черт. 63, и взяв центр моментов в точке A , получим уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} H + P_2 &= 0, & V + N - P_1 &= 0, \\ 6Na - 2P_1a - P_2h &= 0, \end{aligned}$$

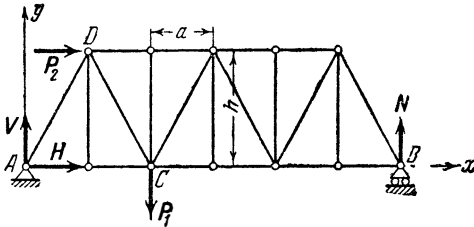
откуда находим:

$$N = \frac{1}{3} P_1 + \frac{h}{6a} P_2,$$

$$V = \frac{2}{3} P_1 - \frac{h}{6a} P_2,$$

$$H = -P_2.$$

Знак минус у реакции H указывает, что эта сила направлена не так, как предположено на черт. 63, а в противоположную сторону.

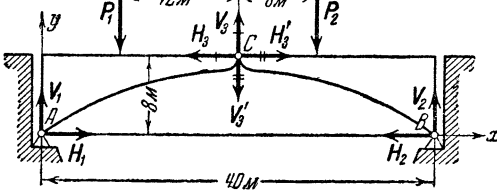


Черт. 63.

Пример 12. Определить опорные реакции в пятах A и B трехшарнирной арки и реакции в ключевом шарнире C , вызываемые вертикальными нагрузками $P_1 = 20 \text{ т}$ и $P_2 = 40 \text{ т}$, приложенными соответственно на расстояниях 12 м и 8 м от середины арки (черт. 64). Пролет арки равен 40 м ; высота ключевого шарнира над уровнем пят равна 8 м .

Обозначим опорные реакции в пятовых шарнирах A и B через V_1, H_1 и V_2, H_2 ; реакции в ключевом шарнире C , приложенные к левой полуарке, обозначим через V_3 и H_3 ; реакции в той же точке, приложенные к правой полуарке, обозначим через V'_3 и H'_3 (эти реакции соответственно равны по величине и противоположны по направлению реакциям V_3 и H_3). На черт. 64 одной черточкой отмечены силы V_3 и H_3 , приложенные к левой полуарке, двумя черточками — силы V'_3 и H'_3 , которые действуют на правую полуарку.

Составим три уравнения равновесия для сил, приложенных ко всей арке (к обеим полуаркам). Проектируя на горизонтальную и вертикальную оси x и y и составляя моменты относительно пятового шарнира A , будем иметь:



Черт. 64.

$$\begin{aligned} H_1 - H_2 &= 0, \\ V_1 + V_2 - 20 - 40 &= 0, \\ 40V_2 - 20 \cdot 8 - 40 \cdot 28 &= 0. \end{aligned}$$

Из последних двух уравнений находим:

$$V_1 = 28 \text{ т}, V_2 = 32 \text{ т}.$$

Составим теперь три уравнения равновесия для одной левой полуарки. Проектируя на те же оси x и y и составляя моменты относительно точки C , имеем:

$$\begin{aligned} H_1 - H_3 &= 0, \\ V_1 + V_3 - 20 &= 0, \\ 8H_1 - 20V_1 + 20 \cdot 12 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$H_1 = H_2 = H_3 = 40 \text{ т}, V_3 = -8 \text{ т}.$$

Знак минус у реакции V_3 указывает, что направления сил V_3 и V'_3 противоположны тем направлениям, которые приняты на черт. 64: сила V_3 , приложенная к левой полуарке, направлена вниз, а сила V'_3 , действующая на правую полуарку, направлена вверх.

§ 33. Другие примеры на применение уравнений равновесия

Рассмотрим еще несколько примеров применения уравнений равновесия.

Пример 13. Горизонтальная балка AB на конце A прикреплена шарнирно к вертикальной стене, а в точке B поддерживается тягой BC , образующей с горизонтом угол $\alpha = 32^\circ$ (черт. 65). Длина балки AB равна $l = 4$ м, ее вес P равен 200 кг и приложен в середине балки; кроме того, балка несет вертикальную нагрузку $Q = 500$ кг, приложенную на расстоянии $c = 3$ м от точки A . Определить натяжение тяги BC и реакцию шарнира A .

Рассматриваем силы, приложенные к балке AB . Эта балка находится в равновесии под действием следующих сил: собственный вес балки P , вес нагрузки Q , реакция тяги T (равная по величине натяжению тяги) и реакция шарнира A , которую мы разложим на вертикальную и горизонтальную составляющие V и H . Так как балка находится в равновесии, то эти силы должны удовлетворить трем уравнениям равновесия.

Для определения реакции V составим уравнение моментов относительно точки B :

$$-4V + 2 \cdot 200 + 500 \cdot 1 = 0,$$

откуда получаем $V = 225$ кг.

Для нахождения реакции H напишем уравнение моментов относительно точки C ; замечая, что

$$AC = AB \operatorname{tg} \alpha = 4 \operatorname{tg} 32^\circ = 2,5 \text{ м},$$

имеем:

$$2,5H - 2 \cdot 200 - 3 \cdot 500 = 0,$$

откуда находим $H = 760$ кг.

Наконец, для определения реакции T проектируем все наши силы на горизонтальную ось; получаем:

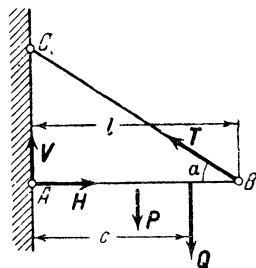
$$H - T \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$T = \frac{H}{\cos \alpha} = \frac{760}{\cos 32^\circ} = 896 \text{ кг}.$$

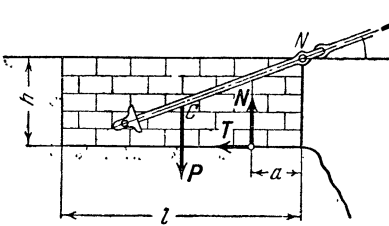
Пример 14. Конец цепи, поддерживающей цепной мост, заложен в каменной кладке, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда (черт. 66); цепь расположена по диагонали прямоугольного продольного сечения кладки и образует угол α с горизонтом. Чтобы удержать конец цепи, кладка должна быть достаточно тяжела. Даны натяжение цепи F и коэффициент трения f между кладкой и грунтом, на котором она лежит. Определить необходимый вес кладки.

На кладку действуют следующие силы: ее вес P , реакция цепи F , равная по величине натяжению цепи, реакция N грунта, на котором лежит



Черт. 65.

кладки, и сила трения T со стороны грунта. Точка приложения реакции N нам первоначально неизвестна; обозначим ее расстояние от правого края кладки через a . Если кладка в состоянии удержать конец цепи, т. е. если она под действием приложенных к ней сил остается в равновесии, то эти силы должны удовлетворять уравнениям равновесия. Проектируя силы на горизонтальную и вертикальную оси и составляя моменты относительно центра тяжести C кладки, получаем:



Черт. 66.

$$\begin{aligned} F \cos \alpha - T &= 0, \\ F \sin \alpha - P + N &= 0, \\ N \left(\frac{l}{2} - a \right) - T \cdot \frac{h}{2} &= 0, \end{aligned}$$

где l — длина кладки, h — ее высота.

Решая эти уравнения относительно неизвестных величин N , T и a , будем иметь:

$$\begin{aligned} N &= P - F \sin \alpha, \quad T = F \cos \alpha, \\ a &= \frac{l}{2} - \frac{hF \cos \alpha}{2(P - F \sin \alpha)}. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что эти величины N , T и a должны удовлетворять следующим условиям:

- 1) $N \geq 0$, ибо реакция грунта не может быть направлена вниз;
- 2) $T \leq fN$ по известному закону трения (§ 9);
- 3) $a \geq 0$, ибо реакция грунта N не может быть приложена справа от правого края кладки.

Отсюда получаем условия:

$$\begin{aligned} P - F \sin \alpha &\geq 0, \\ F \cos \alpha &\leq f(P - F \sin \alpha), \\ l(P - F \sin \alpha) - hF \cos \alpha &\geq 0. \end{aligned}$$

Решая эти неравенства относительно P , находим:

$$\begin{aligned} P &\geq F \sin \alpha, \\ P &\geq F \left(\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{f} \right), \\ P &\geq F \left(\sin \alpha + \frac{h}{l} \cos \alpha \right). \end{aligned}$$

Имея в виду, что $h = l \operatorname{tg} \alpha$, можем написать вместо последнего неравенства:

$$P \geq 2F \sin \alpha.$$

Таковы условия, которым должен удовлетворять вес кладки P . Если $\alpha < 45^\circ$ и $f < 1$, то $\cos \alpha > \sin \alpha$ и тем более $\frac{\cos \alpha}{f} > \sin \alpha$. В таком случае мы удовлетворим всем условиям для P , если положим

$$P \geq F \left(\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{f} \right).$$

Этим неравенством и определится необходимый вес кладки.

Положим, что $F = 20 \text{ т}$, $\alpha = 20^\circ$, $f = 0,6$. Наименьший допустимый вес кладки будет

$$P = 20 \left(0,342 + \frac{0,940}{0,6} \right) = 38,2 \text{ т}.$$

§ 34. Определение линии действия равнодействующей

В том случае, когда силы, расположенные на плоскости, приводятся к одной равнодействующей (т. е. когда их главный вектор не равен нулю) величина и направление равнодействующей R могут быть вычислены по тем формулам, которые приведены в конце § 26. Линия же действия равнодействующей R может быть найдена при помощи теоремы о моменте равнодействующей следующим образом.

Положим, что даны силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные в точках A_1, A_2, \dots, A_n (черт. 67). Предполагаем, что главный вектор R данных сил не равен нулю. Следовательно, данные силы приводятся к одной равнодействующей, равной R и приложенной в некоторой точке N .

Заметим, что за точку приложения N можно взять любую точку, лежащую на линии действия равнодействующей R . Постараемся составить уравнение этой прямой линии относительно некоторых координатных осей Ox и Oy (черт. 67).

Для этой цели возьмем моменты данных сил F_1, F_2, \dots, F_n и момент равнодействующей R относительно начала координат O и напишем, что момент равнодействующей равен сумме моментов составляющих.

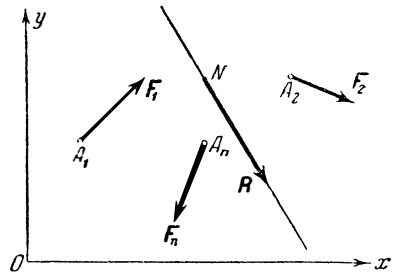
Обозначим координаты точки N , лежащей на линии действия равнодействующей, буквами x и y , а проекции равнодействующей R на оси координат — буквами X и Y . На основании формулы, введенной в § 30, момент силы R , приложенной в точке N , относительно начала координат будет равен $xY - yX$.

Обозначая сокращенно сумму моментов данных сил F_1, F_2, \dots, F_n относительно начала координат через $\sum m(F_i)$, будем иметь:

$$xY - yX = \sum m(F_i).$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты x и y всякой точки, лежащей на линии действия равнодействующей R . Следовательно, это уравнение и есть *уравнение линии действия равнодействующей*.

Чтобы получить координаты (x, y) какой-нибудь точки приложения равнодействующей, можем задать одну координату произвольно



Черт. 67.

и определить другую из уравнения линии действия равнодействующей.

Пример 15. На мостовую ферму (черт. 68) действуют вертикальные силы $P_1 = 20 \text{ т}$ и $P_2 = 40 \text{ т}$ соответственно на расстоянии 10 м и 40 м от левого конца фермы и горизонтальная сила $P_3 = 30 \text{ т}$ в уровне верхнего пояса фермы; высота фермы равна 6 м. Определить равнодействующую сил P_1 , P_2 и P_3 .

Направив оси x и y , как показано на черт. 68, и проектируя данные силы на эти оси, находим проекции X и Y равнодействующей:

$$X = 30 \text{ т}, Y = -20 - 40 = -60 \text{ т}.$$

Отсюда находим величину R равнодействующей:

$$R = \sqrt{30^2 + 60^2} = 67,08 \text{ т}.$$

Теперь найдем линию действия равнодействующей. Составляя моменты относительно точки A (т. е. относительно начала координатных осей x и y) и замечая, что сумма моментов данных сил относительно этой точки равна

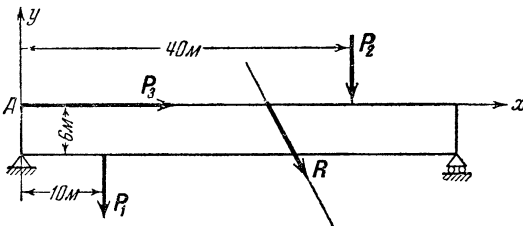
$$-10 \cdot 20 - 40 \cdot 40 = -1800 \text{ т.м},$$

получаем уравнение:

$$-60x - 30y = -1800,$$

или

$$2x + y = 60.$$



Черт. 68.

Это и есть уравнение линии действия равнодействующей, отнесенное к осям x и y . Найдем точки пересечения этой линии действия с верхним и нижним поясами фермы. Полагая в только что полученном уравнении $y = 0$, получаем $x = 30 \text{ м}$; полагая же $y = -6 \text{ м}$, находим $x = 33 \text{ м}$. Таким образом, точки пересечения линии действия равнодействующей R с верхним и нижним поясами фермы находятся соответственно на расстоянии 30 м и 33 м от левого конца фермы. Соединяя эти точки прямой линией, находим линию действия равнодействующей; любая точка этой прямой может быть принята за точку приложения равнодействующей.

§ 35. Сложение параллельных сил на плоскости.

Уравнения равновесия параллельных сил

Изложенная в этой главе теория сложения сил, расположенных как угодно на плоскости, остается применимой и в том случае, когда требуется сложить какое угодно число параллельных сил на плоскости. Следует только иметь в виду, что в случае параллельных сил нахождение векторной суммы (или главного вектора) R данных сил приводится к сложению алгебраических величин этих сил, т. е. модулей их, взятых с соответствующими знаками.

В самом деле, положим, что даны параллельные силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные в точках A_1, A_2, \dots, A_n , причем силы F_1, F_2, \dots, F_k направлены в одну сторону, а силы F_{k+1}, \dots, F_n —

в сторону противоположную (черт. 69). Желая найти главный вектор R этой системы сил, строим многоугольник сил и проводим замыкающую его сторону. На черт. 69 предположено, что

$$F_1 + F_2 + \dots + F_k > F_{k+1} + \dots + F_n.$$

В этом случае, как видно из чертежа, имеем:

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_k - F_{k+1} - \dots - F_n,$$

причем главный вектор R направлен параллельно данным силам в ту же сторону, в которую направлены силы F_1, F_2, \dots, F_k .

Конечно, если бы было:

$$F_{k+1} + \dots + F_n > F_1 + F_2 + \dots + F_k,$$

то мы имели бы:

$$R = F_{k+1} + \dots + F_n - F_1 - F_2 - \dots - F_k,$$

и главный вектор R был бы направлен параллельно данным силам в ту сторону, в которую направлены силы F_{k+1}, \dots, F_n .

Вспоминая результаты, изложенные в §§ 27, 28 и 29, мы заключаем, что если главный вектор R данных сил, а также их главный момент m относительно произвольной точки O равны нулю, то силы находятся в *равновесии*; если $R = 0$, $m \neq 0$, то силы приводятся к *паре*, момент которой равен главному моменту m ; если $R \neq 0$, то силы приводятся к одной *равнодействующей*, равной главному вектору R .

Что касается уравнений равновесия, то, направив ось y параллельно данным силам, а ось x — перпендикулярно к этим силам и спроектировав все силы на ось x , мы получаем тождество:

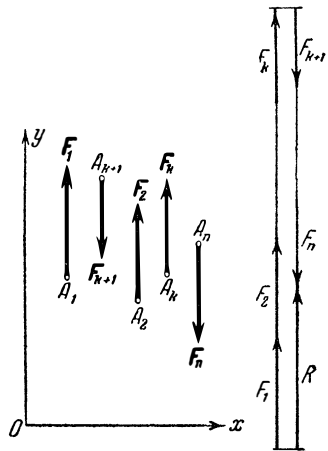
$$0 = 0.$$

Проектируя же на ось y и составляя моменты относительно произвольной точки O , получаем два *уравнения равновесия*:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_k - F_{k+1} + \dots - F_n = 0,$$

$$m(F_1) + m(F_2) + \dots + m(F_n) = 0.$$

Итак, в случае параллельных сил мы имеем лишь два уравнения равновесия. Отсюда мы заключаем, что задача, в которой мы имеем дело с параллельными силами, находящимися в равновесии, будет статически определенной, если число неизвестных в ней равно двум.



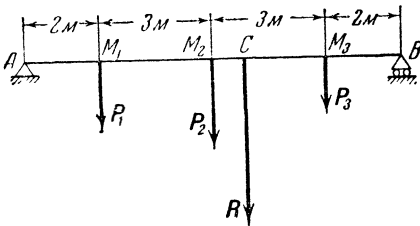
Черт. 69.

Пример 16. К балке AB в точках M_1, M_2, M_3 приложены вертикальные силы $P_1 = 1 \text{ т}$, $P_2 = 2 \text{ т}$, $P_3 = 3 \text{ т}$; $AM_1 = 2 \text{ м}$, $M_1M_2 = 3 \text{ м}$, $M_2M_3 = 3 \text{ м}$, $M_3B = 2 \text{ м}$ (черт. 70). Требуется сложить эти силы.

Находим главный вектор R сил P_1, P_2, P_3 :

$$R = 1 + 2 + 3 = 6 \text{ т.}$$

Так как $R \neq 0$, то заключаем, что данные силы приводятся к одной равнодействующей, равной главному вектору R . Чтобы найти точку приложения C этой равнодействующей, воспользуемся теоремой о моменте равнодействующей. Положим $AC = x$ и напишем, что момент равнодействующей R относительно точки A равен сумме моментов составляющих P_1, P_2, P_3 относительно той же точки. Получим уравнение:



Черт. 70.

$$6x = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 = 36,$$

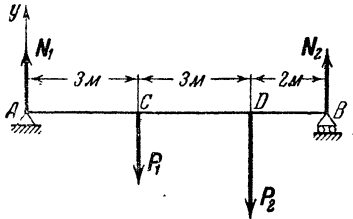
откуда

$$x = 6 \text{ м.}$$

Итак, точка приложения равнодействующей находится на расстоянии 6 м от левого конца балки.

Пример 17. К балке AB , лежащей на неподвижной опоре A и подвижной опоре B , приложены в точках C и D вертикальные силы $P_1 = 2 \text{ т}$, $P_2 = 3 \text{ т}$; $AC = 3 \text{ м}$, $CD = 3 \text{ м}$, $DB = 2 \text{ м}$ (черт. 71). Найти опорные реакции.

Обозначим опорные реакции через N_1 и N_2 . Так как балка находится в равновесии под действием параллельных сил P_1, P_2, N_1, N_2 , то эти четыре силы должны удовлетворять двум уравнениям равновесия параллельных сил. Проектируя все силы на вертикальную ось y и составляя моменты относительно точки A , получаем уравнения равновесия:



Черт. 71.

$$N_1 + N_2 - 2 - 3 = 0,$$

$$8N_2 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot 6 = 0,$$

откуда

$$N_2 = 3 \text{ т}, N_1 = 2 \text{ т.}$$

Заметим, что если балка лежит не на двух, а на трех опорах, то вопрос об определении опорных реакций не может быть решен при помощи уравнений равновесия балки (ибо двух уравнений равновесия недостаточно для определения трех неизвестных реакций). Следовательно, балка, перекрывающая несколько пролетов (многопролетная или «неразрывная» балка), представляет систему, статически неопределимую.

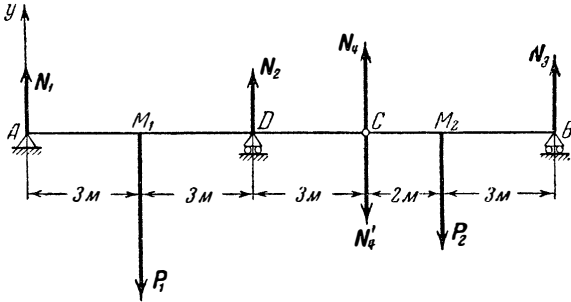
Пример 18. Составная балка ACB , состоящая из двух балок AC и BC , соединенных шарнирно в точке C , лежит на трех опорах A, D и B (черт. 72). В точках M_1 и M_2 приложены вертикальные силы $P_1 = 10 \text{ т}$ и $P_2 = 5 \text{ т}$. Размеры указаны на чертеже. Найти опорные реакции.

Составная балка ACB представляет систему статически определимую. В самом деле, мы можем написать по два уравнения равновесия для каждой из балок AC и BC ; в эти четыре уравнения равновесия войдут четыре неизвестные реакции: три опорные реакции и реакция шарнира C .

Обозначим реакции опор A, D и B через N_1, N_2, N_3 , реакции шарнира C — через N_4 и N'_4 . Заметим, что в точке C следует различать две силы N_4 и N'_4 , из которых одна приложена к концу балки AC , а другая —

к концу балки CB ; по принципу «действие равно противодействию» эти две силы равны по величине и имеют противоположные направления.

Так как требуется найти лишь опорные реакции N_1, N_2, N_3 , то достаточно составить три уравнения равновесия. Спроектируем на вертикальную



Черт. 72.

ось y все силы, приложенные ко всей составной балке ACB , и составим уравнения моментов для каждой из балок AC и CB , взяв центр моментов в точке C . Получим:

$$\begin{aligned} N_1 + N_3 + N_3 - 10 - 5 &= 0, \\ -9N_1 - 3N_2 + 10 \cdot 6 &= 0, \\ 5N_3 - 5 \cdot 2 &= 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, находим:

$$N_3 = 2 \text{ т}, N_1 = 3,5 \text{ т}, N_2 = 9,5 \text{ т}.$$

ГЛАВА V

СПОСОБ ВЕРЕВОЧНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

§ 36. Первый случай. Многоугольник сил не замкнут

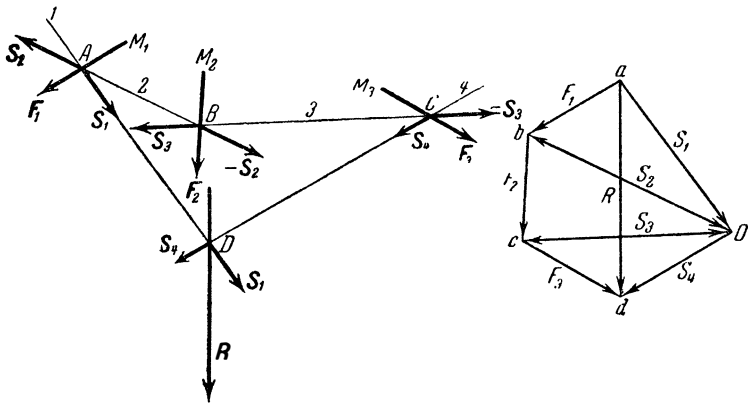
В предыдущей главе мы изложили принадлежащее Пуансо аналитическое решение задачи сложения сил, расположенных как угодно на плоскости. Покажем теперь прием для графического решения той же задачи — способ «веревочного многоугольника», предложенный Кульманом¹⁾.

Пусть даны три силы F_1, F_2, F_3 , приложенные в точках M_1, M_2, M_3 (черт. 73), и требуется их сложить.

¹⁾ К. Culmann. Die graphische Statik (1866). В настоящей главе изложены лишь основания способа веревочного многоугольника. Более подробное изложение этого приема можно найти в сочинении В. Л. Кирпичева. Основания графической статики. Изд. 6, Гостехиздат, М.—Л., 1933.

Начинаем с того, что на другом чертеже (черт. 74) строим многоугольник данных сил. Для этого берем произвольную точку a , от которой откладываем отрезок ab , равный и параллельный F_1 , затем отрезок bc , равный и параллельный F_2 , и отрезок cd , равный и параллельный F_3 . Положим, мы получили незамкнутый многоугольник сил. На основании признака § 29 мы можем заключить, что данные силы F_1 , F_2 , F_3 приводятся к одной равнодействующей R , изображаемой замыкающей стороной ad многоугольника сил.

Таким образом построением многоугольника сил мы определили графически как величину, так и направление равнодействующей этих сил.



Черт. 73.

Черт. 74.

Остается найти точку приложения равнодействующей. Для этого послужит построение второго многоугольника — *веревочного многоугольника*.

Возьмем на черт. 74 произвольную точку O , которую назовем полюсом, и соединим ее прямыми с вершинами a , b , c , d многоугольника сил. Полученные отрезки Oa , Ob , Oc , Od называются лучами; обозначим их буквами S_1 , S_2 , S_3 , S_4 и заметим, что число лучей всегда на единицу больше числа данных сил.

Затем вернемся к черт. 73 и проведем на нем прямую 1 , параллельную лучу S_1 , до встречи с линией действия силы F_1 в точке A ; из полученной точки A проведем прямую 2 , параллельную лучу S_2 , до встречи с линией действия силы F_2 в точке B ; из точки B проведем прямую 3 , параллельную лучу S_3 , до встречи с линией действия силы F_3 в точке C и, наконец, из точки C проведем прямую 4 , параллельную лучу S_4 . Прямые 1 , 2 , 3 , 4 образуют так называемый веревочный многоугольник. Заметим, что число сторон

веревочного многоугольника равно числу лучей и, следовательно, на единицу больше числа данных сил.

Продолжим крайние стороны 1 и 4 веревочного многоугольника и отметим точку их пересечения D . Мы покажем, что точка D и есть искомая точка приложения равнодействующей R данных сил F_1, F_2, F_3 .

Чтобы в этом убедиться, перенесем точки приложения сил F_1, F_2, F_3 вдоль их линий действия в вершины A, B, C веревочного многоугольника. Затем силу F_1 , приложенную в точке A , разложим на две составляющие, приложенные в той же точке и направленные по прямым 1 и 2 . Чтобы получить величины и направления этих составляющих, воспользуемся правилом треугольника сил. Заметим, что нового построения делать не придется, ибо требуемый треугольник уже имеется на черт. 74: это треугольник aOb . Из этого треугольника мы заключаем, что величины искомых составляющих суть S_1 и S_2 ; направления этих составляющих определяем по известному правилу (составляющие направлены в одну сторону по обводу треугольника сил, равнодействующая направлена в сторону противоположную). Найденные составляющие S_1 и S_2 , надлежащим образом направленные, откладываем от точки A ¹⁾.

Точно таким же образом разлагаем силу F_2 , приложенную в точке B , на две составляющие, направленные по прямым 2 и 3 . Соответствующий треугольник сил находим на черт. 74 (треугольник bOc). Заключаем, что величины искомых составляющих суть S_2 и S_3 . Определив их направления по указанному правилу, откладываем эти составляющие от точки B .

Таким же способом разлагаем силу F_3 , приложенную в точке C , на две составляющие, равные по величине S_3 и S_4 и направленные по прямым 3 и 4 .

Теперь замечаем, что в точках A и B приложены две силы, равные по величине S_2 и направленные по прямой 2 в противоположные стороны; эти силы взаимно уравновешиваются и могут быть отброшены. Точно так же взаимно уравновешиваются и могут быть отброшены две силы, равные по величине S_3 , приложенные в точках B и C и направленные по прямой 3 в противоположные стороны. Остаются лишь две силы S_1 и S_4 , приложенные в точках A и C и направленные по крайним сторонам 1 и 4 веревочного многоугольника.

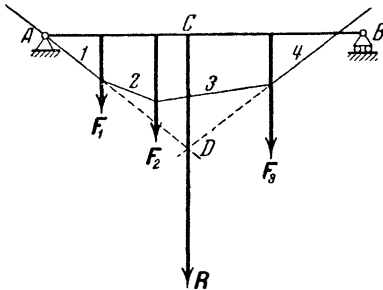
Чтобы сложить эти две силы S_1 и S_4 , перенесим точки их приложения вдоль линий действия в точку пересечения последних, т. е. в точку D . Равнодействующая сил S_1 и S_4 будет приложена в той же точке D ; ее величина и направление найдутся по правилу треугольника сил. Требуемый треугольник находим на черт. 74—

¹⁾ На черт. 73 силы S_1, S_2, S_3, S_4 изображены в уменьшенном масштабе.

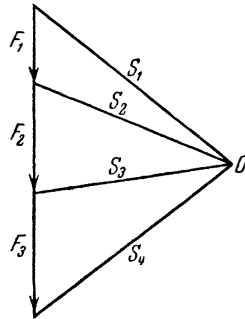
треугольник aOd , откуда заключаем, что равнодействующая сил S_1 и S_4 равна R . Итак, данные силы F_1, F_2, F_3 приведены к одной силе R , приложенной в точке D .

Проведя через точку D прямую, параллельную R , находим линию действия равнодействующей. Точку приложения ее можно перенести в любую точку, лежащую на этой прямой.

Пример 19. К балке AB приложены вертикальные силы F_1, F_2, F_3 (черт. 75). Построить их равнодействующую.



Черт. 75.



Черт. 76.

На черт. 76 строим многоугольник сил. Замыкающая сторона многоугольника сил определяет величину и направление равнодействующей R . Следовательно, величина равнодействующей $R = F_1 + F_2 + F_3$, и она направлена вертикально вниз.

Чтобы найти точку приложения равнодействующей R , строим лучи S_1, S_2, S_3, S_4 и веревочный многоугольник 1, 2, 3, 4. Точка пересечения D крайних сторон 1 и 4 и есть одна из точек приложения равнодействующей.

§ 37. Второй случай. Многоугольник сил замкнут

Даны силы F_1, F_2, F_3 , приложенные в точках M_1, M_2, M_3 (черт. 77). Требуется их сложить.

На черт. 78 строим многоугольник сил F_1, F_2, F_3 и положим, что он оказался замкнутым. На основании исследования, изложенного в §§ 27 и 28, мы уже знаем, что в этом случае данные силы или приводятся к паре, или находятся в равновесии.

Возьмем полюс O и проведем лучи S_1, S_2, S_3, S_4 . Так как последняя вершина многоугольника совпадает с первой, то и последний луч S_4 совпадает с первым лучом S_1 .

Затем на черт. 77 строим веревочный многоугольник 1, 2, 3, 4, как объяснено выше. Заметим, что крайние его стороны 1 и 4 параллельны, так как они обе параллельны совпадающим лучам S_4 и S_1 .

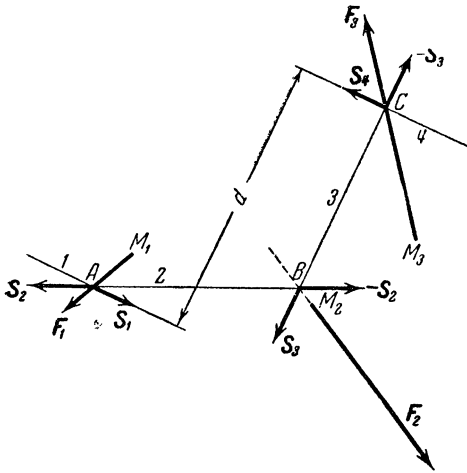
Перенеся силы F_1, F_2, F_3 вдоль их линий действия в вершины A, B, C веревочного многоугольника, разлагаем каждую из них на две составляющие, приложенные в тех же точках и направленные по сторонам веревочного многоугольника. Величины и направления

составляющих определяем по правилу треугольника сил, причем все требуемые треугольники находим на черт. 78. Повторяя рассуждения, изложенные выше, убеждаемся, что силы, направленные по 2-й и 3-й сторонам веревочного многоугольника (и изображаемые отрезками S_2 и S_3), взаимно уравниваются и что, следовательно, данные силы F_1, F_2, F_3 приводятся к двум силам, равным по величине S_1 и S_4 , направленным по крайним сторонам веревочного многоугольника (1-й и 4-й) в противоположные стороны¹⁾.

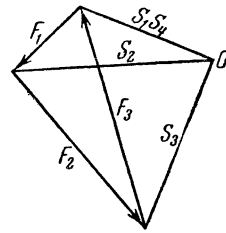
Так как $S_1 = S_4$, то данные силы приведены к паре сил. Момент этой пары m равен:

$$m = S_1 d,$$

где S_1 есть длина первого



Черт. 77.



Черт. 78.

луча (черт. 78), а d есть расстояние между крайними сторонами веревочного многоугольника (черт. 77); мы приписали моменту m знак $+$, так как пара сил S_1 и S_4 представляется вращающей плоскость чертежа против часовой стрелки.

Для того чтобы силы F_1, F_2, F_3 находились в равновесии, необходимо, чтобы силы S_1 и S_4 , направленные по крайним сторонам веревочного многоугольника, взаимно уравнивались; а для этого нужно, чтобы крайние стороны веревочного многоугольника лежали на одной прямой.

Условимся называть веревочный многоугольник, крайние стороны которого лежат на одной прямой *замкнутым*. В таком случае условия равновесия сил, как угодно расположенных на плоскости, могут быть сформулированы следующим образом: *для равновесия сил на плоскости необходимо и достаточно, чтобы многоугольник сил и веревочный многоугольник были замкнуты*. Таковы *графические условия равновесия сил на плоскости*.

¹⁾ На черт. 77 силы S_1, S_2, S_3, S_4 изображены в уменьшенном масштабе.

Конечно, все результаты, полученные в этом и предыдущем параграфах, остаются справедливыми, каково бы ни было число заданных сил. Резюмируя еще раз все изложенное, заключаем, что:

1) если многоугольник данных сил не замкнут, то силы приводятся к одной равнодействующей;

2) если многоугольник сил замкнут, но веревочный многоугольник не замкнут, то силы приводятся к паре;

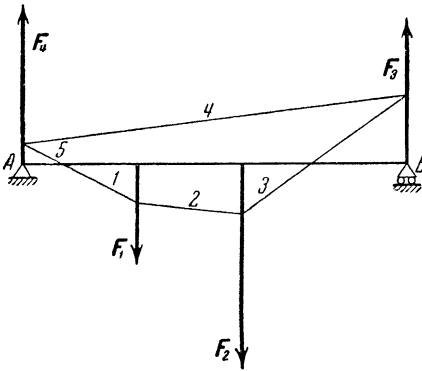
3) если многоугольник сил и веревочный многоугольник замкнуты, то силы находятся в равновесии.

Применим найденные графические условия равновесия к определению опорных реакций балки.

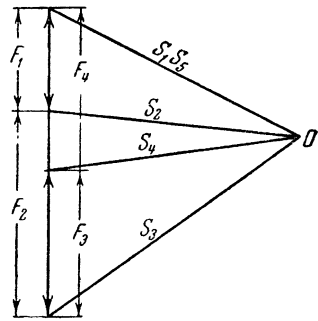
Пример 20. К балке AB (черт. 79), лежащей на двух опорах A и B , приложены вертикальные силы F_1 и F_2 . Определить (графически) опорные реакции.

Обозначим искомые реакции буквами F_3 и F_4 . Силы F_1, F_2, F_3, F_4 должны удовлетворять установленным двум графическим условиям равновесия.

На черт. 80 строим многоугольник сил. Так как сила F_3 неизвестна, то неизвестна и четвертая вершина многоугольника сил (конец стороны F_3



Черт. 79.



Черт. 80.

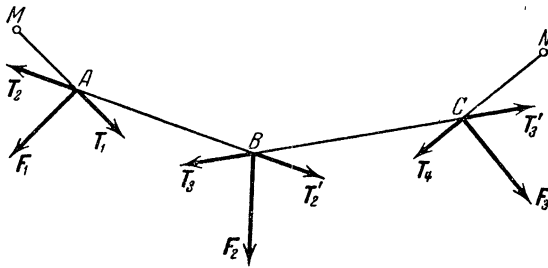
и начало стороны F_4); пятая вершина многоугольника сил (конец стороны F_4) совпадает с первой, ибо многоугольник сил должен быть замкнут. Затем проводим лучи S_1, S_2, S_3 ; луч S_4 остается неизвестным, луч S_5 совпадает с лучом S_1 . На черт. 79 строим веревочный многоугольник. Проводим стороны 1, 2, 3; сторона 4 неизвестна, сторона же 5 лежит на одной прямой со стороной 1, ибо веревочный многоугольник должен быть замкнут.

Соединив прямой линией точку пересечения стороны 3 и силы F_3 с точкой пересечения стороны 5 и силы F_4 , получаем недостающую сторону 4 веревочного многоугольника. Затем возвращаемся к черт. 80 и, проведя через полюс O прямую, параллельную стороне 4 веревочного многоугольника, получаем недостающий луч S_4 . Этим лучом определяется недостающая, четвертая вершина в многоугольнике сил и, следовательно, определяются величины искомых сил F_3 и F_4 .

§ 38. О фигуре равновесия нити

Нам остается сделать замечание, разъясняющее самое наименование «веревочного» многоугольника. Остановимся на вопросе о фигуре равновесия нити, концы которой прикреплены к двум неподвижным точкам и которая находится под действием приложенных к ней сил.

Положим, что нить MN , концы которой прикреплены к двум неподвижным точкам M и N , находится в равновесии под действием сил F_1, F_2, F_3 , приложенных в точках A, B, C и лежащих в одной плоскости, проходящей через точки M и N (черт. 81). Мы покажем,



Черт. 81.

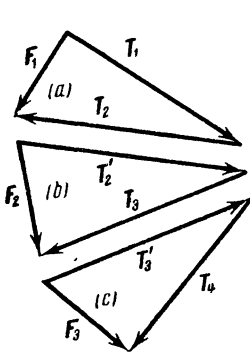
что фигура равновесия нити есть веревочный многоугольник для сил F_1, F_2, F_3 .

Для этого нужно доказать, что можно построить такой многоугольник сил F_1, F_2, F_3 , лучи которого параллельны участкам MA, AB, BC, CN нашей нити. Чтобы в этом убедиться, найдем натяжения отдельных участков нити. Чтобы найти натяжения участков MA и AB , разлагаем силу F_1 на две составляющие T_1 и T_2 , приложенные в точке A и направленные по прямым MA и AB . Величины и направления составляющих T_1 и T_2 находим по правилу треугольника сил. Для этого на черт. 82 (а) откладываем отрезок, равный и параллельный силе F_1 , и проводим через начало и конец этого отрезка прямые, параллельные прямым MA и AB ; получаем треугольник сил, из которого и находим составляющие T_1 и T_2 . Таким же образом разлагаем силу F_2 на две составляющие T_2' и T_3 , приложенные в точке B и направленные по прямым AB и BC , и силу F_3 — на составляющие T_3' и T_4 , приложенные в точке C и направленные по прямым BC и CN . Соответствующие треугольники сил построены на черт. 82 (b) и (c)¹⁾.

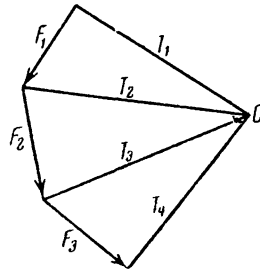
Заметим теперь, что так как участок нити AB находится в равновесии под действием двух сил T_2 и T_2' , то должно быть $T_2 = T_2'$. Точно так же из равновесия участка BC заключаем, что $T_3 = T_3'$.

¹⁾ На черт. 81 силы $T_1, T_2, T_2', T_3, T_3', T_4$ изображены в уменьшенном масштабе.

Силы T_1, T_2, T_3, T_4 суть искомые натяжения участков MA, AB, BC, CN . Обращаясь к черт. 82 и замечая, что $T_2 = T'_2$ и $T_3 = T'_3$, приложим треугольник (b) к треугольнику (a) так, чтобы сторона T'_2 совпала со стороной T_2 ; затем к треугольнику (b) приложим треугольник (c) так, чтобы совпали стороны T'_3 и T_3 . Мы получим черт. 83, который представляет многоугольник сил F_1, F_2, F_3



Черт. 82.



Черт. 83.

с лучами T_1, T_2, T_3, T_4 , причем из построения явствует, что эти лучи параллельны участкам MA, AB, BC, CN нашей нити.

Этим доказано, что фигура равновесия нити есть веревочный многоугольник для сил F_1, F_2, F_3 . Этим обстоятельством объясняется наименование «веревочного» многоугольника.

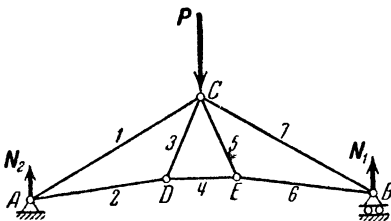
ГЛАВА VI

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В БРУСКАХ ФЕРМЫ

§ 39. Диаграмма Максвелла-Кремоны

В этой главе мы покажем применение общих приемов, изложенных в предыдущих главах, к

решению вопроса об определении усилий в частях фермы. В настоящем параграфе мы изложим графический способ решения этой задачи, предложенный английским физиком Максвеллом и разработанный итальянским математиком Кремоной.



Черт. 84.

(черт. 84). Предположим, что ферма опирается на неподвижную опору в точке A и на подвижную опору в точке B ; к шарнирному

Представим себе стропильную ферму, состоящую из семи брусьев, соединенных шарнирно

болту C приложена вертикальная сила P . Требуется определить вызываемые этой нагрузкой усилия в брусках фермы.

Заметим прежде всего, что если ферма состоит из прямолинейных брусьев, соединенных своими концами, если все соединения — шарнирные и если все внешние силы приложены к шарнирным болтам, то все брусья фермы могут испытывать только растягивающие или сжимающие усилия; изгибающих усилий в них быть не может. В самом деле, возьмем, например, брусок CD нашей фермы. К нему приложены лишь две силы, а именно: силы, испытываемые им со стороны шарнирных болтов C и D . Но брусок CD находится в равновесии. Следовательно, две силы, к нему приложенные, должны взаимно уравновешиваться, т. е. должны быть равны по величине и должны быть направлены по прямой CD в противоположные стороны. Такие силы будут или растягивать или сжимать наш брусок.

Желая определить растягивающие или сжимающие усилия в брусках фермы, найдем прежде всего внешние силы, приложенные к ферме. В число внешних сил входят, во-первых, заданная нагрузка P , во-вторых, — опорные реакции N_1 и N_2 . Эти реакции направлены вертикально вверх и равны (вследствие предполагаемой нами симметрии фермы), так что $N_1 = N_2 = \frac{1}{2}P$. Вообще говоря, опорные реакции могли бы быть найдены графически по способу веревочного многоугольника (как объяснено в § 37).

Обратимся теперь к определению усилий в брусках. Обозначим бруски нашей фермы номерами от 1 до 7 (как показано на черт. 84) и будем обозначать растягивающие усилия буквой T с соответствующим номером бруска (например, T_4), а сжимающие усилия — буквой S также с соответствующим номером (например, S_7). Желая определить эти усилия, будем рассматривать силы, приложенные к шарнирным болтам, находящимся в узлах A, B, C, D, E нашей фермы. В число этих сил входят, с одной стороны, внешние силы, с другой стороны, — реакции брусков. Так как реакции брусков равны искомым усилиям в брусках, то вопрос сводится к определению этих реакций. По поводу этих реакций брусков заметим, что если какой-либо брусок, например MN (черт. 85), *растягивается* шарнирными болтами M и N , находящимися на его концах, то реакция бруска, приложенная к болту M , направлена от точки M к точке N ; реакция же, приложенная к болту N , направлена от N к M , т. е. реакции бруска направлены *внутрь* бруска; наоборот, если брусок *сжимается* шарнирными болтами, находящимися на его концах, то реакции бруска направлены *наружу*. Следует обратить внимание на это правило; оно позволяет быстро разбираться, какие бруски фермы растянуты и какие сжаты. Заметим еще, что, будет ли брусок растянут или сжат, реакции, приложенные к болтам, находящимся



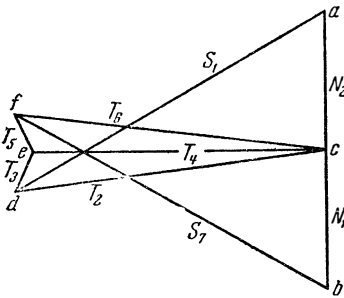
Черт. 85.

на концах бруска, всегда равны по величине и направлены в противоположные стороны.

Так как вся ферма, а следовательно, и каждый шарнирный болт находятся в равновесии, то силы, приложенные к каждому шарнирному болту, должны взаимно уравновешиваться, т. е. многоугольник этих сил должен быть замкнут. Будем строить последовательно многоугольники сил для всех узлов нашей фермы. Оказывается возможным построить все эти многоугольники на одном чертеже. Таким образом мы и приходим к построению, которое называется диаграммой Максвелла-Кремоны. Из этой диаграммы могут быть определены усилия во всех брусках фермы.

Построение диаграммы выполним в следующем порядке.

Заметим, что так как внешние силы P , N_1 и N_2 находятся в равновесии, то многоугольник этих сил также должен быть замкнут. Начнем с построения многоугольника внешних сил. Для этого из точки a (черт. 86) отложим отрезок ab , равный по величине



Черт. 86.

и параллельный силе P ; далее отложим отрезки bc и ca , равные и параллельные опорным реакциям N_1 и N_2 .

Обратимся теперь к узлу A . К болту A приложены опорная реакция N_2 и реакции брусков 1 и 2 . Многоугольник этих сил должен быть замкнут; строим этот многоугольник. Опорная реакция N_2 изображена на черт. 86 отрезком ca . Из конца a этого отрезка проведем прямую, параллельную бруску 1 , а из начала его c проведем прямую, параллельную бруску 2 .

Получаем замкнутый многоугольник $cadc$, который и есть многоугольник сил, приложенных к болту A . Величины отрезков ad и dc дают величины реакций брусков 1 и 2 или, что все равно, искомые усилия в этих брусках. Так как реакция ad направлена по отношению к бруску 1 наружу, а реакция dc внутрь бруска 2 , то брусок 1 сжат, а брусок 2 растянут. Следовательно, найденные усилия в этих брусках должны быть обозначены соответственно через S_1 и T_2 .

Переходим к узлу D . К болту D приложены реакции брусков 2 , 3 и 4 . Мы уже знаем, что реакция бруска 2 , приложенная к болту D , равна и противоположна реакции того же бруска, приложенной к болту A . Следовательно, на черт. 86 реакция бруска 2 , приложенная к болту D , изображается отрезком cd . Проведем из конца d этого отрезка прямую, параллельную бруску 3 , а из начала его c прямую, параллельную бруску 4 . Получаем замкнутый многоугольник $cdec$; это есть многоугольник сил, приложенных к болту D . Искомые реакции брусков 3 и 4 изображаются отрезками de и ec . Так как обе реакции направлены внутрь соответствующих

брусков, то оба бруска растянуты; найденные усилия в них должны быть обозначены через T_3 и T_4 .

Перейдем к узлу E . Реакция бруска 4, приложенная к болту E , изображается на черт. 86 отрезком ce . Проведя через точки e и c прямые, параллельные соответственно брускам 5 и 6, получаем замкнутый многоугольник сил $cefc$. Его стороны ef и fc равны реакциям брусков 5 и 6. Обе реакции направлены внутрь соответствующих брусков. Значит, бруски 5 и 6 растянуты; найденные усилия в них обозначаем через T_5 и T_6 .

Наконец, доходим до узла B . Из трех сил, приложенных к этому узлу (опорная реакция N_1 и реакции брусков 6 и 7), две силы, а именно опорная реакция N_1 и реакция бруска 6, нам уже известны; на черт. 86 они изображаются отрезками bc и cf . Остается замкнуть многоугольник bcf отрезком fb , чтобы получить реакцию последнего бруска 7. Этот брусок сжат; усилие в нем обозначается через S_7 .

Этим заканчивается построение диаграммы. Конечно, отрезок fb , изображающий реакцию бруска 7, должен быть параллелен этому бруску. Проверка этой параллельности дает контроль правильности построения. Заметим, что при построении диаграммы мы не рассматривали условия равновесия сил, приложенных к болту C . Легко заметить, что замкнутый многоугольник этих сил (нагрузки P и реакций брусков 7, 5, 3, 1) уже имеется на диаграмме: это есть многоугольник $abfeda$.

Фигура, полученная на черт. 86, называется диаграммой Максвелла-Кремоны; она дает полную картину усилий во всех брусках нашей фермы. В диаграмме мы имеем на одном чертеже замкнутые многоугольники сил для всех узлов нашей фермы. Конечно, можно было бы строить эти многоугольники и на отдельных чертежах. Упрощение, которое вносится построением диаграммы, состоит в том, что на диаграмме реакция каждого бруска (или усилие в нем) появляется только один раз (в виде одного отрезка). Следует иметь в виду, что это упрощение достигается лишь в том случае, если при построении многоугольника внешних сил (с которого мы начали построение диаграммы) и многоугольников сил для отдельных узлов фермы мы будем строить силы в определенном порядке. Этот порядок определяется следующими правилами.

1) Делаем обход внешнего контура фермы, обходя его в определенную сторону, например, по часовой стрелке, и замечаем, в каком порядке встречаем внешние силы, приложенные к ферме. В этом порядке и наносим силы при построении многоугольника внешних сил. Так, в нашем примере, обходя контур фермы, изображенной на черт. 84, по часовой стрелке, мы встречаем внешние силы в следующем порядке: P , N_1 и N_2 . В этом порядке они и нанесены на черт. 86.

2) Обходим каждый узел фермы, делая обход вокруг узла в ту же сторону, что и обход внешнего контура, и замечаем,

в каком порядке встречаем бруски фермы, а также внешние силы (если таковые к узлу приложены). В этом порядке и наносим реакции брусков и внешние силы при построении многоугольника сил для данного узла. Так, обходя узел A (черт. 84) по часовой стрелке, встречаем внешние силы и бруски фермы в следующем порядке: N_2 , 1, 2. В этом порядке опорная реакция N_2 и реакции брусков 1 и 2 и нанесены при построении многоугольника $cadc$ на черт. 86. Обходя узел D по часовой стрелке, встречаем бруски фермы в порядке 2, 3, 4; в этом же порядке нанесены реакции этих брусков в многоугольнике $cdec$ и т. д.

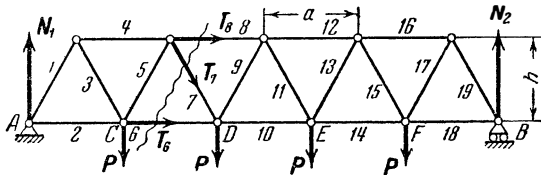
Следует заметить, что внешние силы, приложенные к узлам фермы, должны быть начерчены вне контура фермы (так, как на черт. 84 начерчена нагрузка P).

Мы не будем останавливаться здесь на обосновании указанных двух правил, отсылая интересующихся к уже цитированному сочинению В. Л. Кирпичева «Основания графической статики». Заметим только, что не для всяких ферм возможно построение диаграмм усилий и не всегда указанные правила приводят к цели. На вопросе о том, каким условиям должна удовлетворять ферма для того, чтобы для нее было возможно построение диаграммы Максвелла-Кремоны, мы также не будем останавливаться.

§ 40. Способ Риттера

Мы изложим способ *Риттера* на следующем примере.

Дана мостовая ферма, состоящая из 19 брусков, соединенных шарнирно (черт. 87). Ферма опирается на неподвижную опору



Черт. 87.

в точке A и на подвижную опору в точке B . К шарнирным болтам C , D , E и F приложены равные вертикальные нагрузки P . Требуется определить усилия в брусках фермы.

Горизонтальные бруски образуют *верхний* и *нижний пояса* фермы; наклонные бруски называются *раскосами*. Предполагаем длины всех брусков верхнего и нижнего поясов равными; обозначим длину этих брусков через a ; высоту фермы обозначим через h . Длины раскосов предполагаем также равными; раскосы наклонены к горизонту под углом α , который определяется равенством

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2h}{a}.$$

Так же, как при построении диаграммы Максвелла-Кремоны, мы начинаем с определения опорных реакций. Находим опорные реакции при помощи уравнений равновесия, как объяснено в § 32. В данном случае очевидно, что опорные реакции N_1 и N_2 направлены вертикально вверх и равны; так как их сумма равна $4P$, то $N_1 = N_2 = 2P$.

Переходим к определению усилий в брусках. Обозначим бруски фермы номерами от 1 до 19 (как показано на черт. 87). Положим, мы желаем определить усилие в бруске 8.

Применим «метод сечений», о котором было сказано в § 9. Проведем мысленно сечение, перерезывающее брусок 8 и два других бруска 6 и 7. Это сечение разрежет ферму на две части — левую и правую; будем рассматривать условия равновесия одной из этих частей, например левой.

Рассмотрим, какие силы действуют на левую часть фермы. В узлах A и C к ней приложены опорная реакция N_1 и нагрузка P . Кроме того, в тех точках, в которых перерезаны бруски 6, 7 и 8, приложены силы, представляющие действие правой части фермы на левую. Эти силы являются внутренними по отношению ко всей ферме, но внешними по отношению к левой части фермы; эти силы не что иное, как искомые усилия (растягивающие или сжимающие) в брусках 6, 7 и 8. Условимся вести дальнейшие вычисления в предположении, что все бруски нашей фермы растянуты, т. е. что усилия во всех брусках — растягивающие; если на самом деле какой-либо брусок сжат, то для усилия в нем мы получим отрицательное число. Соответственно этому мы будем обозначать все усилия буквой T (с соответствующим номером бруска), причем будем помнить, что положительные усилия суть растягивающие, а отрицательные — сжимающие. Так как бруски 6, 7 и 8 предполагаем растянутыми, то силы T_6 , T_7 и T_8 , приложенные к левой части фермы, направляем так, как показано на черт. 87.

Левая часть фермы находится в равновесии под действием пяти сил: P , N_1 , T_6 , T_7 и T_8 . Следовательно, эти силы должны удовлетворять уравнениям равновесия. Напишем такое уравнение равновесия, в которое входила бы только одна неизвестная сила, именно, интересующее нас усилие T_8 . Для этого составим уравнение моментов относительно узла D , в котором сходятся перерезанные нами бруски 6 и 7. Получим уравнение:

$$-N_1 \cdot 2a - T_8 h + Pa = 0,$$

или, так как $N_1 = 2P$,

$$3Pa + T_8 h = 0,$$

откуда

$$T_8 = -3P \frac{a}{h}.$$

Мы получили отрицательное усилие; следовательно, брусок 8 сжат.

Точно так же мы можем найти усилия в брусках 6 и 7. Напишем уравнение моментов относительно узла верхнего пояса, в котором сходятся бруски 7 и 8; получим:

$$-N_1 \frac{3}{2} a + P \cdot \frac{1}{2} a + T_6 h = 0,$$

откуда

$$T_6 = \frac{5}{2} P \frac{a}{h}.$$

Так как бруски 6 и 8 не пересекаются, то нельзя написать уравнения моментов, из которого были бы исключены усилия T_6 и T_8 . Напишем уравнение проекций на вертикальную ось, направив эту ось вверх; получим уравнение, содержащее одну неизвестную T_7 :

$$N_1 - P - T_7 \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$T_7 = \frac{P}{\sin \alpha}.$$

Так как T_6 и T_7 положительны, то бруски 6 и 7 растянуты.

Проводя другие сечения, мы могли бы таким же образом определить усилия во всех брусках нашей фермы (что мы и предлагаем сделать читателю). Как видно, удобство способа Риттера состоит в том, что он позволяет сразу определить усилие в любом бруске фермы, не производя предварительно подсчета усилий в других брусках.

ГЛАВА VII

СЛОЖЕНИЕ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ В ОДНОЙ ТОЧКЕ И НЕ ЛЕЖАЩИХ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

§ 41. Многоугольник сил. Параллелепипед сил

Переходим к исследованию вопроса о сложении и равновесии сил, приложенных к твердому телу и не лежащих в одной плоскости. В этой главе рассмотрим случай сил, приложенных в одной точке.

Положим, в точке A приложены силы F_1, F_2, F_3, F_4 (черт. 88); требуется сложить эти силы.

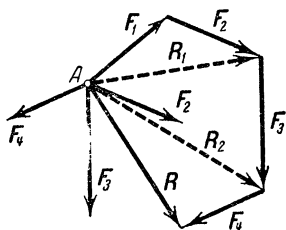
Складываем силы последовательно. Сначала складываем силы F_1 и F_2 ; по правилу треугольника сил находим их равнодействующую R_1 . Затем складываем силы R_1 и F_3 ; строя опять треугольник сил, находим их равнодействующую R_2 . Наконец, складывая силы R_2 и F_4 , находим их равнодействующую R , которая и есть искомая равнодействующая всех заданных сил. Как видно из черт. 88,

равнодействующая R представляется замыкающей стороной многоугольника, построенного на заданных силах F_1, F_2, F_3, F_4 , т. е. равна векторной сумме этих сил¹⁾.

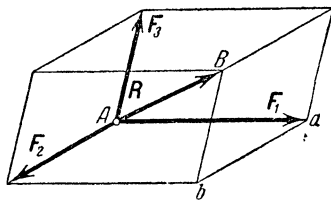
Изложенное рассуждение остается справедливым при каком угодно числе заданных сил. Мы заключаем, что *равнодействующая какого угодно числа сил, приложенных в одной точке, приложена в той же точке и равна векторной сумме данных сил.*

Итак, силы, приложенные в одной точке (и не лежащие в одной плоскости), складываются по правилу многоугольника сил.

Остановимся на случае трех сил, приложенных в одной точке и не лежащих в одной плоскости. В этом частном случае правило сложения сил можно формулировать несколько иначе. Положим, что в точке A приложены силы F_1, F_2, F_3 , не лежащие в одной плоскости (черт. 89). Построим параллелепипед на этих силах:



Черт. 88.



Черт. 89.

проведем диагональ параллелепипеда AB и припишем этой диагонали направление от точки A к точке B . Диагональю AB и представляется равнодействующая R данных сил. Действительно, отрезок AB есть замыкающая сторона многоугольника $AabB$. Так как этот многоугольник есть не что иное, как многоугольник сил F_1, F_2, F_3 , то, согласно доказанному выше, отрезок AB и представляет равнодействующую этих сил. Изложенное правило сложения трех сил, приложенных в одной точке и не лежащих в одной плоскости, называется *правилом параллелепипеда сил.*

Возвратимся к общему случаю какого угодно числа сил, приложенных в одной точке. Силы, приложенные в одной точке, находятся в равновесии, если их равнодействующая R равна нулю. Следовательно, *условие равновесия сил, приложенных в одной точке, можно формулировать следующим образом:*

Силы, приложенные в одной точке, находятся в равновесии, если многоугольник этих сил замкнут. Иначе: силы, приложенные в одной точке, находятся в равновесии, если их векторная сумма равна нулю.

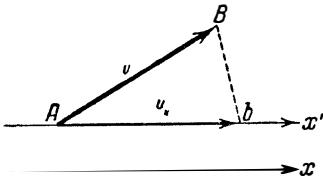
¹⁾ Следует заметить, что так как силы F_1, F_2, F_3, F_4 предполагаются не лежащими в одной плоскости, то и стороны многоугольника этих сил не лежат в одной плоскости.

§ 42. Проекция силы на ось. Разложение вектора на составляющие по осям координат

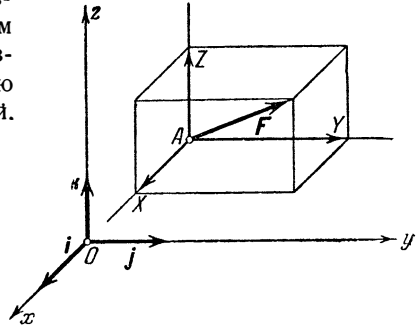
Выведем теперь формулы для вычисления равнодействующей сил, приложенных в одной точке. Но предварительно остановимся на понятии *проекции силы на ось*.

Дана сила F , приложенная к точке A , и ось x , которой приписано определенное направление, указанное стрелкой (черт. 90); предполагаем, что сила F и ось x не лежат в одной плоскости. Проведем через точку A прямую, параллельную оси x и одинаково с нею направленную. Из конца B силы F опустим перпендикуляр Bb на эту прямую.

Величина отрезка Ab , которому приписываем направление от точки A к точке b , называется *проекцией силы F на ось x* ; обозначим эту проекцию буквой X . Считаем проекцию X положительной, если направление отрезка Ab совпадает с направлением оси x ; если же направление отрезка Ab противоположно направлению оси x , считаем ее отрицательной.



Черт. 90.



Черт. 91.

Из треугольника ABb следует, что $X = F \cos(F, x)$, где (F, x) есть угол, образованный направлением силы F и направлением оси x . Заметим, что $X = 0$, если

$$\angle(F, x) = 90^\circ.$$

Положим, дана сила F , приложенная в точке A (черт. 91). Возьмем три взаимно перпендикулярные оси x, y, z и разложим силу F на три составляющие, направленные параллельно этим осям. Для этого строим при точке A прямоугольный параллелепипед, ребра которого параллельны осям x, y, z и в котором сила F является диагональю. Ребра этого прямоугольного параллелепипеда и будут изображать *составляющие* или *компоненты* силы F по осям x, y, z ; численные же значения величин этих составляющих (взятые с тем или другим знаком в зависимости от того, совпадают направления составляющих силы F с направлениями осей x, y, z или нет) будут проекциями силы F на оси x, y, z ; обозначим эти проекции буквами X, Y, Z .

Обозначая единичные векторы, направленные по осям x, y, z , через i, j, k , можем представить компоненты силы F по осям x, y, z в виде произведений Xi, Yj, Zk . Таким образом приходим к равенству:

$$F = Xi + Yj + Zk,$$

которое будем называть формулой разложения силы F на составляющие по осям x, y, z .

Заметим сейчас же, что эта формула может быть применена к разложению любого вектора на составляющие по осям координат. В самом деле, любой вектор a мы можем разложить на три составляющие по взаимно перпендикулярным осям x, y, z . Так как величины этих составляющих, взятые с соответствующими знаками, равны проекциям a_x, a_y, a_z вектора a на оси x, y, z , а направления составляющих совпадают с направлениями этих осей, то интересующие нас составляющие вектора a будут иметь выражение $a_x i, a_y j, a_z k$, где i, j, k — единичные векторы, направленные по осям x, y, z . Данный вектор a есть сумма его составляющих; следовательно:

$$a = a_x i + a_y j + a_z k.$$

Эту формулу мы будем называть *формулой разложения вектора на составляющие по осям координат*.

Заметим теперь, что, зная проекции X, Y, Z , легко определить величину и направление силы F . В самом деле, так как сила F представляется диагональю прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны абсолютным величинам X, Y, Z , то

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (1)$$

Далее, для проекций X, Y, Z имеем равенства:

$$X = F \cos(F, x), \quad Y = F \cos(F, y), \quad Z = F \cos(F, z),$$

откуда следует:

$$\cos(F, x) = \frac{X}{F}, \quad \cos(F, y) = \frac{Y}{F}, \quad \cos(F, z) = \frac{Z}{F}. \quad (2)$$

Формулами (1) и (2) определяются величина и направление силы F , если известны ее проекции X, Y, Z .

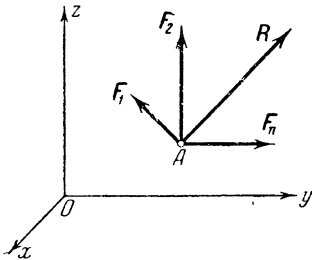
§ 43. Определение равнодействующей сил, приложенных в одной точке, по способу проекций. Уравнения равновесия

Воспользуемся соображениями, изложенными в конце предыдущего параграфа, для определения равнодействующих сил, приложенных в одной точке.

Даны силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные в точке A (черт. 92). Требуется найти вычислением величину и направление их равнодействующей R .

Возьмем три взаимно перпендикулярные оси x , y , z . Мы знаем, что равнодействующая R равна сумме данных сил F_1, F_2, \dots, F_n . Вспоминая теорему о проекции суммы каких-либо векторов, заключаем, что *проекция равнодействующей R на какую угодно ось равна сумме проекций составляющих F_1, F_2, \dots, F_n на ту же ось.*

Следовательно, обозначая проекции сил F_1, F_2, \dots, F_n на оси x , y , z через $X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; \dots; X_n, Y_n, Z_n$, а проекции равнодействующей R на те же оси через X, Y, Z , имеем:



Черт. 92.

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n,$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n.$$

Входящие сюда проекции сил F_1, F_2, \dots, F_n вычисляются по формулам:

$$X_i = F_i \cos(F_i, x), \quad Y_i = F_i \cos(F_i, y),$$

$$Z_i = F_i \cos(F_i, z),$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Вычислив проекции равнодействующей X, Y, Z , находим затем величину и направление равнодействующей по формулам

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\cos(R, x) = \frac{X}{R}, \quad \cos(R, y) = \frac{Y}{R}, \quad \cos(R, z) = \frac{Z}{R}.$$

Мы видели, что силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные в одной точке, находятся в равновесии, если их равнодействующая R равна нулю. Но из равенства

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

следует, что $R = 0$, если $X = 0, Y = 0, Z = 0$.

Вспоминая выражения, полученные для проекций равнодействующей X, Y, Z , заключаем, что силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные в одной точке, находятся в равновесии, если удовлетворены уравнения

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0, \quad Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = 0,$$

$$Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = 0.$$

Эти уравнения называются *уравнениями равновесия сил*, приложенных в одной точке.

