АКАДЕМИЯ НАУК КАЗАХСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

М. О. ОТЕЛБАЕВ

ОЦЕНКИ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

АЛМА-АТА
«Гылым»
1990

УДК 517.984/984.68

Отелбаев М. О. Оценки спектра оператора Штурма — Лиувилля. — Алма-Ата: Гылым, 1990. — 191 с.

Книга содержит некоторые новейшие достижения в основных разделах спектральной теории дифференциальных операторов и их приложениях.

Ясное, простое изложение доступно аспирантам и студентам старших курсов математических и физических факультетов вузов.

Библиогр. 207 назв.

Ответственный редактор

член-корреспондент АН КазССР

Т. Ш. КАЛЬМЕНОВ

O $\frac{1602080000-148}{407(05)-90}$ 39.90

ISBN 5-628-00393-X

ПРЕДИСЛОВИЕ

Спектральная теория линейных операторов является важным направлением современной математики, интерес к которой в значительной степени стимулируется задачами механики и физики. Особое место в этой теории занимает спектральный анализ дифференциальных операторов, т. е. изучение свойств их собственных значений, собственных функций, разложений в ряд по собственным функциям и других спектральных характеристик. Основы спектрального анализа были заложены в 1836 г. Лиувиллем и Штурмом, а наиболее плодотворное развитие этого направления началось в начале двадцатого столетия с появлением работ Г. Вейля.

Исследованиям распределения собственных значений посвящены труды Г. Д. Биркгофа, Д. Гильберта, Р. Куранта, Т. Карлемана, Э. Ч. Титчмарша, Л. Хермандера, М. Ш. Бирмана, М. Г. Гасымова, А. Г. Костюченко, Б. М. Левитана, И. С. Саргсяна, М. З. Соломяка и др.

В данной книге нами исследуются оценки асимптотики собственных чисел и их функции распределения для полуограниченных дифференциальных операторов. Известны два основных метода исследования: метод Карлемана и вариационный. Метод Карлемана предполагает предварительное изучение резольвенты с последующим применением тауберовых теорем. Ему посвящены работы К. Х. Бойматова, М. Г. Гасымова, А. Г. Костюченко, Б. М. Левитана, И. С. Саргсяна, Я. Т. Султанаева и др.

Основы вариационного метода заложили Г. Вейль и Р. Курант. Они разработали вариационные принципы, с помощью которых возможно предварительное получение двусторонней оценки функции распределения, переходящей далее в асимптотическую формулу. В нашей стране обобщением и дальнейшим развитием этого метода занимались такие математики, как М. Ш. Бирман, В. В. Борзов, М. З. Соломяк, Б. Я. Скачек, Г. В. Розенблюм и др.

Методы взаимно дополняют друг друга. Так, например, достоинством метода Карлемана является его применимость при исследовании как полуограниченных, так и неполуограниченных операторов. Вариационный метод с привлечением весовых теорем вложения наиболее эффективно используется для операторов с негладкими коэффициентами. В отличие от метода Карлемана он может приводить к двусторонним оценкам спектра. Нами в основном применяется вариационный метод. На примере сингулярного оператора Штурма — Лиувилля представлены двусторонние оценки функции распределения собственных чисел и самих собственных чисел, а в несамосопряженном случае даны оценки s-чисел.

В первой главе приводятся необходимые сведения из теории операторов и вычисляется асимптотика распределения собственных чисел для сингулярного оператора Штурма — Лиувилля методом тауберовых теорем. Вариационным методом находится асимптотика самих собственных значений. На различных примерах проводится сравнение результатов, полученных этими методами.

Во второй главе устанавливаются двусторонние оценки всех собственных чисел оператора Штурма — Лиувилля. В несамосопряженном случае оцениваются сингулярные числа.

Предлагаемые нами методы имеют широкое приложение в различных вопросах анализа. В качестве таких примеров в этой главе дается оценка наименьшего собственного значения одного класса матриц, условия осцилляторности и неосцилляторности решений уравнения Штурма — Лиувилля и исследование свойств полярного оператора.

С этой же целью в книгу включены три дополнения, подготовленные по просьбе автора.

В дополнении I А. М. Минкина и Л. А. Шустера содержатся исследования вопросов распределения спектра, оценок собственных функций и равносходимости спектрального разложения с рядом Фурье для модельного оператора типа Шредингера. В дополнении II Д. Н. Турмухамедова продолжается изучение спектра оператора переноса, начатое автором книги. В дополнении III Ф. С. Рофе-Бекетова, Э. З. Гриншпуна изложены обзор литературы и результаты авторов по важному вопросу о существенной самосопряженности дифференциальных операторов.

Автор надеется, что включение в книгу этих исследований даст читателю широкое представление о многообразии, взаимосвязи и глубине идей и методов спектральной теории дифференциальных операторов.

ГЛАВА 1

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ОПЕРАТОРА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Традиционная постановка задачи предполагает вычисление асимптотики распределения собственных чисел. Нами рассматривается задача вычисления асимптотики самих собственных чисел, а не их функции распределения. Оказалось, что при такой постановке задачи можно достичь большего успеха. Например, для оператора Штурма — Лиувилля с общим монотонным потенциалом найдена формула для асимптотики собственных чисел без дополнительных ограничений. Полученный результат хорошо сочетается с примерами, рассмотренными в работе [99] по поводу функций распределения собственных чисел.

§ 1. Достаточные условия самосопряженности и дискретности спектра оператора Штурма — Лиувилля

Пусть $q(x)$ — действительнозначная функция, непрерывная в каждой точке $I=(-\infty, \infty)$. В пространстве $L_2(I)$ рассмотрим оператор Штурма — Лиувилля:

$$Ly=-y''+q(x)y \tag{1.1.1}$$

с областью определения $D(L)$, состоящей из финитных функций, которые вместе со своими производными до второго порядка принадлежат $L_2(I)$.

Оператор L — симметрический и $\overline{D(L)}=L_2(I)$. Докажем, что L — замыкаемый оператор. Если L не замыкаем, то существует последовательность функций $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\in D(L)$ такая, что $y_n\to 0$, $Ly_n\to v\neq 0$ при $n\to\infty$, где сходимость понимается по норме $L_2(I)$.

Возьмем произвольную функцию $u\in D(L)$. Тогда $0=\lim\limits_{n\to\infty}(y_n, Lu)=\lim\limits_{n\to\infty}(Ly_n, u)=(v, u)$. Отсюда, так как

$\overline{D(L)}=L_2(I)$, то $v=0$. Из полученного противоречия следует, что оператор L замыкаем.

Отметим, что замыкаемым является всякий симметрический оператор с плотной областью определения. Замыкание L тоже обозначим через L и в дальнейшем, ссылаясь на выражение (1.1.1), будем иметь в виду это замыкание.

1. Докажем, что (1.1.1) — самосопряженный оператор, если $q(x)$ — непрерывная функция, полуограниченная снизу:

$$\inf\{q(x): x\in I\}>-\infty. \tag{1.1.2}$$

Вопрос о самосопряженности (1.1.1) интересен тем, что постановки многих задач, решаемых для (1.1.1), теряют смысл для несамосопряженных операторов Штурма — Лиувилля.

Для формулировки и доказательства теоремы о самосопряженности (1.1.1) напомним некоторые определения и факты.

Оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H, называется самосопряженным, если $A=A^*$, где A^* — сопряженный к A оператор. A называется расширением B, если $D(A)\supseteq D(B)$ и для любого $x\in D(B)$ имеет место равенство $Ax=Bx$.

Самосопряженные расширения симметрического оператора A_0 с плотной областью определения $D(A_0)$ располагаются между A_0^* и A_0, т. е. если A — самосопряженное расширение A_0, то выполняются соотношения:

$$D(A_0)\subseteq D(A)\subseteq D(A_0^*);$$

$$Ax=A_0x, \text{ если } x\in D(A_0),$$

$$A_0^*x=Ax, \text{ если } x\in D(A),$$

где $D(\cdot)$ — область определения соответствующего оператора.

Из этих соотношений следует, что если $A_0\subseteq A$, $A=A^*$ и $D(A_0)\supseteq D(A)$, то $A=A_0^*$.

Известен классический результат Фридрихса о том, что любой полуограниченный симметрический оператор имеет хотя бы одно полуограниченное расширение — расширение по Фридрихсу [163].

Расширение по Фридрихсу A_Φ оператора A_0 обладает следующими свойствами:

$$D(A_\Phi)=D(A_0^*)\cap H_{A_0},$$

где H_{A_0} — пополнение $D(A_0)$ по норме $\sqrt{((A_0-\mu_0+1)x, x)}$. Здесь μ_0 — нижняя грань A_0, т. е. наименьшее число, для которого выполнено неравенство $(A_0x, x)\geqslant\mu_0(x, x)$ для всех $x\in D(A_0)$.

Приведем известный результат о самосопряженности (1.1.1).

Теорема 1.1.1. Если выполнено условие (1.1.2), то оператор (1.1.1) Штурма — Лиувилля самосопряжен.

Доказательство. Обозначим L_Φ — расширение по Фридрихсу оператора L. Если мы докажем, что $D(L_\Phi)\subseteq D(L)$, то теорема будет доказана. Пусть $y\in D(L_\Phi)$. В силу непрерывности $q(t)$ имеем включения $y', y''\in L_2^{\text{loc}}$, а из свойств расширения по Фридрихсу оператора (1.1.1) вытекают соотношения

$$-y''+q(t)y\in L_2(I), \quad \int_{-\infty}^{\infty}|y'|^2dt<\infty. \tag{1.1.3}$$

Возьмем функцию $\omega(t)\in C_0^\infty(I)$, равную единице при $|t|\leqslant\frac{1}{2}$ и нулю при $t\geqslant 1$. Пусть $\varepsilon>0$. Положим $y_\varepsilon(t)=\omega(t\varepsilon)y(t)$. Для этой функции имеем $y_\varepsilon(t)\in D(L)$ и $(Ly_\varepsilon)(t)=-\varepsilon^2\omega''_{\varepsilon t}(\varepsilon t)y(t)-$ $-2\varepsilon\omega'_{\varepsilon t}(\varepsilon t)y'_\varepsilon(t)-\omega(t\varepsilon)(L_\Phi y)(t)$. Отсюда вытекает, что $\|(Ly_\varepsilon)(t)-(L_\Phi y)(t)\|_2\leqslant C(\varepsilon^2\|y(t)\|_2+\varepsilon\|y'\|_2)+\|(1-\omega(t\varepsilon))\times$ $\times(L_\Phi y)(t)\|_2$. В силу выбора функции $\omega(\cdot)$ при $\varepsilon\to 0$ правая часть последнего неравенства стремится к нулю, поэтому $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(Ly_\varepsilon)\times$ $\times(t)=(L_\Phi y)(t)$ в смысле $L_2(I)$. Это соотношение в силу очевидного равенства $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}y_\varepsilon(t)=y(t)$ (так же в смысле $L_2(I)$) доказывает, что $y(t)\in D(L)$ и $(Ly)(t)=(L_\Phi y)(t)$. Теорема доказана.

Эта теорема приведена для цельности изложения, вопрос о самосопряженности дифференциальных операторов рассматривается в дополнении 1.

Замечание 1.1.1. Если оператор (1.1.1) определить на $C_0^\infty(I)$ и замкнуть в $L_0(I)$, то полученный замкнутый оператор совпадает с L и будет самосопряженным.

Для доказательства замечания вместо $y_\varepsilon(t)=\omega(\varepsilon t)y(t)$ следует использовать функцию

$$y_{\varepsilon v}(t)=\omega(\varepsilon t)\frac{1}{v}\int_{-\infty}^{\infty}y(\tau)\,\omega\left(\frac{t-\tau}{v}\right)d\tau,$$

где $\omega(t)$ — вспомогательная функция из $C_0^\infty(I)$, интеграл от которой равен единице. Искомый результат получается при $\varepsilon, v\to 0$.

2. Помимо самосопряженности оператора L нам в дальнейшем необходимо будет иметь условия дискретности его спектра. Для оператора (1.1.1) при выполнении условия (1.1.2) известен эффективный критерий дискретности спектра А. М. Молчанова [129].

Поэтому этот вопрос для оператора (1.1.1) с полуограниченным потенциалом закрыт. Для общих дифференциальных операторов, а в случае отказа от условия (1.1.2) и для оператора (1.1.1) решение такой задачи в целом далеко от завершения. Тем не менее в настоящее время имеются различные обобщения теоремы А. М. Молчанова [23, 121, 123].

Приведем результат А. М. Молчанова [129].

Теорема А. М. Молчанова. Пусть выполнено условие (1.1.2). Тогда спектр оператора (1.1.1) дискретен, если и только если для любого $\alpha>0$ выполнено неравенство

$$\lim_{|x|\to\infty}\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} q(t)\,dt=\infty.$$

Докажем теорему, которая является следствием этого утверждения.

Теорема 1.1.2. Пусть $\lim\limits_{|x|\to\infty} q(x)=\infty$. Тогда спектр оператора (1.1.1) дискретен и имеет единственную предельную точку в $+\infty$.

Для доказательства будем пользоваться леммой Реллиха [130, с. 283] и теоремой Колмогорова — Фреше [81, с. 378].

Лемма Реллиха. Пусть A — положительно определенный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда спектр оператора дискретен и имеет единственную предельную точку в $+\infty$, если и только если множество $M_A=\{x:(Ax,x)\leqslant 1\}$ компактно в H.

Теорема Колмогорова — Фреше. Замкнутое ограниченное множество $K\subseteq L_2(I)$ компактно в $L_2(I)$, если и только если выполнены следующие условия:

$$\text{(I)}\quad \sup_{f\in K}\int_I |f(x+h)-f(x)|^2dx\to 0 \text{ при } h\to 0,$$

$$\text{(II)}\quad \sup_{f\in K}\int_{|x|\geqslant N} |f(x)|^2dx\to 0 \text{ при } N\to\infty.$$

Отметим, что теорема Колмогорова — Фреше допускает широкие обобщения [158].

Доказательство теоремы 1.1.2. Не ограничивая общности, можно считать $q(x)\geqslant 1$. По лемме Реллиха достаточно доказать, что множество

$$M=\{y(t)\colon \int_{-\infty}^{\infty}(|y'|^2+q(t)|y|^2)\,dt\leqslant 1\}$$

компактно в $L_2(I)$. Проверим условия теоремы Колмогорова — Фреше. Если $y(t)\in M$, $h\neq 0$ и $N>0$, то имеем соотношения:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|y(t+h)-y(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_t^{t+h}y'(\eta)\,d\eta\right|^2dt\leqslant$$

$$\leqslant|h|\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_t^{t+h}|y'(\eta)|^2d\eta\right|dt=|h|^2\int_{-\infty}^{\infty}|y'(\eta)|^2d\eta\leqslant|h|^2,$$

$$\int_{|\eta|\geqslant N}|y(\eta)|^2d\eta\leqslant(\inf_{|t|\geqslant N}q(t))^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}|y(\eta)|^2d\eta\leqslant(\inf_{|t|\geqslant N}q(t))^{-1}.$$

Из этих неравенств следует, что выполнены условия (I) и (II). Теорема 1.1.2 доказана.

Доказанную теорему можно получить также и из известной теоремы сравнения Штурма.

§ 2. Метод тауберовых теорем вычисления асимптотики на примере оператора Штурма — Лиувилля

На примере оператора Штурма — Лиувилля (1.1.1) продемонстрируем метод тауберовых теорем (или метод Карлемана) для вычисления асимптотики распределения собственных чисел. Наиболее обстоятельно этот вопрос рассмотрен Б. М. Левитаном и И. С. Саргсяном [117], А. Г. Костюченко и И. С. Саргсяном [99] и К. Х. Бойматовым [36].

Рассмотрим в $L_2(I)$ оператор (1.1.1). Условие (1.1.2) заменим более удобным условием

$$q(x)\geqslant 1, \tag{1.2.1}$$

которое не является менее общим, чем (1.1.2), так как из (1.1.2), не ограничивая общности, можно прийти к (1.2.1), совершив сдвиг по спектру, т. е. рассматривая вместо оператора $-y''+q(x)y$ оператор $-y''+(q(x)-\mu_0+1)y$, где μ_0 — нижняя грань $q(x)$.

Помимо условия (1.2.1) предположим, что

$$\lim_{|x|\to\infty}q(x)=+\infty. \tag{1.2.2}$$

Таким образом, согласно теоремам 1.1.1 и 1.1.2, будем иметь самосопряженный оператор с дискретным спектром с единственной предельной точкой в $+\infty$.

Через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ обозначим собственные числа оператора, занумерованные в порядке возрастания с учетом кратности, а через $N(\lambda)$ — функцию их распределения

$$N(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_n<1} 1. \tag{1.2.3}$$

Метод тауберовых теорем исследования асимптотики $N(\lambda)$ $(\lambda\to\infty)$ состоит из двух частей: первая (главная) заключается в оценке резольвенты $R(\lambda, L)\equiv(L+\lambda E)^{-1}$ оператора L при $\lambda\to\infty$, а вторая — в использовании тауберовых теорем.

По этой причине условия, налагаемые на потенциал $q(x)$, при исследовании функции $N(\lambda)$ подразделяются на условия, обеспечивающие получение хороших оценок $R(\lambda, L)$, и условия, обеспечивающие применимость тауберовых теорем. В монографиях [99, 117] в группу условий первого типа включено условие, ограничивающее рост потенциала, так как считалось, что оно необходимо.

Для получения оценок функции Грина (или резольвенты) оператора Штурма — Лиувилля условие, ограничивающее рост потенциала, не нужно [143].

При рассмотрении многомерных уравнений условия «на рост» можно устранить в более общих ситуациях [37, 165].

Помимо (1.2.1) и (1.2.2) на потенциал $q(x)$ наложим следующие ограничения:

$$\sup_{|x-y|\leqslant 1} \{q^{-a}(x)\,|x-y|^{-1}|q(x)-q(y)|\}<\infty, \tag{1.2.4}$$

где $0\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$. Условие (1.2.4) — типичное условие регулярности потенциала. Оно может быть ослаблено [143]. Приведем его в простой форме для упрощения выкладок. Пользуясь им, изложим способ оценки резольвенты оператора (1.1.1).

Теорема 1.2.1. Пусть выполнены условия (1.2.1), (1.2.2) и (1.2.4). Тогда при достаточно больших положительных λ имеет место равенство

$$(L+\lambda E)^{-1}=M_2^*(\lambda)\,(E-M_1^*(\lambda)-M_3^*(\lambda))^{-1}.$$

Причем $\|M_1(\lambda)\|\leqslant O(\lambda^{-\varepsilon})$, где $\varepsilon>0$, $\|M_3(\lambda)\|\leqslant O(e^{\sqrt{\lambda}/10})$ при $\lambda\to\infty$. Здесь $M_i(\lambda)$ $(i=1, 2, 3)$ — интегральные операторы:

$$(M_i(\lambda)f)(\eta)=\int_{-\infty}^{\infty} M_i(x, \eta, \lambda)f(\eta)\,dx,$$

ядра которых определяются формулами:

$$M_1(x, \eta, \lambda)=M(x, \eta, \lambda)\,(q(x)-q(\eta))\,r(\eta-x),$$

$$M_2(x, \eta, \lambda)=M(x, \eta, \lambda)\,r(\eta-x),$$

$$M_3(x, \eta, \lambda)=-2M'_\eta(x, \eta, \lambda)\,r'_\eta(\eta-x)-M(x, \eta, \lambda)\,r''_\eta(\eta-x),$$

где

$$M(x, \eta, \lambda)=\frac{1}{2}(q(x)+\lambda)^{-1/2}\exp\left(-|x-\eta|\sqrt{q(x)+\lambda}\right)$$

и, наконец, $r(t)$ — бесконечно гладкая функция, равная 1 при $|t|\leqslant 0{,}4$ и нулю при $|t|\geqslant 0{,}8$.

В теореме 1.2.1 дается полезное представление резольвенты. При ее использовании важно, что ядро $M_2(x, \eta, \lambda)$ при $|x-\eta|\geqslant 1$ обращается в нуль. Формулы, имеющие такие качественные свойства, верны для широкого класса эллиптических дифференциальных или псевдодифференциальных операторов [156].

Для дальнейших рассмотрений нам потребуется следующая лемма, позволяющая оценивать нормы интегральных операторов.

Лемма 1.2.1. Пусть K — интегральный оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ с ядром $K(x, \eta)$, где Ω — произвольный интервал $\Omega\subseteq I=(-\infty, \infty)$. Тогда справедливо неравенство*

$$\|K\|\leqslant\frac{1}{2}\left(\sup_{x\in\Omega}\int_\Omega|K(x, \eta)|\,d\eta\right)+\frac{1}{2}\left(\sup_{\eta\in\Omega}\int_\Omega|K(x, \eta)|\,dx\right). \tag{1.2.5}$$

Отметим без доказательства, что если $\Omega=I$, а ядро $K(x, \eta)$ зависит только от разности $x-\eta$ и неотрицательно (или неположительно), то неравенство (1.2.5) превращается в равенство.

Доказательство леммы 1.2.1.

Для любого элемента $f\in L_2(\Omega)$ имеет место равенство

$$\|f\|=\sup\{|\langle f, g\rangle|\ |\ \|g\|=1\}.$$

Действительно $\|f\|=|\langle f, f\|f\|^{-1}\rangle|\leqslant\sup\{\langle f, g\rangle|\ |\ \|g\|=1\}$. Обратное неравенство есть очевидное следствие неравенства Коши — Буняковского. Из определения нормы оператора имеем

$$\|K\|=\sup\{\|Kf\|\ |\ \|f\|=1\}.$$

Из предшествующего следует равенство

$$\|K\|=\sup_{\|u\|=1}\ \sup_{\|g\|=1}|\langle Ku, g\rangle|=$$

* Нижние индексы в обозначениях типа $\|K\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}$, $\|f(\cdot)\|_{L_2(\Omega)}$ здесь и далее, где это не приводит к недоразумению, опущены.

$$= \sup_{\|u\|=1} \sup_{\|g\|=1} \left| \int_\Omega \int_\Omega K(t,\eta)\, u(\eta)\, g(t)\, d\eta dt. \right.$$

Применив к произведению $u(\eta)g(t)$ элементарное неравенство $2|ab| < |a|^2 + |b|^2$, получим

$$\|K\| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{\|u\|=1} \sup_{\|g\|=1} \int_\Omega \int_\Omega |K(t,\eta)|\,(|u(\eta)|^2 + |g(t)|^2)\, d\eta dt.$$

Отсюда следует, что

$$\|K\| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{\|u\|=1} \sup_{\|g\|=1} \int_\Omega |u(\eta)|^2 \left(\int_\Omega |K(t,\eta)|\, dt \right) d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2} \sup_{\|u\|=1} \sup_{\|g\|=1} \int_\Omega |g(t)|^2 \left(\int_\Omega |K(t,\eta)|\, d\eta \right) dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left[\sup_\eta \int_\Omega |K(t,\eta)|\, dt + \sup_t \int_\Omega |K(t,\eta)|\, d\eta \right].$$

Лемма доказана.

Обобщение доказанной леммы приведено Эдвардсом [206, с. 902].

Докажем теорему. Учитывая, что $r'_\eta(\eta-x)$ и $r''_\eta(\eta-x)$ равны нулю при $|\eta-x| < 0{,}4$ или $|\eta-x| > 0{,}8$, в силу леммы 1.2.1 имеем оценки

$$\|M_3(\lambda)\| \leqslant C_0 \sup_{x \ni I} \left\{ \int_{0,4 \leqslant |x-\eta| \leqslant 0,8} |M'_\eta(x,\eta,\lambda)|\, d\eta + \right.$$

$$\left. + \int_{0,4 \leqslant |x-\eta| \leqslant 0,8} |M(x,\eta,\lambda)|\, d\eta \right\} + C_0 \sup_{\eta \in I} \left\{ \int_{0,4 \leqslant |x-\eta| \leqslant 0,8} |M'_\eta(x,\eta,\lambda)|\, dx + \right.$$

$$\left. + \int_{0,4 \leqslant |x-\eta| \leqslant 0,8} |M(x,\eta,\lambda)|\, dx \right\},$$

где C_0 — постоянное число, зависящее только от выбора функции $r(x)$. При $0{,}4 \leqslant |x-\eta| \leqslant 0{,}8$ имеют место неравенства

$$|M(x,\eta,\lambda)| \leqslant 0{,}5\lambda^{-1/2} \exp(-0{,}4\sqrt{\lambda}),$$

$$|M'_\eta(x,\eta,\lambda)| \leqslant 0{,}5 \exp(-0{,}4\sqrt{\lambda}).$$

Поэтому

$$\|M_3(\lambda)\| \leqslant C_1 \exp(-0{,}4\sqrt{\lambda}). \tag{1.2.6}$$

Для оценки нормы $M_1(\lambda)$, пользуясь условием (1.2.4), получим $|M_1(x,\eta,\lambda)|\leqslant\frac{1}{2}|r(\eta-x)|[(q(x)+\lambda)^{-1/2}\exp(-|x-\eta|\sqrt{q(x)+\lambda})]\times$

$$\times q^a(x)|x-\eta|\leqslant\frac{1}{2}|r(\eta-x)|(q(x)+\lambda)^{-1/2+a}\times$$

$$\times|x-\eta|\exp(-|x-\eta|\sqrt{q(x)+\lambda}), \tag{1.2.7}$$

где $0\leqslant a<\frac{3}{2}$.

Для произвольного числа $\gamma\geqslant 0$ имеет место неравенство

$$\sup_{t>0} t^\gamma\exp(-t)<\infty.$$

Поэтому из (1.2.7) при $\gamma\geqslant 0$ вытекает

$$|M_1(x,\eta,\lambda)|\leqslant\frac{1}{2}|r(\eta-x)|(q(x)+\lambda)^{-\frac{1}{2}+a-\frac{\gamma}{2}}(x-\eta)^{1-\gamma}\times$$

$$\times(|x-\eta|\sqrt{q(x)+\lambda})^\gamma\exp(-|x-\eta|\sqrt{q(x)+\lambda})\leqslant$$

$$\leqslant C(\gamma)r(\eta-x)(q(x)+\lambda)^{-\frac{1}{2}+a-\frac{\gamma}{2}}|x-\eta|^{1-\gamma}.$$

В силу ограничений $0\leqslant a<\frac{3}{2}$ найдется γ такое, что $-\varepsilon=-\frac{1}{2}+$ $+a-\frac{\gamma}{2}<0$, $0<\gamma<2$, поэтому $|M_1(x,\eta,\lambda)|\leqslant Cr(\eta-x)\lambda^{-\varepsilon}\times$ $\times|x-\eta|^{-\beta}$, где $\varepsilon>0$, $0\leqslant\beta<1$. Теперь, пользуясь леммой 1.2.1, получим

$$\|M_1(\lambda)\|\leqslant C\lambda^{-\varepsilon},\quad \varepsilon>0. \tag{1.2.8}$$

Для оценки оператора $M_2(\lambda)$ заметим, что

$$|M_2(x,\eta,\lambda)|\leqslant\frac{1}{2}\lambda^{-\frac{1}{2}}r(\eta-x).$$

Это неравенство позволяет из леммы 1.2.1 вывести оценку

$$\|M_2(\lambda)\|\leqslant C\lambda^{-1/2}. \tag{1.2.9}$$

Пусть $M_i^*(\lambda)$ — оператор, сопряженный с $M_i(\lambda)$ ($i=0, 1, 2, 3$). Для $g\in D(L)$, пользуясь явным видом операторов $M_i^*(\lambda)$ и равенством $M''_{\eta\eta}(x,\eta,\lambda)=(q(x)+\lambda)M(x,\eta,\lambda)$, справедливым при $\eta\neq x$, имеем

$$[M_1^{\bullet}(\lambda) g](\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} M(x,\eta,\lambda)\,(q(x)-q(\eta))\,r(\eta-x)\,g(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\eta} M(x,\eta,\lambda)\,(q(x)-q(\eta))\,r(\eta-x)\,g(x)\,dx +$$

$$+ \int_{\eta}^{\infty} M(x,\eta,\lambda)\,(q(x)-q(\eta))\,r(\eta-x)\,g(x)\,dx =$$

$$= -(q(\eta)+\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} M(x,\eta,\lambda)\,r(\eta-x)\,g(x)\,dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\eta} M''_{\eta\eta}(x,\eta,\lambda)\,r(\eta-x)\,g(x)\,dx + \int_{\eta}^{\infty} M''_{\eta\eta}(x,\eta,\lambda)\,r(\eta-x)\,g(x)\,dx =$$

$$= -(q(\eta)+\lambda)\,(M_2^{\bullet}(\lambda) g)(\eta) + \left(\int_{-\infty}^{\eta} M(x,\eta,\lambda)\,r(\eta-x)\,g(x)\,dx\right)'' +$$

$$+ \Bigg(\int_{\eta}^{\infty} M(x,\eta,\lambda)\,r(\eta-x)\,g(x)\,dx + g(\eta) -$$

$$-2 \int_{-\infty}^{\eta} M'_{\eta}(x,\eta,\lambda)\,r'_{\eta}(\eta-x)\,g(x)\,dx - 2\int_{\eta}^{\infty} M'_{\eta}(x,\eta,\lambda)\,r'_{\eta} \times$$

$$\times (\eta-x)\,g(x)\,dx - \int_{-\infty}^{\eta} M(x,\eta,\lambda)\,r''_{\eta\eta}(\eta-x)\,g(x)\,dx -$$

$$- \int_{\eta}^{\infty} M(x,\eta,\lambda)\,r''_{\eta\eta}(\eta-x)\,g(x)\,dx = -(q(\eta)+\lambda)\,(M_2^{\bullet}(\lambda) g)(\eta) +$$

$$+ (M_2^{\bullet}(\lambda) g)''_{\eta\eta}(\eta) - (M_3^{\bullet}(\lambda) g)(\eta) + g(\eta).$$

Если g дважды непрерывно дифференцируема и финитна, то очевидно, что в силу выбора $r(\cdot)$ функция $[M_2^*(\lambda)]g$ также будет финитной и дважды непрерывно дифференцируемой. Поэтому $[M_2^*(\lambda)]g$ принадлежит $D(L_0)$ и полученное выше равенство дает соотношение

$$[E-M_1^*(\lambda)-M_3^*(\lambda)]g=(L+\lambda E)\,[M_2^*(\lambda)]g.$$

Отсюда следует

$$(L+\lambda E)^{-1}[E-M_1^*(\lambda)-M_3^*(\lambda)]g=M_2^*(\lambda)g. \qquad (1.2.10)$$

В силу оценок (1.2.6), (1.2.8) и (1.2.9) при достаточно больших λ операторы $M_1^*(\lambda)$, $M_3^*(\lambda)$ и $M_2^*(\lambda)$ ограничены, поэтому равенство (1.2.10) распространяется на все $g\in L_2(I)$. Согласно (1.2.8) и (1.2.6),

$$\|M_1^*(\lambda)+M_3^*(\lambda)\|\leqslant O(\lambda^{-\varepsilon})\ (\lambda\to\infty),$$

поэтому имеет место операторное равенство

$$(L+\lambda E)^{-1}=M_2^*(\lambda)\,[E-M_1^*(\lambda)-M_3^*(\lambda)]^{-1}.$$

Это и есть доказываемое нами представление резольвенты оператора (1.1.1). Оценки норм $M_1(\lambda)$ и $M_3(\lambda)$ следуют из (1.2.6) и (1.2.8). Теорема доказана.

Напомним, что квадратные корни из собственных чисел оператора AA^* называют сингулярными числами (s-числами) оператора A.

В подмножестве вполне непрерывных операторов, для которых p-е степени s-чисел суммируемы при $1\leqslant p<\infty$, можно ввести норму

$$\|A\|_{\sigma_p}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}s_n^p\right)^{1/p},$$

где s_n есть s-числа оператора A, занумерованные в порядке убывания. Такая норма обладает свойствами

$$\|AB\|_{\sigma_p}\leqslant\|A\|_{\sigma_p}\|B\|,\ \ \|BA\|_{\sigma_p}\leqslant\|A\|_{\sigma_p}\|B\|, \qquad (1.2.11)$$

где $\|\cdot\|$ — обычная операторная норма. Класс операторов σ_2 совпадает с классом операторов Гильберта — Шмидта, а класс σ_1 — с классом ядерных операторов. Классы σ_p рассмотрены в монографии И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [74]. Отметим, что s-числа самосопряженного неотрицательного оператора совпадают с его собственными числами.

Теорема 1.2.2. Предположим, что выполнены условия (1.2.1), (1.2.2) и (1.2.4) теоремы 1.2.1 Обозначим через $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность собственных чисел оператора L. Пусть λ — достаточно большое положительное число. Тогда имеет место асимптотическая формула *:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n+\lambda)^{-p}\right)^{1/p}=\|M_2^*(\lambda)\|_{\sigma_p}^{p}(1+O(\lambda^{-\varepsilon}))\,(\lambda\to\infty).$$

Доказательство. Из теоремы 1.2.1 и неравенств (1.2.11) получаем

$$\|(L+\lambda E)^{-1}\|_{\sigma_p}=\|M_2^*(\lambda)\,(E-M_1^*(\lambda)-M_3^*(\lambda))^{-1}\|_{\sigma_p}\leqslant$$

$$\leqslant\|M_2^*(\lambda)\|_{\sigma_p}\|(E-M_1^*(\lambda)-M_3^*(\lambda))^{-1}\|=\|M_2^*(\lambda)\|_{\sigma_p}(1+O(\lambda^{-\varepsilon})),$$

$$\|M_2^*(\lambda)\|_{\sigma_p}=\|(E-M_1^*(\lambda)-M_3^*(\lambda))\,(L+\lambda E)^{-1}\|_{\sigma_p}\leqslant$$

$$\leqslant\|(L+\lambda E)^{-1}\|_{\sigma_p}\,\|E-M_1^*(\lambda)-M_3^*(\lambda)\|=$$

$$=\|(L+\lambda E)^{-1}\|_{\sigma_p}(1+O(\lambda^{-\varepsilon})).$$

Оператор $(L+\lambda E)^{-1}$ самосопряжен и неотрицателен, поэтому

$$\|(L+\lambda E)^{-1}\|_{\sigma_p}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n+\lambda)^{-p}\right)^{1/p}.$$

Отсюда и из предыдущих неравенств вытекает теорема. В нашем случае применение доказанных теорем состоит в следующем. При $p=2$ величина $\|M_2^*(\lambda)\|_{\sigma_2}$ есть норма Гильберта — Шмидта оператора $M_2^*(\lambda)$, и она вычисляется по известной классической формуле через ядро

$$\|M_2^*(\lambda)\|_{\sigma_2}^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|M_2(x,\eta,\lambda)|^2d\eta dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(q(x)+\lambda)^{-1}\exp(-2|x-\eta|\sqrt{q(x)+\lambda}d\eta)dx+\right.$$

---

* Здесь приняты обозначения теоремы 1.2.1.

$$+O\left(\int_{-\infty}^{\infty}(q(x)+\lambda)^{-\frac{3}{2}}\exp(-0{,}8\sqrt{q(x)+\lambda})\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}(q(x)+\lambda)^{-1-\frac{1}{2}}dx+O(\exp(-0{,}1\sqrt{\lambda}))\times$$

$$\times\left(\int_{-\infty}^{\infty}(q(x)+\lambda)^{-\frac{3}{2}}dx\right)=\frac{1}{4}[1+O(\exp(-0{,}1\sqrt{\lambda}))]\times$$

$$\times\left(\int_{-\infty}^{\infty}(q(x)+\lambda)^{-\frac{3}{2}}dx\right).$$

Поэтому, используя теорему 1.2.2, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n+\lambda)^{-2}=\frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(q(x)+\lambda)^{-\frac{3}{2}}dx\right)(1+O(\lambda^{-s})). \qquad (1.2.12)$$

Теорема 1.2.3. **Пусть выполнены (1.2.1), (1.2.2), (1.2.4) и условия**

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(q(x)+\mu)^{3/2}}<\infty \quad \text{при } \mu>0, \qquad (1.2.13)$$

$$\alpha\psi\lambda<\psi'(\lambda)<\beta\psi(\lambda) \quad \text{при } \lambda>\lambda_0>0, \qquad (1.2.14)$$

где α, β — два положительных числа и

$$\psi(\lambda)=\int_{\lambda>q(x)}(\lambda-q(x))^{1/2}dx,$$

тогда

$$N(\lambda)=(1+O(1))\frac{1}{\pi}\int_{\lambda\geqslant q(x)}(\lambda-q(x))^{1/2}dx. \qquad (1.2.15)$$

Доказательство. Пусть $\sigma(\lambda)=\text{mes}\{q(x)\leqslant\lambda\}$. Тогда в силу (1.2.13) по определению интеграла Лебега имеет смысл левая часть следующего очевидного равенства:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(q(x)+\mu)^{3/2}}=\int_{0}^{\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{(\lambda+\mu)^{3/2}}.$$

Докажем, что

$$\int_{0}^{\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{(\lambda+\mu)^{3/2}}=\frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\lambda+\mu)^{2}}\left\{\int_{0}^{\lambda}(\lambda-\nu)^{-\frac{1}{2}}\,d\sigma(\nu)\right\}. \qquad (1.2.16)$$

Рассмотрим отдельно интеграл в правой части (1.2.16). Меняя порядок интегрирования, получаем

$$\int_{0}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\lambda+\mu)^{2}}\int_{0}^{\lambda}\frac{d\sigma(\nu)}{(\lambda-\nu)^{1/2}}=\int_{0}^{\infty}d\sigma(\nu)\int_{\nu}^{\infty}\frac{(\lambda-\nu)^{-1/2}}{(\lambda+\mu)^{2}}d\lambda. \qquad (1.2.17)$$

Внутренний интеграл правой части равен

$$\frac{1}{(\mu+\nu)^{3/2}}\int_{0}^{\infty}z^{-1/2}(1+z)^{-2}dz.$$

Значение второго сомножителя, согласно известным формулам для интеграла Эйлера, равно

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma^{-2}(2).$$

Поэтому в силу (1.2.17) равенство (1.2.16) доказано.

Формулу (1.2.16) можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\{q(x)+\mu\}^{3/2}}=\frac{2\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{\infty}\frac{d\psi(\lambda)}{(\lambda+\mu)^{2}}.$$

Отсюда и из асимптотической формулы (1.2.12) следует

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n+\mu)^{-2}=(1+O(1))\,\frac{1}{4}\,\frac{2\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{\infty}\frac{d\psi(\lambda)}{(\lambda+\mu)^{2}}.$$

Подставляя значения эйлеровых функций и учитывая очевидное равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n+\lambda)^{-2}=\int_{0}^{\infty}\frac{dN(\mu)}{(\lambda+\mu)^{2}},$$

приходим к соотношению

$$\int_0^\infty \frac{dN(\mu)}{(\lambda+\mu)^2} = (1+o(1))\,\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\psi(\mu)}{(\lambda+\mu)^2}.$$

Отсюда, пользуясь известной тауберовой теоремой Келдыша — Коренблюма, получаем формулу (1.2.15). Теорема доказана.

Теорема Келдыша — Коренблюма [91]. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — положительные возрастающие функции, определенные при $x>0$, причем $\psi(x)$ дифференцируема и при $x>a>0$ выполнено

$$\alpha\psi(x)<x\psi'(x)<\beta\psi(x),$$

где α и β — два положительных числа*, а при $x<\frac{a}{2}$ $\varphi(x)=$ $=\psi(x)=0$.

Предположим, что $f(x)g^{-1}(x)\to 1$ при $x\to-\infty$, где $f(x)=$ $=\int_0^\infty \frac{d\varphi(\xi)}{(\xi-x)^{m+1}}$, $g(x)=\int_0^\infty \frac{d\psi(\xi)}{(\xi-x)^{m+1}}$ (m — целая часть β).

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)\psi^{-1}(x)=1$.

§ 3. Асимптотика собственных значений оператора Штурма — Лиувилля

Вариационный метод, конкурирующий с методом тауберовых теорем, в ряде случаев приводит (особенно при полуограниченности потенциала) к более законченным результатам. Обычно используемый его вариант состоит из двух частей.

Первая (основная) часть — получение с помощью общих вариационных принципов оценки $N(\lambda)$ следующего вида:

$$(1-o(1))M(\lambda-\varphi(\lambda))\leqslant N(\lambda)\leqslant$$
$$\leqslant(1+o(1))M(\lambda+\varphi(\lambda))\quad(\lambda\to\infty),\tag{1.3.1}$$

где $\varphi(\lambda)=o(\lambda)$ — неотрицательная функция, а $M(\lambda)$ — известная функция, выражающаяся как функционал от коэффициентов оператора. Вторая часть состоит в извлечении из (1.3.1) асимптотической формулы

$$N(\lambda)=(1+o(1))M(\lambda)\quad(\lambda\to\infty).$$

* М. В. Келдыш доказал свою теорему в предположении $0<\beta<\alpha+1$. Б. И. Коренблюм показал, что эта теорема верна без этого ограничения.

Но из (1.3.1) не всегда можно получить такую асимптотическую формулу. Например, если $M(\lambda)=e^{\lambda}$, $\varphi(\lambda)=\sqrt{\lambda}$, то из (1.3.1) не следует, что $N(\lambda)=(1+o(1))e^{\lambda}$. Поэтому для вывода из (1.3.1) нужной асимптотики на $M(\lambda)$ накладывают (явно или неявно) тауберовы условия. Так что эти условия всегда используются (по крайней мере в неявной форме) и в вариационном методе.

Тауберовы условия заключаются в том, что количество точек спектра оператора L, лежащих левее λ, гораздо больше, чем их количество в правой относительно малой окрестности точки λ.

Функция $M(\lambda)$, как правило, обладает следующим свойством:

$$(1+o(1))M(\lambda)\leqslant M(\lambda+o(1)\lambda) \quad \text{и} \quad (1-o(1))M(\lambda)\geqslant M(\lambda-o(1)\lambda).$$

Если эти условия выполнены, то из (1.3.1) вытекает оценка

$$M(\lambda-o(\lambda))\leqslant N(\lambda)\leqslant M(\lambda+o(\lambda)).$$

Отсюда, переходя к обратным функциям, получаем асимптотическую формулу для собственных чисел. Таким образом, если искать асимптотику самих собственных чисел, то существует возможность избавиться от наложения условий, обеспечивающих применимость тауберовых теорем.

Из сущности задачи вытекает, что знание асимптотики собственных чисел обычно важнее, чем знание асимптотики функции их распределения. Но для дифференциальных операторов формулы для $N(\lambda)$ выглядят проще. По-видимому, это и является основной причиной того, что почти во всех работах их авторы выписывали асимптотику функции $N(\lambda)$. Далее на функцию $q(x)$ помимо условия (1.1.1) наложим еще одно условие: существуют непрерывные функции $K(x)\geqslant 1$ и $S(x)>0$, стремящиеся к бесконечности и удовлетворяющие требованиям

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta}(q(t)-S(x))\,dt\right|\leqslant K^{-1}(x)S^{1/2}(x) \quad \text{при } \alpha, \beta\in\Delta(x), \tag{1.3.2}$$

где $\Delta(x)=[x-K(x)S^{-1/2}(x),\ x+K(x)S^{-1/2}(x)]$. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\lim_{|x|\to\infty} K(x)S^{-1/2}(x)=0. \tag{1.3.3}$$

Если это не выполняется, то, оставляя функцию $S(x)$ неизменной, функцию $K(x)$ можно заменить другой функцией, для которой выполняются соотношения (1.3.2) и (1.3.3). Такая возможность является следствием того, что при замене функции $K(x)$ на меньшую, неравенство (1.3.2) сохраняется.

Нам достаточно, чтобы условие (1.3.2) выполнялось при больших по модулю x. В последующем потенциалы, для которых выполняется условие (1.3.2) при некоторых $K(x)$ и $S(x)$, назовем регулярными. Класс регулярных потенциалов обозначим через $\mathbf{K}$.

Обозначим через $M(\lambda)$ любую строго монотонную неотрицательную функцию, которая при больших положительных λ совпадает с функцией

$$M(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda\geqslant S(x)}\sqrt{\lambda-S(x)}\,dx. \qquad (1.3.4)$$

Пусть $F(\lambda)$ — функция, обратная (в смысле преобразования) к функции $M(\lambda)$. Имеет место

Теорема 1.3.1. Если $q(x)\geqslant 1$ и $q(x)\in\mathbf{K}$, то спектр оператора L дискретен и справедлива асимптотическая формула

$$\lambda_n=F(n)\,(1+o(1)), \qquad (1.3.5)$$

где λ_n, $n=1, 2, \ldots$ — собственные числа оператора L.

Эта теорема обладает такой общностью, что если выполнены любые до сих пор известные условия, при которых имеет место асимптотическая формула для $N(\lambda)$ оператора (1.1.1) с полуограниченным потенциалом $q(x)$, то выполняется условие (1.3.2).

Определим по $q(x)$ новую функцию

$$q^*(x)=\inf_{d>0}\left\{d^{-2}:1\geqslant d\int\limits_{x-\frac{d}{2}}^{x+\frac{d}{2}}q(t)\,dt\right\}.$$

Функция $q^*(x)$ является некоторым усреднением $q(x)$. Сказанное подтверждается леммой.

Лемма 1.3.1*. Пусть $x\in I=(-\infty,\infty)$, $d=q^{*-\frac{1}{2}}(x)$. Тогда

$$q^*(x)=d^{-1}\int\limits_{x-\frac{d}{2}}^{x+\frac{d}{2}}q(t)\,dt.$$

Оказывается, если $q(t)\in\mathbf{K}$, то в условии за $S(x)$ можно взять $q^*(x)$. А именно, имеет место

* Доказательство лемм 1.3.1 и 1.3.2 приведено в § 5.

Лемма 1.3.2. Пусть $q(t)\geqslant 1$. Тогда $q(t)\in\mathbf{K}$, если и только если существует $K(x)\geqslant 1$, стремящаяся к бесконечности при $|x|\to\infty$ такая, что выполняется условие (1.3.2) при $S(x)=q^*(x)$. Из этой леммы и теоремы 1.3.1 вытекает

Следствие. Если $q(t)\in\mathbf{K}^*$, то справедлива асимптотическая формула

$$\lambda_n=F^*(n)\,(1+o(1))\quad(n\to\infty),\tag{1.3.6}$$

где $F^*(n)$ — функция, обратная к строго монотонной неотрицательной функции $M^*(\lambda)$, совпадающей при достаточно больших положительных λ с функцией

$$M^*(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{q^*(x)\leqslant\lambda}\sqrt{\lambda-q^*(x)}\,dx.\tag{1.3.7}$$

По всей вероятности, формула (1.3.6) имеет место при одном только предположении $q(x)\geqslant 1$. В настоящее время это пока не доказано. Опровергающие контрпримеры также неизвестны. Формулы (1.3.5) и (1.3.6) впервые приведены в работах [144, 157].

Доказательство теоремы 1.3.1 разобьем на несколько этапов.

§ 4. Вспомогательные оценки спектра

Обозначим

$$N(\lambda)=\sum_{\lambda_n<\lambda}1.$$

Лемма 1.4.1. Предположим $q(x)\geqslant 1$ и спектр оператора L дискретен. Пусть $R(\lambda)$ $(0<\lambda<\infty)$ — некоторая строго монотонная непрерывная функция, а $r(\cdot)$ — обратная к ней. Тогда асимптотическая формула

$$\lambda_n=R(n)\,(1+o(1))\quad(n\to\infty)\tag{1.4.1}$$

имеет место, если и только если существует непрерывная функция $q(\lambda)$ такая, что

$$g(\lambda)>0,\qquad\lim_{\lambda\to\infty}g(\lambda)=0,$$

* Из доказательства теоремы и следствия легко увидеть, что если $q(x)\geqslant 1$, $q(x)\in\mathbf{K}$ тогда и только тогда, когда существует непрерывная функция $K(x)\geqslant 1$ такая, что

$$\lim_{|x|\to\infty}K(x)=\infty,\ \lim_{|x|\to\infty}\sup\left(q^*(x)q^{*-1}(y):y\in\left(-K(x)q^{*^{-\frac{1}{2}}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times(x)+x,\ x+K(x)q^{*^{-\frac{1}{2}}}(x)\right)\right)=1.$$

$$r(\lambda-\lambda g(\lambda))\leqslant N(\lambda)\leqslant r(\lambda+\lambda g(\lambda)). \qquad (1.4.2)$$

Доказательство. Пусть выполнено (1.4.2). Возьмем в (1.4.2) число λ, равным λ_n. Тогда в силу определения $N(\cdot)$ имеем $N(\lambda_n)=n$. Поэтому

$$r(\lambda_n-g(\lambda_n)\lambda_n)\leqslant n\leqslant r(\lambda_n+g(\lambda_n)\lambda_n).$$

Перейдем к обратным функциям и получим неравенства

$$(1-g(\lambda_n))\lambda_n\leqslant R(n)\leqslant(1+g(\lambda_n))\lambda_n,$$

из которых вытекает (1.4.1).

Пусть теперь выполняется (1.4.1). Тогда найдется непрерывная функция $\tilde{g}(\lambda)$ такая, что

$$(1-\tilde{g}(\lambda_n))\lambda_n\leqslant R(n)\leqslant(1+\tilde{g}(\lambda_n))\lambda_n,$$

$$1-\tilde{g}(\lambda_n)\geqslant 0,\ \tilde{g}(\lambda_n)>0,\ \tilde{g}(\lambda_n)\to 0 \ \text{ при } \lambda_n\to\infty.$$

Нетрудно видеть, что функцию $\tilde{g}(\lambda)$ можно подобрать таким образом, чтобы переход в этих неравенствах к обратным функциям приводил к (1.4.2). Лемма доказана.

Лемма 1.4.2. Существует покрытие оси I отрезками Δ_i ($i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) такими, что

$$\Delta_i=\left[x_i-\frac{1}{2}K(x_i)S^{-1/2}(x_i),\ x_i+\frac{1}{2}K(x_i)S^{-1/2}(x_i)\right],\quad \Delta_i^+=\Delta_{i+1}^-,$$

где Δ_i^+ — правый конец Δ_i, а Δ_{i+1}^- — левый конец Δ_{i+1}.

Доказательство. Пусть построены отрезки $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ указанного в лемме вида. Построим отрезок вида Δ_{n+1}. Для этого возьмем произвольную точку x, лежащую не левее Δ_n^+, и построим отрезок

$$\Delta^{(x)}=\left[x-\frac{1}{2}K(x)S^{-1/2}(x),\ x+\frac{1}{2}K(x)S^{-1/2}(x)\right].$$

Точку x выберем таким образом, чтобы левый конец отрезка $\Delta^{(x)}$ лежал левее Δ_n^+. Для этого достаточно взять, например, $x=\Delta_n^+$. При перемещении точки x вправо, в силу непрерывности $K(x)$ и $S(x)$, левый конец $\Delta^{(x)}$ будет непрерывно перемещаться. Поэтому, так как при $x\to\infty$ левый конец $\Delta^{(x)}$, очевидно, в силу (1.3.3) должен уходить в $+\infty$, то найдется точка x_{n+1} такая, что левый конец отрезка $\Delta^{(x_{n+1})}$ будет совпадать с правым концом Δ_n. Теперь за Δ_{n+1} можно взять $\Delta^{(x_{n+1})}$. Продолжая этот процесс, мы получаем бесконечную последовательность отрезков $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_i, \ldots$ таких, что

$$\Delta_i^+=\Delta_{i+1}^- \text{ и } \Delta_i=\left[x_i-\frac{1}{2}K(x_i)S^{-1/2}(x_i),\ x_i+\frac{1}{2}K(x_i)S^{-1/2}(x_i)\right].$$

Аналогично можно строить $\Delta_0, \Delta_{-1}, \Delta_{-2}, \ldots, \Delta_{-n}, \ldots$. Остается показать, что при $n\to\infty$ правые концы Δ_n уходят в $+\infty$, а при $n\to-\infty$ левые концы Δ_n уходят в $-\infty$. Если, например, при $n\to\infty$ правые концы Δ_n не уходят в $+\infty$, то найдется постоянное $C\in\in[0, \infty)$ такое, что $\Delta_i^+<C$ для всех $i>0$. Но тогда на отрезке $[0, C]$ будет содержаться бесконечное число непересекающихся интервалов вида $\left(x-\frac{1}{2}K(x)S^{-1/2}(x),\ x+\frac{1}{2}K(x)S^{-1/2}(x)\right)$. Этого не может быть, так как $K(x)$ и $S(x)$ — непрерывные функции и $K(x)S^{-1/2}(x)>0$ для любого конечного x. Лемма доказана.

Пусть $\{\Delta_i\}$ — покрытие I из леммы 1.4.2. Введем функцию $\widetilde{S}(x)$, полагая ее равной $S(x_i)$ в сегменте (Δ_i^-, Δ_i^+). Через $\widetilde{L}$ обозначим оператор Штурма — Лиувилля $\widetilde{L}y=-y''+\widetilde{S}(x)y$, $y(0)=0$, рассматриваемый в $L_2(I)$.

Пусть функция $y(x)$ финитна и $y(x)\in D(L)$. Тогда имеет место очевидное равенство:

$$(Ly, y)-(\widetilde{L}y, y)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int_{\Delta_i}(q(t)-S(x_i))y^2(t)\,dt. \tag{1.4.3}$$

Пользуясь равенством (1.4.3), докажем, что имеет место основополагающая для последующего.

Лемма 1.4.3. Пусть потенциал $q(t)\in\mathbf{K}$, а $\{\lambda_n\}_{n\geq1}$ и $\{\widetilde{\lambda}_n\}_{n\geq1}$ — собственные числа операторов L и $\widetilde{L}$ соответственно.

Тогда справедливо асимптотическое равенство $\lambda_n=\widetilde{\lambda}_n(1+ +o(1))$ $(n\to\infty)$.

Доказательство. Обозначим

$$a_i=\int_{\Delta_i}(q(t)-S(x_i))y^2(t)\,dt,\quad i=0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Оценим величины a_i. Пусть $\alpha\in\Delta_i$. Тогда

$$a_i=\int_{\Delta_i}(|q(t)-S(x_i)|y^2(t)-y^2(\alpha))\,dt+$$

$$+y^2(\alpha)\int\limits_{\Delta_i}(q(t)-S(x_i))\,dt\equiv b_i+c_i. \qquad (1.4.4)$$

В силу условия $q(t)\in\mathrm{K}$ имеем неравенство

$$|c_i|\leqslant|y^2(\alpha)|\,K^{-1}(x_i)S^{1/2}(x_i). \qquad (1.4.5)$$

Оценим b_i:

$$b_i=\int\limits_{\Delta_i^-}^{\alpha}(q(t)-S(x_i))\left(-\int\limits_{t}^{\alpha}(y^2(\eta))'\,d\eta\right)dt+\int\limits_{\alpha}^{\Delta_i^+}(q(t)-S(x_i))\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\alpha}^{t}(y^2(\eta))'\,d\eta\right)dt.$$

Переставим в последнем выражении порядки интегрирования:

$$b_i=-\int\limits_{\Delta_i^-}^{\alpha}\left(\int\limits_{\Delta_i^-}^{\eta}(q(t)-S(x_i))\,dt\right)(y^2(\eta))'\,d\eta+$$

$$+\int\limits_{\alpha}^{\Delta_i^+}\left(\int\limits_{\eta}^{\Delta_i^+}(q(t)-S(x_i))\,dt\right)(y^2(\eta))'\,d\eta.$$

Внутренние интегралы оценим, пользуясь условием $q(t)\in\mathrm{K}$, получим соотношение

$$|b_i|\leqslant 2K^{-1}(x_i)S^{1/2}(x_i)\left[\int\limits_{\Delta_i^-}^{\Delta_i^+}|y(\eta)\,y'(\eta)|\,d\eta\right].$$

К интегралу применим неравенство Коши — Буняковского, затем выберем число $\varepsilon_i\in(0,1)$ и применим элементарное неравенство $2|ab|\leqslant\varepsilon_i|a|^2+\varepsilon_i^{-1}|b|^2$:

$$\|b_i\|\leqslant 2K^{-1}(x_i)S^{1/2}(x_i)\left(\int\limits_{\Delta_i}|y(\eta)|^2\,d\eta\right)^{1/2}\cdot\left(\int\limits_{\Delta_i}|y'(\eta)|^2\,d\eta\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant 2K^{-1}(x_i)\left[\varepsilon_i\int\limits_{\Delta_i}|y'(\eta)|^2\,d\eta+\varepsilon_i^{-1}S(x_i)\int\limits_{\Delta_i}|y(\eta)|^2\,d\eta\right]. \qquad (1.4.6)$$

Оценка (1.4.6) не зависит от $\alpha\in\Delta_l$. Поэтому точку $\alpha\in\Delta_l$ выберем таким образом, чтобы иметь равенство

$$y^2(\alpha)=\inf\{y^2(t): t\in\Delta_l\}.$$

Тогда

$$|y^2(\alpha)|\leqslant 2\left(\int_{\Delta_l}|y(t)|^2dt\right)S^{1/2}(x_l)K^{-1}(x_l).$$

Отсюда и из оценки (1.4.5) получаем соотношения

$$|c_l|\leqslant|y^2(\alpha)|K^{-1}(x_l)S^{1/2}(x_l)\leqslant 2\frac{S(x_l)}{K^2(x_l)}\int_{\Delta_l}|y(t)|^2dt.$$

Так как $K(x_l)\geqslant 1$, то это неравенство вместе с (1.4.4) и (1.4.6) дает окончательную оценку a_l:

$$|a_l|\leqslant 4K^{-1}(x_l)\left(\varepsilon_l\int_{\Delta_l}|y'(\eta)|^2d\eta+\varepsilon_l^{-1}S(x_l)\int_{\Delta_l}|y(t)|^2dt\right), \tag{1.4.7}$$

$$0<\varepsilon_l\leqslant 1,\quad i=0,\pm1,\pm2,\dots$$

Обратимся теперь к равенству (1.4.3). Из него следует, что

$$|(Ly,y)-(\widetilde{L}y,y)|\leqslant\sum_{l=-\infty}^{\infty}|a_l|.$$

Применим неравенство (1.4.7):

$$|(Ly,y)-(\widetilde{L}y,y)|\leqslant 4\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty}K^{-1}(x_l)\left(\varepsilon_l\int_{\Delta_l}|y'(\eta)|^2d\eta+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\varepsilon_l^{-1}S(x_l)\int_{\Delta_l}|y(\eta)|^2d\eta\right)\right],\ (0<\varepsilon_l\leqslant 1). \tag{1.4.8}$$

Возьмем достаточно малое $\varepsilon>0$. В соотношении (1.4.8) выберем числа ε_l следующим образом: если $4K^{-1}(x_l)\leqslant\varepsilon$, то положим $\varepsilon_l=1$, а если $4K^{-1}(x_l)>\varepsilon$, то возьмем ε_l из равенства $4K^{-1}(x_l)\varepsilon_l=\varepsilon$. Тогда из неравенства (1.4.8) получим оценку

$$|(Ly,y)-(\widetilde{L}y,y)|\leqslant\varepsilon\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int_{\Delta_l}|y'(\eta)|^2d\eta+4\sum_{4K^{-1}(x_l)<\varepsilon}K^{-1}(x_l)S(x_l)\times$$

$$\times \int\limits_{\Delta_i} |y(\eta)|^2 dt + \sum_{4K^{-1}(x_i)>\varepsilon} (4K^{-1}(x_i))^2 \varepsilon^{-1} S(x_i) \int\limits_{\Delta_i} |y(\eta)|^2 d\eta.$$

Так как $K(x_i) \to +\infty$ при $|i| \to \infty$, то последнее слагаемое правой части содержит конечное число членов и поэтому ограничено числом

$$c(\varepsilon) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\Delta_i} |y(\eta)|^2 d\eta,$$

где $c(\varepsilon)$ не зависит от функции $y \in D(L)$. Поэтому из предыдущего неравенства следует оценка:

$$|(Ly, y) - (\widetilde{L}y, y)| \leqslant \varepsilon \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\Delta_j} |y'(\eta)|^2 d\eta + \varepsilon \sum_{j=-\infty}^{\infty} S(x_j) \int\limits_{\Delta_j} |y(\eta)|^2 d\eta +$$

$$+ c(\varepsilon) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\Delta_j} |y(\eta)|^2 dt = \varepsilon(\widetilde{L}y, y) + c(\varepsilon) \|y\|^2.$$

Для любого положительного числа λ имеет место равенство

$$(Ly, y) - ((\widetilde{L} + \lambda E) y, y) = ((L + \lambda E) y, y) - (\widetilde{L}y, y).$$

Поэтому

$$|((Ly + \lambda E) y, y) - ((\widetilde{L} + \lambda E) y, y)| \leqslant$$

$$\leqslant |(Ly, y) - (\widetilde{L}y, y)| \leqslant \varepsilon(\widetilde{L}y, y) + c(\varepsilon) \|y\|^2 = \varepsilon((\widetilde{L} + \lambda E) g, y) +$$

$$+ (c(\varepsilon) - \varepsilon\lambda) \|y\|^2.$$

Выберем в этом неравенстве $\lambda = \lambda(\varepsilon) = \varepsilon^{-1} c(\varepsilon)$ и получим основное неравенство

$$|((L + \lambda(\varepsilon) E) y, y) - ((\widetilde{L} + \lambda(\varepsilon) E) y, y)| \leqslant \varepsilon((\widetilde{L} + \lambda(\varepsilon) E) y, y)$$

или

$$(1 - \varepsilon)((\widetilde{L} + \lambda(\varepsilon) E) y, y) \leqslant ((L + \lambda(\varepsilon) E) y, y) \leqslant$$

$$\leqslant (1 + \varepsilon)((\widetilde{L} + \lambda(\varepsilon) E) y, y). \tag{1.4.9}$$

Хорошо известна следующая

Теорема 1.4.1 [9, с. 278]. Количество собственных чисел самосопряженного неотрицательного оператора A, не превосходящих λ, равно максимальной размерности подпространства G, которое удовлетворяет неравенству

$$(Ax, x) \leqslant \lambda \|x\|^2, \quad x \in G.$$

Эта теорема является одним из простых следствий спектрального разложения.

Обозначим через $N_{1,\varepsilon}(\lambda)$, $N_\varepsilon(\lambda)$ и $N_{2,\varepsilon}(\lambda)$ функции распределения собственных чисел соответственно операторов

$$(1-\varepsilon)(\widetilde{L}+\lambda(\varepsilon)E), \ L+\lambda(\varepsilon)E, \ (1+\varepsilon)(\widetilde{L}+\lambda(\varepsilon)E).$$

Из теоремы 1.4.1 и из оценок (1.4.9) легко вытекают неравенства

$$N_{2,\varepsilon}(\lambda) \leqslant N_\varepsilon(\lambda) \leqslant N_{1,\varepsilon}(\lambda).$$

Отсюда, если через $\lambda_n^{(1,\varepsilon)}$, $\lambda_n^{(\varepsilon)}$ и $\lambda_n^{(2,\varepsilon)}$ ($n=1, 2, \ldots$) обозначить собственные числа соответственно операторов $(1-\varepsilon)(\widetilde{L}+\lambda(\varepsilon)E)$, $L+\lambda(\varepsilon)E$, $(1+\varepsilon)(\widetilde{L}+\lambda(\varepsilon)E)$, получаются неравенства $\lambda_n^{(1,\varepsilon)} \leqslant \lambda_n^{(\varepsilon)} \leqslant \lambda_n^{(2,\varepsilon)}$. Но $\lambda_n^{(\varepsilon)}=\lambda_n+\lambda(\varepsilon)$, $\lambda_n^{(1,\varepsilon)}=(\widetilde{\lambda}_n+\lambda(\varepsilon))(1-\varepsilon)$, $\lambda_n^{(2,\varepsilon)}=(\widetilde{\lambda}_n+\lambda(\varepsilon))(1+\varepsilon)$. Следовательно, имеют место оценки $(1-\varepsilon)\times(\widetilde{\lambda}_n+\lambda(\varepsilon)) \leqslant \lambda_n+\lambda(\varepsilon) \leqslant (\widetilde{\lambda}_n+\lambda(\varepsilon))(1+\varepsilon)$. Отсюда вытекает, что выполняются неравенства

$$(1-\varepsilon) \leqslant \lim_{n\to\infty} \widetilde{\lambda}_n^{-1} \lambda_n \leqslant 1+\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon>0$ — произвольно малое число, то последние неравенства доказывают лемму.

§ 5. Локальные интегральные неравенства

Доказательство леммы 1.3.1. Пусть $x \in I$. Тогда при возрастании d ($d>0$) функция $f_0(d)=d^{-1}$ убывает, а функция

$$f_1(d) = \int_{x-\frac{d}{2}}^{x+\frac{d}{2}} q(t)dt$$

не убывает, причем функции $f_0(d)$ и $f_1(d)$ в промежутке $(0, \infty)$ непрерывны и справедливы соотношения:

$$\lim_{d\to\infty} f_0(d)=0, \qquad \lim_{\to 0} f_0(d)=+\infty,$$

$$\lim_{d\to 0} f_1(d)=0, \qquad \lim_{d\to\infty} f_1(d)>0.$$

Поэтому найдется такая точка $d_0\in(0,\infty)$, для которой выполняется равенство

$$\int_{x-\frac{d}{2}}^{x+\frac{d}{2}} q(t)\,dt=d_0^{-1}. \tag{1.5.1}$$

Из определения функции $\sqrt{q^*(x)}$ и из равенства (1.5.1) вытекает, что $d_0^{-1}\geqslant\sqrt{q^*(x)}$. Остается доказать, что $d_0^{-1}\leqslant\sqrt{q^*(x)}$.

Для доказательства этого соотношения, согласно определению функции $q^*(x)$, достаточно показать, что для любого $d^{-1}\leqslant d_0^{-1}$ выполняется неравенство $\int_{x-\frac{d}{2}}^{x+\frac{d}{2}} q(t)\,dt>d^{-1}$. Но при $d^{-1}<d_0^{-1}$ из равенства (1.5.1) получаем оценки

$$\int_{x-\frac{d}{2}}^{x+\frac{d}{2}} q(t)\,dt\geqslant\int_{x-\frac{d_0}{2}}^{x+\frac{d_0}{2}} q(t)\,dt=d_0^{-1}>d^{-1}.$$

Лемма доказана.

Л е м м а 1.5.1. Пусть функция $q(t)\in K$. Тогда при достаточно больших по модулю x справедливы неравенства

$$S^{1/2}(x)\,(1-K^{-1}(x))\leqslant q^{*\frac{1}{2}}(x)\leqslant S^{1/2}(x)\,(1+K^{-1}(x)),$$

где $S(x)$ и $K(x)$ — функции, для которых выполнено условие (1.3.2).

Доказательство. Пусть $\alpha>0$ — любое число. Так как $K(x)\to\infty$ при $|x|\to\infty$, то для достаточно больших по модулю x имеем, что отрезок $[x-\alpha S^{-1/2}(x),\ x+\alpha S^{-1/2}(x)]$ принадлежит $\Delta(x)$. Поэтому, согласно условию регулярности, имеем соотношение

$$\int\limits_{x-\alpha S^{-1/2}(x)}^{x+\alpha S^{-1/2}(x)} (q(t)-S(x))\,dt=\varphi(x)\sqrt{S(x)},$$

где

$$|\varphi(x)|\leqslant K^{-1}(x).$$

Отсюда следует равенство

$$\int\limits_{x-\alpha S^{-1/2}(x)}^{x+\alpha S^{-1/2}(x)} q(t)\,dt=2\alpha\sqrt{S(x)}+\sqrt{S(x)}\varphi(x),$$

и при $\alpha=0{,}5$ получаем соотношение

$$\int\limits_{x-0{,}5S^{-1/2}(x)}^{x+0{,}5S^{-1/2}(x)} q(t)\,dt=\sqrt{S(x)}\,(1+\varphi(x)).$$

Если допустить, что выполняется неравенство

$$\sqrt{q^*(x)}\leqslant\sqrt{S(x)}\,(1-AK^{-1}(x)),$$

где $A>1$, то, используя лемму 1.3.1, имеем цепочку оценок:

$$\sqrt{q^*(x)}=\int\limits_{x-0{,}5q^{*-1/2}(x)}^{x+0{,}5q^{*-1/2}(x)} q(t)\,dt\geqslant\int\limits_{x-0{,}5S^{-1/2}(x)}^{x+0{,}5S^{-1/2}(x)} q(t)\,dt=$$

$$=\sqrt{S(x)}\,(1+\varphi(x))\geqslant\sqrt{S(x)}\,(1-K^{-1}(x)).$$

Эти неравенства при $A>1$ противоречат допущению $\sqrt{q^*(x)}\leqslant\sqrt{S(x)}\,(1-AK^{-1}(x))$. Поэтому $\sqrt{q^*(x)}\geqslant\sqrt{S(x)}\,(1+AK^{-1}(x))$. Аналогично предположим, что имеет место неравенство $\sqrt{q^*(x)}\geqslant\sqrt{S(x)}\,(1+AK^{-1}(x))$ при некотором $A>1$. Тогда, пользуясь леммой 1.3.1, имеем цепочку оценок:

$$\sqrt{q^*(x)}=\int\limits_{x-0{,}5q^{*-1/2}(x)}^{x+0{,}5q^{*-1/2}(x)} q(t)\,dt\leqslant\int\limits_{x-0{,}5S^{-1/2}(x)}^{x+0{,}5S^{-1/2}(x)} q(t)\,dt=$$

$$=\sqrt{S(x)}\,(1+\varphi(x))\leqslant\sqrt{S(x)}\,(1+K^{-1}(x)).$$

Как и выше, при $A>1$ снова получаем противоречие. Поэтому $\sqrt{q^*(x)}\leqslant\sqrt{S(x)}\,(1+K^{-1}(x))$. Лемма доказана.

Лемма 1.5.2. Если $q(t)\in K$, т. е., если выполняется (1.3.2) при некоторых функциях $K(x)$ и $S(x)$, то существует функция $\widetilde{K}(x)>0$ такая, что (1.3.2) выполняется для функций $\widetilde{K}(x)$ и $q^*(x)$.

Доказательство. Пусть $\eta\leqslant\beta$ и $\eta,\beta\in[x-K^{1/4}(x)S^{-1/2}(x),\ x+ +K^{1/4}S^{-1/2}(x)]$. Тогда справедливо равенство

$$\int_\eta^\beta (q(t)-q^*(x))\,dt=\int_\eta^\beta (q(t)-S(x))\,dt+(S(x)-q^*(x))(\beta-\eta).$$

Отсюда и из (1.3.2) вытекает неравенство

$$\left|\int_\eta^\beta (q(t)-q^*(x))\,dt\right|\leqslant K^{-1}(x)\sqrt{S(x)}+$$
$$+\left|\sqrt{S(x)}-\sqrt{q^*(x)}\right|(\sqrt{S(x)}+\sqrt{q^*(x)})\,(2K^{1/4}(x)S^{-1/2}(x)).$$

Воспользуемся оценками из леммы 1.5.1 и получим соотношение

$$\left|\int_\eta^\alpha (q(t)-q^*(x))\,dt\right|\leqslant c\left[(K^{-1}(x)\sqrt{q^*(x)})+K^{-3/4}(x)\sqrt{q^*(x)}\right],$$

где c — постоянное число.

Учитывая, что $K(x)\to\infty$ при $|x|\to\infty$, для достаточно больших по модулю x приходим к оценке

$$\left|\int_\eta^\beta (q(t)-q^*(x))\,dt\right|\leqslant K^{-1/4}(x)\sqrt{q^*(x)}.$$

Для небольших по модулю x можно достроить функцию $K^{-1/4}$ так, чтобы для полученной функции выполнялись утверждения леммы для всех $x\in I$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 1.3.2. Лемма 1.3.2 вытекает из леммы 1.5.2.

Лемма 1.5.3. Пусть выполняются условия (1.3.2). Тогда существует непрерывная, положительная, стремящаяся к $+\infty$ при $|x|\to\infty$ функция $a(x)$ такая, что при достаточно больших по модулю x выполняются неравенства $(1-a^{-1}(x))\leqslant q^{*\frac{1}{2}}(y)\,q^{*-\frac{1}{2}}(x)\leqslant$ $\leqslant(1+a^{-1}(x))$ при $|x-y|\leqslant 2^{-1}a(x)\,q^{*-\frac{1}{2}}(x)$.

Доказательство. Пусть $x \geqslant N$, где N — такое число, что функция $\widetilde{K}(x) \geqslant 3$ при $x \geqslant N$. Здесь $\widetilde{K}(x)$ — функция из леммы 1.5.2. Обозначим

$$^{(x)}\Delta = [x - (\widetilde{K}(x) - 2) q^{*^{-\frac{1}{2}}}(x),\ x + (\widetilde{K}(x) - 2) q^{*^{-\frac{1}{2}}}(x)],$$

$$\Delta_{(x)} = [x - \widetilde{K}(x) q^{*^{-\frac{1}{2}}}(x),\ x + \widetilde{K}(x) q^{*^{-\frac{1}{2}}}(x)].$$

Возьмем точку $y \in {}^{(x)}\Delta$. Не ограничивая общности, будем считать, что $x > y$. Допустим, что отрезок

$$\Delta_y = \left[y - \frac{1}{2} q^{*^{-\frac{1}{2}}}(y),\ y + \frac{1}{2} q^{*^{-\frac{1}{2}}}(y)\right]$$

содержится в отрезке $\Delta_{(x)}$. Тогда по лемме 1.5.2 выполняется неравенство

$$\left| \int_{\Delta_y} (q(t) - q^*(x))\, dt \right| \leqslant \widetilde{K}^{-1}(x) \sqrt{q^*(x)},$$

и по лемме 1.3.1 — равенство

$$\int_{\Delta_y} q(t)\, dt = \sqrt{q^*(y)}.$$

Из этих двух соотношений вытекает оценка

$$\left| \int_{\Delta_y} q^*(x)\, dt - \int_{\Delta_y} q(t)\, dt \right| = | q^*(x) q^{*^{-\frac{1}{2}}}(y) - \sqrt{q^*(y)} | \leqslant \widetilde{K}^{-1}(x) \sqrt{q^*(x)}$$

или

$$| \sqrt{q^*(x)} - \sqrt{q^*(y)} | \leqslant \widetilde{K}^{-1}(x) \sqrt{q^*(x) q^*(y)}\, (\sqrt{q^*(x)} + \sqrt{q^*(y)})^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{K}^{-1}(x) \sqrt{q^*(x)}.$$

Отсюда получаем, что имеют место неравенства

$$\sqrt{q^*(x)}\, (1 - \widetilde{K}^{-1}(x)) \leqslant \sqrt{q^*(y)} \leqslant \sqrt{q^*(x)}\, (1 + \widetilde{K}^{-1}(x)).$$

Таким образом, если $\Delta_y \subseteq \Delta_{(x)}$, то лемма доказана, причем очевидно, что за $a(x)$ можно взять $\widetilde{K}(x)$. Допустим теперь, что $\Delta_y \subseteq \Delta_{(x)}$ не выполняется. Тогда очевидно, что отрезок

$$\widetilde{\Delta}=[x-\widetilde{K}(x)q^{*-1/2}(x),\ x-\widetilde{K}(x)q^{*-1/2}(x)+4q^{*-1/2}(x)]$$

должен содержаться в Δ_y. Поэтому из леммы 1.3.1 следует, что $\sqrt{q^*(y)}>\int\limits_{\widetilde{\Delta}} q(t)\,dt.$

А по лемме 1.5.2

$$\left|\int\limits_{\widetilde{\Delta}}(q(t)-q^*(x))\,dt\right|\leqslant\widetilde{K}^{-1}(x)\sqrt{q^*(x)}.$$

Из этих двух соотношений получаем неравенства

$$\sqrt{q^*(y)}>\int\limits_{\widetilde{\Delta}} q(t)\,dt\geqslant\int\limits_{\widetilde{\Delta}} q^*(x)\,dt-\widetilde{K}^{-1}(x)\sqrt{q^*(x)}=$$

$$=4\sqrt{q^*(x)}-\widetilde{K}^{-1}(x)\sqrt{q^*(x)}>3\sqrt{q^*(x)}.$$

Отсюда следует, что длина отрезка Δ_y, которая равна $q^{*-1/2}(y)$, не больше, чем $\frac{1}{2}(\sqrt{q^*(x)})^{-1}$. Но в таком отрезке не может содержаться отрезок Δ. Таким образом, мы пришли к противоречию, т. е. $\Delta_y\not\subset\Delta_{(x)}$ не имеет места.

Для положительных больших x утверждение леммы доказано. Аналогично можно рассуждать для отрицательных больших x.

Лемма доказана.

§ 6. Доказательство теоремы 1.3.1 и ее следствий

Докажем теорему 1.3.1. Заметим, что если условие (1.3.1) выполняется при одном $K(x)$, то оно выполняется при другом $\widetilde{K}(x)$, если $\widetilde{K}(x)\leqslant K(x)$, при этом можно $S(x)$ оставлять без изменений. Поэтому в силу лемм 1.5.1 и 1.5.3 можно считать, что при достаточно больших x выполнены неравенства

$$(1-cK^{-1}(x))\leqslant S^{1/2}(y)S^{-1/2}(x)\leqslant(1+cK^{-1}(x))\qquad(1.6.1)$$

при $x, y\in\Delta_{(x)}$, где $\Delta_{(x)}=[x-K(x)S^{-1/2}(x),\ x+K(x)S^{-1/2}(x)]$.

Продолжим четно $S(x)$, $K(x)$, $q(x)$ на всю числовую ось. Так как асимптотика собственных чисел оператора Штурма — Лиувилля не зависит от поведения непрерывного потенциала в любом конечном отрезке, мы можем считать, что (1.6.1) и условие (1.3.2) выполняются для всех x.

Получим сначала оценку для распределения $\widetilde{N}(x)$ собственных чисел оператора $\widetilde{L}$ из леммы 1.4.3.

Пусть Δ_i — отрезок из леммы 1.4.2, x_i — центры Δ_i. Введем семейство операторов Штурма — Лиувилля $L_i^{\pm}$ в пространствах $L_2(\Delta_i)$ соответственно, определяя их следующим образом: L_2

$$L_i^{-}=-y''(x)+S(x_i)y(x), \qquad y(\Delta_i^{-})=y(\Delta_i^{+})=0;$$

$$L_i^{+}=-y''(x)+S(x_i)y(x), \qquad y'(\Delta_i^{-})=y'(\Delta_i^{+})=0.$$

Здесь Δ_i^{-} и Δ_i^{+} — правые и левые концы интервалов Δ_i. Обозначим через $N_i^{\pm}(\lambda)$ функцию распределения собственных чисел оператора $L_i^{\pm}$. Из известных вариационных принципов Гильберта — Куранта получим

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} N_i^{-}(\lambda)\leqslant\widetilde{N}(\lambda)\leqslant\sum_{i=-\infty}^{\infty} N_i^{+}(\lambda).$$

Использованные соотношения приведены у Э. Ч. Титчмарша [192, с. 213].

Собственные числа операторов $L_i^{\pm}$ вычисляются явно, поэтому явно вычисляются также $N_i^{\pm}(\lambda)$.

Проведя соответствующие вычисления, получим

$$\sum_{\lambda>S(x_i)}\left[\sqrt{\lambda-S(x_i)}\,\frac{d_i}{\pi}\right]\leqslant\widetilde{N}(\lambda)\leqslant\sum_{\lambda>S(x_i)}\left(\left[\sqrt{\lambda-S(x_i)}\,\frac{d_i}{\pi}\right]+1\right), \tag{1.6.2}$$

где $[\cdot]$ — целая часть, а d_i — длина Δ_i. Так как $K(x)\to\infty$ при $|x|\to\infty$, из неравенств (1.6.1) и определения Δ_i следует, что $d_i\,(S(x_i))^{1/2}\to\infty$ при $i\to\infty$. Поэтому для любого $\delta>0$ существует номер $i(\delta)$ такой, что при $|i|\geqslant|i(\delta)|$ выполняется неравенство $\delta^{1/2}\sqrt{S(x_i)}\,d_i\geqslant\delta^{-1}$. Поэтому при $|i|\geqslant|i(\delta)|$, $\lambda>S(x_i)$ имеем

$$\sqrt{\lambda(1+\delta)-S(x_i)}\,\frac{d_i}{\pi}\geqslant\delta^{1/2}\sqrt{S(x_i)}\,\frac{d_i}{\pi}\geqslant\delta^{-1}\pi^{-1}.$$

Следовательно, при $|i|\geqslant|i(\delta)|$, $\lambda\geqslant S(x_i)$ имеем $1\leqslant\leqslant\delta\sqrt{\lambda(1+\delta)-S(x_i)}\,d_i$. Пользуясь этими неравенствами, правую часть (1.6.2) можно оценить следующим образом:

$$\sum_{\lambda>S(x_i)}\left(\left[\sqrt{\lambda-S(x_i)}\,\frac{d_i}{\pi}\right]+1\right)\leqslant\sum_{\substack{|i|\leqslant|i(\delta)|\\ \lambda>S(x_i)}}\left(\left[\sqrt{\lambda-S(x_i)}\,\frac{d_i}{\pi}\right]+1\right)+$$

$$+\sum_{\substack{|i|>|i(\delta)|\\ \lambda>S(x_i)}}\left(\sqrt{\lambda(1+\delta)-S(x_i)}\,\frac{d_i}{\pi}+\delta\sqrt{\lambda(1+\delta)-S(x_i)}\,d_i\right).$$

Первое слагаемое правой части при фиксированном δ состоит из конечного числа слагаемых и допускает оценку через $c(\delta)\sqrt{\lambda}$, где $c(\delta)$ не зависит от $\lambda>0$. Поэтому правая часть (1.6.2) оценивается выражением

$$c(\delta)\sqrt{\lambda}+(1+\pi\delta)\sum_{\substack{|i|>|i(\delta)|\\ \lambda>S(x_i)}}\sqrt{\lambda(1+\delta)-S(x_i)}\,\frac{d_i}{\pi}.$$

Левая часть (1.6.2) не превосходит величины

$$\sum_{\lambda>S(x_i)}\left(\sqrt{\lambda-S(x_i)}\,\frac{d_i}{\pi}-1\right).$$

Теперь, используя рассуждения, аналогичные приведенным выше, для левой части (1.6.2) получим оценку снизу выражением

$$-c(\delta)\sqrt{\lambda}+(1-\pi\delta)\sum_{\substack{(1-\delta)\lambda>S(x_i)\\ |i|>|i(\delta)|}}\sqrt{\lambda(1-\delta)-S(x_i)}\,\frac{d_i}{\pi}.$$

Таким образом, мы получили неравенства

$$(1-\pi\delta)\sum_{\substack{(1-\delta)\lambda>S(x_i)\\ |i|>|i(\delta)|}}\sqrt{\lambda(1-\delta)-S(x_i)}\,\frac{d_i}{\pi}-c(\delta)\sqrt{\lambda}\leqslant\widetilde{N}(\lambda)\leqslant$$

$$\leqslant c(\delta)\sqrt{\lambda}+(1+\pi\delta)\sum_{\substack{\lambda>S(x_i)\\ |i|>|i(\delta)|}}\sqrt{\lambda(1+\delta)-S(x_i)}\,\frac{d_i}{\pi}. \qquad (1.6.3)$$

Согласно (1.6.1) и построению Δ_i, найдется $\tilde{i}$ такое, что при $|i|\geqslant|\tilde{i}|$ колебание $S(x)$ на Δ_i не превосходит $c_1(\delta(x_i)K^{-1}(x_i))$, где C_1 не зависит от i. Не ограничивая общности, можно считать, что $\tilde{i}=i(\delta)$. Поэтому, так как d_i — длина Δ_i, найдется положительное число $a(\delta)$ такое, что $a(\delta)\geqslant\delta$, $\lim\limits_{\delta\to 0}a(\delta)=0$ и при $|i|\geqslant|i(\delta)|$ выполняются оценки

$$\lambda(1+a(\delta))\geqslant S(x) \quad \text{на } \Delta_i, \text{ если } \lambda\geqslant S(x),$$

$$\sqrt{\lambda(1+\delta)-S(x_i)}\,\frac{d_i}{\pi}\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Delta_i}\sqrt{\lambda(1+a(\delta)-S(x)}\,dx,\quad \text{если } \lambda\geqslant S(x_i),$$

и, наконец,

$$\sqrt{\lambda(1-\delta)-S(x_i)}\geqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Delta_i}(\sqrt{\lambda(1-a(\delta))-S(x)})_+dx,$$

$$\text{если } \lambda(1-a(\delta))\geqslant S(x_i).$$

Здесь число $(\sqrt{b})_+$ равно $\sqrt{b}$, если $b\geqslant 0$ и равно нулю, если $b<0$. В силу этих неравенств оценки (1.6.3) можно усилить и записать в виде

$$\frac{1}{\pi}(1-\pi a(\delta))\sum_{\substack{(1-a(\delta))\lambda\geqslant S(x_i)\\ |i|>|i(\delta)|}}\int\limits_{\Delta_i}(\sqrt{\lambda(1-a(\delta))-S(x)})_+dx-c(\delta)\sqrt{\lambda}\leqslant$$

$$\leqslant\widetilde{N}(\lambda)\leqslant c(\delta)\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\pi}(1+\pi a(\delta))\sum_{(1+a(\delta))\lambda\geqslant S(x_i)}\int\limits_{\Delta_i}\times$$

$$\times\sqrt{\lambda(1+a(\delta))-S(x)}\,dx\leqslant c(\delta)\sqrt{\lambda}+$$

$$+\frac{1}{\pi}(1+\pi a(\delta))\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\sqrt{\lambda(1+a(\delta))-S(x)})_+dx. \qquad (1.6.4)$$

Неравенству $|i(\delta)|>|i|$ удовлетворяет конечное число индексов. По этой причине в левой части (1.6.4) суммирование можно распространить на все $i=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,$ для которых $(1-a(\delta))\lambda\geqslant S(x_i)$. При этом для сохранения неравенства достаточно вычесть величину $C_1(\delta)\sqrt{\lambda}$, где $C_1(\delta)$ не зависит от λ.

Далее в силу (1.6.1) очевидно, что можно найти $b(\delta)>0$, которое при $\delta\to 0$ стремится к нулю и такое, что

$$\bigcup_{(1-a(\delta))\lambda\geqslant S(x_i)}\Delta_i\supseteq\{x: S(x)\leqslant\lambda(1-a(\delta)-b(\eta))\}.$$

Из этого включения и описанного выше получаем, что (1.6.4) можно заменить неравенствами

$$\frac{1}{\pi}(1-\pi a(\delta))\int\limits_{(1-a(\delta)-b(\delta))\lambda\geqslant S(x)}\sqrt{(1-a(\delta)-b(\delta))\lambda-S(x)}\,dx-$$

$$-(C_1(\delta)+C(\delta))\sqrt{\lambda}\leqslant\widetilde{N}(\lambda)\leqslant c(\delta)\sqrt{\lambda}+$$

$$+\frac{1}{\pi}(1+\pi a(\delta))\int\limits_{(1+a(\delta))\lambda\geqslant S(x)}\sqrt{(1+a(\delta))\lambda-S(x)}\,dx. \qquad (1.6.5)$$

Теперь заметим, что $\sqrt{\lambda}$ есть о-малое по сравнению с любым из интегралов, которые входят в (1.6.5), а числа $a(\delta)$ и $b(\delta)$ могут быть сделаны сколь угодно малыми за счет выбора $\delta>0$. Поэтому в силу (1.6.5) для любого $\varepsilon>0$ найдется $\lambda_\varepsilon>0$ такое, что при $\lambda\geqslant\lambda_\varepsilon$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{\pi}(1-\varepsilon)\int\limits_{(1-\varepsilon)\lambda>S(x)}\sqrt{(1-\varepsilon)\lambda-S(x)}\,dx\leqslant\widetilde{N}(\lambda)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\pi}(1+\varepsilon)\int\limits_{(1+\varepsilon)\lambda>S(x)}\sqrt{(1+\varepsilon)\lambda-S(x)}\,dx,$$

из которых очевидно, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{(1-\varepsilon)^2\lambda>S(x)}\sqrt{(1-\varepsilon)^2\lambda-S(x)}\,dx\leqslant\widetilde{N}(\lambda)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{(1+\varepsilon)^2\lambda>S(x)}\sqrt{(1+\varepsilon)^2\lambda-S(x)}\,dx. \tag{1.6.6}$$

Отсюда и из леммы 1.4.1 и 1.4.3 вытекает теорема 1.3.1.

§ 7. Случай монотонного потенциала

Предположим, что помимо условия (1.2.1) выполнено условие

$$\begin{cases} q(x) \text{ монотонно возрастает при} \\ \text{возрастании модуля } x \text{ и } \lim\limits_{|x|\to\infty} q(x)=\infty. \end{cases} \tag{1.7.1}$$

Справедлива

Теорема 1.7.1. Пусть выполнены условия (1.7.1) и (1.2.1). Обозначим через $F(\cdot)$ функцию, обратную (в смысле преобразования) к строго монотонной функции, совпадающей при достаточно больших λ с функцией

$$M(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda\geqslant q(x)}\sqrt{\lambda-q(t)}\,dt.$$

Тогда справедлива асимптотическая формула $\lambda_n=(1+o(1))F(n)$, $n=1, 2, \ldots$, где $\{\lambda_n\}_{n\geqslant1}$ — собственные числа оператора L.

Доказательство. Покроем числовую ось отрезками $\Delta_i = [i, i+1]$, $i=0, \pm1, \pm2, \ldots$. Обозначим через L_i^+ и L_i^- соответственно операторы в пространстве L_i^+, L_i^-, определенные следующим образом:

$$\begin{cases} L_i^+ y = -y'' + q_i^+ y, \\ y(i) = y(i+1) = 0 \end{cases} \tag{1.7.2}$$

и

$$\begin{cases} L_i^- y = -y'' + q_i^- y, \\ y'(i) = y'(i+1) = 0, \end{cases} \tag{1.7.3}$$

где $q^+ = \sup\{q(x): x \in \Delta_i\}$, $q^- = \inf\{q(x): x \in \Delta_i\}$. Обозначим через $N_i^+(\lambda)$ и $N_i^-(\lambda)$ функции распределения собственных чисел операторов L_i^+ и L_i^- соответственно.

Из вариационных принципов Гильберта — Куранта получаем

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} N_i^+(\lambda) \leqslant N(\lambda) \leqslant \sum_{i=-\infty}^{\infty} N_i^-(\lambda), \tag{1.7.4}$$

где $N(\lambda)$ — функция распределения собственных чисел оператора L.

Функции $N_i^+(\lambda)$ и $N_i^-(\lambda)$ вычисляются явно.

Определяя их значения, подставив их в (1.7.4), приходим к неравенствам

$$\sum_{\lambda \geqslant q_i^+} \left[\sqrt{\lambda - q_i^+}\,\frac{1}{\pi}\right] \leqslant N(\lambda) \leqslant \sum_{\lambda \geqslant q_i^-} \left(\left[\sqrt{\lambda - q_i^-}\,\frac{1}{\pi}\right] + 1\right),$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа.

Возьмем произвольное $\varepsilon \in (0, 1)$. Пусть λ таково, что $\varepsilon\lambda > \pi^2$. Тогда

$$\left[\sqrt{\lambda - q_i^+}\,\frac{1}{\pi}\right] \geqslant \sqrt{\lambda(1-\varepsilon) - q_i^+}\,\frac{1}{\pi}, \quad \text{если } \lambda(1-\varepsilon) \geqslant q_i^+.$$

Поэтому при $\varepsilon\lambda > \pi^2$ вышенаписанные неравенства допускают очевидные усиления и перепишутся следующим образом:

$$\sum_{\lambda(1-\varepsilon) \geqslant q_i^+} \sqrt{\lambda(1-\varepsilon) - q_i^+}\,\frac{1}{\pi} \leqslant N(\lambda) \leqslant \sum_{\lambda \geqslant q_i^-} \left(\sqrt{\lambda(1+\varepsilon) - q_i^-}\,\frac{1}{\pi} + 1\right). \tag{1.7.5}$$

Далее

$$\sqrt{\lambda(1+\varepsilon) - q_i^-}\,\frac{1}{\pi} \geqslant \sqrt{\lambda\varepsilon}\,\frac{1}{\pi} \quad \text{при } \lambda \geqslant q_i^-.$$

Следовательно, правая часть (1.7.5) не превосходит величины

$$\left(\sum_{\lambda \geqslant q_i^-} \sqrt{\lambda(1+\varepsilon) - q_i^-}\,\frac{1}{\pi}\right)\left(1 + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda\varepsilon}}\right),$$

которая в свою очередь при $\lambda>\pi^2\varepsilon^{-2}$ меньше, чем

$$\frac{1}{\pi}\sum_{\lambda(1+\varepsilon)(1+\sqrt{\varepsilon})\geqslant q_l^-}\sqrt{\lambda(1+\varepsilon)(1+\sqrt{\varepsilon})-q_l^-}.$$

Итак, мы пришли к неравенствам

$$\frac{1}{\pi}\sum_{\lambda(1-\varepsilon)\geqslant q_l^+}\sqrt{\lambda(1-\varepsilon)-q_l^+}\leqslant N(\lambda)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\sum_{\lambda(1+\varepsilon)(1+\sqrt{\varepsilon})\geqslant q_l^-}\sqrt{\lambda(1+\varepsilon)(1+\sqrt{\varepsilon})-q_l^-},$$

справедливым при $\lambda>\pi^2\varepsilon^{-2}$. Теперь, пользуясь монотонностью $q(x)$, легко оценить суммы через интегралы и получить неравенства

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda(1-\varepsilon)\geqslant q(t)}\sqrt{\lambda(1-\varepsilon)-q(t)}\,dt-b\sqrt{\lambda}\leqslant N(\lambda)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda(1+\varepsilon)(1+\sqrt{\varepsilon})\geqslant q(t)}\sqrt{\lambda(1+\varepsilon)(1+\sqrt{\varepsilon})-q(t)}\,dt+b(\lambda).$$

Далее, так же, как мы вывели из (1.6.5) неравенства (1.6.6), получаем, что для любого $\gamma>0$ найдется λ_γ такое, что при $\lambda>\lambda_\gamma$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda(1-\gamma)\leqslant q(t)}\sqrt{\lambda(1-\gamma)-q(t)}\,dt\leqslant N(\lambda)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda(1+\gamma)\geqslant q(t)}\sqrt{\lambda(1+\gamma)-q(t)}\,dt. \tag{1.7.6}$$

Эти неравенства и лемма 1.4.1 доказывают теорему 1.7.1.

Доказанная теорема впервые установлена в работе [145].

Заметим, что, сохраняя утверждение теоремы 1.7.1, ее условия можно заменить следующими: $q(x)$ — непрерывная неотрицательная функция, стремящаяся к $+\infty$ при $|x|\to+\infty$, и существует постоянное число $\alpha>0$ такое, что $q(x+\alpha)\geqslant q(x)$ при $x\geqslant 0$, $q(x-\alpha)\leqslant q(x)$ при $x\leqslant 0$. При выполнении таких предположений теорема 1.7.1 доказывается без существенных изменений.

Теорема 1.7.1 допускает почти дословное обобщение на дифференциальные операторы высокого порядка следующего вида:

$$Ly=(-1)^n y^{(2n)}+q(x)y,\quad x\in I=(-\infty,+\infty).$$

При этом вместо $M(\lambda)$ следует использовать функцию

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda>q(x)} (\lambda-q(x))^{\frac{1}{2^n}}dx.$$

§ 8. Дополнительные замечания

1. Приведем простейший контрпример к классической формуле Карлемана (1.2.15), который построим на основании теоремы А. М. Молчанова [129].

Построим функцию $q(x)$ следующим образом:

$$q(x)=\begin{cases} n^2, \text{ если } x\in\left[n+\frac{1}{|n|},\ 1+n\right], & n\neq 0;\\ 1, \text{ если } x\in\left[n,\ n+\frac{1}{|n|}\right], & n\neq 0;\\ 1, \text{ если } x\in[0,1]. \end{cases}$$

Из теоремы А. М. Молчанова легко вытекает, что спектр оператора L дискретен, следовательно, $N(\lambda)<\infty$ для любого $\lambda>0$. Если верна формула (1.2.15) для этого потенциала, то мы должны иметь

$$\int\limits_{q(x)\leqslant\lambda} \sqrt{\lambda-q(t)}\,dt<\infty.$$

Но левая часть последнего выражения при $\lambda>1$ не меньше, чем

$$\sum_{n\neq 0}\int\limits_{n}^{n+\frac{1}{|n|}}\sqrt{\lambda-1}\,dx=\sqrt{\lambda-1}\sum_{|n|\neq 0}\frac{1}{|n|}=\infty.$$

Получили противоречие. Следовательно, формула (1.2.15) не имеет места для построенного потенциала.

В контрпримере 1 функция $q(x)$ имеет разрывы, но ее легко переделать в непрерывную функцию.

Из этого контрпримера также вытекает, что если в теореме 1.3.1 за $F(\cdot)$ взять функцию, обратную (в смысле преобразования) к функции, совпадающей при больших по модулю x с функцией

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{q(x)\leqslant\lambda} \sqrt{\lambda-q(x)}\,dx,$$

то теорема 1.3.1 окажется неверной.

Отметим, что для построенного потенциала выполнены условия теоремы 1.3.1. За $S(x)$ можно взять функцию, которая равна x^2. Из теоремы 1.3.1 получаем, что $\lambda_n=2n(1+o(1))$ $(n\to\infty)$.

Примеры потенциалов, удовлетворяющих некоторым условиям регулярности, для которых формула (1.2.15) не имеет места, более сложны.

Первый такой нетривиальный пример приведен в работе [188]. Примеры, посвященные анализу условий, при которых выводилась формула (1.2.15), представлены в [3, 164].

Монотонный потенциал, для которого не имеет места формула (1.2.15), описан в [99, с. 159—164]. Там же доказана лемма 1.7.1, согласно которой не существует в некотором смысле «универсальной формулы» для распределения собственных значений. Эти два отрицательных утверждения принадлежат автору книги, они послужили основным поводом для изучения асимптотики самих собственных чисел, а не функции их распределения. Теоремы 1.3.1 и 1.7.1 убедительно свидетельствуют о правильности такого подхода.

2. Вероятность справедливости классической формулы Карлемана — Титчмарша тем выше, чем быстрее растет в бесконечности потенциальная функция. Но одна только быстрота не обеспечивает ее справедливости. Приведем пример.

Пусть $q(x)\geqslant 1$ — непрерывная функция, стремящаяся к ∞ при $|x|\to\infty$ такая, что

$$|q(t)-q(x)|\leqslant K^{-1}(x)q(x) \tag{1.8.1}$$

при $t\in[x-K(x)q^{-\frac{1}{2}}(x),\ x+K(x)q^{-\frac{1}{2}}(x)]$, где $K(x)\geqslant 1$ непрерывна и

$$\lim_{|x|\to\infty} K(x)=\infty, \qquad \lim_{|x|\to\infty} K(x)q^{-\frac{1}{2}}(x)=0. \tag{1.8.2}$$

Покроем числовую ось отрезками

$$\Delta_i=\left[x_i-\frac{K(x_i)}{2}q^{-\frac{1}{2}}(x_i),\ x_i+\frac{K(x_i)}{2}q^{-\frac{1}{2}}(x_i)\right] \quad (i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

так, чтобы $\Delta_{i-1}^{+}=\Delta_i^{-}$, где Δ_i^{+} — правый конец Δ_i, а Δ_i^{-} — левый конец отрезка Δ_i. Возможность такого покрытия вытекает из рассуждений, использованных для доказательства леммы 1.4.2. Отрезок Δ_i разобьем на $[\exp K(x)q(x)]=n$ равных частей $\Delta_{i,1}$, $\Delta_{i,2},\ldots,\Delta_{i,n}$, где $[\cdot]$ — целая часть. Определим новую функцию

$$\tilde{q}(x)=\begin{cases} q(x_i) \text{ при } x\in\Delta_{i,j}, \text{ если } j \text{ — четное число;} \\ q(x_i)^{1+\alpha} \text{ при } x\in\Delta_{i,j}, \text{ если } j \text{ — нечетное число,} \end{cases}$$

где $\alpha\geqslant 1$ — целое.

Пользуясь условиями (1.8.1) и (1.8.2) и выбором $\Delta_{l,j}$, получаем, что

$$\int_a^b \tilde{q}(t)\,dt = \frac{q^{1+\alpha}(x_l)}{2}(b-a)+(b-a)\,O(q(x))$$

при $(a, b) < \left[x-\frac{K(x)}{2}q^{-\frac{1}{2}}(x),\quad x+\frac{K(x)}{2}q^{-\frac{1}{2}}(x)\right]$.

Отсюда и из условий (1.8.1) и (1.8.2) вытекает, что $\tilde{q}(t)\in\mathrm{K}$, причем за $S(x)$ можно взять функцию $\frac{q(x)^{1+\alpha}}{2}$. Но тогда из теоремы 1.3.1 и леммы 1.4.1 вытекает, что

$$\tilde{M}(\lambda-\lambda g(\lambda)) \leqslant \tilde{N}(\lambda) \leqslant \tilde{M}(\lambda+\lambda g(\lambda)) \quad (\lambda>0), \tag{1.8.3}$$

где $g(\lambda)$ — непрерывная функция, стремящаяся к нулю при $\lambda\to\infty$, а $\tilde{L}y=-y''+\tilde{q}(x)y$, $x\in I=(-\infty, +\infty)$. $\tilde{M}(\lambda)$ — функция, определенная формулой

$$\tilde{M}(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{2\lambda\geqslant q^{1+\alpha}(x)}\sqrt{\lambda-\frac{1}{2}q^{1+\alpha}(x)}\,dx. \tag{1.8.4}$$

Положим

$$M(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda\geqslant\tilde{q}(x)}\sqrt{\lambda-\tilde{q}(x)}\,dx.$$

Для этой функции имеем соотношения

$$M(\lambda)\geqslant\frac{1}{\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\limits_{\substack{\lambda\geqslant\tilde{q}(x)\\ \tilde{q}(x)=q(x_l)}}\sqrt{\lambda-q(x_l)}\,dx=\frac{1}{2\pi}\sum_{\lambda\geqslant q(x_l)}\int\limits_{\Delta_l}\sqrt{\lambda-q(x_l)}\,dx.$$

Пользуясь условиями (1.8.1) и (1.8.2), отсюда находим, что

$$M(\lambda)\geqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\lambda\geqslant q(x)(1+o(1))}\sqrt{\lambda-q(x)(1+o(1))}\,dx.$$

Далее, огрубляя оценки, получаем

$$M(\lambda)\geqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda\geqslant 4C_1q(x)}\sqrt{\frac{\lambda}{4}-C_1q(x)}\,dx\geqslant\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\lambda}{8}\ \mathrm{mes}\{x:\lambda\geqslant 8C_1q(x)\}, \tag{1.8.5}$$

где $C_1>1$ — постоянное число.

Для функции $\widetilde{M}(\lambda)$, определенной формулой (1.8.4), верна следующая оценка сверху:

$$\widetilde{M}(\lambda) \leqslant \frac{\lambda}{4} \operatorname{mes}\left\{x : \lambda \geqslant \frac{1}{2} q^{1+\alpha}(x)\right\} = \frac{\lambda}{\pi} \operatorname{mes}\{4x : 2\lambda^{\frac{1}{1+\alpha}} \geqslant q(x)\}. \quad (1.8.6)$$

Возьмем $q(x) = \exp|x|$. Тогда из оценки (1.8.5) получаем

$$M(\lambda) \geqslant \frac{1}{4\pi} \lambda \ln \frac{\lambda}{8C_1} = \frac{1}{4\pi} \lambda (\ln \lambda - \ln 8C_1),$$

а из неравенства (1.8.6) —

$$\widetilde{M}(\lambda) \leqslant \frac{2\lambda}{\pi} \ln (2\lambda)^{\frac{1}{1+\alpha}} = \frac{2}{\pi(1+\alpha)} \lambda (\ln \lambda + \ln 2).$$

Из этих двух неравенств следует, что, если $\alpha > 20$, то при достаточно больших $\lambda > 0$ имеет место неравенство $\widetilde{M}(\lambda) \leqslant \frac{1}{2} M(\lambda)$. Отсюда и из оценок (1.8.3) вытекает, что для распределения собственных чисел оператора $\widetilde{L}$ классическая формула Карлемана — Титчмарша неверна. В приведенном примере $\widetilde{q}(x)$ имеет разрывы. Но этот пример легко изменить так, чтобы $\widetilde{q}(x)$ оказалась непрерывной.

3. Заметим, что если выполняются условия (1.8.1) и (1.8.2) и $q(x) \geqslant 1$, то $q(x) \in \mathrm{K}$, причем за $S(x)$ можно взять $q(x)$. Следовательно, применима теорема 1.3.1. Это еще раз показывает, что область приложения теоремы 1.3.1 достаточно обширна.

Рассмотрим теперь оператор

$$L_{\delta,\varepsilon} y = -y'' + \left(\delta q(x) + 2\varepsilon q(x) \sin^2 \int_0^x q(t)\,dt\right) y,$$

где $\varepsilon, \delta \geqslant 0$, $\varepsilon + \delta > 0$. Допустим, что $q(x) \geqslant 1$ и удовлетворяет условиям (1.8.1) и (1.8.2). Для функций $q_{\delta,\varepsilon}(x) = \delta q(x) + 2\varepsilon q(x) \sin^2 \times \left(\int_0^x q(t)\,dt\right)$ выполняется равенство

$$\int_a^b q_{\delta,\varepsilon}(x)\,dx = (\delta + \varepsilon) \int_a^b q(x)\,dx - \varepsilon \int_a^b \cos\left(2 \int_0^x q(t)\,dt\right) q(x)\,dx.$$

Второе слагаемое в правой части при любых a и b ($b \geqslant a$) не больше, чем 2ε. Поэтому из условий (1.8.1) и (1.8.2) легко вытекает, что $q_{\delta,\varepsilon}(x) \in K$, причем за $S(x)$ можно принять $(\delta+\varepsilon)q(x)$. Таким образом, для оператора $L_{\delta,\varepsilon}$ с быстро осцилирующим потенциалом применима теорема 1.3.1, в которой следует брать $S(x) = (\delta+\varepsilon)q(x)$. Этот пример особенно интересен в случае, когда $\delta=0$.

§ 9. О спектре одного гиперболического оператора

Задача на собственные значения для операторов гиперболического типа в отличие от спектральных задач для эллиптических уравнений изучена слабо.

Рассмотрим результат, полученный в работе Т. Ш. Кальменова *.

Пусть $\Omega \subset R^2$ — область, ограниченная отрезком AB: $0 \leqslant x \leqslant 1$ оси $y=0$ и прямыми AC: $x+y=0$, BC: $x-y=1$. Обозначим через L_a замыкание в $L_2(\Omega)$ дифференциального оператора

$$L_a u = u_{xx} - u_{yy}, \tag{1.9.1}$$

определенного на бесконечно гладких функциях, удовлетворяющих краевым условиям

$$u|_{AB} = 0, \tag{1.9.2}$$

$$u|_{AC:\, x+y=0,\ x-y=t} = au|_{BC:\, x-y=1,\ x+y=t}. \tag{1.9.3}$$

Здесь a — комплексное число.

Теорема 1.9.1. Пусть $|a|=1$ и $a \neq -1$ **. Тогда оператор L_a самосопряжен.

Доказательство. При $a \neq -1$ решение краевой задачи (1.9.2)—(1.9.3) для уравнения $L_a u = f$ можно представить в виде

$$u(x, y) = L_a^{-1} f = \int_0^{\xi} d\xi_1 \int_0^{\eta} f_1(\xi_1, \eta_1)\, d\eta_1 - \frac{g(\eta)}{a+1} - \frac{ag(\xi)}{a+1}, \tag{1.9.4}$$

---

* *Кальменов Т. Ш.* Спектр краевой задачи со смещением для волнового уравнения // Диф. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 75—78.

** Если $a=-1$, то краевая задача (1.9.2)—(1.9.3) имеет бесчисленное множество линейно-независимых решений вида $u(x, y) = g(x+y) - g(x-y)$, где $g(x)$ — произвольная функция из $C_0^{\infty}(0,1)$. Поэтому условие $a \neq -1$ необходимо для единственности решения этой задачи.

где

$$g(x)=\int_0^x d\xi_1\int_1^x f_1(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1,\quad \xi=x+y,\ \eta=x-y;$$

$$4f_1(\xi_1,\eta_1)=f\left(\frac{\xi_1+\eta_1}{2},\ \frac{\xi_1-\eta_1}{2}\right). \tag{1.9.5}$$

Если $f\in L_2(\Omega)$, то из равенств (1.9.4), (1.9.5) следует, что

$$u(x,y)\in W_2^1(\Omega)\cap C^{1/2}(\bar{\Omega})\cap W_2^1(\partial\Omega),$$

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\leqslant c\|f\|_{L_2(\Omega)},\quad u\in D(L_a). \tag{1.9.6}$$

Теперь заметим, что, согласно известной теореме [9, с. 136], эта задача будет самосопряженной, если будет симметричной. В характеристических координатах $\xi=x+y$, $\eta=x-y$ оператор (1.9.1) примет вид

$$\tilde{L}_a u=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}, \tag{1.9.7}$$

область Ω преобразуется в область Δ, ограниченную прямыми $\tilde{A}\tilde{B}:\xi=\eta$, $\tilde{A}\tilde{C}:\xi=0$ и $\tilde{B}\tilde{C}:\eta=1$. Краевые условия (1.9.2), (1.9.3) примут вид

$$u_1|_{\tilde{A}\tilde{B}}=0; \tag{1.9.8}$$

$$u_1|_{\tilde{A}\tilde{C}:\xi=0,\ \eta=t}=u_1|_{\tilde{B}\tilde{C}:\eta=1,\ \xi=1}, \tag{1.9.9}$$

где

$$u_1(\xi,\eta)=\frac{1}{4}u\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right),\ u(\xi,\eta)=4u_1(\xi+\eta,\xi-\eta). \tag{1.9.10}$$

Если функции $u(\xi,\eta)$ и $v(\xi,\eta)$ принадлежат $D(L_a)$, то нетрудно видеть, что функции

$$u_1(\xi,\eta)=\frac{1}{4}u\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right),\quad v_1(\xi,\eta)=\frac{1}{4}v\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)$$

принадлежат $D(\tilde{L}_a)$ и $(L_a u_1, v_1)_{L_2(\Omega)}=32(\tilde{L}_a u_1, v_1)_{L_2(\Delta)}$ $(u, L_a v)_{L_2(\Omega)}=32(u_1,\tilde{L}_a v_1)_{L_2(\Delta)}$. Отсюда вытекает, что симметричность оператора L_a будет доказана, если докажем симметричность оператора $\tilde{L}_a$. Имеем равенство

$$(\widetilde{L}_a u_1,\ v_1)_{L_2(\Delta)} = -\int_0^1 \frac{\partial u_1(0,\ \eta)}{\partial \eta} \bar{v}_1(0, \eta)\, d\eta -$$

$$-\int_0^1 u_1(\xi, 1)\ \frac{\partial \bar{v}_1(\xi, 1)}{\partial \xi}\ d\xi + (u_1, L_a^{\bullet} v_1)_{L_2(\Delta)}.$$

В силу того, что функции $u_1(\xi, \eta)$ и $v_1(\xi, \eta)$ удовлетворяют краевым условиям (1.9.8), (1.9.9) и $|a|=1$, следующее выражение тождественно равно нулю:

$$\int_0^1 \frac{\partial u_1(0,\ \eta)}{\partial \eta} \bar{v}_1(0, \eta)\, d\eta + \int_0^1 u_1(\xi, 1)\ \frac{\partial \bar{v}_1(\xi, 1)}{\partial \xi} d\xi =$$

$$= -\int_0^1 u_1(0, \eta) \frac{\partial \bar{v}_1(0, \eta)}{\partial \eta}\, d\eta + \int_0^1 u(\xi, 1)\ \frac{\partial \bar{v}(\xi, 1)}{\partial \xi} d\xi \equiv 0.$$

Мы доказали симметричность оператора $\widetilde{L}_a$, а следовательно, и симметричность L_a. Теорема 1.9.1 доказана.

Теперь вычислим собственные значения и собственные векторы оператора L_a при $|a|=1$. Пусть Ω^* — зеркальное отображение области Ω относительно оси $y=0$, т. е. $\Omega^* = \{(x, y) : (x, -y) \in \Omega\}$.

Тогда, если $u(x, y)$ — решение краевой задачи (1.9.2) — (1.9.3) для уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} = hu, \tag{1.9.11}$$

то функция

$$\widetilde{u}(x, y) = \begin{cases} u(x, y), & (x, y) \in \Omega; \\ -u(x, y), & (x, y) \in \Omega^* \end{cases} \tag{1.9.12}$$

в области $\widetilde{\Omega} = \Omega \cup AB \cup \Omega^*$ является решением уравнения

$$\widetilde{u}_{xx} - \widetilde{u}_{yy} = h\widetilde{u}, \tag{1.9.13}$$

удовлетворяющим граничным условиям

$$\widetilde{u}|_{AC} = -a\widetilde{u}|_{BC^*}, \qquad \widetilde{u}|_{AC^*} = -a\widetilde{u}|_{BC}, \tag{1.9.14}$$

где C^* — точка пересечения характеристик

$$AC^* : x - y = 0, \quad BC^* : x + y = 1.$$

Теперь найдем собственные функции задачи (1.9.13)—(1.9.14), а затем с их помощью построим собственные функции исходной задачи. После замены $\xi=x+y$, $\eta=x-y$ область $\bar{\Omega}$ переходит в квадрат $Q=\{0\leqslant\xi\leqslant 1,\ 0\leqslant\eta\leqslant 1\}$, а равенства (1.9.13)—(1.9.19) соответственно примут вид

$$i\frac{\partial}{\partial\xi}i\frac{\partial}{\partial\eta}\tilde{u}=-\tilde{h}\tilde{u},\quad 4\tilde{h}=h; \tag{1.9.15}$$

$$\tilde{u}(0,\eta)=-a\tilde{u}(1,\eta),\quad \tilde{u}(\xi,0)=-a\tilde{u}(\xi,1). \tag{1.9.16}$$

При $a=1$ эта задача является вольтерровой, а при $a\neq 0$ собственные функции задачи (1.9.15)—(1.9.16) ищем в виде

$$\tilde{u}_{n,m}(\xi,\eta)=\varphi_n(\xi)\psi_m(\eta), \tag{1.9.17}$$

где $\varphi_n(\xi)$ и $\psi_m(\eta)$ — собственные функции соответственно задач

$$i\frac{\partial}{\partial\xi}\varphi_n(\xi)=\mu_n\varphi_n(\xi),\ \varphi_n(0)=-a\varphi_n(1); \tag{1.9.18}$$

$$i\frac{\partial}{\partial\eta}\psi_m(\eta)=\lambda_m\psi_m(\eta),\ \psi_m(0)=a\psi_m(1). \tag{1.9.19}$$

Отсюда находим

$$\varphi_n(\xi)=\exp[i(i\ln(-a)+2\pi n)\xi],\quad \mu_n=i\ln(-a)-2\pi n;$$

$$\psi_m(\eta)=\exp[i(i\ln(-a)+2\pi m)\eta],\quad \lambda_m=-i\ln(-a)-2\pi m,$$

где $\ln(-a)=\ln|a|+i\arg(-a)$, $(\ln(-1)=\pi i)$.

По условию $|a|=0$. Поэтому $\ln(-a)=\arg(-a)=\Theta$. Итак,

$$\varphi_n(\xi)=e^{-i\Theta\xi}e^{2\pi n i\xi},\ \mu_n=-2\pi n+\Theta; \tag{1.9.20}$$

$$\psi_m(\eta)=e^{-i\Theta\eta}e^{2\pi m i\eta},\ \lambda_m=-2\pi m+\Theta. \tag{1.9.21}$$

Система функций $\tilde{u}_{n,m}(\xi,\eta)$, определенная равенством (1.9.17), в котором $\varphi_n(\xi)$ и $\psi_m(\eta)$ находятся из (1.9.20) и (1.9.21), — полная ортогональная система в $L_2(Q)$, так как полными являются $\{\varphi_n(\xi)\}$ и $\{\psi_m(\eta)\}$.

Чтобы получить собственные функции и собственные значения исходной задачи, положим

$$u_{n,m}(x,y)=\tilde{u}_{n,m}(x,y)-\tilde{u}_{n,m}(x,-y)=\tilde{u}_{n,m}(\xi,\eta)-\tilde{u}_{n,m}(\eta,\xi)=$$

$$=e^{-i(\xi+\eta)\theta}\left(e^{2\pi i(\eta\xi+m\eta)}-e^{2\pi i(n\eta+m\xi)}\right); \tag{1.9.22}$$

$$\lambda_{n,m}=-4(-\Theta+2\pi n)(-\Theta+2\pi m),\quad n,m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \tag{1.9.23}$$

На основании равенств (1.9.11)—(1.9.16) легко проверить, что $u_{n,m}(x, y)$ и $\lambda_{n,m}$ — искомые собственные функции и собственные значения, причем, если $n_1 \neq m_1$ или $n_2 \neq m_2$, то

$$\iint_{\Omega} u_{n_1,m_1}(x, y)\, u_{n_2,m_2}(x, y)\, dx dy = 0. \tag{1.9.24}$$

Полнота системы функций в $L_2(\Omega)$ вытекает из следующего известного утверждения

Лемма 1.9.1. Если система функций $\{f_n(x)\} \in L_2(-1, 1)$ полна в ней, то ее нечетная часть $\{f_n(x) - f_n(-x)\}$ также полна в $L_2(0, 1)$.

Доказательство. Пусть $\{f_n(x) - f_n(-x)\}$ не полна в $L_2(0, 1)$. Тогда существует функция $g(x) \in L_2(0, 1)$ такая, что

$$\int_0^1 g(x)\,(f_n(x) - f_n(-x))\,dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Продолжим функцию $g(x)$ нечетным образом на $(-1, 0)$:

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} g(x), \text{ при } x > 0, \\ -g(-x), \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Тогда непосредственным вычислением убеждаемся в том, что

$$\int_{-1}^{1} \tilde{g}(x) f_n(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,(f_n(x) - f_n(-x))\,dx = 0.$$

Последнее равенство противоречит полноте $\{f_n(x)\}$ в $L_2(-1, 1)$. Лемма доказана. Таким образом доказана

Теорема 1.9.2. Оператор L_a при $a = 0$ является вольтерровым, а при $a \neq -1$ имеет полную систему собственных функций, задаваемых равенством (1.9.22).

Пример. Пусть $a = 1$. Тогда из (1.9.21), (1.9.22) после несложных преобразований получим, что функции

$$u^1_{n,m}(x, y) = \sin 2\pi(n + m + 1) \sin 2\pi(n - m)\, y,$$

$$u^2_{n,m}(x, y) = \cos 2\pi(n + m + 1) \sin 2\pi(n - m)\, y$$

являются собственными функциями задачи (1.9.1)—(1.9.3) при $a = 1$, соответствующими собственным значениям

$$h_{n,m} = -4(2n + 1)(2m + 1)\pi^2.$$

Спектр оператора Трикоми для уравнения смешанного типа исследовали в работах [2, 128, 160, 161]. Впервые установлено *, что оператор Трикоми для модельного дифференциального выражения смешанного типа

$$lu=(\operatorname{sign} y)\, u_{xx}+u_{yy} \tag{1.9.25}$$

имеет хотя бы одно неиулевое собственное значение и ненулевой собственный вектор. Исследовано [128] расположение спектра для этого уравнения. Для видоизмененного оператора Трикоми смешанного типа $Lu=u_{xx}+(\operatorname{sign} y)\, u_{yy}$ в специальной области в явном виде выписано бесконечное множество собственных значений и собственных функций [161]. Спектральные вопросы задачи Трикоми непосредственно связаны с совпадением сильных и слабых расширений оператора (1.9.25).

Пусть Ω — область, ограниченная при $y>0$ кривой σ, а при $y<0$ характеристиками AC: $x+y=0$, BC: $x-y=1$.

Задача Трикоми. Найти решение уравнения (1.9.28), удовлетворяющее краевому условию

$$u|_{\sigma \cup AC}=0. \tag{1.9.26}$$

Замыкание в норме L_p оператора (1.9.25) на подмножестве функций $C^\infty(\bar{\Omega})$, удовлетворяющих краевому условию (1.9.26), называется сильным расширением оператора (1.9.25) с краевыми условиями (1.9.26).

Функция $u(x, y)$ принадлежит области определения слабого расширения оператора (1.9.25), если для всех гладких функций $v(x, y)$, удовлетворяющих краевому условию $v/_{\sigma \cup BC}=0$, выполняется интегральное тождество $(u, Lv)=(f, v)$.

В терминах угла подхода кривой σ к оси $y=0$ получен [10] следующий критерий совпадения сильного и слабого расширений оператора (1.9.28).

Пусть область Ω симметрична относительно оси y и пусть $0<\alpha<\pi$ — угол подхода кривой σ к оси $y=0$ в точке A. Тогда верна

Теорема 1.9.2. Сильное расширение оператора (1.9.25) с краевыми условиями (1.9.26) совпадает со слабым расширением тогда и только тогда, когда $0<\alpha\leqslant\frac{p}{p-1}\cdot\frac{\pi}{4}$.

---

* *Кальменов Т. Ш.* О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева — Бицадзе // Диф. уравнения. 1977. Т. 13, № 8. С. 14—18.

ГЛАВА 2

ОЦЕНКИ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Теория оператора Штурма — Лиувилля не исчерпала свои прикладные возможности, потому что оператор является одним из модельных операторов математики, на нем часто апробируются новейшие методы исследования. Для оператора Штурма — Лиувилля получено немало фундаментальных результатов. Среди них, например, критерий Молчанова, сыгравший важную роль в спектральной теории операторов типа Шредингера.

В настоящее время возрастает интерес к малым собственным числам дифференциальных операторов. Это связано с развитием теории разностных схем и более глубоким проникновением математических методов в другие области науки. Например, в вопросах устойчивости разностных схем, устойчивости механических конструкций важно знать наименьшее собственное число соответствующих операторов.

Существуют методы (например, метод Галеркина), позволяющие с наперед заданной точностью вычислять любое собственное число самосопряженного оператора. Тем не менее во многих качественных и прикладных вопросах важно уметь a priori указать границы собственных чисел.

Рассмотрим двусторонние оценки всех собственных чисел оператора Штурма — Лиувилля. Оценим в несамосопряженном случае сингулярные числа.