ГЛАВА VIII

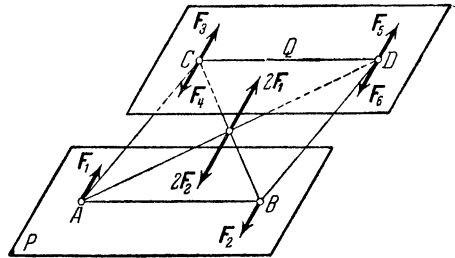
СЛОЖЕНИЕ ПАР В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 44. Условие эквивалентности пар

В этой главе мы остановимся на вопросе о сложении пар, лежащих в одной плоскости. Но предварительно нам придется дополнить те сведения о паре сил, которые были изложены в главе III.

В § 22 было доказано, что две пары, лежащие в одной плоскости, эквивалентны, если их моменты равны (численно и по знаку). Другими словами, две пары эквивалентны, если они лежат в одной плоскости и имеют численно равные моменты и одинаковые направления вращения. Покажем теперь, что две пары эквивалентны, если они лежат в параллельных плоскостях и имеют численно равные моменты и одинаковые направления вращения.

Положим, дана пара F_1, F_2 (причем $F_1 = F_2 = F$) с плечом AB , лежащая в плоскости P (черт. 93). Возьмем плоскость Q , параллельную плоскости P , и докажем, что, не нарушая равновесия, можно заменить данную пару любой парой, лежащей в плоскости Q , при условии, что момент этой



Черт. 93.

второй пары численно равен моменту данной пары, а направление вращения совпадает с направлением вращения данной пары. Чтобы в этом убедиться, покажем сначала, что, не нарушая равновесия, можно перенести данную пару в плоскость Q так, чтобы плечо пары осталось себе параллельным.

Возьмем в плоскости Q отрезок CD , равный и параллельный отрезку AB ; в точках C и D приложим взаимно уравновешивающиеся силы F_3, F_4, F_5, F_6 , равные по величине и параллельные силам данной пары ($F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = F$). Складываем силу F_1 , приложенную в точках A , с силой F_5 . Так как эти силы равны, параллельны и направлены в одну сторону, то их равнодействующая равна по величине $2F$, им параллельна, направлена в ту же сторону, и ее точка приложения делит отрезок AD пополам. Точно так же, складывая силу F_2 , приложенную к точке B , с силой F_4 , получим их равнодействующую, равную по величине $2F$, им параллельную и направленную в ту же сторону, что и эти силы: точка приложения этой равнодействующей делит пополам отрезок BC . Но отрезки AD и BC делятся пополам в точке пересечения (как диагонали параллелограмма $ABDC$). Следовательно, обе равнодействующие, равные

по величине $2F$, приложены в одной точке и, значит, взаимно уравновешиваются.

Остаются силы F_3 и F_6 , которые составляют пару с плечом CD .

Следовательно, данная пара F_1, F_2 заменена парой F_3, F_6 , т. е. перенесена в плоскость Q , причем плечо пары осталось себе параллельным.

Заметим теперь, что в плоскости Q пара F_3, F_6 может быть заменена всякой другой парой с одинаковым моментом и одинаковым направлением вращения. Отсюда мы заключаем, что данную пару F_1, F_2 , лежащую в плоскости P , можно заменить всякой другой парой, лежащей в плоскости Q , момент которой равен моменту данной пары и направление вращения которой совпадает с направлением вращения данной пары.

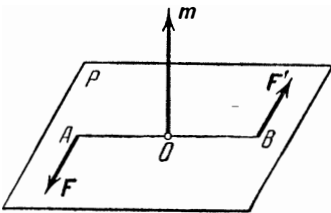
§ 45. Момент пары как вектор

В дальнейшем мы будем рассматривать момент пары как величину векторную, т. е. будем приписывать моменту пары не только определенное численное значение, но также и определенное направление.

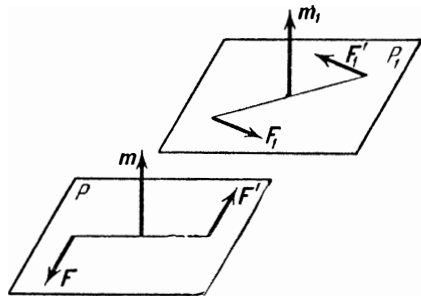
Положим, дана пара F, F' с плечом $AB = p$, лежащая в плоскости P (черт. 94). Моменту пары мы будем приписывать, как раньше, числовое значение

$$m = Fp,$$

направление же момента пары определим следующим образом.



Черт. 94.



Черт. 95.

В какой-либо точке, например в точке O , делящей пополам отрезок AB , восставим перпендикуляр к плоскости пары P . Величину момента пары m отложим от точки O по этому перпендикуляру и притом в такую сторону, чтобы для наблюдателя, расположенного по отложенному нами моменту¹⁾, пара представлялась вращающей плоскость P против направления вращения часовой стрелки.

¹⁾ Так, чтобы момент шел от ног к голове.

Заметим, что величину момента пары мы будем считать теперь всегда положительной.

Момент пары, рассматриваемый как вектор, мы будем обозначать буквой m .

Пользуясь указанным определением момента пары как величины векторной, мы получим новую формулировку условия эквивалентности пар. Положим, в параллельных плоскостях P и P_1 даны эквивалентные пары F, F' с плечом p и F_1, F'_1 с плечом p_1 (черт. 95). Строя моменты m и m_1 этих пар, убеждаемся, что эти моменты не только численно равны, но и параллельны и направлены в одну и ту же сторону, т. е. равны как векторы. Таким образом мы приходим к следующей формулировке условия эквивалентности пар.

Две пары эквивалентны, если их векторные моменты равны.

Это предложение можно формулировать еще и таким образом: не нарушая равновесия, можно перенести момент пары в какую угодно точку пространства (не изменяя его направления).

§ 46. Сложение пар. Условие равновесия пар

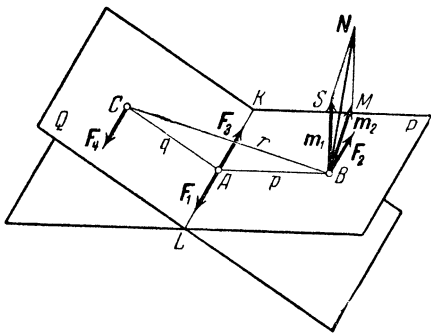
В главе III было рассмотрено сложение пар, лежащих в одной плоскости. К этому случаю приводится также и сложение пар, лежащих в параллельных плоскостях, ибо пары, лежащие в параллельных плоскостях, могут быть перенесены в одну плоскость.

Предположим теперь, что даны две пары, лежащие в пересекающихся плоскостях P и Q (черт. 96), и требуется сложить эти пары.

Обозначим силы, составляющие пару, лежащую в плоскости P , через F_1 и F_2 и положим, что $F_1 = F_2 = F$. Расположим эту пару так, чтобы сила F_1 была приложена в точке A , лежащей на линии пересечения KL плоскостей P и Q , и была направлена по прямой KL . В таком случае плечо этой пары $AB = p$ будет направлено перпендикулярно к прямой KL .

Пару, лежащую в плоскости Q , преобразуем так, чтобы силы

F_3 и F_4 , составляющие эту пару, численно равнялись F ; затем расположим эту пару так, чтобы одна из сил этой пары, например F_3 , была приложена в точке A и направлена по прямой KL в сторону, противоположную направлению силы F_1 . В таком случае плечо второй пары $AC = q$ также будет направлено перпендикулярно к прямой KL .



Черт. 96.

Две силы F_1 и F_3 , приложенные в точке A , как равные по величине и действующие по одной прямой в противоположные стороны, взаимно уравновешиваются. Следовательно, в результате сложения данных пар мы получаем новую пару F_2, F_4 с плечом BC , которую назовем *равнодействующей парой*. Обозначим плечо BC через r .

Покажем теперь, что *момент равнодействующей пары равен сумме моментов составляющих пар*.

Построим моменты m_1 и m_2 составляющих пар; имеем:

$$m_1 = Fr \quad \text{и} \quad m_2 = Fq.$$

Так как момент пары можно переносить в любую точку пространства, отложим эти моменты от точки B ; заметим, что момент m_1 перпендикулярен к плоскости P , а момент m_2 перпендикулярен к плоскости Q .

Затем построим параллелограмм на моментах m_1 и m_2 и проведем диагональ BN . Покажем, что \overline{BN} и есть момент равнодействующей пары.

Для этого нам нужно доказать: 1) что $BN = Fr$, 2) что отрезок BN перпендикулярен к плоскости равнодействующей пары, 3) что для наблюдателя, расположенного по вектору \overline{BN} , равнодействующая пара представляется вращающей свою плоскость против часовой стрелки.

1) Заметим, что треугольники ABC и BSN подобны, ибо стороны BS и SN пропорциональны сторонам AB и AC (так как $m_1 : m_2 = Fr : Fq = p : q$) и $\angle BSN$ и $\angle CAB$ равны (стороны одного угла перпендикулярны к сторонам другого). Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{BN}{m_1} = \frac{r}{p},$$

откуда

$$BN = m_1 \frac{r}{p} = Fr \frac{r}{p} = Fr.$$

2) Чтобы доказать, что отрезок BN перпендикулярен к плоскости равнодействующей пары, достаточно показать, что этот отрезок перпендикулярен к силе F_2 и к плечу BC .

Заметим, что $m_1 \perp F_2$ и $m_2 \perp F_2$. Следовательно, плоскость параллелограмма $BMNS$ перпендикулярна к силе F_2 , а значит и диагональ BN перпендикулярна к F_2 .

С другой стороны, имеем:

$$\angle SBA = 90^\circ, \quad \angle CBA = \angle SBN,$$

откуда

$$\angle CBN = 90^\circ,$$

т. е. диагональ BN перпендикулярна к плечу BC .

Итак, диагональ BN перпендикулярна к плоскости равнодействующей пары.

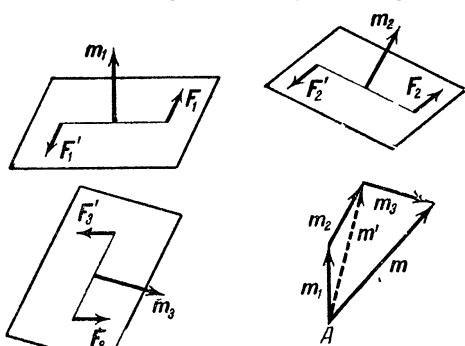
3) Из чертежа видно, что наблюдателю, расположенному по вектору \overline{BN} , равнодействующая пара представляется вращающей свою плоскость против направления вращения часовой стрелки.

Из всего сказанного следует, что вектор \overline{BN} и есть момент равнодействующей пары.

Итак, момент равнодействующей пары представляется диагональю параллелограмма, построенного на моментах составляющих пар. Иначе: *момент равнодействующей пары равен сумме моментов составляющих пар.*

Это правило сложения моментов пар можно назвать *правилом параллелограмма моментов*. Конечно, построение параллелограмма моментов может быть заменено построением треугольника моментов, совершенно так же, как построение параллелограмма сил может быть заменено построением треугольника сил.

При помощи доказанного правила сложения двух пар может быть решена и обратная задача — разложение данной пары на две составляющие пары. Для того чтобы произвести это разложение, достаточно разложить момент данной пары на два составляющих момента, построив либо параллелограмм моментов, либо треугольник моментов.



Черт. 97.

Предположим теперь, что дано несколько пар, расположенных как угодно в пространстве, и требуется сложить эти пары.

Положим даны пары $F_1, F_1', F_2, F_2'; F_3, F_3'$ (черт. 97); ограничимся случаем трех пар, — рассуждение справедливо для какого угодно числа пар.

Положим даны пары $F_1, F_1', F_2, F_2'; F_3, F_3'$ (черт. 97); ограничимся случаем трех пар, — рассуждение справедливо для какого угодно числа пар.

Строим моменты данных пар m_1, m_2, m_3 .

Затем складываем первые две пары. Для этого строим треугольник моментов, откладывая момент m_1 от произвольной точки a и проводя из конца этого момента отрезок, равный по величине и параллельный моменту m_2 . Замыкающая сторона m' есть момент пары, полученной от сложения пар F_1, F_1' и F_2, F_2' . Полученную пару складываем с парой F_3, F_3' . Применяя опять правило треугольника моментов, проводим из конца момента m' отрезок, равный по величине и параллельный моменту m_3 . Замыкающая сторона m есть момент пары, получаемой от сложения всех трех данных пар.

Из сказанного следует, что от сложения нескольких пар, расположенных как угодно в пространстве, получается новая пара,

называемая *равнодействующей пары*. Момент равнодействующей пары представляется замыкающей стороной многоугольника, построенного на моментах составляющих пар. Иначе: *момент равнодействующей пары равен сумме моментов составляющих пар*.

Пары, расположенные как угодно в пространстве, находятся в равновесии, если момент их равнодействующей пары равен нулю. Следовательно, *условие равновесия пар*, расположенных как угодно в пространстве, можно формулировать следующим образом. *Пары, расположенные как угодно в пространстве, находятся в равновесии, если сумма их моментов равна нулю*.

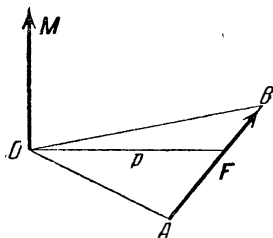
ГЛАВА IX

МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ И ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

§ 47. Момент силы относительно точки

С понятием момента силы относительно точки мы уже встречались в «Статике на плоскости». Теперь мы несколько видоизменим то определение этого понятия, которое было дано в § 24. Именно, в дальнейшем мы будем рассматривать момент силы относительно точки как величину векторную, т. е. будем приписывать моменту не только определенное численное значение, но также и определенное направление.

Положим, даны сила F и точка O (черт. 98). Опустим перпендикуляр из точки O на линию действия силы F . Этот перпендикуляр назовем плечом силы F относительно точки O ; длину плеча обозначим буквой p .



Черт. 98.

Моменту силы F относительно точки O (обозначим этот момент буквой M) мы будем приписывать численное значение

$$M = Fp;$$

направление же момента M определим следующим образом:

Восставим в точке O перпендикуляр к плоскости, проходящей через точку O и через силу F ; величину момента M отложим от точки O по этому перпендикуляру и притом в такую сторону, чтобы для наблюдателя, расположенного по отложенному нами моменту ¹⁾, сила F представлялась направленной справа налево (против часовой стрелки). Заметим, что величину момента

¹⁾ Наблюдатель расположен таким образом, чтобы момент шел от ног к голове.

M мы будем считать теперь всегда положительной. Точка O называется *центром момента*.

Произведение Fp равно удвоенной площади треугольника AOB (черт. 98). Следовательно, имеем другое выражение величины момента силы F относительно точки O :

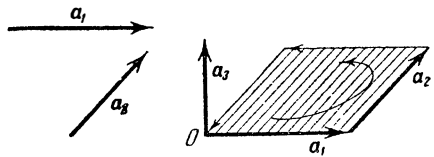
$$M = 2 \Delta AOB.$$

Заметим, что $M = 0$, если $p = 0$, т. е. если линия действия силы F проходит через центр момента O .

§ 48. Векторное произведение двух векторов

Непосредственным обобщением только что установленного нами понятия момента силы относительно точки является понятие векторного произведения двух векторов. Это — одно из основных понятий векторной алгебры; скажем о нем несколько слов.

Даны в пространстве два вектора a_1 и a_2 (черт. 99). Сделаем следующее построение. Отложим вектор a_1 от произвольной точки O и из конца его проведем вектор a_2 . Затем на отложенных векторах как на сторонах построим параллелограмм (на чертеже этот параллелограмм заштрихован). Сторонам параллелограмма, противолежащим отложенным нами векторам a_1 и a_2 , припишем направления, противоположные направлениям векторов a_1 и a_2 ; направлениями всех четырех сторон определяется *направление обхода* периметра параллелограмма.



Черт. 99.

Построим теперь новый вектор a_3 следующим образом.

Величину вектора a_3 примем равной площади только что построенного параллелограмма и отложим этот вектор от точки O перпендикулярно к плоскости параллелограмма, притом в такую сторону, чтобы для наблюдателя, расположенного по вектору a_3 , направление обхода периметра параллелограмма было противоположно направлению движения часовой стрелки (это правило определения направления вектора a_3 условимся называть *правилом обхода* параллелограмма).

Вектор a_3 называется векторным произведением векторов a_1 и a_2 . Векторное произведение векторов a_1 и a_2 обозначается символом $a_1 \times a_2$, так что

$$a_3 = a_1 \times a_2.$$

Легко видеть, что понятие векторного произведения действительно является обобщением понятия момента силы относительно точки. Положим, дана сила F , приложенная в точке A ; составим ее момент M относительно точки O , как объяснено в предыдущем параграфе

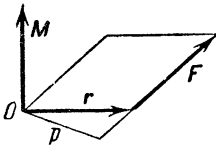
(черт. 100). С другой стороны, припишем радиусу-вектору \overline{OA} точки приложения A направление от точки O к точке A и обозначим этот радиус-вектор через r . Легко видеть, что момент M , численно равный площади параллелограмма, построенного на векторах r и F , и по величине и по направлению совпадает с векторным произведением этих двух векторов, так что

$$M = r \times F.$$

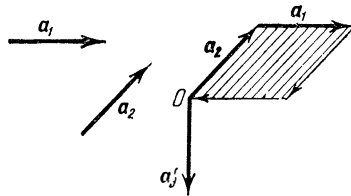
Этой векторной формулой выражается связь между моментом M , радиусом-вектором r и силой F .

Возвращаясь к векторному произведению двух каких-либо векторов a_1 и a_2 , отметим любопытное свойство векторного произведения.

Возьмем опять векторы a_1 и a_2 (черт. 101) и составим (как объяснено выше) векторное произведение $a_2 \times a_1$. Для этой цели



Черт. 100.



Черт. 101.

откладываем от произвольной точки O вектор a_2 , из конца его проводим вектор a_1 и на отложенных векторах строим параллелограмм. Легко видеть, что мы приходим к тому же параллелограмму, который был построен на черт. 99; однако направление обхода мы получаем теперь противоположное тому, что имели на черт. 99. Обозначая векторное произведение $a_2 \times a_1$ через a'_3 , мы заключаем, что вектор a'_3 численно равен вектору a_3 , построенному на черт. 99; однако вектору a'_3 мы должны приписать направление, противоположное направлению вектора a_3 . Итак, векторы a_3 и a'_3 имеют равные численные значения, но противоположные направления, т. е.

$$a'_3 = -a_3,$$

или иначе:

$$a_2 \times a_1 = -a_1 \times a_2.$$

Мы приходим к важному свойству векторного произведения: *векторное произведение двух векторов меняет знак при перестановке сомножителей.*

§ 49. Момент силы относительно оси

Рядом с понятием момента относительно точки введем новое понятие момента силы относительно оси.

Положим, даны сила F и ось z (черт. 102); оси z приписываем определенное направление, которое указано стрелкой. Проведем плоскость P перпендикулярно к оси z и спроектируем силу F на эту плоскость; обозначим проекцию A_1B_1 силы F на плоскость P буквой F_1 . Затем из точки O , в которой ось z пересекает плоскость P , опустим перпендикуляр на линию действия только что построенной проекции F_1 . Этот перпендикуляр назовем плечом силы F относительно оси z ; длину плеча обозначим буквой p_1 . (Плечо p_1 есть кратчайшее расстояние между линией действия силы F и осью z .)

Моментом силы F относительно оси z называется взятое со знаком $+$ или $-$ произведение величины проекции силы F_1 на длину плеча p_1 . Обозначая момент силы F относительно оси z через M_z , имеем:

$$M_z = \pm F_1 p_1.$$

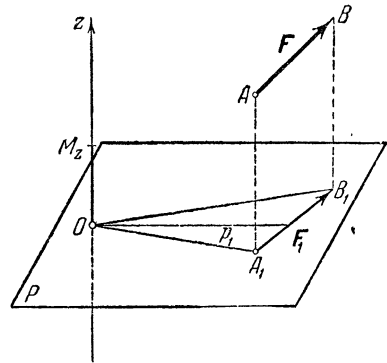
Тот или другой знак в этом выражении будем определять по следующему правилу. Если для наблюдателя, смотрящего со стороны положительной оси z , сила F представляется вращающей вокруг оси z против направления вращения часовой стрелки, в выражении момента M_z будем брать знак $+$; в противном случае берем знак $-$.

Определенный таким образом момент M_z условимся откладывать от точки O по оси z в сторону положительной оси z , если $M_z > 0$, и в сторону отрицательной оси z , если $M_z < 0$.

Произведение $F_1 p_1$ равно удвоенной площади треугольника OA_1B_1 (черт. 102). Следовательно, имеем еще другое выражение момента силы F относительно оси z :

$$M_z = \pm 2 \Delta OA_1B_1.$$

Важно заметить, что момент M_z обращается в нуль в двух случаях. Мы имеем $M_z = 0$: 1) если $F_1 = 0$, т. е. если сила F параллельна оси z , 2) если $p_1 = 0$, т. е. линия действия силы F пересекает ось z .



Черт. 102.

§ 50. Зависимость между моментом силы относительно точки и моментом силы относительно оси

Дана сила F (черт. 103). Возьмем какую-либо точку O и построим момент M силы F относительно точки O . Имеем:

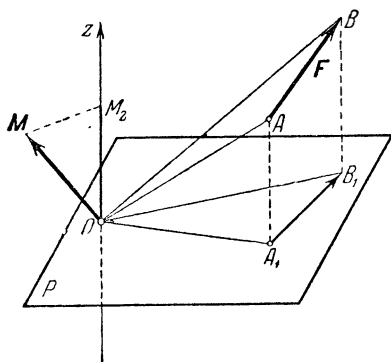
$$M = 2 \Delta OAB;$$

направление момента M перпендикулярно к плоскости треугольника OAB .

Затем проведем через точку O какую-либо ось z (которой припишем определенное направление, указанное стрелкой) и составим момент M_z силы F относительно оси z . Имеем:

$$M_z = 2 \Delta OA_1B_1,$$

где $\overline{A_1B_1}$ есть проекция силы F на плоскость P , проходящую через точку O и перпендикулярную к оси z ; соответственно черт. 103 мы взяли в выражении момента M_z знак $+$. Момент M_z мы откладываем от точки O по оси z (в сторону положительной оси z , так как $M_z > 0$).



Черт. 103.

Треугольник OA_1B_1 представляет проекцию треугольника OAB на плоскость P . Следовательно, по известной теореме геометрии, площадь треугольника OA_1B_1 равна площади треугольника OAB , умноженной на косинус угла между плоскостью треугольника OAB и плоскостью P . Но угол между двумя плоскостями равен углу между перпендикулярами к этим плоскостям, т. е. в данном случае углу (M, z) между направлением момента M и осью z . Итак, имеем:

$$\Delta OAB \cos (M, z) = \Delta OA_1B_1.$$

Умножая обе части этого равенства на 2, получаем:

$$2 \Delta OAB \cos (M, z) = 2 \Delta OA_1B_1$$

или

$$M \cos (M, z) = M_z,$$

т. е. проекция момента силы F относительно точки O на ось z , проходящую через точку O , равна моменту силы F относительно оси z .

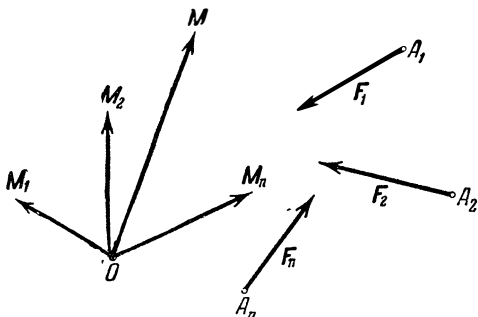
Такова зависимость между моментом силы относительно точки и моментом силы относительно оси. Следует обратить особое

внимание на эту важную теорему; нам придется в дальнейшем неоднократно ею пользоваться и не только в статике, но и в динамике.

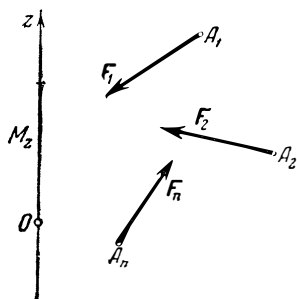
Мы вывели эту зависимость между моментами M и M_z , предполагая, что $M_z > 0$; предоставляем читателю убедиться, что эта зависимость остается справедливой и в случае $M_z < 0$.

§ 51. Главный момент системы сил относительно точки и относительно оси

Даны силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные в точках A_1, A_2, \dots, A_n и направленные как угодно в пространстве (черт. 104). Возьмем произвольную точку O и построим моменты данных сил относительно точки O ; обозначим эти моменты через M_1, M_2, \dots, M_n .



Черт. 104.



Черт. 105.

Сумма моментов M_1, M_2, \dots, M_n называется *главным моментом системы сил F_1, F_2, \dots, F_n относительно точки O* . Обозначая этот главный момент буквой M , имеем:

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n.$$

Даны опять силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные в точках A_1, A_2, \dots, A_n и направленные как угодно в пространстве (черт. 105). Возьмем произвольную ось z (которой припишем направление, указанное на чертеже стрелкой) и составим моменты данных сил относительно оси z ; обозначим эти моменты через $M_{1z}, M_{2z}, \dots, M_{nz}$.

Сумма моментов $M_{1z}, M_{2z}, \dots, M_{nz}$ называется *главным моментом системы сил F_1, F_2, \dots, F_n относительно оси z* . Обозначая этот главный момент буквой M_z , имеем:

$$M_z = M_{1z} + M_{2z} + \dots + M_{nz}.$$

Главный момент M_z как сумма положительных и отрицательных

слагаемых может быть и положительным и отрицательным. Условимся откладывать главный момент M_z по оси z от произвольной точки O , лежащей на этой оси, в сторону положительной оси z , если $M_z > 0$, и в сторону отрицательной оси z , если $M_z < 0$.

§ 52. Зависимость между главными моментами системы сил относительно точки и относительно оси

Дана система сил F_1, F_2, \dots, F_n (черт. 106). Возьмем произвольную точку O и построим моменты M_1, M_2, \dots, M_n данных сил относительно точки O , а также их главный момент M относительно этой точки.

Затем проведем через точку O произвольную ось z (которой припишем направление, указанное на чертеже стрелкой) и спроектируем как моменты M_1, M_2, \dots, M_n , так и главный момент M на эту ось. Так как главный момент M равен сумме моментов M_1, M_2, \dots, M_n , а проекция суммы равна сумме проекций составляющих, то имеем:

$$M \cos(M, z) = \sum M_i \cos(M_i z).$$

С другой стороны, на основании уже известной нам зависимости между моментами силы относительно точки и относительно оси имеем:

$$M_i \cos(M_i, z) = M_{iz},$$

где $M_{1z}, M_{2z}, \dots, M_{nz}$ суть моменты данных сил F_1, F_2, \dots, F_n относительно оси z . Следовательно, получаем:

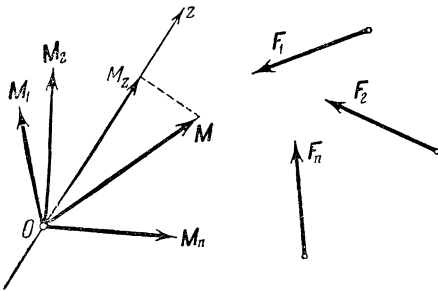
$$M \cos(M, z) = \sum M_{iz}.$$

Но сумма, стоящая в правой части этого равенства, равна главному моменту M_z данной системы сил относительно оси z . Итак, окончательно получаем:

$$M \cos(M, z) = M_z,$$

т. е. проекция главного момента системы сил относительно некоторой точки O на ось, проходящую через точку O , равна главному моменту системы сил относительно этой оси.

Следовательно, между главными моментами сил относительно точки и относительно оси существует такая же зависимость, какая имеет место между моментами отдельной силы относительно точки и относительно оси.



Черт. 106.

ГЛАВА X

СЛОЖЕНИЕ СИЛ, РАСПОЛОЖЕННЫХ КАК УГОДНО
В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 53. Приведение силы к данной точке

Обратимся теперь к вопросу о сложении сил, приложенных в различных точках твердого тела и направленных как угодно в пространстве. Для решения этого вопроса мы воспользуемся тем же способом приведения всех сил к одной точке, которым мы уже имели случай пользоваться в главе IV при сложении сил, лежащих в одной плоскости.

Напомним прежде всего, каким образом данная сила приводится к данной точке.

Дана сила F , приложенная в точке A (черт. 107). Возьмем произвольную точку O и приложим в ней две взаимно уравновешивающиеся силы, из коих одна равна силе F (эта сила отмечена на черт. 107 двумя черточками), другая же численно равна силе F , но направлена в противоположную сторону (мы её обозначим через $-F$).

Данная сила F заменена силой F , приложенной в точке O (и отмеченной на чертеже двумя черточками), и парой $F, -F$, которую мы называем присоединенной парой.

Замену данной силы F , приложенной в точке A , силой F , приложенной в точке O , и присоединенной парой $F, -F$ мы и называем приведением данной силы F к точке O .

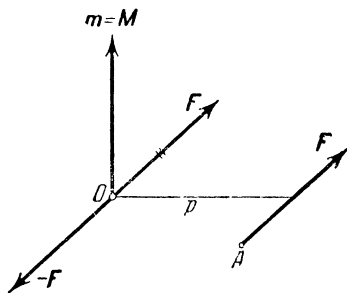
Найдем момент m присоединенной пары. Опустя перпендикуляр из точки O на линию действия данной силы F , получим плечо p пары; величина m момента пары равна

$$m = Fp;$$

момент m направлен перпендикулярно к плоскости, проходящей через точку O и через данную силу F , в такую сторону, чтобы для наблюдателя, расположенного по моменту m , пара представлялась вращающей свою плоскость против направления вращения часовой стрелки. Так как момент пары может быть перенесен в любую точку пространства, то отложим момент m по указанному направлению от точки O .

Построим теперь момент M данной силы F относительно точки O . Величина M момента равна

$$M = Fp = m,$$



Черт. 107.

направление же момента M совпадает с направлением момента пары m , т. е. моменты m и M равны:

$$m = M.$$

Итак, *момент присоединенной пары равен моменту данной силы F относительно точки O .*

§ 54. Приведение системы сил, расположенных как угодно в пространстве, к силе и паре

Обращаемся теперь к задаче сложения сил, приложенных в различных точках твердого тела и направленных как угодно в пространстве.

Даны силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные в точках A_1, A_2, \dots, A_n какого-либо твердого тела и направленные как угодно в пространстве (черт. 108).

Возьмем произвольную точку O , которую назовем центром приведения, и приведем все данные силы к точке O .

В результате этого приведения получим силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные в точке O и отмеченные на чертеже двумя черточками, и присоединенные пары $F_1, -F_1; F_2, -F_2; \dots; F_n, -F_n$. Обозначая моменты этих пар буквами m_1, m_2, \dots, m_n , имеем, согласно замеченному выше:

$$m_1 = M_1, m_2 = M_2, \dots, m_n = M_n,$$

где M_1, M_2, \dots, M_n суть моменты данных сил F_1, F_2, \dots, F_n относительно точки O .

Складывая силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные в точке O и отмеченные двумя черточками, получаем их равно-

действующую R , которая приложена в той же точке O и равна сумме составляющих сил

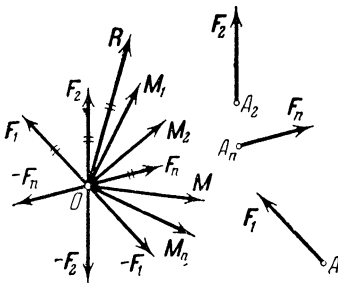
$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n.$$

На черт. 108 эта сила R также отмечена двумя черточками. Складывая же присоединенные пары, получаем равнодействующую пару, момент которой m равен сумме моментов составляющих пар, т. е.

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n = M_1 + M_2 + \dots + M_n.$$

Но сумма моментов M_1, M_2, \dots, M_n равна главному моменту M данных сил F_1, F_2, \dots, F_n относительно точки O . Следовательно,

$$m = M,$$



Черт. 108.

т. е. момент равнодействующей пары равен главному моменту данных сил относительно точки O .

Заметим, что сумма R данных сил иначе называется их *главным вектором*. Вводя этот термин, мы можем формулировать полученный результат следующим образом:

Силы, расположенные как угодно в пространстве, всегда могут быть приведены к одной силе, равной их главному вектору и приложенной в произвольной точке O , и к паре, момент которой равен главному моменту данных сил относительно точки O .

Приводя данную систему сил указанным способом к силе и паре, мы встретимся с одним из следующих четырех случаев, которые рассмотрим последовательно в §§ 55—58.

§ 55. Случай, когда силы находятся в равновесии

Предположим, что *главный вектор R и главный момент M равны нулю*.

Так как $R=0$, то силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные в точке O и отмеченные на черт. 108 двумя черточками, взаимно уравновешиваются, так как $M=0$, то и присоединенные пары также взаимно уравновешиваются. Следовательно, в рассматриваемом случае данные силы F_1, F_2, \dots, F_n *находятся в равновесии*.

Итак, силы, приложенные в различных точках твердого тела и направленные как угодно в пространстве, взаимно уравновешиваются при выполнении *двух условий*: их главный вектор R и главный момент M (относительно произвольной точки O) должны равняться нулю:

$$R=0, M=0.$$

Таковы *условия равновесия* сил, расположенных как угодно в пространстве.

§ 56. Случай, когда силы приводятся к паре

Предположим, что *главный вектор R равен нулю, главный момент M не равен нулю*.

Так как $R=0$, то силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные в точке O и отмеченные двумя черточками, взаимно уравновешиваются. Остается пара, полученная от сложения присоединенных пар. Следовательно, в настоящем случае данные нам силы приводятся к *паре*.

Момент этой пары m равен главному моменту M данных сил относительно точки O :

$$m=M.$$

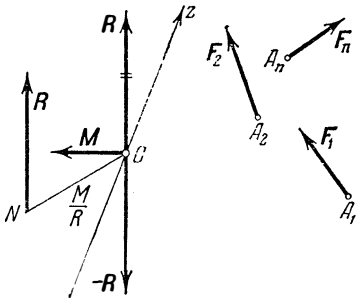
**§ 57. Случай, когда силы приводятся к равнодействующей.
Теорема о моменте равнодействующей**

Предположим теперь, что *главный вектор R не равен нулю, главный момент M или равен нулю или перпендикулярен к главному вектору.*

Покажем, что в этом случае данные силы приводятся к одной *равнодействующей.*

Рассмотрим отдельно случаи $M=0$ и $M \neq 0$.

Предположим сначала, что главный момент M равен нулю. В таком случае присоединенные пары взаимно уравниваются, и остается одна сила R , приложенная в точке O и полученная от сложения сил, отмеченных на черт. 108 двумя черточками. Итак, данные нам силы F_1, F_2, \dots, F_n приводятся к одной равнодействующей, равной их главному вектору R и приложенной в центре приведения O .



Черт. 109.

Предположим теперь, что главный момент M не равен нулю, но перпендикулярен к главному вектору R .

Мы имеем силу R , приложенную в точке O (и отмеченную двумя черточками), и пару с моментом M , перпендикулярным к R (черт. 109). Распорядимся этой парой следующим образом. Возьмем силы, составляющие пару, численно равными R ; тогда плечо этой пары придется взять равным $\frac{M}{R}$.

Расположим пару так, чтобы одна из сил пары (на черт. 109 она обозначена через $-R$) была приложена в точке O и была направлена в сторону, противоположную направлению силы R ; другая сила пары равна силе R и приложена в точке N , лежащей на перпендикуляре, восстановленном в точке O к плоскости, проходящей через R и через M на расстоянии $M:R$ от точки O ; при этом перпендикуляр должен быть восстановлен в такую сторону от точки O , чтобы для наблюдателя, расположенного по моменту M , пара представлялась вращающей свою плоскость против часовой стрелки. Две силы R и $-R$, приложенные в точке O , взаимно уравниваются; остается одна сила R , приложенная в точке N . Следовательно, данные нам силы F_1, F_2, \dots, F_n приводятся к одной равнодействующей, равной их главному вектору R и приложенной в точке N .

Итак, если главный вектор R не равен нулю, а главный момент M или равен нулю или перпендикулярен к главному вектору, то данные силы приводятся к одной *равнодействующей.*

В начале курса (в § 8) было замечено, что не всякая система сил имеет равнодействующую. Мы видим теперь, что условие, при

котором система сил приводится к одной равнодействующей, состоит в том, чтобы главный вектор данной системы сил не был равен нулю, а главный момент (относительно некоторой точки) был или равен нулю, или перпендикулярен к главному вектору.

Отметим здесь различие понятий равнодействующей и главного вектора. Равнодействующая (если она существует) вполне заменяет данную систему сил и имеет определенную линию действия в теле. Главный вектор заменяет данную систему сил только в сочетании с соответствующей присоединенной парой сил и может быть построен в произвольной точке тела.

Покажем теперь, что в том случае, когда данные нам силы F_1, F_2, \dots, F_n приводятся к одной равнодействующей, *момент равнодействующей относительно какой угодно точки равен сумме моментов составляющих сил относительно той же точки, а момент равнодействующей относительно какой угодно оси равен сумме моментов составляющих относительно той же оси.*

Вернемся к черт. 109. Составим момент равнодействующей R , приложенной в точке N , относительно центра приведения O . Обозначая этот момент через $M(R)$, имеем:

$$M(R) = R \cdot \frac{M}{R} = M;$$

определяя же направление момента $M(R)$ согласно известному правилу, видим, что оно совпадает с направлением главного момента M . Следовательно, момент $M(R)$ равен главному моменту M :

$$M(R) = M.$$

С другой стороны, главный момент M относительно точки O равен сумме моментов M_1, M_2, \dots, M_n данных сил F_1, F_2, \dots, F_n относительно той же точки:

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n.$$

Следовательно:

$$M(R) = M_1 + M_2 + \dots + M_n,$$

т. е. момент равнодействующей относительно центра приведения равен сумме моментов составляющих сил относительно той же точки. Так как центр приведения есть точка совершенно произвольная, то отсюда вытекает первая часть доказываемой теоремы.

Проведем теперь через центр приведения O какую-либо ось z (черт. 109) и составим момент равнодействующей R (приложенной в точке N) относительно оси z ; обозначим этот момент через $M_z(R)$.

По известной теореме, момент $M_z(R)$ равен проекции на ось z момента $M(R)$ равнодействующей R относительно точки O , а так как

$$M(R) = M,$$

то, следовательно, момент $M_z(\mathbf{R})$ равен проекции на ось z главного момента \mathbf{M} :

$$M_z(\mathbf{R}) = M \cos(\mathbf{M}, z).$$

Но, с другой стороны, проекция главного момента \mathbf{M} на ось z равна главному моменту M_z данных сил относительно оси z :

$$M \cos(\mathbf{M}, z) = M_z,$$

и, следовательно:

$$M_z(\mathbf{R}) = M_z.$$

Вспоминая, что главный момент M_z равен сумме моментов M_{1z} , M_{2z} , ..., M_{nz} данных сил \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , ..., \mathbf{F}_n относительно оси z :

$$M_z = M_{1z} + M_{2z} + \dots + M_{nz},$$

получаем:

$$M_z(\mathbf{R}) = M_{1z} + M_{2z} + \dots + M_{nz},$$

т. е. момент равнодействующей относительно оси z равен сумме моментов составляющих относительно той же оси. Имея в виду, что ось z есть совершенно произвольная ось, получаем вторую часть доказываемой теоремы.

§ 58. Случай, когда силы приводятся к динаме.

Центральная ось

Предположим, что *главный вектор \mathbf{R} не равен нулю, главный момент \mathbf{M} не равен нулю и не перпендикулярен к главному вектору.*

Мы имеем силу \mathbf{R} , приложенную в точке O (отмеченную двумя черточками), и пару с моментом \mathbf{M} (черт. 110). Разложим эту пару на две пары так, чтобы плоскость одной составляющей пары была перпендикулярна к главному вектору \mathbf{R} , а плоскость другой составляющей пары была бы ему параллельна. Для этого разлагаем (по правилу параллелограмма моментов) момент \mathbf{M} на два момента \mathbf{M}_0 и \mathbf{M}_1 , направленные один по линии действия силы \mathbf{R} , другой — перпендикулярно к силе \mathbf{R} . Величина этих составляющих моментов суть:

$$M_0 = M \cos(\mathbf{M}, \mathbf{R}), \quad M_1 = M \sin(\mathbf{M}, \mathbf{R}).$$

Возьмем силы, составляющие пару с моментом \mathbf{M}_1 , равными по величине R ; тогда плечо этой пары мы должны взять равным $M_1 : R$. Затем расположим эту пару так, чтобы одна из сил пары была приложена в точке O и была направлена противоположно силе \mathbf{R} ; другая сила пары будет приложена в точке N , лежащей на перпендикуляре, восстановленном в точке O к плоскости, проходящей через \mathbf{R} и через \mathbf{M} на расстоянии $M_1 : R$ от точки O ; при этом перпендикуляр должен быть восстановлен в такую сторону от точки O , чтобы

для наблюдателя, расположенного по моменту M_1 , пара представлялась вращающей свою плоскость против часовой стрелки. Две силы R и $-R$, приложенные в точке O , взаимно уравниваются; остается сила R , приложенная в точке N , и пара с моментом M_0 , плоскость которой перпендикулярна к главному вектору R . Момент этой пары M_0 перенесем в точку N (не изменяя его направления).

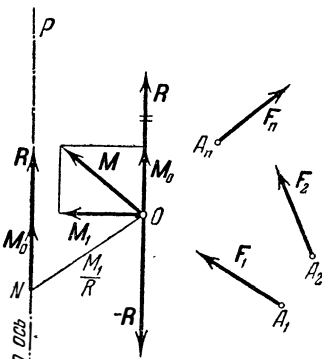
Итак, точка N обладает тем свойством, что, взяв её за центр приведения, мы получаем силу, равную главному вектору R , приложенную в точке N , и пару, момент которой M_0 параллелен силе R , а плоскость которой, следовательно, перпендикулярна к силе R . Система силы и пары, лежащей в плоскости, перпендикулярной к силе, называется *винтовым усилием, силовым винтом* или *динамой*. Очевидно, указанным свойством обладают не только точка N , но и все точки прямой NP , проходящей через N и параллельной главному вектору, ибо точку приложения силы R можно перенести в любую точку этой ее линии действия.

Если же мы перенесем точку приложения силы R в любую точку O , не лежащую на прямой NP , то согласно правилу приведения силы к точке (§ 53) появится присоединенная пара с моментом M_1 , равным моменту силы R , приложенной в точке N , относительно центра O . Момент M_1 , очевидно, перпендикулярен к R . Складывая моменты M_0 и M_1 , мы получим главный момент данной системы сил относительно точки O :

$$M = M_0 + M_1. \quad (1)$$

Следовательно, для любого центра приведения, не лежащего на прямой NP , главный момент, имея кроме параллельной слагающей M_0 также слагающую M_1 , перпендикулярную к главному вектору, не будет параллелен главному вектору. Поэтому прямая NP есть геометрическое место центров приведения, для которых главный момент параллелен главному вектору. Эта прямая называется *центральной осью* данной системы сил.

Очевидно, что каждой системе сил, для которой $R \neq 0$, соответствует одна, вполне определенная центральная ось. Главный вектор системы сил по самому определению не зависит от положения центра приведения. Что касается составляющей M_0 главного момента по направлению главного вектора, то она также не зависит от выбора центра приведения. В самом деле, векторное равенство (1) показывает, что при переходе к любому центру приведения главный момент M получается путем прибавления к M_0 момента M_1 ,



Черт. 110.

перпендикулярного к главному вектору; следовательно, составляющая главного момента, параллельная главному вектору, остается одной и той же при любом выборе центра приведения. Итак, любая система сил, для которой $\mathbf{R} \neq 0$, может быть приведена к динаме единственным способом. Эта динама состоит из силы, равной главному вектору данной системы сил, линией действия которой служит центральная ось системы, и пары, момент которой равен составляющей главного момента, параллельной главному вектору.

Заметим, что результат, установленный в § 57, можно рассматривать как частный случай этого общего результата. В этом случае $M_0 = 0$, и динама сводится к одной только силе \mathbf{R} . Центральная ось в этом случае является линией действия равнодействующей. В случае § 56 сила \mathbf{R} отсутствует, и динама сводится к одной только паре; за центральную ось может быть принята любая прямая, параллельная моменту пары. В случае § 55 в составе динамики отсутствуют как сила, так и пара.

Вернемся к черт. 110. Обозначая расстояние центра приведения O от центральной оси через r , имеем:

$$M_1 = rR,$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} M &= \sqrt{M_0^2 + M_1^2} = \sqrt{M_0^2 + r^2 R^2}, \\ \cos(\mathbf{M}, \mathbf{R}) &= \frac{M_0}{\sqrt{M_0^2 + r^2 R^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где M есть величина главного момента относительно любого центра приведения O , а M_0 — проекция главного момента на главный вектор, сохраняющая согласно предыдущему постоянное значение. Из формул (2) следует:

1. Для всех центров приведения, находящихся на одном и том же расстоянии r от центральной оси (т. е. лежащих на поверхности кругового цилиндра, ось которого есть центральная ось данной системы сил и радиус основания которого равен r), главный момент M имеет одну и ту же величину и образует один и тот же угол с главным вектором \mathbf{R} . Этим обстоятельством объясняется термин «центральная ось».

2. Величина главного момента возрастает с возрастанием r и получает наименьшее значение при $r = 0$, когда мы имеем:

$$M = |M_0|.$$

Итак, для точек центральной оси величина главного момента имеет наименьшее значение, равное абсолютному значению проекции главного момента \mathbf{M} (относительно произвольной точки O) на направление главного вектора \mathbf{R} .

§ 59. Векторное произведение двух геометрических сумм. Проекция векторного произведения двух векторов на оси координат

Применим теорему о моменте равнодействующей к выводу одного преобразования векторной алгебры.

Положим, нам даны две силы F_1 и F_2 , приложенные в одной и той же точке A (черт. 111). Построим равнодействующую R этих сил; она приложена в той же точке A и равна сумме сил F_1 и F_2 :

$$R = F_1 + F_2.$$

Обозначая моменты сил R , F_1 и F_2 относительно какой-либо точки O через M , M_1 и M_2 , будем иметь по теореме о моменте равнодействующей:

$$M = M_1 + M_2.$$

С другой стороны, в § 48 мы видели, что момент силы F относительно данной точки может быть представлен как векторное произведение $r \times F$, где r — радиус-вектор, проведенный из данной точки в точку приложения силы. Следовательно, обозначая радиус-вектор \overrightarrow{OA} через r , будем иметь:

$$M = r \times R, \quad M_1 = r \times F_1, \quad M_2 = r \times F_2.$$

Подставляя эти значения моментов в предыдущее равенство находим:

$$r \times R = r \times F_1 + r \times F_2,$$

или

$$r \times (F_1 + F_2) = r \times F_1 + r \times F_2.$$

Выражаемый этим равенством факт имеет чисто геометрический характер; он не связан с физической природой векторов r , F_1 и F_2 . Поэтому найденное тождество может быть распространено на любые другие векторы. Возьмем какие-нибудь три вектора a , b и c . Применяя к ним только что полученную формулу, будем иметь:

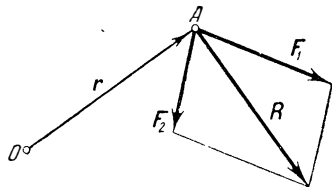
$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c. \quad (1)$$

Эта формула может быть еще обобщена. Возьмем четыре вектора a , b , c , d . Применяя полученную формулу к векторному произведению $(a + b) \times (c + d)$, будем иметь:

$$(a + b) \times (c + d) = (a + b) \times c + (a + b) \times d.$$

Далее, вспоминая, что векторное произведение меняет знак при перестановке множителей, имеем:

$$(a + b) \times c = -c \times (a + b).$$



Черт. 111.

Применяя опять формулу (1) к векторному произведению, стоящему в правой части этого равенства, получим:

$$(a + b) \times c = -c \times a - c \times b = a \times c + b \times c.$$

Точно так же найдем:

$$(a + b) \times d = a \times d + b \times d.$$

Окончательно получаем:

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + b \times c + a \times d + b \times d.$$

Мы получили формулу для векторного произведения двух векторных сумм $a + b$ и $c + d$. Легко было бы распространить эту формулу на случай сумм, состоящих из любого числа слагаемых. Итак, чтобы перемножить векторно две суммы, нужно перемножить попарно каждое слагаемое одной суммы на каждое слагаемое второй суммы и результаты сложить. Как видно, правило перемножения многочленов, известное из элементарной алгебры, остается справедливым и в векторной алгебре.

Выведем теперь формулы для проекций на координатные оси векторного произведения двух векторов.

Возьмем два вектора a и b и составим их векторное произведение

$$c = a \times b.$$

Возьмем затем взаимно перпендикулярные оси x, y, z и обозначим проекции векторов a, b и c на эти оси соответственно через $a_x, a_y, a_z; b_x, b_y, b_z; c_x, c_y, c_z$. Требуется выразить проекции вектора c через проекции векторов a и b .

Вводя единичные векторы i, j, k , направленные по осям x, y, z , имеем:

$$\begin{aligned} a &= a_x i + a_y j + a_z k, \\ b &= b_x i + b_y j + b_z k. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в векторное произведение $a \times b$ и пользуясь правилом векторного перемножения двух сумм, имеем:

$$\begin{aligned} c = a \times b &= a_x b_x (i \times i) + a_y b_x (j \times i) + a_z b_x (k \times i) + \\ &+ a_x b_y (i \times j) + a_y b_y (j \times j) + a_z b_y (k \times j) + \\ &+ a_x b_z (i \times k) + a_y b_z (j \times k) + a_z b_z (k \times k). \end{aligned}$$

Заметим теперь очевидные равенства:

$$\begin{aligned} i \times i &= j \times j = k \times k = 0, \\ j \times k &= -(k \times j) = i, \quad k \times i = -(i \times k) = j, \\ i \times j &= -(j \times i) = k. \end{aligned}$$

На основании этих равенств будем иметь:

$$c = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}.$$

Такова формула разложения векторного произведения c на составляющие по осям x , y , z . Сопоставляя эту формулу с равенством

$$c = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k},$$

получаем искомые формулы для проекций векторного произведения:

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad c_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad c_z = a_x b_y - a_y b_x.$$

В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться этими формулами.

§ 60. Выражения моментов силы относительно координатных осей через проекции силы на те же оси

Воспользуемся полученными в § 59 формулами проекций на координатные оси векторного произведения двух векторов для вывода часто применяемых выражений моментов силы относительно координатных осей через проекции силы на те же оси.

Дана сила F , приложенная в точке A (черт. 112). Возьмем три взаимно перпендикулярные координатные оси x , y , z , которым соответствуют орты \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} . Радиус-вектор точки A относительно начала координат обозначим через r . Как было показано в § 48, момент M силы F относительно начала координат выражается формулой

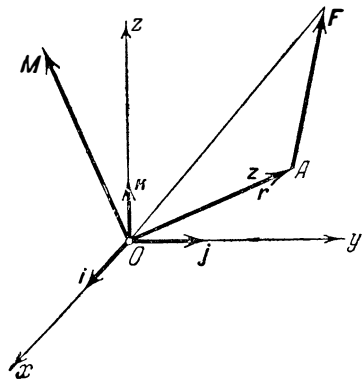
$$M = r \times F.$$

Разложим векторы M , r и F на составляющие по осям координат:

$$M = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k},$$

$$r = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k},$$

$$F = X \mathbf{i} + Y \mathbf{j} + Z \mathbf{k}.$$



Черт. 112.

Применяя выведенные в предыдущем параграфе формулы для проекций на оси координат векторного произведения, получим:

$$M_x = yZ - zY,$$

$$M_y = zX - xZ,$$

$$M_z = xY - yX.$$

Здесь M_x , M_y и M_z обозначают проекции на координатные оси момента силы F относительно начала координат, которые согласно § 50 равны моментам силы F относительно соответствующих осей.

§ 61. Вычисление главного вектора и главного момента по способу проекций

Перейдем теперь к составлению формул для вычисления главного вектора R и главного момента M по способу проекций.

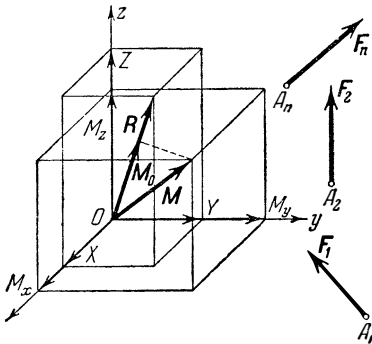
Даны силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные в точках A_1, A_2, \dots, A_n и расположенные как угодно в пространстве (черт. 113). Выбираем произвольный центр приведения O и приводим данные силы, как было объяснено выше, к одной силе, приложенной в точке O и равной главному вектору R , и к одной паре, момент которой равен главному моменту M относительно точки O . Мы знаем, что

$$\begin{aligned} R &= F_1 + F_2 + \dots + F_n, \\ M &= M_1 + M_2 + \dots + M_n, \end{aligned}$$

где M_1, M_2, \dots, M_n суть моменты данных сил относительно точки O .

Для вычисления главного вектора R и главного момента M воспользуемся методом проекций.

Проведем через центр приведения O три взаимно перпендикулярные оси x, y, z и спроектируем, как показано на черт. 113,



Черт. 113.

главный вектор R на эти оси; обозначим проекции главного вектора на оси x, y, z буквами X, Y, Z . Так как главный вектор R равен сумме сил F_1, F_2, \dots, F_n , то по теореме о проекции суммы векторов имеем:

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_n, & Y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, \\ Z &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n, \end{aligned}$$

где X_1, X_2, \dots, X_n суть проекции данных сил F_1, F_2, \dots, F_n соответственно на оси x, y, z .

Вычислив проекции главного вектора по только что написанным формулам, находим величину главного вектора (как диагональ прямоугольного параллелепипеда, построенного на проекциях X, Y, Z) по формуле:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Далее имеем:

$$X = R \cos(R, x), \quad Y = R \cos(R, y), \quad Z = R \cos(R, z),$$

откуда следует:

$$\cos(R, x) = \frac{X}{R}, \quad \cos(R, y) = \frac{Y}{R}, \quad \cos(R, z) = \frac{Z}{R}.$$

Этими формулами определяется направление главного вектора.

Переходя к вычислению главного момента \mathbf{M} , проектируем его на оси x , y , z . Для этого строим прямоугольный параллелепипед, ребра которого параллельны осям x , y , z и в котором главный момент \mathbf{M} является диагональю. Ребра этого прямоугольного параллелепипеда и будут проекциями главного момента \mathbf{M} на оси x , y , z .

Вспоминая зависимость между главным моментом относительно точки и главным моментом относительно оси, мы заключаем, что только что построенные проекции главного момента \mathbf{M} на оси x , y , z равны главным моментам M_x , M_y , M_z относительно осей x , y , z . Эти главные моменты M_x , M_y , M_z вычисляются по формулам

$$M_x = M_{1x} + M_{2x} + \dots + M_{nx}, \quad M_y = M_{1y} + M_{2y} + \dots + M_{ny}, \\ M_z = M_{1z} + M_{2z} + \dots + M_{nz},$$

где M_{1x} , M_{2x} , ..., M_{nx} суть моменты данных сил F_1 , F_2 , ..., F_n соответственно относительно осей x , y , z .

Затем находим величину главного момента \mathbf{M} (как диагональ прямоугольного параллелепипеда) по формуле:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

Далее имеем:

$$M_x = M \cos(\mathbf{M}, x), \quad M_y = M \cos(\mathbf{M}, y), \quad M_z = M \cos(\mathbf{M}, z),$$

откуда следует:

$$\cos(\mathbf{M}, x) = \frac{M_x}{M}, \quad \cos(\mathbf{M}, y) = \frac{M_y}{M}, \quad \cos(\mathbf{M}, z) = \frac{M_z}{M}.$$

Этими формулами определяется направление главного момента \mathbf{M} .

Заметим, что моменты M_{1x} , M_{2x} , ..., M_{nx} данных сил F_1 , F_2 , ..., F_n относительно осей x , y , z могут быть вычислены или на основании самого определения момента силы относительно оси, или при помощи формул, выведенных в § 60. Обозначая координаты точки A_i (т. е. точки приложения силы F_i) относительно осей x , y , z через x_i , y_i , z_i , а проекции силы F_i на те же оси — через X_i , Y_i , Z_i , имеем:

$$M_{ix} = y_i Z_i - z_i Y_i, \\ M_{iy} = z_i X_i - x_i Z_i, \\ M_{iz} = x_i Y_i - y_i X_i.$$

Следовательно, главные моменты M_x , M_y , M_z могут быть вычислены по формулам:

$$M_x = \sum (y_i Z_i - z_i Y_i), \\ M_y = \sum (z_i X_i - x_i Z_i), \\ M_z = \sum (x_i Y_i - y_i X_i),$$

причем суммирование распространено на все значения i от 1 до n .

В заключение вычислим еще величину M_0 наименьшего главного момента данной системы сил.

В конце § 58 было замечено, что величина наименьшего главного момента M_0 равна проекции главного момента \mathbf{M} на направление главного вектора \mathbf{R} . Проектируя главный момент \mathbf{M} на направление главного вектора (черт. 113), получаем:

$$M_0 = M \cos(\mathbf{M}, \mathbf{R}).$$

Применяя к $\cos(\mathbf{M}, \mathbf{R})$ известную из аналитической геометрии формулу для косинуса угла между двумя направлениями, имеем:

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{M}, \mathbf{R}) = & \cos(\mathbf{M}, x) \cos(\mathbf{R}, x) + \\ & + \cos(\mathbf{M}, y) \cos(\mathbf{R}, y) + \cos(\mathbf{M}, z) \cos(\mathbf{R}, z), \end{aligned}$$

откуда, подставляя найденные выше значения косинусов углов, образованных главным вектором \mathbf{R} и главным моментом \mathbf{M} с осями x, y, z , находим:

$$\cos(\mathbf{M}, \mathbf{R}) = \frac{XM_x + YM_y + ZM_z}{RM}.$$

Подставив это значение в формулу для M_0 , получим:

$$M_0 = \frac{XM_x + YM_y + ZM_z}{R}.$$

Величины R и M_0 , очевидно, не зависят от выбора той или иной координатной системы. Отсюда следует, что этим же свойством обладают выражения $X^2 + Y^2 + Z^2$ и $XM_x + YM_y + ZM_z$. Эти выражения получили название *статических инвариантов* данной системы сил.

§ 62. Уравнения равновесия сил, расположенных как угодно в пространстве

Мы видели, что силы F_1, F_2, \dots, F_n , расположенных как угодно в пространстве, находят^{ся} в равновесии, если их главный вектор \mathbf{R} и главный момент \mathbf{M} равны нулю. Мы имеем формулы:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2},$$

откуда видно, что главный вектор \mathbf{R} и главный момент \mathbf{M} обращаются в нуль при выполнении шести условий:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0.$$

Имея в виду формулы для проекций главного вектора X, Y, Z и для главных моментов M_x, M_y, M_z , установленные в предыдущем

параграфе, заключаем, что данные силы F_1, F_2, \dots, F_n находятся в равновесии при выполнении следующих шести уравнений:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + \dots + X_n &= 0, & Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n &= 0, \\ Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n &= 0, \\ M_{1x} + M_{2x} + \dots + M_{nx} &= 0, & M_{1y} + M_{2y} + \dots + M_{ny} &= 0, \\ M_{1z} + M_{2z} + \dots + M_{nz} &= 0. \end{aligned}$$

Таковы уравнения равновесия сил, расположенных как угодно, в пространстве; первые три уравнения будем называть уравнениями проекций, а последние три уравнения — уравнениями моментов.

Заметим, что уравнения моментов могут быть написаны также следующим образом:

$$\sum (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0, \quad \sum (z_i X_i - x_i Z_i) = 0, \quad \sum (x_i Y_i - y_i X_i) = 0$$

где x_i, y_i, z_i суть координаты точки приложения силы F_i .

Так как в рассматриваемом, самом общем случае распределения сил имеем шесть уравнений равновесия, то заключаем, что задача, в которой имеются силы, приложенные в различных точках твердого тела, направленные как угодно в пространстве и находящиеся в равновесии, будет статически определенной, если число неизвестных в ней будет равно шести.

Назовем те оси, на которые проектируются силы при составлении уравнений проекций, осями проекций, а те оси, относительно которых берутся моменты сил при составлении уравнений моментов, осями моментов. В составленных нами шести уравнениях равновесия оси проекций совпадают с осями моментов. Однако, ввиду произвольности осей x, y, z нет необходимости, чтобы оси моментов совпадали с осями проекций. Заметим, что при решении задач оси проекций следует направлять, вообще говоря, перпендикулярно к направлению какой-либо из неизвестных сил, а оси моментов следует брать, вообще говоря, или параллельными одной из неизвестных сил, или пересекающими линию действия одной из неизвестных сил. При таком выборе осей проекций и осей моментов указанные неизвестные силы исключаются из соответствующих уравнений равновесия.

§ 63. Условие равновесия твердого тела с двумя закрепленными точками. Определение опорных реакций

Как пример на применение шести уравнений равновесия твердого тела рассмотрим вопрос о равновесии твердого тела, две точки которого закреплены неподвижно.

Представим себе твердое тело, у которого две точки O_1 и O_2 закреплены неподвижно. При этом условии единственным движением,

которое может совершать данное тело, является вращение вокруг прямой, проходящей через точки O_1 и O_2 . К этому твердому телу приложены силы F_1, F_2, \dots, F_n (черт. 114). Требуется найти условие, которому должны удовлетворять приложенные силы F_1, F_2, \dots, F_n , чтобы данное тело оставалось в равновесии.

К нашему твердому телу, кроме заданных сил F_1, F_2, \dots, F_n , приложены еще две силы, а именно, реакции закрепленных точек O_1 и O_2 ; обозначим эти реакции буквами N_1 и N_2 . Так как под действием сил $F_1, F_2, \dots, F_n, N_1, N_2$ твердое тело должно оставаться в равновесии, то эти силы должны удовлетворять шести уравнениям равновесия.

Выберем взаимно перпендикулярные оси x, y, z следующим образом: за начало координат возьмем одну из закрепленных точек, например точку O_1 ; ось z направим по прямой O_1O_2 (т. е. по оси вращения нашего твердого тела); оси x и y проведем через точку O_1 перпендикулярно к оси вращения O_1O_2 . Реакции закрепленных точек N_1 и N_2 разложим на три составляющие по осям x, y, z ; обозначим величины этих составляющих через N'_{1x}, N_{1y}, N_{1z} и N_{2x}, N_{2y}, N_{2z} . Реакции N_1 и N_2 могут быть заменены их составляющими.

Реакции N_{1x}, N_{1y} и N_{2x}, N_{2y} , направленные перпендикулярно к оси вращения z , назовем боковыми реакциями закрепленных точек, а реакции N_{1z} и N_{2z} , направленные по оси вращения, — продольными реакциями.

Напишем шесть уравнений равновесия для нашего тела. Полагая $O_1O_2 = a$, получим:

$$\sum X_i + N_{1x} + N_{2x} = 0,$$

$$\sum Y_i + N_{1y} + N_{2y} = 0,$$

$$\sum Z_i + N_{1z} + N_{2z} = 0,$$

$$\sum M_{ix} - aN_{2y} = 0,$$

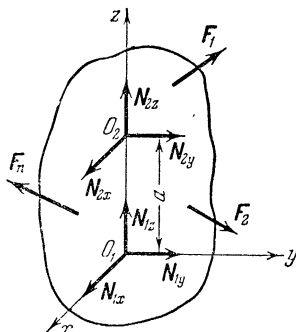
$$\sum M_{iy} + aN_{2x} = 0,$$

$$\sum M_{iz} = 0.$$

Здесь X_i, Y_i, Z_i обозначают проекции силы F_i на оси x, y, z , а M_{ix}, M_{iy}, M_{iz} суть моменты силы F_i относительно тех же осей; суммирование распространено на все значения i от 1 до n .

Последнее уравнение равновесия

$$\sum M_{iz} = 0$$



Черт. 114.

есть единственное, в которое не входят реакции закрепленных точек. Следовательно, это уравнение представляет единственное условие, которому должны удовлетворять приложенные силы F_1, F_2, \dots, F_n для того, чтобы твердое тело оставалось в равновесии.

Итак, *условие равновесия твердого тела с двумя закрепленными точками состоит в том, чтобы сумма моментов приложенных сил относительно оси вращения равнялась нулю.*

Первые пять уравнений равновесия могут послужить для определения реакций закрепленных точек. Из четвертого и пятого уравнений находим:

$$N_{2x} = -\frac{1}{a} \sum M_{iy},$$

$$N_{2y} = \frac{1}{a} \sum M_{ix};$$

затем из первого и второго уравнений получаем:

$$N_{1x} = \frac{1}{a} \sum M_{iy} - \sum X_i,$$

$$N_{1y} = -\frac{1}{a} \sum M_{ix} - \sum Y_i;$$

наконец, из третьего уравнения находим:

$$N_{1z} + N_{2z} = -\sum Z_i.$$

Как видно, боковые реакции определяются вполне; что же касается продольных реакций, то может быть найдена лишь сумма этих реакций; каждая же реакция в отдельности уравнениями равновесия не определяется. В этом смысле задача определения реакций закрепленных точек оказывается задачей статически неопределенной.

Заметим, что статическая неопределенность в нахождении продольных реакций устраняется, если предположить, что точка O_1 закреплена неподвижно, а точка O_2 может свободно (без трения) скользить вдоль оси z . В этом случае продольная реакция N_{2z} обращается в нуль, и третье уравнение равновесия принимает вид:

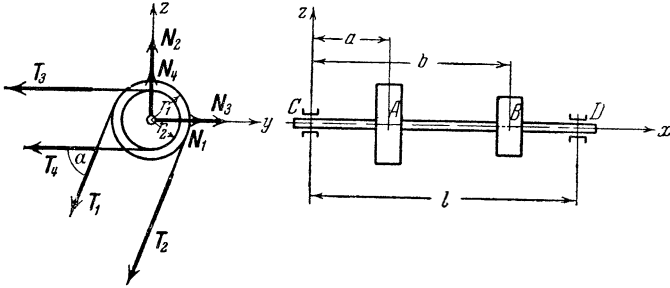
$$\sum Z_i + N_{1z} = 0,$$

откуда получаем:

$$N_{1z} = -\sum Z_i.$$

Пример 21. На валу трансмиссии находятся два шкива A и B для ременной передачи (черт 115). Радиусы шкивов равны r_1 и r_2 ; расстояния шкивов от подшипника C равны a и b ; расстояние между подшипниками C и D равно l . Ветви ремня, надетого на шкив A , образуют угол α с горизонтом; ветви ремня, надетого на шкив B , горизонтальны. Даны натяжения T_1 и T_2 ветвей первого ремня и натяжение T_3 верхней ветви второго ремня. Найти, при каком натяжении T_4 нижней ветви второго ремня вал, находясь под действием приложенных к нему сил, будет оставаться в равновесии, а также определить боковые реакции подшипников, вызываемые натяжениями ремней.

На вал действуют натяжения ремней и реакции подшипников; напишем уравнения равновесия для этих сил. Возьмем взаимно перпендикулярные оси x, y, z , выбрав за начало осей точку C и направив ось x по оси вала; ось y направим горизонтально, ось z — вертикально. Боковые реакции под-



Черт. 115.

шипника C по осям y и z обозначим через N_1 и N_2 , боковые реакции подшипника D по тем же осям — через N_3 и N_4 .

Чтобы определить натяжение T_4 , составим уравнение моментов относительно оси x ; получим:

$$T_1 r_1 - T_2 r_1 + T_3 r_2 - T_4 r_2 = 0,$$

откуда

$$T_4 = T_3 - \frac{r_1}{r_2} (T_2 - T_1).$$

Чтобы найти боковые реакции N_3 и N_4 подшипника D , составим уравнения моментов относительно осей y и z ; будем иметь:

$$l N_4 - a T_1 \sin \alpha - a T_2 \sin \alpha = 0,$$

$$l N_3 - a T_1 \cos \alpha - a T_2 \cos \alpha - b T_3 - b T_4 = 0,$$

откуда

$$N_4 = \frac{a}{l} (T_1 + T_2) \sin \alpha,$$

$$N_3 = \frac{a}{l} (T_1 + T_2) \cos \alpha + \frac{b}{l} (T_3 + T_4).$$

Наконец, чтобы определить боковые реакции N_1 и N_2 подшипника C , спроектируем силы на оси y и z :

$$N_1 + N_3 - T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \alpha - T_3 - T_4 = 0,$$

$$N_2 + N_4 - T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$N_1 = (T_1 + T_2) \cos \alpha - (T_3 + T_4) - N_3,$$

$$N_2 = (T_1 + T_2) \sin \alpha - N_4.$$

Сделаем вычисления, положив $T_1 = 200$ кг, $T_2 = 400$ кг, $T_3 = 500$ кг, $r_1 = 25$ см, $r_2 = 20$ см, $a = 1$ м, $b = 3$ м, $l = 4$ м, $\alpha = 70^\circ$.

Получим:

$$T_4 = 500 - \frac{25}{20}(400 - 200) = 250 \text{ кг},$$

$$N_4 = \frac{1}{4} \cdot 600 \sin 70^\circ = 141 \text{ кг},$$

$$N_3 = \frac{1}{4} \cdot 600 \cos 70^\circ - \frac{3}{4} \cdot 750 = 614 \text{ кг},$$

$$N_1 = 600 \cos 70^\circ + 750 - 614 = 341 \text{ кг},$$

$$N_2 = 600 \sin 70^\circ - 141 = 423 \text{ кг}.$$

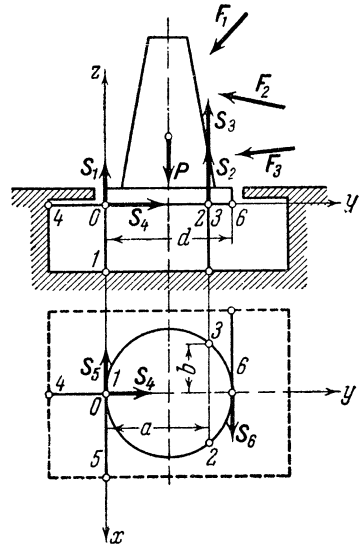
§ 64. Определение главного вектора и главного момента опытным путем

В качестве примера на применение уравнений равновесия рассмотрим еще следующий прием экспериментального определения главного вектора и главного момента сил, приложенных к твердому телу.

Данное тело (например, модель со- оружения) поставлено на круглой платформе, опирающейся на шесть стержней (черт. 116); три стержня вертикальны и три стержня горизонтальны; расположение стержней указано на черт. 116 (в разрезе и в плане; стержни отмечены номерами от 1 до 6). На данное тело действуют какие-либо силы F_i (например, давление ветра). Требуется измерить главный вектор R и главный момент M этих сил, взяв за центр приведения, например, точку O .

Проведем через точку O взаимно перпендикулярные координатные оси x, y, z (направления этих осей указаны на черт. 116). Обозначим проекции главного вектора R и главного момента M на эти оси через X, Y, Z, M_x, M_y, M_z (три последние величины являются в то же время главными моментами сил F_i относительно осей x, y, z). Мы найдем эти шесть величин, написав шесть уравнений равновесия для сил, приложенных к телу и к платформе, на которой оно стоит.

К телу и платформе приложены силы F_i , вес P тела и платформы, приложенный в их общем центре тяжести, и реакции стержней, на



Черт. 116.

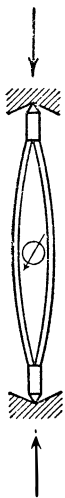
которые опирается платформа. Будем считать все стержни сжатыми и обозначим их реакции (или сжимающие усилия в них) через S_1, S_2, \dots, S_6 ; если какой-либо стержень растянут, то будем рассматривать растягивающее усилие в нем как отрицательное сжимающее усилие. Так как все перечисленные силы взаимно уравновешиваются, то они должны удовлетворять полученным нами шести уравнениям равновесия. Проектируя все силы на оси x, y, z и составляя моменты относительно тех же осей, будем иметь уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} X - S_3 + S_6 &= 0, \\ Y + S_4 &= 0, \\ Z - P + S_1 + S_2 + S_3 &= 0, \\ M_x - P \frac{d}{2} + S_2 a + S_3 a &= 0, \\ M_y - S_2 b + S_3 d &= 0, \\ M_z - S_6 d &= 0, \end{aligned}$$

где буквы a, b и d имеют значения, указанные на черт. 116.

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} X &= S_3 - S_6, \\ Y &= -S_4, \\ Z &= P - S_1 - S_2 - S_3, \\ M_x &= P \frac{d}{2} - (S_2 + S_3) a, \\ M_y &= (S_2 - S_3) b, \\ M_z &= S_6 d. \end{aligned}$$



Черт. 117.

Таким образом, зная величины P, a, b, d и определив из опыта усилия S_1, S_2, \dots, S_6 , мы можем вычислить проекции главного вектора и главного момента интересующих нас сил F_i . По этим проекциям можем затем вычислить, конечно, и величины и направления главного вектора R и главного момента M ; если силы F_i приводятся к одной равнодействующей, то мы можем найти величину, направление и линию действия их равнодействующей и т. д.

Усилия S_1, S_2, \dots, S_6 могут быть легко определены, если сконструировать стержни 1, 2, ..., 6 в виде динамометров: каждый стержень должен быть составлен из двух слегка изогнутых упругих брусьев (черт. 117). Усилия, приложенные к концам стержня, вызывают прогиб брусьев, который может быть легко измерен.

Такой прием был применен Мюллер-Бреслау для изучения давления земли на подпорные стенки.

§ 65. Сложение параллельных сил в пространстве. Уравнения равновесия параллельных сил

Применим результаты, полученные при сложении сил, расположенных как угодно в пространстве, к случаю параллельных сил.

Даны параллельные силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные в точках A_1, A_2, \dots, A_n (черт. 118). Требуется сложить эти силы.

Выбираем произвольный центр приведения O и (согласно изложенному в § 54) приводим данные силы к силе, приложенной в точке O и равной главному вектору R данных сил, и к паре, момент которой равен главному моменту M данных сил относительно точки O .

Начнем с вычисления главного вектора R и главного момента M . Для этого вычисления воспользуемся формулами, выведенными в § 61.

Проведем через центр приведения O три взаимно перпендикулярные оси x, y, z , причем ось z , направим параллельно данным силам (тогда оси x и y будут перпендикулярны к этим силам).

Вычисляем проекции X, Y, Z главного вектора R на оси x, y, z . Имеем формулы:

$$X = \sum X_i, \quad Y = \sum Y_i, \quad Z = \sum Z_i,$$

где \sum есть знак суммирования, а X_i, Y_i, Z_i — проекции силы F_i на оси x, y, z (причем $i=1, 2, \dots, n$). Но так как данные силы параллельны оси z , то

$$X_i = 0, \quad Y_i = 0, \quad Z_i = \pm F_i,$$

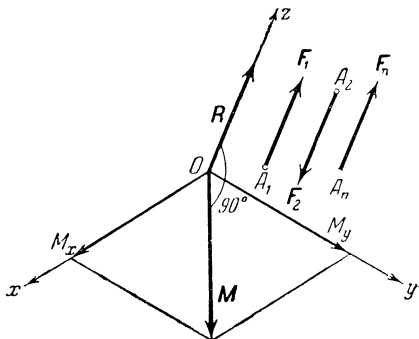
причем $Z_i = +F_i$, если сила F_i направлена в сторону положительной оси z (как, например, сила F_1 на черт. 118), и $Z_i = -F_i$, если сила F_i направлена в сторону отрицательной оси z (как, например, сила F_2). Следовательно:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = \sum (\pm F_i).$$

Так как $X=0$ и $Y=0$, то главный вектор R направлен по оси z ; его величина равна численному значению его проекции Z :

$$R = |Z| = |\sum (\pm F_i)|;$$

если $Z = \sum (\pm F_i) > 0$, то главный вектор R направлен в сторону положительной оси z , если же $Z = \sum (\pm F_i) < 0$, то главный вектор направлен в сторону отрицательной оси z . (На черт. 118 предположено $Z = \sum (\pm F_i) > 0$.)



Черт. 118.

Перейдем к вычислению главного момента \mathbf{M} . Вычисляем сначала проекции \mathbf{M} на оси x , y , z или, что все равно, главные моменты M_x , M_y , M_z относительно этих осей.

Имеем формулы:

$$M_x = \sum M_{ix}, \quad M_y = \sum M_{iy}, \quad M_z = \sum M_{iz},$$

где M_{ix} , M_{iy} , M_{iz} суть моменты силы F_i относительно осей x , y , z .

Так как все данные силы параллельны оси z , то

$$M_{iz} = 0,$$

и, следовательно,

$$M_z = 0.$$

Отсюда следует, что главный момент \mathbf{M} перпендикулярен к оси z , т. е. лежит в плоскости $xу$. Чтобы его построить, остается построить прямоугольник на главных моментах M_x и M_y (отложенных от точки O по осям x и y) и провести в нем диагональ через вершину Q . Величина главного момента M равна

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

Итак, главный вектор \mathbf{R} направлен по оси z , а главный момент \mathbf{M} лежит в плоскости $xу$. Следовательно,

$$(\mathbf{R}, \mathbf{M}) = 90^\circ.$$

Рассмотрим теперь, какие результаты получаются от сложения данных параллельных сил. Относительно величин главного вектора \mathbf{R} и главного момента \mathbf{M} сделаем три предположения:

1) Главный вектор \mathbf{R} и главный момент \mathbf{M} равны нулю.

В этом случае данные силы находятся в равновесии.

2) Главный вектор \mathbf{R} равен нулю, но главный момент \mathbf{M} не равен нулю.

В этом случае данные силы приводятся к паре, момент которой равен главному моменту \mathbf{M} .

3) Главный вектор \mathbf{R} не равен нулю.

Относительно главного момента \mathbf{M} можно сделать два предположения: или $\mathbf{M} = 0$, или $\mathbf{M} \neq 0$. Но если $\mathbf{M} \neq 0$, то, как показывает предыдущее исследование, \mathbf{M} перпендикулярен к \mathbf{R} . Значит, главный момент \mathbf{M} или равен нулю или перпендикулярен к главному вектору \mathbf{R} . Вспоминая изложенное в § 57, мы заключаем, что в рассматриваемом случае данные силы приводятся к одной равнодействующей, равной главному вектору \mathbf{R} .

Как видно, параллельные силы ни в коем случае не приводятся к динаме.

Мы видели, что данные нам параллельные силы находятся в равновесии в том случае, когда их главный вектор R и главный момент M равны нулю. Мы имели формулу

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

Следовательно, для того чтобы было $M = 0$, необходимо и достаточно, чтобы было

$$M_x = 0, \quad M_y = 0.$$

Вспоминая зависимости

$$R = |\Sigma(\pm F_i)|, \quad M_x = \Sigma M_{ix}, \quad M_y = \Sigma M_{iy},$$

мы заключаем, что параллельные силы F_1, F_2, \dots, F_n находятся в равновесии, если они удовлетворяют трем уравнениям:

$$\Sigma(\pm F_i) = 0, \quad \Sigma M_{ix} = 0, \quad \Sigma M_{iy} = 0.$$

Таковы уравнения равновесия параллельных сил, не лежащих в одной плоскости. Напомним, что в сумму $\Sigma(\pm F_i)$ величины сил, направленных в одну сторону, входят со знаком $+$, а величины сил, направленных в противоположную сторону, со знаком $-$.

Так как в рассматриваемом случае имеем три уравнения равновесия, то задача, в которой имеются параллельные силы, не лежащие в одной плоскости и находящиеся в равновесии, будет статически определенной, если число неизвестных в ней равно трем.

§ 66. Сложение параллельных сил по способу последовательного сложения

В вышеизложенном мы показали сложение заданных нам параллельных сил при помощи приведения всех сил к одной точке. Заметим теперь, что сложение этих сил может быть произведено также и по способу последовательного сложения.

Даны параллельные силы $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$, приложенные в точках $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ (черт. 119); из них силы F_1, F_2, F_3 направлены в одну сторону, силы F_4, F_5, F_6 — в противоположную сторону. Требуется сложить эти силы (ограничиваемся случаем шести сил; рассуждение остается справедливым для какого угодно числа сил).

Складываем силы F_1 и F_2 по правилу сложения двух параллельных сил, направленных в одну и ту же сторону; получаем их равнодействующую R_1 ($R_1 = F_1 + F_2$), приложенную в точке C_1 ; точка C_1 лежит на отрезке A_1A_2 и делит этот отрезок на части, обратно пропорциональные силам F_1 и F_2 , так что

$$\frac{A_1C_1}{C_1A_2} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Затем складываем силу R_1 с силой F_3 ; получаем равнодействующую R_2 ($R_2 = R_1 + F_3 = F_1 + F_2 + F_3$), приложенную в точке C_2 на отрезке C_1A_3 , причем

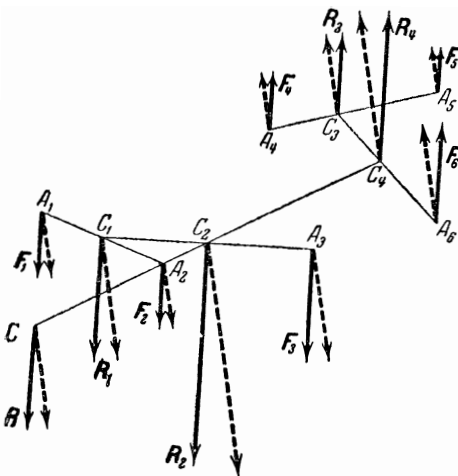
$$\frac{C_1C_2}{C_2A_3} = \frac{F_3}{R_1}.$$

Точно так же складываем силы F_4 и F_5 ; получаем равнодействующую R_3 ($R_3 = F_4 + F_5$), приложенную в точке C_3 на отрезке A_4A_5 , причем

$$\frac{A_4C_3}{C_3A_5} = \frac{F_5}{F_4}.$$

Наконец, складывая силы R_3 и F_6 , получаем их равнодействующую R_4 ($R_4 = R_3 + F_6 = F_4 + F_5 + F_6$), приложенную в точке C_4 на отрезке C_3A_6 , причем

$$\frac{C_3C_4}{C_4A_6} = \frac{F_6}{R_3}.$$



Черт. 119.

Итак, данная система сил приведена к двум параллельным силам R_2 и R_4 , направленным в противоположные стороны.

Может представиться один из следующих трех случаев.

1) Силы R_2 и R_4 не равны по величине. Положим для определенности $R_2 > R_4$. Складывая силы R_2 и R_4 по правилу сложения двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны, получаем их равнодействующую R ($R = R_2 - R_4$). Равнодействующая R направлена

в сторону большей силы (т. е. R_2) и приложена к точке C , лежащей на продолжении отрезка C_2C_4 со стороны большей силы, причем

$$\frac{CC_2}{CC_4} = \frac{R_4}{R_2}.$$

Итак, в рассматриваемом случае данная система сил приводится к одной равнодействующей R .

2) Силы R_2 и R_4 равны по величине, но их линии действия не совпадают. Силы R_2 и R_4 составляют пару сил. Следовательно, в этом случае данная система параллельных сил приводится к паре.

3) Силы R_2 и R_4 равны по величине и их линии действия совпадают. В этом случае силы R_2 и R_4 взаимно уравновешиваются, и, следовательно, данные силы F_1, F_2, \dots, F_6 находятся в равновесии.

Мы приходим, таким образом, иным путем к тем же самым результатам, которые уже были установлены в § 65.

§ 67. Центр параллельных сил

Остановимся еще на том случае, когда параллельные силы приводятся к одной равнодействующей. Рассуждения, изложенные в предыдущем параграфе, привели нас к построению точки приложения равнодействующей; на черт. 119 эта точка обозначена буквой C .

Отметим важное свойство точки C . Оно состоит в том, что если вращать данные силы вокруг их точек приложения, не нарушая их параллельности, то равнодействующая, оставаясь параллельной данным силам, будет вращаться вокруг точки C .

Повернем данные силы F_1, F_2, \dots, F_6 вокруг их точек приложения A_1, A_2, \dots, A_6 , не нарушая их параллельности (черт. 119). Покажем, что при этом равнодействующая R , оставаясь параллельной данным силам, повернется вокруг точки C .

В самом деле, найдем равнодействующую сил F_1 и F_2 в их новом положении. Так как в новом положении силы F_1 и F_2 остаются параллельными и направленными в одну сторону, то их равнодействующая по-прежнему имеет величину $F_1 + F_2 = R_1$ и приложена в точке, делящей отрезок A_1A_2 на части, обратно пропорциональные величинам сил F_1 и F_2 , т. е. в точке C_1 . Следовательно, мы получим равнодействующую сил F_1 и F_2 в их новом положении, повернув прежнюю равнодействующую R_1 вокруг точки C_1 . Точно так же равнодействующую сил R_1 и F_3 в их новом положении мы получим, повернув прежнюю равнодействующую R_2 вокруг точки C_2 . Применяя то же рассуждение к силам F_4 и F_5 , а затем к силам R_3 и F_6 , убедимся, что их равнодействующие в новом положении соответственно равны силам R_3 и R_4 , повернутым вокруг точек C_2 и C_4 . Складывая теперь силы R_2 и R_4 (приложенные в точках C_2 и C_4), мы увидим, что их равнодействующая по-прежнему равна по величине $R_2 - R_4 = R$ и приложена в той же точке C , что и раньше. Таким образом мы получаем равнодействующую сил F_1, F_2, \dots, F_6 в их новом положении поворотом прежней равнодействующей R вокруг точки C .

Точка C называется *центром параллельных сил* F_1, F_2, \dots, F_6 .

§ 68. Координаты центра параллельных сил

Когда параллельные силы приводятся к одной равнодействующей, то за точку приложения этой равнодействующей удобнее всего взять центр данных параллельных сил. Выведем теперь формулы для вычисления координат центра параллельных сил.

Даны параллельные силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные в точках A_1, A_2, \dots, A_n (черт. 120). Составим алгебраическую сумму сил

$$F_1 - F_2 \pm \dots + F_n = \Sigma (\pm F_i)$$

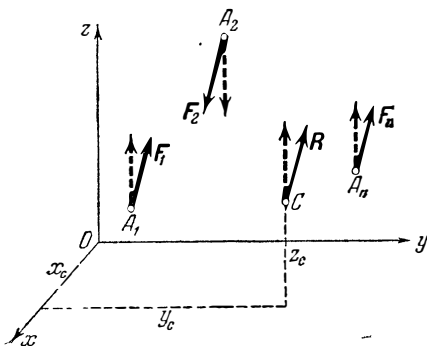
(в эту сумму входят со знаком $+$ величины тех сил, которые направлены в сторону силы F_1).

Предполагаем, что $\Sigma (\pm F_i) \neq 0$. Положим для определенности $\Sigma (\pm F_i) > 0$. Тогда данные силы приводятся к равнодействующей, равной по величине

$$R = \Sigma (\pm F_i)$$

и направленной в сторону силы F_1 . За точку приложения равнодействующей R возьмем центр данных параллельных сил C .

Возьмем координатные оси x, y, z и обозначим координаты точек приложения данных сил: $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), \dots, A_n(x_n, y_n, z_n)$; координаты центра параллельных сил обозначим $C(x_c, y_c, z_c)$.



Черт. 120.

Повернем все силы F_1, F_2, \dots, F_n вокруг точек приложения A_1, A_2, \dots, A_n (не нарушая их параллельности) так, чтобы все силы были параллельны оси z (и притом так, чтобы сила F_1 была направлена в сторону положительной оси z). Тогда равнодействующая R повернется вокруг точки C и тоже будет параллельна оси z (и притом будет направлена в сторону положительной оси z).

Составим теперь моменты сил F_1, F_2, \dots, F_n и равнодействующей R относительно оси x и напишем, что момент равнодействующей равен сумме моментов составляющих; получим (черт. 120):

$$Ry_c = F_1y_1 - F_2y_2 \pm \dots + F_ny_n = \Sigma (\pm F_iy_i),$$

откуда, полагая $R = \Sigma (\pm F_i)$, находим:

$$y_c = \frac{\Sigma (\pm F_iy_i)}{\Sigma (\pm F_i)}. \quad (1)$$

Важно заметить, что силы, входящие со знаком $+$ в сумму $\Sigma (\pm F_i)$, входят с тем же знаком в сумму $\Sigma (\pm F_iy_i)$; силы, входящие в сумму $\Sigma (\pm F_i)$ со знаком $-$, входят и в сумму $\Sigma (\pm F_iy_i)$ со знаком $-$.

Повернув все силы F_1, F_2, \dots, F_n вокруг их точек приложения так, чтобы все силы были параллельны оси y , и взяв моменты сна-

чала относительно оси z , а потом относительно оси x , получим две другие формулы:

$$x_c = \frac{\sum (\pm F_i x_i)}{\sum (\pm F_i)}, \quad z_c = \frac{\sum (\pm F_i z_i)}{\sum (\pm F_i)}. \quad (2)$$

И в этих формулах каждая сила входит в суммы

$$\sum (\pm F_i x_i) \text{ и } \sum (\pm F_i z_i)$$

с тем же самым знаком, с каким она входит в сумму $\sum (\pm F_i)$.

Формулами (1) и (2) определяются координаты центра параллельных сил. Предоставляем читателю убедиться, что эти формулы, выведенные в предположении $\sum (\pm F_i) > 0$, остаются справедливыми в случае

$$\sum (\pm F_i) < 0.$$

Пример 22. На балку AB в точках M_1, M_2, M_3 действуют вертикальные силы $F_1 = 1 \text{ т}$, $F_2 = 2 \text{ т}$, $F_3 = 3 \text{ т}$; $AM_1 = 2 \text{ м}$, $M_1M_2 = 3 \text{ м}$, $M_2M_3 = 3 \text{ м}$, $M_3B = 2 \text{ м}$ (черт. 121); требуется сложить эти силы.

Находим величину равнодействующей R :

$$R = 1 + 2 + 3 = 6 \text{ т}.$$

Черт. 121.

За точку приложения равнодействующей возьмем центр данных сил. Так как точки приложения сил F_1, F_2, F_3 лежат на прямой AB , то и центр этих сил лежит на той же прямой. Направим ось x по прямой AB , взяв начало координат в точке A , и вычислим координату x_c центра C данных сил.

Имеем:

$$x_c = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8}{6} = 6 \text{ м}.$$

Этой координатой определяется точка C приложения равнодействующей.

ГЛАВА XI

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

§ 69. Центр тяжести твердого тела. Центр тяжести объема

Когда твердое тело находится вблизи земной поверхности, то к каждой частице M_i этого твердого тела приложена вертикально направленная сила тяжести p_i , т. е. сила притяжения земным шаром (черт. 122). Силы тяжести p_i , приложенные к отдельным частицам твердого тела, можно считать параллельными. Равнодействующая параллельных сил p_i ,

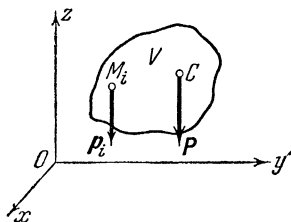
$$P = \sum p_i,$$

называется *весом* твердого тела, а центр C этих параллельных сил называется *центром тяжести* твердого тела.

Важно заметить, что центр тяжести твердого тела занимает в этом теле вполне определенное положение, независимо от положения самого тела в пространстве. В самом деле, будем менять положение тела. Как бы мы его ни поворачивали, силы тяжести p_i отдельных его частиц останутся приложенными в тех же точках тела M_i . Эти силы p_i , сохраняя неизменное вертикальное направление в пространстве, будут изменять свое направление по отношению к телу; относительно тела они будут поворачиваться вокруг своих точек приложения M_i , сохраняя свою параллельность. Но мы знаем, что при таком повороте параллельных сил их центр не меняет своего положения. Отсюда и следует, что, как бы мы ни поворачивали тело, его центр тяжести не будет изменять своего положения в теле.

Для определения положения центра тяжести твердого тела можно воспользоваться формулами для координат центра параллельных сил, выведенными в § 68.

Обозначая координаты центра тяжести C (относительно каких-либо координатных осей x , y , z) через x_c , y_c , z_c , а координаты любой частицы M_i твердого тела через x_i , y_i , z_i , имеем:



$$x_c = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} = \frac{\sum p_i x_i}{P},$$

$$y_c = \frac{\sum p_i y_i}{\sum p_i} = \frac{\sum p_i y_i}{P},$$

$$z_c = \frac{\sum p_i z_i}{\sum p_i} = \frac{\sum p_i z_i}{P},$$

Черт. 122.

где суммирования распространены на все частицы твердого тела.

Применим теперь эти формулы к частному случаю однородного тела. Обозначим бесконечно малый объем частицы M_i через Δv_i . Если вещество тела однородно, то отношение $p_i : \Delta v_i$ имеет одно и то же значение для всех частиц тела; положим:

$$\frac{p_i}{\Delta v_i} = \omega,$$

откуда

$$p_i = \omega \Delta v_i.$$

Вес однородного тела выражается формулой

$$P = \sum p_i = \sum \omega \Delta v_i = \omega \sum \Delta v_i = \omega V,$$

где V есть объем тела. Полагая здесь $V = 1$, получаем $P = \omega$; следовательно, ω — вес единицы объема данного однородного вещества.

Для координат центра тяжести однородного тела получаем формулы:

$$x_c = \frac{\sum p_i x_i}{P} = \frac{\sum \omega x \Delta v_i}{\omega V} = \frac{\omega \sum x_i \Delta v_i}{\omega V} = \frac{\sum x_i \Delta v_i}{V},$$

и точно так же

$$y_c = \frac{\sum y_i \Delta v_i}{V}, \quad z_c = \frac{\sum z_i \Delta v_i}{V}.$$

Как видно, эти координаты не зависят от постоянной ω , характеризующей вещество данного однородного тела.

На этом основании центр тяжести однородного тела получает название центра тяжести объема V .

Итак, *центром тяжести объема* называется центр тяжести однородного тела, заполняющего данный объем.

§ 70. Центр тяжести площади. Статический момент плоской фигуры. Центр тяжести линии

С понятием центра тяжести твердого тела связаны также понятия центра тяжести площади и центра тяжести линии.

Представим себе плоскую фигуру, ограниченную каким-либо замкнутым контуром (черт. 123); площадь этой плоской фигуры обозначим через S . В плоскости данной плоской фигуры возьмем взаимно перпендикулярные оси x и y (ось z , перпендикулярная к осям x и y , не изображена на чертеже).

Представим себе теперь весьма тонкую плоскую пластинку, имеющую очертание данной плоской фигуры; весьма малую толщину этой пластинки будем предполагать постоянной, а вещество пластинки — однородным.

Около точки M_i выделим элемент пластинки, площадь которого назовем Δs_i , а вес p_i . Отношение $p_i : \Delta s_i$ имеет одно и то же значение для всех элементов пластинки; положим:

$$\frac{p_i}{\Delta s_i} = \sigma,$$

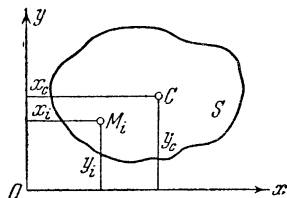
откуда

$$p_i = \sigma \Delta s_i.$$

Вес такой однородной пластинки равен

$$P = \sum p_i = \sum \sigma \Delta s_i = \sigma \sum \Delta s_i = \sigma S,$$

где S есть площадь плоской фигуры, ограниченной данным контуром. Полагая здесь $S=1$, получаем $P=\sigma$; следовательно, σ есть вес единицы площади данной однородной пластинки.



Черт. 123.

Для координат центра тяжести C пластинки получаем формулы:

$$x_c = \frac{\sum p_i x_i}{P} = \frac{\sum \sigma x_i \Delta s_i}{\sigma S} = \frac{\sigma \sum x_i \Delta s_i}{\sigma S} = \frac{\sum x_i \Delta s_i}{S},$$

и точно так же:

$$y_c = \frac{\sum y_i \Delta s_i}{S};$$

здесь x_i , y_i суть координаты точки M_i , и суммирование распространены на все элементы пластинки; что касается координаты z_c , то, очевидно,

$$z_c = 0.$$

Как видно, координаты центра тяжести C не зависят от постоянной σ , характеризующей вещество пластинки. На этом основании центр тяжести однородной пластинки получает название центра тяжести площади S .

Итак, *центром тяжести площади* плоской фигуры называется центр тяжести однородной пластинки постоянной толщины, имеющей очертания данной плоской фигуры.

Заметим, что сумма произведений площади каждого элемента плоской фигуры на его расстояние до некоторой оси (лежащей в плоскости фигуры)¹⁾ называется *статическим моментом* плоской фигуры относительно этой оси. Согласно этому, суммы $\sum x_i \Delta s_i$ и $\sum y_i \Delta s_i$ суть статические моменты нашей плоской фигуры относительно осей y и x . Обозначая эти статические моменты через M_y и M_x , т. е. полагая:

$$\sum x_i \Delta s_i = M_y, \quad \sum y_i \Delta s_i = M_x,$$

имеем для координат центра тяжести площади плоской фигуры формулы:

$$x_c = \frac{M_y}{S}, \quad y_c = \frac{M_x}{S}.$$

По этим формулам вычисляются координаты центра тяжести, если известны статические моменты M_x и M_y . Наоборот, если известно положение центра тяжести, то статические моменты M_x и M_y могут быть найдены по формулам:

$$M_x = S y_c, \quad M_y = S x_c.$$

Перейдем к понятию центра тяжести линии.

Представим себе дугу кривой линии длины L (черт. 124). Представим себе, далее, весьма тонкую проволоку круглого сечения, ось которой расположена по данной дуге кривой линии²⁾; весьма малую

¹⁾ Причем эти расстояния считаются положительными в одну сторону от оси и отрицательными в другую.

²⁾ Осью проволоки называется геометрическое место центров поперечных сечений проволоки.

толщину проволоки считаем постоянной, а вещество проволоки — однородным.

Около точки M_i выделим элемент проволоки длины Δl_i ; вес этого элемента обозначим через p_i . Так как проволока однородна, то отношение $p_i : \Delta l_i$ имеет одно и то же значение для всех элементов:

$$\frac{p_i}{\Delta l_i} = \rho,$$

откуда

$$p_i = \rho \Delta l_i.$$

Вес проволоки равен:

$$P = \sum p_i = \sum \rho \Delta l_i = \rho \sum \Delta l_i = \rho L,$$

где L есть длина проволоки. Полагая здесь $L = 1$, получаем $P = \rho$; следовательно, ρ есть вес единицы длины проволоки.

Координаты центра тяжести C проволоки определяются формулами:

$$x_c = \frac{\sum p_i x_i}{P} = \frac{\sum \rho x_i \Delta l_i}{\rho L} = \frac{\rho \sum x_i \Delta l_i}{\rho L} = \frac{\sum x_i \Delta l_i}{L},$$

$$y_c = \frac{\sum y_i \Delta l_i}{L}, \quad z_c = \frac{\sum z_i \Delta l_i}{L};$$

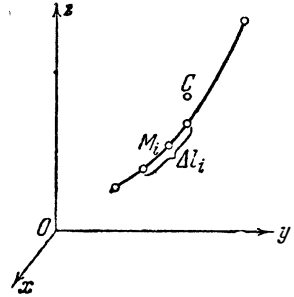
здесь x_i, y_i, z_i суть координаты точки M_i , и суммирование распространены на все элементы проволоки.

Координаты центра тяжести C не зависят от постоянной ρ , характеризующей вещество проволоки. На этом основании центр тяжести однородной проволоки можно назвать центром тяжести линии L .

Итак, *центром тяжести линии* называется центр тяжести однородной весьма тонкой проволоки постоянной толщины, ось которой совпадает с данной линией.

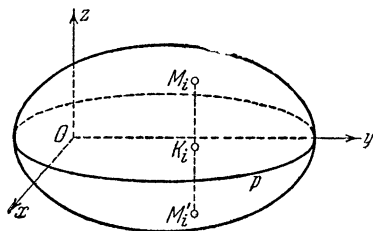
§ 71. Некоторые элементарные приемы определения центров тяжести и статических моментов

Суммы $\sum p_i x_i, \sum x_i \Delta v_i, \sum x_i \Delta s_i, \sum x_i \Delta l_i$ и т. д., входящие в числители формул для координат центров тяжести твердого тела, объема, площади и линии, состоят из бесчисленного множества бесконечно малых слагаемых. Правила для вычисления таких сумм излагаются в курсе интегрального исчисления. Здесь мы приведем некоторые простые соображения, которые позволяют иногда вычислять координаты центров тяжести (а также статические моменты плоских фигур) элементарным путем.



Черт. 124.

Покажем, что если данный объем имеет плоскость симметрии, то центр тяжести этого объема лежит в плоскости симметрии. Положим, что плоскость P есть плоскость симметрии данного объема V (черт. 125). Возьмем оси x, y, z так, чтобы оси x и y лежали в пло-



Черт. 125.

скости P , а ось z была перпендикулярна к плоскости P . Вычислим координату z_c центра тяжести C объема V . Имеем:

$$z_c = \frac{\sum z_i \Delta v_i}{V},$$

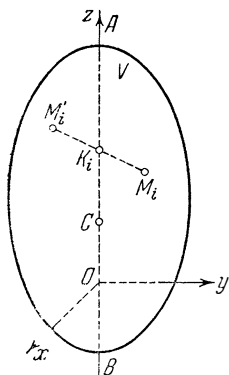
где z_i есть координата точки M_i , лежащей внутри объема V , а Δv_i есть элементарный объем, выделенный около точки M_i . Так как плоскость P есть плоскость симметрии объема V , то, опустив перпендикуляр $M_i K_i$ из точки M_i на плоскость P и отложив на продолжении этого перпендикуляра $K_i M'_i = M_i K_i$, получим точку M'_i , которая также лежит внутри объема V . Если координаты точки M_i суть x_i, y_i, z_i , то координаты точки M'_i будут $x_i, y_i, -z_i$. Выделив около точки M'_i элементарный объем, равный элементарному объему Δv_i , выделенному около точки M_i , замечаем, что в сумме $\sum z_i \Delta v_i$ члены, соответствующие точкам M_i и M'_i , численно равны и имеют противоположные знаки. Таким же точно образом все члены суммы $\sum z_i \Delta v_i$ могут быть разбиты на пары членов, численно равных и имеющих противоположные знаки. Отсюда следует, что

$$\sum z_i \Delta v_i = 0,$$

а значит, и $z_c = 0$. Следовательно, центр тяжести C лежит в плоскости симметрии P .

Покажем теперь, что если данный объем имеет ось симметрии, то центр тяжести объема лежит на оси симметрии.

Положим, ось AB есть ось симметрии данного объема V (черт. 126). Возьмем оси x, y, z так, чтобы ось z совпадала с осью симметрии AB , и вычислим координаты x_c и y_c центра тяжести C объема V .



Черт. 126.

Имеем:

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta v_i}{V}, \quad y_c = \frac{\sum y_i \Delta v_i}{V},$$

где x_i и y_i суть координаты точки M_i , лежащей внутри объема V , а Δv_i есть элементарный объем, выделенный около точки M_i .

Так как ось z есть ось симметрии объема V , то опустив перпендикуляр $M_i K_i$ из точки M_i на ось z и отложив на продолжении этого перпендикуляра $K_i M'_i = M_i K_i$, получим точку M'_i , которая также лежит внутри объема V . Если координаты точки M_i суть x_i, y_i, z_i , то координаты точки M'_i будут $-x_i, -y_i, z_i$. Выделив около точки M'_i элементарный объем, равный элементарному объему Δv_i , выделенному около точки M_i , замечаем, что в суммах $\sum x_i \Delta v_i$ и $\sum y_i \Delta v_i$ члены, соответствующие точкам M_i и M'_i , численно равны и имеют противоположные знаки. Таким же образом все члены сумм $\sum x_i \Delta v_i$ и $\sum y_i \Delta v_i$ могут быть разбиты попарно на члены, численно равные и имеющие противоположные знаки. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \sum x_i \Delta v_i &= 0, \\ \sum y_i \Delta v_i &= 0, \end{aligned}$$

а значит, и $x_c = 0, y_c = 0$. Следовательно, центр тяжести C лежит на оси симметрии z .

Рассуждая совершенно так же, можно убедиться, что если плоская фигура или линия имеют ось симметрии, то центр тяжести площади плоской фигуры или центр тяжести линии лежит на оси симметрии.

Иногда удается определить положение центра тяжести площади плоской фигуры, а также ее статические моменты, разбивая данную фигуру на такие части, центры тяжести которых известны.

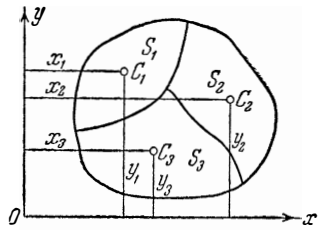
Положим, требуется определить центр тяжести C площади плоской фигуры S , причем эта фигура может быть разбита на такие три части S_1, S_2, S_3 , центры тяжести которых C_1, C_2, C_3 известны (черт. 127).

Возьмем координатные оси x и y . Обозначая статические моменты плоской фигуры S относительно этих осей через M_x и M_y , имеем:

$$x_c = \frac{M_y}{S},$$

$$y_c = \frac{M_x}{S},$$

где x_c и y_c — координаты искомого центра тяжести C .



Черт. 127.

Обозначим статические моменты площадей S_1, S_2, S_3 относительно осей x и y через $M'_x, M''_x, M'''_x, M'_y, M''_y, M'''_y$.

Тогда

$$M_x = M'_x + M''_x + M'''_x,$$

$$M_y = M'_y + M''_y + M'''_y.$$

С другой стороны, обозначая координаты точек C_1, C_2, C_3 через $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, имеем:

$$M'_x = S_1 y_1, \quad M''_x = S_2 y_2, \quad M'''_x = S_3 y_3,$$

$$M'_y = S_1 x_1, \quad M''_y = S_2 x_2, \quad M'''_y = S_3 x_3.$$

Следовательно:

$$M_x = S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3,$$

$$M_y = S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3.$$

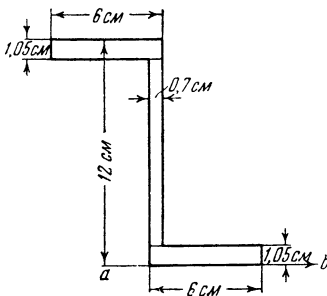
Таким образом определяются статические моменты данной фигуры. Координаты же x_c и y_c находим по формулам:

$$x_c = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S},$$

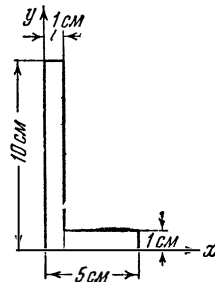
$$y_c = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S}.$$

Поясним сказанное примерами.

Пример 23. Определить статический момент Z-образного сечения относительно оси ab (черт. 128); размеры указаны на чертеже.



Черт. 128.



Черт. 129.

Разбивая данную фигуру на три прямоугольника, получаем:

$$M_{ab} = 6,3 \times 11,475 + 6,93 \times 6 + 6,3 \times 0,525 = 117,18 \text{ см}^3.$$

Пример 24. Определить центр тяжести уголка (черт. 129); размеры указаны на чертеже.

Возьмем оси x и y , как показано на чертеже. Разбивая уголок на два прямоугольника (см. черт. 129), имеем:

$$x_c = \frac{10 \times 0,5 + 4 \times 3}{10 + 4} = \frac{17}{14} = 1,21 \text{ см,}$$

$$y_c = \frac{10 \times 5 + 4 \times 0,5}{10 + 4} = \frac{52}{14} = 3,71 \text{ см.}$$

Таким же приемом можно пользоваться и при определении центров тяжести объемов и линий.

§ 72. Первая теорема Гюльдена

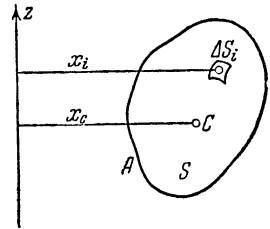
В некоторых случаях оказывается возможным весьма просто определять центры тяжести площадей и линий на основании двух теорем, обычно называемых теоремами Гюльдена¹⁾. В настоящем параграфе докажем первую из этих теорем.

Представим себе плоскую фигуру, ограниченную замкнутым контуром AB (черт. 130); площадь этой фигуры обозначим через S . Возьмем в плоскости фигуры какую-либо ось z , не пересекающую контура AB , и будем вращать контур AB вокруг этой оси. При вращении вокруг оси z кривая AB опишет некоторую замкнутую поверхность вращения. Тело, ограниченное этой замкнутой поверхностью, называется телом вращения. Вычислим объем V этого тела.

Для этой цели разобьем всю площадь S на бесчисленное множество бесконечно малых (или элементарных) площадок Δs_i . При вращении нашей фигуры вокруг оси z каждая элементарная площадка Δs_i опишет элементарное круговое кольцо, радиус которого равен расстоянию площадки от оси z ; назовем это расстояние через x_i . Искомый объем V равен сумме объемов всех элементарных колец, описанных всеми элементарными площадками Δs_i . Объем элементарного кольца, описанного площадкой Δs_i , равен $2\pi x_i \Delta s_i$. Отсюда мы заключаем, что

$$V = \sum 2\pi x_i \Delta s_i = 2\pi \sum x_i \Delta s_i,$$

где суммирование распространено на все площадки, на которые



Черт. 130.

¹⁾ Сочинение Гюльдена «De centro gravitatis» (О центре тяжести) появилось в 1635 г. Однако эти теоремы были высказаны еще в III веке Паппом Александрийским, поэтому правильнее их называть (как это и делается иногда) теоремами Паппа.

разбита данная площадь S . Отметим центр тяжести C площади S и обозначим его расстояние от оси z через x_c . На основании изложенного в § 70 мы знаем, что

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta s_i}{S},$$

откуда

$$\sum x_i \Delta s_i = x_c S.$$

Итак, окончательно получаем:

$$V = 2\pi x_c S,$$

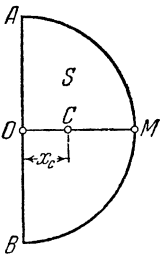
т. е. объем тела вращения, описанного площадью S , равен произведению этой площади на длину окружности, описанной центром тяжести площади.

В этом и состоит первая теорема Гюльдена.

Эта теорема позволяет определять объем V , если известно положение центра тяжести площади S . И, наоборот, на основании этой же теоремы удастся в некоторых случаях весьма просто находить центр тяжести площади S , если известен объем того тела вращения, которое описывается этой площадью.

Рассмотрим следующий пример.

Дана площадь S , ограниченная дугою полуокружности AMB и диаметром AB (черт. 131). Требуется определить центр тяжести этой площади.



Черт. 131.

Так как радиус OM , перпендикулярный к диаметру AB , является осью симметрии данной площади, то искомый центр тяжести C лежит на этом радиусе.

Найдем его расстояние x_c от диаметра AB . Представим себе, что площадь S вращается вокруг диаметра AB ; при этом вращении дуга AMB описывает поверхность шара. Обозначая объем этого шара через V , а радиус дуги AMB через R , имеем:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

С другой стороны, площадь S нашей фигуры равна половине площади круга радиуса R , т. е.

$$S = \frac{1}{2} \pi R^2.$$

На основании теоремы Гюльдена имеем:

$$x_c = \frac{V}{2\pi S} = \frac{4}{3\pi} R \approx 0,4244R.$$

Этим вполне определяется положение центра тяжести C .

§ 73. Вторая теорема Гюльдена

Иногда удается находить и центр тяжести кривой линии способом, аналогичным изложенному в предыдущем параграфе.

Дана дуга AB плоской кривой, длину которой обозначим через L (черт. 132). Возьмем ось z , лежащую в плоскости этой кривой и не пересекающую дугу AB . Вращая дугу AB вокруг оси z , получим некоторую поверхность вращения. Определим площадь S этой поверхности.

Разобьем кривую AB на бесчисленное множество бесконечно малых элементов Δl_i . При вращении кривой AB вокруг оси z все эти элементы нашей кривой опишут элементарные кольцеобразные поверхности, сумма площадей которых и равна искомой площади S . Рассматривая элемент Δl_i — ввиду его малости — как прямолинейный отрезок, мы можем трактовать ту кольцеобразную поверхность, которая описана этим элементом, как поверхность усеченного конуса бесконечно малой высоты. Отсюда следует, что площадь этой кольцеобразной поверхности равна $2\pi x_i \Delta l_i$, где x_i — расстояние элемента Δl_i от оси z . Следовательно:

$$S = \sum 2\pi x_i \Delta l_i = 2\pi \sum x_i \Delta l_i,$$

причем суммирование распространено на все элементы Δl_i . С другой стороны, обозначая через x_c расстояние центра тяжести C кривой AB от оси z , имеем:

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta l_i}{L},$$

откуда

$$\sum x_i \Delta l_i = x_c L.$$

Окончательно получаем:

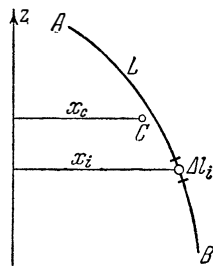
$$S = 2\pi x_c L,$$

т. е. площадь поверхности вращения, описанной кривой AB , равна произведению длины этой кривой на длину окружности, описанной центром тяжести кривой. Это — вторая теорема Гюльдена.

Применение этой теоремы поясним на следующем примере.

Требуется определить положение центра тяжести дуги полуокружности AMB (черт. 133).

Так как радиус OM , перпендикулярный к диаметру AB , есть ось симметрии дуги AMB , то искомый центр тяжести C лежит на этом



Черт. 132.

радиусе. Вращая дугу AMB вокруг диаметра AB , получаем шаровую поверхность. Обозначая поверхность этого шара через S , а радиус дуги AMB — через R , имеем:

$$S = 4\pi R^2.$$

С другой стороны, длина дуги AMB равна

$$L = \pi R.$$

По доказанному имеем:

$$x_c = \frac{S}{2\pi L} = \frac{2}{\pi} R \approx 0,6366R,$$

где x_c есть расстояние искомого центра тяжести от центра дуги.

§ 74. Центры тяжести некоторых простейших геометрических фигур

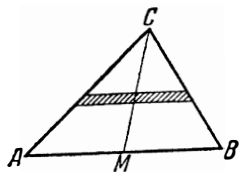
В этом параграфе мы остановимся на определении центров тяжести некоторых простейших геометрических фигур, часто встречающихся в приложениях.

На этих примерах мы будем иметь случай познакомиться еще с некоторыми простыми приемами, применяемыми при отыскании центров тяжести.

1. Центр тяжести площади треугольника

Требуется найти центр тяжести площади треугольника ABC (черт. 134).

Прямыми, параллельными основанию AB , разобьем площадь треугольника на бесчисленное множество полосок бесконечно малой ширины. Центры тяжести площадей всех этих полосок лежат на медиане CM , проведенной из вершины C к середине стороны AB . Отсюда заключаем, что и центр тяжести площади всего треугольника лежит на этой медиане.



Черт. 134.

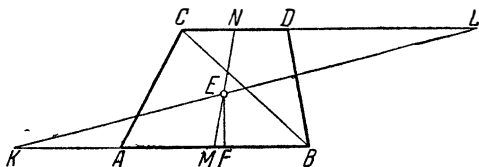
Совершенно так же мы можем убедиться, что центр тяжести площади нашего треугольника должен лежать и на двух других медианах, проведенных из вершин A и B к серединам противолежащих им сторон. Следовательно, искомым центром тяжести лежит в точке пересечения всех трех медиан треугольника.

Отсюда следует, между прочим, что расстояние центра тяжести от основания треугольника равно одной трети высоты.

2. Центр тяжести площади трапеции

Дана трапеция $ACDB$ (черт. 135); введем обозначения: $AB = a$, $CD = b$; высоту трапеции назовем h . Требуется найти центр тяжести площади трапеции.

Разбив площадь трапеции на полоски бесконечно малой ширины прямыми, параллельными основаниям трапеции, легко убеждаемся,



Черт. 135.

что искомый центр тяжести лежит на прямой MN , соединяющей середины оснований AB и CD . Вычислим его расстояние y_c от основания AB . Для этой цели разобьем нашу трапецию прямой BC на два треугольника ABC и BCD . Обозначая их площади через S_1 и S_2 , а расстояния их центров тяжести от прямой AB через y_1 и y_2 , будем иметь:

$$y_c = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2}.$$

Подставляя здесь

$$S_1 = \frac{ah}{2}, \quad S_2 = \frac{bh}{2},$$

$$y_1 = \frac{h}{3}, \quad y_2 = \frac{2h}{3},$$

получаем:

$$y_c = \frac{\frac{ah^2}{6} + \frac{2bh^2}{6}}{\frac{ah}{2} + \frac{bh}{2}} = \frac{h(a+2b)}{3(a+b)}.$$

Итак, искомый центр тяжести есть точка, лежащая на прямой MN на только что вычисленном нами расстоянии y_c от прямой AB . Эту точку можно построить следующим образом.

Отложим $AK = b$, $DL = a$ и проведем прямую KL (черт. 135). Эта прямая пересекается с прямой MN в точке E . Покажем, что точка E и есть искомая.

В самом деле, опустив из точки E перпендикуляр EF на прямую AB , имеем:

$$\frac{EF}{h} = \frac{EM}{MN},$$

откуда

$$EF = h \frac{EM}{MN}.$$

С другой стороны, из подобия треугольников KEM и ENL выводим:

$$\frac{EM}{EN} = \frac{KM}{NL} = \frac{\frac{a}{2} + b}{\frac{b}{a + \frac{1}{2}}} = \frac{a + 2b}{2a + b},$$

или, так как $EN = MN - EM$,

$$\frac{EM}{MN - EM} = \frac{a + 2b}{2a + b},$$

откуда

$$EM = MN \cdot \frac{a + 2b}{3(a + b)}.$$

Подставляя это значение отрезка EM в формулу для отрезка EF , получаем:

$$EF = \frac{h(a + 2b)}{3(a + b)} = y_c.$$

Итак, точка E и является центром тяжести площади нашей трапеции.

3. Центр тяжести дуги окружности

Дана дуга окружности AB радиуса R (черт. 136). Требуется найти центр тяжести этой дуги.

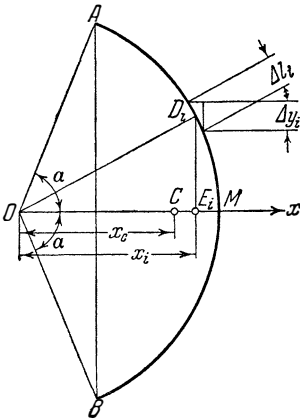
Так как радиус OM , проходящий через середину дуги, является осью симметрии дуги AB , то искомым центр тяжести C лежит на этом радиусе. Вычислим его расстояние OC от центра дуги O .

Разобьем дугу AB на бесчисленное множество бесконечно малых элементов Δl_i , один из которых изображен на чертеже. Направим ось x по среднему радиусу OM и примем центр O за начало координат. Обозначая абсциссу середины элемента Δl_i через x_i и полагая $OC = x_c$, имеем:

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta l_i}{L},$$

где L — длина дуги AB , а суммирование распространено на все элементы Δl_i .

Чтобы вычислить сумму, стоящую в числителе этой формулы, поступим следующим образом. Обозначим середину элемента Δl_i через D_i , а основание перпендикуляра,



Черт. 136.

опущенного из этой точки на ось x , — через E_i ; в таком случае $OE_i = x_i$. Далее, проведя через конечные точки элемента Δl_i две прямые, соответственно параллельную хорде AB и перпендикулярную к ней, получим при элементе Δl_i бесконечно малый треугольник (сторону Δl_i в этом треугольнике — ввиду ее малости — можно считать прямолинейной), который подобен треугольнику OD_iE_i (по перпендикулярности сторон). Обозначая ту сторону бесконечно малого треугольника, которая параллельна хорде AB , через Δy_i , выводим из подобия этих треугольников:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta l_i} = \frac{OE_i}{OD_i} = \frac{x_i}{R}.$$

Отсюда получаем:

$$x_i \Delta l_i = R \Delta y_i,$$

и, следовательно:

$$x_c = \frac{\sum R \Delta y_i}{L} = \frac{R}{L} \sum \Delta y_i.$$

Но сумма всех отрезков Δy_i равна хорде AB . Обозначая длину этой хорды через S , получаем:

$$x_c = R \frac{S}{L}.$$

Этим определяется положение центра тяжести C .

Полученный результат можно представить несколько иначе, вводя центральный угол $\angle AOB = 2\alpha$. Имеем:

$$L = 2R\alpha,$$

$$S = 2R \sin \alpha.$$

Следовательно:

$$x_c = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

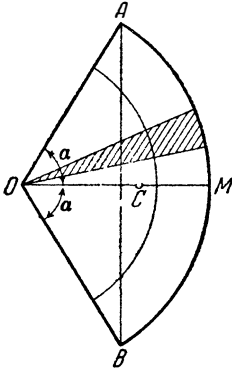
Применим эту формулу к нахождению центра тяжести дуги полуокружности. В этом случае имеем $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и, следовательно.

$$x_c = \frac{2}{\pi} R,$$

что совпадает с результатом, полученным в § 73.

4. Центр тяжести площади кругового сектора

Дан круговой сектор, ограниченный дугой окружности AB и радиусами OA и OB (черт. 137); радиус дуги AB обозначим через R . Требуется найти центр тяжести площади этого сектора.



Черт. 137.

Проведя бесчисленное множество бесконечно близких радиусов, разобьем данный сектор на бесчисленное множество элементарных секторов, один из которых изображен на чертеже. Каждый из этих элементарных секторов можно рассматривать как элементарный треугольник (дугу, которой ограничен такой сектор, можно рассматривать — ввиду ее малости — как прямолинейный отрезок). Отсюда следует, что центр тяжести площади каждого элементарного сектора находится на расстоянии $\frac{2}{3}R$ от центра O . Мы заключаем, что иско-

мый центр тяжести площади всего данного сектора совпадает с центром тяжести дуги окружности радиуса $\frac{2}{3}R$.

Итак, центр тяжести площади сектора находится на среднем радиусе OM на расстоянии

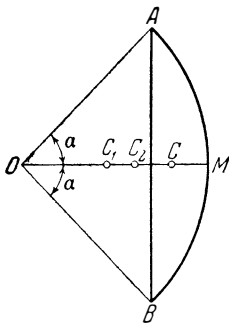
$$OC = \frac{2}{3}R \frac{S}{L} = \frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

от центра O . Здесь S — длина хорды AB , L — длина дуги AB , 2α — центральный угол $\angle AOB$.

В случае полукруга мы имеем $\alpha = \frac{\pi}{2}$; подставляя в полученную формулу, находим:

$$OC = \frac{4}{3\pi}R,$$

что совпадает с результатом, полученным в § 72.



Черт. 138.

5. Центр тяжести площади кругового сегмента

Дан круговой сегмент, ограниченный дугой окружности AMB и хордой AB (черт. 138); радиус дуги AMB обозначим через R . Требуется найти центр тяжести площади сегмента.

Проведя радиусы OA и OB , получим круговой сектор OAB . Хордой AB этот сектор делится на две части: на данный нам сегмент и треугольник OAB . Центры тяжести сегмента (C), треугольника (C_1) и сектора (C_2)

лежат на радиусе OM , перпендикулярном к хорде AB . Обозначая расстояния этих центров тяжести от центра O через x , x_1 и x_2 , имеем:

$$x_2 = \frac{Sx + S_1x_1}{S_2},$$

где S — площадь сегмента, S_1 — площадь треугольника OAB , S_2 — площадь сектора. Отсюда

$$x = \frac{S_2x_2 - S_1x_1}{S} = \frac{S_2x_2 - S_1x_1}{S_2 - S_1}.$$

Подставляя сюда

$$S_1 = R^2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad x_1 = \frac{2}{3} R \cos \alpha,$$

$$S_2 = R^2 \alpha, \quad x_2 = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

где $2\alpha = \angle AOB$, получим:

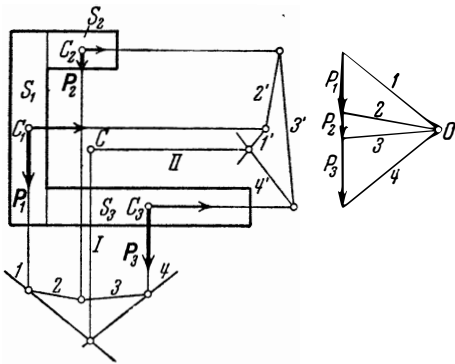
$$x = \frac{\frac{2}{3} R^2 \sin \alpha - \frac{2}{3} R^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{R^2 \alpha - R^2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{3} R \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}.$$

Этой формулой определяется положение центра тяжести площади сегмента.

§ 75. Применение веревочного многоугольника к определению центра тяжести площадей

Центры тяжести площадей могут быть определяемы также графически посредством построения веревочного многоугольника. Поясним этот прием на следующем примере.

Положим, требуется определить центр тяжести площади S изображенной на черт. 139 фигуры. Площадь S может быть разбита на три части (прямоугольники) S_1 , S_2 и S_3 , центры тяжести которых известны. Приложим в центрах тяжести C_1 , C_2 и C_3 этих площадей вертикальные силы P_1 , P_2 и P_3 , пропорциональные площадям S_1 , S_2 и S_3 . Вопрос сводится к нахождению центра этих трех параллельных сил.



Черт. 139.

Мы знаем, что центр параллельных сил лежит на линии действия равнодействующих данных сил. Построим линию действия равнодействующей сил P_1 , P_2 и P_3 посредством веревочного многоугольника.

Для этого построим многоугольник сил P_1 , P_2 и P_3 с лучами 1 , 2 , 3 , 4 и веревочный многоугольник 1 , 2 , 3 , 4 . Вертикальная прямая I , проходящая через точку пересечения его крайних сторон, и есть линия действия равнодействующей.

Воспользуемся теперь тем свойством центра параллельных сил, что он не меняет своего положения при повороте всех сил вокруг их точек приложения на один и тот же угол. Повернем силы P_1 , P_2 и P_3 вокруг точек C_1 , C_2 и C_3 на 90° . Построим опять линию действия равнодействующей этих сил. Очевидно, что точка пересечения этой прямой с ранее построенной прямой I есть искомый центр параллельных сил. Легко заметить, что нет надобности строить новый многоугольник сил P_1 , P_2 и P_3 (соответствующий их повернутому положению). Можно сразу построить веревочный многоугольник $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, проводя его стороны не параллельно, а перпендикулярно к соответствующим лучам 1 , 2 , 3 , 4 ранее построенного многоугольника сил. Горизонтальная прямая II , проходящая через точку пересечения крайних сторон $1'$ и $4'$ нового веревочного многоугольника, есть линия действия равнодействующей сил P_1 , P_2 и P_3 в их повернутом положении.

Искомый центр тяжести C данной площади находится в пересечении прямых I и II .

ОТДЕЛ ВТОРОЙ КИНЕМАТИКА

ГЛАВА XII УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

§ 76. Кинематика. Динамика

В отделе I курса мы изучали те условия, при которых тело (мы имели в виду твердое тело), находясь под действием приложенных к нему сил, остается в равновесии. Если силы, приложенные к телу, не удовлетворяют условиям равновесия, то движение тела изменяется. Как будет двигаться данное тело под действием приложенных к нему сил, какова связь между силами, приложенными к телу, и вызываемыми ими движением, — вот основной вопрос, который приходится ставить в механике при изучении движения тел.

Но можно подойти к изучению движения и с другой, более узкой точки зрения. Движением тела называется происходящее с течением времени непрерывное изменение его положения в пространстве. Геометрическими свойствами пространства обуславливаются и геометрические свойства движения, в этом пространстве происходящего. Оставляя временно в стороне вопрос о силах, изменяющих движение тел, можно сосредоточить свое внимание на изучении этих геометрических свойств движения. С этой именно точки зрения изучается движение тел в *кинематике*.

Кинематику можно назвать геометрическим учением о движении. Как уже сказано, в кинематике вопрос о силах, обуславливающих движение тела, остается совершенно в стороне. Более широкая постановка задачи о движении тел, в которой на первый план выдвигается связь между движением тела и приложенными к нему силами, принадлежит *динамике*. Понятно, что изучением движения с кинематической точки зрения может быть подготовлено и облегчено более широкое, динамическое исследование вопроса. Отсюда следует, что изучение кинематики должно предшествовать изучению динамики.

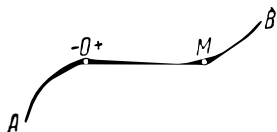
В отделе II этой книги будут изложены основы кинематики. Подобно тому как в статике мы занимались изучением только условий равновесия тел абсолютно твердых, так точно и здесь мы ограничим свою задачу изучением кинематики твердого тела. Изложение кинематики изменяемых тел (например, жидкостей) относится к соответствующим специальным курсам.

Как уже сказано, кинематику можно трактовать как введение в динамику. Однако следует иметь в виду, что результаты, устанавливаемые в кинематике, имеют и большое самостоятельное значение. Во многих механизмах вопрос о действующих силах имеет сравнительно второстепенное значение; правильное же действие механизма обеспечивается исчерпывающим кинематическим анализом движений отдельных его частей. Приложение результатов кинематики к изучению движения механизмов излагается в курсе кинематики механизмов, в нашем изложении мы коснемся относящихся сюда вопросов лишь в общих чертах.

Мы начнем изучение кинематики с рассмотрения движения простейшего геометрического элемента — геометрической точки.

§ 77. Траектория. Уравнение движения

Представим себе геометрическую точку, которая движется в пространстве. Движущаяся точка вычерчивает в пространстве некоторую линию; эта линия называется *траекторией* точки. В частном случае траектория точки может быть прямой линией; тогда движение точки называется *прямолинейным*. Если траектория точки — кривая линия, то движение точки называется *криволинейным*.



Черт. 140.

Положим, точка M (черт. 140) совершает некоторое движение по траектории AB . Движение точки M будет нами вполне определено, если мы будем в состоянии указать положение точки на ее траектории в каждый данный момент времени.

Момент времени определяется следующим образом. Выбираем некоторый произвольный момент времени за начало отсчета времени. Промежуток времени (выраженный в часах, минутах, секундах и т. д.), протекший от выбранного начала до данного момента, обозначаем буквой t и называем данный момент *моментом t* . Момент $t=0$, от которого отсчитываем время, будем называть *начальным моментом*.