§ 1. Вспомогательные интегральные оценки

Получим некоторые вспомогательные оценки, связанные с оператором Штурма — Лиувилля (1.1.1) в $L_2(I)$. Предположим, что $q(x)$ — непрерывная неотрицательная функция на I. Напомним, что

$$q^*(x)=\inf_{d>0}\left\{d^{-2}:1\geqslant d\int\limits_{x-\frac{d}{2}}^{x+\frac{d}{2}}q(t)\,dt\right\}. \qquad (2.1.1)$$

Из этого определения вытекает, что $q^*(0)\neq 0$, если $q(t)\not\equiv 0$. В гл. 1 § 3 указаны некоторые свойства $q^*(x)$, в частности, лемма (1.1.1), которая утверждает, что

$$q^*(x)=d^{-1}\int\limits_{x-\frac{d}{2}}^{x+\frac{d}{2}}q(t)\,dt, \text{ если } d=q^{*^{-1/2}}(x). \qquad (2.1.2)$$

Отсюда легко вытекает, что функция $q^*(x)$ непрерывна.

Покажем, что функция $q^*(x)$ не может произвольно колебаться.

Лемма 2.1.1. Пусть $\Delta_x=\left[x-\frac{1}{4}d_x,\ x+\frac{1}{4}d_x\right]$, $d_x=q^{*^{-1/2}}(x)$. Тогда при $y\in\Delta_x$ имеют место неравенства $\frac{1}{4}\leqslant q^*(y)q^{*^{-1}}(x)\leqslant 4$.

Доказательство. Пусть $y\in\Delta_x$. Обозначим

$$\tilde{\Delta}_x=\left[x-\frac{1}{2}d_x,\ x+\frac{1}{2}d_x\right],\ \tilde{\Delta}_y=\left[y-\frac{1}{2}d_y,\ y+\frac{1}{2}d_y\right],$$

$$d_y=q^{*^{-1/2}}(y).$$

Согласно равенству (2.1.2), имеем

$$d_y^{-1}=\int\limits_{\tilde{\Delta}_y}q(t)\,dt,\quad d_x^{-1}=\int\limits_{\tilde{\Delta}_x}q(t)\,dt. \qquad (2.1.3)$$

Допустим $q^*(x)\geqslant 4q^*(y)$. Тогда $d_x^{-2}=q^*(x)\geqslant 4q^*(y)=4d_y^{-2}$ или $2d_x\leqslant d_y$. Отсюда, так как $y\in\Delta_x$, вытекает $\tilde{\Delta}_x\subseteq\tilde{\Delta}_y$. Из этого включения и соотношений (2.1.3) получаем

$$d_y^{-1}=\int\limits_{\tilde{\Delta}_y}q(t)\,dt\geqslant\int\limits_{\tilde{\Delta}_x}q(t)\,dt=d_x^{-1}.$$

Следовательно, $d_y \leqslant d_x$. Это противоречит неравенству $2d_x \leqslant d_y$. Итак, $q^*(x) \leqslant 4q^*(y)$.

Докажем, что $q^*(y) \leqslant 4q^*(x)$. Если $q^*(y) \geqslant 4q^*(x)$, то $d_y^{-2} = q^*(y) \geqslant 4q^*(x) = 4d_x^{-2}$ или $2d_y \leqslant d_x$. Следовательно, $\widetilde{\Delta}_y \subseteq \widetilde{\Delta}_x$. Это включение и равенства (2.1.3) дают

$$d_y^{-1} = \int\limits_{\widetilde{\Delta}_y} q(t)\,dt \leqslant \int\limits_{\widetilde{\Delta}_x} q(t)\,dt = d_x^{-1}.$$

Отсюда следует неравенство $d_x \leqslant d_y$, которое противоречит неравенству $2d_y \leqslant d_x$.

Лемма 2.1.2. Пусть $q(t) \geqslant 0$ и Δ — интервал длины $d/2$. Если $\int\limits_{\Delta} q(t)\,dt > d^{-1}$, то для любой функции $y \in W_2^1(\Delta)$ выполнено неравенство $\int\limits_{\Delta} (|y'(t)|^2 + q(t)|y(t)|^2)\,dt > \frac{1}{4} d^{-2} \int\limits_{\Delta} |y(t)|^2 dt$.

Доказательство. Пусть $y(t) \in W_2^1(\Delta)$. Если

$$\int\limits_{\Delta} |y'(t)|^2 dt > \frac{1}{4d^2} \int\limits_{\Delta} |y(t)|^2 dt, \tag{2.1.4}$$

то лемма доказана.

Пусть (2.1.4) не выполнено. В силу однородности неравенства, противоположного (2.1.4), можно считать, что

$$\int\limits_{\Delta} |y(t)|^2 dt = d. \tag{2.1.5}$$

Отсюда вытекает, что найдется точка $t_0 \in \Delta$ такая, что $|y(t_0)| = 1$. Для произвольной точки $\eta \in \Delta$, используя равенство (2.1.5) и допущение, получаем

$$|y(\eta) - y(t_0)| = \left| \int\limits_{t_0}^{\eta} y'(t)\,dt \right| \leqslant \sqrt{|\eta - t_0|} \sqrt{\left| \int\limits_{t_0}^{\eta} |y'(t)|^2 dt \right|} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{d} \left(\int\limits_{\Delta} |y'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{2} \sqrt{d} \cdot \frac{1}{\sqrt{d}} = \frac{1}{2}.$$

Так как $|y(t_0)| = 1$, из последнего неравенства получаем, что

$|y(\eta)|\geqslant\frac{1}{2}$ на Δ. А это в силу условий леммы и нормировки дает, что

$$\int_\Delta q(t)\,|y(t)|^2dt>\frac{1}{4}d^{-1}\geqslant\frac{1}{4}d^{-2}\int_\Delta |y(t)|^2dt.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы 2.1.2.

Лемма 2.1.3. Пусть A — самосопряженный неотрицательный оператор. Тогда количество собственных чисел оператора A, меньших λ, равно максимальной размерности подпространства $G\subseteq\subseteq D(A)$, на котором $(Au, u)<\lambda(u, u)$, $u\in G$.

Лемма 2.1.4. Пусть A — самосопряженный неотрицательный вполне непрерывный оператор. Тогда количество собственных чисел оператора A, больших λ, равно максимальной размерности подпространства G, на котором $(Au, u)>\lambda(u, u)$, $u\in G$.

Оба эти утверждения легко вытекают из общих спектральных теорем [9, с. 277].

§ 2. Оценки функции распределения собственных чисел оператора Штурма — Лиувилля

Справедлива следующая

Теорема 2.2.1. Пусть $q(x)\geqslant 0$ и $N(\lambda)$ — функция распределения собственных чисел оператора $Ly=-y''+q(x)y$, $x\in I$. Тогда при $\lambda>0$ имеют место оценки

$$2M\left(\frac{\lambda}{100}\right)\leqslant N(\lambda)\leqslant M(16\lambda), \tag{2.2.1}$$

где

$$M(\lambda)=\sqrt{\lambda}\,\mathrm{mes}\{x: x\in I,\ q^*(x)\leqslant\lambda\}, \tag{2.2.2}$$

mes — мера Лебега на прямой I.

Доказательство. Пусть $\lambda>0$. Покроем числовую ось непересекающими интервалами Δ_i ($i=0, \pm1, \pm2, \ldots$) длины $\lambda^{-1/2}$. Обозначим через L_i операторы, порожденные дифференциальным выражением $-y''+q(x)y$ и граничными условиями $y'(\Delta_i^+)=y'(\Delta_i^-)=0$, где $\Delta_0^\pm$ — концы Δ_i.

Из вариационных принципов Гильберта — Куранта вытекает, что имеет место неравенство

$$N(\lambda)\leqslant\sum_{i=-\infty}^{\infty}N_i(\lambda), \tag{2.2.3}$$

где $N_i(\lambda)$ — функция распределений собственных чисел операторов L_i $(i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Если для номера i выполнено неравенство

$$\int\limits_{\Delta_i} q(t)\,dt > \lambda^{1/2}, \tag{2.2.4}$$

то в силу леммы 2.1.2 наименьшее собственное число $L_i(\lambda)$ больше, чем $4^{-1}d^{-2}=4^{-1}\lambda$. Следовательно, $N_i(4^{-1}\lambda)=0$, если выполнено (2.2.4). Поэтому из (2.2.3) получаем

$$N(4^{-1}\lambda) \leqslant \sum_{\int\limits_{\Delta_i} q(t)dt < \sqrt{\lambda}} N_i(4^{-1}\lambda).$$

В этом неравенстве заменим $4^{-1}\lambda$ на λ и перепишем правую часть неравенства (2.2.3) следующим образом:

$$N(\lambda) \leqslant \sum_{\int\limits_{\Delta_i} q(t)dt \leqslant 2\sqrt{\lambda}} N_i(\lambda). \tag{2.2.5}$$

Далее, рассмотрим отрезки, для которых

$$\int\limits_{\Delta_i} q(t)\,dt \leqslant 2\sqrt{\lambda}. \tag{2.2.6}$$

Покажем, что, если для интервала Δ_i выполнено неравенство (2.2.6), то

$$q^*(x_i) \leqslant 4\lambda, \tag{2.2.7}$$

где x_i — центр Δ_i.

Обозначим через $\widetilde{\Delta}_i$ интервал $\left(x_i - \frac{1}{4\sqrt{\lambda}},\ x_i + \frac{1}{4\sqrt{\lambda}}\right)$. По построению Δ_i верно включение $\widetilde{\Delta}_i \subseteq \Delta_i$. Поэтому из (2.2.6) получаем $\int\limits_{\widetilde{\Delta}_i} q(t)\,dt \leqslant 2\sqrt{\lambda}$. Так как длина $\widetilde{\Delta}_i$ равна $(4\lambda)^{-1/2}$, отсюда и из определения $q^*(x)$ вытекает неравенство (2.2.7).

Используя доказанное неравенство, можно усилить неравенство (2.2.5) и переписать его в следующем виде:

$$N(\lambda) \leqslant \sum_{q^*(x_i) \leqslant 4\lambda} N_i(\lambda). \tag{2.2.8}$$

Согласно общеизвестным вариационным принципам Гильберта — Куранта, если $q(x)$ возрастает, то собственные числа операторов L_l не убывают; следовательно, при возрастании $q(x)$ $N_l(\lambda)$ не возрастает. Поэтому $N_l(\lambda) \leqslant \widetilde{N}_l(\lambda)$, где $N_l(\lambda)$ — функция распределения собственных чисел оператора $\widetilde{L}y = -y''(x)$, $x \in \Delta_l$, $y'(\Delta_l^+) = y'(\Delta_l^-) = 0$. Собственные числа этого оператора легко вычисляются и равны 0, $\lambda\pi^2$, $4\pi^2\lambda, \ldots, k^2\pi^2\lambda, \ldots$. Отсюда вытекает, что $\widetilde{N}_l(\lambda) = 1$. Но тогда из неравенства (2.2.8) следует, что

$$N(\lambda) \leqslant \sum_{q^*(x_l) < 4\lambda} 1. \tag{2.2.9}$$

Из оценки $q^*(x_l) \leqslant 4\lambda$ получается $q^{*^{-1/2}}(x) \geqslant \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$. Поэтому интервал $\Delta_l^{(1)} = \left(x_l - \frac{1}{8\sqrt{\lambda}},\ x_l + \frac{1}{8\sqrt{\lambda}}\right)$ содержится в интервале $\Big(x_l - \frac{1}{4} q^{*^{-1/2}}(x),\ x_l + \frac{1}{4} q^{*^{-1/2}}(x)\Big)$. Но тогда, согласно лемме 2.1.1, для $y \in \Delta_l^{(1)}$ выполнены неравенства $\frac{1}{4}\ q^*(x_l) \leqslant q^*(y) \leqslant 4q^*(x_l)$. Учитывая, что $q^*(x_l) \leqslant 4\lambda$, и используя правое из этих неравенств, получаем $1 = 4\sqrt{\lambda}\,\mathrm{mes}\,\Delta_l^{(1)} \leqslant 4\sqrt{\lambda}\,\mathrm{mes}\{x : x \in \Delta_l,\ \ q^*(x) \leqslant 16\lambda\}$. Это неравенство и оценка (2.2.9) приводит к соотношению

$$N(\lambda) \leqslant 4\sqrt{\lambda}\,\mathrm{mes}\{x: g^*(x) \leqslant 16\lambda\}. \tag{2.2.10}$$

Пусть Δ — такой отрезок, что длина его равна $(\lambda\gamma_1)^{-1/2}$ и

$$\int_\Delta q(t)\,dt \leqslant \sqrt{\gamma_2\lambda}. \tag{2.2.11}$$

Обозначим $\omega(t)$ — функцию, равную $\sin^2\sqrt{\lambda\gamma_1}\pi(t - \Delta^-)$ при $t \in \Delta$ и нулю при $t \overline{\in} \Delta$. Эта функция принадлежит области определения L; кроме того, учитывая неравенство (2.2.11), получаем

$$(L\omega, \omega) = \int_\Delta (|\omega'(t)|^2 + q(t)\,\omega^2(t))^2\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \lambda\gamma_1\pi^2 \int_\Delta |2\sin\sqrt{\lambda\gamma_1}\pi(t - \Delta^-)\cos\sqrt{\lambda\gamma_1}\pi(t - \Delta^-)|^2\,dt +$$

$$+ \int_\Delta q(t)\,dt \leqslant \frac{\lambda\gamma_1\pi^2}{2} \int_\Delta (1 - \cos 4\sqrt{\lambda\gamma_1}\pi(t - \Delta^-))\,dt + \sqrt{\gamma_2\lambda} =$$

$$=\frac{\sqrt{\lambda\gamma_1\pi^2}}{2}+\sqrt{\gamma_2\lambda}<8\sqrt{\lambda\gamma_1}+\sqrt{\lambda\gamma_2}.$$

Но

$$\int_I \omega^2(t)\,dt=\int_\Delta \sin^4\sqrt{\lambda\gamma_1}\pi(t-\Delta^-)\,dt=\frac{1}{4}\int_\Delta (1-\cos 2\sqrt{\lambda\gamma_1}\pi(t-\Delta^-))^2 dt=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{\lambda\gamma_1}}+\frac{1}{4}\int_\Delta \cos^2 2\sqrt{\lambda\gamma_1}\pi(t-\Delta^-)\,dt=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\frac{1}{\sqrt{\lambda\gamma_1}}=\frac{3}{8\sqrt{\lambda\gamma_1}}.$$

Поэтому

$$(L\omega,\omega)<\lambda(8\sqrt{\gamma_1}+\sqrt{\gamma_2})\frac{8\sqrt{\gamma_1}}{3}\|\omega\|^2. \qquad (2.2.12)$$

Покроем числовую ось непересекающими интервалами Ω_i ($i=0, \pm 1, \ldots$) длины $(\lambda\gamma_1)^{-1/2}$. Если в какой-нибудь точке η_i отрезка $\bar{\Omega}_i$ выполняется неравенство $\sqrt{q^*(\eta_i)}<\frac{1}{2}(\lambda\gamma_1)^{1/2}$, то Ω_i содержится в интервале

$$\tilde{\Omega}_i=\left(-\frac{1}{2}q^{*^{-1/2}}(\eta_i)+\eta_i,\ \eta_i+\frac{1}{2}q^{*^{-1/2}}(\eta_i)\right).$$

Поэтому, пользуясь равенством (2.1.2), имеем

$$\frac{1}{2}(\lambda\gamma_1)^{1/2}\geqslant\sqrt{q^*(\eta_i)}\geqslant\int_{\tilde{\Omega}_i} q(\eta)\,d\eta\geqslant\int_{\Omega_i} q(\eta)\,d\eta.$$

Следовательно, если множество $\bar{\Omega}_i\cap\{x:\sqrt{q^*(x)}\leqslant\frac{1}{2}(\lambda\gamma_1)^{1/2}\}$ непусто, то для $\bar{\Omega}_i$ выполняется неравенство (2.2.11) при $\gamma_2=\frac{\gamma_1}{4}$. Отсюда и из оценки (2.2.12) следует, что, если множество $\bar{\Omega}_i\cap$ $\cap\left\{x:q^*(x)\leqslant\frac{1}{4}(\lambda\gamma_1)\right\}$ непусто, то найдется функция ω_i, равная нулю вне $\bar{\Omega}_i$ такая, что $(L\omega_i,\omega_i)<\lambda\left[8\sqrt{\gamma_1}+\frac{1}{2}\sqrt{\gamma_1}\right]\frac{8}{3}\sqrt{\gamma_1}\|\omega_i\|^2=\lambda\gamma_1\times$ $\times\frac{17\cdot 4}{3}\|\omega_i\|^2=\frac{68}{3}\lambda\gamma_1\|\omega_i\|^2$.

На линейном многообразии, натянутом на все такие ω_i, выполняется это соотношение.

Из леммы 2.1.3 и вышеприведенных выкладок следует

$$N\left(\frac{68}{3}\lambda\gamma_1\right)\geqslant\sum_{\bar{\Omega}_i\cap\left\{x:q^*(x)\leqslant\frac{1}{4}\lambda\gamma_1\right\}\neq\varnothing} 1.$$

В этом неравенстве единицу заменим величиной $\sqrt{\lambda\gamma_1}d_l$, где d_l — длина Ω_l. Тогда получаем

$$N\left(\frac{68}{2}\lambda\gamma_1\right) \geqslant \sqrt{\lambda\gamma_1}\cdot \sum_{\overline{\Omega}_l\cap\left\{x:q^*(x)\leqslant\frac{1}{4}\lambda\gamma_1\right\}\neq\varnothing} d_l = \sqrt{\lambda\gamma_1}\sum_{\overline{\Omega}_l\cap\left\{x:q^*(x)\leqslant\frac{1}{4}\lambda\gamma_1\right\}\neq\varnothing} \operatorname{mes}\Omega_l \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\lambda\gamma_1}\operatorname{mes}\left\{x : q^*(x) \leqslant \frac{1}{4}\lambda\gamma_1\right\}.$$

Выберем $\gamma_1 = \frac{3}{68}$: $N(\lambda) \geqslant \sqrt{\frac{3}{68}\lambda}\operatorname{mes}\left\{x : q^*(x) \leqslant \frac{3}{272}\lambda\right\}$. Отсюда и из неравенства (2.2.10) вытекает теорема 2.2.1.

§ 3. Оценки собственных чисел

Теорема 2.3.1. Пусть $q(x) \geqslant 0$. Тогда резольвента оператора $Ly = -y'' + q(x)y$, $x \in I$ компактна, если и только если

$$q^*(x) \to \infty \text{ при } |x| \to \infty. \tag{2.3.1}$$

Доказательство. Достаточность. Если выполняется (2.3.1), то из определения (2.2.2) функции $M(\cdot)$ следует, что $M(\lambda) < \infty$ для любого $\lambda > 0$. А это означает, что спектр оператора дискретен и, следовательно, резольвента L компактна.

Необходимость. Пусть резольвента L компактна. Тогда $N(\lambda) < < \infty$ для всякого $\lambda > 0$. Левое неравенство (2.2.1) дает, что $M(\lambda) < \infty$ для любого $\lambda > 0$.

Если $q^*(x) \not\to \infty$ при $|x| \to \infty$, то существует последовательность точек $|x_n| \to +\infty$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ и постоянное $C > 0$ такие, что $q^*(x_n) \leqslant C$. Но тогда в силу леммы 2.1.1 найдется интервал Δ_n длины $\frac{1}{2}C^{-1/2}$, в котором $q^*(x) \leqslant 4C$. Можно считать, что эти интервалы не пересекаются. Имеем

$$\infty > M(4C) = \sqrt{4C}\operatorname{mes}\{x : q^*(x) \leqslant 4C\} \geqslant \sqrt{4C}\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{mes}\Delta_n = +\infty.$$

Это противоречие доказывает необходимость (2.3.1).

Из доказанной теоремы легко вытекает

Следствие. Если $q(t) \geqslant 0$ и резольвента оператора L компактна, то $\inf\{q^*(x), x \in I\} > 0$.

Теорема 2.3.2. (Критерий А. М. Молчанова.) Пусть $q(x) \geqslant 0$. Тогда резольвента оператора $Ly = -y'' + q(x)y$, $x \in I$ компактна, если и только если

$$\int\limits_{\Delta} q(t)\,dt \to +\infty, \tag{2.3.2}$$

когда интервал Δ, сохраняя длину, уходит в бесконечность.

Доказательство. Пусть не выполнено (2.3.1), т. е. существуют точки x_n, $n=0, 1, 2, \ldots$ и постоянное $c>0$ такие, что $q^*(x_n)\leqslant c$. В силу равенства (2.1.2) получаем, что существуют интервалы Δ_n, уходящие в бесконечность, длины $c^{-1/2}$, для которых

$$\int\limits_{\Delta_n} q(t)\,dt \leqslant c_1, \quad n=0, 1, 2, \ldots, \tag{2.3.3}$$

когда интервал Δ_n, сохраняя длину, уходит в бесконечность. Таким образом, условие (2.3.2) не выполнено.

Допустим теперь, что условие (2.3.2) не выполнено. Тогда существуют непересекающие интервалы Δ_n постоянной длины $C^{-1/2}$ такие, что имеют место неравенства (2.3.3).

Если нужно уменьшить длину Δ_n, можно считать, что C_1 равно $C^{-1/2}$. Теперь, вспомнив определение $q^*(x)$, получаем, что $q^*(x_n)\leqslant \leqslant C^{-1}$, где x_n — центр Δ_n. Это означает, что не выполнено (2.3.1). Таким образом, (2.3.1) и (2.3.2) эквивалентны. Поэтому теорема 2.3.2 вытекает из теоремы 2.3.1.

Теорема 2.3.3. Пусть $q(x)\geqslant 0$ и λ_1 — нижняя грань спектра оператора L. Тогда $16^{-1}q_0^*\leqslant\lambda_1<100q_0^*$, где $q_0^*=\inf\{q^*(x): x\in I\}$.

Доказательство. Пусть $100^{-1}\lambda>q_0^*$. Тогда из первого неравенства (2.2.1) вытекает $N(\lambda)\neq 0$. Поэтому $\lambda_1<\lambda$. Таким образом, для всякого λ, удовлетворяющего неравенству $100q_0^*<\lambda$, выполнено неравенство $\lambda_1<\lambda$.

Пусть λ — любое число, удовлетворяющее неравенству $\lambda< <16^{-1}q_0^*$. Тогда из первого неравенства (2.2.1) вытекает $N(\lambda)=0$. Следовательно, $\lambda_1>\lambda$. А это неравенство ввиду произвольности $\lambda<16^{-1}q_0^*$ дает, что $\lambda_1>16^{-1}q_0^*$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы и следствия теоремы 2.3.1 вытекает

Следствие. Если $q(t)\geqslant 0$ и спектр оператора L дискретен, то нижняя грань его спектра отделена от нуля. Обозначим через $\widetilde{M}(\lambda)$ монотонную функцию, определенную на $[0, \infty)$, которая определяется равенством

$$\widetilde{M}(\lambda)=\begin{cases} M(\lambda) & \text{при } \lambda>\xi, \\ \lambda/\xi & \text{при } \lambda<\xi, \end{cases}$$

где ξ — наименьший корень уравнения $M(\lambda)=1$.

Отметим, что функция $\widetilde{M}(\lambda)$ строго монотонна. Это следует из непрерывности функции $q^*(x)$. Конечно, может оказаться, что $\widetilde{M}(\lambda)=\infty$. Но тогда, очевидно, $\widetilde{M}(\lambda)=\infty$ при всех $\lambda\geqslant\widetilde{\lambda}$.

Пусть $F(\cdot)$ — функция, обратная к функции $\widetilde{M}(\cdot)$ в смысле преобразования. Имеет место

Теорема 2.3.4. Пусть $q(x)\geqslant 0$ и спектр оператора $Ly=-y''+q(x)y$, $x\in I$ дискретен. Обозначим через λ_i $(i=1, 2, \ldots)$ собственные числа L. Тогда $16^{-1}F(n)\leqslant\lambda_n\leqslant 100F(n)$, $n=1, 2, \ldots$

Доказательство. Перепишем (2.2.1), усиливая левую часть следующим образом:

$$M\left(\frac{\lambda}{100}\right)\leqslant N(\lambda)\leqslant M(16\lambda). \tag{2.3.4}$$

Возьмем $\varepsilon>0$ и $\lambda=\lambda_n$. Так как оператор Штурма — Лиувилля не имеет кратных собственных чисел, число ε можно взять настолько малым, чтобы $N(\lambda_n+\varepsilon)=n$. Но тогда в силу оценок (2.3.4) $M\left(\frac{\lambda_n+\varepsilon}{100}\right)\leqslant n\leqslant M(16(\lambda_n+\varepsilon))$. Перейдем в этих неравенствах к обратным функциям: $\frac{\lambda_n+\varepsilon}{100}\leqslant F(n)\leqslant 16(\lambda_n+\varepsilon)$. Устремив в этом неравенстве ε к нулю, получаем теорему.

Ниже мы хотим получить критерий принадлежности резольвенты оператора Штурма — Лиувилля классам σ_p. Из теоремы 2.3.4 получаем, что

$$100^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}F^{-p}(n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-p}\leqslant 16\sum_{n=1}^{\infty}F^{-p}(n),\quad 0<p<\infty.$$

Эти неравенства дают желаемый результат, но получим такой результат в более эффективных терминах.

Теорема 2.3.5. Пусть $p>\frac{1}{2}$, $q(x)\geqslant 0$ и спектр оператора L дискретен. Тогда резольвента оператора L принадлежит классу σ_p, если и только если

$$q^{*^{-p+\frac{1}{2}}}(x)\in L_1(0,\infty),$$

причем справедливы неравенства

$$\frac{4p}{2p-1}100^{-p}\int_{-\infty}^{\infty}q^{*^{-p+\frac{1}{2}}}(x)\,dx\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^p}\leqslant\frac{2p}{2p-1}16^p\int_{-\infty}^{\infty}q^{*^{-p+\frac{1}{2}}}(x)\,dx. \tag{2.3.5}$$

Доказательство. Рассмотрим при достаточно больших выражение

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\lambda_n^p}.$$

Его можно переписать следующим образом:

$$\int_0^{\lambda_k+\delta} \frac{dN(\lambda)}{\lambda^p},$$

где δ — достаточно малое число. Проинтегрируем это выражение по частям и получим

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\lambda_n^p} = \frac{N(\lambda_k+\delta)}{\lambda_k^p} + p \int_0^{\lambda_k+\delta} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{p+1}} d\lambda. \tag{2.3.6}$$

Здесь при вычислении внеинтегральных членов учитывалось следствие теоремы 2.3.1.

Допустим, что интеграл в правой части этого равенства ограничен постоянным числом. Тогда можно найти последовательность целых чисел k_i $(i \to \infty)$ такую, что

$$\lim_{i\to\infty} \frac{N(\lambda_{k_i}+\delta)}{\lambda_{k_i}} = 0.$$

В противном случае интеграл в правой части равенства (2.3.6) стремился бы к $+\infty$ при $k \to \infty$.

В таком случае

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^p = p \int_0^{\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{p+1}} d\lambda. \tag{2.3.7}$$

Если интеграл в правой части (2.3.6) неограничен, то справедливость равенства (2.3.6) очевидна.

Отсюда и из теоремы 2.3.1 получаем соотношения

$$2p \int_0^{\infty} \frac{M\left(\frac{\lambda}{100}\right)}{\lambda^{p+1}} d\lambda \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^p} \leqslant p \int_0^{\infty} \frac{M(16\lambda)}{\lambda^{p+1}} d\lambda$$

или

$$2p100^{-p}\int\limits_0^\infty \frac{M(\lambda)}{\lambda^{p+1}}d\lambda \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^p} \leqslant p\cdot 16^{-p}\int\limits_0^\infty \frac{M(\lambda)}{\lambda^{p+1}}\,d\lambda, \qquad (2.3.8)$$

Вычислим интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{M(\lambda)}{\lambda^{p+1}}\,d\lambda.$$

В силу следствия теоремы 2.3.1 имеем, что $M(\lambda)=0$ в окрестности $\lambda=0$. Учитывая это, проинтегрируем по частям

$$\int\limits_0^\infty \frac{M(\lambda)}{\lambda^{p+1}}d\lambda = \int\limits_0^\infty \frac{M(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{d\lambda}{\lambda^{p+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{-p+\frac{1}{2}}\int\limits_0^\infty \frac{M(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}d\lambda^{-p+\frac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{i\to\infty}\left[\frac{1}{-2p+\frac{1}{2}}\,\frac{M(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\,\lambda^{-p+\frac{1}{2}}\Big|_0^{R_i} + \frac{1}{p-\frac{1}{2}}\int\limits_0^{R_i}\lambda^{-p+\frac{1}{2}}d\,\frac{M(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right] =$$

$$= \lim_{i\to\infty}\left[\frac{1}{-2p+1}\,\frac{M(R_i)}{R_i^p} + \frac{2}{2p-1}\int\limits_0^{R_i}\lambda^{-p+\frac{1}{2}}d\,\frac{M(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right].$$

Легко показать, что если интеграл в левой части конечен, то последовательность чисел R_i, $i=1, 2, \ldots$ можно выбрать так, чтобы $\dfrac{M(R_i)}{R_i^p}\to 0$ при $i\to\infty$. Поэтому имеет место равенство

$$\int\limits_0^\infty \frac{M(\lambda)}{\lambda^{p+1}}\,d\lambda = \frac{2}{2p-1}\int\limits_0^\infty \lambda^{-p+\frac{1}{2}}d\,\frac{M(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Теперь, подставляя значение $M(\lambda)$, получаем

$$\int\limits_0^\infty \frac{M(\lambda)}{\lambda^{p+1}}\,d\lambda = \frac{2}{2p-1}\int\limits_0^\infty \lambda^{-p+\frac{1}{2}}d\operatorname{mes}\{x : q^*(x)\leqslant\lambda\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{2p-1}\int\limits_0^\infty q^{*\,-p+\frac{1}{2}}(x)dx.$$

Отсюда и из (2.3.7) вытекают неравенства (2.3.5), которые доказывают теорему.

Замечание. В доказанных в § 1—3 гл. 2 теоремах постоянные числа могут быть уточнены. Осознавая важность этого вопроса, но избегая технически сложных вычислений, мы часто сильно огрубляли оценки. Отметим еще, что функцию $q^*(x)$, игравшую важную роль, можно заменить другими функциями, при этом, сохранив доказанные теоремы, но, возможно, с другими константами. Например, вместо $q^*(x)$ можно использовать любую из следующих функций:

$$\tilde{q}(x) = \inf_{d>0} \left\{ d^{-2} : 1 \geqslant d \int_{x-\frac{d}{2}}^{x+\frac{d}{2}} \psi\left(\frac{t-x}{d}\right) q(t)\,dt, \right.$$

$$\approx{q}(x) = \left[\inf_{d>0} \left\{ d^{-1} + \int_{x-\frac{d}{2}}^{x+\frac{d}{2}} \psi\left(\frac{t-x}{d}\right) q(t)\,dt \right] \right]^2,$$

где $\psi(\cdot)$ — непрерывная неотрицательная функция на $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ такая, что $\psi(0) > 0$.

Можно показать, что эти две функции эквивалентны $q^*(x)$, т. е. найдутся постоянные C_0, C_1, зависящие от $\psi(\cdot)$, но не зависящие от x и $q(\cdot)$ такие, что выполняются неравенства

$$C_0^{-1} \leqslant \frac{q^*(x)}{\tilde{q}(x)} \leqslant C_0, \quad C_1^{-1} \leqslant \frac{q^*(x)}{\overset{\approx}{q}(x)} \leqslant C_1, \quad x \in R.$$

§ 4. Оценки S-чисел несамосопряженного оператора Штурма — Лиувилля

Перенесем результаты § 3 на случай несамосопряженного оператора, а также укажем еще один способ, позволяющий получить оценки нормы резольвенты в классах σ_p при некоторых p.

Для этого установим некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 2.4.1. Пусть H — гильбертово пространство функций на прямой I. Предположим, что H вложено в пространство $\overset{0}{C}(I)$ — непрерывных на I функций, обращающихся в нуль на бесконечности. Для произвольной точки $\eta \in I$ введем оператор B_η, действующий из H в пространство комплексных чисел C по формуле $B_\eta y = y(\eta)$. Тогда, если $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — любая полная ортонормированная система функций в H, то

$$\|B_\eta\|^2_{H\to C} = \sum_{n=1}^\infty |\psi_n(\eta)|^2. \qquad (2.4.1)$$

Доказательство. Отметим, что функции $\psi_n(\cdot)$ в силу вложения $H \subset\!\to \overset{0}{C}(I)$ непрерывны. Пусть $y(x) \in H$. Тогда $y(x) = \sum_{n=1}^\infty c_n \varphi_n(x)$ в смысле H.

Причем, согласно равенству Парсеваля, имеем равенство

$$\|y\|^2_H = \sum_{n=1}^\infty |c_n|^2. \qquad (2.4.2)$$

Так как $H \subseteq \overset{0}{C}(I)$, то

$$y(\eta) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^k c_n \psi_n(\eta).$$

Отсюда, используя неравенство Коши — Буняковского и (2.4.2), получаем

$$|y(\eta)| \leqslant \lim_{k\to\infty} \sqrt{\sum_{n=1}^\infty |c_n|^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^k |\psi_n(\eta)|^2} =$$

$$= \|y\|_H \cdot \lim_{k\to\infty} \sqrt{\sum_{n=1}^k |\psi_n(\eta)|^2} = \|y\|_H \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^\infty |\psi_n(\eta)|^2}. \qquad (2.4.3)$$

Возьмем произвольное целое $N > 0$ и рассмотрим функцию $y_N(t) = \sum_{n=1}^N \overline{\psi_n(\eta)} \psi_n(t)$. Для этой функции имеем соотношения

$$\|y_N\|^2_H = \sum_{n=1}^N |\psi_n(\eta)|^2, \quad y_N(\eta) = \sum_{n+1}^N |\psi_n(\eta)|^2.$$

Поэтому

$$\frac{y_N(\eta)|}{\|y\|_H} = \sqrt{\sum_{n=1}^N |\psi_n(\eta)|^2}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|B_\eta\|_{H\to C} \geqslant \lim_{N\to\infty} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} |\psi_n(\eta)|^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n(\eta)|^2}.$$

Из (2.4.3) получаем неравенство (также нестрогое), противоположное этому неравенству, которые вместе доказывают лемму.

Лемма 2.4.2. Пусть A — оператор в гильбертовом пространстве H, имеющий вполне непрерывный обратный, $s_n(A)$ — s-число оператора A, равное по определению $s_n^{-1}(A^{-1})$ $N(\lambda, A) = \sum_{s_n(A)<\lambda} 1$, $\lambda > 0$. Предположим, что найдутся положительный самосопряженный оператор B и число $\gamma > -2$ такие, что для всех $u \in D(A)$ выполняется неравенство

$$|(Au, u)|\,\|u\|^{\gamma} \geqslant (Bu, u)^{1+\gamma/2}. \tag{2.4.4}$$

Тогда $N(\lambda, A) \leqslant N(\lambda^{\frac{2}{\gamma+2}}, B)$, где $N(\lambda, B)$ — число точек спектра оператора B в интервале $(0, \lambda)$.

Доказательство. Из леммы 2.1.4 следует, что число

$$N(\lambda, A) = \sum_{s_n^{-1} > \frac{1}{\lambda}} 1 = \sum_{\lambda_n(A^{-1*}A^{-1}) > \lambda^{-2}} 1$$

равно максимальной размерности подпространств G, на которых выполняется неравенство

$$\|A^{-1}v\|^2 = (A^{-1*}A^{-1}v, v) > \lambda^{-2}(v, v), \quad v \in G. \tag{2.4.5}$$

Обозначим $\widetilde{G} = A^{-1}G \subset D(A)$, $\dim \widetilde{G} = \dim G$. Тогда в силу (2.4.5) приходим к неравенству $\|Av\|^2 < \lambda^2 \|v\|^2$, $v \in \widetilde{G}$. Отсюда и из условия (2.4.4), используя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$(Bv, v)^{1+\gamma/2} \leqslant \|v\|^{\gamma} |\langle Av, v\rangle| \leqslant \|v\|^{\gamma+1}\|Av\| < \lambda \|v\|^{\gamma+2}, \; v \in \widetilde{G}$$

или

$$(Bv, v) < \lambda^{\frac{2}{2+\gamma}} \|v\|^2, \quad v \in \widetilde{G}.$$

Следовательно, $N(\lambda^{\frac{2}{2+\gamma}}, B) \leqslant \dim \widetilde{G}$. Отсюда в силу произвольности G получаем $N(\lambda^{\frac{2}{2+\gamma}}, B) \leqslant N(\lambda, A)$. Лемма доказана.

Теорема 2.4.1. Пусть $\lambda > 0$, $q(x) = p(x) + ir(x)$, где $r(x) \geqslant 0$, $p(x) \geqslant 1$ — действительнозначные непрерывные функции. Обозначим через $N(\lambda)$ — количество s-чисел оператора $Ly=-y''+q(x)y$, $x\in I$, меньших $\lambda>0$. Тогда $C^{-1}M(\lambda C^{-1})\leqslant N(\lambda)\leqslant M(32\lambda)$, где C — постоянное число, не зависящее от λ и $q(x)$, а

$$M(\lambda)=\sqrt{\lambda}\,\mathrm{mes}\{x: x\in I,\ (p(\cdot)+r(\cdot))^*(x)\leqslant\lambda\}.$$

Доказательство. Отметим, что оператор L максимально диссипативен и обратим. Этот хорошо известный факт вытекает, например, из результатов работ [118, 147].

Имеем

$$|(Ly,y)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}(|y'|^2+p(x)|y|^2)\,dx+i\int_{-\infty}^{\infty}r(x)|y|^2dx\right|\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(|y'|^2+(p(x)+r(x))|y|^2)\,dx.$$

Отсюда и из леммы 2.4.2 вытекает, что $N(\lambda)\leqslant\widetilde{N}(\lambda)$, где $\widetilde{N}(\lambda)$ — функция распределения собственных чисел оператора

$$\widetilde{L}y=2^{-\frac{1}{2}}(-y''+(p(x)+r(x))y),\quad x\in I.$$

Но $\widetilde{N}(\lambda)=\tilde{\tilde{N}}(2^{1/2}\lambda)$, где $\tilde{\tilde{N}}(\lambda)$ — функция распределения собственных чисел $\tilde{\tilde{L}}y=-y''+(p(x)+r(x))y$, $x\in I$. Поэтому, пользуясь теоремой 2.2.1 и огрубляя оценку, получаем $N(\lambda)\leqslant M(32\lambda)$.

Количество s-чисел оператора L, меньших $\lambda>0$, равно максимальной размерности подпространства G, на котором $\|Ay\|^2\leqslant\leqslant\lambda^2\|y\|^2$, $y\in G$. Оценка снизу этой величины проводится аналогично доказательству нижней оценки в неравенстве теоремы 2.2.1. Разница заключается в выборе пробной функции. В этом случае в качестве пробной функции берется функция вида

$$v(t)=C\omega\left(\frac{t-x}{d}\right)+\omega\left(\frac{t-x}{d}\right)y(t),$$

где $d=(p(\cdot)+r(\cdot))^{*-1/2}(x)$; $y(t)$ — решение уравнения $-y''+q(t)y(t)=0$,

$$y\left(t-\frac{d}{2}\right)=C,\ y'(t)\Big|_{t=x-\frac{d}{2}}=0,$$

а функция $\omega(t)$ определяется равенством

$$\omega(t)=\begin{cases}\sin^2\pi\left(x-\frac{1}{100}\right) & \text{при } |x|\leqslant\frac{1}{100},\\ 0 & \text{при } |x|>\frac{1}{100}.\end{cases}$$

Из теоремы 2.4.1 получаются следствия, которые доказываются дословным повторением доказательств из § 3, но с использованием вместо теоремы 2.2.1 теоремы 2.4.1.

Приведем эти утверждения.

Теорема 2.4.2. Пусть $q(x)=p(x)+ir(x)$, где $p(x)$ и $r(x)$ — непрерывные неотрицательные функции. Тогда резольвента оператора $Ly=-y''+q(x)y$, $x\in I$ вполне непрерывна, если и только если $(p(\cdot)+r(\cdot))^*(x)\to+\infty$ при $|x|\to\infty$.

Теорема 2.4.3 [118]. Пусть выполнены условия теоремы 2.4.2. Тогда резольвента оператора $Ly=-y''+q(x)y$ вполне непрерывна, если и только если $\int\limits_{\Delta}(p(t)+r(t))\,dt\to+\infty$, когда интервал Δ уходит в бесконечность, сохраняя длину.

Теорема 2.4.4. Пусть выполнены условия теоремы 2.4.2. Тогда для нормы оператора L^{-1} справедливы оценки

$$C^{-1}a_0\leqslant\|L^{-1}\|Ca_0,$$

где C — постоянное число, не зависящее от $q(x)$, а

$$a_0=\inf\{(p(\cdot)+r(\cdot))^*(x):x\in I\}.$$

Теорема 2.4.5. Пусть $p>\frac{1}{2}$ и выполнены условия теоремы 2.4.2. Допустим, что резольвента оператора $Ly=-y''+q(x)y$, $x\in I$ вполне непрерывна. Тогда оператор L^{-1} принадлежит σ_p, если и только если

$$(p(\cdot)+r(\cdot))_*^{-p+\frac{1}{2}}\in L_1(0,\infty),$$

причем

$$C^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(p(\cdot)+r(\cdot))_*^{-p+\frac{1}{2}}(x)\,dx\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}s_n^{-p}(L)\leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_{-\infty}^{\infty}(p(\cdot)+r(\cdot))_*^{-p+\frac{1}{2}}(x)\,dx,$$

где C — постоянное число, не зависящее от $q(\cdot)$; $s_n(L)$ $(n=1,2,\ldots)$ — сингулярные числа оператора L.

Отметим, что в этих теоремах достаточно, чтобы $r(x)$ была полуограничена снизу или сверху, а условие $r(x) \geqslant 0$ необязательно.

Теорема 2.4.6. Пусть $q(t) \geqslant 0$ и спектр оператора $Ly = -y'' + q(x)y$, $x \in I$ дискретен. Обозначим через λ_n и $\psi_n(x)$ собственные числа и собственные функции, соответствующие λ_n и нормированные к единице в $L_2(I)$ оператора L. Тогда:

а) для любой точки $x \in I$ справедливы оценки

$$\frac{1}{9} q^{*^{-\frac{1}{2}}}(x) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n(x)|^2 \lambda_n^{-1} \leqslant \frac{16}{3} q^{*^{-\frac{1}{2}}}(x);$$

б) резольвента L ядерна, если и только если

$$q^{*^{-\frac{1}{2}}}(x) \in L_1(I).$$

Отметим, что второе утверждение этой теоремы вытекает из теоремы 2.4.5. Ниже приведем другое ее доказательство.

Доказательство. Обозначим через $\overset{0}{H}$ гильбертово пространство, полученное пополнением $C_0^\infty(I)$ по норме

$$\|y\|^2_{\overset{0}{H}} = \int_{-\infty}^{\infty} (|y'(t)|^2 + q(t)|y(t)|^2)\,dt.$$

Пусть $x_0 \in I$ и B_{x_0} — оператор, действующий из $\overset{0}{H}$ в пространство комплексных чисел по формуле $B_{x_0} y = y(x_0)$. Для нормы этого оператора имеем равенство

$$\|B_{x_0}\|^2 = \sup_{y(t) \in \overset{0}{H}} |y(x_0)|^2 \cdot \|y\|^{-2}_{\overset{0}{H}}. \tag{2.4.6}$$

Пусть

$$\omega(t) = \begin{cases} 4\left(t + \frac{1}{2}\right) & \text{при } -\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant -\frac{1}{4}, \\ 1 & \text{при } -\frac{1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{1}{4}, \\ 4\left(-t + \frac{1}{2}\right) & \text{при } \frac{1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } t \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \end{cases}$$

Обозначим $y_{x_0}(t) = \omega\left(\frac{t - x_0}{d}\right)$, где $d = q^{*^{-\frac{1}{2}}}(x_0)$. Тогда в силу (2.4.6) получим

$$\|B_{x_0}\|^2 \geqslant \|y_{x_0}(t)\|^{-2}_{\overset{0}{H}}. \tag{2.4.7}$$

Оценим $\|y_{x_0}\|_{\overset{0}{H}}$:

$$\|y_{x_0}\|^2_{\overset{0}{H}} \int\limits_{\Delta_d} (|y'_{x_0}(t)|^2 + q(t)|y_{x_0}(t)|^2)\,dt =$$

$$= d^{-1} 16 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} + \int\limits_{x-\frac{d}{2}}^{x+\frac{d}{2}} q(t)|y_{x_0}(t)|^2 dt \leqslant 8d^{-1} + \int\limits_{x-\frac{d}{2}}^{x+\frac{d}{2}} q(t)\,dt.$$

Используя равенства (2.1.2) и (2.4.6) и неравенство (2.4.7), получаем

$$\|B_{x_0}\|^2 \geqslant \|y_{x_0}\|^{-2}_{\overset{0}{H}} \geqslant (9d^{-1})^{-1} q^{*^{-\frac{1}{2}}}(x_0). \tag{2.4.8}$$

При $\varepsilon > 0$ для любого отрезка $\Delta^{(\varepsilon)} = \left[x_0 - \frac{d}{2} - \varepsilon,\ x_0 + \frac{d}{2} + \varepsilon\right]$ в силу (2.1.2) выполняется условие

$$\int\limits_{\Delta^{(\varepsilon)}} q(t)\,dt \geqslant d^{-1} > (d+2\varepsilon)^{-1}.$$

Поэтому по лемме 2.1.2 для функции $y_{x_0}(t)$ верно неравенство

$$\int\limits_{\Delta^{(\varepsilon)}} (|y'_{x_0}(t)|^2 + q(t)|y(t)|^2)\,dt > \frac{1}{4}(d+2\varepsilon)^{-2} \int\limits_{\Delta^{(\varepsilon)}} |y(t)|^2 dt,$$

из которого следует

$$\int\limits_{\Delta^{(\varepsilon)}} (|y'(t)|^2 + q(t)|y(t)|^2)\,dt > \frac{1}{8}\left[\int\limits_{\Delta^{(\varepsilon)}} |y'(t)|^2 dt + (d+2\varepsilon)^{-2} \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{\Delta^{(\varepsilon)}} |y(t)|^2 dt\right].$$

В этом неравенстве устремим ε к нулю и получим

$$\int\limits_{\Delta} (|y'(t)|^2 + q(t)|y(t)|^2)\,dt \geqslant \frac{1}{8}\left[\int\limits_{\Delta} |y'(t)|^2 dt + \frac{1}{d^2}\int\limits_{\Delta} |y(t)|^2 dt\right]^{-1}.$$

Используя это неравенство, в силу (2.4.6) будем иметь

$$\|B_{x_0}\|^2 \leqslant 8 \sup_{y(t)\in C^\infty(\Delta)} |y(x_0)|^2 \left[\int_\Delta |y'(t)|^2 dt + \frac{1}{d^2}\int_\Delta |y(t)|^2 dt\right]^{-1} =$$

$$= 8d \sup_{y(t)\in C^\infty\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} |y(0)|^2 \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |y'(t)|^2 dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |y(t)|^2 dt\right]^{-1}. \tag{2.4.9}$$

Выше при выводе равенства мы пользовались сдвигом начала координат и преобразованием подобия. Легко видеть, что в правой части верхняя грань достигается на четной действительной функции $\tilde{y}(t)$. Поэтому

$$|\tilde{y}(0) - \tilde{y}_m| \leqslant \int_{-\frac{1}{2}}^{0} |\tilde{y}'(t)|\, dt \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{0} |\tilde{y}'(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\tilde{y}'(t)|^2 dt\right)^{1/2},$$

где $\tilde{y}_m = \min\{y(t):\ -\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\}$.

Отсюда

$$|\tilde{y}(0)| \leqslant |\tilde{y}_m| + \frac{1}{2}\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\tilde{y}'(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Но, очевидно, что

$$|\tilde{y}_m|^2 \leqslant \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\tilde{y}(t)|^2 dt.$$

Следовательно,

$$|\tilde{y}(0)|^2 \leqslant |\tilde{y}_m|^2 + |\tilde{y}_m| \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\tilde{y}'(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \frac{1}{4} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\tilde{y}'(t)|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (|\tilde{y}'(t)|^2 + |\tilde{y}(t)|^2)\, dt.$$

Это неравенство и (2.4.9) дают, что

$$\|B_{x_0}\|^2 \leqslant 8d \cdot \frac{3}{2} = 12d = 12 q^{*^{-\frac{1}{2}}}(x_0). \tag{2.4.10}$$

В гильбертовом пространстве $\overset{0}{H}$ семейство $\{\lambda_n^{-\frac{1}{2}} \psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является полной ортонормированной системой. Поэтому, согласно лемме 2.4.1, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} |\psi_n(x_0)|^2 = \|B_{x_0}\|^2.$$

Это равенство вместе с (2.4.10) и (2.4.8) доказывает первое утверждение теоремы. Второе утверждение теоремы вытекает из первого, если учесть, что $\psi_n(x)$ нормированы к единице в $L_2(I)$. Дальнейшие обобщения этих результатов, связанные с теоремами вложения и аппроксимации, можно найти в работах [4, 5, 6, 102, 103, 119, 120, 132, 133, 146—155].

§ 5. Оценка наименьшего собственного значения одного класса матриц, соответствующего разностному уравнению Штурма — Лиувилля

При приближенном вычислении собственных значений дифференциальных операторов необходимо вычисление собственных значений некоторых конечномерных матриц, которое обычно проводится приближенно. Эффективных формул для вычисления собственных значений матриц порядка не менее 5 в общем случае не существует. В различных задачах вычислительной математики [124, с. 109, 142, 200], а также при приближенном вычислении собственных значений важно предварительно получить оценки пределов из значений. Обычно легко указать грубые, но эффективные оценки хотя бы для наименьшего собственного значения, по-видимому, в общей ситуации невозможно.

Для наименьших собственных значений одного класса матриц $\{A\}$ получим оценки вида $a_0(A)/8 \leqslant \lambda_0(A) \leqslant 30a_0(A)$, где $a_0(A)$ выписывается через элементы матрицы $A \in \{A\}$. Рассматриваемый класс матриц включает множество матриц, соответствующее разностным уравнениям Штурма — Лиувилля.

Пусть A есть n-мерная матрица

$$\left\| \begin{matrix} c_1+2 & -1 & & & & \\ -1 & c_2+2 & -1 & & & \\ & & \cdots & & & \\ & & & -1 & c_{n-1}+2 & -1 \\ & & & & -1 & c_n+2 \end{matrix} \right\| \tag{2.5.1}$$

где $c_i \geqslant 0$.

Через l_2^n обозначим n-мерное гильбертово пространство векторов $x=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ с нормой, соответствующей скалярному произведению $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$. Здесь $\bar{y}_i$ — число, комплексно-сопряженное числу y_i. Матрице A соответствует квадратичная форма

$$(Ay, y) = \sum_{i=2}^{n-1} [-y_{i-1} + (c_i+2) y_i - y_{i+1}] \bar{y}_i +$$

$$+ (c_1+2)|y_1|^2 - y_2\bar{y}_1 + (c_n+2)|y_n|^2 - y_{n-1}\bar{y}_n.$$

Упростим правую часть:

$$(Ay, y) = \sum_{i=1}^{n} c_i |y_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 - \sum_{i=2}^{n-1} (y_{i-1}\bar{y}_i + y_{i+1}\bar{y}_i) - y_2\bar{y}_1 - y_{n-1}\bar{y}_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i |y_i|^2 + \sum_{i=1}^{n+1} |y_i - y_{i-1}|^2. \tag{2.5.2}$$

Здесь и в дальнейшем для удобства считаем, что $y_0 = y_{n+1} = 0$.

Матрица A является неотрицательной и самосопряженной. Для получения наименьшего собственного значения A будем пользоваться хорошо известным вариационным принципом: если A — неотрицательный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H и λ_0 — наименьшее собственное значение оператора A, то

$$\lambda_0 = \inf (Ay, y)_H \cdot \|y\|_H^{-2},$$

где infimum берется по всем $y \in H$, $y \neq 0$.

Введем необходимые обозначения. Положим

$$k_i = \begin{cases} \max\left\{k : [2(k+1)]^{-1} \geqslant \sum\limits_{j=i-k}^{i+k} c_j,\ 1 \leqslant i-k \leqslant i+k \leqslant n\right\}, & c_i < \dfrac{1}{2}, \\ 0 & c_i \geqslant \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{2.5.3}$$

и обозначим через c_j^* новую последовательность, введенную формулой

$$c_j^* = \max([2(k_j+1)]^{-1},\ c_j). \tag{2.5.4}$$

Оценку наименьшего собственного значения матрицы A дает следующая

Теорема 2.5.1. Имеет место оценка

$$\frac{a_0}{16} \leqslant \lambda_0 \leqslant 30 a_0, \tag{2.5.5}$$

где

$$a_0 = \inf\left\{\frac{c_j^*}{2(k_j+1)}:\ 1 \leqslant j \leqslant n\right\}.$$

Доказательство. Пусть $i_0 = r$ — произвольное фиксированное целое число, $1 \leqslant r \leqslant n$. Если $c_r \geqslant \frac{1}{2}$, то $k_r = 0$. Возьмем такой вектор $y = (y_0, \ldots, y_{n+1})$, где $y_r = 1$ и $y_i = 0$ при $i \neq r$. Тогда

$$(Ay, y) = 2 + c_r |y_r|^2 = 2 + c_r, \quad \|y\|^2 = 1,$$

так как у нас $y = (y_0, \ldots, y_{n+1})$ и $y_0 = y_{n+1} = 0$. Поэтому

$$(Ay, y)\|y\|^{-2} = 2 + c_r \leqslant \frac{15 c_r^*}{2(k_r+1)}. \tag{2.5.6}$$

Если $c_i < \frac{1}{2}$, то возьмем

$$y_l = 0,\quad 1 \leqslant l \leqslant r - k_r - 1,\ y_{r-k_r} = 1,\ y_{r-k_r+1} = 2, \ldots,$$
$$y_{r-1} = k_r,\ y_r = k_r + 1,\ y_{r+1} = k_r, \ldots,$$

$$y_{r+k_r-1}=2,\ y_{r+k_r}=1,\ r+k_r+1\leqslant s\leqslant n,\ y_s=0.$$

Имеем

$$(Ay,y)\leqslant 2(k_r+1)+\sum_{l=r-k_r}^{r+k_r}c_l(k_r+1)^2,\quad \|y\|^2\geqslant\frac{1}{3}(k_r+1)^3.$$

Поэтому

$$(Ay,y)\|y\|^{-2}\leqslant 3\left[-2(k_r+1)^{-2}+\sum_{l=r-k_r}^{r+k_r}c_l(k_r+1)^{-1}\right].$$

Так как по определению (см. (2.5.3), (2.5.4))

$$\sum_{l=r-k_r}^{r+k_r}c_l\leqslant\frac{1}{2(k_r+1)}=c_r^*,$$

то получаем, что

$$(Ay,y)\|y\|^2\leqslant\frac{15c_r^*}{k_r+1}. \tag{2.5.6}$$

Отсюда и из (2.5.6) в силу произвольности числа r вытекает справедливость правого неравенства в (2.5.5). Докажем левое неравенство в (2.5.5).

Возьмем произвольное фиксированное целое j, $1\leqslant j\leqslant n$. Пусть $c_j<\frac{1}{2}$ и $y=(y_0,\ldots,y_{n+1})$ — произвольный элемент из гильбертова пространства l_2^n (по условию $y_0=y_{n+1}=0$). Обозначим через

$$a=\sum_{l=j-k_j-1}^{j+k_j}|y_{l+1}-y_l|^2.$$

Для фиксированного $\Theta>0$ возможны два случая:

$$a\geqslant\Theta^{-1}\frac{c_j^*}{2(k_j+1)}\sum_{l=j-k_j}^{j+k_j}|y_l|^2; \tag{2.5.7}$$

$$a<\Theta^{-1}\frac{c_j^*}{2(k_j+1)}\sum_{l=j-k_j}^{j+k_j}|y_l|^2. \tag{2.5.7'}$$

Если выполнено (2.5.7), то очевидно, что

$$\sum_{l=j-k_j-1}^{j+k_j}|y_{l+1}-y_l|^2+\sum_{l=j-k_j}^{j+k_j}c_l|y_l|^2\geqslant\Theta^{-1}\frac{c_j^*}{2(k_j+1)}\sum_{l=j-k_j}^{j+k_j}|y_l|^2. \tag{2.5.8}$$

Если же выполнено (2.5.7′), то существует j_0 такое, что

$$j-k_j-1\leqslant j_0\leqslant j+k_j+1 \quad\text{и}\quad |y_{j_0}|=\sup\{|y_i|: j-k_j-1\leqslant i\leqslant j+k_j+1\}.$$

Имеем неравенства $|y_i-y_{j_0}|\leqslant|y_i-y_{i-1}|+|y_{i-1}-y_{i-2}|+\ldots+|y_{j_0+1}-y_{j_0}|$ при $i\geqslant j_0$ и $|y_i-y_{j_0}|\leqslant|y_i-y_{i+1}|+|y_{i+1}-y_{i+2}|+\ldots+|y_{j_0-1}-y_{j_0}|$ при $i\leqslant j_0$. Отсюда, пользуясь неравенством Коши — Буняковского для i, удовлетворяющего условию $j-k_j-1\leqslant i\leqslant j+k_j+1$, получаем $|y_i-y_{j_0}|\leqslant[2(k_j+1)]^{1/2}a^{1/2}$.

Пользуясь (2.5.7′), получаем оценки

$$|y_{j_0}-y_l|\leqslant[2(k_j+1)]^{1/2}\left[\Theta^{-1}\frac{c_j^*}{2(k_j+1)}\sum_{l=j-k_j}^{j+k_j}|y_l|^2\right]^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant[\Theta^{-1}c_j^*(2k_j+1)]^{1/2}|y_{j_0}|.$$

Из определения c_j^* следует, что $c_j^*=[2(k_j+1)]^{-1}$, поэтому $\Theta^{-1}c_j^*\times\times(2k_j+1)\leqslant\Theta^{-1}$. Следовательно, $|y_{j_0}-y_l|\leqslant\Theta^{-1/2}|y_{j_0}|$ и $|y_l|\geqslant\geqslant\frac{\Theta^{1/2}-1}{\Theta^{1/2}}|y_{j_0}|$. Но тогда

$$\sum_{l=j-k_j}^{j+k_j}c_l|y_l|^2\geqslant\left(\frac{\Theta^{1/2}-1}{\Theta^{1/2}}\right)^2\sum_{l=j-k_j}^{j+k_j}c_l|y_{j_0}|^2\geqslant$$

$$\geqslant\left(\frac{\Theta^{1/2}-1}{\Theta^{1/2}}\right)^2\frac{c_j^*}{2(k_j+1)}\sum_{l=j-k_j}^{j+k_j}|y_l|^2.$$

Отсюда, выбирая $\Theta=4$, получаем (2.5.8).

Если $c_j\geqslant\frac{1}{2}$, то из определения c_j^* вытекает $c_j^*=c_j$ и $k_j=0$. Следовательно, выполнено (2.5.8).

Таким образом, в обоих случаях имеет место неравенство (2.5.8). Из (2.5.8) и определения a_0 вытекает соотношение

$$\sum_{l=j-k_j-1}^{j+k_j}|y_{l+1}-y_l|^2+\sum_{l=j-k_j}^{j+k_j}c_l|y_l|^2\geqslant\frac{1}{4}a_0\sum_{l=j-k_j}^{j+k_j}|y_l|^2,\quad 1\leqslant j\leqslant n. \tag{2.5.9}$$

Возьмем числа $1 \leqslant j_1 \leqslant \ldots \leqslant j_l$. Обозначим через Δ_s множество целых точек в отрезке $[j_s - k_{j_s}, \ j_s + k_{j_s}]$; при $k_{j_s} = 0$ множество Δ_s состоит из одной точки j_s.

Числа j_s выберем таким образом, чтобы выполнялись следующие условия: множество $\bigcup_{s=1}^{l} \Delta_s$ содержит все числа $1, 2, \ldots, n$ и $\Delta_{s_0} \cap \Delta_{s_1} = \varnothing$ при $|s_0 - s_1| \geqslant 2$. Здесь $\varnothing$ — пустое множество. Существование такого набора $\{j_s\}_{s=1}^{l}$ нетрудно доказать исходя из определения c_j^* и k_j.

Далее, в силу (2.5.9), имеем

$$\sum_{l=0}^{n} |y_{l+1} - y_l|^2 + \sum_{l=0}^{n} c_l |y_l|^2 \geqslant \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{l} \left[\sum_{l=j_s-k_s-1}^{j_s+k_s+1} (|y_{l+1} - y_l|^2 + c_l |y_l|^2) \right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{8} a_0 \sum_{s=1}^{l} \left(\sum_{l=j_s-k_s-1}^{j_s+k_s+1} |y_l|^2 \right) \geqslant \frac{1}{16} a_0 \sum_{l=0}^{n} |y_l|^2.$$

Из этого неравенства и вариационного принципа вытекает, что $\lambda_0 \geqslant \frac{a_0}{16}$. Теорема полностью доказана.

Эффективность формулы (2.5.5) доказывают следующие примеры.

Пример 1. Пусть в матрице (2.5.1) будет $n = 2k+1$ и $c_{2i+1} \geqslant \frac{1}{2}$ при $i = 0, 1, \ldots, k$ и $0 \leqslant c_{2j_0} \leqslant \frac{1}{2}$ хотя бы при одном $j = j_0$, $0 \leqslant j_0 \leqslant \leqslant k$; тогда из (2.5.3) получаем, что $k_j = 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots \ldots, 2k+1$. Поэтому из (2.5.4) вытекает $c_j^* \geqslant \frac{1}{2}$. Но легко видеть, что $c_{2j_0}^* = \frac{1}{2}$. Следовательно, $a_0 = \frac{1}{4}$. Отсюда и из теоремы находим $\frac{1}{64} \leqslant \lambda_0 \leqslant \frac{15}{2}$.