Положение точки M на ее траектории может быть определено следующим образом.

Возьмем на траектории некоторую произвольную (неподвижную) точку O . Измерим длину дуги OM и условимся приписывать этой длине знак $+$, если точка M находится на траектории по одну сторону от точки O , и знак $-$, если точка M находится по другую сторону от точки O . (В которую сторону считать длину дуги OM положительной, зависит от нашего произвола.) Длину дуги OM , выраженную в сантиметрах, метрах, километрах и т. д. и взятую с надлежащим знаком, обозначим буквой s и назовем расстоянием точки M от точки O , называемой началом отсчета расстояний.

Заданием расстояния s вполне определяется положение точки на ее траектории. Если положение точки M в момент $t=0$ принято за начало отсчета расстояний и точка M движется по траектории в одном направлении, то расстояние s определяет *путь*, пройденный точкой M за промежуток времени t . При движении точки расстояние s изменяется с течением времени. Следовательно, s есть некоторая функция от t :

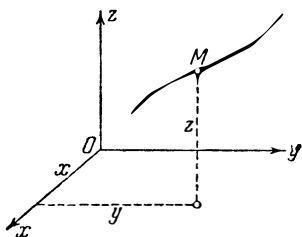
$$s = f(t).$$

Это уравнение называется *уравнением движения* точки. Заданием траектории и уравнения движения вполне определяется движение точки. Действительно, зная уравнение движения, мы можем для каждого данного момента t найти соответствующее значение s , а следовательно, и указать положение точки на ее траектории.

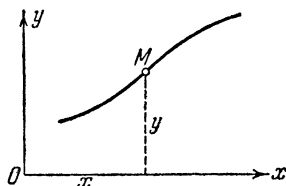
§ 78. Уравнения движения в прямоугольных координатах

Можно определить движение точки еще другим способом.

Положим, что точка M (черт. 141) совершает некоторое движение в пространстве. Возьмем три взаимно перпендикулярные координатные оси x , y , z . Положение точки M в пространстве вполне определяется ее тремя координатами x , y , z .



Черт. 141.



Черт. 142.

При движении точки M ее координаты x , y , z изменяются с течением времени. Следовательно, координаты x , y , z суть некоторые функции времени t :

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Заданием этих уравнений вполне определяется движение точки. Действительно, зная эти уравнения, мы можем для каждого данного момента t найти соответствующие координаты x , y , z , а следовательно, и указать положение точки в пространстве.

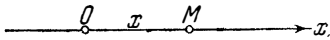
Уравнения (1) называются *уравнениями движения точки в прямоугольных координатах*.

В приложениях обыкновенно приходится иметь дело с тем случаем движения точки, когда точка движется, оставаясь в одной плоскости; в этом случае движение точки называется *плоским*. Рассмотрим этот случай. Положим, что точка M (черт. 142) движется, оставаясь в одной плоскости, которую примем за плоскость чертежа. Возьмем на этой плоскости взаимно перпендикулярные координатные оси x и y . Положение точки M на плоскости вполне определяется ее двумя координатами x и y . При движении точки M ее координаты x и y суть некоторые функции времени t :

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Таковы уравнения движения в прямоугольных координатах в частном случае плоского движения точки.

Положим, что нам заданы уравнения движения (2). Найдем уравнение траектории точки M . Исключим время t из уравнений движения (2). Для этого решим, например, первое уравнение относительно t ; получим:



Черт. 143.

$$t = \psi(x),$$

и подставим полученное для t выражение во второе уравнение:

$$y = f_2[\psi(x)]. \quad (3)$$

Мы получили уравнение между координатами x и y , которому удовлетворяют координаты точки M во всякий момент времени t . Другими словами, уравнению (3) удовлетворяют координаты всех точек траектории, т. е. уравнение (3) и есть уравнение траектории.

Итак, чтобы найти уравнение траектории точки M , нужно исключить время t из уравнений движения (2).

Исключая время t из уравнений (2), мы получим вообще уравнение вида

$$F(x, y) = 0$$

между координатами x и y . Это и есть уравнение траектории.

Остановимся еще на частном случае *прямолинейного* движения.

Возьмем прямолинейную траекторию точки M (черт. 143) за ось x . Возьмем на этой оси начало координат O . Положение точки M на ее прямолинейной траектории вполне определяется одной координатой $OM = x$, и движение точки M вполне определяется одним уравнением движения

$$x = f(t).$$

Заметим, что в данном случае координата x является в то же время и пройденным расстоянием (если взять точку O за начало отсчета пройденных расстояний).

Пример 25. Представим себе линейку AB (черт. 144), концы которой скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым $x'x$ и $y'y$. Линейка движется так, что угол $BAO = \varphi$ изменяется пропорционально времени:

$$\varphi = \omega t,$$

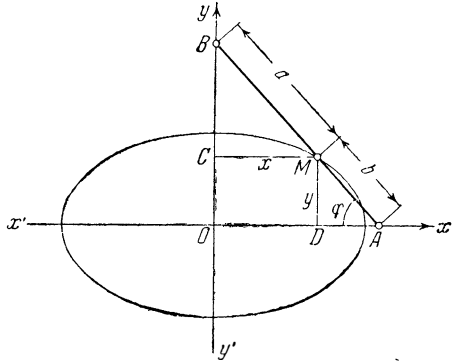
где ω — постоянное число. Составить уравнения движения точки M , лежащей на линейке AB , и определить ее траекторию.

Обозначим $BM = a$, $AM = b$. Возьмем прямые $x'x$ и $y'y$ за координатные оси. Из треугольников BMC и AMD имеем:

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi$$

или, подставляя $\varphi = \omega t$:

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t.$$



Черт. 144.

Таковы уравнения движения точки M . Чтобы определить траекторию, исключаем время t из этих уравнений. Имеем:

$$\frac{x}{a} = \cos \omega t, \quad \frac{y}{b} = \sin \omega t,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 \omega t, \quad \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \omega t,$$

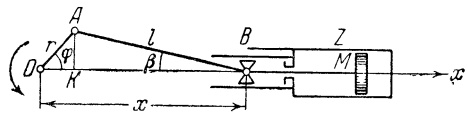
откуда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это есть уравнение эллипса. Следовательно, траектория точки M есть эллипс.

Итак, всякая точка линейки AB описывает эллипс. Рассматриваемый механизм может служить для вычерчивания эллипсов; он называется *эллипсографом*.

Пример 26. В цилиндре Z паровой машины (черт. 145) ходит поршень M , который соединен поршневым штоком BM с крейцкопфом B . Крейцкопф в свою очередь соединен шатуном AB с концом A кривошипа OA , вращающегося вместе с валом O . Этот механизм называется *кривошипно-шатунным механизмом*.



Черт. 145.

Обозначим длины кривошипа OA и шатуна AB соответственно через r и l и предположим, что вал O вращается равномерно, т. е. что угол φ , образованный кривошипом с осью цилиндра, изменяется пропорционально времени:

$$\varphi = \omega t,$$

где ω — постоянное число. Требуется составить уравнение движения поршня.

Очевидно, что движение поршня M ничем не отличается от движения кривокопфа B . Вопрос сводится к составлению уравнения движения кривокопфа. Примем ось цилиндра за ось x , назовем начало отсчета x -в в точке O и обозначим абсциссу точки B через x . Требуется выразить x как функцию от времени t . Опуская из точки A перпендикуляр AK на ось x , имеем:

$$x = OK + KB.$$

С другой стороны, обозначая угол, образованный шатуном AB с осью x , через β , имеем:

$$OK = r \cos \varphi, \quad KB = l \cos \beta,$$

и, следовательно,

$$x = r \cos \varphi + l \cos \beta.$$

Найдем зависимость между углами β и φ . Из треугольника OAB по теореме синусов имеем:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \varphi} = \frac{r}{l}, \quad \sin \beta = \frac{r}{l} \sin \varphi.$$

Обозначим для сокращения отношение $\frac{r}{l}$ через λ . Тогда

$$\sin \beta = \lambda \sin \varphi, \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}.$$

Подставляя найденное значение $\cos \beta$ в формулу для x , получаем:

$$x = r \cos \varphi + l \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}.$$

Остается подставить здесь $\varphi = \omega t$; сделав эту подстановку, получаем искомое уравнение движения:

$$x = r \cos \omega t + l \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}. \quad (1)$$

Число λ (отношение длины кривошипа к длине шатуна) всегда бывает правильной дробью; обычно это число содержится в пределах между $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$. Имея в виду, что λ^2 — сравнительно малая величина, мы можем упростить полученное уравнение движения поршня.

В самом деле, мы имели:

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}.$$

Применяя к этому выражению формулу бинома Ньютона, получим:

$$\begin{aligned} \cos \beta &= 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \lambda^4 \sin^4 \varphi + \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{8} \lambda^4 \sin^4 \varphi + \dots \end{aligned}$$

Число $\frac{1}{8} \lambda^4$ очень мало (при $\lambda = \frac{1}{4}$ имеем $\frac{1}{8} \lambda^4 = \frac{1}{2048}$), еще меньше следующие члены этого ряда, содержащие λ^6 , λ^8 и т. д. Отбрасывая все эти члены, получим приближенно:

$$\begin{aligned} \cos \beta &= 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varphi = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} = \\ &= 1 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Отсюда

$$x = r \cos \varphi + l \left(1 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} \cos 2\varphi \right),$$

или, так как $l = r$,

$$x = r \left(\cos \varphi + \frac{\lambda}{4} \cos 2\varphi \right) + l - \frac{\lambda r}{4}.$$

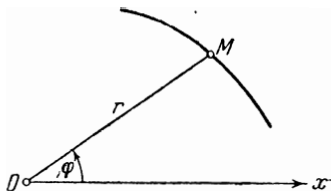
Подставляя здесь $\varphi = \omega t$, получаем приближенное уравнение движения крещкопфа (или поршня):

$$x = r \left(\cos \omega t + \frac{\lambda}{4} \cos 2\omega t \right) + l - \frac{\lambda r}{4}. \quad (2)$$

Это уравнение представляется более удобным для применения, чем точное уравнение (1). Точность этого приближенного уравнения в большинстве случаев достаточна для практических целей.

§ 79. Уравнения движения в полярных координатах

В предыдущем параграфе мы видели, каким образом движение точки может быть определено при помощи ее декартовых координат x , y , z . Как известно, декартовы координаты — далеко не единственная координатная система, служащая для определения положения точки. Для этой же цели могут быть применены полярные координаты на плоскости, цилиндрические и сферические координаты в пространстве и т. д. Всякая координатная система, при помощи которой можно определять положение точки на плоскости или в пространстве, может быть применена также и для определения движения точки. Мы остановимся здесь на применении полярных координат к определению плоского движения точки.



Черт. 146.

Положим, что точка M (черт. 146) совершает плоское движение в плоскости чертежа. Возьмем в этой плоскости неподвижную точку O (называемую полюсом) и неподвижную прямую Ox . Полярными координатами точки M называются длина r отрезка OM (называемого радиусом-вектором точки M) и угол φ , образованный радиусом-вектором с осью x ; этот угол мы будем считать положительным,

если он отложен от оси x против вращения часовой стрелки, в противном случае мы будем считать его отрицательным.

Положение точки M на плоскости вполне определяется ее полярными координатами r и φ . При движении точки координаты r и φ изменяются с течением времени, т. е. являются функциями времени t :

$$r = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t). \quad (1)$$

Этими уравнениями вполне определяется движение точки на плоскости; мы назовем их *уравнениями движения точки в полярных координатах*.

Если заданы уравнения движения (1), то легко найти и уравнение траектории в полярных координатах — нужно только исключить время t из уравнений (1). В результате исключения времени из этих уравнений получим уравнение вида

$$F(r, \varphi) = 0,$$

которому должны удовлетворять полярные координаты точки во всякий момент времени. Это и есть уравнение траектории в полярных координатах.

Пример 27. Движение точки на плоскости задано уравнениями движения в полярных координатах:

$$r = at, \quad \varphi = bt,$$

где a и b — постоянные величины. Найти уравнение траектории.

Исключим время из заданных уравнений движения. Из второго уравнения имеем:

$$t = \frac{\varphi}{b}.$$

Подставляя это значение t в первое уравнение, получаем:

$$r = \frac{a}{b} \varphi$$

или, обозначая для краткости $\frac{a}{b}$ через c ,

$$r = c\varphi.$$

Это и есть уравнение траектории. Кривая, определяемая этим уравнением, называется *архимедовой спиралью*.

ГЛАВА XIII

СКОРОСТЬ

§ 80. Скорость равномерного движения

Движение точки называется *равномерным*, если в каждые два равных промежутка времени точка проходит равные пути. Представим себе равномерно движущуюся точку M (черт. 147). Положим, что в каждую единицу времени (например, секунду) точка M прохо-

дит путь a , двигаясь по траектории в одном направлении. Составим уравнение равномерного движения точки M . Положим, что в начальный момент $t=0$ точка занимает положение M_0 , которое назовем *начальным положением* точки; буквой M обозначено положение точки, занимаемое ею в момент t . Выберем начало отсчета расстояний O и условимся, в какую сторону от точки O будем считать пройденные расстояния положительными. Тогда длина дуги OM (взятая с надлежащим знаком) есть расстояние s ; длину дуги OM_0 (также взятую с надлежащим знаком) обозначим через s_0 и назовем *начальным расстоянием*. Из чертежа имеем:

$$OM = OM_0 + M_0M.$$

Но $OM = s$, $OM_0 = s_0$; длина же дуги M_0M есть путь, пройденный точкой в течение t единиц времени; так как в каждую единицу времени точка проходит путь a , то $M_0M = at$. Следовательно, получаем:

$$s = s_0 + at.$$

Это и есть уравнение движения точки M .

Величина a , характеризующая большую или меньшую быстроту движения точки, называется скоростью равномерного движения. Итак, *скоростью равномерного движения* называется путь, проходимый равномерно движущейся точкой в единицу времени.

Обозначая скорость буквой v , т. е. полагая $a = v$, получаем *уравнение равномерного движения* в следующем окончательном виде:

$$s = s_0 + vt.$$

Решая это уравнение относительно v , находим:

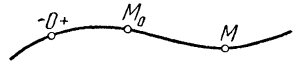
$$v = \frac{s - s_0}{t},$$

откуда следует, что *скорость равномерного движения равна отношению пути, пройденного за некоторый промежуток времени, к величине этого промежутка времени*.

Если равномерно движущаяся точка проходит единицу длины в единицу времени, то ее скорость равна

$$v = \frac{1}{1} = 1.$$

Отсюда следует, что за *единицу скорости* мы должны принять скорость такого равномерного движения, при котором точка проходит единицу длины в единицу времени. Например, если за единицу длины принять сантиметр, а за единицу времени — секунду, то за единицу скорости мы должны принять скорость такого равномерного



Черт. 147.

движения, при котором точка проходит один сантиметр в одну секунду; эта единица скорости обозначается так: $см/сек$. Если же за единицу длины принят метр, а за единицу времени — минута, то за единицу скорости мы должны принять $м/мин$. И вообще каждому выбору единицы длины и единицы времени соответствует своя единица скорости. Положим, скорость некоторого равномерного движения есть $v = 120 м/мин$. Требуется выразить эту скорость в $см/сек$. В данном случае точка проходит в 1 минуту 120 м или 12 000 см, а, значит, в 1 секунду она проходит $\frac{12\,000}{60} = 200 см$, т. е.

$$v = 200 см/сек.$$

Отсюда вытекает простое правило для перехода от одних единиц скорости к другим: напишите данную скорость с надлежащим наименованием единицы скорости; в этом наименовании выразите данные единицы длины и времени через новые единицы длины и времени; произведя перемножение, получите требуемый результат.

Например:

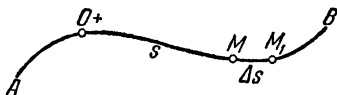
$$v = 120 м/мин = 120 \frac{100 см}{60 сек} = \frac{12\,000 см}{60 сек} = 200 см/сек.$$

§ 81. Скорость какого угодно движения

Представим себе точку M , совершающую какое-либо движение в пространстве (черт. 148). На траектории AB точки M выберем начало отсчета расстояний O и положим, что уравнение движения точки M есть

$$s = f(t).$$

Возьмем два момента времени t и $t + \Delta t$; положим, что в момент t наша движущаяся точка занимает положение M , а в момент $t + \Delta t$ — положение M_1 ; длину дуги MM_1 , пройденной движущейся точкой за время Δt , обозначим через Δs .



Черт. 148.

Отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ называется *средней скоростью* точки за время Δt .

Будем теперь уменьшать промежуток времени Δt , приближая его к нулю. Тогда и длина дуги Δs будет приближаться к нулю, средняя же скорость $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ будет приближаться к некоторому пределу. Этот предел называется *скоростью* точки M в момент t .

Обозначая скорость точки M в момент t буквой v , имеем:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right]. \quad (1)$$

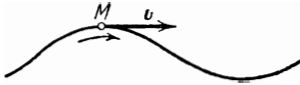
Но расстояние s есть функция времени t ; так как Δt есть приращение независимой переменной t , а Δs — соответствующее приращение функции s , то предел отношения $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ при приближении Δt к нулю есть производная от s по t .

Следовательно:

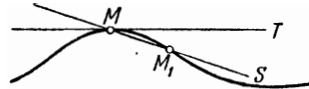
$$v = \frac{ds}{dt}, \quad (2)$$

т. е. *скорость равна производной пройденного расстояния по времени.*

Заметим, что, определяя скорость v по формуле (1) или (2), мы получим для скорости v величину положительную или отрицатель-



Черт. 149.



Черт. 150.

ную. На черт. 148 мы предполагаем, что точка M движется в сторону возрастающих s ; в этом случае $\Delta s > 0$ и, следовательно:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} > 0 \text{ и } v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right] > 0.$$

Если бы точка M двигалась в сторону убывающих s , то было бы $\Delta s < 0$ и, следовательно:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} < 0 \text{ и } v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right] < 0.$$

Следовательно, знак скорости определяет направление движения точки: скорость положительна, если точка движется в сторону возрастающих s , и отрицательна, если точка движется в сторону убывающих s .

В дальнейших исследованиях представляется удобным рассматривать скорость как величину *векторную*. Соответственно этому мы условимся в дальнейшем считать величину скорости всегда положительной, определяя ее как абсолютное значение производной $\frac{ds}{dt}$, т. е.

$$v = \left| \frac{ds}{dt} \right|;$$

вместе с тем, мы условимся приписывать скорости v направление касательной к траектории в данной точке, проведенной в сторону движения (черт. 149). [Напомним, что касательной MT к некоторой кривой в данной точке M называется предельное положение,

к которому приближается секущая MS , когда M_1 приближается к точке M (черт. 150).]

При таком способе изображения скорости направление движения определяется не знаком скорости, а стрелкой, поставленной у конца отрезка, изображающего скорость.

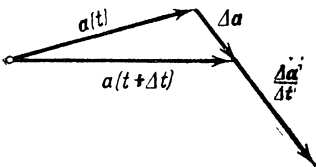
§ 82. Векторная производная

Введем важное для дальнейшего понятие *векторной производной*.

Представим себе какой-либо переменный вектор \mathbf{a} , который изменяется с течением времени так, что различным моментам времени соответствуют различные численные значения и различные направления вектора \mathbf{a} . В этом случае мы будем называть переменный вектор \mathbf{a} *векторной функцией* времени t и будем писать $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$. Значением векторной функции $\mathbf{a}(t)$ для данного значения аргумента t мы будем называть численное значение и направление вектора \mathbf{a} в рассматриваемый момент времени.

Возьмем два момента времени t и $t + \Delta t$ и соответствующие значения $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{a}(t + \Delta t)$ нашей векторной функции. Разность векторов $\mathbf{a}(t + \Delta t)$ и $\mathbf{a}(t)$ обозначим через $\Delta \mathbf{a}$, т. е. положим:

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t).$$



Черт. 151.

Чтобы построить вектор $\Delta \mathbf{a}$, откладываем векторы $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{a}(t + \Delta t)$ от одной и той же точки и соединяем параллельным отрезком концы этих векторов: разностью $\Delta \mathbf{a}$ мы называем вектор, который, будучи сложен с $\mathbf{a}(t)$, дает $\mathbf{a}(t + \Delta t)$ (черт. 151). Вектор $\Delta \mathbf{a}$ получает название *приращения* векторной функции $\mathbf{a}(t)$, соответствующего приращению Δt аргумента t .

Затем построим новый вектор $\frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t}$; направление этого вектора, отличающегося от вектора $\Delta \mathbf{a}$ лишь скалярным множителем $\frac{1}{\Delta t}$, совпадает с направлением вектора $\Delta \mathbf{a}$.

Будем теперь уменьшать промежуток времени Δt , приближая его к нулю. Тогда и вектор $\Delta \mathbf{a}$ будет приближаться к нулю, вектор же $\frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t}$ будет приближаться к некоторому пределу¹⁾. Этот предел назы-

¹⁾ Мы называем вектор \mathbf{A} пределом переменного вектора \mathbf{B} и пишем:

$$\mathbf{A} = \lim [\mathbf{B}],$$

если численное значение вектора \mathbf{A} равно пределу численного значения вектора \mathbf{B} , а направление вектора \mathbf{A} совпадает с предельным направлением вектора \mathbf{B} .

вається *векторной производной* функции $\mathbf{a}(t)$ по аргументу t и обозначается через $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$, так что

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} \right].$$

Мы предположили, что вектор \mathbf{a} есть функция времени t . Можно себе представить переменный вектор, который изменяется в зависимости не от времени, а от какого-либо другого скалярного аргумента. Рассуждая совершенно так же, как мы сейчас это делали, можно установить понятие векторной производной от векторной функции по любому скалярному аргументу. Впрочем, в кинематике мы преимущественно будем иметь дело с переменными векторами, зависящими именно от времени; поэтому для нас будет иметь особое значение понятие векторной производной по времени.

§ 83. Простейшие правила векторного дифференцирования

Легко убедиться в том, что основные правила скалярного дифференцирования, устанавливаемые в дифференциальном исчислении, распространяются также и на векторное дифференцирование. Остановимся на некоторых простейших правилах векторного дифференцирования. За независимую переменную примем время t .

1) Мы будем называть вектор \mathbf{a} *постоянным* и писать

$$\mathbf{a} = \text{const},$$

если этот вектор имеет *неизменную величину* и *неизменное направление*.

В этом случае $\Delta \mathbf{a} = 0$ и, следовательно:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0.$$

Итак, *векторная производная постоянного вектора равна нулю*.

Следует заметить, что если вектор \mathbf{a} сохраняет неизменной лишь свою величину, направление же его изменяется с течением времени, то $\Delta \mathbf{a}$ не равно нулю, а следовательно, и производная $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ не обращается в нуль.

2) Даны два переменных вектора $\mathbf{a}_1(t)$ и $\mathbf{a}_2(t)$. Возьмем их сумму

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_1(t) + \mathbf{a}_2(t).$$

Положим, что в момент t наши векторы имеют значения \mathbf{a} , \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 , значения же их в момент $t + \Delta t$ обозначим через $\mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1 + \Delta \mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2 + \Delta \mathbf{a}_2$, где $\Delta \mathbf{a}$, $\Delta \mathbf{a}_1$, $\Delta \mathbf{a}_2$ — приращения соответствующих

векторов за время Δt . Имеем векторные равенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{a} + \Delta \mathbf{a} &= \mathbf{a}_1 + \Delta \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \Delta \mathbf{a}_2, \end{aligned}$$

откуда

$$\Delta \mathbf{a} = \Delta \mathbf{a}_1 + \Delta \mathbf{a}_2.$$

Разделив обе части этого равенства на Δt , будем иметь:

$$\frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{a}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \mathbf{a}_2}{\Delta t},$$

откуда, переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d\mathbf{a}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{a}_2}{dt}.$$

Итак, теорема «производная суммы равна сумме производных» остается справедливой и при векторном дифференцировании. Эта теорема справедлива при любом числе составляющих векторов.

3) Даны векторная функция $\mathbf{a}(t)$ и скалярная функция $m(t)$. Составим их произведение, которое обозначим через $\mathbf{b}(t)$:

$$\mathbf{b}(t) = m(t) \mathbf{a}(t).$$

Значения скаляра $m(t)$ и векторов $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$ в момент t обозначим через m , \mathbf{a} , \mathbf{b} , а в момент $t + \Delta t$ — через $m + \Delta m$, $\mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}$, $\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}$. В таком случае:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= m\mathbf{a}, \\ \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b} &= (m + \Delta m)(\mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}). \end{aligned}$$

Мы знаем (см. § 3), что для умножения суммы векторов на скалярный множитель нужно умножить каждый составляющий вектор на этот множитель; следовательно:

$$(m + \Delta m)(\mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}) = (m + \Delta m)\mathbf{a} + (m + \Delta m)\Delta \mathbf{a}.$$

С другой стороны, имеем равенства:

$$\begin{aligned} (m + \Delta m)\mathbf{a} &= m\mathbf{a} + \Delta m \cdot \mathbf{a}, \\ (m + \Delta m) \cdot \Delta \mathbf{a} &= m\Delta \mathbf{a} + \Delta m \cdot \Delta \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b} = m\mathbf{a} + \Delta m \cdot \mathbf{a} + m\Delta \mathbf{a} + \Delta m \cdot \Delta \mathbf{a}.$$

Отсюда

$$\Delta \mathbf{b} = \Delta m \cdot \mathbf{a} + m \cdot \Delta \mathbf{a} + \Delta m \cdot \Delta \mathbf{a}.$$

Разделим обе части этого равенства на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. Имея в виду, что член $\Delta m \cdot \Delta \mathbf{a}$ есть величина второго порядка малости (по сравнению с Δt), получим:

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot \mathbf{a} + m \frac{d\mathbf{a}}{dt}.$$

Как видно, правило дифференцирования произведения остается справедливым и в данном случае.

4) Даны векторные функции $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$; составим их векторное произведение

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t).$$

Обозначая, как выше, значения наших векторов в момент t через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , а в момент $t + \Delta t$ — через $\mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}$, $\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}$, $\mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}$, будем иметь:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \\ \mathbf{c} + \Delta \mathbf{c} &= (\mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}). \end{aligned}$$

По правилу векторного перемножения двух сумм (см. § 60) имеем:

$$(\mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \Delta \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \Delta \mathbf{b} + \Delta \mathbf{a} \times \Delta \mathbf{b},$$

и, следовательно:

$$\mathbf{c} + \Delta \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \Delta \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \Delta \mathbf{b} + \Delta \mathbf{a} \times \Delta \mathbf{b}.$$

Отсюда

$$\Delta \mathbf{c} = \Delta \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \Delta \mathbf{b} + \Delta \mathbf{a} \times \Delta \mathbf{b}.$$

Разделив обе части этого равенства на Δt , будем иметь:

$$\frac{\Delta \mathbf{c}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta t} + \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} \times \Delta \mathbf{b}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ и замечая, что последний член в правой части последнего равенства при этом обращается в нуль (так как $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\Delta \mathbf{b}] = 0$), получим:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}.$$

Итак, правило дифференцирования произведения справедливо также и в случае дифференцирования векторного произведения двух векторов.

§ 84. Скорость как векторная производная от радиуса-вектора

Покажем, что установленное нами в конце § 81 понятие скорости движущейся точки как векторной величины самым тесным образом связано с понятием векторной производной.

Представим себе точку M , движущуюся по траектории AB (черт. 152). Положим, что в моменты t и $t + \Delta t$ движущаяся точка занимает положения M и M_1 . Обозначая длину дуги MM_1 через Δs , имеем для величины скорости v формулу:

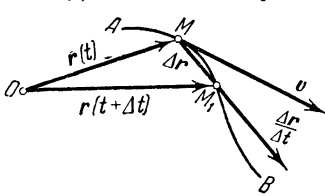
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right] = \frac{ds}{dt}$$

в предположении, что направление движения точки M принято за положительное направление отсчета дуг; направление скорости v

есть направление касательной к траектории, проведенной в сторону движения.

Возьмем теперь какую-нибудь неподвижную точку O и проведем из нее радиус-вектор $\overline{OM} = \mathbf{r}$ в точку M . При движении точки M радиус-вектор \overline{OM} изменяет с течением времени свою величину и свое направление; следовательно, мы можем его рассматривать как векторную функцию времени $\mathbf{r}(t)$. Найдем векторную производную от этой функции.

Проведя радиус-векторы \overline{OM} и \overline{OM}_1 , получаем значения нашей функции $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}(t + \Delta t)$. Геометрическим приращением $\Delta \mathbf{r}$ функции $\mathbf{r}(t)$ является хорда \overline{MM}_1 траектории AB . Векторную производную $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ мы найдем как предел, к



Черт. 152.

которому приближается вектор $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$, когда Δt приближается к нулю. Вычислим сначала численное значение векторной производной $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ (обозначим это численное значение через $\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$) как предел численного значения вектора $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$. Обозначая численное значение $\Delta \mathbf{r}$ (т. е. длину хорды MM_1) через $\Delta \sigma$, имеем:

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta \sigma}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta \sigma}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta \sigma}{\Delta s} \right] \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right] = \frac{ds}{dt},$$

так как

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta \sigma}{\Delta s} \right] = 1, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right] = \frac{ds}{dt}.$$

Итак, предел численного значения вектора $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ равен производной $\frac{ds}{dt}$. С другой стороны, вектор $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ направлен по хорде MM_1 . Так как предельное направление хорды есть направление касательной к траектории в точке M , то предельным направлением вектора $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ является направление касательной к траектории (проведенной в сторону движения).

Как видно, векторная производная $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ численно равна производной $\frac{ds}{dt}$ и направлена по касательной к траектории в сторону движения. Мы заключаем, что эта векторная производная равна скорости \mathbf{v} нашей движущейся точки.

Итак, рассматривая скорость как вектор, имеем:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

т. е. скорость равна векторной производной от радиуса-вектора по времени.

Следует заметить, что вектор $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ мы также можем рассматривать как некоторую скорость: это — скорость, которую имела бы точка M , если бы за время Δt она проходила не дугу MM_1 , а хорду MM_1 и притом равномерным движением. Обозначая эту скорость равномерного движения по хорде через v_m , имеем:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [v_m],$$

т. е. скорость v равна пределу, к которому приближается скорость v_m равномерного движения по хорде, когда Δt приближается к нулю.

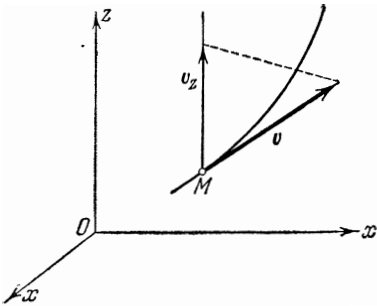
§ 85. Проекция скорости на прямоугольные координатные оси

Положим, что движение точки M (черт. 153) задано уравнениями движения в прямоугольных координатах:

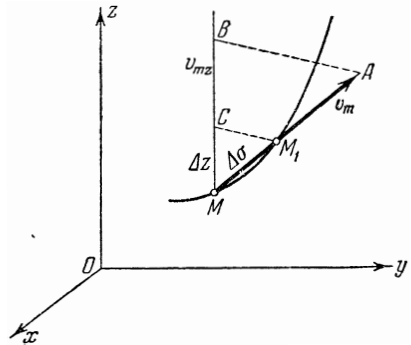
$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

Вычислим проекции скорости v на координатные оси x , y , z . Построим проекцию скорости v на ось z и обозначим эту проекцию через v_z (черт. 153).

Для вычисления проекции v_z воспользуемся замечанием, сделанным в конце предыдущего параграфа. Поступим так: построим



Черт. 153.



Черт. 154.

сначала скорость v_m равномерного движения по хорде, вычислим ее проекцию на ось z и затем перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$; в пределе мы и получим искомую величину v_z .

Итак, возьмем моменты времени t и $t + \Delta t$ и отметим положения M и M_1 движущейся точки в эти моменты (черт. 154). Проведем хорду $MM_1 = \Delta s$ и построим скорость v_m равномерного движения

по хорде MM_1 . Опуская из конца A скорости \mathbf{v}_m перпендикуляр AB на прямую, проходящую через точку M и параллельную оси z , получим проекцию MB скорости \mathbf{v}_m на ось z ; обозначим эту проекцию через v_{mz} .

Опустим также из точки M_1 перпендикуляр M_1C на упомянутую прямую, проходящую через точку M и параллельную оси z . Обозначим координаты точки M через x, y, z , а координаты точки M_1 — через $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$. Очевидно, что $MC = \Delta z$.

Из подобия треугольников MAB и MM_1C выводим:

$$\frac{v_{mz}}{v_m} = \frac{\Delta z}{\Delta \sigma}$$

или

$$v_{mz} = v_m \frac{\Delta z}{\Delta \sigma}.$$

С другой стороны, величина скорости \mathbf{v}_m равномерного движения по хорде MM_1 определяется формулой

$$v_m = \frac{\Delta \sigma}{\Delta t}.$$

Следовательно:

$$v_{mz} = \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta \sigma} = \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем:

$$v_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [v_{mz}] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta z}{\Delta t} \right].$$

Но координата z есть функция от t ; Δz есть приращение этой функции, соответствующее приращению Δt независимой переменной t ; следовательно, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta z}{\Delta t} \right]$ есть производная от координаты z по времени t :

$$v_z = \frac{dz}{dt} = z'.$$

Рассуждая совершенно так же, мы могли бы получить аналогичные результаты для проекций v_x и v_y скорости \mathbf{v} на оси x и y :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = x', \quad v_y = \frac{dy}{dt} = y'.$$

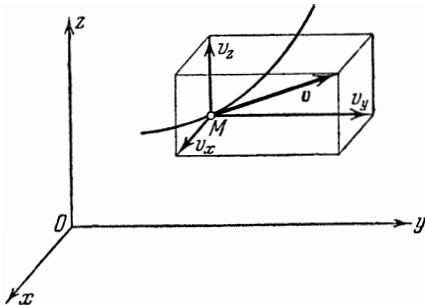
Итак, проекции скорости на неподвижные прямоугольные координатные оси равны производным от соответствующих координат по времени.

Выведенными формулами можно воспользоваться для вычисления скорости в том случае, когда движение точки задано уравнениями движения в прямоугольных координатах.

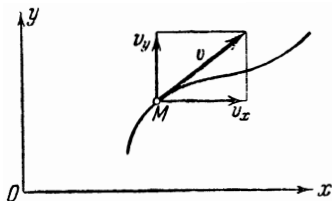
Положим, что движение точки M задано уравнениями движения

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

отнесенными к осям x, y, z (черт. 155). Для вычисления скорости \boldsymbol{v} построим прямоугольный параллелепипед, ребра которого параллельны осям x, y, z и в котором скорость \boldsymbol{v} является диагональю.



Черт. 155.



Черт. 156.

Ребра этого прямоугольного параллелепипеда численно равны проекциям скорости: v_x, v_y, v_z . Вычисляем эти проекции по формулам:

$$v_x = x', \quad v_y = y', \quad v_z = z'.$$

Затем находим величину скорости v по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Далее имеем

$$v_x = v \cos(\boldsymbol{v}, x), \quad v_y = v \cos(\boldsymbol{v}, y), \quad v_z = v \cos(\boldsymbol{v}, z),$$

откуда

$$\cos(\boldsymbol{v}, x) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\boldsymbol{v}, y) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\boldsymbol{v}, z) = \frac{v_z}{v}.$$

Этими формулами определяется направление скорости \boldsymbol{v} .

Отметим частный случай *плоского* движения точки.

Положим, что точка M (черт. 156) совершает плоское движение в плоскости xy ; ее движение задано уравнениями движения

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t).$$

Желая определить скорость \boldsymbol{v} , вычисляем проекции скорости v_x и v_y по формулам

$$v_x = x', \quad v_y = y'.$$

Затем находим величину скорости v как диагональ прямоугольника, построенного на проекциях v_x и v_y :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Направление скорости \boldsymbol{v} определяется формулами:

$$\cos(\boldsymbol{v}, x) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\boldsymbol{v}, y) = \frac{v_y}{v}.$$

Остановимся еще на частном случае *прямолинейного* движения точки. Положим, что точка M (черт. 157) совершает прямолинейное движение по оси x ; ее движение задано уравнением

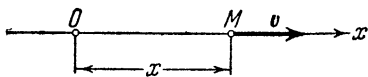
$$x = f(t).$$

Вычисляем проекцию скорости v_x по формуле

$$v_x = x'.$$

Так как скорость \boldsymbol{v} направлена по оси x (в сторону положительной оси x , если $v_x > 0$, и в сторону отрицательной оси x , если $v_x < 0$), то величина скорости \boldsymbol{v} равна абсолютному значению проекции v_x , т. е.

$$v = |v_x|.$$



Черт. 157.

Направление же скорости \boldsymbol{v} определяется, как только что указано, знаком проекции v_x .

Пример 28. Определить скорость точки M эллипсографа (см. пример 25).

Движение точки M определяется уравнениями:

$$x = a \cos \omega t,$$

$$y = b \sin \omega t.$$

Отсюда получаем:

$$v_x = x' = -a\omega \sin \omega t,$$

$$v_y = y' = b\omega \cos \omega t.$$

Следовательно:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega \sqrt{a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}.$$

Пример 29. Вычислить скорость поршня паровой машины (см. пример 26).

Движение поршня тождественно с движением кривокопфа. Возьмем приближенное уравнение движения кривокопфа

$$x = r \left(\cos \omega t + \frac{\lambda}{4} \cos 2\omega t \right) + l - \frac{\lambda}{4} r.$$

Отсюда получаем:

$$v_x = x' = -r\omega \left(\sin \omega t + \frac{\lambda}{2} \sin 2\omega t \right).$$

Величина скорости \boldsymbol{v} поршня равна абсолютному значению этого выражения; знак проекции v_x указывает на направление движения поршня.

§ 86. Другой вывод проекций скорости на координатные оси

Полученные в предыдущем параграфе формулы для проекций скорости на координатные оси можно найти также иным путем, воспользовавшись известной формулой разложения вектора на составляющие, установленной в § 42.

В самом деле, мы знаем, что скорость равна векторной производной по времени от радиуса-вектора движущейся точки. Представим себе движущуюся точку M и обозначим радиус-вектор, проведенный в точку M из начала координатных осей x, y, z , через r . Скорость v точки M определяется равенством

$$v = \frac{dr}{dt}.$$

Применим теперь к радиусу-вектору r формулу разложения на составляющие по осям x, y, z . Обозначая единичные векторы, направленные по этим осям, через i, j, k и имея в виду, что проекции радиуса-вектора r на оси x, y, z равны координатам x, y, z точки M , получим по этой формуле:

$$r = xi + yj + zk.$$

Применяя к вычислению векторной производной $\frac{dr}{dt}$ правила векторного дифференцирования, приведенные в § 83, и замечая, что векторы i, j, k имеют неизменную величину и неизменное направление, будем иметь:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k.$$

С другой стороны, та же формула разложения на составляющие по осям координат, примененная к скорости v , приводит к равенству

$$v = v_x i + v_y j + v_z k,$$

где v_x, v_y, v_z — проекции скорости v на оси x, y, z . Сравнивая обе полученные формулы, находим:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

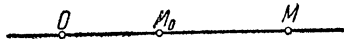
Таким образом мы приходим иным путем вновь к тому же результату: проекции скорости равны производным от соответствующих координат по времени. Мы сочли полезным привести здесь этот векторный вывод формул для проекций скорости на координатные оси; в дальнейшем мы будем иметь случай применить этот вывод к вычислению проекций на координатные оси также и других кинематических величин.

ГЛАВА XIV УСКОРЕНИЕ

§ 87. Ускорение прямолинейного равномерно переменного движения

Движение точки называется *равномерно переменным*, если в каждые два равных промежутка времени величина ее скорости изменяется на одну и ту же величину. Если при этом скорость по абсолютной величине возрастает, движение называется *равномерно ускоренным*; если же скорость уменьшается, оно называется *равномерно замедленным*.

Представим себе точку M , движущуюся прямолинейно и равномерно переменного (черт. 158). Положим, что в каждую единицу времени (например, секунду) величина скорости точки изменяется на одну и ту же (положительную или отрицательную) величину c . Положим, что в начальный момент $t=0$ точка находилась в начальном положении M_0 и имела в этот момент скорость v_0 , которую назовем *начальной скоростью*; в момент t точка занимает положение M и имеет скорость v . Так как за t единицу времени величина скорости точки изменилась на величину ct , то



Черт. 158.

$$v = v_0 + ct.$$

Величина c , характеризующая большую или меньшую быстроту изменения скорости, называется ускорением прямолинейного равномерно переменного движения.

Итак, *ускорением прямолинейного равномерно переменного движения* называется приращение скорости, отнесенное к единице времени.

Обозначая ускорение буквой ω , т. е. полагая $c = \omega$, получим закон изменения величины скорости при равномерно переменном движении в следующем окончательном виде:

$$v = v_0 + \omega t. \quad (1)$$

Решим это уравнение относительно ω :

$$\omega = \frac{v - v_0}{t}, \quad (2)$$

т. е. ускорение прямолинейного равномерно переменного движения равно отношению приращения скорости за некоторый промежуток времени к этому промежутку времени.

Формула (2) показывает, что ускорение ω будет положительным, если скорость увеличивается с течением времени, и отрицательным в противном случае.

Составим еще уравнение рассматриваемого прямолинейного равномерно переменного движения, т. е. выразим расстояние s как функ-

цию времени t . Для этого выберем начало отсчета расстояний O и назначим, в какую сторону будем считать расстояния положительными. Тогда $OM = s$ есть расстояние для момента t ; отрезок OM_0 , т. е. расстояние, соответствующее ее начальному моменту $t = 0$, обозначим через s_0 и назовем начальным расстоянием. Вспомогательная, что величина скорости есть производная расстояния по времени, и имея в виду уравнение (1), получаем:

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + \omega t.$$

Интегрируя по t , находим:

$$s = v_0 t + \frac{\omega t^2}{2} + C,$$

где C есть произвольная постоянная. Эту постоянную легко определим, если примем во внимание, что только что написанное уравнение должно быть справедливо для всякого момента t , а значит, и для начального момента $t = 0$; применяя это уравнение к начальному моменту, получим:

$$s_0 = C,$$

т. е. постоянная C есть не что иное, как начальное расстояние. Окончательно получаем для s выражение:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\omega t^2}{2};$$

это и есть уравнение нашего равномерно переменного движения. Как видно, в рассматриваемом случае расстояние s есть целая функция второй степени от времени t .

Представим себе прямолинейное равномерно переменное движение точки, при котором в каждую единицу времени скорость возрастает на единицу скорости. По формуле (2) ускорение этого движения равно

$$\omega = \frac{1}{1} = 1.$$

Отсюда следует, что за единицу ускорения мы должны принять ускорение такого прямолинейного равномерно переменного движения, при котором величина скорости возрастает на единицу скорости в единицу времени. Например, если за единицу длины принят сантиметр, а за единицу времени — секунда, то за единицу ускорения мы должны принять ускорение такого прямолинейного равномерно переменного движения, при котором в каждую секунду скорость возрастает на 1 см/сек; эта единица ускорения обозначается так:

$$\frac{\text{см/сек}}{\text{сек}} = \text{см/сек}^2.$$

Если же за единицу длины принят метр, а за единицу времени — минута, то за единицу ускорения мы должны принять м/мин².

И вообще каждому выбору единицы длины и единицы времени соответствует своя единица ускорения.

Положим, ускорение некоторого равномерно переменного движения есть $\omega = 3 \text{ м/мин}^2$. Требуется выразить это ускорение в см/сек^2 .

В данном случае скорость точки изменяется в каждую минуту на 3 м/мин или на $3 \cdot \frac{100 \text{ см}}{60 \text{ сек}} = 5 \text{ см/сек}$; значит, в каждую секунду скорость изменяется на $\frac{5}{60} \text{ см/сек} = \frac{1}{12} \text{ см/сек}$. Следовательно:

$$\omega = \frac{1}{12} \text{ см/сек}^2.$$

Отсюда вытекает следующее правило для перехода от одних единиц ускорения к другим: напишите данное ускорение с надлежащим наименованием единицы ускорения; в этом наименовании выразите данные единицы длины и времени через новые единицы длины и времени; произведя перемножение, получите требуемый результат. Например:

$$\omega = 3 \text{ м/мин}^2 = 3 \frac{100 \text{ см}}{(60 \text{ сек})^2} = \frac{3 \cdot 100 \text{ см}}{3600 \text{ сек}^2} = \frac{1}{12} \text{ см/сек}^2.$$

Пример 30. На прямолинейном участке железнодорожного пути происходит торможение поезда; в момент начала торможения поезд имел скорость 20 м/сек ; будучи заторможен, он останавливается в течение 20 сек . Предполагая движение заторможенного поезда равномерно замедленным, найти тормозный путь, т. е. путь, пройденный поездом за время торможения.

Воспользуемся формулами равномерно переменного движения:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\omega t^2}{2}, \quad v = v_0 + \omega t.$$

Возьмем момент начала торможения за начало отсчета времени, а соответствующее этому моменту положение поезда — за начало отсчета пройденного пути. В таком случае

$$s_0 = 0, \quad v_0 = 20 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

По условию поезд останавливается в момент $t = 20 \text{ сек}$. Полагая $t = 20 \text{ сек}$, $v = 0$ во втором из написанных выше уравнений, получаем:

$$0 = 20 + 20\omega,$$

откуда

$$\omega = -1 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}.$$

Полагая теперь $t = 20 \text{ сек}$, $\omega = -1 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$ в первом из написанных уравнений, находим:

$$s = 200 \text{ м}.$$

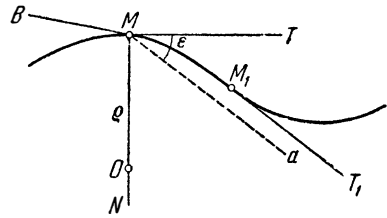
Итак, за время торможения поезд проходит путь в 200 м .

§ 88. Некоторые сведения из геометрии

Прежде чем перейти к установлению понятия ускорения в общем случае какого угодно движения точки, сделаем небольшое отступление в область геометрии.

Представим себе кривую, расположенную в пространстве (вообще говоря, неплоскую) (черт. 159). Возьмем на кривой точку M и проведем касательную MT . Затем возьмем на кривой другую точку M_1 и проведем в ней касательную M_1T_1 . Через касательную MT проведем плоскость, параллельную касательной M_1T_1 . Для этой цели проведем через точку M прямую Ma , параллельную касательной M_1T_1 ; плоскость, проходящая через прямые MT и Ma , и есть требуемая. Будем теперь приближать точку M_1 к точке M . Когда точка M_1 приближается к совпадению с точкой M , упомянутая плоскость приближается к некоторому предельному положению, которое называется *плоскостью кривизны* в точке M или *соприкасающейся плоскостью*.

Все прямые, проходящие через точку M и перпендикулярные к касательной MT , называются *нормальными* к кривой в точке M . Понятно, что все нормали, проходящие через точку M , лежат в одной



Черт. 159.

плоскости, именно в плоскости, проходящей через точку M и перпендикулярной к касательной MT ; эта плоскость называется *нормальной плоскостью* к кривой в точке M . Та нормаль, которая лежит в плоскости кривизны, называется *главной нормалью*; другими словами, главная нормаль есть пересечение плоскости кривизны и нормальной плоскости. Нормаль, перпендикулярная к главной нормали, называется *бинормалью*. Очевидно, что касательная MT и бинормаль MB (черт. 159) взаимно перпендикулярны.

Когда кривая плоская, то плоскость кривизны кривой совпадает с плоскостью, в которой лежит кривая. В этом случае под термином «нормаль» принято подразумевать ту нормаль, которая лежит в плоскости кривой, т. е. главную нормаль.

Угол, заключенный между касательными MT и M_1T_1 , или, что все равно, между касательной MT и прямой Ma , называется *углом смежности*, соответствующим дуге MM_1 ; обозначим этот угол буквой ϵ (черт. 159). Длину дуги MM_1 обозначим через Δs . Отношение $\frac{\epsilon}{\Delta s}$ называется *средней кривизной* дуги MM_1 . Если будем приближать точку M_1 к совпадению с точкой M или, другими словами, будем приближать длину дуги Δs к нулю, то средняя кривизна $\frac{\epsilon}{\Delta s}$ будет приближаться к некоторому пределу, который

называется *кривизной* данной кривой в точке M . Обозначая кривизну буквой K , имеем:

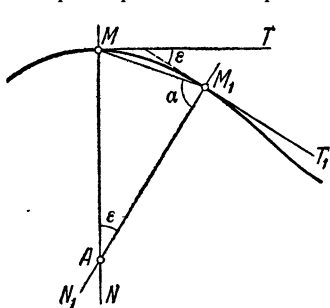
$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\frac{\epsilon}{\Delta s} \right].$$

Величина $\frac{1}{K}$ называется *радиусом кривизны* кривой в точке M ; мы будем обозначать радиус кривизны буквой ρ . Следовательно:

$$\rho = \frac{1}{K} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\epsilon} \right].$$

Отложим от точки M по главной нормали MN в сторону вогнутости кривой отрезок $MO = \rho$. Точка O называется *центром кривизны* кривой в точке M .

В случае плоской кривой можно еще иначе определить понятие центра кривизны. Представим себе плоскую кривую (черт. 160).



Черт. 160.

Возьмем на ней точки M и M_1 и проведем касательные MT и M_1T_1 и нормали MN и M_1N_1 ; отметим точку пересечения нормалей A . Когда точка M_1 приближается к совпадению с точкой M , точка A приближается к некоторому предельному положению. Покажем, что это предельное положение точки A есть не что иное, как центр кривизны кривой в точке M . Для этого достаточно показать, что предел, к которому приближается отрезок MA , когда точка M_1 приближается к точке M , равен радиусу кривизны ρ . Соединим точки M и M_1 хордой; длину этой хорды обозначим через $\Delta\sigma$, длину же дуги MM_1 обозначим через Δs . В треугольнике MM_1A угол при вершине A , равный углу между касательными MT и M_1T_1 , есть не что иное, как угол смежности ϵ ; угол при вершине M_1 обозначим через α . В таком случае из треугольника MM_1A выводим:

$$\frac{MA}{\sin \alpha} = \frac{MM_1}{\sin \epsilon}$$

или

$$MA = \frac{\Delta\sigma \sin \alpha}{\sin \epsilon}.$$

Теперь будем искать предел отрезка MA при приближении Δs к нулю. Имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} [MA] &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta\sigma \sin \alpha}{\sin \epsilon} \right] = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta\sigma \Delta s}{\Delta s \epsilon} \frac{\epsilon}{\sin \epsilon} \sin \alpha \right] = \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta\sigma}{\Delta s} \right] \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\epsilon} \right] \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\frac{\epsilon}{\sin \epsilon} \right] \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} [\sin \alpha], \end{aligned}$$

но

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta \sigma}{\Delta s} \right] = 1, \quad \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\epsilon} \right] = \rho, \quad \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\frac{\epsilon}{\sin \epsilon} \right] = 1;$$

предел же угла α есть угол между касательной MT и нормалью MN , т. е. $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} [\alpha] = \frac{\pi}{2}$ и, следовательно,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} [\sin \alpha] = 1.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} [MA] = 1 \cdot \rho \cdot 1 \cdot 1 = \rho,$$

т. е. предельное значение отрезка MA равно радиусу кривизны ρ . А это и значит, что предельное положение точки A есть центр кривизны кривой в точке M .

Итак, для случая плоской кривой можно определить центр кривизны как точку пересечения двух бесконечно близких нормалей.

Представим себе дугу окружности радиуса R (черт. 161). Возьмем на дуге две точки M и M_1 и проведем в них нормали к дуге. Эти нормали совпадают с радиусами дуги и пересекаются в центре дуги O . Если мы будем приближать точку M_1 к точке M , точка пересечения нормалей будет оставаться неизменной. Значит, и предельное ее положение, т. е. центр кривизны дуги, будет совпадать с центром дуги O .

Отсюда следует, что радиус кривизны дуги окружности равен геометрическому радиусу дуги:

$$\rho = R.$$

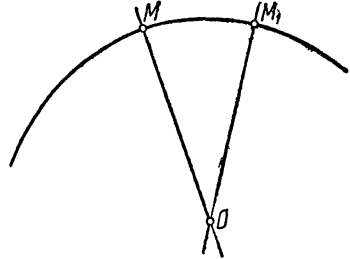
Всякие две нормали к прямой линии параллельны, т. е. точка их пересечения находится в бесконечности. Следовательно, центр кривизны прямой линии находится в бесконечности, и радиус кривизны прямой линии бесконечно велик:

$$\rho = \infty.$$

§ 89. Ускорение какого угодно движения

Вернемся теперь к установлению понятия ускорения в случае какого угодно движения точки.

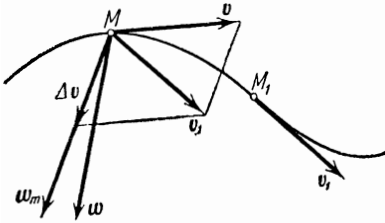
Представим себе точку M , совершающую какое-либо движение в пространстве. В момент t она занимает положение M и имеет



Черт. 161.

скорость \boldsymbol{v} , в момент $t + \Delta t$, она занимает положение M_1 и имеет скорость \boldsymbol{v}_1 (черт. 162). Отложим скорость \boldsymbol{v}_1 от точки M и построим при точке M параллелограмм, в котором скорость \boldsymbol{v}_1 является диагональю, а скорость \boldsymbol{v} — одной из сторон. Вторая сторона этого параллелограмма, которую мы обозначим через $\Delta \boldsymbol{v}$, будет приращением скорости за время Δt .

Разделим приращение скорости $\Delta \boldsymbol{v}$ на промежуток времени Δt . Вектор $\boldsymbol{w}_m = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$ называется *средним ускорением* за время Δt .



Черт. 162.

Предел же, к которому приближается среднее ускорение \boldsymbol{w}_m , когда Δt приближается к нулю, называется *ускорением* в данный момент t . Обозначая ускорение буквой \boldsymbol{w} , имеем:

$$\boldsymbol{w} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\boldsymbol{w}_m] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \right].$$

Скорость \boldsymbol{v} мы можем рассматривать как векторную функцию от времени. Вспоминая определение векторной производной, данное в § 82, мы заключаем, что

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt},$$

т. е. *ускорение равно векторной производной от скорости по времени.*

Во избежание недоразумений следует подчеркнуть, что величина w ускорения отнюдь не равна производной по времени от величины v скорости. В §§ 90 и 91 будут указаны два способа определения величины и направления ускорения \boldsymbol{w} . Мы увидим, что равенство

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

может иметь место лишь в простейшем случае прямолинейного движения точки.

Плоскость параллелограмма, изображенного на черт. 162, проходит через скорость \boldsymbol{v} и параллельна скорости \boldsymbol{v}_1 ; следовательно, предельное положение этой плоскости при $\Delta t \rightarrow 0$ есть не что иное, как плоскость кривизны траектории в точке M . Так как среднее ускорение \boldsymbol{w}_m лежит в плоскости упомянутого параллелограмма, а ускорение \boldsymbol{w} есть предел среднего ускорения при $\Delta t \rightarrow 0$, то заключаем, что *ускорение \boldsymbol{w} лежит в плоскости кривизны траектории.*

§ 90. Проекция ускорения на прямоугольные координатные оси

Положим, что движение точки M (черт. 163) задано уравнениями движения в прямоугольных координатах:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

Вычислим проекции ускорения \boldsymbol{w} на координатные оси x, y, z .

Мы знаем, что ускорение равно векторной производной от скорости по времени, т. е.

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

Применяя к скорости \boldsymbol{v} формулу разложения на составляющие по осям координат, установленную в § 42, имеем:

$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k},$$

где v_x, v_y, v_z — проекции скорости на оси x, y, z , а $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — единичные векторы, направленные по этим осям. Применим к вычислению векторной

производной $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ правила векторного дифференцирования, приведенные в § 83. Имея в виду, что векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ имеют неизменную величину и неизменное направление, получим:

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \boldsymbol{i} + \frac{dv_y}{dt} \boldsymbol{j} + \frac{dv_z}{dt} \boldsymbol{k}.$$

С другой стороны, та же формула разложения на составляющие по осям координат, примененная к ускорению \boldsymbol{w} , приводит к равенству:

$$\boldsymbol{w} = w_x \boldsymbol{i} + w_y \boldsymbol{j} + w_z \boldsymbol{k},$$

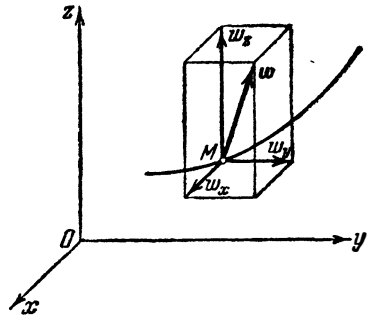
где w_x, w_y, w_z — искомые проекции ускорения \boldsymbol{w} на оси x, y, z . Сравнивая обе полученные формулы, находим:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad w_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad w_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

Но мы уже знаем, что проекции скорости равны производным от соответствующих координат по времени. Полагая $v_x = x', v_y = y', v_z = z'$, будем иметь:

$$w_x = \frac{dx'}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = x'', \quad w_y = \frac{dy'}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = y'', \quad w_z = \frac{dz'}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = z''.$$

Итак, проекции ускорения на неподвижные прямоугольные координатные оси равны вторым производным по времени от соответствующих координат.



Черт. 163.

Воспользуемся выведенными формулами для *вычисления ускорения* в том предположении, что движение задано *уравнениями движения в прямоугольных координатах*.

Положим, что движение точки M задано уравнениями движения:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

отнесенными к осям x, y, z (черт. 163).

Построим прямоугольный параллелепипед, ребра которого параллельны осям x, y, z , и в котором ускорение \boldsymbol{w} является диагональю. Ребра этого прямоугольного параллелепипеда численно равны проекциям ускорения w_x, w_y, w_z .

Вычисляем эти проекции по формулам:

$$w_x = x'', \quad w_y = y'', \quad w_z = z''.$$

Затем находим величину w ускорения по формуле

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}.$$

Далее имеем:

$$w_x = w \cos(\boldsymbol{w}, x), \quad w_y = w \cos(\boldsymbol{w}, y), \quad w_z = w \cos(\boldsymbol{w}, z),$$

откуда

$$\begin{aligned} \cos(\boldsymbol{w}, x) &= \frac{w_x}{w}, \quad \cos(\boldsymbol{w}, y) = \frac{w_y}{w}, \\ \cos(\boldsymbol{w}, z) &= \frac{w_z}{w}. \end{aligned}$$

Этими формулами определяется направление ускорения \boldsymbol{w} .

Остановимся на частном случае *плоского* движения точки.

Положим, что точка M (черт. 164) совершает плоское движение в плоскости xy ; ее движение задано уравнениями движения:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t).$$

Вычисляем проекции ускорения w_x и w_y по формулам:

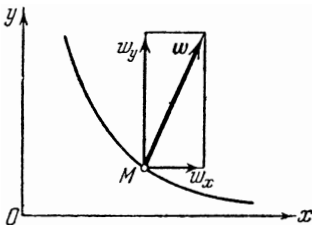
$$w_x = x'', \quad w_y = y''.$$

Затем находим величину w ускорения как диагональ прямоугольника, построенного на проекциях w_x и w_y :

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}.$$

Направление ускорения \boldsymbol{w} определяется формулами:

$$\cos(\boldsymbol{w}, x) = \frac{w_x}{w}, \quad \cos(\boldsymbol{w}, y) = \frac{w_y}{w}.$$



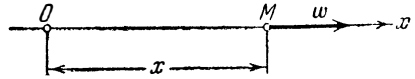
Черт. 164.

Отметим еще случай *прямолинейного* движения точки. Положим, что точка M (черт. 165) совершает прямолинейное движение по оси x ; ее движение задано уравнением

$$x = f(t).$$

Вычисляем проекцию ускорения w_x по формуле:

$$w_x = x''.$$



Черт. 165.

Так как ускорение w направлено по оси x (в сторону положительной оси x , если $w_x > 0$, и в сторону отрицательной оси x , если $w_x < 0$), то величина ускорения w равна абсолютному значению проекции w_x , т. е.

$$w = |w_x|,$$

Направление же ускорения w определяется, как сейчас указано, знаком проекции w_x .

Пример 31. Определить ускорение точки M эллипсографа (см. пример 25). Движение точки M определяется уравнениями

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t.$$

Отсюда получаем:

$$w_x = x'' = -a\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x,$$

$$w_y = y'' = -b\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y.$$

Следовательно:

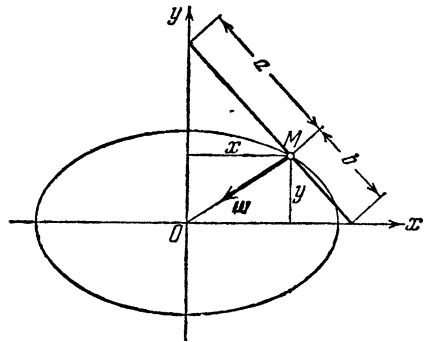
$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Но

$$\sqrt{x^2 + y^2} = OM$$

(черт. 166); обозначая отрезок OM буквой r , получаем окончательно

$$w = \omega^2 r.$$



Черт. 166.

Что касается направления ускорения w , то оно определяется формулами:

$$\cos(w, x) = \frac{w_x}{w} = -\frac{x}{r},$$

$$\cos(w, y) = \frac{w_y}{w} = -\frac{y}{r}.$$

Легко видеть (черт. 166), что направление отрезка MO (от точки M к точке O) образует с осями x и y углы, косинусы которых суть $-\frac{x}{r}$ и $-\frac{y}{r}$; отсюда мы заключаем, что ускорение w направлено от точки M к точке O .

Итак, ускорение точки M направлено к центру описываемого ею эллипса и пропорционально расстоянию точки M от этого центра.

Пример 32. Вычислить ускорение поршня паровой машины (см. пример 26).

Движение поршня тождественно с движением ползуна B (черт. 167). Мы имеем приближенное уравнение движения ползуна B :

$$x = r \left(\cos \omega t + \frac{\lambda}{4} \cos 2\omega t \right) + l - \frac{\lambda}{4} r.$$

Дифференцируя два раза, получаем:

$$x' = -r\omega \left(\sin \omega t + \frac{\lambda}{2} \sin 2\omega t \right),$$

$$x'' = -r\omega^2 (\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t).$$

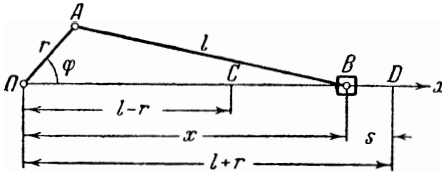
Отсюда

$$w_x = -r\omega^2 (\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t).$$

Величина w ускорения ползуна B равна абсолютному значению этого выражения; знак проекции w_x указывает на направление ускорения w .

Полагая $\omega t = \varphi$, получаем:

$$w_x = -r\omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi). \quad (1)$$



Черт. 167.

Эта формула дает зависимость величины w_x от угла φ (черт. 167). Сделав эту же подстановку $\omega t = \varphi$ в формуле для x , будем иметь:

$$x = r \left(\cos \varphi + \frac{\lambda}{4} \cos 2\varphi \right) + l - \frac{\lambda}{4} r.$$

По этой формуле мы можем вычислять значения x (т. е. определять положение ползуна B) для любых заданных значений угла φ . Ползун B перемещается между крайними положениями C и D , в которых его скорость обращается в нуль и которые называются его мертвыми положениями. Расстояния точек C и D от точки O равны соответственно $l-r$ и $l+r$; отрезок CD (ход ползуна или ход поршня) равен $2r$.

Будем определять положение ползуна B его расстоянием s от мертвого положения D . Для величины s имеем выражение

$$s = l + r - x = r + \frac{\lambda}{4} r - r \left(\cos \varphi + \frac{\lambda}{4} \cos 2\varphi \right),$$

или, обозначая ход поршня CD через d , т. е. полагая $2r = d$,

$$s = \frac{d}{2} \left\{ 1 - \cos \varphi + \frac{\lambda}{4} (1 - \cos 2\varphi) \right\}. \quad (2)$$

По формулам (1) и (2) легко вычислить значения величин w_x и s для любых значений угла φ . В нижеследующей таблице даны значения величин

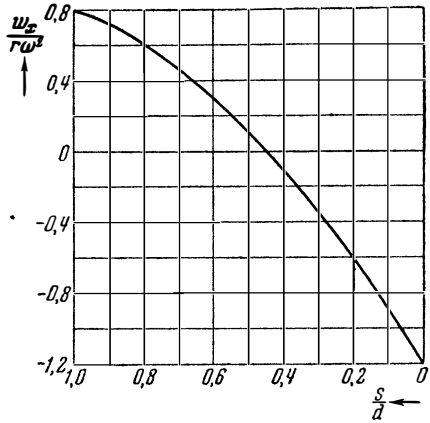
$$\frac{s}{d} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \varphi + \frac{\lambda}{4} (1 - \cos 2\varphi) \right\},$$

$$\frac{w_x}{r\omega^2} = -(\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi)$$

для углов φ между 0° и 180° через каждые 15° , причем положено $\lambda = \frac{r}{l} = \frac{1}{5}$.