Этот пример показывает, что, имея довольно скудную информацию о $\{c_j\}_{j \geqslant 1}$, можно из теоремы получать двусторонние оценки для наименьшего собственного значения матрицы (2.5.1).

Пример 2. Пусть в матрице (2.5.1) будет $n = 2k+1$. Предположим, что

$$c_1 \geqslant 1, \ \ldots, \ c_{r-1} \geqslant 1, \ c_r = 0, \ \ldots, \ c_{r+\alpha} = 0, \ c_{r+\alpha+1} \geqslant 1, \ \ldots, \ c_{2k+1} \geqslant 1,$$

где r и α — целые положительные числа такие, что $1 < r$; $r + \alpha \leqslant \leqslant 2k+1$, причем α нечетно.

В этом случае простые вычисления дают, что $a_0 = (\alpha+3)^{-2}$. Поэтому $\frac{(\alpha+3)^{-2}}{16} \leqslant \lambda_0 \leqslant 30(\alpha+3)^{-2}$.

Замечание. Для большого количества задач математической физики вычисления строятся таким образом, что на каждом шаге приходится решать трехточечные уравнения вида

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{2.5.10}$$

$$A_i \neq 0, \quad B_i \neq 0$$

с некоторыми краевыми условиями.

Эта задача является классической, к ней сводятся многие сложные задачи теории вычислительных методов [177]. Систему уравнений (2.5.10) нетрудно привести к такой, чтобы соответствующая матрица имела вид (2.5.1).

Отметим, что для определения числа a_0 требуются не более чем $o(n^2)$-операций. При этом проводимые операции достаточно просты.

Как мы показали в § 3 этой главы для оператора $-y''+q(x)y$, $q(x) \geqslant 0$ можно получить эффективную оценку всех собственных чисел. Такие же оценки для матрицы (2.5.1) не известны.

§ 6. Дополнительные замечания

Полученные результаты допускают широкие обобщения на операторы, порожденные замыканием квадратичной формы, определенной на $C_0^\infty(\Omega)$ равенством

$$L(u, u) = \int_\Omega (\rho(x)|\nabla^l u|^2 + q(x)|u|^2)\,dx.$$

Здесь Ω — открытое множество в R^n; l — целое число; $|\nabla^l u| = \left(\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial^l}{\partial x_i^l} u\right|^2\right)^{1/2}$ — градиент порядка l; $\rho(x)$ и $\nu(x)$ — неотрицательные функции. Эти обобщения основаны на изучении оператора вложения E, рассматриваемого из $L_{p,l}(\Omega, \nu, \rho)$ в $L_q(\Omega, r)$, где $L_{p,l}(\Omega, \nu)$, $L_q(\Omega, r)$ — соответственно пополнения $C_0^\infty(\Omega)$ по нормам

$$|u : L_{p,l}(\Omega, \nu, \rho)| = \left(\int_\Omega (\rho|\nabla^l u|^p + v(x)|u|^p)\,dx\right)^{1/p},$$

$$|u:L_{q,\,l}(\Omega, r)| = \left(\int\limits_{\Omega} r(x)\,|u(x)|^q dx\right)^{1/q},$$

$$(\rho(x),\ v(x),\ r(x)) \leqslant 0).$$

При некоторых естественных ограничениях на $\rho(x)$, $r(x)$ и $v(x)$ можно получить оценку нормы оператора вложения, критерий компактности вложения, оценки аппроксимативных чисел вложения. Оценки аппроксимативных чисел вложения относятся к задачам теории аппроксимаций, причем к таким задачам, значимость которых возрастает с развитием теоретических основ приближенных методов решения дифференциальных уравнений. Приведем определение аппроксимативных чисел (a-чисел) вложения.

Пусть B_1 и B_2 — банаховы пространства, и B_1 вложено в B_2 (вместе с топологией); k-м аппроксимативным числом оператора вложения $E: B_1 \subset\!\to B_2$ называется число

$$a_k = \inf \|E - T\|_{B_1 \to B_2},$$

где нижняя грань берется по всем операторам размерности $\leqslant k$, действующим из B_1 в B_2. При $k=0$ за a_k принимается число $\|E\|_{B_1 \to B_2}$. С понятием a-чисел тесно связаны так называемые поперечники. Приведем определение поперечников по Колмогорову вложения $B_1 \subset\!\to B_2$.

k-м поперечником по Колмогорому вложения $B_1 \subset\!\to B_2$ называется число

$$d_k = \inf_{N \in \{N_k\}} \ \sup_{\|u\|_{B_1} < 1} \ \inf_{g \in TN} \|u - g\|_{B_2},$$

где $\{N_k\}$ — множество всех линейных многообразий, содержащихся в B_2 размерности, не превосходящих k. При $k=0$ за d_k принимается норма оператора вложения $E: B_1 \subset\!\to B_2$. Пусть $Q_d(k)$ — куб с центром в точке x, ребра которого параллельны осям координат, и длиной ребра d. Введем новую функцию

$$v^*(x) = \begin{cases} \inf\limits_{Q_d(x) \subseteq \Omega} \left(d^{-1} : d^{-pl+n} \geqslant \int\limits_{Q_d(x)} v(t)\,dt\right. & \text{при } x \in \Omega, \\ +\infty & \text{при } x \overline{\in} \Omega. \end{cases}$$

Пусть $\lambda > 0$. Обозначим через $\widetilde{N}(\lambda)$ количество a-чисел оператора вложения $E: L_{pl}(\Omega, v, \rho) \subset\!\to L_q(\Omega, r)$, которые не меньше, чем λ. Пользуясь функцией $v^*(\lambda)$, можно получить двустороннюю оценку $\widetilde{N}(\lambda)$. Приведем один такой результат.

Теорема 2.6.1. Пусть $1<p=q<\infty$, $pl>n$ и $\rho(x)=r(x)\equiv 1$. Тогда имеет место неравенство

$$\widetilde{M}(\lambda c)\leqslant\widetilde{N}(\lambda)\leqslant\widetilde{M}(c^{-1}\lambda),$$

где $c>1$ — постоянное число, зависящее только от p, l и n, а $\widetilde{M}(\cdot)$ — функция, определенная при $\lambda\in(0,\infty)$ равенством

$$\widetilde{M}(\lambda)=\lambda^{-n/l}\operatorname{mes}\{x\in\Omega: v^*(x)\leqslant\lambda^{-1/l}\}.$$

Отметим, что $\widetilde{M}(\lambda)$ может обратиться в $+\infty$ для всех λ, меньших некоторого λ_0; неравенства теоремы сохраняют смысл и в таких случаях. Эта теорема доказана в работе [146].

В случае $pl\leqslant n$ верна такая же теорема, но при определении $v^*(x)$ необходимо использовать понятие емкости. Избегая усложнения формулировок и определений, мы не рассматриваем случай $pl\leqslant n$. Такие же оценки верны для функции распределения поперечников по Колмогорову. Приложения и обобщения теоремы 2.6.1 даны в работах [102, 103, 104, 119, 136, 146].

Из теоремы 2.6.1 для оператора

$$Lu=(-\Delta)^l u+v(x)u,\ v(x)\geqslant 0,\ x\in R^n, \tag{2.6.1}$$

рассматриваемого в $L_2(R^n)$, нетрудно получить.

Следствие 2.6.1. Пусть $2l>n$. Обозначим через $N(\lambda)$ функцию распределения собственных чисел оператора L, определенного равенством (2.6.1). Тогда

$$M(c^{-1}\lambda)\leqslant N(\lambda)\leqslant M(c\lambda), \tag{2.6.2}$$

где $c>1$ — постоянное число, зависящее только от l и n; $M(\cdot)$ — функция, определенная равенством

$$M(\lambda)=\lambda^{\frac{n}{2l}}\operatorname{mes}\{x\in R^n: v^*(x)\leqslant\lambda^{\frac{1}{2l}}\}.$$

Отметим, что оценки (2.6.2) могут быть эффективно использованы для вывода асимптотических формул для $N(\lambda)$ [2, 150]. Из этого утверждения, переходя к обратным функциям, получаем

Следствие 2.6.2. Пусть $F(\cdot)$ — функция, обратная к строго монотонной функции, совпадающей с (2.6.3) при больших λ. Тогда

$$c^{-1}F(k)\leqslant\lambda_k\leqslant cF(k),$$
$$(c>1,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где λ_1, λ_2, ... — собственные числа оператора (2.6.1).

Теорему 2.6.1 и следствие 2.6.1 оставляем без доказательства. Доказательство приведено в работе [146]. Следствие 2.6.2 выводится из следствия 2.6.1 дословным повторением теоремы 2.3.4, но вместо неравенств (2.3.4) нужно использовать неравенства (2.6.2).

Теорема 2.6.2. Пусть $2l>n$, $v(x)\geqslant 0$. Тогда резольвента оператора (2.6.1) компактна, если и только если $v^*(x)\to+\infty$ при $|x|\to\infty$.

Напомним, что компактность (вполне непрерывность) резольвенты оператора (2.6.1) эквивалентна дискретности его спектра. Этот результат выводится из теоремы 2.6.1 так же, как теорема 2.3.1 была выведена из оценок (2.2.1). Пользуясь этой теоремой, нетрудно доказать

Теорему 2.6.3. (Критерий Молчанова — Бирмана — Мазьи — Павлова.) Пусть $2l>n$. Тогда спектр оператора (2.6.1) дискретен, если и только если для любого куба Q_d величина $\int\limits_{Q_d} v(t)\,dt$ стремится к $+\infty$, когда куб Q_d уходит в бесконечность, сохраняя длину ребра.

Следствие 2.6.2 теоремы 2.6.1 дает двустороннюю оценку любого собственного числа оператора (2.6.1). Из следствия (2.6.2) можно, в частности, получить двусторонние оценки наименьшего собственного числа, важного во многих вопросах. Приведем эти оценки:

$$c^{-1}v_0^*\leqslant\lambda_1\leqslant cv_0^*, \tag{2.6.4}$$

где $v_0^*=\inf\{v^*(x): x\in R^n\}$; c — постоянное число, зависящее только от l и n. Что касается оценки (2.5.5) наименьшего собственного числа матрицы (2.5.1), то они не получены до сих пор для матриц, являющихся разностным аналогом многомерных операторов. Для матрицы (2.5.1) имеются некоторые результаты [184], обобщающие теорему 2.5.1 и двусторонние оценки дальнейших собственных чисел. Однако полученные оценки выглядят менее эффективно, чем оценки, приведенные в следствии 2.6.2. Оказалось, что изучение разностных весовых теорем вложения, получение оценок аппроксимативных чисел вложений разностных пространств требуют новых средств. С другой стороны такие классические задачи, трудные для операторов Штурма — Лиувилля, как задача вычисления асимптотики собственных чисел, задача о дискретности спектра, для бесконечномерных матриц вида (2.5.1) решаются очень просто.

Пусть A — бесконечномерная матрица, рассматриваемая в l_2^∞ вида (2.5.1), элементами диагонали которой являются числа c_1+2, c_2+2, c_3+2, ..., $c_i\geqslant 0$. Легко доказать, что оператор вполне непрерывен, если и только если $c_i\to+\infty$ при $i\to\infty$. Допустим, что

$c_j \to \infty$ и обозначим λ_k, $k=1, 2, \ldots$ — пронумерованные в возрастающем порядке соответственные числа матрицы A. Тогда нетрудно показать, что $\lambda_k = \tilde{c}_k (1+o(1))$, $(k\to\infty)$, где $\{\tilde{c}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность чисел, полученная из $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ перенумерацией в возрастающем порядке.

Аналогичные результаты, т. е. оценка наименьшего собственного числа, оценки последующих собственных чисел, для бесконечномерных пятидиагональных матриц, являющихся разностными аналогами операторов вида $y^{(\mathrm{IV})}+q(x)y$, $q(x)>0$, получены в [53, 54]. Там же определены критерии вложения, компактности вложения весовых разностных пространств типа Соболева.

§ 7. Об оценках нормы интегрального оператора

Установим некоторые оценки нормы интегрального оператора

$$(Kf)(t) = \int_F K(t, s) f(s)\, ds \tag{2.7.1}$$

из $L_p(F)$ в $L_q(G)$, где F, G — измеримые подмножества соответственно из R^n и R^m; $K(t, s)$ — измеримая по совокупности переменных $t, s \in G\times F$ — функция $1\leqslant p, q\leqslant\infty$.

Нормы операторов вида (2.7.1) в общем случае известны только в случае либо $p=1$, либо $q=\infty$. Рассмотрим такие случаи, которые можно эффективно использовать для исследования модельных дифференциальных операторов. Л. В. Канторовичем и Г. П. Акиловым [85, с. 405] вычислена норма оператора K из $L_1(F)$ в $L_q(G)$:

$$\|K\|_{1\to q} = \sup_{s\in F} \|K(\cdot, s)\|_q. \tag{2.7.2}$$

Из этого равенства получим следующее

Утверждение 2.7.1. Пусть $1<p\leqslant q<\infty$ и $h(t, s)$ — измеримая по совокупности переменных $t, s\in G\times F$ функция. Тогда

$$\|K\|_{p\to q} \leqslant \sup_{s\in F} \left\| h(\cdot, s) \left(\int_F \left| \frac{K(\cdot, \eta)}{h(\cdot, \eta)} \right|^{p'} d\eta \right)^{1/p'} \right\|_q .$$

Доказательство.

$$\|Ku\|_q^q = \int_G \left| \int_F K(t, s) h^{-1}(t, s) h(t, s) u(s)\, ds \right|^q dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_G \left\{ \left(\int\limits_F \left| \frac{K(t,\eta)}{h(t,\eta)} \right|^{p'} d\eta \right)^{1/p'} \left(\int\limits_F h^p(t,s)\,|u(s)|^p\,ds \right)^{1/p} \right\}^q dt =$$

$$= \int\limits_G \left\{ \int\limits_F h^p(t,s) \left(\int\limits_F \left| \frac{K(t,\eta)}{h(t,\eta)} \right|^{p'} d\eta \right)^{p-1} |u(s)|^p ds \right\}^{q/p} dt.$$

Так как $u \in L_p(F)$, то $|u|^p \in L_1(F)$, причем $\| |u|^p \|_1 = \|u\|_p^p$. Поэтому предыдущие неравенства вместе с (2.7.2) дают

$$\|Ku\|_q^q \leqslant \sup_{s \in F} \left[\int\limits_G h^q(t,s) \left(\int\limits_F \left| \frac{K(t,\eta)}{h(t,\eta)} \right|^{p'} d\eta \right)^{q/p'} dt \right]^p \|u\|_p^q.$$

Это неравенство в силу произвольности $u \in L_p(F)$ доказывает утверждение.

Из доказанного утверждения, выбирая $h(t,s)$, можно получить различные следствия.

Следствие 2.7.1. Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{a}$. Тогда

$$\|K\|_{p\to q}^q \leqslant \frac{a}{q} \sup_{s \in F} \|K(\cdot,s)\|_q^q + \frac{a}{p'} \sup_t \|K(t,\cdot)\|_a^q. \tag{2.7.3}$$

Доказательство. Выберем $h(t,s) = K^{a/q}(t,s)$. Тогда

$$\|K\|_{p\to q}^q \leqslant \sup_{s \in F} \left\{ \int\limits_G |K(t,s)|^a \left(\int\limits_F |K(t,\eta)|^a d\eta \right)^{q/p'} dt \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{s \in F} \left(\int\limits_G |K(t,s)|^a dt \right) \cdot \sup_{t \in G} \left(\int\limits_F |K(t,\eta)|^a d\eta \right)^{q/p'}.$$

Так как $a \geqslant p'$, $a \geqslant q$ и $1 = \frac{a}{p'} + \frac{a}{q}$, то, применяя неравенство Юнга, имеем неравенство

$$\|K\|_{p\to q}^q \leqslant \frac{a}{q} \sup_{s \in F} \left(\int\limits_G |K(t,s)|^a dt \right)^{q/a} +$$

$$+ \frac{a}{p'} \sup_{t \in G} \left(\int\limits_F |K(t,\eta)|^a d\eta \right)^{q/a}.$$

Оценка (2.7.3), составляющая содержание следствия 2.7.1, хорошо известна. При $p=q=2$, $F=G=\Omega$ следствие совпадает с леммой 1.2.1.

Следствие 2.7.2 [187]. Пусть $G=F=R_n$ и $K(t,s)\equiv K(t-s)\geqslant 0$. Оператор K действует из $L_p(R_n)$ в $L_p(R_n)$ тогда и только тогда, когда $K(z)\in L_1(R_n)$, причем $\|K\|_{p\to p}=\|K\|_1$. Из (2.7.3) следует достаточность и неравенство

$$\|K\|_{p\to p}\leqslant\|K\|_1.$$

Необходимость.

$$\|Ku\|_p\leqslant\|K\|_{p\to p}\cdot\|u\|_p,\quad \forall u\in L_p. \tag{2.7.4}$$

Положим $u(s)=\chi_B(s)$, где $\chi_B(s)$ — характеристическая функция куба $B=[-N,N]^n$. Тогда из (2.7.4) имеем

$$\|K\|_{p\to p}\geqslant\frac{1}{(2N)^{n/p}}\left(\int\limits_{R_n}\left|\int\limits_{-N}^{N}K(t-s)\,ds\right|^p dt\right)^{1/p}.$$

Здесь и далее символ $\int\limits_a^b$ означает многомерный интеграл по кубу $[a,b]^n$. В силу неотрицательности функции

$$\left(\int\limits_{R_n}\left|\int\limits_{-N}^{N}K(t-s)\,ds\right|^p dt\right)^{1/p}\geqslant\frac{1}{2^n}\left(\int\limits_0^{2^{p+1}N}\left(\int\limits_0^{N+t}K(z)\,dz\right)^p dt\right)^{1/p}+$$

$$+\frac{1}{2^n}\left(\int\limits_{-2^{p+1}N}^{0}\left(\int\limits_{-N+t}^{0}K(z)\,dz\right)^p dt\right)^{1/p}\geqslant(2N)^{n/p}\int\limits_0^N K(z)\,dz+$$

$$+(2N)^{n/p}\int\limits_{-N}^{0}K(z)\,dz=(2N)^{n/p}\int\limits_{-N}^{N}K(z)\,dz.$$

Подставляя полученную оценку в предыдущее неравенство, получаем $\|K\|_{p\to p}\geqslant\|K\|_1$. Отсюда и из неравенства (2.7.3) вытекает равенство $\|K\|_{p\to p}=\|K\|_1$. Следствие доказано.

Пусть $G=F=R$ и $K(t,s)=\chi_{[0,\infty)}(t-s)K(t,s)$, тогда оператор K имеет вид

$$(Ku)(t)=\int\limits_t^{\infty}K(t,s)\,u(s)\,ds. \tag{2.7.5}$$

Следствие 2.7.3. Пусть $1<p\leqslant q<\infty$. Тогда для нормы интегрального оператора (2.7.5) верна оценка

$$\|K\|^q_{p\to q}\leqslant\sup_{s>0}\int\limits_0^s\left[f'\left(\int\limits_s^\infty|K(t,\eta)|^{p'}d\eta\right)\right]^{-q/p'}\times$$

$$\times\left[f\left(\int\limits_t^\infty|K(t,\xi)|^{p'}d\xi\right)\right]^{q/p'}dt, \qquad (2.7.6)$$

где f — произвольная непрерывно дифференцируемая функция такая, что $f(0)=0$, $f'(z)>0$, $z\in[0,\infty)$.

Действительно, выберем функцию $h(t,s)$ следующим образом:

$$h^{-p'}(t,s)=f'\left(\int\limits_s^\infty|K(t,\eta)|^{p'}d\eta\right).$$

Тогда из утверждения (2.7.1) получаем соотношения

$$\|K\|_{p\to q}\leqslant\sup_{s>0}\left\{\int\limits_0^s|h(t,s)|^q\left(\int\limits_t^\infty\left|\frac{K(t,\eta)}{h(t,\eta)}\right|^{p'}d\eta\right)^{q/p'}dt\right\}^{1/q}=$$

$$=\sup_{s>0}\left\{\int\limits_0^s\left[f'\left(\int\limits_s^\infty|K(t,\eta)|^{p'}d\eta\right)\right]^{-q/p'}\left(\int\limits_t^\infty|K(t,\eta)|^{p'}f'\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\int\limits_\eta^\infty|K(t,\xi)|^{p'}d\xi\right)d\eta\right)^{q/p'}dt\right\}=$$

$$=\sup_{s>0}\left\{\int\limits_0^s\left[f'\left(\int\limits_s^\infty|K(t,\eta)|^{p'}d\eta\right)\right]^{-q/p'}\left[f\left(\int\limits_t^\infty|K(t,\xi)|^{p'}d\xi\right)\right]^{q/p'}dt\right\}^{1/q}.$$

Следствие 2.7.4. Пусть в (2.7.5) ядро $K(t,s)=r(t)v(s)$, где $r(t)\geqslant 0$, $q(s)\geqslant 0$. Тогда для того, чтобы оператор K действовал из $L_p(R^+)$ в $L_q(R^+)$, $1<p\leqslant q<\infty$ необходимо и достаточно, чтобы

$$B\overset{\text{def}}{=}\sup_{x>0}\left(\int\limits_0^x r^q(t)\,dt\right)^{1/q}\left(\int\limits_x^\infty v^{p'}(t)\,dt\right)^{1/p'}<\infty \qquad (2.7.7)$$

при этом

$$B\leqslant\|K\|_{p\to q}\leqslant(p')^{1/p'}(p)^{1/q}B.$$

Необходимость. Пусть оператор K действует из L_p в L_q. Тогда сопряженный оператор

$$(K^*v)(s)=v(s)\int_0^s r(t)v(t)\,dt$$

действует из $L_{q'}$ в $L_{p'}$. Пусть $x\in[0,\infty)$. Для функции $v_x(s)=\chi_{[0,x]}(s)$

$$(K^*v_x)(s)=\begin{cases} v(s)\int_0^x r(t)\,dt & \text{при } s\geqslant x,\\ v(x)\int_0^s r(t)\,dt & \text{при } s<x\end{cases}$$

и $(K^*v_x)(s)$ принадлежит $L_{p'}$. Значит, так как $p(p'-1)=p'$, то

$$u_x(t)\overset{\mathrm{def}}{=}v^{p'-1}(t)\chi_{[x,\infty)}(t)\in L_p,$$

$$\|Ku_x\|_q^q=\int_0^x\left(r(t)\int_x^\infty v^{p'}(s)\,ds\right)^q dt+\int_x^\infty\left(r(t)\int_t^\infty v^{p'}(s)\,ds\right)^q dt\leqslant$$

$$\leqslant\|K\|_{p\to q}^q\left(\int_x^\infty v^{p'}(s)\,ds\right)^{q/p}.$$

Отсюда

$$\sup_{x>0}\left(\int_0^x r^q(t)\,dt\right)^{1/q}\left(\int_s^\infty v^{p'}(s)\,ds\right)^{1/p'}\leqslant\|K\|_{p\to q}<\infty. \qquad (2.7.8)$$

Достаточность. Пусть выполнено (2.7.7). В (2.7.6) положим $f(z)=\frac{1}{p'}z^{\frac{1}{p'}}$. Тогда

$$\|K\|_{p\to q}^q\leqslant\left(\frac{1}{p'}\right)^{q/p'}\sup_{s>0}\left\{\left(\int_s^\infty v^{p'}(\eta)\,d\eta\right)^{q/pp'}\int_0^s r^q(t)\times\right.$$

$$\times\left(\int_t^{\infty} v^{p'}(\eta)\,d\eta\right)^{q/(p')^2} dt\Bigg\}.$$

Применим неравенство

$$\int_s^{\infty} v^{p'}(\eta)\,d\eta \leqslant B^{p'}\left(\int_0^s r^q(\eta)\,d\eta\right)^{-p'/q},$$

вытекающее из (2.7.7); имеем

$$\|K\|_{p\to q}^q \leqslant (p')^{q/p'} B^{q/p'} \sup_{s>0}\Bigg\{\left(\int_s^{\infty} v^{p'}(\xi)\,d\xi\right)^{q/pp'} \int_0^s r^q(t)\times$$

$$\times\left(\int_0^t r^q(\eta)\,d\eta\right)^{-1/p'} dt\Bigg\} = \left(\frac{1}{p'}\right)^{q/p}\frac{1}{p}\cdot B^{q/p'} \sup_{s>0}\Bigg\{\left(\int_s^{\infty} v^{p'}(\eta)\,d\eta\right)^{1/p'}\times$$

$$\times\left(\int_0^s r^q(\eta)\,d\eta\right)^{1/q}\Bigg\}^{q/p} = \left(\frac{1}{p'}\right)^{q/p}\frac{1}{p}B^q < \infty.$$

Отсюда и из (2.7.8) получим

$$B \leqslant \|K\|_{p\to q} \leqslant \left(\frac{1}{p'}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{p}\right)^{1/q} B.$$

Следствие доказано.

Доказанный результат, принадлежащий при $p=q$ В. Макенхаупту, является обобщением хорошо известных неравенств Харди. Отметим очевидное утверждение.

Следствие 2.7.5. Пусть в (2.7.5) ядро удовлетворяет условию

$$c_1 r(t)\, v(s) \leqslant K(t, s) \leqslant c_2 r(t)\, v(s).$$

Тогда оператор K действует из $L_p(R^+)$ в $L_q(R^+)$ $(1<p\leqslant q<\infty)$ тогда и только тогда, когда выполнено (2.7.7). При этом

$$c_1 B \leqslant \|K\|_{p\to q} \leqslant c_2\left(\frac{1}{p'}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{p}\right)^{1/q} B.$$

§ 8. О свойствах полярного оператора и об интегральных неравенствах, связанных с ними

Обозначим через H_0 пополнение $\overset{0}{C}{}^{\infty}(I_+)$, $(I_+=(0,\infty))$ пространства бесконечно гладких, обращающихся в нуль в окрестности бесконечно удаленной точки, функций по норме

$$\left(\int\limits_0^\infty |V(t)\cdot f'(t)|^p dt\right)^{1/p} \quad (1\leqslant p\leqslant\infty),$$

где $V(t)$ — непрерывная функция, которая больше нуля при $t\in\in[0,\infty)$.

Л е м м а 2.8.1. Пусть $x\in I_+$. Тогда

$$\sup_{\|f\|_{H_0}=1}|f(x)|=\left(\int\limits_x^\infty V^{-p'}(t)dt\right)^{1/p'}, \quad (1<p<\infty), \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1. \tag{2.8.1}$$

Доказательство. Пусть $f(x)\in\overset{0}{C}{}^{\infty}(I_+)$ и $x\in I_+$. Имеем равенство

$$f(x)=-\int\limits_0^\infty f'(t)\,dt. \tag{2.8.2}$$

Применим к его правой части неравенство Гельдера и получим оценку

$$|f(x)|\leqslant\left(\int\limits_x^\infty V^{-p'}(t)dt\right)^{1/p'}\left(\int\limits_x^\infty |V(t)f'(t)|^p dt\right)^{1/p}. \tag{2.8.3}$$

Для $N, x\in I_+$ $(N>x)$ определим функцию

$$f'_{x,N}(t)=\begin{cases} V^{-p'}(t) & \text{при } t\in[x,N], \\ 0 & \text{при } t\in[x,N]. \end{cases}$$

Тогда, если постоянную интегрирования определим из условия $f_x(t)\to 0$ при $t\to+\infty$, то будем иметь соотношение

$$f_{x,N}(x)=\int\limits_x^N V^{-p'}(z)\,dz.$$

Но

$$\int\limits_0^\infty |f'_{x,N}(t)V(t)|^p dt=\int\limits_x^N V(t)^{p-pp'}dt=\int\limits_x^N V(t)^{pp'\left(\frac{1}{p'}-1\right)}dt=\int\limits_x^N V^{-p'}(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$\frac{f_{x,N}(x)}{\left(\int\limits_0^\infty |f'_{x,N}(t)V(t)|^p dt\right)^{1/p}}=\left(\int\limits_x^N V^{-p'}(t)\,dt\right)^{1-\frac{1}{p}}=\left(\int\limits_x^N V^{-p'}(t)\,dt\right)^{1/p'}.$$

Устремляя в этом равенстве N к $+\infty$, получаем неравенство

$$\sup_{\|f\|_H=1}|f(x)|\geqslant\left(\int\limits_x^\infty V^{-p'}(t)\,dt\right)^{1/p'},$$

которое вместе с (2.8.3) доказывают лемму.

Из результата Макенхаупта (см. следствие 2.7.4) вытекает

Лемма 2.8.2. Пусть $1<p<\infty$, $\rho(t)>0$ — непрерывная функция. Обозначим

$$T=\sup_{x>0}\left(\int\limits_0^x |\rho(t)|^p dt\right)^{1/p}\cdot\left(\int\limits_x^\infty V^{-p'}(t)\,dt\right)^{1/p'},\ \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right).$$

Тогда, если $T<\infty$, имеет место неравенство

$$\int\limits_0^\infty |\rho(t)f(t)|^p dt\leqslant C^p\int\limits_0^\infty |V(t)\cdot f'(t)|^p dt, \tag{2.8.4}$$

где конечная постоянная C не зависит от $f(t)\in \overset{0}{C}{}^\infty(I_+)$. Кроме того, если C — наименьшая постоянная, для которой верно (2.8.4), то

$$T\leqslant C\leqslant p^{1/p}(p')^{1/p'}T. \tag{2.8.5}$$

Укажем схему доказательства. Для функций $f(t)\in \overset{0}{C}{}^\infty(I_+)$ верно представление (2.8.2). Поэтому оценка (2.8.4) эквивалентна оценке

$$\int\limits_0^\infty \rho(t)\cdot\int\limits_t^\infty |f'(\eta)\,d\eta|^p dt\leqslant C^p\int\limits_0^\infty |V(t)f'(t)|^p dt.$$

Отсюда, обозначив $V(t)f'(\eta)=g(\eta)$, получаем, что неравенство (2.8.4) эквивалентно следующему

$$\int_0^\infty \left| \int_0^\infty \frac{\rho(t)}{V(\eta)} g(\eta)\, d\eta \right|^p dt \leqslant C^p \int_0^\infty |g(\eta)|^p d\eta.$$

А это означает, что наименьшая постоянная C, для которой верно (2.8.4), равна норме интегрального оператора, ядро которого равно $\rho(t)V^{-1}(\eta)$ при $\eta \geqslant t$ и нулю при $\eta < t$. Поэтому лемма вытекает из следствия 2.7.4.

Из доказанной леммы следует, что необходимым условием ограниченности оператора вложения $E: H_p \subset\!\!\to L_p(\rho)$ является условие $T<\infty$, причем для нормы оператора вложения справедливы оценки (2.8.5), в которых вместо C следует записать $\|E\|_{H_p \to L_p(\rho)}$.

Следующий результат дает условие компактности вложения $E: H_p \subset\!\!\to L_p(\rho)$.

Лемма 2.7.3. Пусть $1<p<\infty$ и величина T, определенная в лемме 2.7.2, конечна. Тогда множество функций

$$F=\left\{ \rho(t)f(t) : f(t) \in \overset{0}{C}{}^\infty(I_+), \int_0^\infty |V(t)f(t)|^p dt \leqslant 1 \right\}$$

относительно компактно в $L^p(I_+)$, если и только если

$$\lim_{x\to\infty} \left(\int_0^x |\rho(t)|^p dt \right)^{1/p} \cdot \left(\int_x^\infty |V(t)|^{-p'} dt \right)^{1/p'} = 0,$$

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right). \tag{2.8.6}$$

Доказательство. Достаточность. Продолжим все функции из F, а также $V(t)$ и $\rho(t)$ четно на всю ось. Тогда на основании теоремы Фреше — Колмогорова (см. гл. 1 § 1) достаточно доказать, что выполнены следующие условия а) и б):

а) для любого $\varepsilon>0$ найдется N_ε такое, что

$$\int_N^\infty |\rho(t)f(t)|^p dt \leqslant \varepsilon, \quad \text{если } f(t) \in F \text{ и } N \geqslant N_\varepsilon;$$

б) $\displaystyle \sup_{\rho f \in F} \int_I |\rho(t)f(t) - \rho(t+h)f(t+h)|^p dt \to 0$ при $h\to\infty$.

Докажем а). Для $\rho f \in F$. Из леммы 2.7.2 получаем цепочку соотношений

$$\int_N^\infty |\rho(t) f(t)|^p dt = \int_0^\infty |\rho(t+N) f(t+N)|^p dt \leqslant$$

$$\leqslant C_p \sup_{x>0} \left(\int_0^x |\rho(t+N)|^p dt \right) \left(\int_x^\infty |V(t+N)|^{-p'} dt \right)^{p/p'} =$$

$$= C_p \sup_{x>0} \left(\int_N^{x+N} |\rho(t)|^p dt \right) \left(\int_{x+N}^\infty |V(t)|^{-p'} dt \right)^{p/p'} \leqslant$$

$$\leqslant C_p \sup_{x \geqslant N} \left(\int_0^x |\rho(t)|^p dt \right) \left(\int_x^\infty |V(t)|^{-p'} dt \right)^{p/p'}.$$

Отсюда и из условия леммы получаем а).

Докажем б). Пусть $N>0$. Введем функцию

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } |t| \leqslant N, \\ 0 \text{ при } |t| > N. \end{cases}$$

Для $\rho(t) f(t) \in F$ имеем равенство

$$\rho(t) f(t) = \varphi_N(t) \rho(t) f(t) + (1 - \varphi_N(t)) \rho(t) f(t). \qquad (2.8.7)$$

В силу доказанного условия а), второе слагаемое в (2.8.7) может быть сделано по норме меньше наперед заданного числа $\delta>0$ за счет выбора N.

Для первого слагаемого для любых $h>0$ и $N>0$ имеем соотношения

$$\left(\int_I |(\varphi_N(t+h) \rho(t+h) f(t+h) - \varphi_N(t) \rho(t) f(t))|^p dt \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_I |\varphi_N(t+h) \rho(t+h) - \varphi_N(t) \rho(t)|^p \cdot |f(t)|^p dt \right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\int_I |\varphi_N(t) \cdot \rho(t)|^p |f(t+h) - f(t)|^p dt \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \{ \sup_{-N-h<t<N+h} |\rho(t+h)-\rho(t)|\} \left(\int_{-N-h}^{N+h} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\int_{-N-h}^{N+h} |\rho(t)|^p dt \right)^{1/p} \sup_{-N-h<t<N+h} |f(t+h)-f(t)|.$$

Но

$$|f(t+h)-f(t)| = \left| \int_t^{t+h} f'(\eta)\,d\eta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_t^{t+h} |V^{-1}(\eta) V(\eta) f'(\eta)|\,d\eta \leqslant \left(\int_t^{t+h} V^{-p'}(\eta)\,d\eta \right)^{1/p'} \times$$

$$\times \left(\int_{-\infty}^{\infty} V^p(\eta) |f'(\eta)|^p d\eta \right)^{1/p}.$$

Следовательно,

$$\left(\int_I |\varphi_N(t+h)\rho(t+h) f(t+h) - \varphi_N(t)\rho(t) f(t)|^p dt \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{-N-h<t<N+h} |\rho(t+h)-\rho(t)| \left(\int_{-N-h}^{N+h} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\int_{-N-h}^{N+h} |\rho(t)|^p dt \right)^{1/p} \cdot \left(\int_t^{t+h} V^{-p'}(\eta)\,d\eta \right)^{1/p'} \times$$

$$\times \left(\int_{-\infty}^{\infty} V^p(\eta) |f'(\eta)|^p d\eta \right)^{1/p}.$$

Так как функция $\rho(t)$ — непрерывна, а функция $V^{-p'}(t)$ — локально интегрируема, то правая часть при фиксированном N за счет выбора h (h — малое) может быть сделана меньше, чем δ для всех $\rho(t)f(t) \in F$ одновременно. Таким образом, выбрав сначала большое N, а затем малое h, для любого наперед заданного $\delta > 0$ получаем оценку

$$\sup_{\rho(t)f(t)\in F}\left(\int_I |\rho(t+h)f(t+h)-\rho(t)f(t)|^p dt\right)^{1/p} \leqslant 2\delta.$$

Отсюда вытекает б).

Необходимость. Пусть множество F относительно компактно в $L_p(I_+)$. Если $\rho(t)\in L_p(I_+)$, то условие (2.8.6) вытекает из конечности величины T. Поэтому можно считать, что

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^N |\rho(t)|^p dt=\infty. \tag{2.8.8}$$

При $N>0$ определим функцию f_N равенством

$$f_N(t)=\begin{cases}\int\limits_t^\infty V^{-p'}(\eta)\,d\eta \text{ при } t\in[N,\infty),\\ \int\limits_N^\infty V^{-p'}(\eta)\,d\eta \text{ при } t\in[0,N).\end{cases}$$

Нетрудно вычислить, что

$$\|f_N\|_N^p=\int_N^\infty V^{-p'}(t)\,dt.$$

Из условия $T<\infty$ следует, что $f_N\in H$. Обозначим

$$u_N(t)=f_N(t)\cdot\left(\int_N^\infty V^{-p'}(t)\,dt\right)^{-1/p}.$$

Тогда, вычисляя, нетрудно получить, что $\rho(t)u_N(t)\in F$ и

$$\int_0^\infty |\rho(t)u_N(t)|^p dt\geqslant\int_0^N |\rho(t)|^p dt\left(\int_N^\infty V^{-p'}(t)\,dt\right)^{p'/p'}. \tag{2.8.9}$$

Допустим, что условие (2.8.6) не выполняется. Тогда в силу (2.8.9) можно выбрать такую последовательность чисел $\{N_i\}_{i=1}^\infty$, чтобы

$$\int_0^\infty |\rho(t)\cdot u_{N_i}(t)|^p dt \geqslant \varepsilon, \quad i=1, 2, \ldots, \tag{2.8.10}$$

где $\varepsilon>0$ не зависит от i.

По условию F — относительно компактное множество. Поэтому в силу полноты пространства $L_p(I_+)$ можно считать, что

$$\rho(t) u_{N_i}(t) \xrightarrow{L_p(I_+)} \rho(t) u(t).$$

Теперь заметим, что функция $u_{N_i}(t)$ при $t<N_i$ является постоянным числом. Поэтому $u(t)$ будет постоянным числом на I_+. В силу (2.8.10) $u(t)$ не может быть тождественным нулем. Но тогда из включения $\rho(t)u(t)\in L_p(I_+)$ вытекает $\rho(t)\in L_p(I_+)$. А это противоречит (2.8.8). Лемма доказана.

Изучим свойства спектра оператора

$$ly=-\frac{1}{\rho(x)}\left(r^2(x)\left(\frac{1}{\rho(x)}y\right)'\right)', \quad x\in I_+, \tag{2.8.11}$$

где $r(x)>0$ и $\rho(x)$ — достаточно гладкие функции. Так как нас интересует случай, когда вся особенность коэффициентов в (2.8.11) сосредоточена в окрестности $+\infty$, то будем считать, что $r(x)$ и $\rho(x)$ равны единице в окрестности точки $x=0$. Обозначим через L расширение по Фридрихсу в $L_2(I_+)$ оператора, порожденного выражением (2.8.11), определенного на бесконечно гладких функциях, равных нулю в окрестности $+\infty$ и таких, что $y'(0)=0$. Отметим, что задача об изучении спектра оператора L эквивалентна изучению следующей задачи:

$$-(r(x)y')'=\lambda\rho^2(x)y(x), \quad \rho(x)y(x)\in L_2(I_+), \quad y'(0)=0$$

на собственные значения.

Теорема 2.8.1.

а) Оператор L положительно определен тогда и только тогда, когда

$$T=\sup_{x>0}\left(\int_0^x \rho(t)^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_x^\infty r^{-2}(t)\,dt\right)^{1/2}<\infty, \tag{2.8.12}$$

причем для нижней грани λ_1 спектра оператора L справедливы оценки

$$T^{-2}\leqslant\lambda_1\leqslant 4T^{-2}. \tag{2.8.13}$$

б) Оператор L имеет вполне непрерывный обратный, если и только если выполняется (2.8.12) и

$$\lim_{x\to\infty}\left(\int_0^x \rho^2(t)\,dt\right)\cdot\int_x^\infty r^{-2}(t)\,dt=0. \tag{2.8.14}$$

Доказательство. Для оператора L имеем

$$(Ly, y)=\int_0^\infty r^2(x)\left|\left(\frac{1}{\rho(x)}y\right)'\right|^2 dx.$$

Докажем а).

Достаточность. Пусть выполняется (2.8.12). Если оператор L не является положительно определенным, то существует последовательность $y_n \in D(L)$ такая, что

$$\int_0^\infty r_2(x)\ \left|\left(\frac{1}{\rho(x)}y\right)'\right|^2 dx \leqslant \varepsilon_n \int_0^\infty |y_n(x)|^2 dx, \tag{2.8.15}$$

где $\varepsilon_n>0$ и $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$. Так как речь идет о расширении по Фридрихсу, то в (2.8.15) можно считать $y_n(x)$ финитными бесконечно гладкими функциями. Обозначая $v_n(x)=\rho^{-1}(x)\,y_n(x)$, получаем, что неравенства (2.8.15) эквивалентны неравенствам

$$\int_0^\infty r^2(x)\,|v_n'(x)|^2 dx \leqslant \varepsilon_n \int_0^\infty \rho^2(x)\,|v_n(x)|^2 dx. \tag{2.8.15'}$$

Но в силу леммы 2.8.2 получаем

$$\int_0^\infty \rho^2(x)\,|v_n'(x)|^2 dx \leqslant 4T^2 \int_0^\infty r^2(x)\,|v_n'(x)|^2 dx. \tag{2.8.16}$$

Так как $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$, то это неравенство противоречит (2.8.15). Таким образом, оператор L положительно определен.

Необходимость. В силу (2.8.5) для любого $\varepsilon>0$ существует финитная бесконечно гладкая функция $v_\varepsilon(x)$ такая, что

$$\int_0^\infty \rho^2(x)\,|v_\varepsilon(x)|^2 dx \geqslant (T^2-\varepsilon)\int_0^\infty r^2(x)\,|v_\varepsilon'(x)|^2 dx.$$

Обозначим $y_\varepsilon(x)=\rho(x)v_\varepsilon(x)$. Тогда получаем соотношения

$$\|y_\varepsilon\|^2_{L_2(I_+)}=\int\limits_0^\infty \rho^2(x)\,|v_\varepsilon(x)|^2dx\geqslant(T^2-\varepsilon)\int\limits_0^\infty r^2(x)\,|v'_\varepsilon(x)|^2dx\geqslant$$

$$\geqslant(T^2-\varepsilon)\int\limits_0^\infty r^2(x)\,|(y_\varepsilon(x)\rho^{-\frac{1}{x}}(x))'|^2dx=(T^2-\varepsilon)\,(Ly_\varepsilon,y_\varepsilon)_{L_2(I_+)}.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon>0$ вытекает, что наименьшее число μ, для которого при $y\in D(L)$ выполняется неравенство $<Ly,y>\geqslant\mu<y,y>$, удовлетворяет условию $\mu\leqslant T^{-2}$. Поэтому необходимость доказана. Но число μ совпадает с нижней гранью спектра L. Следовательно, $\lambda_1\leqslant T^{-2}A$. Из (2.3.16) вытекает оценка $\lambda_1=\mu\geqslant 4^{-1}T^{-2}$. Неравенства (2.8.13) доказаны.

Докажем б). Из леммы Релиха (см. гл. 1, § 1) следует, что оператор L^{-1} вполне непрерывен, если и только если множество

$$M=\{y(x):<Ly,y>\leqslant 1,\ y(x)\in\overset{0}{C}{}^\infty(I_+)\}$$

относительно компактно в $L_2(I_+)$. Обозначая $v(x)=\rho^{-1}(x)y(x)$, получаем, что оператор L^{-1} вполне непрерывен в том и только в том случае, если множество

$$\widetilde{M}=\{\rho(x)\cdot v(x):\int\limits_0^\infty r^2(x)\,|v'(x)|^2dx\leqslant 1,\ v(x)\in\overset{0}{C}{}^\infty(I_+)\}$$

относительно компактно в $L_2(I_+)$. Теперь б) вытекает из леммы (2.7.3). Доказательство теоремы закончено.

Теорема 2.8.2. Пусть величина T, определенная в теореме 2.8.1, конечна и выполняется условие (2.8.14). Обозначим через $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ собственные числа и соответствующие собственные функции оператора L, нормированные в $L_2(I_+)$ к 1. Тогда

$$\sum_{n-1}^\infty \lambda_n^{-1}|\psi_n(x)|^2=\rho^2(x)\int\limits_x^\infty r^{-2}(t)\,dt. \qquad (2.8.17)$$

Доказательство. Отметим, что лемма 2.4.1 верна, если вместо I рассматривать I_+, а требование вложенности H в $C(I_+)$ не обязательно (достаточно, чтобы B был ограничен при всех $\eta<\infty$). Обозначим через H гильбертово пространство, полученное пополнением $\overset{0}{C}{}^{\infty}(I_+)$ по норме $(<Ly, y>)^{1/2}$. В этом пространстве семейство $\{\lambda_n^{-1/2}\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является полной ортонормированной системой. Поэтому, согласно лемме 2.4.1, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-1}|\psi_n(x)|^2 = \sup_{y\in\overset{0}{C}{}^{\infty}(I_+)} \frac{|y(x)|^2}{(Ly, y)}. \qquad (2.8.18)$$

Но

$$\sup_{y\in\overset{0}{C}{}^{\infty}(I_+)} \frac{|y(x)|^2}{(Ly, y)} = \sup_{y\in\overset{0}{C}{}^{\infty}(I_+)} \frac{|y(x)|^2}{\int\limits_0^{\infty} r^2(t)|(y\rho^{-1}(t))'|^2 dt} =$$

$$=\rho^2(x)\cdot \sup_{v\in\overset{0}{C}{}^{\infty}(I_+)} \frac{|v(t)|^2}{\int\limits_0^{\infty} r^2(t)\,|v'(t)|^2 dt}.$$

Отсюда и из леммы 2.8.1 получаем

$$\sup_{y\in\overset{0}{C}{}^{\infty}(I_+)} \frac{|y(x)|^2}{<Ly, y>} = \rho^2(x)\int\limits_x^{\infty} r^{-2}(t)\,dt.$$

Это равенство вместе с (2.8.18) доказывает теорему.

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие. Оператор L^{-1} ядерный, если и только если $S(x)\in L_1(I_+)$, причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n} = \int\limits_0^{\infty} S(x)\,dx$. Здесь $S(x) = \rho^2(x)\int\limits_x^{\infty} r^{-2}(t)\,dt$.

Дифференциальный оператор L и его различные обобщения рассмотрены в работах [4, 5, 6, 87, 88, 89, 90, 101, 155]. Получены [4] близкие по смыслу результаты для двучленных операторов

$$l(y) = (-1)^n(y^{(n)}(x))^{(n)}(x))^{(n)} + (-1)^k(r(x)\,y^{(k)}(x))^{(k)}. \qquad (2.8.19)$$

$$(n\geqslant k\geqslant 1)$$

Теорема 2.8.1 дает эффективную оценку наименьшего собственного числа оператора (2.8.11). Для операторов типа Штурма — Лиувилля можно получить эффективные оценки для всех собственных чисел. Для операторов (2.8.11) и (2.8.19) подобные оценки не известны.

§ 9. Условия осцилляторности и неосцилляторности решения уравнения Штурма — Лиувилля

Оператором, сопряженным к интегральному оператору

$$(Kf)(x) = \int_x^\infty r(x) q(s) f(s)\, ds, \quad x \in I_+ = (0, +\infty)$$

является оператор

$$(K^* f)(x) = q(x) \int_0^x r(s) f(s)\, ds. \tag{2.9.1}$$

Поэтому нетрудно получить «двойственный» к следствию 2.7.4 результат (при $p=q=2$).

Оператор K^* ограничен из $L_2(I_+)$ в $L_2(I_+)$ в том и только в том случае, если

$$B^* \overset{\text{def}}{=} \sup_{x>0} \left(\int_0^x |r(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_x^\infty |q(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

при этом

$$B^* \leqslant \|K^*\|_{L_2(I_+) \to L_2(I_+)} \leqslant 2B^*.$$

Отсюда также, как мы выводили из следствия 2.7.4 лемму 2.8.2, легко получить двойственный результат Макенхаупта.

Существует постоянная C такая, что

$$\left(\int_0^\infty \left| \rho(x) \int_0^x f(t)\, dt \right|^2 dx \right)^{1/2} \leqslant C \left(\int_0^\infty |V(x) f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \tag{2.9.2}$$

тогда и только тогда, когда

$$M = \sup_{x>0} \left(\int_x^\infty |\rho(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^x |V(t)|^{-2} dt \right)^{1/2}.$$

При этом для наименьшей постоянной C, для которой справедливо (2.9.2), имеют место оценки $M \leqslant C \leqslant 2M$. Решение $y(x)$ уравнения

$$-y'' = q(x) y \quad (x \in I_+) \tag{2.9.3}$$

называется осцилляторным, если существует последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \in I_+$, $x_n \to \infty$ таких, что $y(x_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Предположим, что решение $y(x)$ уравнения (2.9.3) осцилляторно и $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — его нули, пронумерованные в порядке возрастания. Умножим уравнение (2.9.3) на $y(x)$ и проинтегрируем от x_n до x_m $(m>n)$. Тогда получим, что

$$\int_{x_n}^{x_m} |y'(x)|^2 dx = \int_{x_n}^{x_m} q(x)\,|y(x)|^2 dx. \tag{2.9.4}$$

Используя это равенство докажем, что имеет место

Теорема 2.9.1 Пусть $q(t) \geqslant 0$ и

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\, x \int_x^{\infty} q(t)\,dt < \frac{1}{4}.$$

Тогда любое решение уравнения (2.9.3) не осцилляторно.

Предположим, что утверждение теоремы не имеет место. Тогда справедливо (2.9.4). Продолжим функцию $y(x)$ на $[x_m, \infty)$ нулем. Это продолжение обозначим через $\tilde{y}(x)$. Теперь равенство (2.9.4) эквивалентно следующему

$$\int_{x_n}^{\infty} |\tilde{y}'(x)|^2 dx = \int_{x_n}^{\infty} q(x) \left| \int_{x_n}^{x} \tilde{y}'(t)\,dt \right|^2 dx.$$

Но в силу двойственного результата Макенхаупта имеем

$$\int_{x_n}^{\infty} q(x) \left| \int_{x_n}^{x} \tilde{y}'(t)\,dt \right|^2 dx \leqslant 4M_n^2 \int_{x_n}^{\infty} |\tilde{y}'(x)|^2 dx, \tag{2.9.5}$$

где

$$M_n^2 = \sup_{x-x_n>0} \left(\int_x^{\infty} q(t)\,dt \right) \cdot \left(\int_{x_n}^{x} dt \right) =$$

$$= \sup_{x\geqslant x_n} \left(\int_{x'}^{\infty} q(t)\,dt \right)(x-x_n) \leqslant \sup_{x\geqslant x_n} x \int_x^{\infty} q(t)\,dt.$$

По условию теоремы для достаточно больших n правая часть меньше $\frac{1}{4}$. Поэтому (2.9.5) противоречит (2.9.4). Теорема доказана.

Для сравнения с теоремой 2.9.1 отметим следующий факт:

Теорема 2.9.2. Если

$$\varliminf_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x t^2 q(t)\,dt+x\int_x^\infty q(t)\,dt\right)>1, \tag{2.9.6}$$

то любое решение уравнения (2.9.3) осцилляторно.

Доказательство. Возьмем достаточно большие числа $N_2>N_1>$ $>N_0>0$, положим

$$u(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant N_0,\\ x-N_0 & \text{при } N_0<x\leqslant N_1,\\ \frac{N_0-N_1}{N_2-N_1}x+\frac{N_1-N_0}{N_2-N_1}N_2 & \text{при } N_1<x\leqslant N_2. \end{cases}$$

Для этой функции имеем

$$\int_{N_0}^{N_2}|u'(t)|^2dt=(N_1-N_0)+\left(\frac{N_0-N_1}{N_2-N_1}\right)^2(N_2-N_1)=N_1-N_0+\left(\frac{N_1-N_0}{N_2-N_1}\right)^2;$$

$$\int_{N_0}^{N_2}q(t)\,|u(t)|^2dt=\int_{N_0}^{N_1}(t-N_0)^2q(t)\,dt+$$

$$+\int_{N_1}^{N_2}\left(\frac{N_0-N_1}{N_2-N_1}t+\frac{N_1-N_0}{N_2-N_1}N_2\right)^2q(t)\,dt.$$

Зафиксируем N_0 и N_1 и устремим N_2 к бесконечности; тогда легко видеть, что отношение

$$\left(\int_{N_0}^{N_2}q(t)\,|u(t)|^2dt\right)\left(\int_{N_0}^{N_2}|u'(t)|^2dt\right)^{-1} \tag{2.9.7}$$

стремится к

$$\frac{1}{N_1-N_0}\int_{N_0}^{N_1}(t-N_0)^2q(t)\,dt+(N_1-N_0)\int_{N_1}^{\infty}q(t)\,dt.$$

Если выполняется (2.9.6), то N_1 и N_0 можно подобрать так, чтобы эта величина была больше, чем единица. Но тогда можно будет подобрать N_2 так, чтобы отношение (2.9.7) также было больше, чем единица. Следовательно, существует функция $u(t)$ такая, что

$$\int_{N_0}^{N_2} |u'(t)|^2 dt < \int_{N_1}^{N_2} q(t)\,|u(t)|^2 dt,$$

$$u(N_0) = u(N_2) = 0.$$

Отсюда вытекает, что задача

$$\begin{cases} -u'' - q(t)\,u = \lambda u, \\ u(N_0) = u(N_1) = 0 \end{cases}$$

имеет отрицательное собственное число. Но тогда из теории Штурма вытекает, что любое решение уравнения (2.9.3) в $[N_0, N_2]$ имеет по крайней мере один нуль. Так как $N_0 > 0$ — любое наперед заданное число, то утверждение доказано.

Отметим, что если решение уравнения $-y'' - q(x)\,y = 0$ осцилляторно и $q(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, то отрицательный спектр оператора $Ly = -y'' - q(x)\,y$ дискретен и состоит из бесконечного множества изолированных собственных значений, сгущающихся к нулю. А если решение не осцилляторно, то отрицательный спектр состоит из конечного числа собственных чисел [65].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александранян Т. А., Березанский Ю. М., Ильин В. А., Костюченко А. Г.* Некоторые вопросы спектральной теории для уравнений с частными производными // Тр. симпозиума, посвящ. 60-летию академика С. Л. Соболева. М.: Наука, 1970. С.3—32.

2. *Апышев О. Д.* Распределение собственных чисел одномерных дифференциальных операторов с быстро растущими в среднем коэффициентами // Изв. вузов. Сер. математика. 1982. № 5. С. 3—8.

3. *Апышев О. Д., Отелбаев М.* О классической формуле для распределения собственных чисел оператора Штурма—Лиувилля // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1975. № 3. С. 24—28.

4. *Апышев О. Д., Отелбаев М.* О спектре одного класса дифференциальных операторов и некоторые теоремы вложения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1979. Т. 43, № 4. С. 739—764.

5. *Апышев О. Д., Отелбаев М.* О спектре одного класса двухчленных дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248, № 2. С. 265—268.

6. *Апышев О. Д., Отелбаев М.* О спектре одного вырожденного оператора // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1979. № 3. С. 52—55.

7. *Асланов Г. И.* Асимптотика числа собственных значений обыкновенного дифференциального уравнения с операторными коэффициентами на полуоси // Докл. АН АзССР. 1976. № 3. С. 3—7.

8. *Асланян А. Г., Лидский В. Б.* Распределение собственных частот тонки упругих оболочек. М.: Наука, 1974.

9. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 543 с.

10. *Базарбеков А. Б., Кальменов Т. Ш.* Критерий сильной разрешимости задачи Трикоми // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261, № 2. С. 265—268.

11. *Баимов Ш. К.* О распределении собственных значений оператора Шредингера в неограниченных областях // Ин-т матем. и мех. АН АзССР. Баку, 1971. 13 с. Деп. в ВИНИТИ, № 3655—71.

12. *Баимов Ш. К.* Распределение собственных значений некоторых эллиптических операторов в неограниченной области // Докл. АзССР. 1974. Т. 30, № 9. С. 7—10.

13. *Баимов Ш. К.* Свойства собственных значений и собственных функций первой краевой задачи // Докл. АН АзССР. 1976. Т. 32, № 9. С. 8—11.

14 *Баимов Ш. К.* Распределение собственных значений некоторых эллиптических операторов с растущими коэффициентами // Спектральная теория операторов. Баку: Элм, 1977. С. 48—56.

15. *Байрам-оглы М.* Асимптотика числа собственных значений обыкновенных дифференциальных операторов с операционными коэффициентами // Функциональный анализ и его применения. Баку: Элм, 1971. С. 144—166.

16. *Байрам-оглы М.* Асимптотика числа собственных значений операторного уравнения Штурма—Лиувилля с особенностью в нуле // Спектральная теория операторов. Баку: Элм, 1977. С. 48—56.

17. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965. 798 с.

18. *Березанский Ю. М.* Обзор по спектральной теории самосопряженных дифференциальных и разностных операторов // Тр. семинара по функц. анализу. Ин-т матем. АН УССР. 1970. Вып. 2. С. 3—135.

19. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространстве функций бесконечного числа переменных. Киев: Наукова думка, 1978.

20. *Березанский Ю. М., Самойленко В. Г.* Самосопряженность дифференциальных операторов с конечным и бесконечным числом переменных и эволюционные уравнения // УМН. 1981. Т. 36. С. 3—56.

21. *Бирман М. Ш.* О спектре сингулярных граничных задач // Мат. сб. 1961. Т. 55, № 2. С. 125—174.

22. *Бирман М. Ш., Борзов В. В.* Об асимптотике дискретного спектра некоторых сингулярных дифференциальных операторов // Проблемы математической физики. Л.: Изд-во ЛГУ, 1971. Вып. 5. С. 24—38.

23. *Бирман М. Ш., Павлов Б. С.* О полной непрерывности некоторых операторов вложения // Вестник ЛГУ. Сер. мат., мех. и астр. 1961. № 1. С. 61—74.

24. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Кусочно-полиномиальные приближения функций классов // Мат. сб. 1967. Т. 73, № 3. С. 331—355.

25. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* О главном члене спектральной асимптотики для негладких эллиптических задач // Функц. анализ и его приложения. 1979. Т. 4, № 4. С. 1—13.

26. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Об асимптотике спектра негладких эллиптических уравнений // Функц. анализ и его приложения. 1971. Т. 5, № 1. С. 69—70.

27. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика негладких эллиптических операторов // Докл. АН СССР. 1972. Т. 205, № 2. С. 267—270.

28. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика негладких эллиптических операторов, I // Тр. Моск. мат. о-ва. 1972. Т. 27. С. 3—52.

29. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика негладких эллиптических операторов, II // Тр. Моск. мат. о-ва. Т. 28. С. 3—34.

30. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения к спектральной теории // Десятая мат. школа. Киев, 1974. С. 5—189.

31. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Об одной «модельной» неэллиптической спектральной задаче // Вест. Ленингр. ун-та. 1975. № 1. С. 39—45.

32. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра псевдодифференци-

альных операторов с анизотропно-однородными символами // Вест. Лениигр. ун-та. 1977. № 1. С. 13—21.

33. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Сер. математический анализ. М., 1977. Т. 14, С. 5—58.

34. *Бирман М. Ш., Яфаев Д. Р.* Асимптотика спектра матрицы рассеяния // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1981. Т. 110. С. 3—29.

35. *Бирман М. Ш., Яфаев Д. Р.* Асимптотика предельных фаз при рассеянии на потенциале без сферической симметрии // ТМФ. 1982. Т. 51, № 1. С. 44—53.

36. *Бойматов К. Х.* Асимптотика спектра операторного дифференциального оператора // Успехи мат. наук. 1973. Т. 28, вып. 4. С. 207—208.

37. *Бойматов К. Х.* Оператор Штурма—Лиувилля с матричным потенциалом // Мат. заметки. 1974. Т. 16, № 6. С. 921—932.

38. *Бойматов К. Х.* Асимптотика спектра оператора Шредингера // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 11. С. 1939—1945.

39. *Бойматов К. Х.* Распределение собственных значений эллиптических операторов // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221, № 2. С. 265—268.

40. *Бойматов К. Х.* L_2-оценки обобщенных решений эллиптических дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223, № 3. С. 521—524.

41. *Бойматов К. Х.* Асимптотика спектра оператора Шредингера с сингулярным потенциалом // Успехи мат. наук. 1976. Т. 31, вып. 1. С. 241—242.

42. *Бойматов К. Х.* Асимптотическое поведение собственных значений несамосопряженных операторов // Функ. анализ и его приложения. 1977. Т. 11, № 4. С. 74—75.

43. *Бойматов К. Х.* Спектральные асимптотики дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в негладкой области // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242, № 4. С. 749—752.

44. *Бойматов К. Х.* Асимптотика спектра эллиптического дифференциального оператора в вырожденном случае // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 6. С. 1213—1216.

45. *Бойматов К. Х.* Псевдодифференциальные операторы с операторным символом // Докл. АН СССР. 1979. Т. 244, № 1. С. 5—8.

46 *Бойматов К. Х.* Асимптотика спектра эллиптического дифференциального оператора в вырожденном случае // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266, № 1. С. 14.

47. *Бойматов К. Х.* Спектральные асимптотики дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в негладкой области // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242, № 4. С. 749—753.

48. *Бойматов К. Х.* Спектральная асимптотика дифференциальных и псевдодифференциальных операторов // Тр. семин. им. И. Г. Петровского. МГУ. 1981. № 7. С. 50—100.

49. *Бойматов К. Х., Костюченко А. Г.* Распределение собственных значений эллиптических операторов во всем пространстве // Тр. семин. им. И. Г. Петровского. МГУ. 1976. Вып. 2. С. 113—143.

50. *Бойматов К. Х., Костюченко А. Г.* Асимптотическое поведение средних Рисса спектральной функции эллиптического оператора // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241, № 3. С. 517—520.

51. *Бруснецов А. Г., Рофе-Бекетов Ф. С.* Условия самосопряженности сильно эллиптических систем произвольного порядка // Мат. сб. 1974. Т. 195(137), № 1(9). С. 108—129.

52. *Бруснецов А. Г., Рофе-Бекетов Ф. С.* О самосопряженности эллиптических операторов высших порядков // Функциональный анализ и прилож. 1973. Т. 7. С. 78—79.

53. *Булабаев А. Т.* О компактных вложениях дискретных пространств // Математические модели и их приложения. Алма-Ата, 1986. С. 17—18.

54. *Булабаев А. Т.* Разностные теоремы вложения и их приложения // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1987. № 1. С. 9—12.

55. *Вайдман И., Йоргенс К.* Спектральные свойства гамильтоновых операторов. М.: Мир, 1976. 530 с.

56. *Вайнерман Л. И.* О самосопряженности абстрактных дифференциальных операторов гиперболического типа // Мат. заметки. 1976. Т. 20, № 5. С. 703.

57. *Васильев Д. Г.* Двучленная асимптотика спектра краевой задачи // Функц. анализ и его прилож. 1983. Т. 7, № 4. С. 79—81.

58. *Вулис И. Л.* Спектральная асимптотика одного класса вырождающихся эллиптических операторов // Проблемы математической физики. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. Вып. 6. С. 18—30.

59. *Вулис И. Л., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика вырождающихся эллиптических операторов второго порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1974. Т. 38, № 6. С. 1362—1392.

60. *Гасымов М.* О распределении собственных значений самосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Докл. АН СССР. 1969. Т. 186, № 4. С. 753—756.

61. *Гасымов М. Г., Левитан Б. М.* Асимптотическое поведение спектральной функции оператора Шредингера вблизи плоского куска границы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 28, № 3. С. 527—552.

62. *Гехтман М. М.* О самосопряженности абстрактных дифференциальных операторов // Мат. заметки. 1969. Т. 6, № 1. С. 65—72.

63. *Гимадисламов М. Г.* Об условиях самосопряженности дифференциального оператора высшего порядка с операторным коэффициентом // Мат. заметки. 1969. Т. 5, № 6. С. 697—703.

64. *Гимадисламов М. Г.* Об условиях самосопряженности квазиэллиптического оператора // Мат. заметки. 1976. Т. 20, № 5. С. 709—716.

65. *Глазман И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматгиз, 1963. 340 с.

66. *Глазман И. М., Скачек Б. Я.* О дискретной части спектра лапласиана в предельно цилиндрических областях // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147, № 4.

67. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Некоторые вопросы спектральной теории дифференциальных уравнений эллиптического типа в пространствах вектор-функций // Укр. мат. журн. 1974. Т. 28, № 3. С. 313—324.

68. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Некоторые вопросы спектральной теории дифференциальных уравнений эллиптического типа на конечном интервале // Укр.-мат. жури. 1976. Т. 28, № 1. С. 12—26.

69. *Горбачук М. Л.* Самосопряженные граничные задачи для дифференциального уравнения второго порядка с неограниченным операторным коэффициентом // Функц. анализ и его приложения. 1971. Т. 5, № 1. С. 10—21.

70. *Горбачук М. Л., Горбачук В. И.* О некоторых классах граничных задач для уравнения Штурма—Лиувилля с операторным потенциалом // Укр. мат. журн. 1972. Т. 24, № 3. С. 291—305.

71. *Горюнов А. Ф.* К вопросу об асимптотическом распределении собственных значений вырождающихся эллиптических операторов второго порядка //Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 12. С. 2214.

72. *Горюнов А. Ф.* К вопросу об асимптотическом распределении собственных значений вырождающихся эллиптических операторов второго порядка // Диф. уравнения. 1970. Т. 6. № 12. С. 2214—2223.

73. *Горюнов А. Ф.* Оценка роста собственных значений одной задачи с параметром в граничном условии // Диф. уравнения. 1974. Т. 10, № 5. С. 879—889.

74. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 448 с.

75. *Гриншпун Э. З.* О существенной самосопряженности одного класса обыкновенных дифференциальных операторов высокого порядка // Деп. в ВИНИТИ 15.07.83, № 3968—83.

76. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральная теория. М.: Мир, 1966. 896 с.

77. *Иврий В. Я.* Асимптотика собственных значений для некоторых эллиптических операторов, действующих в расслоениях над многообразиями с краем // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258, № 5. С. 1045—1046.

78. *Иврий В. Я.* Об асимптотике собственных значений для одного класса эллиптических операторов, действующих в расслоениях над многообразием над краем // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263, № 3. С. 530—532.

79. *Ильин В. А.* О характере спектра самосопряженных неотрицательных расширений эллиптических операторов и о точных условиях сходимости и рисовской суммируемости рядов Фурье различных классов функций // Мат. заметки. 1970. Т. 7, № 4. С. 515—523.

80. *Ильин В. А.* О разложении по собственным функциям произвольных неотрицательных самосопряженных расширений некоторых эллиптических операторов // Междунар. конгресс математиков в Ницце. М.: Наука, 1970. С. 102—210.

81. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.

82. *Исмагилов Р. С.* Об условиях самосопряженности дифференциальных операторов высшего порядка // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142. С. 1238—1242.

83. *Исмагилов Р. С.* О самосопряженности оператора Штурма—Лиувилля // УМН. 1963. Т. 18, № 5. С. 161—166.

84. *Исмагилов Р. С.* Об асимптотике спектра дифференциального оператора в пространстве вектор-функций // Мат. заметки. 1971. Т. 9, № 6. С. 667—675.

85. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.

86. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1976. 740 с.

87. *Кац И. С.* Спектральная плотность струны // Докл. АН СССР. 1973. Т. 211. С. 520—523.

88. *Кац И. С.* Интегральные характеристики роста спектральной функции для обобщенных граничных задач второго порядка с граничными условиями на регулярном конце // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1971. Т. 35. С. 154—184.

89. *Кац И. С.* Некоторые общие теоремы о плотности спектра струны // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238. С. 785—788.

90. *Кац И. С., Крейн М. Г.* Критерий дискретности спектра сингулярной струны // Изв. вузов. Математика. 1958. № 2 (3). С. 136—153.

91. *Коренблюм Б. И.* Общая тауберова теорема для отношения функций // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. С. 745—748.

92. *Костюченко А. Г.* Асимптотическое распределение собственных значений эллиптических операторов // Докл. АН СССР. 1964. Т. 158, № 1. С. 41—44.

93. *Костюченко А. Г.* Распределение собственных значений для сингулярных дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. 1966. Т. 168, № 1. С. 21—24.

94. Костюченко А. Г. Асимптотика спектральной функции сингулярного дифференциального оператора порядка 2 // Докл. АН СССР. 1966. Т. 168, № 2. С. 276—279.

95. *Костюченко А. Г.* О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. М.: МГУ. 1966.

96. *Костюченко А. Г.* О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 3. С. 365—378.

97 *Костюченко А. Г.* Асимптотическое поведение спектральной функции самосопряженных эллиптических операторов // Четвертая мат. школа. Киев, 1968. С. 42—117.

98. *Костюченко А. Г., Левитан Б. М.* Об асимптотическом поведении собственных значений операторной задачи Штурма — Лиувилля // Функц. анализ и его приложения. 1967. Т. 1, № 1. С. 86—96.

99. *Костюченко А. Г., Саргсян И. С.* Распределение собственных значений. М.: Наука, 1979. 400 с.

100. *Кочубей А. Н.* О самосопряженности дифференциального оператора с сингулярным неограниченным операторным коэффициентом // Укр. мат. журн. 1976. Т. 28, № 4. С. 453—462.

101. *Крейн М. Г.* Об одном обобщении исследований Стилтьеса // Докл. АН СССР. 1952. Т. 87, № 6. С. 881—884.

102. *Кусаинова Л. К.* Оценки поперечников единичного шара функционального пространства $L_p^{ol}(\Omega, V)$ в $L_q(\Omega)$ // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251, № 4. С. 791—794.

103. *Кусаинова Л. К.* Оценки поперечников по Колмогорову вложений соболевских пространств: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Баку, 1981.

104. *Кусаинова Л. К., Мынбаев К. Т.* К теоремам вложения и компактности для анизотропных весовых пространств Соболева // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263, № 5. С. 1050—1053.

105. *Лазуткин В. Ф.* Формула для собственных частот неконфокального резонатора цилиндрическими зеркалами, учитывающая аберрацию зеркал // Оптика и спектроскопия. 1968. Т. 24, № 3. С. 453—545.

106. *Лазуткин В. Ф.* Коротковолновая асимптотика собственных частот мембраны. Серия собственных частот, построенная по гладкой замкнутой инвариантной кривой биллиардной задачи // Тр. V Всесоюз. симп. по дифракции и распр. волн. Л.: Наука, 1971. С. 134—143.

107. *Лазуткин В. Ф.* Асимптотика собственных чисел оператора Лапласа на плоскости и квазимоды. Серия квазимод, отвечающая системе каустик, близких к границе области // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1973. Т. 37, № 2. С. 437—465.

108. *Лазуткин В. Ф.* Коротковолновая асимптотика собственных частот колеблющейся мембраны, построенная по семейству инвариантных кривых // VI Всесоюз. симп. по дифракции и распространению волн: Краткие тезисы докладов. книга 1. Ереван, 1973. С. 40—45.

109. *Лазуткин В. Ф., Сванидзе Н. В.* О том, как для двузеркального резонатора свойство общей эллиптичности системы лучей связано со спектром // Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. 1972. Т. 25. С. 111—115.

110. *Левандорский С. З.* Асимптотическое распределение собственных значений // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1982. Т. 46, № 4. С. 810—852.

111. *Левандорский С. З.* Об одном общем методе исследования асимптотики спектра и его применения к теории оболочек // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 2. С. 276—286.

112. *Левандорский С. З.* Метод приближенного спектрального проектора как общий метод обоснования классической формулы асимптотики спектра // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 2. С. 287—291.

113. *Левандорский С. З.* Метод приближенного спектрального проектора // Изв. АН СССР. 1985. Т. 49, № 6. С. 1177—1228.

114. *Левитан Б. М.* Об одной теореме Титчмарша и Сиерса // УМН. 1961. Т. 16, № 4 (100). С. 175—178.

115. *Левитан Б. М., Отелбаев М.* Об условиях самосопряженности операторов Шредингера и Дирака // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235. С. 768—771.

116. *Левитан Б. М., Отелбаев М.* Об условиях самосопряженности операторов Шредингера и Дирака // Тр. ММО. 1981. Т. 42. С. 142—159.

117. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970. 672 с.

118. *Лидский В. Б.* Несамосопряженный оператор типа Штурма — Лиувилля с дискретным спектром // Тр. Моск. общ-ва. 1960. Т. 9. С. 45—80.

119. *Лизоркин П. И., Отелбаев М.* Теоремы вложения и компактности для пространств соболевского типа с весами. 1 // Мат. сб. 1979. Т. 108(150). С. 358—377.

120. *Лизоркин П. И., Отелбаев М.* Оценки аппроксимативных чисел вложений пространств соболевского типа с весами // Тр. МИАН СССР. 1984. Т. 170. С. 213—232.

121. *Мазья В. Г.* O(*p*, *l*)-емкости, теоремах вложения и спектре самосопряженного эллиптического оператора // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1973. Т. 37. С. 376—385.

122. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.

123. *Мазья В. Г., Отелбаев М.* О теоремах вложения и спектре одного псевдодифференциального оператора // Сибирск. мат. журн. 1977. Т. 18, № 5. С. 1073—1087.

124. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 535 с.

125. *Мизохата С.* Теория уравнения с частными производными. М.: Мир, 1977. 504 с.

126. *Михайлец В. А.* Асимптотика собственных чисел уравнения Штурма — Лиувилля с переменным операторным коэффициентом // Функц. анализ и его приложения. 1977. Т. 11. С. 71—72.

127. *Михайлец В. А.* Распределение собственных значений операторного уравнения Штурма — Лиувилля // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1977. Т. 41, № 3. С. 607—619.

128. *Моисеев Е. И.* Некоторые теоремы единственности для уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238, № 3. С. 531.

129. *Молчанов А. М.* Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка // Тр. Моск. мат. об-ва. 1953. Т. 2. С. 169—200.

130. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965.

131. *Муслимов Б., Отелбаев М.* Оценки наименьшего собственного значения одного класса матриц, соответствующего разностному уравнению Штурма — Лиувилля // Журн. выч. мат. и мат. физики. 1981. Т. 21, № 6. С. 1430—1434.

132. *Мынбаев К. Т.* К теоремам вложения и компактности для анизотропных пространств Соболева с весом // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1981. № 3. С. 77—79.

133. *Мынбаев К. Т.* Теоремы вложения и компактности и их применение к изучению спектра одной неклассической задачи // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: СО АН СССР, 1981.

134. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

135. *Нахушев А. М.* О задаче Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений // Диф. уравнения. 1971. Т. 7, № 1. С. 49—56.

136. *Новицкая А. М.* Теоремы вложения и аппроксимативные характеристики весовых пространств: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Алма-Ата, 1984.

137. *Орочко Ю. Б.* О недостаточных условиях самосопряженности оператора Штурма — Лиувилля // Мат. заметки. 1974. Т. 15, № 2. С. 271—280.

138. *Орочко Ю. Б.* Конечная скорость распространения и существенная самосопряженность некоторых дифференциальных операторов // Функциональный анализ и прилож. 1979. Т. 13. С. 95—96.

139. *Орочко Ю. Б.* Достаточное условие самосопряженности многочленов от оператора Шредингера // Мат. сб. 1976. Т. 99 (141), № 2. С. 192—210.

140. *Орочко Ю. Б.* Локальная конечная скорость распространения гиперболического уравнения в задачах о самосопряженности степеней эллиптического дифференциального оператора второго порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47, № 2. С. 298—314.

141. *Орочко Ю. Б.* К теории самосопряженных операторов, порожденных сильно сингулярными выражениями второго порядка дивергентного вида // Функц. анализ и его приложения. 1982. Т. 16, № 3. С. 80—81.

142. *Оспанов К. Н.* Условия самосопряженности дифференциального оператора 6-го порядка // Тр. Казахст. межвуз. конф. по матем. и механике. Караганда, 1981. С. 38.

143. *Отелбаев М.* К методу Титчмарша оценки резольвенты // Докл. АН СССР. 1973. Т. 211, № 4. С. 787—790.

144. *Отелбаев М.* К асимптотическим формулам распределения собственных чисел оператора Штурма — Лиувилля // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259, № 4. С. 116—130.

145. *Отелбаев М.* Асимптотика собственных чисел оператора Штурма — Лиувилля. I ч. // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1979. № 5.

146. *Отелбаев М.* Теоремы вложения пространства с весом и их применения к изучению спектра оператора Шредингера // Тр. матем. ин-та им. Стеклова. М., 1979. Т. 150. С. 265—305.

147. *Отелбаев М.* Об условиях самосопряженности оператора Шредингера с операторным потенциалом // Укр. мат. журн. 1976. Т. 28, № 6. 763 с.

148. *Отелбаев М.* Критерий ядерности оператора Штурма — Лиувилля с сингулярными концами // Тр. Всесоюз. симп. по теоремам вложения. Алма-Ата. 1973.

149. *Отелбаев М.* Критерий ядерности резольвенты оператора Штурма — Лиувилля // Мат. заметки. 1979. Т. 25, № 4. С. 569—572.

150. *Отелбаев М.* Двусторонние оценки распределения собственных чисел оператора Штурма — Лиувилля // Мат. заметки. 1976. Т. 20, вып. 6. 859 с.

151. *Отелбаев М.* Оценки *s*-чисел и условия полноты системы корневых векторов несамосопряженного оператора Штурма — Лиувилля // Мат. заметки 1979. Т. 25, № 3. С. 409—418.

152. *Отелбаев М.* Двусторонние оценки поперечников и их применения // Докл. АН СССР. 1977. Т. 2344, № 6. 1265 с.

153. *Отелбаев М.* О весовых теоремах вложения // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234, № 6. С. 1265—1268.

154. *Отелбаев М.* Оценки поперечников по Колмогорову для одного класса весовых пространств // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236, № 6. С. 1270—1273.

155. *Отелбаев М.* Критерий дискретности спектра одного вырожденного оператора и некоторые теоремы вложения // Диф. уравнения. 1977. Т. 13, № 1. С. 111—120.

156. *Отелбаев М.* Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1973.

157. *Отелбаев М.* Оценки спектра эллиптических операторов и теоремы вложения, связанные с ними: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Алма-Ата, 1978. 368 с.

158. *Отелбаев М., Ценд Л.* К теоремам о компактности // Сиб. мат. жур. 1972. Т. 13, № 4. С. 817—822.

159. *Пельмутер М. А., Семенов Ю. А.* Самосопряженность эллиптических операторов с конечным и бесконечным числом переменных // Функц. анализ и прилож. 1980. Т. 14, № 1. С. 81—82.

160. *Пономарев С. М.* К теории краевых задач смешанного типа в трехмерных областях // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246, № 6. 1303 с.

161. *Пономарев С. М.* О задачах на собственные значения для уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251, № 5. 1070 с.

162. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978. Т. 2. 430 с.

163. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: ИЛ, 1954. 500 с.

164. *Розенблюм Г. В.* О распределении собственных чисел первой краевой задачи в неограниченных областях // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200, № 5. С. 1034—1036.

165. *Розенблюм Г. В.* Распределение дискретного спектра сингулярных дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202, № 5. С. 1012—1015.

166. *Розенблюм Г. В.* О собственных числах первой краевой задачи в неограниченных областях // Мат. сб. 1972. Т. 89, № 2. С. 234—247.

167. *Розенблюм Г. В.* О вычислении спектральной асимптотики для оператора Лапласа в областях бесконечной меры // Проблемы мат. анализа. Л.: ЛГУ, 1973. Вып. 4. С. 95—106.

168. *Розенблюм Г. В.* Асимптотика собственных чисел оператора Шредингера // Мат. сб. 1974. Т. 93, № 3. С. 346—367.

169. *Розенблюм Г. В.* Почти-подобие псевдодифференциальных систем на окружности // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223, № 3. С. 569—571.

170. *Розенблюм Г. В.* Об оценках спектра оператора Шредингера // Проблемы мат. анализа. Л.: ЛГУ, 1975. № 5. С. 152—166.

171. *Розенблюм Г. В.* Асимптотнка отрицательного дискретного спектра Шредингера // Мат. заметки. 1977. Т. 21, № 3. С. 399—407.

172. *Розенблюм Г. В.* Спектральная асимптотика эллиптических систем // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1980. Т. 96. С. 255—271.

173. *Рофе-Бекетов Ф. С.* О неполуограниченных дифференциальных операторах // Теория функций, функц. анализ и их приложения. Харьков, 1966. № 2. С. 178—184.

174. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Условие самосопряженности оператора Шредингера // Мат. заметки. 1970. Т. 8, № 6. С. 741—751.

175. *Рофе-Бекетов Ф. С.* О позитивных дифференциальных операторах // Препринт. ФТИНТ АН ЧССР. Харьков, 1983.

176. *Рофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М.* Условия самосопряженности операторов эллиптического типа 2-го порядка общего вида // ТФФА. 1973. № 17.

177. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 352 с.

178. *Саргсян И. С.* Об одной асимптотической формуле распределения собственных значений оператора Шредингера в двумерном пространстве // Докл. АН АрмССР. 1958. Т. 27, № 3. С. 129—137.

179. *Саргсян И. С.* Некоторые вопросы спектральной теории одномерного оператора Дирака: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. М., 1969.

180. *Саргсян И. С.* Двухсторонняя асимптотика числа собственных значений неполуограниченного оператора Дирака // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1972. Т. 36, № 6. С. 1402—1436.

181. *Сванидзе Н. Б.* Поправочный член для собственных частот трехмерного резонатора с неразвернутыми зеркалами // Зап. науч. семинаров Ленинград. отд. Матем. ин-та АН СССР. 1969. Т. 15. С. 161—176.

182. *Скачек Б. Я.* Об асимптотическом распределении собственных значений сингулярных дифференциальных операторов // Теория функций, функц. анализ и их прилож. М., 1966. Вып. 3. С. 110—116.

183. *Скачек Б. Я.* Распределение собственных значений многомерных дифференциальных операторов // Функ. анализ и его прилож. 1975. Т. 9, № 1. С. 83—84.

184. *Смаилов Е.* Разностные теоремы вложений для пространства Соболева с весом и их приложения // Докл. АН СССР. 1985. Т. 270, № 1. С. 52—55.

185. *Соломец И. А.* Об асимптотике собственных значений билинейных форм, связанных с некоторыми вырождающимися на границе эллиптическими уравнениями // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144, № 4. С. 727—729.

186. *Соломец И. А.* К асимптотике собственных значений билинейных форм, связанных с вырождающимися эллиптическими уравнениями // Вести. Ленингр. ун-та. 1964. № 1. С. 163—166.

187. *Степанов В. Д.* Двухвесовые оценки интегралов Римана-Лиувилля. I. Владивосток, 1988. 32 с.

188. *Султанаев Я. Т.* Об асимптотике спектра дифференциального оператора в пространстве вектор-функций // Диф. уравнения. 1974. Т. 10, № 9. С. 1673—1688.

189. *Султанаев Я. Т.* Асимптотика дискретного спектра одномерных сингулярных дифференциальных операторов // Там же. № 11. С. 2010—2020.

190. *Султанаев Я. Т.* Асимптотика спектра сингулярных дифференциальных операторов в неопределенном случае // Вести. Моск. ун-та. Мат. и мех. 1975. № 3. С. 21—30.

191. *Султанаев Я. Т.* Асимптотика дискретного спектра одномерных сингулярных операторов в неопределенном случае // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1975. № 3. С. 86—88.

192. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. М.: ИЛ, 1961. Т. 1, 2. 278 с.

193. *Туловский В. Н.* Распределение собственных чисел для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Функц. анализ и его прилож. 1971. Т. 5, № 2. С. 85—100.

194. *Туловский В. Н* Асимптотическое распределение собственных значений дифференциальных операторов с переменными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206, № 4. С. 827—830.

195. *Туловский В. Н.* Асимптотическое распределение собственных значений дифференциальных уравнений // Мат. сб. 1972. Т. 89, № 2. С. 191—206.

196. *Туловский В. Н., Шубин М. А.* Об асимптотическом распределении собственных значений псевдодифференциальных операторов в R^n // Мат. сб. 1973. Т. 92, № 4. С. 571—588.

197. *Федорюк М. В.* Асимптотика дискретного спектра оператора $\omega^{II}(x)-\lambda^2p(x)\omega(x)$ // Мат. сб. 1965. Т. 68, № 1. С. 81—110.

198. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы в теории одномерных сингулярных дифференциальных операторов // Тр. Моск. о-ва. 1966. Т. 15. С. 296—345.

199. *Федорюк М. В.* Асимптотика собственных значений и собственных функций одномерных сингулярных дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. 1966. Т. 169, № 2. С. 288—291.

200. *Фейгин В. И.* Асимптотическое распределение собственных чисел для гипоэллиптических систем в R^n // Мат. сб. 1976. Т. 99, № 4. С. 594—614.

201. *Фейгин В. И.* О спектральной асимптотике для краевых задач и асимптотике отрицательного спектра // Докл. АН СССР. 1978. Т. 232, № 6. С. 1269—1272.

202. *Фейгин В. И.* Асимптотическое распределение собственных значений для эллиптических операторов в неограниченных областях // Диф. уравн. с част. произв.: Тр. семинара им. Соболева. Новосибирск, 1980. № 2. С. 116—151.

203. *Шевченко В. Н.* // Граничные задачи для дифференц. уравнений. Киев, 1980. С. 219—229.

204. *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978. 280 с.

205. *Шубин М. А.* О существовании самосопряженных равномерно эллиптических операторов // Вести. Моск. ун-та. Мат. и мех. 1975. № 2. С. 91—94.

206. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969. 1071 с.

207. *Эвазов Э. Г.* Самосопряженность оператора Шредингера с сингулярным потенциалом // Уч. зап. Азерб. ун-та. Сер. физ.-мат. 1979. № 2. С. 109—116.

А. М. МИНКИН, Л. А. ШУСТЕР

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА И СХОДИМОСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ШРЕДИНГЕРА

Теории распределения собственных значений и асимптотики спектра дифференциальных операторов широко применяются при изучении условий и характера сходимости соответствующих спектральных разложений. На примере операторов типа Шредингера рассмотрим весь цикл такого исследования — от изучения распределения спектра дифференциальных операторов до выяснения условий равносходимости спектральных разложений с рядами Фурье.

Перейдем к точным формулировкам. Введем необходимые обозначения и определения: R^m — евклидово пространство размерности m; $D=\{-1\leqslant x_i\leqslant 1,\ i=\overline{1, m}\}$, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m$;

$$D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_2^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}},\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_m^2};$$

$<s,\ x>$ — скалярное произведение векторов $s,\ x\in R^m$; $|s|^2=$ $=<s, s>$; Z^m — целочисленная решетка в R^m; $u(x)=\sum\limits_{|s|\leqslant M}\times$ $\times c_s\exp(i\pi<s, x>)$, $x\in D$; $M\in[0,\infty)$, $s\in\{s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_m\}\in Z^m$ — m-кратный тригонометрический полином; T — множество таких полиномов; $\varphi(k)$, $k\in N=\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ — число целых вещественных решений уравнения

$$|s|^2=s_1^2+s_2^2+\ldots+s_m^2=k; \tag{0.1}$$

$L,\ l$ — соответственно расширения по Фридрихсу [1] операторов L', l', заданных на T дифференциальными выражениями

$$(L'u)(x)=(-\Delta)^n u(x)+q(x)u(x),$$

$$(l'u)(x)=(-\Delta)^n u(x)+u(x),$$

где $q(x) \in L_p(D)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$; H_A — энергетическое пространство [2] положительно определенного оператора A с областью определения $D(A) \subset H$, H — гильбертово пространство; $\sigma(A)$ — спектр оператора A; сумма $\sum\limits_{|f(\lambda)-b|<a} 1$ означает число точек $\lambda \in \sigma(A)$ с учетом их кратностей, для которых выполняется включение $f(\lambda) \in \in [b-a, b+a]$; $W^1_{p,\pi}(D)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ — пространство периодических функций С. Л. Соболева [3]. Положим для $f(\cdot) \in L_p(D)$.

$$\hat{f}(s) = \int\limits_D f(x) \exp(-i\pi \langle s, x \rangle)\, dx, \tag{0.2}$$

где $dx = 2^{-m}\, dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$, dx_j, $1 \leqslant j \leqslant m$ — мера Лебега на R; A — пространство абсолютно сходящихся кратных тригонометрических рядов на D с нормой [4]:

$$\|f(\cdot)\|_A = \sum_{s \in Z^m} |\hat{f}(s)| \tag{0.3}$$

через $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ ниже обозначаются абсолютные положительные постоянные различные, возможно, в пределах одной выкладки.

В § 1—4 получены следующие результаты.

Теорема 0.1. Пусть $q(\cdot) \in L_{p_0}(D)$, $p_0 = \max\left\{1, \frac{m}{2n}\right\}$. Тогда расширение по Фридрихсу L оператора L' является полуограниченным снизу оператором в $L_2(D)$ и энергетическое пространство H_L совпадает с $W^n_{2,\pi}(D)$.

Изучение свойств спектра оператора L (теорема 0.2) мы проводим вариационным методом. При этом используется теорема 0.1.

Теорема 0.2. Пусть выполнено следующее условие:

$$q(x) = \begin{cases} L_1(D), & \text{если } 2n > m+3, \\ L_p(D),\ p > \max\left\{1, \dfrac{m+1}{2n-2}\right\}, & \text{если } 2n \leqslant m+3. \end{cases}$$

Тогда для любого $a \in \left(0, \frac{1}{2}\pi^2\right)$ существует такое число $k(a)$, что при любом целом $k \geqslant k(a)$ для $\lambda \in \sigma(L)$ имеет место равенство

$$\sum_{|\lambda^{1/n} - k\pi^2| \leqslant a} 1 = \varphi(k). \tag{0.4}$$

Далее обозначим $H(k)$ — подпространство в $L_2(D)$, порожденное собственными функциями (с. ф.) оператора L, которые соответствуют собственным числам (с. ч.), удовлетворяющим неравенству $|\lambda^{1/n} - k\pi^2| \leqslant a$.

Теорема 0.3. Пусть $n>m+1$, $q(\cdot)\in L_1(D)$, $a\in\left(0, \frac{1}{2}\pi^2\right)$. Тогда найдется число $k(a)$ такое, что при любом целом $k\geqslant k(a)$ в $H(k)$ существует базис, представляемый набором функций $\{h_j(\cdot)\}_{j=1}^{\varphi(k)}$, причем

$$h_j(x)=e^{i\pi<s,\ x>}+O\left(\frac{1}{k^{n-m-1}}\right), \tag{0.5}$$

где вектор $s=\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ пробегает все целочисленные решения уравнения (0.1), символ $O(\cdot)$ понимается в смысле A-нормы и постоянные в этом символе абсолютные.

Теоремы 0.1—0.3 вместе с (3.16) дают необходимую информацию, которая достаточна для исследования сходимости спектральных разложений, связанных с оператором L. Пусть фиксировано $a\in\left(0, \frac{1}{2}\pi^2\right)$ и при $k_0=k_0(a)\leqslant k\in N$ имеет место равенство (0.4); кроме того, считаем постоянную $c_0=c_0(a)$ столь большой, что при $\lambda_j\geqslant c$, $\lambda_j\in\sigma(L)$ соответствующие с. ф. $u_j(\cdot)$ объединяются в пачки собственных подпространств $H(k)$, $k\geqslant k_0$, определенные в теореме 0.3. Положим для $f(\cdot)\in L_2(D)$ и $\psi_s(x)=\exp(i\pi<s, x>)$, $s\in\in Z^m$

$$\sigma_r(f)=\sum_{|s|<r}<f, \psi_s>\psi_s(x), \tag{0.6}$$

$$S_r(f)=S_{k_0}(f)+\tau_r(f), \tag{0.7}$$

где

$$\tau_r(f)=\sum_{k_0<k<r^2}\ \sum_{u_j\in H(k)}(f,\ u_j)u_j(x), \tag{0.8}$$

$$S_{k_0}(f)=\sum_{\lambda_j<c_0}<f,\ u_j>u_j(x). \tag{0.9}$$

Подчеркнем, что в сумму (0.9) входят те начальные с. ф., которые не попали в подпространство $H(k)$ при $k\geqslant k_0$, $S_r(f)$ — частичная сумма ряда со скобками по с. ф. оператора L.

Теорема 0.4. Пусть $2n>m+3$, $q(\cdot)\in L_1(D)$. Тогда для любой $f(\cdot)\in L_2(D)$ имеет место соотношение

$$\lim_{r\to\infty} r^{2n-2m-\frac{3}{2}}\|S_r(f)-\sigma_r(f)\|_A=0. \tag{0.10}$$

Теоремы 0.1—0.3 доказаны Л. А. Шустером, теорема 0.4 — А. М. Минкиным [12].

Обычно для операторов в частных производных изучается поведение функции распределения собственных значений. В теореме 0.2 установлено, что для оператора типа Шредингера их можно асимптотически разбить на группы близких чисел. При этом каждая такая группа содержит в точности столько с. ч., какова кратность соответствующего с. ч. невозмущенного оператора $(-\Delta)^n$.

В теореме 0.3 построен конечномерный базис в порожденном такой группой с. ч. объединении собственных подпространств. Этот факт можно рассматривать как некоторый аналог теоремы Биркгофа об асимптотике базиса в пространстве решений однородного дифференциального уравнения со спектральным параметром.

Из теоремы 0.4 вытекает при $2n \geqslant 2m + \frac{3}{2}$ равносходимость со скоростью спектрального разложения, соответствующего оператору L, с тригонометрическим рядом Фурье для класса $L_2(D)$. При этом она установлена в метрике, более сильной чем C-метрика, при минимальных требованиях к $q(x)$. Отметим, что известные результаты [6, с. 72—73] позволяют получить равносходимость только для средних Рисса достаточно высокого порядка при условии гладкости потенциала. Ранее равносходимость в A-метрике была получена в [7], где рассматривался случай обыкновенных дифференциальных операторов. Теоремы 0.1, 0.2 доказаны по схеме М. О. Отелбаева, который при $m=1$ для периодической краевой задачи нашел оценки с. ф. и функции $N(\lambda)$.

§ 1. Описание энергетических пространств некоторых операторов

Докажем теорему 0.1. Для этого потребуется

Теорема 1.1. [3]. Пусть $l_1 > l_2$, $1 < p \leqslant q < \infty$, $l_1 - l_2 > m(p^{-1} - q^{-1})$. Тогда $W^{l_1}_{p,\pi}(D) \subset\!\!\to W^{l_2}_{q,\pi}(D)$.

Лемма 1.1. Пусть $q(\cdot) \in L_{p_0}(D)$. Если $u(\cdot) \in T$, то имеет место неравенство

$$< L'u, u > \geqslant \left| \int\limits_D q(x) \, |u(x)|^2 dx \right| - \delta_1 \|u(\cdot)\|^2_{L_2(D)}. \qquad (1.1)$$

Доказательство. Пульзуясь «неравенством с параметром» [3] для $u(\cdot) \in T$ получим оценки

$$\|u(\cdot)\|^2_{C(D)} \leqslant \varepsilon \sum_{|\alpha|=n} \|D^\alpha u\|^2_{L_2(D)} + \delta(\varepsilon) \|u(\cdot)\|^2_{L_2(D)} \qquad (1.2)$$

при $2n > m$,

$$\|u(\cdot)\|^2_{L_{2p'}(D)} \leqslant \varepsilon \sum_{|\alpha|=n} \|D^\alpha u(\cdot)\|^2_{L_2(D)} + \delta(\varepsilon) \|u(\cdot)\|^2_{L_2(D)} \qquad (1.2')$$

при $2n \leqslant m$, $p \geqslant \frac{m}{2n}$, $p^{-1} + p'^{-1} = 1$.

В неравенствах (1.2) и (1.2′) $\delta(\varepsilon)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$. Выбирая $\varepsilon>0$ достаточно малым, найдем, что при $2n>m$

$$\left|\int_D q(x)\,|u(x)|^2dx\right|\leqslant\|q(\cdot)\|_{L_1(D)}\Big(\varepsilon\sum_{|\alpha|=n}\|D^\alpha u\|^2_{L_2(D)}+\delta(\varepsilon)\,|u(\cdot)\|^2_{L_2(D)}\Big)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=n}\|D^\alpha u(\cdot)\|^2_{L_2(D)}+\delta'(\varepsilon)\,\|u(\cdot)\|^2_{L_2(D)}. \qquad (1.3)$$

Аналогично при $2n\leqslant m$, пользуясь неравенством Гельдера, получим

$$\left|\int_D q(x)\,|u(x)|^2dx\right|\leqslant\left(\int_D|q(x)|^{p_0}dx\right)^{1/p_0}\left(\int_D|u(x)|^{2p'}dx\right)^{1/p'}\leqslant$$

$$\leqslant\|q(x)\|^2_{L_{p_0}}\Big(\varepsilon\sum_{|\alpha|=n}\|D^\alpha u\|^2_{L_2(D)}+\delta(\varepsilon)\,\|u\|^2_{L_2(D)}\Big)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=n}\|D^\alpha u\|^2_{L_2(D)}+\delta(\varepsilon)''\|u(\cdot)\|^2_{L_2(D)}, \qquad (1.3')$$

из полученных неравенств следуют соотношения

$$<L'u,u>-\left|\int_D q(x)\,|u(x)|^2dx\right|=$$

$$=\sum_{|\alpha|=n}\frac{n!}{\alpha_1!\ldots\alpha_m!}\int_D|D^\alpha u|^2dx+\int_D q(x)\,|u(x)|^2dx-$$

$$-\left|\int_D q(x)\,|u(x)|^2dx\right|\geqslant\sum_{|\alpha|=n}\|D^\alpha u\|^2_{L_2(D)}-2\left|\int_D q(x)\,|u(x)|^2dx\right|\geqslant$$

$$\geqslant-2\delta_2(\varepsilon)\,\|u(x)\|^2_{L_2(D)}.$$

Неравенство (1.1) доказано.

Поэтому далее, не теряя общности, считаем, что при выполнении леммы 1.1 имеет место неравенство

$$<L'u,u>\geqslant\left|\int_D q(x)\,|u(x)|^2dx\right|+\int_D|u(x)|^2dx,\ u(\cdot)\in T. \qquad (1.4)$$

Следствие 1.1. Операторы L', l' являются положительно определенными.

Далее нам потребуется следующая

Теорема 1.2. [2]. Пусть A — положительно определенный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Для того чтобы элемент $u(\cdot)\in H$ принадлежал энергетическому пространству H_A оператора A, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{u_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}\in D(A)$ такая, что

$$<A(u_\nu-u_{\nu'}),\ (u_\nu-u_{\nu'})>\to 0,\ \|u-u_\nu\|_H\to 0 \text{ при } \nu,\nu'\to\infty. \quad (1.5)$$

Покажем, что $H_L\subseteq W^n_{2,\varkappa}(D)$. Пусть последовательность $\{u_\nu(\cdot)\}_{\nu=1}^{\infty}\in T$ и удовлетворяет условию (1.5) для $A=L$. В силу неравенства (1.4) последовательность $\{u_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ фундаментальна в метрике $W^n_{2,\varkappa}(D)$, но в силу (1.4) она же сходится к $u(\cdot)$ в метрике $L_2(D)$; нетрудно проверить, что когда $u(\cdot)\in W^n_{2,\varkappa}(D)$ и, следовательно, $H_L\subseteq W^n_{2,\varkappa}(D)$.

Обратно, пусть $f(\cdot)\in W^n_{2,\varkappa}(D)$. Тогда существует последовательность $\{u_\nu(\cdot)\}_{\nu=1}^{\infty}\in T$ такая, что $\|f-u_\nu\|_{W^n_{2,\varkappa}(D)}\to 0$ при $\nu\to\infty$. Но тогда $f(\cdot)\in H_L$ по теореме 1.2 согласно неравенствам (1.3)—(1.3′). Следовательно, $H_L=W^n_{2,\varkappa}(D)$. Поскольку энергетические пространства положительно определенного оператора и его расширения по Фридрихсу совпадают [2], то теорема 0.1 доказана.

§ 2. Операторные неравенства и распределение спектра

Докажем теорему 0.2. Следующее равенство очевидно:

$$\sigma(l)=\{(k\pi^2)^n+1,\ k\in N,\ k\neq 0\}. \quad (2.1)$$

С. ф. оператора l, соответствующие с. ч. $\lambda=(k\pi^2)^n+1$, имеют вид

$$\psi_s(x)=\exp(i\pi<s,x>),\ s\in R(k),\ x\in D, \quad (2.2)$$

где $R(k)$ — множество решений в целых вещественных числах уравнения (0.1)

$$|s|^2=k,\ k\in N,\ s=\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}. \quad (2.3)$$

Отметим, что число $\varphi(k)$ решений в целых вещественных числах уравнения (2.3) допускает оценку [8]

$$\varphi(k)\leqslant\tau_1 k^{\frac{m-1}{2}}. \quad (2.4)$$

В соответствии с функциональным исчислением [1] для $\theta\in[-1, 1]$ определим l^θ соотношениями (2.5)

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s\in R(k)} c_s \exp(i\pi\langle s, x\rangle),\ u(\cdot)\in D(l);$$

$$(l^{\theta}u)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s\in R(k)} c_s\,(((k\pi^2)^n+1)^{\theta}\exp(i\pi\langle s, x\rangle). \tag{2.5}$$

Лемма 2.1. Имеют место неравенства:

$$\|l^{-\theta}\|_{L_2(D)\to C(D)}\leqslant\tau_2<\infty \quad \text{при } 1>\theta>\frac{m+1}{4n}, \tag{2.6}$$

$$\|l^{-\theta}\|_{L_2(D)\to L_{2p'}(D)}\leqslant\tau_3<\infty \quad \text{при } 1>\theta>\frac{m+1}{4np}, \tag{2.7}$$

$$p>\max\left\{1, \frac{m+1}{4n}\right\},\ p^{-1}+p'^{-1}=1.$$

Доказательство. Пусть $u(\cdot)\in T$:

$$u(x)=\sum_{k=0}^{M}\sum_{s\in R(k)} c_s\exp(i\pi\langle s, x\rangle),\ M<\infty,\ x\in D$$

и $4n>m+1$. Следующие соотношения основаны на неравенстве Коши — Буняковского и оценке (2.4):

$$\|l^{-\theta}u(x)\|_{C(D)}=\sup_{x\in D}\left|\sum_{k=0}^{M}\sum_{s\in R(k)}\frac{c_s\exp(i\pi\langle s, x\rangle)}{(|s\pi|^{2n}+1)^{\theta}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\|u(\cdot)\|_{L_2(D)}\left[\sum_{k=0}^{M}\sum_{s\in R(k)}\frac{1}{(|s\pi|^{2n}+1)^{2\theta}}\right]^{1/2}\leqslant \tag{2.8}$$

$$\leqslant\tau_4\|u(\cdot)\|_{L_2(D)}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^{\frac{m-1}{2}}}{((k\pi^2)^n+1)^{2\theta}}\right)^{1/2}.$$

Теперь нам потребуется общеизвестное

Предложение 1. Пусть α, β, γ, $\theta\in R$, причем $\alpha\geqslant0$, $\gamma\geqslant0$, $\beta\theta>\alpha+1$. Тогда при всех $\lambda\geqslant1$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^{\alpha}}{(k+\lambda^{\gamma})^{\theta}}\leqslant\frac{\tau_5(\alpha,\beta,\gamma,\theta)}{\lambda^{\gamma\left(\theta-\frac{\alpha+1}{\beta}\right)}}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Следующая цепочка соотношений доказывает неравенство (2.9):

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^{\alpha}}{(k^{\beta}+\lambda^{\gamma})^{\theta}}\leqslant\frac{1}{\lambda^{\gamma\theta}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k^{\beta}+\lambda^{\gamma})^{\theta-\frac{\alpha}{\beta}}}\leqslant\frac{1}{\lambda^{\gamma\theta}}+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x^{\beta}+\lambda^{\gamma})^{\theta-\frac{\alpha}{\beta}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda^{\gamma\theta}}+\frac{2}{\pi}\left(\int_{0}^{\infty}\frac{dz}{(z^{\beta}+1)^{\theta-\frac{\alpha}{\beta}}}\right)\cdot\frac{1}{\lambda^{\gamma\left(\theta-\frac{\alpha+1}{\beta}\right)}}\leqslant\frac{\tau_5(\alpha,\beta,\gamma,\theta)}{\lambda^{\gamma\left(\theta-\frac{\alpha+1}{\beta}\right)}}.$$

Неравенство (2.6) очевидным образом следует из неравенств (2.8) и (2.9).

Докажем неравенство (2.7). Нам потребуются следующие факты. Пусть $f(\cdot)\in L_h(D)$, $1<h\leqslant 2$. Тогда имеет место обобщение неравенства Хаусдорфа — Юнга, данное Ф. Риссом [9]:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s\in R(k)}|\hat{f}(s)|^{h'}\right)^{1/h'}\leqslant\tau_6\|f\|_{L_h(D)},\ \frac{1}{h}+\frac{1}{h'}=1. \qquad (2.10)$$

Далее. Если $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}\in l_2$, то при $p\geqslant 2$ имеет место неравенство (2.11):

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}|b_k|^{p}\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{k=0}^{\infty}|b_k|^{2}\right)^{1/2}. \qquad (2.11)$$

Пусть, как и выше, $u(\cdot)\in T$, $p\in(1,\infty)$, $p^{-1}+p'^{-1}=1$, $h^{-1}+(2p')^{-1}=1$. Очевидно $1<h\leqslant 2$. В следующей цепочке неравенств применяются неравенства Гельдера, теорема Ф. Рисса об общем виде линейных функционалов в $L_p(D)$ и неравенство (2.10):

$$\|l^{-\theta}u(\cdot)\|_{L_{2p'}(D)}=\sup_{\|f\|_{L_h}=1}|<f(\cdot),\ l^{-\theta}u(\cdot)>|=$$

$$=\sup_{\|f\|_{L_h}=1}\left|\sum_{k=0}^{M}\sum_{s\in R(k)}\frac{|c_s|\,|\hat{f}(-s)|}{(|s\pi|^{2n}+1)^{\theta}}\right|\leqslant\tau_7\sup_{\|f\|_{L_h}=1}\left(\sum_{k=0}^{M}\sum_{s\in R(k)}|\hat{f}(s)|^{2p'}\right)^{1/2p'}\times$$

$$\times\left[\sum_{k=0}^{M}\sum_{s\in R(k)}\frac{|c_s|^{h}}{(|s\pi|^{2n}+1)^{\theta h}}\right]^{\frac{1}{h}}\leqslant\tau_8\|f\|_{L_h(D)}\left[\sum_{k=0}^{M}\sum_{s\in R(k)}\frac{|c_s|^{h}}{(|s\pi|^{2h}+1)^{\theta h}}\right]^{\frac{1}{h}}\leqslant$$

$$\leqslant\tau_8\left(\sum_{k=0}^{M}\sum_{s\in R(k)}\frac{|c_s|^{h}}{(|s\pi|^{2h}+1)^{\theta h}}\right)^{\frac{1}{h}}.$$

Пусть $\varkappa\geqslant 1$, $\eta\geqslant 1$, $\varkappa^{-1}+\eta^{-1}=1$ — числа, подлежащие выбору. В последнем неравенстве применим вновь неравенство Гельдера. Получим

$$\|l^{-\theta}u\|_{L_{2p'}(D)}\leqslant\tau_8\left(\sum_{k=0}^{M}|c_s|^{h\varkappa}\right)^{\frac{1}{h\varkappa}}\left[\sum_{k=0}^{M}\sum_{s\in R(k)}(|s\pi|^{2n}+1)^{-\theta h\eta}\right]^{\frac{1}{h\eta}}\leqslant$$

$$\leqslant\tau_8\left(\sum_{k=0}^{M}\sum_{s\in R(k)}|c_s|^{h\varkappa}\right)^{\frac{1}{h\varkappa}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^{\frac{m-1}{2}}}{((k\pi^2)^n+1)^{\theta h\eta}}\right]^{\frac{1}{h\eta}}.$$

Наложим на $\varkappa$ условие $h\varkappa\geqslant 2$ и применим неравенство (2.11). Окончательно

$$\|l^{-\theta}u\|_{L_{2p'}(D)}\leqslant\tau_8\|u\|_{L_2(D)}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^{\frac{m-1}{2}}}{((k\pi^2)^n+1)^{\theta h\eta}}\right]^{\frac{1}{h\eta}}. \qquad (2.12)$$

Для $u(\cdot)\in T$ неравенство (2.7) будет доказано, если можно найти такие числа $\varkappa$ и η, которые удовлетворяют условию

$$\varkappa h\geqslant 2,\quad \theta h\eta>\frac{m+1}{2}. \qquad (2.13)$$

Так как $\varkappa=\frac{\eta}{\eta-1}$, $h=\frac{2p}{p+1}$, то из условия $\varkappa h\geqslant 2$ следует оценка $\eta\leqslant p+1$. Второе условие в (2.13) легко привести к виду $p[4n\theta\eta-(m+1)]>m+1$. Выбрав здесь величину η максимальной, т. е. $\eta=p+1$, мы получим неравенство

$$p^2+\left(1-\frac{m+1}{4np}\right)p-\frac{m+1}{4np}>0.$$

Разрешив его относительно p, найдем искомую оценку $p>\frac{m+1}{4n\theta}$ или в совокупности с условиями $p>1$, $1\geqslant\theta$ получаем, что $p>\max\left\{\frac{m+1}{4n},1\right\}$. Итак, для $u(\cdot)\in T$ неравенства (2.6) и (2.7) верны. Так как оператор $l^{-\theta}$ понимается как замыкание в $L_2(D)$ с исходной областью определения T, то лемма 2.1 доказана.

Введем операторы l_i, $i=1, 2$

$$l_1=l-\tau_9 l^{2\theta},\quad l_2=l+\tau_9 l^{2\theta},\quad 2\theta\leqslant 1,\quad \tau_9\geqslant 0. \qquad (2.14)$$

Лемма 2.2. Пусть $q(\cdot)\in L_p(D)$, где

$$p=\begin{cases}1, & \text{если } 2n>m+1,\\ p>\max\left\{1,\frac{m+1}{2n}\right\}, & \text{если } 2n\leqslant m+1.\end{cases} \qquad (2.15)$$

Тогда существуют $\tau_9>0$ и $\theta\leqslant\frac{1}{2}$ такие, что при $u\in W^n_{2,\pi}(D)$ имеют место неравенства

$$<l_1u, u>\leqslant<Lu, u>\leqslant<l_2u, u>. \qquad (2.16)$$

Доказательство. В силу неравенств (2.6), (2.7), условий (2.14), (2.15) имеют место оценки:

$$\|\sqrt{|q(x)|}\, l^{-\theta}\|_{L_2\to L_2}\leqslant\|q(\cdot)\|_{L_1(D)}\|l^{-\theta}\|_{L_2(D)\to C(D)}\leqslant\tau_{10}<\infty$$

при $2n>m+1$;

$$\|\sqrt{|q(\cdot)|}\, l^{-\theta}\|_{L_2(D)\to L_2(D)}\leqslant\|q(\cdot)\|_{L_p(D)}\cdot\|l^{-\theta}\|_{L_2\to L_{2p'}(D)}\leqslant\tau_{10}<\infty$$

при $2n\leqslant m+1$.

Следующая цепочка соотношений доказывает правое неравенство (2.16) и основана на теореме 0.1 и лемме 2.1:

$$<Lu, u>=\sum_{|\alpha|=n}\frac{n!}{\alpha_1!\ldots\alpha_m!}\|D^\alpha u\|^2_{L_2(D)}+\int_D q(x)\,|u(x)|^2dx\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{|\alpha|=n}\frac{n!}{\alpha_1!\ldots\alpha_m!}\|D^\alpha u\|^2_{L_2(D)}+\|\sqrt{|q(x)|}\,l^{-\theta}(l^\theta u(x)\|^2_{L_2(D)}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{|\alpha|=n}\frac{n!}{\alpha_1!\ldots\alpha_m!}\|D^\alpha u\|^2_{L_2(D)}+\tau\|l^\theta u(\cdot)\|^2_{L_2(D)}=$$

$$=<lu, u>+\tau<l^{2\theta}u, u>=<l_2u, u>.$$

При этом $2\theta\leqslant1$ за счет выбора p в условии (2.6), (2.7) и оператор $l^{2\theta}$ по-прежнему определен соотношением (2.5). Лемма доказана.

Определение 2.1 [2]. Пусть A, B — положительно определенные операторы, действующие в одном и том же гильбертовом пространстве H. Будем говорить, что оператор A не меньше оператора B ($A\geqslant B$), если:

1) любой элемент пространства H_A принадлежит пространству H_B;

2) для каждого $u(\cdot)\in H_A$ справедливо неравенство $<Au, u>\geqslant<Bu, u>$.

Теорема 2.1 [2]. Пусть A и B — положительно определенные операторы такие, что $H_A=H_B$; множество, ограниченное в метрике H_A, компактно в метрике исходного пространства H и $A\leqslant B$. Если λ_k и μ_k — собственные числа соответственно операторов A и B, расположенные в порядке возрастания и с учетом их кратности, то выполняются неравенства $\lambda_k \leqslant \mu_k$, $k=1, 2, \ldots$ Доказанные леммы 2.1 и 2.2 и теорема 0.1 позволяют применить теорему 2.1 к операторам $l_{1,2}$, L. Так как собственными числами операторов $l \pm \tau l^{2\theta}$, $2\theta \leqslant 1$ являются соответственно числа

$$\mu_s^{(1)} = |s\pi|^{2n} + 1 - \tau_9 (|s\pi|^{2n} + 1)^{2\theta}, \quad |s|^2 \in N;$$

$$\mu_s^{(2)} = |s\pi|^{2n} + 1 + \tau_9 (|s\pi|^{2n} + 1)^{2\theta}, \quad |s|^2 \in N,$$

причем кратность каждого с. ч. равна $\varphi(|s|^2)$, то с учетом кратности с. ч. оператора L получаем неравенства

$$\mu_s^{(1)} \leqslant \lambda_s \leqslant \mu_s^{(2)}. \tag{2.17}$$

Обозначим $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_l \leqslant \ldots$ последовательность всех натуральных чисел таких, что уравнение (2.3) имеет решение в целых числах при $k=k_l$:

$$\mu_{k_l}^{(1)} = (k_l \pi^2)^n + 1 - \tau_9 ((k_l \pi^2)^n + 1)^{2\theta},$$

$$\mu_{k_l}^{(2)} = (k_l \pi^2)^n + 1 + \tau_9 ((k_l \pi^2)^n + 1)^{2\theta}.$$

Заметим, что при $\theta < \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$, начиная с некоторого номера i_0, интервалы $[\mu_{k_l}^{(1)}, \mu_{k_l}^{(2)}]$ не пересекаются. С другой стороны, для любого $a \in \left(0, \frac{1}{2}\pi^2\right)$ существует число $k(a)$ такое, что при $k_l \geqslant k(a)$ и $\theta < \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ исполняются неравенства $(k_l \pi^2 - a)^n \leqslant \mu_{k_l}^{(1)} \leqslant \lambda_s \leqslant \leqslant \mu_{k_l}^{(2)} \leqslant (k_l \pi^2 + a)^n$, причем интервалы $[(k_l \pi^2 - a)^n, (k_l \pi^2 + a)^n]$ по-прежнему не пересекаются. Выбор $\theta < \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ с учетом лемм 2.1, 2.2 приводит к неравенствам

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} > \theta > \frac{m+1}{4n}, \quad \text{если } 2n > m+1; \tag{2.18}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} > \theta > \max\left\{1, \frac{m+1}{4n}\right\}, \quad \text{если } 2n \leqslant m+1. \tag{2.19}$$

Если условия (2.15)—(2.18) или (2.15)—(2.19) выполнены, то ввиду сказанного выше для достаточно больших $k(a)$ при $k \geqslant k(a)$ для $\lambda \in \tau(L)$ получим равенство

$$\sum_{|\lambda^{1/n} - k\pi^2| \leqslant a} 1 = \varphi(k).$$

Поскольку условия (2.15)—(2.18) или (2.15)—(2.19) эквивалентны формулировке теоремы 0.2, то последняя доказана.