Откладывая величины $\frac{s}{d}$ по горизонтальной оси, а соответствующие величины $\frac{w_x}{r\omega^2}$ по вертикальной оси, получаем график зависимости между этими величинами (черт. 168). По этому графику легко определить величину

φ	$\frac{s}{d}$	$\frac{w_x}{r\omega^2}$
0°	0	— 1,200
15°	0,020	— 1,139
30°	0,079	— 0,966
45°	0,171	— 0,707
60°	0,287	— 0,400
75°	0,417	— 0,086
90°	0,550	0,200
105°	0,676	0,432
120°	0,787	0,600
135°	0,879	0,707
150°	0,945	0,766
165°	0,986	0,793
180°	1	0,800

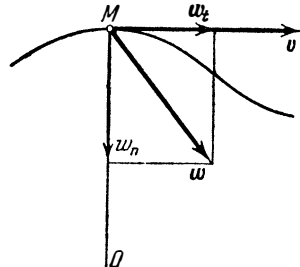


Черт. 168.

и направление ускорения для всякого положения поршня, если даны величины r и ω . Значение величины ω (это не что иное, как угловая скорость вала машины) будет выяснено в главе XV. Построенный нами график играет существенную роль в динамике поршневых машин (в частности, в расчете махового колеса). Мы положили $\lambda = \frac{1}{5}$; легко построить такой же график для всякого иного значения λ .

§ 91. Касательное ускорение и нормальное ускорение

Представим себе точку M , совершающую какое-либо движение в пространстве, и отметим ускорение w этой точки (черт. 169). Мы знаем, что ускорение w лежит в плоскости кривизны траектории. Проведем в этой плоскости касательную к траектории в точке M в сторону направления скорости v и главную нормаль — в сторону вогнутости кривой. Ускорение w мы можем разложить на две составляющие, направленные соответственно по касательной и по главной нормали; эти составляющие получают названия *касательного ускорения* и *нормального ускорения*. Обозначим алгебраические величины касательного и нормального ускорений через w_t и w_n и вычислим эти величины.



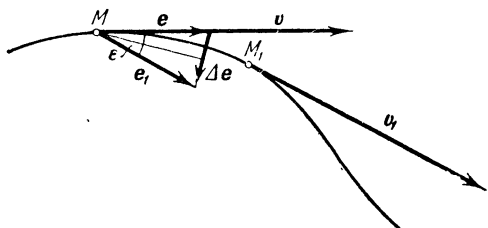
Черт. 169.

Возьмем основную формулу, связывающую скорость и ускорение:

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}.$$

Представим скорость \boldsymbol{v} как произведение ее численного значения v на соответствующий единичный вектор, имеющий направление скорости (или, что то же, направление касательной к траектории); обозначая этот единичный вектор буквой \boldsymbol{e} , имеем:

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}.$$



Черт. 170.

Отсюда, применяя правило дифференцирования произведения, находим:

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{e} + v\frac{d\boldsymbol{e}}{dt}.$$

Остановимся на вычислении производной $\frac{d\boldsymbol{e}}{dt}$. Возьмем моменты времени t и $t + \Delta t$ и отметим соответствующие положения M и M_1 нашей движущейся точки, а также соответствующие ее скорости \boldsymbol{v} и \boldsymbol{v}_1 (черт. 170). Единичный вектор, имеющий направление скорости \boldsymbol{v}_1 , обозначим через \boldsymbol{e}_1 . Отложим единичные векторы \boldsymbol{e} (имеющий направление \boldsymbol{v}) и \boldsymbol{e}_1 (имеющий направление \boldsymbol{v}_1) от точки M и построим на этих векторах треугольник. Третья сторона треугольника (которой мы приписываем направление от конца вектора \boldsymbol{e} к концу вектора \boldsymbol{e}_1) есть приращение вектора \boldsymbol{e} за время Δt ; обозначим его $\Delta\boldsymbol{e}$. Имеем:

$$\frac{d\boldsymbol{e}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta\boldsymbol{e}}{\Delta t} \right].$$

Найдем численное значение этого предела. Для этой цели обратимся к треугольнику, построенному при точке M . Так как стороны \boldsymbol{e} и \boldsymbol{e}_1 этого треугольника параллельны скоростям \boldsymbol{v} и \boldsymbol{v}_1 , то угол при вершине M равен углу между направлениями этих скоростей, т. е. углу смежности ϵ , соответствующему дуге траектории MM_1 . Так как, с другой стороны, $e = e_1 = 1$, то наш треугольник равнобедренный и численное значение его третьей стороны Δe равно $2e \sin \frac{\epsilon}{2} = 2 \sin \frac{\epsilon}{2}$. Следовательно, обозначая численное значение

производной $\frac{de}{dt}$ через $\left[\frac{de}{dt}\right]$, имеем:

$$\left|\frac{de}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{2 \sin \frac{\varepsilon}{2}}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{\varepsilon}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right],$$

где Δs — длина дуги MM_1 . Но

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}} \right] = 1, \quad \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\frac{\varepsilon}{\Delta s} \right] = \frac{1}{\rho}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right] = v,$$

где ρ — радиус кривизны траектории в точке M . Следовательно:

$$\left|\frac{de}{dt}\right| = \frac{v}{\rho}.$$

Найдем теперь направление производной $\frac{de}{dt}$. Это направление совпадает с предельным направлением вектора Δe . Обратимся опять к треугольнику, построенному при точке M . Обозначая углы при основании Δe в этом треугольнике через α , имеем:

$$\varepsilon + 2\alpha = \pi,$$

откуда

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ и замечая, что $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\varepsilon] = 0$, заключаем, что $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\alpha] = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, предельное направление вектора Δe перпендикулярно к вектору e , т. е. к направлению скорости v . Мы заключаем, что предельное направление вектора Δe есть направление нормали к траектории в точке M . С другой стороны, вектор Δe лежит в плоскости треугольника, построенного на векторах e и e_1 . Предельное положение плоскости этого треугольника есть плоскость кривизны траектории в точке M ; следовательно, предельное положение вектора Δe есть направление той нормали, которая лежит в плоскости кривизны траектории, т. е. главной нормали.

Итак, направление производной $\frac{de}{dt}$ есть направление главной нормали к траектории в точке M .

Заметим еще, что приращение Δe вектора e направлено в сторону вогнутости траектории (черт. 170). Переходя к пределу, мы должны заключить, что и производная $\frac{de}{dt}$ направлена по

главной нормали в сторону вогнутости траектории, т. е. к центру кривизны.

На основании всего сказанного, обозначая единичный вектор, направленный по главной нормали траектории к центру кривизны, через \mathbf{n} , мы можем положить:

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \frac{v}{\rho} \mathbf{n}.$$

Подставляя это значение производной $\frac{d\mathbf{e}}{dt}$ в полученную выше формулу для ускорения $\boldsymbol{\omega}$, находим:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n}.$$

С другой стороны, обозначая, как выше, алгебраические величины составляющих ускорения $\boldsymbol{\omega}$ по касательной и по главной нормали через ω_t и ω_n и применяя к разложению ускорения $\boldsymbol{\omega}$ по касательной и по главной нормали формулу разложения вектора на составляющие, имеем:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_t \mathbf{e} + \omega_n \mathbf{n}.$$

Сравнение двух последних равенств приводит к заключению, что

$$\omega_t = \frac{dv}{dt}, \quad \omega_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Этими формулами определяются величины касательного и нормального ускорений. Напомним еще раз, что нормальное ускорение направлено по главной нормали траектории в сторону вогнутости траектории, т. е. к центру кривизны.

Полученными формулами можно воспользоваться для определения величины и направления ускорения $\boldsymbol{\omega}$. Сначала вычисляем касательное и нормальное ускорения по формулам:

$$\omega_t = \frac{dv}{dt}, \quad \omega_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Затем находим величину ускорения $\boldsymbol{\omega}$ как диагональ прямоугольника, построенного на касательном и нормальном ускорениях:

$$\omega = \sqrt{\omega_t^2 + \omega_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}.$$

Направление же ускорения определяется формулами:

$$\cos(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) = \frac{\omega_t}{\omega}, \quad \cos(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = \frac{\omega_n}{\omega},$$

где $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v})$ и $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})$ суть углы, образованные направлением ускорения с направлением скорости и с направлением главной нормали к траектории, проведенной к центру кривизны.

Заметим, что при *прямолинейном* движении имеем $\rho = \infty$, $\omega_n = 0$ и, следовательно,

$$\omega = |\omega_t| = \left| \frac{dv}{dt} \right|,$$

т. е. при *прямолинейном* движении величина ускорения равна абсолютному значению скалярной производной от величины скорости по времени.

При *равномерном* движении имеем $v = \text{const}$, $\frac{dv}{dt} = 0$ и $\omega_t = 0$; следовательно,

$$\omega = \omega_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Следует особо заметить, что при равномерном криволинейном движении ускорение не равно нулю; в этом случае *в нуль обращается лишь касательное ускорение*, так что полное ускорение состоит из одной нормальной составляющей.

Наконец, при *прямолинейном* и *равномерном* движении имеем $\rho = \infty$, $\frac{dv}{dt} = 0$, т. е. $\omega_t = 0$, $\omega_n = 0$ и, следовательно, $\omega = 0$.

Пример 33. Железнодорожный поезд проходит кривую радиуса $R = 300$ м с постоянной скоростью $v = 60$ км/час. Определить ускорение поезда.

Так как движение поезда равномерное, то его ускорение равно по величине

$$\omega = \omega_n = \frac{v^2}{R}$$

и направлено к центру описываемой им кривой. Имеем:

$$v = 60 \text{ км/час} = 60 \frac{1000 \text{ м}}{3600 \text{ сек}} = \frac{50}{3} \text{ м/сек.}$$

Следовательно:

$$\omega = \frac{2500}{9 \cdot 300} \frac{\text{м}}{\text{сек}^2} = \frac{25}{27} \frac{\text{м}}{\text{сек}^2} = 0,926 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}.$$

Пример 34. Железнодорожный поезд проходит кривую радиуса $R = 300$ м равномерно ускоренным движением. Длина кривой равна $l = 200$ м; при входе на кривую поезд имеет скорость $v_0 = 30$ км/час, при выходе с кривой его скорость равна $v_1 = 48$ км/час. Вычислить ускорение поезда в момент входа на кривую, а также в момент выхода с кривой.

Так как движение поезда равномерно ускоренное, то мы имеем для скорости v и пройденного пути s формулы:

$$v = v_0 + ct, \quad s = v_0 t + \frac{ct^2}{2}$$

(в последней формуле мы положили начальное расстояние s_0 равным нулю, начиная счет времени с момента входа поезда на кривую). Отсюда

$$\omega_t = \frac{dv}{dt} = c.$$

Следовательно, касательное ускорение сохраняет постоянное значение c во все время прохождения поездом кривой, нормальное же ускорение, равное $\frac{v^2}{R}$, непрерывно изменяется с изменением скорости. В моменты входа на кривую и выхода с нее полное ускорение поезда имеет соответственно значения:

$$w_0 = \sqrt{c^2 + \frac{v_0^4}{R^2}} \quad \text{и} \quad w_1 = \sqrt{c^2 + \frac{v_1^4}{R^2}}.$$

Остается вычислить постоянную c . Обозначая время прохождения поездом кривой через T , имеем:

$$v_1 = v_0 + cT, \\ l = v_0 T + \frac{cT^2}{2} = T \left(v_0 + \frac{cT}{2} \right) = \frac{1}{2c} [cT(2v_0 + cT)].$$

Из первого равенства имеем:

$$cT = v_1 - v_0.$$

Подставляя это значение cT в формулу для l , получаем:

$$l = \frac{(v_1 - v_0)(v_1 + v_0)}{2c} = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2c}.$$

Отсюда

$$c = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2l}.$$

Имеем:

$$v_0 = 30 \text{ км/час} = \frac{25}{3} \text{ м/сек}, \quad v_1 = 48 \text{ км/час} = \frac{40}{3} \text{ м/сек}.$$

Следовательно:

$$w_t = c = \frac{1600 - 625}{9 \cdot 400} \text{ м/сек}^2 = 0,2708 \text{ м/сек}^2.$$

Далее:

$$\frac{v_0^2}{R} = \frac{625}{9 \cdot 300} \text{ м/сек}^2 = 0,2315 \text{ м/сек}^2,$$

$$\frac{v_1^2}{R} = \frac{1600}{9 \cdot 300} = 0,5926 \text{ м/сек}^2.$$

Отсюда

$$w_0 = \sqrt{(0,2708)^2 + (0,2315)^2} \text{ м/сек}^2 = 0,356 \text{ м/сек}^2,$$

$$w_1 = \sqrt{(0,2708)^2 + (0,5926)^2} \text{ м/сек}^2 = 0,652 \text{ м/сек}^2.$$

§ 92. Графики расстояния, скорости и ускорения

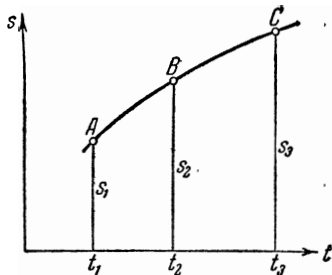
Положим, что движение точки задано уравнением движения

$$s = f(t).$$

Мы можем вычислить по этому уравнению для каждого момента времени t соответствующее этому моменту значение расстояния s . Возьмем две взаимно перпендикулярные оси (черт. 171) и будем откладывать на оси абсцисс моменты времени t , а на оси ординат —

соответствующие значения s . Совокупность построенных таким образом точек образует кривую, которая изображает графически зависимость расстояния от времени; эта кривая называется *графиком расстояния*.

Легко построить график, если известно уравнение движения. Но важное значение этого графического построения состоит в том, что им можно пользоваться и в таких случаях, когда уравнение движения, дающее аналитическую зависимость между s и t , нам неизвестно. Такие случаи встречаются нередко. Часто бывает, что движение задано лишь рядом отдельных значений расстояний s_1, s_2, s_3, \dots , соответствующих отдельным моментам времени t_1, t_2, t_3, \dots , причем аналитическая зависимость между s и t (т. е. уравнение движения) остается неизвестной. В таких случаях, откладывая значения t_1, t_2, t_3, \dots и s_1, s_2, s_3, \dots соответственно по осям t и s , строим точки A, B, C, \dots (черт. 171). Проведем через эти точки плавную кривую; это и будет приближенно график расстояния, соответствующий данному движению. В иных случаях график расстояния вычерчивается автоматически при помощи участвующих в движении самопишущих приборов. Во всяком случае графиком расстояния вполне заменяется уравнение движения. Если дана траектория точки и дан график расстояния, то этим движение точки вполне определено.



Черт. 171.

Возьмем теперь величину скорости нашей точки

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t).$$

Зависимость между величиной скорости и временем также можно изобразить графически, откладывая по оси абсцисс значения t , а по оси ординат — соответствующие значения v ; построенная таким образом кривая называется *графиком скорости*. Аналогичная кривая, изображающая зависимость между величиной ускорения и временем, называется *графиком ускорения*.

Следует заметить, что если известен один из только что указанных трех графиков, то по этому данному графику легко построить и два других. Приближенный способ, которым можно для этого пользоваться, мы покажем на следующем примере.

Пример 35. График скорости подъемной машины при торможении изображен на черт. 172. Как видно из этого графика, машина двигалась до начала торможения со скоростью $1,19$ м/сек; через $0,6$ сек после начала торможения скорость машины падает до нуля (машина останавливается). Требуется построить графики пути и ускорения.

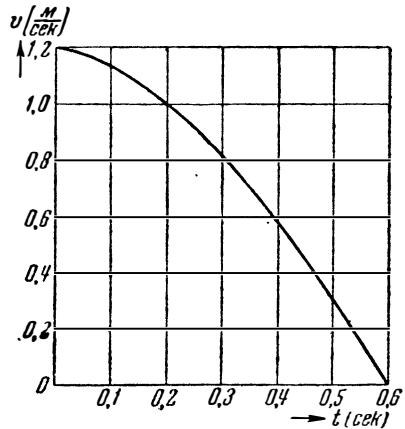
Определим по графику скорости значения скорости v , соответствующие моментам времени $0,1$ сек, $0,2$ сек, ..., $0,6$ сек. Эти значения выписаны в таблице I.

Таблица I

t (сек)	v ($\frac{м}{сек}$)
0	1,19
0,1	1,13
0,2	1,01
0,3	0,82
0,4	0,57
0,5	0,29
0,6	0

Таблица II

t (сек)	s (м)
0	0
0,1	0,116
0,2	0,223
0,3	0,314
0,4	0,384
0,5	0,427
0,6	0,441



Черт. 172.

Обратимся к построению графика пути. Примем за начало отсчета пройденного расстояния то положение машины, в котором она находилась в момент начала торможения. В таком случае при $t=0$ мы будем иметь $s_0=0$. Найдем значение $s=s_1$, соответствующее моменту $t=0,1$ сек. Мы не сделаем большой ошибки при вычислении пути, пройденного машиной за время от $t=0$ до $t=0,1$ сек, если примем, что машина двигалась за это время равномерно со скоростью, средней между скоростями $1,19$ м/сек и $1,13$ м/сек, т. е. со скоростью

$$\cdot \frac{1,19 + 1,13}{2} = 1,16 \text{ м/сек.}$$

При таком предположении путь, пройденный машиной за рассматриваемое время, т. е. приближенное значение s_1 пройденного пути при $t=0,1$ сек, будет:

$$s_1 = 1,16 \text{ м/сек} \cdot 0,1 \text{ сек} = 0,116 \text{ м.}$$

Чтобы найти значение s_2 пройденного пути при $t=0,2$ сек, вычислим путь, пройденный машиной за время от $t=0,1$ сек до $t=0,2$ сек. Предположив опять, что за это время машина двигалась равномерно со скоростью

$$\frac{1,13 + 1,01}{2} \text{ м/сек} = 1,07 \text{ м/сек,}$$

найдем, что за рассматриваемое время пройден путь

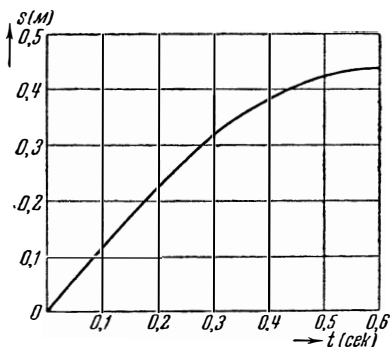
$$1,07 \text{ м/сек} \cdot 0,1 \text{ сек} = 0,107 \text{ м.}$$

Следовательно, путь s_2 , пройденный за время от $t=0$ до $t=0,2$ сек, равен

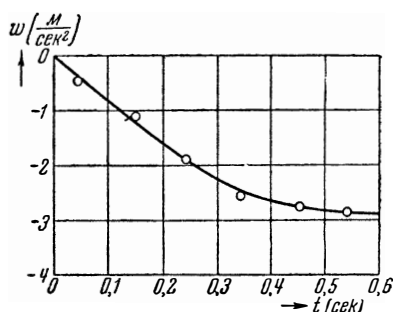
$$s_2 = 0,116 \text{ м} + 0,107 \text{ м} = 0,223 \text{ м.}$$

Продолжая поступать таким образом, найдем значения s_1, s_2, \dots, s_6 пройденного пути, соответствующие моментам $t=0,1$ сек, $0,2$ сек, ..., $0,6$ сек; эти значения приведены в таблице II.

Как видно, от момента начала торможения до остановки машина проходит путь 0,441 м. По найденным значениям s строим график пути (черт. 173).



Черт. 173.



Черт. 174.

Переходя к построению графика ускорения, найдем среднее ускорение машины за время от $t=0$ до $t=0,1$ сек. Это среднее ускорение равно

$$\frac{1,13 - 1,19}{0,1} \text{ м/сек}^2 = -0,6 \text{ м/сек}^2.$$

Допуская наибольшую погрешность, мы можем принять, что таково было ускорение машины в момент, средний между моментами $t=0$ и $t=0,1$ сек, т. е. в момент $t=0,05$ сек. Точно так же найдем, что в момент $t=0,15$ сек ускорение машины равнялось (приближенно)

$$\frac{1,01 - 1,13}{0,1} \text{ м/сек}^2 = -1,2 \text{ м/сек}^2.$$

Таким образом найдутся значения ускорения машины w в моменты 0,05 сек, 0,15 сек, ..., 0,55 сек; эти значения выписаны в таблице III.

По этим значениям w строим график ускорения (черт. 174).

Таблица III

t (сек)	w ($\frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$)
0,05	-0,6
0,15	-1,2
0,25	-1,9
0,35	-2,5
0,45	-2,8
0,55	-2,9

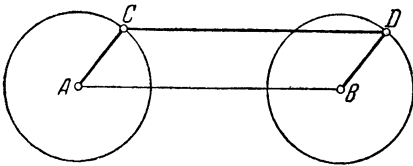
ГЛАВА XV

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА
И ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

§ 93. Поступательное движение твердого тела

Мы перейдем теперь к изучению движения твердого тела. Твердое тело мы будем трактовать как абсолютно твердое, т. е. будем предполагать, что расстояния между любыми двумя точками твердого тела при всех условиях остаются неизменными. Наше исследование мы начнем с рассмотрения двух простейших типов движения

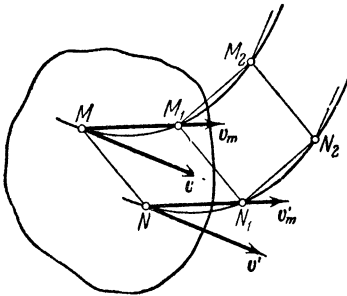
твёрдого тела: поступательного движения и вращения вокруг неподвижной оси. Впоследствии мы увидим, что к этим двум типам может быть приведено и самое общее движение твёрдого тела. В настоящем параграфе рассмотрим поступательное движение твёрдого тела.



Черт. 175.

AC и BD одинаковой длины, насаженных на валы A и B и соединенных спарником CD , длина которого равна расстоянию AB между осями валов (черт. 175). Ясно, что при всех положениях механизма фигура $ACDB$ остается параллелограммом, и, значит, спарник CD остается параллельным прямой AB . Следовательно, движение стержня CD есть движение поступательное.

Докажем следующее основное свойство поступательного движения: при поступательном движении все точки твёрдого тела описывают тождественные и параллельно расположенные траектории¹⁾ и имеют в каждый данный момент равные скорости и равные ускорения.

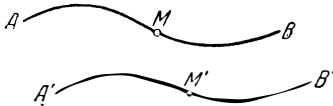


Черт. 177.

Представим себе твёрдое тело, движущееся поступательно. Докажем, что любые две его точки, например M и N (черт. 177), описывают тождественные и параллельно расположенные траектории.

Возьмем ряд последовательных моментов времени: $t, t + \Delta t, t + 2\Delta t, \dots$, следующих один за другим через промежуток времени Δt , и отметим последовательные положения M, M_1, M_2, \dots и N, N_1, N_2, \dots наших двух точек в эти моменты времени. Соединив прямыми линиями точки M, M_1, M_2, \dots , а также точки N, N_1, N_2, \dots , получим две ломаные линии, вписанные в траектории точек M и N .

¹⁾ Две кривые мы называем тождественными, если при наложении они совмещаются. Две точки M и M' двух тождественных кривых AB и $A'B'$ (черт. 176), совпадающие при совмещении кривых, назовем соответствующими друг другу. Мы назовем две тождественные кривые расположенными параллельно, если касательные к ним, проведенные в соответствующих точках, параллельны.



Черт. 176.

Соединим еще прямыми линиями точки M и N , M_1 и N_1 , M_2 и N_2 и т. д. Отрезки MN , M_1N_1 , M_2N_2 , ... представляют последовательные положения отрезка MN , движущегося вместе с твердым телом; следовательно, все эти отрезки между собою равны. Так как движение тела предполагается поступательным, то все эти отрезки, кроме того, параллельны. Отсюда следует, что фигуры MM_1N_1N , $M_1M_2N_2N_1$, ... суть параллелограммы, а следовательно, стороны ломаных MM_1M_2 ... и NN_1N_2 ... соответственно равны и параллельны. Значит, эти ломаные тождественны и параллельно расположены. Перейдем теперь к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. В пределе ломаные MM_1M_2 ... и NN_1N_2 ... обращаются в траектории точек M и N . Так как ломаные тождественны и параллельно расположены, то и кривые, к которым они приближаются, также тождественны и параллельно расположены.

Итак, траектории точек M и N тождественны и расположены параллельно

Обратимся к рассмотрению скоростей точек M и N в момент t .

Скорость \boldsymbol{v} точки M в момент t можно рассматривать как предел скорости фиктивного равномерного движения по хорде MM_1 за время Δt . Эта фиктивная скорость \boldsymbol{v}_m имеет величину $\boldsymbol{v}_m = \frac{MM_1}{\Delta t}$ и направлена по хорде MM_1 (черт. 177). Совершенно так же скорость точки N в момент t (обозначим ее \boldsymbol{v}') есть предел скорости \boldsymbol{v}'_m фиктивного равномерного движения по хорде NN_1 за время Δt ; скорость \boldsymbol{v}'_m имеет величину $\boldsymbol{v}'_m = \frac{NN_1}{\Delta t}$ и направлена по хорде NN_1 . Но мы видели, что отрезки MM_1 и NN_1 равны и параллельны; следовательно:

$$\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{v}'_m.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}',$$

т. е. скорости точек M и N в момент t равны.

Остается рассмотреть ускорения точек M и N в момент t .

Обозначим ускорения точек M и N соответственно через \boldsymbol{w} и \boldsymbol{w}' . Имеем:

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}, \quad \boldsymbol{w}' = \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt}.$$

Но мы только что видели, что $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'$. Следовательно:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}',$$

т. е. и ускорения точек M и N равны.

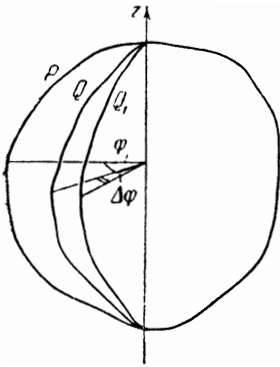
Общую для всех точек твердого тела скорость и общее для всех точек ускорение мы можем назвать *скоростью* и *ускорением*

твердого тела. Заметим, что такая терминология допустима лишь в случае поступательного движения твердого тела; в других случаях движения твердого тела (как мы увидим в дальнейшем) различные точки твердого тела имеют различные скорости и различные ускорения.

§ 94. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Представим себе твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси z (черт. 178). Вращательное движение твердого тела может быть определено следующим образом.

Проведем через ось вращения z две полуплоскости¹⁾: неподвижную полуплоскость P и подвижную полуплоскость Q , вращающуюся вместе с твердым телом. Отметим двугранный угол между этими полуплоскостями и условимся считать его положительным, если он представляется отложенным от неподвижной полуплоскости P против



Черт. 178.

направления вращения часовой стрелки (для наблюдателя, смотрящего со стороны положительной оси z). Обозначим этот двугранный угол, взятый с надлежащим знаком, через φ и назовем его *углом поворота*. Заданием угла поворота φ вполне определяется положение подвижной полуплоскости Q , а вместе с тем и положение всего вращающегося тела.

При движении тела угол поворота φ изменяется с течением времени, т. е. угол φ представляется некоторой функцией времени t :

$$\varphi = f(t).$$

Это уравнение называется *уравнением вращения*. Этим уравнением вполне определяется вращательное движение твердого тела, ибо, зная это уравнение, мы можем для любого момента времени t вычислить соответствующее значение угла поворота φ и, следовательно, указать соответствующее положение вращающегося тела.

Для характеристики большей или меньшей быстроты вращения введем понятие *угловой скорости*.

Возьмем моменты времени t и $t + \Delta t$. В момент $t + \Delta t$ вращающаяся полуплоскость Q занимает положение Q_1 , и угол поворота φ за время Δt получает приращение $\Delta\varphi$ (черт. 178). Отношение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ называется *средней угловой скоростью* вращающегося тела за время Δt .

¹⁾ Прямая линия, проведенная на плоскости, делит неограниченную плоскость на две полуплоскости.

Предел же, к которому приближается средняя угловая скорость, когда Δt приближается к нулю, называется *угловой скоростью* тела в момент t . Обозначая угловую скорость буквой ω , имеем:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \right] = \frac{d\varphi}{dt},$$

т. е. *угловая скорость равна производной от угла поворота по времени*. Заметим, что когда для наблюдателя, смотрящего со стороны положительной оси z , твердое тело представляется вращающимся против часовой стрелки, мы имеем $\Delta \varphi > 0$, а следовательно, и $\omega > 0$; если же вращение тела представляется происходящим по часовой стрелке, то $\Delta \varphi < 0$, а следовательно, и $\omega < 0$.

Отметим тот частный случай вращения, при котором *угловая скорость есть величина постоянная*:

$$\omega = \text{const.}$$

В этом случае вращение называется *равномерным*. Составим уравнение равномерного вращения. Мы имеем зависимость:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega.$$

Интегрируя и имея в виду, что в данном случае ω есть величина постоянная, получаем:

$$\varphi = \omega t + C,$$

где C есть произвольная постоянная. Положим, что в начальный момент $t=0$ угол поворота φ имеет значение φ_0 ; этот угол φ_0 назовем *начальным углом поворота*. Применяя последнее уравнение к начальному моменту $t=0$, находим:

$$\varphi_0 = C.$$

Определив таким образом значение постоянной C , получаем окончательно:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (1)$$

Таково *уравнение равномерного вращения*.

Заметим, что надлежащим выбором неподвижной полуплоскости P и подвижной полуплоскости Q можно всегда достигнуть того, чтобы было $\varphi_0 = 0$ (стоит только выбрать полуплоскости P и Q так, чтобы в начальный момент $t=0$ они совпадали). Следовательно, не ограничивая общности, можно написать уравнение равномерного вращения и в таком виде:

$$\varphi = \omega t.$$

Решая уравнение (1) относительно ω , имеем:

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t},$$

т. е. угловая скорость равномерного вращения равна отношению приращения угла поворота за некоторый промежуток времени к величине этого промежутка времени.

Представим себе такое равномерное вращение, при котором угол поворота изменяется на единицу угла в единицу времени. Угловая скорость такого вращения равна

$$\omega = \frac{1}{1} = 1.$$

Следовательно, за единицу угловой скорости мы должны принять угловую скорость такого равномерного вращения, при котором угол поворота изменяется на единицу угла в единицу времени. Например, если условимся измерять углы отношением дуги к соответствующему радиусу, т. е. за единицу угла примем абсолютную единицу угла или радиан¹⁾, и если за единицу времени примем секунду, то за единицу угловой скорости мы должны принять угловую скорость такого равномерного вращения, при котором тело поворачивается на один радиан в одну секунду. Эту единицу угловой скорости мы назовем абсолютной единицей угловой скорости и будем обозначать $\frac{1}{сек}$.

Весьма часто угловая скорость измеряется числом оборотов в минуту, т. е. за единицу угла принимается полный оборот (или 360°), а за единицу времени — минута; соответствующая единица угловой скорости обозначается $\frac{об}{мин}$.

Правило перехода от одних единиц угловой скорости к другим остается тем же, как оно было формулировано в аналогичном случае для скорости и ускорения точки: напишите данную угловую скорость с надлежащим наименованием единицы угловой скорости; в этом наименовании выразите данные единицы угла и времени через новые единицы угла и времени; произведя перемножение, получите требуемый результат²⁾.

Например:

$$\omega = 100 \text{ об/мин} = 100 \frac{2\pi}{60 \text{ сек}} = \frac{10\pi}{3} \frac{1}{сек}.$$

Часто угловую скорость, выраженную числом оборотов в минуту, обозначают буквой n , оставляя букву ω для обозначения угловой скорости, выраженной в абсолютных единицах (т. е. в $\frac{1}{сек}$).
Имеет:

$$n \text{ об/мин} = n \frac{2\pi}{60 \text{ сек}} = \frac{\pi n}{30 \text{ сек}} = \omega \frac{1}{сек}.$$

¹⁾ Радианом называется угол, для которого дуга равна радиусу; он равен $51^\circ 17' 44''$,8. Измеряя углы отношением дуги к соответствующему радиусу, мы выражаем углы отвлеченными числами.

²⁾ При этом нужно помнить, что один оборот, измеренный в радианах, выражается отвлеченным числом 2π .

Отсюда получаем простую формулу перехода:

$$\omega = \frac{\pi n}{30},$$

а также

$$n = \frac{30}{\pi} \omega \approx 9,55 \omega.$$

Перейдем к установлению понятия углового ускорения. Возьмем моменты времени t и $t + \Delta t$. Положим, что в момент t угловая скорость имеет значение ω , а в момент $t + \Delta t$ она равна $\omega + \Delta\omega$. Отношение $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ называется *средним угловым ускорением* за время Δt . Предел же, к которому приближается среднее угловое ускорение, когда Δt приближается к нулю, называется *угловым ускорением* в момент t .

Обозначая угловое ускорение буквой ϵ , имеем:

$$\epsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta\omega}{\Delta t} \right] = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

т. е. *угловое ускорение равно первой производной от угловой скорости по времени или второй производной от угла поворота по времени*. Заметим, что $\epsilon > 0$, если $\Delta\omega > 0$, т. е. если угловая скорость возрастает за время Δt , и $\epsilon < 0$, если $\Delta\omega < 0$, т. е. если угловая скорость убывает.

Остановимся на том частном случае вращения, при котором *угловое ускорение есть величина постоянная*:

$$\epsilon = \text{const.}$$

Такое вращение называется *равномерно переменным* (равномерно ускоренным или равномерно замедленным). Составим уравнение равномерно переменного вращения.

Имеем зависимость:

$$\frac{d\omega}{dt} = \epsilon.$$

Интегрируя и имея в виду, что по предположению ϵ есть величина постоянная, получаем:

$$\omega = \epsilon t + C,$$

где C есть произвольная постоянная. Положим, что в начальный момент $t = 0$ угловая скорость имеет значение ω_0 , которое назовем *начальной угловой скоростью*. Применяя последнее уравнение к начальному моменту $t = 0$, находим:

$$\omega_0 = C.$$

Подставив найденное значение постоянной C в предыдущее уравнение, будем иметь:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (2)$$

Таков закон изменения угловой скорости при равномерно переменном вращении.

Далее имеем зависимость:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \text{или} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Интегрируя, находим:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} + C_1,$$

где C_1 есть новая произвольная постоянная. Обозначая начальный угол поворота (т. е. значение угла поворота φ при $t=0$) через φ_0 и применяя последнее уравнение к начальному моменту $t=0$, получаем:

$$\varphi_0 = C_1.$$

Следовательно, окончательно имеем:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Таково *уравнение равномерно переменного вращения*.

Решая уравнение (2) относительно ε , находим:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t},$$

т. е. угловое ускорение равномерно переменного вращения равно отношению приращения угловой скорости за некоторый промежуток времени к величине этого промежутка времени.

Представим себе такое равномерно переменное вращение, при котором угловая скорость возрастает на единицу угловой скорости в каждую единицу времени; угловое ускорение такого вращения равно

$$\varepsilon = \frac{1}{1} = 1.$$

Следовательно, за единицу углового ускорения мы должны принять угловое ускорение такого равномерно переменного вращения, при котором угловая скорость изменяется на единицу угловой скорости в единицу времени. Если примем за единицы угла и времени радиан и секунду, то будем иметь единицу углового ускорения, которая называется *абсолютной единицей углового ускорения* и обозначается:

$$\frac{1}{\text{сек}^2}.$$

Принимая за единицы угла и времени один оборот и минуту, получаем единицу углового ускорения $\frac{\text{об}}{\text{мин}^2}$ и т. д.

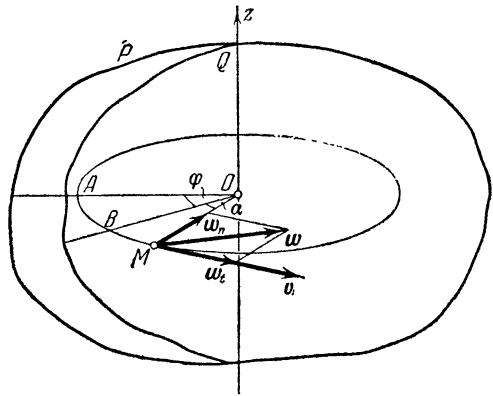
Правило перехода от одних единиц к другим остается прежним. Например:

$$\epsilon = 10 \text{ об/мин}^2 = 10 \frac{2\pi}{(60 \text{ сек})^2} = \frac{\pi}{180 \text{ сек}^2}.$$

Мы закончим настоящий параграф изучением скоростей и ускорений различных точек вращающегося тела.

Представим себе твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси z , и отметим какую-либо точку M этого тела (черт. 179).

Траектория точки M есть окружность, плоскость которой перпендикулярна к оси вращения z и центр O которой лежит на этой оси; радиус этой окружности (или расстояние точки M от оси вращения) обозначим буквой r . Возьмем неподвижную и подвижную полуплоскости P и Q и отметим те радиусы окружности, описываемой точкой M , которые лежат в этих полуплоскостях; радиус OA , лежащий в полуплоскости P , неподвижен, радиус же OB , лежащий в полуплоскости Q , вращается вместе с твердым телом. Угол, заключенный между радиусами OA и OB , есть угол поворота φ . Если мы условимся взять за начало расстояний s точку A и если возьмем за положительное направление расстояния s то же направление, в котором условились считать положительным угол поворота φ , то будем иметь:



Черт. 179.

$$s = r(\varphi + \alpha), \quad (3)$$

где α есть угол, заключенный между радиусами OB и OM ; так как оба радиуса OB и OM вращаются вместе с твердым телом, то угол α есть величина постоянная. Заметим, что в формуле (3) углы φ и α должны быть выражены в радианах. Вычисляя теперь величину v скорости, находим:

$$v = \left| \frac{ds}{dt} \right| = r \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = r |\omega|. \quad (4)$$

Направление же скорости v есть направление касательной к окружности, описываемой точкой M ; другими словами, скорость v

перпендикулярна к плоскости, проходящей через точку M и ось вращения z . Скорость v получает в данном случае название *вращательной* или *окружной скорости*. Так как угол φ в формуле (3) должен быть выражен в радианах, то угловая скорость ω в формуле (4) должна быть выражена в абсолютных единицах. Из формулы (4) следует, что вращательные скорости различных точек вращающегося тела пропорциональны соответствующим радиусам, т. е. расстояниям данных точек от оси вращения.

Переходя к вычислению ускорения точки M , воспользуемся разложением полного ускорения \boldsymbol{w} на касательное ускорение \boldsymbol{w}_t и нормальное ускорение \boldsymbol{w}_n . Имея в виду, что радиус кривизны траектории точки M равен r , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{w}_t &= \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\epsilon, \\ \boldsymbol{w}_n &= \frac{v^2}{\rho} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ускорение \boldsymbol{w}_t направлено по касательной к окружности, описываемой точкой M ; ускорение \boldsymbol{w}_n направлено к центру O этой окружности. Ускорения \boldsymbol{w}_t и \boldsymbol{w}_n получают в данном случае названия *вращательного* и *центростремительного ускорений*. Полное ускорение \boldsymbol{w} находится как диагональ прямоугольника, построенного на вращательном и центростремительном ускорениях:

$$\boldsymbol{w} = \sqrt{\boldsymbol{w}_t^2 + \boldsymbol{w}_n^2} = r \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}. \quad (6)$$

Заметим, что в формулах (5) и (6) угловая скорость ω и угловое ускорение ϵ должны быть выражены в абсолютных единицах. Если тело вращается равномерно, то мы имеем:

$$\omega = \text{const}, \quad \epsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{w}_t = r\epsilon = 0.$$

Итак, в случае равномерного вращения полное ускорение \boldsymbol{w} точки M состоит из одной только центростремительной составляющей; оно равно по величине

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_n = r\omega^2$$

и направлено к центру O окружности, описываемой точкой M .

Пример 36. Маховик, находившийся в начальный момент в покое, вращается равномерно ускоренно; в первые 2 минуты после начала движения он совершает 300 оборотов. Определить угловое ускорение маховика, а также его угловую скорость через 3 минуты после начала движения.

Воспользуемся формулами:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\epsilon t^2}{2}, \quad \omega = \omega_0 + \epsilon t.$$

В данном случае имеем $\varphi_0 = 0$, $\omega_0 = 0$. Угловое ускорение ϵ определяется из уравнения:

$$300 = \frac{4\epsilon}{2},$$

откуда

$$\epsilon = 150 \text{ об/мин}^2.$$

Угловая скорость через 3 мин после начала движения равна

$$\omega = 150 \cdot 3 = 450 \text{ об/мин}.$$

Найденные величины ϵ и ω , выраженные в абсолютных единицах, равны

$$\epsilon = 150 \frac{2\pi}{(60 \text{ сек})^2} = \frac{\pi}{12} \frac{1}{\text{сек}^2},$$

$$\omega = 450 \frac{2\pi}{60 \text{ сек}} = 15\pi \frac{1}{\text{сек}}.$$

Пример 37. Маховик радиуса $R = 1,5 \text{ м}$ вращается равномерно с угловой скоростью 90 об/мин . Определить скорость и ускорение точки, лежащей на ободе маховика.

Имеем:

$$\omega = 90 \text{ об/мин} = 90 \frac{2\pi}{60 \text{ сек}} = 3\pi \frac{1}{\text{сек}},$$

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Следовательно:

$$v = R\omega = 1,5 \cdot 3\pi = 4,5\pi \text{ м/сек} = 14,13 \text{ м/сек},$$

$$w_t = R\epsilon = 0,$$

$$w_n = R\omega^2 = 1,5 \cdot 9\pi^2 = 13,5\pi^2 \text{ м/сек}^2 = 133,2 \text{ м/сек}^2,$$

$$w = w_n = 133,2 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}.$$

Окружная скорость v направлена по касательной к окружности маховика, а ускорение w — к его центру.

Пример 38. В лабораторных условиях была получена угловая скорость вращения, равная $11\,000 \text{ об/сек}$.

Ротором служил маленький конус с диаметром основания $d = 1,17 \text{ см}$, вращавшийся вокруг своей оси; вращение вызывалось и поддерживалось потоком воздуха. Вычислить окружную скорость v и ускорение w точки на окружности основания конуса.

Вычисляем скорость v и ускорение w по формулам:

$$v = r\omega, \quad w = r\omega^2.$$

Полагая здесь

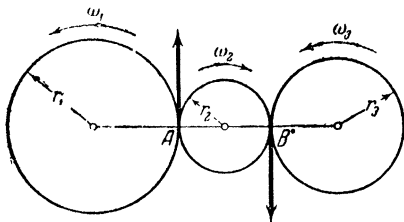
$$r = \frac{d}{2} = 0,585 \text{ см}, \quad \omega = 11\,000 \cdot \frac{2\pi}{\text{сек}} = 69\,100 \frac{1}{\text{сек}} = 691 \cdot 10^2 \frac{1}{\text{сек}},$$

получаем:

$$v = 40\,400 \text{ см/сек} = 404 \text{ м/сек}, \quad w = 279 \cdot 10^5 \text{ м/сек}^2.$$

Пример 39. Даны три шестерни, сцепленные между собой (черт. 180). Радиусы шестерен равны соответственно $r_1 = 20$ см, $r_2 = 12$ см, $r_3 = 15$ см. Первая шестерня вращается против часовой стрелки с угловой скоростью $\omega_1 = 90 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$. Найти угловую скорость третьей шестерни.

Так как зубчатое зацепление исключает возможность скольжения одной шестерни по другой, то в точках касания касающиеся шестерни должны



Черт. 180.

иметь одинаковые окружные скорости. С другой стороны, на окружности каждой шестерни окружные скорости тоже одинаковы. Отсюда следует, что на всех трех окружностях мы имеем равные окружные скорости. Это приводит к равенству

$$r_1 \omega_1 = r_3 \omega_3, \quad \text{откуда} \quad \omega_3 = \frac{r_1}{r_3} \omega_1 = \frac{20}{15} \cdot 90 \text{ об/мин} = 120 \text{ об/мин}.$$

Чтобы определить направление вращения третьей шестерни, отметим окружные скорости точек касания A и B . Так как по заданию первая шестерня вращается против часовой стрелки, то скорость точки A направлена вверх. Этим определяется направление вращения второй шестерни: она вращается по часовой стрелке. Отсюда следует, что скорость точки B направлена вниз. Значит, третья шестерня вращается против часовой стрелки.

ГЛАВА XVI

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 95. Относительное движение точки

Откладывая исследование более сложных случаев движения твердого тела до следующих глав, мы остановимся теперь на теории относительного движения. Результатами, которые будут установлены в настоящей главе, нам придется воспользоваться при дальнейшем изучении кинематики твердого тела.

Представим себе двух наблюдателей, из которых один сидит на палубе движущегося парохода, а другой остается неподвижным на берегу. Положим, что оба наблюдателя следят за движением какого-либо объекта, происходящим на палубе парохода, например за движением гуляющего по палубе пассажира. Движение пассажира, которое воспринимается наблюдателем, движущимся вместе с пароходом, мы назовем относительным движением пассажира по отношению к движущемуся пароходу; движение того же пассажира, наблюдаемое неподвижным наблюдателем, мы назовем абсолютным движением пассажира.

От этого конкретного примера перейдем к общим представлениям.

Под термином «неизменяемая среда» мы будем понимать неограниченную среду, расстояния между каждыми двумя точками ко-

торой остаются неизменными. Представим себе неизменяемую среду, движущуюся каким-либо образом в пространстве, и представим себе двух наблюдателей, из которых один остается неподвижным по отношению к среде (т. е. не изменяет своего положения по отношению к точкам среды) и, следовательно, движется вместе со средою, а другой остается неподвижным в пространстве.

Положим, что оба наблюдателя следят за движением некоторой точки M (черт. 181). Для наблюдателя, движущегося вместе со средою, точка M представляется описывающей в среде кривую K , а для неподвижного наблюдателя она представляется движущейся по кривой P .

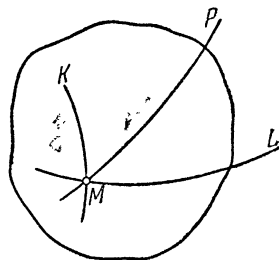
То движение точки M , которое наблюдается наблюдателем, движущимся вместе со средою, называется *относительным движением* точки M по отношению к среде, а то движение точки M , которое наблюдается неподвижным наблюдателем, называется ее *абсолютным движением*.

Кривая K , описываемая точкой M в ее относительном движении, называется ее *относительной траекторией*; кривая же P , по которой движется точка M в ее абсолютном движении, называется ее *абсолютной траекторией*. Относительную траекторию K можно определить как геометрическое место точек среды, с которыми в последовательные моменты времени совпадает движущаяся точка M , а абсолютная траектория P есть геометрическое место точек неподвижного пространства, с которыми в последовательные моменты времени совпадает точка M . Относительная траектория K переносится в пространстве, двигаясь вместе со средою, абсолютная же траектория P есть кривая неподвижная.

Движение точки M вместе с неизменяемой средою мы будем называть *переносным движением* точки M . При движении среды каждая ее точка описывает некоторую траекторию; в частности, отметим траекторию L (черт. 181), описываемую той точкой среды, с которой в данный момент совпадает точка M . Если бы точка M не совершала относительного движения по отношению к среде, то ее абсолютное движение происходило бы по кривой L . Кривая L называется *переносной траекторией* точки M в данный момент.

Покажем, что, зная относительное движение точки, а также ее переносное движение, можно определить абсолютное движение точки.

Представим себе неизменяемую среду и движущуюся в ней точку M (черт. 182). Возьмем ряд последовательных моментов времени t , $t + \Delta t$, $t + 2\Delta t$, ... Положим, что в момент t среда и точка M занимают положения, указанные на чертеже. Отметим относительную



Черт. 181.

траекторию K и траекторию L , описываемую той точкой среды, с которой точка M совпадает в момент t .

Чтобы построить положения, занимаемые точкой M в моменты $t + \Delta t$, $t + 2\Delta t$, ... в ее абсолютном движении, поступаем следующим образом.

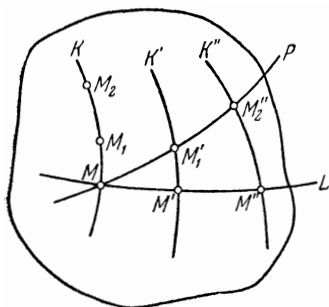
Отметим на относительной траектории K положение M_1 , занимаемое точкой M в момент $t + \Delta t$, а на траектории L положение M' , занимаемое в тот же момент той точкой среды, с которой в момент t совпадает точка M ; отметим также положение K' , занимаемое относительной траекторией K (движущейся вместе со средой) в момент $t + \Delta t$. Отложив по кривой K' от точки M' дугу $M'M_1$, равную дуге MM_1 , мы получим положение M'_1 , занимаемое точкой M

в момент $t + \Delta t$ в ее абсолютном движении. Совершенно так же может быть построено положение M''_2 , занимаемое точкой M в ее абсолютном движении в момент $t + 2\Delta t$ и т. д. Геометрическое место точек M , M'_1 , M''_2 , ... есть абсолютная траектория P .

Итак, зная относительное движение точки и ее переносное движение, мы можем построить абсолютную траекторию точки и указать положение точки на ее абсолютной траектории в любой момент времени.

Только что указанный процесс, при помощи которого определяется абсолютное движение точки по данным относительному и переносному движениям, называется *сложением движений* относительного и переносного. Абсолютное движение называется *составным* из движений относительного и переносного; относительное и переносное движения называются *составляющими* движениями. Обратный процесс замены составного движения двумя составляющими движениями называется *разложением* данного движения на два составляющих движения.

Мы назвали абсолютным движением точки то движение, которое наблюдается неподвижным наблюдателем. Мы говорим, что точка совершает абсолютное движение, если с течением времени изменяется ее положение по отношению к абсолютно неподвижным телам. Но как судить об абсолютной неподвижности этих тел? Мы подходим здесь к вопросу о том, существует ли абсолютно неподвижное пространство. Оставаясь в области кинематики, мы не можем ответить на этот вопрос; путь к его решению открывается в динамике. С точки зрения кинематики всякое движение есть движение относительное. Тем не менее, мы сохраним в дальнейшем термин «абсолютное движение» и условимся понимать под этим термином



Черт. 182.

то движение, которое наблюдается наблюдателем, неподвижным на земной поверхности; строго говоря, это движение нужно было бы назвать относительным движением по отношению к земному шару. Основания, по которым упомянутому движению может быть присвоено наименование абсолютного движения, будут изложены в курсе динамики.

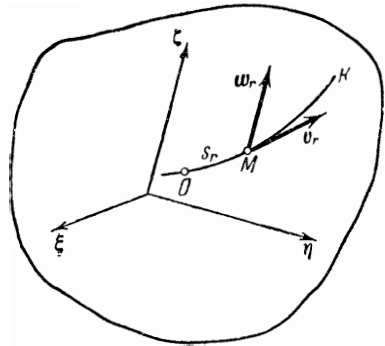
§ 96. Уравнения относительного движения, относительная скорость и относительное ускорение

К исследованию относительного движения точки мы можем применить все те методы, при помощи которых мы изучали в первых трех главах этого отдела абсолютное движение точки.

Представим себе неизменяемую среду, совершающую переносное движение в пространстве, и точку M , совершающую относительное движение по отношению к среде (черт. 183). Относительное движение точки M может быть определено заданием относительной траектории K и уравнения движения

$$s_r = f(t),$$

где s_r есть расстояние, пройденное в относительном движении, отсчитанное по относительной траектории от некоторого произвольно выбранного начала O . Только что написанное уравнение мы назовем *уравнением относительного движения*.



Черт. 183.

Для определения относительного движения можно воспользоваться также координатным методом. Возьмем три взаимно перпендикулярные координатные оси ξ , η , ζ , связанные со средой и, следовательно, движущиеся вместе со средой. Обозначая координаты точки M относительно этих осей буквами ξ , η , ζ (мы будем называть эти координаты *относительными координатами* точки M), имеем:

$$\xi = f_1(t), \quad \eta = f_2(t), \quad \zeta = f_3(t).$$

Этими уравнениями, которые мы будем называть *уравнениями относительного движения в прямоугольных координатах*, вполне определяется относительное движение точки M .

Скорость точки M в ее относительном движении мы будем называть *относительной скоростью* и будем обозначать v_r . Имеем:

$$v_r = \left| \frac{ds_r}{dt} \right|,$$

направление скорости v_r есть направление касательной к относительной траектории, проведенной в сторону движения. Обозначая

проекции относительной скорости \mathbf{v}_r на оси ξ, η, ζ через $v_{r\xi}, v_{r\eta}, v_{r\zeta}$, будем иметь:

$$v_{r\xi} = \xi', \quad v_{r\eta} = \eta', \quad v_{r\zeta} = \zeta'.$$

Ускорение точки M в ее относительном движении мы будем называть ее *относительным ускорением* и будем обозначать ω_r . Проекции $\omega_{r\xi}, \omega_{r\eta}, \omega_{r\zeta}$ этого ускорения на оси ξ, η, ζ определяются формулами:

$$\omega_{r\xi} = \xi'', \quad \omega_{r\eta} = \eta'', \quad \omega_{r\zeta} = \zeta''.$$

Вообще все результаты, установленные в главах XII—XIV, остаются справедливыми и в применении к относительному движению.

Мы только что ввели координатные оси ξ, η, ζ , связанные со средой и движущиеся вместе с нею. Часто вместо того, чтобы говорить об относительном движении «по отношению к движущейся неизменяемой среде», говорят об относительном движении «по отношению к подвижной координатной системе ξ, η, ζ ». Движение точки вместе с осями ξ, η, ζ в этом случае получает название *переносного движения*.

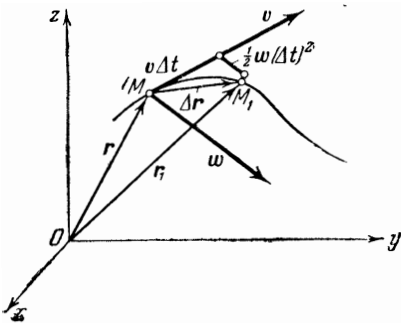
Скорость и ускорение точки M в ее абсолютном движении мы условимся называть ее *абсолютной скоростью* и *абсолютным ускорением*. Нашей ближайшей задачей будет установить зависимость между относительной скоростью точки и ее абсолютной скоростью, а также между относительным ускорением и абсолютным ускорением. Эти зависимости даются теоремой сложения скоростей и теоремой сложения ускорений.

§ 97. Теорема об элементарном перемещении точки. Девиация

Прежде чем приступить к выводу двух упомянутых в конце предыдущего параграфа важных теорем, установим вспомогательное предложение, касающееся элементарного перемещения точки. Этим предложением мы затем воспользуемся при выводе интересующих нас теорем.

Представим себе точку M , совершающую некоторое (абсолютное или относительное) движение, определяемое уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



Черт. 184.

отнесенными к осям x, y, z (черт. 184).

Положим, что в момент t движущаяся точка занимает положение, обозначенное на чертеже

буквой M , и имеет в этот момент скорость \mathbf{v} и ускорение \mathbf{w} ; в момент $t + \Delta t$ точка занимает положение M_1 , пройдя за время Δt дугу $\overline{MM_1}$.

Проведем радиусы-векторы $\overline{OM} = \mathbf{r}$ и $\overline{OM_1} = \mathbf{r}_1$. Вектор $\overline{MM_1}$ есть не что иное, как приращение $\Delta \mathbf{r}$ радиуса-вектора нашей движущейся точки за время Δt ; назовем этот вектор *элементарным перемещением* точки M за время Δt . Будем рассматривать промежуток времени Δt как малую величину первого порядка малости и предложим себе вывести разложение элементарного перемещения $\Delta \mathbf{r}$ в бесконечный ряд по степеням этой малой величины.

Обозначим координаты точки M через x, y, z , а координаты точки M_1 — через x_1, y_1, z_1 . Проекции вектора $\Delta \mathbf{r}$ на оси x, y, z равны разностям $x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z$; обозначим эти разности через $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. Имеем:

$$x = f_1(t), \quad x_1 = f_1(t + \Delta t).$$

Разложим величину x_1 в ряд Тэйлора по степеням малой величины Δt :

$$x_1 = f_1(t) + f_1'(t) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} f_1''(t) (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} f_1'''(t) (\Delta t)^3 + \dots$$

Замечая, что

$$f_1(t) = x, \quad f_1'(t) = v_x, \quad f_1''(t) = w_x,$$

где v_x и w_x — проекции скорости \mathbf{v} и ускорения \mathbf{w} на ось x , получаем:

$$x_1 = x + v_x \Delta t + \frac{1}{2} w_x (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} f_1'''(t) (\Delta t)^3 + \dots,$$

откуда (полагая $f_1'''(t) = x'''$)

$$\Delta x = v_x \Delta t + \frac{1}{2} w_x (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} x''' (\Delta t)^3 + \dots$$

Точно так же находим:

$$\Delta y = v_y \Delta t + \frac{1}{2} w_y (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} y''' (\Delta t)^3 + \dots,$$

$$\Delta z = v_z \Delta t + \frac{1}{2} w_z (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} z''' (\Delta t)^3 + \dots$$

Применим теперь к элементарному перемещению $\Delta \mathbf{r}$ формулу разложения на составляющие по осям x, y, z . Обозначая единичные векторы, направленные по осям x, y, z , как всегда, через $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ и имея в виду, что проекции вектора $\Delta \mathbf{r}$ на эти оси равны $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, получаем:

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta x \cdot \mathbf{i} + \Delta y \cdot \mathbf{j} + \Delta z \cdot \mathbf{k}.$$

Подставляя сюда найденные разложения величин Δx , Δy , Δz , будем иметь:

$$\begin{aligned} \Delta r = (v_x i + v_y j + v_z k) \Delta t + \frac{1}{2} (\omega_x i + \omega_y j + \omega_z k) (\Delta t)^2 + \\ + \frac{1}{6} (x''' i + y''' j + z''' k) (\Delta t)^3 + \dots \end{aligned}$$

Но, применяя формулу разложения на составляющие к скорости \mathbf{v} и ускорению \mathbf{w} , имеем:

$$\begin{aligned} v_x i + v_y j + v_z k = \mathbf{v}, \\ \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k = \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Введем также новый вектор $\dot{\mathbf{w}}$, проекции которого на оси x , y , z равны третьим производным от координат x , y , z по времени (этот вектор $\dot{\mathbf{w}}$ называется ускорением второго порядка); в таком случае будем иметь:

$$x''' i + y''' j + z''' k = \dot{\mathbf{w}}.$$

Таким образом получаем:

$$\Delta r = \mathbf{v} \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{w} (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} \dot{\mathbf{w}} (\Delta t)^3 + \dots$$

Это и есть искомое разложение элементарного перемещения Δr в бесконечный ряд по степеням малой величины Δt . Здесь выписаны три первых члена этого разложения; в дальнейшие члены ряда входят векторы, проекции которых на оси x , y , z равны четвертым, пятым и т. д. производным от координат x , y , z по времени. Все эти векторы получают название ускорений третьего, четвертого и т. д. порядков.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{w} (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} \dot{\mathbf{w}} (\Delta t)^3 + \dots = a_2, \\ \frac{1}{6} \dot{\mathbf{w}} (\Delta t)^3 + \dots = a_3. \end{aligned}$$

Здесь a_2 и a_3 — малые векторы соответственно второго и третьего порядков малости. С этими обозначениями будем иметь:

$$\Delta r = \mathbf{v} \Delta t + a_2, \quad (2)$$

$$\Delta r = \mathbf{v} \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{w} (\Delta t)^2 + a_3. \quad (3)$$

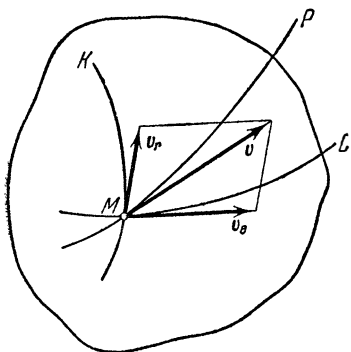
Этими формулами мы воспользуемся при выводе теорем сложения скоростей и сложения ускорений. Из полученных формул видно, что с точностью до малых величин первого порядка малости (включительно), т. е. пренебрегая величинами второго и высших порядков малости, мы можем считать элементарное перемещение MM_1

совпадающим с вектором $\boldsymbol{v} \Delta t$, отложенным по направлению скорости \boldsymbol{v} (черт. 184). С точностью же до малых величин второго порядка малости (т. е. пренебрегая лишь величинами третьего и высших порядков малости) мы должны считать элементарное перемещение складывающимся из векторов $\boldsymbol{v} \Delta t$ и $\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} (\Delta t)^2$. Вектор $\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} (\Delta t)^2$, имеющий направление ускорения $\boldsymbol{\omega}$, называется *девиацией*.

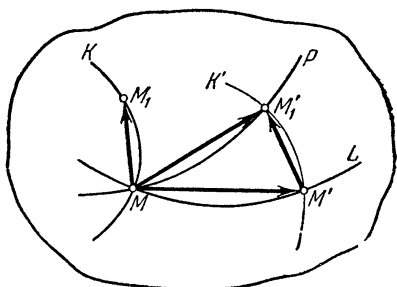
§ 98. Теорема сложения скоростей

Представим себе неизменяемую среду и движущуюся в ней точку M (черт. 185). В момент t среда и точка M занимают то положение, которое указано на чертеже. Отметим относительную траекторию K , абсолютную траекторию P и траекторию L , описываемую той точкой среды, с которой в момент t совпадает точка M .

В момент t точка M имеет относительную скорость \boldsymbol{v}_r и абсо-



Черт. 185.



Черт. 186.

лютную скорость \boldsymbol{v} . Отметим еще скорость той точки среды, с которой совпадает точка M в данный момент; обозначим эту скорость \boldsymbol{v}_e и назовем ее *переносной скоростью*; эта скорость направлена по касательной к кривой L .

Мы покажем, что *абсолютная скорость равна векторной сумме переносной и относительной скоростей*. В этом состоит *теорема сложения скоростей*.

Чтобы доказать эту теорему, построим положение точки M в момент $t + \Delta t$ (черт. 186). Отметим положение M_1 , занимаемое точкой M в момент $t + \Delta t$ на относительной траектории K , и положение M' , занимаемое в тот же момент точкой среды, описывающей кривую L ; отметим также смещенное положение относительной траектории, перенесенной за время Δt вместе со средою в положение K' . Отложив по кривой K' от точки M' дугу $M'M'_1$,

равную MM_1 , получим положение M'_1 , занимаемое точкой M в момент $t + \Delta t$ в ее абсолютном движении.

Проведем теперь хорды MM_1 , MM'_1 , MM' и $M'M'_1$ (черт. 186). Векторы $\overline{MM'_1}$, $\overline{MM_1}$ и $\overline{MM'}$ — не что иное, как элементарные перемещения точки M за время Δt в ее абсолютном, относительном и переносном движениях. Вектор $\overline{M'M'_1}$ численно равен элементарному перемещению $\overline{MM_1}$ в относительном движении точки; можно сказать, что вектор $\overline{M'M'_1}$ есть элементарное перемещение в относительном движении, перенесенное за время Δt вместе с относительной траекторией K в новое положение, соответствующее моменту $t + \Delta t$.

Будем рассматривать промежуток времени Δt как малую величину первого порядка малости. На основании формулы (1), выведенной в предыдущем параграфе, имеем:

$$\begin{aligned}\overline{MM'_1} &= \mathbf{v} \Delta t + \mathbf{a}_2, \\ \overline{MM_1} &= \mathbf{v}_r \Delta t + \mathbf{b}_2, \\ \overline{MM'} &= \mathbf{v}_e \Delta t + \mathbf{c}_2,\end{aligned}$$

где \mathbf{a}_2 , \mathbf{b}_2 , \mathbf{c}_2 — малые векторы второго порядка малости. Что же касается перемещения $\overline{M'M'_1}$, то, обозначая относительную скорость \mathbf{v}_r и отрезок \mathbf{b}_2 , перенесенные вместе с относительной траекторией K в новое положение, соответствующее моменту $t + \Delta t$, через \mathbf{v}'_r и \mathbf{b}'_2 (скорость \mathbf{v}'_r численно равна скорости \mathbf{v}_r , но направлена не по касательной к траектории K в точке M , а по касательной к траектории K' в точке M'), будем иметь:

$$\overline{M'M'_1} = \mathbf{v}'_r \Delta t + \mathbf{b}'_2.$$

С другой стороны, из $\triangle MM'M'_1$ мы заключаем, что перемещение $\overline{MM'_1}$ есть сумма перемещений $\overline{MM'}$ и $\overline{M'M'_1}$, т. е.

$$\overline{MM'_1} = \overline{MM'} + \overline{M'M'_1}.$$

Подставляя сюда значения перемещений, находим:

$$\mathbf{v} \Delta t + \mathbf{a}_2 = \mathbf{v}_e \Delta t + \mathbf{c}_2 + \mathbf{v}'_r \Delta t + \mathbf{b}'_2$$

или

$$\mathbf{v} \Delta t = \mathbf{v}_e \Delta t + \mathbf{v}'_r \Delta t + \mathbf{c}_2 + \mathbf{b}'_2 - \mathbf{a}_2.$$

Обозначим для сокращения письма

$$\mathbf{c}_2 + \mathbf{b}'_2 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{k}_2,$$

где \mathbf{k}_2 — вектор второго порядка малости. В таком случае будем иметь:

$$\mathbf{v} \Delta t = \mathbf{v}_e \Delta t + \mathbf{v}'_r \Delta t + \mathbf{k}_2.$$

Разделим теперь обе части этого равенства на Δt и обозначим вектор \mathbf{k}_2 , деленный на Δt , через \mathbf{k}_1 ; это — вектор первого порядка малости. Следовательно:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}'_1 + \mathbf{k}_1.$$

Остается сделать переход к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. Так как

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\mathbf{v}'_1] = \mathbf{v}_r, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\mathbf{k}_1] = 0,$$

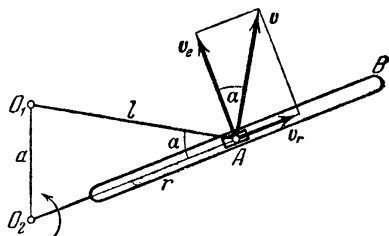
то в пределе будем иметь:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r,$$

т. е. абсолютная скорость равна векторной сумме переносной и относительной скоростей.