§ 3. Структура базиса в пачках собственных подпространств

Рассмотрим с. ф. оператора L-расширения по Фридрихсу оператора L', определенного на T дифференциальным выражением L':

$$L'u=(-\Delta)^n u+q(x)u(x), \quad u(\cdot)\in T \tag{3.1}$$

и условиями

$$q(x)\in L_1(D), \quad n>m+1. \tag{3.2}$$

Для оператора L' выполнены условия теорем 0.1, 0,2, следовательно, при $\lambda\in\sigma(L)$ и $k\geqslant k(a)$, $a\in\left(0, \frac{1}{2}\pi^2\right)$ имеет место равенство

$$\sum_{|\lambda^{1/n}-k\pi^2|<a} 1=\varphi(k). \tag{3.3}$$

Не ограничивая общности, считаем $L\geqslant E$. Будем рассматривать уравнение

$$(Lu_\lambda)(x)=\lambda u_\lambda(x), \ \|u_\lambda\|_{L_2(D)}=1, \ \lambda\in\sigma(L). \tag{3.4}$$

Очевидно, $\lambda\geqslant 1$. Множество $\{u_\lambda(\cdot)\}_{\lambda\in\sigma(L)}$ — множество с. ф. оператора L — обозначим M; напомним, что символ Z^m означает целочисленную решетку в R^m. Для любого $\lambda\geqslant 1$ введем разбиение Z^m на два непересекающихся подмножества $S_1^{(\lambda)}$ и $S_2^{(\lambda)}$:

$$\begin{cases} S_1^{(\lambda)}=\left\{s: \ s\in Z^m, \ \left||s\pi|-\lambda^{\frac{1}{2n}}\right|>\dfrac{1}{\lambda^{1/2n}}\right\}; \\ S_2^{(\lambda)}=\left\{s: \ s\in Z^m, \ \left||s\pi|-\lambda^{\frac{1}{2n}}\right|\leqslant\dfrac{1}{\lambda^{1/2n}}\right\}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Обозначим $p(\lambda)$ — количество элементов в подмножестве $S_2^{(\lambda)}$:

$$C_s=\int_D u_\lambda(x)\exp(-i\pi\langle s, x\rangle)\,dx, \quad s\in Z^m. \tag{3.6}$$

Основную роль в доказательстве теоремы 0.3 играет

Лемма 3.1. Пусть $2n>m+3$, $u_\lambda(\cdot)\in M$. Существует $\sigma_0>0$ такое, что при $\tau_0\leqslant\lambda\in\tau(L)$ выполняются следующие утверждения:

1) в подмножестве $S_2^{(\lambda)}$ нормы векторов $s_i\in S_2^{(\lambda)}$, $i=\overline{1, p(\lambda)}$ равны $|s_1|^2=|s_2|^2=\ldots=|s_{p(\lambda)}|^2=k(\lambda)$;

2) множество $S_2^{(\lambda)}$ составляет решения в целых вещественных числах уравнения

$$s_1^2+s_2^2+\ldots+s_m^2=k(\lambda); \tag{3.7}$$

3) для с. ф. $u_\lambda(\cdot)\in M$ имеет место представление

$$u_\lambda(x)=u_\lambda^{(1)}(x)+u_\lambda^{(2)}(x), \quad x\in D, \tag{3.8}$$

где

$$\begin{cases} u_\lambda^{(1)}(x)=\sum\limits_{s\in S_1^{(\lambda)}} c_s\cdot\exp(i\pi\langle s,x\rangle), \\ u_\lambda^{(2)}(x)=\sum\limits_{s\in S_2^{(\lambda)}} c_s\cdot\exp(i\pi\langle s,x\rangle), \end{cases} \tag{3.9}$$

причем выполняются неравенства

$$\|u_\lambda^{(1)}\|_A\leqslant\tau_1\|u_\lambda\|_A/\lambda^{(2n-m-3)/2n}, \tag{3.10}$$

$$\|u_\lambda^{(2)}\|_A\leqslant\tau_2\cdot|\lambda|^{(m-1)/4n}, \tag{3.11}$$

$$\|u_\lambda\|_A\leqslant\tau_3\cdot\lambda^{(m-1)/4n}; \tag{3.12}$$

4) если $\lambda\in S_2^{(\lambda)}$, то при $4n>3m+5$ выполняется равенство

$$\pi\sqrt{k(\lambda)}=\lambda^{1/2n}+\frac{\theta(\lambda)}{\lambda^{(2n-m)/2n}}, \ |\theta(\lambda)|\leqslant\tau_4. \tag{3.13}$$

Доказательство. Обозначим через $A(y,y)$ замыкание исходной квадратичной формы $(L'y,y)$. По теореме 0.1 (см. также [2] теорема 4.7.3) энергетическое пространство $H_A=W_{2,\pi}^n$. Поскольку $n>\frac{m}{2}+\frac{3}{2}\geqslant\frac{m}{2}$, то функции из H_A непрерывны на D. Поэтому имеет место явная формула:

$$A(y,z)=A_0(y,z)+(qy,z), \quad y,z\in H_A,$$

$$A_0(y,z)=\sum_{s\in Z^m}|s\pi|^{2n}\cdot\hat{y}(s)\cdot\overline{\hat{z}(s)}.$$

Для расширения по Фридрихсу L справедливо соотношение [2, с. 80, равенство (14)]

$$(Ly,z)=A(y,z), \quad y\in D_L, \ z\in H_A.$$

Положим теперь $y=u_\lambda$, $z=\psi_s$ и подставим в это соотношение. Поскольку $A_0(u_\lambda,\psi_s)=|s\pi|^{2n}\cdot\hat{u}_\lambda(s)$, то мы придем к основному для последующего равенству

$$(|s\pi|^{2n}-\lambda)\,c_s=-\int\limits_D q(x)\,u_\lambda(x)\exp(-i\pi\langle s, x\rangle)\,dx. \qquad (3.14)$$

Пусть $s\in S_1^{(\lambda)}$. Тогда выполняется неравенство

$$\lambda^{1/2n}/(|s\pi|^{2n-1}+\lambda^{(2n-1)/2n})\geqslant ||s\pi|^{2n}-\lambda|^{-1}. \qquad (3.15)$$

Пользуясь соотношениями (3.14) и (3.15) получим, что

$$|c_s|\leqslant\|q\|_{L^1(D)}\cdot\|u_\lambda\|_A\cdot\lambda^{1/2n}/(|s\pi|^{2n-1}+\lambda^{(2n-1)/2n}),\quad s\in S_1^{(\lambda)}. \qquad (3.16)$$

Из (3.16) с учетом соотношений (2.4) и (2.9) получим цепочку неравенств, последнее из которых доказывает неравенство (3.10):

$$\sum_{s\in S_1^{(\lambda)}}|c_s|\leqslant\|q\|_{L^1(D)}\cdot\lambda^{1/2n}\cdot\|u_\lambda\|_A\cdot\sum_{s\in S_1^{(\lambda)}}(|s\pi|^{2n-1}+\lambda^{(2n-1)/2n})^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant\tau_5\cdot\|u_\lambda\|_A\cdot\lambda^{1/2n}\sum_{k=0}^{\infty}k^{(m-1)/2}/(k^{\frac{2n-1}{2}}+\lambda^{\frac{2n-1}{2}})\leqslant$$

$$\leqslant\tau_5\|u_\lambda\|_A/\lambda^{(2n-m-3)/2n}.$$

Ясно, что при достаточно большом λ будет выполняться оценка

$$\sum_{s\in S_1^{(\lambda)}}|c_s|\leqslant\frac{\|u_\lambda\|_A}{2}. \qquad (3.17)$$

Из (3.17) следуют оценки

$$\|u_\lambda\|_A=\|u_\lambda^{(1)}\|_A+\|u_\lambda^{(2)}\|_A=\sum_{s\in S_1^{(\lambda)}}|c_s|+\sum_{s\in S_2^{(\lambda)}}|c_s|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\|u_\lambda\|_A}{2}+\sum_{s\in S_2^{(\lambda)}}|c_s|.$$

Таким образом, получили соотношение

$$\|u_\lambda\|_A\leqslant 2\|u_\lambda^{(2)}\|_A=2\sum_{s\in S_2^{(\lambda)}}|c_s|. \qquad (3.18)$$

Пусть теперь $s\in S_2^{(\lambda)}$. Ясно, что $S_2^{(\lambda)}\neq\varnothing$, ибо иначе равенство $\|u_\lambda\|_{L_2}=1$ и оценка (3.18) противоречат друг другу. Для векторов $s\in S_2^{(\lambda)}$ выполняются неравенства

$$\alpha_\lambda=\frac{1}{\pi^2}\left(\lambda^{1/n}-2+\frac{1}{\lambda^{1/n}}\right)<|s|^2<\frac{1}{\pi^2}\left(\lambda^{1/n}+2+\frac{1}{\lambda^{1/n}}\right)=\beta_\lambda.$$

Так как $\lambda\geqslant 1$, $|s|^2=N$ и $\beta_\lambda-\alpha_\lambda=\frac{4}{\pi^2}<\frac{1}{2}$, получаем, что векторы $s\in S_2^{(\lambda)}$ имеют одинаковые нормы, а их число не превышает $\tau_6\cdot\lambda^{\frac{m-1}{2n}}$ в силу оценки (2.4). Из доказанных выше неравенств и неравенства Коши — Буняковского следуют соотношения:

$$\|u_\lambda^{(2)}\|_A=\sum_{s\in S_2^{(\lambda)}}|c_s|\leqslant\Big(\sum_{s\in S_2^{(\lambda)}}1\Big)^{1/2}\Big(\sum_{s\in S_2^{(\lambda)}}|c_s|^2\Big)^{1/2}\leqslant\tau_7|\lambda|^{\frac{m-1}{4n}};$$

$$\|u_\lambda(\cdot)\|_A\leqslant 2\|u_\lambda^{(2)}\|_A\leqslant\tau_8\lambda^{\frac{m-1}{4n}};$$

$$\|u_\lambda^{(1)}\|_A\leqslant\tau_9\frac{\|u_\lambda\|_A}{\lambda^{\frac{2n-m-3}{2n}}}\leqslant\tau_{10}\frac{\lambda^{\frac{m-1}{4n}}}{\lambda^{\frac{2n-m-3}{2n}}}=\frac{\tau_{10}}{\lambda^{\frac{4n-3m-5}{4n}}}.$$

Таким образом, при $4n>3m+5$ величины $u_\lambda^{(1)}$, $\|u_\lambda^{(2)}\|_{L_2}$ при $\lambda\to\infty$ стремятся соответственно к 0 (равномерно по $x\in D$) и к 1. Поэтому существует столь большое число R_0, что при $R_0\leqslant\lambda\in\sigma(L)$ выполняется следующая оценка снизу:

$$\|u_\lambda^{(2)}\|_{L_2}\geqslant\frac{1}{2}.$$

Умножая равенство (3.14) на $\bar{c}_s$ и суммируя по $s\in S_\lambda^{(2)}$, получаем соотношение

$$(|s\pi|^{2n}-\lambda)\sum_{s\in S_2^{(\lambda)}}|c_s|^2=-\int_D q(x)\,u_\lambda(x)\,\overline{u_\lambda^{(2)}(x)}\,dx. \tag{3.19}$$

Поскольку в равенстве (3.19) вектор $s\in S_2^{(\lambda)}$, можно написать представление

$$|s\pi|=\lambda^{\frac{1}{2n}}+\frac{\theta(\lambda)}{\lambda^{1/2n}},\quad |\theta(\lambda)|\leqslant 1. \tag{3.20}$$

Из (3.20) при достаточно большом λ получим

$$\big||s\pi|^{2n}-\lambda\big|=C_{2n}^1\lambda^{\frac{2n-2}{2n}}|\theta(\lambda)|\left|1+O\Big(\frac{1}{\lambda^{1/2n}}\Big)\right|>\frac{C_{2n}^1}{2}\lambda^{\frac{2n-2}{2}}|\theta(\lambda)|.$$

Отсюда следуют оценки

$$\frac{n}{8}\lambda^{\frac{2n-2}{2n}}|\theta(\lambda)|\leqslant\big||s\pi|^{2n}-\lambda\big|\sum_{s\in S_2^{(\lambda)}}|c_s|^2\leqslant$$

$$\leqslant \int_D |q(x)|\,|u_\lambda(x)|\,|u_\lambda^{(2)}(x)|\,dx \leqslant \tau_{11}\lambda^{\frac{m-1}{2n}}.$$

Итак, получим неравенство

$$|\theta(\lambda)| \leqslant \frac{\tau_{12}}{\lambda^{\frac{2n-m-1}{2n}}}.$$

В силу (3.20) и доказанной части леммы 3.1 окончательно выводим

$$\sqrt{k(\lambda)}\,\pi = |s\pi| = \lambda^{\frac{1}{2n}} + \frac{\theta(\lambda)}{\lambda^{1/2n}} = \lambda^{\frac{1}{2n}} + \frac{\theta_1(\lambda)}{\lambda^{\frac{2n-m}{2n}}}, \quad |\theta_1(\lambda)| \leqslant \tau_{13}.$$

Лемма 3.1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 0.3. Пусть фиксировано k, $k_1 \leqslant k \in N$, где k_1 — достаточно большое число, выбранное так, чтобы выполнялись все утверждения леммы 3.1, $\{\lambda_j\}_{j=1}^p$ — множество с. ч. с учетом их кратности оператора L, удовлетворяющих неравенству

$$|\lambda_j^{1/n} - k\pi^2| \leqslant a, \quad 0 < a < \frac{\pi^2}{2}. \tag{3.21}$$

Согласно результатам § 2 при $k \geqslant k_2(a)$, где $k_2(a)$ — достаточно большое число, $p = \varphi(k)$. Далее всюду $k \geqslant k_0(a) = \max\{k_1, k_2(a)\}$. Рассмотрим подмножества $Z^m\{S_2^{(\lambda_j)}\}_{j=1}^p$. Докажем, что равномерно относительно $j=\overline{1,p}$ для всех векторов $s \in S_2^{(\lambda_j)}$ имеет место равенство $|s|^2 = k$. Действительно, в силу леммы 3.1 и условия (3.21) имеем оценки

$$\pi^2 |k - |s|^2| \leqslant |k\pi^2 - \lambda_j^{1/n}| + |\lambda_j^{1/n} - |\pi s|^2| \leqslant a + \frac{3\theta(\lambda)}{\lambda^{\frac{2n-m-1}{2n}}}.$$

Тогда при достаточно большом k_0 получим неравенство $|k - |s|^2| \leqslant \leqslant \frac{2}{3}$. Поскольку k, $|s|^2 \in N$, то $k = |s|^2$ для всех $j = \overline{1,p}$.

Далее считаем, что с. ф. $\{u_{\lambda_j}(\cdot)\}_{j=1}^p$ ортогональны и нормированы в $L_2(D)$ к 1. Согласно результатам леммы 3.1, имеем равенства

$$u_{\lambda_j}(x) = u_{\lambda_j}^{(1)}(x) + u_{\lambda_j}^{(2)}(x) = u_{\lambda_j}^{(1)}(x) + \sum_{\mu=1}^{p} c_\mu^{(j)} \exp(i\pi\langle s_\mu, x\rangle),$$
$$j = \overline{1,p}, \tag{3.22}$$

где $\{s_\mu\}_{\mu=1}^p$ — совокупность целочисленных решений уравнения $|s|^2 = k$. Запишем равенства (3.22) в виде

$$\sum_{\mu=1}^{p} c_\mu^{(j)} \exp(i\pi < s\mu, x >) = u_{\lambda_j}(x) - u_{\lambda_j}^{(1)}(x), \quad j=\overline{1, p}. \qquad (3.23)$$

Из равенств (3.23) и оценки (3.10) следуют соотношения

$$\sum_{\mu=1}^{p} c_\mu^{(j)} \bar{c}_\mu^{(j')} = < u_{\lambda_j} - u_{\lambda_j}^{(1)}, \ u_{\lambda_{j'}} - u_{\lambda_{j'}}^{(1)} > = \delta_{jj'} + \frac{\tau_{12}}{\lambda^{\frac{4n-3m-5}{2n}}},$$

где $\delta_{jj'}$ — символ Кронекера. Это обстоятельство позволяет оценить определитель матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} c_1^{(1)} & c_1^{(1)} & \dots & c_p^{(1)} \\ c_4^{(2)} & c_2^{(2)} & \dots & c_p^{(2)} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ c_1^{(p)} & c_2^{(p)} & \dots & c_p^{p} \end{Vmatrix}.$$

Действительно, в силу очевидных соображений выполняются равенства

$$|\det A|^2 = \det A \cdot \det \bar{A}' = \det(\alpha_{p,q}),$$

где $\bar{A}'$ — матрица, полученная из A транспортированием и заменой элементов на сопряжение

$$\alpha_{p,q} = \begin{cases} 1 + \dfrac{\tau_{qq}}{\lambda^{\frac{4n-3m-5}{2n}}}, & l=q,\ l, q=\overline{1, p}, \\ \dfrac{\tau_{lq}}{\lambda^{\frac{4n-3m-5}{2n}}}, & l \neq q,\ l, q=\overline{1, p}. \end{cases}$$

Так как имеют место оценки

$$\sum_{\substack{q=1 \\ q \neq l}}^{p} |\alpha_{l,q}| \leqslant \tau_l \frac{\varphi(k)}{|\lambda|^{\frac{4n-3m-5}{2n}}} \leqslant \frac{\tau_l}{k^{2(n-m-1)}}, \quad l=\overline{1, p},$$

то на основании теоремы Леви — Десспланка [10, с. 192] при достаточно больших λ получим $\det A \neq 0$, а это сразу приводит к равенствам

$$\exp i\pi < s_\mu, x > = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j^{(\mu)} (u_{\lambda_j}(x) - u_{\lambda_j}^{(1)}(x)), \quad \mu=\overline{1, p}. \qquad (3.24)$$

Систему равенств (3.24) перепишем следующим образом:

$$h_\mu(x)=\exp i\pi\langle s_\mu, x\rangle+\sum_{j=1}^{p}\alpha_j^{(\mu)}u_{\lambda_j}^{(\mu)}(x)=$$

$$=\sum_{j=1}^{p}\alpha_j^{(\mu)}u_{\lambda_j}(x),\quad \mu=\overline{1,p}. \tag{3.25}$$

Так как $\{u_{\lambda_j}(x)\}_{j=1}^{p}$ — ортонормированная система функций, A — невырожденная матрица, то система функций $\{h_\mu(x)\}_{\mu=1}^{p}$ линейно независима; поскольку размерность подпространства равна p, то совокупность функций $\{h_\mu(x)\}_{\mu=1}^{p}$ образует базис в подпространстве $H(k)$. Уточним вид $h_\mu(x)$, $\mu=\overline{1,p}$. Нормируя функции $\{h_\mu(\cdot)\}_{\mu=1}^{p}$ в $L_2(D)$ к 1 и обозначая нормированную систему $\{\hat{h}_\mu(\cdot)\}_{\mu=1}^{p}$, получаем

$$\hat{h}_\mu(x)=\gamma_0^{(\mu)}\exp i\pi\langle s_\mu, x\rangle+\sum_{j=1}^{p}\gamma_j^{(\mu)}u_{\lambda_j}^{(1)}(x)=\sum_{j=1}^{p}\gamma_j^{(\mu)}u_{\lambda_j}(x). \tag{3.26}$$

Подчеркнем, что коэффициенты $\gamma_j^{(\mu)}$, $j=\overline{1,p}$ при каждом фиксированном $\mu=\overline{1,p}$ одинаковы в правой и левой частях равенства (3.26) в силу равенства (3.25). В силу ортонормированности системы функций $\{u_{\lambda_j}(\cdot)\}_{j=1}^{p}$ получим равенства

$$\sum_{j=1}^{p}|\gamma_j^{(\mu)}|^2=1,\quad \mu=\overline{1,p}. \tag{3.27}$$

Вновь используем нормировку $\{\hat{h}_\mu(\cdot)\}_{\mu=1}^{p}$:

$$|\gamma_0^{(\mu)}|\,\|\exp i\pi\langle s_\mu, x\rangle\|_{L_2(D)}\leqslant\|\hat{h}_\mu(x)\|_{L_2(D)}+$$

$$+\left\|\sum_{j=1}^{p}\gamma_j^{(\mu)}u_{\lambda_j}^{(1)}(x)\right\|_{L_2(D)}\leqslant 1+\sum_{j=1}^{p}|\gamma_j^{(\mu)}|\,\|u_{\lambda_j}^{(1)}\|_{L_2(D)}\leqslant$$

$$\leqslant 1+\frac{\tau_{14}}{k^{\frac{4n-3m-5}{4}}}\sum_{j=1}^{p}|\gamma_j^{(\mu)}|\leqslant 1+\frac{\tau_{14}}{k^{\frac{4n-3m-5}{4}}}\left(\sum_{j=1}^{p}|\gamma_j^{(\mu)}|^2\right)^{1/2}\varphi(k)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant 1+\frac{\tau_{14}}{k^{n-m-1}}.$$

Следовательно, при $k \geqslant k_0$ верны неравенства

$$|\gamma_0^{(\mu)}| \leqslant \frac{3}{2}, \quad \left\| \sum_{j=1}^{p} \gamma_j^{(\mu)} u_{\lambda_j}^{(1)}(x) \right\|_{L_1} \leqslant \frac{\tau_{18}}{k^{n-m-1}}, \quad \mu = \overline{1, p}.$$

Аналогично доказывается, что $|\gamma_0^{(\mu)}| \geqslant \frac{1}{2}$ при $k \geqslant k_0$. На основании этих оценок легко перейти от $\hat{h}(x)$ к $h_\mu(x)$, $\mu = \overline{1, p}$. Получим $h_\mu(x) = \exp i\pi \langle s, x \rangle + O\left(\frac{1}{k^{n-m-1}}\right)$, $\mu = \overline{1, p}$.

Теорема 0.3 доказана.

§ 4. РАВНОСХОДИМОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ A

Пусть $2n > m+3$, $q(\cdot) \in L_1(D)$ и число $a \in \left(0, \frac{\pi^2}{2}\right)$. В теореме 0.2 установлено, что при $c(a) = c \leqslant \lambda_j \in \sigma(L)$ с. ф. $\{u_{\lambda_j}(x)\}_{j=1}^{\infty}$ оператора L можно объединить в подпространства $H(k)$ $(k \geqslant k_0 = k_0(a))$, $\dim H(k) = \varphi(k)$. Далее в § 3 было введено представление (см. (3.9))

$$u_j(x) = u_{1,j}(x) + u_{2,j}(x), \tag{4.1}$$

где функция $u_{2,j}(x)$ является линейной комбинацией экспонент $\psi_s(x) = \exp i\pi \langle s, x \rangle$, $|s|^2 = k$. Относительно слагаемого $u_{1,j}(x)$ нам потребуется только полученная в лемме 3.1 промежуточная оценка (3.16)

$$|\hat{u}_{1,j}(\mu)| \leqslant \tau \|q\|_{L_1} \frac{\|u_j\|_A \cdot \lambda_j^{1/2n}}{|\mu\pi|^{2n-1} + \lambda_j^{\frac{2n-1}{2n}}}, \quad \mu \in Z^m. \tag{4.2}$$

Пользуясь (3.12) и неравенством $|\lambda_j^{1/n} - k\pi^2| \leqslant a$ для $a_j \subset H(k)$, получаем окончательную оценку, которой мы будем пользоваться:

$$|\hat{u}_{1,j}(\mu)| \leqslant \delta \|q\|_{L_1} \frac{k^{\frac{m+1}{4}}}{|\mu|^{2n-1} + k^{\frac{2n-1}{2}}}. \tag{4.3}$$

Прежде чем доказывать теорему 0.4, установим ряд вспомогательных утверждений.

Положим для $f(\cdot) \in L_2(D)$ (см. (0.6)—(0.9))

$$I_r(f) = F - \sigma_r(f), \quad T_r(f) = F - S_r(f). \tag{4.4}$$

Лемма 4.1 (формула остатка). Пусть $f(\cdot)\in L_2(D)$. Тогда справедливо тождество

$$S_r(f)-\sigma_r(f)=I_r[S_r(f)]-\sigma_r[T_r(f)]. \tag{4.5}$$

Доказательство. Выполним преобразование

$$S_r(f)-\sigma_r(f)=(I_r+\sigma_r)[S_r(f)]-\sigma_r(f)=$$

$$=I_r[S_r(f)]-\sigma_r[F-S_r(f)]=I_r(S_r(f))-\sigma_r(T_r(f)).$$

Лемма доказана.

Лемма 4.2. Для $f(\cdot)\in L_2(D)$ имеет место представление

$$I_r[S_r(f)]=\sum_{\lambda_j<c}(f,\ u_j)I_r[u_j]+\sum_{k_0\leqslant k<r^2}\ \sum_{u_j\in H(k)}(F,\ u_j)I_r(u_j), \tag{4.6}$$

$$\sigma_r[T_r(f)]=\sum_{k>r^2}\ \sum_{u_j\in H(k)}(f,\ u_j)\sigma_r(u_j). \tag{4.7}$$

Доказательство. Поскольку операторы S_r и σ_r конечномерны, то представление (4.6) тривиально. Снова, пользуясь конечномерностью σ_r, находим, что (4.7) будет следовать из соотношения

$$<T_r(f),\psi_s>=\sum_{k<r^2}\ \sum_{u_j\in H(k)}<f,\ u_j><u_j,\ \psi_s>. \tag{4.8}$$

Последнее означает, что

$$<f-S_r(f),\ \psi_s>=\lim_{m\to\infty}<S_m(f)-S_r(f),\ \psi_s>,$$

а это очевидно, раз $S_r(f)\to f$ в $L_2(D)$. Лемма доказана.

Нам потребуются еще две оценки технического характера.

Лемма 4.3. Пусть $u_j(\cdot)\in H(k)$, $k\geqslant r^2$. Тогда

$$\|\sigma_r[u_{1,\ j}]\|_A\leqslant\tau\|q\|_{L_1}\frac{r^m k^{\frac{m+1}{4}}}{k^{\frac{2n-1}{2}}}. \tag{4.9}$$

Доказательство. В силу (4.3) и условия $k\geqslant r^2$ получаем, что

$$\|\sigma_r[u_{1,\ j}]\|_A\leqslant\tau\|q\|_{L_1}\sum_{|\mu|\leqslant r}\frac{k^{\frac{m+1}{4}}}{\mu^{2n-1}+k^{\frac{2n-1}{2}}}\leqslant\tau\|q\|_{L_1}\frac{k^{\frac{m+1}{4}}}{k^{\frac{2n-1}{2}}}\sum_{|\mu|<r}1,$$

а число целочисленных точек в m-мерном шаре радиуса r есть $O(r^m)$. Лемма доказана.

Лемма 4.4. Пусть $u_j \in H(k)$, $k \leqslant r^2$. Тогда

$$\|I_r[u_{1,\,j}]\|_A \leqslant \tau \|q\|_{L_1} \frac{k^{\frac{m+1}{4}}}{r^{2n-m-1}}. \tag{4.10}$$

Доказательство. В силу (4.3) и условия $k \leqslant r^2$ получаем, что

$$\|I_r[u_{1,\,j}]\|_A \leqslant \tau \|q\|_{L_1} \sum_{|\mu|>r} k^{\frac{m+1}{4}} \frac{1}{|\mu|^{2n-1}+k^{\frac{2n-1}{2}}} \leqslant \tau \|q\|_{L_1} k^{\frac{m+1}{4}} \sum_{|\mu|>r} \frac{1}{|\mu|^{2n-1}}.$$

Однако

$$\sum_{|\mu|>r} |\mu|^{-(2n-1)} = O\left(\int\limits_r^\infty \rho^{-(2n-1)} \rho^{m-1} d\rho \right) = O(r^{-(2n-m-1)}),$$

$r \to \infty$. Лемма доказана.

Теперь проверим выполнение условия

$$\lim_{r\to\infty} r^{2n-2m-\frac{3}{2}} \|I_r[S_{k_0}]\|_A = 0. \tag{4.11}$$

Лемма 4.5. Для любого фиксированного j выполняется соотношение

$$\lim_{r\to\infty} r^{2n-2m-\frac{3}{2}} \|I_r[u_j]\|_A = 0. \tag{4.12}$$

Доказательство. Вначале заметим, что энергетическое пространство $H_L = D(\sqrt{L})$. Тогда по теореме 0.1 $u_j \in H_L = W^{n}_{2,\,\pi}(D)$ и, так как $2n > m+3$, то в силу вложения $W^{n}_{2,\,\pi}(D) \subset\to C$ все с. ф. непрерывны. Далее, из (3.14) имеем, что

$$|\hat{u}_j(s)| \leqslant \tau \|q\|_{L_1} \|u_j\|_C |s|^{-2n}, \quad |s| \to \infty, \quad \tau = \tau(j).$$

Поскольку $\sum\limits_{|s|>r} |s|^{-2n} = O(r^{m-2n})$, то выполняется оценка $\|I_r[u_j]\|_A = O(r^{m-2n})$. Тем более, отсюда вытекает (4.12). Лемма доказана.

Следствие 4.1. Для $f(\cdot) \in L_2(D)$ выполнено (4.11).

Доказательство теоремы 0.4. Воспользуемся формулой остатка (4.5).

1. Оценка $I_r[S_r(f)]$. Пользуясь следствием 4.1, видим, что достаточно ограничиваться оценкой выражения $I_r[\tau_r(f)]$ (см. (0.7), (0.8)). Однако для $u_j(\cdot) \in H(k)$, $k \leqslant r^2$ имеем

$$I_r[u_j] = I_r[u_{1,\,j}]. \tag{4.15}$$

Поскольку $I_r[u_{2,j}]=0$, ибо оператор I_r аннулирует гармоники $\psi_s(x)$, $|s|^2=k$ при $k\leqslant r^2$. Отсюда с учетом (4.6) получаем

$$I_r[\tau_r(f)]=\sum_{k_0<k<r^2}\sum_{u_j\in H(k)}<f,\ u_j>I_r[u_{1,j}]. \qquad (4.16)$$

Пользуясь неравенством Коши — Буняковского и равенством Парсеваля, находим

$$\|I_r[\tau_r(f)]\|_A\leqslant\|f\|_{L_2}\Big(\sum_{k_0<k<r^2}\sum_{u_j\in H(k)}\|I_r[u_{1,j}]\|_A^2\Big)^{1/2}. \qquad (4.17)$$

Применяя (4.10), имеем

$$\|I_r[\tau_r(f)]\|_A\leqslant\|f\|_{L_2}\cdot\tau\|q\|_{L_2}\frac{1}{r^{2n-m-1}}\Big(\sum_{k_0<k<r^2}k^{\frac{m+1}{2}}\varphi(k)\Big)^{1/2}. \qquad (4.18)$$

Однако

$$\sum_{k<r^2}k^{\frac{m+1}{2}}\varphi(k)=\sum_{s\in Z^m}|s|^{m+1}=O\left(\int\limits_0^r s^{m+1}\rho^{m-1}d\rho\right)=O(r^{2m+1}). \qquad (4.19)$$

Подставляя (4.19) в (4.18), получаем

$$\|I_r[\tau_r(f)]\|_A\leqslant\tau\|q\|_{L_1}\cdot\|f\|_{L_2}r^{-\left(2n-2m-\frac{3}{2}\right)}. \qquad (4.20)$$

2. Оценка $\sigma_r[T_r(f)]$. Воспользуемся соотношением (4.7). Теперь для $u_j\in H(k)$, $k>r^2$ имеют

$$\sigma_r[u_j]=\sigma_r[u_{1,j}], \qquad (4.21)$$

поскольку $\sigma_r[u_{2,j}]=0$, ибо оператор σ_r аннулирует гармоники $\psi_s(x)$, $|s|^2=k$ при таких k. Значит

$$\sigma_r[T_r(f)]=\sum_{k>r^2}\sum_{u_j\in H(k)}(f,\ u_j)\sigma_r[u_{1,j}]. \qquad (4.22)$$

Снова, применяя неравенство Коши — Буняковского, равенство Парсеваля и (4.9), приходим к оценке

$$\|\sigma_r[T_r(f)]\|_A\leqslant\tau\|q\|_{L_1}\|f\|_{L_2}r^m\left(\sum_{k>r^2}\frac{k^{\frac{m+1}{2}}}{k^{2n-1}}\varphi(k)\right)^{1/2}. \qquad (4.23)$$

Рассуждая так же, как при выводе (4.19), получаем, что

$$\sum_{k>r^2}\frac{k^{\frac{m+1}{2}}}{k^{2n-1}}\varphi(k)=O\left(\int\limits_r^\infty\frac{\rho^{m+1}\rho^{m-1}}{\rho^{2(2n-1)}}d\rho\right)=O(r^{-(4n-2m-3)}). \qquad (4.24)$$

Подставляя (4.24) в (4.23), находим

$$\|\sigma_r[T_r(f)]\|_A \leqslant \tau\|q\|_{L_1(D)}\|f\|_{L_2(D)} r^{-\left(2n-2m-\frac{3}{2}\right)}. \tag{4.25}$$

3. Итак, объединяя (4.20) и (4.25), получаем

$$r^{\left(2n-2m-\frac{3}{2}\right)}\|S_r(f)-\sigma_r(f)\|_A \leqslant \tau\|q\|_{L_1(D)}\|f\|_{L_2(D)}. \tag{4.26}$$

Для с. ф. $u_j(x)$ доказываемое соотношение (0.10) сводится при достаточно больших r к (4.12), а оно уже доказано. Поскольку с. ф. $u_j(x)$ плотны в $L_2(D)$, то доказательство теоремы 0.4 завершается ссылкой на теорему Банаха — Штейнгауза для последовательности операторов

$$f(\cdot)\to r^{\left(2n-2m-\frac{3}{2}\right)}[S_r(f)-\sigma_r(f)].$$

Замечание 4.1. Лежащая в основе доказательства теоремы 0.4 формула остатка в несколько более общем виде была установлена ранее для обыкновенных дифференциальных операторов в [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рисс Ф., Секефальви-Надь В.* Лекции по функциональному анализу. М.: ИЛ, 1954. 499 с.
2. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 431 с.
3. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 456 с.
4. *Кахан Ж. П.* Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. М.: Мир, 1976. 204 с.
5. *Шустер Л. А.* Распределение спектра и выбор базиса в «пачках» собственных подпространств одного дифференциального оператора // Алма-Ата, 1984. Деп. в ВИНИТИ 26.07.84, № 5444—84.
6. *Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М.* Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений. I // Успехи мат. наук. 1976. Т. 31, вып. 6. С. 28—83.
7. *Минкин А. М.* Общие ряды по собственным и присоединенным функциям // Саратов, 1982. Деп. в ВИНИТИ 30.12.82, № 6481—82.
8. *Гельфонд А. О., Линник Ю. В.* Элементарные методы в аналитической теории чисел. М.: Наука, 1962. 272 с.
9. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965. 537 с.
10. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972. 232 с.
11. *Минкин А. М.* Принцип локализации для рядов по собственным функциям обыкновенных дифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения и теория функций. Саратов, 1980. Вып. 3. С. 68—80.
12. *Минкин А. М., Шустер Л. А.* К спектральной теории операторов типа Шредингера. // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1989. № 5. С. 16—19.

Д. Н. ТУРМУХАМБЕТОВ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ПЕРЕНОСА С ЧЕТНОЙ ИНДИКАТРИСОЙ РАССЕЯНИЯ

Применим вариационный метод исследования асимптотики спектра к некоторым задачам, возникающим в кинетической теории переноса частиц. Приведем результаты, полученные в [10—13].

Рассмотрим стационарное многоскоростное уравнение переноса (линеаризованное кинетическое уравнение Больцмана):

$$\frac{1}{\alpha(p, v)}\sum_{l=1}^{3} s_l \frac{\partial\varphi}{\partial x_l}+\varphi(p, v, s)=\frac{\lambda}{\alpha(p, v)}\int\limits_{V\times\Omega}\sigma(p, v, v', \mu_0)\times$$

$$\times\varphi(p, v', s')\,ds'dv'+F(p, v, s),\quad (p, v, s)\in G\times V\times\Omega. \tag{0.1}$$

Здесь $G\subset\mathbf{R}^3$ есть область, в которой происходит процесс переноса частиц; $V=(v_0, v_1)$ — интервал изменения модуля скорости частиц; Ω — единичная сфера в $\mathbf{R}^3$, являющаяся областью изменения направления скорости s; $\varphi(p, v, s)$ есть плотность числа частиц, летящих в точке $p=(x_1, x_2, x_3)$ со скоростью v в направлении s; $\mu_0=\sum_{l=1}^{3} s_l s'_l$ — косинус угла между направлениями s и s'; $\frac{1}{\alpha(p, v)}$ — величина среднего свободного пробега частиц; σ — индикатриса рассеяния, характеризующая распределение частиц по скоростям и направлениям после столкновения с атомами вещества; F — функция источников излучения.

К уравнению (0.1) присоединяется некоторое граничное условие. Например, решение ищется в классе функций, обращающихся в нуль на определенном подмножестве множества $\partial G\times V\times\Omega$.

Уравнение (0.1) называется односкоростным, если функции, участвующие в нем, не зависят от v и нет интегрирования по v; изотропным, если функция σ не зависит от s и s'.

В работах [1—4] показано, что если индикатриса рассеяния σ и функция F симметричны и четны по направлениям, т. е.

$$\sigma(p, v, v', \mu_0) = \sigma(p, v', v, \mu_0), \ \sigma(p, v, v', -\mu_0) = \sigma(p, v, v', \mu_0),$$
$$F(p, v, s) = F(p, v, -s), \tag{0.2}$$

то задача для уравнения (0.1) с помощью подстановки эквивалентно сводится к самосопряженной задаче для уравнения

$$L_0 u = \lambda B u + F, \quad L_0 = -\left(s, \frac{1}{2}\mathrm{grad}\right)^2 + 1 \tag{0.3}$$

с соответствующими граничными условиями, где B — интегральный оператор, стоящий в правой части уравнения (0.1), $\mathrm{grad}\, u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i}$. Причем оператор $L_0^{-1} B$ — вполне непрерывный и для задачи (0.3) справедлива теория Гильберта — Шмидта. В частности, все собственные значения оператора $L_0^{-1} B$ вещественны, образуют счетное множество и справедливы соответствующие вариационные принципы.

Нами исследуется асимптотика спектра для многоскоростной задачи вида (0.3) в одномерной (плоскопараллельной) и многомерной геометриях. Метод исследования — вариационный и близок к методу, применявшемуся в работах [5, гл. 7, 6—9].

§ 1. Плоскопараллельный случай. Предварительные оценки спектра

Пусть $Q = \{q = (z, v, \mu) : -a \leqslant r \leqslant a, \ 0 \leqslant v_0 \leqslant v \leqslant v_1 < \infty, \ 0 \leqslant \mu \leqslant \leqslant 1\}$. В гильбертовом пространстве $L_{2,\alpha}(Q)$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-a}^{a} \int_{v_0}^{v_1} \int_{0}^{1} f(z, v, \mu) \bar{g}(z, v, \mu) \alpha(z, v)\, d\mu\, dv\, dz$$

рассмотрим задачу на спектр для уравнения (0.3) в одномерном (плоскопараллельном) случае

$$-\frac{\mu^2}{\alpha(z, v)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\alpha(z, v)} \frac{\partial u}{\partial z}\right) + u(z, v, \mu) = \frac{\lambda}{\alpha(z, v)} \int_{v_0}^{v_1} \int_{0}^{1} \sigma(z, v, \mu, v', \mu') \times$$
$$\times u(z, v', \mu')\, d\mu' dv'; \tag{1.1}$$

$$\left(u+\frac{\mu}{\alpha(z,v)}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=a}=\left(u-\frac{\mu}{\alpha(z,v)}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=-a}=0, \tag{1.2}$$

где $\alpha(z,v)$ — непрерывна и $0<\alpha^0\leqslant\alpha(z,v)\leqslant\alpha^1<\infty$. Обозначим через B оператор в $L_{2,\alpha}(Q)$, стоящий в правой части уравнения (1.1)

$$Bu=\frac{1}{\alpha(z,v)}\int\limits_{v_0}^{v_1}\int\limits_0^1\sigma(z,v,\mu,v',\mu')\,u(z,v',\mu')\,d\mu'dv'. \tag{1.3}$$

Относительно индикатрисы рассеяния $\sigma(z,v,\mu,v',\mu')$ предположим, что

$$\sigma(z,v,\mu,v',\mu')=\sum_{m=1}^{M}b_m(z)\,\sigma_m(v,\mu,v',\mu'),$$

где $b_m(z)>0$ — непрерывны на $[-a,a]$; σ_m — вещественнозначны и непрерывны, а интегральные операторы в $L_2([v_0,v_1]\times[0,1])$ с ядрами σ_m — неотрицательны.

Из этого, в частности, вытекают ограниченность и неотрицательность оператора B. Обозначим через L оператор, действующий по формуле $Lu=-\frac{\mu}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\mu}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial z}\right)+u$ с областью определения $D(L)$, состоящей из функций $u(z,v,\mu)\in L_{2,\alpha}(Q)$ таких, что u, $\frac{\mu}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial z}$ — абсолютно непрерывны при почти всех (v,μ), $Lu\in\in L_{2,\alpha}(Q)$, причем

$$\left(u+\frac{\mu}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=a}=\left(u-\frac{\mu}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=-a}=0.$$

Известно [2, 3], что этот оператор самосопряжен и положительно определен. Таким образом, задачу (1.1), (1.2) можно записать в виде

$$Lu=\lambda Bu. \tag{1.4}$$

Так как L — положительно определен, то существуют операторы $L^{1/2}$, $L^{-1/2}$, поэтому задачу (1.5) можно записать в виде

$$L^{-1/2}BL^{-1/2}w=\lambda^{-1}w,\quad (w=L^{1/2}u). \tag{1.5}$$

Тем самым, задача (1.1), (1.2) записана в виде (1.5), причем в задаче (1.5) оператор $L^{-1/2}BL^{-1/2}$ является самосопряженным и неотрицательным.

Пусть $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\ldots$ — собственные значения задачи (1.1), (1.2). Через $N(\lambda)=\sum_{\lambda_n<\lambda} 1$ будем обозначать число собственных значений λ_n с учетом кратности, меньших λ, т. е. функцию распределения собственных значений задачи (1.1), (1.2). Из леммы 2.1.3 и эквивалентности задач (1.5) и (1.1), (1.2) вытекает

Лемма 1.1. Количество точек спектра задачи (1.1), (1.2), лежащих левее λ, равно максимальной размерности подпространств $G\subset D(L^{1/2})$, на которых выполнено неравенство

$$\|L^{1/2}u\|^2<\lambda(Bu,u),\quad u\in G$$

или

$$\int_Q\left(\frac{\mu^2}{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2+\alpha|u|^2\right)dq+\int_{v_0}^{v_1}\int_0^1\mu(|u(a,v,\mu)|^2+|u(-a,v,\mu)|^2)\,d\mu dv<$$

$$<\lambda\int_Q\int_{v_0}^{v_1}\int_0^1\sigma(z,v,\mu,v',\mu')u(z,v',\mu')\overline{u}(z,v,\mu)\,d\mu'dv'dq. \qquad (1.6)$$

Замечание. Отметим, что $D(L^{1/2})$ состоит из всех функций $u\in L_{2,\alpha}(Q)$, абсолютно непрерывных по z при почти всех (v,μ) и таких, что выражение, стоящее в левой части (1.6), конечно.

Пусть $-a\leqslant\Delta^-<\Delta^+\leqslant a$ обозначим $\Delta=[\Delta^-,\Delta^+]$, $Q_\Delta=\Delta[v_0,v_1]\times[0,1]$, $H_0(Q_\Delta)$ и $H_1(Q_\Delta)$ — соответственно пополнения множеств: $D_0(Q_\Delta)=\{u\in L_{2,\alpha}(Q_\Delta)$, u — абсолютно непрерывна по z при п. в.

$$(v,\mu),\ \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial z}\in C^\infty(Q_\Delta),\ u(\Delta^-,v,\mu)=u(\Delta^+,v,\mu)=0\},$$

$$D_1(Q_\Delta)=\{u\in L_{2,\alpha}(Q_\Delta),$$

u — абсолютно непрерывна по z при п. в. (v,μ), $\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial z}\in C^\infty(Q_\Delta)$, $\frac{\partial u}{\partial z}(\Delta^-,v,\mu)=\frac{\partial u}{\partial z}(\Delta^+,v,\mu)=0\}$ по норме

$$\|u\|_{H_i}=\left(\int_{Q_\Delta}\left(\frac{\mu^2}{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2+\alpha|u|^2\right)dq\right)^{1/2},\ i=0,1,$$

определяемой скалярным произведением

$$(u,w)_{H_i}=(l_0u,w),\quad u,w\in D_i(Q_\Delta),$$

$$l_0u=-\left(\frac{\mu}{\alpha}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2u+u.$$

Охарактеризуем свойства функций из $H_0(Q_\Delta)$.

Пусть $u \in H_0(Q_\Delta)$. Тогда существует последовательность $\{u^m\}$ функций из $D_0(Q_\Delta)$ такая, что $\|u^m - u\|_{H_0} \to 0$, $m \to \infty$, т. е. $\|u^m - u^n\|_{H_0} \to 0$, $m, n \to \infty$. Отсюда следует, что при $n, m \to \infty$

$$\|u^m - u\|_{L_{2,\alpha}(Q_\Delta)} \to 0, \quad \left\| \frac{\mu}{\alpha} \frac{\partial}{\partial z}(u^m - u^n) \right\|_{L_{2,\alpha}(Q_\Delta)} \to 0.$$

В силу полноты пространства $L_{2,\alpha}(Q_\Delta)$ существует предельная функция $\tilde{u}$ такая, что при $m \to \infty$

$$\left\| \frac{\mu}{\alpha} \frac{\partial u^m}{\partial z} - \tilde{u} \right\| \to 0.$$

Заметим, что $\tilde{u}$ не зависит от выбора последовательности u^m, сходящейся к u. Докажем, что u удовлетворяет почти всюду на $[0,1] \times \times v$ соотношению $u(\Delta^-, v, \mu) = u(\Delta^+, v, \mu) = 0$. Для этого докажем, что u и $\tilde{u}$ удовлетворяют при п. в. (v, μ) соотношениям

$$\mu u(z, v, \mu) = \int\limits_{\Delta^-}^{z} \alpha(y, v) \tilde{u}(y, v, \mu)\, dy; \tag{1.7а}$$

$$\mu u(z, v, \mu) = -\int\limits_{z}^{\Delta^+} \alpha(y, v) \tilde{u}(y, v, \mu)\, dy. \tag{1.7б}$$

Если $u \in D_0(Q_\Delta)$, то соотношения (1.7 а, б) удовлетворяются при

$$\tilde{u}(z, v, \mu) = \frac{\mu}{\alpha(z, v)} \frac{\partial u(z, v, \mu)}{\partial z}.$$

Докажем соотношение (1.7а). Обозначим

$$Au = \mu u(z, v, \mu) - \int\limits_{\Delta^-}^{z} \alpha(y, v) \tilde{u}(y, v, \mu)\, dy.$$

Тогда, применяя неравенство Коши — Буняковского, имеем

$$|Au|^2 \leqslant 2|u|^2 \mu^2 + 2 \left| \int\limits_{\Delta^-}^{z} \alpha(y, v) \tilde{u}(y, v, \mu)\, dy \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2|u|^2+2\alpha' d\int\limits_{\Delta^-}^{z}\alpha(y,v)\,|\tilde{u}(y,v,\mu)|^2dy,$$

где $d=\Delta^+-\Delta^-$. Умножая на $\alpha(z,v)$ и интегрируя по Q_Δ, получаем

$$\int\limits_{Q_\Delta}\alpha(z,v)\,|Au|^2dzdvd\mu=\|Au\|^2\leqslant 2\|u\|^2+$$

$$+2\alpha' d\int\limits_{Q_\Delta}\alpha(z,v)\left(\int\limits_0^z\alpha(y,v)\,|\tilde{u}(y,v,\mu|^2dy\right)dzdvd\mu\leqslant$$

$$\leqslant 2\|u\|^2+2(\alpha' d)^2\|\tilde{u}\|^2\leqslant C(\|u\|^2+\|\tilde{u}|^2).$$

Таким образом,

$$\|Au\|^2\leqslant C(\|u\|^2+\|\tilde{u}\|^2).$$

Применяя последнее неравенство к последовательности $\{u-u^m\}$, получаем

$$\|Au\|^2=\|A(u-u^m)\|^2\leqslant C\left(\|u-u^m\|^2+\left\|\tilde{u}-\frac{\mu}{\alpha}\,\frac{\partial u^m}{\partial z}\right\|^2\right)\to 0,\quad m\to\infty.$$

Откуда вытекает, что $Au=0$, т. е. всякая функция из $H_0(Q_\Delta)$ удовлетворяет соотношению (1.7а). Аналогично доказывается соотношение (1.7б). Соотношения (1.7 а, б) дают основание приписать выражению $\frac{\lambda}{\alpha}\,\frac{\partial u}{\partial z}$ значение $\tilde{u}$, а $u(\Delta^\pm,v,\mu)$ считать равными нулю при п. в. (v,μ).

Итак, если $u\in H_0(Q_\Delta)$, то выполняются условия:

а) при п. в. (v,μ) u — абсолютно непрерывна по z и существует квадратичная форма

$$\int\limits_{Q_\Delta}\left(\left|\frac{\mu}{\alpha}\,\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2+\alpha|u|^2\right)d\mu dvdz<\infty;$$

б) при п. в. (v,μ) функция u удовлетворяет граничным условиям

$$u(\Delta^-,v,\mu)=u(\Delta^+,v,\mu)=0.$$

Аналогично, если $u\in H_1(Q_\Delta)$, то выполняется условие а).

Докажем обратное утверждение. Пусть выполнены условия а), б) при $i=0$ и условие а) при $i=1$. Покажем, что тогда функция u принадлежит пространству $H_l(Q_\Delta)$. При $w \in D_l(Q_\Delta)$ имеем

$$(w, u)_{H_l(Q_\Delta)} = (l_0 w, u) = \int\limits_{Q_\Delta} \left(\frac{\mu^2}{\alpha} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \alpha w \bar{u} \right) d\mu dv dz.$$

Из неравенства $|(w, u)_{H_l}| \leqslant \|w\|_{H_l} \|u\|_{H_l}$ вытекает, что u определяет линейный непрерывный функционал (w, u) на линеале $D_l(Q_\Delta)$, плотном в пространстве $H_l(Q_\Delta)$. Продолжая этот функционал по непрерывности на все $H_l(Q_\Delta)$, получаем линейный непрерывный функционал $l(w)$, который по теореме Рисса можно представить в виде $l(w) = (w, u_0)$, $u_0 \in H_l(Q_\Delta)$. С другой стороны, на плотном множестве $D_l(Q_\Delta)$ справедливо равенство $l(w) = (w, u_0)$, $w \in D_l(Q_\Delta)$, откуда получаем, что $u_0 = u$.

Обозначим через $M_l(Q_\Delta, \lambda)$, $i=0, 1$ максимальную размерность линейных многообразий $G \subset H_l(Q_\Delta)$, на которых выполнено неравенство

$$\int\limits_{Q_\Delta} \left(\frac{\mu^2}{\alpha} \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 + \alpha |u|^2 \right) dq <$$

$$< \lambda \int\limits_{Q_\Delta} \int\limits_{V} \int\limits_{0}^{1} \sigma(z, v, \mu, v', \mu') u(z, v', \mu') \bar{u}(z, v, \mu) d\mu' dv' dq. \tag{1.8}$$

Имеет место

Лемма 1.2. Если $\Delta^- = -a$, $\Delta^+ = a$, то

$$M_0(Q, \lambda) \leqslant M(\lambda) \leqslant M_1(Q, \lambda). \tag{1.9}$$

Доказательство. Если $u \in H_0(Q)$, то $u \in D(L^{1/2})$ и легко видеть справедливость равенства $\|L^{1/2} u\| = \|u\|_{H_0(Q)}$. Поэтому неравенство $M_0(Q, \lambda) \leqslant N(\lambda)$ вытекает из леммы 1.1 и определений $M_0(Q, \lambda)$ и $N(\lambda)$. Далее, если $u \in D(L^{1/2})$, то $u \in H_1(Q)$ и выполнено неравенство $\|L^{1/2} u\| \geqslant \|u\|_{H_1(Q)}$. Отсюда следует, что $M_1(Q, \lambda) \geqslant N(\lambda)$.

Обозначим через $L_0^0(Q_\Delta)$, $L_0^1(Q_\Delta)$ симметрические положительно определенные операторы в $L_{2,\alpha}(Q_\Delta)$, заданные дифференциальным выражением

$$l_0 u = -\frac{\mu^2}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + u$$

и областями определения $D(L_0^0)$, $D(L_0^1)$, состоящими из таких функций $u(z, v, \mu)$ из $L_{2,\alpha}(Q_\Delta)$, что u — абсолютно непрерывна по

z при п. в. (v, μ), $\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} \in C^\infty(Q_\Delta)$, удовлетворяющих граничным условиям соответственно

$$u(\Delta^-, v, \mu) = u(\Delta^+, v, \mu) = 0; \tag{1.10}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=\Delta^-} = \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=\Delta^+} = 0. \tag{1.11}$$

Пусть $L^0(Q_\Delta)$, $L^1(Q_\Delta)$ — расширения по Фридрихсу в $L_{2,\alpha}(Q_\Delta)$ оператора $L_0^0(Q_\Delta)$, $L_0^1(Q_\Delta)$ соответственно. Через $N_0(Q_\Delta, \lambda)$, $N_1(Q_\Delta, \lambda)$ обозначим количество точек спектра, меньших λ, соответственно задач $L^0(Q_\Delta)u = \lambda Bu$, $L^1(Q_\Delta)u = \lambda Bu$, рассматриваемых в $L_{2,\alpha}(Q_\Delta)$.

Справедлива следующая

Лемма 1.3. При любом $\lambda > 0$ имеют место равенства

$$M_0(Q_\Delta, \lambda) = N_0(Q_\Delta, \lambda); \tag{1.12}$$

$$M_1(Q_\Delta, \lambda) = N_1(Q_\Delta, \lambda). \tag{1.13}$$

Доказательство. Задачи $L^i(Q_\Delta)u = \lambda Bu$, $i = 0,1$ можно представить в виде

$$L^i(Q_\Delta)^{1/2} BL^i(Q_\Delta)^{1/2} w = \lambda^{-1} w.$$

Поэтому, применяя лемму 2.1.3 и заметив, что пространства $H_0(Q_\Delta)$, $H_1(Q_\Delta)$ являются областями определения квадратных корней $L^0(Q_\Delta)^{1/2}$, $L^1(Q_\Delta)^{1/2}$, получаем утверждение леммы.

Пусть имеется разбиение $Q = \bigcup_{l=1}^{N} Q_l$, где

$$Q_l = \{q = (z, v, \mu) : z \in \Delta_l, v \in [v_0, v_1], \mu \in [0, 1]\};$$

$$\Delta_l = [\Delta_l^-, \Delta_l^+], \quad \Delta_1^- = -a, \ \Delta_l^+ = \Delta_{l+1}^-, \ \Delta_N^+ = a,$$

тогда справедлива

Лемма 1.4. Для любого $\lambda > 0$ справедливы неравенства

$$N_0(Q, \lambda) \geqslant \sum_{l=1}^{N} N_0(Q_l, \lambda); \tag{1.14}$$

$$N_1(Q, \lambda) \leqslant \sum_{l=1}^{N} N_1(Q_l, \lambda). \tag{1.15}$$

Доказательство. Так как $N_0(Q, \lambda) = M_0(Q, \lambda)$, $N_0(Q_l, \lambda) = M_0(Q_l, \lambda)$, то покажем сначала, что

$$M_0(Q, \lambda) \geqslant \sum_{i=1}^{N} M_0(Q_i, \lambda).$$

Пусть G_i — линейные многообразия в $H_0(Q_i)$, $i=1, \ldots, N$ такие, что

$$\|u\|^2_{H_0(Q_i)} < \lambda \int\limits_{Q_i \times V \times [0,1]} \sigma(z, v, \mu, v', \mu') u(z, v', \mu') \bar{u}(z, v, \mu)\, dq d\mu' dv' \tag{1.16}$$

при $u \in G_i$. Продолжим все элементы линейного многообразия G_i на все Q нулем вне Q_i. Тогда получим линейное многообразие в $H_0(Q)$, которое обозначим через $\widetilde{G}_i$. Если возьмем произвольную линейную комбинацию $u = \sum_{i=1}^{N} c_i \widetilde{u}_i$, $\widetilde{u}_i \in \widetilde{G}_i$, то легко видеть, что $u \in H_0(Q)$ и выполнено неравенство

$$\|u\|^2_{H_0(Q)} < \lambda \int\limits_{Q \times V \times [0,1]} \sigma(z, v, \mu, v', \mu') u(z, v', \mu') \bar{u}(z, v, \mu)\, dq d\mu' dv'. \tag{1.17}$$

Поэтому величина $\sum_{i=1}^{N} \dim G_i$ не превосходит максимальной размерности линейного многообразия $G \subset H_0(Q)$, на котором выполняется (1.17). Так как G_i — произвольные линейные многообразия, удовлетворяющие (1.16), то справедливо (1.14).

Докажем теперь неравенство (1.15). Так как $N_1(Q, \lambda) = M_1(Q, \lambda)$, то оценим величину $M_1(Q, \lambda)$. Пусть G — линейное многообразие в $H_1(Q)$, на котором выполняется неравенство

$$\|u\|_{H_1(Q)} < \lambda \int\limits_{Q \times V \times [0, 1]} \sigma(z, v, \mu, v', \mu') u(z, v', \mu') \bar{u}(z, v, \mu)\, d\mu' dv' dq. \tag{1.18}$$

Это многообразие можно рассматривать как многообразие, содержащееся в прямой сумме $\widetilde{H} = \bigotimes_{i=1}^{N} H_i(Q_i)$, которое является областью определения квадратного корня $\widetilde{L}_1^{1/2}$ для оператора $\widetilde{L}_1 = \bigoplus_{i=1}^{N} L_1(Q_i)$. Таким образом, величина $M_1(Q, \lambda)$ не превышает максимальной размерности линейных многообразий в $\widetilde{H}$, на которых выполняется неравенство

$$\|\widetilde{L}_1^{1/2}u\|^2 < \lambda \int\limits_{\bigcup\limits_{i=1}^{N} Q_i} \int\limits_V \int\limits_0^1 \sigma(z, v, \mu, v', \mu')\, u(z, v', \mu')\, \overline{u}(z, v, \mu)\, d\mu' dv' dq.$$

В свою очередь, эта размерность равна количеству точек спектра, меньших λ, задачи $\widetilde{L}_1 u = \lambda B u$ в пространстве $\bigoplus\limits_{i=1}^{N} L_{2,\alpha}(Q_i)$. Так как спектр такой задачи состоит из объединения точек спектра задач $L_1(Q_i)u = \lambda B u$, $i = 1, \ldots, N$, то отсюда вытекает справедливость оценки (1.15).

Из лемм 1.2—1.4 следует следующая двусторонняя оценка:

$$\sum_{i=1}^{N} N_0(Q_i, \lambda) \leqslant N(\lambda) \leqslant \sum_{i=1}^{N} N_1(Q_i, \lambda). \tag{1.19}$$

Замечание. В случае неограниченного интервала $-\infty < z < \infty$ под оператором L будем подразумевать расширение по Фридрихсу оператора

$$L_0 u = -\frac{\mu^2}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial z}\right) + u$$

с областью определения
$D(L_0) = \{u \in L_{2,\alpha}(Q)$: u — абсолютно непрерывна по z при почти всех (v, μ), $\frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial z} \in C^\infty(Q)$, $u = 0$ при $|z| > R_u$, $L_0 u \in L_{2,\alpha}(Q)\}$, где R_u — некоторая постоянная, зависящая от u. В этом случае, повторяя проделанные рассуждения, легко убедиться в справедливости оценки (1.19) при $N = \infty$ (соответственно $(-\infty, \infty) = \bigcup\limits_{i=-\infty}^{\infty} \Delta_i$, $\Delta_i = [\Delta_i^-, \Delta_i^+]$, $\Delta_i^+ = \Delta_{i+1}^-$).

Пусть функция $\alpha(z, v)$ заменяется на возмущенную $\widetilde{\alpha}(z, v)$, тогда справедлива следующая

Лемма 1.5. Если

$$(1+\delta)^{-1} \leqslant \frac{\alpha(z, v)}{\widetilde{\alpha}(z, v)} \leqslant 1+\delta, \quad \delta > 0,$$

то

$$N_1(Q_i, \lambda) \leqslant \widetilde{N}_1(Q_i, \lambda(1+\delta)); \tag{1.20}$$

$$N_0(Q_i, \lambda) \geqslant \widetilde{N}_0(Q_i, \lambda(1+\delta)^{-1}), \tag{1.21}$$

где $\widetilde{N}_l(Q_l, \lambda)$, $(l=0, 1)$ — функция распределения собственных значений, соответствующая возмущенной задаче, рассматриваемой в $L_{2,\widetilde{\alpha}}(Q_l)$.

Доказательство. Имеет место оценка

$$(1+\delta)^{-1}\int\limits_{Q_l}\left(\frac{\mu^2}{\widetilde{\alpha}}\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2+\widetilde{\alpha}|u|^2\right)dq\leqslant\int\limits_{\widetilde{Q}_l}\left(\frac{\mu^2}{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2+\alpha|u|^2\right)dq\leqslant$$

$$\leqslant(1+\delta)\int\limits_{Q_l}\left(\frac{\mu^2}{\widetilde{\alpha}}\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2+\widetilde{\alpha}|u|^2\right)dq,$$

где $u\in D(L_l^{1/2}(Q_l))$, $l=0, 1$.
Поэтому в силу леммы 1.3 получаем утверждение леммы.

§ 2. Асимптотические формулы для собственных значений

Вычислим асимптотику величин $N_0(Q_\Delta, \lambda)$, $N_1(Q_\Delta, \lambda)$ при $\lambda\to\infty$. Пусть функции α и σ непрерывны по совокупности аргументов и не зависят от z при $z\in\Delta\subseteq[-a, a]$.

Предположим выполнение следующего условия:

$$\sigma(v, \mu, v', \mu')=\sigma(v, 0, v', 0)+\mu\sigma_1(v, \mu, v', \mu')+ \\ +\mu'\sigma_2(v, \mu, v', \mu'), \tag{2.1}$$

где $|\sigma_1|+|\sigma_2|<c<\infty$.

Пусть также существует нетривиальная функция $\Theta(v)\in\in L_2(v_0, v_1)$ такая, что при всех $v_0\leqslant v\leqslant v_1$ имеет место равенство

$$\int\limits_{v_0}^{v_1}\sigma(v, 0, v', 0)\Theta(v')\,dv'=\Theta(v)\int\limits_{v_0}^{v_1}\sigma(v, 0, v, 0)\,dv. \tag{2.2}$$

Длину отрезка Δ обозначим через d. Собственную функцию задачи

$$-\frac{\mu^2}{\alpha^2(v)}\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+u=\lambda\int\limits_{v_0}^{v_1}\int\limits_0^1\frac{1}{\alpha(v)}\sigma(v, \mu, v', \mu')\,u(z, v', \mu')\,d\mu'dv'; \tag{2.3}$$

$$u|_{z=\Delta^-}=u|_{z=\Delta^+}=0 \tag{2.4}$$

будем искать в виде

$$u(z, v, \mu)=\sin\frac{k\pi}{d}(z-\Delta^-)\,u_k(v, \mu),\ \ k=1, 2, \ldots \tag{2.5}$$

Так как набор функций $\left\{\sin\frac{k\pi}{d}(z-\Delta^-)\right\}$ является полной системой в $L_2(\Delta)$, такое представление возможно. Подставляя в (2.3) для функций $u_k(v,\mu)$, получаем задачи на собственные значения

$$\left(\frac{\mu^2}{a^2(v)}\left(\frac{k\pi}{d}\right)^2+1\right)u_k(v,\mu)=\frac{\lambda}{a(v)}\int\limits_{v_0}^{v_1}\int\limits_{0}^{1}\sigma(v,\mu,v',\mu')\,u_k(v',\mu')\,d\mu'dv'. \tag{2.6}$$

Собственные числа задачи (2.6) обозначим через $\lambda_{k,1}\leqslant\lambda_{k,2}\leqslant\ldots$. Тогда множеством собственных чисел задачи (2.4), (2.5) будет набор $\{\lambda_{k,j}\}_{k,j=1}^{\infty}$. Обозначим

$$w_k(v,\mu)=u_k(v,\mu)\left(\left(\frac{\mu k\pi}{a(v)d}\right)^2+1\right)^{1/2},$$

тогда задачу (2.6) можно записать в виде

$$A_k w_k=\lambda^{-1}w_k,\quad w_k\in L_{2,a}([v_0,v_1]\times[0,1]), \tag{2.7}$$

где

$$A_k w_k=\int\limits_{v_0}^{v_1}\int\limits_{0}^{1}\frac{\sigma(v,\mu,v',\mu')\,w_k(v',\mu')\,d\mu'dv'}{a(v)\left(\left(\frac{\mu k\pi}{a(v)d}\right)^2+1\right)^{1/2}\left(\left(\frac{\mu' k\pi}{a(v')d}\right)^2+1\right)^{1/2}},\quad k=1,2,\ldots$$

Заметим, что операторы A_k неотрицательны в $L_{2,a}([v_0,v_1]\times[0,1])$. Действительно, пусть $w\in L_{2,a}([v_0,v_1]\times[0,1])$, положим

$$\tilde{w}(z,v,\mu)=\begin{cases} w(v,\mu)\left(\left(\frac{\mu k\pi}{a(v)d}\right)^2+1\right)^{-1/2}, & z\in\Delta,\\ 0, & z\in[-a,a]\times\Delta,\end{cases}$$

тогда

$$(A_k w,\ w)_{L_{2,a}([v_0,v_1]\times[0,1])}=d^{-1}(B\tilde{w},\tilde{w})_{L_{2,a}(Q)}\geqslant 0$$

в силу неотрицательности оператора B. Поэтому с учетом непрерывности ядра из теоремы Мерсера получаем следующее равенство:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{k,j}^{-1}=\int\limits_{v_0}^{v_1}\int\limits_{0}^{1}\frac{\sigma(v,\mu,v,\mu)\,d\mu\,dv}{a(v)\left(\left(\frac{\mu k\pi}{a(v)d}\right)^2+1\right)}. \tag{2.8}$$

Из условия (2.1) следует, что

$$\sigma(v, \mu, v, \mu) = \sigma(v, 0, v, 0) + \mu O(1),$$

подставляя в (2.8) и интегрируя по μ, получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{k,j}^{-1} = \frac{d}{k\pi} \int_{v_0}^{v_1} \sigma(v, 0, v, 0) \operatorname{arctg} \frac{k\pi}{\alpha(v) d} dv +$$
$$+ O(1) \frac{d^2}{k^2\pi^2} \int_{v_0}^{v_1} \alpha(v) \ln\left(\left(\frac{k\pi}{\alpha(v) d}\right)^2 + 1\right) dv. \qquad (2.9)$$

При $\frac{k}{d} \to \infty$ равенство (2.9) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{k,j}^{-1} = \frac{d}{2k} \int_{v_0}^{v_1} \sigma(v, 0, v, 0)\, dv \left(1 + O(1) \left(\frac{d}{k}\right)^{\varepsilon_1}\right), \qquad (2.10)$$

где ε_1 — любое из интервала (0.1).