Другими словами, *абсолютная скорость есть диагональ параллелограмма, построенного на переносной и относительной скоростях* (черт. 185). Только что упомянутый параллелограмм называется *параллелограммом скоростей*.

Пример 40. На конце кривошипа O_1A , вращающегося вокруг неподвижной оси O_1 , имеется ползун, скользящий вдоль кулисы O_2B , которая вращается вокруг неподвижной оси O_2 (черт. 187); $O_1A = l$, $O_1O_2 = a$, причем $l > a$. Кривошип O_1A вращается с угловой скоростью ω_1 ; найти угловую скорость кулисы O_2B .



Черт. 187.

Обозначим искомую угловую скорость кулисы O_2B через ω_2 . Мы найдем эту угловую скорость ω_2 , если будем знать вращательную скорость какой-либо одной точки кулисы O_2B . Найдем вращательную скорость той точки кулисы, с которой в данный момент совпадает конец кривошипа A . Для этой цели будем рассматривать абсолютное движение точки A как слагающееся из переносного движения вместе с кулисой O_2B и из относительного движения по отношению к этой кулисе. Абсолютная скорость \mathbf{v} точки A нам известна: это есть вращательная скорость вокруг оси O_1 ; следовательно, ее величина равна

$$v = l\omega_1$$

и она направлена перпендикулярно к кривошипу O_1A . Нас интересует переносная скорость точки A . Строим параллелограмм скоростей, причем замечаем, что переносная скорость \mathbf{v}_e точки A (как вращательная вокруг оси O_2) перпендикулярна к кулисе O_2B , а относительная скорость \mathbf{v}_r должна быть направлена по касательной к относительной траектории, т. е. вдоль прямой O_2B .

Обозначая угол между скоростями \mathbf{v} и \mathbf{v}_e буквой α , выводим из параллелограмма скоростей:

$$v_e = v \cos \alpha = l\omega_1 \cos \alpha.$$

На так как переносная скорость \mathbf{v}_e есть вращательная вокруг оси O_2 , то

$$v_e = r\omega_2,$$

где буквой r обозначено переменное расстояние O_2A . Следовательно:

$$\omega_2 = \frac{v_e}{r} = \frac{l\omega_1 \cos \alpha}{r}.$$

Выразим еще $\cos \alpha$ через переменную величину r . Замечаем, что в треугольнике O_1AO_2 угол при вершине A равен α ; следовательно:

$$a^2 = l^2 + r^2 - 2lr \cos \alpha$$

откуда

$$\cos \alpha = \frac{l^2 + r^2 - a^2}{2lr} = \frac{r}{2l} \left(1 + \frac{l^2 - a^2}{r^2} \right).$$

Окончательно получаем:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{2} \left(1 + \frac{l^2 - a^2}{r^2} \right).$$

Отсюда видно, что если $\omega_1 = \text{const}$, т. е. кривошип O_1A вращается равномерно, то ω_2 есть величина переменная, т. е. кулисса O_2B вращается неравномерно. Предлагаем читателю найти $\max \omega_2$ и $\min \omega_2$, а также определить те положения механизма, при которых $\omega_2 = \omega_1$.

§ 99. Теорема сложения ускорений в том случае, когда переносное движение поступательное

Представим себе неизменяемую среду, совершающую какое-либо движение в пространстве, и движущуюся в среде точку M . В данный момент точка M имеет относительное ускорение ω_r и абсолютное ускорение ω . Ускорение той точки среды, с которой в данный момент совпадает точка M , назовем *переносным ускорением* и обозначим ω_e . Установим зависимость между ускорениями ω , ω_r и ω_e .

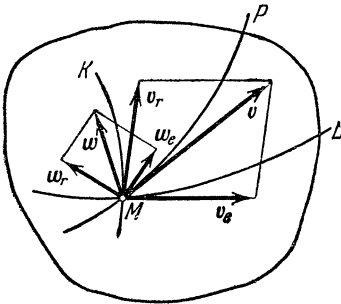
Не рассматривая самого общего случая, мы ограничимся сейчас выводом упомянутой зависимости в двух частных случаях: 1) когда переносное движение среды поступательное и 2) когда переносное движение среды есть вращение вокруг неподвижной оси. В настоящем параграфе остановимся на первом из этих двух случаев.

Итак, представим себе неизменяемую среду, движущуюся поступательно, и движущуюся в среде точку M (черт. 188). В момент t точка M имеет относительную скорость v_r , абсолютную скорость v , относительное ускорение ω_r и абсолютное ускорение ω . Отметим также переносную скорость v_e и переносное ускорение ω_e .

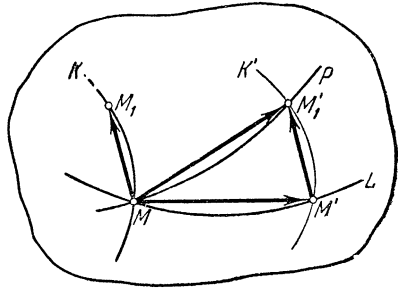
Мы покажем, что *если среда движется поступательно, то абсолютное ускорение равно векторной сумме переносного и относительного ускорений*.

Чтобы в этом убедиться, построим (совершенно так же, как в предыдущем параграфе) положение M'_1 точки M в момент $t + \Delta t$ (черт. 189). Заметим при этом, что так как среда движется поступательно, то кривая K' (смещенное положение относительной траектории) расположена параллельно кривой K ; относительная скорость v_r и относительное ускорение ω_r , смещаясь вместе со средой, также остаются себе параллельными.

Построим элементарные перемещения $\overline{MM'_1}$, $\overline{MM_1}$, $\overline{MM'}$ и $\overline{M'M'_1}$ и заметим, что в данном случае перемещение $\overline{M'M'_1}$ не только равно по величине, но и параллельно перемещению $\overline{MM_1}$. Применим к этим перемещениям формулу (2), выведенную в § 96. Рассматривая про-



Черт. 188.



Черт. 189.

межуток времени Δt как малую величину первого порядка малости, будем иметь:

$$\overline{MM'_1} = \mathbf{v} \Delta t + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} (\Delta t)^2 + \mathbf{a}_3,$$

$$\overline{MM_1} = \mathbf{v}_r \Delta t + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_r (\Delta t)^2 + \mathbf{b}_3,$$

$$\overline{MM'} = \mathbf{v}_e \Delta t + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_e (\Delta t)^2 + \mathbf{c}_3,$$

где $\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3, \mathbf{c}_3$ — векторы третьего порядка малости. Так как перемещение $\overline{M'M'_1}$ равно перемещению $\overline{MM_1}$, то

$$\overline{M'M'_1} = \mathbf{v}_r \Delta t + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_r (\Delta t)^2 + \mathbf{b}_3.$$

Из $\Delta MM'M'_1$ имеем:

$$\overline{MM'_1} = \overline{MM'} + \overline{M'M'_1}$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \Delta t + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} (\Delta t)^2 + \mathbf{a}_3 &= \\ &= \mathbf{v}_e \Delta t + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_e (\Delta t)^2 + \mathbf{c}_3 + \mathbf{v}_r \Delta t + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_r (\Delta t)^2 + \mathbf{b}_3. \end{aligned} \quad (1)$$

По теореме сложения скоростей имеем:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r,$$

откуда по умножении на Δt получаем:

$$\mathbf{v} \Delta t = \mathbf{v}_e \Delta t + \mathbf{v}_r \Delta t.$$

Следовательно, в равенстве (1) члены, содержащие скорости \mathbf{v}_e и \mathbf{v}_r , сокращаются. Введем еще для краткости обозначение

$$\mathbf{c}_3 + \mathbf{b}_3 - \mathbf{a}_3 = \mathbf{k}_3$$

(где \mathbf{k}_3 — вектор третьего порядка малости), будем иметь:

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_e (\Delta t)^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_r (\Delta t)^2 + \mathbf{k}_3.$$

Разделим обе части этого равенства на $\frac{1}{2} (\Delta t)^2$ и обозначим вектор \mathbf{k}_3 , деленный на $\frac{1}{2} (\Delta t)^2$, через \mathbf{k}_1 (это — вектор первого порядка малости). Следовательно:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r + \mathbf{k}_1.$$

Переходим теперь к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. Так как

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\mathbf{k}_1] = 0,$$

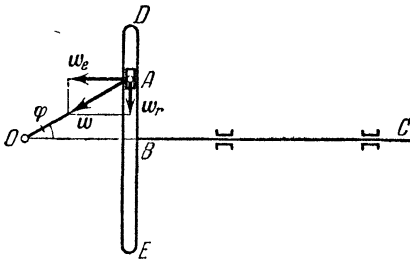
то в пределе получаем:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r,$$

т. е. абсолютное ускорение равно сумме переносного и относительного ускорений.

Другими словами, *абсолютное ускорение есть диагональ параллелограмма, построенного на переносном и относительном ускорениях* (черт. 188). Упомянутый параллелограмм называется *параллелограммом ускорений*.

Пример 41. Механизм состоит из кривошипа OA (черт. 190), вращающегося вокруг неподвижной оси O , и из горизонтального стержня BC , совершающего поступательное возвратное движение в горизонтальном направлении; в конце кривошипа имеется ползун, скользящий вдоль вертикальной кулисы DE , прикрепленной к стержню BC ; $OA = a$. Кривошип вращается равномерно с угловой скоростью ω ; найти ускорение стержня BC .



Черт. 190.

Так как стержень BC движется поступательно, то все его точки, а также точки кулисы DE имеют одинаковое ускорение; это общее для всех точек ускорение и требуется определить.

Найдем ускорение той точки кулисы DE , с которой в данный момент совпадает конец кривошипа A . Для этой цели рассматриваем абсолютное движение точки A как слагающееся из переносного движения вместе с кулисой DE и из относительного движения по отношению к этой кулиссе. Требуется определить переносное ускорение точки A .

Абсолютное ускорение точки A нам известно: так как кривошип OA вращается равномерно, то оно состоит из одной лишь центростремительной составляющей, т. е. оно равно

$$\omega = a\omega^2$$

и направлено от точки A к точке O .

Имея в виду, что движение кулисы DE есть движение поступательное, мы можем воспользоваться теоремой сложения ускорений в том виде, как она только что была выведена. Строим параллелограмм ускорений, причем замечаем, что переносное ускорение w_e направлено горизонтально, а относительное ускорение w_r направлено вдоль кулисы DE . Из параллелограмма ускорений выводим:

$$w_e = w \cos \varphi = a\omega^2 \cos \varphi,$$

где φ есть угол поворота кривошипа OA (черт. 190). Это и есть искомое ускорение стержня BC .

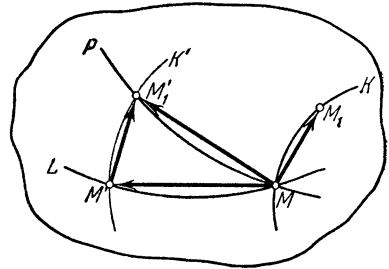
Конечно, этот результат можно было бы получить и без помощи теоремы сложения ускорений. Предлагаем читателю проверить этот результат при помощи метода проекций, изложенного в § 90.

§ 100. Теорема сложения ускорений в том случае, когда переносное движение есть вращение вокруг неподвижной оси. Добавочное или кориолисово ускорение

Обратимся теперь к рассмотрению того случая, когда переносное движение среды есть вращение вокруг неподвижной оси.

Чтобы выяснить зависимость между абсолютным, относительным и переносным ускорениями, будем поступать так же, как в предыдущем параграфе.

Представим себе неизменяемую среду, вращающуюся вокруг неподвижной оси, и точку M , движущуюся внутри среды (черт. 191). Положим, что в момент t среда и точка M занимают то положение, которое показано на чертеже.



Черт. 191.

Построим положение M'_t , занимаемое точкой M в момент $t + \Delta t$ в ее абсолютном движении. Заметим при этом, что теперь кривая K' (смещенное положение относительной траектории K) расположена, вообще говоря, непараллельно кривой K . Если среда, вращаясь вокруг своей оси, повернулась за время Δt на угол $\Delta\varphi$, то и относительная траектория K , двигаясь вместе со средой, повернулась за время Δt вокруг оси вращения среды на тот же угол. Следовательно, кривая K' получается поворотом кривой K вокруг оси вращения среды на угол $\Delta\varphi$. Относительная скорость v_r и относительное ускорение w_r , перемещаясь вместе со средой, также поворачиваются за время Δt вокруг оси вращения среды на угол $\Delta\varphi$; смещенную относительную скорость и смещенное относительное ускорение обозначим через v'_r и w'_r .

Построив элементарные перемещения $\overline{MM'_1}$, $\overline{MM_1}$, $\overline{MM'}$ и $\overline{M'M'_1}$, будем иметь:

$$\overline{MM'_1} = \mathbf{v} \Delta t + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} (\Delta t)^2 + \mathbf{a}_3,$$

$$\overline{MM_1} = \mathbf{v}_r \Delta t + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_r (\Delta t)^2 + \mathbf{b}_3,$$

$$\overline{MM'} = \mathbf{v}_e \Delta t + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_e (\Delta t)^2 + \mathbf{c}_3,$$

$$\overline{M'M'_1} = \mathbf{v}'_r \Delta t + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}'_r (\Delta t)^2 + \mathbf{b}'_3,$$

где \mathbf{a}_3 , \mathbf{b}_3 , \mathbf{c}_3 — векторы третьего порядка малости; \mathbf{b}'_3 есть вектор \mathbf{b}_3 , повернутый вокруг оси вращения среды на угол $\Delta\varphi$.

Из $\triangle MM'M'_1$ имеем:

$$\overline{MM'_1} = \overline{MM'} + \overline{M'M'_1}$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \Delta t + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} (\Delta t)^2 + \mathbf{a}_3 &= \\ &= \mathbf{v}_e \Delta t + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_e (\Delta t)^2 + \mathbf{c}_3 + \mathbf{v}'_r \Delta t + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}'_r (\Delta t)^2 + \mathbf{b}'_3. \end{aligned} \quad (1)$$

По теореме сложения скоростей имеем:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r,$$

откуда

$$\mathbf{v} \Delta t = \mathbf{v}_e \Delta t + \mathbf{v}_r \Delta t.$$

Вычитая почленно это равенство из равенства (1) и вводя для краткости обозначение

$$\mathbf{c}_3 + \mathbf{b}'_3 - \mathbf{a}_3 = \mathbf{k}_3$$

(где \mathbf{k}_3 — вектор третьего порядка малости), будем иметь:

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_e (\Delta t)^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}'_r (\Delta t)^2 + (\mathbf{v}'_r - \mathbf{v}_r) \Delta t + \mathbf{k}_3.$$

Разделив обе части этого равенства на $\frac{1}{2} (\Delta t)^2$ и обозначив вектор \mathbf{k}_3 , деленный на $\frac{1}{2} (\Delta t)^2$, через \mathbf{k}_1 (это — вектор первого порядка малости), находим:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}'_r + 2 \frac{\mathbf{v}'_r - \mathbf{v}_r}{\Delta t} + \mathbf{k}_1.$$

Перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. Замечая, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\boldsymbol{\omega}'_r] = \boldsymbol{\omega}_r, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\mathbf{k}_1] = 0$$

и вводя обозначение

$$\omega_c = 2 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{v}'_r - \mathbf{v}_r}{\Delta t} \right],$$

получим:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_c.$$

Величина $\boldsymbol{\omega}_c$ называется *добавочным* или *кориолисовым ускорением*.

Итак, *если переносное движение есть вращение вокруг неподвижной оси, то абсолютное ускорение равно векторной сумме трех ускорений: переносного, относительного и кориолисова.*

Нам остается вычислить величину кориолисова ускорения и определить его направление.

Покажем, что как величина, так и направление кориолисова ускорения могут быть найдены при помощи следующего простого построения.

Представим себе ось вращения среды; назовем ее осью z (черт. 192). От некоторой точки O , лежащей на оси z , отложим вектор \overline{OA} , равный относительной скорости \mathbf{v}_r , и найдем вращательную (вокруг оси z) скорость той точки A среды, которая совпадает с концом A построенного вектора; обозначим эту вращательную скорость буквой \mathbf{u} .

Мы покажем, что

$$\omega_c = 2\mathbf{u},$$

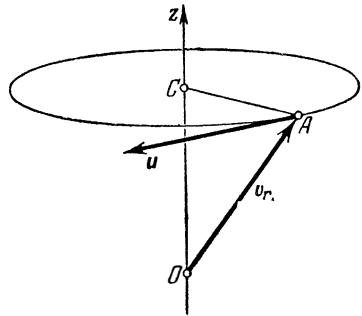
т. е. *кориолисово ускорение $\boldsymbol{\omega}_c$ равно удвоенной вращательной (вокруг оси z) скорости точки A .*

В самом деле, найдем скорость \mathbf{u} .

Для этого построим положение точки среды A в момент $t + \Delta t$. Так как среда повернулась за время Δt на угол $\Delta\varphi$, то мы получим смещенное положение A' точки A , повернув радиус CA окружности, описываемой точкой A , на угол $\Delta\varphi$ в сторону вращения среды (черт. 193). Вектор $\overline{OA'}$ равен смещенной относительной скорости \mathbf{v}'_r .

Скорость \mathbf{u} мы можем найти как векторную производную радиуса-вектора точки A по времени, или, что то же, как предел отношения приращения радиуса-вектора точки A за время Δt к этому промежутку времени. Примем за радиус-вектор точки A вектор \overline{OA} ; в таком случае приращением этого радиуса-вектора за время Δt будет вектор $\overline{AA'}$. Следовательно,

$$\mathbf{u} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\overline{AA'}}{\Delta t} \right].$$



Черт. 192.

Но из треугольника OAA' следует:

$$\overline{AA'} = \overline{OA'} - \overline{OA} = \mathbf{v}'_r - \mathbf{v}_r.$$

Следовательно,

$$\mathbf{u} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{v}'_r - \mathbf{v}_r}{\Delta t} \right].$$

Сравнивая эту формулу с выражением кориолисова ускорения

$$\boldsymbol{\omega}_c = 2 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{v}'_r - \mathbf{v}_r}{\Delta t} \right],$$

получаем:

$$\boldsymbol{\omega}_c = 2\mathbf{u}.$$

Пользуясь полученным результатом, вычислим величину кориолисова ускорения, вводя в расчет угловую скорость вращения среды.

Обозначая угловую скорость среды буквой ω , имеем (черт. 192):

$$\mathbf{u} = CA \cdot \omega.$$

Но из треугольника OAC следует:

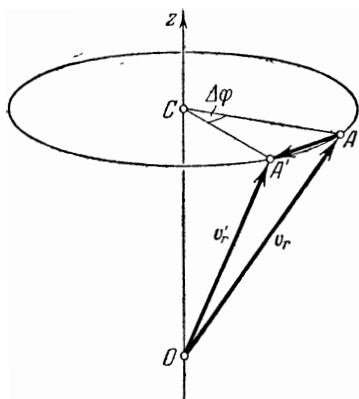
$$CA = v_r \sin(\mathbf{v}_r, z).$$

Следовательно,

$$\mathbf{u} = v_r \omega \sin(\mathbf{v}_r, z).$$

Удваивая этот результат, получим для величины кориолисова ускорения формулу

$$\boldsymbol{\omega}_c = 2v_r \omega \sin(\mathbf{v}_r, z).$$



Черт. 193.

Что касается направления кориолисова ускорения $\boldsymbol{\omega}_c$, важно отметить, что оно направлено перпендикулярно к относительной скорости \mathbf{v}_r и к оси вращения среды z .

Пример 42. Кулисса OB (черт. 194) равномерно вращается вокруг оси O (в сторону, указанную стрелкой) с угловой скоростью ω ; ползун M движется вдоль кулисы OB от O к B с постоянной относительной (по отношению к кулиссе) скоростью, модуль которой $v_r = c$. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение ползуна M в тот момент, когда $MO = a$.

Рассматриваем абсолютное движение точки M как составное из переносного движения вместе с кулиссой OB и из относительного движения по отношению к кулиссе.

Для нахождения абсолютной скорости точки M пользуемся теоремой сложения скоростей. Найдем переносную скорость точки M как вращательную вокруг оси O ; она равна по величине

$$v_e = a\omega$$

и направлена перпендикулярно к кулиссе OB . Абсолютная скорость v есть диагональ прямоугольника, построенного на относительной и переносной скоростях. Следовательно,

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{c^2 + a^2\omega^2}.$$

Переходя к вычислению абсолютного ускорения точки M , обращаемся к теореме сложения ускорений. Так как переносное движение есть вращение вокруг неподвижной оси O , то абсолютное ускорение точки M равно сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений. Вычисляем каждое из этих ускорений в отдельности. Так как относительное движение точки M есть движение прямолинейное и равномерное, то

$$w_r = 0.$$

Так как переносное движение есть равномерное вращение, то переносное ускорение w_e есть ускорение центростремительное; оно равно по величине

$w_e = a\omega^2$ и направлено к точке O . Наконец, чтобы найти кориолисово ускорение w_c , откладываем от точки O отрезок OA , изображающий относительную скорость v_r , и находим вращательную (вокруг оси O) скорость u точки A ; она равна по величине

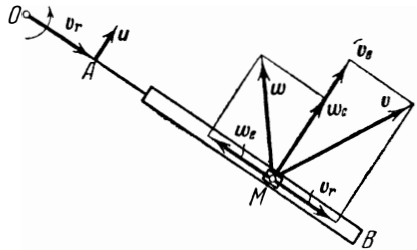
$$u = v_r\omega = c\omega$$

и направлена перпендикулярно к кулиссе OB . Следовательно, кориолисово ускорение численно равно

$$w_c = 2c\omega$$

и также направлено перпендикулярно к кулиссе OB . Абсолютное ускорение w есть диагональ прямоугольника, построенного на переносном и кориолисовом ускорениях. Следовательно,

$$w = \sqrt{w_e^2 + w_c^2} = \sqrt{a^2\omega^4 + 4c^2\omega^3}.$$



Черт. 194.

§ 101. Проекция скорости и ускорения на оси полярных координат

В некоторых случаях представляется удобным применять для определения плоского движения точки не декартовы, а полярные координаты; об этом уже было сказано несколько слов в § 79. Для определения скорости и ускорения плоского движения точки в тех случаях, когда это движение задано в полярных координатах, можно с пользой применить теорему сложения скоростей и теорему сложения ускорений.

Положим, что плоское движение точки M (черт. 195) задано уравнениями движения в полярных координатах

$$r = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t),$$

и остановимся сначала на вычислении скорости точки M .

Продолжим радиус-вектор точки M в сторону возрастающих r и проведем через точку M прямую, перпендикулярную к радиусу-вектору, которой припишем направление в сторону возрастающих φ . Построенные таким образом при точке M оси называются *осями полярных координат* (заметим, что оси полярных координат — в отличие от осей декартовых координат — изменяют свое направление при переходе от точки к точке). Обозначим проекции скорости v точки M на оси r и φ через v_1 и v_2 . Очевидно, что если

мы сумеем вычислить проекции v_1 и v_2 , то мы будем знать как величину, так и направление скорости v . Таким образом вопрос об определении скорости точки M сводится к вычислению проекций этой скорости на оси полярных координат.

Для вычисления проекций v_1 и v_2 воспользуемся теоремой сложения скоростей. Разложим абсолютное движение точки M на два составляющих движения: на переносное движение вместе с радиусом-вектором r и на относительное движение вдоль этого радиуса-вектора.

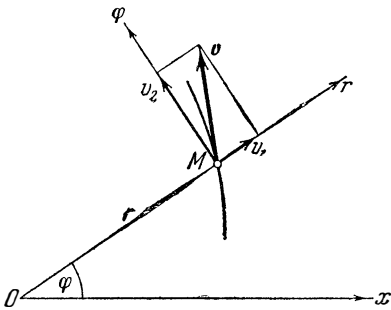
Для этого вообразим прямолинейную кулису, которая вращается вокруг полюса O и по направлению постоянно совпадает с радиусом-вектором r . Переносное движение точки M вместе с этой воображаемой кулисой будем называть ее переносным движением вместе с радиусом-вектором r ; относительное же движение точки M вдоль кулисы назовем ее относительным движением вдоль радиуса-вектора. По теореме сложения скоростей абсолютная скорость v точки M равна диагонали параллелограмма, построенного на относительной и переносной скоростях v_r и v_e .

Относительная скорость v_e точки M по отношению к ее радиусу-вектору (или по отношению к воображаемой кулиссе) направлена по оси r и равна по величине

$$v_e = r'$$

(так как r есть пройденный путь в относительном движении); переносная же скорость v_r , как вращательная вокруг точки O , направлена по оси φ и равна по величине

$$v_r = r\varphi'$$



Черт. 195.

(так как φ есть угол поворота во вращательном движении радиуса-вектора или воображаемой кулисс).

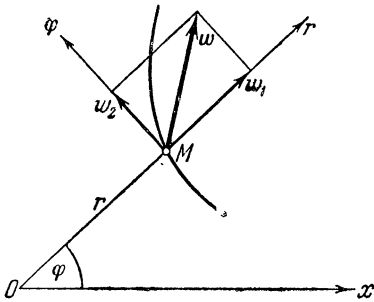
Имея в виду, что скорости v_r и v_φ направлены соответственно по осям r и φ , мы заключаем, что параллелограмм, построенный на этих скоростях, совпадает с параллелограммом, построенным на черт. 195 на отрезках v_1 и v_2 . Следовательно,

$$v_1 = v_r, \quad v_2 = v_\varphi,$$

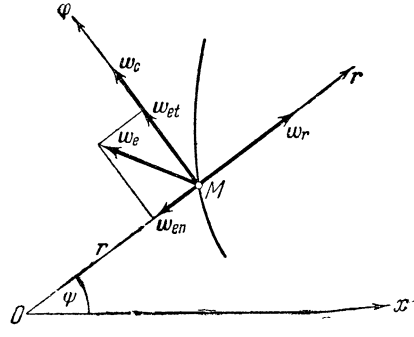
откуда

$$v_1 = r', \quad v_2 = r\varphi'. \quad (1)$$

Таковы формулы, определяющие проекции скорости на оси полярных координат.



Черт. 196.



Черт. 197.

Определив проекции v_1 и v_2 по только что написанным формулам, находим величину скорости v по формуле

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{r'^2 + r^2\varphi'^2}.$$

Перейдем к нахождению ускорения точки M .

Обозначим проекции ускорения w точки M на оси r и φ через w_1 и w_2 (черт. 196) и займемся вычислением этих проекций.

Разложим опять абсолютное движение точки M на переносное (вращательное) движение вместе с радиусом-вектором r и на относительное движение вдоль радиуса-вектора. По теореме сложения ускорений абсолютное ускорение w точки M складывается из трех ускорений: относительного ускорения w_r , переносного ускорения w_e и кориолисова ускорения w_c :

$$w = w_r + w_e + w_c.$$

Найдем каждое из этих трех составляющих ускорений (черт. 197)..

Относительное ускорение ω_r направлено по оси r и равно по величине

$$\omega_r = r''.$$

Переносное ускорение ω_e в свою очередь складывается из касательной составляющей ω_{et} , направленной по оси φ , и нормальной составляющей ω_{en} , направленной по отрицательной оси r (к центру вращения O): величины этих составляющих равны

$$\omega_{et} = r\varphi'', \quad \omega_{en} = r\varphi'^2.$$

Наконец, кориолисово ускорение направлено по оси φ и равно по величине

$$\omega_c = 2v_r\varphi' = 2r'\varphi'.$$

Спроектируем теперь абсолютное ускорение ω , а также его составляющие ω_r , ω_e , ω_c на оси r и φ . Имея в виду, что проекция суммы векторов равна сумме проекций составляющих, получим:

$$\omega_1 = r'' - r\varphi'^2, \quad \omega_2 = r\varphi'' + 2r'\varphi'. \quad (2)$$

Этими формулами определяются проекции ускорения на оси полярных координат. Величину ускорения найдем по формуле

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

Пример 43. Движение точки задано в полярных координатах уравнениями

$$r = at^2, \quad \varphi = bt^2,$$

где a и b — постоянные величины. Найти траекторию, скорость и ускорение точки.

Исключая время из заданных уравнений движения, получаем:

$$r = \frac{a}{b} \varphi.$$

Это — уравнение архимедовой спирали.

Переходя к определению скорости, находим проекции скорости v на оси полярных координат по формулам (1):

$$v_1 = r' = 2at, \quad v_2 = r\varphi' = 2abt^2.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 2at \sqrt{1 + b^2 t^4}.$$

Далее находим проекции ускорения ω на оси полярных координат по формулам (2):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= r'' - r\varphi'^2 = 2a - 4ab^2 t^4, \\ \omega_2 &= r\varphi'' + 2r'\varphi' = 2abt^2 + 8abt^2 = 10abt^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{(2a - 4ab^2 t^4)^2 + 100a^2 b^2 t^4} = 2a \sqrt{1 + 21b^2 t^4 + 4b^4 t^8}.$$

§ 102. Относительное движение твердого тела

Представим себе твердое тело A , совершающее некоторое движение в пространстве, а также движущуюся неизменяемую среду B . Затем представим себе двух наблюдателей: одного, неподвижного по отношению к среде B и движущегося вместе со средой, и другого — неподвижного в пространстве. Движение тела A , наблюдаемое наблюдателем, движущимся вместе со средой, мы называем *относительным движением* тела A по отношению к среде B ; движение же тела A , наблюдаемое неподвижным наблюдателем, мы называем *абсолютным движением* тела A . Движение тела A вместе со средой B мы назовем *переносным движением* тела A .

Абсолютное движение тела A называется *составным* из движений относительного и переносного: последние два движения получают наименование *составляющих* движений.

Если мы отметим в теле A какую-либо точку M , то абсолютное движение этой точки также можно рассматривать как составное из относительного движения по отношению к среде B и из переносного движения вместе со средой. Абсолютная скорость и абсолютное ускорение точки M найдутся при помощи теоремы сложения скоростей и теоремы сложения ускорений.

Понятие составного движения твердого тела можно распространить на случай какого угодно числа составляющих движений.

Например, представим себе твердое тело A и две неизменяемые среды B и C , движущиеся в пространстве. Абсолютное движение тела A мы назовем *составным* из следующих трех движений: относительного движения тела A по отношению к среде B , относительного движения среды B по отношению к среде C и переносного движения вместе со средой C ; эти три движения называются *составляющими* движениями.

Точно так же распространяется понятие составного движения на случай какого угодно числа составляющих движений.

ГЛАВА XVII

ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

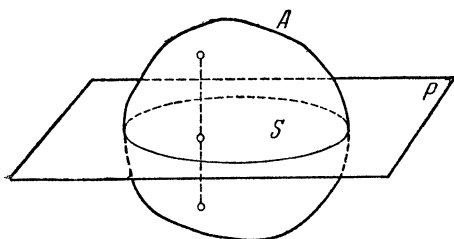
§ 103. Разложение плоского движения на поступательное движение и на вращение. Уравнения плоского движения. Угловая скорость и угловое ускорение плоской фигуры

В главе XV мы рассмотрели два простейших типа движения твердого тела: движение поступательное и вращение вокруг неподвижной оси. Перейдем теперь к изучению других более сложных случаев движения твердого тела. В настоящей главе мы рассмотрим так называемое плоско-параллельное движение твердого тела.

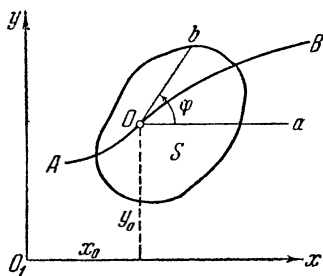
Движение твердого тела A (черт. 198) называется *параллельным неподвижной плоскости*, или, короче, *плоско-параллельным* в том случае, если плоская фигура S , получаемая в сечении тела некоторой неподвижной плоскостью P , во все время движения остается в этой плоскости.

Очевидно, что вращение твердого тела вокруг неподвижной оси есть частный случай плоско-параллельного движения. Плоско-параллельное движение твердого тела представляет значительный интерес с точки зрения приложений; в большинстве существующих механизмов отдельные части механизма совершают плоско-параллельное движение.

Движение тела A , движущегося параллельно неподвижной плоскости P , вполне определяется движением плоской фигуры S ; все



Черт. 198.



Черт. 199.

точки тела, лежащие на одном перпендикуляре к плоскости P , движутся тождественным образом.

Ввиду этого мы можем ограничиться в дальнейшем изучением движения плоской фигуры S в плоскости, или так называемого *плоского движения*.

Покажем, что *плоское движение неизменяемой фигуры можно рассматривать как составное из поступательного движения и из вращения*.

Представим себе плоскую фигуру S (черт. 199), совершающую некоторое движение в плоскости чертежа. Возьмем на этой фигуре какую-нибудь (произвольную) точку, которую обозначим буквой O и назовем *полюсом*. Положим, что при движении фигуры S полюс O описывает кривую AB . Затем представим себе неизменяемую среду, которая движется *поступательно* вместе с полюсом O . Фигура S , совершая свое абсолютное движение в данной плоскости, вместе с тем совершает некоторое относительное движение по отношению к только что упомянутой среде; это относительное движение по отношению к среде, движущейся поступательно вместе с полюсом O , условимся называть для сокращения речи «*относительным движением по отношению к полюсу O* ». Таким образом абсолютное движение фигуры S представляется как составное из переносного движения

вместе с полюсом O и из относительного движения по отношению к этому полюсу.

Переносное движение вместе с полюсом O есть движение поступательное; так как в относительном движении полюс O остается в (относительном) покое, то относительное движение фигуры S есть вращение вокруг точки O (или, точнее, вокруг оси, проходящей через точку O и перпендикулярной к плоскости чертежа). Итак, абсолютное движение фигуры S представляется как составное из поступательного движения вместе с полюсом O и из вращения вокруг этого полюса.

Поступательная часть движения фигуры S вполне определяется движением самого полюса O . Обозначим координаты точки O , отнесенные к прямоугольным осям x и y , через x_0 , y_0 ; движение полюса O , а вместе с тем поступательная часть движения плоской фигуры вполне определяется уравнениями движения в прямоугольных координатах:

$$x_0 = f_1(t), \quad y_0 = f_2(t). \quad (1)$$

Чтобы определить вращательную часть движения фигуры S , составим уравнение вращения. Для этого проведем через полюс O две полупрямые Oa и Ob , из которых первая остается в относительном покое (т. е. движется поступательно вместе с полюсом O), а вторая связана с фигурой S и вместе с нею вращается вокруг полюса O^1). Угол между полупрямыми Oa и Ob обозначим через φ и назовем углом поворота 2). Вращение фигуры S вокруг полюса O определяется уравнением вращения

$$\varphi = f_3(t). \quad (2)$$

Уравнениями (1) и (2) вполне определяется движение фигуры S . Назовем эти уравнения *уравнениями плоского движения*.

Угловая скорость ω и угловое ускорение ε вращения фигуры S вокруг полюса O определяются известными формулами;

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

За полюс O мы выбрали совершенно произвольную точку плоской фигуры; любая точка плоской фигуры может быть взята за полюс. Принимая различные точки плоской фигуры за полюсы, мы получаем бесчисленное множество разложений плоского движения на поступательную и вращательную части. Конечно, с изменением полюса изменяется поступательная часть движения плоской фигуры.

¹) Полупрямая Oa остается себе параллельной во все время движения; на черт. 199 она проведена параллельно неподвижной оси x .

²) Угол поворота φ будем считать положительным, когда он отложен от полупрямой Oa против направления вращения часовой стрелки.

Мы покажем теперь, что *вращательная часть движения плоской фигуры не зависит от выбора полюса*.

Представим себе плоскую фигуру S , совершающую некоторое движение в плоскости чертежа (черт. 200). Возьмем за полюс точку O , описывающую кривую AB , и составим уравнение вращения вокруг этого полюса. Для этого строим угол поворота φ , проведя полупрямую Oa , которая движется поступательно вместе с полюсом O , и полупрямую Ob , связанную с фигурой S ; получаем уравнение вращения вокруг полюса O

$$\varphi = f_3(t).$$

Теперь возьмем за полюс какую-нибудь точку O_1 , описывающую при движении фигуры S кривую A_1B_1 . Составим уравнение вращения вокруг этого нового полюса.

Чтобы построить угол поворота вокруг полюса O_1 , мы должны провести полупрямые O_1a_1 и O_1b_1 , из которых первая движется поступательно вместе с полюсом O_1 , а вторая связана с фигурой S . Так как выбор этих полупрямых находится в нашем распоряжении, то проведем $O_1a_1 \parallel Oa$ и $O_1b_1 \parallel Ob$. В таком случае *во все время движения* полупрямые Oa и O_1a_1 будут оставаться параллельными (ибо обе движутся поступательно), а также полупрямые Ob и O_1b_1 будут оставаться параллельными (ибо обе связаны с фигурой S). Обозначая угол между полупрямыми O_1a_1 и O_1b_1 через φ_1 , мы будем иметь во все время движения:

$$\varphi_1 = \varphi$$

и, следовательно,

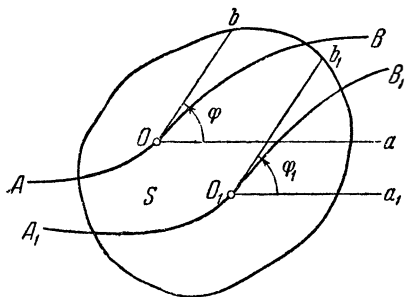
$$\varphi_1 = f_3(t).$$

Итак, уравнение вращения вокруг полюса O_1 тождественно с уравнением вращения вокруг полюса O , т. е. вращательная часть движения плоской фигуры S не зависит от выбора полюса.

Обозначая угловую скорость и угловое ускорение вращения вокруг полюса O через ω и ε , а угловую скорость и угловое ускорение вращения вокруг полюса O_1 через ω_1 и ε_1 , имеем:

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon,$$

т. е. угловая скорость и угловое ускорение плоской фигуры в ее



Черт. 200.

вращении вокруг какого-либо полюса не зависят от выбора полюса. Общие для всех полюсов угловую скорость ω и угловое ускорение ϵ мы будем называть просто *угловой скоростью и угловым ускорением плоской фигуры* (не делая при этом никаких указаний на то, какая точка фигуры берется за полюс).

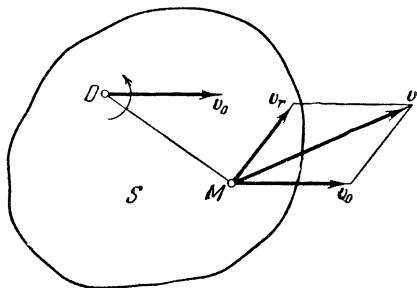
§ 104. Скорости точек плоской фигуры. Мгновенный центр скоростей

Обратимся к рассмотрению скоростей различных точек плоской фигуры в данный момент.

Представим себе движение плоской фигуры S (черт. 201) разложенным на переносное движение вместе с полюсом O и относительное движение по отношению к этому полюсу. Скорость какой-либо точки M плоской фигуры может быть найдена при помощи теоремы сложения скоростей; абсолютная скорость точки M равна сумме ее переносной и относительной скоростей.

Так как в данном случае переносное движение есть движение поступательное, то переносная скорость точки M равна скорости полюса O ; обозначим эту скорость через v_o . А так как относительное движение есть вращение вокруг полюса O , то относительная скорость v_r есть вращательная скорость вокруг этого полюса; ее величина равна

$$v_r = OM \cdot \omega,$$



Черт. 201.

где ω есть абсолютная величина угловой скорости плоской фигуры, и она направлена перпендикулярно к отрезку MO в сторону вращения фигуры S (на чертеже направление вращения фигуры S указано стрелкой).

Абсолютная скорость v точки M есть диагональ параллелограмма, построенного на скоростях v_o и v_r .

Итак, мы получаем следующую теорему: *скорость любой точки плоской фигуры равна векторной сумме скорости полюса и вращательной скорости данной точки вокруг этого полюса.*

Пользуясь этим результатом, покажем, что *во всякий момент существует точка плоской фигуры, скорость которой в этот момент равна нулю.*

Представим себе плоскую фигуру S , совершающую некоторое движение в плоскости чертежа (черт. 202). Возьмем за полюс точку O и отметим скорость полюса v_o ; абсолютную величину угловой

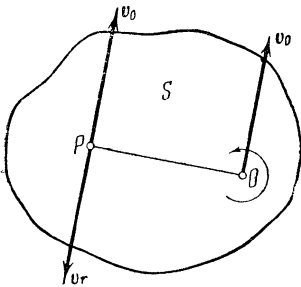
скорости фигуры S обозначим через ω ; направление вращения вокруг полюса O указано на чертеже стрелкой.

Отложим от точки O перпендикулярно к скорости v_o отрезок $OP = \frac{v_o}{\omega}$ в такую сторону, чтобы для наблюдателя, смотрящего от P к O , скорость полюса представлялась направленной в сторону вращения фигуры S (на черт. 202 против часовой стрелки). Легко видеть, что скорость точки P равна нулю.

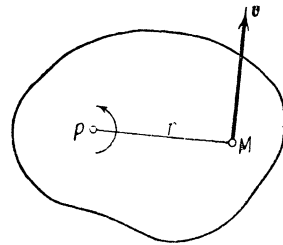
В самом деле, вращательная скорость v_r точки P вокруг полюса O равна по величине.

$$v_r = OP \cdot \omega = \frac{v_o}{\omega} \omega = v_o,$$

направление же этой вращательной скорости, как видно из чертежа, противоположно направлению скорости v_o . Следовательно, абсолютная скорость точки P , равная сумме скоростей v_o и v_r , равна нулю.



Черт. 202.



Черт. 203.

Точка P , скорость которой в данный момент равна нулю, называется *мгновенным центром скоростей*¹⁾.

Представим себе теперь, что мгновенный центр скоростей P взят за полюс. Применяя теорему, установленную в начале этого параграфа, и имея в виду, что скорость полюса теперь равна нулю, мы получаем следующий результат: *скорость любой точки плоской фигуры есть вращательная скорость вокруг мгновенного центра скоростей*. Обозначая расстояние PM точки M от мгновенного центра скоростей P буквой r (черт. 203), заключаем, что скорость v точки M равна по величине

$$v = r\omega$$

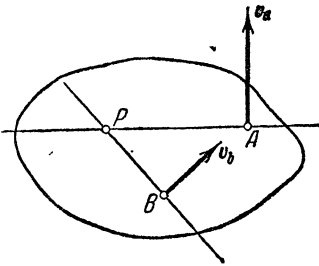
¹⁾ Заметим, что если $\omega = 0$, то $OP = \frac{v_o}{\omega} = \infty$ и, следовательно, в этом случае мгновенного центра скоростей не существует (или он находится в бесконечности). Если $\omega = 0$, то вращательные скорости всех точек плоской фигуры вокруг полюса O равны нулю, откуда следует, что абсолютные скорости всех точек плоской фигуры равны скорости полюса. Другими словами, в случае $\omega = 0$ все точки плоской фигуры имеют равные скорости.

и направлена перпендикулярно к отрезку PM в сторону вращения плоской фигуры.

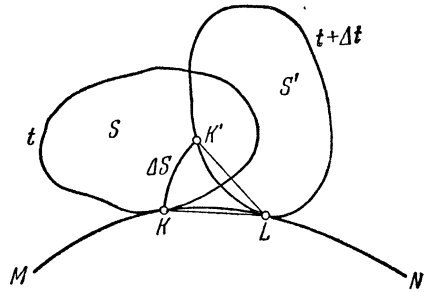
Итак, в каждый данный момент скорости точек плоской фигуры таковы, как будто бы фигура совершала вращение вокруг неподвижной точки P ; поэтому-то точка P и называется «центром скоростей». Словом «мгновенный» мы подчеркиваем, что точка P является центром скоростей лишь для данного момента; различным моментам времени соответствуют различные мгновенные центры скоростей.

Мы видим, что скорости всех точек плоской фигуры вполне определены, если для данного момента известны мгновенный центр скоростей P и угловая скорость фигуры ω .

Что касается мгновенного центра скоростей, то весьма часто он может быть найден следующим простым способом. Из черт. 203



Черт. 204.



Черт. 205.

видно, что мгновенный центр скоростей P находится на перпендикуляре, восставленном в точке M к направлению ее скорости. Отсюда следует, что если известны направления скоростей v_a и v_b двух точек плоской фигуры A и B (черт. 204), то мгновенный центр скоростей P найдется в точке пересечения перпендикуляров, восставленных в точках A и B к направлениям скоростей v_a и v_b . Этим простым приемом часто удается построить мгновенный центр скоростей.

В приложениях нередко приходится иметь дело с движением плоской фигуры, периметр которой катится без скольжения по некоторой неподвижной кривой (например — подвижная шестерня, катящаяся по окружности неподвижной шестерни). И в этом случае легко определить мгновенный центр скоростей подвижной фигуры: он находится в точке касания катящегося периметра и неподвижной кривой. В самом деле, представим себе плоскую фигуру S , ограниченную произвольным периметром, который катится без скольжения по неподвижной кривой MN (черт. 205). Отметим положения S и S' , занимаемые плоской фигурой в моменты t и $t + \Delta t$; в момент t точкой касания подвижной и неподвижной кривых является точка K , в момент $t + \Delta t$ точкой касания служит точка L . Покажем, что

скорость точки K в момент t равна нулю. В момент $t + \Delta t$ точка K катящегося периметра занимает положение K' ; за время Δt она прошла путь KK' , который обозначим через Δs . Обозначая скорость точки K в момент t через v , имеем:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right].$$

Так как фигура S катится по кривой MN без скольжения, то дуга $K'L$ равна дуге KL . Проведем хорды KL и $K'L$; пренебрегая малыми величинами высших порядков малости, мы можем считать, что эти хорды также равны. Пренебрегая опять малыми величинами высших порядков малости, мы можем рассматривать дугу KK' как дугу окружности радиуса $KL = K'L$ с центром в точке L . В таком случае, обозначая угол между хордами KL и $K'L$ через α , будем иметь приближенное равенство:

$$\Delta s = KL \cdot \alpha.$$

Будем теперь рассматривать промежуток времени Δt как малую величину первого порядка малости. Отрезок KL и угол α будут также малыми величинами первого порядка малости; дуга же Δs , как видно из последнего равенства, будет малой величиной второго порядка малости. Следовательно, отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ есть малая величина первого порядка малости, откуда следует, что

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right] = 0.$$

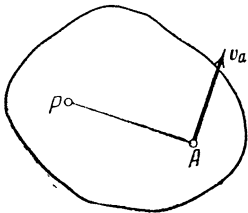
Итак, скорость точки K в момент t равна нулю. А это и значит, что точка K есть мгновенный центр скоростей для момента t .

В заключение этого параграфа заметим, что если мгновенный центр скоростей для данного момента известен, то для определения угловой скорости плоской фигуры достаточно знать величину скорости какой-либо одной точки фигуры. Положим, что нам известна скорость v_a точки A (черт. 206). Так как скорость v_a есть вращательная скорость вокруг мгновенного центра скоростей P , то

$$v_a = PA \cdot \omega,$$

где ω есть абсолютная величина искомой угловой скорости плоской фигуры. Отсюда

$$\omega = \frac{v_a}{PA}.$$



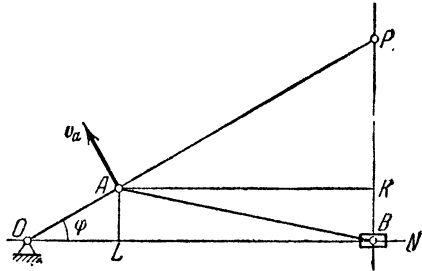
Черт. 206.

Итак, для определения абсолютной величины угловой скорости плоской фигуры достаточно разделить величину скорости какой-либо

одной точки фигуры на расстояние этой точки до мгновенного центра скоростей. Знак угловой скорости, определяемый стороной вращения, можно установить, зная расположение скорости данной точки по отношению к мгновенному центру скоростей.

Пример 44. Кривошипно-шатунный механизм состоит из кривошипа OA , вращающегося вокруг оси O , шатуна AB и ползуна B , скользящего по направляющей прямой ON (черт. 207): $OA = r$, $AB = l$. Кривошип OA вращается с угловой скоростью ω_1 . Найти мгновенный центр скоростей и угловую скорость ω_2 шатуна AB .

Нам известны направления скоростей двух точек шатуна A и B : скорость точки A перпендикулярна к кривошипу OA , а скорость точки B направлена по прямой ON . Восставим в точках A и B перпендикуляры к направлениям этих скоростей; точка пересечения P только что проведенных прямых и есть мгновенный центр скоростей шатуна.



Черт. 207.

Чтобы найти угловую скорость шатуна ω_2 , обратимся к скорости точки A . Так как точка A принадлежит кривошипу OA , то ее скорость v_a есть вращательная скорость вокруг точки O , и, следовательно:

$$v_a = OA \cdot \omega_1 = r\omega_1.$$

Но так как точка A принадлежит и шатуну AB , то ее скорость v_a в то же время должна быть вращательной скоростью вокруг точки P , т. е.

$$v_a = AP \cdot \omega_2,$$

откуда

$$\omega_2 = \frac{v_a}{AP} = \frac{r\omega_1}{AP}.$$

Затем, опуская из точки A перпендикуляры AK и AL на прямые BP и ON и обозначая $\angle AON$ (угол поворота кривошипа) буквой φ , имеем:

$$AP = \frac{AK}{\cos \varphi},$$

$$AK = LB = \sqrt{AB^2 - AL^2} = \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}$$

и, следовательно,

$$AP = \frac{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi}.$$

Окончательно получаем:

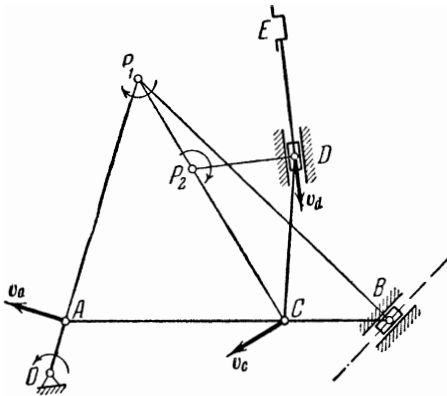
$$\omega_2 = \frac{r\omega_1 \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}.$$

После того как найдены мгновенный центр скоростей P и угловая скорость ω_2 , мы можем легко определить скорость любой точки шатуна AB , как вращательную скорость вокруг мгновенного центра P .

Пример 45. На вал O (черт. 208) насажен кривошип OA , соединенный с шатуном AB . На конце B шатун сочленен с ползуном, скользящим вдоль прямолинейной кулисы. В точке C шатун соединен шарнирно с тягой CD , передающей движение посредством ползуна D и вертикального штока DE золотнику E . Дана скорость v_a точки A ; требуется определить скорость золотника E .

Так как стержень DE движется поступательно, то скорость золотника E равна скорости точки D . Найдем эту скорость.

Сначала найдем скорость точки C . Для этого построим мгновенный центр скоростей P_1 шатуна AB . Направления скоростей точек A и B нам известны; мгновенный центр P_1 определится как точка пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках A и B к направлениям скоростей этих точек. Направление вращения шатуна AB вокруг мгновенного центра P_1 определяется направлением скорости v_a ; на черт. 208 направление вращения шатуна вокруг



Черт. 208.

мгновенного центра P_1 указано стрелкой. Скорость v_c точки C как вращательная скорость вокруг мгновенного центра P_1 направлена перпендикулярно к прямой P_1C в сторону вращения. Так как величины вращательных скоростей пропорциональны соответствующим радиусам, то

$$\frac{v_c}{v_a} = \frac{P_1C}{P_1A},$$

откуда

$$v_c = v_a \frac{P_1C}{P_1A}.$$

Определив скорость точки C , перейдем к точке D . Так как точка D принадлежит тяге CD , то скорость v_d этой точки есть вращательная скорость вокруг мгновенного центра скоростей тяги CD . Обозначим мгновенный центр скоростей тяги через P_2 . Направления скоростей точек C и D нам известны. Восставив перпендикуляры в точках C и D к направлениям этих скоростей, найдем мгновенный центр P_2 в точке их пересечения. Направление вращения тяги CD вокруг мгновенного центра P_2 мы определим, имея в виду уже известное нам направление скорости точки C ; направление этого вращения указано стрелкой на черт. 208. Теперь легко найдем величину скорости v_d точки D из соотношения

$$\frac{v_d}{v_c} = \frac{P_2D}{P_2C},$$

откуда получаем:

$$v_d = v_c \frac{P_2D}{P_2C}$$

или, подставляя найденную выше величину скорости v_c :

$$v_d = v_a \frac{P_1C}{P_1A} \cdot \frac{P_2D}{P_2C}.$$

Такова величина скорости ползуна D , а следовательно, и золотника E . Что касается направления этой скорости, то оно определяется направлением вращения тяги CD вокруг мгновенного центра P_2 ; при том положении механизма, которое изображено на черт. 208, скорость v_d направлена вниз.

Пример 46. На неподвижную ось O насажены неподвижная шестерня K радиуса a и вращающийся стержень OA длины $a + b$; на конце A этого стержня насажена подвижная шестерня L радиуса b , сцепленная с неподвижной шестерней K (черт. 209). Стержень OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_1 . Найдите угловую скорость ω_2 шестерни L .

Так как при вращении стержня OA подвижная шестерня L катится без скольжения по неподвижной шестерне K , то мгновенный центр скоростей P шестерни L находится в точке касания окружностей шестерен. Чтобы найти угловую скорость шестерни L , обращаемся к скорости v_a точки A . Так как точка A принадлежит к стержню OA , то

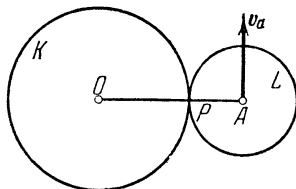
$$v_a = OA \cdot \omega_1 = (a + b) \omega_1.$$

Так как точка A принадлежит к шестерне L , то

$$v_a = PA \cdot \omega_2,$$

откуда

$$\omega_2 = \frac{v_a}{PA} = \frac{(a + b) \omega_1}{b}.$$



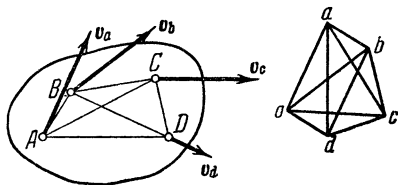
Черт. 209.

Точки, лежащие на окружности шестерни L , описывают эпициклоиды; рассматриваемое соединение зубчатых колес называется эпициклическим.

§ 105. План скоростей

Отметим скорости v_a, v_b, v_c, v_d точек A, B, C, D какой-либо движущейся плоской фигуры (черт. 210).

Из произвольной точки o отложим отрезки oa, ob, oc, od , изображающие по величине и направлению скорости v_a, v_b, v_c, v_d , и соединим точки a, b, c, d прямыми линиями. Полученное построение называется *планом скоростей*; отрезки oa, ob, oc, od будем называть лучами, а точки a, b, c, d — вершинами плана скоростей.



Черт. 210.

Итак, абсолютные скорости точек A, B, C, D изображаются лучами oa, ob, oc, od плана скоростей. Покажем, что *отрезок ab , соединяющий вершины a и b , изображает по величине и направлению вращательную скорость точки B вокруг точки A .*

В самом деле, примем точку A за полюс. В начале предыдущего параграфа было установлено, что скорость любой точки плоской фигуры равна сумме скорости полюса и вращательной скорости данной точки вокруг этого полюса. На основании этой теоремы, обозначая вращательную скорость точки B вокруг точки A через v_{ab} , имеем:

$$v_b = v_a + v_{ab}. \tag{1}$$

С одной стороны, из треугольника oab следует:

$$\overline{ob} = \overline{oa} + \overline{ab}$$

или

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{v}_a + \overline{ab}. \quad (2)$$

Сравнивая равенства (1) и (2), заключаем, что

$$\overline{ab} = \mathbf{v}_{ab}.$$

Совершенно так же убедимся, что

$$\overline{bc} = \mathbf{v}_b, \quad \overline{ac} = \mathbf{v}_{ac} \text{ и т. д.,}$$

где \mathbf{v}_{bc} , \mathbf{v}_{ac} и т. д. суть вращательные скорости точки C вокруг точки B , точки C вокруг точки A и т. д.

Обозначая абсолютную величину угловой скорости плоской фигуры через ω , мы заключаем, что

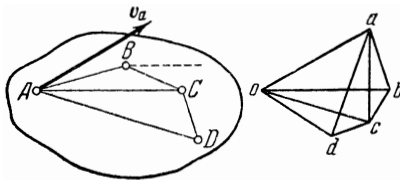
$$ab = AB \cdot \omega, \quad bc = BC \cdot \omega, \quad ac = AC \cdot \omega \text{ и т. д.};$$

направления же отрезков ab , bc , ac и т. д. соответственно перпендикулярны к отрезкам AB , BC , AC и т. д. Отсюда следует, что

фигура $abcd$ подобна фигуре $ABCD$ и повернута относительно этой последней на 90° .

Итак, отрезки, соединяющие вершины плана скоростей, перпендикулярны к отрезкам, соединяющим соответствующие точки плоской фигуры.

Последнее обстоятельство дает возможность построить план



Черт. 211.

скоростей, если известны величина и направление скорости одной точки и направление скорости другой точки плоской фигуры.

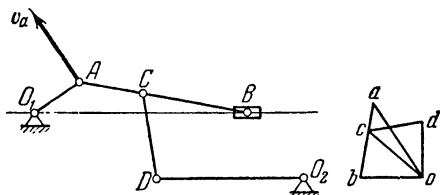
Положим, даны величина и направление скорости \mathbf{v}_a точки A и направление скорости точки B (черт. 211); направление скорости точки B указано на чертеже пунктиром. Требуется построить план скоростей для точек A , B , C , D .

Для этого из произвольной точки o откладываем отрезок oa , изображающий по величине и направлению скорость \mathbf{v}_a . Затем проводим через точку o прямую ob , параллельную заданному направлению скорости точки B , а из точки a проводим прямую $ab \perp AB$; в точке пересечения проведенных прямых находится вершина b плана скоростей. Далее проводим $ac \perp AC$ и $bc \perp BC$; пересечением прямых ac и bc определяется вершина c . Наконец, проведя $ad \perp AD$ и $cd \perp CD$, находим вершину d . Лучи ob , oc , od определяют как величину, так и направление скоростей точек B , C , D .

Построение плана скоростей является весьма удобным приемом для графического определения скоростей различных точек механизма, отдельные части (или звенья) которого совершают плоскопараллельное движение. Мы можем построить планы скоростей для отдельных звеньев механизма так, как только что было объяснено. Существенное упрощение достигается тем, что все эти отдельные планы скоростей можно построить на одном чертеже. Таким образом мы получаем план скоростей для всего механизма.

Поясним сказанное примерами.

Пример 47. К шатуну AB кривошипного механизма O_1AB в точке C шарнирно прикреплен стержень CD , конец которого D соединен с коромыслом DO_2 , вращающимся вокруг неподвижной оси O_2 (черт. 212). Дана скорость v_a точки A . Построить план скоростей для точек A, B, C, D .



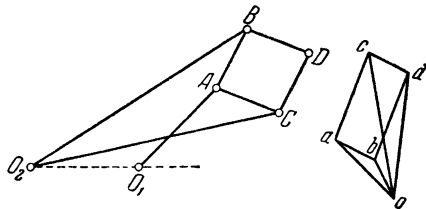
Черт. 212.

Строим сначала план скоростей для шатуна AB . Нам даны величина и направление скорости v_a точки A и направление скорости точки B . Из произвольной точки o откладываем отрезок oa , изображающий по величине и направлению скорость v_a (конечно, $v_a \perp O_1A$). Затем из точки o проводим прямую $ob \parallel O_1B$, а из точки a прямую $ab \perp AB$; пересечение этих прямых определяет вершину b плана скоростей. Разделив отрезок ab в отношении $AC:BC$, находим точку c ; луч oc определяет величину и направление скорости точки C .

Переходим теперь к стержню CD . Мы только что определили величину и направление скорости точки C ; кроме того, нам известно направление скорости точки D (оно перпендикулярно к O_2D). План скоростей для стержня CD строим на том же чертеже, на котором построили план скоростей для шатуна AB . Для этого из точки o проводим прямую od , параллельную направлению скорости точки D (т. е. $od \perp O_2D$), а из точки c прямую $cd \perp CD$, в пересечении этих прямых получим вершину d .

Лучами oa, ob, oc, od представляются скорости точек A, B, C, D .

Пример 48. Инверсор Липкина состоит из семи стержней: четыре стержня одинаковой длины образуют ромб $ABDC$, точка A соединена со стержнем O_1A , вращающимся вокруг неподвижной оси O_1 , а точки B и C соединены со стержнями одинаковой длины O_2B и O_2C , вращающимися вокруг неподвижной оси O_2 . Дана скорость v_a точки A . Построить план скоростей для точек A, B, C, D (черт. 213).



Черт. 213.

Обращаемся к стержню AB . Из произвольной точки o откладываем отрезок oa , изображающий по величине и направлению скорость v_a точки A (конечно, скорость v_a перпендикулярна к стержню O_1A). Затем проводим через точку o прямую ob , параллельную скорости точки B (т. е. перпендикулярную к стержню O_2B), а через точку a — прямую ab , перпендикулярную к AB . В пересечении этих прямых получаем вершину b .

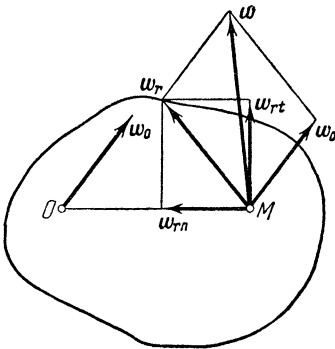
Переходим к стержню AC . Через точку o проводим прямую os , параллельную скорости точки C (т. е. перпендикулярную к стержню O_2C), а через точку a — прямую ac , перпендикулярную к AC . В пересечении этих прямых находим вершину s . Наконец, обращаемся к стержням BD и CD . Через точку b проводим прямую bd , перпендикулярную к BD , а через точку c — прямую cd , перпендикулярную к CD . Пересечение этих прямых даст вершину d .

Лучами oa , ob , oc , od определяются величины и направления скоростей точек A , B , C , D .

Можно показать, что если $O_1A = O_1O_2$, то точка D описывает прямую линию, перпендикулярную к прямой O_1O_2 ; если же расстояние O_1A не равно O_1O_2 , то точка D описывает дугу окружности, центр которой находится на прямой O_1O_2 . Мы не будем останавливаться на доказательстве этого предположения.

§ 106. Ускорения точек плоской фигуры. Мгновенный центр ускорений

Обратимся к исследованию ускорений различных точек плоской фигуры. Представим себе движение плоской фигуры (черт. 214) разложенным на переносное (поступательное) движение вместе с полюсом O и на относительное (вращательное) движение по отношению к этому полюсу. Ускорение какой-либо точки M плоской фигуры может быть найдено при помощи теоремы сложения ускорений: так как переносное движение поступательное, то абсолютное ускорение точки M равно сумме ускорений переносного и относительного.



Черт. 214.

Переносное ускорение точки M равно ускорению ω_0 полюса O . Относительное же ускорение ω_r точки M есть ускорение во вращательном движении этой точки вокруг полюса O ; оно складывается из центростремительного ускорения, величина которого

$$\omega_{rn} = OM \cdot \omega^2$$

и которое направлено от точки M к полюсу O , и вращательного ускорения, алгебраическая величина которого

$$\omega_{rt} = OM \cdot \varepsilon$$

и которое направлено перпендикулярно к отрезку OM ; буквами ω и ε обозначены угловая скорость и угловое ускорение фигуры¹⁾.

Абсолютное ускорение точки M есть диагональ параллелограмма, построенного на ускорениях ω_0 и ω_r . Мы получаем следующую

¹⁾ В случае $\varepsilon > 0$ вращательное ускорение ω_{rt} направлено так, как показано на черт. 214; если $\varepsilon < 0$, то ускорение ω_{rt} направлено в противоположную сторону.

теорему: ускорение любой точки плоской фигуры равно сумме ускорения полюса и ускорения во вращательном движении вокруг этого полюса.

Покажем, что в каждый данный момент существует точка плоской фигуры, ускорение которой в этот момент равно нулю.

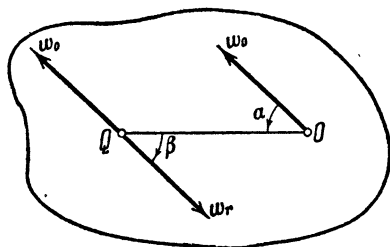
Возьмем за полюс точку O (черт. 215) и отметим ускорение полюса ω_o . Затем найдем угол α , лежащий в пределах между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ и удовлетворяющий уравнению

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2};$$

конечно, если $\varepsilon > 0$, мы будем иметь $\alpha > 0$, и если $\varepsilon < 0$, то и $\alpha < 0$.

Отложим от точки O под углом α к ускорению ω_o отрезок

$$OQ = \frac{\omega_o}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}};$$



Черт. 215.

при этом откладываем угол α от ускорения ω_o против вращения часовой стрелки, если $\alpha > 0$, и в обратную сторону, если $\alpha < 0$ (черт. 215 соответствует случаю $\alpha > 0$). Легко убедиться, что ускорение точки Q равно нулю.

В самом деле, по доказанному выше, ускорение точки Q равно сумме ускорения ω_o точки O и ускорения ω_r во вращательном движении вокруг точки O . Ускорение же ω_r складывается из центростремительного ускорения $\omega_{rn} = OQ \cdot \omega^2$ и вращательного ускорения $\omega_{rt} = OQ \cdot \varepsilon$; следовательно,

$$\omega_r = \sqrt{\omega_{rt}^2 + \omega_{rn}^2} = OQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{\omega_o}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \omega_o.$$

С другой стороны, ускорение ω_r образует с направлением отрезка OQ угол β (черт. 215), который удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{\omega_{rt}}{\omega_{rn}} = -\frac{OQ \cdot \varepsilon}{OQ \cdot \omega^2} = -\frac{\varepsilon}{\omega^2} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Угол β мы можем считать заключенным в пределах между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ (причем $\beta < 0$, если $\varepsilon > 0$, и $\beta > 0$, если $\varepsilon < 0$); в таком случае из предыдущего равенства получаем:

$$\beta = -\alpha.$$

Следовательно, ускорение ω_r равно ускорению полюса ω_o и направлено противоположно. Отсюда мы заключаем, что абсолютное ускорение точки Q , равное сумме ускорений ω_o и ω_r , равно нулю.

Точка Q , ускорение которой в данный момент равно нулю, называется *мгновенным центром ускорений*¹⁾.

Предположим теперь, что мгновенный центр ускорений Q взят за полюс. В таком случае, применяя теорему, установленную в начале этого параграфа, и имея в виду, что теперь ускорение полюса равно нулю, получаем следующий результат: *ускорение любой точки плоской фигуры есть ускорение во вращательном движении вокруг мгновенного центра ускорений*. Обозначая расстояние QM точки M от мгновенного центра ускорений Q через r_1 (черт. 216), мы заключаем, что

ускорение $\boldsymbol{\omega}$ точки M складывается из составляющей, равной по величине

$$\omega_{rt} = r_1 \varepsilon$$

и направленной перпендикулярно к отрезку QM , и составляющей, равной по величине

$$\omega_{rn} = r_1 \omega^2$$

и направленной от точки M к точке Q ; величина ускорения $\boldsymbol{\omega}$ определяется формулой

$$\omega = r_1 \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

направление же ускорения $\boldsymbol{\omega}$ образует с отрезком MQ угол β , определяемый уравнением

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{\omega_{rt}}{\omega_{rn}} = -\frac{\varepsilon}{\omega}$$

и заключающийся в пределах $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Мы видим, что в каждый данный момент ускорения точек плоской фигуры таковы, как будто бы фигура совершала вращение вокруг неподвижной точки Q , почему точка Q и получает наименование «центра ускорений»: словом «мгновенный» подчеркивается то обстоятельство, что точка Q является центром ускорений лишь для данного момента времени; различным моментам времени соответствуют различные мгновенные центры ускорений.

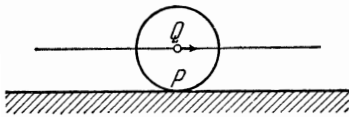
Следует заметить, что мгновенный центр скоростей P и мгновенный центр ускорений Q , вообще говоря, не совпадают. В этом можно убедиться из следующего простого примера. Представим

¹⁾ Заметим, что если $\omega = 0$ и $\varepsilon = 0$, то $OQ = \frac{\omega_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \infty$, и, следова-

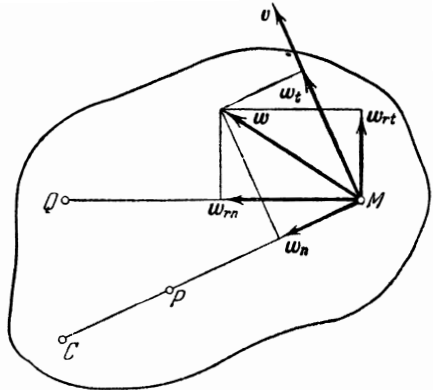
тельно, мгновенный центр ускорений не существует (или он находится в бесконечности). Если $\omega = 0$ и $\varepsilon = 0$, то ускорения всех точек плоской фигуры во вращательном движении вокруг полюса O равны нулю, откуда следует, что абсолютные ускорения всех точек фигуры равны ускорению полюса. Другими словами, в случае $\omega = 0$ и $\varepsilon = 0$ все точки плоской фигуры имеют равные ускорения

себе окружность круга, который равномерно катится (без скольжения) по прямой линии (черт. 217). Так как центр окружности движется прямолинейно и равномерно, то его ускорение равно нулю, и, следовательно, он является мгновенным центром ускорений Q для катящегося круга. Мгновенный же центр скоростей P находится, как мы уже знаем, в точке касания окружности с той прямой, по которой эта окружность катится.

Заметив, что мгновенный центр ускорений Q , вообще говоря, не совпадает с мгновенным центром скоростей P , следует обратить внимание также и на то, что составляющие ω_{rt} и ω_{rn} , на которые представляется разложенным ускорение ω точки M на черт. 216, вообще говоря, не совпадают с касательным и нормальным ускорениями точки M . В самом деле, чтобы разложить ускорение ω точки M на касательное и нормальное ускорения, нужно разложить его на две составляющие, направленные по касательной и по нормали к траектории точки M . Направление же касательной к траектории точки M совпадает с направлением ее скорости v (черт. 218), а значит, направле-



Черт. 217.



Черт. 218.

ние нормали к траектории совпадает с направлением отрезка MP , соединяющего точку M с мгновенным центром скоростей P (но не с мгновенным центром ускорений Q). Итак, чтобы получить касательное и нормальное ускорения точки M , мы должны разложить ускорение ω на две составляющие, направленные по прямой MP и перпендикулярно к этой прямой. Величины касательного и нормального ускорений ω_t и ω_n удовлетворяют равенствам:

$$\omega_t = \frac{dv}{dt}, \quad \omega_n = \frac{v^2}{\rho},$$

где ρ есть радиус кривизны траектории¹⁾.

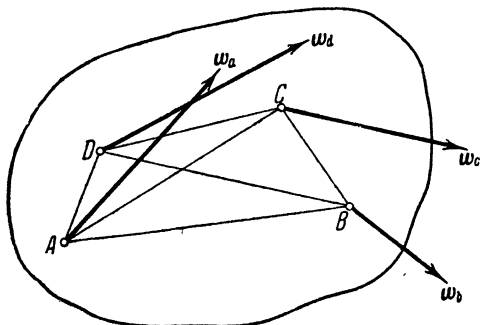
¹⁾ Если C (черт. 218) есть центр кривизны траектории, то $\rho = MC$. Не следует думать, что центр кривизны C совпадает с мгновенным центром скоростей P .

§ 107. План ускорений

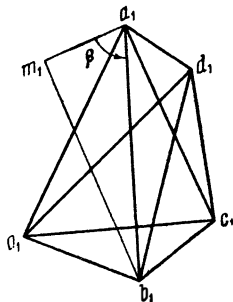
Отметим ускорения $\omega_a, \omega_b, \omega_c, \omega_d$ точек A, B, C, D какой-либо движущейся фигуры (черт. 219). Из произвольной точки o_1 (черт. 220) отложим отрезки $o_1a_1, o_1b_1, o_1c_1, o_1d_1$, изображающие по величине и направлению ускорения $\omega_a, \omega_b, \omega_c, \omega_d$, и соединим точки a_1, b_1, c_1, d_1 прямыми линиями. Полученный многоугольник называется *планом ускорений*; отрезки $o_1a_1, o_1b_1, o_1c_1, o_1d_1$, мы будем называть лучами, а точки a_1, b_1, c_1, d_1 — вершинами плана ускорений.

Покажем, что отрезок a_1b_1 , соединяющий вершины a_1 и b_1 , изображает по величине и направлению ускорение точки B во вращательном движении вокруг точки A .

В самом деле, примем точку A за полюс. В начале § 106 было показано, что ускорение любой точки плоской фигуры равно сумме



Черт. 219.



Черт. 220.

ускорения полюса и ускорения данной точки во вращательном движении вокруг этого полюса. На основании этой теоремы, обозначая ускорение точки B во вращательном движении вокруг точки A через ω_{ab} , имеем:

$$\omega_b = \omega_a + \omega_{ab}. \quad (1)$$

С другой стороны, из треугольника $o_1a_1b_1$ следует:

$$\overline{o_1b_1} = \overline{o_1a_1} + \overline{a_1b_1}$$

или

$$\omega_b = \omega_a + \overline{a_1b_1}. \quad (2)$$

Сравнивая равенства (1) и (2), заключаем, что

$$\overline{a_1b_1} = \omega_{ab}.$$

Разложим теперь вектор $\overline{a_1b_1}$ на две составляющие $\overline{a_1m_1}$ и $\overline{m_1b_1}$, из которых одна параллельна отрезку AB , а другая к нему перпендикулярна. Эти составляющие представляют не

что иное, как центростремительную и вращательную составляющие ускорения ω_{ab} ; следовательно:

$$a_1 m_1 = AB \cdot \omega^2, \quad m_1 b_1 = AB \cdot |\epsilon|,$$

где ω и ϵ суть угловая скорость и угловое ускорение данной плоской фигуры. Отсюда мы заключаем, что

$$a_1 b_1 = AB \cdot \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}, \quad \angle m_1 a_1 b_1 = \beta,$$

причем

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{\epsilon}{\omega^2} \left(-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2} \right).$$

Следовательно, направление отрезка $a_1 b_1$ образует с направлением отрезка AB угол, равный $180^\circ + \beta$ (в данном случае $\epsilon < 0$ и $\beta > 0$).

Все, что сказано относительно отрезка $a_1 b_1$, может быть повторено и по отношению к отрезкам $b_1 c_1$, $a_1 c_1$ и т. д. Мы заключаем, что

$$b_1 c_1 = BC \cdot \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4},$$

$$a_1 c_1 = AC \cdot \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4} \quad \text{и т. д.};$$

направления же отрезков $b_1 c_1$, $a_1 c_1$ и т. д. составляют с направлениями отрезков BC , AC и т. д. углы, равные $180^\circ + \beta$.

Отсюда следует, что *фигура $a_1 b_1 c_1 d_1$ подобна фигуре $ABCD$ и повернута относительно этой последней на угол $180^\circ + \beta$.*

Положим, что фигура $oabcd$ (черт. 221) есть план скоростей для точек A, B, C, D (построенный так, как было объяснено в § 105). Мы знаем, что отрезок ab представляет вращательную скорость точки B вокруг точки A , т. е.

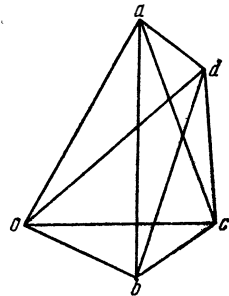
$$ab = AB \cdot |\omega|.$$

Отсюда мы заключаем, что

$$a_1 m_1 = AB \cdot \omega^2 = \frac{ab^2}{AB}.$$

Полученная зависимость между отрезками AB , ab и $a_1 m_1$ дает возможность построить план ускорений, если заданы *величина и направление* ускорения одной точки плоской фигуры, *направление* ускорения другой точки и если, кроме того, известен *план скоростей*.

В самом деле, положим, что нам заданы величина и направление ускорения ω_a точки A (черт. 219), направление ускорения ω_b точки B , а также задан план скоростей $oabcd$ (черт. 221). Чтобы построить план ускорений для точек A, B, C, D , мы откладываем от произвольной точки o_1 (черт. 220) отрезок $o_1 a_1$, изображающий



Черт. 221.

по величине и направлению данное ускорение ω_a . Затем от точки a_1 параллельно BA откладываем отрезок

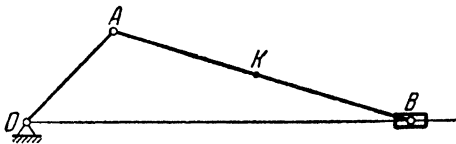
$$a_1 m_1 = \frac{ab^2}{AB}.$$

Проведя из точки m_1 прямую, перпендикулярную к AB , а из точки o_1 прямую, параллельную данному направлению ускорения ω_b , находим в точке пересечения этих прямых вершину b_1 . Построив точку b_1 , проводим отрезок $a_1 b_1$ и находим угол $\beta = \angle m_1 a_1 b_1$.

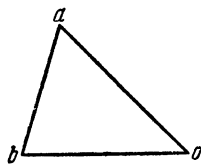
Чтобы закончить построение плана ускорений, нам остается провести прямые $a_1 c_1$ и $b_1 c_1$, $a_1 d_1$ и $b_1 d_1$ под углом $180^\circ + \beta$ к направлениям AC , BC , AD и BD ; пересечение первых двух из этих прямых определит вершину c_1 , а пересечение последних двух прямых — вершину d_1 .

Желая определить графически ускорения различных точек какого-либо плоского механизма, мы строим планы ускорений для отдельных звеньев механизма. Все эти отдельные планы ускорений можно построить на одном чертеже. Тогда получаем план ускорений для всего механизма.

Пример 49. Кривошип OA кривошипно-шатунного механизма OAB (черт. 222) вращается равномерно с угловой скоростью ω . Построить план ускорений для шатуна AB .



Черт. 222.



Черт. 223.

Предварительно строим план скоростей для шатуна AB . От точки o (черт. 223) откладываем отрезок oa , изображающий скорость v_a точки A ; мы знаем, что

$$v_a = OA \cdot \omega;$$

на чертеже скорость v_a может быть взята в произвольном масштабе. Затем проводим из точки a прямую, перпендикулярную к AB , а из точки o прямую, параллельную скорости точки B , т. е. параллельную OB . Пересечением этих прямых определяется точка b . Фигура oab есть план скоростей для шатуна AB .

Переходим к построению плана ускорений. Нам известны величина и направление ускорения ω_a точки A и направление ускорения точки B ; имеем:

$$\omega_a = BA \cdot \omega^2 = \frac{v_a^2}{OA} = \frac{oa^2}{OA};$$

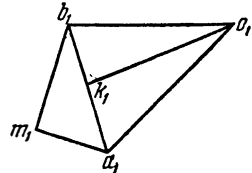
ускорение ω_a направлено от точки A к точке O , ускорение же точки B направлено по прямой OB .

От точки o_1 (черт. 224) откладываем отрезок o_1a_1 , изображающий ускорение w_a . Из точки a_1 параллельно BA откладываем отрезок

$$a_1m_1 = \frac{ab^2}{AB}.$$

Затем из точки m_1 проводим прямую, перпендикулярную к AB , а из точки o_1 прямую, параллельную направлению ускорения точки B , т. е. параллельную прямой OB . Пересечением этих прямых определяется точка b_1 .

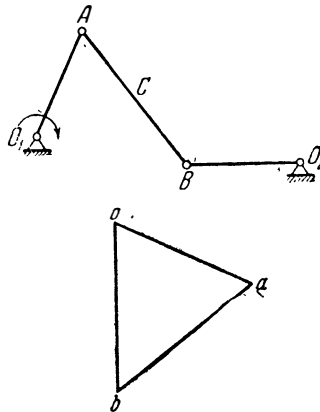
Остается соединить точки a_1 и b_1 прямой линией. Фигура $o_1a_1b_1$ есть план ускорений для шатуна AB . Если мы желаем определить ускорение какой-либо точки K шатуна AB , то, деля отрезок a_1b_1 в отношении $AK:KB$, находим точку k_1 ; отрезок o_1k_1 изображает ускорение точки K .



Черт. 224.

Пример 50. Коромысла O_1A и O_2B , вращающиеся соответственно вокруг неподвижных осей O_1 и O_2 , соединены шатуном AB ; $O_1A = O_2B = 20$ см, $AB = 30$ см (черт. 225). Посредством построения плана ускорений найти в том положении механизма, которое указано на чертеже, ускорение точки C шатуна, находящейся на расстоянии $AC = 10$ см от конца его A , предполагая, что точка A движется (в направлении, указанном на чертеже) с постоянной скоростью $v_a = 20$ см/сек.

Начнем с построения плана скоростей. Выбрав для этого построения масштаб $1 \text{ см} = 10 \text{ см/сек}$, откладываем от точки o отрезок oa , изображающий (по величине и по направлению) данную нам скорость v_a точки A . Затем проводим из точки o прямую ob , перпендикулярную к коромыслу O_2B , и из точки a прямую ab , перпендикулярную к шатуну AB . Пересечением этих двух прямых определяется вершина b в плане скоростей. Отрезками ob и ab изображаются соответственно абсолютная скорость v_b точки B и вращательная скорость v_{ab} точки B вокруг точки A ; измерив эти отрезки в принятом масштабе, получаем:



Черт. 225.

Перейдем теперь к построению ускорений.

Ускорение w_a точки A нам известно. Так как эта точка движется по окружности с постоянной по величине скоростью v_a , то ее ускорение направлено к центру O_1 и равно по величине

$$w_a = \frac{v_a^2}{O_1A} = 20 \text{ см/сек}^2.$$

Ускорение w_b точки B нам не известно ни по величине, ни по направлению. Эта точка вращается вокруг центра O_2 , двигаясь, вообще говоря,

неравномерно; ее ускорение складывается из нормальной и касательной составляющих. Из этих двух составляющих нам известна только нормальная составляющая w_{bn} : она направлена от точки B к точке O_2 и равна

$$w_{bn} = \frac{v_b^2}{O_2B} = 21,4 \text{ см/сек}^2.$$

Для построения плана ускорений поступим следующим образом. Выбрав масштаб $1 \text{ см} \rightarrow 20 \text{ см/сек}^2$, откладываем от точки O_1 (черт. 225) параллельно направлению AO_1 отрезок o_1a_1 , изображающий в принятом масштабе ускорение w_a . Затем откладываем от точки O_1 параллельно направлению BO_2 отрезок o_1n_1 , изображающий нормальную составляющую w_{bn} ускорения точки B . Вершина b_1 плана ускорений должна лежать на прямой n_1b_1 , проведенной из точки n_1 , перпендикулярно к отрезку o_1n_1 .

Переходя к ускорению точки B во вращательном движении вокруг точки A , вычисляем нормальную составляющую этого ускорения; она равна

$$\frac{v_{ab}^2}{AB} = 13,7 \text{ см/сек}^2$$

и направлена от точки B к точке A . Отложив в плане ускорений от точки a_1 отрезок a_1m_1 , изображающий это ускорение, и проведя через точку m_1 прямую m_1b_1 , перпендикулярную к отрезку a_1m_1 , получаем вторую прямую, на которой должна лежать вершина b_1 . Отсюда следует, что точка b_1 есть пересечение построенных нами прямых n_1b_1 и m_1b_1 . Проведением прямой a_1b_1 заканчивается построение плана ускорений.

Отрезок o_1b_1 изображает ускорение точки B . Взяв на прямой a_1b_1 отрезок $a_1c_1 = \frac{1}{3} a_1b_1$, находим точку c_1 , соединение которой с точкой O_1 дает луч o_1c_1 , изображающий искомое ускорение w_c точки C . Измерив отрезок o_1c_1 в принятом масштабе, получаем:

$$w_c = 5,5 \text{ см/сек}^2;$$

направление этого ускорения определяется направлением луча o_1c_1 .

§ 108. Теорема о перемещении плоской фигуры. Мгновенный центр скоростей как предельное положение центра вращения

В нашем исследовании плоско-параллельного движения твердого тела мы исходили из разложения плоского движения на поступательную и вращательную части. Это разложение дало нам возможность определить скорости и ускорения точек плоской фигуры, а также привело нас к понятиям мгновенного центра скоростей и мгновенного центра ускорений. Покажем теперь, что к понятию мгновенного центра скоростей можно придти еще другим путем.

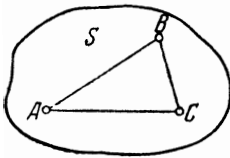
Начнем с доказательства следующей теоремы (называемой *теоремой Шалля*): *плоскую фигуру можно переместить из всякого данного положения во всякое другое положение вращением вокруг некоторой точки.*

Заметим предварительно, что положение плоской фигуры, движущейся в данной плоскости, вполне определяется положением двух ее точек. В самом деле, положим, что две точки A и B плоской фигуры S (черт. 226) занимают в некоторый момент положения A' и B' . Этим вполне определяется положение всей плоской фигуры в рассматриваемый момент: чтобы найти положение, занимаемое в этот момент какой-либо третьей точкой C нашей фигуры, достаточно построить на отрезке $A'B'$ треугольник $A'B'C'$, равный треугольнику ABC .

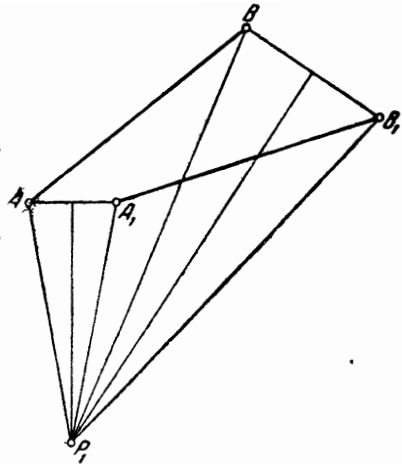
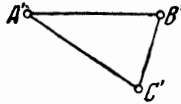
На основании этого замечания исследование движения плоской фигуры может быть заменено исследованием движения двух ее точек, или, что все равно, отрезка, соединяющего эти точки.

Перейдем теперь к доказательству нашей теоремы.

Положим, что отрезок AB (принадлежащий плоской фигуре, которая на чертеже не изображена) совершает какое-либо движение в плоскости чертежа (черт. 227). По-



Черт. 226.



Черт. 227.

ложим, что в момент t этот отрезок занимает положение AB , а в момент $t + \Delta t$ положение A_1B_1 . Мы покажем, что отрезок может быть перемещен из первого положения во второе вращением вокруг некоторой точки.

Проведем отрезки AA_1 и BB_1 и в точках, делящих эти отрезки пополам, восставим к ним перпендикуляры. Мы сейчас увидим, что точка пересечения этих перпендикуляров P_1 и есть тот центр вращения, поворотом вокруг которого отрезок AB может быть перемещен в положение A_1B_1 .

Чтобы в этом убедиться, проведем прямые AP_1 , BP_1 , A_1P_1 , B_1P_1 . Треугольники ABP_1 и $A_1B_1P_1$ равны (по равенству трех сторон). Следовательно:

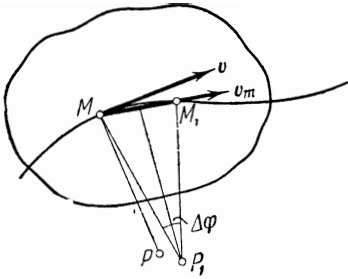
$$\angle AP_1B = \angle A_1P_1B_1.$$

Вычитая из обеих частей этого равенства по $\angle A_1P_1B$, получим:

$$\angle AP_1A_1 = \angle BP_1B_1.$$

Обозначим равные углы $\angle AP_1A_1$ и $\angle BP_1B_1$ через $\Delta\varphi$ и повернем отрезок AB вокруг точки P_1 на угол $\Delta\varphi$. После этого поворота точка A займет положение A_1 , а точка B — положение B_1 . Следовательно, отрезок AB может быть перемещен в положение A_1B_1 поворотом вокруг точки P_1 на угол $\Delta\varphi$.

Итак, мы убедились, что плоская фигура может быть перемещена из положения, занимаемого ею в момент t , в положение, соответствующее моменту $t + \Delta t$, поворотом вокруг некоторой точки P_1 на некоторый угол $\Delta\varphi$ ¹⁾. Будем теперь приближать промежуток времени Δt к нулю. Тогда второе положение фигуры будет приближаться к ее первому положению. Вместе с тем центр вращения P_1 будет приближаться к некоторому предельному положению, которое обозначим буквой P , а отношение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ будет приближаться к некоторому пределу, который есть не что иное, как абсолютная величина угловой скорости ω плоской фигуры в момент t :



Черт. 228.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right] = \omega.$$

Мы покажем, что *предельное положение P центра вращения P_1 есть не что иное, как мгновенный центр скоростей данной фигуры* (соответствующий моменту t).

Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что скорость любой точки плоской фигуры в момент t есть вращательная скорость вокруг точки P . Возьмем какую-нибудь точку M нашей плоской фигуры (черт. 228) и отметим положения, занимаемые ею в моменты t (оно обозначено буквой M) и $t + \Delta t$ (положение M_1). Чтобы вычислить скорость v точки M в момент t , воспользуемся тем обстоятельством, что скорость v есть предел скорости v_m фиктивного равномерного движения точки M по хорде MM_1 (см. § 84).

Мы имеем:

$$v_m = \frac{MM_1}{\Delta t}.$$

Соединяя точки M и M_1 прямыми линиями с центром вращения P_1 , получаем равнобедренный треугольник MM_1P_1 , в кото-

¹⁾ Конечно, это не значит, что *действительное* движение плоской фигуры за время Δt есть вращение вокруг точки P_1 . Мы лишь показали, что *фигура может быть перемещена* из первого положения во второе поворотом вокруг точки P_1 на угол $\Delta\varphi$.

ром угол при вершине P_1 равен $\Delta\varphi$. Из этого треугольника выводим:

$$MM_1 = 2P_1M \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2}$$

и, следовательно:

$$v_m = 2P_1M \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [v_m] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[P_1M \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right].$$

Но

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [P_1M] = PM, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \right] = 1, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right] = \omega.$$

Следовательно, обозначая PM через r , находим:

$$v = r\omega.$$

С другой стороны, скорость v_m образует с направлением MP_1 угол, равный $\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\varphi}{2}$. Переходя к пределу и замечая, что $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\Delta\varphi] = 0$ заключаем, что скорость v образует с направлением MP прямой угол.

Итак, скорость v точки M численно равна $v = r\omega$ (где $r = MP$) и направлена перпендикулярно к PM , т. е. скорость v есть вращательная скорость вокруг точки P .

Отсюда следует, что точка P есть мгновенный центр скоростей данной плоской фигуры, соответствующий моменту t .

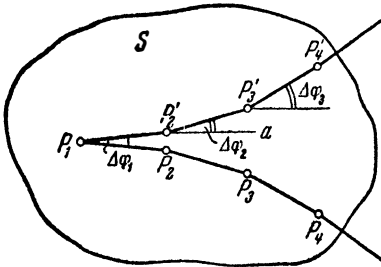
§ 109. Центроиды

Возьмем ряд последовательных моментов времени t , $t + \Delta t$, $t + 2\Delta t$, $t + 3\Delta t$ и т. д. и назовем положения, занимаемые в эти моменты движущейся плоской фигурой S (черт. 229), 1-м, 2-м, 3-м, 4-м и т. д. положениями фигуры. Мы знаем, что плоская фигура может быть перемещена из всякого данного положения во всякое другое положение вращением вокруг некоторой точки на некоторый угол. Положим, что из 1-го положения во 2-е фигура S может быть перемещена вращением вокруг точки P_1 на угол $\Delta\varphi_1$, из 2-го положения в 3-е — вращением вокруг точки P_2 на угол $\Delta\varphi_2$,

из 3-го в 4-е — вращением вокруг точки P_3 на угол $\Delta\varphi_3$ и т. д. Для краткости речи условимся вращения вокруг точек P_1, P_2, P_3 и т. д. называть 1-м, 2-м, 3-м и т. д. вращениями.

Соединив точки $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$ последовательными отрезками, мы получим многоугольник $P_1P_2P_3P_4 \dots$, вершинами которого являются последовательные центры вращения фигуры S ; назовем этот многоугольник многоугольником центров, и притом «неподвижным» многоугольником центров, в отличие от другого многоугольника центров, о котором сейчас будет идти речь.

Построим ту точку P'_2 плоской фигуры, которая после первого вращения совпадает с точкой P_2 и, следовательно, является центром вращения при втором вращении.



Черт. 229.

Для этого откладываем от точки P_1 отрезок $P_1P'_2 = P_1P_2$ под углом $\Delta\varphi_1$ к прямой P_1P_2 , причем угол $\Delta\varphi_1$ откладываем от прямой P_1P_2 в сторону, обратную вращению фигуры S вокруг точки P_1 (на черт. 229 вращения вокруг точек P_1, P_2, P_3, \dots предполагаются происходящими по часовой стрелке).

Затем строим ту точку P'_3 фигуры S , которая после второго вращения совпадает с точкой P_3 и,

следовательно, является центром вращения при третьем вращении. Для этого откладываем $\angle P_1P'_2a = \angle P_1P_2P_3$ и из точки P'_2 проводим отрезок $P'_2P'_3 = P_2P_3$ под углом $\Delta\varphi_2$ к прямой P'_2a , причем угол $\Delta\varphi_2$ откладываем от прямой P'_2a в сторону, обратную вращению фигуры S вокруг точки P_2 .

Таким же точно образом мы можем построить точки P'_4, P'_5, \dots фигуры S , которые после 3-го, 4-го, ... вращения совпадают с точками P_4, P_5, \dots и, следовательно, являются центрами вращения при 4-м, 5-м, ... вращениях. Многоугольник $P_1P'_2P'_3P'_4 \dots$ мы назовем «подвижным» многоугольником центров; его вершины суть точки фигуры S , которые являются центрами вращения при последовательных вращениях фигуры. Этот многоугольник неизменно связан с фигурой S и движется вместе с нею. Его движение мы можем кратко характеризовать, сказав, что при фиктивном движении фигуры S , состоящем из ряда последовательных вращений, подвижной многоугольник центров катится без скольжения по неподвижному многоугольнику центров.

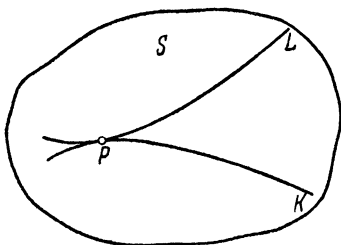
Перейдем теперь к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. Предельными положениями центров вращения P_1, P_2, P_3 и т. д. являются мгновенные центры скоростей фигуры S , соответствующие последовательным моментам времени. Предельное положение центра вращения P_1 есть мгновенный центр P , соответствующий моменту t (черт. 230).

Вместе с тем при уменьшении Δt до нуля стороны неподвижного многоугольника центров также уменьшаются до нуля, а число их возрастает беспредельно. В пределе неподвижный многоугольник центров обращается в кривую, которая представляет геометрическое место мгновенных центров скоростей на неподвижной плоскости. Эта кривая называется *неподвижной центроидой*; обозначим ее буквой K .

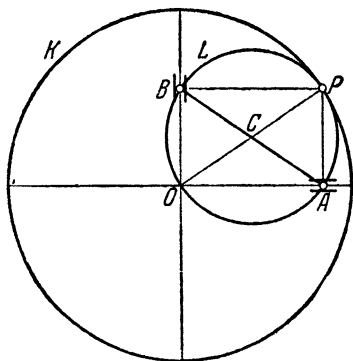
Подвижной многоугольник центров в пределе также обращается в кривую, которая представляет геометрическое место мгновенных центров на движущейся фигуре S . Эта кривая неизменно связана с фигурой S и движется вместе с нею; она называется *подвижной центроидой*; обозначим ее буквой L .

Так как угол $\Delta\varphi_1$ при $\Delta t \rightarrow 0$ обращается в нуль, то обе центроиды K и L касаются в своей общей точке P . Точка касания является мгновенным центром скоростей для данного момента t .

Мы видели, что при фиктивном движении фигуры S , состоящем из ряда



Черт. 230.



Черт. 231.

последовательных вращений, подвижной многоугольник центров катится без скольжения по неподвижному многоугольнику центров. Отсюда мы заключаем, что при действительном движении плоской фигуры *подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной центроиде*.

Итак, всякое плоское движение может быть представлено как качение без скольжения некоторой подвижной кривой, неизменно связанной с плоской фигурой, по некоторой неподвижной кривой.

Пример 51. Построить центроиды для линейки AB эллипсографа (черт. 231).

Обозначим длину линейки AB через $2a$. Строим мгновенный центр скоростей P для линейки AB как пересечение перпендикуляров, восставленных в точках A и B к направлениям скоростей этих точек.

Обозначим точку пересечения направляющих прямых, по которым движутся концы A и B линейки эллипсографа, через O . Замечаем, что

$$OP = AB = 2a.$$

Отсюда заключаем, что геометрическое место мгновенных центров скоростей на неподвижной плоскости есть окружность, центр которой находится в точке O , а радиус равен $2a$. Эта окружность и есть неподвижная центроида; обозначим ее буквой K .

Далее, обозначая середину отрезка AB буквой C , замечаем, что

$$CP = \frac{1}{2} OP = a,$$

откуда следует, что геометрическое место мгновенных центров скоростей на плоскости, движущейся вместе с линейкой AB , есть окружность, центр которой находится в точке C , а радиус равен a . Эта вторая окружность L и есть подвижная центроида.

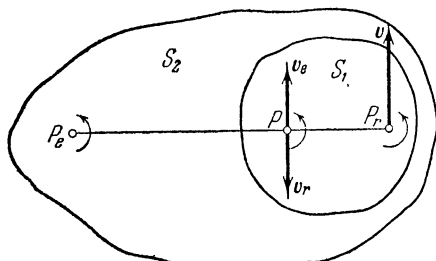
При движении линейки AB окружность L катится без скольжения по окружности K . Мы можем сказать, что движение линейки эллипсографа тождественно с движением окружности, катящейся без скольжения внутри неподвижной окружности вдвое большего радиуса.

Мы видим, что точки A и B , лежащие на окружности L , описывают диаметры окружности K . Но точки A и B ничем не отличаются от всех прочих точек окружности L . Отсюда мы заключаем, что все точки, лежащие на окружности L , описывают диаметры окружности K .

Это свойство движения окружности L , катящейся без скольжения внутри неподвижной окружности K вдвое большего радиуса, было замечено итальянским математиком Карданом, по имени которого окружности K и L называются кардановыми окружностями.

§ 110. Сложение вращений плоской фигуры

Представим себе две плоские фигуры S_1 и S_2 (черт. 232), совершающие какие-либо движения в плоскости чертежа. Фигура S_1 , совершая свое абсолютное движение в данной плоскости, вместе с тем совершает некоторое относительное движение по отношению к фигуре S_2 ; очевидно, что



Черт. 232.

это относительное движение есть движение плоское. Движение фигуры S_2 будет переносным движением фигуры S_1 . Мы можем сказать, что абсолютное движение фигуры S_1 есть составное из движений переносного вместе с фигурой S_2 и относительного по отношению к фигуре S_2 .

В каждом из трех плоских движений — абсолютном движении фигуры S_1 , переносном движении фигуры S_1 и относительном движении фигуры S_1 по отношению к фигуре S_2 — существуют в данный момент свой мгновенный центр скоростей и своя угловая скорость. Мгновенные центры скоростей, соответствующие указанным трем движениям, назовем абсолютным, переносным и относительным мгновенными центрами скоростей и обозначим через P , P_e и P_r ;

угловые скорости тех же трех движений назовем абсолютной, переносной и относительной угловыми скоростями и обозначим их абсолютные величины через ω , ω_e и ω_r .

Требуется установить зависимость между положениями трех мгновенных центров скоростей P , P_e и P_r и между тремя угловыми скоростями ω , ω_e и ω_r .

Разберем три случая, которые здесь могут представиться.

Первый случай. *Переносное и относительное вращения направлены в одну и ту же сторону.*

Положим, что переносное и относительное вращения направлены (вокруг соответствующих мгновенных центров P_e и P_r) против вращения часовой стрелки (черт. 232). Возьмем на отрезке P_eP_r точку P , делящую этот отрезок на части, обратно пропорциональные угловым скоростям ω_e и ω_r , т. е. удовлетворяющую условию:

$$\frac{P_eP}{PP_r} = \frac{\omega_r}{\omega_e}, \quad (1)$$

и покажем, что эта точка P и есть абсолютный мгновенный центр скоростей.

Чтобы в этом убедиться, нужно показать, что абсолютная скорость точки P равна нулю. На основании теоремы сложения скоростей абсолютная скорость v любой точки фигуры S_1 равна сумме ее переносной и относительной скоростей v_e и v_r . Применим эту теорему к точке P .

Для точки P имеем:

$$v_e = P_eP \cdot \omega_e, \quad v_r = PP_r \cdot \omega_r.$$

Но из условия (1) следует:

$$P_eP \cdot \omega_e = PP_r \cdot \omega_r, \quad (2)$$

откуда

$$v_e = v_r.$$

Направления скоростей v_e и v_r , как видно из чертежа, взаимно противоположны. Сумма скоростей v_e и v_r , равных по величине и противоположно направленных, равна нулю. Следовательно, абсолютная скорость точки P равна нулю, т. е. точка P есть абсолютный мгновенный центр скоростей.

Итак, *абсолютный мгновенный центр скоростей P лежит на отрезке, соединяющем переносный и относительный мгновенные центры P_e и P_r , и делит этот отрезок на части, обратно пропорциональные угловым скоростям ω_e и ω_r .*

Применим теперь теорему сложения скоростей к точке P_r . Так как относительная скорость v_r этой точки равна нулю, то по упомянутой теореме ее абсолютная скорость v должна быть равна ее переносной скорости v_e . Для точки P_r имеем:

$$v = PP_r \cdot \omega, \quad v_e = P_eP_r \cdot \omega_e.$$

Приравнивая величины скоростей v и v_e , получаем:

$$PP_r \cdot \omega = P_e P_r \cdot \omega_e,$$

откуда

$$\omega = \frac{P_e P_r \cdot \omega_e}{PP_r} = \frac{(P_e P + PP_r) \omega_e}{PP_r} = \frac{P_e P \cdot \omega_e + PP_r \cdot \omega_e}{PP_r},$$

или, на основании равенства (2),

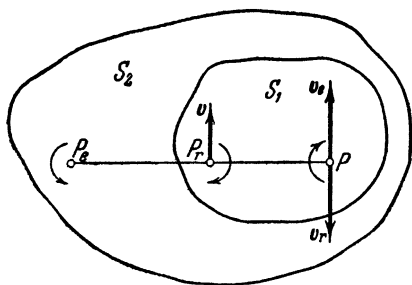
$$\omega = \frac{PP_r \cdot \omega_r + PP_r \cdot \omega_e}{PP_r} = \omega_r + \omega_e,$$

т. е. абсолютная угловая скорость равна сумме относительной и переносной угловых скоростей.

Что касается направления абсолютного вращения, то из направления абсолютной скорости v точки P_r (которая совпадает с ее переносной скоростью v_e) можно заключить, что абсолютное вращение направлено (вокруг абсолютного мгновенного центра P) против часовой стрелки.

Итак, *направление составного вращения совпадает с направлениями составляющих вращений.*

Второй случай. *Переносное и относительное вращения направлены в противоположные стороны; их угловые скорости не равны по величине.*



Черт. 233.

Положим, что относительное вращение направлено по часовой стрелке, а переносное — против часовой стрелки (черт. 233), и предположим, что $\omega_r > \omega_e$.

Возьмем на продолжении отрезка $P_e P_r$ со стороны мгновенного центра P_r точку P , удовлетворяющую условию

$$\frac{P_e P}{PP_r} = \frac{\omega_r}{\omega_e}, \quad (3)$$

и покажем, что эта точка P есть абсолютный мгновенный центр скоростей.

Приложим теорему сложения скоростей к точке P . Для точки P имеем:

$$v_e = P_e P \cdot \omega_e, \quad v_r = PP_r \cdot \omega_r.$$

На основании условия (3) имеем:

$$P_e P \cdot \omega_e = PP_r \cdot \omega_r, \quad (4)$$

откуда

$$v_e = v_r.$$

Так как направления скоростей \mathbf{v}_e и \mathbf{v}_r противоположны, то их сумма равна нулю. Следовательно, абсолютная скорость точки P равна нулю, т. е. точка P есть абсолютный мгновенный центр скоростей.

Итак, абсолютный мгновенный центр скоростей P лежит на продолжении отрезка, соединяющего переносный и относительный мгновенные центры P_e и P_r со стороны того из этих центров, которому соответствует большая угловая скорость; расстояния P_eP и P_rP обратно пропорциональны угловым скоростям ω_e и ω_r .

Теперь применим теорему сложения скоростей к точке P_r . Для этой точки имеем:

$$\mathbf{v} = PP_r \cdot \omega, \quad \mathbf{v}_e = P_eP_r \cdot \omega_e, \quad \mathbf{v}_r = 0.$$

Так как $\mathbf{v}_r = 0$, то по теореме сложения скоростей должно быть

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e.$$

Приравнивая величины скоростей \mathbf{v} и \mathbf{v}_e , получаем:

$$PP_r \cdot \omega = P_eP_r \cdot \omega_e,$$

откуда

$$\omega = \frac{P_eP_r \cdot \omega_e}{PP_r} = \frac{(P_eP - PP_r) \cdot \omega_e}{PP_r} = \frac{P_eP \cdot \omega_e - PP_r \cdot \omega_e}{PP_r}$$

или, на основании равенства (4),

$$\omega = \frac{PP_r \cdot \omega_r - PP_r \cdot \omega_e}{PP_r} = \omega_r - \omega_e,$$

т. е. абсолютная угловая скорость равна разности угловых скоростей составляющих движений.

Направление абсолютной скорости \mathbf{v} точки P_r указывает, что абсолютное вращение (вокруг абсолютного мгновенного центра P) направлено по часовой стрелке.

Отсюда мы заключаем, что направление составного вращения совпадает с направлением того из составляющих вращений, которому соответствует большая угловая скорость.

Третий случай. Переносное и относительное вращения направлены в противоположные стороны; их угловые скорости равны по величине.

Положим, что относительное вращение направлено по часовой стрелке, а переносное — против часовой стрелки (черт. 234), причем

$$\omega_e = \omega_r.$$

Покажем, что в этом случае абсолютные скорости всех точек фигуры S_1 равны.

Возьмем какую-нибудь точку M фигуры S_1 и найдем ее абсолютную скорость по теореме сложения скоростей.

Абсолютная скорость \mathbf{v} точки M представляется диагональю параллелограмма, построенного на переносной скорости \mathbf{v}_e

и относительной скорости v_r . Величины скоростей v_e и v_r суть

$$v_e = P_e M \cdot \omega_e, \quad v_r = P_r M \cdot \omega_r = P_r M \cdot \omega_e;$$

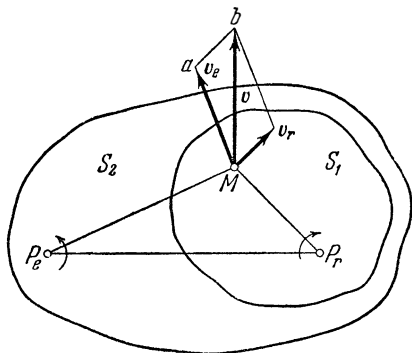
направления скоростей v_e и v_r перпендикулярны соответственно к отрезкам $P_e M$ и $P_r M$.

Мы замечаем, что треугольники Mab и $P_e M P_r$ подобны, так как стороны Ma и ab пропорциональны сторонам $P_e M$ и $P_r M$ и $\angle Mab = \angle P_e M P_r$ (стороны одного угла перпендикулярны к сторонам другого). Из подобия этих треугольников выводим:

$$\frac{v}{P_e P_r} = \frac{v_r}{P_e M} = \omega_e$$

или

$$v = P_e P_r \cdot \omega_e.$$

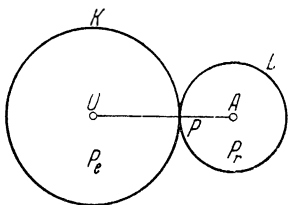


Черт. 234.

Далее, так как две стороны Ma и ab одного треугольника перпендикулярны к двум сторонам $P_e M$ и $P_r M$ другого треугольника, то и третьи их стороны Mb и $P_e P_r$ должны быть взаимно перпендикулярны. Следовательно, скорость v направлена перпендикулярно к отрезку $P_e P_r$.

Итак, абсолютная скорость v любой точки M плоской фигуры S_1 направлена перпендикулярно к отрезку $P_e P_r$ и равна по величине $v = P_e P_r \cdot \omega_e$. Значит, абсолютные скорости всех точек фигуры S_1 равны.

Отсюда можно заключить, что если не только в данный момент, но во все время движения направления составляющих вращений взаимно противоположны, а их угловые скорости равны, то составное движение есть движение *поступательное*. Итак, плоское поступательное движение можно рассматривать как составное из двух вращений в противоположные стороны с равными угловыми скоростями. Совокупность двух вращений в противоположные стороны с равными по величине угловыми скоростями называется *парой вращений*.



Черт. 235.

Пример 52. Решить пример 46 при помощи сложения вращений.

Рассматриваем абсолютное движение шестерни L (черт. 235) как составное из переносного движения вместе со стержнем OA и из относительного движения по отношению к этому стержню.

Переносный мгновенный центр P_e совпадает с точкой O , относительный мгновенный центр P_r совпадает с центром A шестерни L , а абсолютный

мгновенный центр P находится в точке касания окружностей шестерен K и L . Переносная угловая скорость ω_e равна данной угловой скорости ω_1 стержня OA . Искомая угловая скорость ω_s есть абсолютная угловая скорость шестерни L .

Так как абсолютный мгновенный центр P находится между мгновенными центрами P_e и P_r , то все три вращения (абсолютное, переносное и относительное) направлены в одну и ту же сторону. В таком случае имеем:

$$\omega_s = \omega_e + \omega_r.$$

С другой стороны:

$$\frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{P_e P}{P_r P} = \frac{a}{b},$$

откуда, полагая $\omega_e = \omega_1$, находим:

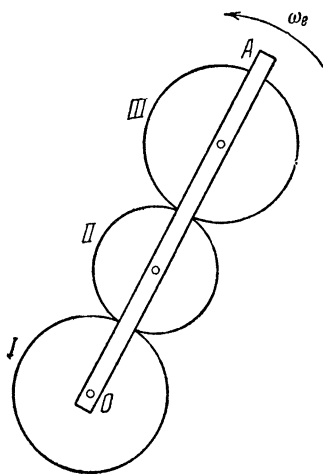
$$\omega_r = \frac{a}{b} \omega_1.$$

Следовательно:

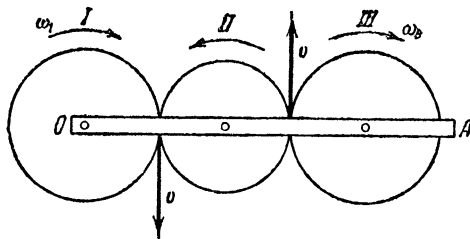
$$\omega_s = \omega_e + \omega_r = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \omega_1.$$

Пример 53. На неподвижную ось O насажены шестерня I и рычаг OA (черт. 236). Шестерня I закреплена неподвижно, рычаг OA вращается вокруг неподвижной оси O и несет оси подвижных шестерен II и III . Радиусы шестерен соответственно равны $r_1 = 20$ см, $r_2 = 15$ см, $r_3 = 20$ см. Рычаг OA вращается вокруг оси O против часовой стрелки, делая 60 оборотов в минуту. Найти угловую скорость шестерни III .

Рассматриваем абсолютное движение шестерни III как составное



Черт. 236.



Черт. 237.

из переносного движения вместе с рычагом OA и из относительного движения по отношению к этому рычагу.

В таком случае переносное вращение шестерни III направлено против часовой стрелки, и переносная угловая скорость равна

$$\omega_e = 60 \text{ об/мин.}$$

Чтобы найти относительную угловую скорость шестерни III , посмотрим на наш механизм с точки зрения наблюдателя, участвующего во вращении рычага OA . Этому наблюдателю рычаг OA представляется неподвижным, шестерня же I представится ему вращающейся по часовой стрелке с угловой скоростью $\omega_e = 60$ об/мин (черт. 237). Шестерни II и III также будут представляться нашему наблюдателю вращающимися вокруг неподвижных

осей; шестерня *II* будет вращаться против часовой стрелки, шестерня *III* — по часовой стрелке. Эти движения шестерен *I*, *II* и *III*, наблюдаемые наблюдателем, вращающимся вместе с рычагом *OA*, являются относительными движениями по отношению к этому рычагу.

Теперь легко найти относительную угловую скорость ω_r шестерни *III*. Имея в виду, что при вращении вокруг неподвижных осей шестерни *I*, *II* и *III* должны иметь в точках касания одинаковые окружные скорости, и обозначая величину этой общей окружной скорости через v , имеем:

$$v = r_1 \omega_e = r_3 \omega_r,$$

откуда

$$\omega_r = \frac{r_1}{r_3} \omega_e = 60 \text{ об/мин.}$$

Следовательно, в своем относительном движении по отношению к рычагу *OA* шестерня *III* вращается по часовой стрелке, делая 60 оборотов в минуту.

Так как переносное и относительное вращения шестерни *III* происходят в противоположные стороны, то абсолютную угловую скорость ω этой шестерни найдем как разность переносной и относительной угловых скоростей:

$$\omega = \omega_e - \omega_r = 60 \text{ об/мин} - 60 \text{ об/мин} = 0.$$

Итак, в своем абсолютном движении шестерня *III* совсем не вращается, — она движется поступательно.

Мы имеем здесь случай пары вращений.

§ 111. Применение сложения вращений к нахождению мгновенных центров скоростей для звеньев плоского механизма

В предыдущем параграфе мы видели, что три мгновенных центра скоростей P , P_e и P_r лежат на одной прямой; в исключительном же случае, когда мгновенный центр P находится в бесконечности, скорость v перпендикулярна к прямой, проходящей через мгновенные центры P_e и P_r .

Это предложение может быть с пользой применено к нахождению мгновенных центров скоростей для звеньев плоского механизма.

Представим себе плоский механизм, состоящий из n звеньев, которые будем рассматривать как плоские фигуры S_1, S_2, \dots, S_n . Условно обозначать мгновенный центр скоростей в относительном движении какого-либо звена S_a по отношению к звену S_b через P_{ab} и заметим, что мгновенный центр скоростей в относительном движении звена S_b по отношению к звену S_a совпадает с мгновенным центром скоростей в относительном движении звена S_a по отношению к звену S_b , т. е. что точка P_{ba} совпадает с точкой P_{ab} .

Возьмем теперь какие-либо три звена S_a, S_b, S_c . Относительное движение звена S_a по отношению к звену S_c можно рассматривать как составное движение из относительного движения звена S_a по отношению к звену S_b и относительного движения S_b по отношению к звену S_c . Применяя к данному случаю предложение, форму-

лированное в начале этого параграфа, мы приходим к следующему результату.

Мгновенные центры P_{ab} , P_{ac} и P_{bc} лежат на одной прямой.

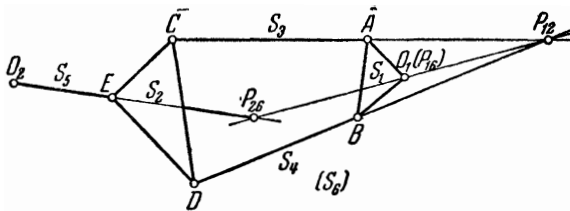
Если же один из этих мгновенных центров, например P_{ac} находится в бесконечности, то скорость звена S_a в его относительном движении по отношению к звену S_c перпендикулярна к прямой, проходящей через два других мгновенных центра P_{ab} и P_{bc} .

Применяя эту теорему (которую будем называть теоремой о трех мгновенных центрах скоростей) к нахождению мгновенных центров скоростей для звеньев плоского механизма, следует рассматривать стойку механизма как $n + 1$ -е звено S_{n+1} , а абсолютное движение звена S_a как относительное движение по отношению к звену S_{n+1} . В таком случае мгновенный центр скоростей в абсолютном движении звена S_a должен быть обозначен через $P_{a,n+1}$.

Пример 54. Механизм состоит из звеньев S_1 и S_2 , соединенных стержнями S_3 и S_4 ; звено S_1 вращается вокруг неподвижной оси O_1 , а к звену S_2 присоединен стержень S_6 , вращающийся вокруг неподвижной оси O_2 (черт. 238). Построить мгновенный центр скоростей для звена S_3 .

Обозначим стойку механизма через S_6 . Требуется построить мгновенный центр P_{36} .

Нам известно направление скорости точки E : оно перпендикулярно к прямой EO_2 . Так как мгновенный центр P_{26} должен лежать на перпендику-



Черт. 238.

ляре, восстановленном в точке E к направлению ее скорости, то, следовательно, он лежит на прямой EO_2 . Чтобы построить другую прямую, на которой должен находиться мгновенный центр P_{26} , воспользуемся теоремой о трех мгновенных центрах.

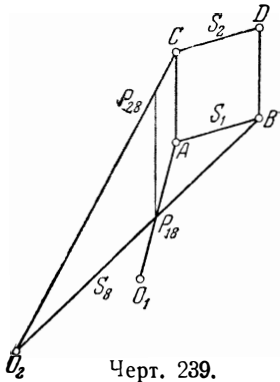
Возьмем звенья S_1 , S_2 и S_6 . Мгновенный центр P_{16} совпадает с неподвижной точкой O_1 . Желая построить мгновенный центр P_{12} , мы замечаем, что в относительном движении звена S_2 по отношению к звену S_1 нам известны направления скоростей точек C и D . Они перпендикулярны к прямым AC и BD . Следовательно, мгновенный центр P_{12} лежит в пересечении прямых AC и BD . Проведем теперь прямую через точки P_{16} и P_{12} ; по теореме о трех мгновенных центрах на этой прямой должен лежать и мгновенный центр P_{26} .

Итак, искомый мгновенный центр P_{26} находится в пересечении прямых EO_2 и O_1P_{12} .

Пример 55. Построить мгновенный центр скоростей для звена CD инверсора Липкина (черт. 239).

Инверсор Липкина состоит из семи стержней. Обозначим стержень AB через S_1 , стержень CD через S_2 , а стойку механизма через S_6 . Требуется построить мгновенный центр P_{26} .

Нам известно направление скорости точки C : оно перпендикулярно к CO_2 . Следовательно, мгновенный центр P_{23} лежит на прямой CO_2 . Чтобы построить другую прямую, на которой должен лежать мгновенный центр P_{23} , воспользуемся теоремой о трех мгновенных центрах.



Черт. 239.

Возьмем звенья S_1 , S_2 и S_3 . Мгновенный центр P_{18} находится в пересечении перпендикуляров, восстановленных в точках A и B к направлениям их скоростей, т. е. в пересечении прямых AO_1 и BO_2 . Относительное же движение звена S_2 по отношению к звену S_1 есть движение поступательное (ибо при всяком положении механизма стержни CD и AB параллельны). Следовательно, мгновенный центр P_{12} находится в бесконечности.

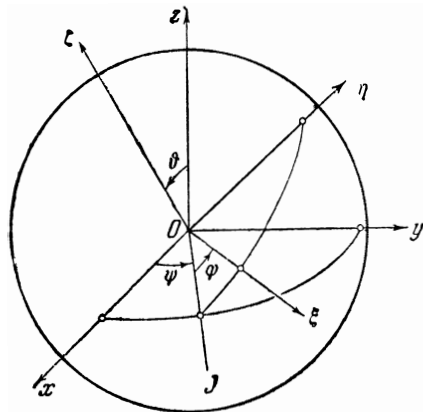
Скорость звена S_2 в его относительном движении по отношению к звену S_1 перпендикулярна к прямой AC . Прямая, проходящая через точки P_{18} и P_{23} , должна быть перпендикулярна к этой скорости, т. е. должна быть параллельна прямой AC . Итак, проведя через точку P_{18} прямую, параллельную AC , найдем искомого мгновенный центр P_{23} в пересечении этой прямой с прямой CO_2 .

ГЛАВА XVIII

ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

§ 112. Эйлеровы углы. Уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной точки

Движение твердого тела называется *вращением вокруг неподвижной точки*, если во все время движения одна точка твердого тела остается неподвижной.



Черт. 240.

Представим себе твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки O (черт. 240). Чтобы определить аналитически вращательное движение твердого тела вокруг точки O , возьмем три взаимно перпендикулярные неподвижные оси x , y , z с началом в точке O и три взаимно перпендикулярные и неизменно связанные с твердым телом оси ξ , η , ζ с началом в той же точке O .

Отметим пересечение плоскостей xOy и $\xi O\eta$; пусть это будет прямая OJ . Введем следующие обозначения:

$$\angle(z, \zeta) = \vartheta, \angle(x, J) = \psi, \angle(J, \xi) = \varphi,$$

причем условимся считать углы ϑ , ψ , φ положительными в том случае, если для наблюдателей, смотрящих соответственно со сторон

положительных осей J, z, ζ , эти углы представляются отложенными от осей z, x, J в сторону, противоположную вращению часовой стрелки.

Заданием углов ϑ, ψ, φ вполне определяется положение осей ξ, η, ζ , а следовательно, и положение твердого тела, с которым эти оси неизменно связаны. Углы ϑ, ψ, φ называются *эйлеровыми углами*.

Если твердое тело совершает вращательное движение вокруг неподвижной точки O , то углы ϑ, ψ, φ непрерывно изменяются с течением времени, т. е. являются некоторыми функциями времени t :

$$\vartheta = f_1(t), \quad \psi = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t).$$

Эти уравнения, которыми вполне определяется вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной точки O , называются *уравнениями вращения твердого тела вокруг неподвижной точки*.

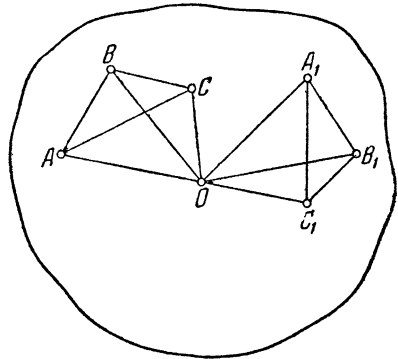
§ 113. Теорема о перемещении твердого тела вокруг неподвижной точки. Мгновенная ось и угловая скорость твердого тела

Представим себе твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки. Покажем, что *твердое тело может быть перемещено из всякого данного положения во всякое другое положение вращением вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку*.

Заметим предварительно, что положение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки O (черт. 241), вполне определяется положением двух его точек A и B , не лежащих на одной прямой с неподвижной точкой O . В самом деле, если точки A и B в некоторый момент занимают положения A_1 и B_1 , то положение любой третьей точки C в рассматриваемый момент мы найдем, построив на треугольнике OA_1B_1 , как на основании, тетраэдр $OA_1B_1C_1$, равный тетраэдру $OABC$.

Перейдем теперь к доказательству формулированной выше теоремы.

Представим себе твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки O (черт. 242; очертание тела на чертеже не изображено). Проведем внутри этого тела из неподвижной точки O , как из центра, поверхность сферы произвольного радиуса. На этой сферической поверхности возьмем какие-нибудь две точки A и B и проведем через эти точки дугу большого



Черт. 241.

круга AB . Положением точек A и B или, что все равно, положением дуги AB вполне определяется положение нашего твердого тела.

Возьмем моменты времени t и $t + \Delta t$. Положим, что в момент t дуга AB занимает положение, указанное на чертеже, а в момент $t + \Delta t$ она занимает положение A_1B_1 . Покажем, что из первого положения во второе наша дуга может быть перемещена вращением вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку O .

Проведем дуги больших кругов AA_1 и BB_1 . Через точки, делящие эти дуги пополам, проведем дуги больших кругов, перпендикулярные к дугам AA_1 и BB_1 . Отметим точку пересечения P_1 только что проведенных двух дуг и соединим точку P_1 с неподвижной точкой O прямой линией. Прямая OP_1 и есть та ось, вращением вокруг которой можно переместить дугу AB в положение A_1B_1 .

В самом деле, проведем еще дуги больших кругов AP_1 , BP_1 , A_1P_1 , B_1P_1 . Сферические треугольники ABP_1 и $A_1B_1P_1$ равны (по равенству трех сторон).

Следовательно:

$$\angle AP_1B = \angle A_1P_1B_1 \text{ } ^1).$$

Вычитая из обеих частей этого равенства по углу $\angle A_1P_1B_1$, получаем $\angle AP_1A_1 = \angle BP_1B_1$.

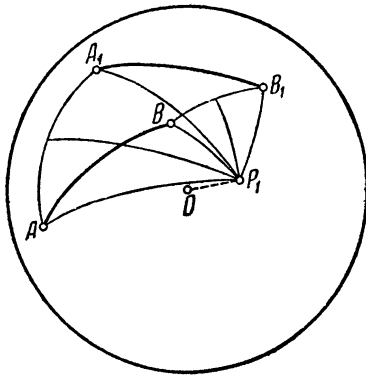
Обозначим каждый из равных углов $\angle AP_1A_1$ и $\angle BP_1B_1$ через $\Delta\alpha$.

Если повернем дугу AB вокруг оси OP_1 на угол $\Delta\alpha$, то точка A займет положение A_1 , точка B займет положение B_1 , и, следовательно, дуга AB переместится в положение A_1B_1 .

Итак, дугу AB (а вместе с нею и все твердое тело) можно переместить из первого положения во второе поворотом вокруг оси OP_1 на угол $\Delta\alpha$.

Перейдем теперь к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. При приближении Δt к нулю второе положение дуги AB приближается к ее первому положению и второе положение твердого тела приближается к его первому положению. Вместе с тем ось вращения OP_1 приближается к некоторому предельному положению OP , которое называется *мгновенной осью вращения* для данного момента t . Предел же, к которому приближается отношение $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$, когда Δt приближается к нулю, назы-

¹⁾ Под углом $\angle AP_1B$ мы понимаем угол между касательными, проведенными к дугам P_1A и P_1B в точке P_1 .



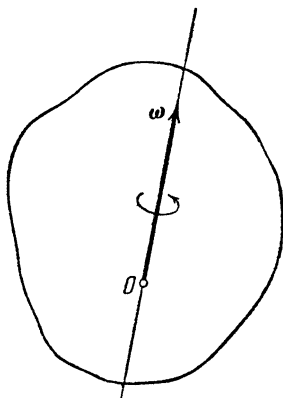
Черт. 242.

вается *угловой скоростью* твердого тела в момент t . Обозначим угловую скорость буквой ω ; следовательно,

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta \alpha}{\Delta t} \right].$$

Конечно, этот предел не равен производной $\frac{d\alpha}{dt}$ (ибо нет никакого угла α). В дальнейшем будет показано, как может быть вычислена угловая скорость ω , если заданы уравнения вращения твердого тела.

Аналитическое исследование вращения твердого тела вокруг неподвижной точки чрезвычайно упрощается, если условиться рассматривать угловую скорость тела как векторную величину. Во всем дальнейшем мы будем рассматривать угловую скорость как вектор (мы будем его обозначать ω), приписывая угловой скорости направление мгновенной оси, причем условимся откладывать величину угловой скорости по мгновенной оси от неподвижной точки O в такую сторону, чтобы для наблюдателя, расположенного по вектору угловой скорости (ногами в точке O), вращение твердого тела вокруг мгновенной оси представлялось происходящим против часовой стрелки (черт. 243).



Черт. 243.

§ 114. Угловое ускорение

Величина угловой скорости ω , вообще говоря, изменяется с течением времени; изменяется с течением времени также и направление мгновенной оси, а следовательно, и направление угловой скорости ω .

Возьмем два момента времени t и $t + \Delta t$. Положим, что моменту t соответствует угловая скорость ω , а моменту $t + \Delta t$ — угловая скорость ω_1 (черт. 244). Построим разность векторов ω_1 и ω , т. е. векторное приращение $\Delta\omega$ угловой скорости за время Δt .

Предел отношения приращения угловой скорости $\Delta\omega$ к соответствующему промежутку времени Δt при $\Delta t \rightarrow 0$ называется *угловым ускорением* в момент t . Обозначая угловое ускорение буквой ε , имеем:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta\omega}{\Delta t} \right].$$

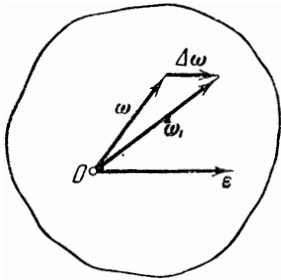
Конечно, угловое ускорение ε как предел векторной величины само является вектором. Вектор ε мы будем откладывать от неподвижной точки O .