Величина $\lambda_{k_1}^{-1}$ равна норме оператора A_k, поэтому справедлива оценка

$$\lambda_{k,1}^{-1} \geqslant \|A_k f\| \|f\|^{-1}, \quad f \in L_{2,\alpha}([v_0, v_1] \times [0, 1]). \qquad (2.11)$$

Положим

$$f(v, \mu) = \frac{\Theta(v)}{\left(\left(\frac{\mu k\pi}{\alpha(v) d}\right)^2 + 1\right)^{1/2} \alpha(v)}.$$

Тогда

$$\|A_k f\|^2 = \int\limits_{V \times [0, 1]} \left(\int\limits_{V \times [0, 1]} \frac{\sigma(v, \mu, v', \mu') \Theta(v') d\mu' dv'}{\alpha(v) \alpha(v') \left(\left(\frac{\mu k\pi}{\alpha(v) d}\right)^2 + 1\right)^{1/2} \left(\left(\frac{\mu' k\pi}{\alpha(v') d}\right)^2 + 1\right)} \right)^2 \times$$
$$\times \alpha(v)\, d\mu\, dv. \qquad (2.12)$$

Вычислим данное выражение, используя соотношения (2.1), (2.2). Имеем

$$\int_{v_0}^{v_1} \int_0^1 \frac{\sigma(v, 0, v', 0) \Theta(v') d\mu' dv'}{\left(\left(\frac{\mu' k\pi}{\alpha(v') d}\right)^2 + 1\right) \alpha(v')} = \frac{d}{k\pi} \int_{v_0}^{v_1} \sigma(v, 0, v', 0) \Theta(v') \operatorname{arctg} \times$$
$$\times \frac{k\pi}{\alpha(v') d} dv' = \frac{d}{2k} \int_{v_0}^{v_1} \sigma(v, 0, v, 0)\, dv\, \Theta(v) \left(1 + O(1) \frac{d}{k}\right);$$

$$\int_{v_0}^{v_1}\int_0^1 \frac{\sigma_2\mu'\Theta(v')\,d\mu'\,dv'}{\left(\left(\frac{\mu' k\pi}{\alpha(v')d}\right)^2+1\right)}=O(1)\,\frac{d^2}{k^2}\int_{v_0}^{v_1}\alpha(v')\ln\left(\left(\frac{k\pi}{\alpha(v')d}\right)^2+1\right)dv'=$$

$$=O(1)\left(\frac{d}{k}\right)^{1+\varepsilon_2},\quad \varepsilon_2\in(0,\,1).$$

Подставляя данные выражения в (2.12), возводя выражение в скобках в квадрат и затем интегрируя, окончательно получаем

$$\|Af\|^2=\left(\frac{d}{2k}\right)^3\left(\int_{v_0}^{v_1}\sigma(v,\,0,\,v,\,0)\,dv\right)^2\int_{v_0}^{v_1}\Theta^2(v)\,dv+O(1)\left(\frac{d}{k}\right)^{3+\varepsilon_2},$$

$$\varepsilon_2\in(0,\,1). \tag{2.13}$$

С другой стороны, в силу соотношения (2.3)

$$\|f\|^2=\int_{v_0}^{v_1}\int_0^1 \frac{|\Theta(v)|^2\,d\mu\,dv}{\alpha(v)\left(\left(\frac{\mu k\pi}{\alpha(v)d}\right)^2+1\right)}=\frac{d}{2k}\int_{v_0}^{v_1}|\Theta(v)|^2dv\left(1+O(1)\left(\frac{d}{k}\right)^{\varepsilon_3}\right),$$

$$\varepsilon_3\in(0,\,1).$$

Подставляя выражения для $\|A_k f\|$ и $\|f\|$ в неравенство (2.11), получаем оценку

$$\lambda_k^{-1}\geqslant\frac{d}{2k}\int_{v_0}^{v_1}\sigma(v,\,0,\,v,\,0)\,dv\left(1+O(1)\left(\frac{d}{k}\right)^{\varepsilon_4}\right),\quad \varepsilon_4\in(0,\,1). \tag{2.14}$$

Из (2.10) и (2.14) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\lambda_{kj}^{-1}\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{d}{k}\right)^{1+\varepsilon}<\infty,\quad \varepsilon\in(0,\,1), \tag{2.15}$$

C — некоторая постоянная. Нам понадобится следующая

Лемма 2.1. Пусть $a_n\geqslant 0$, $a_n\to\infty$, $n\to\infty$, если

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}<\infty,$$

то

$$\sum_{a_n<x}1=o(x),\quad x\to\infty.$$

Доказательство. Обозначим $\sum\limits_{a_n<x} 1=f(x)$. Допустим противное:

$$\frac{f(x)}{x}\not\to 0,\quad x\to\infty.$$

Отсюда вытекает, что существует последовательность $x_1, x_2, \ldots$, и такое $\varepsilon>0$, что

$$\frac{f(x_i)}{x_i}\geqslant\varepsilon,\quad i=1, 2, \ldots$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\frac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+1}}\geqslant\frac{1}{2},\quad i=1, 2, \ldots$$

Отсюда получаем оценку

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1}=\sum_{a_n\leqslant x_1} a_n^{-1}+\sum_{x_1<a_n\leqslant x_2} a_n^{-1}+\ldots\geqslant\varepsilon x_1\frac{1}{x_1}+\varepsilon(x_2-x_1)\frac{1}{x_2}+\ldots+$$

$$+\varepsilon(x_{i+1}-x_i)\frac{1}{x_{i+1}}\geqslant\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\ldots=\infty.$$

Полученное противоречие доказывает лемму. Таким образом, из (2.15) и леммы 2.1 получаем

$$\sum_{\substack{\lambda_{k,j}<\lambda\\ j\geqslant 2,\ k>1}} 1=o(\lambda),\quad \lambda\to\infty. \tag{2.16}$$

Далее, в силу (2.10) и (2.14)

$$\lambda_{k,1}^{-1}=\frac{d}{2k}\left(\int\limits_{v_0}^{v_1}\sigma(v, 0, v, 0)\,dv\right)\left(1+O(1)\left(\frac{d}{k}\right)^{\delta}\right),\ \delta\in(0, 1). \tag{2.17}$$

Поэтому

$$\sum_{\lambda_{k,1}\leqslant\lambda}=\frac{\lambda}{2}d\int\limits_{v_0}^{v_1}\sigma(v, 0, v, 0)\,dv\,(1+o(1)),\quad \lambda\to\infty.$$

Из последнего равенства и из (2.16) следует, что

$$N_0(Q_\Delta, \lambda)\equiv\sum_{\lambda_{k,j}<\lambda} 1=\frac{\lambda}{2}d\int\limits_{v_0}^{v_1}\sigma(v, 0, v, 0)\,dv\,(1+o(1)),\quad \lambda\to\infty. \tag{2.18}$$

При оценке величины $N_1(Q_\Delta, \lambda)$ граничное условие (2.5) заменяется следующим:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=\Delta^-}=\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=\Delta^+}=0. \tag{2.19}$$

Соответственно собственные функции ищутся в виде

$$u(z, v, \mu)=\cos\frac{k\pi}{d}(z-\Delta^-)\,u_k(v, \mu), \quad k=0, 1, 2, \ldots$$

Подставляя в (2.3) и (2.19), получаем равенство (2.6), в котором $k=0, 1, 2, \ldots$. Повторяя дальнейшие рассуждения и учитывая, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{0j}^{-1}=\int_{v_0}^{v_1}\int_0^1\frac{\sigma(v, \mu, v, \mu)\,d\mu\,dv}{\alpha(v)}<\infty,$$

получаем

$$N_1(Q_\Delta, \lambda)=\frac{\lambda}{2}d\int_{v_0}^{v_1}\sigma(v, 0, v, 0)\,dv\,(1+o(1)), \ \lambda\to\infty. \tag{2.20}$$

Сформулируем и докажем теорему об асимптотике собственных чисел задачи (1.1), (1.2).

Теорема 2.1. Пусть функция σ представима в виде

$$\sigma(z, v, \mu, v', \mu')=\sigma(z, v, 0, v', 0)+\mu\sigma_1(z, v, \mu, v', \mu')+ +\mu'\sigma_2(z, v, \mu, v', \mu'), \tag{2.21}$$

где $|\sigma_1|+|\sigma_2|\leqslant C<\infty$, причем

$$\int_{-a}^{a}\int_{v_0}^{v_1}\sigma(z, v, 0, v, 0)\,dv\,dz\neq 0. \tag{2.22}$$

Если существует нетривиальная функция $\Theta(z, v)\in L_{2,\alpha}([-a, a]\times[v_0, v_1])$ такая, что при всех z, v

$$\int_{v_0}^{v_1}\sigma_m(z, v, 0, v', 0)\Theta(z, v')\,dv'=\Theta(z, v)\int_{v_0}^{v_1}\sigma(z, v, 0, v, 0)\,dv, \tag{2.23}$$

то для функции распределения собственных чисел задачи (1.1), (1.2) справедлива формула

$$N(\lambda)=\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{v_0}^{v_1}\sigma(z, v, 0, v, 0)\,dv\,dz(1+o(1)),\quad \lambda\to\infty. \tag{2.24}$$

Доказательство. Возьмем разбиение отрезка $[-a, a]$ на отрезки Δ_i, $i=1, \ldots, n$, равной длины $d_i=\frac{2a}{n}$. Введем функции

$$\sigma_n^-(z, v, \mu, v', \mu')=\sum_{m=1}^{M}\min_{z\in\Delta_i} b_m(z)\,\sigma_m, z\in\Delta_i,$$

$$\sigma_n^+(z, v, \mu, v', \mu')=\sum_{m=1}^{M}\max_{z\in\Delta_i} b_m(z)\,\sigma_m,\quad z\in\Delta_i.$$

Через $B_n^\pm$ обозначим операторы в $L_{2,\alpha}(Q)$ с ядрами $\sigma_n^\pm$, аналогичные оператору B, определенному формулой (1.3). Тогда имеет место неравенство $0\leqslant B_n^-\leqslant B\leqslant B_n^+$, понимаемое в операторном смысле. В силу леммы 1.1 при любом $\lambda>0$ справедлива оценка

$$N^-(\lambda)\leqslant N(\lambda)\leqslant N^+(\lambda), \tag{2.25}$$

где $N^\pm(\lambda)$ — количество точек спектра, меньших λ, задачи $Lu=\lambda B_n^\pm u$.

Заменяя на каждом отрезке Δ_i функцию $\alpha(z, v)$ на ее значение $\alpha(z_i, v)$ в некоторой точке $z_i\in\Delta_i$, затем, применяя оценку (1.19), лемму 1.5 и соотношения (2.18), (2.20), получаем неравенства:

$$N^+(\lambda)\leqslant(1+\delta_n)\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n}d_i\int\limits_{v_0}^{v_1}\sigma_n^+(z, v, 0, v, 0)\,dv\,(1+o(1)); \tag{2.26}$$

$$N^-(\lambda)\geqslant(1+\delta_n)^{-1}\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n}d_i\int\limits_{v_0}^{v_1}\sigma_n^-(z, v, 0, v, 0)\,dv\,(1+o(1)), \tag{2.27}$$

где $1+\delta_n=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\ \max\limits_{z_1, z_2\in\Delta_i}\frac{\alpha(z, v)}{\alpha(z_2, v)}$. Так как при $n\to\infty$, $\delta_n\to 0$,

$$\int\limits_{v_0}^{v_1}\sigma_n^\pm(z, v, 0, v, 0)\,dv\to\int\limits_{v_0}^{v_1}\sigma(z, v, 0, v, 0)\,dv,$$

то из (2.25) — (2.27) вытекает утверждение теоремы.

Замечание. В изотропном случае утверждение теоремы остается в силе, причем условия (2.21), (2.23) можно снять.

Рассмотрим случай $a=\infty$. Пусть для простоты индикатриса рассеяния имеет вид $b(z)\sigma(v, \mu, v', \mu')$, где $b(z)>0$ — непрерывна, $\alpha(z, v)$ — непрерывна, $0<\alpha(z, v)\leqslant\alpha^1<\infty$, σ — непрерывна, причем интегральный оператор в $L_2([v_0, v_1]\times[0, 1])$ с ядром σ неотрицателен.

Теорема 2.2. Пусть $\frac{b(z)}{b(z+y)}\to 1$, $\frac{\alpha(z, v)}{\alpha(z+y, v)}\to 1$ при $y\to 0$ равномерно по $z\in\mathbf{R}$ и выполнены следующие условия:

а) существуют функции σ_1, σ_2, Θ такие, что

$$\sigma(v, \mu, v', \mu') = \sigma(v, 0, v', 0) + \mu\sigma_1 + \mu'\sigma_2,$$

$$\int\limits_{v_0}^{v_1} \sigma(v, 0, v', 0)\Theta(v')\,dv' = \Theta(v)\int\limits_{v_0}^{v_1} \sigma(v, 0, v, 0)\,dv;$$

б)

$$\left(\int\limits_{\{z:b(z)>\lambda^{-1}M\min\limits_v \alpha\}} b(z)\,(\min_v \alpha)^{-1}dz\right)\left(\int\limits_{\{z:b>\lambda^{-1}\min\limits_v \alpha\}} b(z)\,dz\right)^{-1} = O(1),\quad \lambda\to\infty;$$

в)

$$\left(\int\limits_{\{z:\lambda^{-1}<b(\min\limits_v \alpha)^{-1}<M\lambda^{-1}\}} b(z)\,(\min_v \alpha)^{-1}dz\right)\times \left(\int\limits_{\{z:b>\lambda^{-1}\min\limits_v \alpha\}} b(z)\,dz\right)^{-1}\to 0,\quad \lambda\to\infty$$

при всех $M\geqslant 1$.

Тогда справедлива асимптотическая формула

$$N(\lambda) = \frac{\lambda}{2}\int\limits_{\{z:b>\lambda^{-1}\min\limits_v \alpha\}} b(z)\,dz \int\limits_{v_0}^{v_1} \sigma(v, 0, v, 0)\,dv\,(1+o(1)). \quad (2.28)$$

Замечание. В односкоростном случае условие (2.23) и аналогичное условие теоремы 2.2 выполняются автоматически. Доказательство теоремы 2.2 приведено в [11, 13].

§ 3. Асимптотика спектра при нулевом следе индикатрисы рассеяния

Рассмотрим случай, когда индикатриса рассеяния не удовлетворяет условию (2.22). Покажем, что тогда существенно изменяется вид асимптотической формулы.

Пусть

$$\sigma(z, v, \mu, v', \mu') = \mu^p \mu'^p r(v, v') b(z),$$

где $p>0$; $\widetilde{b}_1 \geqslant b(z) \geqslant \widetilde{b}_0 > 0$ — кусочно-непрерывна.

Задача (1.1), (1.2) запишется в виде

$$-\frac{\mu^2}{\alpha(z)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\alpha(z)}\frac{\partial u}{\partial z}\right)+u=\frac{\lambda b(z)}{\alpha(z)}\int\limits_{v_0}^{v_1}\int\limits_0^1 \mu^p\mu'^p r(v, v') u(z, v', \mu')\,d\mu' dv'; \tag{3.1}$$

$$\left(u+\frac{\mu}{\alpha(z)}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{z=a}=\left(u-\frac{\mu}{\alpha(z)}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{z=-a}=0. \tag{3.2}$$

Далее будем предполагать, что $\alpha(z)$ — кусочно-непрерывна,

$$0<\alpha^0 \leqslant \alpha(z) \leqslant \alpha^1 < \infty. \tag{3.3}$$

Пусть $r(v, v')$ — ядро Гильберта — Шмидта и определяет неотрицательный оператор в $L_2(v_0, v_1)$. Тогда справедливо разложение

$$r(v, v') = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j^{-1}\Theta_j(v)\overline{\Theta}_j(v'), \tag{3.4}$$

где $\eta_j>0$ — характеристические числа; Θ_j — ортонормированные собственные функции. Числа $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}$ будем считать известными.

Нетрудно заметить, что оператор, стоящий в правой части уравнения (4.1), ограничен и неотрицателен в $L_{2,\alpha}(Q)$.

Возьмем произвольное малое $\delta>0$. Выберем разбиение отрезка $[-a, a] = \bigcup\limits_{l=1}^{N}\Delta_l$ на отрезки $\Delta_l = [\Delta_l^-, \Delta_l^+]$ так, чтобы на каждом Δ_l выполнялись соотношения

$$(1+\delta)^{-1} \leqslant \frac{\alpha(z_1)}{\alpha(z_2)} \leqslant 1+\delta, \quad (1+\delta)^{-1} \leqslant \frac{b(z_1)}{b(z_2)} \leqslant 1+\delta, \quad z_1, z_2 \in \Delta_l.$$

Пусть $\alpha_l = \alpha(z_l)$, $b_l = b(z_l)$, где z_l — некоторая точка отрезка Δ_l.

Применяя так же, как в § 1, 2 леммы 2.1.3, 1.1, 1.5, оценку 1.19, а затем, разделяя переменные, как в § 2, получаем

$$\sum_{l=1}^{N} \operatorname{card}\{k\geqslant 1,\ j\geqslant 1:\ \lambda_{k,j,l}<\lambda(1+\delta)^{-2}\}\leqslant N(\lambda)\leqslant$$
$$\leqslant \sum_{l=1}^{N} \operatorname{card}\{k\geqslant 0,\ j\geqslant 1:\ \lambda_{k,j,l}<\lambda(1+\delta)^{2}\}, \tag{3.5}$$

где $N(\lambda)$ — функция распределения собственных чисел задачи (3.1), (3.2), $\lambda_{k,j,l}$ — характеристические числа операторов

$$A_{k,l}: L_{2,\alpha_l}([0,1]\times[v_0,v_1])\to L_{2,\alpha_l}([0,1]\times[v_0,v_1]),$$

$$(A_{k,l}u)(v,\mu)=\frac{b_l}{a_l}\int_{v_0}^{v_1}\int_0^1 \frac{\mu^p\mu'^p r(v,v')u(v',\mu')\,d\mu'dv'}{\left(\left(\frac{\mu k\pi}{a_l d_l}\right)^2+1\right)^{1/2}\left(\left(\frac{\mu' k\pi}{a_l d_l}\right)^2+1\right)^{1/2}}, \tag{3.6}$$

$$i=1,\ldots,N,\ k=0,1,2,\ldots,\ j=1,2,\ldots$$

Используя равенство (3.4) и ортонормированность функций $\Theta_j(v)$, получаем, что собственные функции (ненормированные) $u_{k,j,l}$ операторов $A_{k,l}$ имеют вид

$$u_{k,j,l}(v,\mu)=\mu^p\left(\left(\frac{\mu k\pi}{a_l d_l}\right)^2+1\right)^{-1/2}\Theta_j(v); \tag{3.7}$$

подставляя затем в (3.6), получаем, что

$$\lambda_{k,l,j}^{-1}=\eta_j^{-1}\frac{b_l}{a_l}\int_0^1 \frac{\mu^{2p}d\mu}{\left(\frac{\mu k\pi}{a_l d_l}\right)^2+1}. \tag{3.8}$$

Отсюда

$$\lambda_{klj}=\eta_j\frac{a_l}{b_l}\left(\frac{k\pi}{a_l d_l}\right)^{1+2p}\left(\int_0^{\frac{k\pi}{a_l d_l}} y^{2p}(y^2+1)^{-1}dy\right)^{-1},\ k\neq 0;$$

$$\lambda_{0lj}=(1+2p)\eta_j\frac{a_l}{b_l}. \tag{3.9}$$

Введем функцию

$$q_p(x)=x^{1+2p}\left(\int_0^x t^{2p}(t^2+1)^{-1}dt\right)^{-1},\quad x>0. \tag{3.10}$$

Нетрудно заметить, что $\lim\limits_{x\to+0} q_p(x)=1+2p$, $\lim\limits_{x\to+\infty} q_p(x)=\infty$,

$$q'_p(x)=\frac{x^{2p}}{\left(\int\limits_0^x t^{2p}(t^2+1)^{-1}\,dt\right)^2}\cdot\int\limits_0^x \frac{2t^{2+2p}}{(t^2+1)^2}\,dt>0.$$

Поэтому $q_p(x)$ — монотонно возрастающая функция при $x>0$. Обозначим через $q_p^{-1}(x)$, $x\geqslant 1+2p$ функцию, обратную в смысле отображений к функции q_p. При $0\leqslant x<1+2p$ положим $q_p^{-1}(x)=0$ $\left(p\neq\frac{1}{2}\right)$. При $p=\frac{1}{2}$, $0\leqslant x\leqslant\frac{2}{\ln 2}$ положим $q_{1/2}^{-1}(x)=1$. Из формулы (3.10) вытекают следующие соотношения:

при $0<p<\frac{1}{2}$

$$q^p(x)=\frac{2}{\pi}x^{1+2p}\sin\left(\pi\left(\frac{1}{2}-p\right)\right)(1+|o_1(1)|),$$

$$q_p^{-1}(x)=x^{1/(1+2p)}\left(\frac{\pi}{2\sin\left(\pi\left(\frac{1}{2}-p\right)\right)}\right)^{1/(1+2p)}(1-|o_2(1)|), \tag{3.11}$$

при $p=\frac{1}{2}$

$$q_{1/2}(x)=\frac{2x^2}{\ln(x^2+1)};$$

при $p>\frac{1}{2}$

$$q_p(x)=(2p-1)\,x^2(1+|o_3(1)|), \tag{3.12}$$

$$q_p^{-1}(x)=(2p-1)^{-1/2}\sqrt{x}(1-|o_4(1)|),$$

где $|o_i(1)|>0$, $o_i(1)\xrightarrow{x\to\infty}0$, $i=1, 2, 3, 4$.

Отметим некоторые свойства функций $q_{1/2}$ и $q_{1/2}^{-1}$ при $p=\frac{1}{2}$. Пусть $c>1$ — некоторая константа, тогда

$$1<\frac{q_{1/2}(cx)}{q_{1/2}(x)}=c^2\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(c^2x^2+1)},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{q_{1/2}(cx)}{q_{1/2}(x)}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{q_{1/2}(cx)}{q_{1/2}(x)}=c^2, \tag{3.13}$$

$$1<\frac{q_{1/2}(cx)}{q_{1/2}(x)}<c^2. \tag{3.14}$$

Из соотношений (3.13), (3.14), переходя к обратным функциям при $c>1$, $\frac{2}{\ln 2}<y<\infty$, получаем

$$\sqrt{c}\, q_{1/2}^{-1}(y)<q_{1/2}^{-1}(cy)<(1+|o(1)|)\sqrt{c}\, q_{1/2}^{-1}(y), \tag{3.15}$$

где $o(1)\to 0$ при $y\to\infty$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения:

$$\gamma_p=\begin{cases}(1+2p)^{-1}, & 0<p<\frac{1}{2},\\ \frac{1}{2}, & p>\frac{1}{2};\end{cases}$$

$$\varkappa_p=\begin{cases}\left(\dfrac{\pi}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-2p)\right)}\right)^{1/(1+2p)} & 0<p<\frac{1}{2},\\ (2p-1)^{-1/2}, & p>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Вернемся к оценке $N(\lambda)$. Из (3.9) и (3.5) вытекает оценка

$$\sum_{l=1}^{N}\sum_{j\geqslant 1}\operatorname{card}\left\{k:\ 1\leqslant k<\frac{\alpha_l d_l}{\pi}\, q_p^{-1}\left(\frac{\lambda b_l}{\eta_j\alpha_l(1+\delta)^2}\right)\right\}\leqslant N(\lambda)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{l=1}^{N}\left[\sum_{j\geqslant 1}\operatorname{card}\left\{k:\ 1\leqslant k<\frac{\alpha_l d_l}{\pi}\, q_p^{-1}\left(\frac{\lambda b_l(1+\delta)^2}{\eta_j\alpha_l}\right)\right\}+\sum_{j\in A_\lambda}1\right]; \tag{3.16}$$

$$A_\lambda=\left\{j:\eta_j<\frac{\lambda b_l(1+\delta)^2}{\alpha_l(1+2p)}\right\}.$$

Заметим, что из условий, наложенных на функции α и b, вытекает, что при $z\in[-a,a]$ $\exists\,\beta_1,\beta_2$

$$0<\beta_1\leqslant\frac{b(z)}{\alpha(z)}\leqslant\beta_2<\infty.$$

Выберем некоторое достаточно большое $M>0$ так, чтобы при $\lambda\eta_j^{-1}>M$ выполнялись следующие оценки (одновременно для всех $1\leqslant i\leqslant N$):

$$\left(\operatorname{card}\left\{k:\ 1\leqslant k<\frac{\alpha_l d_l}{\pi}\, q_p^{-1}\left(\frac{\lambda b_l}{\eta_j\alpha_l(1+\delta)^2}\right)\right\}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\alpha_l d_l}{\pi}\, q_p^{-1}\left(\frac{\lambda b_l}{\eta_j\alpha_l(1+\delta)^2}\right)\right)^{-1}\geqslant 1-\delta;$$

$$\left(1+\operatorname{card}\left\{k\colon 1\leqslant k<\frac{\alpha_l d_l}{\pi}q_p^{-1}\left(\frac{\lambda b_l(1+\delta)^2}{\eta_j\alpha_l}\right)\right\}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\alpha_l d_l}{\pi}q_p^{-1}\left(\frac{\lambda b_l(1+\delta)^2}{\eta_j\alpha_l}\right)\right)^{-1}\leqslant 1+\delta.$$

Таким образом, из (3.16) вытекает, что для данного δ существуют такие числа M и Λ_1, что при $\lambda>\Lambda_1$ справедлива оценка

$$\frac{1-\delta}{\pi}\sum_{l=1}^{N}\sum_{\eta_j<\lambda/M}\alpha_l d_l q_p^{-1}\left(\frac{\lambda b_l}{\eta_j\alpha_l(1+\delta)^2}\right)\leqslant N(\lambda)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1+\delta}{\pi}\sum_{l=1}^{N}\sum_{\eta_j<\lambda/M}\alpha_l d_l q_p^{-1}\left(\frac{\lambda b_l(1+\delta)^2}{\eta_j\alpha_l}\right)+ \tag{3.17}$$

$$+2\sum_{l=1}^{N}\left[\sum_{\frac{\lambda}{M}\leqslant\eta_j<\frac{\lambda b_l(1+\delta)^2}{\alpha_l q_p(\pi/\alpha_l d_l)}}\frac{\alpha_l d_l}{\pi}q_p^{-1}\left(\frac{\lambda b_l(1+\delta)^2}{\eta_j\alpha_l}\right)\right]+$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\sum_{\frac{\lambda b_l(1+\delta)^2}{\alpha_l q_p\left(\frac{\pi}{\alpha_l d_l}\right)}<\eta_j<\frac{\lambda b_l(1+\delta)^2}{(1+2p)\alpha_l}}1.$$

Потребуем, чтобы функция $r(v,v')$ удовлетворяла следующим условиям: при любом $M>1+2p$
при $p>0$, $p\neq{}^1/_2$:

$$\sum_{\eta_j<\lambda}\left(\frac{1}{\eta_j}\right)^{\gamma_p}\left(\sum_{\eta_j<\lambda/M}\left(\frac{1}{\eta_j}\right)^{\gamma_p}\right)^{-1}\to 1,\ \lambda\to\infty; \tag{3.18}$$

при $p=\frac{1}{2}$:

$$\sum_{\eta_l<\frac{\lambda}{2}}q_{1/2}^{-1}\left(\frac{\lambda}{\eta_j}\right)\left(\sum_{\eta_j<\frac{\lambda}{M}}q_{1/2}^{-1}\left(\frac{\lambda}{\eta_j}\right)\right)^{-1}\to 1,\ \lambda\to\infty,\ p=\frac{1}{2}. \tag{3.19}$$

Из соотношений (3.11), (3.12), (3.15), увеличив при необходимости M, получаем при $\lambda>\Lambda_2$ оценки:

$p\neq\frac{1}{2}$

$$\sum_{\eta_j<\lambda/M}q_p^{-1}\left(\frac{\lambda b_l(1+\delta)^2}{\eta_j\alpha_l}\right)\left[\varkappa_p\left(\frac{\lambda b_l}{\alpha_l}\right)^{\gamma_p}\sum_{\eta_j<\lambda/M}\left(\frac{1}{\eta_j}\right)^{\gamma_p}\right]^{-1}<(1+\delta)^3, \tag{3.20}$$

$$\sum_{\eta_j<\lambda/M} q_p^{-1}\left(\frac{\lambda b_l}{\eta_j a_l(1+\delta)^2}\right)\left[\varkappa_p\left(\frac{\lambda b_l}{a_l}\right)^{\gamma_p}\sum_{\eta_j<\lambda/M}\left(\frac{1}{\eta_j}\right)^{\gamma_p}\right]^{-1}>(1+\delta)^{-3}; \quad (3.21)$$

при $p=1/2$

$$\sum_{\eta_j<\lambda/M} q_{1/2}^{-1}\left(\frac{\lambda b_l(1+\delta)^2}{\eta_j a_l}\right)\left[\left(\frac{b_l}{a_l}\right)^{1/2}\sum_{\eta_j<\lambda/M} q_{1/2}^{-1}\left(\frac{\lambda}{\eta_j}\right)\right]^{-1}<(1+\delta)^3, \quad (3.22)$$

$$\sum_{\eta_j<\lambda/M} q_{1/2}^{-1}\left(\frac{\lambda b_l}{\eta_j a_l(1+\delta)^2}\right)\left[\sum_{\eta_j<\lambda/M}\left(\frac{b_l}{a_l}\right)^{1/2} q_{1/2}^{-1}\left(\frac{\lambda}{\eta_j}\right)\right]^{-1}>(1+\delta)^{-3}. \quad (3.23)$$

Отсюда, учитывая условия (3.18), (3.19), получаем при $\lambda>\Lambda_3$ соотношения:
при $p\neq 1/2$

$$(1-\delta)<\left(\varkappa_p\left(\frac{\lambda b_l}{a_l}\right)^{\gamma_p}\sum_{\eta_j<\lambda/M}\left(\frac{1}{\eta_j}\right)^{\gamma_p}\right)\left(\varkappa_p\left(\frac{\lambda b_l}{a_l}\right)^{\gamma_p}\sum_{\eta_j<\lambda}\left(\frac{1}{\eta_j}\right)^{\gamma_p}\right)^{-1}<1; \quad (3.24)$$

при $p=1/2$

$$(1-\delta)<\left(\left(\frac{b_l}{a_l}\right)^{1/2}\sum_{\eta_j<\lambda/M} q_{1/2}^{-1}\left(\frac{\lambda}{\eta_j}\right)\right)\left(\left(\frac{b_l}{a_l}\right)^{1/2}\sum_{\eta_j<\lambda/1+2p} q_{1/2}^{-1}\left(\frac{\lambda}{\eta_j}\right)\right)^{-1}<1. \quad (3.25)$$

Далее, из формул (3.11), (3.12), (3.15), (3.18), (3.19) вытекают при $\lambda>\Lambda_4$ неравенства:
при $p\neq 1/2$

$$\left(\sum_{\frac{\lambda}{M}<\eta_j<\frac{\lambda b_l(1+\delta)^2}{a_l q_p(\pi/a_l d_l)}} q_p^{-1}\left(\frac{\lambda b_l(1+\delta)^2}{\eta_j a_l}\right)\right)\left(\varkappa_p\left(\frac{\lambda b_l}{a_l}\right)^{\gamma_p}\sum_{\eta_j<\lambda}\left(\frac{1}{\eta_j}\right)^{\gamma_p}\right)^{-1}< \quad (3.26)$$

$$<\left(\varkappa_p\left(\frac{\lambda b_l(1+\delta)^2}{a_l}\right)^{\gamma_p}\sum_{\frac{\lambda}{M}<\eta_j<\frac{\lambda b_l(1+\delta)^2}{a_l q_p(\pi/\alpha_l d_l)}}\left(\frac{1}{\eta_j}\right)^{\gamma_p}\right)\left(\varkappa_p\left(\frac{\lambda b_l}{a_l}\right)^{\gamma_p}\sum_{\eta_j<\lambda}\left(\frac{1}{\eta_j}\right)^{\gamma_p}\right)^{-1}<\delta;$$

при $p=1/2$

$$\left(\sum_{\frac{\lambda}{M}<\eta_j<\frac{\lambda b_l(1+\delta)^2}{a_l q_{1/2}(\pi/\alpha_l d_l)}} q_{1/2}^{-1}\left(\frac{\lambda b_l(1+\delta)^2}{\eta_j a_l}\right)\right)\left(\left(\frac{b_l}{a_l}\right)^{1/2}\sum_{\eta_j<\lambda/2} q^{-1}\left(\frac{\lambda}{\eta_j}\right)\right)^{-1}<\delta. \quad (3.27)$$

Заметим также, что из условий (3.18), (3.19) вытекают соотношения:

$$\left(\sum_{\frac{\lambda}{M}<\eta_j<\lambda} 1\right)\left(\lambda^{\gamma_p}\sum_{\eta_j<\lambda}\left(\frac{1}{\eta_j}\right)^{\gamma_p}\right)^{-1}\xrightarrow{\lambda\to\infty}0,\ p\neq\frac{1}{2}; \quad (3.28)$$

$$\Bigg(\sum_{\frac{\lambda}{M}<\eta_j<\frac{\lambda}{2}}1\Bigg)\Bigg(\sum_{\eta_j<\frac{\lambda}{2}} q_{1/2}^{-1}\Big(\frac{\lambda}{\eta_j}\Big)\Bigg)^{-1}\xrightarrow{\lambda\to\infty}0,\ p=\frac{1}{2}. \qquad (3.29)$$

Действительно, соотношение (3.28) вытекает из условия (3.18) и из того, что

$$M^{-\gamma_p}<\Bigg(\sum_{\frac{\lambda}{M}<\eta_j<\lambda}1\Bigg)\Bigg(\lambda^{\gamma_p}\sum_{\frac{\lambda}{M}<\eta_j<\lambda}\Big(\frac{1}{\eta_j}\Big)^{\gamma_p}\Bigg)^{-1}<1.$$

Аналогично соотношение (3.29) вытекает в силу (3.19) из оценки

$$\Bigg(\sum_{\frac{\lambda}{M}<\eta_j<\frac{\lambda}{2}}1\Bigg)\Bigg(\sum_{\eta_j<\frac{\lambda}{2}} q_{1/2}^{-1}\Big(\frac{\lambda}{\eta_j}\Big)\Bigg)^{-1}\leqslant\Bigg(\sum_{\frac{\lambda}{M}<\eta_j<\frac{\lambda}{2}} q_{1/2}^{-1}\Big(\frac{\lambda}{\eta_j}\Big)\Bigg)\times$$
$$\times\Bigg(\sum_{\eta_j<\frac{\lambda}{2}} q_{1/2}^{-1}\Big(\frac{\lambda}{\eta_j}\Big)\Bigg)^{-1}\xrightarrow{\lambda\to\infty}0.$$

Таким образом, используя соотношения (3.20)—(3.29) из оценки (3.17), получаем, что при $\lambda>\Lambda(\delta)$ справедливы неравенства: при $p\neq\frac{1}{2}$

$$(1-c_1\delta)\varkappa_p\lambda^{\gamma_p}\sum_{\eta_j<\lambda}\Big(\frac{1}{\eta_j}\Big)^{\gamma_p}\sum_{l=1}^{N}\frac{a_l d_l}{\pi}\Big(\frac{b_l}{a_l}\Big)^{\gamma_p}\leqslant N(\lambda)\leqslant$$
$$\leqslant(1+c_1\delta)\varkappa_p\lambda^{\gamma_p}\sum_{\eta_j<\lambda}\Big(\frac{1}{\eta_j}\Big)^{\gamma_p}\sum_{l=1}^{N}\frac{a_l d_l}{\pi}\Big(\frac{b_l}{a_l}\Big)^{\gamma_p}; \qquad (3.30)$$

при $p=\frac{1}{2}$

$$(1-c_2\delta)\sum_{\eta_j<\lambda/2} q_{1/2}^{-1}\Big(\frac{\lambda}{\eta_j}\Big)\sum_{l=1}^{N}\frac{a_l d_l}{\pi}\Big(\frac{b_l}{a_l}\Big)^{1/2}\leqslant N(\lambda)\leqslant$$
$$\leqslant(1+c_2\delta)\sum_{\eta_j<\lambda/2} q_{1/2}^{-1}\Big(\frac{\lambda}{\eta_j}\Big)\sum_{l=1}^{N}\frac{a_l d_l}{\pi}\Big(\frac{b_l}{a_l}\Big)^{1/2}. \qquad (3.31)$$

В силу выбора разбиения и произвольности δ из соотношений (3.30), (3.31) вытекает следующая

Теорема 3.1. Если функция $r(v,v')$ удовлетворяет условиям (3.18), (3.19), то справедливы формулы ($\lambda\to\infty$):

а) $0<p<\frac{1}{2}$

$$N(\lambda)=(1+o(1))\lambda^{1/(1+2p)}\left(\frac{\pi}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-2p)\right)}\right)^{1/(1+2p)}\times$$

$$\times\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\alpha^{2p/(1+2p)}(z)b^{1/(1+2p)}(z)dz\sum_{\eta_j<\lambda}\left(\frac{1}{\eta_j}\right)^{1/(1+2p)};\qquad(3.32)$$

б) $p=\frac{1}{2}$

$$N(\lambda)=(1+o(1))\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\sqrt{b(z)\alpha(z)}\,dz.\sum_{\eta_j<\lambda/2}q_{1/2}^{-1}\left(\frac{\lambda}{\eta_j}\right);\qquad(3.33)$$

в) $p>\frac{1}{2}$

$$N(\lambda)=(1+o(1))\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2p-1}}\sum_{\eta_j<\lambda}\frac{1}{\sqrt{\eta_j}}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\sqrt{b(z)\alpha(z)}\,dz.\qquad(3.34)$$

Следствие. В односкоростном случае для задачи

$$-\frac{\mu^2}{\alpha(z)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\alpha(z)}\frac{\partial u}{\partial z}\right)+u(z,\mu)=$$

$$=\frac{\lambda b(z)}{\alpha(z)}\int_0^1\mu^p\mu'^p u(z,\mu')\,d\mu';\qquad(3.35)$$

$$\left(u+\frac{\mu}{\alpha(z)}\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=a}=\left(u-\frac{\mu}{\alpha(z)}\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=-a}=0,\qquad(3.36)$$

рассматриваемой в пространстве $L_{2,\alpha}([-a,a]\times[0,1])$, имеем:

а) $0<p<\frac{1}{2}$

$$N(\lambda)=\frac{1+o(1)}{\pi}\lambda^{1/(1+2p)}\left(\frac{\pi}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-2p)\right)}\right)^{1/(1+2p)}\int_{-a}^{a}a^{\frac{2p}{1+2p}}(z)\,b^{\frac{1}{1+2p}}(z)\,dz;\qquad(3.37)$$

б) $p=\frac{1}{2}$

$$N(\lambda)=\frac{1+o(1)}{\pi}q_{1/2}^{-1}(\lambda)\int_{-a}^{a}\sqrt{b(z)\alpha(z)}\,dz;\qquad(3.38)$$

в) $p>\frac{1}{2}$

$$N(\lambda)=\frac{1+o(1)}{\pi\sqrt{2p-1}}\sqrt{\lambda}\int_{-a}^{a}\sqrt{b(z)\alpha(z)}\,dz. \tag{3.39}$$

Причем в этом случае условия (3.18), (3.19) снимаются.

§ 4. Асимптотические оценки собственных чисел. Дву- и трехмерная геометрия

В параграфе приведены асимптотические оценки собственных чисел для многоскоростного стационарного уравнения переноса с «четной» индикатрисой рассеяния в дву- и трехмерном случаях.

Пусть $Q=\{q=(p, v, s): p\in G,\ v\in V=[v_0, v_1],\ s\in\Omega\}$, где $\Omega=\{s\in\mathbf{R}^n,\ |s|=1\}$ — единичная сфера в $\mathbf{R}^n$; $n=2, 3$, $0\leqslant v_0<v_1<\infty$; G — ограниченная выпуклая область в $\mathbf{R}^n$ с кусочно-гладкой границей Γ. В пространстве $L_{2,\alpha}(Q)$ со скалярным произведением

$$(f, g)=\int_Q f(p, v, s)\bar{g}(p, v, s)\alpha(p, v)\,dp\,dv\,ds$$

рассмотрим задачу на собственные значения

$$-\left(s,\ \frac{1}{\alpha}\nabla\right)^2 u+u(p, v, s)=\frac{\lambda}{\alpha}\int_{V\times\Omega}\sigma(p, v, v', \mu_0)\,u(p, v', s')\,dv'ds', \tag{4.1}$$

$$\left(u-\frac{1}{\alpha}(s, \nabla u)\right)\Big|_{\gamma_-}=\left(u+\frac{1}{\alpha}(s, \nabla u)\right)\Big|_{\gamma_+}=0, \tag{4.2}$$

где $\gamma_+\equiv\Gamma\times V\times\{s:(s, \nu)>0\}$; $\gamma_-\equiv\Gamma\times V\times\{s:(s, \nu)<0\}$; ν — внешняя нормаль к Γ; $\mu_0=s_1\cdot s_1'+\ldots+s_n s_n'$ — косинус угла между направлениями s и s'; (s, ν) — косинус угла между направлениями s и ν; $p=(x_1, \ldots, x_n)$; $\left(s,\ \frac{1}{\alpha}\nabla\right)=\frac{1}{\alpha(p, v)}\left(s_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+s_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

Предположим, что функция $\alpha(p, v)$, характеризующая поглощение среды, измерима и удовлетворяет почти всюду условию

$$0<\alpha^0\leqslant\alpha(p, v)\leqslant\alpha^1<\infty,\quad p\in G,\ v\in V. \tag{4.3}$$

Относительно индикатрисы рассеяния $\sigma(p, v, v', \mu_0)$ предположим, что

$$\sigma(p, v, v', \mu_0)=\sum_{m=1}^{M}b_m(p)\,\sigma_m(v, v', \mu_0),\quad M<\infty,$$

где $b_m(p) \geqslant b_0 > 0$ — измеримы и ограничены п. в. на G, σ_m — вещественнозначны, $\sigma_m \in L_2(v \times v \times [-1, 1])$, $\sigma_m(v, v', \mu_0) = \sigma_m(v', v, \mu_0)$, $\sigma_m(v, v', -\mu_0) = \sigma_m(v, v'\mu_0)$, интегральные операторы $B_m : L_2(v \times \Omega) \to L_2(v \times \Omega)$ с ядрами σ_m неотрицательны. Откуда, в частности, вытекает, что оператор $B : L^2{}_{,\alpha}(Q) \to L_{2,\alpha}(Q)$, определенный формулой

$$(Bu)(p, v, s) = \frac{1}{\alpha(p, v)} \int\limits_{V \times \Omega} \sigma(p, v, v', \mu_0) u(p, v', s') ds' dv', \qquad (4.4)$$

ограничен и неотрицателен.

Обозначим через L оператор, стоящий в левой части (4.1) с краевым условием (4.2). Область определения $D(L)$ опишем так же, как в [2]. Пусть π_s — ортогональная проекция G на гиперплоскость, перпендикулярную направлению s и лежащую вне G, а $\pi_{\tilde{p}, s}$ — множество точек, по которому луч направления s, проходящий через точку $\tilde{p} \in \pi_s$, пересекает G. Очевидно, что $\pi_{\tilde{p}, s}$ является интервалом вида

$$\pi_{\tilde{p}, s} = \{\tilde{p} + \xi s, \ \xi_1 < \xi < \xi_2, \ \tilde{p} + \xi_1 \cdot s \in \Gamma, \ \tilde{p} + \xi_2 \cdot s \in \Gamma\}.$$

Область G так же, как в [2], может быть представлена декартовым произведением $G = \pi_s \times \pi_{\tilde{p}, s}$ и для любой функции $f \in L_1(Q)$:

$$\int\limits_Q f(q)\, dq = \int\limits_V dv \int\limits_\Omega ds \int\limits_{\pi_s} d\tilde{p} \int\limits_{\pi_{\tilde{p}, s}} f(\tilde{p} + \xi s, v, s)\, d\xi.$$

Область определения $D(L)$ оператора L состоит из функций u, удовлетворяющих условиям:

1. При почти всех $(\tilde{p}, v, s) \in \pi_s \times V \times \Omega$ функции $u(\tilde{p} + \xi s, v, s)$ и $\frac{1}{\alpha(\tilde{p} + \xi s, v)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(\tilde{p} + \xi s, v, s)$ абсолютно непрерывны на $\bar{\pi}_{\tilde{p}, s}$.

2. При почти всех $(\tilde{p}, v, s) \in \pi_s \times V \times \Omega$ функция $u(\tilde{p} + \xi s, v, s)$ удовлетворяет граничным условиям

$$u(\tilde{p} + \xi_1 s, v, s) = \frac{1}{\alpha(\tilde{p} + \xi_1 s, v)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(\tilde{p} + \xi s, v, s)\big|_{\xi = \xi_1},$$

$$u(\tilde{p} + \xi_2 s, v, s) = \frac{1}{\alpha(\tilde{p} + \xi_2 s, v)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(\tilde{p} + \xi s, v, s)\big|_{\xi = \xi_2}.$$

3.
$$-\frac{1}{\alpha(\widetilde{p}+\xi s,\, v)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\alpha(\widetilde{p}+\xi s,\, v)}\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+u\in L_{2,\alpha}(\pi_s\times\pi_{\widetilde{p},s}\times V\times\Omega).$$

В случае $G=\mathbf{R}^n$ под оператором L будем понимать расширение по Фридрихсу оператора L_0, определенного дифференциальным выражением $l_0u=-\left(s,\ \frac{1}{\alpha}\nabla\right)^2 u+u$ с областью определения $D(L_0)$, состоящей из таких функций, что $u\in L_{2,\alpha}(Q)$; для каждой функции существует постоянная R_u, что $u(p, v, s)\equiv 0$ при $|p|>R_u$, $u(\widetilde{p}+$ $+\xi s, v, s)$ — абсолютно непрерывна по ξ при почти всех $(v, s, \widetilde{p})$, $\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial\xi}\in C^\infty(Q)$.

Рассмотрим сначала случай, когда G — ограниченная выпуклая область. Потребуем выполнения следующих условий:

1. $\alpha(p, v)$ — непрерывна по v при п. в. $p\in G$; σ_m — непрерывны, причем существует непрерывная по v при п. в. p функция $\Theta(p, v)$ такая, что
$$\int\limits_{v_0}^{v_1}\sigma(p, v, v', 1)\Theta(p, v')\,dv'=\Theta(p, v)\int\limits_{v_0}^{v_1}\sigma(p, v, v, 1)\,dv \tag{4.5}$$
при п. в. $(p, v)\in G\times V$.

2. При $n=2$
$$|\sigma_m(v, v', \mu_0)-\sigma_m(v, v', 1)|<c(1-\mu_0),\quad \mu_0\in[0, 1],\quad v, v'\in V;$$
при $n=3$
$$|\sigma(v, v', \mu_0')-\sigma(v, v', \mu_0'')|<c|\mu_0'-\mu_0''|;\ \mu_0',\ \mu_0''\in[0, 1], v,\ v'\in V,$$
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\sigma(v, v', \cos\varphi)\,d\varphi=\sigma(v, v', 1)\quad (n=3)$$
справедлива следующая

Теорема 4.1. Если выполнены условия 1, 2, то для функции распределения собственных значений $N(\lambda)$ задачи (4.1), (4.2) имеет место асимптотическая оценка при $\lambda\to\infty$
$$c_1\lambda^n(1+o(1))\int\limits_G\left(\int\limits_V\sigma(p, v, v, 1)\,dv\right)^n dp\leqslant N(\lambda)\leqslant$$
$$\leqslant c_2\lambda^n(1+o(1))\int\limits_G\left(\int\limits_V\sigma(p, v, v, 1)\,dv\right)^n dp, \tag{4.6}$$

где c_1, c_2 — постоянные, зависящие от размерности пространства $\mathbf{R}^n$, геометрии области G и коэффициентов уравнения (4.1).

Замечание. В изотропном, а также односкоростном случае условие (4.5) снимается. Пусть теперь область G совпадает со всем пространством $\mathbf{R}^n$, а индикатриса рассеяния имеет вид $b(p)\sigma(v, v', \mu_0)$.

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия 1, 2, $b(p)\to 0$ при $p\to\infty$, $\int\limits_{R^n} b^n(p)\,dp=\infty$, $M(c\lambda)/M(\lambda)\xrightarrow{\lambda\to\infty}1$, где $M(\lambda)=\int\limits_{b(p)>\lambda^{-1}}\times$ $\times b^n(p)\,dp$. Если при любом $a>0\ \dfrac{b(p_1+p_2)}{b(p_1)}\xrightarrow{|p_1|\to\infty} 1$, $\alpha(p_1+p_2,v)/\alpha(p,v)\xrightarrow{|p_1|\to\infty} 1$ равномерно по всем p_2 таким, что $|p_2|<a$, то справедлива асимптотическая при $\lambda\to\infty$ оценка

$$\left(\frac{\lambda}{2^n}\right)^n\omega_n\,(1+o(1))\int\limits_{b(p)>\lambda^{-1}} b^n(p)\,dp\left(\int\limits_V\sigma(v,v,1)\,dv\right)^n\leqslant N(\lambda)\leqslant$$
$$\leqslant\lambda^n\omega_n\,(1+o(1))\int\limits_{b(p)>\lambda^{-1}} b^n(p)\,dp\left(\int\limits_V\sigma(v,v,1)\,dv\right)^n, \tag{4.7}$$

где $\omega_2=\pi$, $\omega_3=\dfrac{4}{3}\pi^4$. Доказательства теорем 4.1, 4.2 приведены в [12, 13].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузнецов Е. С.* Об установлении баланса лучистой энергии в поглощающей и рассеивающей атмосфере // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1940.

2. *Владимиров В. С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. МИ АН СССР. 1961. Т. 61. 158 с.

3. *Гермогенова Т. А.* Обобщенные решения краевых задач для уравнения переноса // ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9, № 3. С. 605—625.

4. *Гермогенова Т. А.* Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука, 1986. 272 с.

5. *Костюченко А. Г., Саргсян И. С.* Распределение собственных значений. М.: Наука, 1979. 400 с.

6. *Отелбаев М.* Об асимптотике спектра оператора переноса в плоско-параллельном случае // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 1. С. 51—53.

7. *Отелбаев М.* К асимптотическим формулам собственных чисел оператора Штурма — Лиувилля // Сибирский мат. журн. 1983. Т. 24, № 4. С. 116—131.

8. *Отелбаев М.* Асимптотика собственных чисел оператора Штурма — Лиувилля. I // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1979. № 5. С. 40—44.

9. *Отелбаев М.* Асимптотика собственных чисел оператора Штурма — Лиувилля. 2 // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1980. № 1. С. 48—52.

10. *Турмухамбетов Д. Н.* Об асимптотике спектра многоскоростного оператора переноса в плоско-параллельном случае // Дифференциальные уравнения, теории функций и их приложения. Алма-Ата, 1986. С. 70—73.

11. *Турмухамбетов Д. Н.* О распределении спектра многоскоростного оператора переноса с четной индикатрисой рассеяния в плоско-параллельном случае // Деп. в КазНИИНТИ. 1987, № 1639. 21 с.

12. *Турмухамбетов Д. Н.* О распределении спектра многоскоростного оператора переноса с четкой индикатрисой рассеяния // Теория функций, уравнения математической физики и их приложения. Алма-Ата, 1988. С. 58—62.

13. *Турмухамбетов Д. Н.* Распределение спектра оператора переноса с четной индикатрисой рассеяния: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Алма-Ата, 1989.

Ф. С. РОФЕ-БЕКЕТОВ, Э. З. ГРИНШПУН

О САМОСОПРЯЖЕННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Самосопряженные дифференциальные операторы в L_2-пространствах применяются, например, при описании динамики квантовомеханических систем. Симметрический оператор с плотной областью определения не всегда имеет самосопряженные расширения, а в случае, когда такие расширения существуют, они не обязательно единственны.

Обычно для оператора, задаваемого формально симметрическим дифференциальным выражением l, нетрудно найти подходящую плотную область определения D, на которой данное дифференциальное выражение порождает корректно заданный симметрический оператор L. Поэтому важен вопрос о существенной самосопряженности оператора L на D, т. е. при каких условиях замыкание в пространстве L_2 оператора L, определенного на D, является самосопряженным оператором.

Данному вопросу, а также методам изучения существенной самосопряженности дифференциальных операторов посвящены различные монографии [5, 6, 13, 19, 20, 25, 26, 32, 36, 44], а также обзорные статьи [1, 14, 15, 56, 57].

Вопросы существенной самосопряженности псевдодифференциальных операторов рассматриваются в монографии [49].

Первым критерием существенной самосопряженности многомерного оператора Шредингера с непрерывным вещественным потенциалом в $L_2(\mathbf{R}^n)$

$$Lu=-\Delta u+q(x)u, \quad x\in\mathbf{R}^n \tag{1}$$

явилась

Теорема Карлемана. Если потенциал $q(x)$ положителен, то оператор (1) существенно самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, т. е. имеет самосопряженное замыкание в $L_2(\mathbf{R}^n)$.

Теорема Повзнера — Глазмана утверждает существенную самосопряженность оператора (1), если он положителен на финитных функциях, т. е., если

$$(Lu, u) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n). \tag{2}$$

Для эллиптических операторов второго порядка общего вида

$$L = -\sum_{j,k=1}^{n} [\partial_j + ib_j(x)] a_{jk}(x) [\partial_k + ib_k(x)] + q(x), \quad x \in R^n,$$

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{3}$$

с гладкими коэффициентами ее обобщает

Теорема Березанского. Если оператор (3) положителен на финитных функциях в смысле (2), то он существенно самосопряжен при условии глобально конечной скорости распространения, т. е. если при финитных начальных данных решения уравнения $u_{tt} + Lu = 0$ финитны по x в любой момент $t > 0$.

Замечание. При условиях теоремы Карлемана для функций из $D(L)$ — области определения самосопряженного оператора L (1), сходится интеграл

$$\int_{R^n} |\nabla u|^2 dx < \infty, \tag{4}$$

однако это свойство утрачивается при условиях теорем Повзнера — Глазмана и Березанского, чему известны примеры. Легко видеть, что, заменяя (2) условием

$$(Lu, u) \geqslant \varepsilon(-\Delta u, u) \quad \text{при} \quad u \in C_0^\infty(R^n), \ \varepsilon > 0, \tag{5}$$

мы обеспечим как существенную самосопряженность оператора Шредингера (в силу теоремы Повзнера — Глазмана), так и (4).

Отметим, что без ограничений на скорость роста $a_{jk}(x)$ самосопряженность оператора (3) может нарушаться даже при $q(x) \equiv b(x) \equiv 0$ [48]. Соответствующий пример построен в [28].

Как показывает теорема Титчмарша и Сирса *, для самосопряженности оператора Шредингера вместо положительности потен-

* Ее справедливость в R^n при любом n показана в работе [29] (Титчмарш и Сирс доказали теорему лишь при $n = 1,2$).

циала достаточно, чтобы он не слишком быстро стремился к $-\infty$ при $|x|\to\infty$, например $q(x)\geqslant -K|x|^2$, $K>0$, $x\in\mathbf{R}^n$, или, более в общем виде

$$q(x)\geqslant -KQ(|x|),\quad K>0,\quad x\in R^n, \tag{6}$$

где

$$\int^{\infty} Q^{-1/2}(r)\,dr=\infty, \tag{7}$$

и либо

$$Q(r)\geqslant 1,\ \ |Q^{-3/2}(r)\,Q'(r)|\leqslant K, \tag{8}$$

либо $Q(r)$ монотонна. Последнее условие сводится к варианту теоремы с требованием (7), которое является, таким образом, более общим [45].

Более того, как впервые показали в одномерном случае Хартман [55] для операторов второго порядка* и Р. С. Исмагилов [21] для двучленных операторов любого четного порядка вида

$$Ly=(-1)^n y^{(2n)}+q(x)\,y,\quad x\in\mathbf{R}=(-\infty,+\infty) \tag{9}$$

с вещественным непрерывным потенциалом $q(x)$, их существенная самосопряженность в $L_2(-\infty,\infty)$ обеспечивается ограничениями на потенциал лишь на последовательности непересекающихся интервалов конечной длины, уходящей к $\pm\infty$. Интуитивные физические соображения, приводящие к этим условиям, заключаются в том, что квантовая частица, захваченная рядом достаточно больших потенциальных барьеров, не может уйти в бесконечность за конечное время.

Теорема Исмагилова [21]. Предположим, что существует такая последовательность отрезков $\Delta_k=(a_k,\ b_k)$ с длиной $\delta_k=b_k-a_k$ и такая последовательность чисел $\gamma_k>1$ $(k=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$, что: а) при $k\to+\infty$ отрезок Δ_k уходит в $+\infty$, а при $k\to-\infty$ в $-\infty$; б) если $x\in\Delta_k$, то $q(x)\geqslant -c\gamma_k$ (c не зависит от k); в) ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/(\gamma_k+\delta_k^{-2n})$ и $\sum\limits_{k=-\infty}^{-1} 1/(\gamma_k+\delta_k^{-2n})$ расходятся либо в

$\delta_k\gamma_k^{1/2n}>\varepsilon_0$ $(k=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\delta_k\gamma_k^{-1+1/2n}=\sum\limits_{k=-\infty}^{-1}\delta_k\gamma_k^{-1+1/2n}=\infty.$

Тогда оператор L вида (9) существенно самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbf{R})$.

Приведем доказательство Р. С. Исмагилова [21]. Через A_i, B_i, C_i будем обозначать абсолютные постоянные. Область опре-

* Хартман рассматривал случай последовательности интервалов постоянной длины.

деления сопряженного оператора $D(L^*)$ состоит из функций $u(x)$ [3], у которых все производные до порядка $2n-1$ абсолютно непрерывны и

$$lu=(-1)^n u^{(2n)}+q(x)u\in L_2(\mathbf{R}).$$

Доказательство теоремы опирается на леммы:

Лемма 1. Пусть $\Delta_k=(a_k, b_k)$, $(k=\pm1, \pm2, \ldots)$ — такая последовательность непересекающихся интервалов, что Δ_k уходит в $+\infty$ при $k\to+\infty$; положим $\delta_k=b_k-a_k$. Если для любой функции $y\in D(L^*)$

$$\sum_{l=0}^{n}\delta_k^{-2n+2l}\int_{\Delta^k}|y^{(l)}(x)|^2dx\to0 \quad \text{при} \quad |k|\to\infty, \tag{10}$$

то оператор L самосопряжен в существенном.

Доказательство. Для доказательства существенной самосопряженности L достаточно показать симметричность оператора L^*, т. е. что для любых $u, v\in D(L^*)$ $<L^*u, v>=<u, L^*v>$ $(<\cdot,\cdot>$ — скалярное произведение в $L_2(\mathbf{R}))$.

Для каждого $k=\pm1, \pm2, \ldots$ построим такую гладкую функцию $\varphi_k(x)$, что $0\leqslant\varphi_k(x)\leqslant1$, $\varphi_k(x)=0$ вне отрезка (a_{-k}, b_k), $\varphi_k(x)=1$ на отрезке $[b_{-k}, a_k]$ и $|\varphi_k^{(i)}(x)|<c\delta_k^{-i}$ для всех x_i и $0\leqslant i\leqslant 2n$. Положим $\psi_k(x)=1-\varphi_k(x)$.

Пусть $u, v\in D(L^*)$. Очевидно, $(u\cdot\varphi_k)\in D(L^*)$ и $(u\cdot\psi_k)\in D(L^*)$.

$$<L^*u, v>-<u, L^*v>=<l(u\varphi_k)+l(u\psi_k), v>-<u, lv>=$$
$$=<l(u\varphi_k), v>-<u, lv>+<l(u\psi_k), v>.$$

Так как $u\varphi_k$ — финитная функция, то

$$<l(u\varphi_k), v>-<u, lv>=<u\varphi_k, lv>-<u, lv>=$$
$$=-<u\psi_k, lv>\to0 \text{ при } k\to\infty.$$

Осталось показать, что $<l(u\psi_k), v>\to$ при $k\to\infty$.

$$<l(u\psi_k), v>=<\psi_k lu, v>+\int_{\Delta_k}(-1)^n\sum_{l=1}^{2n}c_{2n}^{i}u^{(2n-i)}\psi_k^{(l)}dx.$$

Очевидно, что $<\psi_k\cdot lu, v>\to0$ при $|k|\to\infty$. Второе слагаемое преобразуем интегрированием по частям и оцениваем по неравенству $2|ab|\leqslant a^2+b^2$:

$$\left|\int_{\Delta_k}(-1)^n\sum_{l=1}^{2n}c_{2n}^l u^{(2n-l)}\psi_k^{(l)}v\,dx\right|=$$

$$=\left|\sum_{l=0}^{n-1}\int_{\Delta_k}[A_l\psi_k^{(2n-2l)}u^{(l)}v^{(l)}+B_l\psi_k^{(2n-2l-1)}u^{(l)}v^{(l+1)}]dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{l=0}^{n}\delta_k^{-2n+2l}\int_{\Delta_k}(|u^{(l)}|^2+|v^{(l)}|^2)\,dx\to 0,\quad |k|\to\infty.$$

Лемма доказана.

Для дальнейшего зафиксируем отрезок $\Delta=(a,\ b)$ длиной $h=b-a$. Возьмем функцию $\sigma_k(x)=[(x-a)(b-x)]^{2n-2k}$ и положим для произвольной $2n$ раз непрерывно-дифференцируемой функции $y(x)$

$$B_l(y)=h^{2n-2l}\int_{\Delta}\sigma_{n-l}(x)\,|y^{(l)}(x)|^2dx.$$

Лемма 2. Существует $c_0>0$ такое, что для любой $y(x)$, $p>1$ и $2\leqslant m\leqslant n$

$$B_m(y)>pB_{m-1}(y)-c_0p^2B_{m-2}(y). \tag{11}$$

Доказательство. Справедливо тождество

$$\int_{\Delta}\left[((x-a)(b-x))^{2m}z''+\frac{1}{2}ph^2((x-a)(b-x))^{m-2}z\right]^2dx=$$

$$=\int_{\Delta}\Big\{[(x-a)(b-x)]^{2m}|z''|^2-ph^2[(x-a)(b-x)]^{2m-2}|z'|^2+$$

$$+\frac{p^2h^2}{4}[(x-a)(b-x)]^{2m-4}\left[h^2+\frac{\Phi_2(x)}{p}\right]z^2\Big\}dx,$$

где $\Phi_2(x)$ — многочлен второй степени, причем $|\Phi_2(x)|<c\cdot h^2$. Отсюда

$$\int_{\Delta}[(x-a)(b-x)]^{2m}|z''|^2dx\geqslant p\cdot h^2\int_{\Delta}[(x-a)(b-x)]^{2m-2}|z'|^2dx-$$

$$-c_0\cdot p^2h^4\int_{\Delta}[(x-a)(b-x)]^{2m-4}|z|^2dx.$$

Полагая $z=y^{(m-2)}$, получаем отсюда неравенство (11).

Лемма 3. Пусть на отрезке $\Delta=(a, b)$ с длиной $h=b-a$ справедливо неравенство $q(x)>-c\gamma$. Отрезок $\left(a+\frac{h}{3}, b-\frac{h}{3}\right)$ обозначим Δ_1. Тогда для любой $y\in D(L^*)$

$$\sum_{i=0}^{n}\int_{\Delta_1} h^{-2n+2i}|y^{(i)}(x)|^2dx\leqslant c_0\int_{\Delta}\left[\gamma|ly|^2+\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}+h^{-2n}\right)|y|^2\right]dx. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $\tau(x)=\gamma^{-1}h^{-4n}\sigma_0(x)$, где $\sigma_0(x)$ — функция, введенная выше. Из тождества

$$\int_\Delta |ly-\tau y|^2dx=\int_\Delta |ly|^2dx+\int_\Delta \tau^2y^2dx-2\int_\Delta [(\tau y)^{(n)}y^{(n)}+q\tau y^2]\,dx$$

находим

$$\int_\Delta (\tau y)^{(n)}y^{(n)}dx\leqslant\int_\Delta [|ly|^2+\tau^2y^2-q\tau y^2]\,dx. \tag{13}$$

Преобразуем левую часть неравенства, интегрируя по частям:

$$\int_\Delta(\tau y)^{(n)}y^{(n)}dx=\frac{1}{\gamma h^{4n}}\int_\Delta \sigma_0(x)\,|y^{(n)}(x)|^2dx+\int_\Delta\sum_{i=0}^{n-1}c_i\sigma_0^{(2n-2i)}|y^{(i)}|^2dx.$$

Легко показать, что $\sigma_0^{(2n-2i)}=\sigma_{n-i}P_i(x)$, где $P_i(x)$ — многочлен степени $2n-2i$, причем $|P_i(x)|<B_0h^{2n-2i}$. Поэтому

$$\int_\Delta(\tau y)^{(n)}y^{(n)}dx\geqslant\frac{1}{\gamma h^{4n}}\int_\Delta\left[\sigma_0|y^{(n)}|^2dx-c_2\sum_{i=0}^{n-1}h^{2n-2i}\right]\times$$

$$\times\sigma_{n-i}|y^{(i)}|^2dx=\frac{1}{\gamma h^{4n}}\left[B_n(y)-c_2\sum_{i=0}^{n-1}B_i(y)\right]. \tag{14}$$

Положим в неравенстве (11) $m=n$, $p=c_2+1$ и полученную таким образом оценку для $B_n(y)$ подставим в (14). Тогда

$$\int_\Delta(\tau y)^{(n)}y^{(n)}dx\geqslant\frac{1}{\gamma h^{4n}}\left[B_{n-1}(y)-c_3\sum_{i=0}^{n-2}B_i(y)\right].$$

Точно также с помощью неравенства (11) (при $m=n-1$, $p=c_3+1$) исключим из первой части последнего неравенства член $B_{n-1}(y)$ и т. д. В результате получим цепочку неравенств вида

$$\int\limits_{\Delta}(\tau y)^{(n)}y^{(n)}dx \geqslant \frac{1}{\gamma h^{4n}}\left[B_k(y)-A_0\sum_{i=0}^{k-1}B_i(y)\right], \quad k=1, 2, \ldots, n-1.$$

Из этих неравенств, применяя (11), имеем последовательно

$$\frac{1}{\gamma_0 h^{4n}}[B_i(y)-A_1B_0(y)] \leqslant 2\int\limits_{\Delta}(\tau y)^{(n)}(y)^{(n)}dx, \quad i=1, 2, \ldots, n. \tag{15}$$

Но

$$B_i(y)=h^{2n-2i}\int\limits_{\Delta}\sigma_{n-i}|y^{(i)}|^2dx \geqslant h^{2n-2i}\int\limits_{\Delta_1}\sigma_{n-i}|y^{(i)}|^2dx \geqslant$$

$$\geqslant ch^{2n-2i}\int\limits_{\Delta_1}|y^{(i)}|^2dx, \quad i=1, 2, \ldots, n, \; B_0(y)=h^{2n}\int\limits_{\Delta}|y|^2dx.$$

Поэтому из (15) находим

$$\frac{1}{\gamma}c_1h^{-2n+2i}\int\limits_{\Delta_1}|y^{(i)}|^2dx-\frac{c_2}{\gamma h^{2n}}\int\limits_{\Delta}|y|^2dx < \int\limits_{\Delta}(\tau y)^{(n)}y^{(n)}dx, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Сложив эти неравенства, получим

$$\frac{c_1}{\gamma}\sum_{i=0}^{n}h^{-2n+2i}\int\limits_{\Delta_1}|y^{(i)}|^2dx-\frac{c_2}{\gamma}h^{-2n}\int\limits_{\Delta}|y|^2dx \leqslant \int\limits_{\Delta}(\tau y)^{(n)}y^{(n)}dx. \tag{16}$$

Очевидно, что правая часть неравенства (13) не превосходит суммы

$$c_3\int\limits_{\Delta}\left[(ly)^2+\frac{1}{\gamma^2}y^2+y^2\right]dx.$$

Отсюда и из неравенства (16) вытекает неравенство (12). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть Δ_k $(k=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ — отрезки, указанные в условии теоремы. Из лемм 1 и 3 следует, что оператор L самосопряжен, если

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\Delta_k}\left[(ly)^2\gamma_k+\left(\frac{1}{\gamma_k}+\gamma_k+\sigma_k^{-2n}\right)y^2\right]dx=$$

$$=\lim_{k\to-\infty}\int\limits_{\Delta_k}\left[(ly)^2\gamma_k+\left(\frac{1}{\gamma_k}+\gamma_k+\delta_k^{-2n}\right)y^2\right]dx=0.$$

Рассмотрим, например, случай $k \to +\infty$. Имеем

$$\int\limits_{\Delta_k}\left[(ly)^2\gamma_k+\left(\frac{1}{\gamma_k}+\gamma_k+\delta_k^{-2n}\right)y^2\right]dx \leqslant c(\gamma_k+\delta_k^{-2n})\int\limits_{\Delta_k}[y^2+(ly)^2]\,dx$$

(мы воспользовались тем, что $\gamma_k>1$). Если мы предположим, что $(\gamma_k+\delta_k^{-2n})\int\limits_{\Delta_k}[y^2+(ly)^2]\,dx>\varepsilon_0$ для всех $k>k_0$, то получим

$$\frac{\varepsilon_0}{\gamma_k+\delta_k^{-2n}}<\int\limits_{\Delta_k}[y^2+(ly)^2]\,dx.$$

Но тогда в силу $y\in L_2$, $ly\in L_2$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{\varepsilon_0}{\gamma_k+\delta_k^{-2n}}<\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\Delta_k}[y^2+(ly)^2]\,dx<\infty,$$

что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

При условиях предыдущей теоремы длины интервалов не могут слишком быстро стремиться к нулю, однако, для операторов второго порядка это становится допустимым, если потребовать, чтобы потенциал на этих интервалах был «подперт» снизу достаточно большими положительными числами, как показывает еще одна

Теорема Исмагилова [22]. При $n=1$ оператор L (17) существенно самосопряжен, если $q(x)$ удовлетворяет неравенствам

$$q(x)>q_k>0, \quad (x\in\Delta_k,\ k=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots), \tag{18}$$

где

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{q_k}\,\delta_k^3=\sum_{k=-\infty}^{-1}\sqrt{q_k}\,\delta_k^3=-\infty. \tag{19}$$

(Очевидно, если рассматривается оператор на полуоси, то требуется расходимость лишь одного из рядов (19), которые ей отвечают, плюс самосопряженное краевое условие при $x=0$.)

В дальнейшем результаты Р. С. Исмагилова были обобщены многими авторами [12, 30, 31, 37—40, 42, 53, 54, 61] для операторных коэффициентов, многомерных эллиптических операторов высокого порядка, обыкновенных дифференциальных операторов высокого порядка с ненулевыми коэффициентами при промежуточных производных.

В многомерном случае условиям самосопряженности типа Хартмана — Исмагилова соответствуют ограничения потенциала на последовательности замкнутых телесных слоев, например, концентрических сферических слоев. Если все пространство представить в виде объединения таких слоев, примыкающих друг к другу, но не налегающих один на другой, то из теорем типа Исмагилова можно получить условия типа Титчмарша — Сирса. С другой стороны, из полученного Ф. С. Рофе-Бекетовым [45, 46] обобщения теоремы Титчмарша — Сирса, которое допускает обращение $Q(x)$ в бесконечность в условиях (6) — (8) на множестве положительной меры и не требует сферической симметричности $Q(x)$, им получены для оператора Шредингера условия самосопряженности типа Хартмана — Исмагилова (т. е. в виде ограничений на слоях). Эта теорема, обобщенная Бруснецовым и Рофе-Бекетовым [45, 46] на операторы порядка $2n$, приведена ниже (в не самом общем виде).

Для этого рассмотрим симметрический эллиптический дифференциальный оператор

$$Lu = \sum_{|\alpha|\leqslant r} a_\alpha(x) D^\alpha u, \quad x \in R^n, \tag{20}$$

где α — мультииндекс; $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_j = \frac{1}{i}\partial_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Это выражение наряду с производными высших порядков по каждой из координат содержит также и смешанные производные. В ряде случаев формулировать и доказывать теоремы об условиях существенной самосопряженности удобнее для оператора, не содержащего смешанных производных. Оказывается, любой дифференциальный оператор можно записать в форме, не содержащей смешанных производных, если увеличить количество направлений, по которым производится дифференцирование, взяв их больше, чем размерность пространства R^n.

Поясним это на простейших примерах.

Пусть $n=2$, $L=\Delta^2=(\partial_x^2+\partial_y^2)^2=\partial_x^4+2\partial_x^2\partial_y^2+\partial_y^4$, где x, y — декартовы координаты в $\mathbf{R}^2$. Выражение содержит смешанную производную $2\partial_x^2\partial_y^2$. Однако, если кроме направлений дифференцирования вдоль x и y ввести еще два параллельно биссектрисам первого и второго координатных углов:

$$\partial_\xi = \frac{\partial_x+\partial_y}{\sqrt{2}}, \quad \partial_\eta = \frac{\partial_x-\partial_y}{\sqrt{2}},$$

то получим

$$\Delta^2 = (\partial_x^2+\partial_y^2)^2 = \frac{2}{3}\{\partial_x^4+\partial_y^4+\partial_\xi^4+\partial_\eta^4\}.$$

Этот же оператор можно записать в виде суммы четвертых производных вдоль всевозможных направлений, которая превращается в интеграл по окружности. А именно, если орт η направлен под углом φ к оси x, то

$$d\eta=\cos\varphi\cdot\partial_x+\sin\varphi\cdot\partial_y,$$

где ∂_η — дифференцирование в направлении η. Тогда можно записать

$$\Delta^2=c\int\limits_0^{2\pi}\partial^4\eta d\varphi=c\int\limits_0^{2\pi}(\cos\varphi\cdot\partial_x+\sin\varphi\partial_y)^4\partial\varphi,$$

где $c^{-1}=\int\limits_0^{2\Omega}\cos^4\varphi d\varphi$, или $c=\frac{4}{3\pi}$.

Рассмотрим эллиптический дифференциальный оператор, записанный в виде

$$Lu=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\int\limits_\omega(\eta,\nabla_x)^j\{P_j(x,\eta)\partial_\eta^j u(x)\}\mu(\partial\omega_n), \qquad (21)$$

где ω — единичная сфера в R^n, $\eta\in\omega$, $|\eta|=1$, $\eta\in R^n$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\eta_k^2=1$,

$\partial_\eta=(\eta,\nabla_x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\eta_k\partial_k$, ∂_η — есть производная по направлению η, $\mu(\partial\omega_\eta)$ — неотрицательная мера на единичной сфере, которая может быть сосредоточенной и в конечном числе точек (тогда интеграл превращается в обыкновенную конечную сумму). Если мера сосредоточена на концах координатных ортов, то (21) превращается в

$$Lu=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\sum_{k=1}^{n}\partial_k^j P_{j,k}(x)\partial_k^j u(x). \qquad (22)$$

В качестве меры μ всегда можно взять лебегову меру на сфере ω.

Всюду ниже считаем коэффициенты оператора L вида (21) достаточно гладкими и вещественными, причем

$$\int\limits_\omega P_m(x,\eta)(\eta,\xi)^{2m}\mu(d\omega_\eta)\geqslant\varepsilon(x)|\xi|^{2m},\ \varepsilon(x)>0.$$

Это условие, обеспечивающее сильную эллиптичность оператора (21), в частном случае (22) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n}P_{m,k}(x)\xi_k^{2m}\geqslant\varepsilon(x)(\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2)^m,\ \varepsilon(x)>0.$$

Теорема 1. [8, 9]. Пусть коэффициенты $P_j(x,\eta)$ эллиптического оператора L вида (21) или (22) подчинены условиям

$$\varepsilon a^{2m}(|x|)\leqslant p_m(x,\eta)\leqslant ca^{2m}(|x|),\quad \varepsilon>0,\ c>0,$$

$$|p_s(x,\eta)|\leqslant ca^{2s}(|x|)q^{2m-2s}(|x|),\quad s=\overline{1,m-1},$$

$$p_0(x)\geqslant -cq^{2m}(|x|),$$

где функции $0<a(t)\ni C^m$, $1\leqslant q(t)\leqslant\infty$, $q^{-1}(t)\in C^{2m}$ таковы, что

$$\left|\frac{d^j}{dt^j}[a(t)q^{-1}(t)]\right|\leqslant c[a(t)q^{-1}(t)]^{1-j},\quad j=\overline{1,m-1},$$

$$\left|\frac{d^j}{dt^j}q^{-m}(t)\right|\leqslant ca^{-j}(t)q^{-(m-j)}(t),\quad j=\overline{1,m}, \tag{23}$$

$$\int^{\infty}a^{-1}(t)q^{-2m+1}(t)\,dt=\infty,$$

тогда оператор L существенно самосопряжен в $L_2(\mathbf{R}^n)$ и для каждой гладкой функции $u(x)\in D(L)$ сходятся интегралы

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n\times\omega}q^{-2s}(|x|)a^{2s}(|x|)\,|\partial_\eta^s u(x)|^2\mu(d\omega_\eta)\,dx<\infty,\quad s=\overline{0,m}.$$

Теорема 1 допускает обобщение на случай, когда ограничения для коэффициентов оператора L не являются сферически симметричными. Приведем вытекающее из этого обобщения теоремы 1

Следствие. Пусть $\{\Omega_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность конечных односвязных областей в $\mathbf{R}^n$, h_k — минимальная ширина телесного слоя $T_k=\Omega_{2k+1}\setminus\Omega_{2k}$ и пусть $\alpha_k>0$ и $\gamma_n\geqslant 1$ — такие константы, что для коэффициентов оператора L выполнены на слоях оценки

$$|p_s(x,\eta)|\leqslant c\max\{\alpha_k^{2m}h_k^{2s-2m},\ \alpha_k^{2s}\gamma_k^{1-\frac{s}{m}}\},\quad x\in T_k, s=\overline{1,m-1},$$

$$\varepsilon\alpha_k^{2m}\leqslant p_m(x,\eta)\leqslant c\alpha_k^{2m},\quad x\in T_k,\quad k=1,2,\ldots,$$

$$p_0(x)\geqslant-\frac{1}{\varepsilon}\gamma_k,\quad x\in T_k$$

и расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\min\left\{\left(\frac{h_k}{\alpha_k}\right)^{2m},\ \frac{h_k}{\alpha_k}\gamma_k^{-1+\frac{1}{2m}}\right\}=\infty,$$

тогда оператор L существенно самосопряжен независимо от поведения коэффициентов между слоями (но при сохранении гладкости и эллиптичности симметрического дифференциального выражения).

В теореме 1 оператор L мог не быть полуограниченным, но зато ограничения на рост коэффициентов были более жесткими, чем в следующей теореме 2, при условиях которой оператор L оказывается полуограниченным.

Теорема 2 [8, 9]*. Если коэффициенты $p_s(x,\eta)$ эллиптического оператора L вида (21) или (22) подчинены условиям $p_0(x) \geqslant \geqslant \varepsilon g^{2m}(|x|)$,

$$\varepsilon h^{2m}(|x|) \leqslant p_m(x,\eta) \leqslant ch^{2m}(|x|), \quad \varepsilon>0,\ c>0,$$

$$-\gamma(|x|)h^{2s}(|x|)g^{2m-2s}(|x|) \leqslant p_s(x,\eta) \leqslant ch^{2s}(|x|)g^{2m-2s}(|x|),$$

$$s=\overline{1, m-1},$$

где $0<g(t)$, $h(t)\in C^m$ и при $t\to\infty$, $\gamma(t)\to 0$, $g(t)\to\infty$, $h'(t)= =0(g(t))$,

$$\left|\frac{d^j}{dt^j}g(t)\right| = o(g^{j+1}(t)h^{-j}(t)), \quad j=\overline{1, m},$$

то оператор L существенно самосопряжен в $L_2(\mathbf{R}^n)$ и полуограничен, имеет чисто дискретный спектр и для функции $u(x)\in D^{2m}(L)$ сходятся интегралы

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n\times\omega} g^{2m-2s}(|x|)h^{2s}(|x|)\,|\partial_\eta^s u(x)|^2\mu(\partial\omega_\eta)\,dx<\infty, \quad s=\overline{0, m}.$$

В следующей теореме промежуточные коэффициенты не предполагаются подчиненными крайним коэффициентам в отличие от теорем 1 и 2.

Теорема 3 [8, 9]. Пусть коэффициенты $p_j(x,\eta)$ эллиптического оператора L вида (21) или (22) таковы, что

$$p_m(x,\eta) \geqslant \varepsilon > 0,\ p_s(x,\eta) \geqslant -c,\ s=\overline{0, m-1},$$

$$\gamma^2(|x|)([p_{s+1}(x,\eta)]_+ + 1) \leqslant c([p_s(x,\eta)]_+ + 1)^{1-\frac{1}{m-s}},$$

где функция $\gamma(t)\in C^{m-1}$, $0\leqslant\gamma(t)\leqslant 1$,

$$|d^j\gamma(t)/dt^j| \leqslant c\gamma^{j+1}(t), \quad j=\overline{0, m-1} \text{ и } \int\limits^{\infty}\gamma(t)\,dt=\infty,$$

* Авторы не требуют сферической симметричности ограничений на коэффициенты в [1,2].

тогда оператор L существенно самосопряжен и для каждой функции $u(x) \in D^{2m}(L_M)$ сходятся интегралы

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n \times \omega} (|p_s(x, \eta)|+1) |\partial_\eta^s u(x)|^2 \mu(d\omega_\eta)\, dx < \infty.$$

Для обыкновенных дифференциальных операторов в $L_2(\mathbf{R})$ $(\mathbf{R}=(-\infty, +\infty))$

$$ly=\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (p_k(x) y^{(k)})^{(k)}, \quad p_k(x)>0, \quad k=\overline{0, n} \tag{24}$$

приведенные теоремы и упомянутые работы дают разнообразные условия существенной самосопряженности, однако, не охватывают общего случая, в частности, когда коэффициенты при промежуточных производных не подчинены никаким другим коэффициентам.

Известно [19], что в отличие от случая $n=1$ для произвольного $n \geqslant 2$ одной только положительности коэффициентов $p_k(x)$ не достаточно для существенной самосопряженности оператора (24). Например, существуют [60] вещественные числа $\alpha>6$ и $\beta>0$ такие, что минимальный оператор

$$l_1 y=(-x^\alpha y''')'''+\beta x^{\alpha-6} y \tag{25}$$

не самосопряжен в существенном в $L_2(1, +\infty)$. (Минимальным оператором в $L_2(1, +\infty)$ называем оператор l, определенный на множестве бесконечно гладких, финитных на бесконечности функций, удовлетворяющих самосопряженным краевым условиям в точке $x=1$.)

Вместе с тем [2] минимальный двучленный оператор

$$l_2 y=(-1)^n y^{(2n)}+(-1)^{n-k} a(x^\alpha y^{(n-k)})^{(n-k)}, \quad a>0, \quad \alpha>\frac{2k}{2n-1}$$

существенно самосопряжен в $L_2(1, +\infty)$.
(Кроме того, как следует из теоремы 1, минимальный оператор

$$l_3 y=(-1)^n y^{(2n)}+q(x) y, \quad q(x)>0$$

существенно самосопряжен.)

В качестве еще одного примера, самосопряженного в существенном операторе, рассмотрим в $L_2(\mathbf{R})$ двучленный оператор l, порождаемый на $C_0^\infty(\mathbf{R})$ дифференциальным выражением

$$ly=\frac{1}{\rho(x)} \sum_{j=0}^{1} (-1)^{n-j} \left(p_j(x) \left(\frac{y}{\rho(x)}\right)^{n-j}\right)^{(n-j)};$$

$$p_j(x)>0, \quad j=0,1, \quad \rho(x)>0 \tag{26}$$

с достаточно гладкими коэффициентами (гладкость коэффициентов здесь несущественна, достаточно потребовать $\rho\in L_{2,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, $\frac{1}{p_0}\in$ $\in L_{1,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, $p_1\in L_{1,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ и рассматривать минимальный квазидифференциальный оператор [3].

Для формулировки результата введем в рассмотрение величины:

$$A_j^+=\sup_{x>0}\left(\int_0^x \rho^2(t)\,dt\right)\left(\int_x^{+\infty}\frac{t^{2(n-j-1)}}{p_j(t)}\,dt\right),\quad j=0,1;$$

$$B^+=\sup_{x>0}\left[\left(\int_0^x \rho^2(t)\,dt\right)\int_{\tau_1(x)}^{+\infty}\frac{t^{2(n-2)}}{(\sqrt{p_1^*(t)})^2}\,dt\right]\cdot(\inf_{x>0}p_0(x))^{-1},$$

где $f^*(x)$ — функция М. Отелбаева

$$f^*(x)\ \inf_{d>0}\left\{d^{-1}:\ d^{-2n+1}\geqslant\int_{x-d}^{x+d}|f(t)|^2\,dt\right\},$$

$$\tau_1(x)=\max\left\{\frac{x}{2},\ x-4\sup_{t>0}\left[(\sqrt{p_1^*}(t))^{-1}\right]\right\}$$

и аналогичные величины A_j^-, B^- для отрицательной полуоси.

Теорема 4 [16]*. Пусть

$$\int_0^{+\infty}\rho^2(t)\,dt=\int_{-\infty}^0\rho^2(t)\,dt=\infty.$$

Тогда минимальный оператор (26) существенно самосопряжен в $L_2(\mathbf{R})$, если

$$\min(A_0^+,\ A_1^+,\ B^+)+\min(A_0^-,\ A_1^-,\ B^-)<\infty.$$

Теорема 4 показывает, что для существенной самосопряженности оператора (26) достаточно, чтобы один из коэффициентов $p_j(x)$ был «подперт» снизу достаточно быстро растущей на беско-

* В случае $p_0(x)\equiv1$, $n=2$ такой результат был получен в работах [23, 24], в случае $p_0(x)\equiv1$, $n=3$—К. Оспановым. Для оператора четвертого порядка вида (24) возможность произвольного поведения $p_1(x)$ при определенных ограничениях на $p_0(x)$ и $p_2(x)$ отмечена Девинацем [52].

нечности функцией при произвольном поведении другого коэффициента. Данный результат применительно к оператору (25) показывает, что минимальный оператор $l_4 y = -(x^{\alpha} y''')'''$, $\alpha > 6$ существенно самосопряжен в $L_2(1, +\infty)$. Можно также показать, что оператор умножения на $\beta x^{\alpha-6}$ ($\beta > 0$, $\alpha > 6$) бесконечно мал в смысле форм по сравнению с l_4. Кроме того, с помощью стандартных соображений теории возмущений из теоремы 4 следует, что минимальный оператор

$$l_5 y = -(x^a y''')''' + \beta x^b y, \quad a > 6,\ b > 0,\ \beta > 0$$

существенно самосопряжен в $L_2(1, +\infty)$, если $b < \frac{a-6}{2}$.

Полученные результаты относились к операторам с гладкими коэффициентами с единственной сингулярностью на бесконечности. Потребности квантовой механики вызвали необходимость исследовать существенную самосопряженность операторов Шредингера и Дирака с негладкими коэффициентами, имеющими особенность не только в бесконечности.

Существенная самосопряженность в $L_2(\mathbf{R}^n)$ оператора Шредингера с негладким вещественным потенциалом $q(x)$

$$Lu = -\Delta u + q(x) u, \quad q \in L_{2,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n) \tag{27}$$

$\left(\Delta u = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \text{ — оператор Лапласа}\right)$, определенного на $C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ [58], имеет место для произвольного $q(x) \geqslant 0$. Таким образом, задача получения условий существенной самосопряженности сводится к нахождению условий на отрицательную часть $q(x)$. Като получил также условия на отрицательную часть $q(x)$, достаточные для существенной самосопряженности оператора (27):

Теорема 5 [58]. Пусть выполнены следующие условия:

1) $q(x)$ — вещественна, $q(x) = q_1(x) + q_2(x)$, $q_i \in L_{2,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$, $i = 1, 2$, $q_1(x) \geqslant -\hat{q}(|x|)$, где $\hat{q}(r)$ — положительная монотонно неубывающая по $r > 0$ функция такая, что $\hat{q}(r) = o(r^2)$ при $r \to +\infty$;

2) существуют постоянные $k > 0$, $s > 0$ такие, что для любого $1 \leqslant r < \infty$

$$\int\limits_{|x| \leqslant r} |q_2(x)|^2 dx \leqslant K r^s;$$

3)

$$\int\limits_{|y| \leqslant r} |q_2(x-y)| \cdot |y|^{2-n} dy \to 0 \quad \text{при } r \to \infty$$

равномерно по $x \in \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 3$, $|y|^{2-n}$ нужно заметить на $\ln|y|$, если

$n=2$ и на 1, если $n=1$. (Если $n\geqslant 5$ 2) и 3) можно заменить на $q_2 \in L_{\frac{n}{2}}(\mathbf{R}^n)$.) Тогда минимальный оператор, определенный на $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ дифференциальным выражением (27), существенно самосопряжен.

Заменить глобальные ограничения 1) и 2) ограничениями (типа Р. С. Исмагилова) лишь на последовательности телесных слоев и ослабить локальное ограничение 3) позволяют теоремы локализации. Впервые такая теорема была доказана М. Отелбаевым [42] в задаче о максимальной диссипативности одномерного оператора Шредингера с операторнозначным потенциалом. Для многомерного оператора Шредингера и оператора Дирака в различных формах такие теоремы доказаны в работах [30, 31, 37, 40, 41, 51].

Для формулировки следующей теоремы напомним, что плотноопределенный линейный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве со скалярным произведением $<\cdot, \cdot>$, называется диссипативным, если $\operatorname{Im}<Au, u>\geqslant 0$ для всех $u\in D(A)$ ($D(A)$ — область определения оператора A). Диссипативный оператор называется максимально диссипативным, если оператор $A+iE$ (E — единичный оператор) имеет ограниченный обратный, определенный на всем пространстве.

Всякий симметрический оператор A, очевидно, диссипативен и замыкание оператора $(\overline{A})$ максимально диссипативно тогда и только тогда, когда A существенно самосопряжен.

Пусть далее $\{Q(x)\}_{x\in\mathbf{R}^n}$ — семейство максимально диссипативных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Норму в H обозначим $\|\cdot\|_H$, а скалярное произведение — $<\cdot, \cdot>_H$. $C_0^\infty(\mathbf{R}^n, H)$ — множество финитных, бесконечное число раз дифференцируемых в сильном смысле вектор-функций на $\mathbf{R}^n$ со значениями в H. $L_2(\mathbf{R}^n, H)$ — пространство измеримых по Бохнеру вектор-функций на $\mathbf{R}^n$ со значениями в H с конечной нормой

$$\|f\|_{L_2}=\left\{\int_{\mathbf{R}^n}\|f(x)\|_H^2 dx\right\}^{1/2}.$$

Скалярное произведение в $L_2(\mathbf{R}^n, H)$ есть

$$<f, g>_{L_2}=\int_{\mathbf{R}^n}<f(x), g(x)>_H dx,$$

$C_0^\infty(\mathbf{R}^n, Q, H)$ — множество вектор-функций $u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n, H)$ таких, что для любого $x\in\mathbf{R}^n$ $u(x)\in D(Q(x))$, $Q(\cdot)u(\cdot)\in L_2(\mathbf{R}^n, H)$. Для открытого множества $\Omega\subset\mathbf{R}^n$

$$C_0^\infty(\Omega, Q, H) = \{u \in C_0^\infty(\Omega, Q, H) : \operatorname{supp} u \subset \Omega\}.$$

Всюду далее $\chi_\Omega(x)$ — характеристическая функция множества Ω

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

На $Q(x)$ накладываются следующие условия 1—3 [30, 31]:

Условие 1. $C_0^\infty(\mathbf{R}^n, Q, H)$ плотно в $L_2(\mathbf{R}^n, H)$. При выполнении условия 1 определим в $L_2(\mathbf{R}^n, H)$ минимальный оператор

$$Lu = -\Delta u + Q(x)u \tag{28}$$

на множестве $C_0^\infty(\mathbf{R}^n, Q, H)$.

Условие 2. Для любой точки $\eta \in \mathbf{R}^n$ найдется ограниченная окрестность $U_\eta \ni \eta$ и число $0 < \varepsilon_\eta < 1$ такие, что:

а) замыкание минимального оператора

$$L_\eta u = -\Delta u + \chi_{U_\eta}(x) Q(x) u;$$

б) для любого $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n, Q, H)$

$$\operatorname{Re} \langle -(1-\varepsilon_\eta)\Delta u + \chi_{U_\eta}(x) Q(x) u, u \rangle_{L_2} + \operatorname{Im} \langle \chi_{U_\eta}(x) Q(x) u, u \rangle_{L_2} \geqslant$$
$$\geqslant -\frac{1}{\varepsilon} \|u\|_{L_2}^2. \tag{29}$$

Условие 3. Существует последовательность сферических слоев

$$\Phi_k = \{x \in \mathbf{R}^n : r_k - \delta_k < |x| < r_k + \delta_k\}, \quad \delta_k < \frac{1}{2}, \quad r_k \to +\infty$$

чисел $\gamma_k > 0$, а также $0 < \varepsilon < 1$ такие, что для всех $k = 1, 2, \ldots$ и любой функции $g \in C_0^\infty(\Phi_k, Q, H)$ (т. е. такой, что $\operatorname{supp} g \subset \Phi_k$)

$$\operatorname{Re} \langle -(1-\varepsilon)\Delta g + Q(x) g, g \rangle_{L_2} + \operatorname{Im} \langle Q(x) g, g \rangle_{L_2} \geqslant -\gamma_k \|g\|_{L_2}^2,$$

причем

$$2 \leqslant \gamma_k \leqslant \text{const} \cdot \delta_k^{-2}, \quad k = 1, 2, \ldots \text{ и } \sum_{k=1}^\infty \delta_k^2 = \infty.$$

Теорема 6 [30, 31]. При выполнении условий 1—3 замыкание минимального оператора (28) максимально диссипативно.

Замечание 1. Условие 3 в теореме 6 можно заменить нижеследующим условием 4 типа второй теоремы Р. С. Исмагилова.

Условие 4*. Для слоев Φ_k, чисел $\gamma_k>0$ и $0<\varepsilon<1$ из условия 3

$$\operatorname{Re}<-(1-\varepsilon)\Delta g+Q(x)g,\ g>_{L_2}\geqslant\gamma_k\|g\|^2_{L_2},\quad k=1,2,\ldots$$

для любой $g\in C_0^\infty\ (\Phi_k Q,\ H)$ (т. е. $\operatorname{supp} g\subset\Phi_k$), причем ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\delta_k^3\gamma_k^{1/2}$ расходится.

Замечание 2. В условиях 3 и 4 сферические слои Φ_k можно заменить телесными слоями общего вида $\Phi_k'=B_k\setminus\bar{A}_k$, где $A_k\subset B_k$ — открытые подмножества $\mathbf{R}^n$ такие, что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k=\mathbf{R}^n$, $A_k\subset A_{k+1}$ «толщина» слоя Φ_k', $\delta_k=\inf\limits_{\substack{x\in A_k\\ y\notin B_k}}|y-x|$ по условию должна быть положительна.

В случае, когда $\{Q(x)\}_{x\in\mathbf{R}^n}$ — семейство самосопряженных операторов, теорема 6 превращается в следующую теорему:

Теорема 7 [30, 31]. При выполнении условий 1—3 (в условии 2а следует читать «минимальный оператор L_η существенно самосопряжен») минимальный оператор (28) существенно самосопряжен.

С учетом замечания 1 вместо условия 3 можно наложить условие 4.

Замечание 3. В случае скалярного вещественного потенциала $q(x)$ Ю. Б. Орочко [40] показал, что для полуограниченного снизу оператора (27), если все множества U_η в условии 2 есть шары одного и того же радиуса $d>0$, можно в (29) положить $\varepsilon_\eta=0$.

Условие 2 выполняется, например, если для каждой точки $\eta\in\mathbf{R}^n$ найдется ограниченная окрестность $U_\eta\ni\eta$, число $\lambda_\eta\geqslant 1$ и самосопряженный ограниченный оператор A_η в H с нулевым ядром такие, что область значений $\operatorname{Ran}(A_\eta)\subset D(Q(x))$ для $\forall x\in U_\eta$ [42]**:

1) $\operatorname{Re}<(Q(x)+\lambda_\eta E)y,\ y>_H\geqslant\|y\|^2_H$ для $\forall x\in U_\eta$, $\forall y\in D(Q(x))$;

2) $\sup\limits_{x\in U_\eta}\|Q(x)A_\eta\|_{H\to H}<\infty$;

3) $\operatorname{Re}<(Q(x+\lambda_\eta E)A_\eta^2 y,\ y>_H>0$, $\forall x\in U_\eta$; $\forall y\in H$, $y\neq 0$.

---

* Для операторнозначного потенциала указано [18] в задаче о совпадении минимального и максимального операторов. Для скалярного вещественного потенциала $q(x)$ единообразное доказательство существенной самосопряженности как при условии 3, так и при условии 4 дано в [39, 40].

** Методы исследования существенной самосопряженности операторов Шредингера с операторным потенциалом описаны в работах [7, 10, 11, 14, 15, 27].

Для скалярного оператора Шредингера (27) с вещественным потенциалом в $L_2(\mathbf{R}^n)$ условие 1 выполняется автоматически и как следствие теоремы 6 получается достаточный признак существенной самосопряженности.

Теорема 8 [30, 31]. Пусть выполнено условие 3 теоремы 6 (где вместо $C_0^\infty(\Phi_k, Q, H)$ просто $C_0^\infty(\Phi_k)$) и пусть для $n\geqslant 4$ (при $n<4$ нижеследующее условие не нужно) $q_-(x)=\frac{1}{2}(|q(x)|-q(x))$ удовлетворяет требованию: у каждой точки $\eta\in\mathbf{R}^n$ существует ограниченная окрестность $U_\eta\ni\eta$ такая, что

$$\sup_{x\in U_\eta}\int_{U_\eta} q_-(y)\,|y-x|^{2-n}dy<\delta,$$

где δ — некоторое зависящее только от n положительное число (возможная величина δ указана в теореме 9).

Тогда минимальный оператор (27) существенно самосопряжен.

В случае потенциала $q\in L_{1,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ теоремы локализации удобно формулировать в терминах совпадения замыкания минимального и максимального операторов. Для симметрических операторов это также означает существенную самосопряженность минимального оператора.

Рассмотрим максимальный оператор [59] $L_{\max}$, порожденный в $L_2(\mathbf{R}^n)$ дифференциальным выражением $\tau y=-\Delta y+q(x)y$, $q\in L_{1,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ ($q(x)$ — комплекснозначная функция) на области определения

$$D(L_{\max})=\{u\in L_2(\mathbf{R}^n):(qu)\in L_{1,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n),\ \tau u\in L_2(\mathbf{R}^n)\}$$

(τu понимается в обобщенном смысле).

Введем также минимальный оператор [62] $L_{\min}$, порожденный дифференциальным выражением на области определения

$$D(L_{\min})=\{u\in D(L_{\max}):u \text{ — финитна}\}.$$

Теорема 9 [17]. При выполнении нижеперечисленных условий 5, 6 минимальный оператор $L_{\min}$ плотно определен, замыкаем и его замыкание $\bar{L}_{\min}=L_{\max}$. В случае вещественного $q(x)$ оператор $L_{\min}$ при выполнении условий 5б, 6 существенно самосопряжен.

Условие 5. У каждой точки $\eta\in\mathbf{R}^n$ найдется ограниченная окрестность $U_\eta\ni\eta$ такая, что:

а) квадратичная форма

$$h_\eta[\varphi]=\int_{\mathbf{R}^n}(-\Delta\varphi+\chi_{U_\eta}(x)q(x)\varphi)\bar{\varphi}dx$$

секториальна на $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, т. е. множество значений $h_\eta[\varphi]$ для всех $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ есть подмножество сектора $\{z\in C:|\arg(z-\gamma_\eta)|\leqslant\Theta_\eta\}$, $0\leqslant\Theta_\eta<\frac{\pi}{2}$, $\gamma_\eta\in\mathbf{R}$ (при разных η, γ_η и Θ_η могут быть различны);

б) $(\operatorname{Re}q)_-(x)=\frac{1}{2}(|\operatorname{Re}q(x)|-\operatorname{Re}q(x))$ удовлетворяет условию

$$\sup_{x\in U_\eta}\int\limits_{U_\eta}|x-y|^{2-n}(\operatorname{Re}q)_-(y)\,dy<\delta,\quad n\geqslant3, \tag{30}$$

где $\delta=\dfrac{4\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}$, $n\geqslant3$, $\Gamma(a)$ — гамма-функция; при $n=2$ $|x-y|$ следует заменить на $\log|x-y|$, при $n=1$ это условие не нужно.

При $n\geqslant5$ (30) можно заменить следующим условием *:

$$\|\chi_{U_\eta}(\operatorname{Re}q)_-\|_{L_{\frac{n}{2},w}}<\frac{n(n-4)}{4}s_n^{2/n},\quad n\geqslant5,$$

где s_n — объем единичного шара в $\mathbf{R}^n$, слабая L_p — норма f.

Условие 6. Существует последовательность телесных слоев Φ_k «толщины» δ_k (см. замечание 2 к теореме 6), уходящих в бесконечность, числа $\gamma_k>0$ и $0<\varepsilon<1$ такие, что для всех функций $\varphi\in C_0^\infty(\varphi_k)$ (т. е. $\operatorname{supp}\varphi\subset\Phi_k$) выполняется одно из условий а) или б):

$$\text{а)}\quad |<-\Delta\varphi+q(x)\varphi,\varphi>_{L_2}|\geqslant<-\varepsilon\Delta\varphi-\gamma_k\varphi,\varphi>_{L_2},$$

причем $2\leqslant\gamma_k\leqslant\operatorname{const}\delta_k^{-2}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\delta_k^2=\infty$;

$$\text{б)}\quad \operatorname{Re}<-(1-\varepsilon)\Delta\varphi+q(x)\varphi,\varphi>_{L_2}\geqslant\gamma_k\|\varphi\|_{L_2}^2,$$

причем $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\delta_k^3\gamma_k^{1/2}=\infty$.

---

* Для вещественного потенциала $q(x)$ глобальное условие на отрицательную часть $q_-(x)$

$$\|q_-(x)\|_{L_{\frac{n}{2},\text{weak}}}<\frac{n(n-4)}{4}s_n^{2/n}$$

дано в работе [63].

Теорема 9 допускает у $(\operatorname{Re} q)_-(x)$ наличие сгущающихся при $|x|\to\infty$ точечных сингулярностей типа

$$|\chi_{U_\eta}(x) q_-(x) < \frac{n(n-4)}{4}|x-\eta|^{-2}, \quad n\geqslant 5.$$

В случае вещественного потенциала теоремы локализации допускают [40, 41] в условии 6 $\varepsilon=0$ при более жестких ограничениях на $q_-(x)$:

$$q_-(x)\in L_{p,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n),$$

где $p=\frac{n}{2}$ при $n\geqslant 5$; $p>\frac{n}{2}$, $p\geqslant 1$ при $n<5$.

Для операторов общего вида

$$-\sum_{\substack{k=1\\ j=1}}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\right)+q(x)$$

теоремы локализации получены Ю. Б. Орочко [40].

Для операторов первого порядка (типа Дирака) теоремы локализации формулируются проще.

Рассмотрим в $L_2(\mathbf{R}^n, H)$ минимальный оператор L, определенный на $C_0^\infty(\mathbf{R}^n, Q, H)$ дифференциальным выражением

$$Lu=Bu+Q(x)u, \tag{31}$$

где

$$Bu=\sum_{l=1}^{n} iB_l\frac{\partial}{\partial t_l}u, \tag{32}$$

$\{B_l\}_{l=1}^n$ — семейство ограниченных самосопряженных операторов в H, $\{Q(x)\}_{x\in\mathbf{R}^n}$ — семейство максимально диссипативных операторов в H.

Теорема 10 [30, 31]. Пусть выполнено условие 1, а также условие 7.

Условие 7. Для каждой точки $\eta\in\mathbf{R}^n$ найдется ограниченная окрестность $U_\eta\ni\eta$ такая, что замыкание минимального оператора

$$L_\eta u=Bu+\chi_{U_\eta}(x)Q(x)u \tag{33}$$

максимально диссипативно.

Тогда замыкание минимального оператора (31), (32) максимально диссипативно.

В случае, когда $\{Q(x)\}_{x\in\mathbf{R}^n}$ — семейство самосопряженных операторов в H из теоремы 10 получается признак существенной самосопряженности:

Теорема 11 [30, 31]. Пусть выполнено условие 8.

Условие 8. Для каждой точки $\eta \in \mathbf{R}^n$ найдется ограниченная окрестность $U_\eta \ni \eta$ такая, что минимальный оператор (33) существенно самосопряжен.

Тогда минимальный оператор (31), (32) существенно самосопряжен. Как следствие теоремы 11 получается

Теорема 12 [30, 31]*. Если $\|Q(x)\|_{H\to H}$ — локально ограниченная функция, выполнено условие 1 и оператор (32) существенно самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbf{R}^n, Q, H)$, то минимальный оператор (31) существенно самосопряжен.

Назовем потенциал $\Theta(x)$ «хорошим», если минимальный оператор $Bu+\Theta(x)u$ существенно самосопряжен. В условии 8 требуется наличие «хорошего» нулевого продолжения $Q(x)$ за пределы множества U_η, т. е. наличие «хорошего» потенциала

$$\Theta_\eta(x)=\chi_{U_\eta}(x)\,Q(x)=\begin{cases} Q(x), & x\in U_\eta,\\ 0, & x\notin U_\eta.\end{cases}$$

Вместо нулевого продолжения в условии 8 можно требовать наличия произвольного «хорошего» продолжения $\Theta(x)$, т. е. такого «хорошего» потенциала $\Theta_\eta(x)$, что $\Theta_\eta(x)=Q(x)$ при $x\in U_\eta$. В этом случае условие 8 становится необходимым и достаточным для существенной самосопряженности оператора (31). Необходимость условия 8 следует из того, что если оператор (31) существенно самосопряжен, то можно взять просто $\Theta_\eta(x)\equiv Q(x)$. В силу удобства для приложений именно нулевого продолжения в условии 8 возникает вопрос, насколько наличие «хорошего» нулевого продолжения близко к необходимому условию существенной самосопряженности минимального оператора (35).

Теорема 13 [17]**. Пусть минимальный оператор (31) существенно самосопряжен, Ω — открытое, ограниченное подмножество $\mathbf{R}^n$, Ω_ε — «приграничный слой» $\Omega_\varepsilon=\{x\in\Omega:\ \inf\limits_{y\notin\Omega}|y-x|<\varepsilon\}$.

Тогда если минимальный оператор $B+\chi_{\Omega_\varepsilon}(x)\,Q(x)$ существенно самосопряжен, то минимальный оператор $B+\chi_\Omega(x)\,Q(x)$ также существенно самосопряжен.

Предположим теперь, что оператор B существенно самосопря-

---

* Такой факт для одномерной системы Дирака был впервые указан Б. М. Левитаном [32] и В. В. Мартыновым [35].

** Там же доказан аналог теорем 10 и 13 в задаче о совпадении минимальных и максимальных операторов (31), (32) для переменных операторных коэффициентов $B_l(x)$, при этом от $B_l(x)$ и $Q(x)$ не требуется ни самосопряженности, ни диссипативности.

жен на $C_0^\infty(\mathbf{R}^n, Q, H)$ и оператор $(B+iE)^{-1}$ интегральный с операторным ядром $B(x, y)$, удовлетворяющим при $x\neq y$ оценке

$$\|B(x, y)\|_{H\to H}\leqslant\text{const}\cdot\begin{cases}(|x-y|+1)^{-n-1}\cdot|x-y|^{-n+1} & \text{при } n>1,\\ (|x-y|+1)^{-2}\cdot|x-y|^{-\Theta}, \ 0<\Theta<\frac{1}{2} & \\ \qquad\qquad \text{при } n=1. & \end{cases}$$

Этим условиям, когда H четырехмерно, удовлетворяет дифференциальная часть обычного оператора Дирака.

Обозначим $(R_m f)(x)$ $(0<m<n)$ и $R_{m,p}(k)$ $(0<mp<n)$ соответственно потенциал Рисса порядка m и емкость порядка m степени p компактного множества $K\subset\mathbf{R}^n$:

$$(R_m f)(x)=\int\limits_{\mathbf{R}^n}|x-y|^{m-n}f(y)\,dy,$$

$$R_{m,p}(k)=\{\inf\|f\|_p^p: f\in L_p(\mathbf{R}^n),\ \ f(x)\geqslant 0 \text{ на } \mathbf{R}^n,\ \ (R_m f)(x)\geqslant 1 \text{ на } K\}.$$

С помощью емкостных оценок Мазьи — Адамса и теоремы 11 получается

Теорема 14 [30, 31]. Пусть $n>2$, $\{Q(x)\}$ — семейство самосопряженных операторов, выполнено условие 1 и вышеуказанные предположения относительно B. Пусть, кроме того, у каждой точки $\eta\in\mathbf{R}^n$ найдется такая окрестность $U_\eta\ni\eta$, что для любого компактного множества $K\subset\mathbf{R}^n$

$$\int\limits_K\chi_{U_\eta}(x)\|Q(x)\|_H^2dx<\varepsilon R_{1,2}(k), \tag{34}$$

где ε — некоторое малое число, зависящее только от n. Тогда минимальный оператор (31) существенно самосопряжен. Условие (34) в теореме 14 можно заменить следующим условием:

$$\int\limits_K\int\limits_K|y-x|^{2-n}\|Q(x)\|^2\cdot\|Q(y)\|^2dx\,dy\leqslant\varepsilon\int\limits_K\|Q(x)\|^2dx$$

для любого компактного множества $K\subseteq\overline{U}_\eta$.

Для оператора Дирака в $[L_2(\mathbf{R}^3)]^4$

$$\sum_{j=1}^{3}(-i)\alpha_j\frac{\partial}{\partial t_j}+\alpha_0+q(x),\quad q\in L_{2,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^3), \tag{35}$$

где α_j, $j=\overline{0,3}$, — (4×4) — матрицы Дирака, удовлетворяющие коммутационным соотношениям $\alpha_j\alpha_k+\alpha_k\alpha_j=2\delta_{jk}E$, $k,j=\overline{0,3}$, теорема 11 позволяет получить следующий результат:

Теорема 15 [30, 31]. Пусть для каждого $\eta\in\mathbf{R}^n$ существует число ε_η такое, что

$$\sup_{0<s<\varepsilon_\eta} s^{-1}\int\limits_0^s q_\eta^2(t)\,t^2dt<\frac{3}{4},$$

где $q_\eta(t)=\sup\{|q(x)|:|x-\eta|=t\}$. Тогда минимальный оператор (35), определенный на $[C_0^\infty(\mathbf{R}^3)]^4$, существенно самосопряжен.

В силу теорем локализации представляет интерес изучение условий существенной самосопряженности оператора Шредингера с финитным потенциалом.

Рассмотрим в $L_2(\mathbf{R}^n)$ минимальный оператор L, порожденный на $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ дифференциальным выражением

$$Lu=(-\Delta)^m u+q(x)u, \tag{36}$$

$q(x)$ — финитная функция; $\operatorname{Im} q(x)\equiv 0$; $q\in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$. В случае $n<4m$ пространство Соболева W_2^{2m} вложено в пространство непрерывных функций и нетрудно показать, что L существенно самосопряжен. В случае $n>4m$ имеет место

Теорема 16 [30, 31]. Если $n>4m$ и

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{k\in\{K\}}\int\limits_{k\cap\{x:\,|q(x)|\}>N}|q(x)|^2dx\cdot R_{2m,2}^{-1}(k)=0,$$

где $\{k\}$ — множество всех компактных подмножеств $\mathbf{R}^n$, то минимальный оператор (36) существенно самосопряжен.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александрян Р. А., Березанский Ю. М., Ильин В. А., Костюченко А. Г.* Некоторые вопросы спектральной теории для уравнений с частными производными // Диф. уравн. с части. производными: Тр. симп., посв. 60-летию акад. С. Л. Соболева. М.: Наука, 1970. С. 3—32.

2. *Аникеева Л. И.* Об индексе дефекта одного дифференциального оператора // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, вып. 1. С. 179—180.

3. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Харьков: Вища школа, 1977. Т. 1. 316 с., 1978. Т. 2. 288 с.

4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965. 798 с.

5. *Березанский Ю. М., Самойленко В. Г.* Самосопряженность дифференциальных операторов с конечным и бесконечным числом переменных и эволюционные уравнения // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, вып. 5. С. 3—50.

6. *Березин Ф. А., Шубин М. А.* Уравнение Шредингера. М.: Изд-во МГУ, 1983. 392 с.

7. *Брук В. М.* О максимальной диссипативности дифференциального оператора высокого порядка с неограниченным операторным коэффициентом // Диф. уравнения. 1984. Т. 20, № 11. С. 1986—1989.

8. *Бруснецев А. Г., Рофе-Бекетов Ф. С.* Самосопряженность эллиптических операторов высокого порядка // Функц. анализ и прил. 1973. Т. 7, № 4. С. 78—79.

9. *Бруснецев А. Г., Рофе-Бекетов Ф. С.* Условия самосопряженности сильно эллиптических систем произвольного порядка // Мат. сб. 1974. Т. 195(137). № 1. С. 108—129.

10. *Вайнерман Л. И., Горбачук М. Л.* О самосопряженности полуограниченных абстрактных дифференциальных операторов // Укр. мат. журн. 1973. Т. 25, № 6. С. 811—815.

11. *Гехтман М. М.* О самосопряженности абстрактных дифференциальных операторов // Мат. заметки. 1969. Т. 6, № 1. С. 65—72.

12. *Гимадисламов М. Г.* Об условиях самосопряженности дифференциального оператора высшего порядка с операторным коэффициентом // Мат. заметки. 1969. Т. 5, № 6. С. 697—703.

13. *Глазман И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматгиз, 1963. 339 с.

14. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Некоторые вопросы спектральной теории дифференциальных уравнений эллиптического типа в пространстве вектор-функций // Укр. мат. журн. 1976. Т. 28, № 6. С. 323—335.

15. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Некоторые вопросы спектральной теории дифференциальных уравнений эллиптического типа в пространстве вектор-функций на конечном интервале // Укр. мат. журн. 1976. Т. 28, № 1.

16. *Гриншпун Э. З.* Об ограниченной обратимости, существенной самосопряженности и разделимости некоторых обыкновенных дифференциальных операторов // Деп. в ВИНИТИ 22 мая 1984, № 3304—84. 42 с.

17. *Гриншпун Э. З.* О совпадении минимального и максимального операторов Шредингера с сильно сингулярным потенциалом // Деп. в ВИНИТИ 21 июня 1984, № 4212—84. 23 с.

18. *Гриншпун Э. З.* О совпадении минимальных и максимальных операторов I и II порядка с операторным потенциалом // Деп. в ВИНИТИ 8 мая 1984, № 2968—84. 49 с.

19. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1966. 1063 с.

20. *Иоргенс К., Вайдман И.* Спектральные свойства гамильтоновых операторов. М.: Мир, 1976. 152 с.

21. *Исмагилов Р. С.* Об условиях самосопряженности дифференциального оператора высшего порядка // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142, № 6. С. 1239—1242.

22. *Исмагилов Р. С.* О самосопряженности оператора Штурма — Лиувилля // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, № 5. С. 161—166.

23. *Касымов Е. А.* Достаточное условие существенной самосопряженности дифференциального оператора // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1980. № 3. С. 40—44.

24. *Касымов Е. А., Отелбаев М.* О существенной самосопряженности одного дифференциального оператора // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1979. № 1. С. 20—23.

25. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.

26. *Костюченко А. Г., Саргсян И. С.* Распределение собственных значений.

Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1979. 399 с.
27. *Кочубей А. Н.* О самосопряженности и характере спектра некоторых классов абстрактных диф. операторов // Укр. мат. журн. 1973. Т. 25, № 6. С. 811—815.
28. *Лаптев С. А.* О замыкании в метрике обобщенного интеграла Дирихле // Диф. уравнения. 1971. Т. 7, № 4. С. 727—736.
29. *Левитан Б. М.* Об одной теореме Титчмарша и Сирса // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, вып. 4(100). С. 175—178.
30. *Левитан Б. М., Отелбаев М.* О существенной самосопряженности операторов Шредингера и Дирака // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235, № 4. С. 768—771.
31. *Левитан Б. М., Отелбаев М.* Об условиях самосопряженности операторов Шредингера и Дирака // Тр. Моск. мат. об-ва. 1981. Т. 42. С. 143—159.
32. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1970. 672 с.
33. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 415 с.
34. *Мазья В. Г.* О емкостных оценках сильного типа для «дробных» норм // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1977. Т. 70. С. 161—168.
35. *Мартынов В. В.* Прямые методы качественного спектрального анализа несамосопряженной системы дифференциальных уравнений первого порядка // I. Диф. уравнения. 1968. Т. 4, № 8. С. 1494—1508; II Диф. уравнения. 1968. Т. 4, № 12. С. 2243—2256.
36. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
37. *Орочко Ю. Б.* Замечание о существенной самосопряженности оператора Шредингера с сингулярным потенциалом // Мат. заметки. 1976. Т. 20, № 4. С. 571—580.
38. *Орочко Ю. Б.* Конечная скорость распространения и существенная самосопряженность некоторых дифференциальных операторов // Функц. анализ и прил. 1979. Т. 13, вып. 3. С. 95—96.
39. *Орочко Ю. Б.* Локальная конечная скорость распространения гиперболического уравнения в задаче о самосопряженности степеней эллиптического дифференциального оператора второго порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47, № 2. С. 298—314.
40. *Орочко Ю. Б.* К теории самосопряженных операторов, порожденных сильно сингулярными выражениями второго порядка дивергентного вида // Функц. анализ и прил. 1982. Т. 16, вып. 3. С. 80—81.
41. *Орочко Ю. Б.* Самосопряженные реализации дифференциальных выражений типа Шредингера с сильно сингулярным потенциалом // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, вып. 5. С. 137—138.
42. *Отелбаев М.* Об условиях самосопряженности оператора Шредингера с операторным потенциалом // Укр. мат. журн. 1976. Т. 28, № 6. С. 763—771.
43. *Повзнер А. Я.* О разложении произвольных функций в терминах собственных функций оператора $-\Delta u+cu$ // Мат. сб. 1953. Т. 32(74). С. 109—156.
44. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978. 395 с.
45. *Рофе-Бекетов Ф. С.* О неполуограниченных дифференциальных операторах. Теория функций, функц. анализ и прил. Харьков, 1966. Вып. 2. С. 178—184.
46. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Условия самосопряженности оператора Шредингера // Мат. заметки. 1970. Т. 8, вып. 6. С. 741—751.
47. *Рофе-Бекетов Ф. С.* О позитивных дифференциальных операторах // Препринт ФТИНТ АН УССР 23—83. Харьков: ФТИНТ АН УССР. 1983. 21 с.

48. *Уральцева Н. Н.* О несамосопряженности в $L_2(R^n)$ эллиптического оператора с быстро растущими коэффициентами // Зап. научи. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1969. Т. 14. С. 288—294.

49. *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978. 279 с.

50. *Adams D. R.* On the existence of capacity strong type estimates in R^n // Arkiv mat. 1976. N 14. P. 125—140.

51. *Chernoff P. R.* Scrödinger and Dirac operators with singular potentials and hyperbolic equations // Paaf. J. Math. 1977. V. 72, N 2. P. 361—382.

52. *Devinatz A.* Positive definite fourth order differential operators // J. London Math. Soc. 1975. 2 ser. V. 10, N 3. P. 309—319.

53 *Eastham M. S. P., Evans W. D., Mcleod I. B.* Essential selfadjoiness of Schrodinger operators // Arch. Pat. Mech. Anal. 1976. V. 60, N 1. P. 185—204.

54. *Evans W. D., Zettl A.* Interval limit-point criteria for differential expression and their powers // J. London Math. Soc. 1977. V. 15, N 1. P. 119—133.

55. *Hartmah Ph.* The number of L_2-solutions of $-x''+q(t)x=0$ // Amer. J. Math. 1951. N 3,73. P. 635—645.

56. *Kalf H.* Gauss's theorem and the selfadjointness of Schrodinger operators // Ask. Mat. 1981. V. 18, N 1. P. 19—47.

57. *Kalf H., Scmincke U.-W., Walter J., Wust R.* On the spectral theory of Schrödinger and Diral operators with strongly singular potentials // Lect. Notes Math. 1975. V. 448. P. 182—226.

58. *Kato T.* Schodinger operators with singular potentials // Isr. J. Math. 1972. V. 13, N 1—2. P. 135—148.

59. *Kato T.* A second look at the essential selfadjointness of Schodinder operators // Physical Reality and Mathematical Description. Dordrecht, 1974. P. 193—201.

60. *Kauffman R. M.* On the limit-n classification of ordinary differential operators with positive coefficients // Lect. Notes Math. 1976. V. 546. P. 246—260.

61. *Keller R. G.* Essential selfadjointness of differential operators // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1979. V. A82, N 3—4. P. 305—344.

62. *Knowles I.* On the existence of minimal operators for Scrodinger-type differential expressions // Math. Ann. 1978. V. 223. P. 221—227.

63. *Kovalenko V. F., Perelmuter M. A., Semenov Ju. A.* Schrodinger operators with $L_W^{e12}(R^{e'})$-potentials // J. Math. Phys. 1981. V. 22(50). P. 1033—1044.

64. *Kurss H., Meyer G.* Limit — point criteria for real symmetric differential expressions for order $2n$ // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1981. V. A88. N 1, 2. P. 203—207.

65. *Orocko Yu.* Self-adjointness of the minimal Schrodinger operator with potential belonging to $L_{1,\,\mathrm{loc}}$ // Repts Math. Phys. 1979. V. 15, N 2. P. 163—172.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Научное издание

Отелбаев Мухтарбай Отелбаевич

ОЦЕНКИ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Утверждено к печати Ученым советом Института математики и механики Академии наук Казахской ССР

Рецензенты: кандидаты физико-математических наук К. Т. Мынбаев, Ш. Смагулов

Редактор *Г. И. Патлина*
Художественный редактор *В. А. Ващенко*
Оформление художника *В. Н. Афуксениди*
Технический редактор *Е. М. Тахметова*
Корректор *Г. А. Вылегжанина*

ИБ № 2994

Сдано в набор 26.12.89. Подписано в печать 26.11.90.
Формат 60×84¹/₁₆. Бум. тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать.
Усл. п. л. 11,16. Усл. кр.-отт. 11,33. Уч.-изд. л. 11,67.
Тираж 800. Заказ 14.
Цена 2 р. 30 к.

Издательство «Гылым»
480100, Алма-Ата, ул. Пушкина, 111/113
Типография издательства «Гылым»
480021, Алма-Ата, ул. Шевченко, 28