Предел отношения приращения переменного вектора к соответствующему приращению независимой переменной есть векторная производная от этого вектора. Следовательно:

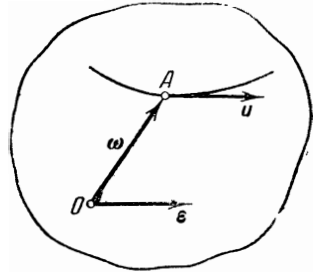
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Итак, *угловое ускорение равно векторной производной от угловой скорости по времени.*

Если величина и направление угловой скорости ω известны для любого момента времени, то угловое ускорение ε может быть найдено следующим простым приемом.



Черт. 244.



Черт. 245.

Обозначим конец вектора угловой скорости ω буквой A (черт. 245). Так как вектор ω изменяет с течением времени свою величину и свое направление, то точка A перемещается с течением времени в пространстве, описывая некоторую кривую, которая называется *годографом* угловой скорости. Найдем скорость u , с которой движется точка A по годографу.

Мы знаем, что скорость точки равна векторной производной от радиуса-вектора этой точки по времени. Радиусом-вектором точки A является вектор ω . Следовательно:

$$u = \frac{d\omega}{dt}.$$

Мы заключаем, что

$$\varepsilon = u,$$

т. е. *угловое ускорение равно линейной скорости конца вектора угловой скорости.* Применяя к вычислению скорости u известные нам приемы определения скорости точки, получаем возможность вычислить угловое ускорение ε .

§ 115. Скорости точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки

Возьмем какую-нибудь точку M твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки O (черт. 246). Отметим положения, занимаемые точкой M в момент t (положение M) и в момент $t + \Delta t$ (положение M_1). Скорость v точки M в момент t определим как предел скорости v_m фиктивного равномерного движения по хорде MM_1 .

Имеем:

$$v_m = \frac{MM_1}{\Delta t}.$$

Мы знаем, что наше твердое тело может быть перемещено из первого положения во второе поворотом вокруг некоторой оси OP_1 на некоторый угол $\Delta\alpha$. Опустив из точек M и M_1 перпендикуляры MK_1 и M_1K_1 на ось вращения OP_1 , получим равнобедренный треугольник MK_1M_1 , в котором угол при вершине K_1 равен $\Delta\alpha$. Из этого треугольника выводим:

$$MM_1 = 2MK_1 \sin \frac{\Delta\alpha}{2}$$

и, следовательно:

$$v_m = 2MK_1 \frac{\sin \frac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [v_m] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[2MK_1 \cdot \frac{\sin \frac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[MK_1 \cdot \frac{\sin \frac{\Delta\alpha}{2}}{\frac{\Delta\alpha}{2}} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \right].$$

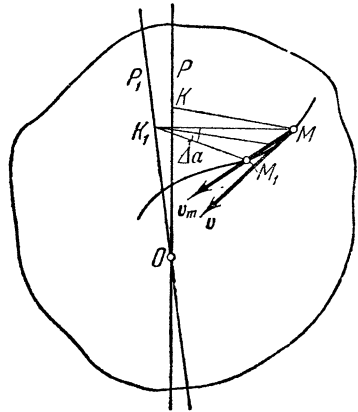
Но

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [MK_1] = MK, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{\Delta\alpha}{2}}{\frac{\Delta\alpha}{2}} \right] = 1,$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \right] = \omega,$$

где MK есть перпендикуляр, опущенный из точки M на мгновенную ось OP . Обозначая MK через r , находим:

$$v = r\omega.$$



Черт. 246.

С другой стороны, фиктивная скорость v_m перпендикулярна к оси вращения OP_1 (ибо плоскость треугольника MK_1M_1 перпендикулярна к оси OP_1) и образует угол $90^\circ - \frac{\Delta\alpha}{2}$ с отрезком MK_1 . Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, мы заключаем, что скорость v перпендикулярна к мгновенной оси OP и к перпендикуляру MK , опущенному из точки M на мгновенную ось. Другими словами, скорость v перпендикулярна к плоскости, проходящей через точку M и мгновенную ось OP .

Полученные для величины и направления скорости v результаты можно кратко формулировать, сказав, что *скорость любой точки твердого тела есть вращательная скорость вокруг мгновенной оси вращения.*

Для точек, лежащих на мгновенной оси, имеем $r=0$, а следовательно, и $v=0$. Значит, мгновенную ось вращения можно определить как геометрическое место точек твердого тела, скорости которых в данный момент равны нулю.

Чтобы построить мгновенную ось, соответствующую данному моменту, достаточно найти одну точку N твердого тела, скорость которой в этот момент равна нулю. Прямая, проходящая через точку N и неподвижную точку O , и есть мгновенная ось OP (черт. 247).

Если мгновенная ось уже построена, то, для нахождения угловой скорости ω достаточно знать скорость v_a какой-нибудь точки A (не лежащей на мгновенной оси). Опуская перпендикуляр AK из точки A на мгновенную ось, имеем:

$$v_a = AK \cdot \omega,$$

откуда

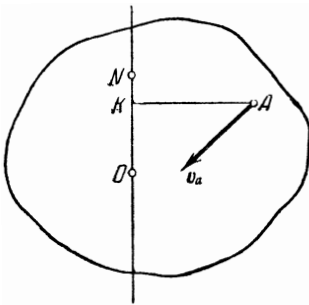
$$\omega = \frac{v_a}{AK},$$

т. е. для нахождения величины угловой скорости ω следует разделить величину скорости v_a на расстояние точки A до мгновенной оси вращения.

Пример 56. Круглый диск катится без скольжения по горизонтальной плоскости, причем горизонтальная ось его OA вращается вокруг неподвижной вертикальной оси OB с угловой скоростью ω_1 (черт. 248); $OA = a$, $OB = b$. Найти угловую скорость диска, а также скорость наивысшей точки диска M .

Движение диска можно рассматривать как вращение вокруг неподвижной точки O . Прежде всего найдем мгновенную ось этого вращения.

Мгновенная ось должна проходить через неподвижную точку O и через ту точку диска, скорость которой в данный момент равна нулю. Так как по предположению диск катится без скольжения, то этой точкой является



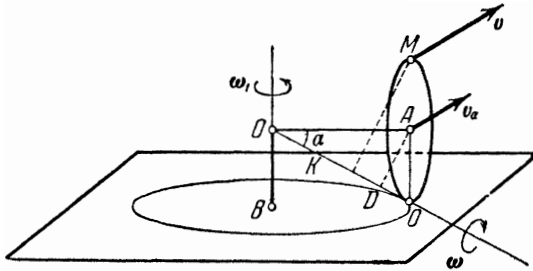
Черт. 247.

точка касания диска с горизонтальной плоскостью, по которой он катится. Обозначая эту точку буквой C и соединяя ее прямой линией с неподвижной точкой O , получаем мгновенную ось OC .

Чтобы найти величину ω угловой скорости диска, обратимся к величине v_a скорости его центра A . Так как точка A принадлежит стержню OA , вращающемуся с угловой скоростью ω_1 вокруг неподвижной оси OB , то скорость v_a должна быть вращательной скоростью вокруг оси OB , т. е.

$$v_a = OA \cdot \omega_1 = a\omega_1.$$

Но точка A принадлежит также нашему диску, а следовательно, ее скорость v_a должна быть в то же время вращательной скоростью вокруг



Черт. 248.

мгновенной оси OC . Опуская из точки A перпендикуляр AD на мгновенную ось OC , обозначая угол AOC через α и замечая, что $AD = OA \sin \alpha = a \sin \alpha$, получаем:

$$v_a = AD \cdot \omega = a\omega \sin \alpha,$$

откуда

$$\omega = \frac{v_a}{a \sin \alpha} = \frac{a\omega_1}{a \sin \alpha} = \frac{\omega_1}{\sin \alpha}.$$

Далее, обращаясь к треугольнику AOC , легко заметить, что

$$\sin \alpha = \frac{AC}{OC} = \frac{OB}{OC} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Следовательно:

$$\omega = \omega_1 \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}.$$

Направление вращения диска вокруг мгновенной оси определяется направлением скорости v_a точки A ; это направление указано на черт. 248 стрелкой.

Обратимся теперь к определению скорости точки M . Мы найдем эту скорость как вращательную скорость вокруг мгновенной оси. Следовательно, обозначая скорость точки M через v , будем иметь:

$$v = MK \cdot \omega,$$

где MK — перпендикуляр, опущенный из точки M на мгновенную ось OC . Замечая, что $MK = 2AD = 2a \sin \alpha$, находим:

$$v = 2a \omega \sin \alpha,$$

или, подставляя значение ω :

$$v = 2a \omega_1.$$

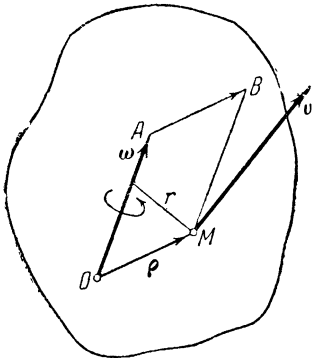
Скорость v направлена перпендикулярно к плоскости, проходящей через точку M и мгновенную ось OC , в сторону вращения точки M вокруг мгновенной оси.

§ 116. Векторная формула вращательной скорости

В предыдущем параграфе мы видели, что скорость всякой точки твердого тела есть вращательная скорость вокруг мгновенной оси. Сейчас мы выведем векторную формулу для этой вращательной скорости, которая во многих случаях очень полезна.

Дано твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки O (черт. 249). Возьмем точку M этого тела и отметим угловую скорость ω (направив ее по мгновенной оси). Скорость v точки M направлена перпендикулярно к плоскости, проходящей через вектор угловой скорости ω и через точку M , в сторону вращения тела; величина скорости v равна

$$v = r\omega,$$



Черт. 249.

где r — длина перпендикуляра, опущенного из точки M на вектор ω .

Обозначим радиус-вектор \overline{OM} (которому мы приписываем направление от точки O к точке M) через ρ и составим векторное произведение $\omega \times \rho$. Это — вектор, численное значение которого равно площади параллелограмма $OABM$, построенного на векторах ω и ρ , или, что то же, произведению $r\omega$; направ-

ление вектора $\omega \times \rho$ есть направление перпендикуляра к плоскости того же параллелограмма, причем перпендикуляр должен быть проведен в такую сторону, чтобы для наблюдателя, расположенного по этому перпендикуляру, направление обхода $OABM$ было противоположно вращению часовой стрелки. Как видно, векторное произведение $\omega \times \rho$ и по величине, и по направлению совпадает с вектором v . Таким образом получаем векторное равенство:

$$v = \omega \times \rho.$$

Итак, *вращательная скорость точки равна векторному произведению угловой скорости тела на радиус-вектор данной точки*. При этом радиус-вектор должен быть проведен в данную точку из той неподвижной точки, вокруг которой вращается тело.

§ 117. Ускорения точек твердого тела

Воспользуемся только что установленной формулой для вычисления ускорения какой-либо точки вращающегося твердого тела.

Представим себе твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки O , и возьмем в нем какую-либо точку M (черт. 250). Дань

вектор угловой скорости ω и вектор углового ускорения ε . Требуется найти ускорение точки M .

Обозначая скорость и ускорение точки M через v и w , имеем:

$$w = \frac{dv}{dt}.$$

Полагая здесь

$$v = \omega \times \rho,$$

где ρ — радиус-вектор, проведенный в точку M из неподвижной точки O , и вспоминая правило векторного дифференцирования векторного произведения, установленное в § 83, будем иметь:

$$w = \frac{d\omega}{dt} \times \rho + \omega \times \frac{d\rho}{dt}.$$

С другой стороны, имеем:

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon, \quad \frac{d\rho}{dt} = v.$$

Следовательно:

$$w = \varepsilon \times \rho + \omega \times v.$$

Вводя обозначения:

$$\varepsilon \times \rho = w_1; \quad \omega \times v = w_2,$$

будем иметь:

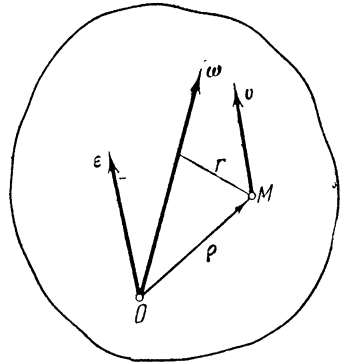
$$w = w_1 + w_2.$$

Итак, искомое ускорение w складывается из составляющих ускорений w_1 и w_2 . Найдем величины и направления этих составляющих.

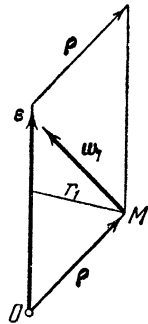
Обращаясь к ускорению w_1 , строим векторное произведение $\varepsilon \times \rho$. Для этого из конца вектора ε проводим вектор, равный радиусу-вектору ρ , и на векторах ε и ρ строим параллелограмм (черт. 251). Величина ускорения w_1 численно равна площади этого параллелограмма. Следовательно, опуская из точки M перпендикуляр на вектор ε и обозначая длину этого перпендикуляра через r_1 , будем иметь:

$$w_1 = r_1 \varepsilon.$$

Направление ускорения w_1 перпендикулярно к плоскости построенного параллелограмма, или, что то же, — к плоскости, проходящей через вектор углового ускорения ε и точку M . Вспоминая правило обхода параллелограмма, легко заметить, что ускорение w_1 имеет такое направление, что для наблюдателя, расположенного по вектору ε , оно



Черт. 250.



Черт. 251.

представляется направленным против часовой стрелки. Ускорение ω_1 мы назовем *вращательным ускорением вокруг вектора углового ускорения*.

Перейдем к ускорению ω_2 . Находим векторное произведение $\omega \times v$. Для этого из конца вектора ω откладываем вектор v и на векторах ω и v строим параллелограмм (черт. 252). Так как векторы ω и v взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм оказывается прямоугольным. Мы заключаем, что

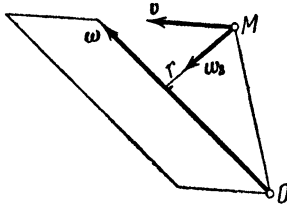
$$\omega_2 = \omega v.$$

С другой стороны, имеем:

$$v = r\omega,$$

где r — длина перпендикуляра, опущенного из точки M на вектор угловой скорости ω . Следовательно:

$$\omega_2 = r\omega^2.$$



Черт. 252.

Что касается направления этого ускорения, то оно перпендикулярно к плоскости построенного на векторах ω и v прямоугольника, т. е. направлено по перпендикуляру, опущенному из точки M на вектор ω . Согласно известному правилу обхода параллелограмма, мы заключаем, что ускорение ω_2 направлено от точки M к вектору ω или, что все равно, к мгновенной оси.

Как видно, ускорение ω_2 — не что иное, как *центростремительное ускорение при вращении тела вокруг вектора ω или вокруг мгновенной оси*.

Итак, *ускорение точки твердого тела складывается из вращательного ускорения вокруг вектора углового ускорения и центростремительного ускорения при вращении вокруг вектора угловой скорости*. Это предложение называется теоремой Ривальса.

Вращение тела вокруг неподвижной оси можно рассматривать как частный случай вращения вокруг неподвижной точки. В этом частном случае вектор угловой скорости ω сохраняет неизменное направление: он направлен по неподвижной оси вращения. Отсюда следует, что по этой же неподвижной оси направлен и вектор углового ускорения ϵ . Итак, в случае вращения тела вокруг неподвижной оси направления векторов ω и ϵ совпадают или противоположны. Легко видеть, что в этом случае составляющие ускорения ω_1 и ω_2 превращаются во вращательное и центростремительное ускорения ω_1 и ω_n , о которых шла речь в § 94.

Пример 57. Круглый диск катится без скольжения по горизонтальной плоскости, причем горизонтальная ось его OA вращается вокруг неподвижной вертикальной оси OB с постоянной угловой скоростью ω_1 ; $OA = a$, $OB = b$ (черт. 253). Найти ускорение наивысшей точки диска M .

Начнем с построения вектора угловой скорости диска ω и вектора углового ускорения ϵ .

Мы уже знаем (см. пример 56), что величина угловой скорости диска ω равна

$$\omega = \frac{\omega_1}{\sin \alpha},$$

где α — угол между осью диска OA и мгновенной осью OC . Эту величину откладываем по мгновенной оси влево от точки O (так чтобы для наблюдателя, расположенного по вектору ω , вращение диска вокруг мгновенной оси представлялось происходящим против часовой стрелки).

Угловое ускорение диска ϵ мы найдем как скорость конца вектора угловой скорости ω . Вектор ω , не изменяя своей величины, равномерно вращается вокруг вертикальной оси OB с угловой скоростью ω_1 . Обозначая вращательную скорость конца вектора ω через u , имеем:

$$u = d\omega_1,$$

где d — длина перпендикуляра, опущенного из конца вектора ω на ось OB . Далее:

$$d = \omega \cos \alpha = \omega_1 \operatorname{ctg} \alpha.$$

Следовательно:

$$u = \omega_1^2 \operatorname{ctg} \alpha.$$

Скорость u направлена в горизонтальной плоскости перпендикулярно к радиусу d в сторону вращения вектора ω вокруг оси OB . Так как угловое ускорение ϵ равно скорости u , то мы заключаем, что вектор углового ускорения ϵ направлен по перпендикуляру, восставленному в точке O к вертикальной плоскости, проходящей через оси OA и OB ; величина же углового ускорения равна

$$\epsilon = \omega_1^2 \operatorname{ctg} \alpha.$$

Обратимся теперь к точке M и вычислим для этой точки ускорения w_1 (вращательное ускорение вокруг вектора ϵ) и w_2 (центростремительное ускорение при вращении вокруг вектора ω).

Имеем:

$$w_1 = OM \cdot \epsilon$$

(где OM — перпендикуляр, опущенный из точки M на вектор ϵ). Из $\triangle OMA$ имеем:

$$OM = \frac{a}{\cos \alpha}.$$

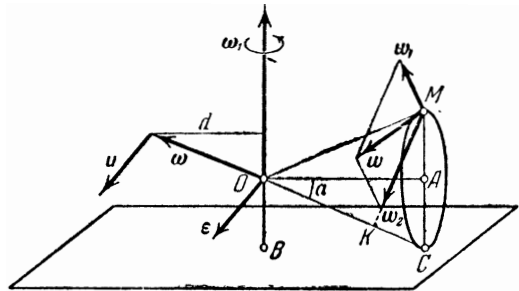
Следовательно:

$$w_1 = \frac{a\epsilon}{\cos \alpha} = \frac{a\omega_1^2}{\sin \alpha}.$$

Ускорение w_1 перпендикулярно к вектору ϵ и к отрезку OM ; для наблюдателя, расположенного по вектору ϵ , оно представляется направленным против часовой стрелки.

Далее, имеем:

$$w_2 = MK \cdot \omega^2,$$



Черт. 253.

где MK — перпендикуляр, опущенный из точки M на мгновенную ось OC .
Имеем:

$$MK = 2a \sin \alpha$$

и, следовательно:

$$\omega_2 = 2a\omega^2 \sin \alpha = \frac{2a\omega_1^2}{\sin \alpha}.$$

Ускорение ω_2 направлено по прямой MK от точки M к точке K .

Полное ускорение ω точки M складывается из ускорений ω_1 и ω_2 . Так как оба эти ускорения лежат в вертикальной плоскости, проходящей через ось OB и точку M , то в этой же плоскости расположено и ускорение ω . Мы найдем ускорение ω как диагональ параллелограмма, построенного на ускорениях ω_1 и ω_2 . Имея в виду, что угол, противолежащий диагонали ω в этом параллелограмме, равен 2α , будем иметь:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1\omega_2 \cos 2\alpha = \frac{a^2\omega_1^4}{\sin^2 \alpha} (5 - 4 \cos 2\alpha) = \\ &= \frac{a^2\omega_1^4}{\sin^2 \alpha} (1 + 8 \sin^2 \alpha) = a^2\omega_1^4 (9 + \operatorname{ctg}^2 \alpha). \end{aligned}$$

Подставляя здесь

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b},$$

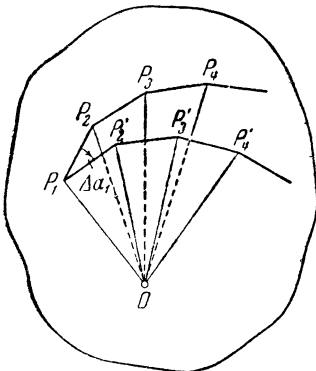
находим:

$$\omega = \frac{a}{b} \omega_1^2 \sqrt{a^2 + 9b^2}.$$

§ 118. Аксиоды

Возьмем ряд последовательных моментов времени t , $t + \Delta t$, $t + 2\Delta t$, $t + 3\Delta t$ и т. д. и отметим положения, занимаемые нашим твердым телом в эти моменты; назовем их 1-м, 2-м, 3-м, 4-м и т. д. положениями тела. Положим, что из 1-го положения во 2-е тело может быть перемещено вращением вокруг оси OP_1 на угол $\Delta\alpha_1$, из 2-го положения в 3-е — вращением вокруг оси OP_2 на угол $\Delta\alpha_2$, из 3-го положения в 4-е — вращением вокруг оси OP_3 на угол $\Delta\alpha_3$ и т. д. (черт. 254). Для краткости речи условимся вращения вокруг осей OP_1 , OP_2 , OP_3 и т. д. называть 1-м, 2-м, 3-м и т. д. вращениями.

Проведя плоскости последовательно через прямые OP_1 и OP_2 , OP_2 и OP_3 , OP_3 и OP_4 и т. д., мы получим многогранник $OP_1P_2P_3P_4\dots$ с вершиной в неподвижной точке O . Ребрами этого многогранника являются последовательные оси вращения нашего тела; назовем этот многогранник многогранником осей, и притом «неподвижным» многогранником осей, в отличие от другого многогранника осей, о котором сейчас будет идти речь.



Черт. 254.

Построим ту прямую OP'_3 твердого тела, которая после 1-го вращения совпадает с прямой OP_2 и, следовательно, является осью вращения при 2-м вращении. Для этого проводим через прямую OP_1 полуплоскость, образующую двугранный угол $\Delta\alpha_1$ с гранью P_1OP_2 (причем двугранный угол $\Delta\alpha_1$ откладываем от грани P_1OP_2 в сторону, обратную вращению твердого тела вокруг оси OP_1); в этой полуплоскости проводим через точку O прямую OP'_2 , образующую с прямой OP_1 угол, равный углу P_1OP_2 .

Затем строим те прямые OP'_3 , OP'_4 и т. д. нашего твердого тела, которые после 2-го, 3-го и т. д. вращений совпадают с прямыми OP_3 , OP_4 и т. д. и, следовательно, являются осями вращения при 3-м, 4-м и т. д. вращениях.

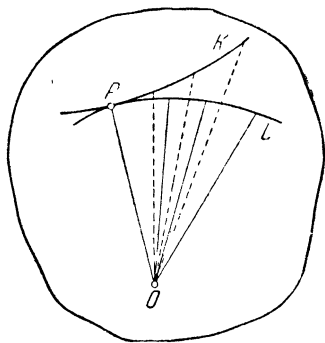
Многогранник $OP_1P'_2P'_3P'_4\dots$, в котором прямые OP_1 , OP'_2 , OP'_3 , OP'_4 и т. д. служат ребрами, мы назовем «подвижным» многогранником осей. Его ребрами являются те прямые твердого тела, которые служат осями вращения при последовательных вращениях тела. Этот многогранник неизменно связан с твердым телом и движется вместе с ним. Его движение мы можем кратко характеризовать, сказав, что при фиктивном движении твердого тела, состоящем из ряда последовательных вращений, подвижной многогранник осей катится без скольжения по неподвижному многограннику осей.

Перейдем теперь к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. Предельными положениями осей вращения OP_1 , OP_2 , OP_3 и т. д. являются мгновенные оси, соответствующие последовательным моментам времени. Предельное положение оси OP_1 есть мгновенная ось OP , соответствующая моменту t (черт. 255).

Вместе с тем неподвижный многогранник осей в пределе обращается в коническую поверхность с вершиной в неподвижной точке O , которая представляет геометрическое место мгновенных осей в неподвижном пространстве. Эта коническая поверхность называется *неподвижным аксоидом*; обозначим ее буквой K .

Подвижной многогранник осей в пределе также обращается в коническую поверхность с вершиной в точке O , которая представляет общее место мгновенных осей в движущемся твердом теле. Эта коническая поверхность неизменно связана с твердым телом и движется вместе с ним; она называется *подвижным аксоидом*; обозначим ее буквой L .

Так как угол $\Delta\alpha_1$ при $\Delta t \rightarrow 0$ обращается в нуль, то оба аксоида касаются по своей общей производящей OP ; эта общая производящая является мгновенной осью вращения для момента t .



Черт. 255.

диагонали Ob (ногами в точке O), абсолютное вращение представляется направленным против часовой стрелки.

1. Покажем, что абсолютная скорость точки b равна нулю. По теореме сложения скоростей абсолютная скорость \mathbf{v} любой точки данного твердого тела равна сумме ее переносной и относительной скоростей \mathbf{v}_e и \mathbf{v}_r :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r.$$

Применим эту теорему к точке b . Переносная и относительная скорости \mathbf{v}_e и \mathbf{v}_r точки b суть вращательные скорости вокруг соответствующих мгновенных осей. Следовательно, опуская перпендикуляры bk и bl из точки b на эти мгновенные оси, имеем:

$$\mathbf{v}_e = bk \cdot \omega_e = bk \cdot Oa,$$

$$\mathbf{v}_r = bl \cdot \omega_r = bl \cdot Oc.$$

Но произведения $bk \cdot Oa$ и $bl \cdot Oc$ равны площади параллелограмма $Oabc$. Следовательно, $bk \cdot Oa = bl \cdot Oc$ и

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_r.$$

Направления же скоростей \mathbf{v}_e и \mathbf{v}_r взаимно противоположны: скорость \mathbf{v}_e направлена перпендикулярно к плоскости чертежа по направлению от читателя, а скорость \mathbf{v}_r — перпендикулярно к плоскости чертежа по направлению к читателю (направление переносного и относительного вращений указаны на чертеже стрелками). Следовательно, сумма скоростей \mathbf{v}_e и \mathbf{v}_r равна нулю, т. е. абсолютная скорость \mathbf{v} точки b равна нулю.

Отсюда следует, что прямая Ob есть мгновенная ось в абсолютном движении тела.

2. Применим теорему сложения скоростей к точке c . Так как точка c лежит на мгновенной оси относительного вращения, то ее относительная скорость \mathbf{v}_r равна нулю. Следовательно, абсолютная скорость \mathbf{v} точки c должна быть равна ее переносной скорости \mathbf{v}_e . Абсолютная же и переносная скорости точки c суть вращательные скорости вокруг соответствующих мгновенных осей. Опуская из точки c перпендикуляры cm и cn на эти мгновенные оси, имеем:

$$\mathbf{v} = cm \cdot \omega, \quad \mathbf{v}_e = cn \cdot \omega_e = cn \cdot Oa = 2 \triangle Oa\dot{b} = 2 \triangle O\dot{b}c = O\dot{b} \cdot cm.$$

Приравнивая эти скорости, получаем:

$$cm \cdot \omega = Ob \cdot cm$$

или

$$\omega = Ob.$$

3. Направление абсолютной скорости \mathbf{v} точки c совпадает с направлением ее переносной скорости \mathbf{v}_e ; следовательно, скорость \mathbf{v}

точки c направлена перпендикулярно к плоскости чертежа по направлению от читателя. Отсюда видно, что для наблюдателя, расположенного на отрезке Ob (ногами в точке O), абсолютное вращение будет представляться происходящим против часовой стрелки.

Доказанная теорема сложения угловых скоростей может быть названа также *правилом параллелограмма угловых скоростей*.

Эта теорема легко обобщается на случай какого угодно числа составляющих движений.

Например, представим себе твердое тело A и две неизменяемые среды B и C . Представим себе, что как тело A , так и среды B и C вращаются вокруг одной и той же неподвижной точки O . Абсолютное движение тела A мы можем рассматривать как составное из трех движений: относительного движения тела A по отношению к среде B , относительного движения среды B по отношению к среде C и переносного движения, т. е. движения среды C . Все эти движения суть вращения вокруг неподвижной точки O . Назовем угловые скорости трех составляющих движений соответственно через ω_1 , ω_2 , ω_3 , а угловую скорость составного движения через ω .

Рассматривая сначала абсолютное движение тела A как составное из относительного его движения по отношению к среде B и переносного движения вместе со средой B и обозначая угловую скорость среды B (в ее переносном движении) через ω'_2 , имеем по доказанному:

$$\omega = \omega_1 + \omega'_2.$$

Но движение среды B можно рассматривать как составное из относительного ее движения по отношению к среде C и переносного движения вместе со средой C . Следовательно, по доказанному имеем:

$$\omega'_2 = \omega_2 + \omega_3.$$

Итак, получаем:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3,$$

т. е. угловая скорость составного движения равна сумме угловых скоростей составляющих движений.

И вообще, если имеем вращение вокруг неподвижной точки, которое представляется как составное из n составляющих вращений вокруг той же точки, то угловая скорость ω составного вращения равна сумме угловых скоростей $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ составляющих вращений:

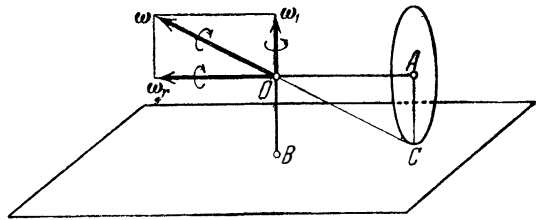
$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n.$$

Другими словами, угловая скорость ω есть замыкающая сторона многоугольника, построенного на угловых скоростях $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Этот результат можно назвать *правилом многоугольника угловых скоростей*.

Пример 58. Найти угловую скорость диска в примере 55 при помощи параллелограмма угловых скоростей.

Движение диска можно рассматривать как составное из двух движений: переносного вращения вокруг оси OB вместе со стержнем OA и относительного вращения вокруг этого стержня.

Переносная угловая скорость ω_1 должна быть направлена по оси OB (вверх, если, как мы предполагаем, вращение стержня OA вокруг оси OB происходит против часовой стрелки); относительная угловая скорость ω_r и искомая нами абсолютная угловая скорость диска ω направлены соответственно по прямой OA и по мгновенной оси OC . Построив параллелограмм угловых скоростей (черт. 257), находим из этого параллелограмма выражение абсолютной угловой скорости:



Черт. 257.

$$\omega = \frac{\omega_1}{\sin \alpha}$$

или, имея в виду, что $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

$$\omega = \omega_1 \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}.$$

Направление абсолютного вращения определяется направлением абсолютной угловой скорости ω .

§ 120. Проекция угловой скорости на координатные оси, неизменно связанные с твердым телом

Представим себе твердое тело A , вращающееся вокруг неподвижной точки O . Возьмем взаимно перпендикулярные неподвижные оси x, y, z и взаимно перпендикулярные подвижные оси ξ, η, ζ , неизменно связанные с твердым телом (черт. 258); очертание тела A на чертеже не изображено. Введем эйлеровы углы ϑ, ψ, φ и положим, что движение нашего твердого тела определяется уравнениями движения

$$\vartheta = f_1(t), \quad \psi = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t).$$

Построим угловую скорость ω тела A в момент t и предложим себе вычислить проекции угловой скорости ω на оси ξ, η, ζ .

Для этой цели воспользуемся теоремой сложения угловых скоростей.

Представим себе две неизменяемые среды B и C , из которых среда C вращается вокруг неподвижной оси z вместе с прямой OJ^1 ,

¹⁾ Напомним, что прямая OJ есть пересечение плоскостей xOy и $\xi O\eta$.

а среда B совершает относительное движение по отношению к среде C , вращаясь вокруг оси OJ вместе с осью ζ . Относительное движение тела A по отношению к среде B будет не что иное, как вращение вокруг оси ζ .

Абсолютное движение тела A мы можем рассматривать как составное из его относительного движения по отношению к среде B , относительного движения среды B по отношению к среде C и переносного движения, т. е. движения среды C . Следовательно, обозначая угловые скорости этих трех составляющих движений соответственно через $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, имеем:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3.$$

Так как составляющие движения суть вращения вокруг постоянных осей, то величины угловых скоростей $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ вычисляются легко; они равны производным по времени от соответствующих углов поворота.

Углом поворота в относительном вращении тела A по отношению к среде B является угол φ , в относительном вращении среды B по отношению к среде C — угол ϑ , а в переносном движении, т. е. вращении среды C — угол ψ . Следовательно,

$$\omega_1 = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \omega_2 = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \omega_3 = \frac{d\psi}{dt}.$$

Эти угловые скорости должны быть отложены по соответствующим осям вращения, т. е. ω_1 по оси ζ , ω_2 по оси OJ , ω_3 по оси z .

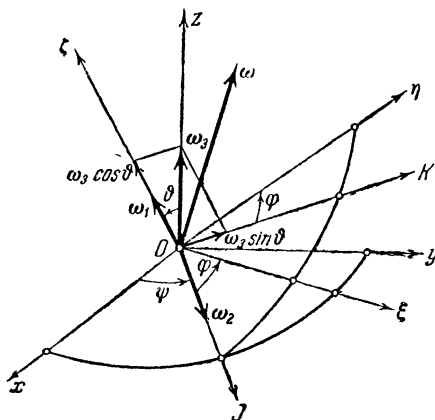
Обозначим искомые проекции угловой скорости ω на оси ξ, η, ζ через p, q, r , а проекции на те же оси угловых скоростей $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ через $p_1, q_1, r_1; p_2, q_2, r_2; p_3, q_3, r_3$. Имея в виду, что проекция суммы равна сумме проекций составляющих, получаем

$$p = p_1 + p_2 + p_3, \quad q = q_1 + q_2 + q_3, \quad r = r_1 + r_2 + r_3.$$

Остается вычислить проекции p_1, q_1, \dots, r_3 . Обращаясь к черт. 258, находим:

$$p_1 = 0, \quad q_1 = 0, \quad r_1 = \frac{d\varphi}{dt},$$

$$p_2 = \frac{d\vartheta}{dt} \cos \varphi, \quad q_2 = -\frac{d\vartheta}{dt} \sin \varphi, \quad r_2 = 0.$$



Черт. 258.

Чтобы вычислить проекции p_3 , q_3 , r_3 , разложим сначала угловую скорость ω_3 на две составляющие, из которых одна направлена по оси ζ , а другая лежит в плоскости $\xi O\eta$. Первая составляющая равна $\frac{d\psi}{dt} \cos \vartheta$, а вторая равна $\frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta$ и направлена по прямой OK , лежащей в плоскости $\zeta O\eta$ и перпендикулярной к прямой OJ . Разлагая затем эту вторую составляющую по осям ξ и η и замечая, что прямая OK образует с осями ξ и η углы, равные $90^\circ - \varphi$ и φ , находим:

$$p_3 = \frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta \sin \varphi, \quad q_3 = \frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta \cos \varphi, \quad r_3 = \frac{d\psi}{dt} \cos \vartheta.$$

Итак, мы приходим к следующим окончательным формулам:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta \sin \varphi + \frac{d\vartheta}{dt} \cos \varphi, \\ q &= \frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta \cos \varphi - \frac{d\vartheta}{dt} \sin \varphi, \\ r &= \frac{d\psi}{dt} \cos \vartheta + \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

По этим формулам могут быть вычислены проекции p , q , r угловой скорости ω , если эйлеровы углы ϑ , ψ , φ заданы как функции времени t .

Вычислив эти проекции, мы можем затем найти величину и направление угловой скорости ω по формулам:

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2},$$

$$\cos(\omega, \xi) = \frac{p}{\omega}, \quad \cos(\omega, \eta) = \frac{q}{\omega}, \quad \cos(\omega, \zeta) = \frac{r}{\omega}.$$

Формулы (1) являются основными при аналитическом исследовании вращения твердого тела вокруг неподвижной точки.

§ 121. Проекция скорости точки твердого тела на координатные оси, связанные с телом

Воспользуемся формулами, выведенными в § 59, для вычисления проекций скорости \mathbf{v} какой-либо точки вращающегося тела на подвижные оси, связанные с телом.

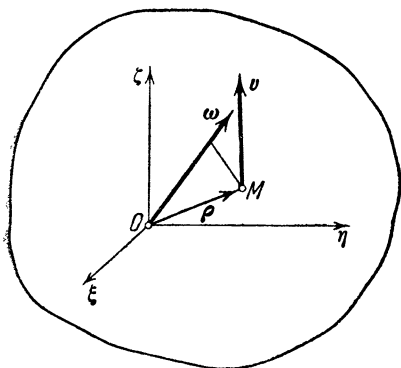
Для скорости \mathbf{v} какой-либо точки M тела имеем формулу

$$\mathbf{v} = \omega \times \rho,$$

где ω — угловая скорость тела, ρ — радиус-вектор, проведенный

в данную точку из той неподвижной точки O , вокруг которой вращается тело (черт. 259).

Возьмем подвижную систему осей ξ, η, ζ с началом в неподвижной точке O . Проекции радиус-вектора ρ на оси ξ, η, ζ — не что иное, как координаты ξ, η, ζ точки M . Обозначая проекции угловой скорости ω на эти же



Черт. 259.

оси через p, q, r , а искомые проекции скорости v — через v_ξ, v_η, v_ζ , и применяя выведенные в § 59 формулы для проекций векторного произведения двух векторов, получим:

$$v_\xi = q\zeta - r\eta,$$

$$v_\eta = r\xi - p\zeta,$$

$$v_\zeta = p\eta - q\xi.$$

Эти формулы имеют широкое применение при аналитическом исследовании вращения твердого тела.

ГЛАВА XIX

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 122. Разложение движения твердого тела на поступательное движение и на вращение. Уравнения движения твердого тела. Угловая скорость

Обратимся к изучению самого общего случая движения твердого тела. Представим себе твердое тело, совершающее какое угодно движение.

Покажем, что *самое общее движение твердого тела может быть разложено на поступательное движение и на вращение.*

В самом деле, возьмем какую-нибудь точку O твердого тела (черт. 260), которую назовем полюсом; положим, что кривая AB есть траектория, описываемая точкой O при движении тела. Затем представим себе неизменяемую среду, которая движется поступательно вместе с полюсом O . Твердое тело, совершая свое абсолютное движение в пространстве, в то же время совершает некоторое относительное движение по отношению к только что указанной среде; это относительное движение условимся для краткости речи называть относительным движением тела «по отношению к полюсу O ». Так как в этом относительном движении тела полюс O не участвует (т. е. остается в относительном покое), то относи-

тельное движение тела по отношению к полюсу O есть не что иное, как вращение вокруг этого полюса.

Итак, абсолютное движение твердого тела представляется как составное из поступательного движения вместе с полюсом O и из вращения вокруг этого полюса.

Поступательная часть движения твердого тела вполне определяется движением полюса O . Обозначим координаты точки O относительно взаимно перпендикулярных координатных осей x, y, z через x_0, y_0, z_0 . Движение полюса O (а вместе с тем и поступательная часть движения твердого тела) вполне определяется уравнениями движения

$$\begin{aligned} x_0 &= f_1(t), & y_0 &= f_2(t), \\ z_0 &= f_3(t). \end{aligned} \quad (1)$$

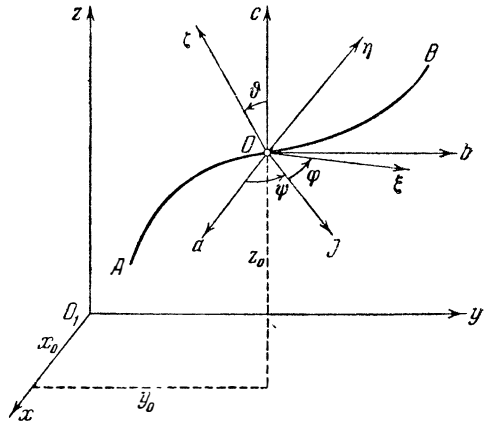
Вращение же тела вокруг полюса O может быть определено так, как было объяснено в § 112. Проведем через точку O три взаимно перпендикулярные оси a, b, c , которые движутся поступательно вместе с точкой O , оставаясь параллельными неподвижным осям x, y, z . Затем возьмем три взаимно перпендикулярные оси ξ, η, ζ с началом в той же точке O , которые неизменно связаны с твердым телом. Введя эйлеровы углы ϑ, ψ, φ , мы можем определить вращательное движение тела вокруг полюса O уравнениями вращения

$$\vartheta = f_4(t), \quad \psi = f_5(t), \quad \varphi = f_6(t). \quad (2)$$

Уравнениями (1) и (2) вполне определяется движение твердого тела; мы назовем эти уравнения *уравнениями движения твердого тела*.

Во вращательном движении твердого тела вокруг точки O существует в каждый данный момент некоторая мгновенная ось (проходящая через точку O) и угловая скорость ω , направленная по мгновенной оси, а также угловое ускорение ε . Если заданы уравнения вращения (2), то величина и направление угловой скорости ω могут быть определены по формулам, выведенным в § 120.

Так как за полюс может быть взята любая точка твердого тела, то, выбирая различные точки тела за полюсы, мы можем получить бесчисленное множество разложений движения твердого тела на



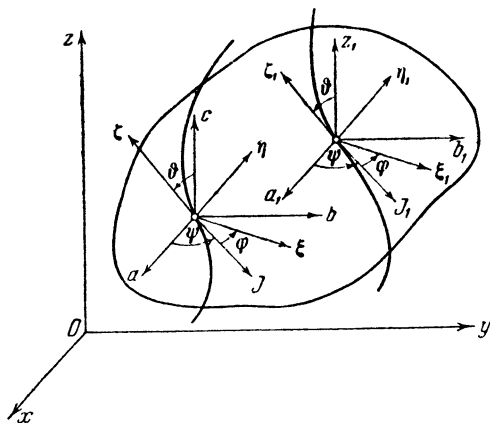
Черт. 260.

поступательную и вращательную части. Конечно, поступательная часть движения изменяется с изменением полюса. Покажем, что *вращательная часть движения твердого тела не зависит от выбора полюса.*

Возьмем за полюс точку O , описывающую кривую AB (черт. 261) и составим уравнения вращения вокруг этого полюса. Для этого проводим через точку O оси a, b, c , которые движутся поступательно, оставаясь параллельными неподвижным осям x, y, z , и оси ξ, η, ζ , неизменно связанные с твердым телом. Отметив эйлеровы углы ϑ, ψ, φ , получаем уравнения вращения вокруг полюса O :

$$\vartheta = f_4(t), \quad \psi = f_5(t), \quad \varphi = f_6(t).$$

Теперь возьмем за полюс другую точку тела O_1 , описывающую траекторию A_1B_1 . Составим уравнения вращения вокруг этого нового полюса. Для этого проведем через точку O_1



Черт. 261.

оси ξ_1, η_1, ζ_1 параллельно осям ξ, η, ζ . В таком случае *во все время движения* оси a_1, b_1, c_1 будут оставаться параллельными осям a, b, c (ибо и те и другие движутся поступательно), а оси ξ_1, η_1, ζ_1 будут оставаться параллельными осям ξ, η, ζ (ибо и те и другие неизменно связаны с твердым телом). Следовательно, обозначив эйлеровы углы, построенные при точке O_1 , через $\vartheta_1, \psi_1, \varphi_1$, мы будем иметь во все время движения:

$$\vartheta_1 = \vartheta, \quad \psi_1 = \psi, \quad \varphi_1 = \varphi.$$

Итак, уравнения вращения вокруг полюса O_1 : $\vartheta_1 = f_4(t)$, $\psi_1 = f_5(t)$, $\varphi_1 = f_6(t)$, тождественны с уравнениями вращения вокруг полюса O , т. е. вращательная часть движения тела не зависит от выбора полюса.

Отсюда мы можем заключить, что и угловая скорость вращательной части движения тела, а также и угловое ускорение не зависят от выбора полюса, т. е. что угловые скорости ω и ω_1 ,

а также угловые ускорения ε и ε_1 вращательного движения вокруг полюса O и O_1 соответственно равны.

На этом основании мы имеем право называть общие для всех полюсов угловую скорость ω и угловое ускорение ε просто угловой скоростью и угловым ускорением твердого тела (не делая при этом никаких указаний на то, какая точка тела предполагается принятой за полюс).

§ 123. Скорости точек твердого тела. Мгновенная винтовая ось

Представим себе движение твердого тела разложенным на переносное (поступательное) движение вместе с полюсом O и на относительное (вращательное) движение по отношению к этому полюсу (черт. 262). Скорость какой-либо точки M твердого тела может быть найдена при помощи теоремы сложения скоростей; абсолютная скорость точки M равна сумме ее переносной и относительной скоростей.

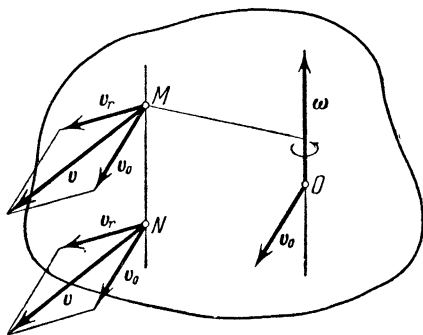
Переносная скорость точки M равна скорости полюса O ; обозначим эту скорость через v_o . Относительная же скорость v_r точки M есть вращательная скорость вокруг мгновенной оси, проходящей через точку O ; обозначая угловую скорость тела через ω , а длину перпендикуляра, опущенного из точки M на мгновенную ось, через r , имеем:

$$v_r = r\omega;$$

направление скорости v_r перпендикулярно к плоскости, проходящей через точку M и мгновенную ось (или угловую скорость ω).

Абсолютная скорость точки M есть диагональ параллелограмма, построенного на скоростях v_o и v_r . Итак, *скорость любой точки твердого тела равна сумме скорости полюса и скорости данной точки во вращательном движении вокруг этого полюса.*

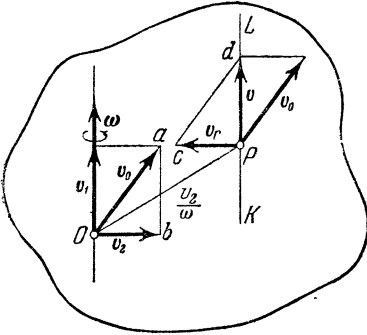
Проведем через точку M прямую, параллельную угловой скорости ω , и возьмем на этой прямой какую-нибудь точку N . Вращательная скорость точки N вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс O , равна вращательной скорости v_r точки M ; следовательно, и абсолютная скорость точки N равна абсолютной скорости v точки M . Итак, *все точки твердого тела, лежащие на прямой, параллельной угловой скорости ω , имеют равные скорости.* Покажем теперь, что *в каждый данный момент существует*



Черт. 262.

бесчисленное множество точек тела, скорости которых направлены параллельно угловой скорости ω .

Возьмем за полюс точку O (черт. 263); отметим скорость полюса v_0 и угловую скорость твердого тела ω . Разложим скорость v_0 на две составляющие v_1 и v_2 , из которых первая направлена параллельно угловой скорости ω , а вторая — перпендикулярно к ней. Затем восставим в точке O к плоскости, проходящей через v_0 и ω , перпендикуляр в такую сторону, чтобы для наблюдателя, расположенного по этому перпендикуляру (ногами в точке O) и смотрящего по направлению угловой скорости ω , скорость v_0 представлялась направленной справа налево. На этом перпендикуляре отложим



Черт. 263.

от точки O отрезок $OP = \frac{v_2}{\omega}$. Найдем скорость точки P .

Скорость v точки P есть диагональ параллелограмма, построенного на скорости полюса v_0 и на вращательной скорости v_r точки P вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс O . Величина скорости v_r равна

$$v_r = OP \cdot \omega = \frac{v_2}{\omega} \cdot \omega = v_2;$$

направление же скорости v_r перпендикулярно к плоскости, проходящей через точку P и мгновенную ось, т. е. параллельно направлению составляющей v_2 ; как видно из чертежа, скорость v_r направлена противоположно скорости v_2 .

Следовательно, стороны Oa и Ob треугольника Oab равны и параллельны сторонам cd и cP треугольника cdP . Отсюда следует, что и третьи стороны ba и Pd этих треугольников также равны и параллельны, т. е. скорость v точки P равна составляющей v_1 скорости точки O .

Итак, скорость точки P направлена параллельно угловой скорости ω . Проведем теперь через точку P прямую KL , параллельную угловой скорости ω . Мы уже знаем, что все точки, лежащие на этой прямой, имеют равные скорости.

Следовательно, скорости всех точек, лежащих на прямой KL , параллельны угловой скорости ω ; другими словами, скорости всех этих точек направлены по самой прямой KL .

Возьмем теперь за полюс какую-нибудь точку O_1 , лежащую на прямой KL (черт. 264), и найдем скорость какой-нибудь точки M твердого тела. Скорость полюса v_1 и угловая скорость ω направлены по прямой KL . Скорость v точки M есть диагональ параллелограмма, построенного на скорости полюса v_1 и на вращательной

скорости v , точки M вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс O_1 , т. е. вокруг прямой KL . Обозначая длину перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую KL , через r , имеем:

$$v_r = r\omega;$$

направление скорости v , перпендикулярно к плоскости, проходящей через точку M и прямую KL .

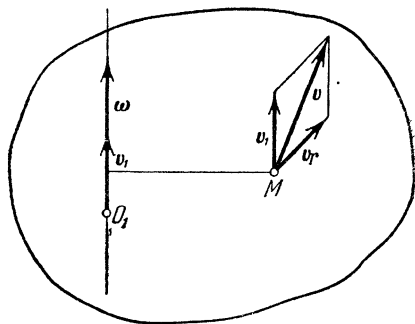
Отсюда видно, что скорости точек твердого тела в данный момент таковы, как будто бы движение твердого тела складывалось из поступательного движения вдоль прямой KL и из вращения вокруг этой прямой. Движение, составленное из поступательного движения вдоль некоторой прямой и из вращения вокруг этой же прямой, называется винтовым движением (таково движение винта в гайке). Следовательно, скорости точек твердого тела в данный момент таковы, как будто бы тело совершало винтовое движение вдоль и вокруг прямой KL . На этом основании прямая KL называется *мгновенной винтовой осью*.

Различным моментам времени соответствуют различные мгновенные винтовые оси. Мгновенная винтовая ось изменяет с течением времени свое положение и в неподвижном пространстве, и в движущемся твердом теле. Геометрическое место мгновенных винтовых осей в неподвижном пространстве есть линейчатая поверхность¹⁾, которая называется *неподвижным аксоидом мгновенных винтовых осей*; а геометрическое место тех же осей в движущемся теле есть другая линейчатая поверхность, которая называется *подвижным аксоидом мгновенных винтовых осей*.

Можно убедиться, что в каждый данный момент оба аксоида касаются по общей производящей, которая и является мгновенной винтовой осью для данного момента.

При движении твердого тела подвижной аксоид катится по неподвижному аксоиду и в то же время скользит вдоль общей их производящей.

Итак, самое общее движение твердого тела может быть представлено как качение одной линейчатой поверхности по другой, соединенное со скольжением вдоль их общей производящей.



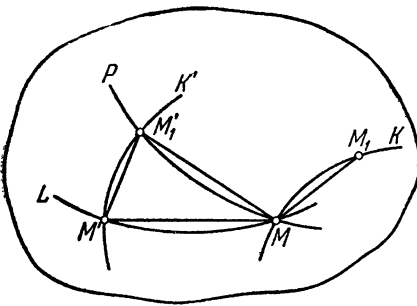
Черт. 264.

¹⁾ Линейчатую поверхность называется поверхность, описываемая прямой линией, перемещающейся в пространстве.

§ 124. Теорема сложения ускорений в случае какого угодно переносного движения

В главе XVI мы рассмотрели теорему сложения ускорений лишь в двух частных случаях, а именно в случае поступательного переносного движения и в том случае, когда переносное движение есть вращение вокруг неподвижной оси. Теперь мы имеем возможность дополнить исследование этого вопроса, рассмотрев теорему сложения ускорений в самом общем случае какого угодно переносного движения.

Представим себе неизменяемую среду, совершающую какое бы то ни было движение в пространстве, и движущуюся в среде точку M (черт. 265). Предполагая, что положение точки, обозначенное на черт. 265 буквой M , соответствует моменту t , строим совершенно так же, как в § 99, положение M'_1 этой точки, соответствующее моменту $t + \Delta t$. Строим затем элементарные перемещения $\overline{MM'_1}$, $\overline{MM'}$ и $\overline{M'M'_1}$ в абсолютном, переносном и относительном движениях нашей точки и полагаем:



Черт. 265.

$$\overline{MM'_1} = \mathbf{v} \Delta t + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} (\Delta t)^2 + \mathbf{a}_3,$$

$$\overline{MM'} = \mathbf{v}_e \Delta t + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_e (\Delta t)^2 + \mathbf{b}_3,$$

$$\overline{M'M'_1} = \mathbf{v}'_r \Delta t + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}'_r (\Delta t)^2 + \mathbf{c}_3,$$

где \mathbf{v}'_r и $\boldsymbol{\omega}'_r$ — относительная скорость и относительное ускорение точки M , перемещенные за время Δt вместе со средой, а \mathbf{a}_3 , \mathbf{b}_3 , \mathbf{c}_3 — векторы третьего порядка малости. Рассуждая затем совершенно так же, как в § 99, получим

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_c,$$

где $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}_e$, $\boldsymbol{\omega}_r$ — абсолютное, переносное и относительное ускорения точки M , а $\boldsymbol{\omega}_c$ — кориолисово ускорение, определяемое формулой

$$\boldsymbol{\omega}_c = 2 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{v}'_r - \mathbf{v}_r}{\Delta t} \right].$$

Итак, в самом общем случае какого угодно переносного движения среды *абсолютное ускорение равно сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений*.

Чтобы найти величину и направление кориолисова ускорения, возьмем какую-нибудь точку O среды за полюс и разложим движение среды на поступательное движение вместе с полюсом O и на вращение вокруг этого полюса. Отложим от полюса O относи-

тельную скорость \mathbf{v}_r и обозначим ту точку среды, с которой совпадает конец вектора \mathbf{v}_r , через A .

Найдем скорость \mathbf{u} точки A во вращательном движении среды вокруг полюса O .

Векторы \mathbf{v}_r и \mathbf{v}'_r являются радиусами-векторами, проведенными из полюса O в точку A соответственно в моменты t и $t + \Delta t$. Отсюда следует, что

$$\mathbf{u} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{v}'_r - \mathbf{v}_r}{\Delta t} \right].$$

Итак, получаем:

$$\mathbf{w}_c = 2\mathbf{u}.$$

С другой стороны, мы знаем, что скорость \mathbf{u} точки A во вращательном движении среды вокруг полюса O есть вращательная скорость вокруг мгновенной оси или, что то же, вокруг вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, отложенного от полюса O (черт. 266). Следовательно, *кориолисово ускорение \mathbf{w}_c по величине и направлению равно удвоенной вращательной (вокруг мгновенной оси, проведенной через полюс O) скорости точки A .*

Правило определения кориолисова ускорения остается, как видно, таким же, как оно было сформулировано в § 99; нужно только неподвижную ось вращения, о которой шла речь в § 99, заменить мгновенной осью.

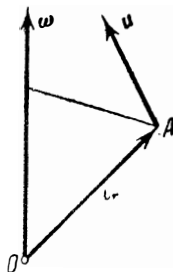
Вспоминая векторную формулу для вращательной скорости и имея в виду, что радиусом-вектором точки A является вектор \mathbf{v}_r , будем иметь:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r,$$

и, следовательно:

$$\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r.$$

Этой формулой определяется кориолисово ускорение в самом общем случае.



Черт. 266.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аксиомы ньютоновы** 19, 25
— статики 19, 22, 23, 24, 25, 29
Аксонид мгновенных винтовых осей 275
— осей 262, 263
Арка двухшарнирная 59
— трехшарнирная 59, 62
- Балка** 63, 68, 72, 74, 125
— неразрезная (многопролетная) 68
— составная 68
Бинормаль 167
Брус 34, 40, 76
- Вектор** 10
— главный 53, 54, 66, 105, 110, 112, 117
— параллельных сил 66
— единичный 13
— в пространстве 85
— проекция 18, 16, 17, 18
— произведение 13, 93
— производная 154
— разложение 84
— составляющий 12
— функция 154
Величина векторная 10, 20
— скалярная 10
Вес 20, 125, 126
Винг силовой 105
Вращение плоской фигуры 242
— твердого тела 183, 186, 207, 216, 250, 258, 270
— — — равномерное 187
— — — равномерно переменное 207
Вычитание векторов 10, 12
- Годограф угловой скорости** 254
График расстояний 180, 181
— скоростей 180, 181
— ускорений 180, 181
- Давление земли** 118
— на опору 26
— на плоскость 25
Движение абсолютное 195, 196, 215, 242
— диска 256, 280, 267
— золотника 224
— крещцкопфа 148
— криволинейное 144
— механическое 9
— неустановившееся 9
— относительное 194, 197, 215
— переносное 195, 204, 207, 242
— плоское (плоской фигуры) 146, 161, 172, 215, 217, 219
— подъемной машины 181
— полузна 210
— поршня 149
— поступательное 183, 204, 216, 246, 270
- Движение прямолинейное** 19, 144, 146, 162, 173, 179
— равномерное 19, 150, 179
— равномерно переменное 164
—; разложение 196
—; сложение 196
— составное 196, 215
— твердого тела 183, 270
— точки 143
—; уравнения 145, 149, 151
— шатуна 250
Девнация 198, 201
Деформация 22, 39, 58
Диаграмма Максвелла-Кремоны 76, 79
Динама 104, 105, 120
Динамика 9, 143
Динамометр 20, 118
Диск; движение его 256, 260, 267
Дифференцирование векторное 155
- Единица момента** 47
— силы 20
— скорости 151
— угловой скорости 188
— углового ускорения 190
— ускорения 165
- Задача статически неопределенная** 39, 58, 115
— — — определенная 39, 58, 113, 121
Зацепление зубчатое 194
Золотник, его движение 224
- Инварианты системы сил** 112
Инверсор Липкина 227, 249, 250
Инерция 19
- Килограмм** 20
Килограммометр 47
Кинематика 143
— механизмов 144
Кинетика 10
Компонент силы 36
— в пространстве 84
Координаты относительные 198
Коэффициент трения 27
Кран подъемный 43
Крещцкопф, движение 148
Кривизна 167
—; радиус ее 168
—; центр ее 168
Кулисса; угловая скорость ее 203
- Луч многоугольника сил** 70
- Маховик, ускорение его** 192
Машина подъемная; движение 181

- Метод сечений 23, 81
 Механизм кривошипный 147, 206, 227, 234
 Механика теоретическая; предмет ее 9
 Многоугольник веревочный 69, 74, 77, 140
 — сил 32, 70, 72
 — — в пространстве 82
 Момент главный 53, 54, 97, 98, 105, 106, 111, 112, 117
 — пары 46
 — — как вектор 88
 — силы 52, 57, 92, 95, 96, 109
 — — равнодействующей 56, 102
 — статический 127, 128
 Натяжение нити 25, 39
 — ремня 116
 — тяги 63
 — цепи 63
 Нить; натяжение ее 25, 39
 —, фигура равновесия 74
 Нормаль 167
 Окружности кардановы 242
 Опора неподвижная 59, 61, 63, 76, 80
 — подвижная 59, 61, 63, 76, 80
 Ось 15
 — координат; выбор 60
 — — полярных 212
 — мгновенная 251, 252, 265
 — — винтовая 273
 — моментов 113
 — проекций 113
 — центральная 105
 Пара вращений 246
 — сил 43, 46
 — — равнодействующая 50, 90, 131
 — — составляющая 50
 Пара вращений; эквивалентность 50, 87
 Параллелепипед сил 83
 Параллелограмм моментов 91
 — сил 30
 — скоростей 203
 — угловых скоростей 266
 — ускорений 206
 Передача ременная 115
 Перемещение плоской фигуры 236
 — твердого тела 251
 — точки 198
 План скоростей 225
 — ускорений 232
 Плечо пары 46
 — силы 92, 95
 Плоскость кривизны 167
 — наклонная 32, 39
 — нормальная 167
 — соприкасающаяся 167
 Ползун, движение его 210
 Полюс многоугольника сил 70
 Поршень; движение его 149, 162, 174
 Пояс фермы 80
 Приведение силы 52, 57, 99
 — системы сил 53, 100
 — — к динаме 104
 — — к паре 101
 — — к равнодействующей 102
 Принцип возможных перемещений 4
 — «затвердения» 29
 — инерции 19
 — «Петербургский» 6
 Приращение вектора 154
 Проекция вектора 15, 16, 17, 18
 — силы 35, 37
 — скорости 159, 163, 211
 — угловой скорости 267
 — ускорения 211
 Произведение векторное 93, 107
 Производная векторная 154
 Путь точки 145
 Равенство векторов 11
 Разновесие нити 74
 — пар 50, 89, 92
 — сил в плоскости 32, 37, 39, 42, 55, 58, 66, 73
 — — в пространстве 82, 101, 112, 119, 121, 123
 — твердого тела 21, 22, 23
 Радиан 188
 Радиус кривизны 168
 Разложение движения 196
 — силы 31
 Разность векторов 12
 Реакция балки 68, 69, 74
 — грунта 64
 — закрепленных точек 113
 — нити 25
 — опорная 26, 59, 61, 62, 68, 69, 77, 113
 — плоскости 25
 — подпятника 61
 — подшипника 61, 116
 — цепи 63
 — шарнира 63, 68
 Сила 19, 20, 22, 143
 — внешняя 21
 — внутренняя 21, 27
 —, «действие — противодействие» 25
 — равнодействующая 24, 37, 44, 65, 82, 85
 —; разложение 31, 36, 85
 —; сложение в плоскости 30, 32, 40, 41, 43, 45, 52, 69
 — — в пространстве 82, 99, 121
 — составляющая 36
 — трения 26, 27
 — тяготения 25
 — тяжести 20, 155
 — уравновешивающая 24
 Система сил 24
 — — эквивалентная 24
 — — статически неопределимая 59, 68
 — — статически определимая 60, 68
 Скаляр 10, 11, 13
 Скорость 10, 150, 153, 225
 — абсолютная 198, 201, 203
 — векторная 153
 — как векторная производная 157
 — вращательная 192, 203, 258
 —; график ее 180, 181
 —; единица ее 151, 188
 — окружная 192
 — относительная 197
 — переносная 201
 —, проекция ее 159, 163, 211, 269
 — равномерного движения 151
 —; сложение 201
 — твердого тела 185
 — точки плоской фигуры 219
 — угловая 186, 215, 251, 253, 258, 267, 270
 — — кулисы 203
 Сложение вращений 242, 248
 — векторов 10
 — движений 196
 — пар в плоскости 43, 50
 — — в пространстве 87, 89
 — сил 24
 — — в плоскости 30, 40, 41, 52, 69
 — — в пространстве 82, 99, 119, 121
 — скоростей 201
 — угловых скоростей 264
 — ускорений 204, 207, 276
 Сопротивление материалов 21
 Спираль архимедова 156
 Статика твердого тела 58
 Сумма векторов 12, 14, 16, 36

Тело абсолютно гладкое 27

- — твердое 21, 22
- изменяемое 143
- материальное 19, 21
- нетвердое 29
- твердое 21, 22, 59, 143

Теорема Гюльдена 132, 134

- Ривальса 260
- Шаля 236

Точка материальная 19

- — изолированная 19
- приложения силы 20

Траектория 144

- абсолютная 195
- относительная 195
- ; уравнение ее 146, 156

Трение 26, 27**Треугольник сил 30, 71, 73, 75**

- Тяготение всемирное 25

Тяжесть 20, 125**Угол естественного откоса 34**

- смежности 167
- трения 27

Эйлера 250**Умножение векторов 13, 14****Усилие в бруске фермы 76, 80**

- винтовое 105
- растягивающее 28
- сжимающее 28

Ускорение 164

- абсолютное 198, 206
- как векторная производная 170

— вращательное 192, 233, 260

- ; график его 180, 181

— добавочное 207

- ; единица его 165, 190

— касательное 175, 178, 180

- кориолисово 207

— нормальное 175, 178, 180

- относительное 197

— переносное 204

- поезда 166, 179

— поршня 174

- ; сложение 204

— среднее 170**Ускорение твердого тела 185**

- угловое 189, 215, 253
- центростремительное 192, 233, 260

Ферма арочная 59

- балочная 35, 59, 61, 66

—; расчет по Максвеллу-Кремоне 76

- ; расчет по Риттеру 80

Фигура равновесия нити 74

- Функция векторная 154, 156

— скалярная 156**Центр вращений 256**

- кривизны 168, 178

— момента 52, 92

- параллельных сил 123

— приведения 100, 105

- скоростей мгновенный 219, 220, 236, 248

— ускорений мгновенный 228

- тяжести 125

— — дуги окружности 137

- — линии 127, 128, 129, 134, 135

— — объема 127

- — площади 127, 133, 140

— — — кругового сегмента 139

- — — сектора 139

— — — полукруга 134

- — — трапеции 136

— — — треугольника 135

- — — уголка 132

— — — твердого тела 126**Центроида неподвижная 239, 241**

- подвижная 239, 241

Цепь; натяжение ее 63**Шарнир балки 63, 68**

- ключевой 60, 62

— пятовой 62**Шатун; движение его 223, 227**

- Шестерня; движение ее 225, 246

Эквивалентность пар 47, 49

- — в пространстве 87, 89

— систем сил 23**Эллипсограф 147, 173**

Цена 67 к.